CONSPECTUS ARITHMETICAE GENERALIS.

SECTIO III.

PRIMAE LINEAE THEORIAE AEQUATIONUM.

§. 38.

Ramorum in quos arbor (pag. 205) dividitur, is etiam quadamtenus explicandus est, ubi pro dato valore α functionis valor variabilis in ea quis sit, quæritur; vocatur hæc *theoria aequationum*.

Si ex. gr. quæratur, quodnam a sit ipsi x substituendum, ut sit

$$f(x) = x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots + tx^0 = 0.$$

1. Si m integer positivus sit, et in quovis termino sequenti exponens ipsius x unitate decrescat, usque ad $x^0 = 1$, atque p, q, ... constantes sint, dicitur æquatio gradus m-ti; atque si $f(x)$ ad formam

$$x^m + px^{m-1} + \ldots + tx^0$$

reductum sit, *aequatio ordinata* vocatur; a vero dicitur *radix aequationis*. Nempe coefficientium p, q, ... possunt esse quilibet, imo omnes $= 0$; adeoque pro

$$x^m = 0$$

erit

$$x = \sqrt[m]{0} = 0,$$

et pro

$$x^m + t = 0$$

erit

$$x = \sqrt[m]{-t};$$

atque nomen radicis ad alios casus quoque hinc extenditur, quamvis proprie pro his tantum casibus reipsa locum habeat.

2. Dicitur etiam *aequatio* superior *determinata*; quum mox pateat, ipsius x, si coefficientium nullus sit signo radicali affectus, aut cuiusvis unus certus valor accipiatur, valores plane numero m dari, inter quos tamen certi, imo etiam omnes æquales esse possunt, qui functionem $=0$ reddant, quilibet eorum substituatur ipsi x. Imo si etiam plures æquationes totidemque variabiles, *incognitae* dictæ et literis pariter alphabeti ultimis designatæ fuerint, *determinata aequatio* dicitur; nempe cuilibet incognitæ valores duntaxat numero certo substitui possunt, qui æquationibus satisfaciant.

Si vero pauciores sint æquationes, quam incognitæ, *aequatio indeterminata* dicitur. Ex. gr. pro

$$x+y=0$$

est

$$x=-y,$$

et innumeri valores ipsi x substitui possunt, qui functionem ad 0 redigant. Possunt tamen etiam in æquationibus indeterminatis, ut infra patebit, valores incognitæ certis conditionibus ita restringi, ut valores aut certo tantum numero dentur aut nullus plane sit.

Potest etiam æquatio *plus quam determinata* dicta dari, si nempe plures æquationes quam incognitæ sint; et tum proprie conditioni impossibili satisfieri nequit. Nempe hic, si dicatur æquationes numero n dari, tales intelligantur, quarum nulla per reliquas ponitur; ex. gr. hoc sensu

$$ab=x, \text{ et } \frac{x}{a}=b$$

non duæ æquationes sunt, sed unica est; duæ tantum sunt *identicae* dictæ. Ex. gr. si detur

$$x-a=0,$$

et

$$x-\frac{a}{b}=0,$$

quidcunque sit a præter 0 aut b præter 1, conditio impossibilis est.

3. Notandum vero est, æquationem aut aliunde dari, ut *resolvatur*, id est radix eius reperiatur, aut certa tantum data exhiberi, e quibus sagacitas æquationem condat; cuius regulæ non dantur, nisi quod perspiciatur, quid sit quærendum, et incognitarum numerus ad minimum redigatur, atque illæ literis ultimis denominentur, et æquatio e datis statuta ordinetur; ac tum per regulas dicendas radix eius quæratur.

4. Notandum etiam est, non quamvis æquationis radicem petito satisfacere. Nempe ex. gr. si puella dixerit, eius ætatem talem x esse, quæ per matris, quæ illam 40-mo ætatis suæ anno peperit, ætatem multiplicata, Methusalemi ætatem exæquet; minime dixit, ætatem suam cuilibet x æqualem esse, quod tale est, ut $x(40+x)=969$; nempe æquationis huius etiam -57 radix est; sed ætas puellæ est talis, ut alicui radicum huius æquationis sit æqualis (pag. 107); tunc tantum est incognita quæsita cuilibet radici æquationis certo æqualis, quum unica tantum radix datur, uti in æquatione gradus primi.

5. Quod ordinationem æquationis attinet, si x nullo signo radicali subsit, prius per quemvis divisorem, in quo x adest, æquatio multiplicetur, id est tam functio ipsius x, quam o ad dextram; et tum colligantur e tota functione ipsius x, quæ $=0$ ponitur, omnes termini, in quibus x ad eundem exponentem elevatum est, et summa coefficientium tanquam coefficiens potentiæ illius ipsi præfigatur; atque si potentia summa ipsius x coefficiente gaudeat, per hunc dividatur æquatio. Et manifesto reducetur æquatio ad formam superiorem; atque si huic æquationi satisfiat per $x=a$, idem a et functionem priorem ad o rediget. (pag. 12).

Si vero x signo radicali subsit, casus simpliciores sunt sequentes.

Si exponens aliquis aut plures fracti sint, reducantur potentiæ omnes ipsius x ad denominatorem communem, sit is n; et fiet pro potentia priore ipsius x in quovis termino, $x^{\frac{1}{n}}$ elevatum ad exponentem numeratori exponentis novi æqualem.

Ex. gr.

$$x^{\frac{2}{3}}+px^{\frac{1}{2}}+qx^{0}=\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^{4}+p\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^{3}+q\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^{0}$$

pro $x^{\frac{1}{6}} = y$ est

$$= y^4 + py^3 + q,$$

et si valor α reperiatur, quo ipsi y substituto functio posterior ad o redigatur, erit propter

$$y = \sqrt[6]{x},$$

adeoque

$$y^6 = x,$$

valor α^6 in functione priore ipsi x substituendus, ut functio ad o redigatur; nam

$$y^4 = (\sqrt[6]{x})^4 = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}},$$

et ita de reliquis terminis patet.

At si potentia ipsius x per constantem multiplicata et addita quantitati alicui sit simul signo radicali subiecta, casus tantum simplicioris exempla ostendere sufficiat.

Si tantum in uno termino sit hoc et reliquum dicatur X, adeoque functio sit ex. gr.

$$X + \sqrt[n]{a + bx^2},$$

erit

$$X = -\sqrt[n]{a + bx^2},$$

et

$$X^n = -(a + bx^2),$$

si n impar sit, et

$$X^n = a + bx^2,$$

si n par sit; ex. gr.

$$-\sqrt[3]{8} = -2,$$

et

$$(-\sqrt[3]{8})^3 = (-2)^3 = -8,$$

at

$$(-\sqrt{4})^2 = 4.$$

Aut potest poni

$$(-X)^n = a + bx^2.$$

Sit

$$\sqrt{a + bx^3} + \sqrt{c + x} - \sqrt[3]{d + ex^2};$$

hoc brevius ad formam

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt[3]{A}$$

reduci potest, et elevando ad 3 fit

$$\alpha\sqrt{\alpha}+3\alpha\sqrt{\beta}+3\beta\sqrt{\alpha}+\beta\sqrt{\beta}=A,$$

idest

$$(\alpha+3\beta)\sqrt{\alpha}+(3\alpha+\beta)\sqrt{\beta}=A,$$

quod per $\gamma\sqrt{\alpha}+\delta\sqrt{\beta}$ exprimendo fit

$$A^2=\gamma^2\alpha+\delta^2\beta+2\gamma\delta\sqrt{\alpha\beta},$$

quod ad formam

$$B=2\gamma\delta\sqrt{\alpha\beta}$$

reducendo fit

$$B^2=4\gamma^2\delta^2\alpha\beta$$

et valoribus substitutis functio a signo radicali libera prodibit, seu ut dici solet, *rationalis* reddetur, atque modo supra dicto ordinari poterit.

Sit

$$\sqrt{\frac{a+x}{(b+x)^3}}+\sqrt{c+x}+\sqrt{d-x^3}+\sqrt{x-e};$$

multiplicetur æquatio, supponendo functionis valorem $=0$ esse, per $\sqrt{(b+x)^3}$; patet æquationem formæ sequentis inde emanare,

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta},$$

unde

$$\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=\gamma+\delta+2\sqrt{\gamma\delta},$$

et hinc æquatio formæ sequentis prodit

$$A=\sqrt{B}+\sqrt{C};$$

unde

$$A^2=B+C+2\sqrt{BC},$$

et

$$(A-B-C)^2=4BC.$$

Calculo sæpe operoso e functione primo obtutu simplici æquationem ex ingenti literarum numero demum ordinari, perspici potest.

6. Si vero æquatio e datis constructa et ordinata fuerit, tum si æquationis gradus eiusdem resolutio generalis detur, nonnisi in formula

generali ipsius x functionem ad o redigentis substituenda substitui debent. Nempe

$$x^1 + a = 0$$

est forma *aequationis gradus primi*, et quæcunque æquatio reducatur ad hanc formam, erit

$$x = -a,$$

quum

$$-a + a = 0$$

sit. Ita quæcunque æquatio reducatur ad formam

$$x^n + a = 0,$$

erit

$$x = \sqrt[n]{-a},$$

quum

$$(\sqrt[n]{-a})^n + a = -a + a = 0$$

sit. Dicitur eiusmodi æquatio gradus n-ti *pura*, si vero adhuc in aliquo termino potentia ipsius x exponentis altioris quam o adsit, *affecta* audit.

7. *Quadraticae aequationis formula* est

$$x^2 + px + q = 0,$$

quæ si p non o, affecta est; quum modus puram resolvendi in aperto sit, ultro succurrit de modo, quo affecta pura reddatur, cogitare; et quum tale quæratur, quod ipsi x substituendo totam functionem $= 0$ reddat, via aperitur quærendi, quidnam ipsi x substitui posset, quod terminum ipsi px respondentem $= 0$ efficeret? Sit id $= y + k$; erit

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (y+k)^2 + p(y+k) + q \\ &= y^2 + 2ky + k^2 + py + pk + q \\ &= y^2 + (2k+p)y + k^2 + pk + q\,; \end{aligned}$$

ubi illico patet, k ita accipi posse, ut

$$2k + p = 0,$$

adeoque

$$(2k+p)y=0$$

sit, et æquatio pura reddatur, e qua prodeunti y addito k prodeat x.

Est nempe

$$k=-\frac{p}{2},$$

et

$$\begin{aligned} y&=\sqrt{-k^2-pk-q} \\ &=\sqrt{-k(k+p)-q} \\ &=\sqrt{\frac{p}{2}\left(p-\frac{p}{2}\right)-q} \\ &=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,; \end{aligned}$$

adeoque

$$x=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}-\frac{p}{2}.$$

Itaque sicubi functio ad formam x^2+px+q reducta fuerit, *differentia dimidii coefficientis primi*, id est coefficientis ipsius x, *a radice quadrata e differentia coefficientis secundi*, per quem x^0 multiplicatur, *a quadrato dimidii coefficientis primi*, est talis quantitas, quæ si ipsi x substituatur, æquationem ad 0 rediget; uti et id ipsum per æquationem generalem Tyrones tentare quoque possunt.

Sunt autem manifesto duo valores ipsius x, nec plures; nam signum $\sqrt{}$ duos valores sibi invicem oppositos, alioquin æquales, parit, reliquæ operationes autem unici resultati sunt, posito nempe cuiusvis coefficientis unicum valorem esse; nam si in $x+a$ per a denotetur $\sqrt{4}$, erit $x=\sqrt{4}$. Est vero sæpe valor uterque imaginarius; adeoque si realis quæratur, petito satisfieri non posse in tali casu patet. Ex. gr. si quantitas x quæratur, cuius quadratum sit $=x-2$, erit

$$x^2-x+2=0,$$

et

$$x=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-2},$$

quod satisfacit quidem æquationi, sed imaginarium est, quia

$$\sqrt{-\frac{7}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

Videatur id etiam quod (pag. 133) de $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ dictum est.

8. Facile interim patet, modum, quo terminus æquationis ordinatæ secundus dispareat, ad quemvis gradum m applicari posse; si nempe

$$x=y+k,$$

et ut in æquatione gradus secundi erat

$$k=-\frac{p}{2},$$

fiat

$$k=-\frac{p}{m}.$$

Nam

$$\begin{array}{llll} (y+k)^m &= y^m + my^{m-1}k + & \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2}k^2 & + \dots \\ p(y+k)^{m-1} &= \quad py^{m-1} + & p(m-1)\ y^{m-2}k & + \dots \\ q(y+k)^{m-2} &= & qy^{m-2} & + \dots \\ \dots & & & \end{array}$$

ubi summa coëfficientium ipsius y^{m-1} est $mk+p$; adeoque si

$$k=-\frac{p}{m}$$

accipiatur, æquationis novæ eiusdem gradus m terminus secundus disparebit.

Pariter disparebit tertius, si pro coëfficientium ipsius y^{m-2} summa, nempe

$$\frac{m(m-1)}{2}k^2+p(m-1)k+q=0,$$

valor ipsius k quæratur, sed ad terminum tertium resolutio æquationis secundi gradus requiritur, uti facile patet resolutionem æquationis $(n-1)$-ti gradus requiri, ut terminus n-tus dispareat; quum in serie superiore exponentes ipsius k in quovis termino ulteriore unitate crescant, verticaliter eorsum versus decrescant. Interim non sequitur valores ipsius

k e duabus æquationibus prodeuntes æquales esse, ut simul plures termini dispareant.

9. Notandum autem est, substitutionem dictam novæ incognitæ viam ad transformationes æquationum alias quoque aperuisse, de quibus inferius.

Sublato tamen termino secundo via ad resolutionem æquationis cubicæ patefit. Nempe æquatio generalis tertii gradus

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

sublato termino secundo sub formam

$$X^3+aX+b=0$$

venit, pro $x=X+k$ et $k=-\frac{p}{3}$; pro qua æquatione si $X=\beta$, erit

$$\beta^3+a\beta+b=0,$$

et erit

$$x=\beta-\frac{p}{3}.$$

Itaque X quæritur.

Sit

$$X=y+z;$$

quo valore substituto erit

$$X^3+aX+b=y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+ay+az+b=0,$$

idest

$$y^3+z^3+(3yz+a)(y+z)+b=0.$$

Si iam ipsorum y et z tales valores reperiantur, ut

$$y^3+z^3+b=0,$$

et simul

$$3yz+a=0$$

sit; tum et

$$(3yz+a)(y+z)=0$$

erit, adeoque

$$y^3+z^3+(3yz+a)(y+z)+b=0$$

erit, et summa illorum y et z ipsi X substituta, functionem

$$X^3+aX+b=0$$

reddet.

Pro $3yz+a=0$ autem est

$$y=-\frac{a}{3z},$$

et hoc valore in y^3+z^3+b substituto, fit

$$z^3-\frac{a^3}{27z^3}+b=0;$$

nempe datur tale z quod functionem istam æqualem 0 reddat; multipli cando enim per z^3, fit si $z^3=u$ ponatur,

$$z^6+bz^3-\frac{a^3}{27}=u^2+bu-\frac{a^3}{27}=0$$

e qua æquatione quadratica reperitur

$$u=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}-\frac{b}{2},$$

cuius z radix cubica est.

Dato z vero et y reperitur; substituto enim valore ipsius z in $y^3+z^3+b=0$, erit

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{-z^3-b} \\ &= \sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}-b} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}, \end{aligned}$$

atque

$$X=z+y=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}},$$

et demum x prodit, addendo $-\frac{p}{3}$ valori huic ipsius X, qui functionem X^3+aX+b zero æqualem reddit; et pro $X-\frac{p}{3}=x$ functio proposita

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

fit.

Notandum tamen est regulam istam CARDANI, quamvis semper satisfaciat algebraice, pro casu ubi $\frac{a^3}{27}$ negativum et $>\frac{b^2}{4}$ est, radices reales forma imaginarii exhibere; demonstrari enim facile potest, æquationis cubicæ semper unam radicem realem esse; atque si hæc c sit, æquationem esse productum ex $X-c$ et æquatione quadratica, et huius plane pro dicto casu radicem utramque realem esse.

10. Ex hoc resolutio æquationis gradus quarti modo sequente deducitur. Potest hæc sublato termino secundo, ad formam

$$x^4+Ax^2+Bx+C$$

reduci, quod ostendi potest, esse

$$\begin{aligned}&=(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)\\&=x^4+(b+c-a^2)x^2+(ac-ab)x+bc.\end{aligned}$$

Nam valores ipsorum a, b, c prodeunt ex

$$b+c-a^2=A,\ ac-ab=B,\ bc=C$$

positis; nempe

$$b+c=A+a^2,\ c-b=\frac{B}{a};$$

unde æquationem posteriorem addendo priori, fit

$$2c=A+a^2+\frac{B}{a};$$

subtrahendo vero posterius e priore, est

$$2b=A+a^2-\frac{B}{a};$$

atque hinc

$$c=\frac{A+a^2}{2}+\frac{B}{2a}=\frac{Aa+a^3+B}{2a},$$

et

$$b=\frac{Aa+a^3-B}{2a};$$

atque

$$bc = C = \frac{Aa + a^3 + B}{2a} \cdot \frac{Aa + a^3 - B}{2a}$$
$$= \frac{a^6 + 2Aa^4 + A^2a^2 - B^2}{4a^2};$$

et hinc si $u = a^2$ ponatur, erit

$$\frac{u^3 + 2Au^2 + A^2u - B^2}{4u} = C,$$

et

$$u^3 + 2Au^2 + A^2u - B^2 - 4Cu = 0,$$

idest

$$u^3 + 2Au^3 + (A^2 - 4C)u - B^2 = 0;$$

quæ cum æquatio cubica sit, reperitur u, adeoque et $a = \sqrt{u}$ et tum dato a ex

$$b + c - a^2 = A,$$

erit

$$b = A + a^2 - c,$$

quo valore substituto ipsi b in

$$ac - ab = B,$$

erit

$$ac - aA - a^3 + ac = B,$$

et

$$c = \frac{B + aA + a^3}{2a};$$

quo item in valore ipsius b substituto ipsi c, repertis a, b, c resolvi poterunt æquationes quadraticæ $x^2 + ax + b$ et $x^2 - ax + c$, e quarum facto conflata functio $x^4 + Ax^2 + Cx + C$ est; atque tum quævis radix cuiusvis illarum æquationum quadraticarum erit radix æquationis posterioris; nam

$$(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c) = 0$$

erit, si x tale sit in uno factore, quod eum 0 reddat; quia factum quoque ex hoc et factore altero 0 erit.

Manifesto autem et hoc priori operosius difficultati eidem obnoxium est; ad alia igitur media, quibus radix æquationis gradus cuiusvis reperitur aut saltem approximatur, confugiendum est. Eo magis quod quamvis innumeræ æquationes altiores resolubiles dentur, formula generalis per coefficientes p, q, ... determinata, nempe functio algebraica (pag. 206), ut in secundi tertii et quarti gradus æquationibus, dari nequeat, quod iam in opere (pag. 206) citato monitum erat; quamvis in eodem pluribus æquationibus altioribus ita resolutis, ut radix *operationum (additionis, multiplicationis et extractionis radicis quadratae) certo numero*, exhibeatur (prorsus mira summi ingenii sagacitate, et profundissimo acumine), talia præstita sint, quæ antea Geometris per annorum millia impossibilia videbantur, uti *peripheriae divisio per n, constructione geometrica* perficitur, si quidem n numerus primus formæ 2^m+1, aut productum fuerit e primis huius formæ, ita ut nullus, excepto 2, pluries quam semel ut factor occurrat; et quidem cum illa restrictione, ut id per nullum alium integrum n fieri queat. Nimirum etsi opus primo aspectu heterogeneum sit, ex (pag. 125) nexus intelligi potest; nam si ex. gr. æquatio

$$x^{17}-1=0$$

numero certo operationum dictarum resolvatur, cosinus 17-mæ partis peripheriæ, adeoque polygonum regulare 17 laterum geometrice construitur, quum 17 requisita qualitate gaudeat; et plane stupendum est, opus istud giganteum ab adolescente 17 annos vix excedente perfectum fuisse.

Exempla.

a) E datis ætatis puellæ (pag. 374) est

$$x(40+x)=969,$$

adeoque

$$x^2+40x-969=0,$$

quod sub formam x^2+px+q cadit; itaque

$$x=\frac{-p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-20+\sqrt{400+969},$$

cuius valores sunt

$$-20+37=17, \text{ et } -20-37=-57;$$

quorum duorum valorum uni, nempe ipsi 17, est puellæ ætas æqualis.

b) Notum est gravitates specificas esse uti pondera absoluta divisa per volumina, adeoque uti pondera absoluta, si volumina fuerint æqualia; notum etiam est, corpus fluido totum immersum e pondere suo tantum amittere, quantum pondus fluidi illius est, cuius locum occupat; hinc si corporis dicti pondus P, gravitas specifica G sit, et fluidum sit aqua, cuius, pro certa temperatura sub altitudine certa barometri gravitas specifica sit 1; erit si pondus amissum p sit, hoc p pondus aquæ sub volumine corporis volumini æquali. Itaque erit

$$G:1=P:p,$$

adeoque

$$G=\frac{P}{p}, \text{ et } p=\frac{P}{G}.$$

Hinc problematis Archimedei resolutio. Sit corona ponderis P, summa auri x et argenti $P-x$, denotante x quoque pondus; atque volumen miscelæ sit æquale summæ mixtorum, quamvis ex. gr. spiritus vini voluminis v et aqua voluminis v commixta volumen minus quam $2v$ nanciscantur. Sit auri gravitas specifica G, et argenti sit g; atque P amittat in aqua pondus A; erit

$$\frac{x}{G}+\frac{P-x}{g}=A;$$

nempe pondus absolutum divisum per gravitatem specificam dat pondus amissum, id est pondus voluminis aquæ eiusdem; et summa ponderis amissi partis aureæ et argenteæ ponitur æqualis ponderi amisso coronæ.

Hinc ordinando fit

$$\frac{x}{G}-\frac{x}{g}+\frac{P}{g}-A=0,$$

seu

$$x\left(\frac{1}{G}-\frac{1}{g}\right)+\frac{P}{g}-A=0,$$

adeoque

$$x+\left(\left(\frac{P}{g}-A\right):\left(\frac{1}{G}-\frac{1}{g}\right)\right)=0;$$

quod sub formam $x+a=0$ venit, adeoque $x=-a$, seu pro casu hoc est

$$x=-\left(\frac{P}{g}-A\right):\left(\frac{1}{G}-\frac{1}{g}\right)=-\frac{P-Ag}{g}:\frac{g-G}{Gg}=$$
$$=-\frac{(P-Ag)G}{g-G}=\frac{(P-Ag)G}{G-g}.$$

c) Si quæratur, quanti ponderis x suber sit ferro ponderis P addendus, ut in aqua quocunque immersum quiescat: sit G gravitas specifica ferri, g suberis; erit pondus aquæ depulsæ $\frac{P}{G}+\frac{x}{g}$, prius ferro, posterius suberi respondens; atque

$$\frac{P}{G}+\frac{x}{g}=P+x.$$

Tunc enim requiescet, quum summa ponderum tantum premit deorsum, quantum aqua sustinet. Itaque

$$x\left(\frac{1}{g}-1\right)+\frac{P}{G}-P=0,\ \text{et}\ x+\left(\left(\frac{P}{G}-P\right):\left(\frac{1}{g}-1\right)\right)=0$$

adeoque

$$x=-\left(\frac{P}{G}-P\right):\left(\frac{1}{g}-1\right)=\frac{(P-PG)g}{G(g-1)}.$$

d) Si quæratur quantænam diametri x quoad pedem expressæ sit sphæra, cuius involucri, cuius modo crassities negligatur, pes quadratus ponderet q; ut in aëre cuius pedis cubici pondus sit α, requiescat, si ipsa tali aëre repleatur, cuius pedis cubici pondus β est: erit sphæræ volumen $\frac{x^3\pi}{6}$, superficies autem $x^2\pi$, atque pondus sphæræ cum involucro erit $\frac{x^3\pi\beta}{6}+x^2\pi q$, quod ponderi aëris externi eiusdem voluminis æquale esse debet; itaque

$$\frac{x^3\pi\beta}{6}+x^2\pi q=\frac{x^3\pi\alpha}{6};$$

adeoque dividendo per $x^2\pi$, et ordinando, fit

$$\frac{x\beta}{6}+q-\frac{x\alpha}{6}=x\cdot\frac{\beta-\alpha}{6}+q=0;$$

et

$$x+\left(q:\frac{\beta-\alpha}{6}\right)=0,$$

atque

$$x=-\frac{6q}{\beta-\alpha}=\frac{6q}{\alpha-\beta}.$$

e) Si pondus pedis cubici ferri sit q, et quæratur, quantanam sit diameter x globi tormentarii ponderis P, quoad pedem expressa? Erit

$$\frac{x^3\pi q}{6}=P,$$

adeoque

$$\frac{x^3\pi q}{6}-P=0,$$

et

$$x^3-P:\frac{\pi q}{6}=0,$$

atque

$$x=\sqrt[3]{\frac{6P}{\pi q}}.$$

f) Si quæratur ferrum ponderis P quantumnam pedis cubici sit? Sit x, et sit pondus pedis cubici aquæ α, et gravitas specifica ferri sit γ, sitque $\frac{P}{\alpha}=y$; erit $x=\frac{y}{\gamma}$, nempe quo maior gravitas specifica, volumen pro eodem pondere eo minus erit; itaque

$$x=\frac{P}{\alpha\gamma}.$$

g) Motus soni, ut lucis, æquabilis est; percurrat sonus in certo aëre certæ temperaturæ sub 1″ id est minuto secundo spatium s; quæritur certus obex, rupes aut murus exstruendus, ad quam distantiam minimam esse debeat, ut certum hexametrum reddat? Distantia hæc manifesto tanta x est, ut si ad versum pronunciandum n'' requirantur, prima syllaba pronunciatione finita redeat, adeoque hæc viam ns percurrat; quæ quum dupla sit distantiæ obicis erit $x=\frac{ns}{2}$.

h) Si lapis in puteum demittatur, et effluxerint n minuta secunda a dimissione lapidis usquequo sonus eius aquam attingentis in aurem perveniat; quæritur, quanta sit profunditas usque ad aquæ superficiem?

Sit ea x; temporis effluxi pars prior ad descensum lapidis requirebatur, quæ $=\sqrt{\frac{2x}{g}}$, et altera ad ascensum soni, quæ est $\frac{x}{s}$. Itaque

$$n=\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{s},$$

adeoque

$$n-\frac{x}{s}=\sqrt{\frac{2x}{g}},$$

et quadrando est

$$n^2-\frac{2nx}{s}+\frac{x^2}{s^2}=\frac{2x}{g};$$

unde

$$\frac{x^2}{s^2}+x\left(-\frac{2n}{s}-\frac{2}{g}\right)+n^2=0,$$

et

$$x^2+x\left(-2ns-\frac{2s}{g}\right)+n^2s^2=0,$$

quod sub forman $x^2+px+q=0$ veniens resolvitur (pag. 378).

i) In thermometro est ad punctum regelationis glaciei aquæ 0 *Reaumur*, atque *Fahrenheit* 32 gradibus suis inferius posuit zero; ad punctum ebullitionis aquæ, sub altitudine barometri normali &c, sunt $80R$ et $212F$; itaque

$$80R=180F,$$

et

$$1R=\frac{9F}{4},$$

et

$$1F=\frac{4R}{9}.$$

Si igitur quæratur, nR quot F facit, sit xF, et n positivum; erit

$$nR = \frac{9nF}{4} + 32F = x,$$

ita

$$-nR = -\frac{9nF}{4} + 32F = x,$$

nam e numero graduum Fahrenheitianorum, quos Reaumuriani infra $0R$ efficerent, 32 sunt Fahrenheitio positivi; consequenter

$$x = \frac{9n}{4} + 32,$$

si n generaliter numerum graduum R sive positivorum sive negativorum denotet. Unde si quæratur xF quot R facit, erit

$$n = \frac{4}{9}(x - 32).$$

k) Si quæratur, index minutarius quando assequetur horarium, si hic ad XII et is ad XI sit? Sit unitas temporis hora, et unitas spatii $\frac{1}{12}$-ta pars peripheriæ, in qua tanquam puncta directione eadem circulari moveri indices concipiantur; unitates hæ arbitrarie ponuntur, sed celeritatis unitas tum determinata, nempe illa est, qua mobile tempore horæ $\frac{1}{12}$-tam peripheriæ describit. Erit igitur 1 celeritas horarii, et 12 minutarii, et 720 celeritas secundarii, qui nempe sub hora 60-ies percurrit peripheriam, quæ $= 12$. Dicatur x tempus ad cuius finem horarius minutariusque in coniunctionem veniant. Spatium est in motu æquabili æquale celeritati per tempus multiplicatæ, et via a minutario percurrenda est maior via horarii, illi nempe id quoque quo retro est, decurrendum est, sit hoc a; erit igitur

$$12x = a + x, \quad \text{unde} \quad 11x - a = 0, \quad \text{et} \quad x = \frac{a}{11},$$

quod pro casu dicto est $= \frac{1}{11}$-tæ unius horæ, nam si minutarius ad XI sit, $a = 1$ est. Si vero $a = 0$ sit, tum per $\frac{a}{11}$ nonnisi id exprimitur, quod abinde usque ad coniunctionem nullum tempus sit; sed proxima sequens coniunctio ita exhibetur, si a ponatur $= 12$, nempe statim post illud temporis punctum, quantumvis exiguum tempus sit, spatium minutarii 12-ies maius erit, adeoque simul esse non poterunt, priusquam minutarius totum circulum percurrendo eodem perveniat, ubi in coniunctione erat, et præterea etiam spatium horarii sub eo tempore percursum et postea usque ad *coniunctionem* percurrendum exæquet; est autem, tempore a coniunctione priore ad proximam usque x dicto, spatium horarii x, minutarii autem $12x$, itaque

$$12x = 12 + x$$

esse debet; unde

$$x = \frac{12}{11} = 1 \text{ horæ} + \frac{1}{12}\text{-tæ unius horæ.}$$

Ita si secundarius ab horario distantia b retro sit; erit tempore, quod usque ad coniunctionem est, y dicto,

$$720y = b + y,$$

et

$$y = \frac{b}{719},$$

et si $b = 0$, ut antea, erit $y = \frac{12}{719}$, quod a coniunctione secundarii cum horario usque ad proximam est.

l) Si autem quæratur, quandonam minutarius secundariusque cum horario simul in coniunctionem veniant; si tam a quam b sit 0, tum manifesto tam x quam y numero certo effluxisse oportet, ut tres indices simul sint; nam si tres simul sint, tum et minutarius et secundarius in coniunctione cum horario est; itaque $nx = my$, pro n, m integris, esse debet; adeoque

$$\frac{n \cdot 12}{11} = \frac{m \cdot 12}{719},$$

seu

$$n = \frac{11m}{719},$$

cuius quum 11 non metiatur numerum 719, valor minimus integer est pro $m = 719$, et tum $n = 11$ erit; id est 11-ies evenire novam minutarii cum horario coniunctionem oportet, sive 719-ies coniunctionem secundarii cum horario; idest coniunctio trium proxima fiet ad finem 12 horarium. Ita si plures sint, cuiusvis coniunctio cum tardissima prius quærenda est.

m) Notandum vero est, posse hos indices quoque ita locari, ut nunquam in coniunctionem venire queant. Sit ex. gr. secundarius cum horario in coniunctione, et distantia minutarii, qua retro est, sit $a = \frac{11}{2.719}$, nempe contra structuram horologii ponatur ita, immotis ceteris. Erit tempus, quod usque ad proximam minutarii cum horario coniunctionem requiritur $= \frac{1}{2.719}$; atque, pro n, m integris, deberet esse

$$\frac{1}{2.719} + nx = my,$$

ut tam minutarius quam secundarius cum horario in coniunctione sint; itaque

$$\frac{1}{2.719} = \frac{12m}{719} - \frac{12n}{11},$$

et hinc reducendo ad denominatorem eundem, et utrinque per 11.719 multiplicando

$$\frac{11}{2} = 12.11m - 719.12n;$$

quod absurdum est, nam membrum ad dextram numerus integer est, ad lævam autem est

$$= 5 + \frac{1}{2}.$$

n) Attentionem meretur etiam acuta *Zenonis* obiectio, in qua germen primum progressionis geometricæ, et seriei infinitæ convergentis limitisque, motus retardati, imo etiam dependentiæ unius variabilis ab alia, atque problematis proximi resolutio reperitur.

Sit sub 1-mo t, 2-do t, 3-tio t, . . . $(m-1)$-to t, m-to t

via testudinis $1, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n^2}, \dots \frac{1}{n^{m-2}}, \quad \frac{1}{n^{m-1}},$

" Achillis $0, \quad 1, \quad \frac{1}{n}, \dots \frac{1}{n^{m-3}}, \quad \frac{1}{n^{m-2}},$

nempe si ea ponatur conditio, ut celeritas Achillis sit celeritate testudinis n-ies maior semper post primum t; dependebit Achillis celeritas in quovis t a celeritate testudinis, qua sub illo t ire libuerit; si itaque sub quovis sequente t testudo celeritate n-ies minori moveatur, Achilles sub quovis t quidem n-ies maiorem viam describet, sed via testudinis erit usque ad finem cuiusvis m-ti t summa terminorum seriei superioris usque ad $\frac{1}{n^{m-1}}$ inclusive, via Achillis autem est summa seriei inferioris eousque; patet vero, ab 1 incipiendo, quemvis terminum μ-tum unius μ-to alterius æqualem esse, sed terminum sub $(m-1)$-to t superioris, m-to inferioris esse æqualem; adeoque ad finem m-ti t viæ testudinis excessum supra viam Achillis esse semper æqualem termino m-to superioris. Itaque pro temporibus t æqualibus, dependentia ista celeritatis Achillis posita, testudinem nunquam assequetur, at excessus iste nempe $\frac{1}{n^{m-1}} \rightharpoondown 0$; et si tantum ad distantiam 1 ab Achille, motum incipere testudo ponatur, limes viæ testudinis erit limes summæ seriei, cuius exponens $\frac{1}{n} < 1$ est, nempe

$$\frac{1}{n} : \left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} : \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n-1},$$

et si testudo, sublata conditione priore, æquabiliter repat, et celeritas eius sit 1, erit celeritas Achillis n, ac si tempus quo eam assequetur, x dicatur, erit

$$nx = x+1,$$

unde

$$x = \frac{1}{n-1},$$

quæ limes viæ testudinis erat, nempe $S=CT$ (pag. 48) fit $=T$ pro $C=1$.

Pluribus exemplis brevitas necessaria supersedere iubet. Tyrones ipsi ad cubicam quoque problemata condere possunt.

§. 39.

Ex (pag. 380) ad plures æquationis transformandæ modos via aperitur, nempe:

1. Ipsi x substituendo $y+a$ (ex. gr. pro $a=1$ erit $y+1$, et $y-1$ pro $a=-1$); ubi æquationis novæ radici addendum a est, ut radix prioris æquationis prodeat; nam $x=y+a$.

2. Si ponatur $my=x$, substituendo prodibit

$$m^n y^n + pm^{n-1}y^{n-1} + qm^{n-2}y^{n-2} + \ldots + smy + t = 0;$$

cuius æquationis, quæ dividendo per m^n ordinatur, radix per m multiplicari debet, ut æquationis primitivæ radix prodeat; nam $x=my$.

3. Si ponatur $y=mx$; substituendo $\frac{y}{m}$ ipsi x ubique, fiet æquatio primitiva

$$\frac{y^n}{m^n} + \frac{py^{n-1}}{m^{n-1}} + \frac{qy^{n-2}}{m^{n-2}} \ldots + \frac{sy}{m} + t = 0,$$

ubi radix huius æquationis, quæ per m^n multiplicata ordinatur, per m dividi debet, ut radix primitivæ prodeat; nam $x=\frac{y}{m}$. Si vero $m=-1$ sit, y nempe radix novæ æquationis per -1 divisa, sive multiplicata, fit radix æquationis primitivæ; id est radices novæ priorum oppositæ sunt.

4. Si $x=\frac{1}{y}$ ponatur, atque $\frac{1}{y}$ substituendo ipsi x, æquatio ordinetur; per radicem æquationis novæ unitas dividenda erit, ut x nempe radix æquationis primitivæ prodeat; eritque maxima radix, ex. gr. positiva, æquationis novæ minima prioris; nam quo maius y, eo minus $\frac{1}{y}$ est.

5. Atque (ex 1.) si per theorema binomiale evolvantur termini æquationis novæ, in quam prior, nempe $f(x)=0$, mutata est; erit, $a+y$ ponendo pro x,

$$\begin{aligned}
(\alpha+y)^n &= \alpha^n + n\alpha^{n-1}y + \quad \ldots + P\alpha^2y^{n-2} + \alpha y^{n-1} + y^n,\\
p(\alpha+y)^{n-1} &= p(\alpha^{n-1} + (n-1)\alpha^{n-2}y + \ldots + R\alpha y^{n-2} + y^{n-1}),\\
q(\alpha+y)^{n-2} &= q(\alpha^{n-2} + (n-2)\alpha^{n-3}y + \ldots + \quad y^{n-2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s(\alpha+y) &= s\alpha + sy,\\
t &= t.
\end{aligned}$$

Quorum omnium summa, collectis coefficientibus potentiarum earundem ipsius y e columnis verticalibus, erit æquatio nova, coefficientibus A, B, . . . dictis

$$y^n + Ay^{n-1} + By^{n+2} + \ldots + Sy + \alpha^n + p\alpha^{n-1} + q\alpha^{n-2} + \ldots + s\alpha + t = 0\,;$$

ubi id, per quod potentia o ipsius y multiplicata est, pro ultimo accipi potest, et ab $f(x)$ nonnisi in eo differt, quod α sit pro x; unde hoc, substituendo ubique α ipsi x in $f(x)$ illico prodit; adeoque, si $\alpha=1$ sit, erit $1+p+q+\ldots+t$, et si $\alpha=-1$ ponatur, erit

$$(-1)^n + p(-1)^{n-1} + q(-1)^{n+2} + \ldots - s + t\,;$$

quod mox, dum radix æquationis altioris quæretur, usui erit.

6. In (pag. 393, 3.) si æquatio per m^n multiplicetur; fiet

$$y^n + mpy^{n-1} + m^2qy^{n-2} + . + m^{n-1}sy + m^nt = 0\,;$$

et manifesto, si quis coefficiens fractus sit, denominatore m præditus, is a denominatore liberabitur, cum quilibet terminus per potentiam integram ipsius m multiplicetur. Itaque si *minimus talis numerus eligatur, quem coefficientis cuiusvis, etiam ipsius* y^0, ad *terminos minimos reducti denominator metitur*, atque pro m is sumatur, quivis coefficiens, si antea *quantitas realis et* commensurabilis fuerit, numerus integer evadet; atque postmodum nonnisi de tali casu sermo erit.

Notandum tamen est, uti e deductione patet, heic nullam potentiam ipsius y negligendam esse, etsi coefficiens alicuius o fuerit.

7. Posito, quod vix credibile esset a Geometris pluribus celebribus per se evidens visum fuisse, æquationem cuiusvis gradus radice aliqua, si non reali, saltem imaginaria gaudere; facile sequitur æquationem gradus n radices numero n nec plures paucioresve habere. Nempe quidcunque sit a, est

$$x^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \ldots + a^{n-1}x^0) + a^n$$

et in genere

$$\beta x^\mu = (x-a)(\beta x^{\mu-1} + \beta a x^{\mu-2} + \beta a^2 x^{\mu-3} \ldots + \beta a^{\mu-1}x^0) + \beta a^\mu;$$

nam multiplicando prius per x, tum per $-a$ prodibit

$$\begin{aligned} &\beta x^\mu + \beta a x^{\mu-1} + \beta a^2 x^{\mu-2} + \ldots + \beta a^{\mu-1}x + \beta a^\mu \\ &\qquad - \beta a x^{\mu-1} - \beta a^2 x^{\mu-2} - \ldots - \beta a^{\mu-1}x - \beta a^\mu; \end{aligned}$$

quod $= \beta x^\mu$ est, pro quovis valore ipsius x.

Tyrones, ipsi n possunt ex. gr. 5 substituere, ut clarius perspiciant. Est vero hinc

$$\begin{aligned} x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + sx + t = \\ = (x-a)\big(x^{n-1} + (a+p)x^{n-2} + (a^2 + ap + q)x^{n-3} + \\ + (a^3 + a^2p + aq + r)x^{n-4} + \ldots + \\ + (a^{n-1} + a^{n-2}p + \ldots + ar + s)\big) + \\ + a^n + pa^{n-1} + qa^{n-2} + \ldots + sa + t. \end{aligned}$$

Ratio e sequenti exemplo, in quo etiam n ipsi 5 substitui potest, facile perspicitur.

Sit $f(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + tx^0$;

erit

$$\begin{aligned} x^5 &= (x-a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) + a^5, \\ px^4 &= (x-a)(px^3 + apx^2 + a^2px + pa^3) + pa^4, \\ qx^3 &= (x-a)(qx^2 + aqx + qa^2) + qa^3, \\ rx^2 &= (x-a)(rx + ra) + ra^2, \\ sx &= (x-a)s + sa, \\ t &= t. \end{aligned}$$

Unde collectis e columnis verticalibus eiusdem potentiæ ipsius x coefficientibus, erit

$$f(x) = (x-a)\big(x^4 + (a+p)x^3 + (a^2+ap+q)x^2 + (a^3+a^2p+aq+r)x + \\ + (a^4+pa^3+qa^2+ra+s)x^0\big) + a^5+pa^4+qa^3+ra^2+sa+t.$$

Dicatur $a(x)$ id, quod intra paranthesim maiorem est, et α id, quod post parenthesim est, et quod 0 est, si a radix æquationis $f(x)=0$ est; patet vero, quod $a(x)$ præbeat æquationem $(n-1)$-ti gradus, si $f(x)$ fuerit n-ti.

Pariter erit

$$a(x) = (x-b)\,b(x) + \beta,$$

et

$$b(x) = (x-c)\,c(x) + \gamma,$$

et ita porro donec ad tale ex. gr. $(x-d)d(x)+\delta$ deveniatur, ut quum $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, ... æquationes gradus in quavis sequenti unitate decrescentes præbeant, demum aliqua $d(x)$ primi gradus prodeat.

Quid autem per $b(x)$, β, $c(x)$, γ, ... intelligatur, facile ex ipso $a(x)$ et α perspicitur; nempe si primus coefficiens in $a(x)$ dicatur p', secundus q', & ..., erit applicando ad casum proximum,

$$\beta = b^4 + p'b^3 + q'b^2 + r'b + s',$$

per s' coefficientem ipsius x^0 in $a(x)$ intelligendo; unde reliqua patent.

Itaque pro quibusvis valoribus ipsorum x, a, b, c, ..., d, est

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)\,a(x) + \alpha \\ &= (x-a)\big((x-b)\,b(x)+\beta\big) + \alpha\,; \end{aligned}$$

quod est

$$= (x-a)\ (x-b)\,b(x),$$

si pro valore a ipsius x sit $f(x)=0$, et pro valore b ipsius x sit $a(x)=0$; nam tum

$$\alpha = a^5 + pa^4 + qa^3 + ra^2 + sa + t = 0,$$

et

$$\beta = b^4 + p'b^3 + q'b^2 + r'b + s' = 0.$$

Ita porro, si c radix ipsius $c(x)=0$ sit, pro $x=c$ fit $\gamma=0$, et ita porro, ut demum pro $x=d$ fiat $\delta=0$, adeoque quodvis ipsorum α, β, γ, ..., δ $=0$ sit; itaque

sit; atque
$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-d)d(x)$$
$$d(x)=(x-e).1+\varepsilon$$

ubi $\varepsilon=0$, si primi gradus $d(x)$ fiat $=0$ pro $x=e$.

Atque hinc manifesto, cuivis ex. gr. ipsorum $a, b, c, \dots, d, e$ ponatur x æquale, $f(x)=0$ erit, et b radix æquationis $f(x)=0$ erit; ac si n ex. gr. 5 fuerit, prodeunte $x-a$ functio $a(x)$ quarti gradus facta est, et hinc prodeunte $x-b$ prodit $b(x)$ gradus tertii, et hinc prodeunte $x-c$ prodiit $c(x)$ gradus secundi, atque hinc prodeunte $x-d$ evadit $d(x)$ gradus primi, et hinc prodeunte $x-e$, ipsa a, b, c, d, e pro casu proximo efficient quinque radices, nempe radices numero gradus ipsius $f(x)=0$.

Consequenter si habuerit $f(x)=0$ æquatio gradus n unam radicem, radices numero n habere constat, quarum tamen possunt aliquæ, imo omnes ut patebit, esse æquales; at quæritur, num plures habere possit? Responsio facilis est: nam si illa k nulli dictarum in casu dicto quinque radicum æquales esset, substituendo k ipsi x, fieret

$$0=f(k)=(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)(k-e),$$

quod fieri nequit, nisi factor aliquis producti 0 sit, id est k alicui ipsorum a, b, c, d, e æqualis sit.

Solet hoc inde deduci, quod sit

$$\frac{\beta(x^\mu-a^\mu)}{x-a}=\beta(x^{\mu-1}+ax^{\mu-2}+\dots+a^{\mu-2}x+a^{\mu-1}),$$

uti peracta divisione (pag. 150) patet; atque hinc evolutis hoc modo terminis

$$\frac{x^n-a^n}{x-a},\quad \frac{px^{n-1}-pa^{n-1}}{x-a},\quad \frac{qx^{n-2}-qa^{n-2}}{x-a},\dots,\frac{sx-sa}{x-a},$$

et denuo multiplicando quotum per $x-a$, atque addendo utrinque

$$a^n+pa^{n-1}+qa^{n-2}+\dots+sa+t,$$

prodibit plane id, quod supra. At pro $x=a$, fit tam dividendus quam divisor o, divisionem vero plane pro æquationis radice $a = x$ per $x - a$ peragi oportet. Interim (per pag. 319) fit tum

$$\frac{0}{0} = na^{n-1} + (n-1)pa^{n-2} + (n-2)qa^{n-3} + \ldots + s,$$

nempe dum $x \frown a$, quotus ad hunc limitem tendit, quem coefficienti priori ipsius $x - a$, substituendo in eo a ipsi x, æqualem esse facile demonstrari potest, quod Tyronibus relinquitur; exemplo pro $\mu = 5$ rem illustrare possunt.

Tum item, si b ponendo pro a in nova æquatione valor huius o fiat, et per $a - b$ fiat divisio pro $a = b$, omnia perinde sequi patet; sed methodus prior clarior faciliorque est.

Si igitur æquatio gradus n gaudeat una radice a, erit e numero n *factoribus eiusmodi uti* $x - a$, $x - b$, ... *conflata, et quævis literarum in* iis ab x diversarum, radix erit, nec ulla alia ab his diversa datur. Ac conversim quoque si

$$(x-a)(x-b)\ldots = 0$$

erit, quodcunque ipsorum a, b, ... ponatur pro x; ex. gr.

$$(a-a)(a-b)\ldots = 0,$$

aut

$$(b-a)(b-b)\ldots = 0, \text{ \&c};$$

quæcunque et quotvis quantitates a, b, ... fuerint, $(x-a)(x-b)$, ..., si in eo ipsi x ipsorum a, b, ... quodvis substituatur, o fiet; poterunt autem a, b, ... omnes æquales quoque accipi, uti

$$(x-a)(x-a) = x^2 - 2ax + a^2$$

gaudet duabus quidem hoc sensu radicibus, sed quæ æquales sunt.

Si itaque æquatio productum talium factorum sit, coefficientes ipsius x a radicibus dependere facile perspicitur; et ultro sequitur in legem, qua formantur, inquirere.

8. Erat etiam (pag. 158) quæstio de facto plurium binomiorum. Multiplicando $x - a$ per $x - b$, prodit

$$x^2+(-a-b)x+ab,$$

et hoc multiplicando per $x-c$ fiet

$$x^3+(-a-b-c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc,$$

et idem porro continuando donec libuerit, eousque patet; quod, si literæ ab x diversæ eo signo accipiantur, uti in factoribus $x-a$, $x-b, \ldots$ sunt, denotantes radicum opposita, coefficiens primus sit summa literarum dictarum, secundus sit summa amborum, tertius summa ternorum, m-tus summa m-ionum, quæ e literis dictis accipi possunt, et quidem ita ut quævis m-io factum ex iis literis sit e quibus constat; ex. gr. pro $m=2$, si ambo e literis $-a$ et $-b$ sit, accipiatur $(-a).(-b)=ab$; ad finem vero coefficiens ipsius x^0 sit factum ex omnibus literis dictis, quod igitur semel tantum est.

Si vero de prodeunte P e numero n factoribus eiusmodi valeat lex; valet, etiamsi $(n+1)$-tus factor accedat. Nam sit novus factor $x-d$, et sit $-a=a'$, $-b=b'$, . . ., $-d=d'$, atque sit coefficiens m-tus M æqualis summæ m-ionum, quæ ex n literis a', b', . . . accipi possunt, et $(m+1)$-tus coefficiens sit N æqualis summæ $(m+1)$-ionum, quæ ex iisdem a', b', . . . (excluso d') accipi possunt. Multiplicato P per terminum priorem ipsius $x-d$, augebitur exponens ipsius x unitate in quovis termino, adeoque et æquatio uno altior prodibit; factor $-d$ scilicet exponentes ipsius x non mutat. Est autem in P terminus m-tus (haud numerato primo, ubi potentia altissima ipsius x cum coefficiente 1 est) Mx^{n-m}, et sequens est Nx^{n-m-1}; atque multiplicando P per $x-d$, potentia exponentis $n-m$ ipsius x nonnisi ex Mx^{n-m} per $-d$, et Nx^{n-m-1} per x multiplicato prodire potest; terminus itaque facti, in quo x^{n-m} est, fiet $(N+d'M)x^{n-m}$; est autem hic terminus $(m+1)$-tus in novo facto ab x^{n+1} (excluso hoc) numerando usque ad x^{n-m}; atque N continet omnes $(m+1)$-iones quæ ex a', b', . . . excluso d' accipi possunt, M vero omnes m-iones ex iisdem, quæ singulæ per d' multiplicatæ exhibent omnes $(m+1)$-iones, ex a', b', . . ., d', quæ ipsum d' continent.

Quod ultimum attinet, is dum per d' multiplicatur, prodit $a'\,b'\ldots d'$;

penultimus autem per d' et ultimus per x multiplicatus, dat primam potentiam ipsius x, et sub formula dicta generali continetur.

9. Si æquatio in talem (per pag. 394) transformata sit, ut quivis coefficientium numerus integer sit; tum si radix quantitas cum unitate commensurabilis sit, numerus integer, et quidem e factoribus termini ultimi est. Nam factorem termini ultimi esse e (pag. 401) patet; si vero radix non esset numerus integer, sit $\frac{a}{b}$ pro a et b *numeris inter se primis*, quos nullus alius integer præter 1 metitur. Substituto $\frac{a}{b}$ ipsi x, esset

$$\frac{a^n}{b^n}+\frac{pa^{n-1}}{b^{n-1}}+\frac{qa^{n-2}}{b^{n-2}}+\ldots+\frac{ra}{b}+s=0,$$

et per b^n multiplicando, est

$$a^n+bpa^{n-1}+b^2qa^{n-2}+\ldots+b^{n-1}ra+b^ns=0,$$

et hinc

$$\frac{a^n}{b}=-(pa^{n-1}+bqa^{n-2}+\ldots+b^{n-2}ra+b^{n-1}s);$$

quod absurdum est, nam b non metitur numerum a^n, quia, ut paulo inferius demonstrabitur, numerus primus b inter factores ipsius $aaa\ldots$ adesse deberet &; membrum æquationis ad dextram autem manens integer est. Itaque radix realis, si quantitas commensurabilis sit, numerus integer est.

Hinc modo sequente investigari potest, num radix æquationis realis commensurabilis detur; nempe factoribus termini ultimi integris ipsi x substitutis, videri potest, num valor functionis ad 0 redigatur. Ceterum si quis factorum integrorum termini ultimi radix sit, ad finem operationis sequentis prodire 0, ex operatione ipsa patet.

Sit ex. gr.

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

atque sit a radix; erit

$$a^3+pa^2+qa=-r;$$

adeoque

$$a^2+pa+q=\frac{-r}{a},$$

ubi $\frac{r}{a}$ integer est, dicatur r'. Est porro

$$a^2+ap=-r'-q,$$

et

$$a+p=-\frac{r'+q}{a},$$

ubi $\frac{r'+q}{a}$ pariter integer est, dicatur q'; est demum

$$a=-q'-p, \quad \text{et} \quad \frac{a}{a}=-\frac{q'+p}{a}=1,$$

seu

$$\frac{q'+p}{a}+1=0, \quad \frac{q'+p}{a}=-1.$$

Ex. gr. Sit

$$x^3+x^2-10x+8=0;$$

erit substituendo 2 ipsi x, quæ radix æquationis est, quilibet quotorum $\frac{r}{a}$, $\frac{r'+q}{a}$, $\frac{q'+p}{a}$, ... numerus integer, et ultimus $=-1$ est, nempe

$$\frac{8}{2}=4, \quad \frac{4-10}{2}=-3, \quad \frac{-3+1}{2}=-1.$$

Nisi quilibet quotorum integer et ultimus $=-1$ sit, numerus substitutus radix esse nequit.

10. Si æquationis ordinatæ gradus μ *completae*, adeoque ex $\mu+1$ terminis constantis, per $f(x)=0$ designatæ, coefficientes omnes, abstrahendo a signo præposito, positivi, atque radices omnes reales sint; tot *transitus*, ex $+$ in $-$ vel vice versa, erunt, quot radices positivæ, et tot *successiones*, nempe $+$ $+$ aut $-$ $-$, quot radices negativæ. Successiones signorum æqualium dicuntur breviter *successiones*, uti successiones signorum inæqualium *transitus* dicuntur.

Nam per a, b, ... positiva intelligendo, æquatio formæ $x-a$, aut formæ $x+b$, *simplex* dicitur, et quidem prior positiva, posterior negativa; quum æquationis e talibus factoribus conflatæ prior radicem positivam a, posterior negativam $-b$ procuret.

Prodibit autem æquatio eadem, quocunque ordine multiplicentur æquationes simplices, adeoque etsi prius tantum positivæ multiplicentur, et factum F per aliquam æquationem simplicem negativam, et quod prodit per novam negativam, et hoc item per novam, si adfuerit, multiplicentur, donec nulla supersit; aut inverse factum f e negativis per positivas simplices modo dicto multiplicetur.

Si iam numerus æquationum simplicium, adeoque radicum, positivarum sit n, et numerus negativarum adeoque numerus radicum negativarum sit m: atque demonstretur $a)$ f per æquationem simplicem positivam multiplicatam unum transitum novum acquirere, et quodvis factum ita prodiens per æquationem simplicem positivam multiplicatum, unum transitum novum nancisci; multiplicatione per omnes æquationes simplices consummata, patebit, in $f(x)$ ad minimum n transitus dari. Ita si demonstretur $b)$ F per æquationem simplicem negativam multiplicatum unam successionem acquirere; patebit, in $f(x)$ ad minimum m successiones adesse. Atque quum numerus omnium successionum, sive æqualium sive inæqualium, in $f(x)$ sit $n+m=\mu$, quum $\mu+1$ termini sint, *plures transitus quam n dari nequeunt; nam tum m nempe numerus* successionum imminueretur, quem dari constat, n transitus vero certo adsunt; ita m successiones adsunt, nec plures esse possunt, quia tum n numerus transituum imminueretur. Consequenter plane n transitus, nempe quot radices positivæ, et m successiones erunt, nempe quot radices negativæ.

Itaque nonnisi $a)$ et $b)$ demonstranda veniunt.

Quoad $a)$ Sint multiplicandi signa quocunque ordine, et multiplicator sit æquatio simplex positiva, ex. gr. $x-a$, pro a positivo; erit, si tantum signa coefficientium scribantur et in facto coefficientes potentiæ cuiusvis ipsius x addantur, schema sequens; notando, quod coefficiens termini primi in utroque factore sit 1, atque terminus primus facti sit 1.1, coefficiens uno altioris potentiæ ipsius x; postea vero signa plane multiplicandi in linea facti superiore describantur, quum multiplicatio per x omnia signa immutata relinquat; multiplicando per $-a$ autem eadem signa in contraria mutata, sub secundo superioris incipiendo, uno ulterius terminentur; atque quodvis ν-tum seriei superioris et $(\nu-1)$-tum inferioris simul coefficientem potentiæ exponentis $\mu-\nu+2$ ipsius x efficiant;

quum nempe potentiæ ipsius x in multiplicando quovis termino ulterius ad dextram unitate decrescant, adeoque si primus terminus sit x^{μ}, in termino ν-to est potentia ipsius x exponentis $\mu-\nu+1$; et idem terminus per priorem multiplicatoris terminum dat $x^{\mu-\nu+2}$, ac potentia eadem ipsius x duntaxat e multiplicatione termini $(\nu-1)$-ti multiplicandi per terminum secundum multiplicatoris prodeat.

Quibus præmissis patet in schemate sequente

$$\begin{array}{ccccccccc}
+ & - & - & + & - & + & + & - & \\
+ & - & & & & & & & \\
\hline
+ & - & - & + & - & + & + & - & \\
 & - & + & + & - & + & - & - & +
\end{array}$$

qualisvis fuerit signorum ordo in multiplicando, quemvis transitum, qui in multiplicando est, transitum in facto parere, et præterea unum transitum accedere. Nam si in multiplicando fuerit $+\ -$ aut $-\ +$ fiet e primo $\overset{-}{-}$ e posteriore $\overset{+}{+}$; atque ubi in multiplicando prima vice occurrit $-$, adeoque primus transitus est, fiet in multiplicando $+\ -$ et $\overset{-}{-}$ in facto, adeoque terminus negativus, qui cum termino primo transitum efficiet; ita postea veniens primus positivus in multiplicando producet secundum transitum in multiplicando, et secundum in facto, quum in multiplicando tum $-\ +$ efficiat $\overset{+}{+}$ in facto; et ita porro quivis novus transitus in multiplicando pariet novum in facto; nam si ex. gr. prodeat in facto $\overset{-}{-}$, sed antequam prodierit $\overset{+}{+}$, iam terminus positivus prodiret, transitus evenit.

Consequenter quivis transitus multiplicandi transitum in facto parit. Sed præterea adhuc unus transitus in facto accedit; nam si in facto alicubi tale $\overset{-}{-}$ occurrat, post quod nullum $\overset{+}{+}$ est, tum in multiplicando post illud $+\ -$, per quod illud $\overset{-}{-}$ productum est, usque ad ultimum terminum quemvis negativum esse oportet; nam secus $-\ +$ produceret $\overset{+}{+}$; si vero in facto tale $\overset{+}{+}$ sit post quod nullum $\overset{-}{-}$ est, tum in multiplicando abinde termini usque ad ultimum positivi sunt, secus $+\ -$ produceret $\overset{-}{-}$, et post $\overset{+}{+}$ esset $\overset{-}{-}$ contra hypothesin. Itaque quum terminus ultimus seriei superioris et inferioris e termino eodem, nempe ultimo multiplicandi, prodeant, nempe superior per $+x$ inferior per $-$ multiplicando, in utroque casu, sive $\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{-}$ sive $\genfrac{}{}{0pt}{}{+}{+}$ occurrat in facto ultima vice, a termino seriei superioris ad ultimum inferioris unus transitus erit, in casu primo a negativo ad positivum, in altero casu a positivo ad negativum. Consequenter semper ubi per æquationem simplicem positivam multiplicatur, factum ad minimum unum transitum acquirit.

Quod *b*) attinet, qualiacunque signa multiplicandi se invicem excipiant, multiplicando per æquationem simplicem negativam, ex. gr. $x+2=0$, erunt signa multiplicatoris $+ \; +$, adeoque ex. gr. schema sequens erit:

$$\begin{array}{ccccccc}
+ & - & - & + & + & - & \\
+ & + & & & & & \\
\hline
+ & - & - & + & + & - & \\
 & + & - & - & + & + & -
\end{array}$$

Nempe series signorum multiplicandi ipsa est series facti tam superior quam inferior, terminis huius uno ad dextram protrusis.

Ubi in facto $\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{-}$ aut $\genfrac{}{}{0pt}{}{+}{+}$ est, in casu primo coefficiens negativus, in altero positivus est; ita termini ultimi inferioris, qui solus coefficiens ipsius x^0 est, signum quod ibidem est manet; ubi autem $\mp$ aut $\pm$ est, a magnitudine coefficientium pendet, quodnam signum terminus is nanciscatur.

Sed uti *Segner* ingeniose animadvertit, signum in facto manet id, quod in serie superiore est, donec post $\genfrac{}{}{0pt}{}{-}{-}$ tale $\pm$ aut post $\genfrac{}{}{0pt}{}{+}{+}$ tale $\mp$, aut post $\mp$ tale $\pm$ aut post $\pm$ tale $\mp$ sequatur, ut si pro casu primo in $\pm$, pro secundo in $\mp$, pro tertio in $\pm$, pro quarto in $\mp$ coefficiens inferior sit maior superiore, atque pro casu tertio in $\mp$, quod ante $\pm$ est, et pro casu quarto in $\pm$, quod ante $\mp$ est, coefficiens superior sit maior inferiore; manifesto enim in his solis casibus fit *descensus* a signo seriei superioris ad sequentem inferioris, uti schemata hæc exhibent.

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ & \diagdown & \\ - & & - \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} + & & - \\ & \diagdown & \\ + & & + \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} - & & + \\ & \diagdown & \\ + & & - \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} + & & - \\ & \diagdown & \\ - & & + \end{array}$$

Patet vero in omnibus his casibus descensum successionem parere, a $-$ ad $-$, vel a $+$ ad $+$ eundo.

Post signum autem, ad quod descensum est, series signorum inferius plane illa sequitur, quæ superius post signum, a quo descensum est; adhucdum itaque numerus successionum uno auctus est; manet vero in facto signum seriei inferioris abinde, donec post $\overset{-}{-}$ tale $\pm$, aut post $\overset{+}{+}$ tale $\mp$, aut post $\mp$ tale $\pm$ vel inverse sequatur, ut pro casu primo in $\pm$, pro secundo in $\mp$, pro tertio in $\pm$, pro quarto in $\mp$ coefficiens superior maior sit inferiore, etquidem ita ut pro casu tertio in $\mp$, pro quarto in $\pm$ coefficiens inferior sit maior superiore; in his enim casibus fiet *ascensus* a *Segnero* dictus, nempe a signo seriei inferioris ad signum superioris ascendendum erit; uti schemata hæc exhibent:

$$\begin{array}{cc} - & + \\ - & - \end{array} \qquad \begin{array}{cc} + & - \\ + & + \end{array} \qquad \begin{array}{cc} - & + \\ + & - \end{array} \qquad \begin{array}{cc} + & - \\ - & + \end{array}$$

Ubi item patet in duobus casibus prioribus unam successionem, quæ in inferiore, adeoque in multiplicando quoque est, destrui; quum in casu primo pro $-\ -$ fiat $-\ +$, in secundo pro $+\ +$ veniat $+\ -$; in duobus posterioribus vero transitum mutari in successionem.

Itaque si prius accesserit una successio, hic una quæ in multiplicando adfuit, destrui potest, usque ad signum, ad quod accensum est.

Post ascensum eadem signorum series, quæ in multiplicando a signo respondenti est, sequitur; atque dicta denuo repetuntur; patetque quotvis descensus fuerint, totidem successiones oriri tales, quæ in multiplicando non erant, at vero per quemvis ascensum posse successionem aliquam, quæ in multiplicando adest, destrui.

Interim descensuum numerus in omni casu numerum ascensuum uno superat; nam aut ascensus nullus est, aut datur ultimus; si nullus sit, tum si alius descensus non detur, saltem ab ultimo signo superioris ad ultimum inferioris illi æquale descendendo una successio nova producitur, quæ in multiplicando non fuit; si detur ascensus, sive unus sive plures fuerint, erit ultimus, nempe ultra quem alius non datur; atque tum is aut ad signum ultimum seriei superioris ascendet, aut ad aliquem ante ultimum; in casu posteriore manebunt signa seriei superioris sequentia usque ad ultimum, et in utroque casu accedet nova successio, descendendo ab ultimo signo superioris ad ultimum inferioris illi æquale.

Unde si in multiplicando fuerint successiones numero N, et in facto descensuum numerus sit β, ascensuum numerus erit $\beta-1$; atque etsi quovis ascensu N uno minor fieret, adeoque ex N fieret $N-(\beta-1)$, idem per numerum descensuum fieret $N-(\beta-1)+\beta=N+1$. Itaque semper ubi nova radix negativa infertur, multiplicatione per æquationem simplicem negativum factum ad minimum unam successionem acquirit.

Atque hinc per superius dicta assertum patet.

Ex. gr. $x^3+x^2-10x+8$ unam successionem et duos transitus, atque duas radices positivas, 1 et 2, ac unam negativam, -4 habet; $y^3-y^2-10y-8$ vero uno transitu et duabus successionibus gaudens, unam positivam radicem, 4 et duas negativas, -1 et -2 habet. Nempe radices posterioris sunt radicibus prioris plane oppositæ; quum substituto (pag. 393) $-y$ ipsi x, fiat

$$-y^3+y^2+10y+8=0,$$

et dividendo per -1, ut potentia suprema a signo $-$ liberetur, erit

$$y^3-y^2-10y-8=0.$$

cuius radix y est opposita radici prioris, nempe $y=-x$. Si exponens potentiæ supremæ par sit, tum termini ad exponentes pares manifesto manent, et tantum termini, in quibus exponentes impares sunt, mutantur in opposita; ubi vero exponens supremus impar est, tantum termini in quibus exponens par est, haud excepto 0, mutantur in opposita, ut radices novæ æquationis priorum oppositæ reddantur. Ex. gr.

$$x^4+6x^3-5x^2-42x+40$$

habet radices $1, 2-4, -5$, et radices ipsius

$$x^4-6x^3-5x^2+42x+40$$

sunt -1, -2, 4 ac 5.

Per præcedentia igitur si radices omnes reales sint, quot sint positivæ et negativæ, dignoscitur; observando interim, quod si quis terminus desit, 0 tam $+$ quam $-$ accipi possit; et si per hoc numerus radicum positivarum et negativarum diverso modo indicaretur, radicem imaginariam adesse constet.

11. Si radix commensurabilis sit, illam numerum integrum (per pag. 400), et factorem termini ultimi (per pag. 401) esse constat. Itaque inter factores termini ultimi quærendus est, qui functionem $f(x)=0$ reddat, si is in ea ipsi x ubique substituatur; uti in exemplo proximo, terminus ultimus est 40, et radices, quum omnes commensurabiles sint, e factoribus integris ipsius 40 sunt.

Si tamen terminus ultimus t nimis magnus sit, multisque factoribus gaudeat, facile poterit (per pag. 394) æquatio, substituto $y+a$ ipsi x in $f(x)$, in talem transformari, cuius radici y addendum a est, ut x prodeat; adeoque e factoribus ipsius t illi tantum tentandi erunt, num radices ipsius $f(x)$ sint, qui subtracto a factores termini ultimi æquationis novæ sunt. Sæpius sufficit, $a=+1$ vel -1 accipere; et si æquationum pro $x=y+a$, et $x=y'-a$ transformatarum ultimi dicantur U et u, patet factorem k ipsius t radicem ipsius $f(x)$ nonnisi tunc esse posse, si detur ipsius U factor talis y et factor talis y' ipsius u, ut $k=y+a=y'-a$ sit.

Ex. gr. Pro

$$x^4-40x^3+595x^2-3900x+9504=0,$$

fit substituendo $y+10$ ipsi x, æquationis novæ terminus ultimus $=4$, cuius 1, 2, -1, -2 factores; atque $10+1$, $10+2$, $10-1$ $10-2$ radices æquationis prioris sunt.

12. Si vero radix realis quidem, sed non sit cum 1 commensurabilis; tum quærantur talia a et b, inter quæ radicem cadere oportet; atque ipsis a et b quanto propius ad se invicem latis, radix inter ea cadens modo dicendo approximetur. Si $f(a)$ positivum et $f(b)$ negativum sit, demonstrabitur paulo inferius, $f(x)=0$ radice reali inter a et b cadenti gaudere; itaque talia a et b a se invicem quo minus differentia reperienda sunt. Substituendo nempe ipsi x pro radice positiva numeros 0, 1, 2, ... et pro radice negativa 0, -1, -2, ... si ex. gr. sit

$$f(x)=x^3-3x^2-17x+43,$$

si sub quemque ponatur valor ipsius $f(x)$ substituto illo numero ipsi x, erit

$$\begin{array}{cccccccccc} -4, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ -1, & 40, & 57, & 56, & 43, & 24, & 5, & -8, & -9, & 8, \end{array}$$

itaque unam radicem positivam inter 2 et 3, alteram inter 4 et 5, tertiam vero negativam inter -3 et -4 cadere constat.

Est autem etiam, ut substituendo numeros ipsi x decrescat aliquamdiu $f(x)$, et tum item crescat manente signo eodem: ex. gr. sit

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 21x + 55;$$

erunt

$$\begin{array}{rccccccc} \text{numeri} \ldots & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \\ \text{valores ipsius } f(x) \ldots & 81, & 73, & 55, & 33, & 13, & 1, & 3, \ldots \end{array}$$

atque radix positiva erit, si quidem realis fuerit, inter 2 et 3, aut inter 3 et 4; tentandum in tali casu est, addendo $\pm\omega < 1$ in hoc casu ipsi 3, num $f(3\pm\omega) \backsim 0$; quo in casu $3\pm\omega$ eo propius radici erit, quo minus $f(3\pm\omega)$ erit. Si vero $f(3\pm\omega)$ neutiquam tendat ad 0, tum radices omnes imaginariæ erunt, siquidem $f(x)$ abinde signo eodem utrinque crescat semper, ab illo termino seriei tam ad dextram quam ad lævam eundo. In hoc quidem casu, pro $\omega = \frac{1}{2}$ est

$$f\left(3+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8};$$

adeoque radix inter $3+\frac{1}{2}$ et $3+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$ est.

Omnia hæc autem illustrantur, si x tanquam abscissa et $f(x) = y$ ordinata abscissæ x respondens consideretur, et quæratur tale c ut

$$f(c) = y = 0$$

sit; atque ad ductum lineæ per extremitates ordinatarum descriptæ reflectatur, nempe si a fine abscissæ a puncto in linea abscissarum lato, donec ex a fiat b; posito interea $f(x)$ semper reale finitum esse, transibit linea ex una plaga in alteram per partem abscissæ inter fines ipsarum a et b, si $f(a)$ positivum et $f(b)$ negativum sit.

13. Ut tamen molestia tot numeros tentandi minuatur; e re est certos nosse, intra quos tentare sufficiat; nec de aliis nisi positivis radicibus agere necesse est, quum æquatio facile (pag. 393) in talem mutetur, cuius radices positivæ per -1 multiplicatæ, radices negativas prioris præbeant; dicuntur autem *limites radicum* positivarum duo valores eiusmodi, quorum unus maior quavis radice illius æquationis positiva, alter vero minor quavis radice positiva eiusdem sit.

Si quævis radix positiva <1 fuerit, tum 1 est unus limes. Consideretur itaque radix positiva unitate maior pro æquatione gradus n.

Sit $-M$ coefficiens negativus maximus, et $-N$ sit coefficiens termini negativi primi, terminorum omnium m-ti, haud numerato primo: erit terminus m-tus $=-Nx^{n-m}$; et si

$$x>1+\sqrt[m]{M}$$

accipiatur, pro x positiva et unitate maiore valor ipsius $f(x)$ certo positivus erit. Nam tum summa terminorum ab m-to usque ad illum, in quo x^0 est, etsi omnes coefficientes seorsim $=-M$ essent, esset $-\frac{M(x^{n-m+1}-1)}{x-1}$, si $-Mx^{n-m}$ primus, et x exponens ponatur per (pag. 151); quo si x^n maius sit, $f(x)$ positivum erit, nempe si ipsi x tale α positivum substituatur. Fiet vero hoc, si

$$\alpha>1+\sqrt[m]{M}$$

sit; nam tum pro $\alpha>1$ erit

$$\alpha-1>\sqrt[m]{M},$$

et

$$(\alpha-1)^m>M,$$

atque

$$(\alpha-1)\alpha^{m-1}>M;$$

et hinc multiplicando utrinque per $\frac{\alpha^{n-m+1}}{\alpha-1}$, erit

$$\alpha^n>\frac{M\alpha^{n-m+1}}{\alpha-1};$$

quod si fuerit, tanto fortius fiet

$$\alpha^n > \frac{M(\alpha^{n-m+1}-1)}{\alpha-1};$$

consequenter $f(x)$ positivum erit, si ipsi x substituatur

$$\alpha > 1+\sqrt[m]{M}.$$

Facile hoc ad exempla proxima allata applicatur.

14. Ita si (pag. 393) transformetur æquatio, ponendo $x=\frac{1}{y}$, atque æquatio ordinetur, reperta tali quantitate Q, qua si y maius accipiatur, valor functionis novæ positivus sit, erit pro $Q'>Q$,

$$\frac{1}{Q'}<\frac{1}{y},$$

per y radicem positivam novæ æquationis intelligendo; adeoque

$$\frac{1}{Q'}<x,$$

nempe $\frac{1}{Q'}$ est minima radice positiva æquationis minor. Itaque in præcedentibus tale prodierat, quo radix maior esse nequit, quia tum $f(x)$ fieret positivum et non 0, hic autem tale prodiit, quo x maius est.

15. Quoad radices negativas autem transformanda æquatio in talem est (per pag. 406), cuius radices positivæ per -1 multiplicatæ, exhibeant radices negativas prioris; atque limitibus radicum positivarum æquationis novæ quæsitis, limites radicum negativarum prioris reperientur.

Vix autem monendum est, heic limitem non sensu superiore accipi; item quod si radix una a ipsius $f(x)=0$ prodierit, $\frac{f(x)}{x-a}$ præbeat æquationem uno gradu inferiorem, cuius radices pariter quæri possunt. Patet etiam, quod si terminus ultimus deficiat, unam radicem 0 esse; nempe si 0 substituatur ipsi x, functio ad 0 redigetur; est quoque termini ultimi 0 unus factor $=0$. Ita si terminus secundus deficiat, summa radicum $=0$ est (pag. 399), adeoque summa radicum positivarum est summæ negativarum æqualis. Ita etiam patet coefficientem termini secundi non posse realem esse, nisi radices imaginariæ, si adfuerint, se invicem destruant. Patet quoque radicem positivam non dari, si coeficientes omnes, etiam ipsius x^0, positivi sint; nam tum pro quovis valore positivo ipsius x, valor positivus et non o erit.

16. Si autem æquationis radicem per dicta inter certos integros contineri constet, atque tentationibus inter illos factis, prodierit tale w, ut vera radice x dicta, sit ex. gr.

$$x-w<\frac{1}{10}, \text{ vel } x-w<\frac{1}{100}, \text{ \&c.}$$

nempe

$$x=w+f$$

denotante f fractionem veram exiguam; erit methodo Newtoniana

$$\begin{aligned} x^n &= (w+f)^n &&= w^n + nw^{n-1}f+f'f \\ px^{n-1} &= p(w+f)^{n-1} &&= pw^{n-1}+p(n-1)w^{n-2}f+f''f, \\ & \dots\dots && \\ t &= t; && \end{aligned}$$

atque $f'f+f''f+\dots$, id est summa terminorum, in quibus fractio vera f ad una altiorem potentiam elevata est, Ff dicta: erit

$$\begin{aligned} f(x)=w^n+pw^{n-1}+qw^{n-2}+\dots+sw+t \\ +(nw^{n-1}+p(n-1)w^{n-2}+q(n-2)w^{n-3}+\dots+s)f+Ff=0; \end{aligned}$$

atque hinc

$$f=-\frac{w^n+pw^{n-2}+qw^{n-3}+\dots+sw+t+Ff}{nw^{n-1}+p(n-1)w^{n-2}+q(n-2)w^{n-3}+\dots+s},$$

unde ex æquatione et quantitatis deficientis limite, æstimando maximum errorem qui committi potest, negligendo Ff ob potentias fractionis veræ exiguæ altiores, omisso Ff fit

$$x=w+f=w-\frac{w^n+pw^{n-1}+qw^{n-3}+\dots+t}{nw^{n-1}+(n-1)pw^{n-2}+(n-2)qw^{n-3}+\dots+s}$$

et ad denominatorem eundem reducendo, et addendo fit

$$x=\frac{(n-1)w^n+(n-2)pw^{n-1}+(n-3)qw^{n-2}+\ldots-t}{nw^{n-1}+(n-1)pw^{n-2}+(n-2)qw^{n-3}+\ldots+s}.$$

Approximando hoc pacto, valore reperto w' item novum f quæritur, et operatio iuxta dicta toties quoties repetitur.

Altera methodus est LAGRANGEiana. Si nempe prodierit integer a radice proxime minor, aut valor talis uti supra w, ut sit radix vera

$$x=a+\frac{1}{y} \text{ (pro } y>1),$$

substituatur $a+\frac{1}{y}$ ipsi x in $f(x)$, et ordinata æquatione quæratur integer b ipso y pr xime minor; itaque

$$a+\frac{1}{b+1}<x<a+\frac{1}{b}.$$

Ponatur

$$y=b+\frac{1}{y'},$$

ubi item $y'>1$, et æquatione proxima in qua $a+\frac{1}{y}$ substitutum ipsi x est $f_1(y)$ dicta, substituatur $b+\frac{1}{y'}$ ipsi y in $f_1(y)$; et quæratur integer b' ipso y' proxime minor; atque idem semper repetatur; ita ut si prodierit b cum μ accentis, quod dicatur β, integer ipso y totidem accentis insignito, quod dicatur Y, proxime minor, substituatur in æquatione novissima $\beta+\frac{1}{Y'}$ ipsi Y, per Y' intelligendo y uno accento pluribus, quam Y habet nempe, $\mu+1$ accentis præditum.

Eritque

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b'+\cfrac{1}{b''+\ldots}}}$$

Itaque radix incommensurabilis fractione *continua* dicta in infinitum protensa approximatur; sed de fractionibus continuis paulo inferius agetur. Patet vero superius incipiendo usque ad b, b', b'', ... alternatim esse valorem radice maiorem minoremve, quam si illi b, ubi subsistere libet, 1 addatur.

§. 40.

Si plures fuerint incognitæ x, y, . . ., et totidem æquationes gradus primi tales dentur, quarum nullius veritas aut falsitas e reliquis fluit:

1. Aut quæritur ex una valor ipsius x, quasi reliquæ incognitæ notæ essent, et reperto valore, substituto ipsi x in æquatione sequenti, quæritur ex hac valor ipsius y, qui hoc pacto neque x nec y continet; atque si z adfuerit, substituto in æquatione sequenti valore ipsius x prius reperto, et tum ipsi y substituto ubique valore proxime reperto prodibit æquatio, in qua x, y non amplius adsunt, et nonnisi z est, si in initio tantum x, y, z fuerint; adeoque z reperitur; et inde regrediendo, ex æquatione, in qua nonnisi y et z erant, substituendo valorem ipsius z, prodibit y, atque ex æquatione, in qua x, y, z sunt, substitutis iam repertis valoribus ipsorum x, y prodibit x quoque.

Quotvis autem fuerint incognitæ numero μ, progrediendo ad æquationem sequentem ν-tam incognitæ numero $\nu - 1$ disparent; adeoque demum una manet; inde reperto huius valore per æquationes, per quas descensum est, ascendendo omnes prodeunt.

2. Aut ita transformantur æquationes, ut e summa earum nova æquatio promanet talis, in qua coefficiens omnium incognitarum, præter unam, quam quærere libet, o sit; quo pacto incognita ista reperitur.

Ex. gr. Sit

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c';$$

erit (iuxta 1)

$$x = \frac{c - by}{a},$$

quo substituto in æquatione sequenti erit

$$c' = \frac{a'(c - by)}{a} + b'y = \frac{a'c - a'by}{a} + b'y$$

et hinc

$$y\left(b' - \frac{a'b}{a}\right) + \frac{a'c}{a} - c' = 0,$$

atque hinc

$$y + \frac{a'c - c'a}{a} : \frac{b'a - a'b}{a} = 0,$$

consequenter

$$y = -\frac{a'c - c'a}{ab' - ba'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

atque hoc in

$$x = \frac{c - by}{a}$$

substituto, fit

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Idem modo secundo prodit; nempe multiplicando æquationem priorem per b', posteriorem per $-b$, et addendo fiet

$$x(ab' - a'b) + y(bb' - bb') = cb' - bc',$$

unde x idem prodit, quod prius. Pariter y prodit.

Utrumque ad tres pluresve incognitas applicari potest.

Exempla.

α) Quærantur duæ quantitates x et y tales, ut $x + y = s$ et $x - y = d$; erit methodo priore

$$x = s - y,$$

quo substituto in sequente, est

$$s - y - y = d,$$

unde

$$-2y = d - s,$$

adeoque

$$2y = s - d,$$

et

$$y = \frac{s - d}{2};$$

et hoc substituendo in

$$x = s - y,$$

fit

$$x = \frac{s + d}{2}.$$

Modo posteriore substituto s ipsi c, et d ipsi c', ac 1 ipsis a et a' et b, atque -1 ipsi b'; erit

$$x=\frac{s(-1)-1.d}{1.(-1)-1.1}=\frac{-(s+d)}{-2}=\frac{s+d}{2}$$

ut prius.

b) Nota est mulorum de sarcinis suis conquerentium fabula. Prioris sarcina est x, alterius y; is tantam esse suam queritur, ut si hic illi pondus $=1$ traderet, æque gravati essent; hic autem respondet suum pondus duplum fore, si is illi 1 traderet. Erit hinc

$$x+1=y-1,$$

et

$$y+1=2(x-1),$$

adeoque

$$x-y=-2,$$

et

$$2x-y=3;$$

itaque multiplicando superiorem per -1, et addendo, id est superiorem subtrahendo ex inferiore coefficiens ipsius y erit 0, et $x=5$ erit, quo substituto in quavis æquatione, erit $y=7$.

Idem prodit, si superius ponatur

$$a=1,\ b=-1,\ c=-2,$$
$$a'=2,\ b'=-1,\ c'=3.$$

Exempla ad plures incognitas passim reperire et Tyrones ipsi condere possunt; quotvis autem incognitæ fuerint, ingeniosa a Bezout data regula reperiri possunt. Nimirum:

Si e rebus a, b, c, d construantur permutationes ita, ut prius prodeant ab et ba, ac priori præponatur signum $+$. posteriori $-$, et semper omnibus permutationibus factis literarum permutatarum suscipiatur operatio sequens, cum singulis eo ordine quo prodierunt; nimirum sequens litera nova postponatur, deinde migret ista semper uno porro versus sinistram, donec omnes ad dextram post se relinquat; et prima harum permutationum, in qua litera nova ultima versus dextram est, retineat signum illius, cui postponitur, reliquæ autem quavis migratione, uti prodeunt, signum mutent; atque si prodierint permutationes A, B, . . . , prius ex A generentur modo dicto aliæ, tum ex B, et ita porro, ac ordinentur, uti prodierunt, prius ex A generatæ, tum ex B generatæ, &c.

Regula porro est sequens. Quod si fuerint tot incognitæ quot æquationes primi gradus, et coefficiens ipsius x sit litera a, coefficiens ipsius y sit litera b, ipsius z litera c et ita porro; quævis in prima æquatione sine accento, in secundo cum uno, in tertia cum duobus. et ita porro; ad dextram vero sit litera sequens post omnium coefficientium literas cum eodem accento, quæ in æquatione est; litera ista vero denotet partem æquationis cognitam, ita ut alterius membri, quod ad sinistram est, quivis terminus sit factum ex incognita in cognitam; tum in denominatore describantur literarum coefficientium permutationes omnes, quæ literas illas omnes continent, illo ordine quo modo dicto prodierunt, atque iis signis afficiantur, quibus prodierunt. Tum pro valore cuiusvis incognitæ scribatur in numeratore supra literam coefficientis incognitæ illius litera, quæ ad dextram est; præter hoc vero supra quamvis literam denominatoris ponatur in numeratore quoque litera eadem, et signa $+$, $-$ eadem sint in numeratore, quam in denominatore; et in quovis termino tam numeratoris quam denominatoris litera prima sit sine accento, quævis sequens vero acquirat unum accentum.

Demonstratione ingeniosa et elegans hæc lex digna videtur. Si valet hæc regula de quotvis incognitis usque ad certum numerum ν incognitarum, a 2 incipiendo, demonstratur valere etiam de numero incognitarum uno maiore; atque verum est de 2, de 3, . . . incognitis ab inductione, &c.

I. Exprimantur literæ numeris, primæ incognitæ x coefficiens a numero 1, secundæ y numero literæ ipsius, nempe per 2, &c.

Multiplicentur omnes æquationes præter ultimam, prima per m, sequens per n, tertia per p, quarta per q, & . . . Sint m, n, p, q, . . . integri; tum subtrahatur ultima æquatio e summa priorum, atque in differentia ponatur omnis incognitæ præter illam, cuius valor quæritur, coefficiens $=0$, et erit valor incognitæ, cuius coefficiens remansit, æqualis membro ad dextram diviso per coefficientem incognitæ.

Ex. gr. Sit

$$\begin{aligned}
1\,x+2\,y+3\,z+4\,u+5\,v&=6,\\
1'\,x+2'\,y+3'\,z+4'\,u+5'\,v&=6',\\
1''\,x+2''\,y+3''\,z+4''\,u+5''\,v&=6'',\\
1'''x+2'''y+3'''z+4'''u+5'''v&=6''',\\
1''''x+2''''y+3''''z+4''''u+5''''v&=6'''',
\end{aligned}$$

erit

$$x(m1+n1'+p1''+q1'''-1'''')=m6+n6'+p6''+q6'''-6'''',$$

et

$$x=\frac{m6+n6'+p6''+q6'''-6''''}{m1+n1'+p1''+q1'''-1''''},$$

si nimirum

$$\begin{aligned}
m2+n2'+p2''+q2'''&=2'''',\\
m3+n3'+p3''+q3'''&=3'''',\\
m4+n4'+p4''+q4'''&=4'''',\\
m5+n5'+p5''+q5'''&=5''''.
\end{aligned}$$

Ita valor cuiusvis alius incognitæ per dicta determinatur; et patet expressionem valoris ingredi numeros indeterminatos m, n, p, q nempe novas incognitas, sed datis una pauciores, pro quibus totidem æquationes dantur; adeoque si pro tot incognitis valeat regula a Bezout data, determinentur ope istius incognitæ m, n, p, q, et in valore ipsius x substituantur valores reperti; idem fiat pro valoribus y, z, ..., et inquiratur, num valores hoc modo reperti regulæ congrui sint. Posito valere regulam de ν incognitis, cuius vicem modo subeat 4; determinabuntur iuxta regulam incognitæ m, n, p, q ex æquationibus earum dictis, quæ modo sequente exprimantur:

$$\begin{aligned}
\dot{1}m+\dot{2}n+\dot{3}p+\dot{4}q&=\dot{5},\\
\dot{1}'m+\dot{2}'n+\dot{3}'p+\dot{4}'q&=\dot{5}',\\
\dot{1}''m+\dot{2}''n+\dot{3}''p+\dot{4}''q&=\dot{5}'',\\
\dot{1}'''m+\dot{2}'''n+\dot{3}'''p+\dot{4}'''q&=\dot{5}''',
\end{aligned}$$

ubi per numerum denotetur quidem, quotænam incognitæ coefficiens intelligatur, sed valor ab illo, quem numerus idem sine stellula denotat in prioribus æquationibus, diversus significari queat.

II. Interim valores incognitarum ex proximis æquationibus per regulam a BEZOUT datam expressi facile in numeros stella carentes transferri modo sequente possunt. Nempe $\overset{*}{1}$ denotat 2, $\overset{*}{1}'$ denotat 3, et ita porro deorsum numero accentorum uno maior uno maius denotat; porro $\overset{*}{2}$ mutatur in $2'$, $\overset{*}{3}$ in $2''$, $\overset{*}{4}$ in $2'''$; ita $\overset{*}{1}'$ in 3, $\overset{*}{2}'$ in $3'$; verbo numero accentorum additur 2, ut prodeat numerus, et numerus unitate mulctatus dat accentorum numerum; nam in suprema æquationum proximarum accentus ubique 0 est; in illis æquivalentium suprema vero est ubique $2 = 0 + 2$; accentusque in hac est in loco primo $0 = 1 - 1$ tum quovis loco accedit unus accentus, uti numerus crescit uno in æquationum primitivarum suprema; porro autem in his in quavis columna verticali deorsum accenti in quavis linea uno crescunt, uti numeri in prioribus in quavis linea eadem horizontali manentes iidem; itaque 2 addito numero accenti dat semper numerum prioris; et accentum esse semper 0 patet, dum 1 transfertur, qualivis accento gaudeat, 2 vero dare accentum $'$; et cum in primitivsi æquationibus numeri in quavis linea horizontali ab 1 progrediantur, priorum vero idem numerus quovis loco unum accentum nanciscatur, est numerus accentorum in translatione numerus translatus unitate mulctatus. Ubi nullus accentus est, reputetur pro accento 0. Aequationes ipsorum m, n, . . . (pag. 417) primitivæ dicuntur, quibus priores æquivalent.

Si igitur numerus incognitarum in æquationibus totidem prius propositis quivis sit, et lex de incognitis una paucioribus valeat; considerato casu proposito, in quo numerum 5 e demonstratione ipsa quemvis repræsentare posse patebit, pro valore ipsius x erit:

$$m=\frac{\overset{*}{5}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{3}''\,\overset{*}{4}'''-\overset{*}{5}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{4}''\,\overset{*}{3}'''+\overset{*}{5}\,\overset{*}{4}'\,\overset{*}{2}''\,\overset{*}{3}'''-\dots}{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{3}''\,\overset{*}{4}'''-\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{4}''\,\overset{*}{3}'''+\overset{*}{1}\,\overset{*}{4}'\,\overset{*}{2}''\,\overset{*}{3}'''-\dots},$$

$$n=\frac{\overset{*}{1}\,\overset{*}{5}'\,\overset{*}{3}''\,\overset{*}{4}'''-\overset{*}{1}\,\overset{*}{5}'\,\overset{*}{4}''\,\overset{*}{3}'''+\overset{*}{1}\,\overset{*}{4}'\,\overset{*}{5}''\,\overset{*}{3}'''-\dots}{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{3}''\,\overset{*}{4}'''-\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{4}''\,\overset{*}{3}'''+\overset{*}{1}\,\overset{*}{4}'\,\overset{*}{2}''\,\overset{*}{3}'''-\dots},$$

$$p=\frac{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{5}''\,\overset{*}{4}'''-\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{4}''\,\overset{*}{5}'''+\overset{*}{1}\,\overset{*}{4}'\,\overset{*}{2}''\,\overset{*}{5}'''-\dots}{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{3}''\,\overset{*}{4}'''-\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{4}''\,\overset{*}{3}'''+\overset{*}{1}\,\overset{*}{4}'\,\overset{*}{2}''\,\overset{*}{3}'''-\dots},$$

$$q=\frac{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{3}''\,\overset{*}{5}'''-\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{5}''\,\overset{*}{3}'''+\overset{*}{1}\,\overset{*}{5}'\,\overset{*}{2}''\,\overset{*}{3}'''-\dots}{\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{3}''\,\overset{*}{4}'''-\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}'\,\overset{*}{4}''\,\overset{*}{3}'''+\overset{*}{1}\,\overset{*}{4}'\,\overset{*}{2}''\,\overset{*}{3}'''-\dots},$$

atque translatione (per II) facta erunt valores

$$m=\frac{2''''\,3'\,4''\,5'''-\dots}{2\,3'\,4''\,5'''-\dots}=\frac{3'\,4''\,5'''\,2''''-\dots}{2\,3'\,4''\,5'''-\dots},$$

$$n=\frac{2\,3''''\,4''\,5'''-\dots}{2\,3'\,4''\,5'''-\dots}=\frac{2\,4''\,5'''\,3''''-\dots}{2\,3'\,4''\,5'''-\dots},$$

$$p=\frac{2\,3'\,4''''\,5'''-\dots}{2\,3'\,4''\,5'''-\dots}=\frac{2\,3'\,5'''\,4''''-\dots}{2\,3'\,4''\,5'''-\dots},$$

$$q=\frac{2\,3'\,4''\,5''''-\dots}{2\,3'\,4''\,5'''-\dots}.$$

Ita si quævis alia incognitarum quæratur, eodem modo reperiuntur talia m, n, ... ut coefficientes reliquarum evanescant; atque quum pro aliis incognitis non eadem m, n, ... ponantur, et statim dicenda M, N, ..., non eadem pro diversis incognitis sed concernentia intelligantur.

Quæ de valore ipsius x demonstrabuntur, mutatis mutandis ad y, z, ... applicari poterunt.

Quomodo autem ad singularem hanc regulam perveniri potuerit, perspici ex exemplo (pag. 413) allato potest, sicubi coefficientes incognitarum simul cum coefficiente potentiæ exponentis o ita ut ibi designantur, denotare contigit.

Denominator tam valoris m, quam reliquarum incognitarum n, p, q est idem, continens omnes permutationes numerorum $\overset{*}{1}, \overset{*}{2}, \overset{*}{3}, \overset{*}{4}$, dicatur d; et denominator d valorum eorundem m, n, p, q postquam modo dicto in numeros stellula carentes translati sunt, dicatur D; numeratores autem sint M, N, P, Q. Eritque

$$x = \frac{\dfrac{6.M+6'.N+6''P+6'''.Q}{D} - 6''''}{\dfrac{1M+1'N+1''P+1'''.Q}{D} - 1''''}$$
$$= \frac{6.M+6'.N+6''.P+6'''Q-6''''D}{1.M+1'.N+1''.P+1'''Q-1''''D}.$$

Ita pro reliquis incognitis quoque respective concernentibus m, n, p, q repertis erunt, pro quavis incognita concernentia, id est pro illa prodeuntia M, N, ..., intelligendo

$$y = \frac{6.M+6'.N+6''.P+6'''Q-6''''D}{2.M+2'.N+2''.P+2'''Q-2''''D},$$
$$z = \frac{6.M+6'.N+6''.P+6'''Q-6''''D}{3.M+3'.N+3''.P+3'''Q-3''''D},$$
$$u = \frac{6.M+6'.N+6''.P+6'''Q-6''''D}{4.M+4'.N+4''.P+4'''Q-4''''D},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

III. Si translatio formularum, qua D ex d et qua M, N, P, Q prodeunt consideretur, cum per hypothesim in quovis termino sint accenti $0\ '\ ''\ '''$ patet (per II) prodire in quovis termino ipsorum D, M, N, P, Q numeros 2, 3, 4, 5, accentos vero in D esse in quovis termino $0\ '\ ''\ '''$; quia terminus quilibet ipsius d est permutatio numerorum $\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}$; unde etiam in D prodit permutatio quævis numerorum 2, 3, 4, 5, quia prouti in d permutantur numeri 1, 2, 3, 4 imaginis 2, 3, 4, 5 ab accentis constantibus $0\ '\ ''\ '''$ pendentis, accenti ita migrant in imagine dicta omni permutatione possibili; itaque si semper iuxta accentos disponantur, patet permutationem quamvis, nec eandem imaginem bis, prodire, quia tum permutatio eadem in d bis occurreret.

Porro cum in expressionum illarum, e quibus M, N, P, Q depromta sunt, quavis adsint omnes permutationes numerorum $\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}$, nempe in illa, e qua M translata est absque $\dot{1}$, in illa e qua N translata est absque $\dot{2}$, absque $\dot{3}$ in illa e qua P & deprompta est (per hypothesim);

patet adesse quidem in quovis ipsorum M, N, P, Q omnes permutationes numerorum 2, 3, 4, 5, sed in M deesse accentum o propter defectum numeri $\overset{*}{1}$ in expressione, e qua deducitur, in N deesse accentum $'$, in P accentum $''$, in Q accentum $'''$ propter defectum numerorum $\overset{*}{2}, \overset{*}{3}, \overset{*}{4}$ in expressionibus primariis dictis; nempe (per II) ubi $\overset{*}{1}$ deest, in translato accentus o deest, nam numerus accenti est æqualis numero ipsi unitate mulctato; ita ubi 2 deest, in translato accentus $2-1=1$ deesse debet &c.

Si iam in expressione superiore ipsius x in numeratore cuivis termino ipsius M præponatur 6 sine accento, in quovis termino ipsius N præponatur $6'$ cum uno accento, scilicet ibi datur accentus o, in P loco tertio ponatur in quovis termino $6''$, in Q loco quarto $6'''$ in quovis termino et $6''''$ loco ultimo cuiusvis termini ipsius D; in denominatore vero plane in loca dicta ponatur 1 cum iisdem accentis; prodibunt superius permutationes omnes numerorum 2, 3, 4, 5, 6, inferius omnes numerorum 1, 2, 3, 4, 5; et quum ita ordinentur, ut in valore ipsius x, ubi 1 infra stat, semper 6 stet supra 1, reliqui numeri etiam in quovis termino iidem cum iisdem accentis in quavis verticali iidem esse poterunt. Itaque pro valore ipsius x iuxta regulam Bezout-i prodeunt termini, præterquam quod signa rite prodiisse demonstrandum supersit.

Idem pro alia incognita patet, si hæc locum in æquationibus cum x permutet.

IV. Quod autem signa attinet: sit μ numerus incognitarum in æquationibus totidem propositis; erunt m, n, ... numero $\mu - 1$ ex totidem æquationibus determinanda. Dicantur permutationes, quæ pro valoribus ipsorum m, n, ... (per hypothesim) iuxta *regulam Bezouti* rite prodeunt, *primitivae*, et eædem (pag. 417) in numeros stella carentes translatæ dicantur *translatae* priorum; denotetque heic litera in locum exponentis accento postposito numerum accentorum illius numeri, cui quasi exponens adponitur.

Quævis primitiva permutatio numerorum

$$\overset{*}{1}, \overset{*}{2}, \ldots, (\overset{*}{\mu - 1})$$

gaudet signo $+$, regulæ BEZOUT-i convenienti, et *translata* quoque illius signum idem retinet, atque permutatio cuivis superimposita signo eodem gaudet.

Erit autem μ aut par, aut impar; et $\mu - 1$ in casu priore fiet impar, et par in posteriore. Si μ par fuerit, prodibunt pro valore ipsius x (pag. 420) termini denominatoris omnes, quoad numerum accentorum ordinati, regulæ convenientes; nempe tum permutationes in D regulæ contrariis signis præditæ, præposito signo $-$ valorem regulæ convenientem dabunt, ut statim patebit.

Si vero μ impar fuerit, tum omnes denominatoris permutationes, simul cum terminis ipsius $-1^{(\mu-1)'}D$, iuxta numeros accentorum ordinatæ, signa regulæ contraria habebunt; atque tam numeratoris quam denominatoris, opposita accipiendo, valore ipsius x immutato, singuli termini signa regulæ convenientia nanciscentur.

Consideretur enimvero prius tantum in d permutatio primitiva prima, et huic in numeratore superimposita. Nempe

$$\frac{\dot{\mu}\ \dot{2}'\ \dot{3}'' \ldots (\mu \dot{-} 1)^{(\mu-2)'} + \ldots}{\dot{1}\ \dot{2}'\ \dot{3}'' \ldots (\mu \dot{-} 1)^{(\mu-2)'} + \ldots}$$

erit superioris *translata* una permutatio ipsius M, inferioris *translata* erit una permutatio ipsius D; eritque translata numeratoris, si extremi permutentur, iuxta numeros accentorum ordinando

$$3'\,4'' \ldots \mu^{(\mu-2)'}\,2^{(\mu-1)'},$$

inferior autem erit (per II.)

$$2\;3'\,4'' \ldots \mu^{(\mu-2)'}.$$

Atque hinc pro valore ipsius x in $\dfrac{(\mu+1)\,M + \ldots}{1 M + \ldots}$ per translationem prodibit

$$\frac{(\mu+1) \cdot 3' \cdot 4'' \ldots \mu^{(\mu-2)'} \cdot 2^{(\mu-1)'} + \ldots}{1 \cdot 3' \cdot 4'' \ldots \mu^{(\mu-2)'} \cdot 2^{(\mu-1)'} + \ldots};$$

in

$$\frac{D.(\mu+1)^{(\mu-1)'}}{D.1^{(\mu-1)'}}$$

autem prodibit

$$\frac{2.3'.4''\ldots\mu^{(\mu-2)'}.(\mu+1)^{(\mu-1)'}+\ldots}{2.3'.4''\ldots\mu^{(\mu-2)'}.1^{(\mu-1)'}+\ldots}.$$

Termini tantum denominatoris considerandi veniunt; nempe in denominatore, si incognitæ numero μ fuerint, permutationes numerorum $1, 2, \ldots, \mu$ omnes prodeunt, et dein pro x supra 1 ubique ponitur $\mu+1$, reliquis literis autem iisdem etiam, signa accentique ubique eadem ponuntur.

Translatæ permutationes quævis cum primitivis eodem signo gaudent, tantum valorem facti e quantitatibus permutatis tanquam factoribus producti respiciendo; sed præposito 1 tanquam multiplicatore permutatio $1\,3'4''\ldots\mu^{(\mu-2)'}2^{(\mu-1)'}$, quæ quoad valorem signo + gaudet, ut factum ex 1 et translata ipsius $+\overset{*}{1}\,\overset{*}{2}\,\overset{*}{3}\ldots(\mu\overset{*}{-}1)^{(\mu-2)'}$, si μ impar fuerit, iuxta regulam signum — habebit.

Nam numerus numerorum in permutatione inter 1 et 2 erit $\mu-2$, adeoque par, si μ par fuerit, et impar si, μ impar sit; 12 vero habebat +; ponatur prius 3 ad finem dextrum, manebit signum idem, permutet 3 locum cum præcedente 2, fiet —; ponatur sequens nempe 4 ad finem dextrum, manebit —, permutet 4 locum cum 3, fiet +; et ita porro, semper numerus sequens inmediate maior ponatur ad finem dextrum, qui signum præcedens retinens permutet locum cum præcedenti, donec nullus maior supersit. Hoc pacto patet toties permutari signum, quot numeri inter extremos sunt, et si numerus mutationis signi par sit, signum + manere, si impar sit, signum — iuxta regulam fieri. Itaque pro μ pari id, quod prodit, convenit regulæ, pro μ impari autem contrariatur.

Item si μ par sit, $-D.1^{(\mu-1)'}$ legi conveniens est; si μ impar fuerit, contrariatur. Nam tum 1 erit ultimus; nempe heic numerus accenti uno auctus æqualis est numero loci; numeri intermedii sunt, qui prius in termino primo; itaque quum 21 gaudeat iuxta regulam signo —, prodibit pro μ pari $D\mathrm{I}^{(\mu-1)'}$ cum signo $-$; itaque factum $D\mathrm{I}^{(\mu-1)'}$ iuxta regulam quoque signum $-$ habebit; valori ipsius x etiam satisfaciendo.

Si vero μ impar fuerit, prodibit $D\mathrm{I}^{(\mu-1)'}$ iuxta regulam cum signo $+$; itaque quum et præcedentes permutationes denominatoris signis legi contrariis præditæ sint, tam numeratoris quam denominatoris oppositum accipiendo, valore ipsius x immutato, signa legi quoque convenient; nempe tum etiam $-D\mathrm{I}^{(\mu-1)'}$ in $+D\mathrm{I}^{(\mu-1)'}$ mutabitur.

Quod autem e solo termino denominatoris primo ad omnes concludi queat, patet sic. Quævis permutatio fuerit in translatis, quibus x modo dicto exprimitur; illa ex aliqua primitivarum dictarum orta adposito I in denominatore iuxta accentum eius, et supra id $\mu+\mathrm{I}$, cum ea signum idem habet in expressione ipsius x, abstrahendo a lege BEZOUT-i. Facile autem perspicitur, quod permutatio quævis rerum certarum e quavis permutatione earundem produci queat, permutatione unius aut plurium certarum cum immediate præcedente ad lævam certo numero facta, et quævis eiusmodi permutatione signum per legem BEZOUT-i mutetur; atque etiam dum in primitiva permutatur aliqua cum præcedente ad lævam, et in translata eius mutetur signum. Atque hinc patet quod si prior permutatio superius dicta legi convenerit, conveniant omnes; si non, tum omnes signa contraria habeant. Quæ uberius exponere, tam prolixitas vitanda quam brevitas necessaria vetat.

Consequenter de x regula generaliter valet; nempe sive par sive impar fuerit μ, valet, si de $\mu-\mathrm{I}$ valet; valet autem de duabus, tribus, et quatuor incognitis; itaque valet de quinque, et hinc de sex, atque inde de septem, et ita porro.

Parique modo de reliquis incognitis demonstrando generaliter constat.

§. 41.

Si autem æquationes gradus primi pauciores fuerint quam incognitæ (pag. 373); tum accipiendo tot incognitas, quot æquationes datæ sunt, earum valoribus quæsitis, reliquis incognitis arbitrarie quidvis substitui potest; nisi certa restrictione posita, valores incognitarum certa qualitate præditos esse oporteat.

Ex. gr. Pro

$$10x + 5y + \frac{1}{2}z = 100,$$

et

$$x + y + z = 100,$$

si cuiusvis incognitæ valor integer positivus postuletur,

$$x = 1, \quad y = 9, \quad z = 90,$$

neque alia resolutio ulla datur.

Resolutio eiusmodi æquationis (*indeterminatae* dictæ gradus primi) pro valoribus incognitarum integris commode ope *fractionum continuarum* perficitur: itaque quum et superius (pag. 412) mentio earum fuerit, atque etiam æquatio quadratica ope earum resolvi possit, de his quædam dicenda veniunt; quapropter alia adhuc pariter per se quoque necessaria præmittuntur.

1. Conversa ipsius (pag. 67) quoque valet, nempe *fractionis terminis nonnisi per aequalia multiplicatis, fractio valoris aequalis prodit.* Sit quippe

$$\frac{a}{a'} = \frac{A}{A'};$$

tum

$$\frac{A'}{a'} = \frac{A}{a}.$$

Sit enim

$$\frac{A'}{a'} = q, \quad \text{et} \quad \frac{A}{a} = q \mp r;$$

erit

$$A' = a'q, \quad \text{et} \quad A = a(q \mp r) = aq \mp ar.$$

Sed

$$\frac{aq}{a'q} = \frac{a}{a'} = \frac{A}{A'} = \frac{aq \mp ar}{a'q};$$

unde

$$aq = aq \mp ar,$$

quod nisi $r = 0$ sit, fieri nequit.

2. *Si A et A' numeri inter se primi fuerint, tum $\frac{A}{A'}$ terminis minimis exprimitur.*

Nam exprimatur valor idem integris minimis per $\frac{a}{a'}$; erit

$$\frac{a}{a'}=\frac{A}{A'},$$

ac per præcedentia

$$A=aq, \quad \text{et} \quad A'=a'q,$$

ubi q integer præter 1 esse nequit; nam tum integros A, A' integer metitur, adeoque non essent primi. Itaque q aut fractio vera, aut summa fractionis veræ f et integri i est; neutrum esse potest; fractio vera non, quia tum $\frac{af}{a'f}=\frac{a}{a'}$ minoribus terminis exprimeret valorem $\frac{a}{a'}$ contra hypothesim; neque $q=f+i$ est; nam tum $\frac{a}{a'}=\frac{ai+af}{a'i+a'f}$, ubi numerator denominatorque, ita ai et $a'i$, adeoque af et $a'f$ integri sunt; atque $af \lessdot a$ et $a'f \lessdot a'$ est, quia $f \lessdot 1$; itaque valoris eiusdem non esset minima expressio $\frac{a}{a'}$ contra hypothesim, nam $\frac{a}{a'}=\frac{af}{a'f}$.

3. *Si A et A' item numeri inter se primi fuerint et $\frac{A}{A'}=\frac{a}{a'}$ et $Ak=a$: tum et $A'k=a'$* (per 1); *k vero integer est, si a et a' integri sint.*

Nam $k \lessdot 1$ esse nequit: quia $kA \lessdot A$ esset, et $\frac{A}{A'}$ per $\frac{a}{a'}$ minoribus terminis experimeretur (contra 2.); sed k neque summa integri i et fractionis veræ f est; nam, ut in præcedentibus, item non esset minima eiusdem valoris expressio.

4. *Si $N=ab$ vel $ab\ldots t$, et N, a, b, ..., t integri, et praeter N omnes numeri per se primi sint,* nempe quorum nullum alius præter se et 1 metitur, id est nullus per alium integrum divisus quotum integrum dat: *tum N alia factorum primorum imagine exprimi nequit*; id est factores primi, quorum factum N est, semper iidem qui prius sunt, nec præter factorum ordinem differunt.

Nam sit prius $n=ab$, pro a, b per se primis; si pro q per se primo esset etiam $n=Bq$: tum $ab=Bq$ fieret, atque hinc

$$\frac{a}{q}=\frac{B}{b};$$

et quum a, q per se primi, adeoque inter se primi, nisi æquales sint, esset (per 3.) talis integer k, ut $ak=B$ et $qk=b$: adeoque b non esset per se primus. Si vero $a=q$, tum $B=b$, propter

$$\frac{a}{q}=1=\frac{B}{b}.$$

Consequenter si n e duobus factoribus primis constat, ex aliis constare nequit.

Hinc vero de quotvis ad uno plures concluditur; nempe si nullus integer I expressus per m factores primos, cuius imago sit i, queat abstrahendo a factorum ordine ullo modo alia primorum imagine exprimi, accedat factor primus v, et sit $Iv=N$. Tum N nulla alia factorum primorum imagine nisi per iv, abstrahendo a factorum ordine, exprimi poterit.

Nam exprimatur etiam per $\beta\gamma$, denotante γ numerum primum; erit tum $iv=\beta\gamma$, atque hinc

$$\frac{i}{\beta}=\frac{\gamma}{v};$$

ubi, ut antea, γ et v inter se primi sunt, adeoque, pro certo integro k, est $i=\gamma k$. Et si k imagine factorum primorum expressum K dicatur, erit $i=\gamma K$, et quum i ex m factoribus primis constet, i et γK æquales imagines sunt. Atque hinc est $iv=v\gamma K$; et quia $iv=\beta\gamma$ erat, est $v\gamma K=\beta\gamma$, adeoque $vK=\beta$; sed iv adeoque $v\gamma k$ constat ex $m+1$ primis factoribus, itaque vK constat ex m, per hypothesim autem numerus, qui per m factores primos exprimitur, alia primorum imagine exprimi nequit. Consequenter vK et β eadem imago est; adeoque $v\gamma K$ et iv ac $\beta\gamma$ eædem imagines sunt.

5. *Hinc si primorum a, b, . . . quilibet seorsim metitur numerum N, eundem N et productum e quibuslibet eorundem primorum metitur.*

Nam sit n imago ipsius N factoribus primis expressi, et sit $N:a=Q$, adeoque $N=aQ$, et sit q imago ipsius Q factoribus primis expressi; erit n et aq imago eadem (per 4.). Itaque a adest in n, pariter quivis ipsorum b, . . . adest; consequenter quilibet eorum ita ordinari possunt, ut partem imaginis constituant.

Conversim quoque integer P integrum N nonnisi ita metitur, si P factoribus primis ita exprimi queat, ut imaginis alicuius, qua N factoribus primis exprimitur, partem constituat. Nam si $N=P.M$, et N, P, atque M factoribus primis exprimantur, imago eadem ipsius $P.M$, quæ ipsius N erit.

6. Num vero numerus aliquis per se *primus*, aut e primis *compositus*, ut dici solet, fuerit; de hoc videatur opus (pag. 206) citatum. Vulgare est, numerum quemvis primum (numero 3 maiorem) formæ

$$6n\pm 1=2.3n\pm 1$$

esse debere, quamvis conversim non sit quivis (ex. gr. 25) formæ $6n\pm 1$ primus. Nempe si integer N per 6 dividatur, sit quotus q, residuum est ipsorum 1, 2, 3, 4, 5 aliquis; si 2 vel 4 sit, tum N par est; si 3 sit, tum

$$N=2.3.q+3=3(2q+1);$$

si residuum 5 sit, tum

$$N=2.3q+2.3-1=2.3(q+1)-1,$$

seu $6n-1$. Itaque nisi residuum 1 aut 5 sit, idest N sub formam $6n+1$ vel $6n-1$ veniat, compositus est.

7. E prioribus etiam *divisor communis maximus* plurium integrorum factoribus primis expressorum, necnon *minimus eorem, quem datorum quivis metitur*, reperitur. Nempe quoad primum eiusmodi imago I factorum primorum construenda est, in qua nonnisi talis factor occurrat, qui in quolibet datorum adest, et quivis adsit toties, quoties adest in datorum quovis, nec pluries adsit in omni quovis eorundem; nam tum

imago ista I imaginis datorum cuiusvis pars erit; qualiscunque primus p autem adiungeretur ipsi I, ut ex I fiat I', si I' quemque datorum metiatur, tum p adest in quovis datorum, adeoque in I quoque; atque si p in I adfuerit m-ies, tum in I' erit $(m+1)$-ies; itaque et in quovis datorum aderit $(m+1)$-ies; atque in I non adesset toties, quoties in quovis adest, quum nonnisi m-ies adsit.

Quod secundum attinet, talis imago i primorum construenda est, in qua datorum quivis factor primus adsit, et quivis toties, quoties idem in aliquo datorum plurima vice occurrit. Nam datorum cuiusvis omnes factores primi in i adesse debent; nam cuiusvis imaginem, partem ipsius i esse oportet; si vero aliquis factor p ex i tolleretur, si is in illo datorum, K dicto, ubi plurima vice adest, m-ies adsit, etiam in i aderat m-ies, et nunc $(m-i)$-ies remansit; itaque K ipsum i, sublato p, non metitur (per pag. 428).

Hinc si fractionum quarumvis ad terminos minimos reductarum, denominator communis C minimus quæratur, erit is minimus eorum, quem quilibet denominatorum metitur. Et si fractionum datarum quævis $\frac{a}{b}$ sit: erit $\frac{C.a}{b}$ numerator fractionis novæ, quæ $=\frac{a}{b}$ nempe

$$\frac{C.a}{b}:C=\frac{aC}{bC}=\frac{a}{b}.$$

Nam quum a et b inter se primi sint, per integrum multiplicandi sunt, ut valor æqualis prodeat; itaque denominator quivis communem metiri debet. Consequenter denominatorem integrum minimum esse oportet, quem quivis denominatorum metiatur.

8. *Potest quidem divisor communis maximus absque eo quoque, ut factores primi quaererentur, reperiri.* Quotvis integri A, B, . . . fuerint, quæritur prius ipsorum A et B factor communis maximus F, tum quæritur ipsorum F et C factor communis maximus f, et semper novissimi factoris communis, et sequentis numeri dati factor communis maximus quæritur; atque ultimus erit omnium factor communis maximus.

Nam si omnes hi integri factoribus primis expressi cogitentur; in imaginibus ipsorum A, B præter F nihil commune erit, neque in F et C præter f; itaque nec in A, B, C præter f commune est; quia id tam in C quam in eo, quod ipsis A, B commune est, nempe in F adesse deberet. Unde ad plura conclusio prona est.

Modus autem alter dictus quoad duos $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ est sequens, denotante hic litera quavis tam latina quam germanica integrum. Dividatur $\mathfrak{a}$ per $\mathfrak{b}$ (pro $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$), sit quotus a et residuum $\mathfrak{c}$, et divisor novissimus dividatur semper per residuum novissimum, donec residuum o sit; et divisor ultimus erit quæsitus.

Sint nempe divisores ordine sequenti se invicem excipientes, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ et quoti sint a, b, c, d. Nempe divisor primus $\mathfrak{b}$, residuum $\mathfrak{c}$; qui tum secundus divisor fit, dando residuum $\mathfrak{d}$, qui tertius divisor fit, cuius residuum $\mathfrak{e}$ tanquam divisor quartus det residuum o. Unde:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \mathfrak{b}a + \mathfrak{c} \\
\mathfrak{b} &= \mathfrak{c}b + \mathfrak{d} \\
\mathfrak{c} &= \mathfrak{d}c + \mathfrak{e} \\
\mathfrak{d} &= \mathfrak{e}d + 0.
\end{aligned}$$

Erit $\mathfrak{e}$ divisor communis ipsorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ maximus.

Nam $\mathfrak{e}$ metitur utrumque ipsorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, nec ullum $\beta > \mathfrak{e}$ metitur. Namque $\mathfrak{e}$ metitur ipsum $\mathfrak{d}$, itaque diagonaliter ad dextram ascendendo etiam ipsum $\mathfrak{d}c$; sed $\mathfrak{e}$ metitur se ipsum quoque, adeoque et ipsum $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}c + \mathfrak{e}$; atque hinc metitur ipsum $\mathfrak{c}b$, sed metiebatur ipsum $\mathfrak{d}$, adeoque metitur ipsum $\mathfrak{b}$; et hinc metitur ipsum $\mathfrak{b}a$, sed metiebatur ipsum $\mathfrak{c}$, consequenter metitur ipsum $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}a + \mathfrak{c}$. Si vero β metiatur tam ipsum $\mathfrak{a}$, quam ipsum $\mathfrak{b}$, tum metitur ipsum $\mathfrak{b}a$, et ipsum $\mathfrak{c}$; quia si ipsum $\mathfrak{b}$ metitur, et ipsum $\mathfrak{b}a$ metitur, atque si et ipsum $\mathfrak{a}$ metitur, etiam in altera parte ipsius $\mathfrak{a}$ certo numero adest. Si vero β metitur tam ipsum $\mathfrak{b}$, quam ipsum $\mathfrak{c}$, metitur descendendo ipsum $\mathfrak{d}$, quia metitur ipsum $\mathfrak{c}b$ et ipsum $\mathfrak{b}$; ita metitur ipsum $\mathfrak{e}$, quia metitur tam ipsum $\mathfrak{d}c$ quam ipsum $\mathfrak{c}$, quod cum $\beta > \mathfrak{e}$ esse nequit.

9. Ex hac operatione promanat fractio continua vulgaris modo sequenti. Operatio præcedens exprimi potest per

$$\text{I.}\qquad \overset{a}{\overbrace{\mathfrak{a}:\mathfrak{b}}}\!:\!\overset{b}{\overbrace{\mathfrak{b}:\mathfrak{c}}}\!:\!\overset{c}{\overbrace{\mathfrak{c}:\mathfrak{d}}}\!:\!\overset{d}{\overbrace{\mathfrak{d}:\mathfrak{e}}}$$

ubi a, b, c, d quotos exhibent, et diviso $\mathfrak{d}$ per $\mathfrak{e}$ residuum sit o. Unde

$$\text{II.}\quad \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}=\frac{\mathfrak{b}:\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}:\mathfrak{b}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{\mathfrak{c}:\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}:\mathfrak{c}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\mathfrak{d}:\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}:\mathfrak{d}}}}=$$

$$=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{d}}}}}\qquad=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{\mathfrak{e}:\mathfrak{e}}{\mathfrak{d}:\mathfrak{e}}}}}\qquad=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$$

III. Si $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ sit, tum $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ est <1; adeoque nullum integrum efficit. Exprimatur hoc per $\frac{0}{1}=0$; et dicantur $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{a}$, $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}$ & fractionis communis forma expressa *fractiones approximantes* ob rationem inferius dicendam; et quidem $\frac{0}{1}$ dicatur prima, et exprimatur per $\frac{A}{A'}$, $\frac{1}{a}$ dicatur secunda, et exprimatur per $\frac{B}{B'}$;

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}=\frac{b}{ab+1}$$

dicatur tertia, et designetur per $\frac{C}{C'}$, et ita porro. Tabella sequens etiam modum, quo e quavis fractione approximante sequens per quotum suprascriptum formatur, exhibet.

IV.

a	b	c	d
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{b.1+0}{ab+1}$	$\frac{bc+1}{abc+c+a}$
$\frac{A}{A'}$	$\frac{B}{B'}$	$\frac{C}{C'}$	$\frac{D}{D'}$
		$\frac{Bb+A}{B'b+A'}$	$\frac{Cc+B}{C'c+B'}$

Nempe tertia fractio approximans $\frac{C}{C'}$ prodit ex $\frac{B}{B'}$, si tam numerator quam denominator per quotum suprascriptum multiplicetur, et numeratori numerator præcedens, denominatori denominator præcedens addatur; ita etiam ab inductione patet esse

$$D = Cc + B, \text{ et } D' = C'c + B'.$$

Unde lex generationis cuiusvis e præcedente patet; si nempe lex usque ad $\frac{K}{K'}$ valeat, valet et de $\frac{L}{L'}$. Namque tunc

$$\frac{K}{K'} = \frac{Ii + H}{I'i + H'};$$

prodit autem $\frac{L}{L'}$, si pro i ponatur $i + \frac{1}{k}$; atque tum fiet

$$\frac{I\left(i+\frac{1}{k}\right)+H}{I'\left(i+\frac{1}{k}\right)+H'} = \frac{L}{L'} = \frac{Iik + I + Hk}{I'ik + I' + H'k} = \frac{k(Ii+H)+I}{k(I'i+H')+I'},$$

quod est

$$= \frac{Kk + I}{K'k + I'},$$

quia per hypothesim

$$Ii + H = K, \text{ et } I'i + H' = K'.$$

Nempe quotvis fuerint quoti, donec residuum o fiat, literarum maiorum minorumque significatio respectiva perspici potest.

10. Si

$$\frac{A}{A'}, \ \frac{B}{B'}, \ \frac{C}{C'}, \dots$$

considerentur; subtrahendo quodvis e sequente differentiæ erunt

$$-\frac{1}{A'B'}, \ +\frac{1}{B'C'}, \ -\frac{1}{C'D'}, \ +\frac{1}{D'E'}, \dots$$

Nam

$$A=0,\ A'=1,\ B=1,\ B'=a,$$

adeoque

$$\frac{AB'-A'B}{A'B'}=\frac{0-1}{A'B'}=\frac{-1}{A'B'};$$

atque quodvis par $\frac{I}{I'}$ et $\frac{K}{K'}$ fuerint, si

$$\frac{IK'-I'K}{I'K'}=\frac{\pm 1}{I'K'},$$

pro $\frac{K}{K'}$ et $\frac{L}{L'}$ erit

$$\frac{KL'-K'L}{K'L'}=\frac{\mp 1}{K'L'},$$

nempe si $IK'-I'K=\pm 1$, erit $KL'-K'L=\mp 1$.

Namque substitutis valoribus ipsorum L, L' ex præcedentibus, erit $KL'-K'L=K(K'k+I')-K'(Kk+I)=KI'-K'I=-(IK'-KI')$; quod est $=\mp 1$, si $IK'-KI'=\pm 1$ fuit. Denominatorem autem subtractione peracta ipsis

$$\frac{KL'}{K'L'}=\frac{K}{K'} \text{ et } \frac{LK'}{L'K'}=\frac{L}{L'}$$

communem esse $K'L'$ patet.

Est vero hinc omnibus positive acceptis quævis *approximans* præcedente alternatim maior minorve, quum differentiæ sint alternatim negativæ et positivæ; sed cur approximans vocetur, nondum videtur. Interim differentiarum nempe ipsius

$$-\frac{1}{A'B'},\ +\frac{1}{B'C'},\ \ldots$$

quamvis sequente minorem esse facile perspicitur: quum

$$B'>A',\ C'>B',\ D'>C',\ \ldots;$$

nam etsi quodvis i, per quod multiplicatur ex. gr. I' ut K' fiat, 1 sit, est $K'=I'i+H'$, et H' nullibi est <1, nempe post $A'=1$, $B'=a$ est $C'=ab+1$, ..., et a, b, ... positive accipiuntur.

11. Sed *in differentias fractionum harum approximantium dictum a primitiva* $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ inquirendum est.

Denotetur (pag. 431, II.) $b+\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}$ per β, ita pro quoto k in genere $k+\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{l}}$ denotetur per $\varkappa$; quævis litera græca substituatur ipsi β et latina magna nominis eiusdem ipsi B, atque præcedens ipsi A, et germanicæ parvæ ipsis $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ post literam nominis eiusdem cum B sequentes; erit

$$(B\beta+A)\mathfrak{c}=\mathfrak{b}, \text{ et } (B'\beta+A')\mathfrak{c}=\mathfrak{a}.$$

Nam

$$B\beta+A=B\left(b+\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}\right)+A=\frac{Bb\mathfrak{c}+B\mathfrak{d}+A\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}}$$
$$=\frac{(Bb+A)\mathfrak{c}+B\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}=\frac{C\mathfrak{c}+B\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}},$$

quia $Bb+A=C$ (pag. 431); et hinc

$$(B\beta+A)\mathfrak{c}=C\mathfrak{c}+B\mathfrak{d},$$

quod est $=\mathfrak{b}$; nam si litera quævis id denotet, quod proprie significat, est

$$B=1,\ \beta=b+\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}},\ A=0,$$

adeoque

$$(B\beta+A)\mathfrak{c}=\left(b+\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}}\right)\mathfrak{c}=b\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{b}.$$

Atque de quovis ad sequens concluditur generaliter, nempe etiam

$$D\mathfrak{d}+C\mathfrak{e}=C\mathfrak{c}+B\mathfrak{d};$$

quia

$$D\mathfrak{d}+C\mathfrak{e}=(Cc+B)\mathfrak{d}+C\mathfrak{e},=Cc\mathfrak{d}+B\mathfrak{d}+C\mathfrak{e}=C(c\mathfrak{d}+\mathfrak{e})+B\mathfrak{d}=C\mathfrak{c}+B\mathfrak{d}.$$

Pari modo liquet esse

$$(B'\beta+A')\mathfrak{c}=C'\mathfrak{c}+B'\mathfrak{d}=\mathfrak{a}=D'\mathfrak{d}+C'\mathfrak{e}=\ldots,$$

dummodo literæ magnæ accento insigniantur; quum plane

$$C'\mathfrak{c}+B'\mathfrak{d}=ab\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+a\mathfrak{d}$$

sit, quod est $=\mathfrak{a}$; quia $\mathfrak{a}=a\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=ab\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+a\mathfrak{d}$, nam $\mathfrak{b}=b\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$.

Hinc differentia cuiusvis *approximantis* $\frac{B}{B'}$ ab ipsa primitiva $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, litera cuiusvis nominis substituatur ipsi B, ceteras quoque concinne applicando erit

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}-\frac{B}{B'}=\frac{\mathfrak{b}B'-\mathfrak{a}B}{\mathfrak{a}B'},$$

quod substituendo in numeratore valores dictos ipsorum $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ est

$$=\frac{(B\beta B'+AB')\mathfrak{c}-(B'\beta B+A'B)\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}B'}=\frac{(AB'-A'B)\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}B'}=\frac{\pm\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}B'};$$

nempe si $\frac{A}{A'}$ approximantem n-tam repræsentet, et n par fuerit, est $AB'-A'B=+1$, si vero n impar sit, -1 accipiendum est (pag. 433).

Itaque si *approximantium* $\frac{D}{D'}$ et $\frac{E}{E'}$ differentiæ a $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, nempe ipsa $\pm\frac{\mathfrak{e}}{D'\mathfrak{a}}$ et $\mp\frac{\mathfrak{f}}{E'\mathfrak{a}}$ considerentur, erit posterior manifesto minor priore; quia $E'>D'$, et $\mathfrak{f}<\mathfrak{e}$ est, si $\mathfrak{f}$ non $=0$; patetque, quum differentiæ alternatim positivæ et negativæ sint, valoribus $\frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'} \ldots$ differentia decrescente, valorem $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ approximari, quamvis alternatim sint maiores minoresve. Si vero $\mathfrak{f}=0$ sit, ut pag. 431, tum $\frac{E}{E'}=\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, quia $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}-\frac{E}{E'}=0$.

12. *Est autem, si* $\mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{a}$ *inter se primi fuerint, etiam* $E=\mathfrak{b}$, et $E'=\mathfrak{a}$. Nam per (pag. 434) est

$$(D\delta+C)\mathfrak{e}=\mathfrak{b}, \text{ et } (D'\delta+C')\mathfrak{e}=\mathfrak{a};$$

sed si $\mathfrak{f}=0$, tum (pag. 431)

$$\delta=d+\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{e}}=d+\frac{0}{\mathfrak{e}}=d;$$

adeoque

$$\mathfrak{b}=(Dd+C)\mathfrak{e}=E\mathfrak{e},$$

quia (pag. 431) $Dd+C=E$, atque etiam

$$\mathfrak{a}=(D'd+C')\mathfrak{e}=E'\mathfrak{e}.$$

Estque $\mathfrak{c}$ tum divisor communis maximus ipsorum $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, qui itaque, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ inter se primi fuerint, $=1$ est. Unde etiam $E=\mathfrak{b}$, et $E'=\mathfrak{a}$ est.

13. Sed *nec ulla fractio terminorum integrorum* $\frac{p}{q}$ *datur*, quæcunque approximantes $\frac{C}{C'}$ et $\frac{D}{D'}$ fuerint, *quae denominatore ipso D' minore gaudens, ipsis* $\frac{C}{C'}$ et $\frac{D}{D'}$ *interseri queat;* id est ut pro casu, si

$$\frac{C}{C'}<\frac{D}{D'}$$

fuerit, sit

$$\frac{C}{C'}<\frac{p}{q}<\frac{D}{D'},$$

et pro $\frac{C}{C'}>\frac{D}{D'}$

$$\frac{C}{C'}>\frac{p}{q}>\frac{D}{D'}.$$

Nam si

$$\frac{C}{C'}<\frac{D}{D'},$$

tum

$$\frac{C}{C'}-\frac{D}{D'}=\frac{-1}{C'D'},$$

et

$$\frac{C}{C'}-\frac{p}{q}=\frac{Cq-C'p}{C'q}=-\frac{m}{C'q}$$

pro m integro positivo et non 0; adeoque

$$\frac{C}{C'}+\frac{1}{C'D'}=\frac{D}{D'},$$

atque

$$\frac{C}{C'}+\frac{m}{C'q}=\frac{p}{q}>\frac{D}{D'}.$$

quia m non <1, et per hypothesim esset $q<D'$. Si vero $\frac{C}{C'}>\frac{D}{D'}$ tum

$$\frac{C}{C'}-\frac{D}{D'}=\frac{1}{C'D'},$$

et

$$\frac{C}{C'} - \frac{p}{q} = \frac{m}{C'q};$$

atque

$$\frac{C}{C'} - \frac{1}{C'D'} = \frac{D}{D'},$$

et

$$\frac{C}{C'} - \frac{m}{C'q} = \frac{p}{q},$$

quod est $< \frac{D}{D'}$, quum ex eodem $\frac{C}{C'}$ heic plus subtrahatur, quam prius.

14. *Exemplum* sequens illustret præcedentia. Sit $\mathfrak{b} = 7$, $\mathfrak{a} = 19$; erit (pag. 431 et sequ.) schema sequens:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 2 & & 1 & & 2 & & 2 & \\ 19 & : & 7 & : & 5 & : & 2 & : & 1 \end{array}$$

2	1	2	2	
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2} >$	$\frac{1}{3} <$	$\frac{3}{8} >$	$\frac{7}{19}$
$\frac{A}{A'}$	$\frac{B}{B'}$	$\frac{C}{C'} = \frac{1.1+0}{2.1+1}$	$\frac{D}{D'} = \frac{1.2+1}{3.2+2}$	$\frac{E}{E'} = \frac{3.2+1}{8.2+3}$

Patet autem etiam $\frac{n\,.\,7}{n\,.\,19}$ pro utvis magno n eosdem quotos, adeoque easdem approximantes dare. Unde fractio terminis magnis expressa cum errore in praxi exiguo terminis parvis exprimi potest.

15. Notandum etiam est, *approximantium quamvis minimis terminis expressam esse.* Nam $\frac{C}{C'} = \frac{n}{m}$ pro n, m integris et $n < C$ esse nequit; quia tum pro certo integro q per (pag. 425)

$$C = nq \text{ et } C'l = mq$$

esset. Sed (pag. 433)

$$BC' - B'C = \pm 1;$$

itaque substituendo ipsis C et C' esset

$$Bmq - B'nq = \pm 1,$$

adeoque

$$Bm - B'n = \pm \frac{1}{q};$$

quod fieri nequit, quum $Bm - B'n$ integer, $\frac{1}{q}$ vero unitate minor sit.

16. *Sed est praeterea*, si per $\frac{B}{B'}$ post $\frac{A}{A'} = \frac{0}{1}$ sequens intelligatur,

$$\frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} - \frac{1}{D'E'} = \frac{E}{E'} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}};$$

nempe continuando donec libuerit, erit seriei summa æqualis approximanti litera seriei postrema denotatæ. Nam

$$\frac{B}{B'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{B'C'},$$

adeoque

$$\frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'} = \frac{C}{C'},$$

ita

$$\frac{C}{C'} - \frac{D}{D'} = \frac{-1}{C'D'},$$

hinc

$$\frac{C}{C'} + \frac{1}{C'D'} = \frac{D}{D'};$$

itaque

$$\frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} = \frac{D}{D'};$$

quod continuari patet. In exemplo allato est

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.8} - \frac{1}{8.19} = \frac{7}{19}.$$

17. Sit

$$\cfrac{a}{a' + \cfrac{b}{b' + \cfrac{c}{c' + \ldots}}}$$

retineanturque denotationes superiores; nempe

$$\frac{A}{A'}=\frac{1}{0}, \quad \frac{B}{B'}=\frac{a}{a'}, \quad \frac{C}{C'}=\frac{a}{a'+\frac{b}{b'}}, \ldots;$$

erit hic quoque in genere

$$\frac{K}{K'}=\frac{I i'+H i}{I' i'+H' i},$$

nempe

$$K=I i'+H i,$$

et

$$K'=I' i'+H' i;$$

adeo ut lex formationis cuiusvis approximantis e præcedentibus iuxta tabellam sequentem pateat.

$a,\ a'$	$b,\ b'$	$c,\ c'$	$d,\ d'$
$\frac{0}{1}=\frac{A}{A'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{B}{B'}$	$\frac{C}{C'}=\frac{B b'+A b}{B' b'+A' b}$	$\frac{D}{D'}=\frac{C c'+B c}{C' c'+B' c}$

Nam si

$$I=H h'+G h,$$

atque

$$I'=H' h'+G' h,$$

substituendo $h'+\frac{i}{i'}$ ipsi h', patet prodire $\frac{K}{K'}$; est autem

$$\frac{H\left(h'+\frac{i}{i'}\right)+G h}{H'\left(h'+\frac{i}{i'}\right)+G' h}=\frac{H h' i'+H i+G h i'}{H' h' i'+H' i+G' h i'}=\frac{I i'+H i}{I' i'+H' i},$$

quia per hypothesim

$$H h'+G h=I,$$

et

$$H' h'+G' h=I'.$$

18. *Erit autem*

$$\frac{A}{A'}-\frac{B}{B'}=\frac{-a}{A'B'},$$

$$\frac{B}{B'}-\frac{C}{C'}=\frac{BC'-B'C}{B'C'}=\frac{B(B'b'+A'b)-B'(Bb'+Ab)}{B'C'}=$$

$$=\frac{(BA'-B'A)b}{B'C'}=\frac{ab}{B'C'}.$$

Atque in genere si

$$\frac{I}{I'}-\frac{K}{K'}=\pm\frac{ab\ldots i}{I'K'},$$

est

$$\frac{K}{K'}-\frac{L}{L'}=\mp\frac{ab\ldots ik}{K'L'}.$$

Nam

$$KL'-K'L=K(K'k'+I'k)-K'(Kk'+Ik)=(KI'-K'I)k=$$
$$=-(IK'-KI')k=\mp ab\ldots ik.$$

Erit itaque series differentiarum cuiusvis a sequente

$$-\frac{a}{A'B'}+\frac{ab}{B'C'}-\frac{abc}{C'D'}+\frac{abcd}{D'E'}-\ldots,$$

atque quum sit

$$\frac{A}{A'}-\frac{B}{B'}=\frac{-a}{A'B'},$$

est

$$\frac{A}{A'}+\frac{a}{A'B'}=\frac{B}{B'};$$

et quia

$$\frac{B}{B'}-\frac{C}{C'}=\frac{ab}{B'C'},$$

est

$$\frac{B}{B'}-\frac{ab}{B'C'}=\frac{C}{C'}=\frac{A}{A'}+\frac{a}{A'B'}-\frac{ab}{B'C'};$$

quod continuari patet, ut pro $A=0$ sit

$$\frac{a}{A'B'}-\frac{ab}{B'C'}+\frac{abc}{C'D'}-\frac{abcd}{D'E'}=\frac{E}{E'};$$

et ita porro.

Ponatur

$$a=1,\ b=\mathfrak{a}^2,\ c=\mathfrak{b}^2,\ d=\mathfrak{c}^2,\ \&$$

atque

$$a' = \mathfrak{a},\ b' = \mathfrak{b} - \mathfrak{a},\ c' = \mathfrak{c} - \mathfrak{b},\ d' = \mathfrak{d} - \mathfrak{c},\ \&$$

erit

$$B' = \mathfrak{a},\ \text{et}\ C' = B'b' + A'b = \mathfrak{a}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{ab};$$

atque si

$$H' = \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{g},$$

et

$$I' = \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{gh},$$

est

$$K' = \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{ghi};$$

nam

$$K' = I'i' + H'i = I'(\mathfrak{i} - \mathfrak{h}) + H'\mathfrak{h}^2 =$$
$$= \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{ghi} - \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{gh}^2 + \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{gh}^2 = \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{hi} = K'.$$

Atque hinc generaliter est pro quavis differentiarum dictarum:

$$\frac{ab \ldots f}{F'G'} = \frac{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 \ldots \mathfrak{e}^2}{\mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{e}.\ \mathfrak{ab} \ldots \mathfrak{ef}} = \frac{1}{\mathfrak{f}}.$$

Itaque

$$\frac{a}{A'B'} - \frac{ab}{B'C'} + \frac{abc}{C'D'} - \frac{abcd}{D'E'} = \frac{E}{E'} = \frac{1}{\mathfrak{a}} - \frac{1}{\mathfrak{b}} + \frac{1}{\mathfrak{c}} - \frac{1}{\mathfrak{d}};$$

idemque continuari usquequo libuerit patet.

Unde manifesto, *si*

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} - \frac{1}{\mathfrak{b}} + \frac{1}{\mathfrak{c}} - \ldots$$

series convergens sit, et tendat ad s, etiam

$$\cfrac{1}{\mathfrak{a} + \cfrac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b} - \mathfrak{a} + \cfrac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{c} - \mathfrak{b} + \cfrac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{d} - \mathfrak{c} + \ldots}}}}$$

tendet ad s. Hinc

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \ldots}}}} \sim \frac{\pi}{4},$$

quæ expressio dimidii quadrantis pro radio 1 a LORD BROUNKER primo fractionum continuarum auctore est, et cum serie Leibnitiana (pag. 334) convenit, pro

adeoque
$$\mathfrak{a}=1,\ \mathfrak{b}=3,\ \mathfrak{c}=5,\ \ldots$$
nimirum
$$\mathfrak{b}-\mathfrak{a}=2=\mathfrak{c}-\mathfrak{b}=\ldots;$$
$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \sim \frac{\pi}{4}.$$

Potest etiam terminis fractionis permutatis, valor fractione continua exprimi; nempe
$$\frac{4}{\pi}=1:\frac{\pi}{4}=1:\frac{1}{1+\gamma},$$
si
$$\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}$$
per γ exprimatur; itaque
$$\frac{4}{\pi}=1+\gamma=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\ldots}}}$$

19. *Applicatur fractio continua et ad resolutionem aequationis quadticae*, modo sequenti. Sit
$$x(a+x)=b;\ \text{est}\ x=\frac{b}{a+x},$$
et hoc, substituendo ipsi x ad dextram semper $\frac{b}{a+x}$, fiet
$$x=\frac{b}{a+x}=\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+x}}$$
continuando in infinitum. Quæritur, num valor usque ad aliquod a acceptus valori ipsius x dato quovis propius accedat?

Quod in præcedentibus
$$a,\ b,\ c,\ldots a',\ b',\ c',\ldots$$
fuit, est hinc
$$b\ \text{ et }\ a;$$
atque
$$\frac{A}{A'}=\frac{0}{1},\quad \frac{B}{B'}=\frac{b}{a},\quad \frac{C}{C'}=\frac{ab}{a^2+b},\quad \frac{D}{D'}=\frac{a^2b+b^2}{a^3+2ab}\ \&c.$$

Differentiæ vero sunt

$$-\frac{b}{A'B'},+\frac{b^2}{B'C'},-\frac{b^3}{C'D'},+\frac{b^4}{D'E'},\ldots$$

ubi exponentem ipsius b semper porro uno crescere patet; atque etiam quodvis ipsorum

$$A,\ B,\ldots,A',\ B',\ldots$$

si $\frac{I}{I'}$ ab $\frac{A}{A'}$ incipiendo $(n+2)$-tum sit, exprimi per n, a, b potest; nempe

$$\frac{I}{I'}=\frac{a^n b+(n-1)a^{n-2}b^2+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}a^{n-4}b^3+\ldots}{a^{n+1}+na^{n-1}b+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a^{n-3}b^2+\ldots}$$

terminis tam in numeratore $=I$, quam in denominatore $=I'$ eousque acceptis, donec factor aliquis 0 fiat. Est nempe pro $(n+2)$-to terminus ultimus numeratoris

$$\frac{(n-p)(n-(p+1))(n-(p+2))\ldots(n-(2p-1))}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ \ldots\ .\ p}a^{n-2p}b^{p+1}$$

si p denotet $\frac{n}{2}$ pro n pari, et $\frac{n-1}{2}$ pro n impari. Denominatoris autem terminus ultimus est

$$\frac{(n-(p'-1))(n-p')\ \ldots\ (n-(2p'-2))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ p'}a^{n-(2p'-1)}b^{p'}$$

denotante p' pro n pari id quod antea, pro n impari vero $\frac{n+1}{2}$.

Nimirum si aliquot ipsorum

$$\frac{A}{A'},\ \frac{B}{B'},\ldots$$

computentur, facile animadvertitur, e quovis prodire sequentis denominatorem, si illius denominator per a multiplicatus numeratori eiusdem addatur, et prodire numeratorem, si illius denominator per b multiplicetur; unde tabula coefficientium numericorum, qui terminis literarum præfixarum appertinent, sequens conficitur.

A', B	1	0		
B', C	1	0		
C', D	1	1	0	
D', E	1	2	0	
E', F	1	3	1	0
F', G	1	4	3	0

Manifesto secunda columna numerorum verticalis est series numerorum naturalium, tertia est series secundi, quarta tertii ordinis, ... et quivis terminus est summa suprastantis et illius qui ad lævam in columna horizontali superius sequenti est. Hinc ad expressionem dictam perveniendo, de quovis ad sequens concluditur; nempe si valeat usque ad $\frac{I}{I'}$, quod sit $(n+2)$-tum, valet et de $\frac{K}{K'}$, nempe $(n+3)$-to. Erit enim

$$\frac{K}{K'}=\frac{Ia+Hb}{I'a+H'b};$$

estque per hypothesim:

$$Ia=a^{n+1}b+(n-1)a^{n-1}b^2+\frac{(n-2)(n-3)}{1\ .\ 2}a^{n-3}b^3+\ldots+$$
$$+\frac{(n-\mu)(n-(\mu+1))\ldots(n-(2\mu-2))(n-(2\mu-1))}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ \mu}a^{n-2\mu+1}b^{\mu+1}+\ldots$$
$$Hb=a^{n-1}b^2+(n-2)a^{n-3}b^3+\frac{(n-3)(n-4)}{1\ .\ 2}a^{n-5}b^4+\ldots+$$
$$+\frac{(n-\mu)(n-(\mu+1))\ldots(n-(2\mu-2))}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ (\mu-1)}a^{n-2\mu+1}b^{\mu+1}+\ldots$$

ubi considerando formulam, eamque applicando ad n et $n-1$, patet terminum ultimum prioris et posterioris terminos generales, atque valoribus dictis ipsorum p et p' substitutis ultimos esse, nempe terminum immediate sequentem factorem 0 ingredi; imo eadem substitutione prodit, pro denominatoris termino ultimo ipsius a exponentem 0 fieri pro n impari, et 1 pro n pari, atque

$$\frac{(n-(p'-1))(n-p')(n-(p'+1))\dots(n-(2p'-2))}{1\cdot 2\cdot 3\dots p'}$$

esse $=1$ pro n impari, et $\frac{n}{2}+1$ pro n pari (de $(n+2)$-ta fractione loquendo).

Si vero in dictis terminis generalibus coefficientes eiusdem facti e potentiis ipsorum a et b conflati, reducendo ad denominatorem eundem, addantur; factore communi exemto, erit

$$\mu+n-(2\mu-1)=n-(\mu-1),$$

atque prodibit

$$\frac{(n-(\mu-1))(n-\mu)((n-(\mu+1))\dots(n-(2\mu-2))}{1\quad.\quad 2\quad.\quad 3\dots\mu}a^{n-2\mu+1}b^{\mu+1};$$

quod pro $a^{n-2\mu+1}b^{\mu+1}$, in K, in quo terminus primus est $a^{n+1}b$, regulæ dictæ conveniens esse applicando patet. Eodem modo autem de K' demonstrari potest.

Si vero in expressionem $\frac{Ia+Hb}{I'a+H'b}$ ipsius $\frac{K}{K'}$, ponatur $a+x$ pro a; prodibit

$$\frac{I(a+x)+Hb}{I'(a+x)+H'b}=x;$$

nempe nonnisi pro uno a, quod infimum in fractione continua est, poni $a+x$ debet, ut valor ipsi x æqualis sit; et peracta operatione prodibit

$$\frac{I(a+x)+Hb}{I'(a+x)+H'b}-\frac{Ia+Hb}{I'a+H'b}=\frac{b(a+x)(H'I-HI')+ba(HI'-H'I)}{((a+x)I'+H'b)(I'a+H'b)}$$
$$=\frac{bx(H'I-HI')}{K'K'+xI'K'},$$

quod, nempe differentia fractionis approximantis a valore unius radicis æquationis quadraticæ, pro a et b positivis ad limitem 0 tendit, si $n\to\infty$.

Sit enim

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}=\pm\left(\frac{a}{2}+\omega\right)$$

pro ω positivo; erit $-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\omega=\omega$ unus valor ipsius x; eruntque in hoc casu a, b, ω, atque omnes termini ipsorum I', K' positivi; et si $b=1$ ponatur, et $\frac{K}{K'}$ sit fractio $(n+2)$-ta pro n impari, coefficiens potentiæ ipsius b in termino ultimo denominatoris (pag. 444) erit $\left(\frac{n}{2}+1\right)a$; est autem K' (et tanto fortius $K'K'+\omega I'K'$) isto maius; numerator $bx\,(H'I-HI')$ vero est $=\pm\omega$, quia $b=1$, et $IK'-I'K$ signi ratione non habita est potentia ipsius b (pag. 443); atque manente numeratore denominatorem utvis augere licebit.

Ex. gr. pro $a=2$ et $b=1$ sit

$$x^2+2x=1;$$

erit unus valor ipsius x

$$-1+\sqrt{1+1}=\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\ldots$$

et hinc

$$+\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\ldots$$

unde etiam si pro $x^2+2x=1$ fiet $x^2-2x=1$, adeoque unus valor ipsius $x=1-\sqrt{2}$, erit

$$x=\frac{-1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\ldots=\frac{1}{-2+}\frac{1}{-2+}\frac{1}{-2+}\ldots$$

nempe facile patet, quotamvis fractionem approximantem computatam iisdem terminis, eodemque signo — gaudere.

Sit $x^2+x=1$, erit

$$x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\ldots$$

et hinc

$$-1+\sqrt{5}=\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

nempe supremi fractionis continuæ termini id, quod infra lineam supremam est, divisor est. Hinc vero

$$\sqrt{5}=\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}+1,$$

quod etiam

$$=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}+2$$

ex $x^2+4x=1$.

Ita ex $x^2-x=5$ est

$$\cfrac{5}{-1+\cfrac{5}{-1+\ddots}}$$

unus valor ipsius x.

20. Brevitatis studio casus pro b negativo præterire liceat, quum et de resolutione æquationis

$$x^2-x=a$$

analoga aliquid dicendum sit. Est nempe

$$x^2=a+x,$$

adeoque

$$x=\sqrt{a+x},$$

et hoc ipsi x semper substituendo donec libuerit, erit

$$x=\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+x}}}$$

et ita porro; atque hoc quoque pro a positivo eousque continuari potest, ut omisso x quovis ω minus ab x differat, ut statim patebit.

Ex. gr.

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}\backsim\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

ex $x^2-x-1=0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ unus valor ipsius x est.

Ita ex $x^2-x-2=0$ est

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{+2+\ldots}}}\backsim\pm 2,$$

et 2 est unus valor ipsius x, uti -2 in æquatione

$$x^2+x-2=0.$$

Unde etiam (pag. 446—7) est

$$\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\ldots}}}=\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots}}}=\cfrac{2}{-1+\cfrac{2}{-1+\cfrac{2}{-1+\ldots}}}$$

Nempe $\sqrt{}$, inde ab secundo, sive ubique positive sive ubique negative accepto, duo valores oppositi alioquin æquales prodeunt; quos etiam tales esse oportet, ut eorum unus æquationi $x^2+x-2=0$, alter ipsi $x^2-x-2=0$ satisfaciat; ut statim patebit, quum -2 pro casu utroque idem maneat; quamobrem $\frac{+1-3}{2}$ in casu priore, et $\frac{-1+3}{2}$ in posteriore accipi nequit.

Potest quippe etiam x^m pro x^2 poni, *denotante m quemvis integrum positivum*

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\ldots}}}\backsim x$$

pro aequatione $x^m-x-a=0$.

Sit pro a positivo

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a}}=b,\ \sqrt[m]{a+b}=b' \ \&$$

erit

$$\sqrt[m]{a}<b<b' \ \&;$$

prius b ipsi $\sqrt[m]{a}$, tum b' ipsi b & substitutis. Hinc si

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a}}}$$

quousque libuerit ad lævam continuatum, generaliter N dicatur, crescet N semper quovis novo $\sqrt[m]{a+}$ præposito; manebit tamen $<1+2a$; nam si

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\ldots+\sqrt[m]{a}}}=N,$$

erit

$$N^m=a+\sqrt[m]{a+\cdots+\sqrt[m]{a}};$$

adeoque

$$N^m-a=\sqrt[m]{a+\cdots+\sqrt[m]{a}}<N$$

atque hinc quodvis N est $<1+2a$; nam si $N=$ aut $>1+2a$ esset, tum $N^m-a>N$ esset; nempe

$$(1+2a)^m-a>1+2a$$

pro $m>1$. Itaque crescens N sine fine, manens tamen minor, quam $1+2a$, gaudet limite. Sit limes is α, et sit

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\cdots+\sqrt[m]{a}}}=\alpha-\omega,$$

et

$$\sqrt[m]{a+\cdots+\sqrt[m]{a}}=\alpha-\lambda;$$

erit primo $\sqrt[m]{}$ omisso

$$(\alpha-\omega)^m=a+\sqrt[m]{a+\ldots+\sqrt[m]{a}}=a+\alpha-\lambda$$

Sed tam ω, quam λ tendit ad 0; atque tum

$$(\alpha-\omega)^m\backsim\alpha^m, \text{ et } a+\alpha-\lambda\backsim a+\alpha.$$

Consequenter $\alpha^m=a+\alpha$; atque limes ipsius

$$\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{a+\cdots+\sqrt[m]{a}}}$$

est radix æquationis $x^m-x-a=0$; atque si m par sit, radicali negative accepto prodibit radix æquationis $x^m+x-a=0$.

21. *Notandum quoque est et*

$$\sqrt{a\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a\ldots}}}$$

limite gaudere, esseque limitem hunc $a^{\frac{1}{m-1}}$; excepto $a=1$, nempe tum non limes, sed quivis valor $=a^{\frac{1}{m}}=1$. Nam incipiatur a dextra ad lævam præponendo radicalia in infinitum; erit prius

$$\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}},$$

dein

$$\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a}}=(a^{\frac{m}{m}}.a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{m+1}{mm}},$$

atque

$$\sqrt[m]{aa^{\frac{m+1}{m^2}}}=(a^{\frac{m^2}{m^2}}.a^{\frac{m+1}{m^2}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{m^2+m+1}{m^3}}.$$

Si vero prodeat

$$a^{\frac{m^p+m^{p-1}+\cdots+1}{m^{p+1}}},$$

fiet $\sqrt[m]{a}$ præponendo,

$$(a^{\frac{m^{p+1}}{m^{p+1}}}.a^{\frac{m^p+m^{p-1}+\cdots+1}{m^{p+1}}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{m^{p+1}+m^p+\cdots+1}{m^{p+2}}};$$

exponens hic ipsius a autem est

$$\frac{m^{p+2}-1}{m-1}:m^{p+2}=\frac{m^{p+2}-1}{(m-1)\,m^{p+2}},$$

quod tendit ad $\frac{1}{m-1}$; namque si (pag. 150) dividatur $m^{p+2}-1$ per $m-1$, quotus erit

$$m^{p+1}+m^p+\ldots+1.$$

Consequenter

$$\sqrt[m]{a\sqrt[m]{a\ldots\sqrt[m]{a\ldots}}}\backsim a^{\frac{1}{m-1}}.$$

Ex. gr.

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}\backsim 2^{\frac{1}{2-1}}=2,$$

$$\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5\ldots}}}=5^{\frac{1}{3-1}}=\sqrt{5}.$$

22. Plura huius generis construi posse cuique succurrere potest; sed his amplius immorari non vacat. Interim patet etiam, quod si fuerint

$$\frac{\alpha}{d}=q,\quad \frac{\beta}{d}=Q+\frac{r}{d};$$
$$\frac{r}{d'}=q',\quad \frac{d}{d'}=Q'+\frac{r'}{d'};$$
$$\frac{r'}{d''}=q'',\quad \frac{d'}{d''}=Q''+\frac{r''}{d''};$$

erit

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha:d}{\beta:d}=$$
$$=\frac{q}{Q+\frac{r}{d}}=\frac{q}{Q+\frac{r:d'}{d:d'}}=\frac{q}{Q+\frac{q'}{Q'+\frac{r'}{d'}}}=\frac{q}{Q+\frac{q'}{Q'+\frac{q''}{Q''+\frac{r''}{d''}}}}=\ldots$$

at pro q, q', ..., Q, Q', ... integris, si α, β incommensurabilia fuerint, residuum nunquam o erit; quamvis ex. gr. r'' et d'' per dato quovis minus d''' dividi possit, prodeunte Q''' utvis magno cum residuo $r'''<d'''$, adeoque quoto $=Q+\frac{r'''}{d'''}$, ubi $\frac{r'''}{d'''}<1$; at continuari donec libuerit, et $\frac{\alpha}{\beta}$ per fractiones approximantes dictas approximari posse e iam dictis patet.

§. 42.

Applicatio fractionis continuae ad resolutionem aequationis indeterminatae gradus primi, pro valoribus integris, (pag. 373) exponenda venit.

Sit

$$\pm \mathfrak{a}x \pm \mathfrak{b}y = \pm \mathfrak{c},$$

pro $\mathfrak{a}>\mathfrak{b}$, pro $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ integris, et $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ inter se primis atque signis $\pm$ sive ubique idem, sive diversa denotantibus.

1. Si quodvis ipsorum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ integer aliquis i metiatur tertium haud metiens, tum x et y valoribus integris minime gaudent. Nam si x et y integri essent, tum $\frac{\pm \mathfrak{a}x \pm \mathfrak{b}y}{i}$ quoque integer esset; $\frac{\mathfrak{c}}{i}$ vero non esset integer; atque integer esset non integro æqualis.

2. Ponatur coefficiens maior, qualicunque signo gaudeat, loco primo; atque si signum — habeat, multiplicetur æquatio per -1, ut ex

$$-\mathfrak{a}x \pm \mathfrak{b}y = \pm \mathfrak{c}$$

fiat

$$\mathfrak{a}x \mp \mathfrak{b}y = \mp \mathfrak{c}.$$

Tum evolvatur $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ in fractionem continuam, et quæratur approximantium penultima; sit hæc ex. gr. $\frac{E}{E'}$, erit sequens $\frac{F}{F'}$ atque $F = \mathfrak{b}$, et $F' = \mathfrak{a}$, quum $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ inter se primi sint, (pag. 435); eritque $EF' - E'F = +1$, si $\frac{E}{E'}$ fuerit a $\frac{0}{1}$ inclusive numerando n-ta et n par sit, et -1 pro n impari. Unde

$$\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}E' = \pm 1,$$

adeoque

$$\mathfrak{a}E\mathfrak{c} - \mathfrak{b}E'\mathfrak{c} = \pm \mathfrak{c};$$

atque addito

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}q - \mathfrak{a}\mathfrak{b}q = 0,$$

fit

$$\mathfrak{a}(E\mathfrak{c} - \mathfrak{b}q) - \mathfrak{b}(E'\mathfrak{c} - \mathfrak{a}q) = \pm \mathfrak{c}.$$

Itaque si signa ipsorum $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$, quibus in hac æquatione gaudent, cum signis, quæ in æquatione proposita habent, convenirent, tum q rite accepto, $E\mathfrak{c} - \mathfrak{b}q$ ipsi x, et $E'\mathfrak{c} - \mathfrak{a}q$ ipsi y substitui possent; at si signa dicta non convenerint, transformanda erit æquatio modo sequenti, ut hoc obtineatur.

3. Si $\mathfrak{b}$ in æquatione proposita signum $+$ habeat; pro $-\mathfrak{b}(E'\mathfrak{c} - \mathfrak{a}q)$ ponatur $+\mathfrak{b}(-E'\mathfrak{c} + \mathfrak{a}q)$. Nempe factore utroque per -1 multiplicato, signum ipsius $\mathfrak{b}$ salvo valore mutatur.

Si vero signum ipsius $\mathfrak{c}$ sit diversum in

$$\mathfrak{a}(E\mathfrak{c} - \mathfrak{b}q) - \mathfrak{b}(E'\mathfrak{c} - \mathfrak{a}q) = \pm \mathfrak{c},$$

aut in

$$\mathfrak{a}(E\mathfrak{c} - \mathfrak{b}q) + \mathfrak{b}(-E'\mathfrak{c} + \mathfrak{a}q) = \pm \mathfrak{c},$$

tum $\pm \mathfrak{c}$ et coefficientes ipsorum $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ multiplicentur per -1; nempe hoc pacto æquatio tota per -1 multiplicata, atque ad formam æquationis propositæ reducta erit.

Pariet autem quævis duarum harum æquationum duas æquationis formas, prouti $\mathfrak{c}$ signo $+$ vel $-$ gaudebit. Nempe e priore $\mathfrak{a}(Ec-\mathfrak{b}q) \quad -\mathfrak{b}(E'c-\mathfrak{a}q) \quad =\pm c$

et $\mathfrak{a}(-Ec+\mathfrak{b}q)-\mathfrak{b}(-E'c+\mathfrak{a}q)=\mp c,$

ex altera $\mathfrak{a}(Ec-\mathfrak{b}q) \quad +\mathfrak{b}(-E'c+\mathfrak{a}q)=\pm c$

et $\mathfrak{a}(-Ec+\mathfrak{b}q)+\mathfrak{b}(E'c-\mathfrak{a}q) \quad =\mp c.$

Unde videre est, quod ubi signa ipsorum Ec et $E'c$ conveniunt, etiam signa ipsorum $\mathfrak{a}q$ et $\mathfrak{b}q$ conveniant, sed illis contrarientur, et ubi illa diversa sunt, hæc quoque tam inter se quam cum illis contrarientur.

4. Quæritur, quomodo q pro quavis harum æquationum eligi debeat, ut *valores integri positivi*, *imo valores minimi prodeant?*

Oportet q esse integrum; quia nisi $\mathfrak{a}q$, $\mathfrak{b}q$ integri sint, $Ec-\mathfrak{b}q$ et $E'c-\mathfrak{a}q$ integri non erunt, si vero $\mathfrak{a}q$, $\mathfrak{b}q$ integri essent et $q \lessdot 1$ esset, fieret $\frac{\mathfrak{b}q}{\mathfrak{a}q}$ fractio terminis minoribus expressa quam $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ (pag. 426), quum $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}$ sint inter se primi &c.

In forma prima, ut $Ec-\mathfrak{b}q$ et $E'c-\mathfrak{a}q$ positivi fiant, debet esse $Ec>\mathfrak{b}q$ atque $E'c>\mathfrak{a}q$; itaque $q<$ tam ipso $\frac{Ec}{\mathfrak{b}}$, quam ipso $\frac{E'c}{\mathfrak{a}}$. Unde manifesto ex integris, qui infra utrumque valorum $\frac{E'c}{\mathfrak{b}}$ et $\frac{E'c}{\mathfrak{a}}$ sunt, maximus integer eligendus pro q erit, ut quam plurimum destruendo, quam minimum positivum relinquat.

In forma secunda debet esse $\mathfrak{b}q>Ec$ et $\mathfrak{a}q>E'c$; itaque $q>\frac{Ec}{\mathfrak{b}}$, et simul $q>\frac{E'c}{\mathfrak{a}}$; adeoque pro q ex integris tam ipsum $\frac{Ec}{\mathfrak{b}}$ quam ipsum $\frac{E'c}{\mathfrak{a}}$ superantibus minimus eligendus est, ut terminus negativus e positivo destruens quam minimum relinquat. Unde forma secunda semper gaudet valore petito; uti etiam prima, quum ibi, si pro q alius integer non detur, o accipi possit; nempe si $\mathfrak{a}E-\mathfrak{b}E'=\pm 1$, tum $\mathfrak{a}Ec-\mathfrak{b}Ec=\pm c$ (pag. sequ.).

In tertia forma debet esse $\mathfrak{b}q<Ec$ et $\mathfrak{a}q>E'c$: itaque

$$\frac{E'c}{\mathfrak{a}}<q<\frac{Ec}{\mathfrak{b}},$$

atque si inter $\frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$ et $\frac{E\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$ integer detur, quivis ipsi q substitui poterit; si vero nullus detur, nec ipsorum x et y valores ulli integri positivi erunt. In hac æquatione autem, si minimus valor ipsius x quæratur, tum omnium valorum dictorum ipsius q maximus accipiendus est, ut quo plus destruat e positivo; si vero minimum y quæratur, minimum accipi debet, ut negativum destruens quo minus relinquat. In forma quarta $\frac{E\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}} < q < \frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$; itaque si detur integer ipso $\frac{E\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$ maior et ipso $\frac{E'\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}}$ minor, is accipi poterit; atque pro minimo x minimum q, pro minimo y maximum q eligendum est.

5. Si $\mathfrak{c}=1$, tum nonnisi in casu formæ secundæ addi modo relato $\mathfrak{a}\mathfrak{b}q-\mathfrak{a}\mathfrak{b}q$ debet; nam si $\mathfrak{a}E-\mathfrak{b}E'=\pm 1$ cum æquatione proposita conveniat, tum, ut statim patebit, E et E' valores minimi erunt; si vero non convenerit, in quavis forma præter secundam q fractio vera erit, quia $E<\mathfrak{b}$ et $E'<\mathfrak{a}$, adeoque (pag. 452) valor non erit integer.

Quod E et E' valores minimi sint, si $\mathfrak{a}E-\mathfrak{b}E'=\pm 1$ propositæ æquationi convenerit, patet sic. Nisi minimi sint: sint $E-n$ et $E'-m$ minimi; erit

$$\mathfrak{a}E-\mathfrak{a}n-E'\mathfrak{b}+\mathfrak{b}m=\pm 1,$$

et subtrahendo æquationem priorem, est

$$\mathfrak{b}m-\mathfrak{a}n=0,$$

adeoque $\mathfrak{b}m=\mathfrak{a}n$; et hinc

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}=\frac{n}{m};$$

atque per (pag. 426)

$$n=\mathfrak{b}k \quad \text{et} \quad m=\mathfrak{a}k$$

pro k integro; unde

$$E-n=E-\mathfrak{b}k, \quad \text{et} \quad E'-m=E'-\mathfrak{a}k$$

valores negativi essent non positivi, quia $E<\mathfrak{b}$, et $E'<\mathfrak{a}$.

6. *Exempla.*

a) Si quis debeat cruciferum alteri, atque is monetas 17 cruciferorum, et hic nonnisi monetas 7 cruciferorum habeat; quæritur numerus monetarum minimus, quo solutio fiat.

Erit

$$17x-7y=1.$$

Evolvatur $\frac{7}{17}$ in fractionem continuam: fiet $17\overset{2}{:}7\overset{2}{:}3\overset{3}{:}1$, et approximantes erunt $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{7}{17}$, ubi $E=2$ et $E'=5$; atque $EF'-E'F$ idest $E\mathfrak{a}-E'\mathfrak{b}=-1$, quia $\frac{E}{E'}$ est tertia, et 3 est numerus impar; itaque signum ipsius 1 non convenit cum æquatione proprosita. Fiet vero iuxta formam secundam

$$\mathfrak{a}(-E+\mathfrak{b}q)-\mathfrak{b}(-E'+\mathfrak{a}q)=1,$$

nempe heic $\mathfrak{c}=1$; est vero $\frac{E}{\mathfrak{b}}=\frac{2}{7}$, et $\frac{E}{\mathfrak{a}}=\frac{5}{17}$, atque ut dictum est, q minimum integrorum utrumque valorem superantium esse debet; erit igitur $q=1$; atque

$$17(-2+7)-7(-5+17)=1,$$

nempe

$$17.5-7.12=1.$$

b) Ita vulgare problema resolvitur: 100 thaleris coempta sunt 100 pecora, vaccæ 10 thaleris, oves 5 thaleris, et sues dimidio thalero; quæritur quotnam fuerint vaccæ, quot oves, et quot sues?

$$10x+5y+\frac{1}{2}z=100,$$
$$x+y+z=100.$$

Unde multiplicando per 2 æquationem priorem, et tum subtrahendo ex ea posteriorem, erit

$$19x+9y=100;$$

et si $\frac{9}{19}$ in fractionem continuam evolvatur fiet $19\overset{2}{:}9\overset{9}{:}1$ atque approximantes erunt $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}$, et ultima fractio est $\frac{9}{19}$, penultima vero est $\frac{1}{2}$; atque

$$EF'-E'F=19-9.2=1;$$

et per $\mathfrak{c}=100$ multiplicando, fit

$$19.100-9.200=100;$$

atque hinc fit

$$19(100-9q)+9(-200+19q)=100$$

æquationi $19x+9y=100$ conveniens. Unde per formam tertiam

$$\frac{200}{19}<q<\frac{100}{9},$$

adeoque q integer inter $10+\frac{10}{19}$ et $11+\frac{1}{9}$ esse, pro valoribus integris positivis ipsorum x, y debet; quapropter q nonnisi 11 esse potest; eritque

$$x=100-9.11=1,\quad \text{et}\quad y=-200+19.11=9.$$

Unde

$$z=100-x-y=100-(1+9)=90.$$

c) Ex eodem demonstratur *peripheriam per factum e quotvis numeris primis constructione geometrica dividi posse, si per quemvis eorum id fieri queat, et nullus eorundem in facto pluries quam semel occurrat.*

Sit nempe peripheria $=1$, et sint primi dicti α, β, γ, ... singuli diversi, et accipiantur prius tantum α et β; erit pro certis x, y integris et $\beta>\alpha$,

$$x.\frac{1}{\alpha}-y\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}.$$

Nam reducendo ad denominatorem eundem, est

$$\frac{\beta x-\alpha y}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha\beta};$$

et hinc

$$\beta x-\alpha y=1;$$

quod semper valores integros positivos pro x et y per formam secundam habet; si nempe penultima approximans ipsius $\frac{\alpha}{\beta}$ det

$$EF'-E'F=1,$$

erit $x=E$ et $y=E'$; si vero

$$EF'-E'F=-1,$$

per formam secundam prodibunt valores quæsiti.

Atque si de certo quovis factorum α, β, ... primorum numero constet, et de uno pluribus constabit. Sit enim $\alpha\beta\ldots = p$, et accedat factor primus μ; erit aut $p > \mu$ aut $p < \mu$, quia si $p = \mu$ esset, μ compositus fieret; sit igitur ex. gr. $p > \mu$; erit

$$\frac{1}{p\mu} = x \cdot \frac{1}{\mu} - y \cdot \frac{1}{p};$$

nam per hoc esset

$$px - \mu y = 1,$$

ubi p et μ inter se primi sunt, adeoque x et y valoribus integris positivis gaudent.

Si vero factor aliquis pluries occurrat, hoc modo neutiquam habebunt x et y valores integros positivos. Nam ex. gr.

$$\frac{1}{\alpha\alpha\beta} = \frac{x}{\alpha} \pm \frac{y}{\alpha\beta}$$

pro x, y integris esse nequit; nam tum esset

$$1 = \alpha\beta x \pm \alpha y,$$

et hinc $\frac{1}{\alpha}$ esset $= \beta x \pm \alpha y$, quod fieri nequit, quum $\frac{1}{\alpha}$ fractio vera membrum ad dextram autem integer sit.

Interim alio modo factorem 2 quotiesvis ingredi posse ex elementis Geometriæ notum est. Videatur opus (pag. 206) citatum.

§. 43.

In opere eodem æquatio indeterminata gradus secundi generaliter resolvitur; quod quum, uti pro x, y, ... æquationes altiores, referre instituti ratio haud permittat, cum pluribus aliis supplemento reservatur. Aliquid tamen ad illustrandam (pag. 395) addendum est.

1. Si m aut numerus impar fuerit, aut pro m pari, t negativum sit, $x^m + px^{m-1} + \ldots + sx + t$ semper radice reali gaudet. Potest enim in casu primo x tam magnum accipi, una vice positive, altera vice negative, in

casu posteriore vero una vice tam magnum, altera vice tam parvum, ut in utroque casu valor expressionis una vice positivus, altera negativus sit; atque tum transitum per o dari statim patebit.

Sit $px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots+rx^2+sx+t=\alpha$, id est dicatur α, et $x^m+px^{m-1}+\ldots+rx^2$ dicatur β, et $x^m+px^{m-1}+\ldots+sx$ dicatur γ.

Si integer i quovis coefficientium, et coefficiente ipsius x^0, maior, atque $x > mi$ accipiatur, erit omnino

$$x^{m-1} > x^{m-2} > x^{m-3} > \ldots$$

eruntque post x^m termini numero m, quorum quivis $< ix^{m-1}$; itaque $mix^{m-1} > \alpha$, seu $mi(mi)^{m-1}$, id est $x^m > \alpha$. Itaque pro m impari, si x accipiatur $= mi$ positive, valor expressionis positivus erit, si vero idem negative accipiatur, valor negativus fiet.

Pro m pari autem et t negativo, si

$$x=\frac{1}{i(m-1)}$$

et i talis integer sit, ut is sit maius quovis coefficientium: erunt pro β ante sx termini numero $m-1$, atque quum $x < 1$ sit, erit

$$x^2 > x^3 > x^4 > \ldots > x^{m-1} > x^m,$$

adeoque

$$(m-1)six^2 > \beta,$$

seu

$$sx > \beta.$$

Aut vero si i ita accipiatur, ut $it >$ quovis coefficientium sit, et x ponatur $=\frac{1}{mi}$; constabit γ e terminis ante t numero m, et

$$x > x^2 > x^3 > \ldots,$$

atque $mit.\frac{1}{mi}$, id est

$$t > \gamma.$$

Itaque pro m pari et t negativo poterit quoque per plane dicta x una vice tam magnum accipi, ut valor functionis positivus sit, et altera vice tam parvum, ut valor negativus sit; nempe si $x = \frac{1}{i(m-1)}$ accipiatur negative, si s positivum, et positive, si s negativum fuerit, erit y negativum, adeoque et addito t negativo functio tota negativa fiet; pariter si x modo posteriore ita accipiatur, ut $t > y$ sit.

Consequenter in omnibus casibus dictis datur functionis valor tam positivus quam negativus; et tum valorem $= 0$ dari (præter pag. 408) et modo sequenti constat.

Pro quovis a datur tale ω, ut $F(x)$ dicta functione

$$x^m + px^{m-1} + \ldots + sx + t,$$

sit

$$F(x+\omega) - F(x) \lessdot a.$$

Nam terminus ultimus t adest, imo et reliqui termini omnes ipsius $F(x)$ adsunt in $F(x+\omega)$, adeoque differentia est summa ceterorum; quæ non maior esse potest, quam si termini hic omnes signo eodem gauderent, sed minor est, quam si generaliter pro $A(x+\omega)^\mu$ præter Ax^μ accipiatur $\frac{2A\mu x^\mu \omega}{2x-(\mu-1)\omega}$ in termino quovis; nempe

$$A\left(x^\mu + \mu x^{\mu-1}\omega + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^{\mu-2}\omega^2 + \ldots + \omega^\mu\right) - Ax^\mu$$

est minus quam si a $\mu x^{\mu-1}\omega$ incipiendo series infinita exponentis $\frac{(\mu-1)\omega}{2x}$ esset; nam sequentes exponentes decrescunt, atque $\frac{(\mu-1)\omega}{2x} \lessdot 1$ fit, si $\omega \lessdot \frac{2x}{\mu-1}$ accipiatur; essetque tum limes summæ

$$\mu A x^{\mu-1}\omega : \left(1 - \frac{(\mu-1)\omega}{2x}\right) = \frac{2A\mu x^\mu \omega}{2x-(\mu-1)\omega}.$$

Sunt autem in $F(x+\omega)$ termini numero m (præter t) sub formam $A(x+\omega)^\mu$ venientes; eritque quodvis

$$A(x+\omega)^\mu - Ax^\mu \lessdot \frac{a}{m}, \text{ si } \frac{2A\mu x^\mu \omega}{2x-(\mu-1)\omega} = \frac{a}{m};$$

fiet vero hoc, si

$$\omega = \frac{2ax}{2m\mu Ax^{\mu} + (\mu - 1)a},$$

nempe ex eo valor iste ipsius ω prodit, in quo ita augere m licet, ut ω dato quovis λ minus fiat; exprimatur enim per $\frac{h}{mk+l}$, et ponatur νm pro m; erit

$$\frac{h}{\nu mk + l} = \lambda,$$

si

$$\nu = \frac{h}{mk\lambda} - \frac{l}{mk}$$

accipiatur; estque manifesto ν eo maius, quo minus λ est. Si igitur quæratur tale ω, ut

$$(x + \omega)^m - x^m \lessdot \frac{a}{m}, \; p(x + \omega)^{m-1} - px^{m-1} \lessdot \frac{a}{m},$$

et idem fiat pro quovis termino usque ad $s(x + \omega) - sx$; accipiatur minimum illorum ω, sive λ quovis eorum minus, cum $\nu > 1$; eritque quum termini præter t numero m sint,

$$F(x+\omega) - F(x) \lessdot m \cdot \frac{a}{m} = a.$$

Concipiatur iam (Fig. 55) $\dotplus x > mi$, atque feratur extremitas eius retrorsum, ut decrescat usque ad o in p, et inde porro crescat negative semper porro; erit prius aliquamdiu valor functionis positivus, adeoque datur (pag. 20) punctum aliquod ultimum $*$, intra quod valor semper positivus fit, post quod autem aliquamdiu non est positivus. Erit autem p$*$ radix æquationis, nempe x, quod inter p et $*$ est, ipsi x substituto, fit $F(x) = 0$. Nam valor is nec positivus nec negativus (nisi o) esse potest; si enim positivus esset, sit $= \dotplus a$; accipiaturque $x = \text{p}* + \omega$, ita ut ω ultra $*$ ad dextram et tale sit, ut si valor novus functionis b dicatur, sit $b - a \lessdot a$; erit b necessario positivum, quia si negativum esset, fieret $b - a > a$; si vero $b = 0$ esset, radix ibi esset. Essetque idem pro quovis adhuc minori negativo ω; itaque punctum ultimum ulterius esse deberet. Si vero $F(x) = F(\mathfrak{p}*)$ negativum esset sit $= \mapsto b$, et accipiatur tale $\mapsto\!\!\!+ \lambda$ intra $*$ ad lævam, ut sit pro $x = \mathfrak{p}* - \lambda$ valor functionis c, atque $c - (\mapsto b) \lessdot b$; erit c necessario negativum; si enim positivum esset, fieret $c \mapsto\!\!\!+ b \gtrdot b$; itaque punctum ultimum ante $*$ esset, et in neutro casu in $*$ caderet.

Consequenter in omni casu, excepto si m par et t positivum sit, datur radix realis; et nonnisi de hoc casu quæstio est. Realem aliquando et aliquando nonnisi imaginariam dari casus ostendunt; ex. gr. $x^2 \pm 3x + 2$ habet utramque realem, ita $X^{17} - 1 = 0$ unam realem, at $x^2 + x + 2$ nonnisi imaginariam radicem habet. At vero semper si non reali, saltem imaignaria radice quævis æquatio gaudet.

2. Demonstrationem huius tamen ad casum exceptum restringere necesse non est; quum iam anno 1799 prodierit «*Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse; auctore* Carolo Friderico Gauss.» — Primitiæ messis ditissimæ — quasi stella venientis solis nuncia — veteranum iuvenis opus — adinstar Herculis, dum serpentem infans disrupit. Demonstrationum, quas summi Geometræ dederant, defectu summa cum modestia revelato, ibidem non solum exacta, sed valde clara, elegans, et evidens exponitur; fit quidem Geometriæ subsidio; sed veritas veritati heterogenea non est, quippe quæ omnes cœlesti fraternitatis vinculo iunctæ, ad quamvis tuendam confluunt; monitum tamen ibidem est, totam demonstrationem mere analytice tradi posse, sed methodus ista rem clarius ob oculos ponere videbatur. Trium quas dedit auctor, prima hæc tantum, et quidem plane nunc huc pervenit.

Instituti ratio eam tantum partem breviter referre permittit, quæ in quovis casu unam saltem imaginariam radicem dari probat; unde, ut ibidem traditur, id quod titulus pollicetur, facile sequitur.

Est (pag. 197.)

$$A + B\sqrt{-1} = u\,(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z),$$

et hoc ad n elevatum est

$$= u^n (\cos. nz + \sqrt{-1}. \sin. nz).$$

Unde si $x^m + ax^{m-1} + \ldots + kx + l$ dicatur X, substituendo

$$r(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)$$

ipsi x, erit

$$\begin{aligned} X = \quad & r^m \cos. mz + ar^{m-1} \cos. (m-1)z + \ldots + kr \cos. z + l \\ & + (r^m \sin. mz + ar^{m-1} \sin. (m-1)z + \ldots + kr \sin. z)\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

quod si dicatur $U + \sqrt{-1}. T$, erit $X = 0$ pro illis z, r, pro quibus $U = 0$ et simul $T = 0$; quia tum

$$U + \sqrt{-1}. T = 0 + \sqrt{-1}. 0 = 0,$$

atque substituendo $r(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)$ ipsi x, fiet $X = 0$.

Talia z, r igitur dari pro quovis determinato integro positivo m demonstrandum venit. Sit in plano P quaquaversum infinito (Fig. 56) recta $\mathfrak{ab}$ utrinque infinita; et in ea punctum fixum $\mathfrak{c}$; et cuiusvis puncti ipsius P nomen generale sit $\mathfrak{p}$, dicaturque r recta $\mathfrak{pc}$, et angulus $\mathfrak{acp}$ generaliter z dicatur. Concipiatur porro quovis radio r positive accepto in plano P circa centrum $\mathfrak{c}$ circulus, et in quovis puncto $\mathfrak{p}$ erectum ad P perpendiculum $= T$, et quidem supra planum, si valor ipsius T pro illo $\mathfrak{p}$ positivus sit, et infra si negativus sit, atque in plano si $T = 0$ sit; dicaturque complexus omnium extremitatum, in qua aliqua ordinatarum dictarum terminatur, *superficies prima*. Pari modo, nonnisi U pro T ponendo, fiat *superficies secunda*. Erit manifesto superficies utraque continua, et quaquaversum infinita ut planum, spatium quaquaversum infinitum in duas plagas dividens; complexus autem omnis eius, si quid prima cum plano P commune habeat, dicatur *linea prima*, et complexus eius, si quid superficies secunda cum P commune habeat, dicatur *linea secunda;* nempe lineas esse sensu in Geometria sublimiore patebit. Si quod punctum superficiei primæ cum P commune fuerit, manifesto ibi ordinata $T = 0$ est; et in puncto superficiei secundæ cum P communi ordinata

$U = 0$ est. Determinantur idcirco lineæ prima et secunda per æquationes $T = 0$, et $U = 0$. Atque si probetur, lineam primam cum linea secunda punctum aliquod $\mathfrak{p}'$ commune habere, tum si recta $\mathfrak{p}'\mathfrak{c}$ dicatur r', et angulus $\mathfrak{acp}'$ dicatur z' erit $r'(\cos. z' + \sqrt{-1}. \sin. z')$ radix æquationis; quia pro illis r', z' tam T, quam U erit simul $= 0$.

3. In opere citato plura commemorantur, curvam hanc singularem concernentia; quæ, prouti m et coefficientes accipiuntur, varia pluribusque ramis utrinque infinitis complexa esse potest; et quum plures haud tanti momenti ab inventoribus nuncupatæ sint, nisi inter tot tantaque alia auctoris inventa occasum quasi heliacum pateretur, *Gaussiana* dici posset.

Ex. gr. est curva utraque, si ad coordinatas orthogonales, id est rectangulas, revocetur, ordinis m. Est nempe (Fig. 57)

$$x = r \cos. z, \; y = r \sin z;$$

et per (pag. 195.) quidquid sit n, est

$$r^n \sin. nz = nx^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} y^3 + \ldots,$$

et

$$r^n \cos. nz = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^{n-4} y^4 + \ldots$$

Itaque tam functio superior ipsum T, quam functio ipsum U exprimens, pro $T = 0$ et $U = 0$, pro abcissis x e centro acceptis, et ordinatis y ad x perpendicularibus, constabit per (pag. 195.) e certo terminorum formæ $Ax^\alpha y^\beta$ numero, denotantibus α, β integros positivos, quorum summa, ubi maxima est, fit $= m$.

Danturque ad minimum m intersectiones lineæ primæ cum secunda; quamquam fieri etiam possit, ut prima a pluribus ramis secundæ secetur, et tum X plures factores æquales habebit. Intersectio autem sub angulis rectis fit; et si plura crura utriusque curvæ in eodem puncto convenerint, totidem crura lineæ primæ adsunt, quot crura secundæ, hæcque alternatim posita, sub angulis æqualibus secant se invicem &;

sed totam dissertationem describere nimium foret. Hic sufficit unius intersectionis necessitatem demonstrare.

4. Demonstratur ibidem ad scopum præsentem, *e centro* c *describi posse circulum, in cuius peripheria sint* 2*m puncta, nec plura, in quibus* $T=0$, *totidemque in quibus* $U=0$; *et quidem ita, ut singula posteriora inter bina priorum iaceant.*

Dicatur enimvero (μ) extremitas arcus z ex a positive supra ac incipientis, si $z=\mu\frac{q}{m}$ pro q æquali dimidio quadranti, atque data æquatione X gradus certi m-ti; dicaturque S summa coefficientium omnium terminorum post x^m sequentium positive acceptorum; dicaturque R quodvis $+r$, quod tam posita omnino unitate quam ipso $S\sqrt{2}$ maius est. Eritque pro quibusvis R et μ, atque $z=\frac{\mu q}{m}$, per superius (pag. 462.) dictum,

$$T=R^m \sin. m\frac{\mu q}{m}+R^{m-1}a\sin.(m-1)\frac{\mu q}{m}+\ldots+Rk\sin.\frac{\mu q}{m};$$

quod item est

$$R^{m-1}\left(R\sin.\mu q+a\sin.(m-1)\frac{\mu q}{m}+\ldots+\frac{k}{R^{m-2}}\sin.\frac{\mu q}{m}\right);$$

atque hoc pro $\mu=8i+1$ aut $\mu=8i+3$, denotante i integrum quemvis, positivum, et pro $\mu=8i+5$ aut $\mu=8i+7$ negativum est. Nam si

$$z=(8i+1)\frac{q}{m},$$

erit

$$\sin. mz=\sin.(8iq+q)=\sin. q=+\sqrt{\frac{1}{2}};$$

nempe sinus dimidii quadrantis (pro radio 1)

$$=+\frac{\sqrt{2}}{2}=+\frac{1}{\sqrt{2}}=+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ita pro

$$z=(8i+3)\frac{q}{m}$$

est

$$\sin.\, mz=\sin.\, 3q=+\sqrt{\frac{1}{2}};$$

si vero

$$z=(8i+5)\frac{q}{m},$$

erit

$$\sin.\, mz=\sin.\, 5q=\sin.(-3q)=-\sqrt{\frac{1}{2}};$$

ita pro

$$z=(8i+7)\frac{q}{m},$$

est

$$\sin.\, mz=\sin.\, 7q=-\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Unde substituendo in valore proximo $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ ipsi sin. μq; erit manifesto pro signo $+$ valor positivus, pro signo $-$ vero negativus; nam etsi termini intra parenthesim post primum, nempe $\pm R\sqrt{\frac{1}{2}}$, sequentes, pro signo $+$ omnes negativi, pro signo $-$ vero omnes positivi essent, quum in nullo termino sinus unitate maior per coefficientem multiplicetur, summa eorum $> S$ esse nequit; est vero $S < R\sqrt{\frac{1}{2}}$ quia $R > S\sqrt{2}$; consequenter $R\sqrt{\frac{1}{2}}$ sive positivum, sive negativum fuerit, per summam sequentium nonnisi ex parte destrui poterit.

Sed etiam pro quovis valore ipsius z inter $(8i+1)\frac{q}{m}$ et $(8i+3)\frac{q}{m}$ cadente, valorem ipsius T positivum, et pro quovis valore ipsius z inter $(8i+5)\frac{q}{m}$ et $(8i+7)\frac{q}{m}$ cadente, negativum esse patet; nam si z maius accipiatur ipso $(8i+1)\frac{q}{m}$ et minus, quam $(8i+3)\frac{q}{m}$, erit $\sin.\, mz=$ sinui arcus ipso q maioris et ipso $3q$ minoris, adeoque $>\sqrt{\frac{1}{2}}$, eritque positivum; ita si

$$(8i+5)\frac{q}{m} < z < (8i+7)\frac{q}{m},$$

erit sin. mz = sinui arcus negativi ipso $-q$ maioris et ipso $-3q$ minoris; adeoque sin. mz erit negativus et $> \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Pariter patet, valorem ipsius U esse negativum ubique pro valore ipsius z a $(8i+3)\frac{q}{m}$ usque ad $(8i+5)\frac{q}{m}$ (inclusive), et positivum ubique pro z a $(8i+7)$ usque ad $(8i+9)$ terminato (inclusive). Nempe pari ter est

$$U=R^{m-1}\left(R\cos.\mu q+a\cos.(m-1)\frac{\mu q}{m}+\ldots+\frac{k}{R^{m-2}}\cos.\frac{\mu q}{m}+\frac{l}{R^{m-1}}\right),$$

atque pro

$$z=(8i+3)\frac{q}{m},$$

id est pro

$$\mu=8i+3,$$

fit

$$\cos. mz=\cos. 3q=-\sqrt{\frac{1}{2}},$$

et pro

$$\mu=8i+5$$

fit

$$\cos. mz=\cos. 5q=-\sqrt{\frac{1}{2}},$$

estque cosinus ubique pro mz crescente a $3q$ usque ad $5q$, negativus et $>\sqrt{\frac{1}{2}}$. Ita

$$\cos.(8i+7)q=\cos. 7q=\cos.(-q)=+\sqrt{\frac{1}{2}},$$

et

$$\cos.(8i+9)q=\cos. q=+\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Unde in peripheria circuli cuiusvis, cuius radius R est, inter quodvis punctum arcum $z=(8i+1)\frac{q}{m}$ terminans, id est inter punctum superius per $(8i+1)$ designatum, et punctum $(8i+3)$, dari aliquod punctum debet, ubi $U=0$ est; ita inter quodvis punctum $(8i+5)$ et punctum $(8i+7)$. Nempe concipiatur z tanquam abscissa ab a positive crescens in peripheria dicta; erunt ordinatæ U semper usquequo $z+\frac{q}{m}$, imo etiam ulterius aliquamdiu, positivæ, pro $z=\frac{3q}{m}$ erit iam U negativum; itaque pro certo z inter $\frac{q}{m}$ et $\frac{3q}{m}$ terminato valor ipsius $U=0$ esse debet. Pariter pro

$$z=(8i+5)\frac{q}{m}$$

est U negativum, et pro

$$z=(8i+7)\frac{q}{m}$$

fit U positivum, adeoque et inter hæc puncta terminari tale z debet, e cuius fine erectum perpendiculum U fiat $=0$.

Ita inter quævis puncta $(8i+3)$ et $(8i+5)$, atque inter puncta $(8i+7)$ et $(8i+9)$ alicubi $T=0$ esse debet. Itaque

$U=0$ fit inter (1) et (3), (5) et (7), (9) et (11) &c,
$T=0$ inter $(8m-1)$ et (1), (3) et (5), (7) et (9) &c.

Danturque in peripheria quavis, cuius radius R est, $2m$ puncta, ubi $T=0$, totidemque, ubi $U=0$. Nempe peripheria $=\frac{8mq}{m}$, atque pro

$$i=m-1, \text{ fit } 8i+7=8m-8+7=8m-1,$$

qui numerus impar $4m$-tus est, quem excipit

$$8m+1=8i+9,$$

pro dicto $i=m-1$; inter puncta $(8m-1)$ et $(8m+1)$ autem, id est inter finem arcus

$$z=(8m-1)\frac{q}{m}$$

et finem arcus

$$z=(8m+1)\frac{q}{m}$$

pariter datur punctum, ubi $T=0$, nempe ubi $z=\frac{8mq}{m}$, et sinus $=0$ est. Itaque in tota peripheria $4m$ puncta erunt numeris imparibus parenthesi clausis signata, atque simul cum intervallo, quod a $4m$-to impari usque ad $(4m+1)$-tum cum puncto (1) coincidens est, fiunt intervalla numero $4m$;

cuius dimidium est numerus punctorum ubi $T=0$, et alterum dimidium est numerus punctorum ubi $U=0$.

Sed neque plura quam $2m$ puncta sunt in peripheria eadem, ubi $T=0$ fit, nec plura, ubi $U=0$ est.

Denotentur enim puncta, ubi T aut U fiunt $=0$, per numeros absque parenthesi; nempe punctum, ubi $T=0$ fit, inter $(8m-1)$ et (1), dicatur punctum 0; ubi $U=0$ fit inter (1) et (3), dicatur punctum 1; ubi $T=0$ fit inter (3) et (5), dicatur punctum 2; porro ubi $U=0$ fit inter (5) et (7), dicatur punctum 3, et ita porro. Patet punctum quodvis numero pari signatum esse lineæ primæ, impari signatum lineæ secundæ; dicatur illud brevitatis gratia *punctum par*, hoc vero *punctum impar*, et dicantur *puncta similia* quæ in diversis circulis eodem numero parenthesi clauso gaudent, ita quæ numero parenthesi destituto denotantur.

Si iam in eadem peripheria plura quam $2m$ puncta darentur, ubi $T=0$, tum alicubi, ubi punctum par est, in arcu inter præcedentem et sequentem numerum imparem parenthesi clausum comprehenso ad minimum duo puncta esse deberent, ubi $T=0$; quod fieri nequit. Concipiantur enim ordinatæ T ab extremitate crescentis arcus z ex. gr. a puncto (3) usque ad (5), fiatque prima vice $T=0$, pro z in puncto $\mathfrak{d}$ terminato; erit, si ante (5) detur adhuc punctum ubi $T=0$ est, aut post $\mathfrak{d}$ aliquamdiu $T=0$, aut in aliquo puncto $\mathfrak{e}$ erit post $\mathfrak{d}$ prima vice $T=0$; neutrum vero esse potest; nam statim patebit post $\mathfrak{d}$ non esse continuo aliquamdiu $T=0$; crescet igitur aliquamdiu T a 0, et demum decrescet, dum ad $\mathfrak{e}$ item $T=0$ fiet; cogitetur nempe punctum in arcu $\mathfrak{de}$ porro motum, secum ferre perpendiculum, in quo punctum ex $\mathfrak{d}$ incipiendo semper in extremitatem ordinatæ T veniat, usquequo in $\mathfrak{e}$ desinat; punctum hoc in perpendiculo moto prius ex $\mathfrak{d}$ porro, tum eundo ad $\mathfrak{e}$ retrorsum movebitur; in puncto perpendiculi eodem manere nusquam potest, ut statim patebit. Itaque si ubi prima vice incipiet retrorsum moveri, abinde usque ad $\mathfrak{e}$ semper retrorsum eat, ibi T maximum habet, ubi punctum retrorsum moveri cœpit; si vero revertatur, priusquam in $\mathfrak{e}$ pervenit, ubi prima vice revertitur, ibi T minimo gaudet. Ut vero hoc fieri possit, aut ut T aliquamdiu idem maneat, deberet esse $\partial T = 0$ (pag. 345.); quod pro z inter puncta dicta terminato fieri nequit. Nam pro quovis ν est ∂ sin. $\nu z = \nu \dot{z}$ cos. νz, et ∂ sin. νz (quoad νz) est cos. νz, at ∂ sin. νz (quoad z) est ν cos. νz; itaque ∂T (quoad z) pro quovis R constante, erit, si in expressione ipsius T superiore pro termino primo intra parenthesim ponatur mR cos. mz, pro secundo autem

$$(m-1)\cos.(m-1)z = \frac{m(m-1)}{m}\cos.(m-1)z \ \&c,$$

itaque m tanquam factor communis extra parenthesim poni poterit, eruntque $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m-2}{m}$ &c fractiones veræ; adeoque ubique inter $(8i+3)$ et $(8i+5)$ valor negativus erit, nam ibi cos. mz est negativus et $> \sqrt{\frac{1}{2}}$; ita inter puncta $(8i+7)$ et $(8i+9)$ valor positivus est, ut supra, quum cos. mz ibi positivus et $> \sqrt{\frac{1}{2}}$ sit. Itaque ∂T in his intervallis nequit $= 0$ esse, adeoque in quovis intervallorum eorundem unum etquidem solum punctum datur, ubi $T = 0$.

Idem de U eodem modo patet; nempe ∂U pro z inter $(8i+1)$ et $(8i+3)$ terminato ubique negativum et inter $(8i+5)$ et $(8i+7)$ ubique positivum est; quum ∂ cos. mz (quoad z) sit $= -m$ sin. mz, quod in priore intervallo negativum, in posteriore vero positivum, et in utroque est $> \sqrt{\frac{1}{2}}$.

5. Patet in peripheriis omnium R puncta (1) in recta centrum petente esse, uti puncta quævis eodem numero impari parenthesi clauso signata. Ita rectam ab utrinque infinitam ramum unum lineæ primæ pro quovis m esse manifestum est; nam pro $z = 0$ aut $z = \frac{4mq}{m}$ fit

$$\sin. z = 0 = \sin. 2z = \sin.(m-1)z = \sin. mz = \&c;$$

adeoque pro quovis valore ipsius r (a 0 in ∞) ad puncta (0) et $(4m)$ fit $T = 0$; estque punctum 0 cum (0) coincidens inter impares $(8i+7)$ et $(8i+9)$, punctum $(4m)$ vero cum puncto $2m$ coincidit, caditque inter impares $(8i+3)$ et $(8i+5)$ pro m impari $= 2n-1$ et $i = n-1$, pro m pari $= 2\nu$ autem et $i = \nu - 1$ cadit inter impares $(8i+7)$ et $(8i+9)$; nempe $4m-1$ est impar $2m$-tus, et pro $m = 2n-1$, ex·

$$4m-1=8i+3,\quad 8n-4-4=8i$$

fit, adeoque $i=n-1$; ita pro $m=2\nu$, ex

$$4m-1=8i+7,\quad 8\nu-8=8i$$

fit, adeoque $i=\nu-1$. Estque post secundum numerum imparem nempe inter (3) et (5) punctum lineæ primæ numero 2 (absque paranthesi) signatum: ita post $2m$-tum imparem sequitur punctum $2m$ lineæ primæ.

6. Sed etiam quivis circulus A sit radio R maiore tam ipso $S\sqrt{2}$ quam ipso 1, centro c descriptus, si complexus omnis puncti numero parenthesi clauso eodem signati, numero eodem romano denotetur, repræsentent (3) et (5) quosvis numeros impares proximos, inter quos $T=0$ fit; inter rectas III et V ramus unus lineæ primæ ex infinito veniens, circulum A ingredietur, atque ex eo via continua alibi, adeoque in puncto pari, quum T non alibi $=0$ esse queat, egrediens abit item in infinitum. Nam in quovis arcu centri c inter III et V comprehenso datur punctum lineæ primæ; dicatur γ complexus omnis eiusmodi puncti; manifesto etiam intra peripheriam A manebit aliquamdiu $R>S\sqrt{2}$ et simul >1, adeoque inter III et V etiam γ intra peripheriam A protendetur.

Sed consideretur in cuiusvis A peripheria T puncti (3), quod dicatur $\mathfrak{i}$, et T puncti (5), quod dicatur $\mathfrak{k}$; erit illud T positivum, hoc vero negativum. Itaque $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{k}$ in plagas diversas superficiei primæ cadunt; consequenter ex $\mathfrak{i}$ nulla via puncti usque ad $\mathfrak{k}$ datur, nisi quæ per superficiem primam transeat. Atque hinc non γ solum interruptum esse nequit; sed etiam $\mathfrak{k}$, plano P et superficiei primæ communi continuo, circulum A post (3) ingrediente, atque post (5) alicubi exeunte, seclusum ab $\mathfrak{i}$ esse necesse est; namque secus punctum in plano P ex $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{k}$, ex una plaga superficiei primæ quaquaversum infinitæ in alteram venire posset, absque eo, ut per eam transeat. Exire autem continuum dictum ex A nonnisi per punctum par peripheriæ A potest, quia T nonnisi ibi 0 fit; atque si punctum illud par 2ν dicatur, de γ dictum et ad complexum omnis puncti

2ν applicari poterit; at sufficit ad scopum, quodvis punctum par cum aliquo puncto pari peripheriæ eiusdem iunctum esse; atque etiam demonstratione eadem ad U applicata, quodvis punctum impar cum numero aliquo impari peripheriæ eiusdem iunctum esse.

Nimirum tum lineæ primæ cum secunda intersectionem aliquam dari pluribus modis evincitur. Ex. gr. suppositio nullam intersectionem dari necessario dari aliquam ponit; quod simul constare nequit. Consequenter *nullam dari falsum est, id est dari aliquam constat.* Si *nimirum* supponatur nullam dari, punctum 1 cum nullo puncto ultra axem $\mathfrak{ab}$ sito iunctum est; nam 1 est punctum lineæ secundæ, recta $\mathfrak{ab}$ autem est pars lineæ primæ, itaque si 1 in peripheria radii $\mathfrak{ac}$, pro $\mathfrak{ac} > S\sqrt{2}$ posito, cum puncto n' iunctum sit, nempe cum aliquo puncto impari iunctum esse debet; erit numerus $n' < 2m$, nempe ad $\mathfrak{b}$ est numerus par $2m$, et n' impar ante $2m$ inter 2 et $2m$ cadere debet; inter 0 et 1 ac 1 et 2 enim numerus nec par, nec impar datur, 2 vero est par, atque si n' ultra $2m$ esset, $\mathfrak{ab}$ per $1_* n'$, id est ramum qui ab 1 usque ad n' est, secaretur. Dicatur porro n'' punctum par, cum quo punctum 2 iunctum est; erit pariter $n'' < n'$, nempe punctum par n'' cadet post 3 et ante n'; quia si retrorsum in 0 caderet, $0_* 2$ et $1_* n'$ se mutuo secarent, ita si post n' caderet, $1_* n'$ et $2_* n''$ se invicem secarent. Sit porro n''' punctum impar cum quo 3 iunctum est; cadet n''' ultra 4 et ante n''; nam cum impari quod antea fuit (modo cum 1) iungi 3 nequit, quia tum $2_* n''$ et $3_* 1$ secarent se invicem, ita si n''' ultra n'' caderet, $2_* n''$ et $3_* n'''$ secarent se invicem. Sit porro n^{IV} punctum par cum 4 iunctum; cadet n^{IV} ultra 5 et ante n''' ob eandem rationem. Sit item n^{V} punctum impar cum 5 iunctum; cadet n^{V} ultra 6 et ante n^{IV}; quia si retrorsum iungeretur cum aliquo impari, sive 1 sive 3, $5_* 1$ vel $5_* 3$ et $4_* n^{\mathrm{IV}}$ secarent se invicem &c. Continuandoque hoc, usquequo tres numeri h, $h+1$, $h+2$ supersint ante proximum n, versus $\mathfrak{a}$, quod cum accentorum numero certo prodiit, punctum illud p, cum quo h iunctum erit, ultra dictum n cadere non poterit; nam tum $h_* p$ et ramus, qui ab n usque ad punctum anterius est, cum quo iungitur, secarent se invicem; itaque h necessario cum $h+2$ iungetur; atque $h_* h+2$ et ramus qui a $h+1$

usque ad punctum, cum quo iungitur, est, sive antrorsum, sive retrorsum esset hoc, se invicem secare debent. Q. E. D.

In (Fig. 58), quam auctor pro

$$X = x^4 - 2x^3 + 3x + 10$$

construxit, ramis lineæ secundæ per puncta denotatis, res oculis subiecta est.

§. 44.

Pauca adhuc arboris ramos (pag. 205) illustrantia, addenda sunt.

1. Dictum (pag. 209.) erat e quavis functione $F(x)$ seriem deduci, cuius terminus generalis est $F(m\dot{x}) - F\big((m-1)\dot{x}\big)$, terminorum summa vero est $= F(x) - F(0)$. Facile cogitatur, ipsi $\dot{x}$ constantem aliquam ex. gr. 1 aut generalius $\frac{1}{\mu}$ substituere, ut sit $x = n\dot{x} = \frac{n}{\mu}$, et terminus generalis sit

$$F\left(m\,\frac{1}{\mu}\right) - F\left((m-1)\,.\,\frac{1}{\mu}\right)$$

atque summa sit

$$F\left(\frac{n}{\mu}\right) - F(0)\,;$$

nempe in $F(x)$, ponatur prius $n\dot{x}$ pro x, et tum $\frac{1}{\mu}$ pro $\dot{x}$. Ita deinde licebit n sive ut numerum constantem, sive ut in infinitum crescentem considerare.

Ex. gr. Sit

$$F(x) = \frac{x}{1+x}\,;$$

erit

$$F(m\dot{x}) - F\big((m-1)\dot{x}\big)$$

terminus generalis seriei ex $F(x)$ deductæ, qui pro $\dot{x} = 1$ fit

$$\frac{m}{1+m} - \frac{m-1}{1+m-1} = \frac{1}{m(m+1)}\,;$$

summa vero est

$$F(x) - F(0) = F(n) - F(0)$$

pro $\dot{x}=1$ adeoque $n\dot{x}=n$. Substituendo igitur in $\frac{1}{m(m+1)}$ ipsi m numeros ab 1 usque ad n inclusive, fiet series

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2.3},\ \frac{1}{3.4},\ldots,$$

et summa est

$$\frac{n}{1+n}-\frac{0}{1+n}=\frac{n}{n+1}$$

quod tendit ad 1, si $n \to \infty$.

Si

$$F(x)=\frac{ae^x}{e-1};$$

erit seriei deductæ terminus generalis

$$F(m\dot{x})-F((m-1)\dot{x})=\frac{ae^{m\dot{x}}-ae^{(m-1)\dot{x}}}{e-1}=\frac{ae^{(m-1)\dot{x}}(e^{\dot{x}}-1)}{e-1},$$

et summa est

$$F(x)-F(0)=\frac{ae^{n\dot{x}}-ae^0}{e-1}.$$

Si $\dot{x}$ ponatur $=1$; est

$$\frac{ae^{m-1}(e^1-1)}{e-1}=ae^{m-1},$$

et summa $=\frac{ae^n-a}{e-1}$, uti (pag. 151) pro serie geometrica erat.

Si vero $\dot{x}$ ponatur $=\frac{1}{\mu}$; erit terminus generalis

$$\frac{ae^{\frac{m-1}{\mu}}(e^{\frac{1}{\mu}}-1)}{e-1},$$

et summa erit

$$\frac{ae^{\frac{n}{\mu}}-a}{e-1}.$$

Prodit autem sic series geometrica, cuius (substituendo numeros 1, 2,... ipsi m) terminus primus est

$$\frac{ae^{\frac{1-1}{\mu}}(e^{\frac{1}{\mu}}-1)}{e-1},$$

et secundus

$$\frac{ae^{\frac{2-1}{\mu}}(e^{\frac{1}{\mu}}-1)}{e-1},$$

et quivis per $e^{\frac{1}{\mu}}$ multiplicatus dat sequentem. Unde etiam pro $n=\mu$, summa priorum μ terminorum erit

$$\frac{ae-a}{e-1}=\frac{a(e-1)}{e-1}=a;$$

et pro $n=2\mu$ erit summa

$$\frac{ae^2-a}{e-1}=\frac{a(e^2-1)}{e-1}=\frac{a(e+1)(e-1)}{e-1}=a+ae;$$

atque in genere si $n=k\mu$, denotante k integrum quemvis positivum, erit summa

$$\frac{ae^k-a}{e-1}=\frac{a(e^k-1)}{e-1}=\frac{a(e-1)(1+e+e^2+\ldots+e^{k-1})}{e-1}=$$
$$=a+ae+ae^2+\ldots+ae^{k-1},$$

quæ est summa k terminorum seriei geometricæ prioris. Quod vero sit

$$e^k-1=(e-1)(1+e+e^2+\ldots+e^{k-1})$$

patet dividendo e^k-1 per $e-1$ (pag. 151). Solet autem m-tus seriei huius terminus, $\frac{m}{\mu}$-tus prioris appellari.

Ita si

$$F(x)=ax+\frac{x^2d-xd}{2};$$

erit terminus generalis $F(m\dot{x})-F((m-1)\dot{x})$

$$am\dot{x}+\frac{(m\dot{x})^2d-m\dot{x}d}{2}-\left(a(m-1)\dot{x}+\frac{(m-1)^2\dot{x}^2d-(m-1)\dot{x}d}{2}\right);$$

quod ponendo $\frac{1}{\mu}$ pro $\dot{x}$, fit

$$=\frac{a}{\mu}-\frac{d}{2\mu}-\frac{d}{2\mu^2}+\frac{md}{\mu^2},$$

patetque seriem esse arithmeticam primi ordinis; prodeunte e termino quovis sequentem, addendo $\frac{d}{\mu^2}$. Summa vero erit

$$F(x) - F(0) = \frac{an}{\mu} + \frac{n^2 d}{2\mu^2} - \frac{nd}{2\mu},$$

quum $F(0)=0$ sit; adeoque pro $\mu=1$ fit terminus generalis $a+(m-1)d$, et summa est

$$na + \frac{(n^2-n)d}{2} = \frac{(a+u)n}{2},$$

uti (pag. 152) pro serie arithmetica. Si vero $\mu k = n$ (pro quovis integro positivo k) fiet summa

$$= ak + \frac{k^2 d - kd}{2},$$

quæ est summa priorum k terminorum seriei arithmeticæ prioris; soletque et terminus m-tus seriei huius $\frac{m}{\mu}$-tus prioris dici.

Ita ex innumeris functionibus totidem series deduci possunt, quarum tam termini generales, quam summæ datæ erunt; at quæstio suboritur, num e termino generali seriei alicuius ad functionem e qua deducitur perveniri queat? Quo pacto etiam summa data esset. Expressio summæ talis, in qua, ipsi m quivis numerus substituatur, totidem terminorum summa exhibetur, vocatur *terminus summatorius*; qui si $=f(m)$ sit, pro termino generali prodibit omnino $f(m)-f(m-1)$.

2. Ad 3. (pag. 205) pertinet: quod si

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \dots$$

pro quovis valore ipsius x sit 0; erit

$$A = 0 = B = C = \&,$$

nempe quilibet coefficientium erit 0. Nam tum etiam per x^a utrinque dividendo, et

$$A + Bx^{b-a} + Cx^{c-a} + \dots$$

y dicto, erit $y=0$, pro quovis valore ipsius x, etiam pro $x=0$; namque verum de x utvis parvo est, si non sit 0; si vero $x \sim 0$, tum $Bx^{c-a}=0$ aut ~ 0, ita $Cx^{c-a}=0$ aut ~ 0 &; adeoque quotvis termini numero certo accipiantur, pro dato quovis ω fieri

$$A+Bx^{b-a}+Cx^{c-a}+\ldots-(A+B0^{b-a}+C0^{c-a}+\ldots)<\omega$$

potest nisi $=0$ sit; sed

$$A+Bx^{b-a}+\ldots=y=0$$

pro x non $=0$. Consequenter quum $y=0$, et $y-A=0$ vel ~ 0, est $A=0$ (pag. 81, 4.). Idem etiam porro continuatur; ut nempe utrinque dividendo per x^{b-a}, prodeat

$$B+Cx^{c-a-(b-a)}+\ldots=B+Cx^{c-b}+\ldots=0,$$

atque inde $B=0$ et ita porro.

Ex. gr. sit

$$\frac{1+x^2}{1-x-x^3}=1+ax+bx^2+cx^3+\ldots$$

Multiplicando utrinque per denominatorem, et subtrahendo numeratorem functio ad 0 reducetur, et collectis ubique coefficientibus eiusdem potentiæ ipsius x, erit

$$0=(a-1)x+(b-a-1)x^2+(c-b-1)x^3+(d-c-a)x^4+\ldots$$

atque hinc

$$a-1=0,\ b-a-1=0,\ (c-b-1)=0,\ d-c-a=0\ \&,$$

adeoque

$$a=1,\ b=a+1=2,\ c=3,\ d=4,\ e=6,\ f=9,\ g=13\ \&,$$

quibus valoribus substitutis, prodibit series functioni fractæ æquivalens, si nimirum convergat, aut terminata sit.

Facile autem perspicitur, in isto casu quemvis terminum a quarto incipiendo, esse summam primi et tertii ad sinistram, ex. gr. $9=6+3$; dicitur series eiusmodi *recurrens*, cuius terminus quilibet certorum numero μ ad lævam præcedentium, utpote μ'-ti μ''-ti . . ., per certos factores multiplicatorum summa est, ita ut pro quovis termino, ν-tus ad lævam per eundem factorem multiplicetur. Dicitur quoque series recurrens eiusmodi ordinis μ-ti, et factorum dictorum series *scala seriei recurrentis* audit.

Ex. gr. pro termino primo $=0$, et secundo $=1$, atque scala 1, 3, fit series

$$0,\ 1,\ 1.1+0.3=1,\ 1.1+3.1=4,\ 4.1+3.1=7,\ 7.1+3.4=19,\ \&,$$

nempe

$$0,\ 1,\ 1,\ 4,\ 7,\ 19,\ \ldots,$$

Sed methodus antea dicta applicatur etiam si, quod sæpius requiritur, uti (pag. 259), functio fracta $\frac{f(x)}{F(x)}$ ut summa simpliciorum exhibenda sit; siquidem denominator in requisitos factores simplices resolvi possit, quod efficitur sæpius, quærendo radices æquationis $F(x)=0$; quæ si fuerint a, b, c, erit

$$F(x)=(x-a)(x-b)(x-c);$$

sed utcunque deventum ad hos factores fuerit, ponendo

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

determinantur A, B, C modo sequenti.

Ex. gr.

$$\frac{1}{a^2x-x^3}=\frac{1}{x(a+x)(a-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a+x}+\frac{C}{a-x};$$

et reducendo ad denominatorem eundem, atque per eum utrinque multiplicando, et numeratorem qui ad lævam est, subtrahendo, fiet

$$0=(a^2A-1)+(aB+aC)x+(C-B-A)x^2;$$

unde

$$a^2A-1=0, aB+aC=0, C-B-A=0$$

adeoque

$$A=\frac{1}{a^2}, B=-C,$$

atque

$$C = B + A = \frac{1}{a^2} - C;$$

unde

$$2C = \frac{1}{a^2}, \text{ et } C = \frac{1}{2a^2},$$

atque

$$B = -\frac{1}{2a^2}.$$

CONSPECTUS ARITHMETICAE GENERALIS.

SECTIO IV.

ADDITAMENTA IN PRAECEDENTIBUS TRADITA CONCERNENTIA.

A.

DE BEATITUDINE.

In *Introductione*, ubi desideria æterna, nempe *veritatis*, et *amoris* fraterni reciproci in eodem *Patre* uniti exponuntur; id est quæ nulli tempori finito, nec ulli existentiæ formæ propria sunt, et notam Auctoris communis eandem referentes, nonnisi claritate potentiave differunt: vocabulum brachiis per errorem omissum est. Præterea nec *beatitudo* definita est; sit igitur fas aliquot verba ex olim editis addere.

Quis est, qui reflectens, se infinitæ caussæ superiori subiectum esse non sentiat, eoque per se infirmus non refugiat? Certe si *nil admirari* rectum sit, in quantum effectus quilibet e sua caussa promanat: *omne admirari* rectius est; quocunque enim sensus internos externosve porrigamus, sive cogitare nos, bonumque omnium velle simus conscii, sive ad voluntatis nutum moveatur corpus (unum aut millia simul), sive flos nocte apertus gemmam auroræ ferat; admirando omnia, ad summe et denique solam admirandam, supremam omnium caussam inconceptibilem provocant, nobis infinite superiorem, attamen intus extusque ubique proximam.

Indicium beatitudinis esset: gratitudo ex omnium et singulorum gaudio suæ existentiæ resultans, caussam hanc communem dulci desiderio quærens; quanquam et illi, cui inter ruinas templi quondam pulchrius nitente sole exstructi, nullum terrestre gaudium germinat, aut cuius idealibus æthereis disparentibus, quasi de cœlo deiecti, et ex arida paradiso respicientis labentes lachrimæ nullas amicas inveniunt: in mœstissimas tenebras descendant candidi angelorum chori, desertumque æterna resonet lætitia — nec Deus infinitus ullibi magis appareat, quam ad pectoris vulneribus immeritis gementis solitudinem derelictam explendam — imo infinitus quidem ubique præsens, proximus ad lectum morientis sentiatur. Certe veluti terra, si oculis pro videndo sole destituta, sensu polleret, calorem attractionemque eius persentisceret; simili modo sensus animæ intimus de Deo testificatur, et omnes mundi ex immenso abysso micantes annuunt; ac suprema manu sacrosanctissima pectoribus imis inscripta, dummodo lux alma faveat, nec falsa spuriaque, generi humano inimica, mortales oculos obcœcet, ultro leguntur; lectaque e procellis temporaneis ad æternitatis tranquillitatem elevant.

Absoluta beatitudo vero (quæ omnium et singulorum est), consisteret *obiective* in eo, ut sub quovis tempore, et in quavis existentiæ forma, omnes et singuli simul, ut infantes æternitatis eiusque certi hæredes, incrementum quam maximum capiamus; id est quo clariora fortioraque reddamus, expleamusque in quantum fieri potest, æterna desideria, temporaneis quoque satisfaciendo, in quantum priora requirunt (saltem permittunt). *Subiectiva* autem est, dulcis omnium necessitas *obiectivam* dictam semper volendi, sensusque cœlestis, dum in almo veritatis die, gelidæ individualitatis glacie undique soluta, omnibusque amore reciproco in brachiis infinitis Patris communis unitis, reflexione luminis calorisque divini ex omni in omne, ∞^{∞}, pulchritudo originalis absoluta æternaque patefiet; adeo ut *pulchritudinis* huius absolutæ *desiderium* quoque æternis adnumerari possit, (ut numero sacro trina sint), quamquam sæpe tempore æternitatem mentiente, splendida imago evanescens, telam fœdam post se relinquat.

B.

DE PROPORTIONIBUS, LOGARITHMIS, NUMERATIONEQUE ARABICA.

Sequentia in gratiam Tyronum addere libet.

Quum proportio geometrica (pag. 87) per

$$a : ae = b : be$$

exprimi possit: patet *factum extremorum esse facto mediorum aequale*, nempe $abe = aeb$.

Conversim quoque, si A, B, C, D talia fuerint, ut $AD = BC$, est

$$A : B = C : D.$$

Nam dividendo per BD, erit

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BC}{BD};$$

adeoque

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

seu

$$A : B = C : D.$$

Unde hæc nota proportionis geometricæ fit: ex. gr. 2, 3, 4, 5 non sunt in proportione; nam 2.5 non $= 3.4$, et si proportio esset, $2.5 = 3.4$ esse deberet.

Hinc etiam *e quibusvis duobus factis aequalibus proportio institui potest.* Ex. gr. ex $cx = a$ id est $cx = 1.a$ fit

$$c : 1 = a : x;$$

nam $cx = a.1$.

Imo etiam *quaevis tria in proportione data fuerint, quartus reperitur*, dividendo factum dati *paris* per illum cuius socius quæritur; per *par* intelligendo par extremorum, aut par mediorum; nempe e duobus paribus unum datum est, et quantitas tertia est, quæ suo pari caret.

Ex. gr. Si $A:B=C:D$, et A, B, D data fuerint, erit $AD=BC$; adeoque

$$\frac{AD}{B}=\frac{BC}{B}=C.$$

Ita reliqui casus patent.

Quum vero si $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, sive $AD=BC$ fuerit, (per quorum quodvis unum, ponitur alterum), tum A, B, C, D in proportione sint: per hoc ex una plures, atque e pluribus novæ promanant.

I. *Ex una*, $a:ae=b:be$; erit *permutando* terminos prius internos,

$$a:b=ae:be,$$

permutando vero externos est

$$be:ae=b:a.$$

Ita *aliquod extremorum et simul aliquod internorum per idem multiplicando*, aut per idem dividendo, proportio erit. Nempe si

$$a:ae=b:be,$$

est

$$ap:ae=bp:be,$$

et

$$a:aeq=b:beq$$

imo

$$ap:aeq=bp:beq.$$

Ita

$$\frac{a}{p}:\frac{ae}{q}=\frac{b}{p}:\frac{be}{q}.$$

Ita *componendo* ex $a:ae=b:be$, sequitur

$$\pm a\pm ae:\pm ae=\pm b\pm be:\pm be,$$

et

$$\pm a\pm ae:\pm a=\pm b\pm be:\pm b;$$

notando, quod in his duabus lineis ae et be eodem signo, ita etiam a et b eodem signo, sive diverso a priore sive non, accipiantur.

II. 1. *E pluribus* quotquot fuerint, sequitur esse etiam *factum terminorum primorum ad factum* secundorum, *uti factum* tertiorum *ad factum* quartorum. Nempe si

$$a : aq = b : bq$$

et

$$c : cr = d : dr,$$

est

$$ac : aqcr = bd : bqdr.$$

Unde semper ad una plures concludere licet; quæcumque proportio enim e pluribus hoc pacto prodierit, per

$$P : Pm = p : pm$$

exprimi potest, cui accedente alia

$$z : zn = x : xn :$$

erit

$$Pz : Pmzn = px : pmxn.$$

Si vero

$$A : B = C : D = E : F = \dots;$$

erit

$$A + C + E + \cdots : B + D + F + \cdots = A : B.$$

Nam B per Aq, D per Cq, et F per Eq exprimi potest; adeoque

$$B + D + F = (A + C + E) q,$$

et

$$\frac{A + C + E + \cdots}{B + D + F + \cdots} = \frac{1}{q} = \frac{A}{B}.$$

Solet hoc ita enunciari: *summa antecedentium est ad summam consequentium, ut quilibet antecedens ad suum consequentem*; nempe ex. gr. si A, B, C, D in proportione fuerint, dicebatur A *antecedens*, B vero *consequens rationis* A ad B, ita C antecedens, D consequens rationis C ad D.

In omnibus casibus relatis autem, patet proportionem esse; sive *per quotos ex antecedentibus per suos consequentes ubique aequales*, sive *per facta extremorum factis mediorum aequalia.*

2. *Si vero duæ proportiones fuerint, et tam a quam b utriusque terminum aliquem constituat*; atque reliquorum duorum terminorum in una ad lævam alterius termini cadens dicatur c, et alter ab hoc ad dextram cadens d dicatur, in altera autem ad lævam cadens f, et alter g dicatur: quæritur, c, d, f, g quando et quo ordine sint in proportione? et quando non?

Aut efficiunt a et b in utraque proportione *par* aliquod (nempe extremorum vel mediorum), aut non; si non, aut in neutra efficient, aut in una tantum.

Si in utraque efficient, erit $c:f=g:d$, quod *perturbatim* dicitur. Si in neutra efficient; tum a aut in utraque ad lævam a b, aut in utraque ad dextram, aut in una ad lævam, in altera ad dextram cadit: in duobus casibus prioribus est $c:d=f:g$, quod *ordinatim* vocatur; in casu posteriore vero est $c:d=g:f$.

At si in una tantum efficiant par, tum nonnisi pro certo valore ipsius a vel b proportio est.

Etenim si a, b in utraque par efficiant: tum et c, d et f, g par efficient; fietque $ab=cd=fg$; adeoque $c:f=g:d$.

Si vero a, b in neutra effecerint par; stet prius a in utraque ante b; tum si a aliquod extremorum fuerit, quum ante b sit, nonnisi primo loco stare potest, et tum b ad finem esse nequit, (quia a et b par extremorum efficerent); adeoque b aliquod mediorum, ac d terminus quartus, et $ad=bc$ erit. Si vero a aliquod mediorum sit, b necessario ad finem erit; quia a ante b stat, et si b loco tertio esset, a et b par efficerent; itaque loco primo c est, et alterum mediorum d est; adeoque $bc=ad$ ut prius. Pariter in proportione altera fit $ag=bf$; atque hinc

$$a=\frac{bc}{d}=\frac{bf}{g},$$

et dividendo per b fit $c:d=f:g$.

Si b stet ante a in utraque, in demonstratione proxima ubique b pro a et a pro b ponendo, fiet $ac=bd$ et $bg=af$; et hinc

$$a=\frac{bd}{c}=\frac{bg}{f};$$

atque hinc $df=cg$; consequenter et tum $c:d=f:g$.

At si in una (ex. gr. in qua c est) a ante b, et in altera post b stet; e præcedentibus patet fore, $ad=bc$ in priore, et $af=bg$ in altera; atque hinc

$$a=\frac{bc}{d}=\frac{bg}{f},$$

adeoque

$$\frac{c}{d}=\frac{g}{f},$$

id est $c:d=g:f$, non ordinatim $c:d=f:g$.

Si vero a et b in una (ex. gr. in qua c est), efficiant par, et in altera non, tum fiet $ab=cd$, et in altera factor socius ipsius a nonnisi f aut g esse poterit; erit igitur aut $af=bg$, aut $ag=fb$. Combinetur iam $ab=cd$ cum casu utroque; ex

$$ab=cd \quad \text{et} \quad af=bg,$$

fit

$$a=\frac{cd}{b}=\frac{bg}{f},$$

atque hinc

$$cd=\frac{bbg}{f},$$

e quo bb nonnisi ita deleri potest, ut tantum literæ c, d, f, g maneant, si $b=1$, aut $c=b$, aut $f=b$, aut $d=b$. Pariter ex

$$ab=cd \quad \text{et} \quad ag=fb,$$

fit

$$a=\frac{cd}{b}=\frac{fb}{g},$$

adeoque

$$cd=\frac{fbb}{g};$$

ubi pariter bb tolli nequit, nisi $b=1$, vel c aut d vel g fuerit $=b$.

3. Ita si fuerint proportiones, quæ ipsæ, et termini earum (per pag. 482) ita ordinari queant, ut cuiusvis terminus secundus sit sequentis primus, excepta proportione ultima: tum primæ terminus primus est ad ultimæ secundum uti factum e terminis tertiis ad factum e terminis quartis. Nam ex. gr. si

$$A : B = h : i$$
$$B : C = k : l$$
$$C : D = m : n;$$

(per pag. 483) est

$$ABC : BCD = hkm : iln;$$

seu (per pag. 482)

$$A : D = hkm : iln,$$

quæ *regula catenaria* vocatur, et applicatur ad varias monetas mensurasque; si ex. gr. A, B, C, D variæ mensuræ fuerint, et quæratur ratio ipsius A ad D, datis $A : B$, $B : C$, $C : D$.

III. Præter hæc aliquid adhuc de *compositione* (et antehac usitato *numero*) *rationum*, cuius vicem hodie *exponens potentiae* subit, addendum est.

1. Plurimæ quantitates ab aliis certo modo dependent: dependentiæ varii modi innumerabiles cogitari possunt: at hic nonnisi eiusmodi dependentia quantitatis z ab alia u considerata, ut dum ex u fit ku, ex z fiat aut kz aut $\frac{z}{k}$; dicitur z ab u in casu primo *directe*, in casu posteriore *inverse dependere*.

Sit x quantitas rei alicuius, pro rerum certarum quantitatibus $a, b, c, \ldots$, et dependeat x ab omnibus iis directe; fiatque $na = A$ ex a (manentibus ceteris), fiet nx ex x; et postea mutetur b in $mb = B$ (item manentibus ceteris) fiet mnx ex nx; tum mutetur c in $pc = C$, fiet $pmnx$ ex mnx; est vero

$$n = \frac{A}{a}, \quad m = \frac{B}{b}, \quad p = \frac{C}{c},$$

adeoque

$$pmnx = \frac{ABCx}{abc};$$

atque idem pro quarto prodit, si ad abc, ABC et x, quarta proportionalis quæratur. Quotvis fuerint autem a, b, . . . , idem continuari patet.

Si vero x ab aliquo ipsorum a, b, . . . , ex. gr. a b inverse dependeret; tum ex x fieret

$$\frac{pnx}{m} = \frac{AbCx}{aBc}.$$

Solet autem hoc ita enunciari; quod quantitates generis x, sint *in ratione composita*, e rationibus ipsorum a, b, . . . , *directis* in casu primo, in posteriore vero e rationibus ipsorum a, c *directis*, et *inversa* ratione ipsorum b, (per literas quantitatum literis nominis eiusdem denotatarum genera intelligendo). Unde et aliæ eiusmodi denominationes intelliguntur. Ex. gr. in motu uniformi sunt spatia in ratione composita e rationibus directis temporum et celeritatum, celeritates autem sunt in ratione composita, e directa spatiorum et inversa temporum. Ita quo maior pecunia ad lucrum elocata, et quo maius tempus elocationis, eo maius lucrum est; ut si elocatæ pecuniæ fuerint P et p, et tempora T et t; fiet lucrum prioris ad lucrum posterioris (pro iisdem conditionibus), uti PT ad pt.

Quum eiusmodi problema ut antea proponitur; quærendo quidnam ex x fiat, mutatis a in A, b in B, et c in C; nonnisi *data*, modo sequenti describenda sunt: nomen generale rerum a, A, ad lævam ponatur, et post hoc eadem linea horizontali scribantur a, A; sub hanc lineam in sequenti nomen generale ipsorum b, B scribatur pariter ad lævam; et post hoc scribantur b, B sub a, A; et ita porro in deorsum sequenti linea horizontali, sequentis literæ nomini generali postponantur literæ ipsæ, prius minuscula, tum altera; donec nonnisi x supersit; et tum ponatur x ad dextram loco tertio; atque quæratur, quomodo x a literis singulis dependeat, prius ab a, tum a b &, et si ab aliqua inverse dependeat, literæ nominis eiusdem loca permutent, reliquis manentibus. Atque demum quivis terminorum columnæ primæ, simul cum aliquo terminorum columnæ secundæ, aut cum termino tertio nempe cum x, per idem dividi potest, si per id numeri minores remaneant; atque hoc continuetur, *donec numeri amplius minui nequeant*: et tum proportionalis quarta quæsita prodibit, si id quod loco tertio remansit, multiplicatum per factum in columna secunda remanentium, per factum e columna prima remanentium dividatur. Ratio facile patet, cum proportionalis quarta sit ex. gr. in casu primo

$$=\frac{ABCx}{abc},$$

in altero sit

$$=\frac{AbCx}{aBc},$$

ubi superius inferiusque per idem dividendo valor idem manet.

Vocatur autem regula ista, si iuxta denominationem præcedentem, literarum, e quibus incognita quæritur, fuerit numerus μ, *regula de* μ; nempe *regula de tri*, si præter x nonnisi duæ ex. gr. a et A fuerint, *de quinque* si et b, B adfuerint &c.

2. Sed etiam quum in proportione, etsi tantum duo termini, et summa reliquorum data fuerit, (per pag. 482) reperiatur quartus: sit artificii huius cum compositione rationum combinati exemplo, *regula societatis*.

Si nempe duorum pecuniæ, simul lucrandi caussa elocatæ, fuerint P et p, et tempora T et t, lucrumque commune (⊣⊢ aut ⊢) fuerit λ; erit L lucrum prioris ad l lucrum posterioris, in ratione composita directa pecuniarum et temporum, adeoque

$$L:l=Pt:pt;$$

atque hinc

$$(PT+pt):PT=(L+l):L=\lambda:L;$$

et quotvis fuerint, summa productorum eiusmodi, erit ad cuiusvis factum, uti lucrum universum ad lucrum illius.

Nam si de quibusvis n eiusmodi factis valeat regula, valebit et de $(n+1)$ factis. Sit enim ex $(n+1)$ productis, quodvis aliquod F; exemto hoc manebunt facta numero n, quorum summa sit S, et quodvis aliquod sit f. sitque k lucrum ipsum f, nempe pecuniam, quæ unus factor ipsius f est, concernens, atque lucrum ipsum F concernens sit x; et lucrum totius S sit R; erit

$$S:f=R:k$$

et

$$f:F=k:x$$

atque hinc

$$Sf:fF=Rk:kx$$

seu

$$S:F=R:x,$$

atque hinc

$$(S+F):F=(R+x):x.$$

3. Quid autem per *numerum rationum*, unde nomen logarithmi venit, intelligatur, e sequenti patet. Sint μ et ν integri, prius positivi.

Ratio $q^{\mu}:1$, dicebatur $(\mu:\nu)$-tuplicata rationis $q^{\nu}:1$; nempe $q^{\nu}:1$ componitur e numero ν rationum $q:1$, ex. gr. pro $\nu=2$, componitur $q^{2}:1$ ex $q:1$ et $q:1$; fiet enim multiplicando antecedentes et consequentes, $q^{2}:1$; atque $q^{\mu}:1$ componitur e numero μ eiusmodi rationum. Exprimitur autem hoc brevius clariusque hodie per

$$(q^{\nu})^{\frac{\mu}{\nu}}=q^{\mu},$$

ubi q^{ν} pro basi accipitur. Ex gr. si basis logarithmorum sit $10=q^{\nu}$, et ν denotet 10 milliones, erit $q=$ radici decies millionesimi gradus ex 10, et radix ista nempe $10^{\frac{1}{\nu}}$, elevata ad μ, erit $=10^{\mu:\nu}$, quod idem est, ac si ex 10 ad μ elevato, radix gradus ν extraheretur; et $\mu:\nu$ est quoad 10 logarithmus ipsius $10^{\mu:\nu}$; quod olim dicebatur, quod ratio ipsius $10^{\mu:\nu}$ ad 1 sit $(\mu:\nu)$-tuplicata rationis 10 ad 1.

Imo posita serie geometrica

$$\ldots\ qq,\ q,\ \frac{q}{q}=1,\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{qq},\ \ldots,$$

et inferius supposita serie arithmetica

$$\ldots,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$$

non solum ratio $qq:1$ dicebatur duplicata rationis $q:1$, sed etiam ratio $\frac{1}{qq}:1$ dicta est (-2)-tuplicata rationis $q:1$; nempe $\frac{1}{qq}:1$ componitur e duabus rationibus $q:1$ inversis, nimirum ex $1:q$ et $1:q$; est enimvero

$$\frac{1}{qq}:1=1:qq.$$

Interim adhuc aliquid de logarithmis *Neperi* (Scoti Baronis *Merchistonii*, ex antiqua et insigni prosapia oriundi) addere in gratiam Tyronum paulo ulterius provectorum libet.

Calculum *trigonometricum* sublevare eius *propositum fuit*; sinum totum (nempe radium) ponit $=10\,000\,000$, quod sit $=n$; atque inde descendit in serie geometrica, cui subscribit seriem æquidifferentium, ita ut cuivis termino K seriei superioris respondeat terminus k exprimens numerum rationis K ad n (saltem *cum errore exiguo*), ratione ipsius $n-1$ ad n pro basi posita, *(etsi basis apud Neperum nullibi nominetur)*; ut nimirum moderno loquendi usu sit

$$\frac{K}{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^k,$$

cum errore exiguo; et k fit logarithmus ipsius $\frac{K}{n}$ quoad basim $\frac{n-1}{n}$.

Atque hinc est, quod quamvis nullibi videatur *Neper* de *logarithmis* qui *naturales* vocantur, cogitasse; tamen per $-10\,000\,000$ id est $-n$ multiplicatus *logarithmus naturalis*, in prioribus notis *cum logarithmo Neperiano* conveniat. Nimirum e basim logarithmorum naturalium denotante sit

$$\frac{K}{n}=e^x;$$

quum (pag. 183) sit

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frown e,$$

dum $n \frown \infty$; erit etiam pro n satis magno, cum errore exiguo

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x=\frac{K}{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-nx}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^k=\frac{K}{n};$$

adeoque $-nx=k$. Consequenter x, id est log. nat. $\frac{K}{n}$, per $-n$ multiplicatus cum logarithmo Neperiano eiusdem $\frac{K}{n}$ convenit, cum errore exiguo.

Facile etiam patet logarithmum Neperianum fractionis veræ positivum, et quantitatis unitate maioris negativum esse: nempe $\frac{n-1}{n}$ est <1, adeoque ad negativum elevari debet, ut unitate maius, et ad positivum, ut fractio vera prodeat.

Adhibuit autem *Neper* motus ideam, uti *Newton* ad calculum fluxionum; nempe in duarum rectarum una A, puncto certa lege moto, seriem geometricam, (quod facile, et clarius quam a Nepero exponitur, fieri potest); in altera B, motu uniformi seriem æquidifferentium produxit, terminosque posterioris terminis prioris pro iisdem temporibus æqualibus respondentes, horum *artificiales* dixit, hoc nomine pro logarithmo usus.

Sinum totum divisit per $n = 10\,000\,000$, et tot eiusmodi partium *artificialem* dixit 0, pro quo nullus adhuc motus evenit in linea B; nempe $\log. \frac{n}{n} = \log. 1 = 0$; postea quærendo ingenti labore inter 1 et $\frac{1}{2}$, 1 et $\frac{1}{10}$ & proportionales medias, atque inter quasvis item novas, pervenit ad seriem continue proportionalium geometricam, cuius terminus primus ab $\frac{n}{n}$ decrescendo, cum errore exiguo $\frac{n-1}{n}$ erat, et huius *artificialem* (motu in B) posuit 1; atque ita porro, omnino cum errore aliquo, ipsi $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ respondent *artificialis* 2, et ipsi $\frac{1}{2}$ respondet artificialis 6 931 469; nempe ratio $\frac{1}{2}n : n$ componitur ex tot rationibus ipsi $\frac{n-1}{n} : 1$ æqualibus, cum errore exiguo.

Tantæ molis erat, adminiculis hodiernis adhuc deficientibus, systema logarithmorum præclarum seculi septimi decimi inventum condere; quanquam *Neper* quoque numerorum primorum logarithmis per multo labore quæsitas proportionales medias repertis, compositorum logarithmos omnino per additionem computaverit.

De usu tabularum et certis applicationibus pag. 512—20 et 569—81 dicetur: at de logarithmis *Gaussianis*, etiam aliquid dicendum foret, siquidem ad nos pervenissent; ex omnibus summi viri operibus desideratis, nonnisi (pag. 384 et 461) citata, et *Theoria motus corporum coelestium* adsunt; primæ lineæ *theoriae imaginariorum* quoque sero pervenerunt, quum iam theoria, quæ in hoc tomo habetur, talis qualem concipere poteram, impressa erat.

IV. *Coronidis* instar (quoad pag. 33) addatur *numeratio*, cuius proxima origo quidem *arabica* est, sed a scriptoribus Arabicis quoque *Indis* attribuitur; non de signis 0, 1, . . . , sed de lege ingeniosa quæritur, qua per 10 signa quivis integri I et i, imo et $\frac{1}{10^i}$ describi possunt. Utcunque vocatus Auctor et sine nomine viget, vigebitque in omnibus calculis.

Romanorum et facere et pati fortia fuit: sed mirum est, *Graiorum* quibus Musa ingenium dederat methodum tam complicatam, imperfectamque fuisse; nempe qui 37 signis, ab 1 incipiendo continuative, nonnisi usque ad 99 999 999 (decadice intelligendo) scribere poterant; quamvis eorum modo quoque levi additamento, quivis numerus describi potuisset. Nempe 1, 2 . . . 9, per literas α, β . . . , ita 10, 20 . . . , 90, 100, 200 . . . , 900, 1000, 2000 . . . , 9000, per literas, et quum non sufficerent, accentis suppositis, aliaque signa denotabant; atque demum 10 000 nempe *myrias* per M denotabatur; regula vero hæc erat, quod post M eorum quæ signa particularia denotabant summa, ante M vero (ad lævam) factum in M accipiebatur summæ eorum, quæ signa particularia ante M denotabant; ex gr. $\beta M\alpha$ denotabat 20001; at per MM denotari $10000.10000 = 100\ 000\ 000$, ac post MM adhuc id quod $MM-1$ M^2-1 denotabat, scribi potuisset.

Potuissent quoque et hoc modo, posita lege sequenti, numerum quemvis describere, et omnia peragere: nempe ubi plura M se invicem excipiunt, productum eorum intelligatur, et quævis imago sive ab initio usque ad proximum M, sive inter duo proxima M fuerit, ut factor proximi M ad dextram reputetur; alioquin autem summa omnium intelligatur. Multa ob defectum cifrarum breviter exprimuntur; ex gr. $MMM\alpha MM\beta M\alpha =$ billioni $+$ 100 millionibus $+$ 20001, $= M^3 + M^2 +$ $+ 2M + 1$.

Simplex et elegans *lex Indica* est sequens:

1. Detur numero cuivis a 0 incipiendo signum proprium, usque quo libuerit; atque

2. ponatur aliquorsum comma in lineam horizontalem; et

3. quodvis signorum dictorum ponatur ante comma ad lævam, denotet id illud, cuius signum est; at

4. si numerus signorum datorum simul cum 0 fuerit n, quæcunque eorum æqualia se invicem in linea dicta excipiant, valor illius quod ad

lævam est, sit valoris illius quod ad dextram est n-tuplus; valoremque eum quodvis retineat, etsi in quemvis alium locum aliud signum ponatur; denique

5. tota imago denotet summam omnium eorum, quæ per signa particularia, valores a locis (ut sæpe et in mundo fit) sortita, denotantur.

Patet hinc

$$\ldots 111,\ 111 \ldots$$

denotare

$$\ldots + n^2 + n + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots;$$

nempe in 1, 1 denotatur 1 per notam ante comma, et simul n-ies plus, quam in loco sequenti, ita in 11, denotat nota prior n-ies plus, quam 1; ita valor ipsius 2, 2, adeoque ipsius 1, 2 & patet. Est etiam manifesto 1, 111 . . . series infinita, cuius summa (pag. 152) $\backsim \frac{n}{n-1}$.

Quod hoc pacto numerus quivis a 0 *incipiendo, post quemvis ulterius sequens, exprimi possit,* patet sic. Denotetur $n-1$ per m; si in loco ultimo ad dextram ante comma sit signum particulare k, aut zero aut integrum ipso m minorem denotans, poterit in locum ipsius k signum numerum uno maiorem denotans poni; si vero m fuerit in eo loco tum ad lævam eundo, aut aliquamdiu signa m se invicem excipient, aut post prius m quod ante comma est, statim aliud sequetur ad lævam; sit k signum illud quod prima vice non excipit signum m, et si nullum tale sit, reputetur 0 pro k. Accedente 1 ad m, fiet n, quod cum ad lævam præcedenti m, denotante $m.n$, facit n^2, adeoque id quod 1 loco ad lævam sequenti denotat, et hoc si et ibi m fuerit, denotans $m.n^2$ efficit cum eo $(n-1+1)n^2 = n^3$; et ita porro donec ad k deventum fuerit, et tum augebitur k uno, denotabiturque præter valorem ipsius k, etiam potentia nova ipsius n quæ prodiit, relictis cifris in locis omnibus ad dextram.

Quod etiam ad legem numerationis Græcorum, quæ tam facile extendi potuisset, applicari manifestum est; dummodo pro potentiis ipsius 10 potentiæ ipsius M ponantur, subibit nempe ipsius $n-1$ vicem $M-1$, etsi plura loca occupet. Ex. gr. pro $y=M-1$, ex yM^3yM^2yMy, (per quod yM^3+yM^2+yM+y intelligendum), accedente 1 fiet αM^4, id est M^4.

Patet etiam, ipsum 1 postpositis quotvis cifris esse $>$ eo, quod in locum cuiusvis cifræ m posito, per ista m denotatur; atque quivis numerus non $> m$ ponatur in locum ipsius 1, ad numeros abinde uno crescentes denotandos, imagines præcedentes eodem ordine quo antea prodierunt, sequi.

In nostra numeratione n decem est; sed n quidcunque denotare potest, nempe integrum quemvis *(imo et ad fractos extendi posset)*. Elegans est *Leibnitii* ingeniosa similitudo in Xeniis ad Principem missis, a *Dyadica* numeratione nonnisi per duo signa nempe 1 et 0 petita: quod nimirum sic Deus unus ex nihilo infinitum composuerit; ac veluti imagines dyadicæ imperito confusæ videntur, claræ peritis, ita confusio mundi mortalibus apparens, spiritibus superioribus sapientissimus ordo est.

Certe dyadica ista, nisi ad numeros maiores exprimendos, plures notas requireret, se quoad omnes operationes valde commendaret; nempe nullius tabulæ Pythagoricæ egeremus, et operationes omnes perfaciles essent, si prius duæ tantum, tum summa harum cum tertia linea, et semper nova summa sequenti lineæ adderetur, ut omnis molestia evitetur in additione plurium linearum.

Si vero n ex. gr. viginti esset: tum omnino ingentes numeri breviter describerentur; tanto fortius, si $n = 37$ esset, (nempe 37 signa ut apud Græcos assumerentur); at pro $n = 20$ tabulam Pythagoricam pauci addiscerent, quum pro hodiernis 36 productis 171 addiscenda essent. Notandum, tabulam per diagonalem in duas partes æquales dispesci.

In decadica vero qua utimur, 10 dicitur *decem*, 10^2 autem *centum* et 10^3 dicitur *mille*, et 10^6 nempe $10^3 . 10^3$ id est millies mille dicitur *millio*, patetque 1 cum 6^ν cifris, *millionis* ν-tam potentiam denotare.

Si comma ad dextram plane ad finem sit, omitti (uti + in initio) solet, parsimoniæ gratia; si vero comma non ad finem fuerit, expressio *fractio decimalis* dici solet. Est nempe æqualis fractioni communi, cuius numerator est ipsa imago decadica commate ad finem posito, aut deleto, denominator autem est 1 tot cifris postpositis, quot notæ post comma erant, quæ etiam *notae decimales* audiunt. Nam ex. gr.

$$63,51 = \frac{63}{1} + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} = \frac{6300}{100} + \frac{50}{100} + \frac{1}{100} = \frac{6351}{100} = 63 + \frac{51}{100}.$$

Conversim quoque quævis fractio, cuius numerator integer et denominator est 1 cum cifrarum numero N, est numeratori, factis in eo numero N notis decimalibus, æqualis; nam hoc tali fractioni æqualis est.

Patet etiam, fractionis decimalis valorem non mutari, quotcunque cifræ ad dextram postponantur: nam numero notarum decimalium aucto, tot cifræ accedent numeratori quam denominatori, adeoque per idem multiplicabuntur.

Si vero comma mutet locum, promotum ad dextram, vel lævam, locorum numero μ: in casu priore multiplicabitur valor, in posteriore dividetur, per 10^μ. Nam si comma ad dextram migret μ locis, totidem notis decimalibus pauciores manebunt, adeoque in denominatore post 1 tot nempe μ cifris pauciores erunt, manente numeratore; itaque valor 10^μ-ies maior evadet. Si autem comma ad lævam μ locis migret, totidem notis decimalibus plures erunt, adeoque denominatori accedent μ cifræ; quapropter valor 10^μ-ies minor erit. Ex. gr. ex $2 = 2, = 0002$, pro $\mu = 3$ fiet $0,002 = \frac{2}{1000}$, et ex 2,3 fiet duobus locis promoto commate

$$230, = 2,3 \,.\, 100 = \frac{23}{10} \,.\, 100 = 230.$$

C.

DE OPERATIONIBUS VULGARIBUS DECADICIS.

De numeratione et fractione decimali generaliter dictum (pag. 491—95) est. Dicatur quævis lege numerationis decadicæ facta expressio *imago decadica;* sive ad finem sit comma sive antea sive nullibi, at in casu postremo semper ad finem cogitetur, adinstar + in initio omissum.

§. 1.

Est quævis imago decadica fractio (pag. 495); et imagines decadicæ D et d, si notæ decimales in D numero D', in d numero d' sint, et $D'>d'$ fuerit, (per pag. 495) ad denominationem eandem reducuntur: adiectis ipsi d ad dextram (manente commate) numero $D'-d'$ cifris; ita ad tertiam et de quavis ad sequentem progredi licet. Tumque patet in *additione* nonnisi numeratores ut integros addendos esse, uti *in subtractione* numeratorem subtrahendi ex altero subtrahi debere, in resultato totidem notis decimalibus factis, quot in una imaginum sunt. *Divisio* autem (quum denominatores æquales facti sint) peragitur numeratore dividendi per numeratorem divisoris diviso. Potest autem divisio et absque reductione ad *denominatorem eundem* perfici: nempe sint imaginum D, d numeratores N, n; erit

$$D=\frac{N}{10^{D'}}, \quad \text{et} \quad d=\frac{n}{10^{d'}};$$

atque

$$\frac{D}{d}=\frac{N.10^{d'}}{n.10^{D'}}=\frac{N}{n}.10^{d'-D'}.$$

Multiplicatio autem fit sic:

$$D.d=\frac{N.n}{10^{D'+d'}};$$

itaque tot notæ decimales fiunt in facto numeratorum (ita consideratorum, quasi comma ad finem esset) decadice expresso, quot notæ decimales in utroque factore simul sunt. In *quoto* $N:n$ vero, si $d'=D'$, quotus $N:n$ est; nam tum $10^{d'-D'}=10^0=1$; at si $d'=D'+m$ (pro m integro), $N:n$ per 10^m multiplicari debet; si vero $D'=d'+m$, tum

$$10^{d'-D'}=10^{-m}=\frac{1}{10^m};$$

adeoque $N:n$ per 10^m dividere oportet; et si $N:n$ imagine decadica expressum fuerit, quomodo multiplicatio, aut divisio mutato commate peragatur, (pag. 495) dictum est.

§. 2.

Summa hinc imaginum decadicarum decadice expressa reperitur modo sequenti: scribantur horizontaliter imagines decadicæ addendæ ita, ut commata omnium in eandem lineam verticalem; atque pariter in omnibus imaginibus quævis m-tæ notæ a commate ad lævam in eandem lineam verticalem cadant; et pariter ad dextram, si fuerint; atque tum linea ducta, quæ addenda superius relicta, a summa quæsita distingvat, incipiendo ab ultima columna a dextra ad lævam fiat operatio sequens. Consideretur in hac operatione in quavis columna numerus quivis, quasi tot unitates denotaret, quot per se denotat; atque incipiendo ab huius columnæ ultimæ termino aliquo extremo, quæratur numeri huius et sequentis summa decadice expressa; et quæratur summa cuiusvis summæ repertæ, cum numero in eadem columna proxime sequenti, donec nullus supersit; et e quacunque columna prodierit summa $=\nu$ decadibus cum n unitatibus (pro n non >9), in columnam eandem infra lineam scribatur n; et ν (tanquam unitatum numerus) addatur numero extremo columnæ ad lævam sequentis, et in eadem columna, quævis summa addatur numero sequenti, donec nullus in eadem columna supersit; atque si prodeat columna ultimæ summa $=\nu'$ decadibus cum n' unitatibus (pro n' non >9) in eadem columna infra lineam scribatur n'; et ν' decadice expressum scribatur ad lævam ante n', si nulla amplius ad lævam columna supersit. Demum vero summa infra lineam prodeunte, ponatur comma in lineam commatis addendorum.

Quod summa hoc modo rite prodeat, sic patet: quum hoc pacto omnia addenda ad eundem denominatorem, qui etiam in summa per comma modo dicto positum fit, reducta fuerint, quæstio eo redit; num summa numeratorum, id est si comma in omnibus addendis et summa quoque, ad finem posita esset, rite prodierit. Hoc autem inde patet, quod a columna ultima A ad dextram, progrediendo ad sequentem B, inde ad C, et ita porro usque ad extremam nihil sub ullam scribatur, quod in columnis eousque additis non adest; demum vero omne, quod ex addendis superest, summæ adiiciatur, prætereaque nihil.

Nimirum sit columna

$$A = \mu \, . \, 10 + m,$$

erit β dicendo id quod I in B significat

$$B + \mu \, . \, 10 = B + \mu \, . \, \beta,$$

sitque hoc

$$= \mu' . \, 10 \, . \, \beta + m' . \, \beta;$$

adeoque

$$A + B = B + \mu \, . \, 10 + m = \mu' . \, 10 \, . \, \beta + m' . \, \beta + m = \mu' . \, 10 \, . \, \beta + m' . \, 10 + m;$$

in summam scriptum autem, nempe $m'm$ (decadice intelligendo) denotat $m' . \, 10 + m$; itaque nonnisi $\mu' . \, 10\beta$ desunt. Si vero usque ad certam columnam G (exclusive) in qua I denotet g, omnia columnarum usque ad illam F (inclusive) quæ ipsam G præcedit, summa rite inscripta fuerit, nonnisi numero ν decadum illius f quod I in columna F denotat, supermanente: tum si

$$G + \nu \, . \, 10 \, . \, f = \nu' . \, 10 \, . \, g + n \, . \, g$$

(pro n non > 9), et summæ in columnam G inscribatur n; e summa columnarum A, B, . . ., F, G nonnisi $\nu' . \, 10 \, . \, g$ supererit. Hoc pactoque usque ad columnam extremam pervenitur; et si ex. gr. ista G esset, atque ipsi $n \, . \, . \, . \, m'm$ (decadice intelligendo) anteponatur ν' decadice expressum, $\nu' n \, . \, . \, . \, m'm$ denotabit

$$\nu' . \, 10g + n \, . \, g + \ldots + m' . \, 10 + m,$$

adeoque summam totalem; nempe $\nu' n$ (decadice intellectum) denotat $\nu'.10.g+n.g$, (denotante 1 unum g in loco n).

Scholion. Summa quorumvis duorum numerorum ipso 10 *minorum*, uti etiam *differentia cuiusvis numeri n ipso* 10 *minoris a numero minori quam* $(10+n)$, e tabula sequente constat: nec necesse est, inter axiomata referre ex. gr. quod $3+5=8$, et $8-5=3$; $8+7=15$, et $15-7=8$ &c.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Constructio tabulæ ex inspectione patet; nempe in linea superiore sunt numeri a 0 usque ad 9, et in omnibus columnis verticalibus deorsum a quovis numero supremo sequuntur item numeri naturales; adeoque in quavis columna ex. gr. ipsi 7 tot unitates adduntur usque ad lineam horizontalem (inclusive) post ex. gr. 5 (in columna extrema ad laevam posita), quot unitates in 5 sunt; itaque ubi columna ipsius 7 cum horizontali ipsius 5 concurrit, numerus 12 summam ipsorum 7 et 5 decadice exprimens reperitur; et differentiam ipsius 7 a 12 ostendit 5, uti 7 differentiam ipsius 5 a 12.

Hinc etiam casus sequentes patent: si ex. gr. numero $\mu.10.\beta+8.\beta$ sit addendum $7.\beta$, fiet summa

$$=\mu.10.\beta+15.\beta=(\mu+1).10.\beta+5.\beta;$$

ita si ex hoc subtrahendum sit $7.\beta$, remanet $\mu.10.\beta+8.\beta$; adeoque in casu primo fit β numero $(\mu+1)5$, in posteriore autem $\mu 8$, decadice utrumque intelligendo.

§ 3.

Subtractio autem peragitur hoc modo: scribantur ita (ut in additione), ut comma sub comma, decas sub decadem, . . . decima sub decimam, . . . cadant: erunt pariter ad denominatorem eundem reducta, et quasi comma ad finem esset tractanda; dummodo et in differentiam comma in lineam commatum verticalem ponatur. Sit, literis numeros infra 10 denotantibus, et imagines decadice intelligendo *maior*

$$NM\ .\ .\ .\ DCBA,$$

minor sit

$$n\,m\ .\ .\ .\ d\ c\ b\ a\,;$$

erit differentia

$$(N-n)\ (M-m)\ .\ .\ .\ (D-d)\ (C-c)\ (B-b)\ (A-a)$$

pro casu, si quælibet litera superior maius inferiore denotet; namque omnia decadice intelligendo linea infima lineæ mediæ addita, lineam supremam præbet; in quavis columna enim ex. gr. in secunda ad lævam est

$$b+(B-b)=B.$$

Itaque in hoc casu in quamvis columnam id scribi debet, quo superior inferiorem excedit.

Si vero in columna quapiam, superior inferiori æqualis (ex. gr. $D=d$) sit, tum etiam $D-d=0$ in columna eadem rite scribetur in differentiam sive 0 denotet D sive alium numerum, nam $(D-d)+d=D$.

At si quis superiorum minor inferiore sit, aut superior 0 et inferior non 0 sit; tum sit ex. gr. $b=B+b'$; in hoc casu quoque minor e maiori demi poterit, si in eadem columna 0 scribatur, et infra 0 scribatur b', tamquam negativum pro differentia, quæ prius modo dicto prodiit; nempe ubi numerus inferior excedit superiorum, ubique 0 ponendo, et excessum inferius scribendo, excessus inferiores subtrahantur. Prodibit enim differentia vera; namque

$$0-(b-B)=B-b.$$

Si $B=0$ sit, tum $b=b'$.

Subtractio hæc posterior autem ita peragi potest; ut in columnam ipsius b infra b in differentiam scribatur $b'=10-b'$, ita tamen, ut ad lævam in differentia quæ prius prodiit, usque ad numerum illum proximum eatur, qui non o est, atque hic unitate minuatur; quotcunque cifræ autem fuerint eousque, in 9 mutentur. Sit nempe plane $B=0$ aut $B<b$, atque

$$B-b=-b', \quad \text{et} \quad 10-b'=b'';$$

adeoque

$$b''=10+B-b:$$

unde etiam idem est, pro $b>B$, sive B ex b subtractum ex 10, sive b ex $B+10$ subtrahatur; dummodo in tali casu proxime ad lævam uno minus scribatur. Denotet nempe 1 unum β in columna ipsius B; erit

$$\begin{aligned}(C-c-1).10.\beta+(10+B-b).\beta&=(C-c).10\beta-10.\beta+10.\beta+(B-b).\beta=\\&=(C-c).10.\beta+(B-b).\beta.\end{aligned}$$

Si vero $C=c$, adeoque $C-c=0$, aut etiam $D-d=0$, imo porro superior æqualis inferiori fuerit usque ad certum ex. gr. E; erit E aut $>e$, aut $E<e$; si $E>e$, tum

$$\begin{aligned}(E-e-1).10^3.\beta+(D-d+9).10^2.\beta+(C-c+9).10.\beta+(B-b+10).\beta&=\\=(E-e).10^3.\beta+(D-d).10^2.\beta+(C-c).10\beta+(B-b).\beta;&\end{aligned}$$

nam

$$990.\beta+10.\beta-1000.\beta=0.$$

Si vero $E<e$, aut etiam sequentes numeri superiores minores inferioribus fuerint usque ad certum aliquem ex. gr. $G>g$; in columnam ipsius E scribatur non

$$e''=10-(e-E)$$

sed

$$e''-1=9-(e-E)=9+E-e;$$

in columnam ipsius F pariter non

$$f''=10-(f-F)$$

sed

$$9-(f-F)=9+F-f,$$

et in columnam ipsius G scribatur $G-g-1$: eritque

$$(G-g-1).10^5.\beta+(F-f+9).10^4.\beta+E-e+9).10^3.\beta+(D-d+9).10^2.\beta$$
$$+(C-c+9).10.\beta+(B-b+10).\beta=(G-g).10^5.\beta+(F-f).10^4.\beta$$
$$+(E-e).10^3.\beta+(D-d).10^2.\beta+(C-c).10.\beta+(B-b.\beta;$$

nam

$$99990.\beta+10\beta-10^5.\beta=0.$$

Eritque *differentia*

$$(G-g-1)\ (f''-1)\ (e''-1)99b''$$

(decadice intelligendo).

Patet etiam modo consueto in columnam ipsius B scribi

$$b''=10+B-b;$$

nempe si C non fuerit 0, demitur 1 ex eo, quod $10.\beta$ facit, si vero $C=0$ imo etiam sequentes superius cifræ sint usque ad certum E, tum 1 ex E demtum erit

$$10^3.\beta=99.10\beta+10.\beta;$$

itaque cifræ in columnis D et C in 9 mutantur, et ex B fiet $(10+B).\beta$.

§. 4.

Quoad *multiplicationem integrorum:* sit imago decadica $DCBA$ per imaginem decadicam cba multiplicanda: erit

$$DCBA=D000+C00+B0+A,$$

et

$$cba=c00+b0+a;$$

atque

$$DCBA.cba=a(D000+C00+B0+A)+b0.(D000+C00+B0+A)$$
$$+c00.(D000+C00+B0+A)=c.D00000+(c.C+b.D)0000$$
$$+(c.B+b.C+a.D)000+(c.A+b.B+a.C)00+(b.A+a.B)0+a.A;$$

quod ordine evidenti modo sequenti dispositum additumque, factum præbet; patetque $a.A$ summam unitatum, columnam sequentem decades, et ita porro esse.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & & a.D & a.C & a.B & a.A \\
 & b.D & b.C & b.B & b.A & \\
c.D & c.C & c.B & c.A & &
\end{array}$$

Est vero multiplicatio integri M per integrum m additio ipsi M ipsius M, $(m-1)$-ies iterata; at peragitur modo sequenti consueto brevius: accipitur prius a-ies A, et si hoc <10 fuerit infra lineam sub a scribitur; si vero fuerit $=\mu\,.\,10+a'$, eo nonnisi a' scribitur, et μ additur ipsi $a\,.\,B$: atque notæ multiplicandi semper porro ad lævam singuli a-ies accipiuntur, et si e quacunque nota per a multiplicata transierit ν (uti antea μ) et nota sequens per a multiplicata det $n\,.\,10+k$, scribitur in facti locum proximum ad lævam k, et $\nu+n$ additur facto e nota sequente in a; si vero nulla supersit, $\nu+n$ anteponitur facti parti quæ eousque prodiit. Eademque operatio fit cum omnibus multiplicatoris notis, dummodo factum quodvis partiale sub nota multiplicatoris illa terminetur, per quam multiplicatio facta est. Denique facta partialia adduntur.

Patet M per $b\,.\,10$ et $c\,.\,100$ multiplicandum esse, atque idem prodire, si $b\,.\,M$ sub b et $c\,.\,M$ sub c terminetur: in additione factorum partialium enim tantum est, ac si post $b\,.\,M$ una cifra et post $c\,.\,M$ duæ essent.

Quod facta partialia rite prodeant, e conceptu iteratæ additionis patet. Factum e quibusvis duobus novenario minoribus e *tabula Pythagorica* patet, ubi quivis sibi iterato additum (pag. 499) toties continet supremum, quot unitates habet numerus extremus lineæ horizontalis.

§ 5.

Divisio peragitur sic: sit dividendus D et divisor d, et

$$D=D'.10+C$$

(denotante C notam infra 10) et sit q talis integer, ut $q\,.\,d$ non $>D'$, sed $(q+1)\,d>D'$ sit; atque integri r et c tales sint, ut $r<d$, et

$$c\,.\,d+r=(D'-q\,.\,d)\,10+C$$

sit: erit

$$D'.10+C=q.d.10+c.d+r=d.(q.10+c)+r=D.$$

Consequenter $q.10+c$ cum residuo r est quotus ex D diviso per d. Hinc quævis nota dividendo adiecta novam notam quoto adiicit; et quæstio eo redit, quomodo a læva incipiendo prima quoti nota prodeat, et quænam quoti nota pro sequente dividendi nota sit.

Quæritur prius a læva incipiendo, num d in prima dividendi nota reperiatur, et si non, quæratur porro usque ad notam illam primam talem, ut in numero quam imago decadica D' a nota prima usque ad hanc inclusive denotat, non sit $<d$, et in quotum scribatur q (sensu antea dicto); atque tum quæratur pro nota C dividendi post D' sequente, nota c post q decadice sequens: et tum $D'.10+C$ pro priore D' reputato, si adhuc nota B dividendi sit, quæratur nota b quoti post qc sequens; atque hoc continuetur, donec nulla dividendi nota supersit, et notetur residuum ultimum r'; eritque quoti complementum $r':d$. Patet hinc e tot notis constare quotum, quot notæ dividendi post primum D' sunt, addito 1 primo D' competente. Nimirum nec primum D', nec ullum $D'-dq$ quotum >9 dare potest: nam et maximum $<d$ est $d-1$, atque et

$$(d-1).10+9=10.d-1.$$

Si sit $d=d'.10^n$, resecentur ad finem dividendi D totidem notæ, sitque pars resecta k ad dextram, et ad lævam sit D' valore $D'.10^n$, sitque

$$D'=q.d'+r,\ (r<d');$$

erit

$$D'.10^n=q.d'.10^n+r.10^n;$$

et

$$D=D'.10^n+k=q.d'.10^n+r.10^n+k;$$

itaque q erit quotus cum residuo $r.10^n+k$; quod $<d=d'.10^n$ est, nam $r<d'$.

Si vero $D=\alpha.\delta$ et $d=\alpha.\delta'$, fiet $\delta:\delta'=D:d$; atque operatio abbreviatur. Unde quæstio fit, per quosnam numeros numerus exacte dividi queat? Si ad finem numerus par sit, summa decadum et numeri paris per 2 dividitur. Si postremæ duæ notæ (decadice) per 4 dividi queant, pars prior multiplum centenarii est, adeoque totum per 4 dividitur. Si tres postremæ per 8 dividantur, pars prior multiplum millenarii est per 8 divisibile. Si summa singularum notarum (sine valore decadico) per 9 dividatur, totam imaginem meritur 9; ita 3 metitur imaginem, si summam dictam metitur. Nam quævis nota quotvis cifris postpositis, per 9 divisum pro residuo se ipsam aut o dat; itaque nonnisi de summa residuorum quæritur. Si vero tam 2 quam 3 metiatur numerum, etiam 2.3 metitur (pag. 427) &c.

Etiam 11 metitur imaginem decadicam *dcba*, si differentiam summæ notarum in locis paribus a summa notarum in locis imparibus metiatur 11. Nam si post 1 numerus cifrarum par fuerit, per 11 divisum residuum 1 dat; si vero post 1 numerus impar cifrarum fuerit, residuum 10 est; itaque pro

$$d\,.\,1000 + b\,.\,10 = N',$$

et

$$c\,.\,100 + a = N,$$

erit

$$N' + d + b = n'.\,11,$$

et

$$N - (c + a) = n\,.\,11;$$

adeoque si

$$d + b - (c + a) = \mu\,.\,11;$$

erit

$$N' + N = (n' + n - \mu)\,11.$$

Et conversim si $d + b - (c + a)$ non sit multiplum ipsius 11, tum 11 numerum non metitur; nam tum

$$N' = n'.\,11 - (d + b),$$

et

$$N = n\,.\,11 + c + a,$$

adeoque

$$N' + N = (n' + n)\,11 + c + a - (d + b),$$

et si

$$c + a - (d + b)$$

non sit multiplum ipsius 11, nec $N' + N$ erit.

§. 6.

Si dividendo D cifræ numero μ adiiciantur, et diviso hoc per d prodeat pars quoti integra q; atque fiant in q notæ decimales numero μ: prodibit quotus cum errore $< 1 : 10^{\mu}$. Nam

$$D : d = D \,.\, 10^{\mu} : d \,.\, 10^{\mu} = (D \,.\, 10^{\mu} : d) : 10^{\mu};$$

atque

$$qd < D \,.\, 10^{\mu} < (q+1) \,.\, d;$$

itaque

$$q \,.\, d : 10^{\mu} < D < (q+1) \,.\, d : 10^{\mu}.$$

Unde etiam modus patet, quo fractio quævis in decimalem cum errore saltem quantumvis exiguo convertatur.

Quomodo quævis fractio ad quemvis denominatorem reducatur, et denominator communis minimus, divisorque communis maximus reperiatur, dictum est pag. 68 et 429.

Scholion. 1. Proba novenariorum in singulis quatuor speciebus valet in tantum, quod si locum non habeat, operatio erronea sit; conversim autem patet resultati notis permutatis etiam, probam locum habere. *In subtractione* e subtracto et differentia simul, et tum e minuendo eiiciendi novenarii sunt; *in multiplicatione* e facto, atque e factoribus: nempe si multiplicandus $= n \,.\, 9 + a$, et multiplicator $= m \,.\, 9 + b$, factum $= m \,.\, n \,.\, 9 \,.\, 9 + a \,.\, m \,.\, 9 + b \,.\, n \,.\, 9 + a \,.\, b$; itaque $a \,.\, b$ supra novenarii multiplum tantum residuum relinquere debet, quam factum eiectis novenariis.

Scholion. 2. Operationes istæ cum numeris dyadice expressis facillime peragerentur: si ubi plures imagines addendæ sunt, prius duæ addantur, et cuivis summæ quæ prodiit sequens addatur, donec summa omnium prodeat. In multiplicatione, nonnisi multiplicandus describitur ubique sub multiplicatoris nota $= 1$ terminandus. In divisione semper patet, num 0 aut 1 in quotum veniat.

§. 7.

Radix m gradus autem extrahitur sic. Si quivis integer fuerit imagine decadica P expressus, et integer r sit talis, ut $r^m =$ vel $< I'$, sed $(r+1)^m > I'$; atque ipsi I' adiiciantur notæ numero m, quarum *imago decimalis* dicatur i: erit imago tota $= I'.10^m + i$, (quæ dicatur I); eritque r cum nota aliqua b decadica adiecta radici m gradus ex I æqualis, aut ea proxime minor. Nam etsi $i = 0$ esset,

$$(r.10)^m = r^m.10^m$$

esset $=$ aut $< I'.10^m$; sed

$$((r+1).10)^m = (r+1)^m\, 10^m > I'.10^m + i,$$

etsi in quovis loco post I' novenarii essent quia $(r+1)^m > I'$. Itaque nonnisi nota illa b quæritur, quæ post r sequitur: quod modo sequenti fit. Si $r.10$ dicatur a, erit $a + b = \sqrt{I}$, aut radice proxime minor; adeoque tale b (a 0 usque ad 9) quæri debet, ut $I - a^m$, id est $(I' - r^m).10^m + i$ sit $=$ vel $>$

$$ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)a^{m-2}b^2}{1.2} + \ldots + b^m,$$

(pag. 178), et si $b+1$ ponatur pro b, expressio hæc $> I - a^m$ sit. Patet in posteriore, si pro $a = r.10$ ubique r ponatur, terminos addendos (omissis cifris) semper uno loco porro ad dextram terminari; nempe $m.r^{m-1}b$ haberet $m-1$ cifras ad dextram,

$$\frac{m(m-1)r^{m-2}b^2}{1.2}$$

haberet $m-2$ cifras propter 10^{m-2} &c. Ut vero b paucius tentando reperiatur; tentetur divisio ipsius $I' - r^m$, adiecta prima nota decadice sequenti, per mr^{m-1}; quia $mr^{m-1}b$ etiam $m-1$ loca post se habet.

Si vero post I adhuc m notæ fuerint; (ut pag. 506) reputetur I tanquam I' antea atque operatio eadem usque ad finem repetatur.

Patetque si nova m loca adiiciantur, idem redire; in quadrate radice autem terminos addendos esse $2ab+b^2$.

Si vero nm cifræ adiiciantur numero N: et in radice m gradus ex $N.10^{nm}$ fiant n notæ decimales: prodibit radix vera aut proxime minor e fractione, cuius numerator est $N.10^{nm}$ et denominator 10^{nm}, adeoque ex N.

Ex. gr.

$$\sqrt{2} = \sqrt{20000} : 100.$$

Sit primum

$$I = 200, \quad I' = 2, \quad i = 00;$$

erit $r = 1$, adeoque

$$a = 10; \; (I' - r^2).100 + i = 100;$$

quod si usque ad notam primam ipsius i (inclusive), nempe 10 ita dividatur per $2r = 2$, ut ratio etiam termini b^2 habeatur; prodibit $b = 4$; nam

$$2ab + b^2 = 20.4 + 4.4 = 24.4 = 96,$$

et pro $b = 5$ prodiret $125 > 100$. Atque iam nova I, I', i, r, a accipi, et novum b quæri potest; nempe pro

$$I = 20000, \; I' = 200, \; i = 00, \; r = 14, \; a = 140,$$

pariter prodibit $b = 1$; fietque

$$171 < \sqrt{20\,000} < 172,$$

atque $\sqrt{2} = 1,17$ cum errore $< 0,01$. Idem vero continuare pro novis I, I', i, r, a licet, donec libuerit.

Ita

$$\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{15000} : 10 = \sqrt[3]{15000000} : 100 \; \&c.$$

Sit primum

$$I = 15000, \; I' = 15, \; i = 000.$$

Erit $r=2$, adeoque $a=20$, et

$$(I'-r^3).10^3+i=7000;$$

atque si hoc a læva usque ad notam primam ipsius i (inclusive) per $3r^2$, (nempe 70 per 12) ad terminos reliquos etiam respiciendo dividatur, prodibit $b=4$; nimirum

$$3a^2b=48.100.,\ 3ab^2=96.10,\ \text{et}\ b^3=64;$$

quorum summa non >7000, sed si $b=5$ acciperetur, >7000 prodiret. Pariter pro novis I, I', i, r, a, ut prius continuari donec libuerit, patet.

Scholion. Solet e quantitate algebraica quoque radix extrahi: at nisi exacte, aut serie lege certa progrediente, complemento ad limitem o tendente prodeat, aut saltem erroris limites æstimentur, exemplum vanum tantum eiusmodi formularum est.

Ex. gr. Sit (Tom. II: 2211. V.)

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{u^2}{a}+u^2-2uE}=\alpha+\beta,$$

et $\alpha=\frac{a}{2}$; erit $\alpha^2=\frac{a^2}{4}$, et

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha^2=2\alpha\beta+\beta^2=-2uE-\frac{u^2}{a}+u^2;$$

cuius si terminus rite electus per $2\alpha=a$ dividatur, prodibit

$$\beta=-\frac{2uE}{a};$$

quia erit

$$2\alpha\beta+\beta^2=-2uE+\frac{4u^2E^2}{a^2}=u^2-\frac{u^2}{a}-2uE;$$

nam (ibidem)

$$E^2=\frac{a^2-a}{4}.$$

Eodem modo solet etiam radix (adinstar divisionis pag. 146) extrahi. Ex. gr. pro $\sqrt{1-x}$ sit terminus primus $1=a$, et sequens sit b; erit

$$(1-x)-1^2=-x=2ab+b^2;$$

et si per $2a=2$ dividatur $-x$, prodibit

$$b=-\frac{x}{2},$$

ac subtracto $2ab+b^2$, residuum erit $-\frac{x^2}{4}$. Pro quovis novo a (id est summa terminorum radicis quæ prodierunt) autem duo priores termini erunt $2+x$; atque si terminus aliquis residui fuerit $\frac{-x^m}{2^m}$, termino hoc per terminum primum ipsius $(2-x+\ldots)$ diviso, prodibit terminus radicis sequens $\frac{-x^m}{2^{m+1}}$; et multiplicando per $(2-x+\ldots)$ prodibit

$$\frac{-x^m}{2^{m+1}}+\frac{x^{m+1}}{2^{m+1}}+\ldots;$$

quo subtracto ex $\frac{-x^m}{2^m}+\ldots$, manet $-\frac{x^{m+1}}{2^{m+1}}+\ldots$;

et casu eodem redeunte, prodit series

$$1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^3}-\frac{x^3}{2^4}-\frac{x^4}{2^5}-\ldots;$$

quæ ubique referri solet; quamvis ex. gr. pro $x=\frac{1}{2}$, fiat

$$1-\frac{x}{2}=\frac{3}{4},$$

et a $-\frac{x^2}{8}$ incipiendo (inclusive) summa seriei geometricæ $\frown -\frac{1}{24}$, adeoque series tota $\frown \frac{17}{24}$, quod elevatum ad 2 est

$$=\frac{289}{576}>1-x=\frac{1}{2}.$$

Generaliter pro $\frac{x}{2}<1$, series

$$1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^3}-\frac{x^3}{2^4}-\ldots\backsim\frac{8-8x+x^2}{4(2-x)}$$

(pag. 151); cuius ad 2 elevati differentia ab $1-x$ fit $=\frac{x^4}{4.4(2-x)^2}$; adeoque error aliquatenus æstimari potest.

Si vero $x:2>1$, tum series $\backsim-\infty$. Ad $\sqrt{m\pm x}$ mutatis mutandis applicari potest.

D.

APPLICATIONES (pag. 109) QUÆDAM.

§. 1.

Problemata vulgaria.

I. Quæritur, pecunia a interusurio c pro centum elocata, si interusurium ad finem cuiusvis anni summæ capitali pariter elocandæ accedat: in quantum s excrescat ad finem anni n-ti?

Fiet ex 100 ad finem anni primi $100+c$; itaque ex a fiet

$$\frac{a.(100+c)}{100}=a+\frac{ac}{100},$$

nam

$$100:a=(100+c):\frac{a(100+c)}{100};$$

et hoc ad finem secundi anni fiet

$$a\left(\frac{100+c}{100}\right)^2;$$

ita ut si

$$\frac{100+c}{100}$$

dicatur p, fiet capitalis ad n-ti anni finem

$$ap^n=s.$$

Hinc

$$\log.s=\log.a+\log.(p^n)=\log.a+n\log.p;$$

et patet e quibusvis tribus harum quatuor quantitum reperiri quartam. Ex. gr. quæri potest ad quot annorum finem fieret 1000 ex 1 sub dicta conditione elocato; respondetur

$$n=\frac{\log.s-\log.a}{\log.p}.$$

Quod si vero et Perceptori rem tractanti solvendum sit quotannis c' pro centum: patet tum ex 100 ad finem anni fieri $100+c-c'$; et fieri

$$p=\frac{100+c-c'}{100}.$$

Si interusurii interusurium solvatur, tum fiet

$$p=\frac{100+c-\frac{c^2}{100}}{100}.$$

quia $\frac{c^2}{100}$ est interusurii interusurium, quia

$$100:c=c:\frac{c^2}{100}.$$

II. Hoc modo inpopulationis incrementum computatur, quantitate c pro centum et numero viventium præsenti datis. Si ex. gr. c (nempe incrementum cuiusvis 100 ad cuiusvis anni finem) esset 2; quæritur quot fient ex millione usque ad seculi finem.

III. Hinc quævis quantitas pecuniæ ad certum tempus reduci potest; id est s ad finem n-ti anni tanti valoris est certo sensu, quanti a est in præsenti.

Itaque valores plurium quantitatum pecuniæ, diversis temporibus percipiendarum, ad idem tempus (ex. gr. ad præsens) reducti, comparari possunt.

Si capitali a quotannis non solum interusuria addantur; sed præterea cum fine anni cuiusvis accedat capitalis b sub eadem conditione elocata: quæritur ad finem n-ti anni quanta fiet tota summa capitalis.

Ex a fiet ap^n, ex b quod cum initio anni secundi accedit, fiet bp^{n-1}, e sequenti bp^{n-2}, et ita porro: atque hinc orietur progressio geometrica, cuius accipi pro termino primo potest id quod ex b cum initio anni n-ti usque ad eiusdem finem fiet, nempe bp (si non accedat adhuc b cum fine anni n-ti quoque, tunc enim b esset primum); exponens seriei est p; itaque ipsi ap^n addi debet summa seriei huius, et prodibit

$$s = ap^n + \frac{bp(p^{n-1}-1)}{p-1},$$

cuius termini, ubi n in exponente est, ope logarithmorum seorsim computantur.

Si vero etiam $b = a$ sit, tum fiet

$$s = \frac{ap(p^n-1)}{p-1};$$

Hinc

$$\log. s = \log. a + \log. p + \log. (p^n - 1) - \log. (p - 1);$$

et

$$\log. a = \log. s - \log. p - \log. (p^n - 1) + \log. (p - 1).$$

Valor ipsius n autem prodit ita:

$$s(p-1) = ap(p^n - 1);$$

hinc

$$\frac{s(p-1)}{ap} + 1 = p^n = \frac{s(p-1) + ap}{ap};$$

atque hinc log p^n, seu

$$n \log. p = \log. \big(ap + s(p-1)\big) - \log. ap,$$

et

$$n = \frac{\log. \big(ap + s(p-1)\big) - \log. a - \log. p}{\log. p},$$

ubi pro $\dfrac{-\log. p}{\log. p}$ potest -1 post quotum adnecti, ut fiat

$$\frac{\log. \big(ap + s(p-1)\big) - \log. a}{\log. p} - 1.$$

Heic patet valores ipsorum a quotannis percipiendorum ad finem anni n-ti esse $= s$. Si itaque quæratur, quantumnam aliquis in præsenti solvat, ut quotannis usque ad annum n-tum percipiat a: nonnisi valor ipsius s ad tempus præsens reducendus erit; nimirum per p^n dividi valor ipsius s debet. Aut vero quodvis a ad valorem præsentem reductus in summam colligi debet; eritque (pro a ad finem anni dato)

$$\frac{a}{p}+\frac{a}{p^2}+\frac{a}{p^3}+\ldots+\frac{a}{p^n}=\frac{a-\frac{a}{p^n}}{p-1}=\frac{ap^n-a}{p^n(p-1)}=\frac{a}{p-1}-\left(\frac{a}{p-1}:p^n\right).$$

IV. Si b non addatur, sed dematur quotannis, quæri residuum r ad finem anni n-ti potest; quo in casu erit

$$r=ap^n-\frac{pb(p^{n-1}-1)}{p-1};$$

atque pro $r=0$ et dato b quæri a potest, ut quovis anno usque ad n-tum (inclusive), ad finem cuiusvis anni b percipiatur.

V. Si pro serie

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^{12},$$

ubi $x^{12}=2$, quæratur x, adeoque ut dici solet, inter 1 et 2 quærantur 11 proportionales mediæ, *ut in musica pro temperamento æquali:* propter $x^{12}=2$ erit

$$12\log.x=\log.2$$

adeoque

$$\log.x=\frac{\log.2}{12}.$$

VI. Satis omnium constat, inventorem ludi Schach grana tritici numero

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{63}$$

postulasse; cuius seriei summa

$$=(2^{64}-1):(2-1)=2^{64}-1;$$

adeoque e numero, qui ipsi 64 log. 2 tanquam logarithmo respondet, 1 subtrahi debet.

VII. Si quid certa aliqua operatione $\frac{1}{n}$-tum sui amittat, et quodvis residuum post operationem $(m-1)$-tam pariter $\frac{1}{n}$-tum sui amittat, quæri aut residuum post operationem m-tam aut numerus operationum pro dato residuo potest.

Sit 1 ad initium operationis primæ; erit ad huius finem

$$1-\frac{1}{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1};$$

et si ad finem operationis $(m-1)$-tæ fiat

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1},$$

erit ad finem operationis m-tæ

$$\left(\frac{n-1}{m}\right)^{m}.$$

Nam

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}-\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}:n\right)=\frac{(n-1)^{m-1}}{n^{m-1}}-\frac{(n-1)^{m-1}}{n^{m-1}.\,n}=$$

$$=\frac{(n-1)^{m-1}(n-1)}{n^{m}}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m}.$$

Ita intensitas lucis radiorum parallelorum per strata æqualia euntium, intensitas caloris corporis refringentis ad finem m-ti temporis; pretium vini, si quævis operatione $\frac{1}{n}$-tum eximatur atque vas aqua repleatur, computantur.

§. 2.

Quum nec logarithmi omnium, nec logarithmis omnibus respondentes numeri, in tabulis adsint: artificiis defectus sublevatur; quorum fundamentum sequens est.

Est

$$\frac{1+u}{1-u}=\frac{p+q}{p},$$

si

$$u=\frac{q}{2p+q};$$

estque

$$\log.\left(\frac{p+q}{p}\right)=\log.(p+q)-\log.p.$$

Hinc (pag. 187) log. nat. intelligendo

$$\begin{aligned}\log.(p+q)&=\log.p+\log.\left(\frac{p+q}{p}\right)\\&=\log.p+2\left(\frac{q}{2p+q}+\frac{q^3}{3(2p+q)^3}+\frac{q^5}{5(2p+q)^5}+\dots\right)\\&=\log.p+\frac{q}{p+\frac{1}{2}q}+\frac{2q^3}{3(2p+q)^3}+\dots;\end{aligned}$$

ubi iam postremus terminus si p non sit <1000, habet in denominatore ad minimum 10 loca, in quovis sequente antem ultra billionesies fit denominator maior; numerator vero, si non sit >1, aut manet aut decrescit; quivis terminus autem est maior summa omnium sequentium (pag. 187).

Hinc si p non <1000, et q non >1, incrementa ipsius p numerica (1 et f fractio vera) sunt in proportione cum incrementis logarithmicis respondentibus (cum errore exiguo): nam substituendo ipsi q prius 1, tum f, erit

$$\log.(p+1)=\log.p+\frac{1}{p+\frac{1}{2}}$$

(præter errorem dictum), et incrementum

$$=\frac{1}{p+\frac{1}{2}};$$

$$\log.(p+f)=\log.p+\frac{f}{p+\frac{1}{2}f},$$

(item præter errorem dictum), et incrementum

$$=\frac{f}{p+\frac{1}{2}f}.$$

Atque hinc proportio fit inter incrementa numeri numerum 1000 superantis, et incrementa logarithmi respondentis; nempe non est quidem

$$1:f=\frac{1}{p+\frac{1}{2}}:\frac{f}{p+\frac{1}{2}f},$$

sed

$$1:f=\frac{1}{p+\frac{1}{2}}:\frac{f}{p+\frac{1}{2}};$$

at vero

$$\frac{f}{p+\frac{1}{2}}-\frac{f}{p+\frac{1}{2}f}=\frac{pf+\frac{1}{2}f^2-pf-\frac{1}{2}f}{p^2+\frac{1}{2}fp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}f}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}f^2-\frac{1}{2}f}{p^2+\frac{1}{2}fp+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}f}.$$

Ubi patet numeratorem esse <1, et denominatorem $>1\ 000\ 000$; si vero per *modulum* multiplicentur logarithmi naturales, ut vulgares prodeant (pag. 187), tum et ista differentia adhuc ultra bis minor fiet.

Si vero p non $<10\ 000$, patet denominatorem esse maiorem 100 millionibus.

Atque hinc reperitur ope tabularum logarithmus etiam numeri ibidem haud exstantis; ita logarithmo, qui in tabulis non adest, respondens numerus reperitur.

Nam numeri supra 10 000, incrementa 1 et f sunt (sensu dicto) uti logarithmica incrementa I et i competentia.

Hinc si quæratur logarithmus 7 689 457, atque adsit in tabulis 76 894, et sequens uno maior: est

$$7\ 689\ 457=(76\ 894,\ 57).\ 100,$$

et (pag. 109)

$$\log.7\ 689\ 457=\log.(76\ 894,\ 57)+2.$$

Itaque adhuc tantum incrementum i logarithmo ipsius 76 894 addendum quæritur: quod prodit instituta proportione

$$100 : 57 = I : i,$$

ubi i in centesimis prodit; nempe

$$i = \frac{57\,I}{100};$$

I vero est log. 76 895 — log. 76 894. Demum 2 quoque addi characteristicæ debet.

Ita si logarithmus L non exstat: subtrahitur immediate minor l ex immediate maiore L', inter quos cadit L, et subtrahitur etiam l ex L; differentia prior est I, posterior i; est vero $I : i = 1 : f$ (sensu dicto); ubi si loco 1 ponatur 100, prodit f in centesimis; quia tunc 1 = 100 centesimis accipitur, adeoque quartus per 100 dividitur. Nempe

$$\begin{aligned} \log. N &= l \\ \log. (N+f) &= L = l + i \\ \log. (N+1) &= L' = l + I. \end{aligned}$$

Sunt tabulæ in quibus I, i et f computatæ, absque calculi molestia reperiuntur.

Scholion 1. Logarithmus nonnisi ipsius 1 cum certis quotvis cifris exactus est; nempe ipsius 1 est 0, ipsius 10 est 1, ipsius 100 est 2 &; cuiusvis numeri alius vero logarithmus incommensurabilis est cum unitate. Sit enim integer

$$N = 10^{\frac{n}{m}}$$

erit

$$N^m = (2.5)^n.$$

Sit N imagine primorum expressum; in hac adesse oportet tam 2 quam 5, nec ullus alius primus adesse potest, et 2 toties (ex. gr. k-ies) adest quam 5, ut m-ies positum sit

$$(2^k. 5^k)^m = N^m = 2^{km}. 5^{km} = 2^n. 5^n;$$

unde sequitur

$$km = n, \text{ et } \frac{m}{n} = k \text{ integro.}$$

Itaque nonnisi potentia integra ipsius 10 idest 1 cum certo cifrarum numero habet logarithmum integrum.

Scholion. 2. Logarithmi exprimuntur fractione decimali, in tabulis vulgaribus pro denominatore 10 000 000; possunt vero quantolibet minori errore computari (pag. 187). Integer ante comma vocatur *characteristica*, notæ decimales post comma vocantur *mantissa*. Illa et negativa esse potest; uti

$$\log.\frac{2}{100} = \log. 2 - 2.$$

Scholion. 3. Quum logarithmus eo segnius crescat, quo maior est numerus, (ex. gr. ab 1000 usque ad 10 000 tantum unitate crescit); si in calculo prodierit l logarithmus characteristica k et mantissa m gaudens: quæratur mantissa m post characteristicas maximas, quæ in tabula adsunt; et si reperiatur ibidem numerus N respondens logarithmo cuius characteristica K et mantissa m est; respondebit ipsi l tanquam logarithmo $\frac{N}{10^{K-k}}$; nam

$$N = 10^{K-m},$$

et

$$\frac{10^{K-m}}{10^{K-k}} = 10^{k-m}$$

per m hic valorem characteristicæ additum intelligendo. Si vero mantissa m exacte haud reperiatur, proxime minor accipi debet; et si opus fuerit (pag. 519), quæsitum accuratius determinatur. Si proxime minor accipiatur, quæsito minus prodibit.

E.

DE METHODO HETEROGENEA IN CALCULO TRACTANDI.

Possunt quidem omnia in concreto tractari. Nempe

1. *quaelibet quantitas speciei cuiusvis determinationum* $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv$, $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv$ *aliqua*
2. *et simul determinationum quoad realitatem aliqua affecta esse debet*: nempe quoad operationem multiplicationis operationesque inde promanantes cuivis unitas positiva aut negativa attributa sit, prouti simplicius ad scopum visum fuerit. *Duplex nempe unitatis dos est: ut quum mensura haud nominatur, ea subintelligatur positiva*; atque ut *operationibus dictis, prouti positiva vel negativa attribuitur, iuxta regulam dictam inserviat.* Ex. gr. $-\frac{2}{3}$ significat oppositum eius quod unitatis tertiam bis continet; atque si hoc per a denotetur, $-ai$ significat quantitatem eadem unitate sed negativa, quoad operationes dictas, præditam (pag. 121).
3. *Quaevis expressio ita intelligatur, ut omnium terminorum praeter zero (abstrahendo a determinatione) complexus, quantitas sit.* Ex. gr. si a spatium, b tempus, et a mult. per b sit S, atque b mult. per a sit T, et unitas spatii sit s, unitasque temporis sit t; expressio $1+abi=s+Si$ vel $t+Ti$, prouti ai per b, vel b per ai multiplicatur.

Ita si $a=2s$, $b=3t$, et $a+ab=k$; erit $2s+2.3s=8s$; et utrinque per a dividendo, erit $1+3=4$ quoad quamvis unitatem, adeoque et quoad t; eritque $t+b=4t$, et $b=3t$.

Sed simplicius fit rem ad arithmeticam puram reducendo modo sequente.

a) Quantitatum omnium, et heterogenearum, quævis Q, tali recta, eius in calculo vices gerente, expressa consideretur, quæ si unitas ipsius Q sit q, et β rectarum unitas sit, tale mensum ipsius β sit, quam Q ipsius q est.

b) Nec in calculum alia unitas præter $\pm\beta$ ulla admittatur; quasi omnes quantitates præter 0 et rectam excluderentur.

Quo pacto factum unicum, quotusque (præter $0:0$) unicus erit, imo quantitates abstractæ, de quibus (pag. 45, 47, 48, 111, ...) pro fundamento agere necesse fuit, in rectas mutantur.

Patet etiam: quod si prodierit ex. gr. Q (tanquam recta eius vices gerens) $= 2\beta$, sit Q ipsum $= 2q$.

4. Expressio per rectas utvis heterogeneorum (in idea magis intelligenda) haud innuit operationes mere geometricas: addit quidem Geometria rectam continuando, subtrahit resecando, et rectarum a, b (etsi utraque incommensurabilis fuerit) tam factum quam quotum imo et a^c pro

$$c = \frac{n}{2^m}$$

et n, m integris, exacte exhibet. Imo et quod mensuratum datur, recta exprimere valet, unitatem dividendo partesque accipiendo; conversimque rectam quoad unitatem mensurare potest, atque ubi exactum haud præbet (ex. gr. dum mensurationem finire nequit aut pro alio c) errore quantumvis exiguo approximat. Arithmetica vero, si rectarum utraque incommensurabilis fuerit, factum earum quoque nonnisi approximare valet, uti radicem quadraticam binarii geometrice prodeuntem; imo nisi mensurata dentur, prorsus hæret, uti Geometria sine unitate in omnibus operationibus a mensuratione quoad unitatem promanantibus.

Sit exemplum pro resultato operationum cum heterogeneis ad rectas reductis susceptarum. Si x et y heterogenea fuerint, et

$$y = k \quad \text{pro} \quad x = 1$$

ac

$$y = qk \quad \text{pro} \quad x = q,$$

tum y, ut quantitas respectiva quoad valorem k eius pro $x = 1$, dicatur z, atque unitas huius z vel uti quantitatis respectivæ quoad k, unitas huius k sit, sed in tali ab x dependentia, ut pro $x = 1$ et $y = 1$ fiat: tum semper

$$y = zx, \quad x = \frac{y}{z}, \quad z = \frac{y}{x}.$$

Talia sunt *celeritas* quoad spatium sub temporis unitate æquabiliter percursum, *densitas* quoad massam sub voluminis unitate, *pretiositas* quoad pretium unitatis mercium certarum, &c.

Et sit spatium S, tempus T, celeritas C, spatiique unitas sit U, temporis ι et T ex. gr. sit $\frac{2\iota}{3}$; exprimetur hoc per rectam $\frac{2U}{3}$; et si

$$C=\frac{7U}{5},$$

fiet $S=C$ per T (non T per C) multiplicato, atque $\frac{S}{C}=$ ipsum T repræsentanti $\frac{2U}{3}$, quod reversum fit $\frac{2\iota}{3}$. Notandum in utroque casu T esse multiplicatorem, cuius resultatum nonnisi ab eo pendet quale suæ unitatis mensum sit; si vero factores rectæ fuerint, permutari possunt.

Area per rectanguli altitudinis $U=1$, soliditas per parallelopipedi quadrato ipsius U insistentis longitudinem, ut recta exprimitur: adeoque unitas areæ erit quadratum et soliditatis unitas cubus ipsius U erit. Et hinc quum parallelogrammum altitudinis a baseos b in rectangulum altitudinis U mutari possit, patet rectam ab aream exhibere, — pariterque rectam e tribus rectis prodeuntem soliditatem exprimere.

F.

DILUCIDATIO QUORUNDAM CONCEPTUUM IN SECTIONE PRIMA TRADITORUM.

§. 1.

Generalissima proportionis, si ita extendere libeat, definitio, quam et quantitates quævis sub formam $A+B\sqrt{-1}$ cadentes ingredi queant, nonnisi *divisionis absolutae* conceptu stabilito dari potest.

§. 2.

Quantitatum prius duæ determinationes nempe $\mid\!\!\!+\!\!\!\mid$ et $\mid\!\!\!-\!\!\!\mid$ considerabantur, quibus postmodum item duæ, nempe realitas quoad $+1$ et realitas quoad -1 accesserunt (pag. 121).

Potest vero idem realitatum conceptus aliter quoque exponi. Multiplicatio divisioque tam quoad $+1$ quam quoad -1 peragi potest, omniaque et operatione quoad -1 facta (mutatis mutandis) æque prodeunt. Ex. gr. si quæratur spatium S tempore T celeritate C percursum, prodibit $S=C$ per T quoad $+1$ multiplicato (pag. 48); idemque est $=C$ per $-T$ quoad -1 multiplicato, essetque

$$S=-C.T$$

multiplicatione quoad -1 facta. Ne tamen semper commemorandum sit, quoad quodnam ipsorum $+1$ et -1 fiat operatio, nec formulæ nunc quoad unitatem positivam, mox quoad unitatem negativam tractatæ implicentur: eadem unitas quoad signum etiam servatur pro omnibus, atque tacite quantitati cuilibet $+1$ data est, nisi expresse monitum fuerit cuipiam -1 tribui. Nimirum quantitas quævis concipiatur unitate certa gaudens, quæ illi quoad casum operationum multiplicationis divisionisque attribuatur. Manifesto prouti quantitati unitas positiva vel negativa tribuitur, duæ determinationes diversæ, resultataque diversa parientes oriuntur; adeoque possent ea quæ antea realia quoad $+1$ dicta sunt, quantitates *unitate positiva*, et realia quoad -1, *unitate negativa praedita* vocari; at propter nomenclationem breviorem denotatio prior manere potest, aut prius *reale* posterius *pure imaginarium* dici (pag. 121).

Hinc si tale x quæratur, ut

$$x . x = -4 \quad \text{vel} \quad 3x . x = -4$$

sit, x impossibile esse nihil aliud significat nisi inter quantitates unitate positiva præditas tale x non dari, et nonnisi inter unitate negativa præditas esse. Ita si fiat

$$y = \sqrt{x - a}$$

in Geometria, et quantitates unitate positiva præditæ sint, adeoque operationes quoad $+1$ fiant: ordinata y (positiva vel negativa) nonnisi tunc accipitur, dum expressio dicta valorem habebit. Poterunt autem (pag. 202) ordinatæ aliæ quoque colore vel alio quopiam modo a prioribus distinctæ intuitui exhiberi, si $\sqrt{x - a}$ pro quantitatibus unitate negativa præditis accipiatur.

§. 3.

Atque iam multiplicatione et divisione, in *respectivam* quoad ± 1, et *absolutam* (absque mentione respectus quoad ± 1) distincta: prius respectiva, tum absoluta, et demum proportio stabilitur. Si definitiones pag. 75 traditæ ad multiplicationem divisionemque restringantur, denotetque A terminus primus unitatem positivam vel negativam; et quodvis sequentium trium terminorum B, C, D purum reale sit (aut quoad $+1$ aut quoad -1), sintque A et B homogenea, aut alterutrum 0 sit, pariter C et D; atque abstrahendo ab omni determinatione:

1. *Pro quovis nomine numerico* n, pro quo est

$$A = nu, \quad \text{et} \quad C = nv;$$

sit, m nomen numericum denotante,

$$B = mu + \omega,$$

et

$$D = mv + \lambda,$$

ubi $\omega = 0$ vel $\lessdot u$ et $\lambda = 0$ vel $\lessdot v$; quod alteri definitioni ibidem datæ æquivalet; nempe quod si pro quovis dicto n, nec u a B pluries, quam v a D, neque v a D pluries quam u a B contineatur.

2. Si (pag. 122) tam respectu determinationum ⊢+⊣ et ⊢—⊣, quam respectu determinationum realitatis quoad $+1$ et -1; dum A et B eiusdem determinationis fuerint, et C ac D sint determinationis eiusdem; si vero A et B determinationis diversæ fuerint, et C ac D determinationis diversæ sint: tum dicitur C per B *respective quoad A multiplicatum*, et D per B vel C *respective quoad A divisum* esse; atque D *factum quoad A, et in casu priore C quotus quoad A, in posteriore vero B quotus quoad A* dicitur.

Pro casu incommensurabilitatis patet iuxta (pag. 35): quod si n semper porro uno crescat, cuivis n suum m respondeat; adeoque ipso n in serie numerorum naturalium crescente, certa m pro certis B et D eadem se invicem excipiant.

SCHOLION. *Pluries contineri* autem dicitur ex. gr. v a D quam u a B, si

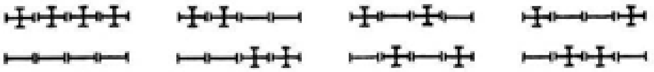
$$B = mu, \quad \text{vel} \quad B > mu \quad \text{sed} \quad mu + u > B,$$

atque D (vel eius portio) sit terminus seriei numerorum ipso mv ulterior, nec sit simul $D = mv$, uti si

$$v \mathrel{\bar{=}} 0 = D.$$

§. 4.

Determinationes ⊢+⊣ et ⊢—⊣ dant octo casus et totidem darent determinationes *realitatis*, si et *unitas pure imaginaria admitteretur*; nempe si r reale, et i pure imaginarium denotet, fient schemata sequentia:



$r\ r\ r\ r$	$r\ r\ i\ i$	$r\ i\ r\ i$	$r\ i\ i\ r$
$i\ i\ i\ i$	$i\ i\ r\ r$	$i\ r\ i\ r$	$i\ r\ r\ i$

Sed si pure imaginariam unitatem admittere haud libeat, nonnisi tres superiores lineæ manebunt.

Patet vero ex ipsis schematibus (etsi admitteretur unitas pure imaginaria):

1. terminos extremos in quovis casu esse determinationis eiusdem, si medii eiusdem fuerint; et extremos diversæ esse, si medii diversæ fuerint. Pariter si duo priores determinationis eiusdem fuerint, esse et duos posteriores eiusdem; si vero diversæ fuerint priores, et posteriores diversæ esse.

2. Terminum tertium per secundum in linea suprema quoad $+1$, in sequente quoad -1 multiplicari; unde etiam ex iisdem schematibus divisio quoad $+1$ et -1 patet, si quartus dividendus, et alteruter mediorum divisor fuerit.

Patetque in omni casu, in linea suprema in multiplicatione divisioneque determinationes easdem dare $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, diversas dare $\vdash\!\!\dashv$; in linea secunda autem determinationes easdem dare $\vdash\!\!\dashv$, diversas dare $\vdash\!\!+\!\!\dashv$: atque hinc pronam ad signa $+$, $-$ esse conclusionem (pag. 121 et 42); facta quotosque quoad $+1$ gaudere signo $+$ pro signis æqualibus, et signo $-$ pro signis diversis; quoad -1 autem signa æqualia dare $-$, et signa diversa dare $+$.

3. Pariter vero quoad determinationes realitatis, e linea tertia, in qua terminus primus reale quoad $+1$ est (sive $+1$ sive -1 fuerit), patet: quod si *factores quoad realitatem determinationis eiusdem fuerint, factum reale quoad* $+1$, *si diversae determinationis fuerint, factum reale quoad* -1 *sit. Eadem*, ex eadem linea, *regula divisionis* patet; nempe quod dividendo in locum quartum posito, si dividendus et divisor determinationis quoad realitatem eiusdem fuerint, quotus realis quoad $+1$, si vero determinationis diversæ fuerint, quotus realis quoad -1 sit.

§. 5.

Sed quum certis quantitatibus unitatem positivam, item certis quibuslibet negativam attribuere fas sit: quæstio exoritur, quomodo et connexæ (adinstar determinationum $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, $\vdash\!\!\dashv$), tractari possint? ut operationes quoque, absque eo ut respectivæ operationis quoad $+1$ vel -1 mentio fieri debeat, *absolute* peragerentur lege tali stabilita, ut omnia rite conveniant. Quem in finem *ponitur lex sequens* (pag. 122).

1. Quandocunque saltem alteruter duorum factorum unitate positiva gaudet, factor unitate positiva gaudens ponatur pro multiplicatore; et tunc (atque nonnisi tunc) sit multiplicator unitate negativa gaudens, dum duorum factorum uterque negativa unitate gaudet: nempe in lineæ tertiæ nonnisi schemate quarto debet necessario -1 loco primo stare, quum neuter factorum positiva unitate gaudeat; nec aliter -1 ex $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$ multiplicato prodeat.

2. Si A et a quantitates unitate positiva, et B ac b unitate negativa præditæ fuerint: dicitur $A+B$ per $a+b$ *absolute multiplicari* (absque mentione operationis respectivæ quoad $+1$ vel -1); si tam A quam B, tam per a quam per b multiplicetur (iuxta legem dictam); atque si in omnibus his factis partialibus, quæ hoc pacto prodierunt, summa quantitatum unitate positiva præditarum sit S, et summa unitate negativa præditarum sit s; dicitur $S+s$ (idest S cum s connexum sed non commixtum) *factum, sensu absoluto.*

Et si $x=x'$ *vel* $x \sim x'$, *et* $y=y'$ *vel* $y \sim y'$, *et* $x'y'=k$ *vel* $x'y' \sim k$, *dicitur etiam* k *factum ex* x *et* y (pag. 46 et 85).

Unde conceptus divisionis patet, nempe quilibet e duobus factoribus dicitur quotus e facto per factorem alterum diviso.

§. 6.

Atque iam conceptu hoc *divisionis absolutae* stabilito, fas est et proportionis conceptum eatenus extendere: nimirum α, β, γ, δ dicuntur *in proportione esse*, si quotus ex α per β diviso sit quoto ex γ per δ diviso æqualis (divisionem absolutam intelligendo); excepto casu, si α per β iuxta regulam quoad ± 1, et γ per δ quoad ∓ 1 dividi deberet, quo in casu divisio expresse contra regulam quoad idem sive $+1$ sive -1 suscepta intelligatur.

Patet in lineæ tertiæ (pag. 526) schematibus tribus prioribus, multiplicationem divisionemque quoad $+1$ fieri (per legem 1), quum detur factor realis, et nonnisi in schemate quarto quoad -1 peragi; patetque determinationes realitatis æquales dare reale, et diversas dare pure imaginarium.

§. 7.

Si vero quantitates sub formam $a+b\sqrt{-1}$ venientes pro casu, dum nec $a=0$ neque $b=0$ est, considerentur, et *quantitas* talis *mixta* dicatur: *mixtum et reale purum* (sive quoad $+1$ sive quoad -1) *tam in multiplicatione quam in divisione dabit mixtum, mixtum per mixtum* autem *dat mixtum, in certis casibus et reale purum quoad* $+1$ *vel quoad* -1 *dare potest.* Uti e schematibus sequentibus patet pro A, B, a, b realibus quoad $+1$:

$$(a+b\sqrt{-1})A=aA+Ab\sqrt{-1},$$
$$(a+b\sqrt{-1})B\sqrt{-1}=aB\sqrt{-1}-bB,$$
$$(a+b\sqrt{-1})(A+B\sqrt{-1})=aA+Ab\sqrt{-1}+aB\sqrt{-1}-bB.$$

In casu postremo fiet factum $-C$ pro quovis reali C, si accipiatur

$$A=\frac{aC}{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad B=\frac{-bC}{a^2+b^2};$$

ita factum $=C\sqrt{-1}$ erit, si accipiatur

$$A=\frac{bC}{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad B=\frac{aC}{a^2+b^2};$$

nempe in casu priore debet esse

$$aB+bA=0 \quad \text{et} \quad aA-bB=C;$$

in posteriore vero

$$aA - bB = 0, \quad \text{et} \quad aB + Ab = C;$$

atque valores dicti ipsorum A et B e duabus æquationibus in casu utroque reperiuntur. Et plane ita pro quibusvis realibus R et r reperiuntur talia A et B, ut factum dictum fiat

$$= R + r\sqrt{-1},$$

nempe tum debet esse

$$aA - bB = R, \quad \text{et} \quad aB + Ab = r;$$

unde pariter prodeunt A et B.

Prona hinc ad divisionem conclusio est. Nempe si reale (sive quoad $+1$ sive quoad -1) per mixtum non mixtum daret, prodiret reale vel quoad $+1$ vel quoad -1; hoc vero per divisorem daret mixtum, adeoque dividendus haud prodiret. Pariter nisi mixtum per reale (quoad ± 1) divisum mixtum daret, quotus per divisorem multiplicatus haud produceret dividendum mixtum. Et pariter de mixto per mixtum patet, pro quibusvis quoad $+1$ realibus C, R, r, posse A et B ita eligi, sive ut

$$\frac{R + r\sqrt{-1}}{A + B\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1},$$

sive ut

$$\frac{R + r\sqrt{-1}}{A + B\sqrt{-1}} = C,$$

sive ut sit

$$= C\sqrt{-1}.$$

Ex. gr. pro

$$R + r\sqrt{-1} = AC + BC\sqrt{-1}$$

fiet

$$R = AC \quad \text{et} \quad r = BC,$$

eritque

$$A = \frac{R}{C} \quad \text{et} \quad B = \frac{r}{C}.$$

Ut vero $C\sqrt{-1}$ prodeat, esse debet

$$R + r\sqrt{-1} = AC\sqrt{-1} - BC,$$

adeoque

$$R = -BC \quad \text{et} \quad r = AC$$

et hinc

$$A = \frac{r}{C}, \quad \text{et} \quad B = -\frac{R}{C}.$$

§. 8.

E clausula definitionis multiplicationis absolutæ (pag. 528), unde etiam conceptus *divisionis absolutae* deducitur ibidem, sequitur pro a et b neutro $= 0$:

I. $\frac{1}{m} \cdot ma$ semper $= a$; et hinc si $m \frown \infty$, adeoque $ma \frown \infty$ et $\frac{1}{m} \frown 0$, fiet

$$0 \cdot \infty = a,$$

atque

$$\frac{a}{0} = \infty, \quad \text{et} \quad \frac{a}{\infty} = 0.$$

II. Semper est $ma = ma$; sed si $m \frown \infty$, $ma \frown \infty$ (pag. 35) adeoque

$$\infty \cdot a = \infty \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{a} = \infty, \quad \text{atque} \quad \frac{\infty}{\infty} = a$$

quantitati cuilibet, uti $\frac{0}{0}$.

III. Etsi a incommensurabile fuerit, ex. gr.

$$a = mu + \omega, \quad (\omega \lessdot u),$$

erit semper $mu \cdot 0 = 0$, adeoque quum si $m \frown \infty$,

$$mu \frown a,$$

fiet

$$a \cdot 0 = 0.$$

Hinc autem (per definitionem proportionis pag. 528 § 6.) oriuntur proportiones sequentes, paulo inferius applicandæ

$$\begin{array}{llll} 1 & : a = 0 & : 0 \\ a & : \infty = b & : \infty \\ \infty & : a = \infty & : b \\ \infty & : \infty = 0 & : 0 \end{array}$$

§. 9.

Superius (pag. 526) in proportione, ubi nonnisi quantitates pure reales quoad ± 1 sunt, quas hic brevitatis caussa *puras* nominare fas sit, patebat, quod si *termini extremi determinationis eiusdem* fuerint (sive quoad $+$ et $-$ sive quoad realitatem), et *medii* determinationis *eiusdem* sint; at si *extremi diversae* determinationis fuerint, et *medii diversae* sint. *Idemque valet de duobus prioribus, et duobus postremis.*

Et nunc adhibitis mixtis quoque lex analoga valet: nempe *si extremorum utrumque mixtum vel utrumque purum fuerit, erit et mediorum aut utrumque purum aut utrumque mixtum; si vero extremorum alterutrum purum, alterum mixtum fuerit, et mediorum alterum mixtum alterum purum erit. Idemque valet de duobus prioribus et duobus posterioribus.*

Proportionis casus, quos mixtum ingreditur, sequentes sunt, in quibus quoti æquales esse possunt, si P purum, M mixtum denotet; neque aliud heic in censum venit, adeoque per easdem literas haud intelliguntur quantitates æquales.

$$\begin{array}{llll} PPMM & PMPM & PMMP & \\ MPMP & MPPM & MMPP & MMMM \end{array}$$

Nempe ex §. 7. patet, nonnisi in quovis horum casuum quotos e primo per secundum, atque e tertio per quartum æquales esse posse, *excepto, si duorum priorum aut duorum posteriorum alterutrum purum alterum mixtum et reliqua mixta fuerint:* ex. gr. pura per puram divisa puram dat, atque et mixta per mixtam dare puram priori æqualem potest; mixta per puram, pura per mixtam dat mixtam &c.

Quoad casum $RIMM$ (ubi R reale, I pure imaginarium denotat), sit ex. gr.

$$1 : \sqrt{-1} = (a+b\sqrt{-1}) : (-b+a\sqrt{-1}) :$$

nempe quotus uterque est $-\sqrt{-1}$; prior prodit divisione (per pag. 527) quoad -1, et in posteriore divisor per $-\sqrt{-1}$ multiplicatus producit dividendum; estque etiam factum extremorum facto mediorum æquale, nempe $= -b + a\sqrt{-1}$.

Unum adhuc casum notare licet; nempe

$$R : I = I : R,$$

ubi R per I quoad -1, et I per R (iuxta regulam) quoad $+1$ divideretur; ex. gr. pro

$$-1 : \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} : -2,$$

quotus uterque, si divisio utraque quoad -1, aut utraque quoad $+1$ peragatur, idem erit; nempe

$$\frac{-1}{\sqrt{-1}} \text{ (quoad } -1) = \sqrt{-1},$$

et

$$\frac{2\sqrt{-1}}{-2} \text{ (quoad } -1) = \sqrt{-1},$$

quia -2 per $\sqrt{-1}$ (quoad -1) multiplicando fit $2\sqrt{-1}$. Ita

$$\frac{-1}{\sqrt{-1}} \text{ (quoad } +1) = -\sqrt{-1} = \frac{2\sqrt{-1}}{-2} \text{ (quoad } +1).$$

Ita factum extremorum facto mediorum nonnisi ita erit æquale, si quoad idem ± 1 fiat multiplicatio; secus

$$-1 \,.\, -2 \text{ (quoad } +1) = +2,$$

et

$$\sqrt{-1} \,.\, 2\sqrt{-1} \text{ (quoad } -1) = -2$$

erit.

Nempe (si $\sqrt{-1}$ per $\pm i$ denotetur), schemata divisionum multiplicationumque dictarum erunt sequentia.

Pro

$$-1 : \pm i, \quad \text{et} \quad \pm 2i : -2$$

(utroque quoad -1)

$$-1,\ \pm i;\ \pm i,\ -1 \quad \text{et} \quad -1,\ -2;\ \pm i,\ \pm 2i.$$

Pro divisione eorundem quoad $+1$

$$+1,\ \pm i;\ \mp i,\ -1, \quad \text{et} \quad +1,\ -2;\ \mp i,\ \pm 2i.$$

Pro multiplicatione eorundem quoad $+1$

$$+1,\ -1;\ -2,\ +2, \quad \text{et} \quad +1,\ \pm i;\ \pm 2i,\ +2.$$

§. 10.

Pariter operationibus tam divisionis quam multiplicationis quoad idem ± 1 peractis, e quibusvis reperitur quartus *in concreto* iuxta regulam sequentem: si *quilibet duorum priorum socius alterius*, et pariter vocetur *quilibet postremorum;* atque *quilibet extremorum dicatur par alterius*, et pariter *quilibet mediorum; prodibit terminus quaesitus* x, *si socio carens multiplicetur per quotum, qui prodit, si terminus par socio carentis, per pari carentem dividatur.*

Quæsitum x aut quartum aut tertium aut secundum aut primum locum tenet: estque

$$x = D = \frac{B}{A} \cdot C = \frac{D}{C} \cdot C;$$

pro $x = C$ vero est

$$\frac{A}{B} D = \frac{C}{D} D \text{\&c.}$$

Quum reliqua facile pateant, unum tantum casum (pag. 533) adferre sufficiat. Sit nempe

$$-1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1,$$

et quæratur quartus: erit

$$x = \frac{\sqrt{-1}}{-1} \cdot \sqrt{-1},$$

tam divisione quam multiplicatione quoad idem ± 1 facta; iuxta schemata sequentia

$$-1,\ -1;\ +\sqrt{-1},\ +\sqrt{-1},$$

ubi

$$+\sqrt{-1}=\frac{\sqrt{-1}}{-1}\ \text{(quoad } -1\text{)};$$

et

$$-1,\ +\sqrt{-1};\ +\sqrt{-1},\ -1;$$

ubi per quotum priorem, $\sqrt{-1}$ multiplicatum quoad -1 dat factum -1. Idem quoad $+1$ prodit per

$$+1,\ -1;\ -\sqrt{-1},\ \sqrt{-1},$$

et

$$+1,\ -\sqrt{-1};\ +\sqrt{-1},\ -1.$$

Omnia vero quoad determinationes, sive quoad $\dotplus$ et $\vdash\!\dashv$, sive quoad realitatem, rite prodire e præmissis liquet.

§. 11.

Operationum additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionisque resultata unica esse, præter $\frac{0}{0}$, demonstratum in sectione prima est: aliquod tamen, quoad *quotum e concreta per concretam homogeneam*, quem *utcunque mutata unitate eundem manere* dictum (pag. 112) est, lumen affundere libet.

Sit linea b per lineam a dividenda, sitque

$$b=2v,\quad a=3v;$$

dictum est, quod si divisor in locum tertium ponatur, quotus sit quantitas quælibet, quæ quoad unitatem suam expressa $\frac{2}{3}$ est (pag. 45).

Si vero divisor in locum secundum ponatur, *quotus* loco tertio prodibit, ac *nonnisi linea erit*; et prouti unitas linearum accipietur, dato quovis maior minorve prodire poterit. Omnes tamen hi quoti innumerabiles cum prioribus innumerabilibus in eo convenient, quod et quotorum posteriorum quilibet quoad suam unitatem (quæcunque fuerit) $\frac{2}{3}$ erit, adeoque *aequalitate ista respectiva omnes aequales erunt*; atque quum in hoc casu nonnisi expressio quoad unitatem (ut quantitas abstracta) pro quoto accipiatur, (haud respiciendo ad speciem unitatis) *resultatum divisionis in hoc casu quoque unicum est.*

Nempe sit U linearum unitas, atque a et b quoad eam expressa reducantur ad denominatorem communem n; sitque

$$a = \frac{3U}{n}, \quad b = \frac{2U}{n}$$

fiatque schema utrumque (quoto x dicto); erit

$$U = n \cdot \frac{U}{n}, \; a = 3 \cdot \frac{U}{n}; \quad x = n \cdot \frac{2U}{3n}, \; b = 3 \cdot \frac{2U}{3n};$$

et

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3}, \; x = 2 \cdot \frac{1}{3}; \; a = 3 \cdot \frac{U}{n}, \; b = 2 \cdot \frac{U}{n}.$$

Patetque in utroque esse $x = \frac{2}{3}$ quoad unitatem.

§. 12.

Conceptum *potentiae elementaris* ad exponentem imaginarium extendere frustra tentans, meris imaginibus obiecto haud gaudentibus minime contentus, sensum eiusmodi expressionum nonnisi modo in (pag. 193) exposito reperire potui; quod tamen multo brevius exprimi sic potest.

Functionis ipsius β sequentis,

$$1 + \frac{\beta}{1} + \frac{\beta\beta}{1.2} + \frac{\beta\beta\beta}{1.2.3} + \cdots$$

valor, nempe cui series dicta æqualis est, aut ad quem tanquam limitem tendit, dicatur $f(\beta)$; ita ut sit

$$f(k) = 1 + k + \frac{kk}{2} + \frac{kkk}{2.3} + \cdots$$

et

$$f(kh) = 1 + kh + \frac{kh.kh}{2} + \frac{kh.kh.kh}{2.3} + \cdots$$

Quo pacto *definitio potentiae, radicis, logarithmique, sensu sublimiori*, breviter ita exprimi potest: Pro quovis tali c, ut $f(c)$ eidem C

æquale sit, dicitur quodvis $f(bc)$, et nonnisi id, *potentia exponentis* b ipsius C, per C^b denotata, et b dicitur cuiusvis C^b *logarithmus* quoad C, quidvis formæ $A+B\sqrt{-1}$ sit sive c sive b, A et B realia quævis, inter quæ et 0 cadit, denotantibus.

Dicitur præterea C *radix* exponentis b cuiusvis C^b, imo et quodvis tale a, ut pro certo k sit $a^k=K$, dicitur *radix exponentis* k ipsius K. Ex. gr. Sint X, Y, Z tres radices cubicæ ipsius 8; reperiuntur per (pag. 198) talia x, y, z, ut sit

$$f(x)=X,\quad f(y)=Y,\quad f(z)=Z.$$

Eritque

$$f(3x)=X^3=8=f(3y)=f(3z).$$

Sit c nomen generale ipsorum $3x$, $3y$, $3z$, sitque

$$b=\frac{1}{3}.$$

Pro quovis c erit

$$f(c)=8,\quad \text{et}\quad f\left(\frac{c}{3}\right)=f(bc)$$

$=8$ elevato ad $\frac{1}{3}$; nempe

$$f(x),\quad f(y),\quad f(z)$$

erunt potentiæ exponentis $\frac{1}{3}$ ipsius 8; eritque 8 radix exponentis $\frac{1}{3}$ cuiusvis earum, et $\frac{1}{3}$ logarithmus quoad 8 eorundem cuiusvis. Sit iam

$$c=x,\quad \text{et}\quad b=3;$$

erit

$$f(bc)=8=(f(x))^3;$$

atque

$$f(x)=\sqrt[3]{8};$$

sed etiam

$$(f(y))^3=8=(f(z))^3;$$

adeoque

$$f(x),\quad f(y),\quad f(z)$$

radices exponentis 3 ipsius 8 dicuntur. Estque 3 logarithmus ipsius 8 quoad quodvis ipsorum

$$f(x),\quad f(y),\quad f(z).$$

SCHOLION. Potuissent quidem, iam in ortu conceptus multiplicationis, non solum imaginariorum, sed et potentiæ & conceptus (plane expositi) construi: nisi alienum simplicitati naturali esset, ad conceptus constructionem talia adhibere, quæ nonnisi ulterius patefiunt. Nempe nonnisi id quod per $f(k)$ antea intelligebatur, construi debet: nimirum ponatur prius 1, et cuilibet termino adiungatur unus factor k, atque termino cuivis detur pro denominatore factum e numeris naturalibus ab 1 incipiendo usque ad numerum summum ipsorum k in termino illo.

At prius, factum e factoribus æqualibus numero n, per factorem semel, et n ad dextram superius scriptum denotari cœpit; tum ad quotum e talibus factis eundo, ultro venit, si a ut factor superius numero n, inferius numero m erat; quum superius a deleatur per inferius, numerum superiorum a accipere positive, inferiorum vero negative, atque $\frac{a^n}{a^m}$ designare per a^{n-m}, et $\frac{A^N}{A^M}$ intelligere per A^{N-M}. Sit

$$n-m=\nu, \quad \text{et} \quad N-M=\mu.$$

Passus ulterior erat, duos eiusmodi quotos nempe a^ν et A^μ æquales cogitare, et per $a^{\frac{\nu}{\mu}}$ designare tale A, ut sit

$$a^\nu=A^\mu.$$

Nec post (pag. 532) dicta, $\mu=0$ excluditur: nam

$$a^1=A^0=1, \quad \text{et} \quad 1^{1:0}=A,$$

Ita

$$a^0=A^0,$$

et $a^{\frac{0}{0}}$ gaudet valore A.

Postea (pag. 182) innotuere pro realibus b et c sequentia. Sit $(1)=$reali positivo e, tunc

$$\begin{aligned}
f(c) &= e^c \\
f(b+c) &= e_b \,.\, e^c, \\
f(c-b) &= e^c : e^b, \\
f(b\,.\,c) &= (e^c)^b, \\
f(c:b) &= \sqrt[b]{e^c};
\end{aligned}$$

darique tale x, ut

$$f(x) = b + c\sqrt{-1}$$

sit, etsi $c = 0$ et b negativum fuerit; nempe si (pag. 198) a tale sit, ut $\cos. a = -1$ et $\sin. a = 0$ sit. Atque tunc iam in mentem venire poterat ipsis b, c imaginaria quoque substituere.

Definitio hic data eadem cum pag. 193 data est: nisi quod hæc et simplicior sit et ibidem dictum 1^r supervacuum reddat; monendumque fuisset $r+i$ ad denominationem eandem reducta intelligenda esse: nempe si ex. gr. (pro integris n, m, v) sit

$$A = \frac{n}{m}, \qquad B = \frac{v}{m},$$

erit

$$A + B\sqrt{-1} = \frac{n + v\sqrt{-1}}{m}$$

adeoque

$$f\left(\frac{n+v\sqrt{-1}}{m}\right) = \sqrt[m]{f(n+v\sqrt{-1})}$$

cuius valores numero m sunt, quos valor quivis per valores ipsius $\sqrt[m]{\ }$ multiplicatus omnes exhibet.

G.

RELATIO BREVIS ADDITAMENTI ANTECEDENTIS.

I. Cuilibet quantitati tribuatur unitas positiva vel negativa (quoad operationes statim dicendas); et illi, de qua expresse non dicitur ei negativam tribui, positiva unitas attributa sit. Unitate positiva præditæ illæ erunt, quæ *realia* vocantur, et negativa præditæ erunt eæ, quæ *pure imaginariae* dicuntur; quæ nomina consveta et hic retinentur, atque duæ hæ determinationes *determinationes realitatis* dicantur. Realia et pure imaginaria, determinatione sive $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ sive $\vdash\!\!-\!\!\dashv$ affecta, dicantur *quantitates purae.*

II. *Definitio proportionis* (inter plures *Sect.* I. datas) ibidem (pag. 75) est sequens: *A, B, C, D in proportione* esse dicuntur *(abstrahendo ab omni determinatione) si pro quovis tali n* (nomine numerico), *ut $A = nu$, $C = nv$ sit; nec B ipsum u pluries, quam D ipsum v, neque D ipsum v pluries, quam B ipsum u contineat.*

Si iam conceptus hic ad casum $A = \pm 1$ restringatur; atque accedat: quod tam respectu determinationum $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, $\vdash\!\!-\!\!\dashv$, quam respectu determinationum realitatis; dum A et B determinationis eiusdem sunt, et C ac D sint eiusdem; si vero A et B determinationis diversae fuerint et C ac D diversae sint: tum dicitur D factum ex C per B (quoad ± 1) *multiplicato;* operatio autem dicitur *multiplicatio* (uti etiam *divisio* inde oriunda) *respectiva* quoad ± 1.

Quo pacto 8 schemata oriuntur ex $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, $\vdash\!\!-\!\!\dashv$, et totidem e duabus realitatis determinationibus: e quibus schematibus patet, *quod etiam termini extremi determinationis eiusdem siut, si medii determinationis eiusdem fuerint;* imo ex iisdem patet, *tam in multiplicatione quam in divisione, si quoad $+1$ peragatur,* $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ *et* $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, necnon $\vdash\!\!-\!\!\dashv$ et $\vdash\!\!-\!\!\dashv$, dare $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, at $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ et $\vdash\!\!-\!\!\dashv$ dare $\vdash\!\!-\!\!\dashv$; et rem inverse quoad -1 esse, *(unde prona ad* *signa* $+$, $-$ *conclusio est); determinationes item quoad realitatem aequales dare reale, diversas autem dare pure imaginarium.*

III. Prouti quantitates determinationibus $\dashv\!\vdash$, $\vdash\!\dashv$ affectæ connectuntur, atque ita tractantur: ultro venit, et determinationibus quoad realitatem affectas connectere, atque talem legem statuere; ut *omnes operationes* (absque mentione facta quoad $+1$ vel -1) *absolute peragantur:* eaque fit sequens

1. Ut *si alteruter duorum factorum unitate positiva gaudeat, factor unitate positiva gaudens ponatur pro multiplicatore; et si uterque unitate negativa gaudeat, tunc sit multiplicator unitate negativa gaudens.*

2. Si A et a quantitates unitate positiva, et B ac b unitate negativa gaudeant: dicatur $A+B$ *per* $a+b$ *absolute multiplicari;* si tam A quam B, tam per a quam per b respective iuxta legem priorem multiplicentur; atque si in his factis summa realium sit S, summa pure imaginariorum sit s, dicatur $S+s$ (id est S cum s, connexum sed non commixtum) *factum (sensu absoluto).*

Atque hinc *divisionis absolutae* conceptus patet: nempe si $P.Q=F$, dicitur Q *quotus* ex F diviso per P.

Extenditur etiam *multiplicatio* absoluta (iuxta pag. 46); atque hinc etiam *divisio absoluta.*

Hinc si quotus ex α per β diviso sit æqualis quoto ex γ per δ (divisionem absolutam intelligendo): dicuntur α, β, γ, δ (sensu generalissimo) in *proportione esse:* notando quod in casu ubi α per β quoad ± 1, et γ per δ quoad ∓ 1 dividi iuxta regulam deberet; expresse contra regulam quoad idem ± 1 dividenda sint.

IV. Quantitates sub formam $a+b\sqrt{-1}$ venientes dicantur *mixtae, dum nec a nec* $b=0$ est: *dabitque* tam in multiplicatione quam divisione, *purum per purum, purum; purum per mixtum, sive mixtum per purum, dabit mixtum; mixtum per mixtum autem dat in certo casu purum, in alio mixtum.*

V. Patet autem (uti in schematibus multiplicationibus divisionisque) *in proportione quoque: quod si duo priores determinationis eiusdem fuerint sive quoad* $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, $\vdash\!\!\dashv$, *sive quoad realitatem; et duo posteriores eiusdem sint; si non, non; et pariter si extremi eiusdem fuerint, et medii eiusdem sint, si non, non; et pariter si extremorum utrumque mixtum, vel utrumque purum fuerit, et mediorum aut utrumque purum, aut utrumque mixtum sit; si vero extremorum alterutrum mixtum alterum purum fuerit, et mediorum alterutrum purum, alterum mixtum sit; atque idem de duobus prioribus, et duobus posterioribus valeat.*

VI. Præterea *de resultato divisionis unico, dum concreta per concretam dividitur*, additur aliquid: nempe divisor tam secundum quam tertium locum occupare potest: eodemque sensu si *divisor fractio vera sit, quotus in casu utroque maior dividendo est.*

VII. De *reperiundo e quibusvis tribus proportionis terminis, quarto (in concreto)*; et *de facto extremorum = facto mediorum, quoad idem* ± 1 *accipiendo.*

VIII. Conceptus *potentiae, radicis, logarithmique* (pag. 193) traditus simplicius exponitur. Nempe statim post conceptum multiplicationis, series talis construi potest, cuius terminus primus sit $\frac{1}{1}$, et e quovis termino ea lege oriatur sequens; ut numeratori postponatur k ut factor, et denominatori numerus is, quo k ut factor in novo numeratore est, postponatur: quo pacto series

$$1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^4}{2.34} + \cdots$$

orta, si fuerit = aut $\sim K$, exprimatur valor huius seriei per $f(k)$.

Atque pro quovis tali c, ut $f(c)$ eidem C æquale sit, dicatur quodvis q)(ɔf (et nonnisi id) *potentia exponentis* b *ipsius* C, per C^b denotata; et b dicatur cuiusvis C^b *logarithmus quoad* C, quidvis sub formam $A + B\sqrt{-1}$ cadens sit sive c sive b (A et B realia quævis, inter quæ et 0 cadit, denotantibus). Dicitur præterea C *radix exponentis* b cuiusvis C^b; imo et quodvis tale a, ut pro certo r, sit $ar = R$, dicitur *radix exponentis* r *ipsius* R. Exemplis hæc ibidem illustrantur; atque per definitionem divisionis (pag. 528) extensam, præterquam quod 1^r ommittitur (pag. 193).

Notandum tamen est, conceptum hunc, quamvis statim post multiplicationem construi queat, nonnisi subveniente (pag. 182) oriri.

Nempe prius, factum e factoribus æqualibus numero n, per factorem semel, et n ad dextram superius scriptum denotari cœpit; tum ad quotum e talibus factis eundo, ultro venit, si a ut factor superius numero n, inferius numero m erat; quum superius a deleatur per inferius, numerum superiorum a accipere positive, inferiorum vero negative, atque $\frac{a^n}{a^m}$ designare per a^{n-m}, et $\frac{A^N}{A^M}$ intelligere per A^{N-M}. Sit $n-m=\nu$, et $N-M=\mu$.

Passus ulterior erat, duos eiusmodi quotos nempe a^ν et A^μ æquales cogitare, et per $a^{\frac{\nu}{\mu}}$ designare tale A, ut sit $a^\nu = A^\mu$. Nec post (pag. 532) dicta $\mu = 0$ excluditur: nam $a^1 = A^0 = 1$, et $1^{1:0} = A$.

Ita $a^0 = A^0$, et $a^{\frac{0}{0}}$ gaudet valore $= A$.

H.

DILUCIDATIO NOVA EORUNDEM CONCEPTUUM IN SECTIONE PRIMA TRADITORUM.

Sit fas conceptus primarios breviter referre. Conceptus construere (abstrahendo et coniungendo haud contraria ac comparando) fas est: donec aliud clarius elegantiusque, quo systema æque concinnum firmumque stabiliatur, prodeat.

Hoc pacto quantitates cum certis qualitatibus connexæ et cum iis suscipiendæ operationes oriuntur: quærique potest, quodnam sit certarum quantitatum certis qualitatibus præditarum per certas operationes resultatum? item pro certo resultato, quænam quantitates cum quibus qualitatibus connectantur et quæ operationes cum iis suscipiantur?

Ita (pag. 32) seriei terminus quivis *numerus* quoad *u* (*unum* ab *unitate* distinguendum) dicitur, at si cui o et *u* quoque numerum dici absonum videatur, aliud nomen commune dari potest, idque cum certis fieri potest.

Ita qualitates *oppositorum*, earumque cum quantitatibus coniunctio, atque hinc *additionis* et ex hac *subtractionis* operationes construuntur.

Conceptus positivorum et negativorum *e demtione* oriundus construi modo sequente etiam potest: si A tali qualitate Q et B tali qualitate q prædita ponantur, ut pro certa conditione c accipiendum resultatum sit o si $A=B$, secus autem id cum qualitate Q aut q, quod si non esset, resultatum o esset, — tum A cum Q et B cum q dicuntur (posito c) *opposita*.

Ita fit mater conceptuum cardinalium operatio, qua aliquid quoad certam *mensuram mensurari* dicitur, cum *imagine* resultatum operationis exhibente; atque ex omnibus *mensurae primariae mensurationis primariae* et *imaginis mensurationis primariae* quoque constructio; quamvis verba ista hic altiori sensu quam in vita communi veniant. Nempe statuere fas est:

1. Ut certa quantitas U sit *mensura primaria* ab omnibus illi æqualibus quoque distincta, nec cum ulla earum alia permutetur, atque $\vdash\!\!+\!\!\dashv[U]$ significet id ipsum cum qualitate $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ et $\vdash\!\dashv[U]$ item illud ipsum cum qualitate $\vdash\!\dashv$.

2. Ut pro quavis quantitate tractanda figatur ad casus operationum constructarum, non solum cum quanam qualitatum $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ et $\vdash\!\dashv$ coniuncta spectetur, sed etiam quoad quam unitatem (nempe positivam vel negativam) mensuretur, dum primaria eius mensuratio præcipitur; atque eatenus aliæ unitate positiva aliæ unitate negativa præditæ distinguantur; ex. gr. posteriores, quæ *imaginariae* dici solent, a prioribus, quæ *realia* dici solent, alio ex. gr. rubro colore distingui possent aut signo * ad lævam supraposito. Atque tam priores quam posteriores *purae*, connexae vero *mixtae* dici possunt.

3. Quum vero sive expresse ipsius $\vdash\!\!+\!\!\dashv[U]$ aut ipsius $\vdash\!\dashv[U]$ mensuratio primaria præciperetur; id quoad $\vdash\!\!+\!\!\dashv[U]$ fiat: adeoque tam $\vdash\!\!+\!\!\dashv[U]$ quam $\vdash\!\dashv[U]$ ita dicta realia sint.

4. Ut mensum quoad mensuram magis innotescat, statuatur pro resultato *mensurationis* imago responsiones ad tres quæstiones sequentes exhibens: post I scribatur quamtumnam sit mensum quoad mensuram? post II vero, num simul sint positiva vel negativa aut non? post III autem, num simul gaudeant unitate positiva vel negativa aut non? scribaturque eatenus post II et III «ita» vel «non». Abhinc et mensurationis mixtæ quoad qualemvis et puræ quoad mixtam imagines item lege certa construuntur.

5. Si imago mensurati b quoad a fuerit æqualis imagini mensurati B quoad A, dicatur b quoad a *aequimensum* ipsi B quoad A.

6. Si vero A unitatem ipsius B denotet, dicatur b quoad a ipsi B *aequimensum*; nempe dum mensura haud nominatur, *primaria* mensuratio intelligatur, prior respectiva quoad a est: operatio qua b ex a et B quæritur, *multiplicatio*, et b *factum* ex a per B audit; est quidem a *mensura posita*, B vero *primario mensum*.

7. At quum si factores ex. gr. rectæ fuerint, rectam dent pro facto, imo etsi permutentur in omni casu factum idem sit (præter casum uni-

cum si nempe a unitate positiva et B negativa gaudeat): ut ordo factorum dictorum in nullo casu factum mutet, statuitur ut imagines mensurationis (in 4) unica exceptione æquales sint, nempe in casu plane dicto post II in primaria et in respectiva mensuratione contraria stent.

8. Porro ad quantitates e qualibusvis puris complexas conceptus multiplicationis facile construitur.

9. Si vero γ factum ex β per α fuerit, pronum est, e γ tanquam posito facto et alterutro ipsorum α et β quærere huius socium; dici solet hæc operatio *divisio* et quæsitum *quotus. Duae* vero sunt *species* in genere, prouti *mensura respectiva* aut *primario mensum* quæritur. Dicatur posterius *quotiens.*

10. Atque si duo quotientes æquales sint, fit *quotientium aequalitas*, et fas est sive hoc sive (5) *proportionem* dicere at generaliter utrumque haud idem est, ut infra patebit.

Unde passus ad seriem, quæ *geometrica* vocatur, cuius terminus quivis per sequentem divisus quotientem eundem dat. Atque hac serie combinata cum serie, quæ arithmetica dicitur, cuius termini cuiusvis differentia a sequente eadem est, nascitur conceptus *potentiae, radicis* et *logarithmi.* Nimirum origo ad indicam (qua numeri designantur) legem referri potest: nempe

$$\ldots 111, 111 \ldots$$

denotat seriem geometricam, in qua si 10 generaliter a sit, loco primo ad lævam ab 1 (exclusive numerando) valor ipsius 1 est a, loco secundo aa &c. Quæ loca si terminis respondentia infra eos scribantur, serie locorum arithmetica pariter continuata utrinque in infinitum, ut terminis seriei superioris geometricæ subscripti, quasi indices locales eorum sint: sequens imago orietur

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots aaa & aa & a & 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{aa} & \frac{1}{aaa} \ldots \\ \ldots 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \ldots \end{array}$$

Ubi perspicere pronum est, quod index localis facti e quibusvis terminis superioribus summa indicum localium iis respondentium sit, et quotientis index localis prodeat, subtracto indice locali divisoris ex indice locali dividendi.

Et quum index localis ex. gr. ipsius 1 sit o-ies tantus quam index localis ipsius a, et index localis ipsius $\frac{1}{aa}$ sit $\left(-\frac{2}{3}\right)$-ies tantus quam index localis ipsius aaa &: designare hoc per

$$1=a^0, \quad \frac{1}{aa}=(aaa)^{-\frac{2}{3}}, \ \&$$

(nihil aliud intelligendo) fas erat. Patebat etiam idem esse, si pro

$$\ldots\ 2,\ \ 1,\ \ 0,\ \ -1,\ \ -2,\ \ldots$$

ponatur

$$\ldots\ 2d,\ \ d,\ \ 0,\ \ -d,\ \ -2d,\ \ldots$$

Hinc passus erat pro a et d quasvis quantitates libere sumere, *capita* suarum serierum nuncupando, unde brachia utrinque extendant. Passus ulterior est in utraque serie a quovis ad proximum terminos numero eodem μ, quem postea in infinitum augere liceat, ita interserere, ut series superior geometrica, inferior autem arithmetica maneat, atque ut termini inferioris terminis superioris tanquam indices locales respondeant.

Et tum subvenit duo eiusmodi serierum paria condere: alterum pro parte realium et alterum pro parte imaginariorum, et quidem ita, ut capita serierum sint a, d positiva et unitate positiva prædita pro parte realium, et pi, qi (quantitates p, q unitate negativa præditas denotantia) pariter positiva pro parte imaginariorum purorum.

Atque quum si N, R termini seriei ipsius a, et M, S termini seriei ipsius pi, indicesque locales ipsorum N, R, M, S fuerint n, r, m, s, et index localis ipsius NR sit $n+r$, et ipsius MS sit $m+s$: pronum est pro indice locali ipsius NM quoque $n+m$ ponere, quasi eiusmodi facti, cuius alter factor pro parte realium indice locali n, pro imaginorium parte vero indice locali m gaudet.

Et hinc adinstar unitatis pronum est capita serierum constantia statuere.

Atque si hoc pacto pro valoribus ipsorum b, c, C unicis, indiceque locali per log. designato fuerit

$$c \log. b \coloneqq \log. C$$

per $x \coloneqq y$ intelligendo aliquem valorem ipsius x alicui ipsius y æqualem esse, fas erat dicere, C quoad indicem localem quasi c-ies *potentius* ipso b, et b quasi c-ies *impotentius* ipso C, designando per

$$C \coloneqq b^c, \quad \text{et} \quad b \coloneqq \sqrt[c]{C}$$

atque

$$c \coloneqq \log. C \text{ (quoad } b);$$

signo $\coloneqq$ *ob plurium valorum possibilitatem adhibiti*, (pag. 124).

Et tum priusquam capita figerentur, oritur *theoria potentiae generalis* specialiter applicata, dum tale q et talis functio

$$f(v) = 1 + \frac{v}{1} + \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^4}{1.2.3.4} + \cdots$$
$$= f_1(v) + f_2(v),$$

per $f_1(v)$ summam terminorum imparis numeri intelligendo, innotuerunt, ut

$$f_1^2(v) - f_2^2(v) = 1$$

et

$$f(qi) = \cos. q + i \sin. q = i,$$

et

$$\cos. u + i \sin. u = f(ui)$$

sit. Unde quum si pro pi et qi ista i et qi accipiantur, quivis index localis ji fuerit in serie infima, $f(ji)$ terminum, cuius ji index est, exhibeat, pariterque sit, si $f(d)$ sumatur pro a; capita hæc stabilire, et ob simplicitatem $d=1$ ponere (quo *systema naturale* baseos $f(1)=e$ dictæ) in promtu erat.

Et tum demonstrato, quamvis quantitatem per

$$y \cos. u + yi \sin. u$$

exprimi posse, denotante y reale et u viam puncti in peripheria radii 1, — non solum quantitas ipsa, sed et potentia exponentis (sive realis, sive imaginarii, sive mixti), imo quantitatis cuiusvis omnes logarithmi intuitui subiiciuntur. Nempe abscissæ in recta ab $\mathfrak{a}$ acceptæ, ad dextram positivæ ad lævam negativæ, exprimant seriem arithmeticam seriei geometricæ ipsius e respondentem, atque ordinatæ y ad finem cuiusvis abscissæ $\mathfrak{ap}$ perpendiculares superius erectæ sint termini seriei dictæ ipsius e abscissis respondentes; item sit altera quoque talis abscissarum linea cum ordinatis prioribus; et e cuiusvis abscissæ fine $\mathfrak{p}$ fiat circulus radii 1 ad eam perpendicularis, atque e diametri in tabula erectæ fine superiore punctum pone tabulam directum moveatur semper porro in infinitum, via eius u dicta; et ubicumque in $\mathfrak{p}'$ sit finis viæ u, accipiatur ex $\mathfrak{p}$ in recta versus $\mathfrak{p}'$ indefinita $y \cos. u$ (per y ordinatam illius $\mathfrak{ap}$ et cosinum pro radio 1 intelligendo). Idemque fiat cum altera abscissarum linea eo solum discrimine, quod $y \sin. u$ pro $y \cos. u$ accipiatur, et quidem $y \cos. u$ unitate positiva, $y \sin. u$ vero unitate negativa prædita sint. Facile patet prius formam stantem 8, posterius vero iacentem dare, hocque ob intuitum clariorem colore ex. gr. rubro ab illo nigro distingvi posse; exhiberique posse quodvis Q per

$$y (\cos. u + i \sin. u),$$

quum pro quovis detur tale u et tale y.

Omnes logarithmi naturales ipsius Q vero comprehenduntur in

$$\mathfrak{ap} + ui + \alpha \hat{\nu} i,$$

si $\mathfrak{p}$ denotet finem abscissæ ipsi y respondentem et $\alpha = 4q$ sit atque $\hat{\nu}$ sit nomen generale omnis numeri integri sive positivi sive negativi ita ut quivis haud excluso 0 illi substitui possit.

Patet etiam formas dictas ad dextram crescere in infinitum, decrescere ad lævam semper similes, uti tabula e compendio hungarico postea edito sumta ostendit, ubi et dari supradictum q etiam mere analytice cum rigore demonstratur.

Notandum vero est:

1) quod quamvis $f_1(v)$, pro $v = u\sqrt{-1}$, sit

$$= \cos. u = \cos. \frac{v}{\sqrt{-1}},$$

substituto iu idest $u\sqrt{-1}$ ipsi u in

$$v = u\sqrt{-1},$$

absonum sit $f_1(-u)$ cosinum ipsius ui dicere: quum in circulo radii 1 cosinus eius fieret omni dabili maior, si $u \sim \infty$. Interim et tunc

$$f_1^2(v) - f_2^2(v) = 1$$

et $f_1(v)$ ac $f_2(v)$ functiones nomine proprio quidem dignæ, sed a simplici conceptu geometrico distinctæ, *cosformis* et *sinformis* dici possent.

2) Pag. 542 et pag. 536 data definitio per signum $\coloneqq$ fit præcisa: nimirum si

$$f(v) = V,$$

tum dicitur

$$v \coloneqq \log. V$$

(idest log. nat. V), et si pro valoribus unicis ipsorum c, C, a fuerit

$$c \log. a \coloneqq \log. C,$$

dicitur

$$C \coloneqq a^c,$$

et

$$a \coloneqq \sqrt[c]{C}$$

atque

$$c \coloneqq \log._a C,$$

idest log. C quoad basim a.

Ubi si

$$a = f(h),$$

atque

$$C = f(hc),$$

dicitur $\frac{1}{h}$ *modulus* systematis logarithmici pro basi a, per quem nimirum log. C multiplicatum dat logarithmum quoad a. Unde si modulus is σ dicatur, $f\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ est basis a.

Ratio signi $\coloneqq$ est, quod generaliter nec $c \log. a \coloneqq \log. C$, nec

$$\log. a \coloneqq \frac{\log. C}{c}$$

sit. Nam si aliquis log. a fuerit k, et aliquis log. C fuerit kc, erit

$$\log. a \neq k + \alpha\hat{\nu}i$$

et

$$\log. C \neq kc + \alpha\hat{\nu}i;$$

adeoque ut

$$c(k + \alpha\hat{\nu}i) \neq kc + \alpha\hat{r}i$$

sit, dari pro quovis ν talem integrum $\hat{r}$ opporteret ut

$$c\nu = r$$

sit, quod, si ex. gr.

$$C = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \nu = 5,$$

fieri nequit, quia

$$2 \cdot 5 = 3\nu,$$

adeoque $\frac{2 \cdot 5}{3}$ integer esset. Pariter casus alter patet.

3. Si in serie geometrica

$$\ldots, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a}, 1, a, aa, \ldots$$

et respondente arithmetica

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

termini inter quosvis proximos numero $\mu - 1$ interserantur: exponens superioris erit $a^{\frac{1}{\mu}}$, inferioris autem $\frac{1}{\mu}$; atque si prior sit x, ac integer r et $\omega < 1$ positiva et

$$N = x^{r+\omega}, \qquad x^r < N < x^{r+1}$$

fuerint, fiet

$$\log. N = \frac{r+\omega}{\mu}, \ \frac{r}{\mu} < \log. N < \frac{r+1}{\mu}.$$

4. Ex $A^m = B^n$ generaliter nec

$$A \neq B^{\frac{n}{m}}$$

sequitur; ex. gr.

$$(-1)^2 = 1^2,$$

sed ipsius -1 nullus valor est ulli ipsius $1^{\frac{2}{2}}$ æqualis (si $\frac{2}{2}=1$ accipiatur). Addendum itaque pag. 543 fuisset: si n, m inter se primi fuerint, aut potius dicendum, si termini seriei geometricæ eiusdem, cuius caput a sit, fuerint

$$A=a^n \quad \text{et} \quad B=a^m:$$

tunc (prouti si $A=na$ et $B=ma$, dicitur A ipsius B tanquam mensuræ $n(m)$-tum, pariter) dicatur si m non $=0$,

$$A \models B^{\frac{n}{m}},$$

et

$$B \models \sqrt[\frac{n}{m}]{A},$$

atque

$$\frac{n}{m} \models \frac{\log._a A}{\log._a B}.$$

Est quippe si $n=zm$ ponatur, index localis ipsius A $\frac{n}{m}$-ies tantus, quam index localis ipsius B.

Ita pro c finito et non $=0$ fit

$$\sqrt[c]{C} \models C^{\frac{1}{c}}.$$

Namque

$$b \models \sqrt[c]{C}$$

sequitur (pag. 550) ex

$$c \log. b \models \log. C.$$

Nam sit k valor aliquis ipsius log. b et kc valor aliquis ipsius log. C; erit et

$$\frac{kc}{c}=k,$$

adeoque

$$\frac{1}{c} \log. C \models \log. b;$$

itaque

$$b \models C^{\frac{1}{c}}.$$

Ita si

$$h \models C^{\frac{1}{c}},$$

tum

$$\frac{1}{c} \log. C \models \log. h,$$

itaque

$$\log . C \models c \log . h$$

et

$$h \models \sqrt[c]{C}.$$

At si $c = 0$, sitque

$$2^0 = 1$$

erit

$$2 \models \sqrt[0]{1},$$

sed non est $= 1^{\frac{1}{0}}$ nisi sensu (pag. 46), quo pro operationem ingredientium limitibus resultati limes nomine eodem insignitur, quatenus ex

$$\omega \log . b \models \log . C,$$

pro $\omega \sim 0$ fieret

$$C \sim 1, \text{ et } b \models 1^{\frac{1}{0}};$$

et si

$$-\omega \log . b \models \log . C,$$

fieret pro $\omega \sim \infty$

$$b \models 0^{\frac{-1}{\infty}}.$$

Expressionum tamen huiusmodi sæpe sensus vagus est.

5. In opere dicto potentiæ theoria generalis traditur, priusquam capita serierum figerentur; et quicunque index localis fuerit j, id cuius j index localis est, per ♀ i designatur, quod postea $f(j)$ fiet. Adhibitisque signis $\models$, $\leftmodels$, $\Leftrightarrow$ (notando quod nonnisi ubi signum $=$ est, expressionum æqualium quotvis valoribus gaudeant æquales accipi debeant) plura præcisius determinantur; ex. gr. generaliter $(\sqrt[d]{a})^c$ nonnisi $\models \sqrt[d]{a^c}$ dici potest; $a^b \cdot a^c$ tantum $\Leftrightarrow a^{b+c}$ &c.

Præter potentiæ theoriam autem ibidem *triplex vestitus*, quo quantitates utvis heterogeneas pro quæstionis statu ornatas tabulam adire præceptum est, in eo consistit, ut (pag. 522 et 545) rectarum unitas U (quasi dux operationum cardinalium) eadem teneatur, donec aliud monitum fuerit: atque

a) quævis quantitas utvis heterogenea, si ex. gr. suæ unitatis $\frac{2}{3}$-tum fuerit, repræsentetur per rectam $\frac{2U}{3}$; item

b) cuivis eiusmodi repræsentanti, prouti ad scopum visum fuerit, detur qualitas positiva vel negativa quoad casum operationis, quæ *additio dicitur, indeque oriundæ subtractionis;*

c) quoad casum præcipiendæ mensurationis primariæ et inde oriundorum tribuatur illi $\mapstochar\!\!+\!\!\dashv U$ vel $\vdash\!\!\dashv U$, ut idem U huic operationi iam cum qualitate $\mapstochar\!\!+\!\!\dashv$ iam cum qualitate $\vdash\!\!\dashv$ inserviat.

Operationes per numericas quoad unitatem expressiones pariter peragere fas est.

Imaginis mensurationis constructæ (pag. 545) lex sequens ponitur. Si mixta quoad puram datam mensuranda sit: prius illa pura pars mixtæ mensuretur, quæ cum mensura eadem positiva vel eadem negativa unitate gaudet, et postmodum mensuretur altera pars, atque post I, II, III scribantur responsiones mensurationis ad lævam et posterioris ad dextram.

Mixtæ mensuratio primaria autem fiat ordine sequente: quævis quoad suam unitatem mensuretur, sed ad lævam scribatur post I, II, III partis unitate positiva præditæ imago, et ad dextram imago mensuratæ partis alterius.

Quoad mixtam autem mensuratæ (sive mixtæ sive puræ) imago sit sequens. Sit mensura $a+bi$, sitque mensurandum K pro $K=P+Q$, tam P quam Q mixtum denotantibus.

Si prius P quoad a, tum Q quoad bi mensurata imaginem eandem dant: imago ista accipiatur pro resultato mensurationis ipsius K quoad $a+bi$.

Ex. gr. Si

$$K=c+di=P+Q,$$

facile prodit pro imagine æquali esse

$$P=ax-ayi \quad \text{et} \quad Q=bix-by,$$

atque

$$x=\frac{d}{b}+\frac{abc-a^2d}{a^2b-b^3}=\frac{ac-bd}{a^2-b^2}$$

et

$$y=\frac{bc-ad}{a^2-b^2}.$$

Ut vero sit

$$P:a=Q:bi,$$

accipiendum

$$P=ax+aiy$$

et

$$x=\frac{ac-bd}{a^2+b^2},\qquad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2},$$

et, ut antea,

$$Q=bix-by;$$

eritque

$$\frac{P}{a}=x+yi=\frac{Q}{bi}=\frac{P+Q}{a+bi}$$

et

$$a(x+yi)+bi(x+yi)=P+Q=K,$$

atque imago mensurationis ipsius K quoad $a+bi$ eadem erit cum imagine mensurationis primariæ ipsius $x+yi$ cum restrictione pag. 545 determinata.

I.

PRIMÆ LINEÆ THEORIÆ COMBINATIONUM.

De combinationum ex n rebus iuxta certum numerum m, adeoque amborum, ternorum &, nec non numero permutationum, diotum pag. 159 est.

§. 1.

Numerus *omnium combinationum* ex n rebus, id est summa *unorum*, *amborum*, *ternorum* & . . . usque ad n-tum inclusive, est 2^n-1.

Nam summa ista est

$$n+\frac{n.(n-1)}{2}+\ldots+\frac{n.(n-1)\ \ldots\ 2.1}{1.2\ \ldots\ (n-1).n}=2^n-1\,;$$

quia

$$(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+\frac{n.(n-1)\ \ldots\ 2.1}{1.2\ \ldots\ (n-1).n}.$$

§. 2.

Variatio vocatur, si una litera pluries occurrat, *permutatio* vero, si res eædem alio ordine se excipiant.

Variationis leges variæ dari possunt. Ex. gr. ut inter m literas, e certis n literis acceptas, plane certa poni possit certo numero, determinatum quendam haud superante, et alia alio . . . Ita lex esse potest, ut quævis poni possit etiam m-ies; ita lex esse potest, ut inter m literas semper occurrat aliqua n-ies, aliqua q-ies, aliqua r-ies, et ita porro. Vocatur imago m, 1, 2, 3, ... literarum m-io, *Unio*, *Binio*, *Ternio* &; quæri semper potest pro lege data quænam m-iones dentur; et in summa quotnam uniones, biniones, terniones & sint. Præterea postulatur etiam, ut tam combinationes sine variatione et permutatione construantur claro ordine, quam permutationes; nec non combinationes, admissa et variatione iuxta certam legem, tam exclusa permutatione, quam admissa hac quoque.

§. 3.

Permutationes construi possunt: prius rem primam *a* ponendo, dein rem nova *b*, prius loco primo, dein secundo; atque idem cum re nova *c*, et tum cum *d*, et quavis nova re suscipiendo; ut ponatur hæc prius loco primo, dein secundo, et ita porro usque ad finem, in quavis permutatione, quæ antea prodiit. Ita in *primo ordine*, qui e duorum rerum permutationibus constat, si accipiatur ex. gr. secunda; et in *secundo ordine* in quo iam tres sunt, quæ e dicta secunda fiunt, accipiatur earum prima; et in *tertio ordine* ubi iam quatuor sunt, quarta accipiatur istarum, quæ e proxime dicta prima fiunt, et ita porro: habetur per numeros 2, 1, 4 permutatio determinata ex. gr. *cbad* esset talis pro literis *a*, *b*, *c*, *d*.

Possent etiam permutationes ita construi: ut res numeris denotentur, ex. gr. 1, 2, 3, 4: et iidem numeri decadice ita scribantur, ut nullus valor emaneat, qui iisdem numeris exprimi potest, totidem nimirum locis, atque nullo numero bis occurrente; præterea autem valores semper crescant, ut nullus iam descriptus sit ullo sequentium maior.

Ex. gr.

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2
.	.	.	.

Patet prodire omnes quibus 1 præest; ita prodire quibus 2 præest, et ita porro; omnes enim valores quibus 1 præest cum iisdem numeris, et alio ordine, sunt diversi, et quorumvis eorum datur minimus.

§. 4.

Si quæratur quænam m-iones ex n accipi possint, admissis permutationibus et variationibus ita ut eadem litera, numero quovis, certum m haud superante occurrere queat: responsio facillima est; numerus m-ionum est 1 cum m cifris, valore quem hoc in n-dica numerandi ratione habet. Sit ex. gr. $n=10$, et sit $m=3$, erit 1000 (valore decadico) numerus m-ionum quæsitus. Descriptis nempe supra lineam horizontalem superiorem (in schemate sequenti) numeris 0, 1, 2, . . . ; præponatur quævis, nempe quodvis ipsorum 0, 1, . . ., 9 a 0 incipiendo inclusive, cuivis unioni a 0 incipiendo; donec prodeant sequentes lineæ horizontales usque ad lineam * inclusive; dein iterum quævis unio a 0 incipiendo item inclusive præponatur cuivis binioni, eo ordine, uti prodierunt; et ita porro semper iis, quæ postremo prodierunt, præpositis omnibus unionibus; iterum ordine præponantur omnes uniones a 0 (inclusive) incipiendo, donec omnes m-iones prodierint.

Ex. gr.

	0	1	2	. . .		9
	00	01	02	. . .		09
	10	11	12	. . .		19
	20	21	22	. . .		29
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
*	90	91	92	. . .		99
	000	001	002	. . .		009
	010	011	012	. . .		019
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Patet quamvis m-ionem talem, quæ non cum cifra incipit, prodire. Sit enim quævis eiusmodi m-io, illa numerum aliquem denotabit; demonstratum vero est, in numeratione, modo relato numerum quemvis denotari posse; itaque nisi adesset inter illas m-iones quæ prodierunt, esse deberet aut supra aut infra; neutrum fieri potest. Nam 1 quoque cum $m-1$ locis plus denotat numero pauciorum locorum, etsi ubique 9 sit; ita 1 quoque etiam cum m cifris plus denotabit data m-ione, etsi in hac ubique 9 sit. Sunt præterea quævis m-iones non cum cifra incipientes inæquales. Itaque de iis tantum m-ionibus quæritur adhuc, quæ cum cifra incipiunt; si una tantum cifra sit in initio, hæc alicui $(m-1)$-ioni præposita est per legem dictam; si duæ, tum eadem lege anteposita erit cifra alicui $(m-2)$-ioni, et nunc huic $(m-1)$-ioni item alia præponitur; patetque si plures fuerint. Itaque cum idem, quod de m verum est, valeat de $m-1, m-2, \ldots$, prodibunt omnes uniones, biniones, ..., m-iones. Sunt vero uniones numero n, biniones sunt $n.n$, quia singula n signa præponuntur singulis omnibus n signis; terniones sunt n^3, quia singulis binionibus præponuntur singula n signa. Itaque prodeunt m-iones numero n^m, nempe plane numero illo, qui per 1 cum m cifris in n-dica numerandi ratione denotatur. Prodeunt autem omnes simul uniones biniones, terniones, ... et m-iones inclusive, in summa (pag. 151)

$$n^m + n^{m-1} \ldots + n^1 = \frac{n^{m+1}-n}{n-1}.$$

Exemplo sint *voces*, et *syllogismi* modi, quoad propositiones.

Hoc pacto 24 literis voces 8 literarum prodeunt 24^8; 3 literarum 24, omnia vero summando a 8 usque ad 1, prodit

$$24^8 + 24^7 + \ldots + 24^1 = (24^9 - 24) : 23.$$

Ita *syllogismi*, quoad *propositionis*, *modi* sunt 1000, *valore* quem in quaternaria numeratione habet; quia terniones accipiuntur ex quatuor rebus.

Sic et in propositionibus termini permutantur, permutatione in propositione maiori facta manentibus ceteris, per 2 multiplicatur numerus, minor etiam multiplicat per 2, conclusio quoque. Itaque prodit $4^3.2.2.2$, quia quævis permutatio terminorum maioris per 2 permutationes minoris duas gignit, et quævis harum item duas, permutatione terminorum conclusionis. Plurimæ tamen e rationibus logicis reiiciuntur. (Vide pag. 18).

Describuntur vero 4^3 modi ordine facillime: si *propositio universaliter affirmans* dicatur 0, *universaliter negans* dicatur 1, *particulariter affirmans* dicatur 2, et *particulariter negans* dicatur 3; atque lege quaternariæ numerationis describantur omnes numeri, donec omnes termini ordine prodeant iuxta (pag. 558).

§. 5.

Si quæratur *numerus m-borum sine permutatione, sed admissa variatione* ita, ut in quovis *m*-bo aliqua litera occurrat ex. gr. 3-ies (sed quævis), alia ex. gr. 2-ies &, aliæ semel; possunt quilibet sumi pro numeris istis, qui *exponentes variationis* dicuntur. Ex. gr. forma *aaabbcd* erit sensu hoc eadem cum $c^3a^1d^2b^1$; patetque heic quæri:

1. numerum combinationum literarum, quæ *elementa* dicuntur;

2. in quavis combinatione, exponentes quoties migrare, seu permutari queant: atque numerum combinationum elementorum per numerum permutationum exponentium multiplicari. Si ex. gr. 7 res sint: erunt pro magine dicta, combinationes numero

$$\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4},$$

et hoc multiplicari per

$$\frac{1.2.3.4.}{1.2}$$

debet; quia exponentes variationis numero 4 sunt, adeoque numerus permutationum eorum esset 1.2.3.4, si diversi essent; sed quum duo sint æquales, imaginum pars dimidia alteri æqualis erit; quapropter per 2 dividendum est.

§. 6.

Si quæratur ex *aaaa bbb cc def quot diversae imagines accipi queant, ita ut nulla litera pluries occurrat, quam in proposita*; possit vero una quoque litera sola esse; ex. gr. *a* non pluries quam ter, sed etiam semel occurrere queat. Id est quot factores diversos habet factum e literis factores primos denotantibus?

Prima litera dat 4, nempe *aaaa aaa aa a*
Secunda litera dat 3, nempe *bbb bb b*
Tertia litera dat 2, nempe *cc c*

litera quævis enim tot imagines dat, quoties in primitiva adest; eritque imaginum e literis pluries occurrentibus hoc modo factarum omnium summa $=4+3+2$. Si porro combinetur quævis imago lineæ cuiusvis cum quavis imagine cuiusvis lineæ inferioris: orientur imagines novæ numero $4.3+4.2+3.2$; porro si combinentur singulæ imagines lineæ cuiusvis ita cum singulis linearum inferiorum, ut in quavis nova, cuius pars e linearum aliqua est, imago aliqua linearum inferiorum *plurium* adsit: fient novæ imagines pro hoc casu numero 4.3.2. Itaque prodierunt hucusque imagines numero

$$4+3+2+(4.3+4.2+3.2)+4.3.2=4(1+2+3+2.3+3)(1+2)+2$$

$=59$ pro hoc casu.

Præterea literarum, quæ nonnisi semel occurrunt in imagine primitiva, computetur numerus combinationum omnium ab uno incipiendo; et hic multiplicetur per summam omnium imaginum quæ prodierunt; quia quævis combinationum dictarum cum quavis imaginum dictarum combinari potest; atque demum numero huic addatur numerus combinationum dictarum, necnon summa omnium imaginum superius creatarum. Itaque quum (pag. 556) numerus combinationum omnium sit 2^3-1, est totalis summa $=(2^3-1).59+59+2^3-1$; et tot sunt factores diversi, inter quos adest et ipsum factum, sed unitas non annumerata est, exprimiturque idem etiam per $(2^3-1)(59+1)+59$.

§. 7.

Combinationes construuntur ex elementis a, b, c, d, e sic.

Nunquam itur retro, sed semper antrorsum proceditur; e quavis linea horizontali ad inferius sequentem, in linea ipsa autam semper ad dextram itur; cuivis imagini autem illa litera postponitur, quæ imaginis postremam in linea suprema excipit.

Prius construuntur *ambo*; cuivis *elemento* id est literæ in linea suprema, postponendo quamvis eo ordine, quo sequuntur; donec ad ultimam deveniatur, quæ nullam post se habet et iam combinata cum omnibus anterioribus est.

Dein construuntur *terno*; cuivis *ambo* postponendo singulas supremæ lineæ literas, quæ postremam imaginis excipiunt, donec ad tale *ambo* deventum fuerit, cuius literam postremam nulla excipit.

Tum *quaterno* construuntur, &, uti schema ostendit.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
ambo	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	
		bc	*bd*	*be*	
			cd	*ce*	
				de	
terno		*abc*	*abd*	*abe*	
			acd	*ace*	
				ade	
			bcd	*bce*	
				bde	
				cde	
quaterno			*abcd*	*abce*	
				⋮	

In genere si omnia $(m-1)$-bo prodierint, hæc combinantur omnia cum literis sequentibus, nempe litera semper illa postposita, quæ post postremam sequitur. Patet operatione semper antrorsum procedente, cum quavis litera quæ nondum adest, fieri combinationem, nec eam cum tali litera fieri quæ iam adest.

§. 8.

Combinationes admissa variatione sine permutatione fieri possunt ex n rebus in summa, connumeratis *unionibus*, *binionibus*, & usque ad m-iones inclusive, numero

$$\frac{(n+1).(n+2)\dots(n+m)}{1.2\dots m} - 1.$$

Fiat enim schema sequens:

Uniones sive elementa	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	Numerus imaginum
Biniones	*aa*	*ab*	*ac*	*ad*	*ae*	5 præest *a*
		bb	*bc*	*bd*	*be*	4 præest *b*
			cc	*cd*	*ce*	3 præest *c*
				dd	*de*	2 præest *d*
					ee	1 præest *e*
Terniones	*aaa*	*aab*	*aac*	*aad*	*aae*	
		abb	*abc*	*abd*	*abe*	præest *a*
			acc	*acd*	*ace*	V = 1+2+3+4+5
				add	*ade*	
					aee	
		bbb	*bbc*	*bbd*	*bbe*	
			bcc	*bcd*	*bce*	præest *b*
				bdd	*bde*	IV = 1+2+3+4
					bee	
			ccc	*ccd*	*cce*	præest *c*
				cdd	*cde*	III = 1+2+3
					cee	
				ddd	*dde*	præest *d*
					dee	II = 1+2
					eee	I = 1 præest *e*

Præponitur prius *a* cuivis ipsorum *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, et hoc dat lineam primam cui præest *a*; tum præponitur *b* cuivis ipsorum *b*, *c*, *d*, *e*, et prodit linea sequens, cui præest *b*; et tum præponitur *c* cuivis ipsorum *c*, *d*, *e*, proditque linea sequens, cui præest *c*; et ita porro usquequo prodeat *ee* ultima litera ultimæ præposita.

Tum *a*, *b*, *c*, *d*, *e* literæ seriei supremæ, a prima incipiendo inclusive, anteponuntur ordine singulis binionibus, quæ prodierunt; a prima binione incipiendo, usque ad ultimam *ee* inclusive; nempe generaliter quodvis elementum a primo incipiendo inclusive anteponitur singulis omnibus $(m-1)$-ionibus, quæ prodeunt; eodem ordine quo prodierunt, sed ab illa $(m-1)$-ione incipiendo, quæ cum litera præponendæ æquali incipit, usque ad ultimam $(m-1)$-ionem inclusive, et hoc pacto prodibunt m-iones.

In *binionibus* patet, quamvis literam cum quavis combinari, præterea quamvis etiam cum se ipsa; in *ternionibus* autem quamvis literam poni ter, sed una tantum vice, et quamvis bis positam cum quavis combinari, et adesse præterea omnes combinationes.

Atque in genere de $(m-1)$-ione facile patet ad m-ionem: nam in prima linea ubi elementum, ex. gr. a prius anteponitur, est

$$a^{m-1},\ a^{m-2}b,\ a^{m-2}c,\ \ldots$$

postea sequitur

$$a^{m-3},\ a^{m-4},\ \ldots$$

exponente usque ad o decrescente; nempe in eorum quibus a præest. lineis sequentibus præpositum est a^{m-3} omnibus binionibus, quas literæ post a sequentes habent; deinde sequitur a^{m-4} cum omnibus ternionibus literarum post a sequentium, et ita porro; nempe ut post $a^{m-\mu}$ cum omnibus $(\mu-1)$-ionibus, sequatur $a^{m-\mu-1}$ cum omnibus $(\mu-2)$-ionibus (literarum post a sequentium) usquequo exponens ipsius a fiat $=1$; tum vero sequuntur omnes $(m-1)$-iones, prius illæ quibus b præest tum illæ quibus c præest, . . .

Idem de litera b pro iis quibus b præest, et idem de iis quibus c præest &, valere inductio docet: hinc autem ut ex $(m-1)$-ionibus prodeant m-iones, modo dicto anteponitur a a prima incipiendo inclusive omnibus, et quævis sequens litera a primo eorum quibus illa præest, anteponitur tam ipsi primo, quam omnibus $(m-1)$-ionibus illum excipientibus; fietque in linea prima a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-1}c$, . . .; id est primo imago illa, in qua a occurrit m-ies, tum illæ in quibus $(m-1)$-ies occurrit a cum quavis literarum sequentium, adeoque cum omnibus earum; dein a^{m-3} cum omnibus binionibus sequentium, demum a^1 cum omnibus $(m-1)$-ionibus ceterarum. Itaque quævis m-io, in qua adest a, prodibit. Idem de quavis alia litera valet: ex. gr. si idem cum litera b suscipiatur, prodit quævis m-io, in qua a non adest; quæ antea iam prodierant quoque omnes, itaque haud amplius regrediendum sed antrorsum eundum est.

Numerus autem imaginum prodit ita. Uniones sunt, quot elementa; biniones sunt

$$1+2+3+4+5;$$

terniones sunt (pag. 563):

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V},$$

id est

$$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5);$$

quaterniones

$$\mathrm{I}+(\mathrm{I}+\mathrm{II})+(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III})+(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV})+(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}),$$

et ita porro: nam a porro præpositum omnibus, gignit imagines numero

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V},$$

b vero

$$\mathrm{IV}+\mathrm{III}+\mathrm{II}+\mathrm{I};$$

c autem

$$\mathrm{III}+\mathrm{II}+\mathrm{I};$$

d tantum

$$\mathrm{II}+\mathrm{I},$$

ultima e autem unicam dat; patetque esse series arithmeticas a serie 1, 2, 3, 4, 5 semper ad uno altiorem ordinem progredientes; nempe numerus binionum quibus a præest est 5, quibus b præest 4, quibus c, 3 &; numerus ternionum quibus a præest est V, quibus b est IV, et ita porro: ita numerus quaternionum quibus a præest, est

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V};$$

quibus b est

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}$$

et ita porro. Itaque si in $(m-1)$-ione dicatur numerus eorem, quibus a præest, A, quibus b præest, B, et ita porro; patet in m-ione esse numerum quibus a præest,

$$A+B+C+\cdots+1,$$

numerum quibus b præest, esse

$$B+C+\cdots+1,$$

et ita porro; adeoque numerum m ionum ex 5 elementis esse terminum quintum seriei arithmeticæ m-ti ordinis; ita demum patet, cum ipsi 5 quivis numerus n substitui possit, numerum quæsitum esse n-tum terminum seriei arithmeticæ ordinis m-ti, id est, ut statim patebit,

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}.$$

Summa vero omnium simul, unionum, binionum, ... usque ad m-iones inclusive, prodit ita.

Unionum numerus est n, binionum

$$\frac{n\,.\,(n+1)}{1\,.\,2}$$

adeoque unionum et binionum summa

$$=n+1-1+\frac{n\,.\,(n+1)}{2}=\frac{2(n+1)}{2}-1+\frac{n\,.\,(n+1)}{2}=\frac{(n+1)\,.\,(n+2)}{2}-1.$$

Et si vera sit expressio

$$\frac{(n+1)\,.\,(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\ldots(m-1)}-1$$

ab unionibus usque ad $(m-1)$-iones inclusive omnes complectens; addaturque numerus m-ionum nempe

$$\frac{n\,.\,(n+1)\,.\,(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}.$$

priori: patet prioris tam numeratorem quam denominatorem per m multiplicari debere, ut addi queant; et tum denominator communis erit $1.2\ldots m$; in numeratoris duobus terminis vero erit factor communis

$$(n+1)\,.\,(n+2)\ldots(n+m-1),$$

et summa factorum sociorum erit $n+m$; unde patet summam quæsitam esse

$$\frac{(n+1).(n+2)\ldots(n+m-1).(n+m)}{1\ .\ 2\ \ldots\ (m-1).m}-1;$$

Si $n=2$; tum fit

$$\frac{(n+1).(n+2)\ldots(n+m)}{1\ .\ 2\ \ldots\ m}-1=\frac{(m+1)\,(m+2)}{1\ .\ 2}-1;$$

nam

$$\frac{(2+1)\,(2+2)\ldots(2+m)}{1\ .\ 2\ \ldots\ m}=\frac{(m+2)\,(m+1).m\ldots(2+2)\,(2+1)}{1\ .\ 2\ .\ (2+1)\ (2+2)\ \ldots\ m}=$$

$$=\frac{(m+2)\,(m+1)}{1\ .\ 2}.$$

Quod vero terminus n-tus seriei arithmeticæ (seriei 1, 2, 3, . . . superstructæ) ordinis m-ti sit

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ m}$$

patet sic.

		1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Scribantur 1, 2, 3, . . . ab 1 incipiendo verticaliter deorsum, et post quemvis n scribantur in lineam horizontalem coefficientes binomii ad n elevati, a primo nempe 1 incipiendo: erit (pag. 156) quivis, summa numeri in eadem columna verticali proxime superioris et hunc horizontaliter proxime præcedentis. Atque si secundæ columnæ verticali superscribatur 1, et cuivis columnæ verticali sequenti superscribatur uno maior in linea horizontali suprema: fiet quævis columna verticalis, cui numerus m superscriptus erit, series arithmetica ordinis m-ti, in linea horizontali post m, cum 1 incipiens. Nam in columna, cui 2 superscribitur, est

$1=0+1$, nempe supra 1 stat 0, et antea 1 est, porro $3=1+2$, nempe supra 1 stat 1, et præcedens est 2; sed idem 3 est $=$ seriei verticalis præcedentis terminis $1,2$; porro $6=$ illi 3 quod supra 6 est (quod summæ terminorum 1, 2 columnæ præcedentis erat), addito præcedenti 3; itaque terminus tertius columnæ 2, nempe $6=$ terminis 1, 2, 3 columnæ præcedentis tribus prioribus. Si vero hoc usque ad μ-tum terminum deorsum eundo valeat, valebit de $(\mu+1)$-to quoque; nam $(\mu+1)$-tus erit μ-to cum præcedenti æqualis; sed μ-tus$=1+2+3+\cdots+\mu$, præcedens autem est $\mu+1$.

Et pariter e quavis columna verticali ν-ta formatur sequens. Nam quævis cum 1 incipit, nempe quævis linea horizontalis semper uno termino ulterius terminatur in ultimo coefficiente binomiali (nempe 1); atque sub 1 columnæ dictæ ν cadit coefficiens penultimus binomii ad $\nu+1$ elevati, adeoque numerus $\nu+1$, quia is secundo coefficienti æqualis est (pag. 157); ita sub 1 columnæ sequentis cui $\nu+1$ suprascribitur, cadit $\nu+2$; est igitur secundus terminus huius columnæ $=$ suprastanti cum præcedenti $\nu+1$, atque simul æqualis summæ duorum terminorum columnæ præcedentis ν est. Unde item si usque ad μ-tum columnæ $\nu+1$ terminum, quivis summa terminorum numero μ columnæ præcedentis fuerit, idem de $(\mu+1)$-to quoque valere ut prius patet.

Est vero cuiusvis columnæ, cui m superscribitur, terminus n-tus, in linea horizontali post numerum $(n+m-1)$ terminus a primo 1 inclusive $(m+1)$-tus. Est igitur binomii ad $n+m-1$ elevati coefficiens m-tus, si primus 1 haud numeretur. Eritque

$$\frac{(n+m-1)(n+m-2)\ .\ .\ .\ (n+m-m)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m}=\frac{n(n+1)\ .\ .\ .\ (n+m-1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m}$$

K.

RATIO REGULARUM IN TABULIS TRIGONOMETRICIS LOGARITHMICISQUE DATARUM.

I. Denotetur sinus arcus non quoad longitudinem sed quoad gradus expressi, si radius 1 sit, per sin., si radius tabularis $r=1$ cum 10 cifris sit, per Sin., pariterque cos. a, Cos. a distinguantur. Sitque a arcus sive o sive alius positivus quadrante minor, et s denotet 10″. Levi computo patet, pro $s=\frac{1}{k}$ et radio 1, esse $k>20\,000$.

II. Cuiusvis arcus sinum cosinumque, adeoque quamvis functionem trigonometricam pro radio 1, per series (pag. 196) terminis sufficientibus sufficienter evolutis, quantumvis exiguo errore computari posse patet; atque

$$r \sin. a = \text{Sin}. a.$$

III. *Crescente a decrescit $\sin.(a+s)-\sin. a$.*

Est enim

$$\sin.(a+s)=\sin. a \cos. s+\cos. a \sin. s\,;$$

unde subtrahendo sin. a fit

$$\sin. a(\cos. s-1)+\cos. a \sin. s.$$

Est autem cos. $s<1$, adeoque sin. a (cos. $s-1$) negativum est, decrescitque crescente a; nam sin. a crescit manente factore altero. Alter terminus, nempe cos. a sin. s, positivus est et decrescit crescente a; unde patet. Atque per r multiplicando idem pro radio tabulari liquet.

IV. *Incrementa ipsius Sin. a* (quantumvis sit a) *incrementis ipsius a ipsum s haud excedentibus proportionalia sunt cum errore minore quam 13.*

Sit enim $n>1$; erit (per præcedentia)

$$\mathrm{Sin.}(a+s)-\mathrm{Sin.}\,a=\mathrm{Sin.}\,a(\cos.s-1)+\mathrm{Cos.}\,a\sin.s,$$

quod dicatur q; et

$$\mathrm{Sin.}\left(a+\frac{s}{n}\right)-\mathrm{Sin.}\,a=\mathrm{Sin.}\,a\left(\cos.\frac{s}{n}-1\right)+\mathrm{Cos.}\,a\sin.\frac{s}{n},$$

quod sit f.

Est autem

$$s:\frac{s}{n}=n:1=q:\frac{q}{n}.$$

Itaque nonnisi in

$$\frac{q}{n}-f=\frac{q-nf}{n}$$

inquirendum est.

Est

$$q-nf=\mathrm{Sin.}\,a\left(\cos.s-1-n\cos.\frac{s}{n}+n\right)+\mathrm{Cos.}\,a\left(\sin.s-n\sin.\frac{s}{n}\right).$$

Est (pag. 196)

$$\cos.s-1=-\frac{s^2}{2}+\frac{s^4}{2.3.4}-\frac{s^6}{2.3\ldots6}+\cdots$$

$$n-n\cos.\frac{s}{n}=\frac{s^2}{2n}-\frac{s^4}{2.3.4n^3}+\frac{s^6}{2.3\ldots6n^5}-\cdots$$

quorum summa

$$\frac{s^2(1-n)}{2n}+\frac{s^4(n^3-1)}{2.3.4n^3}+\frac{s^6(1-n^5)}{2.3\ldots6n^5}+\cdots$$

Pariter

$$\sin.s-n\sin.\frac{s}{n}=\frac{s^3(1-n^2)}{2.3n^2}+\frac{s^5(n^4-1)}{2.3\ldots5n^4}+\frac{s^7(1-n^6)}{2.3\ldots7n^6}+\cdots$$

Statim patebit, in utroque terminum primum excedere summam totam; atque hinc etsi pro Sin. a, Cos. a radius r poneretur (quod nonnisi pro solo Cos. a, dum $a=0$, fieri potest) fieret series prior $<\frac{r}{2k^2}$, et posterior $<\frac{r}{6k^3}$. Unde calculo inito patet.

Nempe terminus quivis maior sequente est. Nam quilibet duo proximi exprimuntur per

$$\frac{s^t(n^{t-1}-1)}{2.3\ldots tn^{t-1}}\quad\text{et}\quad\frac{s^{t+2}(n^{t+1}-1)}{2.3\ldots(t+2)n^{t+1}},$$

si et negativi positive accipiantur. Fietque utrinque multiplicando

$$(t+1)(t+2)k^2(n^{t+1}-n^2) \quad \text{et} \quad n^{t+1}-1.$$

Designetur factor ipsius $n^{t+1}-n^2$ per α; erit

$$\alpha(n^{t+1}-n^2) > n^{t+1}-1.$$

Est enim pro $t=3$

$$\alpha > \frac{n^{t+1}-1}{n^{t+1}-n^2}.$$

Nam sit

$$n^2 = 1+\omega;$$

erit

$$\frac{n^4-1}{n^4-n^2} = \frac{2+\omega}{1+\omega} < 2,$$

α vero > 2. Pro $t=2$ autem erit

$$\alpha = 3.4k^2,$$

et pro

$$n = 1+\lambda,$$

nisi $\lambda > \frac{1}{\alpha-1}$ fuerit, erit

$$\alpha > \frac{n^3-1}{n^3-n^2} = \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n^3-n^2}.$$

Nam ut sit

$$\alpha = \frac{n}{n-1} = \frac{1+\lambda}{\lambda},$$

esse debet

$$\lambda = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Si vero λ maius fiat, $\frac{1+\lambda}{\lambda}$ minus fiet; nam si $d > c$, est (pro d, c, e positivis)

$$\frac{d+e}{c+e} < \frac{d}{c}.$$

Si autem de quopiam t valet, valet et de sequente: nam si

$$\alpha(n^{t+1}-n^2)$$

per

$$\beta = \frac{t+3}{t+1}$$

multiplicetur, prodibit α pro t unitate aucto, eritque per $\beta > 1$ etiam prius α intelligendo

$$\alpha\beta(n^{t+1} - n^2) > n^{t+1} - 1.$$

Si iam n^{t+1} utrinque per n multiplicetur, fiet

$$\alpha\beta(n^{t+1} - n^2) + \alpha\beta n^{t+1}(n-1), \quad \text{et} \quad n^{t+1} - 1 + n^{t+1}(n-1);$$

patetque prius posteriore maius esse, quum ex hypothesi sit

$$\alpha\beta(n^{t+1} - n^2) > n^{t+1} - 1, \quad \text{et} \quad \alpha\beta > 1.$$

Si vero signa terminorum alternent, et quilibet maius sequente sit: terminus primus totam summam superat, quod per lineam intuitui exhiberi potest.

$$\mathfrak{A}\ \frac{a\quad b\quad c\quad d\quad e}{\mathfrak{C}\quad \mathfrak{E}\quad \mathfrak{f}\quad \mathfrak{d}}\ \mathfrak{b}$$

Sint termini tales, lineæ $\mathfrak{A}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}\mathfrak{f}$, ..., moveatur nempe punctum ex $\mathfrak{A}$ ad dextram usque $\mathfrak{b}$, et inde ad lævam usque in $\mathfrak{C}$, inde ad dextram usque in $\mathfrak{d}$, &; nimirum litera magna a sequente minuscula excepta, denotet viam ad dextram, minuscula a magna excepta viam ad lævam. Erit summa

$$\mathfrak{A}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}\mathfrak{d} - \mathfrak{d}\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\mathfrak{f} - \cdots =$$
$$= (a+b+c+d+e) - (e+d+c+b) + (b+c+d) - (d+c) + b + \cdots$$
$$= a+b+c+\cdots$$

patetque quamvis ulteriorem magnam literam ulterius ad dextram, et quamvis ulteriorem parvam ulterius ad lævam, limitemque inter literarum magnarum ab $\mathfrak{A}$ ad dextram progredientium seriem, et seriem parvarum a $\mathfrak{b}$ ad lævam progredientem cadere.

Hinc et seriem utramque negativam esse, et $\frac{q}{n} - f$ pro valore dicto ipsius n minus negativum ipso -13 esse patet.

V. *Cur in tabulis pro arcubus maioribus incrementa logarithmorum sint, uti arcus incrementa (intra certos fines), patet sic:*

Incrementa logarithmi (pag. 517—8) *pro eodem incremento numerico* q *decrescunt crescente* p.

Nam incrementum logarithmicum semper est $\lessdot \frac{4q}{2p+q}$; quia quilibet terminus ibidem est maius summa sequentium; nempe (pag. 187) post $\frac{u^\mu}{u}$ summa sequentium est $\lessdot \frac{u^{\mu+2}}{(\mu+2)(1-u^2)}$, et reductis ad denominatorem eundem, ac per u^μ divisis fit

$$\mu+2-(\mu+2)u^2 > \mu u^2,$$

si u^2 non $> \frac{1}{2}$; nam $u<1$, adeoque et membrum ad lævam positivum est, additoque positivo æquali et utrinque dividendo fit $\frac{(\mu+1)+1}{2(\mu+1)}$ ad lævam, et u^2 ad dextram; atque manifesto pro u^2 non $> \frac{1}{2}$, membrum lævum maius dextro est.

Denotetur 100 000 per b, atque pro a non $\lessdot 1°9'$, Sin. a dicatur pb; erit

$$pb > 200\ 000\ 000;$$

et incrementum ipsius Sin. a pro incremento s ipsius a sit q; est hoc pro $a=0$ quoque <5, postea decrescens crescente a (pag. 569). Excedit $pb+f$ ipsum $pb+\frac{q}{n}$ quantitate <13; si igitur

$$\log.\left(pb+\frac{q}{n}\right)$$

dicatur L, erit (pag. 517)

$$\log.\left(pb+\frac{q}{n}+13\right)=L+\frac{2.13}{2\left(pb+\frac{q}{n}\right)+13},$$

ubi differentiam perexiguam esse levi computo liquet.

Itaque si pro $pb+f$ accipiatur $pb+\frac{q}{n}$, et incrementis logarithmicis ipsius pb illis, quæ respondent incrementis numericis q et $\frac{q}{n}$ nonnisi termini primi considerentur (iuxta pag. 517) incrementum logarithmicum ipsius pb pro incremento numerico q ipsius pb erit

$$\frac{2q}{2pb+q},$$

quod per n divisum

$$= \frac{2q}{n(2pb+q)};$$

pro incremento numerico $\frac{q}{n}$ autem erit

$$\frac{2q}{n(2pb+q:n)};$$

cuius differentia a $\frac{2q}{n(2pb+q)}$ est $< \frac{q^2(n-1)}{2n^2p^2b^2}$;

quod per modulum systematis multiplicatum ultra bis minor fiet, adeoque fiet

$$< \frac{q^2(n-1)}{4n^2p^2b^2}.$$

Erat $n > 1$; sit $n = \frac{M}{m}$ (pro integris M, m); facile patet esse

$$\frac{n-1}{n^2} = \frac{Mm - m^2}{M^2},$$

atque (pag. 345) maximum eius valorem fieri pro $m = \frac{M}{2}$, nempe pro $n = 2$ esse $\frac{1}{4}$. Est vero pro isto valore quoque differentia dicta

$$< \frac{25}{16p^2b^2},$$

quod ipsa p e tabulis eximendo computari potest. Iam pro $a = 1°9'$ est $p > 2000$, adeoque differentia < 1 diviso per 1 cum 16 cifris; pro aliis valoribus ipsius n, quam valoribus ipsius a autem maioribus adhuc minor fit.

Eodem modo patet, etiamsi s unum minutum enotet, atque a excedat $6°19'$, errorem exiguum esse.

VI. *In pluribus tabulis usque 1° 19' arcus per 10" crescunt, et in prima columna ad laevam arcus in secundis expressus est.*

Nam si N sit multiplum decadis secundorum, et v sit <10, (ex. gr. pro $N+v=206$ est $N=200$ et $v=6$), erit cum errore exiguo

$$N : N+v = \sin. N'' : \sin. (N+v)'' ;$$

adeoque

$$\log. \sin. (N+v)'' = \log. \sin. N'' + \log. (N+v) - \log. N.$$

Namque

$$\mathrm{Sin.}\, N'' : \mathrm{Sin.}\, (N+v)'' = \sin. N'' : \sin. (N+v)'',$$

essetque

$$N : N+v = \sin. N'' : \sin. N'' \cdot \frac{N+v}{N} \cdot$$

Itaque nonnisi in

$$\sin. N'' \cdot \frac{N+v}{N} - \sin. (N+v)''$$

inquirendum est.

Erat pro radio 1, $$1'' = \frac{1}{10k}$$

adeoque

$$N'' = \frac{N}{10k} ;$$

atque (ut supra)

$$\frac{N+v}{N} \sin. \frac{N}{10k} = \frac{N+v}{10k} - \frac{N^2(N+v)}{2.3(10k)^3} + \frac{N^4(N+v)}{2.3\ldots5(10k)^5} - \cdots$$

Ita

$$\sin. \frac{N+v}{10k} = \frac{N+v}{10k} - \frac{(N+v)^3}{2.3(10k)^3} + \frac{(N+v)^5}{2.3\ldots5(10k)^5} - \cdots$$

Et differentia est

$$= \frac{(N+v)((N+v)^2 - N^2)}{2.3(10k)^3} + \frac{(N+v)(N^4 - (N+v)^4)}{2.3\ldots5(10k)^5} + \cdots$$

Formetur hinc series nova; nimirum reddantur positivi etiam termini negativi, et tum pro termino secundo ponatur

$$\frac{(N+v)^5}{2.3\ldots5(10k)^5},$$

et ab hoc ipso incipiendo multiplicetur quivis per

$$\frac{(N+v)^2}{6.7(10k)^2},$$

ut fiat series sequens:

$$\frac{(N+v)^3-(N+v)N^2}{2.3(10k)^3}+\frac{(N+v)^5}{2.3\ldots5(10k)^5}+\frac{(N+v)^7}{2.3\ldots7(10k)^7}+\cdots$$

ubi terminus primus primo æqualis, sed quilibet t-tus maior t-to prioris est. Fietque summa huius seriei (propter exponentem <1)

$$=\frac{(N+v)^3-N^2(N+v)}{2.3(10k)^3}+\frac{7(N+v)^5}{4.5(10k)^3(6.7(10k)^2-(N+v)^2)}$$

quod et pro maximo valore ipsius N calculo inito perexiguum esse patebit, etsi per r multiplicetur, ut differentia pro radio tabulari prodeat.

VII. Si arcus $\rightarrow 0$, tum sinus quoque $\rightarrow 0$, et logarithmus sinus $\rightarrow -\infty$ (pag. 188); sed tum alioquin etiam numeri sinus arcuum adeo exiguorum exprimentes minores sunt, adeoque logarithmi magis differunt, quam proportio supra dicta valeat.

VIII. Potest logarithmus cuiusvis quantitatis immediate per seriem (pag. 178) in quotvis notis decimalibus computari, sufficientibus terminis sufficienter evolutis. Si vero logarithmus unus reperiatur, per formulam (pag. 517) semper ulterius progredi licet; et si $p>100000$ et log. p e tabulis datus sit, nonnisi 6 termini satis evolvendi erunt, ut logarithmus in notis 59 prodeat; nam $(2p)^{11}$ in denominatore ad minimum erit $2^{11}.10^{11.5}$, et 2^{11} constat ex 4 notis.

E logarithmo numerus pariter absque tabulis quoque per seriem (pag. 187) prodit. Si b ut logarithmus naturalis respondeat numero N, erit

$$N=e^b=1+b+\frac{b^2}{2}+\cdots$$

Si vero β sit log. N' quoad basim 10, sitque $e^c=10$, erit

$$10^\beta=e^{c\beta}=N',$$

et

$$N'=1+c\beta+\frac{c^2\beta^2}{2}+\cdots$$

sive si modulus μ dicatur, erit (pag. 163)

$$\mu = \frac{1}{c} = \frac{1}{\log.\,\text{nat.}\, 10},$$

et

$$N' = 1 + \frac{\beta}{\mu} + \frac{\beta^2}{\mu^2} + \cdots$$

Sed ope tabularum, in quibus logarithmi in pluribus notis computati exstant, præstatur idem facilius per differentias primas secundasque.

Sit series quæcunque		$(U)_0,\ (U)_1,\ (U)_2,\ \ldots$ (primitiva dicta),
series differentiarum	primarum	$(D)_0,\ (D)_1,\ (D)_2,\ \ldots$
" "	secundarum	$(D^2)_0,\ (D^2)_1,\ (D^2)_2,\ \ldots$
" "	tertiarum	$(D^3)_0,\ (D^3)_1,\ (D^3)_2,\ \ldots$

. . . .

Nempe cuiusvis lineæ (excepta suprema) terminus quivis t denotet differentiam termini T in linea proxima superiore supra stantis, a termino T' ad dextram horizontaliter sequente; sit ex. gr.

$$(D^m)_\mu = (D^{m-1})_{\mu+1} - (D^{m-1})_\mu .$$

Unde etiam $T' = T + t$; nempe quivis terminus est summa præcedentis et hunc verticaliter deorsum excipientis.

Erit terminus n-tus seriei primitivæ

$$(U)_0 + n\,(D)_0 + \frac{n\,(n-1)}{2}\,(D^2)_0 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2 \cdot 3}\,(D^3)_0 + \cdots$$

ubi coefficientes binomiales esse patet. Pro valoribus 2, 3 ipsius n enim ab inductione patet; nam

$$(U)_2 = (U)_1 + (D)_1 = (U)_0 + (D)_0 + (D)_0 + (D^2)_0 = (U)_0 + 2(D)_0 + (D^2)_0$$

ita

$$\begin{aligned}(U)_3 = (U)_2 + (D)_2 &= (U)_0 + 2\,(D)_0 + (D^2)_0 + (D)_0 + 2\,(D^2)_0 + (D^3)_0 \\ &= (U)_0 + 3\,(D)_0 + 3\,(D^2)_0 + (D^3)_0 .\end{aligned}$$

Si vero de $n-1$ valet, valet de n quoque. Erit enim

$$(U)_n = (U)_{n-1} + (D)_{n-1} =$$

$$= (U)_0 + (n-1)\ (D)_0 + \frac{(n-1)\ (n+2)}{2} (D^2)_0 + \cdots + \frac{(n-1) \ldots (n-m)}{1 \cdot 2 \ldots m} (D^m)_0 + \cdots$$

$$+ (D)_0 + (n-1)\ (D^2)_0 + \frac{(n-1)\ (n-2)}{2} (D^3)_0 + \cdots +$$

$$+ \frac{(n-1)\ .\ .\ .\ (n-(m-1))}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ (m-1)} (D^m)_0 + \cdots$$

quia si suprema deleta sequens pro primitiva reputetur, idem valebit.

Patet autem coefficientium ipsius $(D^m)_0$ summam esse

$$\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-(m-1))}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ m},$$

nempe idem, quod formula pro $(U)_n$ dat. Fient autem termini omnes 0 ab $(n+1)$-to incipiendo, primo haud annumerato; quia tum factor $n-n$ ubique manebit.

Sit iam series

$$(U)_0,\ (u)_1,\ (u)_2,\ .\ .\ .\ .\ ,$$

cuius terminus n-tus sit

$$(U)_0 + \frac{n}{m} (D)_0 + \frac{n(n-m)}{2m^2} (D^2)_0 + \frac{n(n-m)\ (n-2m)}{2 \cdot 3m^3} (D^3)_0 + \cdots$$

ubi m integrum constantem, n autem numerum termini, primo haud annumerato, denotent. Erunt termini sequentes

$$(u)_1 = (U)_0 + \frac{1}{m} (D)_0 + \frac{1}{2\ .\ m} \cdot \frac{1-m}{m} (D^2)_0 + \frac{1}{2 \cdot 3m} \cdot \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-2m}{m} (D^3)_0 + \cdots$$

$$(u)_2 = (U)_0 + \frac{2}{m} (D)_0 + \frac{2}{2\ .\ m} \cdot \frac{2-m}{m} (D^2)_0 + \frac{2}{2 \cdot 3m} \cdot \frac{2-m}{m} \cdot \frac{2-2m}{m} (D^3)_0 + \cdots$$

. . . .

$$(u)_{tm} = (U)_0 + \frac{tm}{m} (D)_0 + \frac{tm}{2m} \cdot \frac{tm-m}{m} (D^2)_0 +$$

$$+ \frac{tm}{2 \cdot 3m} \cdot \frac{tm-m}{m} \cdot \frac{tm-2m}{m} (D^3)_0 + \cdots$$

$$= (U)_0 + t(D)_0 + \frac{t(t-1)}{2} (D^2)_0 + \frac{t(t-1)\ (t-2)}{2 \cdot 3} (D^3)_0 + \cdots$$

$$= (U)_t\ ;$$

nempe seriei

$$(U)_0,\ (u)_1,\ (u)_2,\ \ldots$$

terminus tm-tus est seriei

$$(U)_0,\ (U)_1,\ (U)_2,\ \ldots$$

terminus t-tus; dicitur terminus v-tus seriei prioris posterioris $\frac{v}{m}$-tus; patetque v-tum prioris prodire, si in termino generali posterioris pro n ponatur $\frac{v}{m}$; et quum a quovis termino posterioris usque ad sequentem numero $m-1$ novi termini sint, dicuntur hi *interpolati*, et terminus generalis dictus est formula n-ti interpolati; cuius frequens applicatio fit.

Facile autem ex hoc regularum, quæ tam pro logarithmo in pluribus notis, aut conversim numero accuratius, quam functionum trigonometricarum logarithmis, aut conversim ipsis functionibus reperiundis, in tabulis maioribus, ubi omnia pluribus notis expressa exstant, datarum ratio intelligitur. Nempe ubi logarithmus nonnisi 7 notis decimalibus exprimitur, differentiæ secundæ simulac numerus (pag. 518.) N per comma resectus prope 10 000 est, fierent zero.

SCHOLION I. *Si*

$$(U)_0+(U)_1+\cdots+(U)_{n-1}$$

denotetur per $(S)_n$ *erit*

$$(S)_n=n(U)_0+\frac{n(n-1)}{2}(D)_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}(D^2)_0+\cdots$$

Est enim

$$(S)_n=(S)_{n-1}+(U)_{n-1};$$

itaque si de $(S)_{n-1}$ valeat, substituendo valorem ipsius $(U)_{n-1}$ patet u ante. Valet autem ab inductione pro valoribus 2, 3 ipsius n.

Si iam pro serie

$$(U)_0,\ (u)_1,\ (u)_2,\ \ldots$$

eædem denotationes fiant, nonnisi d pro D et s pro S ponendo: manifesto erit

$$(u)_n=(U)_0+n(d)_0+\frac{n(n-1)}{2}(d^2)_0+\cdots$$

$$=(U)_0+\frac{n}{m}(D)_0+\frac{n}{2m}\cdot\frac{n-m}{m}(D^2)_0+\cdots;$$

73*

atque

$$(s)_n = n\,(U)_0 + \frac{n\,(n-1)}{2}\,(d)_0 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}\,(d^2)_0 + \cdots .$$

SCHOLION 2. Est quoque series dicta quævis *series arithmetica ordinis* μ-ti, si series differentiarum μ-ta sit, terminis æqualibus gaudens; ubi vero hoc cum errore exiguo fuerit, pro tali in tantum reputari poterit. Atque hinc

SCHOLION 3. *Exempla quaedam.*

I. *Sit quaerendus ex. gr. log.* 143 957 432; et 143 957 dicatur N (pag. 519), et 0,432 sit f subeatque vicem ipsius $(n:m)$ pag. 578; sitque

$$(U)_0 = \log.\,143\ 957, \quad \text{et} \quad (U)_1 = \log.\,143\ 958;$$

atque adsint logarithmi ipsorum N, $N+1$, $N+2$, $N+3$ in pluribus notis decimalibus, et adsint $(D)_0$, $(D^2)_0$, $(D^3)_0$. Prodibit, terminis inter log. N et log. $(N+1)$ quasi numero $m-1=999$ interpolatis $(U)_0$, 432 per formulam; nempe $n=432$, et $m=1000$. Siquidem libuerit, ad $(D)_0$ vel $(D^2)_0$ subsistere licebit, nisi maior accuratio desideretur. Notandumque est, differentiam, ubi negativa est, ita uti est, accipiendam esse. Si autem pro $N+f$ prodierit, facile (ut pag. 519) pro numero dato, mutata characteristica liquet.

II. Converti etiam potest. *Sit numerus* ex. gr. ipsi 1 023 578, omissa characteristica, soli mantissæ *respondens quaerendus.* Sit

$$10\,235 = 10\,235v = Qv.$$

Numeri ipsis

$$Qv,\ (Q+1)v,\ (Q+2)v,\ (Q+3)v$$

respondentes sint

$$N,\ N',\ N'';$$

adsintque hi in pluribus notis, simul cum horum differentiis numericis

$$(D)_0,\ (D^2)_0,\ (D^3)_0.$$

Erit mantissa data

$$= 10235v + 0{\cdot}78v.$$

Itaque si ponatur

$$(U)_0 = N, \quad \text{et} \quad (U)_1 = N',$$

terminis inter $(U)_0$ et $(U)_1$ quasi interpolatis, 78-tus per formulam prodibit.

III. Sit p multiplum decadis secundorum, et v numerus secundorum ipso 10″ minor et

$$\log.\sin.p = (U)_0, \ \log.\sin.(p+v) = (U)_1.$$

Interpolatis quasi 9 terminis, prodit v-tus per formulam, si adfuerint in tabulis $(D)_0$, $(D^2)_0$, . . .

L.

CRITERIA CONVERGENTIÆ SERIERUM.

I. Criterium convergentiæ nec

$$n U_n \leftharpoonup 0,$$

neque ab *Auctore celebri* allatum (pag. 177)

$$\frac{U_n \,.\, U_{n+1}}{U_n - U_{n+1}} \leftharpoonup 0$$

generale est; nam series, cuius terminus generalis $1 : n \log . n$ est, contra utrumque divergit, ut infra patebit.

II. Generale est a Maclaurino datum; nempe si pro $n = 1 + x$, et termino n-to æquali y, area curvæ pro x tendenti ad infinitum limite finito gaudet, convergit series, si vero area tendit ad infinitum, divergit; nimirum si termini rectangulis exprimantur, quorum bases sint unitates ab $x = 0$ se invicem excipientes, altitudines autem ordinatæ ad initia unitatum fuerint, summa seriei est maior quam area, sed excessus termino primo minor est, adeoque quæstio ad $\int y\dot{x}$ reducitur.

III. Errat autem ex hoc fonte derivando pronuntiens Montucla, quod si a, b, c generaliter tres terminos se invicem excipientes denotent et

$$\frac{a(b-c)}{a-b} > c$$

fuerit, converget series, si non, diverget.

Nam tum pro a, b, c scribendo

$$\frac{1}{\omega}, \quad \frac{1}{\omega'}, \quad \frac{1}{\omega''}$$

si

$$\omega'' - \omega' > \omega' - \omega$$

fiet

$$\frac{\omega''-\omega'}{\omega'-\omega}=\frac{(\omega''-\omega')\,\omega\omega'}{(\omega'-\omega)\,\omega\omega'}>1,$$

itaque

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{(\omega''-\omega')\,\omega\omega'}{(\omega'-\omega)\,\omega'\omega''}>\frac{1}{\omega''}$$

idest

$$\frac{a(b-c)}{a-b}>c.$$

Atque si terminus generalis fuerit

$$\frac{1}{\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2^2}+\cdots+\frac{n-(n-1)}{2^{n-1}}},$$

et tres termini se invicem excipientes habeant denominatores

$$\begin{aligned}
&\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}},\\
&\frac{n}{2}+\frac{n-1}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n},\\
&\frac{n+1}{2}+\frac{n}{2^2}+\cdots+\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{2}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}},
\end{aligned}$$

erit

$$\omega'-\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n},$$

et

$$\omega''-\omega'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}},$$

atque posterius excedit termino ultimo ipsum $\omega'-\omega$, quamvis series divergat. Namque incrementum denominatoris est <1 et decrescit, quamvis si constans 1 esset quoque, uti pro termino generali $\frac{1}{n}$, divergat.

IV. Si terminus generalis ad $\frac{1}{nn^h}$ reducatur: pro $h=0$ fit terminus generalis $\frac{1}{n}$ et si h negativum fuerit adhuc magis diverget series; si vero $h \smile 0$, tum n^h aut tendit ad infinitum aut non; in casu posteriore divergit series, nam si convergit tum $nU_n \smile 0$; quæstio igitur de altero casu erit. At sit prius $h>b$, constantem positivum denotante b: tum convergit series.

Nam sit

$$n=1+x$$

et

$$y=(1+x)^{-(1+b)}$$

et area sit $A(x)$; *differentiale* est

$$y\dot{x}=(1+x)^{-(1+b)}\dot{x}$$

cuius *integrale*

$$B(x)=-\frac{1}{b}(1+x)^{-b},$$

itaque

$$A(x)-A(0)=B(x)-B(0)$$

et quia $A(0)=0$, fit

$$A(x)=\frac{1}{b}-\frac{1}{b(1+x)^{b}},$$

quod $\sim\frac{1}{b}$, si $x\sim\infty$.

Abscissa in ordinata ad initium ipsius x accipi potest, si a fine deorsum moti puncti via u dicatur, quo pacto

$$y=1-u,$$

et ordinata e fine ipsius u usque ad curvam est

$$x=(1-u)^{-\frac{1}{1+b}}-1;$$

nam ad finem huius x erat

$$y=(1+x)^{-(1+b)}=1-u;$$

itaque

$$1+x=(1-u)^{-\frac{1}{1+b}},\ \text{et}\ x=(1-u)^{-\frac{1}{1+b}}-1.$$

Sit $A(u)$ area; *differentiale* est

$$x\dot{u}=(1-u)^{-\frac{1}{1+b}}\dot{u}-\dot{u},$$

cuius *integrale*

$$B(u)=-\frac{1+b}{b}(1-u)^{\frac{b}{1+b}}-u.$$

Itaque

$$A(u)-A(0)=B(u)-B(0),$$

et cum $A(0)=0$, fit

$$A(u)=-u+\frac{1+b}{b}-\frac{1+b}{b}(1-u)^{\frac{b}{1+b}},$$

quod pro $u=1$ fit $\frac{1}{b}$, ut antea.

V. Prouti vero convergit vel divergit series, cuius terminus generalis est $\frac{1}{n^a}$, pro eodem a simul convergit vel divergit series, cuius terminus generalis est $\frac{1}{nl^a}$ vel $\frac{1}{nl\,l_1^a}$ aut generaliter $\frac{1}{nl\,l_1\ldots l_t^a}$ pro

$$l=\log.n,\ \text{ac}\ l_1=\log.l\quad \text{et}\quad l_t=\log.l_{t-1}$$

atque pro l_t non <1.

Nam sit, logarithmos perinde quoad basim 10 intelligendo, et l logarithmum numeri præcedentis denotante,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{10\,l^a}+\frac{1}{11\,l^a}+\cdots\\+&\frac{1}{100\,l^a}+\frac{1}{101\,l^a}+\cdots\\+&\frac{1}{1000\,l^a}+\frac{1}{1001\,l^a}+\cdots\end{aligned}$$

Numerus terminorum a primo usque ad illum, ubi 100, est 90, et inde usque 1000 est 900, et ita porro; sitque priorum summa α, sequentium β, et ita porro; atque ubivis multiplicetur primus, utpote quovis sequentium maior, per numerum terminorum; fiet

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}\quad 90&>\alpha,\\ \frac{1}{100.2^a}\quad 900&>\beta,\\ \frac{1}{1000.3^a}\,9000&>\gamma,\\ \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

adeoque

$$9\left(1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\cdots\right)>\alpha+\beta+\gamma+\cdots$$

Si igitur series inclusa convergit, convergit et proposita. Si vero pro iprmo ubique ultimus, utpote quovis priorum minor, multiplicetur: fiet

$$\frac{90}{100 \,.\, 2^a} + \frac{900}{1000 \,.\, 3^a} + \cdots$$

id est

$$\frac{9}{10}\left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots\right) < \alpha + \beta + \cdots$$

Si igitur series inclusa divergit, et proposita divergit.

Atque si

$$\frac{1}{C_p l\, l_1 \ldots l_{p-2}^a} + \frac{1}{(C_p+1) l\, l_1 \ldots l_{p-2}^a} + \frac{1}{(C_p+2) l\, l_1 \ldots l_{p-2}^a} + \cdots$$

dicatur A, et

$$\frac{1}{C_{p+1} l\, l_1 \ldots l_{p-1}^a} + \frac{1}{(C_{p+1}+1) l\, l_1 \ldots l_{p-1}^a} + \frac{1}{(C_{p+1}+2) l\, l_1 \ldots l_{p-1}^a} +$$

dicatur B; prouti A convergit aut divergit, B quoque converget vel diverget. Nempe C_0 denotet tantum quam 0, et C_m tantum quam 1 postscriptis C_{m-1} cifris: quo pacto C_1 est æquale 1, C_2 æquale 1 cum C_1 [idest 1] cifra, C_3 æquale 1 cum C_2 [idest 10] cifris et ita porro. Patet esse

$$C_{p+1} = 10^{C_p} \quad \text{adeoque} \quad C_p = \log. C_{p+1}.$$

Assertum patet sic. In serie B ipsi C_{p+1} semper 1 addendo, aliquando prodit

$$C_{p+1} \,.\, 10, \quad \text{tum} \quad C_{p+1} \,.\, 100, \quad \text{dein} \quad C_{p+1} \,.\, 1000, \quad \&c.$$

Est vero numerus terminorum a primo usque $C_{p+1} \,.\, 10$

$$C_{p+1} \,.\, 10 - C_{p+1},$$

inde usque $C_{p+1} \,.\, 100$

$$C_{p+1} \,.\, 100 - C_{p+1} \,.\, 10,$$

et ita porro. Multiplicetur et hic prius ubique primus per numerum terminorum, sitque terminorum priorum summa k, sequentium k' &c.; fiet

$$\frac{C_{p+1}.10-C_{p+1}}{C_{p+1}l\,l_1\ldots l_{p-1}^a} \quad \text{id est} \quad \frac{9}{C_p l\; l_1\ldots l_{p-2}^a}>k,$$

nempe post C_{p+1} sequitur C_p in denominatore; porro

$$\frac{C_{p+1}.100-C_{p+1}.10}{(C_{p+1}.10)l\; l_1\ldots l_{p-1}^a} \quad \text{id est} \quad \frac{9}{(C_p+1)l\; l_1\ldots l_{p-2}^a}>k',$$

nempe $\log.(C_{p+1}.10)=1+C_p$, &; quo continuato fiet

$$9\left(\frac{1}{C_p l\; l_1\ldots l_{p-2}^a}+\frac{1}{(C_p+1)l\; l_1\ldots l_{p-2}^a}+\cdots\right)>k+k'+\cdots$$

Si igitur inclusa series A converget, converget et B.

Si vero in B ubique ultimus multiplicetur per numerum terminorum, fiet

$$\frac{C_{p+1}.10-C_{p+1}}{(C_{p+1}.10)l\; l_1\ldots l_{p-1}^a} \quad \text{id est} \quad \frac{9}{10(C_p+1)l\; l_1\ldots l_{p-2}^a}<k,$$

nempe C_p+1 est $\log.(C_{p+1}.10)$; pariter

$$\frac{C_{p+1}.100-C_{p+1}.10}{(C_{p+1}.100)l\; l_1\ldots l_{p-2}^a} \quad \text{id est} \quad \frac{9}{10(C_p+2)l\; l_1\ldots l_{p-2}^a}<k',$$

nempe $C_p+2=\log.(C_{p+1}.100)$; quo continuato fit

$$\frac{9}{10}\left(\frac{1}{(C_p+1)l\; l_1\ldots l_{p-2}^a}+\frac{1}{(C_p+2)l\; l_1\ldots l_{p-2}^a}+\cdots\right)<k+k'+\cdots$$

Itaque si A divergit et B divergit.

Consequenter quum de $p=2$ demonstratum sit, semper uno altius assurgere fas est.

VI. Hinc autem criterium sæpe expediens est sequens: quod *si detur tale r, quod tendit ad infinitum, convergit series, et si post certum terminum non fuerit $r>1$, divergit.*

Nempe termino generali ad $\frac{1}{n.n^h}$ reducto sit

$$n^h = l^r$$

$\left(\text{nimirum} \quad r = \frac{hl}{l_1}\right)$; et si $r > 1$, sit

$$l^r = l\, l_1^{r'}$$

et si $r' > 1$, sit

$$l_1^{r'} = l_1 l_2^{r''}$$

et ita porro; fiet

$$n^h = l^r = l\, l_1^{r'} = l\, l_1 l_2^{r''} = \cdots$$

et hinc

$$l_t^{r_t} = \frac{n^h}{l\, l_1 l_2 \ldots l_{t-1}}$$

itaque

$$r_t = \frac{hl - (l_1 + l_2 + \cdots + l_t)}{l_{t+1}} = \frac{(r_{t-1} - 1)\, l_t}{l_{t+1}},$$

si et r_{t-1}, ut antea r_t, exprimatur.

Si igitur $r_{t-1} - 1$ non $\backsim 0$, $r_t \backsim \infty$; atque tum $r_{t-1} > 1 +$ constans; adeoque series convergit.

Datur autem pro quovis t et a finito tale h, ut $r_t = a$ sit, et quodvis r antea sit $>$ et $\backsim 1$, nempe pro

$$h = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_t + a l_{t+1}}{l}$$

fit hoc; ex. gr.

$$r_3 = \frac{l_4}{l_4} + \frac{l_5 + l_6 + \cdots + a l_{t+1}}{l_4}$$

est $= 1 +$ tali, quod $\backsim 0$. Si vero l_p in expressione hac ipsius h desit, $r_{p-1} \backsim 0$, et divergit series; ex. gr. si in exemplo allato defuerit l_4 in numeratore, $r_3 \backsim 0$.

VII. Exponente, per quam U_{n-1} multiplicatur, ut U_n prodeat, $\frac{n-m}{n}$ posito, fit

$$m = n - n \frac{U_n}{U_{n-1}},$$

quod si

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{n-1}{n}$$

fuerit, fit $=1$, datque terminum generalem $\frac{1}{n}$. Si vero

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} < \frac{n-1}{n}$$

tum minus subtrahitur et $m > 1$ fit.

Si m non > 1, divergit series; at pro m unitate maiore sed limite 1 gaudenti, potest convergens, potest divergens esse, quamvis $n^h \frown \infty$. Nempe si

$$h = \frac{l_1}{l}$$

tum $r = 1$; si

$$h = \frac{1}{\sqrt{l}},$$

tum

$$r = \sqrt{l} : l_1 \frown \infty$$

adeoque prius divergit, posterius convergit.

Patet quod $h \frown 0$, et $n^h \frown \infty$; sed quod m unitate maius limite 1 gaudet, sic patet. $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ in priore est

$$= \frac{n-1}{n} \left((n-1)^{\frac{L_1}{L}} : n^{\frac{l_1}{l}}\right),$$

cuius partis parenthesi maiori inclusæ logarithmus, si per L intelligatur log. $(n-1)$ et log. L per L_1 est $L_1 - l_1$, quod negativum est, adeoque per quod $\frac{n-1}{n}$ multiplicatur, <1 est, itaque $m > 1$. Quod autem $m \frown 1$, inde constat, quod si

$$m = \frac{1}{2}(2 + v)$$

ponatur, pro v positivo et unitate non maiore, patebit in sequentibus, quod si v non $\frown 0$, tum constante maius maneat h et non $\frown 0$.

VIII. Si $m > 1$ et non $\frown 1$, tum h constante maius est seriesque convergit. Nimirum exponens seriei fiet

$$\frac{n-m}{n}=\frac{2(n-1)-v}{2n}$$

et pro termino primo $=1$, erit n-tus

$$\frac{2-v}{4}\,\frac{4-v}{6}\cdots\frac{2(n-1)-v}{2n}=\frac{1}{nn^h};$$

atque

$$n^h=\frac{2}{2-v}\,\frac{4}{4-v}\cdots\frac{2(n-1)}{2(n-1)-v}$$

$$=\left(1+\frac{v}{2-v}\right)\left(1+\frac{v}{4-v}\right)\cdots\left(1+\frac{v}{2(n-1)-v}\right).$$

Et hinc

$$n^h>\left(1+\frac{v}{2}\right)\left(1+\frac{v}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{v}{2(n-1)}\right),$$

adeoque

$$h\log.n>\log.\left(1+\frac{v}{2}\right)+\log.\left(1+\frac{v}{4}\right)+\cdots+\log.\left(1+\frac{v}{2(n-1)}\right);$$

itaque h maius est membro dextro per log. n diviso: dicatur σ dividendus, divisor fit, pro $n=1+x$, area curvæ notæ pro

$$y=(1+x)^{-1};$$

estque [II et IV] area ista

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\varrho,\quad \text{ubi}\quad \varrho<1,$$

atque hinc

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}=\frac{1}{2}(\log.n+\varrho).$$

Est autem per (pag. 160)

$$\begin{aligned}\sigma=v&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}\right)\\ -\frac{v^2}{2}&\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2(n-1))^2}\right)\\ +\frac{v^3}{3}&\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{(2(n-1))^3}\right)\\ -&\ \ldots\end{aligned}$$

Ubi si series suprema s dicatur, $\sigma>\frac{3}{4}s$ erit. Nam cuiusvis seriei verticalis termini fuerint

$$a,\ -b,\ c,\ -d,\ \ldots$$

summa est $> a-b$ et $< a$; nam ipsi $a-b$ accedit $c-d, \ldots$ et

$$a-b+c-d+\cdots = a-(b-c)-(d-e)-\cdots$$

ubi $b > c$ &. Estque generaliter

$$a = \frac{v}{2(n-1)} \quad \text{et} \quad b = \frac{v^2}{2 \cdot 4(n-1)^2}$$

adeoque

$$a-b = \frac{4(n-1)v - v^2}{2 \cdot 4(n-1)^2} = \frac{v}{2(n-1)}\ \frac{4(n-1)-v}{4(n-1)} = a - \frac{av}{4(n-1)},$$

cuius valor minimus est pro maximo v et $n=2$, quo pacto summa erit $> \frac{3}{4}a$; itaque

$$\sigma > \frac{3}{4}s,$$

et consequenter

$$\sigma > \frac{3}{4}\ \frac{v}{2}(\log. n + \varrho),$$

atque h, quod $> \frac{\sigma}{\log. n}$ erat, est $> \frac{3v}{8}$.

Si igitur v non ~ 0, nec $h \sim 0$, itaqua series per IV convergit.

Potuisset quidem brevius quoque demonstrari.

M.

PRIMÆ LINEÆ CALCULI DIFFERENTIALIS ET INTEGRALIS BREVIUS ET CLARIUS TRACTATÆ.

Quum nulla repetitio inutilis sit, quæ saltem quorundam Tyronum captui accomodatior fieri queat, ideam calculi differentialis et integralis brevius evidentiusque referre licebit.

I. Variabilis x, a qua sive necessario sive certa suppositione dependent quotvis variabiles y, z, . . . dicatur *absoluta*, sintque eius valores γ et β (a o accepti, et sive ambo positive sive ambo negative imo et alter positive alter negative), denoteturque pro n integro positivo $\frac{\gamma}{n}$ per $\dot{x}$, sitque pro μ integro positivo vel negativo

$$\beta = \mu\dot{x} + \omega, \qquad [\omega = 0 \quad \text{vel} \quad \omega \lessdot \dot{x}],$$

ita ut $\mu\dot{x}$ et ω aut utrumque positivum aut utrumque negativum sit, aut et $\beta = 0$ sit.

II. Sit functio $K(x)$, dicaturque *ex ea* vel *eius derivata series* sequens:

$$K(n\dot{x}) - K((n-1)\dot{x}), K((n-1)\dot{x}) - K((n-2)\dot{x}), \ldots, K((\mu+1)\dot{x}) - K(\mu\dot{x}+\omega),$$

sitque m nomen generale ipsorum

$$n, \ n-1, \ n-2, \ . \ . \ ., \ \mu+2, \ \mu+1.$$

Esset (inde a o) seriei dictæ terminus m-tus

$$K(m\dot{x}) - K((m-1)\dot{x}),$$

si pro $m-1=\mu$ addatur ω ipsi $(m-1)\dot{x}$. Denotetur iste terminus m-tus per $k(m\dot{x})$. Eritque summa, terminis intermediis se mutuo destruentibus,

$$K(\gamma) - K(\beta)$$

pro valoribus dictis ipsius x. Denotetur summa hæc per K, nomenclatione ista in posterum quoque retenta.

Patet autem m etiam negativum esse posse, si ex. gr. $\mu+2=0$ fuerit.

Casus simplicissimus est, si $\beta=0$, et tum

$$K=K(\gamma)-K(0).$$

III. Functio, e qua derivatæ seriei summa a magnitudine ipsius n haud dependet, dicatur *absoluta* sive ab n *independens.*

Ex. gr. sit $\beta=0$; et sit

$$C(x)=x;$$

erit

$$c(m\dot{x})=m\dot{x}-(m-1)\dot{x}=\dot{x}$$

et

$$C=n\dot{x}-0=x.$$

Ita pro

$$A(x)=x^2$$

erit

$$a(m\dot{x})=2m\dot{x}-\dot{x}^2,$$

et

$$A=x^2.$$

Pro

$$U(x)=x^2+x\dot{x}=(n+1)n\dot{x}^2$$

est

$$u(m\dot{x})=2m\dot{x}^2$$

atque

$$U=x^2+x\dot{x},$$

quod ab n dependere, uti C et A haud dependere manifestum est.

IV. Si iam valor ipsius n a certo incipiendo semper porro bis augeatur, atque prius pro valore eius primo construantur series derivatæ functionum certorum $A(x)$ et $B(x)$ ab n independentium, ac functionis cuiuspiam $U(x)$ eadem linea horizontali (serie ipsius $U(x)$ in medium, serie ipsius $A(x)$ ad dextram, serieque ipsius $B(x)$ ad lævam positis) atque pro valoribus sequentibus ipsius n construantur pariter series functionum $B(x)$, $U(x)$, $A(x)$, pro quovis n in eadem horizontali ita ut lineæ hac crescente n se invicem deorsum excipiant, et series $U(x)$ columnam mediam, series ipsius $A(x)$ dextram, series ipsius $B(x)$ lævam teneant, (ex. gr. sit primum $n=2$, postea sequentia erunt 4, 8, . . . , quæ incrementi ipsius n ratio et posthac servetur); sitque

$$\beta = \mu\dot{x} + \omega = \mu'\dot{x}' + \omega';$$

fiet

$$\begin{array}{l|l|l} B(2\dot{x})\cdots - B(\beta) & U(2\dot{x})\cdots - U(\beta) & A(2\dot{x})\cdots - A(\beta) \\ B(4\dot{x}')\cdots - B(\beta) & U(4\dot{x}')\cdots - U(\beta) & A(4\dot{x}')\cdots - A(\beta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

ubi pro quovis n quodvis $m\dot{x}$ pro sequente n mutatur in $2\ m\dot{x}'$, ω' vero (nisi $=0$ fiat) ipso $\dot{x}'$, idest dimidio prioris $\dot{x}$ minus evadet, et μ' ad summum $=2\mu+1$ erit, quia $\omega \lessdot 2\dot{x}'$ est, atque numerus terminorum duplicatur.

Scholion. *Manifesto autem quævis serierum horum terminis extremis gaudet, sed in nulla trium columnarum serialium dictarum series ultima datur; differt igitur series eiusmodi a serie vulgari infinita, quæ duobus terminis extremis haud gaudet.*

V. Sit iam $B(x)$ notum et quæratur $A(x)$, atque $u(m\dot{x})$ æquipolleat tam ipsi $a(m\dot{x})$ quam ipsi $b(m\dot{x})$, idest aut pro quovis n sit

$$u(m\dot{x}) = a(m\dot{x}) = b(m\dot{x})$$

pro quovis m (quo in casu erit $A=B=U$, nec U ab n dependet), aut pro quovis utvis magno N detur tale n, ut in eius linea horizontali, pro quovis valore ipsius m sit

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N}\, a(m\dot{x}) \quad \text{et} \quad u(m\dot{x}) - b(m\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N}\, b(m\dot{x});$$

saltem nonnisi illis $m\dot{x}$ exceptis, quæ in certis casibus in dato quopiam λ desinunt, siquidem tam illud λ quam partes ipsorum B, U, A huic λ appertinentes tendunt ad zero. Fiet tum, substituendo valores ipsius m (si ex. gr. pro dato N sufficiat $n=9$, sitque $\mu+1=5$),

$$u(9x) - a(9\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N} a(9\dot{x}) \quad \text{et} \quad u(9\dot{x}) - b(9\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N} b(9\dot{x})$$
$$u(8\dot{x}) - a(8\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N} a(8\dot{x}) \quad \text{et} \quad u(8\dot{x}) - b(8\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N} b(8\dot{x})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u(5\dot{x}) - a(5\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N} a(5\dot{x}) \quad \text{et} \quad u(5\dot{x}) - b(5\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N} b(5\dot{x})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Eritque manifesto summa columnæ verticalis prioris U, sequentis A, tertiæ $\frac{A}{N}$, quartæ U, quintæ B, ultimæ $\frac{B}{N}$ fietque

$$U - A \lessdot \frac{A}{N} \quad \text{et} \quad U - B \lessdot \frac{B}{N},$$

adeoque pro A et B omnino finitis $U \backsim A$ ac $U \backsim B$. Consequenter

$$A = B,$$

nempe

$$A(\gamma) - A(\beta) = B(\gamma) - B(\beta),$$

adeoque

$$A(\gamma) = B(\gamma) + A(\beta) - B(\beta).$$

Reperitur autem $A(\beta)$ modo sequente: si dicta et de valore h ipsius x plane ut de γ valeant, et constet $A(h) = a$ esse, erit

$$A(h) = a = B(h) + A(\beta) - B(\beta),$$

adeoque

$$A(\beta) = a - B(h) + B(\beta)$$

atque

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= B(\gamma) + a - B(h) + B(\beta) - B(\beta) \\ &= B(\gamma) + a - B(h). \end{aligned}$$

Quum igitur $B(\gamma)$ et $B(h)$ nota sint, $A(\gamma)$ innotescit. Scribitur autem

$$A(x) = B(x) + \text{constans},$$

quum $A(\beta) - B(\beta)$ de quovis valore ipsius x, de quo dicta valent, idem $a - B(h)$ sit.

Dicique potest $B(x)$ *functio summatrix* et $U(x)$ *functio mediatrix*.

VI. Si et variabiles y, z, ... certa lege cum quovis $m\dot{x}$ posita fuerint, cuiusvis illius y, quod cum aliquo $m\dot{x}$ ponitur differentia ab illo y, quod cum $(m-1)\dot{x}$ ponitur, designetur per $\dot{y}$; idem de z, ... intelligatur, atque $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, ... semper simultanea accipiantur. Potest illud y, quod cum $m\dot{x}$ ponitur, per $y(m\dot{x})$ denotari.

VII. Dicuntur $a(m\dot{x})$, $u(m\dot{x})$, $b(m\dot{x})$ id est

$$A(m\dot{x})-A\big((m-1)\dot{x}\big),\quad U\big((m\dot{x})-U\big((m-1)\dot{x}\big),\quad B(m\dot{x})-B\big((m-1)\dot{x}\big)$$

differentialia vera functionum $A(x)$, $U(x)$, $B(x)$. At si detur tale $u'(m\dot{x})$, quod ipsis $a(m\dot{x})$ et $b(m\dot{x})$ sensu dicto æquipolleat, atque ita expressum sit, ut si in eo ubique x pro $m\dot{x}$ (et si adfuerit, y pro $y(m\dot{x})$ &) ponatur, in nullo termino litera punctata per aliam punctatam multiplicata occurat: dicitur $u'(x)$ breviter *differentiale* tam ipsius $A(x)$ quam ipsius $B(x)$ atque $A(x)$ imo et $B(x)$ (quæ nonnisi constante differunt) dicitur *integrale* ipsius $u'(x)$. Omniaque hic a valore β ipsius x usque ad γ (iuxta dicta) intelligantur.

VIII. Aequipollent autem sensu dicto $a(m\dot{x})$, $u'(m\dot{x})$, $b(m\dot{x})$, si

$$\frac{u'(x)}{a(x)} \rightharpoondown 1 \quad \text{et} \quad \frac{u'(x)}{b(x)} \rightharpoondown 1.$$

Namque valores horum pro certis quibusvis valoribus ipsius x aut plurium variabilium, si adfuerint, ab n dependent, atque tendentia ad limitem 1 id significat, quod pro quovis utvis magno N detur tale n, ut sit

$$\frac{u'(x)}{a(x)} - 1 \lessdot \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \frac{u'(x)}{b(x)} - 1 \lessdot \frac{1}{N};$$

hinc autem fit

$$u'(x)-a(x) \lessdot \frac{1}{N}\, a(x) \quad \text{et} \quad u'(x)-b(x) \lessdot \frac{1}{N}\, b(x).$$

Atque iam moveatur punctum a o usque ad finem ipsius γ, item a o usque ad finem ipsius β (si hoc non sit $=0$), et quæratur ubique, quodnam n pro dato N satisfaciat illi x quod eousque determinatum est, respondebitur semper cum aliquo finito n. Unde manifesto dabitur numerus finitus quemvis dictorum finitorum superans; accipiatur tale n', quod hunc quoque superet et sit potentia binarii integra. Et manifesto, si γ per n' dividatur, ut sit $\dot{x}=\frac{\gamma}{n'}$, valebit hoc n' pro linea horizontali illa, in qua $n=n'$ fit, eritque idem n (pro dato N) pro omnibus m lineæ eiusdem tale, ut requiritur (in V).

Siquidem detur λ (sub V), exceptionem hanc in summis nihil inducere patet.

IX. Si

$$b(x)=(uv+pr+\cdots)+\omega,$$

ubi terminus quivis præter unum et ω, o denotare potest, atque

$$\frac{\omega}{uv+pr+\cdots}\frown 0,$$

tum cuicunque quantitatum in

$$uv+pr+\cdots$$

accurentium substituatur æquale aut tale (per pag. 93), ut *quotus* e substituto per id cui substituitur $\frown 1$, dum $n\frown\infty$, dicatur k id, quod post substitutiones dictas quotvis ex

$$uv+pr+\cdots$$

factum est; erit

$$\frac{k}{(uv+pr+\cdots)+\omega}\frown 1,$$

eritque k, si forma requisita gaudeat, differentiale ipsius $B(x)$.

Ex. gr. Si

$$B(x)=x^2,$$

erit

$$b(x)=2x\dot{x}-\dot{x}^2,$$

atque

$$\frac{-\dot{x}^2}{2x\dot{x}}\frown 0,$$

adeoque $2x\dot{x}$ differentiale est.

X. Pro $A(x)$ functio talis $U(x)$ ab n dependens quæritur, ut $U \frown A$, et $\frac{u(x)}{a(x)} \frown 1$.

Sæpe $A(x)$ nec in concreto (uti figura quæpiam) datur, et tum dari $A(x)$ demonstrandum est. Pro tali plurimisque casibus quæruntur duæ functiones finitæ $V(x)$ et $U(x)$ ab n dependentes, ut sit

$$V \gtrdot A \gtrdot U$$

et $V - U \frown 0$, dum $n \frown \infty$, adeoque $U \frown A$, (quo pacto et A per limitem datum sit); sitque

$$v(x) \gtrdot a(x) \gtrdot u(x)$$

et

$$\frac{v(x) - u(x)}{u(x)} \frown 0,$$

adeoque et

$$\frac{a(x) - u(x)}{a(x)} \frown 0.$$

Erit enim

$$\frac{u(x)}{a(x) - (a(x) - u(x))} = 1.$$

Consequenter

$$\frac{u(x)}{a(x)} \frown 1.$$

Scholion, in quo partim dicta illustrantur, partim methodi (pag. 208) idea exponitur, atque exemplis applicatio methodi utriusque ostenditur.

1. Accipiatur in postremum, nisi aliud monitum fuerit, $\beta = 0$ (pag. 592) vel $\gamma \gtrdot \beta$ et utrumque positive aut utrumque negative; atque si commensurabilia fuerint, sitque ex. gr. $\gamma = 9u$ et $\beta = 4u$, accipiatur primum $n = 9$ et sequentia n sint (pag. 594)

$$2 . 9, \quad 2 . 2 . 9, \quad 2 . 2 . 2 . 9, \ . \ . \ . \ ;$$

si vero incommensurabilia fuerint, poterunt pro n accipi

$$2, \quad 2 . 2, \quad 2 . 2 . 2, \ . \ . \ .$$

2. Patet *seriem ex* $A(x)$ *derivatam esse seriem incrementorum functionis* (a β usque ad γ) *ipsis* $\dot{x}$ *respondentium*, numerumque terminorum esse $n-\mu$ et $a(m\dot{x})$ incrementum m-to $\dot{x}$ respondens esse.

3. *Aequipollentia* termini $u(m\dot{x})$ seriei cuiuspiam S' cum termino generali $a(m\dot{x})$ seriei incrementorum ex $A(x)$ functione absoluta derivatæ S per

$$u(m\dot{x}) \stackrel{\circ}{=} a(m\dot{x})$$

designari potest, atque sine λ (pag. 594) quoque ope seriei sic definiri potest: si S et S' fuerint series terminorum numero æqualium ita, ut cuivis m-to $\dot{x}$ duo termini simultanei et cuivis alii alii respondeant, atque pro utvis magno N detur tale n, ut pro eodem n quivis termini $u(m\dot{x})$ et $a(m\dot{x})$ fuerint sibi invicem respondentes simultanei, sit aut

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) = 0,$$

aut

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) \lessdot \frac{1}{N} a(m\dot{x}),$$

saltem si non de omnibus valeat, exceptorum summa $\frown 0$, dum $n \frown \infty$: tum dicitur

$$u(m\dot{x}) \stackrel{\circ}{=} a(m\dot{x}).$$

Patetque esse aut $S = A$ aut $S' \frown A$; adeoque si et $B(x)$ functio absoluta adfuerit, atque

$$u(m\dot{x}) \stackrel{\circ}{=} b(m\dot{x}),$$

esse etiam aut $S' = B$ aut $S' \frown B$, consequenter esse $A = B$.

Unde etiam S' *series mediatrix*, et $u(m\dot{x})$ *terminus mediator* sive *sensu generaliore differentiale cuiusvis ipsorum* $A(x)$ et $B(x)$ sive alterutrius tantum, si sola consideretur, dici possunt.

4. Quamvis igitur expressio quævis termino generali seriei incrementorum functionis absolutæ æquipollens, sensu generali differentiale functionis illius, et hæc ipsa *integrale* illius dici possint: expressio tamen quam simplicissima quæritur, atque *differentiale* sensu stricto nonnisi

talis expressio dicitur, in cuius termino quovis unica litera punctata eaque in prima potentia est, et coefficiens eius pro quovis dato x functio absoluta est.

At vero expressio talis ita intelligenda est, ut omnes literæ valoribus simultaneis, quibus ad finem cuiusvis $m\dot{x}$ gaudent, accipiantur, punctata vero semper et alibi sit incrementum eius, quod litera illa sine puncto significat sub m-to $\dot{x}$ factum.

5. Per $a(x)$ autem intelligatur (pag. 596) $A(x)-A(x-\dot{x})$ ita, ut in hoc ipsi x quivis valor pro aliquo n sub formam $m\dot{x}$ cadens substitui possit; ita tamen ut quivis utvis crescente decrescenteve n constans maneat ipso m quoque eatenus mutato, atque x semper $m\dot{x}$ sit.

Si vero

$$A(x)=z$$

sit, patet z ipsi $m\dot{x}$ et $\dot{z}$ respondere m-to $\dot{x}$, atque esse

$$A(x-\dot{x})=z-\dot{z};$$

adeoque si ex. gr.

$$C(x)=z^2,$$

esse

$$c(x)=z^2-(z-\dot{z})^2.$$

Quodsi iam pro quovis dicto x (a β usque ad γ) sit

$$\frac{A(x)-A(x-\dot{x})}{\dot{x}} \eqsim D(x)$$

et $D(x)$ functio absoluta sit, semper finita nec 0, nonnisi ipsis x in certis punctis discretis desinentibus exceptis; erit

$$\frac{A(x)-A(x-x')}{\dot{x}D(x)} \eqsim 1$$

saltem præter puncta dicta; itaque per fluxum puncti quærendo (pag. 596) pro quovis tali x, quodnam n pro dato N satisfaciat, dabitur tale n pro quo eodem sit

$$\dot{x}D(m\dot{x})-a(m\dot{x})$$

aut $=0$ aut $\lesssim a(m\dot{x}):N$ (saltem præter dicta); adeoque $\dot{x}D(x)$ æquipollebit ipsi $a(m\dot{x})$ et differentiale erit, $D(x)$ autem derivata ipsius $A(x)$ dici potest quoad x, si $\dot{x}$ fuerit in denominatore; quod etiam omissum subintelligi potest at si non quoad variabilem absolutam fuerit, annotandum est.

Si vero derivata hæc *prima* dicatur, derivatæ k-tæ derivata $(k+1)$-ta audit et $A(x)$ functio primitiva k-ta derivatæ k-tæ dicitur per $\int^k$ præpositum aut si $k=1$ per $\int$, designata. Differentiale per $\mathfrak{d}$, derivata k-ta per ∂^k aut si $k=1$ per ∂, aut si quoad z sit per ${}^z\partial^k$ præpositum denotari potest; et si hoc$=q$ fuerit, $\int q$ integrale ipsius $q\dot{z}$ et ${}_z\int^k q$ functionem cuius derivata k-ta quoad z est q, denotare potest.

Differentialium altiorum apparatus derivatis altioribus superfluus fit.

Ut res clarior fiat, denotet v velocitatem, s spatium, w vim continuo agentem (pag. 230, 248) singula ad finem temporis t variabilis absolutæ intelligendo. Designeturque cuiusvis variabilium valor, qui ad finem alicuius t aut $t-\dot{t}$, vel $m\dot{t}$ aut $(m-1)\dot{t}$ est, præponendo literam germanicam nominis eiusdem maiorem, litera punctata autem minori denotetur.

Si iam dicatur

$$v\dot{t}=\mathfrak{d}s \doteq \dot{s},$$

sive

$$v=\partial s,$$

intelligatur

$$\dot{t}\mathfrak{V}(m\dot{t}) \doteq \mathfrak{s}(m\dot{t})$$

et pro quovis dato t esse

$$\frac{\mathfrak{S}(t)-\mathfrak{S}(t-\dot{t})}{\dot{t}} \sim \mathfrak{V}(t).$$

Hinc etiam s talis functio est, cuius derivata v est, idest

$$\int v = s + \text{constans},$$

quæ constans tamen et 0 esse potest.

6. Nempe functiones absolutæ nonnisi constante c differentes differentialibus æquipollentibus, et differentialia æquipollentia integralibus nonnisi constante differentibus gaudent.

Nam

$$A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) = A(m\dot{x}) + c - (A((m-1)\dot{x}) + c).$$

Quoad alterum autem sit

$$q(x) \doteq a(x) \quad \text{et} \quad \int q(x) = C(x);$$

erit

$$C(x) - C(\beta) = A(x) - A(\beta),$$

adeoque

$$A(x) - C(x) = A(\beta) - C(\beta),$$

quod constans est.

7. Si $A(\beta)$ immediate datum fuerit (pag. 595), et

$$A(\beta) - B(\beta) = \text{constans}$$

datum erit. Si vero (ibidem) pro $h = 0$ sit $A(h) = a$, valeantque dicta a valore 0 ipsius x usque ad β, erit

$$A(\beta) - A(0) = B(\beta) - B(0),$$

atque hinc

$$A(\beta) - B(\beta) = a - B(h).$$

8. Methodus altera eodem redit, breviterque in sequentibus consistit.

a. Si pro quovis valore determinato et non 0 ipsius x sit

$$\frac{A(x+i) - A(x)}{i} \backsim D(x),$$

dum $i \backsim 0$, denotante $D(x)$ functionem absolutam valoris finiti et non 0 (saltem si x in certo puncto aut certorum discretorum aliquo terminatur): dici potest $D(x)$ *limes augmentalis.* Facileque patet hoc idem esse, quod derivata superius erat; nempe $\dot{x}$ pro i ponendo

$$A(x+\dot{x}) - A(x) \quad \text{et} \quad A(x) - A(x-\dot{x})$$

duo incrementa proxima sunt, quorum prius per alterum divisum $\backsim 1$.

b. Porro functiones nonnisi constante differentes limite augmentali eodem gaudent et limiti augmentali functiones primitivæ nonnisi constante differentes respondent.

Nam

$$A(x+i)+c-(A(x)+c)=A(x+i)-A(x).$$

Quoad alterum autem, functio primitiva $\gtrdot A(x)$ aut $\lessdot A(x)$ esse nequit. Si enim $kA(x)$ esset, limes fieret $kD(x)$, quum $D(x)$ (præter puncta discreta) valoris determinati finiti et non o sit.

c. Hinc si functio $A(x)$ quæratur et reperiatur functio nota $B(x)$ talis, ut limite augmentali quoad eandem variabilem eodem gaudeant, erit

$$A(x)=B(x)+\text{constans}.$$

Subit igitur heic limes augmentalis superius dictæ seriei mediatricis vicem.

d. Constans autem sic reperitur: si pro quovis x (a β usque ad γ) sit

$$A(x)=B(x)+\text{constans},$$

et sit $A(h)=a$, erit

$$A(h)=B(h)+\text{constans}=a,$$

adeoque

$$\text{constans}=a-B(h),$$

ut supra.

e. Limes dictus methodo de differentiali dictæ analoga quæritur.

9. *Exempla pro methodo utraque:*

a. Pro coordinatis rectangulis derivata areæ $A(x)$ in plano est ordinata y et differentiale est $y\dot{x}$.

Sit enim ex. gr. pro ordinatis crescentibus (pag. 598) $V(x)$ summa rectangulorum e quovis $\dot{x}$ et ordinata e fine eius erecta, $U(x)$ autem sit summa rectangulorum item e quovis $\dot{x}$ et ordinata ex initio eius erecta: erit

$$V \gtrdot A \gtrdot U$$

et

$$v(x) \gtrdot a(x) \gtrdot u(x),$$

atque

$$\frac{v(x)}{u(x)} \frown 1$$

adeoque

$$\frac{v(x)}{a(x)} \backsim 1;$$

sed

$$v(x) : \dot{x} = y,$$

consequenter

$$\frac{a(x)}{\dot{x}} \backsim y.$$

Hinc si

$$y = px^k,$$

erit (pag. 235)

$$A(x) = \int px^k = B(x) = ax^{k+1} : k+1.$$

Constans enim est $= 0$, quia pro $x = 0$ fit

$$A(x) = 0 = B(0).$$

b. Pro (pagina 230) est

$$\partial s = v \quad \text{et} \quad \partial s = v\dot{t}.$$

Sit enim prius w constans $= g$ (pag. 248), sitque $A(t) = s$, et $V(t)$ summa spatiorum sub quovis $\dot{t}$ velocitate quæ ad finem eius est, æquabiliter percursorum, $U(t)$ vero summa item sub quovis $\dot{t}$ velocitate, quæ ad initium eius est, æqualiter percursorum. Erit

$$v(t) = \dot{t}\mathfrak{v}(t) \quad \text{et} \quad u(t) = \dot{t}\mathfrak{v}(t-\dot{t})$$

atque

$$v(t) \gtrdot f(t) \gtrdot u(t)$$

et

$$\frac{v(t)}{u(t)} \backsim 1$$

adeoque

$$\frac{v(t)}{a(t)} \backsim 1.$$

Consequenter $\dot{t}\mathfrak{v}(t) : \dot{t} = \mathfrak{v}(t)$ limes ipsius $a(t) : \dot{t}$ pro quovis dato t est, et v illi respondens derivata atque $v\dot{t}$ differentiale est. Est autem

$$v = gt$$

et

$$\int gt = \frac{gt^2}{2}.$$

Potest idem et iuxta (pag. 248) fieri, ubi $(m-1):m \backsim 1$ ita intelligitur, quod detur tale n pro quovis dato N, utvis parvo $\dot{t}$ excepto, ut

$$\frac{m-1}{m}-1 < \frac{1}{N}$$

sit.

Si vero w non sit constans, sed ex. gr. crescat continuo (pag. 249), est

$$\dot{t}\mathfrak{v}(t-\dot{t})+\dot{t}^2\mathfrak{w}(t) > a(\dot{t}) > \dot{t}\mathfrak{v}(t-\dot{t})+\dot{t}^2\mathfrak{w}(t-\dot{t}).$$

Sed prius per posterius divisum $\backsim 1$, et

$$\mathfrak{v}(t-\dot{t}):\mathfrak{v}(\dot{t}) \backsim 1,$$

atque

$$\dot{t}\mathfrak{w}(\dot{t}):\mathfrak{v}(\dot{t}) \backsim 0.$$

Consequenter

$$\frac{a(\dot{t})}{\dot{t}} \backsim \mathfrak{v}(\dot{t}).$$

Pariter (pag. 250)

$$\dot{v} \doteq w\dot{t},$$

adeoque

$$\frac{\dot{v}}{\dot{t}} \backsim w,$$

et quum ex

$$v\dot{t} \doteq \dot{s}$$

sit

$$\dot{t} \doteq \frac{\dot{s}}{v},$$

substituendo fit

$$v\dot{v} = w\dot{s}.$$

Consequenter

$$\int v\dot{v} = \int w\dot{s},$$

sive

$$_{v}\int v = {}_{s}\int w$$

nempe functio, cuius derivata quoad v est v, et illa cuius derivata quoad s est w, nonnisi constante differunt. Sed prius $= v^2:2$; itaque

$$v^2 = 2{}_{s}\int w;$$

et exhinc prius functio primitiva simul cum constante quærenda ut radix v obtineatur.

Ex. gr. Sit (pag. 251, fig. 25) problema motus difformiter accelerati. Est ibidem

$$w = \frac{r^2 g}{x^2}, \quad \text{et} \quad s = a - x,$$

adeoque

$$\dot{s} = -\dot{x} \quad \text{et} \quad {}^{x}\!\partial s = -1.$$

Itaque

$$w\dot{s} \mathrel{\overset{\circ}{=}} \frac{-r^2 g \dot{x}}{x^2}, \quad \text{et} \quad w\; {}^{x}\!\partial s = -\frac{r^2 g}{x^2},$$

cuius integrale est

$$\frac{r^2 g}{x} + \text{constans},$$

nam huius derivata quoad x est $-r^2 g : x^2$.

Reperitur autem constans sic. Pro $x = a$ est $v = 0$, adeoque et $v^2 : 2 = 0$; hinc

$$\text{constans} = -\frac{r^2 g}{a},$$

atque

$$v^2 = 2\int w\; {}^{x}\!\partial s = 2r^2 g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right).$$

Consequenter

$$v = r\sqrt{2g\frac{a-x}{ax}}.$$

Si vero (pag. 253) vis sit $zg : r$ et $s = r - z$, atque ${}^{z}\!\partial s = -1$, adeoqu

$$\frac{v^2}{2} = \int_z \frac{-zg}{r} = \frac{-z^2 g}{2r} + \text{constans}.$$

Est vero pro $z = r$ velocitas 0, adeoque

$$\frac{v^2}{2} = 0 = -\frac{rg}{2} + \text{constans}$$

et

$$\text{constans} = \frac{rg}{2}.$$

Consequenter

$$v = \sqrt{\frac{g}{r}(r^2 - z^2)},$$

quod pro $z = 0$ fit $\sqrt{rg}$.

Ubi notandum est, quod gr pro diversa unitate facta diversa præbeat, adeoque vagum videri posset; at si factores concreti numero μ fuerint, radix μ-ti gradus e facto semper eadem erit, dummodo tam factum quam radix quoad quamvis quidem sed eandem unitatem accipiatur. Nempe quoad $u=1$ sit factum f; erit (pag. 113) quoad $ku=1$ (denotante k quantitatem abstractam) factum

$$F=f\,.\,k^{\mu-1};$$

atque si $\sqrt[\mu]{f}$ (quoad $u=1$) sit r, erit

$$\left[\sqrt[\mu]{F}\right]_{ku=1}=\left[\sqrt[\mu]{\frac{1}{k^{\mu-1}}}\right]_{ku=1}$$

et hoc est

$$=\frac{rk^{1-\frac{1}{\mu}}}{k^{\frac{\mu-1}{\mu}}}=r.$$

In exemplo præcedente sunt quatuor factores in numeratore et duo in denominatore. Sed ibi quoque duo tantum manent; nam quantitas concreta per concretam quotum constantem dat (pag. 535).

c. Sit adhuc exemplum pro differentiali negativo et derivata negativa. *Quaeratur* nempe *tempus lapsus per s arcum cycloidis.*

Si (fig. 53) pro v scriberetur x, essetque hæc variabilis absoluta, neglectoque s quod ibi est, denotet s viam a certo puncto cycloidis incipiendo super eadem per gravitatem labentis puncti; respondeatque abscissa h puncto illi certo ipsius s, sitque y ordinata ipsius x; atque tempus lapsus per s dicatur t, et v denotet velocitatem finalem ad finem ipsius t et imum ipsius s, spatiumque sub secundo uno, lapsu libero percursum, denotetur per g.

Erat (pag. 591) $\dot{t}:\frac{\dot{s}}{v}\backsim 1$; itaque

$$t=\int\frac{\dot{x}\partial s}{v},\quad \text{sive}\quad t=\int\frac{\partial s}{v};$$

eumque in finem ∂s et v quærenda sunt. Est

$$v=2\sqrt{g(h-x)};$$

nempe lapsus non per plana inclinata compacta, sed per curvam fit. Estque (pag. 294)

$$\partial s = (1 + (\partial y)^2)^{\frac{1}{2}},$$

atque (pag. 359)

$$\partial y = (2x^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}},$$

adeoque

$$\partial s = \sqrt{2x^{-1}}.$$

Consequenter

$$\frac{\partial s}{v} = \sqrt{\frac{x^{-1}}{2g(h-x)}} = x^{-\frac{1}{2}}(h-x)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2g}}.$$

Estque hoc negativum; namque pro $h = n\dot{x}$ tam s quam t est o, sed a fine n-ti $\dot{x}$ usque ad initium eius crescit arcus, et ut grave per eum descendat, tempus requiritur; si igitur incrementa ista temporis a o incipiendo pro

$$(n-1)\dot{x}, \quad (n-2)\dot{x}, \ldots$$

per ordinatas ad fines ipsorum $\dot{x}$ positas repræsententur, dicaturque ordinata $C(x)$; erit

$$C(n\dot{x}) - C((n-1)\dot{x}) = 0 - t,$$

quod et de sequentibus patet.

Erit igitur (pag. 286)

$$t = -\sqrt{\frac{1}{2g}}\int x^{-\frac{1}{2}}(h-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2g}}\,\text{arc. cos.}\left(1 - \frac{2x}{h}\right) + \text{constans}.$$

Si vero $t = 0$, tum $x = h$; adeoque

$$0 = -\sqrt{\frac{1}{2g}}\,\text{arc. cos.}(-1) + \text{constans}.$$

Estque arc. cos. $(-1) = \pi$. Itaque

$$\text{constans} = \pi\sqrt{\frac{1}{2g}},$$

consequenter

$$t = \sqrt{\frac{1}{2g}}\left(\pi - \text{arc. cos.}\left(\frac{2x}{h}\right)\right).$$

Si vero $x = 0$, tempus lapsus per cycloidem usque ad punctum imum erit

$$\pi\sqrt{\frac{1}{2g}}.$$

Patet quoque tempus undevis idem requiri, ut grave ad imum usque delabatur.

N.

EXPOSITIO BREVIS METHODI, QUA PRIMÆ LINEÆ CALCULI DIFFERENTIALIS IN OPERE HUNGARICO TRACTANTUR.

Ex (pag. 211)

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) < \frac{1}{N}\, a(m\dot{x}),$$

pro eodem n et hic, deducitur $U = A$. Sed evidentius in opere dicto hungarico ponitur (Cf. pag. 635)

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) = f\varrho a(m\dot{x}),$$

per f fractionem veram sive positivam sive negativam denotando et ϱ scribendo pro $\frac{1}{N}$. Nimirum sit fas in gratiam Tyronum quædam iam supra dictorum magis necessaria hic quoque repetere.

I. Si quotcunque variabiles simultaneo positæ fuerint, illa ex. gr. x, cuius certum valorem γ per integrum positivum n dividere libet, dicatur *primaria*, $\frac{\gamma}{n}$ per $\dot{x}$ denotato. Cuiuscunque variabilis ex. gr. y vero simul cum x mentio fiat, valor is ipsius y intelligatur, qui ad finem illius x est, $\dot{y}$ autem denotet incrementum variabilis y illud, quod sub illo $\dot{x}$ nacta est, quod cum illo x terminatur.

Quatenus si $A(x)$ functio (ipsa quoque variabilis) dicatur u, denotabit $\dot{u}$ incrementum ipsi $\dot{x}$ cum x terminato respondens

$$= A(x) - A(x - \dot{x}) = u - A(x - \dot{x})$$

unde

$$A(x - \dot{x}) = u - \dot{u}.$$

Denotetur $\dot{u}$ per $a(x)$.

II. Ex $A(x)$ autem per quæstionem primam (pag. 205) substituendo ipsi x prius $n\dot{x}$, tum $(n-1)\dot{x}$, dein $(n-2)\dot{x}$, ... usque $\vartheta = (p-1)\dot{x}$ (tam p quam n integrum positivum denotantibus) oritur series

$$A(n\dot{x}),\quad A((n-1)\dot{x}),\quad A((n-2)\dot{x}),\ \ldots,\ A((p-1)\dot{x});$$

unde quum illico pateat, quovis termino subtracto e præcedente incrementum sequenti $\dot{x}$ respondens prodire, ex. gr.

$$A(p\dot{x}) - A((p-1)\dot{x})$$

esse incrementum ipsius $A(\beta)$ sub p-to $\dot{x}$; in promptu fit incrementorum p-to, $(p+1)$-to, $(p+2)$-to, ..., n-to $\dot{x}$ respondentium seriem

$$A(n\dot{x}) - A((n-1)\dot{x}),\ A((n-1)\dot{x}) - A((n-2)\dot{x}), \ldots, A(p\dot{x}) - A((p-1)\dot{x}),$$

cuius terminus generalis (pag. 209)

$$A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$$

per a_m, et summam, intermediis se mutuo destruentibus,

$$A(\gamma) - A(\beta)$$

per A denotari posse.

III. Si $A(x)$ et $B(x)$ ab n independentes fuerint, $V(x)$ autem dependeat ab n, et $\frac{v_m}{a_m}$ ac $\frac{v_m}{b_m}$ limite 1 gaudent, nempe pro utvis magno N sit tale idem n, ut quodvis m accipiatur a β usque γ, sit

$$v_m - a_m = f_m \varrho a_m, \quad \text{et} \quad v_m - b_m = f'_m \varrho b_m:$$

tum $A = B$, adeoque

$$A(\gamma) = B + A(\beta).$$

Nam

$$\begin{array}{llll} v_n - a_n = f_n \varrho a_n, & & v_n - b_n = f'_n \varrho b_n, \\ v_{n-1} - a_{n-1} = f_{n-1} \varrho a_{n-1}, & & v_{n-1} - b_{n-1} = f'_{n-1} \varrho b_{n-1}, \\ \quad \ldots & & \quad \ldots \\ v_p - a_p = f_p \varrho a_p, & & v_p - b_p = f'_p \varrho b_p. \end{array}$$

Et si in $A(x)$ cogitetur incrementum $A(\beta)$ ipsi $(\gamma-\beta)$ respondens, expressum per aream inter $\gamma-\beta$ et fines ordinatarum a fine ipsius β usque finem ipsius γ, et ordinatas ad fines ipsorum β et γ contentam, sitque pro ordinatis omnibus finitis illa, qua nulla maior est, k, accipiaturque hæc ut realis et positiva: tertia columna non erit $> \frac{(n-p+1)k}{N}$ (pag. 635). At vero hic $n-p+1$ crescet crescente n, attamen $(n-p+1)k$ nunquam fit rectangulo ex ordinata maxima et $\gamma-\beta$ maius, atque $N \rightharpoondown \infty$, si $n \rightharpoondown \infty$. Consequenter limes ipsius V tam A quam B est; adeoque $A=B$.

IV. Potest vero γ utvis magnum accipi si dicta valeant; neque turbatur æqualitas, si parti ipsius $\gamma-\beta$ ad limitem o tendenti respondens incrementum quoque tendit ad o.

V. Si de $A(x)$ dicta et de $K(x)$ valeant: fiet

$$K(\gamma)=B+K(\beta);$$

et prouti $A(\beta)$ vel $K(\beta)$ additur ipsi B, summa *integrale* ipsius $v(x)$ quoad $A(x)$ vel $K(x)$ dici potest.

VI. Si $\frac{a(x)}{\dot{z}} \rightharpoondown C(x)$ pro hoc ab n independente, tum $\dot{z}\,C(x)$ *differentiale* ipsius $A(x)$ et $C(x)$ *limes augmentalis* (primus) utrumque quoad z et $q-1$-mi limitis augmentalis limes augmentalis dicitur q-tus, signisque $^{z}\partial A(x)$, $^{z}\boldsymbol{\partial} A(x)$, $^{z}\boldsymbol{\partial}^{q} A(x)$ denotari et differentialia altiora supervacanea reddi possunt.

VII. Præter modum, quo differentiale quæritur, ut purum reddatur, plura in opere dicto demonstrantur.

ADNOTATIONES EDITORUM.

Pag. 4, ℣. *6 a calce.* «*Millefariam*» vocabulum a Bolyai fictum ad exemplar vocis «multifariam», quæ non crebro quidem sed tamen etiam apud optimos scriptores legitur, videtur significari voluisse: «in mille partes».

Pag 5. Literas maiusculas, quas Bolyai initio vocabulorum Historiæ Geometriæ, Trigonometriæ, Theorematis &, scribere solet, hic et aliis locis non mutavimus.

Pag. 6, ℣. *6.* Vox «*ultimariorum*» derivata a vocabulo «ultimarius» ad exemplar «primarii» ficto, et sicut «primarius» unum aliquem ex primis denotat, Bolyai hic unum aliquid ex ultimis voluit designare.

Pag. 6, ℣. *11 a calce.* Pro «nullo», quod certe typothetæ errore irrepsit, restituimus «nulli».

Pag. 9 in fine ℣. *7.* Distinctionem mediæ notæ inseruimus quo facilius appareat vocem «itque» non deberi ad sequentia trahi.

Ibidem ℣. *13 a calce* pro «nuspiam» rectius «nusquam» scribi duximus.

Pag. 11. I, II, III. In libello «Arithmetika eleje» (Introductio in Arithmeticam) in oppido Maros-Vásárhely anno 1843 edito, pag. 198, hæc legitur finitio temporis:

> «Tempus est continuum et infinitum, tum quoad præteritum quum quoad futurum; sed partium expers tantum; et semper alia atque alia habet puncta, quorum quodvis advenit, omnia non adveniunt, quodlibet temporis pun-

ctum nec præceditur ultimo quodam, nec præit primum quoddam; et si punctum $\mathfrak{b}$ præcedit $\mathfrak{a}$ et punctum $\mathfrak{c}$ ante $\mathfrak{b}$ fuerit, punctum $\mathfrak{c}$ præit $\mathfrak{a}$.»

Quid intellexerit Bolyai per vocabulum «continuum», apparet pag. 24, §. 4.

Pag. 14. Secundum ea quæ in præcedente pagina stabilita sunt pro g ubique G erat scribendum, excepto versu 10 a calce, ubi h debuit ei substitui.

Ibidem ỷ. *2 a calce* pro «inter B, C» rectius est scriptum «inter A, B, C».

Pag. 17, ỷ. *5 a calce* pro «2 schematibus» scripsimus: «altero schemate».

Pag. 17, schema I. Liceat hæc schemata exemplo illustrare. In I schemate 7-mo loco hæc sunt posita:

$$\begin{array}{c} c-a \\ \underline{A+b} \\ {}^{*}c-b. \end{array}$$

Positio secunda $A+b$ significat cum quolibet a esse quoddam b, vel esse quædam b; prima positio $c-a$ denotat esse quoddam c vel quædam c sine quodam a vel quibusdam a. Ex his duabus positionibus sequitur hoc c vel hæc c simul esse etiam sine isto b vel sine istis b; possunt tamen esse eiusmodi b quibus a non adest — hæc possunt esse cum c.

Pag. 18. Propositionem primam, quæ in prima editione secundam sequebatur eidem præponendam esse duximus, ut lectori facilius appareat nexus ratiocinationis.

Ibidem ỷ. 9 a calce obscurum illud: «denique omne» clarius fiet ita scribendo: «denique omnia, quæ . . . sequuntur, . . . accenseri possunt».

Pag. 19. In schemate II complexiones quinta et sexta in editione prima sic habentur:

$$\begin{array}{cccc|cccc} aa & -a & -a & & aa & -a & -a & \\ bbb & & c & c & bbb & c & c & c \end{array}$$

In schemate III vero prima, quinta et septima in editione I hæ sunt

$$\begin{array}{c|cccc|ccc} cc & c & c & & bbb & cc & & aa \\ bbbbb & -b & -b & -b & aaa & -b & -b & bbbb \\ aa & & & & & & & \end{array}$$

ex his posterioribus duæ extremæ certe typothetarum mendæ sunt; reliquæ ita mutatæ melius conveniunt schematibus paginæ 18. In schemate II quarta sic est recte scribenda:

$$\begin{array}{l} bb \\ \quad aaaa \\ \qquad ccc. \end{array}$$

Pag. 20. ỷ. *10* habet «si a prima», pro quo scripsimus «nisi a prima».

Pag. 20, E. ỷ. *4 a calce* incipiendo in editione I hæc leguntur:

«post p vero datur tempus continuum ex p incipiens, sub cuius puncto quovis est non A. Nam in quovis puncto crescentis T in infinitum quæri potest, est ne illud ultimum vel non? Alterutrum esse oportet (Ax. III); nec responsio *non* sub quovis puncto temporis esse potest; nam si tempus ultra t crescat et *non* sit responsio tum quoque, sub t quoque esset A (contra hyp.) Itaque est aliquod temporis punctum, de quo dici nequit, quod non ultimum sit (p. 12, n° 2); adeoque cum illud aut ultimum aut non ultimum esse debeat (Ax. III), et non ultimum non sit, ultimum est (Ax. IV). *Si porro quaeratur* ultra p continuo porro in quovis puncto, est ne A vel *non* A? responsio *ita* esse aliquamdiu nequit; alioquin p ulterius accipi debuisset.»

»Si vero datur ultimum tale punctum p, tum in p erit aut *ultimum* A aut *primum non* A. Nam aliquod aut A aut *non* A adesse debet (Ax. III); si A est, *ultimum* A est; nam post p sub certo continuo ex p incipiente non est A, ante p vero ab initio ipsius T semper est; si vero sub p sit *non* A, illud *primum non* A est; quia antea semper fuit, postea vero sub certo tempore non est.»

His manifesto falsis ipse Bolyai in editionis I, tomi 1, pag. LXXXVI substituit illam correctionem theorematis, quæ hic ultimis quatuor versibus paginæ 20. comprehenditur.

Bolyai hoc fundamento limitis, quod cardinalis propositio est totius systematis, ætatem suam superans monumentum exegit nomini suo.

Pag. 23—24. Demonstratio quæ hinc a priore pagina in posteriorem transit minus concinna est, atque ita est supplenda: P portio est totius T; ergo complexus omnis eius, quod ex toto præter P est, — vocatur R — partem nullam aut tantum indivellibilem communem habet cum P per definitionem portionis; ergo A (id quod P cum R commune habet) pars indivellibilis est ipsius P.

Adnotatio huic paginæ sub * addita ex pag. 401, Tomi II editionis primæ tracta est.

Pag. 26, *ẙ. 12 a calce*: »nec in casu allato posse aut non posse terminari quisquam demonstravit«, scilicet si quæratur quadratum circulo terminata vel interminata æqualitate sitne æquale.

Pag. 26, §. 7, *ẙ. 2*, vocabula »nonnisi indivellibile utriusque commune habentes« contextui inserta et nota in calce paginæ addita ex editionis I, tom. II pag. 401 ipsius Bolyai consilio adiecimus.

Pag. 27, *in altera parte* § 7 et porro etiam paullum defleximus a Bolyai, signis enim $\gtreqless$, quo facilius formulæ legi possint, sensu vulgo usitato utimur, Bolyai vero hoc loco pro comparatione valorum absolutorum utitur signis $\gtreqless$. Ceterum Bolyai in distinctione terminorum et signorum maius, minus ($\gtreqless$) et plus paucius ($\gtreqless$) parum sibi constat. Hæc ubi opus erat emendavimus, at ubi de quantitatibus natura positivis agitur, terminos «maius, minus» haud mutavimus, sæpe tamen signa $\gtrless$ simpliciora adhibuimus.

Pag. 29, in fine § 10 nota addita «(Tab. I, Fig. 1)» consilio Bolyai (pag. XXXV. ẏ. 9 a calce) deleta est.

Pag. 30, § *12*, ẏ. *3* Bolyai «zerum» scripserat, cui vocabulo nos figuram «0» substituimus, quam Bolyai plerumque vocabulo «zerus» appellat, quod secundæ declinationi tribuit, nos ubi figura ista voce designanda erit semper indeclinabile «zero» adhibebimus.

Ibidem ẏ. *3 a calce* pro «$\vdash\!\!+\!\!\dashv a$, $\vdash\!\!-\!\!\dashv b$» inserta coniunctione scripsimus «$\vdash\!\!+\!\!\dashv a$, vel $\vdash\!\!-\!\!\dashv b$».

Pag. *31*, § *14*, ẏ. *5* pro «$\vdash\!\!+\!\!\dashv A$ et $\vdash\!\!+\!\!\dashv B$» rectius scriptum est «$\vdash\!\!+\!\!\dashv A \vdash\!\!+\!\!\dashv B$».

Pag. *32*, § *16*, ẏ. *4—5*, locus difficillimus intellectu continuo clarus fit, si vocem subintellectam «termini» idoneo loco inserendo ita legetur: «*A* cum *a* simul ponantur, et termini quosvis terminos simul positos excipientes . . . simul ponantur».

Ibidem pro ablativis «priori, posteriori» usitatiores «priore, posteriore» substituimus, quod et in aliis plerisque locis fecimus.

In fine huius paginæ pro «(§ 22)» rectius scripsimus «(§ 23)».

Pag. *34*, § *20*, ẏ. *3 a calce* pro «cum» interrogationis signum sequens «Cum» scripsimus.

Pag. *35*, nota sub * apposita a pagina 401 tomi II. editionis primæ sumpta est.

Pag. 37, § *24*, ỳ. *4* «est (per § 7) $2 \lessdot -3$, sed 1 non $\gtrdot 0$, neque $-1 \lessdot 0$»; exemplum profert differentiæ inter signa ($\gtrdot \lessdot$) et ($> <$) ut præparet introductionem novorum horum signorum. Quod (§ 7) citatur, ita intelligendum est: si

$$2+1=3; \quad 1-1=0,$$

ex priore harum identitatum secundum (§ 7) sequitur $2 \lessdot 3$ at eodem iure etiam $2 \lessdot -3$, sed ex altera non sequitur $1 \gtrdot 0$ nec vero $-1 \lessdot 0$. Confer: Arithmetika Eleje, ed. nova, 1843 pag. 13.

Pag. 40, ỳ. *5 a calce* in parenthesi pro «§ 20» erronee adlato «§ 19» restituimus.

Pag. 43, ỳ. *4 a fine* § 31 pro «$-a.$ $-c$ esset $=+b$» rectius scripsimus «$-a.$ $-c$ esset $=-b$».

Pag. 44, nota ad calcem paginæ sub * apposita ipsius Bolyai est, et legitur in ed. I, tom. II, pag. 373, et iterum in tom. I, pag. LIII.

Pag. 45, ỳ. *1*, «a divisor (tertium locum tenens), B_{ι} quotus est»; designationes divisoris et quoti permutari posse patet, ita enim iam a principio § 27 introduxerat duas has notiones.

Pag. 45, ỳ. *6* pro iis quæ in hac pagina in tomo I editionis I sequuntur, nempe:

> «Notandum vero nomen *quoti* vel quotiensis inde venire, quod in casu ubi divisor loco *tertio* stat, ad illam quæstionem respondet, quale mensum (quasi quotum) sit b ipsius a (nempe hic 2(3)tum); si vero quæstio est, quid sit, cuius si quæratur quotum sit b, respondeatur: 2(3)tum; tum divisor *secundum* locum tenet. Pro 2(3)to erat antea 3(1)tum; et b ibi in tres partes (quarum quævis $=a$ est) partitur, atque b est quoad a numerus nominis 3.»

ipse Bolyai substituere iussit ỳỳ. 6—11 in tomo II editionis I pag. 367, § 11.

Pag. 45, tertio loco ultimi schematis pro «*1v*» scripsimus «*ov*», uti consentaneum est versui 2 sectionis 3., ubi legitur «demum sit factor uterque 0».

Pag. 46, ỳ. *2 et ss.* pro «$a(r)$» usitatiorem formam «functionis $f(r)$» substituimus. (Vide ad pag. 207 adnotata).

Ibidem ỳ. *12* vocabulum «Sit» in ed. I schemati præpositum delevimus.

Pag. 48 ỳ. *7 a calce* pro «nempe 3-ies» scripsimus «nempe ter», et ibidem ỳ. ultimo «unitas» stat loco «Unitas».

Pag. 50, ỳ. *4* post «eiusmodi» luciditatis causa inseruimus vocem «factorum».

Ibidem ỳ. *11*, «dummodo $N=M$ non sit» (pag. 37) ex consilio ipsius Bolyai deletum atque pro «Si» positum est «si».

Pag. 51, ỳ. *1*, $a^{\frac{n-m}{N-M}}$ scribi debuit pro «$B^{\frac{n-m}{N-M}}$».

Ibidem § *35*, *sub I*, ỳ. *4*, vocabulum «millionesies» quamquam Latinum non est, non mutavimus.

Pag. 52, *III.* ỳ. *9* luciditatis causa literæ T præpositum est «angulus». — Ceterum Fig. 1. ed. I non exhibet clare «*fasciam u*», quæ nihil est aliud quam pars areæ anguli T inter parallelas sita.

Pag. 52, ỳ. *ultimo* «uti (Fig. 2) ostendit» significat aream anguli $a+b+\cdots+f$ complecti aream anguli $a'+b'+\cdots+f'$ et præterea etiam, «*fasciam*» g.

Pag. 53, ŷ. *10*, in edit. I nulla Figuræ 3 fit mentio, nec invenitur in tabula.

Numerale *V* præpositum est versui primo huius paginæ ex præcepto pag. V. ŷ. 11 a calce editionis I.

Pag. 55, ŷ. *3*. post «imo» particulam «ad» inseruimus.

Ibidem, ŷ. *7*. pro «maius» scripsimus «plus».

Ibidem, ŷ. *9*. verba «aliquamdiu saltem» uncis inclusa sententiam ipsius Bolyai secuti omisimus.

Ibidem, ŷ. *12*. *a calce* post «tamen fiat 0», clausulam «neque negativa» addidimus.

Ibidem, ŷ. *ultimo* distinctioni (,) inter voces «est» et «terminatur» maiorem (;) substituimus.

Pag. 55. In theoremate eiusque demonstratione, quæ sub VI et VII proponuntur, ubique signa «quoad valorem absolutum maius vel minus» adhibita sunt. Considerantes quantitatem q respective $\mathfrak{pq}$ æque posse positivam et negativam esse, signis «quoad valorem absolutum maius et minus» notantibus usi sumus, imo plerumque vocabula ipsa iis substituimus.

Pag. 57, ŷ. *1* «(cum id in $*$ æquale 0 sit), quo» scripsimus pro «in $*$, quo (cum id $=0$ sit)».

Ibidem, ŷ. *8*. Bolyai sæpius utitur forma hac vitiosa «propissimus» pro «proximus», quod ubique substituimus ubi animadversum est; hoc loco oculos fefellerat.

Pag. 61, ŷ. 7 pro «crescendo» aptius visum est scribi «crescens».

Ibidem ŷ. *12* «propissime» emendatum est in «proxime». (Cf. Adn. ad pag. 57).

Pag. 63, *XVIII* ŷ. 7 pro «residuo r ex c» scribendum fuit «residuo r ex Q».

Ibidem ŷ. 10 a calce loco «$a'=c''$» rectius posuimus «$a'=C''$».

Ibidem $\dot{\text{v}}$. *6 a calce* loco «est; cuius» scriptum est «est, quarum». Postrema pars huius articuli ad fasciam (pag. 52) memoratam spectat, et huius singulas partes designantia u, ω et ipsa eiusmodi fasciæ sunt, sicut et ω'.

Pag. 66. Nota margini inferiori huius paginæ apposita e pag. XXXVII tomi I editionis I est desumpta, nisi quod in ultimis æquationibus signis $=$ per mendam typothetarum positis signa $\doteq$ substituimus.

Pag. 67, $\dot{\text{v}}$. *4*, loco «residuum v ex $(b=k')$» scriptum est «propter $b=k'$ residuum».

Pag. 67, $\dot{\text{v}}$. *8* legitur «sed hæ partes per a) demi possunt», conclusio hæc vitiosa est, quum portionibus arearum, de quibus hic agitur, quamvis minutæ supponantur, adhuc semper possunt esse etiam in situ coincidenti arearum A et B particulæ communes.

Ceterum propositio hic demonstranda ipsa vera est, imo vera est etiam rem in genere affirmans sequens propositio: «*Si ex areis terminate aequalibus portiones terminate aequales exscindas, areae residuae etiam terminate aequales sunt*».*

Pag. 68, $\dot{\text{v}}$. *10* «et sit quærendum $\frac{2C}{3\cdot 5}$» scriptum est pro «et sit $\frac{2C}{3\cdot 5}$».

Ibidem, $\dot{\text{v}}$. *3 a calce* pro «(facto x dicto)» scripsimus «(facto dicto x)».

Pag. 71, $\dot{\text{v}}$ *3* inter «rectæ aut» inseruimus «eiusdem determinationis». Nempe, ut e sequentibus apparet, u etiam negativum potest esse.

Pag. 72, $\dot{\text{v}}$. *6 et 12* pro «sed» scripsimus «et».

* Vide Réthy «Végszerűen egyenlő területek» in Magy. Tud. Akad. Értesítő 1890, 1893, — idem Germanice «Endlich gleiche Flächen» in Naturwiss. Berichte aus Ungarn 1890, 1893, — Math. Annalen Bd. 38 et 42 et loco hoc posteriore etiam H. Dobriner: «Bemerkungen etc.» et «Gleiches von Gleichem giebt Gleiches».

Pag. 73, $\dot{\text{y}}$. *12 a calce* «ex ω est» ita supplevimus «ex ω sumptum est».

Pag. 74, $\dot{\text{y}}$. 15, «*est*» in «sit» mutavimus.

Pag. 76, $\dot{\text{y}}$. *6—8 a calce.* Loco inæqualitatum hic positarum in Ed. I erronee ita fuit scriptum

$$mv+\lambda-Mv'-\lambda'<\frac{1}{k}+\lambda-\lambda',$$

seu

$$D-D'<\frac{1}{k}+\lambda-\lambda',$$

Pag. 77, *sub XXIV* $\dot{\text{y}}$. *1* articuli 2 inter uncinos vocabulo «opposi-sitis» substituimus «negativis» et signa usitata $>$, $<$, $\pm$ sicut vocabula maius, minus adhibuimus.

Pag. 77 *versum ultimum* ipsi inseruimus, at ibi pro «iisque» legendum erit «atque».

Pag. 79, $\dot{\text{y}}$. 7. Vocabulo «constans» hic Bolyai eiusmodi voluit notare quantitatem, quæ neque $=0$ fieri neque ad limitem 0 tendere possit.

Pag. 81, *sub* 5., *et pag.* 82 $\dot{\text{y}}$. *1* signa $><$ sunt pro signis $\gtrdot\lessdot$ posita.

Ibidem $\dot{\text{y}}$. 7, *a calce* post «quævis alia» supplevimus «litera».
Ibidem $\dot{\text{y}}$. 6, *a calce* pro «ac si *e*», scripsimus «ac si *c*».

Pag. 81, *sub* 6. In Editione I hoc loco æquatio resultans sic fuit apposita :

$$1-\frac{kn+k}{kn}=\frac{kn}{kn}-\frac{kn+k}{kn}=\frac{1}{n},$$

Ibidem sub 7, ed. I. sic habetur

«Nam differentia ipsius 1 ab $\frac{n}{n+1}$ est

$$\frac{n\pm 1-n}{n\pm 1}=\frac{1}{n\pm 1},$$

quod $\backsim$ 0.»

Pag. 85, ꝟ. 8 et 9 ex consilio ipsius Bolyai corrigebantur.

Ibidem ꝟ. *13* intra uncos «per XXV., 2.» correximus in: «per XXV., 3.»; porro ꝟ. *7* inter «crescit, non fit» inseruimus «et»

Pag. 90, ꝟ. 1. inter a, x vocabulum «respective» inseruimus. *Ibidem* ꝟ. 4—7 quæ leguntur in ed. I sic habentur: «cuius differentia ab $\left(a=\frac{a'}{n}+z\right)$ est $z-\frac{a't}{b'}$, quod $\backsim$ 0 (ut supra)».

Ibidem ꝟ. *14* in ed. I est:

$$\left(\frac{a'+\omega'}{n}=x-p\right):\left(\frac{b'}{n}=b-t\right)$$

quod luciditatis causa seorsim ponere placuit.

Ibidem ꝟ. *5—8 a calce* in ed. I ita habebatur: «cuius differentia ab $\left(a=\frac{a'}{n}+z\right)$ est $z-\frac{a'q}{b'+\lambda'}$».

Pag. 91, Quæ hic ꝟ 1—4 continentur in ed. I ita sunt exposita: «cuius differentia ab $\left(x=\frac{a'+\omega'}{n}+p\right)$ est $p-\frac{a'+\omega'}{b'+\lambda'}q$».

Pag. 93 ꝟ. *9 a calce.* Notandum est in ed. I in hoc capitulo et etiam alibi solos numeros paginarum esse allatos, nos vero facilitatis causa etiam numeros theorematum addidimus.

Pag. 93, *5*. Hæc ratiocinatio non potest constare si

$$\frac{u'}{v'}+1=0,\ \text{vel}\ \frac{u'}{v'}+1\backsim 0;$$

quod auctor ipse annotavit in «*Arithmetika eleje*», Ed. nova (pag. 246).

Pag 96 et ss. XXIX. Ubi de potentia agitur sæpius non enuntiavit auctor a et A positiva sintne vel et negativa.

Pag. 96, ỷ. *7—8 a calce*, oratio hoc loco parum diligenter est composita, attamen facile intelligitur, itaque nihil mutavimus.

Pag. 97, ỷ. *8 a calce* ordine paullum mutato pro «$=1=a^0$» scripsimus «$=a^0=1$».

Pag. 98. ỷ. *8 et 11*, terminos utriusque partis æquationis primæ permutavimus, ut continuitas sensus clarius appareat.

Ibidem ỷ *2 et 3 a calce* in editione prima sequentia continebantur:

erit intra • quidvis $=x'-\omega$, •et ultra • quidvis $=x'+\omega$.

Pag. 99, ỷ. *1* inter uncinos numeros XXV, 11 inseruimus.

Ibidem ỷ. *2* pro «aut $=$ aut $>$» scripsimus: «aut $= K$ aut $>$».

Ibidem ỷ. *4—5* verba «neque primum non tale; nam si ultimum» quæ certe erronea sunt, ita supplevimus: «ergo primum non tale, nec enim plus quam K producit; nam si illorum ultimum».

Ibidem ỷ. *6* post «non tale» insertum est «eiusmodi».

Ibidem ỷ. *10—11* in ed. I erat: «sit illud $= K + (\lambda = 0$ vel cuidam $+)$, et $(x'-\omega)^m = K - \lambda'$».

Ibidem ỷ. *9 a calce* «æqualis» correximus in «æquale».

Ibidem ỷ. *8 a calce* «(omnibus positivis)» inseruimus.

Pag. 99, ỷ. *6 a calce* pro erroneo «$p =$ vel $< \frac{1}{n}$, $p' =$ vel $< \frac{1}{n}$» rectius scripsimus: «$p < \frac{1}{n}$ et $p' < \frac{1}{n}$».

Ibidem ỷ. *4 a calce* pro «maius» clarius exposuimus «$> (m+1)\frac{a}{n}$».

Pag. 100, ỷ. *4*, verba «dum radix >1» inseruimus.

Pag. 102—103. In theoremate 8. eiusque demonstratione designatio »integer« significationem habet integri positivi. Ceterum demonstratio non penitus absoluta ita est supplenda: Si $N > 1$, supponatur m, quamvis magnum sit n, tantum ut fiat:

$$\frac{n+m}{n} > N \quad \text{id est} \quad m > n(N-1);$$

expleatur tum inæqualitas secunda pag. 103 sic:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^m > \frac{n+m}{n} > N > 1;$$

sponte sequitur inde, quamvis magnum sit n, dummodo $m > n(N-1)$ supponatur

$$\frac{n+1}{n} > \sqrt[m]{N} > 1,$$

itaque $\sqrt[m]{N} \sim 1$, si $m \sim \infty$.

Expleatur porro simili modo inæqualitas ultima sic:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^m < \frac{n}{n+m} < \frac{1}{N} < f < 1;$$

sequitur inde, quamvis magnum sit n, dummodo $m > n(N-1)$ supponatur, erit tamen

$$\frac{n}{n+1} < \sqrt[m]{f} < 1;$$

itaque $\sqrt[m]{f} \sim 1$ si $m \sim \infty$.

Pag. 103, ỳ. 9 rectius $\frac{n}{n+m}$ scripsimus pro $\frac{n}{m}$.

Pag. 104, ỳ. *8* mutavimus ex sententia ipsius Bolyai in ed. I indice rerum pag. X, 10-mo.

Pag. 105, ỳ. *8* æqualitatis signo intermedio falso apposito omisso et ordine inverso scripsimus:

$$z=B^{\frac{1}{m}},\quad z^n=\sqrt[m]{z^{mn}}.$$

Pag. 108, art. 16 ostendere vult difficultates, quæ oriuntur si potentiæ elementaris conceptum ita velis generalem reddere, ut rata maneat etiam si exponens incommensurabilis sit. At generalem potentiæ definitionem contineri serie exponentiali, si incommensurabiles et complexi exponentes occurrant, probat Bolyai pag. 193, 536, 546.

Ibidem ỷ. *1—2* quæ uncis inclusa sunt, ipsi inseruimus, et ỷ. 4 a calce particulæ »sed« substituimus »nam«.

Pag. 113, ỷ. *6—7 a calce.* Quæ hic uncis inclusa sunt a nobis inserta sunt; scilicet ex sententia auctoris multiplicatio ope imaginum (pag. 41, § 28) peracta est, sint videlicet termini imaginis secundum ordinem u, A, B, C, et primus terminus imaginis $u=1$, tunc terminum ultimum C productum (factum) duorum terminorum mediorum A et B esse dicit quoad $u=1$, et si duo termini medii æquales sunt, nempe $A=B$, secundum Bolyai $C=A^2$ quoad $u=1$, quod sic notat:

$$C=A^2\ (\text{quoad } u=1).$$

Eadem prorsus significatione accipiendum est factum $ABC\ldots$ (quoad $u=1$) et A^m (quoad $u=1$). Considerantes hoc modo notationis adhibito æquationes non facile posse primo conspectu percipi, potentiæ vero paginis 113—116 persæpe occurrere mentionem, pro A^m (quoad $u=1$) ubique designatione $[A^m]_{u=1}$, sumus usi.

Haud superfluum erit deductionem propositionis $f=Fk^{m-1}$ designationibus præcisioribus ita ad finem perducere: Ad instar imaginis secundæ (pag. 41, § 28) possunt apponi (pag. 112)

$$n\,\frac{u}{n}=u=1,\quad b'\,\frac{u}{n}\sim b;\quad n\,\frac{a}{n}=a,\quad b'\,\frac{a}{n}\sim f_1,$$

$$n\,\frac{U}{n\nu}=U=1,\quad b'\mu\,\frac{U}{n\nu}\sim b;\quad n\nu\,\frac{a}{n\nu}=a,\quad b'\mu\,\frac{a}{n\nu}\sim F_1;$$

sed

$$\frac{\mu}{\nu} \sim \frac{1}{k}$$

itaque

$$b'\mu\frac{a}{n\nu} \sim \frac{f_1}{k};$$

et quum itidem

$$b'\mu\frac{a}{n\nu} \sim F_1$$

habemus

$$F_1 = \frac{f_1}{k}$$

Si eiusmodi novus factor c accedat, constructis denuo schematibus

$$n^2 \quad \frac{u^2}{n^2} = u^2 = 1, \quad b'c' \quad \frac{u^2}{n^2} \sim bc; \quad n^2 \quad \frac{a}{n^2} = a, \quad b'c' \quad \frac{a}{n^2} \sim f_2,$$

$$n^2\nu^2\frac{U^2}{n\nu^2} = U^2 = 1, \quad b'c'\mu^2\frac{U^2}{n^2\nu^2} \sim bc; \quad n^2\nu^2\frac{a}{n^2\nu^2} = a, \quad b'c'\mu^2\frac{a}{n^2\nu^2} \sim F_2,$$

habemus

$$b'c'\mu^2\frac{a}{n^2\nu^2} \sim \frac{f_2}{k^2};$$

id est $F_2 = \frac{f_2}{k^2}$ &c.

Præbeat exemplum demonstratio regulæ sequentis:

$$[a^{rs}]_{U=1} = \left[\left([a^r]_{U=1}\right)^s\right]_{U=1} = \frac{[a^{rs}]_{u=1}}{k^{rs-1}}.$$

Nam

$$[a^r]_{U=1} = \frac{[a^r]_{u=1}}{k^{r-1}}$$

itaque

$$\left[\left([a^r]_{U=1}\right)^s\right]_{U=1} = \left[\left(\frac{[a^r]_{u=1}}{k^{r-1}}\right)^s\right]_{U=1} = \frac{1}{k^{s(r-1)}}\left[\left([a^r]_{u=1}\right)^s\right]_{U=1}$$

$$= \frac{1}{k^{rs-s}} \quad \frac{[([a^r]_{u=1})^s]_{u=1}}{k^{s-1}} = \frac{[(a^r)^s]_{u=1}}{k^{rs-1}}.$$

Ceterum tota hæc ratiocinatio præcipue id videtur sequi, ut viam præmuniat introducendi notionem quantitatis imaginariæ.

Pag. 119, $\dot{\mathrm{v}}$. *14* sponte patet, quia $\log. u = \log. 1 = 0$.

Pag. 121, initio capituli in hac pag. incipientis numero mendoso XXXI substituimus verum XXXII.

Ibidem $\mathring{\mathrm{v}}$. *12* capituli Bolyai habet: «Insigniantur realia quoad -1 puncto supposito; ex. gr. $\sqrt{-4}=\pm\underset{\cdot}{2}$»; nos scripsimus: «Insigniantur realia quoad -1 litera i postposita vel anteposita; ex. gr. $\sqrt{-4}=\pm 2i$.» Hanc veniam sumpsimus nobis ut lectionem facilitemus, nam designatio Gaussii universim recepta suo sponte applicat se ad mentem Bolyai nostri; litera i eodem modo quo punctum Bolyaii pro abbreviatione locutionis «quoad $u=-1$» est sumenda; et hæc est causa, cur pro 1 non scripsimus i sed $1.i$.

Pag. 122. $\mathring{\mathrm{v}}$. *14. a calce* pro $2.\pm 3$» scripsimus «± 2.3».

Pag. 124, $\mathring{\mathrm{v}}$. *15* post vocabulum «realis» addidimus: «positiva».
Ibidem $\mathring{\mathrm{v}}$. *9 a calce* pro «& varietur» scripsimus «varietur &».
Ibidem $\mathring{\mathrm{v}}$. *8 a calce* «(per 1.2.3)» delevimus.

Pag. 130, *sub* 3. $\mathring{\mathrm{v}}$. *4* pro «$x^m \doteq a$» scribendum fuit «$x^m = a$».
Ibidem $\mathring{\mathrm{v}}$. *12*, pro

$$«x=\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}»$$

scribendum fuit:

$$«x=\sqrt[m]{a}\doteq\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}».$$

sic etiam in sequentibus $\mathring{\mathrm{v}}$. *13 et 14* signo $=$ substituimus $\doteq$.

Pag. 134, $\mathring{\mathrm{v}}$. *9 a calce* vocabula «parenthesi nova» occurrunt; in ed. I nempe cuique signo $\sqrt{\ }$ parenthesis erat subiuncta.

Ibidem $\mathring{\mathrm{v}}$. *3 a calce* numerus valorum falso 32 dictus in 16 mutatus est.

Pag. 135, $\mathring{\mathrm{v}}$. *4* ante vocem «item» verba «primum nempe et ultimum» uncis inclusa deleta sunt, porro pro «per 2.2» rectius scripsimus «per 2» sicut et pro «$2.2.2.2.2=32$» posuimus «$2.2.2.2=16$».

Pag. 136 capiti in hac pagina incipienti numerum iustum XXXIII præposuimus loco erronei XXXII.

Ibidem ℣. *7 a calce* «pactor» correctum est in «pacto».

Pag. 140, ℣. *1 et 2* signis communibus $+-$ utimur pro ⊣+⊢, ⊢⊣, et ℣. 13 intra uncos post «minuendo» vocem «dicto» omisimus.

Pag. 144, ℣. 7, «$u=\frac{x'i}{n}$» adiecimus, at ℣. 9, «(si $x'i:n$ dicatur u)» delevimus.

Pag. 145, ℣. *7 a calce* interpunctione mutata pro «Quod» debuit scribi «quod».

Pag. 146, ℣. *4 a fine art. 6.* pro «$q+\frac{D-dq}{d}.d$» rectius scriptum est «$\left(q+\frac{D-dq}{d}\right)d$».

Pag. 148, ℣. *8* pro «$\sqrt{3}$ ipsi α» scripsimus «3 ipsi α^2».

Ibidem ed. I in ultima formula theorematis sub 10. exhibiti et typothetarum menda et in demonstratione subsequenti errores per incuriam admissos habuit, quos omnes emendavimus, ut puta: ℣. 6 a calce pro «valores numero pq» scripsimus, «valores numero non maiore quam pq» sed suppressimus, quæ post «ipsius $\sqrt[pq]{P^{nq}\,Q^{mp}}$» sequebantur, nempe: «neque huius alius valor est, quia nonnisi numero pq sunt». Porro in ultima æquatione huius paginæ pro $=$ scriptum est $\Leftarrow$.

Pag. 149, ℣. *6* rectius visum est «$\Longrightarrow$» scribere pro «$=$».

Ibidem sub 12. ed. I ubique signum idem $=$ habet; ℣. 3 addi placuit «Ita». Hic allegatur theorema (pag. 105), — quum tamen ibi demonstratio de quantitatibus realibus solis esset facta — hic supplendum est theorema pag. 129, ℣. 3 a calce exhibitum, secundum quod æquatio

$$\sqrt[m]{a} \Longleftrightarrow \sqrt[m]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[m]{b}$$

etiam pro numeris complexis rata est, ideoque etiam

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}\ .$$

Ibidem $\dot{y}$. *6 a calce* sub signo $\sqrt{}$ ultimo Q^{vp} corrigendum est in Q^{mp}.

Pag. 152. Deductiones inde a $\dot{y}$. 8—16 factæ eo magis valebunt si

$$\pm e < \frac{h}{h+1}$$

fuerit, quocirca certe constabit

$$\pm e^n < \frac{h^n}{(h+1)^n}$$

esse.

Pag. 153, sub 17, $\dot{y}$. *3;* itemque *pag. 158, art. ultimo* $\dot{y}$. *1,* pro «sequente» scriptum est «sequenti».

Pag. 155, num. XXXIII in XXXIV, item *pag.* 161, num. XXXIV in XXXV erat mutandus.

Pag. 162, $\dot{y}$. *15 et 16* pro: «tam e, quam $x \pm$ est» scripsimus «tam e, quam x cum $+$ est».

Pag. 164, $\dot{y}$. *1,* verba «signo — sublato» addidimus. Bolyai in hoc capitulo differentiam inter signa $> <$ et $\gtrdot \lessdot$ non satis accurate observavit, quod suo quoque loco emendatum est.

Pag. 166, In fine art. 4. sententia auctoris non satis clare est exposita: ceterum theorema initio articuli propositum planissime demonstratum est.

Ibidem $\dot{y}$. *10 a calce* inter x et e coniunctionem «et» inseruimus.

Ibidem $\dot{y}$. *4 a calce* et tum porro pro i introducta est litera r, in hac enim editione i imaginaria denotat.

Pag. 168, v̇. *7 a calce* et deinde porro pro litera r, cui aliam significationem tribuimus, introducta est litera l.

Pag. 170 et seqq. ubi Bolyai literis M, N . . . numeros Romanos denotat, loco »$M-1$, $N-1$, $N+1$, . . .» distinctionis causa visum est scribere »$[M-1]$, $[N-1]$, $[N+1]$, . . .»; porro *pag.* 171 siglis »$\overset{*}{M}$, $\overset{*}{M}'$» substituimus »$[2M]$, $[2M']$».

Pag. 171, v̇. *9.* Pro »et altera $\doteq A'$» satius videbatur apponere ipsam æquationem:

$$«1 \dotplus I'x \dotplus II'x^2 \dotplus \cdots \doteq A'»$$

Ibidem v̇. *10 a calce* addi potest illustrans hoc supplementum: »itaque, quum $\mathring{u}\mathring{u}' \doteq AA'$ et $uu' \doteq AA'$,

$$\mathring{u}\mathring{u}' - uu' \doteq 0,$$

unde pro m quamvis magno fieri potest

$$\mathring{u}\mathring{u}' - uu' \lessdot \lambda.$$

Pag. 172, v̇. *2* Bolyai scripserat »ac positiva $\lessdot \lambda$ fuerit», hinc substitutum est: »ac omnium terminorum positive acceptorum summa $\omega' \lessdot \lambda$ fuerit».

Ibidem v̇. *penultimo* loco »si n non sit $\lessdot \dfrac{e+f}{1-f}$» scriptum est »si $n \gtrdot \dfrac{e+f}{1-f}$».

Pag. 173 v̇. *6* pro »$f = \dfrac{h+\lambda}{k}$» scriptum est »$f = \dotplus \dfrac{h+\lambda}{k}$».

Ibidem v̇. 8. pro

$$«f\frac{k}{h} = \frac{h+\lambda}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{h+\lambda}{h} \gtrdot 1»$$

scriptum est:

$$\dotplus f\frac{k}{h} = \dotplus \frac{h+\lambda}{k} \cdot \frac{k}{h} = \frac{h+\lambda}{h} \gtrdot 1».$$

Ibidem ỷ. *15*, *ed. I* habuit æquationes sequentes:

$$A+B=A\left(1\longmapsto\frac{e-n}{n+1}\cdot\frac{k}{h}\right)\quad\text{et}\quad C+D=C\left(1\longmapsto\frac{e-n-2}{n+3}\cdot\frac{k}{h}\right)$$

quæ erroneæ sunt.

Ibidem ỷ. *16 et pag. 174* transscriptio facta est ex præcepto auctoris (Vide ed. I, errata pag. LIX—LX).

Ibidem ỷ. *4 a calce* «$(1+x)^r$» scriptum est pro «$(1+x)$».

Ibidem ỷ. *2 a calce* inseruimus «(k et h positivis)».

Pag. 173 in nota sub * ex. ed. I. pag. LIX addita:

ỷ. 1, pro «$\frac{e-n-2}{n+3}$» scriptum est: «$\frac{n+2-e}{n+3}$»

ỷ. 2, « «Accipitur» « « «Accipiatur».

ỷ. 3, « «$\frac{e-n}{n+1}$» « « «$\frac{n-e}{n+1}$» et

« «$e-n$ negativ.» « « «$n-e$ positivum».

ỷ. 4 pro «maius negativum prodit» scriptum est: «maius prodit» et pro «veræ negativo» scripsimus «veræ positivo.»

Pag. 174, ỷ. *5* post $\frac{e-n}{n+1}$ vox «decrescens» deleta est.

Ibidem ỷ. *11* a calce pro «posterioribus» scriptum est «postremis.»

Pag. 175, ỷ. *6*. Conclusionem: «summa seriei tendit ad ∞» addidimus.

Ibidem ỷ. *15* post voces «ut summa eorum» ed. I hæc habet: «si e exponens seriei qui ad a est, constans maneret, sit $=$ aut $> b$ . . . &c»; item ỷ. 18 post parenthesim erat: «sit $=$ aut $> b$». Hæc mutavimus ut sententia auctoris facilius intelligatur. Theorema in art. 7. propositum aliter et sic potest pronuntiari: Sint duo termini se invicem excipientes cuiusdam datæ seriei in genere u_n et $u_n \cdot e$, ubi $e < 1$, positivum et a certo quodam termino incipiendo non decrescens; si qualecumque quoddam e supponatur constans, series geometrica construatur, cuius exponens sit istud e, et si summa terminorum certi numeri huius seriei non fuerit minor quam numerus constans b, series data certe divergens erit. At enim

$$b=u_n+u_n.e+\cdots+u_n e=u_n\frac{1-e^{n-1}}{1-e}$$

et inde sequitur

$$u_n<b<\frac{u_n}{1-e}$$

si igitur limes $\frac{u_n}{1-e}$, cum n infinite magnum fuerit, non erit 0, series data divergens erit. Sensu inæqualitatis huius est sumptum b in exemplo pag. 176 allato; cumque porro identice sit

$$\frac{u_n}{1-e}=u_n:\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\frac{u_n^2}{u_n-u_{n+2}}$$

hoc criterium divergentiæ idem est cum criterio pag. 177 exposito.

Pag. 176, $\dot{\gamma}$. *11* omissis uncinis et »$=\frac{1}{2^2}$« superfluis simpliciter scripsimus »$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$«; similiter $\dot{\gamma}$. 13 signo $=$ substituimus $>$.

Pag. 177, $\dot{\gamma}$. *11* incipit observatio ipsius auctoris, quam pag. LXXXVI ed. I exposuit, quæque hic videbatur inserenda. Theorema hic propositum demonstratur pag. 588/9.

Pag. 178, $\dot{\gamma}$. *10 a calce.* Propositio ab auctore citata singularis casus est eius, qua hic usus est. Si spectes propositionem non esse distincte enuntiatam, accipe hic accuratam demonstrationem propositionis ipsius:

Si

$$\frac{u_1}{v_1}\frown 1,\ \frac{u_2}{v_2}\frown 1,\ \ldots,\ \frac{u_m}{v_m}\frown 1,$$

tum etiam

$$\frac{u_1+u_2+\cdots+u_m}{v_1+v_2+\cdots+v_m}\frown 1$$

excepto eo casu, si maximum valorem v_i per v_j notando sit:

$$\frac{1}{v_j}(v_1+v_2+\cdots+v_m) \frown 0.$$

Nam sit N quamvis magnum et qualecumque, semper erit:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} u_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i} - 1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i\left(\frac{u_i}{v_i} - 1\right)}{\sum_{i=1}^{m} v_i} < \frac{\sum_{i=1}^{m} \pm v_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i} \cdot \frac{1}{N}$$

quia pro eodem N

$$\frac{u_i}{v_i} - 1 < \frac{1}{N}, \quad (i=1,\ 2,\ \ldots\ m)$$

fieri potest.

Denotetur per v_j maximus valor cuius v_i capax est, erit:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \pm v_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i} < \frac{m}{\frac{1}{v_j}\sum_{i=1}^{m} v_i};$$

hoc est, si casum supra allatum excipias, finita quadam quantitate minus, et inde cum N ut vis augere liceat

$$\sum_{i=1}^{m} u^i : \sum_{i=1}^{m} v_i \frown 1,$$

quod erat demonstrandum.

Pag. 178—80. Ad theorema generale hic tractatum spectant sequentia tom. I, ed. I, pag. LXXXVI exhibita:

> «In opere hungarico dicto (pag. 154) aliter demonstratur.
>
> Nempe si duarum serierum convergentium termini t et u fuerint, summæque terminorum usque ad p-tum fuerint T et U, atque t et T ab n (quod utvis augere liceat) depen-

dentia sint, U vero et quodvis ipsorum u constantia maneant: tum si $\frac{t}{u} \rightharpoondown 1$, nempe pro dato utvis magno N detur tale n, idem pro omnibus dictis terminis, ut

$$t - u \lessdot u : N, \quad \text{adeoque} \quad t - u = f\varrho u,$$

per f fractionem veram positivam vel negativam intelligendo, atque ϱ scribendo pro $1 : N$; tum erit $T \rightharpoondown U$; imo si terminorum post t_p sequentium summæ (proprie summarum limites) fuerint τ et ω, series ipsius u erit $U + \omega$, et series ipsius t erit $T + \tau$; atque

$$T + \tau - (U + \omega) \rightharpoondown 0,$$

si $p \rightharpoondown \infty$.

Nam $T - U$ tendit ad zero et tam τ quam ω limite 0 gaudent, quum series convergentes sint; adeoque et $\tau - \omega$ limite 0 gaudet, eritque $T + \tau \rightharpoondown U + \omega$.

Quod T tendit ad U, patet, si (in æquationibus sequentibus additis)

$$\begin{aligned} t_1 - u_1 &= f_1 \varrho u_1, \\ t_2 - u_2 &= f_2 \varrho u_2, \\ &\cdots\cdots \\ t_p - u_p &= f_p \varrho u_p, \end{aligned}$$

columna ad dextram ponatur $= x \varrho U$; eritque

$$x = \frac{f_1 u_1 + f_2 u_2 + \ldots + f_p u_p}{U}.$$

Et si terminus in numeratore is, quo nullus maior est, sit k, accipiaturque positive et realiter, columna ad dextram non erit maius quam $p k \varrho U : U$ idest $pk : N$. Hoc autem tendit ad limitem zero; nam sit $k = f_h u_h$, hoc minus est quam u_h, adeoque pk minus quam pu_h, itaque finitum pro dato quovis p est, N autem tendit ad ∞, quum N manente p et k utvis augere liceat; si ex. gr. pro dato utvis parvo λ accipiatur $N \gtrdot pk : \lambda$, fiet $pk : N \lessdot \lambda$; et si detur tale n pro quibusvis terminorum dictorum, accipi maximum eorum potest.

Applicatum hoc ibidem est ad demonstrandum, quod $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ et

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\ldots$$

limite eodem gaudent, si $n \frown \infty$ et plura alia.

Sensit defectum demonstrationis ipse Bolyai, quando — in emendatione pag. 635 ў. 15 — sibi profecto conscius singulari cum gravitate premit terminos residuos serierum tam constantium quam variabilium t_p et u_p simul, minores fieri debere quamvis parvo valore, qui cogitari potest, dummodo p sat magnum sit. Demonstratio auctoris strictior fit in applicationibus — in Tentamine una tantum invenitur applicatio (pag. 179, 180), in opere Hungarico plures sunt; nam ubique in duas partes dividitur eius demonstratio: ostendit quidem prius terminis residuis serierum tractatarum tam constantium quam variabilium t_p et u_p huic criterio satisfieri, et postea monstrat summarum terminorum priorum p — numero finito — utriusque seriei differentiam $T_p - U_p$ minorem fieri quam valorem quamvis minimum cogitatum, *dummodo parameter seriei variabilis n maior sit valore quodam satis magno*, unde deducit

$$T_p+t_p-(U_p+u_p) \frown 0, \quad \text{si} \quad n \frown \infty.$$

Post hæc ad pag. 180 adhuc notandum est, numerum N ut et pag. 178 liquido apparet, in inæqualitatibus primis non esse necessario unum eundemque, sed posse occurrente casu etiam maiorem fieri quam ў. 6.

Pag. 179, ў. *6 a calce* pro «$\frac{1}{N}$» posuimus «$1+\frac{1}{N}$».

Pag. 181, ў. *1—2* in ed. I sic habebantur: «tum pro illo m quivis quotus eiusmodi (ut antea) fit $< \frac{1}{N}$; adeoque et factum ex eiusmodi factoribus est $< \frac{1}{N}$, quum $N > 1$ ponatur.»

Pag. 182 numerus XXXV in XXXVI est mutatus uti convenit.

Pag. 184, $\dot{\text{y}}$. 13 signum $=$ inter $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{na}$ et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a}$ supplevimus.
Ibidem $\dot{\text{y}}$. 20 pro «$\frac{(-2a)}{a}$» emendatius scriptum est «$\frac{1-2a}{a}$».

Pag. 189. Inde ab art. 2 ex instituto nostro pro «*i*» ubique scripsimus «*j*».

Pag. 192, $\dot{\text{y}}$. *ultimo* in parenthesi «-1» erroneum in «-2» mutavimus.

Pag. 194—195. Bolyai pag. 195 inde a vocabulis «Datur autem pro quibusvis realibus A, B, cet.» incipiendo logarithmi definitionem plane ad sententiam nostri ævi exhibet. At contra definitio «logarithmi elementaris», uti pagg. 51 et 96 legitur, sicut pag. 194 a vocibus «Nempe (pag. 51 et 96) est cet.» incipiendo exempla allata manifesto ostendunt, omnino laxa, poterimus dicere, soluta est. Conclusio inde sequens, a Bolyai silentio suppressa, est, hanc laxam et solutam definitionem reiiciendam esse. (Cf. pag. 536 § 12).

Pag. 195, $\dot{\text{y}}$. *4—5* nota vocabulum «decies millionesima» pro «centies centum millesima.»

Pag. 197 et ss. Ed. I potentias functionum trigonometricarum hoc modo notat «cos. x^m, sin. x^m . . .» In hac editione pro his ubique aut «(cos. $x)^m$, (sin. $x)^m$ . . ., aut «cos.^{m} x, sin.^{m} x . . .» posuimus.

Pag. 199, $\dot{\text{y}}$. 5, pro «(Fig. 17)» scribi debuit «(Fig. 17. bis).»
Ibidem $\dot{\text{y}}$. 9 verso ordine pro «$>ab$ aut $<ab$» scripsimus «$<ab$ aut $>ab$».

Pag. 200, $\dot{\text{y}}$. *11* vocabulum «inde» addidimus.

Pag. 201, art. 5, $\dot{\text{y}}$. *1* vocabulum «superius» deletum est sicut et

$\dot{\text{y}}$. *3* deleta sunt «C superius». $\dot{\text{y}}$. *7* totus insertus est, sicut et $\dot{\text{y}}$. *9* vocabulum «inde».

Ibidem, art. 6. $\dot{\text{y}}$. *1* «$=e^{a\sqrt{-1}}$» deletum est; porro $\dot{\text{y}}$. *7* exeunte pro «$e^{a\sqrt{-1}}$» scribendum fuit «$e^{2a\sqrt{-1}}$».

Pag. 203, $\dot{\text{y}}$. 2 mendum typothetæ emendantes pro «log.» scripsimus «log. (—3)».

Pag. 204, $\dot{\text{y}}$. *1* textus pro «præcedente» scripsimus «præcedenti».

Pag. 206, $\dot{\text{y}}$. penultimo quoad definitionem functionis absolutæ cf. ed. I, pag. LXII, tomi I et ed. huius pag. 593.

Pag. 207, $\dot{\text{y}}$. *12* ex instituto «sequenti» scriptum est pro «sequente.»
Sequentibus versibus loco denotationum a Bolyai propositarum pro commodo lectoris alias adhibere visum est, ita scripsimus:

$\dot{\text{y}}$. *3* pro "$\partial \obar x$ . . . $\partial'' f(x, \ldots)$
» $\partial \obar x$ . . . $\partial f(x, \ldots)$
$\dot{\text{y}}$. *4* » "$\partial'' \obar x, y$ . . . $\partial''_{,} f(x, y \ldots)$
» $\partial''_{,} \obar x, y$ . . . idem
$\dot{\text{y}}$. *5* » $\partial_{,} \obar x, y$ . . . $\partial_{,} f(x, y, \ldots)$

Porro notandum est in ed. I inter artt. 2 et 3 huius paginæ inserta fuisse sequentia:

Interim ut Tyrones, partim per literas antepositas factores per superius ad dextram positas vero (quod etiam fieri solet) exponentes intelligere consveti, minus confundantur; et partim tradenda clarius discernendo facilius percipere queant: liceat diversas functionum formas ipsas arcubus, penitus aut magis minusve, supra vel infra aut circumcirca literam numerum aliudve signum clausis, denotare; ea cum determinatione, ut signum ita inclusum per id, quod clausum est, amittat vim quidquam aliud præter functionis formam denotandi, etsi non clausum aliudquid denotaret.

Ex. gr. ⦶x, ⦶x, $y\ldots$, Ⓐx, $(A)x$, $(B)x$, $(F)x$, $(U)x$, $(a)x$, $(b)x$, $(f)x$, $(u)x\ldots$, &c, functiones quasvis significare possunt. Ita $(s)x$ potest sinum arcus x, $(\backsim)x$ sinum versum, $(t)x$ tangentem, $(\S)x$ secantem, $(S)x$ cosinum, $(\backsim)x$ cosinum versum, $(T)x$ cotangentem $(\S)x$ cosecantem; quorum pleraque uno calami tractu scribi possunt.

Ita si z sit $\sin x$, arcus ipsius z per $(a,s)z$, et si a sit $\mathrm{tang}\, x$, arcus ipsius u per $(a,t)u$; ita log. nat. y per $(l)y$, log. vulg. y per $(L)y$, et numerus cuius logarithmus z est, per $(n, l)z$, vel $(n, L)z$, denotari potest.

Hæc omnia designationes in hac editione adhibitas spectantes omittenda censuimus.

Pag. 208, sub 3. ỷ. *1*, mutato tantum verborum ordine scriptum est «iam in $A(x)$ substituatur $x+i$ ipsi x».

Ibidem ỷ. *11* recte scribendum fuit «$\dfrac{A(x+i)-A(x)}{i}$» pro «$\dfrac{(A)(x+i)}{i}$».

Ibidem sub 4. erroneum «ipsi i» emendavimus scribendo «ipsi x».

Pag. 209, ỷ. *12*, pro «$(A)3\dot{x}-(A)(3-2)\dot{x}$» scripsimus ut res postulat «$A(3\dot{x})-A(2\dot{x})$».

Ibidem art. 4 versu ultimo vocabulum «seriei», quod Bolyai post vocem «terminus» per oblivionem omiserat restituendum censuimus, hic enim ubique «terminus seriei generalis» tractatur.

Pag. 210, ỷ. *5*, quæ hoc loco in ed. I inter vocabula «generales» et «denotentur» inserta fuere, ordine paulum mutato in ỷ. *6* et *7* relegavimus hoc modo: pro

$$\text{«}(A)m\dot{x}-(A)(m-1)\dot{x} \quad \text{et} \quad (B)m\dot{x}-(B)(m-1)\dot{x}\text{»}$$

ex instituto nostro scribendo

$$a(m\dot{x}) = A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$$
$$b(m\dot{x}) = B(m\dot{x}) - B((m-1)\dot{x}).$$

Ibidem ad locum ultimum nota definitionem functionum absolutarum et non absolutarum inveniri in ed. I, pag. LXII, sub III et in hac ed. pag. 593.

Pag. 211, $\dot{y}$. 6, post «idem» inserendum censuimus: «et in serie huius $A(x)$ termini omnes eodem signo gaudeant»; secus enim pro inæqualitate $U - A < \frac{A}{N}$ scribendum esset

$$U - A < \frac{\pm a(1\dot{x}) \pm a(2\dot{x}) \pm \cdots \pm a(n\dot{x})}{N}.$$

Conditioni restringenti in functionibus hic tractatis intervallum o et $n\dot{x} = \alpha$ apte dividendo semper satisfieri potest. (Cf. pag. 611 sub III.)

Pag. 212, *loc. penultimo*, posse n pro quovis N ita augeri, ut quando $\frac{\gamma}{\beta} > 0$ fuerit, quodvis ipsorum $f, g, h, \ldots$ (fig. 19) sit minus quam nominis eiusdem litera maiuscula per N divisa, et quidem pro eodem n, etiam ex sequentibus manifestum fit. Pro $y = \beta x + \gamma$ et $\omega = \beta\dot{x}$ est:

$$\frac{h}{H} = \frac{\frac{1}{2}\omega\dot{x}}{\dot{x}(3\beta\dot{x} + \gamma) - \frac{1}{2}\omega\dot{x}} = \frac{\frac{1}{2}\beta\dot{x}\dot{x}}{\dot{x}(3\beta\dot{x} + \gamma) - \frac{1}{2}\beta\dot{x}\dot{x}} = \frac{\beta\dot{x}}{(2.3 - 1)\beta\dot{x} + \gamma}$$

et generaliter

$$\frac{u(m\dot{x}) - a(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = \frac{\beta}{(2m-1)\beta\dot{x} + \gamma}\,\dot{x}.$$

Tum ut fiat

$$\frac{\beta\dot{x}}{(2m-1)\beta\dot{x} + \gamma} < \frac{1}{N}$$

scilicet quod idem est

$$\frac{1}{2m - 1 + \frac{\gamma n}{\beta x}} < \frac{1}{N}$$

sufficiet pro $\frac{\gamma}{\beta} > 0$ accipere

$$\frac{\gamma n}{\beta x} \geqq N, \quad \text{sive} \quad n \geqq \frac{N\beta x}{\gamma}.$$

Si vero $\gamma = 0$ est non potest tale n reperiri pro *quolibet* m; nam pro $m > \frac{1+N}{2}$ est

$$\frac{u(m\dot{x})-a(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = \frac{1}{2m-1} < \frac{1}{N};$$

unde pro m substituendo $\frac{nq}{x}$ sequitur loco conditionis pag. 213 ẏ 6 a calce indicatæ sufficere $n > \frac{(1+N)x}{2q}$ accipi.

Si vero pro $\gamma = 0$ sit $n < \frac{(1+N)x}{2q}$, hoc est $m < \frac{1+N}{2}$, erit etiam

$$\frac{u(m\dot{x})-a(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} > \frac{1}{N}.$$

Notandum etiam in ed. I. ultimis æquationibus pag. 213, interpositas fuisse has imagines transitorias »$x : \frac{(N+2)xq-qx}{q}$« et »$\frac{1}{N+2-1}$«, quæ ut superfluæ omissæ sunt.

Pag. 212, ẏ. *5 a calce*, post »sit« insertum est »et $y = \beta x + \gamma$«, quapropter et in sequentibus ubique γ est scriptum pro α; porro in ẏ. proximo et pag. 213 x intervallum est, quod pag. 209. per α erat denotatum.

Ibidem ẏ. *2* pro »$<$« scriptum est »non $<$«.

Pag. 216, *loc 3* in ed. I constans litera k designatur, cui alibi ubique c est substituta.

Ibidem, *loc. 4*, Peculiaris designatio integralium determinatorum hic adoptata amplius non occurrit, itaque lectori nullam adferet difficultatem, quapropter in hac editione non mutandam censuimus.

Pag. 217 ẏ. *12* vocabula »per $\partial A(x)$, $\partial B(x)$ denotatum« inserta sunt. (Est hæc emendatio ipsius Bolyai ed. I, tom. I, pag. XXXVI exhibita.)

Pag. 220 $\dot{y}$. 4 «suppositie» per errorem typothetæ mendosum mutatum est in «suppositive.»

Pag. 220 $\dot{y}$. 6 *a calce* «Summa vero coefficientis omnis . . .» (hungarice: «minden coefficiensnek») soloecismus est, pro quo lege: «Summa vero coefficientium omnium, per quos litera puncto insignita $\dot{x}$ multiplicata est &c.» Nempe hic *derivata* ipsius $A(x, y, \ldots)$, signis consuetis scripta, sequens intelligitur:

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\cdots$$

Pag. 220. $\dot{y}$. 5. Editio prima pro $y(m\dot{x})$ scripsit $y*m\dot{x}$ etc.

Pag. 221, $\dot{y}$. 1 *et* 2 litera $\dot{x}$ per errorem typothetæ istis functionibus præposita deleta scriptum est $a(x)$, relative $a(m\dot{x})$.

Pag. 222, *sub* 15 in fine «et idem quoad derivatam probabitur» spectat ad $\dot{y}$. 3—5 pag. 344, ubi legitur: «et derivata quoque sit summa derivatarum quoad singulas variabiles acceptarum».

Pag. 223, $\dot{y}$. 7 pro «m» scribendum censuimus «x». Errorem calami vel typothetæ fuisse suspicamur, sed non plane manifestum est.

Ibidem $\dot{y}$. 14. Bolyai tacite supponit, etiam differentialium seriem convergentem esse.

Pag. 225, articulis in hac et sequentibus paginis sub VI expositis pro numeris literas præposuimus.

Pag. 227, *sub g)* in editione originaria sic ordiebatur auctor: «Si terminorum plurium summa ad exponentem $+$ vum elevata sit derivata &. . .» Ex ipso tenore contextus liquido apparet pro «elevata» scribendum fuisse «elevatorum», quod et ei substituimus simul vocem «integrum» inserendo.

Pag. 228, art. 1. Demonstratio hæc non omnino valet, irrita enim fit nisi series integranda *absolute* convergens sit.

Pag. 229, etiam hic singulis articulis sub VII comprehensis pro numeris literas præposuimus.

Ibidem, art. d) ẏ. 5, sententia clarior fuerit, si a verbis «per x vero . . .» incipiendo pro iis, quæ nunc leguntur, scripseris: «per $a+x$ vero distantiam puncti variabilis ipsius M a plano P intelligendo».

Pag. 230—231. Hic et ubique cuivis integrali et functioni primitivæ accensenda est constans etiam si non fuerit adscripta, ut ipse auctor pag. 232 sub finem art. VIII, *a)* monet.

Ibidem, ẏ. ultimo ed. I habuit: «Solet hoc, quod ∂v sit $= \partial\partial s$ sive $\partial^2 s$ . . .» ubi pro ∂ scribi oportuisse d manifestum est.

Pag. 232. 11 pro «$\int gt$» lege «$\int g\acute{t}$»; ubi etiam nota ordinem ed. I paullo mutatum esse.

Pag. 232 ẏ. 12. Vocabulum «posita» post «constante» delendum censuimus.

Pag. 232. In fine art. VII pro «$\int^2 gdt$» scripsimus «$\int dt \int gdt$» quod facilius legetur.

Pag. 233, ẏ. 2 a calce inseruimus «constante posito 0».

Ibidem ẏ. 13. Fig. 21 non convenit cum textu, itaque corrigenda erat; æquabilitatis causa pro α est a positum.

Ibidem ẏ. ultimo post «$A(x)=0$» additum est «pro $x=a-b$» facilioris lectionis causa.

Pag. 234 ẏ. 1—5 plures typothetæ errores irrepserant, quos emendavimus. Habuit enim ed. I hoc loco: «erit

$$A(0) = B(0) - B(x) + A(x) = -B(x) = -\left(bx + \frac{x^2}{2} - ax\right) =$$

$= ax - bx - \frac{x^2}{2}$, quod (pro $x = a - b$) est

$= a(a-b) - b(a - b - \frac{(a-b)^2}{2}$, et hoc (reducendo ad denom. eundem) est

$$= \frac{(a-b)\,(2a - 2b - (a-b)}{2} = \frac{(a-b)^2}{2}.»$$

Ibidem in ultima æquatione art. *b)* pro «—» scripsimus «↦» et signo «=» substituimus «≔».

Pag. 235—237, art. b). Exacta descriptio *areae hyberbolae* exposita est pag. 237 sub *c)* in ultima sententia particulæ primæ. Item soliditas hyperbolæ a plano circuli per af descripti incipit et extenditur in infinitum in directione asymptotæ, quæ axis rotationis est.

Pag. 238, loc. ultimo ed. I hæc habebat:

«Nam seriei summa tota esset (per 162)

$$\lessdot u : \left(1 - \frac{u^2}{2}\right) = \frac{2u}{2-u^2}$$

et

$$u : \frac{2u}{2-u^2} = \frac{2u - u^3}{2u} = \frac{2-u^2}{2}$$

quod $\leftharpoondown 1$, dum $u \leftharpoondown 0$.»

Certe in hac expositione aliquid incongrui latet. Est enim series exponentium seriei

$$\frac{u}{2}, \frac{2u}{3}, \frac{3u}{4}, \ldots$$

quorum quisque $\overline{\overline{\gtrdot}}\, \frac{u}{2}$ quod $\gtrdot \frac{u^2}{2}$ (quia $u \lessdot 1$).

Itaque

$$s \gtrdot u + \frac{u^3}{2} + \frac{u^5}{4} + \cdots \text{ id est } s \gtrdot u : \left(1 - \frac{u^2}{2}\right);$$

esse vero

$$s < \left(u + \frac{u^2}{2}\right) : (1 - u^2)$$

manifestum est, quisque enim exponentium seriei ipsius s est $< u$, eoque magis $< u^2$.

Pag. 239 ỷ. *9 a calce* post «log. z» adiecimus «$+$ constans», quia modus eruendi hanc constantem in sequentibus exponitur.

Pag. 240, ỷ. *2* pro «$0-(A)p = 0-(B)p$» scriptum est:

$$A(p) = B(p) \quad \text{et} \quad A(p) - B(p) = 0.$$

Pag. 242, ỷ. *ultimo* pro «$u = kv$», quod error calami esse videtur, scriptum est: «$a(x) \doteq kb(x)$.»

Pag. 244, ỷ. *5 et 6*. Quæ ed. I hoc loco habet, minime conveniunt cum præcedentibus, et facile apparet aliquem latere errorem, pro «est $< \frac{1}{5}$» enim ibi legitur «est $< \frac{1}{5} : \left(1 - \frac{5}{7}\right) = \frac{7}{(7-5) \cdot 5}$»; porro ubi ỷ. 6 fuisset scribendum: «erit defectus $< \frac{1}{\mu+2} \frown 0$» scriptum est: «erit $< \frac{\mu+2}{(\mu+2-\mu) \cdot \mu} = \frac{\mu+2}{2\mu} \frown 0$».

Pag. 244 et 245 tota evolutio huius exempli *h)* in hac editione differt ab ed. I. Ibi enim iam ipsa evolutio termini $\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ aliter apparet, nam ed. I. habet:

$$u = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.1.}{2.4} x^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} x^6 + \cdots\right)$$
$$= \quad x + \frac{1}{3.2} x^3 + \frac{1.1}{5.2.4} x^5 + \frac{1.1.3}{7.2.4.6} x^7 + \cdots$$

pro quo ed. II. recte sic scribit:

$$u = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1.3}{2.4}\, x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\, x^6 + \cdots\right)$$
$$= \; x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Itaque denominator in calce pag. 244 appositus est:

$$2 \,.\, 4 \ldots (2n-2) \,.\, (2n-1)\, 2^{2n-1}, \quad \text{pro} \quad (2n-1)\, 2 \,.\, 4 \ldots 2(n-1)\, 2^{2n-1}$$

quod re quidem idem est, sed forma differt, neque cum præcedentibus congruit. Nihil ergo mirum est, si initio pag. 245 (pag. 214 ed. I) error ex evolutione seriei ortus continuatur, et exponentem seriei ultimæ

$$(2n-3) \frac{(2n-1)\, 2^{2n-1}}{(2n+1)\, 2n \,.\, 2^{2n+1}}$$

facit et < 1 ponit, cum $< \frac{1}{4}$ debuisset poni. Hæc in ed. II correcta sunt, et præterea pag. 245, ỷ. 3. vocabulum «calculata» addi placuit luciditatis causa.

Pag. 248, c) Hic auctor motum rectilineum supponit, qui eodem tendit quo vis ipsa agere nititur.

Pag. 251—253. Errores calculi vel calami, qui ipso Bolyai fatente (vide ed. I, pag. LXXII) hic irrepserant, secundum indicationem ibi datam correcti sunt. At in ỷ. 3—5 a calce pag. 253 alter error attentionem auctoris fugerat, ibi enim in ed. I. hæc leguntur: «et si hoc addatur velocitati priori, quam formula superior ad superficiem terræ dat, prodit velocitas «finita ad centrum».

Applicando enim principium de vi viva prodit

$$\frac{v^2}{2} = r^2 \frac{g(a-r)}{ar} - \int_r^z \frac{gz}{r}\, dz,$$

id est;

$$v^2 = \frac{2g}{a}\, r(a-r) + \frac{g}{r}\, (r^2 - z^2)$$

unde pro $z=0$ sequitur;

$$v^2 = \frac{2g}{a} r(a-r) + gr.$$

Pag. 256. Art. 1. Experimenta in hunc finem instituta satis prope videntur accedere ad suppositas a Bolyai rationes; pro $\frac{1}{2}$ scilicet ratio prope $\frac{2}{5}$ est.

Ibidem art. 2 clausulam (per reg. de tri) æquationi subiunctam delendam esse censuimus.

Pag. 257, ẏ. 6 signa — sunt apposita.

Pag. 262, ẏ. 2, «𝔞𝔡» corrigendum erat in «*ac*»; et signis $\lessdot$, $\gtrdot$ simplicia $<$, $>$ sunt substituta.

Pag. 263, ẏ. 3 pro $\frac{\dot{x}}{2}$ et $\frac{5}{8}\dot{x}$ quæ in ed. I profecto per calami aberrationem irrepserunt, scriptum est $\frac{\dot{x}}{4}$ et $\frac{4}{8}\dot{x}$.

Pag. 264, ẏ. 5 et sic etiam in sequentibus pro «$a+x$» scriptum est «X» quod lineam abscissæ denotat.

Ibidem, ẏ. 14. «∂M» denotat derivatam lineæ quoad x.

Pag. 266, ẏ. 1. p scriptum pro P mendum typothetæ tollit. Constructio sententiæ a verbis «Si vero . . .» incipientis non satis lucida est, sed illustrat eam sententia subsequens a verbis «Si ex. gr...» orsa. Continet scilicet enuntiationem istius theorematis in casu singulari hic tractato; scilicet centrum massæ simul centrum esse virium parallelarum, quæ massis singularibus in punctis attractis sitis proportionales sunt.

Exempla pagg. 266—269 allata pro numeris, literis sunt signata.

Pag. 267 sub d) dexteræ parti æquationis ultimæ signum $\mapsto$ præpositum nec secus in æquatione sub *e)* duobus terminis postremis additum typothetæ errorem emendat. Abscissam centri gravitatis ideo præcedit signum $\mapsto$, quia signum termini $a+x$ in quovis puncto massæ negativum est, dum ∂M positivum est.

Pag. 272 art. extremo: »quo feriente omnis partis huius celeritas o fieri potest«, scilicet si punctum, quod vis $MD\gamma$ impellit, cum ipso percussionis centro coincidat, sed directio eius opposita sit directioni motus efficiendi eiusdem puncti.

Pag. 274, ỳ. *7,* pro his in ed. I sequentia habentur:

»exponens coeff. semper $\lessdot 1$ est, et quidem in utroque casu sive $+$ sive $-$ fuerit k; nempe pro $+k > 1$, duo proximi exponentes coeff. exprimi possunt pro μ integro per $\frac{k-\mu}{\mu+1}$ et $\frac{k-\mu-1}{\mu+2}$; et reducendo ad denom. eundem, patet priorem esse $\gtrdot$ posteriore (etiam pro $\mu=0$) si vero $-k>1$, demonstratum est, maximum exponentem coeff. esse ipsum $-k$«;

Brevius hæc sunt exposita ut facilius legi possint, præcipue quod versus citati non satis lucidi sunt.

Ibidem ỳ. *14* »maximus« hic ad valorem absolutum referendum est.

Pag. 277, ỳ. *3 a calce* loco »k« scribendum erat »K«.

Pag. 278. In ed. I æquationi in capite huius pag. appositæ subiuncta erat clausula: »(abstrahitur scilicet heic a determinatione $+$ et $-$ sensu pag. 37)«. Quoniam in hac ed. summa cum cura distinximus signa $><$ et $\gtrdot\lessdot$, hanc clausulam ut supervacaneam omittendam censuimus.

Pag. 278, ỳ. *12,* ubi ed. I habet: $\alpha-\beta=-\beta-\omega+\beta=-\omega$, error calami manifestus est, quem itaque sustulimus.

Pag. 282, ỳ. *10,* affirmatio, »quovis dabili maius fieri potest« cum hac restrictione est accipienda: nisi $A(q)$ et $B(q)$ simul fuerint $=0$.

Thesis ipsa in opere Hungarico »Arithmetika Eleje« Ed. nova pag. 254 ita est exposita:

$$d(uv)=v\dot{u}+u\dot{v}, \text{ si } \frac{\dot{u}}{u} \doteq 0 \text{ et } \frac{\dot{v}}{v} \doteq 0.$$

Pag. 284 sub 3) et pag. 285 sub 4. verbum «Est» præposuimus.

Pag. 286, sub. 5. ỷ. 12 pro cs^2, quod in ed. I erronee est positum, $-cs^2$ restituimus.

Pag. 287. In hac et in subsequentibus paginis pro «corda» ubique scriptionem «chorda» adhibuimus.

Pag 289, ỷ. 5 ante vocabulum «plagam» præpositio «in» necessario erat inserenda.

Quod definitionem «formæ curvæ attinet, ista in tom. I, ed. I, pag. 458 ita legitur:

> «6. Passus hinc est cogitare: quid si forma aliqua ad nullum sui punctum angulo gaudeat? dicatur *forma* eiusmodi *fluens*; . . . 7. Ita facile conceptus formæ fluentis etiam cum exclusione rectæ planique componitur: oriturque forma fluens cuius nulla portio recta aut planum est, et dicitur *forma* eiusmodi *curva*.

Pag. 289, art. ultimo sic orditur: «Si lineæ nulla portio recta «sit. e talibus portionibus constare debet, quarum cuiusvis aut crescunt ordinatæ aut decrescunt (ad dextram intelligendo).» Certe notatu dignum est hanc thesim a Bolyai ut demonstrandam esse propositam, quamquam demonstratio ipsa certo captioni innititur.

Pag. 289, art. 4. pro *p* scriptum est p, quod punctum rectæ denotat.

Pag. 290, sub 3. loco *p* scriptum est *P*, quod hic punctum temporis significatur.

Pag. 292, ỷ. 4, in ed. I per errorem calami aut typothetæ est: «nisi in convexæ puncto . . .», ubi scribendum erat: »nisi in concavæ puncto . . .»

Ibidem sub 7. Quod in hoc art. exponitur, summa attentione dignum est: datur scilicet demonstratio elementaris existentiæ longitudinis arcus.

Pag. 294, ẏ. 13, ed. I. lectorem ad pag. 230 remittit, ubi manifesto typotheta erravit; ceterum hæc ex præcedentibus sponte sequuntur itaque citatione non est opus.

Pag. 296 signa maioritatis et minoritatis $>$, $<$ substituta sunt signis $\succ$, $\prec$ quæ ed. I. posuerat.

Ibidem sub 9. ẏ. 1 pro: «atque ordinata» scriptum est: «atque ordinatis», quod sensus enuntiationis postulat.

Ibidem sub 9. ẏ. 2 «erit functio differentianda (non ut antea, sed) in concreto data»; quid voluerit Bolyai his verbis intelligi, diserte expositum est in opere Hungarico «Arithm. Eleje» pag. 257, art. ultimo, ubi sic disserit:

> «Ceterum notandum est functionem differentiandam, si e. gr. longitudinem curvæ $A(x)$ significet vel aliud eiusmodi, non ita evidenter dari, quam aream inter ordinatas, abscissam et curvam comprehensam, quando et termini seriei incrementorum omnes sub oculos cadunt; sed tantum eiusmodi quoddam variabile Z datur, ut $Z \smile A(x)$ si $n \smile \infty$, quando scilicet ubi demonstratum est Z gaudere limite, hic limes itidem in certam formam redigi potest, sicut area memorata; et fit functio æque independens ab n».

Notandum præterea omnia sub 9. hic proposita contineri ea conditione, ut y et $\dot{y}$ eadem habeant signa præposita; ideo in ẏ. penultimo inserta est præpositio «pro», quod itidem factum est sub 10. ẏ. 3.

Pag. 298, ẏ. 7., post «a et b» ed. I. addit: «nam $\beta > b$ (p. 261), $y'' + \lambda > y' + \lambda''$, quia $\lambda > \lambda''$, atque $y' + \lambda' > y'$». Hæc sane omnia vera sunt, sed ex iis nequaquam sequitur thesis præcedens, quæ tamen ex ipsa figura modo sat noto verificari potest. Ideo addita hæc clausula deleta est.

Pag. 302, ў. 8 et 9 Constructio sententiæ obscurior est quidem, attamen facile intelligitur, quid voluerit auctor dicere his verbis «aut vero abscissa (post $x=1$) a o crescens accipi poterit», scilicet ait $x-1=y$ posse positivos valores suscipere a o semper crescendo, quod idem exprimit subsequens «aut (abscissa) ab $x=1$ usque ad . . .»

Pag. 303, ў. *4—6*. Hic sicut et in figura 38—va dimidium $\dot{x}$ etiam per $\dot{x}$ designatur.

Pag. 307, ў. *11 a calce* pro «aut» scriptum est «nec».
Ibidem ў. *ultimo* pro «secundæ» scribendum fuit «secundi».

Pag. 308, ў. *16 a calce*. Præpositio «per» manifesto errore calami omissa inseri debuit.

Pag. 309. sub b) ў. *4*. vocabulum «axi» (sc. abscissarum) necessario inseri debuit.

Pag. 310 ў. *ultimo* ⟼ scriptum est pro ⟼.

Pag. 312, ў. *7* «respondentes» erat scribendum pro «respondens».
Ibidem ў. *9* exponens $\frac{1}{2}$ addi debuit in formula «$\partial^2(x^2-x^4)$.»
Ibidem ў. ў. *11 et 12* substituti sunt iis, quæ in ed. I sic habentur:

> «ubi factor prior ⟼ est pro valore ⟼ vo ipsius $\sqrt{x^2-x^4}$, posterior autem ⟼ est; nam reducendo ad denominatorem eundem, et terminum ultimum per x^2 dividendo fit. . .»

Pag. 313 ў. *7* vocabulum «patet» additum est.

Pag. 314. Aequatio secunda huius paginæ in ed. I ita stat:

$$\partial^2 y = \frac{6x-2}{2\sqrt{x^3-x^2}} - \frac{(3x^2-2x)^2}{2\sqrt{(x^3-x^2)^3}}$$

quod profecto erroneum est. Error hic calami propagatur per totum exemplum, quapropter etiam sequentia hoc errore contaminata transscribere oportuit.

Pagg. 316 et 320 de diversis relationibus est sermo, quapropter figuram 49 utrique casui conformiter bis delineari curavimus.

Pag. 318, ỷ. *7* pro «ostenduntur» scriptum est «ostenditur».

Pag. 320, ỷ. *10 a calce* vocabulum «positivum» in ed. I. omissum insertum est.

Ibidem ỷ. *ultimo* titulus sepulcri Jac. Bernoullii paulum mutatus est; habetur enim sic: «Eadem mutata resurgo». Vide: Jac. Bern. Opera, Genevæ MDCCXLIV; pag. 30.

Pag. 322, ỷ. *2*, litera m numerum certum denotans, porro ỷ. 13, terminus finalis $M(x+\omega)^m$ itemque ỷ. 17 in parenthesi terminus ultimus Mx^m additi sunt, quo facilius hæc legi possint.

Eadem causa ỷ. *7* pro «ut» scriptum est «adiecto» et verbum «esse» e ỷ. 8 in ỷ. 9 est transpositum.

Pag. 323 ỷ. *3* «maximum» in «minimum» debuit mutari sicut et in tribus inæqualitatibus subsequentibus $<$ in $>$ erat mutandum.

Pag. 323, *sub 2.* In opere Hungarico sæpius citato (pag. 329 ỷ. 9 a calce) demonstratio aliquamdiu concinnior fit.

Pag. 324 ỷ. *5*, brevius et concinnius vocabulum «ubi» positum est pro circumscriptione: «nam dici potest.»

Pag. 325, ỷ. *7 a calce* et inde porro M_{p+1}, N_{p+1} scripsimus pro $(p+1)*M$, $(p+1)*N$ editionis primæ, ut facilitati lectionis consulemus; nam Bolyai certe noverat significationem indicum (vide pag. 208 ỷ. 5.)

et supponi potest nonnisi dificultates typographiæ obstitisse, quominus iam anno 1829 indicibus uteretur; in additamentis posterius impressis iam ubique apparent.

Pag. 327 ℣. *1*, pro o ed. I habet a (error typothetæ).

Ibidem sub 4. ℣. *1* «exemplum prius allatum» ad evolutionem seriei $(a+x)^n$ refertur, quæ pagina præcedenti tractata est.

Ceterum ex hac pagina et sequentibus apparet Bolyai non novisse quam vim habeat ordo factorum in seriebus infinitis, quod tamen ei, si rationem temporum habeas, minime imputari potest.

Pag. 328, ℣. *8*. Vocabula «solummodo tales» inserta sunt, quum ex toto contextu liquido appareat hæc nonnisi per errorem calami a Bolyai omissa esse.

Ibidem ℣. 11. «positivus» insertum est; item ℣. *5—6 a calce* idem vocabulum est additum.

Ibidem ℣. *2 a calce* «pro ω positivo et < 2» scripsimus loco «pro $\omega < \frac{2}{3}$» nempe ω per errorem calami loco a' irrepsisse patet (art. 2, ℣. ultimo).

Pag. 329, *art. ultimo*. Si quis planius ac pæne pedetentim ratiocinium hic expositum prosequi velit, sic procedet: Quum sit

$$\frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{6}+\frac{a'^8}{8}+\cdots<\frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{4}+\frac{a'^8}{4}+\cdots<\frac{a'^4}{4}:(1-a'^2),$$

sitque $a' < \frac{2}{3}$, sponte sequitur esse:

$$\frac{a'^2}{4(1-a'^2)}<\frac{\frac{4}{9}}{4\left(1-\frac{4}{9}\right)}<\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a'^2}{2}<\frac{a'}{2}\cdot\frac{2}{3};$$

at habemus etiam

$$\frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{6}+\frac{a'^8}{8}+\cdots<\frac{a'}{3},$$

itaque summa omnium negativorum in serie ipsius log $(1+a')$, scilicet:

$$\frac{a'^2}{2}+\frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{6}+\cdots < a'^2 < \frac{2a'}{3},$$

quod etiam ita poterit deduci:

Est certe:

$$\frac{a'^2}{2} > \frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{6}+\frac{a'^8}{8}+\cdots$$

si:

$$\frac{a'^2}{2} > \frac{a'}{4}(1+a'^2+a'^4+\cdots) > \frac{a'^4}{4}+\frac{a'^6}{6}+\frac{a'^8}{8}+\cdots,$$

hoc est si

$$\frac{a'^2}{2} > \frac{a'^4}{4(1-a'^2)}, \text{ ubi } 0 < a' < \frac{2}{3} \text{ vel } a' = \frac{2-\omega}{3}$$

ubi ω positivum est et < 2. Dividendo ergo per a'^2 inæqualitas ipsa hanc novam formam induet: (pag. 229 $\dot{\text{v}}$. 5 a calce)

$$\frac{1}{2} > \frac{(2-\omega)^2}{4\cdot 3^2} : \left(1-\frac{(2-\omega)^2}{3^2}\right).$$

At alioquin $\frac{a'^2}{2} < \frac{a'}{3}$, quia nempe $a' < \frac{2}{3}$.

Habemus ergo pro summa omnium negativorum

$$-\frac{a'^2}{2}-\frac{a'^4}{4}-\frac{a'^6}{6}-\cdots < a'^2 < \frac{2}{3}a'.$$

Pag. 330 $\dot{\text{v}}$. *9* pro errato $\frac{1}{3}$ poni debuit $\frac{2}{3}$ et ibidem $\dot{\text{v}}$. *10* pro erroneo $\frac{2}{3}$ positum est $\frac{1}{3}$.

Ibidem $\dot{\text{v}}$. *4 a calce* loco »p-ti» rectius scriptum est »$(p+1)$-ti.»

Pag. 332 sub 7, $\dot{\text{v}}$. *2* ed. I »criterii elegantis seriei convergentis» cum ipse Bolyai in Err. pag. XCI agnoscat, hoc criterium nonnisi ad divergentiam referri, in »criterii» mutatum est. Eadem de causa $\dot{\text{v}}$. 3—4 eiusdem articuli pro: «atque $nu_n \rightharpoondown 0$ dum $n \rightharpoondown \infty$, tum series convergit, et si prius non est, series divergit (pro terminis decrescentibus) plenius scriptum est: «atque non sit $n \, . \, u_n \rightharpoondown 0$, series divergit.»

Hic quoque et in sequentibus pro $u*n$ semper u_n est positum (v. antea adnotationem ad pag. 325).

Porro quod *pag. 335 sub* 9. in ultima enuntiatione articuli in ed. I dictum erat: «Per criterium seriei convergentis Oliverianum autem $\frac{n}{(4n-3)(4n-1)} \rightharpoondown 0$. Consequ. series dicta convergit,» ex eadem causa in hoc mutatum est: «Seriem dictam convergentem esse (pag. 243 et 341) demonstratur.»

Postremo *pag. 336*, ỷ. 8—9 scriptum est: «Convergit autem series ipsius $(1-1)^e$, ut ex additamentis patebit»; demonstratio vero falsa convergentiæ deleta est; nempe omnia illa quæ post ỷ. 8 in ed. I. habentur (scil. a vocibus: «Nam (142) signa . . .» usque ad: «atque series convergit (302)» pagg. 305 et 306, itaque tota fere pagina) omissa sunt; nituntur enim theoremate Oliveriano ab ipso Bolyai iam retractato. Seriem vero $(1-1)^e$ pro positivo e convergere e theoremate VIII pag. 589 patet.

Est enim:

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{n-1-e}{n}.$$

Ibidem ỷ. 11 «factum nu_n» est positum pro «factum superius».

Pariter omissum est quod pag. 337 sub 12. ỷ. 6 a calce post $r \rightharpoondown \infty$ in ed. I habebatur: «atque si $R \rightharpoondown 0$ series convergit.» Denique versus quatuor art. 3 pag. 308 ed. I: «Conversim quoque, si $n \, . \, u_n \rightharpoondown 0$, series convergit. Nam sit $n = r$; erit $r \, . \, u_r \rightharpoondown 0$, sed $r \, . \, u_r > R$; itaque $R \rightharpoondown 0$; consequenter series convergit.» omissi sunt. Eiusdem paginæ ỷ. 7—12 e pag. XCI tomi I. editionis I sunt desumpti.

Pag. 333, ỷ. *8 a calce* vocabula «negativo et» inserta sunt.

Pag. 334 in fine art. 8. designationes «c_1, c_2''» insertæ sunt.

Ibidem art. 9 ỷ. 2 scriptum est $z = 1 - \omega$ pro $z - 1 = \omega$, similiter ẏ. 3 et 7. pro 1 scriptum est z; quæ nonnisi emendationes errorum calami sunt.

Pag. 339 ẏ. *12—14* ita sunt intelligendi, quod est

$$\frac{d \sin z}{d \operatorname{cotg} z} = \frac{\cos. z}{-1 : \sin.^2 z},$$

eodemque modo et reliqua.

Pag. 343, ẏ. 13—15 non satis clare exprimit y et x posse esse independentia vel coniuncta.

Pag. 344, ẏ. *7* «(x, y)» positum est pro «$F(x, y)$» quod apud Bolyai certe error aut calami aut typothetæ est. Sane hic Bolyai locum (x, y) per X voluit designare, documentum eum iam præsensisse modum conceptionis recentioris ævi.

Pag. 346, ẏ. *5,* clausula «ut supra dictum est» ad ea refertur quæ pag. 313 sub *h)* exposita sunt.

Pag. 346—348 sub 2. allata exempla non numeris sed literis distincta sunt. Ibidem emendando errores typothetarum pro Fig. 49 et 50 substituebatur 49* et 50*.

Pag. 350. Punctum p in ed. I. litera p erat designatum; ita etiam in paginis subsequentibus.

Ibidem ẏ. *ultimo* post «eadem» clausula [per $F(x) = f(x)$ et $\partial F(x) = \partial f(x)$] deleta est.

Pag. 351, ẏ. *1,* verbum «sit» ut abundans deletum est.

Pag. 352 sub 3. in fine clausula «exceptis singulis punctis (pag. 307) allatis» addita est.

Pag. 353—5. Determinationem centri et radii curvaturæ sine ulla mutatione repetivimus, quamquam calculus quoad signa determinativa radicum quadratarum concinnitate necessaria caret. Similiter immutatum reliquimus ẏ. 10 pag. 355. quamquam proprie ad *sensum præcedentium* tantum sic liceret scribere

$$a = x + \frac{\partial y}{\sqrt{1+(\partial y)^2}} \cdot \frac{(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y}.$$

Sed ex hoc tantum sequeretur esse

$$a = x \pm \frac{\partial y\,(1+(\partial y)^2)}{\partial^2 y}.$$

Pag. 353, sub 5, ẏ. *3* post «sint», deletum est «pro».

Pag. 355, ẏ. *7* pro erroneo a positum est b.

Pag. 357 ẏẏ. *3—4* pro x scripsimus z ut facilius legi possit, in fine vero paginæ et pagina sequenti x non mutavimus.

Ibidem ẏ. 11 signum — errore calculi omissum apposuimus.

Pag. 359. Literæ $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, tam in contextu quam in figura pluribus in locis in ed. II permutatæ sunt.

Pag. Pag. 360—371 Expositio calculi variationis apud Bolyai in forma etiam pro sua ætate non satis perfecta apparet, et pars generalis præsertim ideo est obscurior, quod nec ratione problematum calculi variationis et nec quoad integrale tractandum quidem conditiones accessoriæ singillatim memorantur; harum posteriorum in parte generali unico tantum loco fit brevis mentio (pag. 361, art. 1, ẏ. 2: «atque ex hoc et data condicione eruitur Y»). Ceterum mens totius pertractationis perspici potest in exemplis, præsertim in primo, ubi conditioni areæ datæ modo pereleganti et novo ita satisfit, ut loco abscissæ ipsa area ab ordinata attacta inducatur pro variabili independente, itaque integralis tractandi limites fiunt o et area data. Alias conditiones quam fixis limitibus expressas Bolyai non tractat.

Pag. 361 in æquatione prima et sub finem art. 2 loco $N\omega + P\partial\omega$ scriptum est $\int(N\omega + P\partial\omega)$, nam omissio signorum $\int$ manifesto errori calami tribuenda est.

Pag. 366. Disquisitio de linea brevissima in spatio, data area inter lineam et perpendiculares ad lineam abscissarum extremos atque abscissam, omnino erronea ideoque tota omissa est, quare etiam in exemplis primo et sequentibus vocabula »prius» et »ut antea» delenda erant. In opere ipso omissa hic sequuntur:

Si vero non supponatur lineam in plano esse: derivata quoad x longitudinis lineæ in spatio (pag. 268) est $\sqrt{1+(\partial y)^2+(\partial z)^2}$, cuius differentiale est (pag. 314) *

$$(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y d\partial y+(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial z d\partial z=$$
$$=(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y\,\partial^2 y\,.\,\dot{x}+(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial z\,\partial^2 z\,.\,\dot{x}\,;$$

patetque ut prius, quod si tam

$$(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y\,\partial^2 y \text{ quam } (1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial z\,\partial^2 z$$

$=0$ sit, tum maximum minimumve possibile esse; si nempe tam pro ω quam pro $-\omega$ utvis parvo incrementum reliquum simul positivum aut simul negativum sit; non superatur enim a prioribus istis terminis.

Dicatur P ut supra factor, per quem $\partial^2 y$ multiplicatur, et N dicatur factor, per quem ∂y multiplicatur, sed in quo ut factor $\partial^2 y$ non adest; ita coefficiens ipsius $\partial^2 z$ dicatur P', et N' coefficiens ipsius ∂z.

Erit hic

$$N=0, \text{ et } P=(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y$$

* In hac ed. pag. 300, resp. 344.

ita

$$N'=0, \text{ et } P'=(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial z.$$

Erat autem

$$N=\partial P, \text{ ita } N'=\partial P';$$

consequenter

$$0=\partial P=\partial P';$$

adeoque P est constans, sit $=a$; ita P' constans est, sit $=b$. Atque hinc

$$\frac{P'}{P}=\frac{(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial z}{(1+(\partial y)^2+(\partial z)^2)^{-\frac{1}{2}}\partial y}=\frac{b}{a}=\frac{\partial z}{\partial y}$$

adeoque

$$\frac{b}{a}\partial y=\partial z \text{ et } \int\frac{b}{a}\partial y=\int\partial z;$$

nempe

$$z=y.\text{constans}.$$

Unde patet lineam quæsitam in plano esse; concipiatur *nempe planum* p' *secare in recta* x *planum* p, *in quo* ordinatæ y accipiuntur; sintque Y et y in p ad x e punctis $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ perpendiculares, respondeatque Z ipsi Y, et z ipsi y; erit pro constante α,

$$Z=\alpha Y, \text{ et } z=\alpha y;$$

et pro $Y=ky$, erigatur e fine ipsius $\frac{Y}{k}=y$ ad p perpendicularis $=\frac{Y\alpha}{k}$; erit $\mathfrak{g}$ et finis ipsius $\frac{Y\alpha}{k}$ cum fine ipsius Z in recta, atque $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, et fines ipsorum $\frac{Y\alpha}{k}$ et z erunt apices rectanguli. Ita si tertium punctum $\mathfrak{g}''$ accipiatur, patet rectam ex $\mathfrak{g}''$ per finem respondentis z ductam esse prioribus parallelam et cum plano p angulum eundem efficere.

Potest etiam $z=\frac{b}{a}y$ ita esse, ut $\frac{b}{a}=0$ sit, adeoque Z in p cadat; atque potest in integratione constans arbitraria c addi ut sit $z=0.y+c$, adeoque planum ad distantiam c ipsi p parallelum.

Pag. 366 in fine exempli 1. Bolyai omisit constantem integrationis; patet enim pro valore eius 0 accipi posse.

Pag. 368 ẏ. 9 vocabula «quam denominatorem» suppleta sunt.

Porro ẏ. *10—12* quæ mutata sunt omissioni partis exempli primi respondent, deleta sunt nempe: «ut antea» ẏ. 10 a calce, «item» ẏ. 11 a calce; *ibidem* ẏ. *14 a calce* pro «derivata quoad x» errorem sane calami emendando scriptum est «differentiale»; ẏ. 12 *a calce* vero «et cœfficiens ipsius ∂z dicatur N' et P' cœfficiens ipsius $\partial^2 z$», additum est.

Pag. 368 sub finem art. 1. $\frac{1}{2ry}$ emendatum est in $\frac{1}{2r}$.

Pag. 370, ẏ. *5* pro ∂y scribi debuit y.

Pag. 370, ẏ. *9* pro y ponendum erat ∂y.

Pag. 371, sub 5, ẏ. *5,* «exemplo allato» scriptum est pro «exemplis allatis.»

Ibidem in æquatione ultima art. 4

$$\int (N\omega + P\partial\omega + Q\partial^2\omega + \cdots)$$

est scriptum, præposito signo $\int$, quod in ed. I deest. Quod sub finem art. 4. dicitur «et superius dicta sequi patet» ad ipsam illam æquationem refertur, quæ pag. 363 titulum «Exempla» præcedit, secundum quam in hoc casu pro statu maximi et minimi

$$N - \partial P + \partial^2 Q - \partial^3 R = 0$$

esse debet.

Pag. 373 ẏ. *ultimo* «aut b præter 1» insertum est.

Pag. 375, ẏ. *10* ad mentem ipsius Bolyai pro $=$ positum est ⫤.

Ibidem ẏ. *13* «subiectæ» mutatum est in «subiecta» ut concinnitas dictionis postulat.

Pag. 376, ỳ. *3* «id est» insertum est.

Pag. 377, ỳ. *7 a calce* pro «ipsi $px=0$» positum est: «ipsi px respondentem $=0$.»

Pag. 379, ỳ. *ultimo* pro «infrorsum «scriptum est «deorsum versus.»

Pag. 380, ỳ. *10 a calce* vocabulum «idest», porro ỳ. 9 et *ultimo* «$+b$» est additum.

Pag. 388, ỳ. *7* et per totum exemplum ubique $\frac{g}{2}$ est positum pro g (pag. 248).

Pag. 391, exempli m) æquatio ultima erronee habuit in ed. I a læva parte $\frac{11.719}{2}$, ex quo deinde etiam ultimum resultatum $11.359+5+\frac{1}{2}$ quoque falsum fluxit.

Pag. 392, ỳ. *3 a calce* ad mentem pag. XXXVI «Erratorum» addita sunt hæc: «nempe $S=CT$ (pag. 48) fit $=T$ pro $C=1$.»

Pag. 395 a capite in ed. I. denuo «§. 39» habetur, quod sicut etiam signa §§ sequentia usque ad §. 40 delevimus, substituendo seriem numerorum a 7. usque ad 16-tum.

Pag. 397, ỳ. *3 et 4*. Pro his ed. I. habebat:

$$«d(x)=(x-e).1+(\varepsilon=0), \text{ si primi gradus fiat } d(x)=0.»$$

Pag. 398 ỳ. *3 a calce* vocabulum «Nempe» ut superfluum deletum est.

Pag. 402. Colis in ed. I. appositis numeralibus distinctis literas *a) b)* . . . præposuimus.

Pag. 408, $\dot{\text{v}}$. 9 *a calce* ed. I. habuit: »adeoque radix inter $3+\frac{1}{2}$ et 1 est«, ubi certe 1 loco 4 positum typothetæ error est, itaque quum revera duarum radicum altera inter 3 et $3+\frac{1}{2}$, altera inter $3+\frac{1}{2}$ et 4 sit, scribendum duximus: »adeoque radix inter

$$3+\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 3+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$$

est.«

Pag. 409 *pro* $\dot{\text{v}}$. *10—13* hæc habebantur in ed. I:

»Si $-M$ cœfficiens negativus maximus sit; et idem $-M$ sit cœfficiens termini m-ti (haud numerato primo); erit terminus m-tus $=-Mx^{n-m}$«.

Hunc ipsum terminum m-tum simul et ***primum*** terminum negativum esse functionis $f(x)$ Bolyai oblitus est indicare, nos modica mutatione adhibita hoc ipsum significare simul rem ipsam concinnius exponere voluimus.

Ibidem $\dot{\text{v}}$. 15 pro »simul cum illo« scripsimus »usque ad illum«, quæ modice mutata elocutio facilior erit intellectu.

Pag. 414—5 exempla non numeralibus sed literis sunt distincta.

Pag. 416, $\dot{\text{v}}$. *18*, *19*, locutio »et signa $+$, $-$ eadem sint in numeratore« secundum præceptum ipsius Bolyai pag. LIII erratorum datum inserta est.

Pag. 417. In æquationibus ad calcem paginæ appositis, stellulas, quæ propter difficultates typographicas in ed. I. solummodo capitibus columnarum erant superpositæ, singulo cuivis coefficienti superposuimus, itaque dictio: »ubi stellula cuiusvis columnæ numero cuivis superposita cogitetur« ut supervacanea, omittenda erat.

Pag. 418, $\dot{\text{v}}$. *6*, »Nempe« ad æquationes ad calcem pag. 417 appositas refertur.

Pag. 421, ℣. *7*, «deesset» correctum est in «deesse.»

Pag. 425, ℣. *5* «ex» emendatum est in «et».

Pag. 425, ℣. *7*. Bolyai tantum oblitus erat indicare valorem quæsitum non modo integrum, verum etiam positivum esse debere; ideo vocabulum «positivus» inseruimus.

Pag. 428 sub 6. ℣. *3* clausula »numero 3 maiorem» inserta est.

Pag. 429, ℣. *13 a calce* «si« in ed. I. omissum supplevimus.

Pag. 430, ℣. *8*, ℣. *20* sicque etiam in pag. subsequenti signa $\gtrdot \lessdot$ applicuimus. Etiam Bolyai valoribus absolutis applicat signa maius, minus, neque expresse monet $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ etiam diversæ determinationis esse posse, et restrictionem, quæ postulat $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, respective a, b, . . . omnes positivos esse debere tantum in art. ultimo pag. 433 introducit.

Pag. 432, ℣. *7*. pro «$\frac{I}{I'}$» posuimus «$\frac{L}{L'}$» (vide ed. I. Errata p. LIII.)

Pag. 433, art. postremo, ℣. *1* vocabula «omnibus positive acceptis» inserta sunt, ut congruat cum eo quod Bolyai in ultimo huius art. ℣. monet; «et a positive accipitur.» Et quoniam in fine pro a posita sunt a, b, . . . pro «accipitur» scribendum erat «accipiuntur.»

Pag. 442 sub 19. ℣. *4* per errorem calami «ad lævam» erat in ed. I. scriptum, quod, ut opus erat, in «ad dextram» mutatum est.

Pag. 444 in ultimis duabus æquationibus nempe in terminis generalibus exponenti literæ a apposito «$n-2\mu$» substitui debuit «$n-2\mu+1$» ut error typothetæ corrigatur.

Pag. 446, ℣. *7* pro «$-bx(IK'-I'K)$» substitutum est «$bx(H'I-HI')$».

Ibidem $\dot{y}$. *8* «$-\omega$» mutatum est in «$\pm\omega$»; præterea inserta sunt vocabula «signi ratione non habita.»

Pag. 446—8. Propositionem veram esse Bolyai pro positivo a demonstrat si $b=1$ est; attamen applicat eam etiam si a negativum et $b>1$ sit.

Pag. 447, *20*. Satis notum est algorithmum Bolyaianum etiam a vv. ill. Farkas, Königs, Netto et aliis tractatum esse.

Pag. 448, $\dot{y}$. *1 et 4* in partibus lævis æquationum $\vdash$ est ubique positum pro $+$ (quod typothetæ error erat).

Pag. 448, $\dot{y}$. *8* $\vdash$ positum est pro $+$ (eadem de causa).

Pag. 448, $\dot{y}$. *9* «inde ab secundo» insertum est et pro «aut» «sive» scriptum, quod dictionem concinniorem reddit.

Pag. 448, $\dot{y}$. *13* «$\frac{+1-3}{2}$, $\frac{-1+3}{2}$» substituimus pro «$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-3}{2}$» quod typothetæ errore irrepserat.

Pag. 449, $\dot{y}$. *10 a calce* «primo $\sqrt[m]{}$ omisso» insertum est ut concinnior fiat dictio.

Ibidem, $\dot{y}$. *4 a calce* concluditur «atque si m par sit, radicali negative accepto prodibit radix æquationis

$$x^m + x - a = 0.»$$

E præmissis hoc non sequitur, nisi de «radicali primo negative accepto» agatur. Sed ut e $\dot{y}$. 9—10 pag. 448 apparet Bolyai algorithmum $\vdash\sqrt{a\vdash\sqrt{a\vdash\sqrt{\ldots}}}$ habuit præ oculis et propositio alioquin etiam vera est, ut Netto (Math. Ann. Bd. XXIX, pag. 147) ostendit, si a positivum est; imo demonstrari potest hunc algorithmum tantum si $a=1$ sit non tendere ad limitem, dum in omnibus aliis casibus (etiam si a complexum sit) dummodo valor $\sqrt[2m]{a}$ apte sit determinatus, ad limitem perducit, nempe ad radicem æquationis.

Pag. 453, ỷ. 3 a calce clausula «(pag. sequ.)» ad exempla pagg. 455—6 sub *a)* et *c)* allata refertur.

Pag. 455, ỷ. 1—2 pro «monetam» scribendum fuit «monetas.»

Pag. 457. Quæ hic initio § 43 promissa sunt, in additamentis vero nihilo minus desunt, testantur Bolyai in animo habuisse supplementum addere operi suo; at hoc consilium non est exsecutus, sicut Bolyai (in fine Tom. I, ubi «Egy kis toldalék a Deák első kötetéhez» inscriptar accessione pag. IV, loco 2) scribit: «ob penuriam argenti».

Pag. 458, ante ỷ. 7 a calce ed. I habuit:

$$\text{«seu } \frac{(m-1)si}{i^2(m-1)^2}, \text{ id est } \frac{s}{i(m-1)}, \text{ nempe } sx > \beta\text{»}$$

quod omisimus.

Pag. 459 ỷ. 1 in ed. I sic legitur: «Itaque pro m pari et $\mapsto$ vo t quoque, poterit per . . .»

Pag. 460 ỷ. 9 a calce ultima vox «datur» suppleta est.

Pag. 461, ỷ. 2 «$\mapsto b$» est scriptum pro «$-b$».
Ibidem ỷ. 3—4 inæqualitates ibi occurrentes in ed I ita erant adscriptæ:

$$c-(-b) < -b$$
$$c+b < \pm b.$$

Ibidem, ỷ. 6 pro «$t\mapsto$ sit» scriptum est «t positivum sit.»

Pag. 462, ẏ. *13*, «Sint» emendatum est in «Sit».

Pag. 463, ẏ. *9 a calce* voci «perpendiculis» quod error typothetæ deformaverat, substituta est forma recta: «perpendicularibus.»

Pag. 468, ẏ. *5—6 a calce* «nusquam» scriptum est pro «nuspiam», quod non est Latinum.

Pag. 469, ẏ. *7* vox «valor» vocabulum «ubique» præcedens supervacanea erat ideoque omissa est.

Ibidem vocabula «positivum» et «negativum» perperam posita permutata sunt in ẏẏ. *15, 16 et 18*; ẏ. *17* vero termino *m* sin. *mz* signum — in ed. I omissum præpositum est.

Pag. 472, *§ 44* post verba «addenda sunt» reliqua, quæ in ed. I sequuntur nempe

> «ceteris in quantum instituti ratio permittit, tomo secundo reservatis; quum in hoc adhuc *generalis conspectus Geometriae* exponendus veniat, ut arbor utraque corradicata (§ 9) delineetur»

omittenda censuimus. Nos enim omnia, quæ ad Arithmeticam pertinent in tomum primum recepimus, omnia vero quæ geometrica sunt in parte altera prodibunt.

Pag. 474, ẏ. *7 a calce* scriptio mendosa «apellari» emendata est in «appellari.»

Pag. 479. Quæ hic «de beatitudine» leguntur in ed. I. pagg. XXXIII—XXXVI erant exposita, et inde sunt desumpta. Ceterum Bolyai quum animadvertisset in prima pagina introductionis vocem «brachiis» per errorem omissam esse et hoc annotavisset, huic observationi elucubrationem *A.* subiunxit, quam integram hic inseruimus. Vocem «brachiis» suo loco (pag. 5 sub 2, ẏ. 2) apposuimus.

Pag. 481. Quæ hic sub *B.* de proportionibus, logarithmis numerationeque Arabica sequuntur in ed. I. pagg. XXXVIII—LII continentur.

Initio huius sectionis in ed. I, Bolyai enumerat eas partes «tentaminis» quas tyrones studium primum ingressi omittant. Hæc pro ratione huius editionis omittenda censuimus.

Pag. 482 vocabulum «fit» in fine ẏ. 1. ut superfluum omissum est.

Pag. 489, ẏ. *3 a calce* «(—2)-tuplicata» est scriptum pro «(—1)-tuplicata».

Pag. 491 art. penultimo in ed. I. post vocem «applicationibus» lector per clausulam «in tomo sequente» minus præcisam habuit indicationem, quam per citationem substitutam «pag. 512—20 et 569—81.»

Pag. 492, ẏ. *9* pro «nempe» interposito puncto scriptum est «Nempe».

Pag. 495, in editione prima his verbis desinit:
«Operationes, et reliqua, tomo secundo reliquuntur». Cum nos operationes et reliqua in hunc primum tomum recepissemus, hæ voces omittendæ erant.

Pag. 496. Quæ hic sub C. et *Pag. 512* sub D. sequuntur, in ed. I tomo II pagg. 336—356 continentur.

Pag. 515 sub IV et V vide ed. I. tom. II. pagg. 377—379.

Pag. 516, §. *2,* ẏ. *4* «Est» scripsimus pro «Erat (Tom. I, pag. 162)» Indicatio uncinis inclusa omissa est, occurrit enim mox iterum in pag. sequenti suo loco. Huc proprie non pertinet.

Pag. 517, ẏ. *11* pro «(Tom I. ibidem)» scriptum est «(pag. 187)»

Pag. 518 in æquatione tertia ultimus terminus nominatoris ut ratio calculi postulat in »$-\frac{1}{2}f$« erat mutandus, itemque art. 3 pro »10 millionibus« scribendum erat »100 millionibus«.

Pag. 521. Tota hæc sectio E. inscripta desumpta est ex Ed. I. Tom. II. pag. 402 et Tom. I. pag. CXVII.

Pag. 522, ỷ. 2 indicationes ad Tom. *II remittentes non constant itaque* omissæ sunt.

Pag. 524. Sectio *F.* inscripta ex ed. I, Tom. II. pag. 357—371 est desumpta.

Pag. 524, §. *1.* in Ed. I. sic orditur:

> »Tom. I. pag. 33, ubi definitio multiplicationis prius oritur pro § 20 et 21 debuisset § 19 et 21 citari; imo citata repetere clarius fuisset. Potuisset autem a definitionibus proportionis (Tom. I. pag. 65) datis incipiendo harum æquivalentia cum prius data demonstrari. Sed generalissima . . .«

Loco citato qui in hac editione pag. 40, § 26 continetur, emendatio indicata iam facta est, itaque hanc dictionem omisimus; sed et sequentem dictionem ut supervacaneam in hanc editionem recipiendam non duximus; pagina citata ceterum in hac editione 75-ta est.

Pag. 526, 2, ỷ. 12 imperante grammatica pro »iidem« scribi debuit »eadem«, sc. eadem *m* pro iisdem certis *B* et *D*.

Pag. 528, §. *5.* Huc respiciens Bolyai (Tom. II, pag. 401, ỷ. 7—3 a calce) hæc adnotat:

> »Regula data, in arithmetica pura, aut ad puram reducta, clara est: si vero heterogenea in concreto accipiantur,

regula (Tom. I, pag. 122, 1) data simplicior est. Atque non negativum solum, sed et mixtum radice gaudet.»

Ibidem ỷ. *10*, pro «negativo 1» lucidius est quod scripsimus «negativa unitate.»

Ibidem ỷ. *6 a calce* pro citata pag. 85, editio prima perperam habuit pag. 79, quæ in hac editione paginæ 91 respondet.

Pag. 533. «Unum adhuc casum notare licet; . . .» Bolyai hic differentiam inter communes regulas multiplicationis et divisionis et inter suam definitionem proportionis (pag. 528—9) demonstrat.

Pag. 538 ỷ. *11 a calce* pro «$1^{1:0}=1$» scripsimus «$1^{1:0}=A$».
Idem fecimus pag. 543 in dictione penultima.

Pag. 540, sectio *G.* inscripta ex ed. I., Tom. I. pagg. LIV—LVIII est desumpta; titulum «Relatio brevis additamenti antecedentis» ipsi præposuimus. Ibi vero hæc relatio erratis erat subiuncta hac introductione interposita:

> «Notandum etiam est: quosdam conceptus in tomo primo traditos, ad finem tomi 2-di clarius simpliciusque expressos esse; quod cum ex indice omissum sit, breviter referre pro iis saltem, qui nonnisi primum tomum habebunt, haud supervacuum erit.»

Pag. 543 post ỷ. *4* in ed. I. additum erat: «Neque $N=M$ ibidem excluditur»; quod omissum est, huius enim correctionis in hac editione iam habita est ratio.

Confer præterea ad hanc paginam etiam pag. 552, art. 1.

Pag. 544. Dilucidatio hæc nova H. inscripta pagg. LXXVI—LXXXVI tomi II, ed. I continetur. Bolyai hæc notæ ad unitatem spectanti inter errata ei occurrenti subiunxit, ideoque iis titulum «scholion» præposuit, atque his verbis est orsus: «Sit fas quoad unitatem et conceptus primarios breviter referre» Quum vero nos omnia quæ de unitate disseruit in Annotata (ad pag. 609) retulerimus, titulum «scholion» et verba «quoad unitatem et» omisimus.

Pag. 544, ỷ. *9 a calce* «quod si non esset, resultatum o esset» pag. 28 clarius ac lucidius est expositum.

Pag. 552, ỷ. *12* loco «$\log._a A$» positum est «$\frac{\log._a A}{\log._a B}$» ita enim scribi oportere e sequentibus apparet.

Pag. 554, ỷ. *ultimo* «$=\frac{ac-bd}{a^2-b^2}$» insertum est.

Pag. 556. Sectio quæ hic J. inscripta sequitur in ed. I. Tomi II-di pagg. 323—336 occupavit.

Pag. 565, ỷ. *6* indicationem: «(pag. 563)» addidimus.

Pag. 567, ỷ. *2*, indicationem «(p. 98)» ad Tomum II-dum respicientem omitti posse censuimus.
Ibidem ỷ. *2. a calce* pro «seriei» scribi debuit «series».

Pag. 568, ỷ. *4* vox trunca «terminor» expleta est scribendo «terminorum».

Pag. 569, sectio *K*. inscripta in ed. I. Tom, II. pagg. 388—400 erat exposita.
Addito titulo pleno, ỷỷ. præmissi in ed. I. hic omitti potuerunt.
Ibidem ỷ. *7 a calce* «decrescit» erat scribendum pro «crescit» nam hic etiam signi præpositi ratio habenda erat.

Pag. 571. ỷ. 15 signum $<$ mutandum erat in $>$.

Pag. 579—580. Hic post scholion 1. in ed. I quædam sequebantur, quæ observationem ipsius Bolyai pag. XC, ed. I insertam secuti omisimus.

Pag. 582. Quæ hic sub L, «Criteria convergentiæ serierum» inscripta sequuntur, in ed. I. Tom. I. pagg. XCI—XCVI continebantur.

Ex annotationibus operi «Arithmetika Eleje» in secunda editione posterius additis apparet, has disquisitiones post annum 1843 demum ortas esse, atque auctorem nondum novisse huc spectantem lucubrationem Abeli in periodico «Crelle Journal» jam 1828 editam, eoque minus literaturam recentiorem criteria logarithmica tractantem.

Pag. 584 ṽṽ. 14—22 in ed. I. Tom. I. pag. XCVIII sub X erant inserti. Ut facilius legi possint, huc transtulimus.

Ibidem ṽ. 9, incisum «logarithmos perinde quoad basim 10 intelligendo» additum est; in sequentibus enim hoc plane supponitur (confer, quæ sub finem huius paginæ apposita sunt); ibidem etiam apposuimus ṽ. 3 a calce relationem $\frac{1}{1000 \cdot 3^{u}} \cdot 9000 < \gamma$.

Ibidem ṽ. 9 in dextra parte æquationis denominatori addi debuit l quod nonnisi errore typothetæ exciderat.

Pag. 592. Sectio M. «Primæ lineæ calculi differentialis et integralis brevius et clarius tractatæ» in ed. I. Tom. I. pagg. LXI—LXXIV legitur, ubi erratorum indici subnexa quibusdam versibus introducitur, quos hic repetere nihil attinuit.

Ad art. I. huius paginæ notandum est γ nullo pacto posse $= 0$ esse.

Pag. 594 sub V iterum tacite supponitur

$$u(m\dot{x}) - a\,[(m-1)\dot{x}] \quad \text{et} \quad u(m\dot{x}) - b\,[(m-1)\dot{x}]$$

signa præposita per totum intervallum non mutare; (vide ad pag. 211, ṽ. 6 notata).

Pag. 600 sub 5 ṽ. 3 verbum «decrescenteve» insertum est. Vide

Errata, paginarum LXXVI, quæ bis occurrunt, primam. Hic etiam annotationes sequentes leguntur:

Notandum autem est 1. quod hoc pacto, utvis mutato integro n, eatenus mutatum m fractum fieri possit; atque tum per m-tum $\dot{x}$ ut in seriebus m-tus terminus intelligendus esset: ex. gr. si m fiat $7:3$ significaret m-tum $\dot{x}$ septimum $[y:3n]$.

2. Sed clarius simpliciusque est, variabilem absolutam x recta exprimendo, per x in $a(x)$ idest $A(x)-A(x-\dot{x})$ intelligere quamvis abscissam, quæ a 0 incipiendo in certa ipsius y parte C [aut continua aut e certis aliquot continuis constante] terminatur; per $\dot{x}$ autem intelligere ipsum y per integrum n divisum; si vero variabilis alia z quoque in expressione dicta adsit, certa positionis simultaneæ conditione ab absoluta dependens, per z ibidem intelligatur valor variabilis huius cum dicto x simultaneus, idest quo ad finem illius x gaudet; et si valor variabilis eiusdem ipsi $x-\dot{x}$ repondens z' dicatur, per $\dot{z}$ in tali expressione intelligatur $z-z'$, quod manifesto incrementum variabilis dependentis dictæ est, dum absoluta ex $x-\dot{x}$ addito incremento $\dot{x}$, fit x.

Sintque talia, $u(x)$ et $U(x)$ ab n dependentia, ut pro quovis n et m [Ed. II. pag. 210.] sit $u(m\dot{x})=U(m\dot{x})-U((m-1)\dot{x}.)$ Si iam pro quovis dicto x demonstretur quod sit $\frac{u(x)}{a(x)} \doteq 1$, adeoque pro quovis utvis magno N detur tale n [finitum omnino] ut $u(x)-a(x)$ sit $<\frac{a(x)}{N}$; et ad cuiusvis abscissæ in C terminatæ finem erecta ordinata, exprimatur n minimum illi x satisfaciens; erit hæc finita ex omni puncto ipsius C.

Quo pacto accipi recta potest, quamvis ordinatarum superans, adeoque n quovis dictorum maius.

Et si tam $y-\beta-C$ quam summarum A et U partes eidem appertinentes $\to 0$, dum $n \to \infty$; (Ed. II. pag. 598) dicta facile applicantur.

Potestque *differentiale* dici $u(x)$ ipsum sensu hoc, tali forma gaudens, aut ad talem (per Ed. II. pag. 217) reductum, ut in quovis eius termino litera punctata sola, et in prima potentia sit: nempe per id priora intelligantur.

Pag. 601, $\dot{y}$. *17*. Mutato modo denotationis vocabula »clausam» et »clausa» post »maiorem» et »minori» delenda fuerunt.

Pag. 602, *sub 7* in fine clausula »ut ibidem» ut otiosa deleta est.

Pag. 605, $\dot{y}$. *2* pro t ponendum erat $\dot{t}$.

Pag. 606, *9 a calce* in ed. I. auctor sic erat orsus: »Pariter (pag. 222) calculum error irrepsit. Est nempe». Quoniam error iste calculi suo loco iam emendatus est, nihil attinebat eius mentionem fieri, itaque articulus sic incipit: »Si vero . . .». Exemplum ipsum vero iam propter adnotationem ei subnexam omitti non potuit.

Pag. 607. Observatio art. *c)* præcedens in ed. I, eadem est, quæ iam pag. 254 initio art. primi exposita erat, ideoque eam hinc omisimus.

Pag. 609, $\dot{y}$. *3* in ed. I (pag. LXXIV) hæc sequebantur: »ubi $\sqrt{\frac{1}{g}}$ (quantacunque fuerit unitas) idem manet, ut antea».

Ad hæc Bolyai pag. LXXV non satis lucide sequentia observat:

»Pag. LXXIV non solum post $\sqrt{\frac{1}{2g}}$ omissum est *non*; sed g ex toto omitti debuisset: nam $\pi : \sqrt{2g}$ nonnisi pro $g=1$ valet; at $\pi : \sqrt{2}$, nempe $3{,}14 \ldots : 1{,}41 \ldots$ pro quavis unitate valet modo sequenti. Si quid de quavis unitate indeterminata F' demonstretur, et unitas quæsiti x dicatur f' pro $F'=1$, atque prodeat ex. gr. $x=\frac{2}{3}F'$;

tum pro casu speciali, si dum generale F' specialiter F fit, generale f' specialiter f fiat, erit $x = \frac{2}{3} f$.

Nempe certa unitas dependet ab altera: ex. gr. si pro temporis unitate ponatur t, et pro rectarum unitate s, via in certo loco sub $t = 1$ libere labentis: erit unitas velocitatis illa, qua sub t æquabiliter s describeretur. Applicando ad motum libere labentis; ubi spatia sunt uti temporum (atque etiam uti velocitatum finalium) quadrata, estque velocitas ad imum spatii cuiusvis tanta, ut ea sub tempore lapsus duplum spatii illius describeretur æquabiliter; atque hinc si tempus T, spatium S, et velocitas finalis v sit: erit

$$s : S = t^2 : T^2, \quad \text{id est} \quad 1 : S = 1 : T^2$$

item

$$s : S = (2s)^2 : v^2, \quad \text{id est} \quad 1 : S = 2^2 : v^2.$$

Itaque

$$T = \sqrt{S}, \quad \text{et} \quad v = \sqrt{4S}$$

ubi radice quoad $s = 1$ extracta prius numerum ipsorum t *dabit, sub quibus labens spatium S describit*, posterius numerum ipsorum $s = 1$, quæ velocitate quæ ad imum ipsius S est, æquabiliter sub $t = 1$ describentur.

Si iam pro spatii unitate ponatur via sub $t = 1$ libere labentis: erit (pag. LXXIII)* $v = \sqrt{s(h-x)}$ et prodibit tempus quæsitum $= \frac{\pi}{\sqrt{2}} t$ in genere; at si specialiter ex. gr. $s = 1 = 9g$ fiat, $t = 3''$ erit, et pro $s = kg$ (quantitatem abstractam denotante k) dabit $\sqrt{kg}$ quoad $g = 1$ accepta radice numerum secundorum quibus t æquale est; unde fiet: »$\frac{\pi}{\sqrt{2}} t = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{k}$, quod item $= 3{,}14\ldots \sqrt{\frac{s}{2g}}$«.

* In ed. II. pag. 607.

Pag. 610. «Expositio brevis methodi qua primæ lineæ calculi differentialis in opere Hungarico tractantur» hic sub *N.* repetita, invenitur in ed. I. Tomo I. pagg. LXXXVIII—XC.

Pag. 611, ỳ. *5—11* constructio dictionis uti omissio vocabuli «quod» desiderat in constructionem accusativi cum infinitivo mutata est.

Pag. 611, III, ỳ. *9* loco «B» in ed. I scriptum erat $(B)\gamma$.

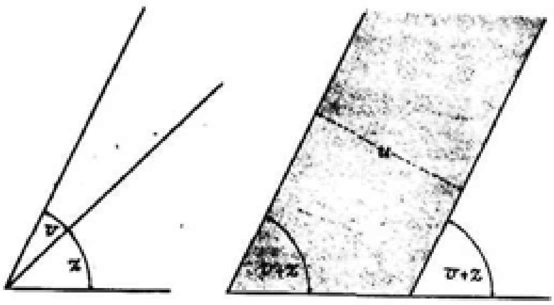
Pag. 612, ỳ *1. et 2* loco «$n-p+1$» in ed. I scriptum erat «p» et loco «ordinata maxima» litera «k».

ERRATA.

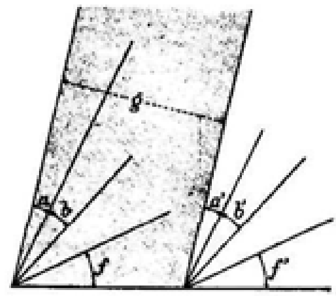
Pag. 11, Ẏ. *4 a calce* «apogogicae» pro «apagogicae» est error typothetae.
Pag. 22, Ẏ. *2 a calce* pro «necquidquam lege «nec quidquam».
Pag. 24, § *3*. Ẏ. *4*. pro «ab» . . . lege: «ad».
Pag. 43. Ẏ. *4 a fine* § *3*, vocabulum «vero» ita est supplendum «at vero».
Pag. 52, *IV*. Ẏ. *3* pro «necquidquam» lege «nec quidquam».
Pag. 53 Ẏ. *3 a calce* pro «o» lege «=».
Pag. 64, Ẏ. *5 a calce* pro «Fig. 17» lege «Figg. 17*a*, 17*b*, 17*c*».
Pag. 77, *versu ultimo* pro «iisque» lege «atque».
Pag. 82, *sub 9)* Ẏ. *9*. pro «vero» lege «est vero».
Pag. 99, Ẏ. *5 a calce* literas a prelo excussas supplendo pro «ve» lege «vero».
Pag. 103, *sub 9)* Ẏ. *7* «$a^{\frac{n}{m}} . a^{\frac{\nu}{\mu}}$» corrigendum est in $a^{\frac{n}{m}} . a^{\frac{\nu}{m}}$.
Pag. 107 Ẏ. *9* pro «negativum» lege «negativus».
Pag. 108, Ẏ. *art. 16* Ẏ. *4* pro «$\frac{m\pm1}{n}$» lege «$\frac{n}{m\pm1}$».
Pag. 122, Ẏ. *5 a calce* «duobus» lege «duabus».
Pag. 123, Ẏ. *6 a calce* vocem «duae» corrige in «duo».
Ibidem Ẏ. *12 a calce* pro «elevatas» lege «elevatus».
Pag. 145, Ẏ. *7 a calce* pro «i'» lege «i».
Pag. 149, Ẏ. *2* pro «obtuitu» lege «obtutu».
Pag. 153, Ẏ. *4 a calce* pro «tertia» lege «tertii».
Pag. 154, Ẏ. *10* pro «summan» lege «summam».
Pag. 171, Ẏ. *4* a calce pro «videtur» lege «videre est».
Pag. 175, Ẏ. *3 a calce* pro «fieritque» lege «fieretque».
Pag. 175. Ẏ. *4 a calce* post «positi sint» apponendus est uncinus parenthesim claudens.
Pag. 179, Ẏ. *2 a calce* pro «substitituto» lege «substituto».
Pag. 184, Ẏ. *1*, pro erroneo «$e<1$» lege: «$e>1$».
Ibidem Ẏ. *9*. *10* pro «sit α semper $\frac{a}{n}$» lege: «sit semper $\alpha=\frac{a}{n}$».
Ibidem Ẏ. *3 a calce* pro «$\frac{u'^2}{2.3}$» «lege $\frac{u'^3}{2.3}$».
Pag. 185 Ẏ. *4* ad dextram signi = omissum est signum «—».
Pag. 192, Ẏ. 5 *a calce* pro «novem» lege «novum».
Pag. 204. in ipsa inscriptione sectionis Ẏ. 3 in fine pro «linea» lege «lineae»
Pag. 205 sub 3. Ẏ. *2* pro «quantatis» lege «quantitatis».
Pag. 218, Ẏ. *11* pro «illustrabantur» lege «illustrabuntur».
Ibidem Ẏ. 11 *a calce* pro «differentalium» lege «differentialium».
Pag. 230, Ẏ. 7 et *a calce* Ẏ. 3, Ẏ. 9 pro «t» lege «i».

Pag. 231. ℣. 4 pro «$\int t$» lege «$\int \dot{t}$».
Pag. 232 ℣. *11* pro «$\int gt$» lege «$\int g\dot{t}$».
Pag. 232. ℣. 5 *a calce* pro «$v\,(nt)$» lege «$v\,(n\dot{t})$»
Pag. 248, c) ℣. 2 et 5 pro «*m*-ti *t*» lege «*m*-ti $\dot{t}$».
Pag. 249. ℣. 1 et 8 pro «*m*-to *t*» lege «*m*-to $\dot{t}$».
Pag. 266, ℣. *1* pro «*P*» lege «*p*».
Pag. 292. ℣. 1 *art.* 7 pro litera trunca «*i*» lege «*t*».
Pag. 297. ℣. *8* pro «cirea» lege «circa».
Pag. 315. ℣. *3 a calce* pro «d ci» lege «)dici».
Pag. 328. ℣. *11* pro «positivum» lege «positivus».
Pag. 353. ℣. *1* pro «aliquamdim» lege «aliquamdiu».
Ibidem ℣. *14* pro «ist» lege «sit».
Pag. 359. ℣. *2 alinea* 3 pro «*α*» lege «*a*».
Pag. 379. ℣. *ultimo* pro «eorsum» lege «deorsum».
Pag. 461 ℣. *10, 11* pro «imaignaria» lege «imaginaria».
Pag. 472 ℣. *4* pro «x^3» lege «x^2».

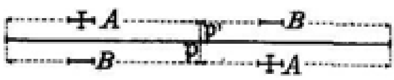
1.



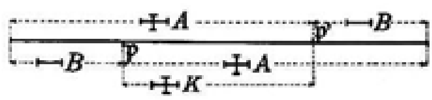
2.



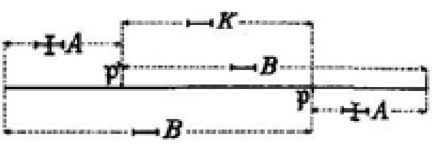
4.



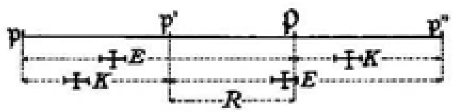
5.



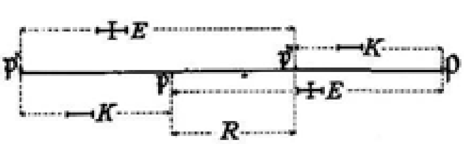
6.



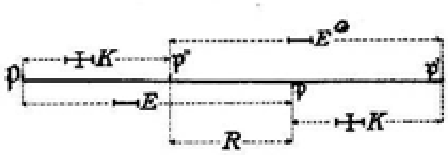
7.



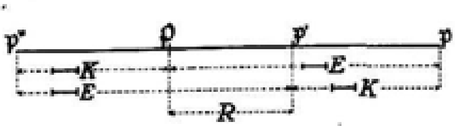
8.



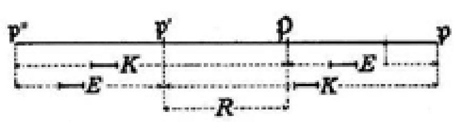
9.



10.



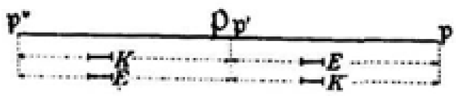
11.



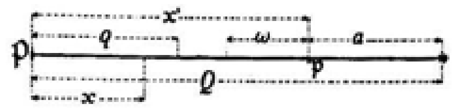
Del. TÖTÖSSY B.

Lith. GRUND V. utódai.

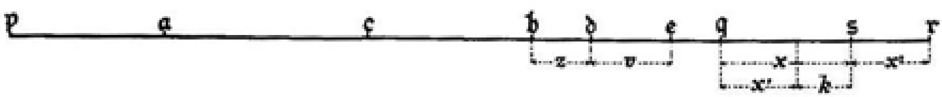
12.



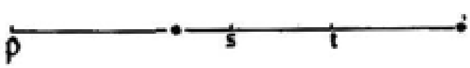
13.



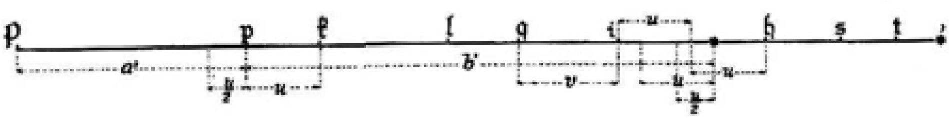
14.



15.



16.

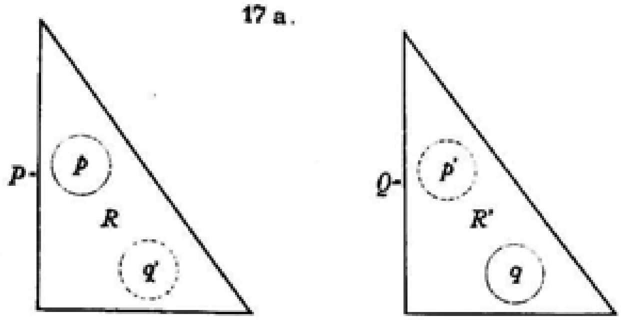


17. bis.

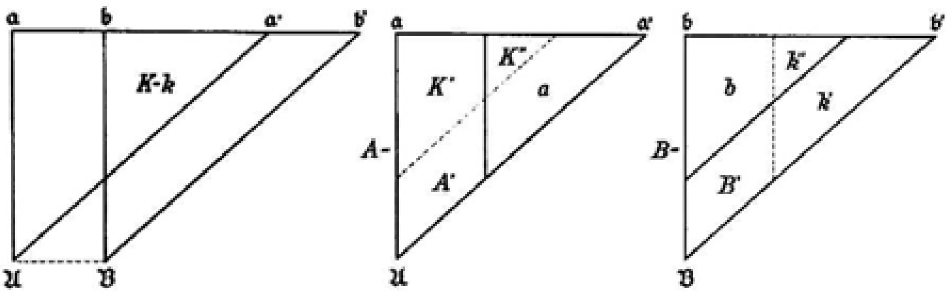
Del. TŐTÖSSY B.

Lith. GRUND V. utódai.

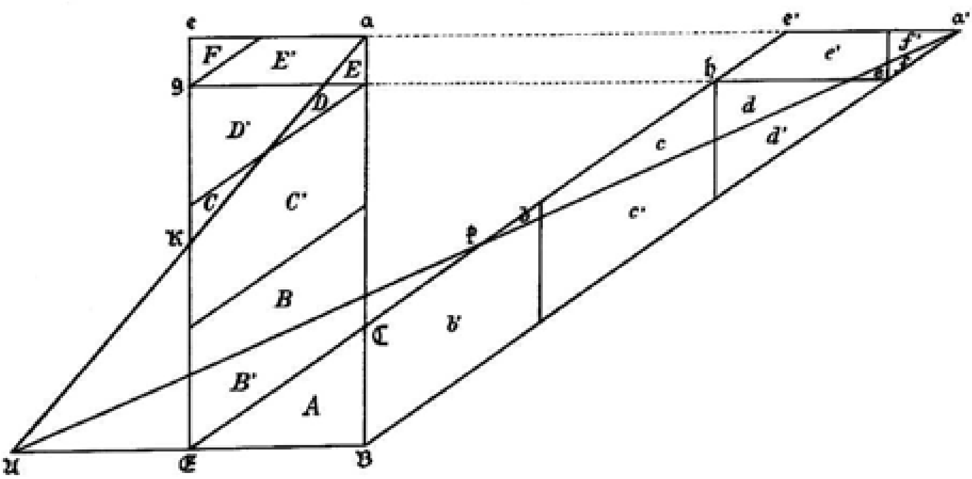
17 a.



17 b.



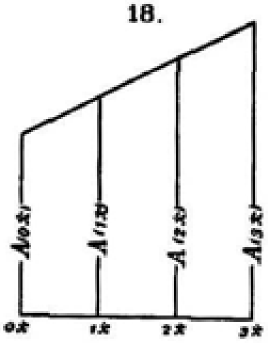
17. c.



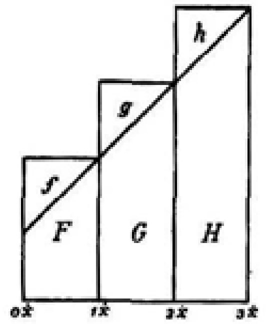
Del. TŐTÖSSY B.

Lith. GRUND V. utódai.

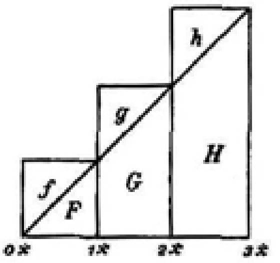
18.



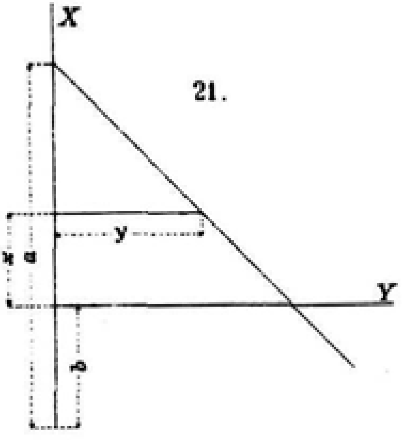
19.



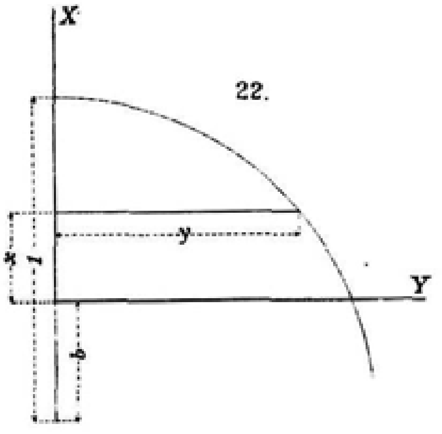
20.



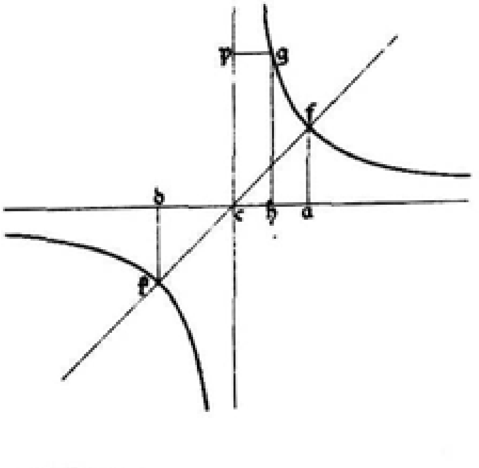
21.



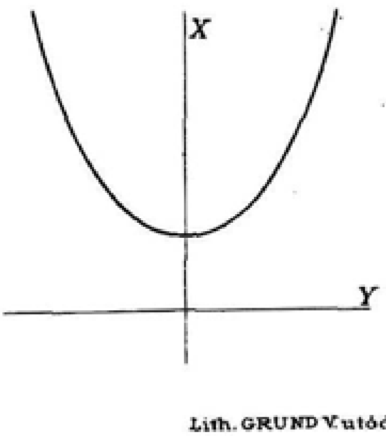
22.



23.

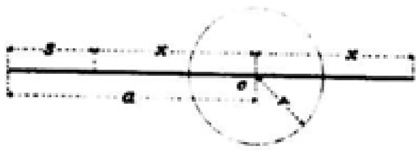


24.

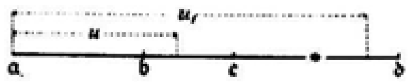


Del. TŐTÖSSY B.
Lith. GRUND V. utódai.

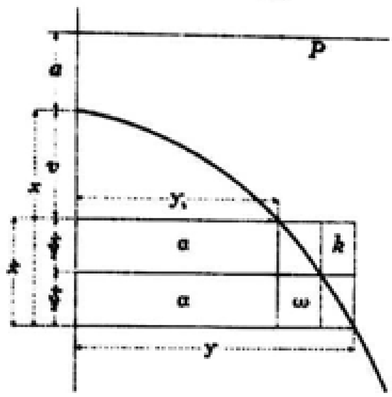
25.



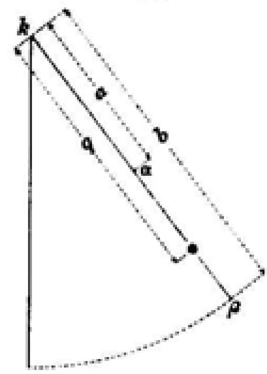
26.



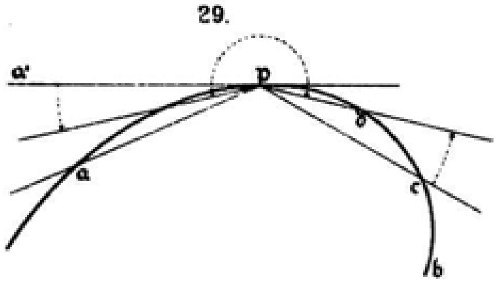
27.



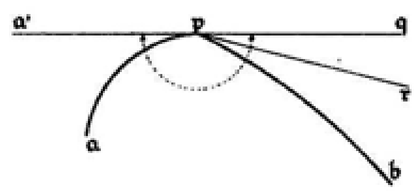
28.



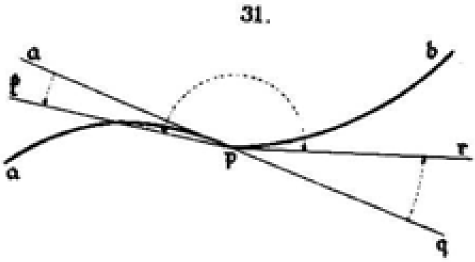
29.



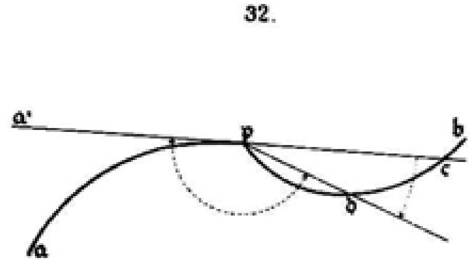
30.



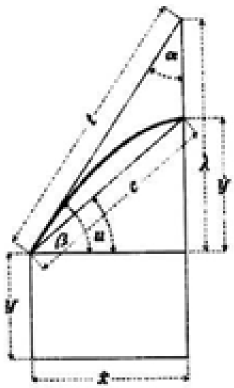
31.



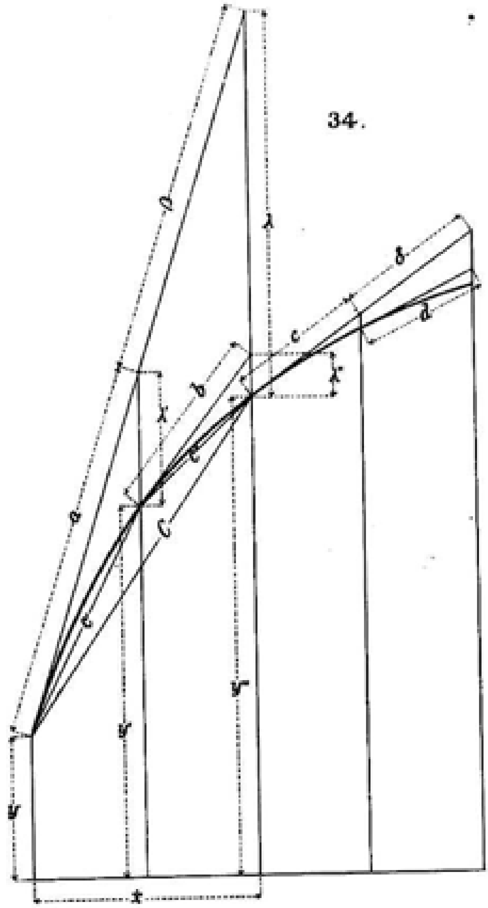
32.



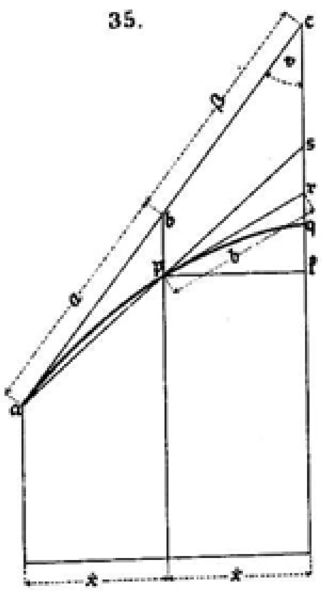
33.



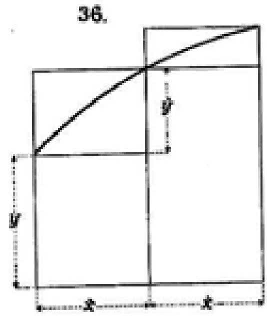
34.



35.



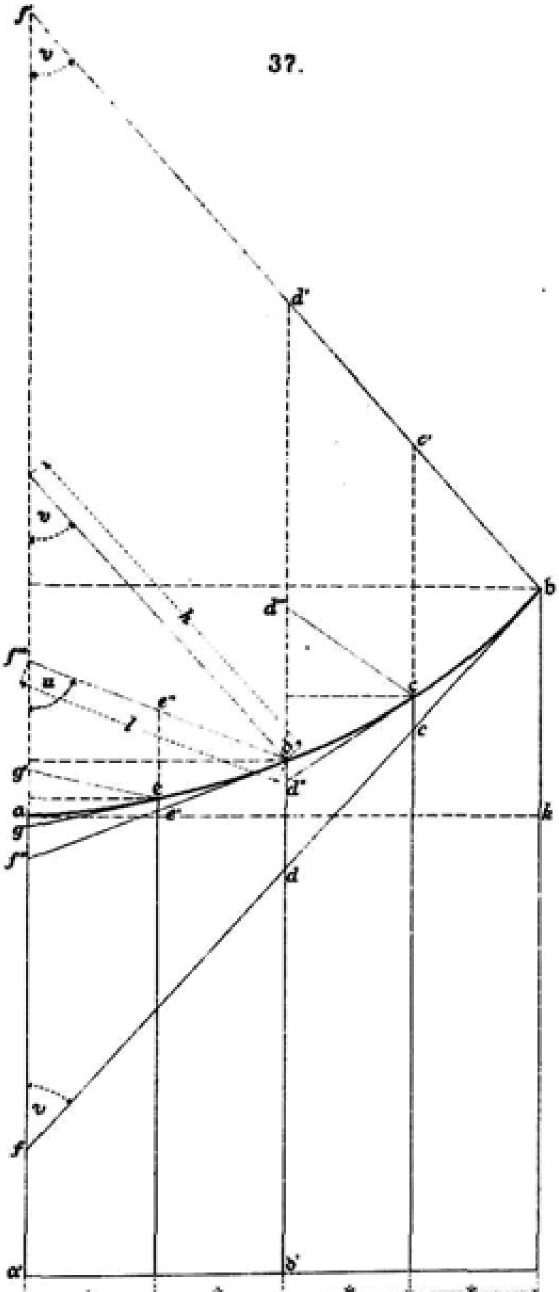
36.



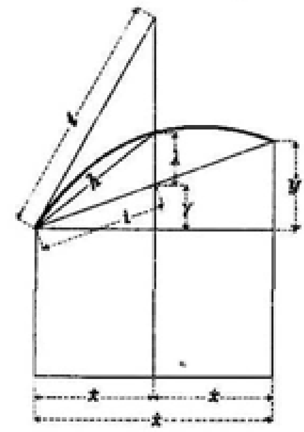
Del. Tötössy B.

Lith. Grund V. utódai.

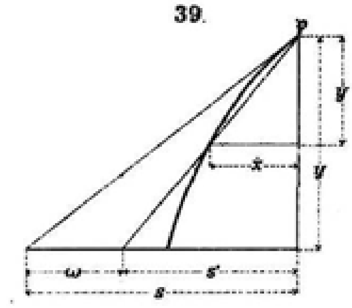
37.



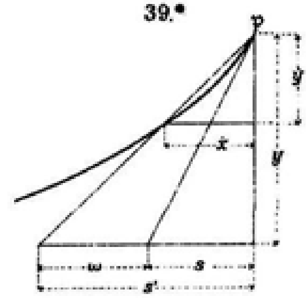
38.



39.

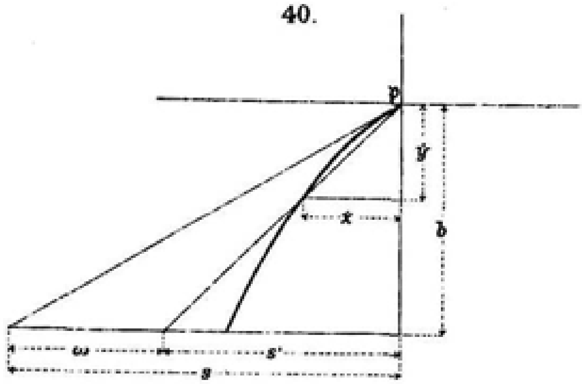


39.*

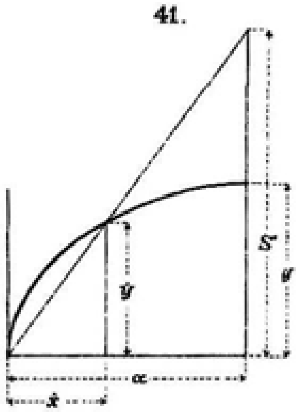


Del. TÖTÖSSY B. Lith. GRUND V. utódai.

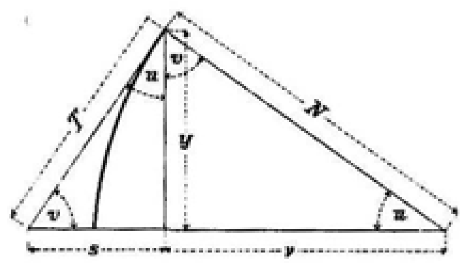
40.



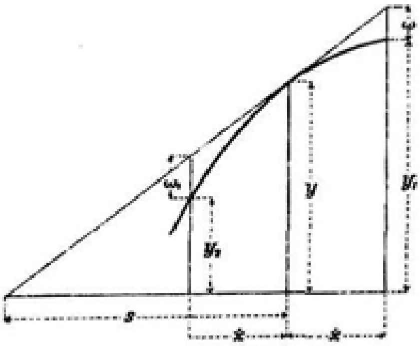
41.



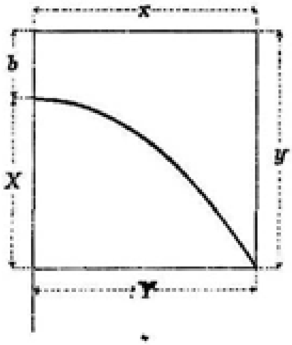
42.



43.



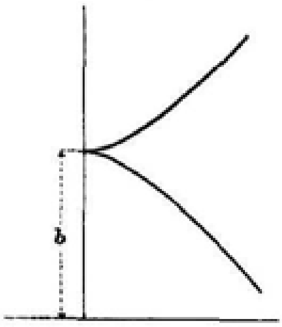
44.



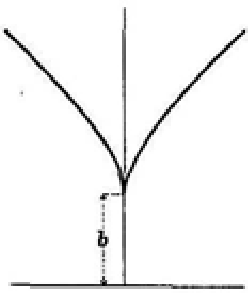
Del. Tötössy B.

Lith. GRUND V. utódai.

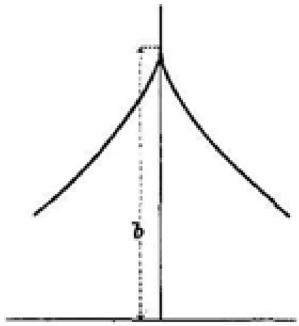
45.



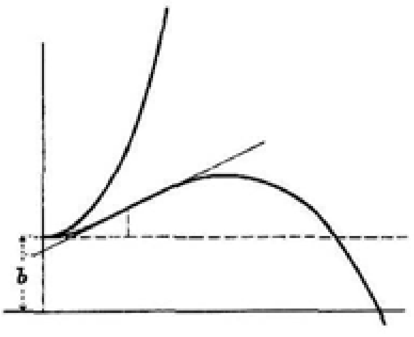
46.



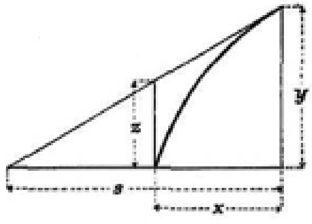
47.



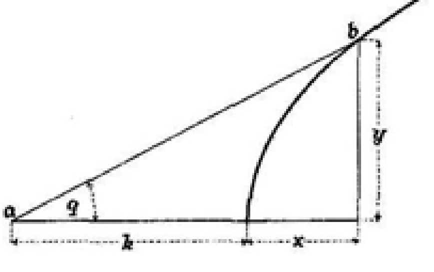
48.



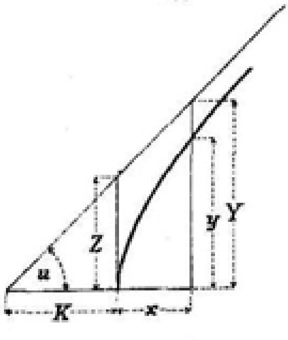
49. (pag.316)



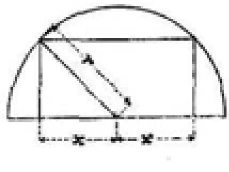
49. (pag.320)



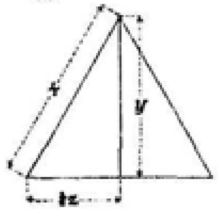
50.



49.*

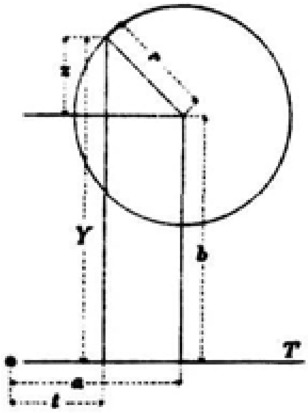


50.*

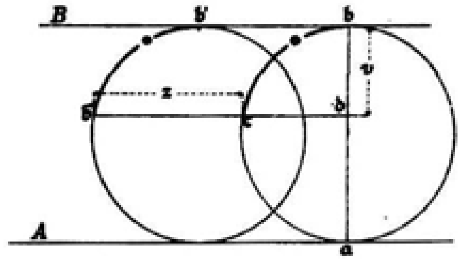


Del. Tötössy B.
Lith. Grund V. utódai.

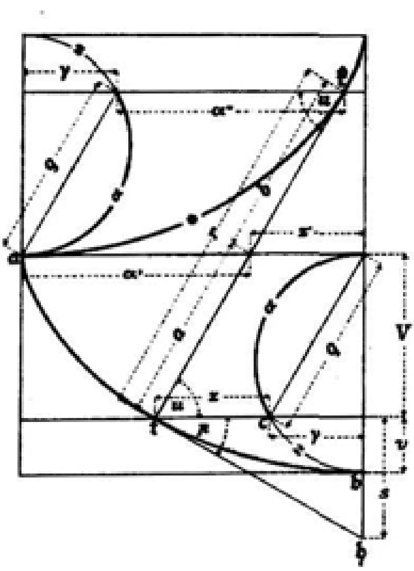
51.



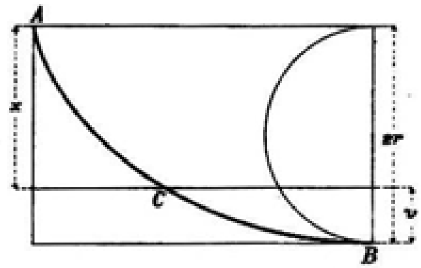
52.



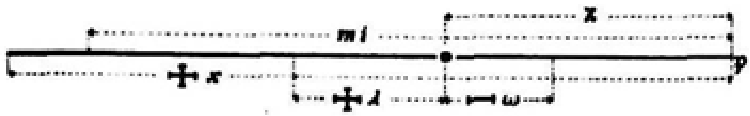
53.



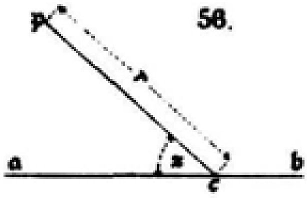
54.



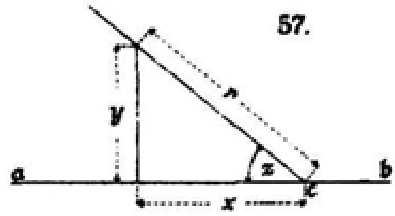
55.



56.



57.



58.