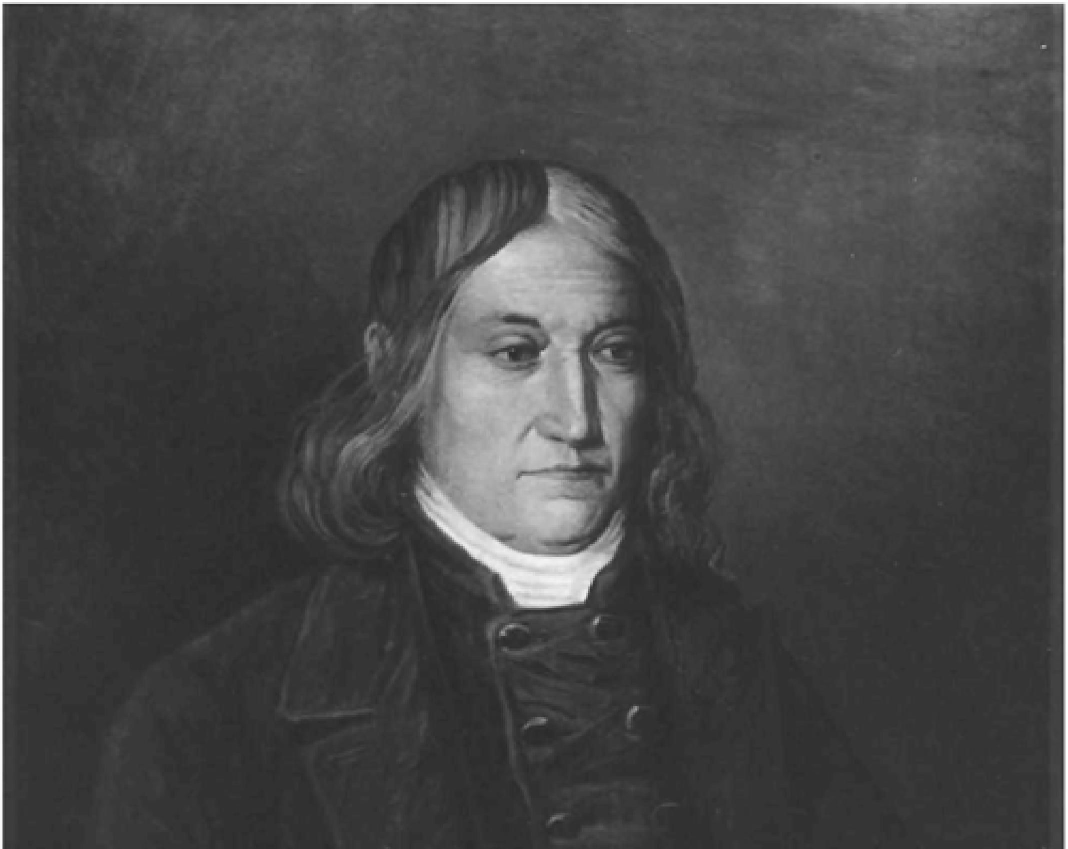
# WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA

# TENTAMEN.

EDITIO SECUNDA.

TOMUS I.



Bolyai Bolyai Farkas mk.

# WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA

# TENTAMEN

IUVENTUTEM STUDIOSAM IN ELEMENTA MATHESEOS PURÆ ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS METHODO INTUITIVA EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA INTRODUCENDI, CUM APPENDICE TRIPLICI.

EDITIO SECUNDA.

TOMUS I.

CONSPECTUS ARITHMETICÆ GENERALIS.

*MANDATO ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SUIS ADNOTATIONIBUS ADIECTIS* EDIDERUNT

IULIUS KŐNIG ET MAURITIUS RÉTHY

ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SODALES.

ACCEDIT EFFIGIES AUCTORIS.

BUDAPESTINI.

SUMPTIBUS ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ.

MDCCCXCVII.

TYPIS SOCIETATIS FRANKLINIANÆ.

# PRAEFATIO EDITORUM.

Opus WOLFGANGI BOLYAI «Tentamen» inscriptum atque «Appendix» filii *eius* JOANNIS *eidem* adnexa *cogitatis ex ipsis auctorum ingeniis* haustis, nec non audacia argumentationum inde deductarum æque excellunt, neque immerito animos omnium scientiarum fautorum cum admiratione in se converterunt.

Huius admirationis ratione habita Academia scientiarum Hungarica ita sibi persuasum habens, se, si opus hoc denuo et in forma auctorum digna ediderit, summopere profuturam esse ipsi scientiæ, novam hanc editionem adornari constituit, curamque et negotium huius operæ exsequendæ nobis infra scriptis commisit.

Cum itaque primum operis tomum publici iuris facientes negotii a nobis suscepti partem exegisse videmur, rationem reddere volumus, quomodo in exsequendo opere versati simus.

Conditiones sinistræ, quibus impeditus WOLFGANGUS BOLYAI «Tentamen» suum conscripsit et tenuitas instrumentorum typographiæ cui impressio operis committenda erat, non tantum elegantiæ formæ sublimis huius operis obfuit, sed etiam lectionem libri sæpe perdifficilem reddidit. Hæc incommoda a nova hac editione uti potuimus conati sumus amovere.

Edito tandem operi ipse auctor per duodecim annos nunc longioribus nunc brevioribus temporis intervallis intercedentibus non paucas addidit emendationes; has, ubi ratio postulabat, contextui operis inseruimus, sive errores in iisdem indicatos emendavimus. Observationes vero auctoris, quas reapse contextui inseri non videbatur opportunum, si breviores fuerunt calci paginarum apposuimus, sin longiores, inter additamenta et adnotationes ad finem operis appositas relegavimus.

Inter errores calculi in expositione exemplorum occurrentes etiam tales inveniuntur quos BOLYAI propter imperfectam rationem impressionis tardius nec ipse animadvertere potuit; nos omnia ista exempla summa cum cura denuo percensendo, ocurrentia menda — minuta sane — ad mentem auctoris emendando eliminavimus.

Sponte intelligitur nos in eo elaboravisse ut mutationes quas necessarias existimavimus quam minime discrepent a ratione auctoris, præterea de una quaque in adnotationibus accuratam rationem reddidimus. Huic curæ solum in rebus minimis, velut in interpunctionibus, supersedere placuit.

Adnotationibus addidimus etiam elucidationes nostras, quibus quædam loca operis illustranda esse duximus.

In figuris etiam quædam mutanda erant, ubi delineationes ipsius BOLYAI ad illustrandum textum minus idoneæ fuerunt.

Ut conspectum totius operis faciliorem redderemus utile visum est opus totum in sectiones dividere, quarum cuique suum titulum præposuimus, porro omnia quæ ad arithmeticam referuntur in hoc primo tomo collegimus, partes vero geometricas, cumque his etiam »Appendicem« JOANNIS BOLYAI secundo tomo reservavimus.

Symbola mathematica quam artissime fieri posuit conformiter editioni primæ applicuimus, ubi vero facilitati lectionis consulturi quædam mutanda esse vidimus, nonnisi euismodi formarum mutationes admisimus quæ modum ratiocinationis nullatenus afficiunt. Sic ex. gr. signa $>$, $<$ vulgari sensu adhibuimus signa vero $\gtrdot$, $\lessdot$ in comparatione valorum absolutorum, contra quam BOLYAI, qui ceterum sive inopia typographiæ impeditus, sive per incuriam hac in re parum sibi constat. Similiter in designandis functionum diversitatibus pro signis a BOLYAI excogitatis satius visum est communiter adhibitis uti sicut et in designatione quantitatum imaginariorum quædam mutanda censuimus (V. pag. 628). At signa peculiaria ratiocinationi BOLYAII specialiter adaptata velut designationes differentialium et quotientum differentialium immutata reliquimus.

Sane possunt alii aliter rem concipere, nos certe persuasum habemus his mutationibus lectionem Tentaminis faciliorem esse redditam, et ut rationem procedendi nostram probemus, possumus afferre verba ipsius BOLYAI, viri certe optimæ auctoritatis, qui in lucubratiuncula »Recensio per auctorem ipsum facta« inscripta, quam in fine tomi secundi edituri sumus, futurorum operis editorum attentionem ad has mutationes evocat.

Reddita hoc modo ratione procedendi in accuranda hac nova editione gratissimi nostri officii ducimus hic gratias agere participibus operis nostri, nominatim sodali nostro academico domino HENRICO FINÁLY et collegæ nostro professori domino BÉLA TŐTÖSSY.

FINÁLY, cuius consilio in rebus ad correctionem elocutionis spectantibus usi sumus, annotationes nostras, lingua vernacula conscriptas in

Latinum vertit, quod eo difficilius erat, quia sine accurato studio ipsius «Tentaminis» fieri non potuit.

Domino TÓTÖSSY obligati sumus pro figuris accuratissime delineatis, quæ huic tomo adnexæ certe magnopere proderunt lectoribus operis.

Gratias habemus etiam Domino JOSEPHO KONCZ professori collegii Marosvásárhelyensis, qui præter «Recensionem» supra laudatam etiam subscriptionem propria manu factam WOLFGANGI BOLYAI et exemplar primi tomi tentaminis notis marginalibus illustratum, sane mancum, quod olim JOANNIS BOLYAI fuerat, utenda præbuit.

Budapestini 1896.

*König, Réthy.*

## HOC TOMO CONTINENTUR:

# INDEX TABULARUM

## ET PAGINARUM, QUIBUS FIGURÆ TABULARUM TRACTANTUR.

# SIGNA ET VOCABULA,

## A BOLYAI INVENTA, QUAE IN HOC TOMO REPERIUNTUR IPSIS AUCTORIS VERBIS EXPLICATA.

| | | |
|---|---|---|
| $A \doteq B$ | denotatur | $A$ absolute æquale ipsi $B$ (pag. 25), |
| $\underset{\cdot}{A} \mathrel{\dot{=}} B$ | » | $A$ quoad contentum æquale ipsi $B$ (pag. 26), |
| $A = B$ | » | $A' \doteq B'$, si $A'$, $B'$ denotent quantitates $A$, $B$, postquam reductæ fuerint (pag. 27), |
| $z \frown \alpha$ | » | $z$ tendit ad limitem $\alpha$ (pag. 35), |
| $T \stackrel{\scriptscriptstyle +}{=} t$ | » | $\frac{t}{T} \frown 1$ (pag. 214), ubi $T$ et $t$ æquipollentia dicuntur, |
| $A \leftarrow\!\!= B$ vel $B =\!\!\!\rightarrow A$ | » | expressionis $A$ dictae valor quivis alicui valori expressionis $B$ æqualis (pag. 124), |
| $A \rightleftharpoons B$ | » | quilibet valor cuiuslibet expressionum $A$ et $B$ æqualis alicui alterius valori (pag. 124), |
| $\dashv\!\!+\!\!\vdash$, $\vdash\!\!\dashv$ | » | positivum, negativum (pag. 28), |
| $-A$ | » | $\dashv\!\!+\!\!\vdash B$ si $A$ denotet $\vdash\!\!\dashv B$, et $\vdash\!\!\dashv B$ si $A$ denotet $\dashv\!\!+\!\!\vdash B$; adeoque oppositum ipsius $A$, ut dici solet, $+A$ vero ipsum $A$ denotat. |
| $\geqslant$ et $\leqslant$ | » | aliud, quam per $>$ et $<$ (pag. 27),* |

Per literas latinas græcasque (nisi aliud monitum fuerit) *quantitates* denotantur, et per

literas germanicas (nisi aliud monitum fuerit) linearum *certa puncta*, ita ut $\mathfrak{ab}$ denotet *lineam* quæ inter $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ est.

* Vide adnotationem pag. 616.

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt[*]{4}$ | denotatur | 2; inde quid per $\sqrt[*]{P}$ intelligatur patet (pag. 124), |
| $\dot{x}$ | « | $\frac{x}{n}$, si $x$ variabilis absoluta sit (pag. 209), |
| $\dot{y}$, $\dot{z}$ | « | incrementa simultanea variabilium $y$, $z$ pro $m$-to $\dot{x}$ (pag. 220), |
| $\mathrm{d}A(x)$ | « | differentiale ipsius $A(x)$; verum (pag. 217), strictius (pag. 217), generalius (pag. 220), purum (pag. 221), partiale (pag. 222), |
| $\partial A(x)$ | « | cœfficiens differentialis heic derivata dicta, (pag. 207), derivata pura (pag. 221), partialis (pag. 222), |
| $\mathrm{d}^n A(x)$ | « | differentiale $n$-tum (pag. 207), |
| $\partial^n A(x)$, $\underset{n,x}{A}$ | « | cœfficiens differentialis $n$-tus; derivata $n$-ta (pag. 207, 341). |

Vocabula sequentia, locis annotatis explicantur.
*Pars indivellibilis*, *portio* (pag. 23),
*pure imaginarium* (pag. 121),
*logarithmus et potentia elementaris* (pag. 50),
*logarithmus et potentia sensu sublimiori* (pag. 193),
*functio absoluta*, et *variabilis absoluta* (pag. 206),
*aequipollentia* (pag. 214),
*quantitas concreta* (pag. 111).

# TENTAMEN

JUVENTUTEM STUDIOSAM

IN ELEMENTA MATHESEOS PURAE, ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS, METHODO INTUITIVA, EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA, INTRODUCENDI.

CUM APPENDICE TRIPLICI,

Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario.

Tomus Primus.

*Maros Vásárhelyini.* 1832.
Typis Collegii Reformatorum per JOSEPHUM, et SIMEONEM KALI de felsö Vist.

Imprimatur.

M. Vásárhelyini Die

12 Octobris 1829.

Paulus Horváth m.p.

Abbas, Parochus et Censor

Librorum.

## LECTORI SALUTEM!

Vix rudimentis primorum elementorum superficialiter imbutus, proprio nutu, sine ullo alio fine, nonnisi interna veritatis siti ductus, fontem ipsum quærendo; fundamenta tentaminis hujus, imberbis adhuc juvenis posueram: quod, cum ita vacare a negotiis, ut res ista postularet, frustra amplius sperem, qualecunque sit, edere decrevi; ut aut acutiora ingenia, in otiis quæ mihi defuere, perfectius quid præstent, aut alii eodem igne fatuo per tenebras illusi, viam tritam haud deserant, operamque, pretium ejus non facturi, alio locent.

Certe, tantum abest, ut auctor fieri unquam voluerim; ut sine discipulorum gratissimorum impulsu haud quidquam edidissem.

Primaria tantum fundamenta heic ita tradere propositum est; ut Tyrones, quibus abyssum levibus pennis trajicere, merisque imaginibus, nullo originali gaudentibus, in auras vix respirabiles tolli haud datum est, pede firmiore progressi, evehantur ad sublimiora.

Ingratam dixeris operam; cum celsa ingenia, supra vallium ambages, per apices alpium gradiantur: at certe nodi ubique gordii adsunt, gigantum gladios requirentes — *Neque pro iis scriptum hoc est: sed pluri*bus saltem ejusdem mecum indolis futuris; quibus si vires tempusque, quæ mihi, donec quadamtenus conquiescere potui, impendenda fuere, servaturus sim, operam haud perdidi. —

Monitos quippe (meo exemplo) juvenes velim: ne laborem sex millium annorum aggressi, proprio marte, jam olim inventis quærendis vitam deterant; discant prius grati, quæ priores docuere; et provisa re ædificent: si quid autem scripserint, videant, oraculum conscientiæ interrogando, ne quid peste communi, quæ et spiritus a terrestribus vinculis liberos cœlo dejecit, correpti edant; nisi quid in emolumentum scientiæ, saltem culturæ communis proferant; et nil quidem admirantes, (non ut ipsi admirandis similes *videantur, sed quod effectus quivis caussæ par sit*), vires majores modeste agnoscendo, suis acquiescant. Ac certe in tanta scriptorum turba, non scribere fit rarius; adeo ut fere is monumentum mereatur, qui legere scribereque sciens, sine ratione prægnante scriptor non fit: de re agitur; quidquid boni fuerit, seriei infinitæ terminus antecedens est; honos autem nomenque auctoris unici manet, quo innominato, prodeunt arbores herbæ floresque, cum hymnis simplicibus, quibus amplum naturæ templum resonat. — Atque demum, et veri nominis scriptores, (etsi malignitati, quæ libros solum teredinibus posteris relictura, auctores ipsos corrodit, superstites esse queant), si terra duret, ut soles in via lactea in nebulam confluent; nec quidquam in mundo externo est, (sive systematis orbium, sive lucerna unius vesperæ fuerit), quod non aliquando intereat; et nonnisi conscientiæ vere bonæ purus jugisque fons, Deo teste gaudens, illi coævus est.

Equidem, licet generis humani gratitudine dignum censeam, qui finem quem mihi proposui, feliciter assecutus fuerit; cum grana tantum arenæ ad pyramides magis aliorum gloriæ attulerim: si non *Senecæ* dicto me ipsum consoler, *Suspice viros etsi deciderint, magna conantes*: hoc saltem laboris pretium petam; ut voluisse quoque puro veritatis amore dulce sit; et errores, quos partim per omissionem, partim per commissionem, a homine occupato, vita millefariam divisa, direptaque, (valetudine infirma, raroque inter nubila perpetua apparente cœlo), et penuria librorum mathematicorum recentioris ævi evitare vix possibile erat, benigne emendentur. Certe quo magis res perficietur, et quo magis superer: eo lubentius succumbam. Denique tantum valeat, quantum valet — et Tu LECTOR CANDIDE vale!

# INTRODUCTIO.

Duæ sunt indelebiles divinæ effigiei lineæ, *veritas* et *amor*; lumen calorque, stamina radii solis æterni in argilla mortali micantis, cuius nitor per nubes infiniti transmissus in mundo tam externo, quam interno pulchritudinem Originalis ipsius absolutam indicat; relative pulchrum dicimus, quod illius sensum in nobis excitat, nubila sancta revellens, ut lux verna cœlipetes alas motitet, via in beatam patriam in infinito aperta: necessario impellimur

1. Ad instar supremi stupendum omne penetrantis oculi, sine fine ullo eo niti, ut in quantum fieri potest, totum quo penitius perspiciamus.

2. Ad instar supremi infinitum orbem amplectentis Patris, expansis brachiis erga omnia entia sentientia, aut intelligentia, ubivis in tempore et spatio fuerint, eniti, ut amore reciproco uniantur omnia, disharmonia ad concentum beatitudinis quam maximæ (tam quoad intensionem quam quoad extensionem) omnium, et singulorum perducenda. —

## I. VERITAS.

Veritates dividi possunt in *æternas* id est de iis sonantes, quæ in omni tempore sunt, et *temporaneas*, nempe de iis tractantes, quæ in certis tantum temporibus sunt (adeoque in præsenti præterito aut futuro). Præteritum referre *Historiæ* est; evolutionem omnis generis, mundi externi internique explicando, ut intelligatur, cur præsens ita sit; superiorum intellectuum esset problema resolvere, (cum præsens filia præteriti, materque futuri sit, et illud in effectu, hoc in caussa ad præsens reducatur) e dato præsente futurum et partim præteritum reperire. —

1. Repræsento, cogito, ratiocinor: quæ sint formæ activitatis hujus? et an respondeat ei aliquid extra repræsentationem? dependeatque ista ab eo? porro quæ loca ultima, in quæ repræsentationes una post aliam, et repræsentata unum extra aliud (nempe mundus externus) ponuntur? quærit *Philosophia*.

In ultimariorum horum locorum, temporis nimirum spatiique, uti in intuitu per abstractionem remanent, naturam inquirit *Mathesis pura*, quæ fiet *applicata*.

Utrumque e nexu repræsentationum segregatur, ut cogitationis objectum esse queat; nec quasi per eas positorum iisque connatorum realitas heic præter intuitum asseritur negaturve.

*Ratiocinari* dicimur, dum e propositione, vel propositionibus $A$, $B$,... quærimus novam.

*Propositio* dicitur, quod ad formam hanc reduci potest: ‚$A$ est ($B$ vel cum $B$)‘. Dicitur $A$ *subjectum*, $B$ *prædicatum*. *Conversa* eius dicitur hæc: ‚$B$ est ($A$ vel cum $A$)‘. Si $B$ denotet non $C$, tum ex ‚$A$ est cum $B$‘, fit ‚$A$ est cum non $C$‘.

Propositio e simplicibus componi, at composita quoque ad formam dictam reduci potest. Tam $A$ quam $B$ potest esse compositum, et quidem pluribus modis: collective, disjunctive, condicionate, aut certo modo determinative.

*Aliquid*, *aliqua* vel *omne* opponitur *nulli*, *omni* vero *non omne*; et *non omne* est aut *nullum* aut *aliquid* vel *aliqua* exclusive. Etiam ipsum $A$ aliquid ex $A$ est. Subjectum $A$ potest denotare aliquod, aliqua, vel omne, vel non omne, etiam nullum certorum $a$, $b$,.... Si $A$ denotet non omne dictorum, et $B$ denotet non $C$, ex ‚$A$ est cum $B$‘ fiet ‚*non* omne ipsorum $a$, $b$,... est cum non $C$‘. ‚Nullum $A$ est cum $B$‘ potest exprimi per ‚omne $A$ est cum non $B$‘. Potest sive subjectum sive prædicatum imo utrumque disjunctivum, imo etiam propositio esse, ex. gr. ‚$A$ est aut cum $B$, aut cum $C$‘; ita ‚aut $A$ aut $B$ est cum $C$‘. Ita ‚$A$ *est cum* $B$ est cum $C$ *est cum* $D$‘; id est si $A$ est cum $B$, tunc $C$ est cum $D$. Variæ adhuc multiplices compositiones fieri patet.

*Definire* est nomen dare conceptui cuidam, aut rei cujusdam qualitatem ei soli propriam exponere.

Definitio exacta est, si sit quam simplicissima, nec contineat talia $A$ et $B$, ut per $A$ ponatur $B$.

Interim, conceptus qualesvis constructos, absque eo, ut realitas eorum constet, aut asseratur, imo etiam si impossibilis sit, quovis signo aut verbo denotare licet; at signa æqualia denotent semper æqualia, nisi aliud monitum fuerit; inæqualia signa vero, ideo tantum quod inæqualia sunt, non debent inæqualia denotare. —

*Axioma* est talis propositio, quam ita esse quævis mens sana humana, sine ulla ratione alia, natura sua intuetur.

*Demonstrare* aliquid $B$, est ostendere illud per $A$, nempe complexum axiomatum et definitionum necessario poni, adeoque $A$ essse cum $B$.

Propositio demonstrabilis *Theorema* audit.

*Scientia* vel potius *Systema scientiæ* est complexus ordine perspicuo coordinatus definitionum exactarum, a simplicissimis conceptibus incipiendo et ex constructis ad novos magis compositos progrediendo (donec ii prodeant, qui duntaxat omne id, quod eo pertinet, complectuntur), et axiomatum simplicissimorum, quorum nullum sit, quod e reliquis deduci queat, atque propositionum ex iis demonstratarum.

Nec omnia definiri queunt, nec omnia demonstrari regrediendo in infinitum (veluti spatii fundus attingi nequit). — Sunt quorum nulla ratio ulterior videtur, et sunt quæ definire ulterius verba clariora non habemus, quæ colligere operæ pretium esset.

2. E loco mundi externi ad ipsum stupendum omne redeo, structuram mechanismumque perspicere studens immensi horologii, cuius catena ex annulis innumerabilium viarum lactearum fluit, nec pondus fundum ullum petit, ac tabula horaria solis lunæque orbitis et mille aliis lucidis circulis picta est. — Opus summi mechanici, unicum mobile perpetuum.

Templum magnificentissimum, columnis variorum ordinum ornamentis variis insignitorum, de cuius fornice ardent myriades solium lucernæ, sphæris in laudem numinis invisibilis concinentibus. Opus summi architecti.

Liber, cujus totus mundus aspectabilis non nisi compactio externa est, et admiranda illa siderum igne scripta hieroglypha titulus operis Authoris summi est.

Mechanismum horologii intelligere, templi delineationem, columnas, lapides cæmentaque jungentia reperire, literasque ultimas cognoscere et clave scripturæ arcanæ reperta sententias, totumque legere desideramus. Opus per omnem æternitatem continuandum.

Hoc qærit *Physica* (externa sensu lato) et quidem cum applicatione matheseos. Mathesi exstruitur scala Jacobi, qua in cœlos scandimus, unde igneis alis ultra omnes vias lacteas oceanumque solium ardentem tollimur in sacrosanctam noctem penetraturi, ubi Pater summus brachiis infinitis totum orbem amplectitur et quo immanibus per vastum jactatos procellis redeuntes excipit liberos.

## II. AMOR.

1. E mundo externo ingredimur in internum externo respondentem, naturam ejus scrutaturi. *Psychologia pura*, seu *Physica interna* in animarum naturam inquirit. Porro cum facultas volendi ad naturam animarum pertineat, leges voluntati ab æterno præscriptas docet *scientia moralis pura*.

2. In unione mundi utriusque, in naturam animarum, uti in concreto sunt, quærit *Psychologia empirica*; nempe infinitæ totius divitiæ in diversitatis unitate et unitatis diversitate consistunt: stupendum omne unum est, in unione duorum systematum (spirituum et corporum) vivum, mundus externus interni expressio et quasi facies est, legibusque similibus utrumque tenetur, sibi invicem respondentibus; ita animæ omnes se invicem attrahentes attrahuntur a Deo tamquam centro amoris universalis; et dantur aliæ vires quoque, uti in mundo externo, quæ planetas in suos soles decidere haud sinentes in orbitis agunt; si nulla vis alia esset præter attractionem, totum perpetuæ quietis tumulo, quasi immensum cadaver jaceret. —

Huc pertinet etiam, in notam regulasque inquirere eorum, quæ nobis in dicta unione (sensu superius dicto) pulchra sunt. Objectum *Aestheticæ.*

Quidnam sit in ista mundi utriusque unione agendum, ut omnes orbitis se mutuo haud offendentibus celerrime curramus ad finem amoris universalis supra dictum consequendum: docet *scientia moralis applicata*; quo etiam *jura* omnis generis pertinent. *Officium* est (subjective) necessitas illa dulcis, qua quilibet undevis ad finem dictum ducitur, itque; dummodo via collustrata sit et affectuum terrestrium vincula cœlestem infantem haud detineant. *Officium* (objective) est via ipsa. Officia omnium omnia consentiunt, ut veritates omnes: et quatenus cujusvis officium est alium in suo faciendo haud impedire, dicitur *jus hujus*; quod (uti officium) pro diversa determinatione vario nomine insignitur. Vita juxta normam præscriptam acta, reddit imaginem Dei visibilem, quæ de originali ejus testificatur, et pallidum temporis occidentem æternitatis aurora collustrat. Virtutis exercitium est lumen solare, quo cœlestes fidei flores aperiuntur, gemmis de humi defixis vultibus lectis nitentes.

Innatum Dei, moralitatis immortalitatisque sensum excitat, dulcique et ineffabili quadam voluptate perfundit e puro matheseos fonte hausta veritas, atque ejus ope penitior naturæ externæ internæque cognitio: adeo ut veritas prodeat in mundum vivens, nascaturque virtus.

Majestas vultus numinis ubique præsentis, nusquam visibilis, sed per quod videntur omnia, radiat e cœlis et terris, atque dum e radiis ad solem, unde prodeunt, ex imaginibus in mundo expressis ad originale elevamur, inter furentes orbis procellas, tranquillitas divina descendit in pectora mortalia, et fluctibus compositis abyssus consolantia refert sidera; jactatique diu demum fessique ad oras huius mundi, clausis in infinito Patris omnium sinu oculis, conquiescimus.

Summum itaque claudit fastigium *Theologia*, quæ mundo tamquam in deserto erranti orphano Patrem ostendit, viamque per vicissitudines itineris quasvis ad eum ducentem face Sacræ Scripturæ collustrat, atque detracta atroci mortis persona angelum demissum revelat, qui fracto cortice externo cœlestem volucrem tollat. Neque evenit quidquam in terris sublimius, quam dum idea Dei in homine interno evolvitur, atque in finito quasi infinitum apparet, primus novi angeli pulsus; polis quasi inversis mutantur omnia, finis annorum omnium fit novi initium, et senis terram petens corpus fiunt exuviæ cadentes embrionis ad lucem evolaturi, amaritudo maturescentia, vulnera ostia ad cœlum aperta, dolores fluxi partus gaudiorum permanentium, et crux tetra fit lux mundi, ✠ quo ⊢⊣ tollitur.

# PRAEVIE NOTANDA.

## A.

*Axiomata et inde praevie deducenda, ne in casibus iteranda sint, formulis generalibus exhibita* (intuitu spatii specialiori suo loco reservato).

Mens de quovis casu ut de flumine quærens unde veniat, de caussa ad caussam ascendens, subsistit ubi ulterius progredi nequit, et si ibi veritates reperit tales, quas sine ulteriore caussa ita esse intuetur, conquiescit, atque veritates ejusmodi in casibus repertas formulis generalibus exponit; partim ob brevitatem, partim ut clare perspiciatur, quænam sint, quæ per se asseruntur sine demonstratione et quod sit systematis totius fundamentum.

I. Tempus est quantitas continua; sed non nisi expers ex eo adest, et semper aliud atque aliud est; atque per quodvis tale, in præteritum et futurum undevis et utrinque absolute æqualiter discerpitur (abstrahendo a directione præteriti et futuri).

II. Tempus quodvis finitum, quod non fuit, adveniet, omne nunquam. Sæpissime est, quod aliquid de quovis dici potest, de omni non.

III. Id quod est sub parte $p$ temporis experte aut cum *ita* aut cum *non* ipsius $B$ (id est aut *cum* $B$ aut cum *non* $B$) est.

IV. Si per $A$ et $B$ poneretur *ita* et *non* ipsius $C$ sub $p$, atque $A$ est, tunc $B$ non est; et si $A$ non est, tunc $B$ est. Hoc est fundamentum demonstrationis apogogicæ, et concluditur modo sequente.

1. Si $B$ sit propositio formæ sequentis, *a non est cum x*, et *A est*, tunc *B non est*; nempe non est id, quod $a$ non est cum $x$; sed aliquod adesse debet (III), nempe aut *a est cum x*, aut *a non est cum x*,

posterius non est, adeoque alterum nempe id, quod *a est cum x*, est. Hinc etiam ubi prodibit, non esse id, quod *Q non est cum Z*, absque iteratione dictorum poterit concludi, *Q esse cum Z*.

2. Si *B* sit formæ *a est cum x*, et *A est*; tunc *B non est* id significat, quod non est id, quod *a est cum x*; id est *non est a cum x*. Itaque sicubi constiterit esse et non esse ipsius *C* per *B* et *A* (veritatem, aut veritates perpetuo vel per hypothesin stabilitas) simul posita simul poni: modum relatum toties quoties iterare supervacuum erit.

V. Quidvis est id, quod est, et sibi perfecte æquale est. Si autem *A* et *B* absolute æqualia sint, atque afficiantur operationibus *D* et *E* absolute æqualibus: cuilibet resultato ipsius *A* cum *D* adest inter resultata ipsius *B* cum *E* resultatum æquale.

Si operatio sit unici resultati, id est si talis sit, ut resultatum ipsius *A* sit nonnisi *a* et resultatum ipsius *B* sit nonnisi *b*: tum *a* est æquale *b*.

Nam datur resultatum ipsius *B* ipsi *a* æquale; sit hoc *C*; hoc *C* erit aut *b*, aut non *b* (III); si *C* non *b* esset, per id, quod *C* est præter *b*, et id, quod præter *b* aliud non est, poneretur *esse* et *non esse* resultati alius præter *b*.

Si operationis indoles talis sit, ut alia quoque resultata dentur; tum id tantum dicitur, quod cuivis resultato ipsius *A* datur æquale inter resultata ipsius *B*. Si *A* et *B* æquali operatione resultati unici affecta producant *a* et *b* æqualia: tum etiam *A* et *B* æqualia sunt, si ex *a* et *b* quoque æquali operatione resultati unici prodeant *A* et *B*.

Si *A* sit æquale ipsi *B*, potest *B* ipsi *A* substitui; eatenus, quod quavis operatione afficiatur *A*, eadem affectum *B* resultatum priori æquale dabit. Ita si *A* sit æquale *B*, et *B* sit æquale *C*, potest *C* ipsi *B* substitui, ut prodeat *A* æquale *C*. Nam sit operatio comparationis; comparationis *B* cum *A* resultatum est indiscernibilitas, et resultatum comparationis *C* cum *A* etiam indiscernibilitati æquale est.

## B.

Denotet $\frac{a}{x}$ heic $a$ cum aliquo tali esse, quod ipsi $x$ æquale est; $\frac{a}{x+y-z}$ vero denotet $a$ esse cum aliquo tali, quod ipsi $x$ æquale est, et simul cum tali, quod ipsi $y$ æquale est, et non esse cum tali, quod æquale ipsi $z$ est, id est esse cum non $z$.

Interim hæ denominationes brevitatis et claritatis ergo heic assumtæ, non nisi hic valeant. Sit jam schema sequens:

$$\frac{A}{x-y-z}\,,\quad \frac{B}{x-y-z}\,,\ldots \frac{P}{x+y-z}\,,\quad \frac{Q}{x+y-z}\,,\ldots \frac{U}{x+y+z}\,,\quad \frac{W}{x+y+z}\,,\ldots$$

Ea, sub quorum quolibet litera aut literæ eædem sunt, (quavis eadem litera signo eodem + vel — insignita) dicuntur *eatenus generis ejusdem*; ex. gr. sub quovis adest $x$, itaque $A$, $B$,..., $P$, $Q$,..., $U$, $W$,... sunt generis eiusdem quoad $x$; dicatur $G$ hoc genus, id est nomen commune eorum sit $G$; et dum dicitur $G$ esse cum $x$, intelligatur (uti ejus origo ostendit) $A$ esse, $B$ esse &c cum $x$; nempe si in propositione *$G$ est cum $x$* substituatur ipsi $G$ quodvis eorum, quorum nomen commune $G$ inde exortum est, propositionem veram manere. Quando dicitur, quod $D$ sit $G$ (denotante $G$ genus), non aliud significat, quam quod $D$ sit aliquod ipsorum $A$, $B$,..., $P$, $Q$,..., $U$, $W$,..., id est eorum quorum nomen commune datum $G$ est. Aliud est dum dicitur *$A$ est ipsum $B$*.

Ita sunt $P$, $Q$,..., $U$, $W$,... generis ejusdem quoad $x+y$, quod dicatur $g$; et $U$ ac $W$ sunt, quoad $x+y+z$, generis ejusdem, quod dicatur $g'$. Dicitur *genus $g'$ species* quoad $z$ generis $g$, et $g$ dicitur species quoad $y$ generis $G$; quod ulterius continuari posse patet. Patet etiam alio respectu subdivisionem aliam esse; ex. gr. $A$, $B$,...$P$, $Q$,... quoad $-z$ aliam speciem ipsius $G$ præbet, cujus item $A$, $B$,... una species, quoad $-y$, et $P$, $Q$,... $U$, $W$,..., quoad $y$, alia species est.

Exemplo sit sequens: denotet $x$ qualitatem quadrilateri rectilinei, $y$ qualitatem, quod dentur duo latera parallela (non excludendo plura), $z$ quod præterea, quod dentur duo latera parallela, adhuc dantur duo latera parallela; $v$ quod anguli sint æquales, $u$ quod latera sint æqualia.

Quadrilater
$(x)$

- Trapezium $(x+y-z)$
- Parallelogrammum $(x+y+z)$
  - Parall. æquiangulum $(x+y+z+v)$
    - æquilat. Quadratum $(x+y+z+v+u)$
    - non æquilater. Rectang. oblong. $(x+y+z+v-u)$
  - Parall. non æquiangul. $(x+y+z-v)$
    - æquilat. Rhombus $(x+y+z-v+u)$
    - non æquilat. Rhomboides $(x+y+z-v-u)$
- Trapezoides $(x-y)$

Literæ æquales heic cum signis æqualibus genera speciesque ostendunt. Patet vero tam in hoc exemplo, quam in priore generis tantum aliqua gaudere literis speciei; imo in exemplo posteriore e genere quoad $x$ non nisi quadratum esse $(x+y+z+v+u)$. Hinc si genus heic quoad $x$ dicatur $G$, in propositione, quod *$G$ sit cum $x$*, ipsi $G$ quodvis allatorum substitui potest; sed ut verum sit, *$G$ esse cum $x$ et $y$*, aliqua tantum eorum, quorum $G$ nomen commune est, substitui possunt; et ut verum sit *$G$ esse cum* $(x+y+z+v+u)$, ipsi $G$ aliquod $G$ nempe quadratum tantum substitui debet. Si vero $w$ denotet qualitatem eam, ut *quinque* laterum sint, tum $x$ excludens *quintum* latus non est cum $w$, adeoque est cum $-w$; atque ut dici possit, *$h$ est cum $w$*, substitui ipsi $h$ debet nullum $G$, quod significat, quod non sit inter ea, quorum $G$ nomen commune est, tale quod sit cum $w$.

## C.

Si $q$ sit aliquod ipsorum $A, B, C, \ldots$ et $q$ non sit ipsum $A$, tum $q$ est aliquod ipsorum $B, C, \ldots$; si $q$ nec ipsum $B$ sit, tum est aliquod ipsorum $C, \ldots$, et si ad ultimum deveniatur, tum $q$ plane illud est.

Nam si $q$ non est inter $B, C, \ldots$ et $q$ non est ipsum $A$; tum $q$ non est inter $A, B, C, \ldots$, adeoque $q$ et esset inter $A, B, C, \ldots$ et non esset; itaque per id, quod $q$ inter $A, B, C, \ldots$ est, et non est inter $A, B, C, \ldots$ ponitur esse et non esse eiusdem simul; unde patet per IV.

Eodem progredi modo licet ad $C$, et inde porro, nempe si $q$ non sit $A$, nec $B$; tum si $q$ nec inter $C, \ldots$ sit, non esset inter $A, B, C, \ldots$ et simul esset; ita porro progredi licet, et si ad ultimum perventum fuerit, eodem modo patet $q$ illud ipsum esse.

Ita si omne quodvis $q$ sit inter $A, B, \ldots a, b, \ldots a', b', \ldots$, atque $q$ non sit inter $A, B, \ldots$, inter $a, b, \ldots a', b', \ldots$ esse pari modo patet; et si nec inter $a, b, \ldots$ sit, esse inter $a', b', \ldots$ pari modo patet.

## D.

Sint jam $A, B, C$ qualitates aut res quæcunque et quidem ita, ut ex. gr. $z$ sit nomen generale tam ipsius $+y$ quam ipsius $-y$ (quod denotet heic *non* $y$), ita ut $-z$ denotet $+y$, si $z$ antea denotabat $-y$, et denotet $-y$, si antea $+y$ denotabat; ita etiam reliqua intelligantur. Propositio vero *A est cum B*, denotetur heic brevitatis caussa (sed hic tantum valeat ista denotatio) per $A+B$; ita $A-B$ denotet hic *A esse cum non B*; et $-A+B$ denotet *non A esse cum B*.

An vero de omni quovis $A$ aut aliquo & dicatur, quod sit cum $B$, denotatione ista determinatum non sit.

Quæritur, quæ propositiones sequuntur ex una, quæ e duabus? &

1. Ex una, nempe ex *A est A* sequitur *A est non A* non esse; nam per hæc poneretur *ita* et *non eiusdem*, alterutrum duorum adesse debet (III), *A est A* adest, alterum itaque non est (IV). Ita ex *A est B* sequitur *A est non B* non esse; quod ita quoque exprimi potest, *A est non z*, si $z$ denotet *non B*. Ex *quodvis A est non B* sequitur *B est non A*. Nam per *A est non B* et *B est A* poneretur aliquod $A$ esse cum $B$ et *non B*, et inde sequitur ut prius.

Ex *A est cum B* sequitur *aliquod B esse cum A*; nam per *A est cum B* et hoc *B est cum non A* poneretur aliquod $B$ esse cum $A$ et *non A*, unde (ut prius) patet.

Ex eo, quod *quodvis A est cum aliquo B* sequitur *quodvis non B esse cum aliquo non A*; nam per *non B est cum A*, et *A est cum B* ponitur, *aliquod A esse cum B et non B*; itaque patet per IV.

Ex $A$ *est cum non* $B$ sequitur $B$ *est cum non* $A$; nam per $A$ *est cum non* $B$, et $B$ *est cum* $A$ poneretur *aliquod* $A$ *esse cum* $B$ *et non* $B$, et tum patet uti antea.

Ex eo, quod *quodvis non* $A$ *est cum aliquo non* $B$, sequitur, *quodvis* $B$ *esse cum aliquo* $A$; nam per *non* $A$ *est cum non* $B$ et $B$ *est cum non* $A$ poneretur *aliquod non* $A$ *esse cum* $B$ et *cum non* $B$, adeoque patet per IV.

2. Propositiones vel conceptus $A$ et $B$ æquivalentes dici possunt, si *quodvis* $A$ sit cum *aliquo* $B$ et *quodvis* $B$ sit cum *aliquo* $A$; quod ita quoque prodit, si demonstretur, *quodvis* $A$ esse cum *aliquo* $B$ et *quodvis non* $A$ esse cum *aliquo non* $B$, nam (per præcedentia) tunc etiam quodvis $B$ est cum aliquo $A$.

Idem prodit demonstrando, quod *non* $A$ est cum *non* $B$, et *non* $B$ est cum *non* $A$; uti etiam ex $A$ *est cum* $B$ et $B$ *est cum* $A$ prodit *non* $A$ esse cum *non* $B$ et *non* $B$ cum *non* $A$.

Ex eo, quod *quodvis* $A$ est cum *aliquo* $B$, non sequitur, *quodvis* $B$ esse cum *aliquo* $A$; nam (uti e typo generis superiore patet) qualitas aliqua præter speciem ipsius $A$ in aliis quoque adesse potest; sed sequitur *aliquod vel aliqua* $B$ esse *cum aliquo* $A$; nempe ubi $A$ cum $B$ est, etiam $B$ cum $A$ est. Ex *non omne* $A$ *est cum* $B$ sequitur *aliquod* $A$ *esse cum* $-B$; nam *non omne* est aut aliquod vel aliqua exclusive aut nullum; si *nullum* $A$ est cum $B$, *omne* $A$ est cum $-B$; si *aliqua* exclusive sunt cum $B$, reliqua sunt cum *non* $B$, quia $B$ aut $-B$ adesse debet (III et IV).

3. Sint $a, b, c$; et denotet heic $a+b$ *esse a cum b*, atque $a-b$ denotet *esse a cum non b* (id est sine $b$), eademque denotatio in aliis quoque (sed heic tantum) valeat. Quævis litera possit sive $+$ sive $-$ denotare: ex. gr. $b$ possit $-z$ quoque denotare (signum $-$ sensu non arithmetico, sed superiore intelligendo). Quæritur, ex una propositione $a+b$ et alia adhuc tali, in qua una litera $c$ est, altera vero $\pm a$ (id est $a$ vel $-a$) vel $\pm b$ (id est $b$ vel $-b$) est, quando et quæ conclusio est?

Patet combinationes omnes esse sequentes:

$$\begin{array}{cccc} a+b, & a+b, & a+b, & a+b, \\ c\pm a, & \pm a+c, & c\pm b, & \pm b+c, \end{array}$$

quæ, si $a+b$ sensu statim dicendo convertatur in secunda et tertia, et inferior superius ponatur in prima et tertia, mutabuntur in sequentes

$$\begin{array}{cccc} c\pm a, & b+a, & c\pm b, & a+b, \\ a+b, & \pm a+c, & b+a, & \pm b+c, \end{array}$$

ubi patet ad formam eandem reducta eatenus esse, quod ubivis superioris ultima litera sit prima inferioris, quæ est litera communis utriusque; patet etiam formam ultimam primæ prorsus convenire; nam $b$ potest per $-z$ exprimi, et tum $-b$ erit $z$; ex. gr. sit $a$ *Petrus*, $b$ *mortalitas*, nempe $a+b$ denotet *Petrus est cum mortalitate*, id est Petrus est mortalis, $z$ est *immortalitas*, et $a-z$ denotat *Petrus est cum non immortalitate*; adeoque ad formam primam reducetur ultima in illo casu quoque, ubi in hujus inferiore signum — est, nempe illam in cujus superiore $-a$ est; itaque non nisi tres priores considerandæ veniunt.

Denotet jam heic (sed tantum hic) $A+b$ *quodvis a esse cum b* vel *aliquo b*; ita $b+A$ denotet $b$ vel *aliquod b adesse cum quovis a*, quod idem cum priore significat. Ita $C+a$ denotet *quodvis c esse cum aliquo a*, et $C-a$ denotet *quodvis c esse cum non a*; atque $c+a$ denotet *aliquod*, vel *aliquorum c quodvis* esse cum aliquo $a$; et eadem denotatio alias literas maneat, quæ tantum heic valeat. Conclusio e superiore et inferiore infra lineam scribetur, o ubi nulla est; forma prima post I, secunda post II, et tertia post III est; pro signis iisdem cuiusvis quatuor casus sunt, uti pro signis contrariis; in schematibus rationem conclusionis exponentibus, quilibet casus pro signis iisdem uno, pro contrariis altero schemate exhibebuntur.

I.

$$\begin{array}{cccc|cccc} C+a & C+a & c+a & c+a & C-a & C-a & c-a & c-a \\ a+b & A+b & A+b & a+b & a+b & A+b & A+b & a+b \\ \hline \text{o} & C+b & c+b & \text{o} & b-c & b-c & {}^*c-b & {}^*c-b \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
b+A & b+A & b+a & b+a & b+A & b+A & b+a & b+a \\
a+c & A+c & A+c & a+c & -a+c & -A+c & -A+c & -a+c \\
\hline
b+c & b+c & b+c & \mathrm{o} & *b-c & *b-c & *b-c & *b-c
\end{array}$$

III.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
C+b & C+b & c+b & c+b & C-b & C-b & c-b & c-b \\
b+a & b+A & b+A & b+a & b+a & b+A & b+A & b+a \\
\hline
\mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & \mathrm{o} & a-c & C-a & *c-a & *c-a \\
 & & & & & \textit{et } A-c. & &
\end{array}$$

Stellula præposita, uti $*b-c$, denotat certa quædam $b$ cum certis quibusdam $c$ non esse, non asserendo dari *aliquod b*, quod *cum nullo c* esse queat.

Conclusio nulla est, si pro signis literæ communis iisdem aut nulla litera magna est, aut non est prima in inferiore, vel ultima in superiore; alioquin semper est aliqua; cum stellula prodit, si pro signis literæ communis contrariis, litera magna aut nulla sit, aut præter primum locum inferioris et ultimum superioris haud reperiatur, aut tantum in inferiore et sola sit; combinantur vero in conclusione literæ, quæ præter communem sunt, et posterioris signum — est, si litera communis signis contrariis sit. Occurrit vero litera magna in conclusione non nisi semel in I, et semel in III, atque stat loco primo; in III vero sexta est sola, ubi etiam postrema litera in magnam mutata conversio fieri potest. In II schemate secundo constat etiam quodvis $a$ esse cum $b$ et cum $c$; denique omne, quod per superiora e conclusione tanquam ex una propositione sequitur, conclusioni accenseri potest.

Interim I 1 convenit cum III 1, ita I 3 cum II 3, I 4 cum II 4 et cum III 4, I 5 cum III 5, I 7 cum II 7, et I 8 cum II 8 et cum III 8. Itaque pro convenientibus quibusvis unus tantum manet casus; et casus conclusionem o dantes etiam rescindi possunt.

Ut ratio conclusionum dictarum pateat, exprimatur ex. gr. $C+a$ per $\genfrac{}{}{0pt}{}{ccc}{aaaaa}$, nempe *cuivis c* adscribatur illud $a$, cum quo est, *alia a* adhuc ulterius quoque scribere fas est, cum haud constet, *non alia a* esse *sine c*; si *quodvis a* quoque sit *cum b*, scribatur *b* sub *quodvis a*, si vero de *quibusdam a* tantum constet, scribatur *b* sub *quaedam a* tantum; et quidem sub *talia*, quæ non sub *c* sunt, quia non constat, num illa sint *ea quaedam*, quæ *cum b* sunt. Ita *C—a* exprimatur per $\begin{smallmatrix}-a & -a & -a & -a\\ & c & c & c\end{smallmatrix}$, et *b+a* exprimatur per $\begin{smallmatrix}bbb\\ aaa\end{smallmatrix}$. Hoc pacto construantur casus singuli:

I.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *ccc*<br>*aaaa*<br>*bb* | *ccc*<br>*aaaa*<br>*bbbbb* | *cc*<br>*aa*<br>*bbb* | *ccc*<br>*aaa*<br>*bb* |
| *c c* *aaa*<br>*−a−a−a* *bbb* | *c c* *aa*<br>*−a−a−a* *bbb* | *c c c* *aa*<br>*−a−a−a* *bbb* | *c c c* *aaa*<br>*−a−a−a* *bbb* |

II.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *aa*<br>*bbb*<br>*cc* | *aa*<br>*bbbb*<br>*ccc* | *bbb*<br>*aaa*<br>*cccc* | *bb*<br>*aaaa*<br>*ccc* |
| *bbb* *−a−a*<br>*aa* *c c* | *bbb* *−a−a*<br>*aa* *c c c* | *bbb* *−a−a*<br>*aaa* *c c c* | *bbb* *−a−a−a*<br>*aaa* *c c c* |

III.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *cc*<br>*bbbbb*<br>*aa* | *cc*<br>*bbbb*<br>*aa* | *ccc*<br>*bbbb*<br>*aa* | *ccc*<br>*bbbb*<br>*aaa* |
| *c c* *bbb*<br>*−b−b−b* *aaa* | *c c* *bbb*<br>*−b−b−b* *aa* | *cc* *bbbb*<br>*−b−b* *aa* | *c c c* *bbb*<br>*−b−b* *aaa* |

In I primo et quarto patet posse *b* et *c* non in verticalem eandem cadere, adeoque non sequitur *ullum c cum b esse*; in secundo sub *quodvis c* cadit *b*, adeoque *quodvis c cum b* est; in tertio sub *quaedam c* cadit *b* et *quaedam illa* tantum constat *cum b* esse. Item in I signorum contrariorum casu primo patet illa *b*, quæ cum *a* sunt, *cum c* esse non posse, quia *cum quovis c* est *—a*, et tum *+a* et *—a* simul essent (Ax. IV); adeoque *illa*, seu *quaedam b cum c* non sunt; id est *quaedam b* sunt *cum non c*. In casu secundo *illa b*, quæ *cum a* sunt, *cum c* esse pariter nequeunt; in tertio sub *quovis a* est *b*, sed non constat *aliquod c cum b* vel *sine b* esse; nam haud constat non dari tale *b*, quod non est *cum a*, adeoque tale *b* etiam *cum* tali *c*, quod *cum* $-a$ est, esse nulla contradictio; itaque *illa c* tantum, quæ *cum* $-a$ sunt, *cum illis b*, quæ *cum a* sunt non esse constat.

Reliqua singillatim exponere, cum schemata singula eodem modo exhibeant, supervacuum est.

Forma IV quæ cum I convenit, continuata dat *soritem*; nisi a prima propositione incipiendo cuiusvis litera ultima sit eadem cum prima sequentis, et in loco primo magna sit, saltem in quavis post primam. Ex. gr. ex

$$\begin{array}{c} a+b \\ B+c \\ C+d \end{array}$$

sequitur $a+d$; nam expresso ut antea per

$$\begin{array}{l} aaa \\ \;\;bbb \\ \;\;cccc \\ \;\;ddddd \end{array}$$

patet quædam *a* esse cum *b* et *c* et *d*, adeoque quædam *a* esse cum *d*; si *A* fuisset loco primo, quodvis *a* esset cum *d*.

## E.

Si constet sub continui temporis *T* puncto quovis adesse *A*, et aliquando sub *t* post *T* non adesse: datur ab initio crescentis *T* in infinitum punctum aliquod *p* ultimum punctorum illorum temporis, de quorum quovis dici potest, quod intra illud et initium ipsius *T* semper adest *A*; in *p* vero aut *ultimum A* est aut *primum non A*; et si in *p non A* fuerit, post *p* aliquandiu aut semper *A* aut semper *non A* erit, nisi post *p* quodvis punctum *p'* tale fuerit, ut inter *p* et *p'* tam *A*, quam *non A* adsit. Fundamentum limitis, plura alia quoque expediens.

## F.

Si $A, B, C, \ldots$ se invicem excipiant (sive terminentur in aliquo, sive non), et eorum quodvis $K$ tale sit, ut (post $K$ sequente $L$ dicto) $K$ *est cum* $x$ sit cum $L$ *est cum* $x$, atque $A$ sit *cum* $x$; tum quodvis $Q$ ipsorum $A, B, C, \ldots$ est cum $x$. Nam a certo puncto sit pars temporis continua $t$ in plaga futura, et excipiat quodvis $t$ aliud $t$ in infinitum; ac cogitetur $A$ respondere primo $t$, et quodvis ipsorum $A, B, C, \ldots$ sequens sequenti $t$; atque procedatur ab $A$ ad $B$, inde ad $C$&c usque ad illud $t$ quod ipsi $Q$ respondet: illud $t$ adveniet (Ax. II); adeoque et de $Q$ ei respondente constat. Dicitur hæc concludendi methodus de $n$ ad $n+1$ sæpissime usitata. E dictis ultro promanantibus supersedere licet.

# CONSPECTUS ARITHMETICAE GENERALIS.

## SECTIO I.

## PRIMAE LINEAE ARITHMETICAE GENERALIS.

### § 1.

Animus natura sua veritatis siti impulsus, fines cognitionis semper ulterius extendere satagens, activitate indesinente partim ex iis, quæ in repræsentatione reperit, quædam secernit, partim hæc et quæ adfuerint, vario modo componit; atque utcunque coram posita comparat; et illa, quæ digna esse retur, nomine insignit proprio, jure suo originario utens, quidvis signo quovis pro arbitrio denotandi; dummodo signa eadem eadem ubique significent, nisi aliud monitum fuerit.

### § 2.

Quidvis (modo $A$ nominatum) intuenti obviam venit ante omnia aliquid (modo $a$ dictum), quod ab $A$ *complexum* est (id est ex $A$ est), ab eo tamen diversum (id est non idem ipsum cum $A$); dicitur $a$ *pars* ipsius $A$ et quidvis (utvis compositum sit in repræsentatione, excluso omni alio) dicitur *Totum*, si parte gaudeat. Sensu hoc etiam qualitas certa ipsius $A$, ex. gr. albedo certi parietis, ejus pars est, (albedinem ipsam, quæ adest, intelligendo). Si $a$ pars etiam ipsius $B$ sit, dicitur *commune* ipsis $A$ et $B$. Per *complexum* ipsorum $A, B, \therefore$ intelligatur id, quod complectitur eorum quodvis prætereaque necquidquam. Consideranti partes obviam venit tale $x$, ut a complexu omnis ejus ex toto, quod non ex $x$ est, complexum etiam $x$

sit; dici potest pars eiusmodi *indivellibilis*.* Potest tamen aliquid de quovis, quod ex toto præter $x$ est, dici, quod de $x$ negatur. Horæ octavæ finis, et nonæ initium est pars temporis a hora septima usque ad decimam effluentis, sed indivellibilis est; ita axis corporis quiescentibus duobus punctis moti; at punctum, totius ex hoc et sphæra extra illud cadente constantis, non talis pars est. Hinc talis pars $p$, cuius ipsius pars nulla aut tantum indivellibilis est communis cum complexu omnis eius, quod ex toto præter $p$ est, dicitur *portio*. Ex. gr. Linea e superficie prominens totius portio est, uti punctum antea dictum; at complexus lineæ dictæ et lineæ in superficiem cadentis, totius e superficie et linea constantis pars, sed non portio, nec indivellibile est.

Complexus omnis, quod (ex. gr.) præter $A$ est, intelligatur, uti in concreto sisti potest. Paucis tantum adhuc, ne plura nugæ difficiles visa nauseam moveant, illustrare fas sit.

Indivellibile $i$ partis $p$ est indivellibile totius $T$. Nam si $q$ sit complexus omnis, quod ex $p$ præter $i$ est, et $Q$ sit complexus omnis ex $T$ quod præter $i$ est: patet $q$ esse complexum a $Q$, adeoque $i$ a $q$ complexum a $Q$ quoque complexum esse.

Pars $p$ partis indivellibilis $i$ est indivellibile totius $T$. Nam si $q$ sit complexus omnis ex $i$, quod præter $p$ est, et $Q$ sit complexus omnis ex $T$, quod præter $i$ est: tum (per def.) $i$ a $Q$ complexum est, adeoque etiam a ($Q$ et $q$).

Portio $p$ portionis $P$ portio totius $T$ est. Nam sit $p'$ complexus omnis ex $P$, quod præter $p$ est, et sit $R$ complexus omnis ex $T$, quod præter $P$ est; sitque $A$ id, quod $P$ cum $R$ commune habet, et $Q$ sit complexus omnis ex $P$, quod præter $A$ est, sitque $a$ id, quod $R$ cum $p$, et $a'$ id, quod $R$ cum $p'$ commune habet: patet in $A$ adesse $a$ et $a'$, necquidquam præterea in $A$ esse. Sit $q$ complexus omnis ex $p$ præter $a$, et $q'$ complexus omnis ex $p'$ præter $a'$: patet ($q$ et $q'$) complecti omne quod ex $P$ præter $A$ est, adeoque et ipsum $Q$. Est vero $P$ portio ipsius $T$ (per

* Pars indivellibilis potest etiam ita illustrari, quod sit pars eiusmodi totius $T$, quæ ex $T$ abstrahi potest, ut sine reliquo cogitationis objectum esse queat, sed ipsa nec cogitatione ita avelli potest ut reliquum sine ea cogitari queat.

hyp.), adeoque $A$ est indivellibile ipsius $P$ (per def.); adeoque a $Q$ complexum est omne, quod ex $A$ est, itaque etiam $a$, quod fieri nequit, nisi $a$ indivellibilile ipsius $p$ sit; nam si id non sit, aliquod $b$ ex $a$ adesse debet, e quo necquidquam a $q$ complexum est; si vero a $q$ complexum non est, neque a ($q$ et $q'$) complexum est; nam $p'$ adeoque $q'$ nonnisi indivellibile ipsius $p$ cum $q$ commune habet (quia $p$ portio ipsius $P$ est); adeoque esset aliquid ex $A$, quod a ($q$ et $q'$) adeoque a $Q$ quoque complexum non esset, et $P$ non esset portio ipsius $T$ (contra hyp.). Si $p$ cum complexu omnis ex $T$ præter $p$ nihil habeat commune, tum patet (per def.).

Si $P$ portio ipsius $T$ sit, et complexus omnis ex $T$ præter $P$ dicatur $p$; tum etiam $p$, si in concreto sistatur, portio ipsius $T$ est. Nam sit $A$ commune ipsis $P$ et $p$, et sit $q$ complexus omnis ex $p$ præter $A$, id est omnis ex $T$ præter $P$, (nam $A$ quoque adest in $P$); patet $q$, si in concreto sistatur, esse idem cum $p$, adeoque cum $A$ complexum a $p$ sit, complexum etiam a $q$ est; itaque etiam $p$ portio ipsius $T$ est (per def.).

## § 3.

Ex parte et portione oritur *nihilum* mathematicum, et *expers*: nempe abstrahendo omnem partem, oritur conceptus nihili, cuius signum est o. Ingens passus ab omni ad nihilum est; uno verbo quasi tollendo omne, quod ab sublime verbum *Fiat* factum est. Quod nulla sui portione gaudet, dicitur *expers*; tale est (ex. gr.) punctum spatii aut temporis supra dictum, sub quo quidem nulla mutatio fieri potest, sed Rhenus deruens, Urbs flagrans, aut actus quidam heroicus sub tali temporis puncto figuntur in tela perennes.

## § 4.

Porro in partes inquirendo, tali $A$ occurrente, ut quævis portio $A'$ sit eius, hæc cum eo $B$, quod ex $A$ præter $A'$ est, aliquid commune habeat: tale $A$ nominatur *continuum*. Ex. gr. spatium, tempus, linea, superficies &c.

§ 5.

Mens porro disquirens animadvertit, varia, quæ præter $A$ sunt, ab eo discerni quidem, sed reperiri aliquid cum $A$ et aliquid cum $B$, quæ, quamvis $A$ et $B$ præsentia considerentur, discerni nequeunt: et dicit $A$ et $B$ eatenus *aequalia*; si aliquid illud sit $A$ ipsum et $B$ ipsum, tum dicitur *$A$ identice aequale* ipsi $B$, quod nonnisi tunc est, si $A$ ipsum $B$ sit. Si aliquid illud sit $A$ et $B$ præter locum, id est $A$ et $B$ præsentia præter locum discerni nequeant, *dicitur aequalitas absoluta*, significata per $A \doteq B$. Eatenus nulla cochlea sinistra dextræ æqualis est.

Si aliquid illud aliud sit, dicitur *aequalitas respectiva*, cuius innumeræ species dantur. Globus argillaceus aureo æqualis quoad locum esse potest.

§ 6.

Sed ex æqualitate absoluta, et portionibus ipsius $P$, vel etiam $p$, nascitur alia æqualitas *respectiva*, atque etiam conceptus *quantitatis*.

1. Si nempe tale $A$ se obtulerit, ut cum $A$ sit tale $q$, cuius aut nulla portio est, aut quævis $a$ et $b$ tales sunt, ut $a$ (ipsum vel pars eius) $\doteq b$ (ipsi vel parti eius): dicitur tum *$A$ quantitas* quoad $q$; sed si $q$ illud plane $A$ ipsum sit, dicitur *quantitas absoluta*, secus *respectiva*. Absolutæ exempla sunt Spatium, Tempus, Punctum utriusque, Recta, Circulus, Linea cochlearis, Planum, Sphæra, Cylinder, etiam Linea e rectis composita, ita ex arcubus eiusdem radii, et id genus alia. Respectivæ exempla varia: Pondus auri et ferri, si tantum pondera, aut volumina, aut frustra metallica considerentur. Si Linea quædam $L$ non e rectis composita comparetur cum alia tali, ut complexus utriusque non sit quantitas absoluta, semper recta certa intelligetur per $L$ determinata (vide infra), ita superficies quævis ad planum reducitur (ibidem). Imo et ipsæ quantitates absolutæ ad certas respectivas reducentur inferius, ut simpliciter tractari queant. Præter hoc potest etiam portionum acceptio certo modo determinari, ex. gr. homo et vermis quantitatem respectivam constituunt (ad instar puncti cum puncto), si conditio sit portionem hominis aut vermis

non considerare, et ex. gr. non nisi id ex homine aut verme sumatur, quod mortalis, vel terræ alumnus sit.

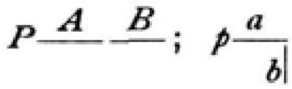
2. Si $P$ constet e portionibus $A, B, \ldots,$
$p$ ex $a, b, \ldots,$

atque

$$A \doteq a, \; B \doteq b, \; \&c,$$

ut quodvis par æqualium item aliud excipiat, donec nihil ex utroque supersit: oritur nova æqualitas quoad portiones.

Ex. gr.



Hoc sensu quævis figura rectilinea est æqualis quadrato. At quid si $P$ et $p$ talia sint, ex. gr. circulus et quadratum certum, ut $A, B \ldots$ et $a, b \ldots$ nunquam terminentur, sed omni dabili minus superesse ex utroque possit; dari tale quadratum constat, et nonnisi punctum est, quod reperire numerabilibus eiusmodi operationibus, quarum quævis est rectam vel circulum ducere, problema quadratoris circuli est. Dici potest hæc *aequalitas quoad contentum* prior *terminata*, posterior *interminata*, nec in casu allato posse aut non posse terminari quisquam demonstravit. Denotari potest per $P \mathrel{=\!\!\!|} p$.

Vide infra quæ æqualitas per $=$ denotetur; et vide inferius æqualitatem expressionum variam &c.

## § 7.

Quantitas cum quantitate parit *homogeneitatem*, et majoritatem minoritatemque: nempe si quantitates $A$ et $B$ nonnisi indivellibile utriusque commune habentes tales sint, ut complexus eorum quantitas sit, dicuntur A et B *homogenea*.* Ita latus quadrati et diagonalis homogenea sunt, quamvis constet numeris quoad idem unum exprimi haud posse.

* Aut: si quantitatum $A$ et $B$ alterutra sit quoad contentum æqualis alteri aut portioni eius, dicuntur $A$ et $B$ homogenea.

Si vero $A$ quoad contentum æquale est portioni cuidam $b$ ipsius $B$, tum $A$ dicitur *minus* ipso $B$, et $B$ *majus* ipso $A$; denotaturque per $A \lessdot B$, seu $B \gtrdot A$. Denotatio eadem manere potest, et si $A$ et $B$ certa determinatione afficiantur (ut infra), adeo ut etiam $2 \lessdot -5$ dicatur. At ultro fit quæstio, quidnam ex $B$ ultra $b$ supersit? si hoc dicatur $C$, dicitur $B$ excedere quantitatem $A$ ipso $C$. Operatio, qua quæritur, quod superest ex $D$ præter $d$, si $d$ ex $D$ sit, et $A$ quoad contentum æquale $d$, ($A \doteq d$) vocatur *demtio* ipsius $A$ ex $D$.

§ 8.

Mens semper simplicitati claritatique studens, cum varia se offerant, cum quibus demtionis operatio haud ita perspicua est, quam cum tempore aut recta, de modo cogitat quamvis quantitatem ad eiusmodi formam reducendi; et si quantitates $A, B, \ldots$ ad tales $A', B', \ldots$ reduci queant, ut quævis $A', B', \ldots$ tales sint, ut $A \doteq A'$, $B \doteq B'$, et aliquod ipsorum $A'$ et $B'$ sit absolute æquale alteri ipsi vel parti eius: tum $A, B, \ldots$ *ad formam temporis reducta* esse dicuntur. Per $A = B$ intelligatur esse $A' \doteq B'$. Posse id fieri, et quodvis nonnisi ad unicum reduci posse (vide infra).

Superficies quævis ad rectangulum reducitur, cuius altitudo est ex. gr. 1 hexapeda, solidum quodvis ad parallelepipedum, cuius et altitudo et latitudo item 1 hexapeda est; et demum omnia ita reduci possunt, ut tempore vel recta exhibeatur quantitas omnium.

§ 9.

*Arithmetica* est scientia, quæ de quantitate, nonnisi jam ad formam temporis reducta, et omnium operationum resultata quoque ad hanc formam reducta esse spectat. *Pura* est, cuius objectum tempus est, aut huius quasi effluxi imago perpetuo manens recta, postquam deducta generataque est. Veritates hic repertæ facile alibi applicantur.

*Arithmetica generalis* dicitur, quæ in genere tractat de quantitatibus absque eo, ut de hac vel illa speciatim diceret; at mentis natura est ab iis, quæ ob oculos ponuntur, ad generaliora abstractaque ascendere.

Primum Arithmeticæ puræ objectum tempus offert, ut hæc quasi temporis, geometria spatii scientia dici possit; quamvis in æterno quasi connubio una alteri opem ferat, et arbor utraque corradicata coronis in abysso cœlorum confluat.

## § 10.

*Quantitas* iam cum *qualitate* parit ita dicta *opposita*, ⊹ *(positivum)*, et ⟝ (id est *negativum*), atque $+$ et $-$.

Nimirum quantitates homogeneæ occurrunt variis determinationibus positæ; ex. gr. sit rectæ unius in puncto $p$ initium, atque in recta eadem ponatur alia ita, ut initium huius cum fine prioris sit idem. Quæstio varia esse potest; *quantanam tota via sit?* aut *quantanam linea sit inter $p$, et finem posterius positae?* atque num a $p$ *dextrorsum*, aut *sinistrorsum cadat?* patet resultatum eatenus varium esse posse, *magnum* respectu quæstionis prioris, o respectu posterioris.

Hinc conceptus sequens formatur:

Si $P$ et $N$ tales determinationes significent, ut si duntaxat $A$ fuerit determinatione $P$ positum, et $B$ cum determinatione $N$; tum sub certa conditione $C$, in casu quodsi $A = B$, resultatum o sit; si vero $A > B$, et supersit $a$, maneat $a$ cum determinatione $P$; si $B > A$ ac supersit $b$, maneat $b$ cum determinatione $N$: tum una ex. gr. $A$ nominatur *positiva*, altera nempe $B$ *negativa*, atque $A$ et $B$ dicuntur *quantitates oppositae*. Positivum signo ⊹, negativum signo ⟝ denotari potest, quod patet non nisi determinationes dictas $P$ et $N$ denotare.

Si $A = B$, tum ipsorum ⊹$A$ et ⟝$B$ quodvis dicitur *oppositum alterius*, et per $-k$ denotatur oppositum eius, quod per $k$ denotatur, sive ⊹ sive ⟝ denotet $k$; signum $+$ autem præfixum valorem non mutat; $+k = k$ potest esse $=$ ⟝$5 = -5$, et tum $-k = 5 = +5 =$ ⊹$5$, ita ut e signo $+$ vel $-$ literæ præposito, num valor positivus vel negativus sit, concludi nequeat. Ex. gr. ponantur cogitatione sive in tempore, sive in recta partes continuæ $A, B, \dots$ una post aliam modo sequente; nominetur cuiusvis una extremitas initium, altera extremum, et illius, quæ sola vel primo ponitur, initium cadat in certum punctum $p$, et cuiusvis alius initium sit idem cum extremo illius quod plane antea positum est; sit porro certum punctum $q$, intra quod terminarentur omnes, si ita ponerentur, ut cuiusvis nonnisi initium sit cum eo, quod antea positum est, commune; atque dicatur $p'$ extremum eius, quod modo prius dicto ultimo positum est; et si $p$ a $p'$ diversum sit, dicatur $p$ initium, $p'$ vero extremum ipsius $pp'$; et ipsorum $A, B, \dots$ et illius, quod inter $p$ et $p'$ est, quodvis tale, cuius extremum propius est ipsi $q$ quam initium, dicatur determinatione $P$ positum; cuius initium est propius, dicatur determinatione $N$ positum.

Patet hoc pacto, si conditio $C$ sit pro resultato accipere $pp'$, prodire o, si duntaxat $\dotplus A$ et $\mapsto B$ posito sit $A = B$; ita $\dotplus a$ manere, si $A > B$, et $a$ supersit, et $\mapsto b$ manere, si quantitate $b$ sit $B > A$. Potest etiam illud, quod tantum initium habet cum antea posito commune, determinationis eiusdem dici cum eo, secus vero diversæ.

## § 11.

Sed quælibet quantitates possunt modo sequente ad definitionem revocari.

Si $B$ respectu $A$ poni dicatur, ut sit index demtionis, significet operationem sequentem: quod si $A$ iam positum sit et detur tale $b$ ex $B$, ut in $A$ adsit ei æquale, nec maius quam tale $b$ ex $B$ sit, tum dematur $b$ ex $A$; atque si $b = B$, *indici demtionis* satisfieri dicatur; si vero præter $b$ adsit $b'$ in $B$, tum ex indice demtionis mansisse $b'$; et si nullum $b$ demi potuit, $B$ ipsum mansisse, cui satisfactum non est; et in quovis casuum dictorum *indici demtionis satisfactum esse, quoad fieri potuit* dicatur.

Si jam determinatio $N$, qua $B$ ponatur, id significet, quod $B$ ponatur index demtionis quoad quamvis quantitatem, quæ certa determinatione $P$ posita est, aut poneretur postea; et conditio $C$ sit, ut si $A$ iam positum est cum determinatione $P$, et $A$ æquale vel maius quam $B$, accipiatur id, quod ex $A$ remansit, postquam indici demtionis satisfactum est; si vero satisfieri non potuit, accipiatur id, quod ex indice demtionis remansit, postquam ei, in quantum fieri potuit, satisfactum est; et semper quod ex indice demtionis remansit, retineatur etiam ulterius pro indice demtionis quoad quantitates cum eo homogeneas, quæ determinatione $P$ ponerentur. Patet et hic determinationem $P$ signo $+$ et alteram signo $-$ insigniri posse. Nam si $A = B$, resultatum o est; si $A > B$ resultatum est $a$ cum $P$ positum; si vero $B > A$, remanet $b$ ex indice demtionis, adeoque $b$ cum determinatione $N$.

Ex. gr.

$$\begin{array}{ccc} \underline{+A} & \underline{\underline{+A}}_{\,a} & \underline{+A} \\ \underline{-B} & \underline{-B} & \underline{\underline{-B}}_{\,b} \end{array}$$

Ita potest $A$ certos homines ad certum finem positos denotare, et $B$ item certos homines pro indice demtionis quoad $A$ positos; aut $A$ certam pecuniam, et $B$ quoque certam pro indice demtionis quoad $A$ expositam &c.

## § 12.

Operatio, qua disquiritur, quod sit resultatum sub conditione $C$, si adfuerint inter $A, B, \ldots$ et positiva et negativa, secus vero quid prodeat, si $A, B, \ldots$ simul sumantur, (in quovis casu quovis eorum o denotante omisso), dicitur *additio*, et resultatum vocatur *summa* additorum $A, B, \ldots$.

Imo potest conceptus summæ extendi, dicendo etiam $S$ et $s$ summam, realium $A, B, \ldots$, et imaginariorum $a, b, \ldots$, si illorum summa sit $S$, horum sit $s$, (vide infra). Quoad casum priorem, patet superius esse o, $+a$, vel $-b$ summas ipsorum $A$, $B$; ita patet

$$\underline{+A + B}$$

summam ipsorum $+A$, $+B$ esse.

## § 13.

Quæstio heic ultro oritur: num (in § 10.) quocunque ordine ponantur $A, B, \ldots$ idem extremum ultimo positi prodeat? ita demtio utcunque fiat, per partes hinc vel illinc demtas, aut e summa omnis positivi dematur summa omnis negativi (vide infra).

Addendorum summæ etiam commoda notatio quæritur. Complexus signorum, quibus quantitates denotantur, signorum $+$, $-$, $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv$, $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv$ quolibet præfixo affectorum, denotet quantitatum earum (cum signo præfixo acceptarum) *summam*; dicitur hic complexus *quantitas complexa*; et quantitas post ultimum signorum $+$, $-$, $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv$, $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv$, aut ante primum scripta, veluti quævis inter proxima eiusmodi signa dicitur cum signo præfixo accepta *terminus quantitatis complexae*. Interim si alia quædam operatio ad plures extendatur, signa dicta terminos in iis, quæ conjuncta sunt, non distingvunt. Ex. gr. ipsius $a + \sqrt{c-d}$ non est $d$ terminus, sed $a$, et $\sqrt{c-d}$.

## § 14.

Sicubi summa $S$ ex $A$ et $B$ reperitur, quæstio ultro fit, num ex $S$ et $A$ socius $B$ ipsius $A$ reperiri posset? Operatio ista vocatur *subtractio* ipsius $A$ ex $S$, et $B$ vocatur *differentia* ipsius $A$ ab $S$. Patet in schemate (§ 11., et § 12.) $S$ esse prius o, postea $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv a$, tum $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv b$, et demum $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv A \vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv B$: ita esse posse $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv A \vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv B$; atque $S - (\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv A)$ esse $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv B$ in § 11. et $S - (\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv B)$ esse $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv A$, atque in proximo casu $S - (\pm B)$ esse $\pm A$. Unde patet subtrahendi oppositum esse addendum summæ suppositæ, ut socius subtrahendi, nempe differentia prodeat; prodit vero oppositum, si signum præfixum immutetur, nempe si ex $+$ fiat $-$, seu ex $-$ fiat $+$; adeoque subtrahendus signo mutato additur. Sed heic adhuc tantum de monomio sermo est; de quantitate e pluribus terminis complexa inferius erit.

## § 15.

Porro adhuc talia ex. gr. $p$ et $s$ obviam venire possunt, ut $d$ differentia ipsius $p$ ab $s$ sit æqualis differentiæ ipsius $P$ ab $S$. Hinc passus eo, quod si $P$ ipsum $s$ sit, et detur post quodvis aliud, a quo differentia præcedentis sit eidem $d$ æqualis. Vocatur hoc *series arithmetica*, nempe hic oritur conceptus *seriei*, quo nomine insignitur quantitatum complexus se lege certa excipientium; nam simulac lex una patuit, campus de legibus innumeris cogitandi aperitur. Vocatur quævis quantitatum lege certa se excipientium, *terminus seriei*.

## § 16.

Tum facile in mentem venit $p=0$ ponere, et seriem $0, A, B, C, \ldots$ condere, cuius termini cuiusvis differentia a sequente sit $u$; item aliam quoque seriem $0, a, b, c, \ldots$, cuius termini cuiuslibet differentia a sequente sit $v$, cogitare, ita ut $0$ cum $0$, $A$ cum $a$ simul ponantur, et quosvis terminos simul positos, excipientes (in illa et hac serie) simul ponantur. Quivis terminus harum serierum dicitur *numerus* in serie priore *quoad* $u$, in posteriore *quoad* $v$; ac cuilibet nomen proprium dare libet, et quidem terminis simultaneis idem, præterquam quod in serie priore quoad $u$, in posteriore quoad $v$ dicatur; ex. gr. $0$ dicitur $0$ quoad $u$ etiam $0$ quoad $v$; $A$ vero $1$ quoad $u$, et $a$ dicitur $1$ quoad $v$ &...; seu $0$ dicitur breviter $0u$ et $0v$, $A$ vero $1u$, et $a$ $1v$, &..., et id ex. gr. $F$, quod numerus nominis $n$ est quoad $u$, dicitur $nu$, et terminus $f$ cum eo simultaneus dicitur $nv$; atque ad quæstionem, $F$ quot $u$ sit? respondetur $nu$; atque $F$ dicitur continere ipsum $u$ $n$-ies, et ex $F$ et $n$ reperire $u$ dicitur $F$ per $n$ *partiri*. Nulla tamen heic mentio multiplicationis divisionisque est, quarum sensus latior est.

Tam $u$ quam $v$ dicitur *unum*, quod distingvendum ab *unitate* est (§ 23.).

$$\begin{array}{lllll}
0 & A\overset{u}{\text{---}}, & B\overset{u}{\text{---}}\overset{u}{\text{---}}, & C\overset{u}{\text{---}}\overset{u}{\text{---}}\overset{u}{\text{---}} & \dots \\
0u & 1u & 2u & 3u & \dots \\
0 & a\overset{v}{\text{---}}, & b\overset{v}{\text{---}}\overset{v}{\text{---}}, & c\overset{v}{\text{---}}\overset{v}{\text{---}}\overset{v}{\text{---}} & \dots \\
0v & 1v & 2v & 3v & \dots \\
0 & \ast & \ast\ast & \ast\ast\ast & \dots \\
0\ast & 1\ast & 2\ast & 3\ast & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 \text{ zero} & 1 \text{ zero} & 2 \text{ zero} & 3 \text{ zero} & \dots
\end{array}$$

Patet, si *unum* zero sit, quemvis terminum esse $0$; nam e quovis prodit $0$, nempe $0+0=0$ (per § 12.).

## § 17.

Heic statim quæstiones oriuntur:

1. Quo possent modo simplicissimo nominari numeri?

2. Si $N$ et $M$ nomina numerica sint, $Nu$ et $Mu$ simul quot $u$ efficiunt? et si $Nu < Mu$, et illud ex hoc dematur, quot $u$ manent?

3. Si $U=Nu$, $MU$ quot $u$ facit? Sit $nu$; quærebatur ex $N$ et $M$ nomen $n$; quæri ex $n$ et aliquo ipsorum $N$ et $M$ eorundem alterum potest.

Hæc sunt numeratio, et quatuor operationes numericæ: at quamvis conceptus hi necessarii sint, conceptus quatuor operationum latior est; duarum priorum iam determinatus est, ubi patebat summam ipsorum $A, B$ ob oculos poni posse, etsi numero expressa non sit, imo si ex. gr. $A$ sit latus quadrati, et $B$ diagonalis, neque possunt $A$ et $B$ quoad idem numeri esse.

## § 18.

Variæ adhuc præter hæc oriuntur quæstiones.

1. Potestne quantitas quævis esse numerus nominis cuiusvis?

2. Potestne idem quoad idem $u$ esse numerus diversi (id est nunc huius, mox alius) nominis?

3. Estne quoad quamvis portionem $a$ ipsius $A$ tale nomen numericum $n$, ut $na \gtrdot A$ &.

Si quantitatis $q$ aut nulla sit portio, aut quævis talis sit, ut detur tale $n$, dicitur *quantitas finita*, de quali tractat Arithmetica. Si $u$ denotet punctum temporis, $2u$ non potest esse numerus nisi nominis 2 et 1, nempe posterius, si unum sit $2u$; item 0 potest esse, si pro uno sumatur 0, numerus nominis cuiusvis, sed id quod non est 0, nequit esse numerus nominis 0.

§ 19.

Nova porro fit quæstio; num $B$ sit numerus quoad $A$, et si ita, cuiusnam nominis sit? et casu se offerente, ubi $B$ non est numerus quoad $A$, quæstio oritur, num aliquod $u$ sit, quoad quod tam $A$ quam $B$ numerus est, et cuiusnam nominis numerus sit $A$, cuiusnam sit $B$? Unde fit conceptus sequens.

Sive sit $B$ numerus quoad $A$, sive non; reperire, cuiusnam nominis numerus sit $A$ et $B$ vel $-B$ quoad idem $u$, dicitur *mensurare* $B$ per (vel quoad) $A$; et $A$ dicitur *mensura*, $B$ vero *mensum* ipsius $A$; atque si ex. gr.

$$A = 3u,\ B = 2u \text{ vel } B = -2u,$$

ad quæstionem, qualenam mensum sit $B$ ipsius $A$, respondetur in casu priore, quod sit $2(3)$*tum*, in posteriore quod sit $2(3)$*ti* oppositum. Ita $A$, si pro mensura eius ponatur $u$, dicitur $3(1)$*tum* ipsius $u$, adeoque hoc et $3u$ idem significant.

§ 20.

At talia $A$ et $B$ obviam venire possunt, ut quamvis homogenea sint, nullum $u$ reperiatur tale, ut quoad id tam $A$ quam $B$ numerus sit; hinc facile cogitatur, quid si nullum sit? Cum non liqueat dari debere, (mox patebit in Arithmetica quoque dari, ex. gr. $\sqrt{2}$); eiusmodi quantitates dicuntur inter se *incommensurabiles*. Interim facile patet (quod infra demonstrabitur) $u$ semper per 2 partiendo, quovis dabili $z$ remanere minus ex $B$, et alteram partem quoad $A$ mensurari posse.

§ 21.

Hic primum oritur conceptus *variabilis* atque *limitis*. Si $p$ sit nomen generale eorum finitorum, quæ sub certa conditione generari queunt, et $⊹$ vel $\vdash\!\dashv p$ quovis dato ei homogeneo majus fieri potest, aut differentia ipsius $p$ a $K$ nunquam quidem fit o, sed quovis dato $z$ minor fieri potest: tum dici solet in casu primo *infinitum* (denotatum per $\infty$), in secundo vero $K$ *limes* ipsius $p$, et *tendentia ista ad limitem* potest denotari in casu primo per $⊹$ vel $\vdash\!\dashv p \rightharpoondown \pm\infty$,* in secundo per $p \rightharpoondown K$; nempe ubi $\pm\infty$ stat post signum $\rightharpoondown$, denotet casum primum; si finitum stet post $\rightharpoondown$, denotetur casus secundus.

Maius et minus intelligitur hic a $⊹$ et $\vdash\!\dashv$ abstrahendo. Arithmetica quidem finita tractat, nec calculus infinitesimalis dictus indiget infiniti; sed cum a pluribus etiam $\infty$ pro limite accipiatur, fas est conceptum limitis eo extendere; (in Geometria dantur infinita, ex. gr. complexus omnium punctorum, quæ cum certis duobus punctis in recta sunt, est recta utrinque infinita &c). Sit ex gr. $t$ denotante quantitatem minorem quam $u$:

$$A = nu, \quad B = mu + t, \quad \text{et sit} \quad t \rightharpoondown 0;$$

ad quæstionem, qualenam mensum sit $B$ ipsius $A$, respondetur $m(n)$*tum* præter aliquid, quod tendit ad zero; sed patet heic $n$ et $m$, prouti $z$ minus accipitur, eatenus mutari. Interim ubi pluries occurrunt, æqualia signa simul variata æqualia significent; inæqualia signa (nisi aliud monitum fuerit) possunt æqualia significare.

* In Arithmetica pura non aliam quantitatem præter o et ex. gr. rectam (e Geometria petitam) tractante non aliud $\infty$ intelligitur, nisi *limes viae puncti e rectae puncto* p *in ea semper porro et ultro datum quodvis punctum moti.* Quoad signa $+$, $-$ ipsi infinito præposita conditio $C$ (§ 10) locum haud habet quidem, sed pro viis quibusvis finitis, quarum alterutra ex. gr. ad dextram, altera ad lævam describitur, $C$ locum habebit initio p viæ ad lævam, ad finem viæ alterius posito, atque per $-\infty$ limes viæ ex p ad lævam factæ, per $+\infty$ autem limes viæ ex p ad dextram factæ intelligi potest.

§ 22.

Posteaquam $B$ mensuratum per $A$ est, facile succurrit, etiam $C$ per idem $A$ mensurare; atque tum dicitur quodvis ipsorum $B$ et $C$ *fractio* alterius:

| | | |
|---|---|---|
| $B$ — $u$ — $u$ — | $=2u$ | $B$ ✻✻ |
| $A$ — $u$ — $u$ — $u$ — | $=3u$ | $A$ ✻ |
| $A$ — $v$ — $v$ — $v$ — $v$ — $v$ — | $=5v$ | $A$ ✻ |
| $C$ — $v$ — $v$ — $v$ — $v$ — | $=4v$ | $C$ ✻✻✻ |

Et quidem in casu priore $B$ dicitur 2(3) 4(5)*tum* ipsius $C$, ita $C$ 4(5) 2(3)*tum* ipsius $B$, in altero casu vero $B$ dicitur 2(1) 3(1)*tum* ipsius $C$, et $C$ dicitur 3(1) 2(1)*tum* ipsius $B$, sive in hoc casu $B$ dicitur breviter 2(3)*tum* ipsius $C$, et $C$ dicitur 3(2)*tum* ipsius $B$.

Demonstrabitur mox etiam casum priorem ad formam posteriorem reduci, et idem modo communi scribi posse; patetque $B$ esse 2(3)*tum* ipsius $A$, et $A$ esse 5(4)*tum* ipsius $C$, adeoque $B$ esse 2(3)*tum* 5(4)*ti* ipsius $C$.

At quid si $B$ vel $C$, vel utrumque sit incommensurabile cum $A$? Tum quoque et semper ad quæstionem, qualisnam fractio sit $B$ ipsius $C$, respondeatur, quod sit $n(m)$ $p(q)$*tum*, si nomina numerica $n$, $m$, $p$, $q$ talia sint, aut ita simul variari queant, ut $n(m)$*tum* ipsius $A$ sit æquale $B$, vel tendat ad $B$, et $p(q)$*tum* ipsius $A$ sit æquale $C$, vel tendat ad $C$ (§ 21.).

§ 23.

Hinc posteaquam $B$ et $C$ per idem $A$ mensurata sunt, pronum est etiam $D$, et tum $D, E, \dots$ denique omnia homogenea per idem $A$ mensurare, atque mensuram istam omnibus communem nominare *unitatem*, nec semper repetere mensuram in mensuratorum nuncupatione; ut ex. gr. 2(5)*tum* unitatis dicatur tantum 2(5)*tum*, haud nominando mensuram;

ita si $A$ sit unitas, $2(1)$*tum* ipsius $A$, id est $2A$ dicatur tantum 2, ita $-1$ denotet $-1A$.

Reflectendo ad superius dicta varia æqualitatis genera, heic quoque aliquod se offert. Si nempe $r$ sit recta, et $t$ tempus, atque utrumque sit suæ unitatis $2(3)$*tum*, eatenus æqualia sunt. Ita si $L$ et $l$ rectæ sint, patebit factum e quotvis lineis esse lineam; sed si unitas areæ sit quadratum, cuius latus unitas lineæ est, et factum ex $L$ et $l$ sit ex. gr. $n(m)$*tum* unitatis linearum; et rectangulum ex $L$ et $l$ erit $n(m)$*tum* unitatis arearum. Ita sit factum ex $L, l, l'$ (tribus rectis) $N(M)$*tum* unitatis linearum; parallelepipedum ex $L, l, l'$ etiam $N(M)$*tum* unitatis solidorum est, si hæc cubus is ponatur, cuius latus unitas linearum est; uti infra demonstratur. Itaque ista hoc respectu sunt æqualia.

Unitatem *positivam* (et non zero) figere libuit, atque utcunque mutetur *unum*, *unitas* eadem prius arbitrarie posita pro omnibus homogeneis retineatur, donec expresse aliud monitum fuerit; si ex. gr. unitas sit 1 hexapeda, sive 1 dicatur, sive 6 pedes, quantitas eadem est. Si o assumeretur pro unitate, linea expressio indeterminata esset, nam prouti acciperetur $u$, esset pro quovis $n$ linea $n(0)$*tum*.

§ 24.

Id, quod unitate minus est, dicitur *fractio vera:* et id quod numerus est quoad unum unitati æquale, dicitur *numerus integer*. In serie

$$\ldots . -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

est [per § 7.] $2 \not< -3$, sed 1 non $\not> 0$, neque $-1 \not< 0$; at potest dici quemvis terminum esse *paucius* quovis ab eo ad dextram sito, et *plus* quam quivis ab eo ad sinistram situs est; quod etiam ad non integros extendatur. Designari potest per

$$0 > -1 ; 1 > 0 ; 1 > -1 ; -1 > -2.$$

Facile patebit (per inferiora), quod si

$$A < B,$$

etiam æqualibus additis semper prodeat

$$A + C < B + C;$$

at si

$$A \nless B,$$

*non semper* sequatur

$$A + C \nless B + C;$$

attamen sive $<$ et $\nless$, sive $<$ et $\ngtr$ stet post $A$, idem etiam post $A + C$ maneat, [si $A + C$ et $B + C$ neutrum sit zero, nec sit $A + C$ æquale $-(B + C)$]; *excepto:*

1. Si $A \nless$ et $< B$, atque $B$ positivum est cum $A$ ac $C$ utroque negativo, aut summa utraque negativa est; [tunc enim fit $A + C <$ et $\ngtr B + C$].

2. Si $A <$ et $\ngtr B$, atque aut $A$ negativum est cum $B$ et $C$ utroque positivo, aut summa utraque positiva est, [tunc enim fit $A + C <$ et $\nless B + C$].

$A + C$ æquale $B + C$ esse nequit, nam tum esset $A$ æquale $B$, cui repugnat $A < B$; sed pro quibusvis $A, B$ datur tale $C$, ut sit

$$A + C = -(B + C) = -B - C;$$

nam tunc

$$A + 2C + B = 0,$$

et tum

$$C = -\frac{A + B}{2},$$

adeoque

$$A + C = \frac{A - B}{2},$$

et

$$B + C = \frac{B - A}{2},$$

quæ opposita sunt.

Singulos casus exhibentia schemata percurrendo patet:

$$\begin{array}{c} -2 < \text{et} \nless 3 \\ 1 \;=\; 1 \\ \hline -1 < \text{et} \nless 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} -2 < \text{et} \nless 3 \\ 5 \;=\; 5 \\ \hline 3 < \text{et} \nless 8 \end{array} \qquad \begin{array}{c} -2 < \text{et} \nless 3 \\ -1 \;=\; -1 \\ \hline -3 < \text{et} \ngtr 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} -2 < \text{et} \nless 3 \\ -5 \;=\; -5 \\ \hline -7 < \text{et} \ngtr -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
-3<\text{et}\gtrdot 2 & -3<\text{et}\gtrdot 2 & -3<\text{et}\gtrdot 2 & -3<\text{et}\gtrdot 2 \\
1 = 1 & 5 = 5 & -1 = -1 & -5 = -5 \\ \hline
-2<\text{et}\lessdot 3 & 2<\text{et}\lessdot 7 & -4<\text{et}\gtrdot 1 & -8<\text{et}\gtrdot -3
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
-3<\text{et}\gtrdot -2 & -3<\text{et}\gtrdot -1 & -6<\text{et}\gtrdot -3 & -3<\text{et}\gtrdot -2 \\
1 = 1 & 5 = 5 & -1 = -1 & -1 = -1 \\ \hline
-2<\text{et}\gtrdot -1 & 2<\text{et}\lessdot 4 & -7<\text{et}\gtrdot -4 & -4<\text{et}\gtrdot -3
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
2<\text{et}\lessdot 5 & 2<\text{et}\lessdot 5 & 2<\text{et}\lessdot 5 & 2<\text{et}\lessdot 5 \\
1 = 1 & -1 = -1 & -3 = -3 & -7 = -7 \\ \hline
3<\text{et}\lessdot 6 & 1<\text{et}\lessdot 4 & -1<\text{et}\lessdot 2 & -5<\text{et}\gtrdot -2
\end{array}$$

Nempe ut $A<B$ sit, aut tam $A$ quam $B$ negativum est, aut $A$ negativum et $B$ positivum est, aut $A, B$ utrumque positivum est, et $A$ (in præcedentibus) semper ad sinistram cadit. Quivis casus parit duos, prouti $C$ positivum aut negativum est. Si ipsorum $A$ et $B$ aliquod negativum est, tunc $A$ esse negativum patet. Si utrumque positivum sit, $C$ aut positivum aut negativum est; si $C$ negativum est, tres casus sunt, prouti $C$ summam utramque positivam relinquit, aut unam vel utramque negativam reddit; adeoque quatuor casus fiunt; et pariter quatuor, si $A$ et $B$ utrumque negativum sit. Si vero unum negativum, alterum positivum sit, aut erit $A \lessdot B$ aut $A \gtrdot B$; quivis horum quatuor casus habet nempe $C$ aut positivum aut negativum est; si positivum, aut utraque summa redditur positiva aut non; si negativum, aut utraque summa redditur negativa aut non. Itaque sedecim casus sunt.

Si $A<\text{et}\lessdot B$ vel $A<\text{et}\gtrdot B$, et $A, B$ utrumque per $C$ (non zero) multiplicetur: signum $\lessdot$ vel $\gtrdot$ manet uti est; sed $<$ mutatur in $>$, si multiplicator negativus sit. Etiamsi non percurrantur schemata, facile patet, tum e positivo fieri negativum, et e negativo fieri positivum, atque e maiore positivo maius negativum, et e maiore negativo maius positivum fieri; adeoque signum $<$ inverti. Casus sequentes tantum considerandi veniunt:

$$-2<-1, \quad -2<1, \quad 1<2,$$

ubi patet oppositis acceptis signum $<$ in $>$ mutari. Patet etiam non mutari $<$, si $C$ positivum sit, uti $\lessdot$ vel $\gtrdot$ semper manere, cum a determinatione positivitatis vel negativitatis independens sit.

Pro exponente $n$ integro positivo quoque manet $\lessdot$; sed $<$, si $A$ et $B$ non sit utrumque positivum, mutatur in $>$ pro $n$ pari, si $A < \text{et} \gtrdot B$; in aliis casibus semper manet. Ex. gr.

$$
\begin{array}{lll}
-2 < \text{et} \gtrdot -1, & (-2)^2 = 4 > \text{et} \gtrdot 1, & (-2)^3 = -8 < \text{et} \gtrdot -1, \text{ \&c.} \\
-1 < \text{et} \lessdot \ \ 2, & (-1)^2 = 1 < \text{et} \lessdot 4, & (-1)^3 = -1 < \text{et} \lessdot \ \ 8, \text{ \&c.} \\
-3 < \text{et} \gtrdot \ \ 1, & (-3)^2 = 9 > \text{et} \gtrdot 1, & (-3)^3 = -27 < \text{et} \gtrdot \ \ 1, \text{ \&c.}
\end{array}
$$

Unde etiam patet radicum exponentis paris e positivis, illam signo $>$ gaudere posse, cuius potentia signo $<$ prædita erat; at radicum exponentis imparis e negativis illam cum $<$ manere, cuius potentia cum $<$ fuit; imo posterius valere etiam, si potentia una positiva, altera negativa sit, aut utraque positiva, facile patet:

$$-27 < 8, \quad \sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{8}, \text{ nempe } -3 < 2.$$

§ 25.

Id quod cum unitate incommensurabile est, dicitur breviter *incommensurabile*. Prius de commensurabilibus fiet disquisitio specialior.

§ 26.

Ita etiam si mentio unitatis non fieret, dum quæritur, *B quale mensum sit?* subintelligatur *Unitatis*. Sit ex. gr. 2(3)*tum*; quæstio facile oritur quantitate $a$ se offerente, num si $a$ esset unitas, detur tale $b$, de qua si quæreretur, quale mensum sit, item per 2(3)*tum* responderetur; aut poterant tales $a$ et $b$ obviam venire, ut etiam $b$ per $a$ mensum, sit huius 2(3)*tum*. Hinc sequens conceptus oritur; si ad quæstionem quale mensum sit $b$ ipsius $a$, ita responderetur (§ 19. et 21.), quam ad quæstionem, qualenam mensum est $B$ (nempe unitatis $A$): tum reperire $b$ ex $a$ et $B$, dicitur *multiplicare* (sensu strictiore, qui mox fiet latior) *a per B*; et $a$ dicitur *multiplicandus*, *B multiplicator*, uterque vero nominatur *factor*, et $b$ *factum*, quod proprie *aequimensum* est.

## § 27.

Hinc facile quæstio oritur, e posito facto $b$ et ex $a$ quærere huius socium $B$, seu ex $b$ et $B$ huius socium $a$; nempe talem socium quærere, ut si alteruter eorum multiplicandus et alter multiplicator sit, factum $b$ prodeat. Reperire talem factorem socium ipsius $a$ (vel ipsius $B$), dicitur *dividere* $b$ per $a$ (vel per $B$).

Dicitur $b$ *dividendus*; is, cuius socius quæritur, *divisor*; socius vero *quotus* audit. Denotatur quotus, qui prodit $p$ per $q$ diviso, per $\frac{p}{q}$ vel $p:q$; factum vero, quod prodit $a$ per $B$ multiplicato, denotatur per $B.a$ aut simpliciter per $Ba$ (nisi aliud monitum fuerit).

## § 28.

Imagines multiplicationis et divisionis generales patet esse sequentes:

$$
\begin{array}{llll}
A = nu, & B = mu; & a = nv, & b = mv; \\
A = nu, & mu \frown B; & a = nv, & mv \frown b; \\
A = nu, & B = -mu; & a = nv, & b = -mv; \\
A = nu, & -mu \frown B; & a = nv, & -mv \frown b;
\end{array}
$$

## § 29.

Ubi patet in quavis linea horizontali imagines mensurationis ipsius $B$ per $A$, et ipsius $b$ per $a$ esse æquales. Facile est cogitare loco $A$ quamvis quantitatem, non tantum unitatem, (nec zero excepto), dummodo pro certis $n, m, u, v$ aliqua istarum imaginum prodeat; adeoque ut ad quæstionem, quale mensum sit $B'$ ipsius $A'$ (sive unitas sit $A'$, sive non)? et ad quæstionem, quale mensum est $b'$ ipsius $a'$? eadem responsio sit. Dicuntur tum $A', B'$, $a', b'$ *in proportione geometrica* esse.

## § 30.

Patet quatuor imagines priores huc quoque applicari. Quæstio se offert, quid, si duo priora ambo positiva, vel ambo negativa sint, aut quid si opposita sint, futurum est? Facile patet in casu priore, quale $a$ est, tale fore $b$; nempe si $a$ sit positivum, etiam $b$ positivum, si $a$ negativum, etiam $b$ negativum fore; in casu posteriore vero etiam $a$ et $b$ opposita fieri. Nam ex. gr. sit imago tertia, sit $n = 2$, $m = 3$, et $u$ sit negativum, tum $2u$, ita $3u$ etiam negativum est, itaque $B = -3u$ erit positivum (nempe oppositum ipsius $3u$, quod negativum erat); tum $a = 2v$, et $b = -3v$; iam $v$ aut positivum est, aut negativum; si positivum, tum $2v$ et etiam $3v$ positivum est, itaque $-3v$ est negativum; si vero $v$ negativum est, tum $2v$, et $3v$ etiam negativum est; et $-3v$ est positivum; adeoque hæ duæ imagines exsurgent:

⊢⊣ ⊢+⊣ ⊢+⊣ ⊢⊣, ⊢⊣ ⊢+⊣ ⊢⊣ ⊢+⊣.

Similiter prodeunt casus omnes; nempe $A$ vel positivum vel negativum est, pro quovis horum duorum casuum $B$ etiam aut positivum aut negativum est; et pro quolibet horum quatuor casuum $a$ aut positivum aut negativum est, adeoque octo casus sunt.

## § 31.

Si nonnisi de multiplicatione quæstio sit, tum $A$ est positivum, nempe unitas (§ 23.); adeoque quatuor tantum casus erunt:

⊢+⊣ ⊢+⊣ ⊢+⊣ ⊢+⊣  ⊢+⊣ ⊢+⊣ ⊢⊣ ⊢⊣

⊢+⊣ ⊢⊣ ⊢+⊣ ⊢⊣  ⊢+⊣ ⊢⊣ ⊢⊣ ⊢+⊣.

Nam ex. gr. in ultima imagine, cum $B$ et $A$ opposita sint, etiam $b$ et $a$ opposita esse demonstratum est. Si unitas quantitas negativa esset vel ponatur, erit ⊢⊣ ⊢+⊣ ⊢+⊣ ⊢⊣ & per eandem rationem.

Quantitates, quarum realitas multiplicationi quoad $-1$ innixa est, dicuntur *imaginariae* (vide infra).

Cum vero literis ex. gr. $a, b$ tam positiva quam negativa denotare liceat, atque cuilibet fas sit signum $-$ præfigere: quæstio oritur, quodnam sit signorum $+$ et $-$ signum facti e factoribus $\pm a$ et $\pm b$ vel $\mp b$? Res facile in casus distingvitur; nempe si $+a$ sit, tum est aut $+b$ aut $-b$, et si $a$ positivum sit, erit item $b$ aut positivum aut negativum, pariter si $a$ negativum sit; itaque $+a$ habet, si $a$ positivum sit, 4 casus, nempe 2 pro $+b$, et 2 pro $-b$; pariter habet 4, si $a$ negativum sit; adeoque $+a$ habet 8 casus; pariter $-a$ habet 8; adeoque $8+8$ casus sunt, quos singulos construere facile est, et tyronibus relinquitur; ac percurrendo singulos, patet regulam generalem prodire, quod *signa aequalia dant* $+$, *signa inaequalia* $-$; nempe si facto e literis ipsis signum ita præfigatur, factum prodibit $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ vel $\vdash\!\!\dashv$ ita, uti re ipsa est; ex. gr. sit $a$ positivum et $b$ negativum, et sit multiplicator $-a$, et multiplicandus $+b$; erit ista imago $\vdash\!\!+\!\!\dashv \vdash\!\!\dashv \vdash\!\!\dashv \vdash\!\!+\!\!\dashv$, nempe factum $\vdash\!\!\dashv a . \vdash\!\!\dashv b$ (per dicta) positivum erit; at $-ab$ quoque positivum est, nam $ab$ tanquam factum ex positivo et negativo est negativum, itaque $-ab$ est positivum. Pariter si $a$ positivum et $b$ negativum sit, $+a.+b$ est $+ab$, nam tunc factum e positivo et negativo est negativum; et $+ab$ quoque tantum denotat ac $ab$. De pluribus terminis infra.

Quoad divisionem quoque eadem quæstio oritur. Dividendus sit $+b$ vel $-b$, divisor $+a$ vel $-a$; tam $+b$ quam $-b$ duos casus habet, prouti divisor $+a$ vel $-a$ est, qui singuli facile percurruntur; ex. gr. si $\frac{b}{a} = c$, adeoque $ac = b$, tum $\frac{-b}{-a}$ non potest esse $-c$; quia tum $-a . -c$ esset $= -b$; vero $-a . c = -b$.

Ita percurrendo casus, generaliter patet (sensu dicto), *signa aequalia dare tam in multiplicatione* quam *in divisione monomiorum* $+$, *inaequalia vero* $-$. (De complexis infra).

## § 32.

Hic ultro sequitur, etiam præter signa in casus multiplicationis divisionisque speciales inquirere, eosque ob oculos sistere.

1. Si multiplicator integer sit, schema sequens est; sit ex. gr.

$$A=1=\frac{U}{\;},\quad B=\frac{U}{\;}\,\frac{U}{\;}=2;\quad a=\frac{v}{\;},\quad b=\frac{v}{\;}\,\frac{v}{\;},$$

sive

$$A=\frac{U}{\;},\quad B=\frac{U}{\;}\,\frac{U}{\;};\qquad a=\overset{v}{*},\quad b=\overset{v}{*}\,\overset{v}{*},$$

id est

$$1U,\qquad 2U,\qquad\qquad 1v,\qquad 2v,$$

seu

$$A=1=\overset{u}{*},\quad B=\overset{u}{*}\,\overset{u}{*}\,\overset{u}{*}=3;\quad a=\overset{v}{*},\quad b=\overset{v}{*}\,\overset{v}{*}\,\overset{v}{*}.$$

$$1u\qquad 3u\qquad\qquad 1v\qquad 3v$$

Ubi patet toties contineri multiplicandum in facto, quoties unitas in multiplicatore (§ 17); ita si $b$ dividendus sit, et $B$ integer sit divisor, quotum toties contineri in dividendo, quoties unitas in divisore continetur; adeoque nomina multiplicationis et divisionis, prius ex hoc casu depromta, ad hos etiam valere, alioquin *non juxta vocum, sed definitionis sensum intelligenda.*

2. Si multiplicator aut divisor $B$ fractio vera sit:

sit

$$A=\frac{u}{\;}\,\frac{u}{\;}\,\frac{u}{\;},\quad B=\frac{u}{\;}\,\frac{u}{\;};\quad a=\frac{v}{\;}\,\frac{v}{\;}\,\frac{v}{\;},\quad b=\frac{v}{\;}\,\frac{v}{\;},$$

vel

$$A=\frac{u}{\;}\,\frac{u}{\;}\,\frac{u}{\;},\quad B=\frac{u}{\;}\,\frac{u}{\;};\quad a=\overset{v}{*}\,\overset{v}{*}\,\overset{v}{*},\quad b=\overset{v}{*}\,\overset{v}{*},$$

id est

$$3u\qquad\qquad 2u\qquad\qquad 3v\qquad\qquad 2v.$$

Patet factum esse minus multiplicando, et si $B$ sit divisor, quotum esse dividendo maiorem *; nempe si divisor loco secundo fractio vera sit ex. gr. 2(3)*tum*, et quæratur tale, cuius $b$ sit 2(3)*tum*, erit $a$ quotus; ita si quæratur pecunia, cuius sit ducatus 2(3)*tum*? Aliud est, si quæratur ex. gr. linea $b$ lineæ $a$ quale mensum sit, quod item divisionis obiectum

* *atvero etsi divisor unitate minor loco tertio stet, quotus loco secundo prodiens* maior dividendo erit, si nonnisi expressio quoad unitatem in censum veniat.

est; nempe $b$ dividendus, $a$ divisor (tertium locum tenens), $B$ quotus est. Si $a$ sit divisor, patet in (1.) in exemplo primo quidvis, quod 2, in altero quidvis, quod 3, in (2.) quidvis, quod 2(3)*tum* quoad suam unitatem (cuiusvis speciei sit ea), quotum esse; omnes hos quotos tamen eatenus æquales esse (vide infra).

Notandum vero nomen quoti, vel quotientis inde venire, quod dum olim multiplicatio ex iterata additione et divisio ex iterata subtractione deducebatur, quasi in quoto annotari concipiebatur, quoties iterari addenda oporteat, donec summa dividendo prima vice non sit minor, aut quoties subtractio fieri debeat, usque nihil vel subtrahendo minus remaneat.

3. Sit multiplicator 0, multiplicandus non 0; tum sit multiplicandus 0, multiplicator non 0; demum sit factor uterque 0; erunt schemata sequentia:

$$A=\frac{u}{\phantom{u}},\quad B=0;\quad a=\frac{v}{*},\quad b=0,$$

id est

$$1u \qquad 0u \qquad\qquad 1v \qquad 0v;$$

$$A=\frac{u}{\phantom{u}}\frac{u}{\phantom{u}},\quad B=\frac{u}{\phantom{u}}\frac{u}{\phantom{u}}\frac{u}{\phantom{u}};\quad a=0,\quad b=0,$$

id est

$$2u \qquad\qquad 3u \qquad 2v \text{ (pro } v=0\text{)},\ 3v;$$

$$A\frac{U}{\phantom{U}},\quad B=0;\quad a=\frac{v}{0},\quad b=0,$$

id est

$$1U \qquad 0U \qquad 0v \qquad 0v.$$

Ubi patet factum esse 0, si factorum aliquis 0 sit; et si dividendus 0 sit, et divisor non 0, quotum 0 esse; si vero divisor 0 sit, quotum esse quantitatem quamlibet, adeoque $\frac{0}{0}$ habere valores innumerabiles; nec factum non 0 esse unquam, si unus factorum 0 sit; adeoque $\frac{1}{0}$ esse quantitatem impossibilem. Ubi valor ipsius $\frac{0}{0}$ quæritur in expressione $E$ per $e$ divisa, quæritur valor, cui fit æquale vel ad quem limitem tendit expressio $\frac{E}{e}$, dum tam $E$ quam $e$ tendit ad limitem 0.

Interim tamen communiter accipi solet $q$ pro valore ipsius functionis $f(r)$, (vide infra) si $f(x)$ tendat ad limitem $q$, dum $x$ tendit ad $r$, — si alioquin valor ipsius $f(r)$ non detur; imo $q$ insignitur nomine quoad $r$ eodem, quo $f(x)$ quoad $x$ gaudet. Ita fas est, si $z$ tendat ad 0, adeoque $\frac{1}{z}$ tendat ad $\infty$ (§ 21), dicere quod $\frac{1}{z}=\infty$. Ita $\frac{1}{n}$ tendit ad 0, si $n$ tendat ad $\infty$, et potest dici hoc sensu $\frac{1}{\infty}=0$. Ita $\log 0$ esset quantitas impossibilis (vide infra); sed hoc sensu fiet $-\infty$; nempe $c^{-n}=\frac{1}{c^n}$, quod tendit ad 0, si $c>1$. (His tamen mathesis carere etiam facile posset, quamvis hæ loquendi formulæ nullum errorem inducant.)

4. Si multiplicator aut multiplicandus unitas sit, sunt schemata sequentia:

$$A=\overset{u}{*}=1,\quad B=\overset{u}{*}=1;\quad a=\overset{v}{-},\quad b=\overset{v}{-},$$

id est

$$1u \qquad\qquad 1u \qquad\qquad 1v \qquad\qquad 1v;$$

sive

$$A=\overset{u}{-}\,\overset{u}{-}\,\overset{u}{-}=1,\quad B=\overset{u}{-}\,\overset{u}{-};\quad a=\overset{u}{-}\,\overset{u}{-}\,\overset{u}{-},\quad b=\overset{u}{-}\,\overset{u}{-}=B$$

id est

$$3u \qquad\qquad 2u \qquad\qquad 3(v=u) \qquad\qquad 2v.$$

Ubi patet, si factor unus unitas sit, factum esse æquale factori alteri, et si unitas sit divisor, quotum esse æqualem dividendo; si vero divisor sit æqualis dividendo, quotum esse unitatem cuiusvis speciei: nempe $1.a=a$, et $b.1=b$, et $\frac{b}{1}=b$, et $\frac{b}{b}=1$.

## § 33.

Sed intuendo schemata hæc, et reflectendo variæ adhuc oriuntur quæstiones. Primo num semper detur factum? et in genere terminus quartus in proportione? et an semper idem prodeat? (etsi permutentur factores, aut aliter utcunque). Si unitas sit una hexapeda, et multiplicator sit 4 pedes, atque multiplicandus 2 puncta temporis (ex. gr.), factum nullum (imago impossibilis) est; ita si dividendus sit 2 puncta, et divisor sit integer 3, pro quavis unitate generaliter quotus non datur, et nonnisi pro illo casu datur, si unitas ipsius 3 sit $n$ puncta, et divisor loco tertio stet; nempe tunc schema sequens est:

Aliq. $1 = 3nu$, quot. $= 2u$; div. $3 = 3n$ puncta, divd. $= 2$ puncta.

Ubi patet multiplicandum æquale $3n$ punctis per $2u$ multiplicatum dare pro facto 2 puncta; neque posse divisorem 3 loco secundo stare, quia tunc esset in duobus prioribus 1 et 3, et duo puncta deberent ad minimum per 3 partiri, ut sit $3v$.

Alioquin præter excepta, etsi incommensurabilia adfuerint, dari factum, quotum, et quartum in proportione, et unicum prodire, utcunque sumantur $u$ et $v$, et resultata operationum additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionis (præter excepta) unica esse demonstrabitur, ut axioma V. applicari queat.

§ 34.

De uno tantum casu hic sermo sit, si factores permutentur. Patet ex schematibus, in quibus non est 0, factum esse cum multiplicando homogeneum, atque prodire idem, si $n(m)tum$ sit multiplicator, (cuiuscunque unitatis $n(m)tum$ sit); at si multiplicandus linea sit, multiplicator tempus, et permutentur, factum tempus quidem erit, sed quoad suam unitatem expressum erit æquale facto priori; quod ad divisionem quoque applicatur.

Sint prius factores integri homogenei, ex. gr. 2 et 3, et sit $1 = *$; patet ex § 32, 1. multiplicatorem 2 dare $\ast\!\ast\;\ast\!\ast\;\ast\!\ast$, in quo stellula quævis superior ponitur deorsum bis, adeoque $\ast\!\ast$ toties ponitur, quot stellulæ supra sunt, adeoque idem factum esse factum etiam pro multiplicatore 3. Itaque in hoc casu factores permutati etiam factum idem præbent; (de pluribus factoribus infra).

Sint factores heterogenei, etsi non sint integri. Ex. gr. celeritas est quantitas respectiva, cuius index est spatium sub tempore $t$ percursum. Mens simplicitati studens pro $t$ unitatem temporis ponit. Sit hæc $= 2u$, et describatur sub quovis $u$ spatium $v$, describetur $2v$ sub $2u$, et erit hæc celeritas mobilis illius; dicatur hæc $C$, et sit tempus $T = 3u$; patet ex imagine sequente:

$$1 = 2u, \quad T = 3u; \quad C = \overset{v\;\;v}{-\;-}, \quad S = \overset{v\;\;v\;\;v}{-\;-\;-}$$

esse $S$ spatium sub $T$ percursum, atque esse

$$S = T.C,$$

et esse

$$C = \frac{S}{T}.$$

Interim si pro $t$ non unitas temporis, sed ex. gr. $4u$ poneretur, $C$ esset $4v$, essetque $T.C = 6v$, (pro unitate priore $2u$), et non spatium sub $T$ celeritate illa percursum prodiret. At etiam $\frac{S}{C} = T$, et etiam $T$ multiplicatum per $C$ est $= S$, sed eo tantum sensu, quod $\frac{S}{C}$ est quantitas ita quoad suam unitatem expressa, uti $T$ quoad suam est; ita $T$ multiplicatum per $C$ quidem dat tempus, sed tale, quod quoad unitatem suam expressum est eatenus æquale ipsi $S$ quoad suam unitatem expresso. Nam sit ex. gr. $5v$ unitas spatii, et $2u$ temporis unitas, $T = 3u$ sit multiplicandus, et $C = 2v$; dividatur $u$ per 5 (juxta $1 = 5v$), et fiat schema sequens:

$$1 = 5v, \; C = 2v; \quad T = 3u = \begin{array}{ccccc} v & v & v & v & v \\ \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \end{array} = 5\text{-ies} \begin{array}{c} v \\ \ast \\ \ast \\ \ast \end{array}, \; x = \begin{array}{cc} v & v \\ \ast & \ast \\ \ast & \ast \\ \ast & \ast \end{array},$$

ubi patet $x$ esse tempus 3(5)*tum* unitatis temporis ipsius $2u = \begin{array}{ccccc} \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \end{array}$, nam $v$ toties ponitur in $x$, quoties $v$ in $C$, hoc vero toties, quoties $u$ in $2u$, adeoque tot stellulæ sunt in $x$ in linea superiore, quot sunt deorsum in $2u$, ponuntur autem superiores stellulæ in $x$ toties, quoties $u$ in $T$, nempe ter; in $2u$ autem ponuntur item 2 stellulæ deorsum positæ toties, quoties $v$ in 1 continetur, nempe quinquies. Sed factum erat antea $S = 3v$, quod unitatis $= 5v$ item 3(5)tum est.

*Notandum vero est, celeritatem esse quantitatem respectivam, cuius* index spatium est, adeoque licet quodvis spatium poni arbitrarie possit pro unitate sive spatii sive celeritatis, si pro uno posita sit, iam alteri aliam dare nefas est. Sit ex. gr. celeritatum unitas illa celeritas, qua sub unitate temporis (nempe $2u$) percurratur ex. gr. $5v$, tum spatii quoque unitatem $5v$ esse oportet; et si spatii unitas $5v$ sit, celeritatum unitatem illam esse oportet, qua sub unitate temporis percurritur $5v$. Ita prodit spatium e celeritate multiplicata per tempus, uti prius; imo et schemate (pro $T=1$):

$$1=2u, \quad T=2u; \quad C=5v=1, \quad S=5v=1$$

prodire spatii unitatem, si celeritatis unitas per temporis unitatem multiplicetur, et spatii unitatem per temporis unitatem divisam dare unitatem celeritatis patet.

Talis est conceptus *densitatis*; et ibi quoque densitatis (quæ pariter respectiva quantitas est, cuius index massa est, sub unitate voluminis), et massæ eadem unitas est.

Plures quoque eiusmodi conceptus dantur, qui sub hoc generali comprehenduntur. Si $A$ et $B$ certo respectu eodem quoad unitatem $U$ omnium cum aliquo eodem homogeneorum gaudeant quantitatibus $a$ et $b$, et qualitas ista ipsorum $A, B$ dicatur generaliter $q$; dum de $q$ ipsius $A$ et $q$ ipsius $B$ sermo tanquam de quantitatibus est, intelligantur $a$ et $b$.

Schemata multiplicationis divisionisque tyronibus iuxta varia exempla cum lineis, aliisque ob oculos ponenda sunt; ut ipsi factum quotumque exhibeant. In multiplicatione, si multiplicator $n(m)$*tum* sit, multiplicandum per $m$ partiendo (§ 16), una pars accipitur $n$-ies (§ 32). In divisione vero duo sunt schemata:

| | unitas | divisor $=d$ | quotus $=x$ | divid. $=D$ |
|---|---|---|---|---|
| | $3u$ | $2u$ | $3v$ | $2v$ |
| et | unitas | quotus $=x$ | divisor $=d$ | divid. $=D$ |
| | $5U$ | $7U$ | $5V$ | $7V$ |

In prima imagine, $D$ partiendo per 2, quotus e 3 eiusmodi partibus constat; in secunda, unitate partita per 5, quotus e 7 eiusmodi partibus constat.

Hactenus factum e duobus tantum factoribus fuit; facile cogitare est, adhuc unum accedere, ut ex. gr. factum ex $b$ et $c$ per $a$ multiplicetur, et factum hoc per $abc$ exprimatur; unde ad plures quotvis progredi via est. Sed factores æquales (si ex. gr. quilibet $=a$) occurrere possunt $n$-ies, quod simplicius per $a^n$ denotatur, et ab $na$ omnino distingvendum est.

Porro succurrit facile ponere (aut obviam venire potest), quid si factum eiusmodi factorum, quorum quilibet est æqualis $a$ et in quo factores numero $n$ essent, dividendus, et aliud, in quo factores $a$ numero $m$ essent, divisor esset; tum facile adhuc aliud factum eiusmodi cogitatur, in quo factor quilibet æqualis $A$, et numerus factorum $N$ est, divisum per item eiusmodi factum, cuius quilibet factor æqualis $A$, et factores numero $M$ sunt. Tum ultro sequitur quotos hos comparare; et si æquales sint, tam ipsi $A$ quoad $a$, quam ipsi $a$ quoad $A$ nomen dare. Unde sequens conceptus oritur. Quoscunque integros denotent $n$, $m$ et $N, M$, si

$$\frac{a\,a\ldots}{a\,a\ldots}=\frac{AA\ldots}{AA\ldots},$$

et numerus factorum, quorum quilibet æqualis $a$, sit superius $n$, inferius $m$, et numerus factorum quorum quilibet æqualis $A$, sit supra $N$, inferius $M$, atque $\frac{n-m}{N-M}$ sit æquale vel tendat ad limitem $q$; et $A$ sit æquale vel tendat ad limitem $B$: tum dicitur $B$ *potentia* (dicatur elementaris, mox extendenda) *exponentis* $q$ ipsius $a$, et denotatur per

$$B=a^q;$$

ipsum $a$ vero dicitur *radix exponentis vel gradus* $q$ ipsius $B$, denotaturque per

$$a=\sqrt[q]{B}.$$

Reperire $a$ ex $B$ et $q$, dicitur *radicem gradus* $q$ *extrahere*, reperire $B$ ex $a$ et $q$, dicitur *elevare* $a$ ad $q$. Unde ultro quæstio se offert; etiam ex $B$ et $a$ reperire $q$: adeoque quæritur primo, num detur pro datis $P$ et $a$ tale $p$, ut $a^p=P$ sit? Unde via aperitur, pro omnibus cum $P$ homogeneis idem $a$ retinere quæstione eadem; atque hic oritur *logarithmus elementaris*; nimirum $p$ dicitur *log. elem.* $P$ quoad basim $a$.

Quomodo vero ad nomenclationem ipsius $a^{\frac{n-m}{N-M}}$ perveniri potuerit, exemplum sequens monet: Sit

$$\frac{aaaa}{aa}=\frac{AAA}{AA},$$

patet ad sinistram 4—2 factores manere, et ad dextram 3—2, et esse

$$a^2=A=a^{\frac{4-2}{3-2}}.$$

Quomodo autem conceptus iste in analysi extendatur, paulo inferius exponetur.

§ 35.

*Sit fas heic hucusque promissorum quibusdam complendis filum paulisper interrumpere, postea item continuandum.*

I. De summis æqualibus ad æqualitatem additorum concludere minime licet, cum resultata sub conditione certa accepta e datis inæqualibus æqualia esse queant. Proventus expensæque æquales, etsi utrumque millionesies augeatur, certo respectu zero producunt, quamvis status mirum in modum differant; nulla cupido nec ulla explendi facultas, atque infinita voluntas cum facultate infinita discrimine infinito conveniunt in eo, quod neutri desit quidquam. Ita valde diversi factores factum (saltem respectu certo) æquale producunt: veluti cum mensa et vita comparatum est, ut non dapes aut panis siligineus, sed appetitus ad id, quod cuique est, dulcem elaborent saporem.

II. Si ex æqualibus demantur æqualia, residua possunt esse, prouti hinc vel illinc fiat demtio, valde inæqualia, si ita, uti remanent, considerentur; omnibus vero ad formam temporis reductis (§ 8.) absolute æqualia esse demonstrabitur.

Omnia ad formam temporis rectæque reduci dictum est (ibidem); potest etiam circulus adjici, ad quem etiam plura quantitatum genera commode reducuntur; interim et circulus ipse ad rectam reduci potest.

Quamobrem ut simul plura sint, quæ oculis subjecta fidelibus conceptum faciliorem clarioremque reddant, quum ita cum mentis natura comparatum sit, ut ab iis, quæ cernuntur, ad abstracta ascendatur; ad finem generalis conspectus Geometriæ recta planumque generabuntur, ut hæc quoque in postmodum specialius tractanda Arithmetica præsto sint.

Quantitatem autem ad formam temporis reductam liceat brevius *reductam* dicere.

III. At quæstio fit: num quantitas quævis unica reducta gaudeat? Arithmetica de *finitis* tractat (§. 18.), nempe de talibus, quorum quodvis $T$ tale est, ut si qua portio $u$ eius detur, sit tale nomen numericum $n$, ut $nu$ sit semper $> T$, nec unquam sit $nu$ æquale $T$, vel minus quam $T$; qualia esse tempus rectamque inter quævis duo puncta demonstrabitur; eatenusque etiam reductam quantitatem finitam esse, si et quantitatis iam reductæ partes exinde omnes eiusmodi accipiantur. Multum nempe inde pendet, qualesnam et quomodo accipiantur partes; ex. gr. (Fig. 1.). Si $v$, $z$, angulos, $u$ fasciam inter parallelas denotet, angulus $T$ quoad qualemvis angulum $v$ quantitas *respectiva finita* est, ipsis $v$ ad verticem primum juxta se invicem positis; at cum quoad $u$ haud detur tale $n$, ut $nu > T$ sit, $T$ *absolute finita* quantitas non est. (§ 18).

Num portio quævis spatii et superficies quævis undique clausa quantitas sensu dicto finita sit? vide inferius.

IV. Per ‚*P constat* (§ 6, 2.) *ex* $A, B, \ldots, F$' intelligitur $A, B, \ldots, F$ esse tales portiones ipsius $P$, quarum nulla cum ulla alia earundem portionem communem habet, et præter quas necquidquam ex $P$ est. Per ‚*Q continetur a P*' vero intelligitur aut ipsum $P$ aut portionem aliquam ipsius $P$ esse $= Q$. Si $T$ constet ex $a, b, \ldots, f$, et idem $T$ habeat eiusmodi portiones $a', b', \ldots, f'$, ut $a \doteq a'$, $b \doteq b', \ldots, f \doteq f'$; tum, si $T$ finitum sit, demonstrari potest, nulla id præter $a', b', \ldots, f'$ portione gaudere; at generaliter verum non est uti (Fig. 2.) ostendit.

V. Sed quæritur (§ 13.), si $T$ finitum sit, et constet ex aliis partibus $\alpha, \beta, \ldots$ etiam: num quocunque ordine additæ partes quævis, e quibus constat, summam eandem dent? Generaliter *addita, etsi adfuerint positiva et negativa quoque, summam quocunque ordine posita eandem edunt.*

Exprimantur quantitates rectis, et generetur summa juxta (§ 10.), atque donec aliud monitum fuerit, dum recta una dicetur alia minor, concipiatur illa extremo communi in hanc cadente parte ex hac prominente superari. Considerentur prius tantum $A$ et $B$, quavis determinationum $\dotplus$ $\vdash\!\dashv$ affecta, et tum fiat conclusio ab $n$ ad $n+1$ (F. pag. 21.). Sit (Fig. 4.) in $\mathfrak{p}$ initium primum, et extremum ultimum sit $\mathfrak{p}'$, sitque prius $A \doteq B$; erit aut utrumque positivum, aut utrumque negativum, aut unum positivum, alterum negativum; si utrumque positivum sit, sive $A$ ponatur prius, sive $B$, cum congruant, idem est; ita quodvis postponatur, idem $\mathfrak{p}'$ prodit ad dextram; idem fiet ad sinistram, si utrumque negativum fuerit; si opposita sint, et $A$ ponatur ex $\mathfrak{p}$ ad dextram, atque ab eius extremo sinistrorsum ponatur $B$, rectæ etiam ita congruunt (vide infra), adeoque $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ coincident, et summa est o; atque manifesto idem fit prius $B$ sinistrorsum, et ab eius extremo dextrorsum posito $A$. Si vero $A$ superet ipsam $B$ recta $K$ (Fig. 5.), et ponatur ex $\mathfrak{p}$ prius $A$ dextrorsum, et inde $B$ sinistrorsum, cadet $\mathfrak{p}'$ a $\mathfrak{p}$ ad distantiam $K$, et idem $\mathfrak{p}'$ prodibit, prius ex $\mathfrak{p}$ ad sinistram posito $B$, atque inde dextrorsum posito $A$ (ex $B$ et $K$ constante). Si $A$ positivo et $B$ negativo manente, $A$ superetur a $B$ recta $K$; erit (Fig. 6.) summa $K$ ad sinistram a $\mathfrak{p}$ manifesto in utroque casu. Itaque duæ rectæ qualicunque determinationum $\dotplus$ $\vdash\!\dashv$ affectæ fuerint, sive eadem, sive diversa, quovis ordine summam eandem præbent.

Si vero hoc de quantitatibus numero $n$ valeat, valet etiam de $n+1$. Nam valeat de $A, B, \ldots, D$, et accedat $E$; erit $E$ aut positivum aut negativum, est etiam resultatum priorum aut positivum aut negativum, adeoque quivis casuum priorum cum quovis posteriorum combinandus est.

Sit prius $\dotplus E$, et resultatum prius quoque sit positivum (poterit quidem hoc esse aut o aut maius aut minus quam $E$, at quilibet casus modo sequente evidens fit). Ponatur primo $\dotplus E$ (Fig. 7.), terminetur in $\mathfrak{P}$, sit $\mathfrak{p}'$ resultatum priorum, et cogitetur $A, B, \ldots, D$ ex $\mathfrak{P}$ incipiendo plane ita poni, uti antea ex $\mathfrak{p}$ incipiendo ponebatur, manifesto cadet extremum ipsius $D$ in $\mathfrak{p}''$, nempe ad distantiam $K$ dextrorsum; adeoque eo, quo caderet extremum ipsius $E$, si $\vdash\!\!+\!\!\dashv E$ ex $\mathfrak{p}'$ (resultato ipsorum $A, B \ldots D$) poneretur, cum $E$ constet ex $K$ et $R$. Idem ergo resultatum dant $E, A, B, \ldots, D$ et $A, B, \ldots, D, E$; dant vero etiam $E, A, B, \ldots, D$ (excluso $D$) quolibet ordine resultatum idem (per hyp.), unde positi $D$ extremum determinatur. Itaque omnes imagines, in quibus $D$ ultimum est, summam eandem dant; et cum ipsorum $A, B, \ldots, D$ quodvis ultimo poni, et ut prius $E$ anteponi postponique possit: idem et de $A, B, \ldots, D, E$ valet.

Si vero resultatum priorum fuerit $\vdash\!\!\dashv K$ (Fig. 8.), et prius ponatur $\vdash\!\!+\!\!\dashv E$; erit $A, B, \ldots, D$ ex $\mathfrak{P}$ ponendo extremum ultimum in $\mathfrak{p}''$, nempe item sinistrorsum ad distantiam $K$ a $\mathfrak{P}$, adeoque idem, quam si ex $\mathfrak{p}'$ (extremo priorum ultimo) poneretur $\vdash\!\!+\!\!\dashv E$, (ex $R$ et $K$ constans).

Sit iam $\vdash\!\!\dashv E$, et resultatum $\vdash\!\!+\!\!\dashv K$ (Fig. 9.) patet et hic eodem modo, extremo priorum ultimo et hic $\mathfrak{p}'$ et extremo ipsius $E$ inde positi $\mathfrak{p}''$ dicto, sive primum sive ultimum sit $\vdash\!\!\dashv E$, idem prodire.

Pariter ostendent (Fig. 10., 11., 12.) casum, quodsi pro $\vdash\!\!\dashv E$ resultatum priorum quoque negativum sit: dummodo significationes literarum priores retineantur, et observetur hunc casum tres casus habere, nempe $E$ aut $\doteq K$, aut maius aut minus quam $K$ est. — Consequenter quotcunque fuerint addenda et sive mere positiva, sive mere negativa, sive mixta fuerint, quocunque ordine etiamsi prius omnia positiva, dein omnia negativa ponantur, summam eandem prodire manifestum est. Unde etiam patet resultatum idem esse, si summa positivorum ponatur prius ex $\mathfrak{p}$, et ex extremo ultimo horum (quod dicatur $\mathfrak{p}'$) ponatur sinistrorsum $s$ summa negativorum; nam si ex $\mathfrak{p}'$ post se invicem ponantur, æquale prodit ei, quod esset, si ex $\mathfrak{p}$ ponerentur (Ax. V.), posterius vero summam negativorum daret. Patet etiam demum summam istam satisfacere, etiamsi illa, quorum summa $s$ est, pro indice demtionis quoad illa, quorum summa $S$ est, posita fuerint.

Quæritur tamen, num undevis fiat demtio atque in genere num additionis (adeoque subtractionis quoque) resultatum unicum sit, id est ex æqualibus semper eidem æquale prodeat? At prius de æqualitate quoad portiones (§ 6.) uberius agendum est, et antea de limite (§ 21.) quædam dicenda sunt.

VI. *Si $q$ ita crescat, ut post quodvis incrementum adveniat novum, maneat tamen semper paucius quam $Q$: tum $q$ limite gaudet.* (Fig. 13).

Nam sit $q$ tempus (idem ad rectam per punctum descriptam, imo ad omnes quantitates reductas applicari potest); sitque temporis, a $\mathfrak{p}$ incipiendo crescentis in infinitum, nomen generale $x$; atque fiat in quovis puncto temporis quæstio, num $q$ plus illo $x$, quod eousque generatum est, esse queat? Et denotet (E. pag. 20.) $A$ id, quod *$q$ plus illo $x$ esse queat*; item exinde patet, dari *ultimum* aliquod punctum $\mathfrak{p}$, intra quod et $\mathfrak{p}$ semper $A$ est, et post quod non est, atque tunc aut *ultimum $A$* aut *primum non $A$* esse. Ultimum $A$ non est, quia si tunc $x \doteq x'$ sit, et ad quæstionem, *num $q > x'$ esse queat?* responsio *ita* sit: tum aliquod $q > x'$ erit, et certum tale $q$ erit certa quantitate $q'$ plus quam $x'$, adeoque $\mathfrak{p}$ ulterius potuisset debuissetque accipi; nam ultra $x'$ quoque ante finem temporis $x' + q'$ responsio semper *ita* fuisset. Est igitur in $\mathfrak{p}$ *primum non $A$*; adeoque $x'$ est primum tale $x$, quo quidvis sit paucius, eo plus fieri $q$ potest, sed quo (nempe ipso $x'$) $q$ plus fieri nequit. At neque $q \doteq x'$ fieri potest; nam dum id fieret, cum $q$ quantumcunque fiat, novum (per hyp.) incrementum capere debeat, postea $q > x'$ fieret (contra plane demonstratum.) Itaque $q$ tendit ad $x'$. (§ 21).

Patet hinc etiam quantitatem ita decrescentem, ut post decrementum quodvis item novum adveniat, nunquam tamen fiat o, neque negativa, limitem habere. Nam accipiatur (in præc.) $q$ pro decremento ipsius $Q$; remanet $Q - q$, id est ex $Q$ fit $Q - q$; quod crescente $q$ sine fine minuitur, et pro limite habet id quod inter $\mathfrak{p}$ et $*$ est; si vero $*$ nempe extremum ipsius $Q$ plane in $\mathfrak{p}$ sumatur, limes o fit; qui in neutro casu attingitur, cum $q$ nunquam fiat $\doteq x'$, quamvis ipsi $\mathfrak{p}$ dato quovis propius terminari queat.

VII. *Tempus quodvis continuum $\mathfrak{pq}$ gaudet duabus partibus absolute aequalibus.* (Fig. 14).

Nam accipiatur punctum eius aliquod $\mathfrak{a}$, et aliud $\mathfrak{b}$ inter $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{q}$; erit aut $\mathfrak{pa} \doteq \mathfrak{bq}$, aut alterutrum $\doteq$ parti alterius; si non prius sit, cogitetur ex $\mathfrak{p}$ positum illi æquale, quod altero minus est; terminetur in $\mathfrak{a}$; et in quovis puncto a $\mathfrak{p}$ usque in $\mathfrak{q}$ quæratur: estne tempus a $\mathfrak{p}$ usque ad illud tale, ut si ei æquale adjungatur, ante $\mathfrak{q}$ terminetur, vel non? Dicatur prius (E. pag. 16.) $A$; patet $\mathfrak{pa}$ (veluti partem quamvis eius) tale, $\mathfrak{pq}$ vero tale non esse; adeoque dari in aliquo puncto $\mathfrak{c}$ aut *ultimum* $A$ aut *primum non* $A$. Ultimum $A$ esse nequit: quia, si ipsi $\mathfrak{pc}$ æquale adjungatur, terminetur in $\mathfrak{b}$, (cum eatenus ante $\mathfrak{q}$ terminari debeat); cogitetur punctum $\mathfrak{d}$ inter $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{e}$ inter $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{q}$; erit aut $\mathfrak{bd} \doteq \mathfrak{de}$, aut alterutrum $\doteq$ parti alterius; vocetur $z$ illud, quod altero minus est, alterum $v$; manifesto est

$$\mathfrak{pc} + z \lessdot \mathfrak{pc} + v,$$

et

$$\mathfrak{pc} + z + \mathfrak{pc} + z \lessdot \mathfrak{pq};$$

adeoque $z$ adjuncto ipsi $\mathfrak{pc}$, punctum quæstioni respondens ulterius accipiendum in $\mathfrak{c}$ non esset. Est igitur in $\mathfrak{c}$ *primum non* $A$; adeoque aut

$$\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc} \doteq \mathfrak{pq},$$

aut

$$\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc} \gtrdot \mathfrak{pq}.$$

Posterius esse nequit; nam terminetur $\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc}$ in $\mathfrak{r}$; cogitetur punctum aliquod $\mathfrak{s}$ inter $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$, et $\mathfrak{qs}$, $\mathfrak{sr}$ dicantur $x$, $x'$; erit aut $x \doteq x'$, aut alterutrum altero majus; sit

$$x \doteq x' + k,$$

ubi $k, x, x'$ eadem determinatione gaudent; erit (propter V.)

$$\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc} \doteq \mathfrak{pq} + x' + x' + k \doteq \mathfrak{pq} + k + x' + x';$$

atque

$$\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc} - x' - x' \doteq \mathfrak{pc} - x' + \mathfrak{pc} - x' \doteq \mathfrak{pq} + k;$$

itaque iam ante $\mathfrak{c}$ fuisset *non* $A$; idem patet, si $\mathfrak{qs} \doteq \mathfrak{sr}$. Manet igitur $\mathfrak{pc} + \mathfrak{pc} \doteq \mathfrak{pq}$.

VIII. *Si temporis $Q$ accipiatur dimidium, et cujusvis dimidii item dimidium accipiatur, ac nomen eorum generale sit $z$: tum $z$ tendit ad limitem zero.*

Nam crescente $q$ (in VI. Fig. 13.) a $\mathfrak{P}$ usque ad $\bullet$, fiet ultimo $Q - q = 0$. Quæratur a $\mathfrak{P}$ incipiendo in cujusvis $q$ puncto extremo [imo ultra $\bullet$ quoque ubi quodvis punctum tale est, ante quod datur tale

$Q-q$ (cum id in * æquale o sit), quo $z$ minus fieri nequit] num $z$ quovis $Q-q$ quod antea fuit, minus fieri possit? Erit ultimum aliquod punctum p, in quo responsio *ita* erit (E. p. 20.). Si p ante * esset, tum eo, quod inter p et * est, $a$ dicto, aliquod $z$ est minus quam $a+\omega$ [denotante $\omega$ quantitatem minorem quam $a$], quia hoc $Q-q$ ante $a$ fuit, huius vero dimidium est $\frac{a}{2}+\frac{\omega}{2}$, quod minus quam $a$ esse patet; itaque punctum p ulterius versus * accipiendum fuisset. Fit itaque $z$ minus quovis, quod a p ipsi * quantumvis propissimo usque ad * est, o vero fit nunquam. Consequenter $z \backsim 0$.

IX. *Sit u tempus quoddam continuum inter duo puncta, et multiplicetur u per factum e factoribus numero n, quorum quivis* $=2$; *erit factum numerus quoad u.*

Respondeat enim cuivis $u$ numeri $nu$ aliquis e factoribus dictis ipsi 2 æqualibus, et cuivis respondeat alius; atque ab aliquo puncto temporis p ponatur cogitatione in futurum $2u$ sub primo $u$ ipsius $nu$, tum sub secundo $u$ ipsius $nu$ adjungatur item $2u$, et sub quovis novo $u$ ipsius $nu$ ab extremo novissime positi ponatur cogitatione in futurum æquale ei, quod a p eousque positum est (per ax. I.); ultimum $u$ ipsius $nu$ adveniet (ax. II.), et tum

$$2.2\ldots 2u$$

positum erit. Est autem quivis numerus quoad $u$ bis positus numerus quoad $u$; adeoque $2.2\ldots 2u$ quoque (F. pag. 21).

X. *Temporis continui Q, quod inter duo puncta est, quaevis portio K certo numero accepta superat ipsum Q.*

Nam quæratur (ut in VIII.) in quovis puncto a $\mathfrak{P}$ incipiendo usque ad * (imo ultra quoque), num $z$ *certo dimidiationum numero* minus quovis $Q-q$, quod antea fuit, fieri potest? et hic datur ratiocinio iam sæpius repetito (E. pag. 20.) punctum aliquod p, in quo ultimo *ita* respondetur; quum prius omnino *ita* sit, aliquando vero, si nempe ultra * eatur, detur tale $Q-q$, quod antea fuit, nempe dum $Q-q=0$, quo $z$ nunquam minus fieri potest. Patet vero (ut in VIII.), p nullibi ante

• fieri posse. Itaque $z$ dato quovis $K$ minus fieri certo dimidiationum numero potest, et consequenter

$$K \triangleright \frac{Q}{2.2\ldots 2},$$

seu cum $2.2\ldots 2$ (per præc.) numerus sit ex. gr. $n$, est $K \triangleright \frac{Q}{n}$, adeoque $Q \triangleleft nK$.

XI. *Tempus continuum $T$ per quemvis integrum $n$ dividi potest.* Nam pro quovis $n$ dari tale $2.2\ldots 2$, ut

$$2.2\ldots 2u \triangleright nu,$$

facile patet, si cuivis $u$ ipsius $nu$ aliquis (et cuivis alius) factor 2 respondeat; semper enim accedente novo factore 2, ipso $u$, quod in $nu$ ponitur, maius accedit, et quidem maiore, nam primo $u$ ipsius $nu$ respondet $2u$.

Pro $n=1$ aut $n=2$, aut $n=2.2\ldots 2$ dictum iam est; quæstio de aliis est. Dividatur $T$ per $2.2\ldots 2 \triangleright n$, sitque quotus $a$, et dicatur $d$ dimidium ipsius $T$; erit $nd \triangleright T$ (cum $n$ ad minimum 3 sit), et $na \triangleleft T$, nam $a$ si $n$-ies accipiatur, ex $T$ adhuc supererunt tot $a$, quo numero superat $2.2\ldots 2$ ipsum $n$. Quæratur ab initio ipsius $a$ porro usque ad finem ipsius $nd$ eundo, in quovis puncto $\mathfrak{p}$, num (si illud tempus, quod ab initio ipsius $a$ usque ad $\mathfrak{p}$ est, nomine generali $x$ dicatur) sit $nx \triangleleft T$? erit (pag. 20.) aliquod punctum $\mathfrak{P}$, in quo aut ultimo erit $nx \triangleleft T$, aut primo erit $nx$ non minus quam $T$. Prius esse nequit; nam sit tum $x \doteq x'$; si $nx' \triangleleft T$ esset, tum sit $nx'+b \doteq T$; dicatur $b'$ quotus ex $b$ per $2.2\ldots 2 \triangleright n$ diviso, erit

$$2.2\ldots 2b' = b \triangleright nb',$$

(ut supra); adeoque $nx'+nb'$ manifesto est minus quam $nx+b$, quod erat $\doteq T$, itaque etiam $n(x'+b')$ est minus quam $T$, adeoque daretur aliquod maius quam $x'$, quod $n$-ies acceptum minus quam $T$, et in $\mathfrak{P}$ non esset ultimo $nx \triangleleft T$. Est igitur in $\mathfrak{P}$ prima vice $nx$ non minus quam $T$; itaque tum $nx'$ aut $\doteq T$, aut $nx' \triangleright T$ est. Posterius esse nequit;

nam sit $nx' - b = T$, et denotet $b'$ id, quod antea, erit $nb'$ item $\lessdot b$, adeoque

$$nx' - b \lessdot nx' - nb';$$

id est

$$T \lessdot n(x' - b'),$$

(uti statim patebit); et in $\mathfrak{P}$ non esset primum tale $x$, ut $nx \gtrdot T$ sit, nam antea iam $x' - b'$ tale fuit. Consequenter $nx' \doteq T$ est. Enimvero heic quantitatum comparatio quoad æqualitatem, vel maioritatem minoritatemve ita in proxime dictis intellecta est, uti (sub V., pag. 53.) dictum est; nempe etsi de tempore sermo sit, et ex. gr. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sint tempora continua, atque $\alpha - \beta$ (pro $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ positivis atque $\beta < \alpha$) cum $\gamma$ comparetur; ponatur cogitatione e certo temporis puncto $\mathfrak{p}$, tempus $\alpha$ in futurum, et ab extremo huius dematur e præterito tempus $\doteq \beta$, sit extremum huius $\mathfrak{p}'$, cogiteturque ex $\mathfrak{p}$ item in futurum, tempus $\doteq \gamma$; atque per id, quod alterutrum ex. gr. $\gamma$ maius quam $\alpha - \beta$ est quantitate $q$, intelligatur in dictis, usque ad extremum temporis $\doteq \gamma$ ex $\mathfrak{p}$ positi, post $\mathfrak{p}'$ tempus $q$ esse. Mox $\gtrdot$ et $\lessdot$ et $\doteq$ generalitate superiori accipientur. *Omnia dicta* vero ad *rectam* applicari patet.

Quod vero si $n$ numerus integer sit, et $\alpha$, $\beta$ positiva sint, (tempora aut rectæ),

$$n(\alpha + \beta) = n\alpha + n\beta$$

facile patet. Nam dum $(\alpha + \beta)$ accipitur $n$-ies, ponitur tam $\alpha$, quam $\beta$ numero eodem $n$, necquidquam ponitur aliud. Ita si accedat tertium $\gamma$, $\alpha + \beta$ dicatur $B$, et inde via de $n$ ad $n+1$ progredi, usquequo libuerit, licet.

Pariter

$$\frac{\alpha + \beta}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n}.$$

Nam sit

$$\frac{\alpha}{n} = u, \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{n} = v;$$

patet $u$ in $\alpha$, et $v$ in $\beta$, adeoque $u$ et $v$ in $\alpha$ et $\beta$ poni $n$-ies. Ita (pro $B = \alpha + \beta$) est

$$\frac{\gamma + B}{n} = \frac{\gamma}{n} + \frac{B}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{n};$$

et ita de $n$ ad $n+1$ progredi licet.

Si omnia negativa fuerint, æque patet. Si vero

$$k = \alpha - \beta$$

sit per $n$ multiplicandum, aut per $m$ dividendum, tum e quovis $\alpha$ erit unum $\beta$ demendum, adeoque si $n$-ies ponatur, ex $n$-ies $\alpha$ demetur $n$-ies $\beta$, et totidem $k$ nempe numero $n$ prodibunt. Ita si

$$\frac{\alpha}{m} = u, \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{m} = v,$$

erit

$$\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{m} = u - v,$$

et

$$m(u - v) = mu - mv = \alpha - \beta.$$

Nam

$$mu = \alpha, \quad \text{et} \quad mv = \beta;$$

itaque

$$u - v = \frac{\alpha - \beta}{m} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{m}.$$

Unde (ut prius) ad plura quotvis et qualiavis progrediendo, patet idem prodire; sive summa dividatur per $m$, sive singula divisa addantur; item sive quotus prior per $n$ multiplicetur, sive quoti singuli multiplicati per $n$ addantur.

XII. *Si e recta (vel tempore) possint nu accipi ita, ut* $\omega$ ($= 0$ *vel* $< u$) *supersit, ex eodem* $(n+1)u$ *accipi nequeunt.* Nam partes quævis ipsius $nu + \omega$ quocunque ordine post se invicem positæ ex $\mathfrak{p}$ incipiendo in eodem puncto terminantur, (V.); adeoque etsi $u$ ponatur $n$-ies post se invicem, et ad finem eorum adjungatur $\omega$; pariter si $(n+1)$-ies quoque adesset $u$, et toties post se invicem poneretur, ac si quod $R$ superesset, postponeretur; manifesto autem $(n+1)$-um $u$ ultra $\omega$ terminatur.

XIII. *Quaevis quantitas A ad unicum reduci potest*; (*talem ut in* (III.) *intelligendo, et quae tam ipsa, quam quaevis portio eius reduci potest aequalitate terminata, aut interminata per limitem*, § 6. *et* 8.).

Nam possit (Fig. 15.) tam ad $\mathfrak{p}\bullet$ quam ad $\mathfrak{p}\bullet'$ reduci; tum $\mathfrak{p}\mathfrak{s} \doteq nu$

(pro $u \lessdot \mathfrak{st}$) est $\gtrdot A$; $\mathfrak{ps} + \mathfrak{st}$ vero esset $\lessdot A$; adeoque $nu$ esset $\gtrdot A$ et $\lessdot A$ (contra III.).

XVI.* Si $A = B$, est etiam $A = B$, id est $A' \doteq B'$ (§ 8.).

Nam ponantur partes utriusque congruæ ex $\mathfrak{p}$ incipiendo post se invicem ad rectam; si terminata sit æqualitas, manifeste simul terminabuntur, cum quævis (per præcedentia) unica reducta gaudeat; si interminata fuerit æqualitas, tum reducta semper crescens, manens tamen certo dato minus, gaudebit limite, et quidem utrique communi. Nam si (fig. 15) $A'$ in $*$ et $B'$ in $*'$ terminaretur, manerent omnes partes ex $A$ depositæ intra $*$, ipsi tamen quam proxime euntes; partes vero ipsius $B$ iis congruæ semper simul ponerentur; et utriusque differentia a suo limite quovis dabili $u$ minus fieret; sit

$$\frac{\mathfrak{ps}}{n} = u\,, \quad u \lessdot \mathfrak{st};$$

differentia partium ex $B$ positarum (cum semper intra $*$ terminentur simul cum partibus congruis ex $A$ positis) ab eius limite supposito $\mathfrak{p}*'$ semper $\gtrdot \mathfrak{st}$ manebit; adeoque cum hæc $\lessdot u$ fieri debeat, erit etiam $\mathfrak{st} \lessdot u$; itaque cum $\mathfrak{st} \gtrdot u$ erat, in uno casu neque unum $u$ posset ex $\mathfrak{st}$ accipi, in altero præter $u$ adhuc superesset. Itaque hoc pacto reducta eodem limite gaudent; quodvis autem ad unicum tantum reduci potest.

Conversim quoque si $A' \doteq B'$, etiam $A = B$. Nam ex. gr. circuli $A$ reducendi partibus certis in rectangula altitudinis $\alpha$ ordinatis, hæc ex $\mathfrak{p}$ incipiendo post se invicem junguntur; et si baseos limes $\mathfrak{p}*'$ sit, pro quovis dato $\omega$ licet ipsi $*'$ tam prope ire ex. gr. in $\mathfrak{s}$, ut rectangulum ex $\alpha$ et $\mathfrak{s}*'$ sit $\lessdot \omega$, et etiam, quod ex $A$ superest, $\lessdot \omega$ sit; si pro $B$ propius eundum in $\mathfrak{t}$ est, ut, quod ex eo superest, $\lessdot \omega$ sit, tum ex $A$ adhuc minus superesset; respondet vero cuivis parti a $\mathfrak{p}$ usque in $\mathfrak{t}$ pars aliqua ipsius $A$ et aliqua ipsius $B$ absolute æqualis et cuivis alii alia. (IV.).

* XIV, XV et in editione prima desunt.

Hinc etiam signorum $>$, $<$, $=$ quævis duo exclusa ponunt tertium, et quodvis excludit reliqua duo. Nam si $A$ non $>$, nec $< B$, tum $A'$ neque ulterius neque interius terminatur quam $B'$; quia si ex. gr. ulterius terminaretur, sit $a'$ pars ipsius $A'$ cum $B'$ congrua, erit tum $a = B$, et $a$ pars ipsius $A$ erit, quia ei quoque, quod in $A'$ præter $a'$ est, respondet aliquid ex $A$ præter $a$; itaque $B < A$ esset (contra hyp.); ita nec interius terminatur; consequenter $A'$ et $B'$ simul terminantur; adeoque $A' \doteq B'$, et inde $A = B$. Si $A$ non $>$, nec $= B$, tum $A'$ item non terminatur ulterius quam $B'$; neque simul, quia tum $A = B$ esset; itaque interius terminari debet; adeoque $A'$ est pars ipsius $B'$, et id ex $B$. quod huic parti respondet, est $= A$, reliquo ipsius $B'$ vero respondet aliquid ex $B$, et eo superat $B$ ipsum $A$. Ita patet, esse $A > B$, si $A$ non $<$, nec $= B$. Si vero $A = B$, tum $A$ non $>$, nec $< B$; quia tum $A' \doteq B'$, et si $A >$ vel $< B$ esset, $A'$ aut ulterius aut interius terminaretur. Ita si $A > B$, tum $A$ non $=$ nec $< B$; quia tunc $A'$ ulterius quam $B'$ terminatur, si vero $A =$ vel $< B$, tum $A'$ simul aut interius terminaretur. Ita si $A < B$, tum $A$ nec $=$ nec $> B$ esse patet. Nempe:

XVII. *Si $A$ constet ex $a$, $b$, est $A' = a' + b'$ (etsi interminata sit reductio).* (Fig. 16.) Sit enim $a'$ in $\mathfrak{p}$ terminatum ex $\mathfrak{P}$ incipiendo, et $b'$ sit $\mathfrak{p}*$; si $A'$ non in $*$ terminetur, terminabitur aut ultra aut intra. Si in $*'$ terminetur, dividatur $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ per talem integrum, ut sit quotus $u < \mathfrak{p}*$ et etiam $< \frac{**'}{2}$; transferatur $u$ ex $\mathfrak{p}$ incipiendo usque quo aliquod $u$ ipsum $*$ primo transgrediendo in $\mathfrak{h}$ terminetur; primum $u$ post $\mathfrak{p}$ terminetur in $\mathfrak{k}$; erit $\mathfrak{p}\mathfrak{k} + *\mathfrak{h} <$ aut $= 2u$, quia $*\mathfrak{h}$ ad summum $= u$ est; $\mathfrak{P}\mathfrak{k}$ est $> a$, et $\mathfrak{p}\mathfrak{h} > b$; ponatur $\mathfrak{p}\mathfrak{k} + *\mathfrak{h}$ post $*$, terminetur in $\mathfrak{s}$, (patet nempe $2u$ esse $< **'$), erit $\mathfrak{P}\mathfrak{s} > a + b$; itaque cum $\mathfrak{P}\mathfrak{s} = \mathfrak{P}\mathfrak{h} + u = nu$ (nempe certo numero ipsius $u$); est $nu > A$ (cum $A$ ex $a$ et $b$ constet). Item $nu$ esset $< A$, si $A'$ in $*'$ terminaretur, quia tunc $A$ etiam $> \mathfrak{P}\mathfrak{t}$ esset. Itaque ex $A$ possent una vice plura $u$ quam altera accipi (contra XII.). Si vero $A'$ intra $*$ terminaretur in $\mathfrak{l}$, ex initio $n - 1$-ti $u$ in $\mathfrak{h}$ terminati ponatur unum $u$ versus $\mathfrak{p}$; patet $u$ ita accipi posse, ut hoc inter $*$ et finem ipsius $A'$ terminetur in $\mathfrak{i}$; concipiatur $\frac{u}{2}$ demi ex $\mathfrak{p}$ versus $\mathfrak{P}$;

reliquum ex $a$ erit; ita demto $\frac{u}{2}$ ex $*$ versus $\mathfrak{p}$, reliquum usque ad $\mathfrak{p}$ ex $b$ erit; itaque demto $u$ ex $*$ versus $\mathfrak{p}$, omne ex $\mathfrak{pi}$ ex $a$ et $b$ adeoque ex $A$ esset; sit $\mathfrak{q}$ inter $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{i}$, aderunt in $\mathfrak{pq}$ omnes partes ipsius $A$; et ex $\mathfrak{pi}$ (pro $\mathfrak{qi} = v$) plura $v$ accipi poterunt, quam ex $\mathfrak{pq}$, adeoque ex $A$ in uno casu plura quam in altero accipi poterunt (contra XII.). Itaque neque intra, neque ultra $*$ terminari $A'$ potest, sed in $*$ terminari debet.

Si plures quotvis certo numero $m$ fuerint partes ipsius $A$; tum nominentur $a$ et $b$ una litera $\alpha$, et si $B$ constet ex $\alpha$, $c$, erit $B' = \alpha' + c'$; et ita de $n$ ad $n+1$ progrediendo, patet partes componentes reductas post se invicem junctas totum reductum exhibere.

XVIII. Posteaquam (in XIII.) demonstratum est, quantitatem reducibilem unica reducta gaudere, [si ubi de quantitate sermo in Arithmetica est, semper ut reductæ tractentur] patet (ex V.) *additionis*, adeoque etiam *subtractionis*, § 14., *resultatum unicum* esse. Interim tamen si quantitates ita, uti sunt, considerentur, [ex. gr. sit circulus $C =$ quadrato $Q$, et triangulum $a =$ circulo $c$] dubium subvenit, num etiamsi undevis dematur $a$ ex $C$ et $c$ ex $Q$, residuum $R$ ex $C$ sit $=$ residuo $r$ ex $Q$? Erunt omnino: nam (per præcedentia) $a' + R' = C'$, et $c' + r' = Q'$, atque $C' = Q'$, et $a' = c'$; unde patet $a'$ et $c'$, si ex eodem initio ponantur, simul terminari, et inde posita $R'$ et $r'$ quoque simul terminari; itaque $R' = r'$, adeoque $R = r$. Supponitur hic circulum et reliqua finita (sensu III.) esse: de hoc tamen aliquid hoc respiciens statim addetur.

Si $a' = C'$, ac $R = 0$, erit et $r = 0$. — Non tamen generaliter dici potest, si ex æqualibus demtis æqualibus ex uno nihil supersit, neque ex altero superesse quidquam. Ex. gr. (Fig. 2.) $a \doteq a'$, $b \doteq b'$, $f \doteq f'$, et præter $a$, $b$, $f$ nihil, præter $a'$, $b'$, $f'$ vero $g$ superest; at de talibus quantitatibus in Arithmetica sermo est, uti (in III.) dictum est, quarum nulla portio omni dabili pluries e toto ipso accipi potest. Nempe si e tali possit $u$ accipi $n$-ies, et supersit $\omega = 0$ vel $< u$; ex eadem $(n+1)$-ies accipi $u$ nequit. Nam sit $\omega'$ id, quod in priori casu adjiciendum esset, ut $(n+1)$-um $u$ compleatur, tum e partibus ipsius $nu + \omega$ deberet $nu + \omega + \omega'$ exstrui; dematur $\omega'$, repleatur vacuitas eius ex $nu + \omega$, et nova vacuitas exorta item e residuo ipsius $nu+\omega$, et quævis nova vacuitas item inde expleatur in infinitum; vacuitates istas explentia sunt partes ipsius $nu+\omega$ (ex iis e quibus $nu+\omega$ constat); itaque $\omega'$ accipi ex $A$ omni dabili pluries posset.

XIX. Adjicere adhuc quædam de *aequalitate terminata* liceat, *quantitatibus heic, uti sunt (sine reductione) consideratis.*

1. Si $A=B=C$, *est etiam* $A=C$ *(aequalitatem heic terminatam, nisi aliud monitum fuerit, intelligendo).*

Nam constet $A$ ex $a, a', \ldots, u$; $B$ ex $b, b', \ldots, v$, item ex $\beta, \beta', \ldots, v'$; et $C$ ex $c, c', \ldots, t$, ac $a \doteq b$, $a' \doteq b', \ldots$ et $u \doteq v$, atque $\beta \doteq c$, $\beta' \doteq c', \ldots$ et $v' \doteq t$ (accento iam non sensu XVI. et sequ. accepto). Fiat initium cum $\beta$, progrediendo usque ad $v'$; est $\beta$ aut aliquod ipsorum $b, b', \ldots, v$, aut constat ex aliquo vel aliquibus, aut simul etiam (vel tantum) portione vel portionibus eorundem; cuivis tali autem, quod aut aliquod ipsorum $b, b', \ldots, v$ aut portio alicuius eorum est, respondet aliquod ipsorum $a, a', \ldots, u$, aut in casu posteriore aliqua portio alicujus ipsorundem absolute æqualis. Itaque si $c$ in illas portiones discerptum cogitetur, quum $c \doteq \beta$ sit, cuivis earum datur in $A$ absolute æqualis. Pariter $c' \doteq \beta'$ considerato, ipsi $c'$, aut portionibus ejus omnibus reperientur in $A$ absolute æquales, et quidem cum prioribus nullam portionem communem habentes; nam si aliqua portio bis occurreret, tum $a, a', \ldots$ portionem haberent communem (contra IV.). Ita percurrendo singula $c, c', \ldots, t$ et $\beta, \beta', \ldots, v'$, ubi ad $t$ adeoque ad $v'$ perventum est, atque ex $C$ nil superest, neque ex $B$ supererit (XVIII.), adeoque neque ex $A$.

Consequenter $A=C$ æqualitate terminata.

2. *Si* $P \doteq Q$, *et portio quaevis* $p$ *ipsius* $P$ *dematur undevis, atque portio quaevis* $q$ *ipsius* $Q$ *dematur, et* $p \doteq q$; *erunt illa, quae ex* $P$ *et* $Q$ *remanent, aequalitate terminata aequalia.* (Fig. 17.).

Nam dicatur $P'$ id, quod superest ex $P$ præter $p$, et $Q'$ id, quod præter $q$ ex $Q$ est, et sit $p'$ id, quod congruentibus $P$ et $Q$ ipsi $p$ ex $Q$ congruit, et $q'$ id, quod tum ex $P$ ipsi $q$ congruit; et dicatur $R$ complexus omnis ejus, quod præter $p$ et $q'$ ex $P$ est, et $R'$ complexus omnis, quod ex $Q$ præter $q$ et $p'$ est. Aut habebunt $p$ et $q'$ portionem aliquam communem, aut non.

*a)* Si non habeant (Fig. 17,*a*) manifeste constat $P'$ ex $R$ et $q'$ (nam $P$ constat ex $p$, $q'$, $R$), et $Q'$ ex $R'$ et $p'$; atque $R \doteq R'$, et $q' \doteq p'$; adeoque $Q'$ ex $P'$ exstrui potest, $q'$ ex $P'$ in $p'$, et $R$ in $R'$ positis. Imo æqualitas absoluta restituitur inter residua, si in $Q'$ in locum demti $q$ ponatur item ex $Q'$ exemtum $p'$, aut in $P'$ in locum demti $p$ ponatur item ex $P'$ exemtum $q'$.

*b)* Si vero $p$ et $q'$ in $P$ portionem communem habeant: tum si pars communis dematur, residua ex $P$ et $Q$ erunt absolute æqualia; itaque id tantum quæritur, num ex $p$ et $q$ remaneant æqualitate terminata æqualia. Quæstio igitur huc redit.

Si (Fig. 17, *b*) $A \doteq B$, et pars $K$ ipsius $A$ cum parte $k$ ipsius $B$ (ut in figura trium prima) coincidat; id quod ex $A$ præter $K$ est, ei quod ex $B$ præter $k$ est, æqualitate terminata æquale est.

Dicatur enim quævis pars ipsius $k$ *illi parti ipsius $K$ respondens*, cum qua tunc congruit; ponaturque $A$ super $B$, ut congruant; atque id ex $A$, quod præter $K$ est et nunc in $k$ cadit, dicatur $K'$, id ex $A$ vero, quod nunc extra $K$ et $k$ cadit, sit $A'$; ita id ex $B$, quod præter $k$ est et nunc in $K$ cadit, sit $k'$, id ex $B$ vero. quod nunc extra $k$ et $K$ cadit, sit $B'$; atque id ex $k$, quod nunc cum $K'$ coincidit, sit $b$, et id ex $K$, quod nunc cum $k'$ coincidit, sit $a$; atque id ex $K$, quod præter $a$ est, sit $K''$, et id ex $k$, quod præter $b$ est, sit $k''$.

Dematurque $a$ ex $K$, et ei respondens $a'$ ex $b$, ac ponatur $k'$, quod sub $a$ erat, in locum demti $a'$ juxta $a$); atque residuis ex $A, B, K'', k'', b$, (restituta per I. æqualitate absoluta), generaliter $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{K}, \mathfrak{k}, \mathfrak{b}$ dictis, post quamvis operationem, si quid $u$ ex $k'$ (migrante in $B$ semper eo ex $k'$, quod extra $b$ cadit), sub $\mathfrak{K}$ cadat, dematur ex $\mathfrak{K}$ illud $\alpha$, quod supra $u$ cadit, et e complexu ipsorum $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{k}$ dematur $\alpha'$ ipsi $\alpha$ ex $k$ respondens, ponaturque $u$ in locum demti $\alpha'$ juxta $a$), continuando, donec nullum $u$ sub $\mathfrak{K}$ cadat. Erit residuum ex $A$ absolute æquale residuo ex $B$, atque ex $A$ nonnisi per partes resectum $K$, ex $B$ vero demtum $k$ erit.

Nempe $K$ constat ex $K''$ et ex $a$ supra $k'$ cadente; $k$ constat ex $k'$

et ex $b$ sub $K'$ cadente; $A$ constat ex $K', K'', a, A'$, et $B$ constat ex $k', k'', b, B'$.

$K''$ et $k''$ (ita $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{k}$) coincidunt. Nam nullum punctum ipsius $K''$ extra $k''$ cadit; nam illud in $B$ cadens, in $k'$ vel $b$ aut $B'$ caderet; in $k'$ vero non cadit, quia $k'$ extra $K''$ est, in $b$ non, quia $b$ cum $K'$ coincidens extra $K''$ est, nec in $B'$, quia hoc extra $K$ et $k$ est. Pariter nullum punctum ipsius $k''$ extra $K''$ cadit; idemque ad $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{k}$ applicatur.

Hinc $b = a$; nam $K = k$, $K = K'' + a$, et $k = k'' + b$, et $K''$ et $k''$ coincidunt.

Semper residuum illud $u$ ex $k'$, quod ex $b$ prominet, migrat in $B$; nempe si quod $u$ ex $k'$ extra $b$ cadat, illud sub $\mathfrak{K}$ cadet, quia ex $k$ nonnisi $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{k}$ superest, $\mathfrak{k}$ vero cum $\mathfrak{K}$ coincidit; atque hoc novam demtionem parit. Si vero nullum $u$ extra $b$ cadat, tum jam totum $k'$ in $b$ positum (in loca demtorum) erit, necquidquam ex parte $b$ ipsius $k$ supererit; quia semper aliæ partes aliis respondentes demtæ sunt, et $k' = b$.

Eritque residuum ex $k$ nonnisi $\mathfrak{k}$, adeoque residuum ex $K$ erit $\mathfrak{K}$; nam $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{K}$ *coincident*, nisi utrumque o sit; neque ex $K$ majus vel minus residuum quam ex $k$ est. Consequenter etsi utrumque o sit, ex absolute æqualibus demta, absolute æqualia relinquent. In figura allata patet.*

* Hæc demonstrationi æqualitatis parallelogrammorum Euclideæ evidentiam pariunt; quamquam id etiam per XVII. et XVIII. fiat.

Interim ubique, ubi fieri potest, æqualitas terminata ostendenda; quod in parallelogrammis, triangulis et prismatibus rectilineis, altitudinibus basibusque æqualibus gaudentibus, (et pluribus aliis) facile fit. Priora et inspectione figuræ (17, $c$) patent; idemque ad prismata (pro rectis parallelis plana parallela ponendo) facile applicatur. Nempe si $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \parallel \mathfrak{AB}$ et fuerint triangula $\mathfrak{AB}\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{AB}\mathfrak{a}'$: fiat

$$\mathfrak{AE} = \mathfrak{EB} \quad \text{et} \quad \mathfrak{E}\mathfrak{e} \parallel \mathfrak{aB} \quad \text{et} \quad \mathfrak{E}\mathfrak{e}' \parallel \mathfrak{B}\mathfrak{a}';$$

positisque triangulis $\mathfrak{AEK}$ in $\mathfrak{aeK}$. et $\mathfrak{AEk}$ in $\mathfrak{a}'\mathfrak{e}'\mathfrak{k}$; parallelogramma $\mathfrak{EBae}$ et $\mathfrak{EB}\mathfrak{a}'\mathfrak{e}'$ secentur parallelis, in priore ad $\mathfrak{EC}$ per $\mathfrak{aB}$ ad distantias $\mathfrak{BC}$, in altero ad $\mathfrak{BC}$ per $\mathfrak{E}\mathfrak{e}'$ ad distantias $\mathfrak{EC}$; si $\mathfrak{BC}$ non contineatur certies in $\mathfrak{Ba}$, patet esse $\mathfrak{gh}$ parallelum ad $\mathfrak{EB}$. Eritque

$$A \doteq A, \quad B + B' \doteq b + b', \quad C + C' \doteq c + c',$$
$$D + D' \doteq d + d', \quad E + E' \doteq e + e', \quad F \doteq f + f'.$$

Unde partes omnes sibi invicem respondentes assignari patet; tam pro triangulis $\mathfrak{ABa}$ et $\mathfrak{AB}\mathfrak{a}'$, quam pro parallelogrammis $\mathfrak{EBae}$ et $\mathfrak{EB}\mathfrak{a}'\mathfrak{e}'$, tam altitudinibus æqualibus, quam basibus æqualibus gaudentibus.

Si vero supponatur, quotvis operationibus haud unquam evenire, ut nullum $u$ extra $b$ cadat; tum quodvis $u$ sub $K''$ cadet, adeoque nisi $u$ (residuum ex $k'$) tenderet ad o, fieret $K'$ tendens ad infinitum; atque tum etiam propter $b=k'$ residuum tendit ad o; nempe si $u$ dicatur, quod sub $\mathfrak{K}$ cadit, $k'$ demto $u$ sub $b$ cadit, atque ex $b$ dabili quovis minus supererit. Dari igitur oportet in concreto partem certam ipsius $k'$, adeoque ipsius $a$, item ei ex $k$ respondentem partem ipsius $b$, quæ semper minuerentur; sed hæ partes per $a$) demi possunt; et tum necessario majus demitur, quam per operationes numero aliquo factas relinquitur. Unde quivis casus ad operationum numerum finitum reduci potest.

XX. *Ut resultatum multiplicationis divisionisque unicum esse probetur, de proportione quaedam, et prius fractionum commensurabilium primaria referenda sunt.*

1. In § 22. 2(3)tum *ipsius $C$ solet per $\frac{2C}{3}$, et, si $C=1$ sit, per $\frac{2}{3}$ exprimi, quod signum quoti erat.* Est nempe valor uterque æqualis. Sit enim

$$C=*\,*\,*;$$

item

$$C=*\,*\,*;$$

ponetur $\genfrac{}{}{0pt}{}{*}{*}$ (nempe tot $*$, quot $C$) in illis $C$ toties, in quot partes $C$ partitum est; itaque

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{*}{*}=\frac{2C}{3};$$

et idem prodit, $C$ per 3 partiendo, et duas partes ejusmodi sumendo.

Patet etiam (§. 32.) idem prodire, si $C$ per $\frac{2}{3}$ multiplicetur. Est igitur 2(3)tum ipsius $C=\frac{2C}{3}=\frac{2}{3}.C.$ Vocantur (§ 22.) $\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{q}$ *termini fractionis*; *prior numerator*, posterior *denominator* audit. Sint prius *termini integri.*

2. *Si numerator per integrum multiplicetur, valor novus priore toties evadet major; si dividatur, toties minor fiet; si denominator multiblicetur, toties minor, si dividatur toties major fiet; si vero ter-*

*minus uterque per eundem integrum multiplicetur, aut uterque per eundem dividatur, valor non mutatur.*

Nam valor prior ipsius $\frac{2}{3}.C$ erat $= ✻✻$, quia si $\frac{C}{3} = ✻$, hoc bis accipitur; si vero pro 2 ponatur $5.2$, tum $5.2$-ies $✻$, idest 5-ies $✻✻$ accipietur. Hinc vicissim patet, si ipsius $\frac{5.2}{3}$ numerator per 5 dividatur, valorem fieri 5-ies minorem; (de casu, ubi quotus haud integer est, inferius).

Sit item

$$C = \begin{cases} ✻ = \ast\ast\ast\ast\ast \\ ✻ = \ast\ast\ast\ast\ast \\ ✻ = \ast\ast\ast\ast\ast \end{cases};$$

et sit quærendum $\frac{2C}{3.5}$; patet $\frac{C}{3.5} = \ast$ esse, quum $\ast$ in quovis $✻$ ponatur 5-ies, adeoque in toto ($C = 3✻$), ponatur $3.5$-ies; accipiuntur vero tales tot, quot prius; itaque valor novus erit $\overset{\ast}{\ast}$, qui in priore $\overset{✻}{✻} = \overset{\ast}{\ast}\ \overset{\ast}{\ast}\ \overset{\ast}{\ast}\ \overset{\ast}{\ast}\ \overset{\ast}{\ast}$ ponitur 5-ies.

Unde etiam evidens est, quod, si et numerator per 5 multiplicetur, adeoque $5.2$ tales partes accipiantur, valor $\overset{\ast}{\ast}$ 5-ies positus valorem primum restituat; adeoque $\frac{5.2}{5.3} = \frac{2}{3}$; itemque æquale prodeat, tam $5.2$ quam $5.3$ per 5 divisis; solo denominatore $3.5$ per 5 diviso autem fiat $\frac{2}{3}$ majus 5-ies ipso $\frac{2}{3.5}$.

3. *Regula hinc etiam fractiones ad denominatorem eundem reducendi* sequens fluit. Cujusvis fractionis terminus uterque per factum e reliquarum denominatoribus omnium multiplicetur; prodibit enim ita (per præc.) cuivis æqualis; nam factum ex integris manifesto integer est; denominator quoque idem erit, nam eosdem factores quotvis quocunque ordine factum idem dare mox demonstrabitur.

Patet etiam *fractionum ad denominatorem eundem reductarum illam esse maiorem, cuius numerator maior est.*

4. *Si* $\frac{2}{3}.C$ *per* $\frac{4}{5}$ *multiplicandum sit*, erit (facto dicto $x$)

$$1 = 5u,\ \frac{4}{5} = 4u;\ \ \frac{2}{3}.C = 5v,\ x = 4v;$$

itaque $v$ prius reperiendum et factum est $4v$.

Ex (2.) est

$$\frac{2}{5\cdot 3}\cdot C = v\,,$$

quia

$$\frac{2}{3}C = 5\cdot\frac{2C}{5\cdot 3} = 5v\,,$$

et

$$\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdot C = 4v.$$

Unde *factum numeratorum per factum denominatorum divisum factum est*; quod item 4(5)tum 2(3)ti ipsius $C$, adeoque *fractionem fractionis* esse manifestum est.

Unde si $\frac{2}{3}\cdot C$ *in fractionem ipsius b mutari debeat* et $C$ sit $= \frac{4}{5}\cdot b$; erit 2(3)tum ipsius $C$ (seu 4(5)ti ipsius $b$, multiplicando $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$) æquale $\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot b$.

5. Hinc etiam *si* $\frac{2}{3}$ *per* $\frac{4}{5}$ *dividi debeat*, erit:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}.$$

Nam

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4} = \frac{4\cdot 2\cdot 5}{5\cdot 3\cdot 4} \text{ (per præc.)},$$

quod dividendo per 5 et 4 terminum utrumque (per 2.) æquale est $\frac{2}{3}$.

6. Unde etiam *in casu terminorum non integrorum, fractionem quotum esse* sequitur.

Sit enim

$$B = \ast\ast\,,\quad A = \ast\ast\ast = \text{etiam } 5v, \text{ et } C = 4v,$$

adeoque $B$ ipsius $C$ dicatur 2(3) 4(5)tum (§ 22.); sit

$$\ast = \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\,,$$

adeoque

$$A = \left\{\begin{array}{l} \ast = \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \ast = \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \ast = \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \end{array}\right. \quad \text{et} \quad v = \begin{array}{c}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\end{array},$$

quia ponitur 5-ies in $A$; itaque illud $*$, quod in $4v = C$ continetur $4.3$-ies, in $B = \frac{*}{*}$ continetur $2.5$-ies (uti duæ superiores lineæ ostendunt). *Reducetur* itaque *fractio huiusmodi* quoque *ad formam priorem*, si numerorum extremorum factum per factum mediorum dividatur, quod æquale $\dfrac{\frac{2C}{3}}{\frac{4}{5}}$ est.

7. Hinc etiam *ad qualemvis denominatorem aut numeratorem datum reduci fractio potest valore immutato.*

Sit datus denominator $\frac{n}{m}$; est

$$\frac{\frac{2n}{3m}}{\frac{n}{m}} = \frac{2nm}{3mn} = \frac{2}{3}.$$

Sit $\frac{n}{m}$ numerator datus; est

$$\frac{\frac{n}{m}}{\frac{3n}{2m}} = \frac{2nm}{3nm} = \frac{2}{3}.$$

Itaque $\frac{n}{m}$ *per datam fractionem, si numerator quaeratur, multiplicari, si denominator, dividi debet.*

8. Patet etiam, quod, si numerator sit $\frac{n}{m}$, denominator $\frac{p}{q}$, et uterque per $\frac{r}{s}$ multiplicetur vel uterque per $\frac{r}{s}$ dividatur (literis nunc integros denotantibus), prodire in casu priore

$$\frac{nr}{ms} : \frac{pr}{qs} = \frac{nrqs}{mspr},$$

in posteriore

$$\frac{ns}{mr} : \frac{ps}{qr} = \frac{nsqr}{mrps},$$

utrumque (terminis per $rs$ divisis) æquale $\frac{nq}{mp}$, nempe fractioni priori. Reliqua de fractionibus in Arithmetica specialiore dicentur.

XXI. De *resultato multiplicationis unico* iam disquirendum, at prius *de possibilitate mensurationis* et *proportionalis quartae* agendum est.

Sint $A$, $B$ rectæ eiusdem determinationis aut tempora et $n$ sit integer, atque $\frac{A}{n}$ sit æquale $u$: erit $A = nu$, $B$ vero aut $= u$, aut $\lessdot u$, aut $\gtrdot u$.

In primo casu est $B = 1\,u$, in secundo est

$$B = 0u + \omega, \quad (\omega \lessdot u).$$

In tertio datur talis integer $M$, ut $Mu \gtrdot B$ sit (X.); itaque cum $1\,u$ non $\gtrdot B$, datur primus integer ab $M$ incipiendo versus $1$ talis $m$, ut $mu$ non $\gtrdot B$; itaque

$$B = mu, \text{ aut } B = mu + \omega, \quad (\omega \lessdot u).$$

Datur porro (per VIII.) tale

$$2.2.2\ldots 2 = n'$$

ut sit

$$\frac{u}{n'} \lessdot \frac{\omega}{2};$$

sit $u' = \frac{u}{n'}$; erit tum

$$A = n\,\frac{n'u}{n'} = nn'u';$$

sit

$$B = m'u' + \omega', \quad (\omega' \lessdot u')$$

erit nempe

$$mu = mn'\frac{u}{n'} = mn'u',$$

et quia $u' \lessdot \frac{\omega}{2}$, ipsi $mn'$ ad minimum $2$ accedunt. Estque $\omega'$ aut $0$, aut non; si non, repetatur eadem operatio, ut prodeat $u''$, ubi $u'' \lessdot \frac{\omega'}{2}$ et fiat

$$B = m''u'' + \omega'', \quad (\omega'' \lessdot u'');$$

Continuando idem semper porro, si semper superfuerit aliquid, manifesto $\omega \frown 0$; nam pro $\omega'$, quod primo superest, est

$$\omega' \lessdot u' \lessdot \frac{\omega}{2},$$

ita $\omega'' \mathrel{\substack{<\\-}} \frac{\omega'}{2}$ adeoque $\mathrel{\substack{<\\-}} \frac{\omega}{2.2}$, et ita porro, ut $\mathrel{\substack{<\\-}} \frac{\omega}{2.2\ldots 2}$ supersit. Hinc quum hoc dato quovis $\mathrel{\substack{<\\-}}$ esse possit, $mu \sim B$; nempe $mu - B \sim 0$.

Patet etiam

$$B = m'u' + \omega' = m''u'' + \omega'' = \ldots$$

esse $\mathrel{\substack{<\\-}} (m+1)u$, adeoque $m'u'$, $m''u'', \ldots \mathrel{\substack{<\\-}} (m+1)u$,

et :

$$m'u' \mathrel{\substack{>\\-}} mu, \quad m''u'' \mathrel{\substack{>\\-}} m'u', \ldots,$$

Unde

$$m'\frac{u}{n'} \mathrel{\substack{<\\-}} (m+1)u, \quad m''\frac{u}{n''} \mathrel{\substack{<\\-}} (m+1)u \ldots$$

adeoque

$$\frac{m'}{n'} \mathrel{\substack{<\\-}} m+1, \quad \frac{m''}{n''} \mathrel{\substack{<\\-}} m+1, \ldots,$$

et

$$m'\frac{u}{n'} \mathrel{\substack{>\\-}} mu, \quad m''\frac{u}{n''} \mathrel{\substack{>\\-}} m'\frac{u}{n'}, \ldots$$

adeoque

$$\frac{m'}{n'} \mathrel{\substack{>\\-}} m, \quad \frac{m''}{n''} \mathrel{\substack{>\\-}} \frac{m'}{n'}, \ldots;$$

sunt autem $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}, \ldots$ fractiones, per quas semper idem $u$ multiplicatur, ut $m'u'$, $m''u'', \ldots$ prodeant, quod statim applicabitur.

XXII. 1. *Dari hinc quartam proportionalem patet sic:*

Si $B$ cum $A$ commensurabilis sit, tum

$$A = nu, \quad B = mu,$$

adeoque pro $\frac{C}{n} = v$ erit quarta proportionalis $D = mv$.

Si vero $B$ cum $A$ incommensurabilis sit, erit

$$A = nu, \quad B = mu + \omega, \quad (\omega \mathrel{\substack{<\\-}} u),$$

et pro $C = nv$ quæritur tale

$$D = mv + \lambda, \quad (\lambda \mathrel{\substack{<\\-}} v),$$

ut $\omega \sim 0$ et $\lambda \sim 0$, adeoque $mu \sim B$ et $mv \sim D$.

Accipiatur (e præcedentibus) $m'v'$, tum $m''v''$, ...; erit inde

$$m'v' = \frac{m'}{n'}v,$$

atque $\frac{m'}{n'}$ maius quam $m$ et idem $\frac{m'}{n'}$ minus quam $m+1$; itaque crevit prius $mv$ manendo minus quam $(m+1)v$: quo continuato patet (per VI.) limitem dari, cum $mv$ semper crescat maneatque primo $(m+1)v$ minus.

2. Verum *etsi non constaret in imagine sequenti*

$$A = nu, \quad B = mu + \omega, \quad C = nv, \quad D = mv + \lambda$$

*esse* $\omega \lessdot u$ *et* $\lambda \lessdot v$: *dummodo* $\omega \frown 0$, $\lambda \frown 0$, *nunquam e* $B$ *plura* $u$ *quam* $v$ *ex* $D$ *accipi possunt.*

Nam sit

$$B = (m+1)u + \omega', \quad (\omega' \lessdot u)$$

et

$$D = (m+1)v - \alpha,$$

(ubi $\alpha$ positivum sit, si $v$ positivum, et negativum, si $v$ negativum est), tunc $(m+1)$-tum $u$ ex $\omega$ sumptum est, (adeoque et $\omega'$ positivum est, si $u$ positivum, negativum, si $u$ negativum). Cum $\omega$, $\lambda$ tendunt ad zero, decrescat utrumque et fiat

$$\omega'' \lessdot \omega', \quad \text{et} \quad \lambda' \lessdot \alpha;$$

erit tunc

$$A = Nu', \quad B = Mu' + \omega''; \quad C = Nv', \quad D = Mv' + \lambda',$$

quod si $B$ ipsum $u$ pluries contineat, quam $D$ ipsum $v$, fieri nequit; nam $nu = Nu'$, adeoque

$$u' = \frac{nu}{N},$$

$$v' = \frac{nv}{N};$$

eritque

$$A = \frac{Nnu}{N}, \quad B = N\frac{(m+1)u}{N} + \omega' = \frac{Mnu}{N} + \omega'',$$

et hinc manifesto $\frac{u}{N}$ continetur in $B$ ad minimum $N(m+1)$-ies, et plane $Mn$-ies præter $\omega''$ quod est minus quam $\omega'$; quapropter $Mn$ necessario $\geqslant N(m+1)$.

Itaque tum

$$D = Mv' + \lambda' = \frac{Mnv}{N} + \lambda' \geqslant \frac{N(m+1)v}{N} + \lambda'$$
$$\geqslant (m+1)v + \lambda'$$

esse deberet, contra hypothesim; erat enim

$$D = (m+1)v - \alpha.$$

Nimirum cum $\omega'' \leqslant \omega'$ sit, si ex. gr. pro $u$, $\omega'$ positivis et $\omega''$ positivum sit, tum ex $B$ præter $\omega''$ maius quam præter $\omega'$ superest; si vero $\omega''$ negativum sit, tum $\frac{Mn}{N}$ adhuc maius esse debet, ut imminutum æquale $(m+1)u + \omega'$ prodeat.

Neque vero

$$(m+1)v - \alpha \geqslant (m+1)v + \lambda', \quad (\lambda' \leqslant \alpha)$$

esse potest. Nam si $\alpha$ simul cum $v$ positivum sit, erit $\lambda'$ aut positivum aut negativum. Si positivum, tum si ex $(m+1)v$ dematur $\alpha$, manebit minus quam si idem augeatur. Si vero $\lambda'$ negativum sit, tum si ex $(m+1)v$ dematur minus quam $\alpha$, maius manebit, quam si totum $\alpha$ dematur. Si vero $v$ cum $\alpha$ negativum sit, erit

$$\vdash\!\dashv(m+1)v \dotplus \alpha \leqslant \vdash\!\dashv(m+1)v \dotplus \lambda'$$

et etiam

$$\leqslant \vdash\!\dashv(m+1)v \vdash\!\dashv \lambda'.$$

Nec si simul $\omega = 0$ et $\lambda = 0$ sint, potest $B$ pluries continere $u' = \frac{A}{N}$, quam $D$ ipsum $v' = \frac{C}{N}$. Nam sit

$$mu = Mu';$$

erit

$$\frac{Mn}{N} = m;$$

sit

$$D = M'v' = \frac{M'nv}{N};$$

erit
$$m=\frac{M'n}{N},$$
itaque
$$\frac{M'n}{N}=\frac{Mn}{N};$$
adeoque
$$M'=M.$$

Hinc etiam patet, quod si

$$nu=A, \quad \pm mu \leqq B; \quad nv=C, \quad \pm mv \leqq D,$$

(signorum $=$ vel $\smile$, item $+$ vel $-$ eodem pro $B$ et $D$ accepto): tum

$$A=nu, \quad B=\pm mu+\omega, \quad (\omega=0, \text{ vel } \omega \lessdot u);$$
$$C=nv, \quad D=\pm mv+\lambda, \quad (\lambda=0, \text{ vel } \lambda \lessdot v);$$

(*in* expressione ipsorum $B$, $D$ post $\omega$, $\lambda$ signorum $=$ vel $\lessdot$ idem in utroque accipiendo). — Itaque $A, B, C, D$, si ita sit, in proportione sunt. Nam tum casus præcedens locum habet; atque inde sequitur *pro quovis $n$, si $A, C$ in $n$ partes aequales $u$, $v$ partita sint, neutrum ipsorum $B, D$ pluries suam quam alterum continere*, uti ex hoc sequitur imago superior; adeo ut et harum quævis *definitio proportionis* esse possit, (affectionibus $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv$ et $\vdash\!\!\dashv$ posteriori quoque adnexis). Neque autem posterius locum habere potest, si aliquod ipsorum $\omega$, $\lambda$ sit $=0$, alterum non; quia tum posset, si $\omega$ non $0$ et $\lambda=0$ sit, $u'$ per partitionem ipsius $u$ accipi $\lessdot\omega$, et tum plura $u'$ acciperentur ex $B$, quam $v'$ ex $D$.

*Itaque in proportione duo priora et duo posteriora sunt simul commensurabilia vel simul incommensurabilia.*

XXIII. *Est etiam proportionalis quarta unica*; *(excepto si prima et aliqua reliquarum sit* $0$).

Nam sint duæ imagines (in quibus $\omega$, $\lambda$, $\omega'$, $\lambda'$ tendunt ad limitem $0$ pro $A$ cum $B$ incommensurabili):

$$A=nu, \quad B=mu+\omega, \quad C=nv, \quad D=mv+\lambda,$$

et

$$A = Nu', \quad B = Mu' + \omega', \quad C = Nv', \quad D' = Mv' + \lambda'.$$

Est tunc

$$mu + \omega - Mu' - \omega' = 0;$$

sed $\omega - \omega'$ (si non 0) dato quovis minus fieri posse manifestum est, sive destruat $\omega'$ ex $\omega$ sive augeat illud; itaque est aut æquale 0 aut omni dabili minus, adeoque pro quovis integro $k$ minus quam $\frac{u}{k}$ fieri potest; itaque

$$mu - \frac{Mnu}{N} = \frac{Nmu - Mnu}{N} = \frac{Nm - Mn}{N} u,$$

si non sit 0, est $< \frac{u}{k}$, adeoque

$$\frac{Nm - Mn}{N} < \frac{1}{k}$$

fieri potest; nam si eo æquale vel maius esset, tunc etiam

$$\frac{Nm - Mn}{N} u = \text{ vel } > \frac{u}{k}$$

esset.

Est igitur etiam

$$\frac{Nm - Mn}{N} v = mv - Mv' < \frac{v}{k};$$

adeoque

$$mv + \lambda - Mv' - \lambda' < \pm \frac{v}{k} \pm \lambda \pm \lambda';$$

seu

$$D - D' < \pm \frac{v}{k} \pm \lambda \pm \lambda',$$

quod item ad limitem 0 tendere statim ostendetur. Consequenter $D$ nec maius nec minus est quam $D'$; adeoque $D = D'$.

Si vero $A$ cum $B$ commensurabile sit, tunc etiam $D$ cum $C$ commensurabile est (per præced.); adeoque etsi prodeat

$$D = mv, \quad \text{et} \quad D' = Mv',$$

erit

$$B = mu = Mu' = \frac{Mnu}{N},$$

adeoque

$$\frac{Mn}{N} = m,$$

consequenter

$$\frac{Mnv}{N} = Mv' = mv.$$

Patet hinc etiam *multiplicationis, pro certo multiplicando et certo multiplicatore, resultatum unicum esse* (§ 28.), cum loco primo non o, sed 1 sit.

XXIV. Unum adhuc de proportione (infra specialius tractanda) addere libet, ne elegans *definitio Euclidea* (unum plurimorum, quæ Horatii verba *Grajis ingenium dedit* probant) silentio prætereatur. Etsi aliis verbis referat, *$A, B, C, D$ in proportione esse dicit Euclides*, si pro quibusvis integris $N, M$, sit

$$\begin{array}{lcl} NA = MB, & \text{si} & NC = MD, \\ NA > MB, & \text{si} & NC > MD, \\ NA < MB, & \text{si} & NC < MD. \end{array}$$

Conceptum hunc (exclusis negativis et o) cum (§ 29.) dato æquivalentem (pag. 16. D, 2.) esse probatur sic. Sit imago Euclidea $I$, et (§ 29.) data sit $i$. Demonstratur *per $i$ pōni $I$*, et *per non $i$ poni non $I$;* unde (pag. 16. D, 2.) patebit, per quodvis poni alterum.

1. *$I$ ponitur per $i$.*

Est $i$ sequens: (XXII.) aut

$$A = nu, \quad B = mu, \quad C = nv, \quad D = mv;$$

aut

$$A = nu, \quad B = mu + \omega, \quad C = nv, \quad D = mv + \lambda,$$

$$(\omega < u, \quad \lambda < v),$$

et cum $A, B, C, D$ etiam $u$, $v$, iisque $\omega$, $\lambda$ positiva sunt.

Quoad prius, si

$$Nnu = Mmu,$$

tum

$$Nn = Mm,$$

adeoque

$$Nnv = Mmv;$$

si $>$ vel $<$ sit pro $=$, manifesto idem utrinque erit.

In imagine posteriore erit $NA$ vel $>$, vel $<$, vel $= MB$; quæritur, num inter $NC$ et $MD$ quoque idem signum erit?

Si $NA < MB$, sit $d$ excessus ipsius $MB$ super $NA$; erit

$$Nnu + d = Mmu + M\omega.$$

Sunt heic $d, M, N$ constantes, $u$ vero ita accipi posse facile patet (et demonstrabitur statim), ut $M\omega < d$ sit; tum vero demto $d$ ab una parte, et $M\omega$ ab altera manebit $Nnu < Mmu$; nempe ex æqualibus demendo æqualia, manent æqualia, sed si ex aliquo residuo adhuc dematur, inde minus remanebit. Si vero tunc $Nnu < Mmu$ sit, erit $Nn < Mm$, adeoque $Nnv < Mmv$ (pro illis $n, m, u, v$, pro quibus $M\omega < d$ factum est). Est itaque etiam $Nnv < Mmv$, adeoque etiam $< Mmv + M\lambda$; id est $NC < MD$.

Si $NA > MB$, sit

$$NA = MB + d;$$

erit

$$Nnu = Mmu + M\omega + d;$$

itaque

$$Nnu > Mmu + d;$$

adeoque cum $Mu < d$ fieri queat, erit tunc

$$Nnu > Mmu + Mu;$$

et hinc

$$Nn > M(m + 1);$$

adeoque

$$Nnv > M(m + 1)v,$$

consequenter $NC > MD$, quia

$$D < (m + 1)v.$$

Si vero $NA = MB$, tum $NC$ non est $>$, nec $<$ quam $MD$. Nam si $>$ aut $<$ sit, tum et $NA >$ vel $<$ quam $MB$ esset.

2. *Per non i poni non I* patet sic: Casus ipsius *non i* sunt sequentes:

$$nu,\ mu \quad ;\ nv,\ mv \pm h,$$

vel

$$nu,\ mu + \omega;\ nv,\ mv \pm h,\ (\omega < u),$$

(ita ut $h$ constans maneat, $\omega$ vero tendat ad limitem o).

Quoad casum primum dantur talia $N$, $M$ (nempe $m$, $n$) ut $mnu$ sit æquale $nmu$, sed $mnv$ non æquale $nmv \pm nh$.

In casu posteriore, si $-h$ sit, est

$$mnu < nmu + n\omega,$$

sed

$$mnv > nmv - nh.$$

Si vero $+h$ sit, accipiatur $m + 1$ pro $N$ et $n$ pro $M$: erit $(m + 1)nu$, id est

$$mnu + nu > nmu + n\omega;$$

sed

$$mnv + nv < nmv + nh,$$

nam $\omega < u$ est et $v < h$ fieri potest.

XXV. 1. *Si* $\omega \frown 0$, *pro quovie integro* $k$, *etiam* $k\omega \frown 0$.

Nam tum pro quovis integro $N$ fit $\omega \lessdot \frac{1}{N}$; idem de singulis $\omega$ usque ad $k$-tum valet; adeoque etiam summa omnium $\omega$ est $\lessdot$ summæ omnium respondentium $\frac{1}{N}$, nempe $k\omega \lessdot \frac{k}{N}$ et cum $N$ utvis augere liceat, si in locum eius ponatur $kN$, fiet

$$\omega \lessdot \frac{1}{kN}, \quad \text{et} \quad k\omega \lessdot \frac{1}{N}.$$

Hinc etiam si $a', n$ integri fuerint et $\frac{a'}{n} \lessdot k$ maneat, tum quoque $\frac{a'}{n}\omega \frown 0$. Nam sit

$$\frac{a'}{n} = i + f$$

(pro $i$ integro et $f$ fractione vera); est

$$i+f<k,$$

itaque

$$(i+f)\omega<k\omega.$$

Ita si $\frac{a'}{n}=f$ sit, aut etiam si $\frac{a'}{n}\frown 0$, etiam $\frac{a'}{n}\omega\frown 0$.

Unde si novus factor $\frac{b'}{n}$ eiusmodi (uti $\frac{a'}{n}$) accedat, et $\frac{a'}{n}\omega$, quod tendit ad $0$, nominetur $\lambda$, etiam $\frac{b'}{n}\cdot\frac{a'}{n}\omega\frown 0$; *et item de quotvis ad uno plures progrediendo*, manifesto e *quotvis eiusmodi factoribus* factum tendit ad $0$, si aliquis ad $0$ tendat.

2. *Si tam $\omega\frown 0$, quam $\lambda\frown 0$, etiam $\omega\pm\lambda\frown 0$ (nisi $\omega\pm\lambda=0$ sit).*

Nam tum $\omega<\frac{1}{N}$ et $\lambda<\frac{1}{N}$ fieri potest: itaque aut destruet alterutrum ex altero, et evadet minus, aut summa manebit $<\frac{2}{N}$; et si ipsi $N$ (ut antea) substituatur $2N$, fiet eadem $<\frac{2}{2N}=\frac{1}{N}$.

Notandum vero per quantitatem, quæ tendit ad zero et sæpius omni dabili minor fieri dicitur, minime omni dabili minorem intelligi, sed talem, quæ, si detur quævis $\alpha$, hac minor fieri potest. Omni dabili minor quantitas *non existit; cum si expers esset, continuo minor non esset; si* continuum, portio eius adhuc minor esset. Aliud est $\infty$ (§ 21.).

Si $\omega\pm\lambda$ dicatur $z$, et $x\frown 0$, eodem modo patet, quod $z\pm x\frown 0$; unde ulterius (modo de $n$ ad $n+1$ progrediendo) quotvis numero certo fuerint ad limitem $0$ tendentes, eorum summa quoque tendit ad $0$.

3. *Si $x\frown a$ et $y\frown b$, tum $x\pm y\frown a\pm b$.*

Nam sit

$$x+\omega=a, \quad \text{et} \quad y+\lambda=b;$$

tum $\omega\frown 0$ et $\lambda\frown 0$, atque

$$a+b=x+\omega+y+\lambda,$$

ubi per præcedentia $\omega+\lambda$ tendit ad $0$; itaque differentia ipsius $x+y$ ab $a+b$ fieri omni dabili minor potest. Pariter (ut in præcedentibus) progrediendo, patet *quotvis quantitatum (certo numero) ad limitem tendentium summam ad summam limitum tendere.*

4. *Si* $x - y = \omega$, *et* $\omega = 0$, *vel* $\omega \frown 0$, *et* $x \frown a$, *atque* $y \frown b$, *tum* $a = b$.

Nam sit

$$a = b + \alpha;$$

est

$$a - x \frown 0,$$

adeoque

$$b + \alpha - x \frown 0;$$

et (quia $x = y + \omega$),

$$b + \alpha - y - \omega \frown 0,$$

quod fieri nequit, nisi $\alpha = 0$, vel $\alpha \frown 0$; nam $b - y \frown 0$, adeoque etiam

$$b - y - \omega \frown 0,$$

quia $\omega \frown 0$; et si $b - y$ dicatur $\lambda$, etiam $\lambda - \omega \frown 0$ (per 2.). Idem patet, si $\omega = 0$, et idem si $x = a$.

5. *Si* $p > x > q$, *et* $p - q \frown 0$; *etiam* $p - x \frown 0$ *et* $q - x \frown 0$.

Nam

$$p - x < p - q.$$

6. *Si* $n$ *integer sit, et* $n \frown \infty$, *tum* $\frac{n \pm 1}{n} \frown 1$.

Nam differentia ipsius 1 ab $\frac{n \pm 1}{n}$ est $\frac{\pm 1}{n}$, quod tendit ad zero.

Patet loco unitatis quodvis finitum $a$ poni posse. Nam accipiatur integer $k > a$, et ponatur $kn$ pro $n$: erit

$$1 - \frac{kn \pm k}{kn} = \mp \frac{1}{n}.$$

7. *Ita* $\frac{n}{n \pm 1} \frown 1$.

Nam differentia ipsius $\frac{n}{n \pm 1}$ ab 1 est

$$\frac{n \pm 1 - n}{n \pm 1} = \pm \frac{1}{n \pm 1},$$

quod tendit ad zero.

Patet etiam, ut in præcedentibus, quod $\frac{n}{n \pm k} \frown 1$.

8. *Si* $a$ *constans sit, et integer* $s \frown \infty$, *atque*

$$\frac{r+1}{s}a > x > \frac{ra}{s},$$

*tum* $x - \frac{ra}{s} \frown 0$, (per 5.).

Nam

$$\frac{r+1}{s}a - \frac{ra}{s} = \frac{a}{s},$$

quod tendit ad zero.

Hinc etiam (per 4.), si $x \frown \alpha$ et $\frac{ra}{s} \frown \beta$, est $\alpha = \beta$.

9. *Ordo factorum non mutat factum.*

*Sint prius factores integri.* De duobus demonstratum est, unde via de $n$ ad $n+1$ ad quotvis assurgere licet modo sequenti.

Si constet de numero $n$ integrorum $a, b, c, d$, et accedat novus $e$, qui sit claritatis gratia 3: erit loco primo aut $e$ aut alia litera. Sit prius $e$ loco primo. Erit

$$abcde = e . abcd,$$

(multiplicationem a dextra sinistrorsum peragendo). Sit enim $abcd$ æquale $P$, erit $e . abcd$ æquale $3P$; vero

$$de = ed = 3d = d + d + d,$$

et multiplicando per sequens $c$ prodibunt tres eiusmodi imagines, quarum una solum fuisset, si $e$ non adfuisset; et idem continuando usque ad $a$ prodibunt

$$abcd + abcd + abcd = 3P.$$

Prodit autem per hypothesim $P$ ex $abcd$ quocunque ordine; itaque si factor $(n+1)$-tus primum vel ultimum locum teneat, utcunque permutentur ceteri, factum idem est. Sit iam quævis alia litera, ex. gr. $c$ loco primo; reliquæ numero $n$, utvis dispositæ, idem factum dant, ac si $c$ loco ultimo esset; erit igitur factum et tum $3P$.

Imo utcunque discerpta factorum imagine, factum idem est. Sit ex. gr.

$$ab = \alpha, \quad cde = \beta;$$

est

$$\alpha . \beta . f = abcdef.$$

Ponatur enim $\alpha$ ad finem; erit $cdef\alpha = cd.efab$, (multiplicationem item a dextra incipiendo); est vero

$$cdef\alpha = \alpha cdef,$$

ita

$$\alpha fcde = \alpha f\beta = \alpha\beta f;$$

inde semper ad uno plura concludendo patet, quicunque e factoribus post se invicem ponantur, ut hoc pacto novi factores $\alpha, \beta, \ldots$ exoriantur, vel omnes vel aliqui, et hos utvis dispositos factum idem dare.

Verum *etiamsi non fuerint integri, factum idem erit.*

Sint *prius* duo *factores* $a, b$. Aut est uterque cum unitate commensurabilis, aut non; si non, aut unus tantum, aut neuter est.

Mensuratis quoad I, sit in casu primo, (pro $a', b', n$ integris)

$$a = \frac{a'}{n}, \qquad b = \frac{b'}{n},$$

in secundo

$$a = \frac{a'}{n}, \qquad b = \frac{b'}{n} + t, \quad t < \frac{1}{n},$$

in tertio

$$a = \frac{a'}{n} + z, \quad b = \frac{b'}{n} + t, \quad z < \frac{1}{n}, \quad t < \frac{1}{n},$$

et construantur schemata (§ 28.) pro duobus posterioribus; (primus enim ex (XX. 3, 4) etiam liquet).

Sit prius $b$ multiplicator, dein multiplicandus, et $n, u$ sint in singulis quatuor casibus $n$, $\frac{1}{n}$, $m$ vero sit $b'$, ubi $b$ (et $a'$, ubi $a$) multiplicator est, $v$ autem sit $\frac{a}{n}$, ubi $a$ $\left(\frac{b}{n}\right.$, ubi $\left.b\right)$ multiplicandus est. Erit (per § 28.)

$$n.\frac{1}{n} = 1, \quad b'.\frac{1}{n} \sim b; \quad n.\frac{a}{n} = a, \quad b'.\frac{a}{n} \sim b.a,$$

$$n.\frac{1}{n} = 1, \quad a'.\frac{1}{n} = a; \quad n.\frac{b}{n} = b, \quad a'.\frac{b}{n} = a.b,$$

$$n.\frac{1}{n} = 1, \quad b'.\frac{1}{n} \sim b; \quad n.\frac{a}{n} = a, \quad b'.\frac{a}{n} \sim b.a,$$

$$n.\frac{1}{n} = 1, \quad a'.\frac{1}{n} \sim a; \quad n.\frac{b}{n} = b, \quad a'.\frac{b}{n} \sim a.b.$$

Est vero (substitutis valoribus) $b'.\frac{a}{n}-a'.\frac{b}{n}$ in duobus prioribus

$$=b'\frac{a'}{nn}-a'\left(\frac{b'}{nn}+\frac{t}{n}\right)=-\frac{a't}{n};$$

in duobus posterioribus autem est

$$=b'\left(\frac{a'}{nn}+\frac{z}{n}\right)-a'\left(\frac{b'}{nn}+\frac{t}{n}\right)=\frac{b'z}{n}-\frac{a't}{n};$$

ubi $\frac{a'}{n}$, $\frac{b'}{n}$ manent integro quodam minora, secus enim $a$, $b$ continerent unitatem omni dabili pluries. (Est nempe $a=\frac{a'}{n}+z$, ubi $z=0$, vel $z\frown 0$).

Itaque differentia utraque tendit ad zero (1. 2.), consequenter (4.) duo priora facta sunt æqualia et pariter duo posteriora.

Est etiam

$$b'\frac{a}{n}-\frac{b'a'}{nn}\frown 0,$$

quia

$$b'\frac{a}{n}=b'\left(\frac{a'}{nn}+\frac{z}{n}\right),$$

adeoque pro $a$ incommensurabili differentia $\frac{b'z}{n}$ tendit ad zero, quia (ut antea) $\frac{b'}{n}$ integro certo minus manet, vero $z\frown 0$. Itaque differentia tendit ad zero (1.), aut $=0$ pro $z=0$; consequenter (4.) $\frac{a'b'}{nn}$ est $=ab$, vel $\frac{a'b'}{nn}\frown ab$, atque factum aut $\frac{a'b'}{nn}$, aut huius limes unicus est [XXIII].

Ita de duo ad tres et de quotvis ad uno plura progrediendo, si $\frac{a'b'c'\ldots g'}{nnn\ldots n}=abc\ldots g$, vel $\frac{a'b'c'\ldots g_{\prime}}{nnn\ldots n}\frown abc\ldots g$; etiamsi novus $h$ accedat, (retinendo modum demonstrationis) erit $\frac{a'b'\ldots g'h'}{nn\ldots nn}=ab\ldots gh$, aut gaudens eodem limite.

Nam $a'b'\ldots g'$ dicatur $\alpha$, $nn\ldots n$ sit $\beta$, et $ab\ldots g$ sit $\gamma$; erit $\frac{\alpha}{\beta}=\gamma$, vel $\frac{\alpha}{\beta}\frown\gamma$ et $\frac{\alpha h'}{\beta n}=\gamma h$, vel $\frac{\alpha h'}{\beta n}\frown\gamma h$.

Si $a'b'\ldots g'$ aliter ordinentur, manifesto etiam a dextra literæ eiusdem nominis eodem ordine valebunt; et cum factores integri utvis permutati factum idem dent, patet *factores quotvis (etsi omnes incommensurabiles sint) quocunque ordine factum idem dare.* Interim factum e commensurabili et incommensurabili incommensurabile, ex incommensurabilibus vero et commensurabile et incommensurabile esse posse facile patet; ex. gr. inferius

$$\sqrt{2}.\sqrt{2}=2, \quad \text{et} \quad \sqrt{3}.\sqrt{2}=\sqrt{6},$$

et $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ incommensurabilia esse mox dicetur.

10. *Factor $b$ (excepto, si o sit) cum nullo factore $a+c$ (pro $c$ non o) factum illi, quod cum $a$ producit, aequale efficit.*

Nam in schemate primo pro $\frac{b'a}{n}=ab$ vel $\frac{b'a}{n}\frown ab$ prodiret

$$b'.\frac{a}{n}+b'.\frac{c}{n}=ab \text{ vel } b'.\frac{a}{n}+b'.\frac{c}{n}\frown ab.$$

Crescit vero $\frac{b'}{n}$ sine fine manens tamen certo integro minus (ut in 9.), adeoque $\frac{b'c}{n}$ gaudet limite [VI.]; sit is $l$; erit [per XXV., 3.]

$$b'.\frac{a}{n}+b'.\frac{c}{n}=ab+l \text{ vel } b'.\frac{a}{n}+b'.\frac{c}{n}\frown ab+l;$$

$l$ vero non est o; nam $\frac{b'c}{n}$ crescit et non fit quovis dabili minus.

11. *Si $x=a$ vel $x\frown a$ et $y\frown b$: tum $xy\frown ab$.*

Nam sit

$$x=a+\omega, \quad y=b+\lambda,$$

atque [ut in 9.]

$$\omega=\frac{\omega'}{n}+r, \quad \lambda=\frac{\lambda'}{n}+s,$$

adeoque

$$x=\frac{a'+\omega'}{n}+z+r, \quad y=\frac{b'+\lambda'}{n}+t+s,$$

ubi cum $z, r, t, s$ tendunt ad limitem zero, et $z+r=p\frown o$, $t+s=q\frown o$; et construantur schemata (ut in præcedentibus) $a''$ pro $a'+\omega'$ et $b''$ pro $b'+\lambda'$ ponendo. Erit pro quibusvis certis valoribus ipsorum $x, y$ et ipsorum $n, m, u, v$ vices $n, a'', \frac{1}{n}, \frac{y}{n}$ subeuntibus

$$n\frac{1}{n}=1,\quad a''.\frac{1}{n}\frown x;\quad n.\frac{y}{n}=y,\quad a''.\frac{y}{n}\frown xy,$$

ubi item (e præcedentibus) $\frac{a''y}{n}-\frac{a'b'}{nn}\frown 0$; nam substitutis valoribus erit hoc

$$(a'+\omega')\left(\frac{b'+\lambda'}{nn}+\frac{q}{n}\right)-\frac{a'b'}{nn}=$$
$$=\frac{a'\lambda'}{nn}+\omega'\frac{b'+\lambda'}{nn}+(a'+\omega')\frac{q}{n},$$

ubi manifesto $\frac{a'}{n}$, ita $\frac{a'+\omega'}{n}$ atque $\frac{b'+\lambda'}{n}$ manet (ut in præcedentibus) minus certo integro, vero $q\frown 0$, ita etiam $\frac{\omega'}{n}\frown 0$, dum $x\frown a$, nam tum $\omega\frown 0$; ita $\frac{\lambda'}{n}\frown 0$ dum $y\frown b$, eritque (1., 2.) differentia gaudens limite zero. Consequenter etiam $xy$ (seu per præcedentia $yx$) gaudet limite $ab$; nempe pro dato quovis $N$ potest tale $x, y, n$ accipi, ut sit:

$$ab-xy<\frac{1}{N}.$$

Si $x=a$, tum $\omega=0$, et idem patet.

Unde etiam de quotvis ad uno plura (ut supra) progrediendo evidens fit, *quotvis factorum ad limites tendentium facti limitem esse factum limitum.*

12. *Si $A$ per $B$ dividendum sit, erit quotus $q$ unicus (excepto, si divisor 0 sit);* et $\frac{A}{q}=B$, atque $A=Bq$, et $\frac{A}{B}.B=A$, item $\frac{A}{q}=A.\frac{1}{q}$.

Mensuretur enim $A$ per $B$, sitque $\frac{B}{m}=A$, et $nv=A$. vel $nv\frown A$, ac construatur schema (§ 28); erit (pro $n, m$ integris et $u=\frac{1}{m}$, $v=\frac{B}{m}$)

$$m.\frac{1}{m}=1,\quad n.\frac{1}{m}\eqsim q;\quad m.\frac{B}{m}=B,\quad n.\frac{B}{m}\eqsim A,$$

ubi $q$ dari constat (ex XXII.) et patet (ex § 27.) esse

$$q=\frac{A}{B},\quad \text{et}\quad Bq=A,\quad \text{et}\quad \frac{A}{q}=B;$$

neque $B$ cum ullo factore alio factum $A$ efficit, etsi loco secundo stet

(10.); item cum idem $q$ per $B$ multiplicatum sit $A$, est (in casu incommensurabilitatis quoque) $\frac{A}{B}.B$ æquale $A$.

Quod vero $\frac{A}{q}$ sit æquale $A\frac{1}{q}$, patet sic. Mensuretur 1 per $q$ et sit $M\frac{q}{n}\backsim 1$; erit schema sequens:

$$n\frac{1}{n}=1,\quad M\frac{1}{n}\backsim\frac{1}{q};\quad n\frac{q}{n}=q,\quad M\frac{q}{n}\backsim 1;$$

nempe loco secundo quotus ex 1 per $q$ diviso prodit. Multiplicetur iam $A$ per $\frac{1}{q}$; erit

$$n\frac{1}{n}=1,\quad M\frac{1}{n}\backsim\frac{1}{q};\quad n\frac{A}{n}=A,\quad M\frac{A}{n}\backsim\frac{A}{q}=B;$$

erat enim superius

$$A=Bq,$$

adeoque

$$\frac{MA}{n}=\frac{MBq}{n};$$

sed $\frac{Mq}{n}\backsim 1$; consequenter (11.):

$$\frac{Mq}{n}.B=\frac{MA}{N}\backsim B.$$

Patet etiam esse

$$B:A=\frac{1}{q}=1:\frac{A}{B}.$$

13. *Si $mu=B$ vel $mu\backsim B$, et $nu=A$, atque $mv=D$ vel $mv\backsim D$, et $nv=C$, tum*

$$A:B=C:D,$$

*adeoque proportio ita designari. Atque si*

$$B:A=Q$$

*sit, $B$ per $AQ$ et $D$ per $CQ$ exprimi poterit. Conversim quoque si*

$$A:B=C:D,$$

*aut*

$$B=AQ\quad\text{et}\quad D=CQ,$$

*proportio est.*

Nam mensurato $A$ per $B$, construatur schema divisionis (pro $A:B=q$ et pro $B:A=Q=\frac{1}{q}$ in præcedentibus)

$$m\frac{1}{m}=1,\quad n\frac{1}{m}\frown q;\quad m\frac{B}{m}=B,\quad n\frac{B}{m}\frown A;$$

$$n\frac{1}{n}=1,\quad m\frac{1}{n}\frown Q;\quad n\frac{A}{n}=A,\quad m\frac{A}{n}\frown B.$$

Nempe

$$n\frac{B}{m}=n\frac{mu}{m}+\frac{n\omega}{m}=$$
$$=nu+\frac{n\omega}{m}$$

(pro $B=mu+\omega$), ubi item $\frac{n}{m}$ manet minus certo integro (ut supra), $\omega$ vero adeoque et $\frac{n\omega}{m}$ tendit ad zero (XXV., 1.). Est igitur in hoc casu $q$ æquale $\frac{A}{B}$, et item $q$ prodit pro $\frac{C}{D}$, cum (ut antea) $q$ unicum sit. Si $\omega=0$ sit, tum pro signo limitis erit signum æqualitatis, et

$$q=\frac{n}{m}=\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

Conversim quoque, si

$$A:B=q,\quad C:D=q,$$

tum proportio est.

Nam si $q$ loco secundo stet, schema prius esse debet, ubi patet esse

$$m\frac{B}{m}=B,\quad n\frac{B}{m}\eqsim A,$$

adeoque

$$mu'=B,\quad nu'\eqsim A,\qquad \left[\text{pro } u'=\frac{B}{m}\right];$$

ita pro $C, D$ prodit

$$mv'=D,\quad nv'\eqsim C,\qquad \left[\text{pro } v'=\frac{D}{m}\right].$$

Patet etiam e schemate secundo, quod, si proportio sit, $Q$ sit quotus ex $B$ per $A$, et pariter ex $D$ per $C$ divisis; atque

$$B=AQ,\quad D=CQ.$$

Conversim si $B = AQ$ sit, schema posterius esse debet; pariter si $D = CQ$; adeoque cum sit

$$A = n\frac{A}{n},\quad m\frac{A}{n} \frown B;\quad n\frac{C}{n} = C,\quad m\frac{C}{n} \frown D,$$

proportio est.

Si $q$ loco tertio stet, tum quoque factorem alterum eundem esse oportet (10.).

14. *Si $x \frown a$ et $y \frown b$, et nec $y = 0$, nec $b = 0$; tum $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{b}$, $\frac{a}{y}$ tendunt ad limitem $\frac{a}{b}$.*

Nam denotationibus (11.) retentis construantur schemata divisionum quotis $A, B, C, D$ pro $\frac{a}{b}$, $\frac{x}{b}$, $\frac{a}{y}$, $\frac{x}{y}$ dictis. Erit:

$$\begin{array}{llll}
b'.\frac{1}{b'} = 1, & a'.\frac{1}{b'} \frown A; & b'.\frac{b}{b'} = b, & a'.\frac{b}{b'} \frown a, \\
b'.\frac{1}{b'} = 1, & a''.\frac{1}{b'} \frown B; & b'.\frac{b}{b'} = b, & a''.\frac{b}{b'} \frown x, \\
b''.\frac{1}{b''} = 1, & a'.\frac{1}{b''} \frown C; & b''.\frac{y}{b''} = y, & a'.\frac{y}{b''} \frown a, \\
b''.\frac{1}{b''} = 1, & a''.\frac{1}{b''} \frown D; & b''.\frac{y}{b''} = y, & a''.\frac{y}{b''} \frown x.
\end{array}$$

Nempe in (11.) erat:

$$x = a''\frac{1}{n} + p = \frac{a' + \omega'}{n} + p$$

et

$$y = b''\frac{1}{n} + q = \frac{b' + \lambda'}{n} + q;$$

inde dum $x$ certum (omnino determinatum aliquod) cum ei respondente $y$ dividitur, juxta integros $b''$, $a''$ construi schema potest, pro $n, m, u, v$ accipiendo $b''$, $a''$, $\frac{1}{b''}$, $\frac{y}{b''}$; quod vero semel prodit, ei inæquale nullo alio modo prodire potest (10.). Si vero in aliqua linea alicubi signum $=$ loco signi $\frown$ est, in tota linea signum $=$ est (XXII.), et tum quoque facile patet. Considerentur singulorum ad limitem $B$ vel $C$ vel $D$ tendentium differentiæ ab $\frac{a'}{b'}$ (quod tendit ad limitem $A = \frac{a}{b}$), necnon eorum, quæ ad $a$, respective $x$ tendere dicuntur, differentiæ ab $a$, respective $x$. Est

$$a' . \frac{b}{b'} = a'\left(\frac{b'}{nb'} + \frac{t}{b'}\right) = \frac{a'}{n} + \frac{a't}{b'},$$

et

$$a = \frac{a'}{n} + z,$$

differentia enim eorum

$$a - a' . \frac{b}{b'} = z - \frac{a't}{b'},$$

quod tendit ad limitem o (ut supra).

Ita est

$$a'' . \frac{b}{b'} = (a' + \omega')\left(\frac{b'}{nb'} + \frac{t}{b'}\right)$$
$$= \frac{a'+\omega'}{n} + \frac{a'+\omega'}{b'} t,$$

cuius differentia ab $x$ tendit ad o, quia $p$ et $t$ tendunt ad o, et $\frac{a'+\omega'}{b'}$ manet certo finito minus; secus enim

$$\frac{a'+\omega'}{n} : \frac{b'}{n} = x - p : b - t$$

quovis integro maius fieret, et hoc ab eo omni dabili pluries contineretur.

Ita

$$a' . \frac{y}{b''} = \frac{a'(b'+\lambda')}{(b'+\lambda')n} + \frac{a'q}{b'+\lambda'},$$

et

$$a = \frac{a'}{n} + z;$$

differentia enim eorum:

$$a - a' . \frac{y}{b''} = z - \frac{a'q}{b'+\lambda'},$$

ubi item $q$ et $z$ tendunt ad o, et (ut prius) $\frac{a'}{b'+\lambda'}$ manet integro quodam minus, adeoque differentia (ut supra) limite o gaudet.

Atque demum

$$a'' . \frac{y}{b''} = \frac{a'+\omega'}{b'+\lambda'}\left(\frac{b'+\lambda'}{n} + q\right),$$

et

$$x = \frac{a'+\omega'}{n} + p,$$

quorum differentia:

$$x - a''.\frac{y}{b''} = p - \frac{a'+\omega'}{b'+\lambda'} q,$$

ubi item $p$ et $q$ tendunt ad o et $\frac{a'+\omega'}{b'+\lambda'}$ manet (ut prius) integro quodam minus.

Consequenter tendentiæ quartorum ad limitem rite positæ, et $A, B, C, D$ quoti et quidem unici sunt (10.), exceptione ibidem facta.

Sunt autem $A, B, C, D$ æqualia. Nam (pro $\alpha$, $\beta$, $h$, $k$ ad limitem o tendentibus) est

$$A = \frac{a'}{b'} + \alpha, \quad B = \frac{a''}{b'} + \beta,$$

$$C = \frac{a'}{b''} + h, \quad D = \frac{a''}{b''} + k,$$

atque

$$D - A = \frac{a'+\omega'}{b'+\lambda'} + k - \frac{a'}{b'} - \alpha = \frac{\omega' b' - a'\lambda'}{b'(b'+\lambda')} + k - \alpha,$$

ubi $\frac{\omega'}{b'} \rightharpoondown 0$ et $\frac{\lambda'}{b'} \rightharpoondown 0$, dum $x \rightharpoondown a$, ac $y \rightharpoondown b$; $\frac{b'}{b'+\lambda'}$ vero et $\frac{a'}{b'+\lambda'}$ certo integro minus manet. Itaque differentia ista tendit ad o, quia et $k \rightharpoondown 0$ et $\alpha \rightharpoondown 0$.

Pariter quotorum ceterorum limites ipsi $\frac{a}{b}$ esse æquales patet.

XXVI. In præcedenti schemate primo divisor $b$ non erat o; si tamen $y$ non sit quidem o, sed $y \rightharpoondown 0$, manifesto quotus omni dabili maior fiet: ponatur nempe in schemate tertio ex $y$ fieri $\frac{y}{n}$, fiet $\frac{a'y}{b''}$ æquale $\frac{na'y}{nb''}$; itaque ex $a'$ fiet $na'$, et ex $\frac{a'}{b'}$ fiet $\frac{na'}{b'}$, quod si $n$ tendat ad infinitum, fiet omni dabili maius. Et hinc sensu (§ 32, pag. 46) fit $\frac{1}{0} = \infty$.

Ita si $y$ crescat, fiatque $ny$ ex $y$, fiet $\frac{b''ny}{nb''}$ ex $\frac{b''y}{b''}$, ac $\frac{a'ny}{nb''}$ tendet ad $a$; et loco secundo fiet $\frac{a'}{nb''}$, quod tendit ad o, si $n$ tendat ad $\infty$; et $nb''.\frac{1}{nb''} = 1$, atque $\frac{a}{\infty} = 0$, sensu (§ 32. pag. 46).

Posset quidem definitio ita extendi, ut omnia hæc aliaque comprehendantur; si quid elegantiæ simplici labem aliquam adferre deposceret.

Quæstio alia est: si tam $x \rightharpoondown 0$, quam $y \rightharpoondown 0$, num $\frac{x}{y}$ limite et quonam gaudeat? Ex. gr. sit

$$x = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{n+1};$$

est

$$\frac{x}{y} = \frac{n+1}{n}$$

quod gaudet limite 1, si $n \rightharpoondown \infty$, quamvis tunc $\frac{1}{n} \rightharpoondown 0$ et $\frac{1}{n+1} \rightharpoondown 0$.

Etiam tunc quidem verum est, limitem ipsius $\frac{x}{y}$ esse quoto limitum æqualem, in quantum $\frac{0}{0}$ cuilibet æquale est (§ 32.); sed quisnam sit valorum innumerabilium quæsitus, infra dicetur. De casu tantum maximi momenti speciali, ubi pro $x$ et $y$ ad limitem 0 tendentibus $\frac{x}{y}$ limite 1 gaudet, aliquid heic prævie addere libet.

XXVII. Si lege certa simul variatorum $u, u', v, v', t, t'$ plura occurrant, simultanea intelligantur, et maioritas sensu (§ 21.) accipiatur.

1. *Si* $\frac{u}{u'} \rightharpoondown 1$, *id est pro quovis utvis magno* $N$ *dentur talia* $u, u'$, *ut sit* $\frac{u}{u'} - 1 < \frac{1}{N}$, *tum*:

$$\frac{u-u'}{u'} < \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad u - u' < \frac{u'}{N}.$$

Hinc si $u - u'$ dicatur $\omega$, datur

$$\omega < \frac{u'}{N},$$

et tum

$$N\omega < u', \quad \text{atque} \quad \frac{\omega}{u'} < \frac{1}{N}.$$

2. *Si* $\frac{u}{u'} \rightharpoondown 1$, *etiam* $\frac{u'}{u} \rightharpoondown 1$.

Erat enim $u - u' = \omega$, adeoque

$$u = u' + \omega, \quad \text{et} \quad u' = u - \omega,$$

itaque

$$\frac{u'}{u} = \frac{u-\omega}{u} \quad \text{et} \quad \frac{u'}{u} - 1 = -\frac{\omega}{u'+\omega}.$$

Sed $u' > N\omega$, itaque

$$u' + \omega > (N-1)\omega,$$

(etsi $\omega$ et $u'$ opposita essent). Consequenter

$$\frac{\omega}{u'+\omega} < \frac{1}{N-1}$$

est, et cum $N$ utvis augere liceat,

$$\frac{u'}{u} - 1 \sim 0.$$

3. *Si pro dato quovis* $N$ *potest* $\omega' < \frac{u}{N}$ *fieri, ac* $\frac{u}{u'} \sim 1$, *tunc etiam* $\frac{u+\omega'}{u'} \sim 1$. Nam

$$\frac{u+\omega'}{u'} = \frac{u'+\omega+\omega'}{u'}$$

unde subtracto 1 manet $\frac{\omega+\omega'}{u'}$; sed $\frac{\omega}{u'} \sim 0$ (ex 1.) et $\omega' < \frac{u}{N}$, adeoque

$$\frac{\omega'}{u'} < \frac{u}{Nu'} = \frac{1}{N} \cdot \frac{u}{u'},$$

quod (XXV, 11.) tendit ad 0; nam $\frac{1}{N} \sim 0$, $\frac{u}{u'} \sim 1$; consequenter $\frac{\omega+\omega'}{u'} \sim 0$.

4. *Hinc* (per 2.) *etiam* $\frac{u'}{u+\omega} \sim 1$. *Imo si et* $\lambda < \frac{u'}{N}$ *fieri potest, etiam* $\frac{u'+\lambda}{u+\omega} \sim 1$. (Per præcedentia.)

5. *Si* $\frac{u}{u'} \sim 1$, *ac* $\frac{v}{v'} \sim 1$, *etiam* $\frac{u+v}{u'+v'} \sim 1$.

Nam $v - v'$ dicatur $k$; erit

$$\frac{u+v}{u'+v'} = \frac{u'+\omega+v'+k}{u'+v'},$$

unde subtracto 1 manet $\frac{\omega+k}{u'+v'}$; sed $\omega < \frac{u'}{N}$, ita $k < \frac{v'}{N}$ fieri (ex 1.) potest; et hinc

$$\frac{\omega+k}{u'+v'} < \left(\pm\frac{u'}{N} \pm \frac{v'}{N}\right) : (u'+v'),$$

id est

$$\frac{\omega+k}{u'+v'} < \frac{1}{N}$$

fieri potest. — Si vero de $m$ eiusmodi quotis valet, valet etiam de $m+1$. Sit enim $(m+1)$-tus $\frac{p}{p'}$, et $\frac{z}{z'}$ quod ex $m$ quotis prodiit; tum quoque $\frac{z+p}{z'+p'} \to 1$.

6. *Si* $\frac{u}{u'} \to 1$, *ac* $\frac{v}{v'} \to 1$, *etiam* $\frac{u\,v}{u'v'} \to 1$.

Nam

$$\frac{u\,v}{u'v'} = \frac{u'+\omega}{u'} \cdot \frac{v'+k}{v'} = \frac{u'v'+\omega v'+u'k+\omega k}{u'v'},$$

unde subtracta unitate manet

$$\frac{u\,v}{u'v'} - 1 = \frac{\omega v'+u'k+\omega k}{u'v'} = \frac{\omega}{u'} + \frac{k}{v'} + \frac{\omega k}{u'v'},$$

quod tendit ad o; nam $\frac{\omega}{u'} \to 0$ (ex 1.) ita $\frac{k}{v'}$, adeoque et

$$\frac{\omega}{u'} + \frac{k}{v'} + \frac{\omega k}{u'v'}$$

tendit ad o (XXV, 11).

Et hic (ut in præc.) de $m$ ad $m+1$ progrediendo, patet quotcunque quotorum ad limitem tendentium factum ad limitem 1 tendere.

7. *Si* $\frac{u}{u'} \to 1$, *ac* $\frac{u'}{v} \to 1$, *etiam* $\frac{u}{v} \to 1$.

Nam tunc etiam $\frac{u\,u'}{u'v} \to 1$, consequenter $\frac{u}{v} \to 1$.

XXVIII. Sæpe quotus formæ $\frac{\alpha\beta\gamma\ldots}{abc\ldots}$ occurrit; sive plures sive pauciores fuerint superius literæ quam inferius, et sive omnes commensurabiles fuerint, sive non, utcunque discerptis permutatisque factoribus superius inferiusve, quotus idem prodit. Ex. gr.

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{abc} = \frac{\beta}{a} \cdot \frac{\alpha}{cb} \cdot \gamma = \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\gamma}{a} = \gamma\alpha\beta . \frac{1}{abc}.$$

Nam si (pro integris $\alpha', \beta', \gamma', a', b', c', n$)

$$\frac{\alpha'}{n} \to \alpha, \quad \frac{\beta'}{n} \to \beta, \quad \frac{\gamma'}{n} \to \gamma, \ldots$$

$$\frac{a'}{n} \frown a, \quad \frac{b'}{n} \frown b, \quad \frac{c'}{n} \frown c, \ldots$$

tum

$$\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{nnn} \frown \alpha\beta\gamma, \text{ et } \frac{a'b'c'}{nnn} \frown abc,$$

(XXV, 9. pag. 84); et

$$\begin{aligned}\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{nnn} : \frac{a'b'c'}{nnn} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{a'b'c'} &= \\ &= \left(\frac{\beta'}{n} : \frac{a'}{n}\right)\left(\frac{\alpha'}{n} : \frac{c'b'}{nn}\right)\frac{\gamma'}{n} = \\ &= \left(\frac{\beta'}{n} : \frac{c'}{n}\right)\left(\frac{\alpha'}{n} : \frac{b'}{n}\right)\left(\frac{\gamma'}{n} : \frac{a'}{n}\right) = \\ &= \frac{\gamma'\alpha'\beta'}{nnn}\left(1 : \frac{a'b'c'}{nnn}\right),\end{aligned}$$

quod $\frown \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}$ (XXV, 14.); nempe tot $n$ prodibunt ut factores superius, quot inferius, iis, qui sub literis inferioribus sunt, supra, et iis, qui sub superioribus sunt, infra cadentibus; atque literæ superiores accento insignitæ constituunt dividendum, inferiores divisorem; adeoque utcunque discerpantur, prodibit quoto ad limitem dictum tendenti æquale. Idem ad quotvis extendi patet.

At quæritur; quidsi integrorum dictorum quilibet aliquo signorum $+$, $-$ afficiantur?

1. $\frac{\vdash\!\!-\alpha'}{n}$ gaudet limite negativo; nam si $\frac{\vdash\!\!-\alpha'}{n}$ tendat ad $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv\alpha$,

$$\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv\alpha - \left(\frac{\vdash\!\!-\alpha'}{n}\right) = \vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv\alpha \vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv \frac{\alpha'}{n}$$

non tendit ad 0.

2. Quocunque signo afficiatur quodvis eorum $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$, quovis ordine, signum facti idem prodibit. Nam quæ signo $+$ gaudent, factum reliquorum non mutant, quocunque illa inserantur; itaque nonnisi de $-$ quæritur; si numero pari adsint, cum reliqui utcunque misceantur, signum non mutent; erit factum idem, quam si post omnia $+$ ponerentur omnia $-$; ita si præter signo $+$ gaudentia maneant signo $-$ gaudentia numero impari.

3. In tali quoto vero (qui sit ex. gr. $-$, ita si $+$ sit patet) erunt

quoti dicti (factores partiales novi) aut aliqui signo — gaudentes, aut non; in casu primo erunt hi aut numero pari aut impari; fit vero hoc, quoties dividendi divisorisque signa contraria sunt; si hoc numero pari sit, factum dividendorum illorum et factum divisorum illis respondentium signo eodem gaudebunt; nam ubi dividendus + habet, divisor — habere debet, et ubi is +, hic — habet, ut quotus — habeat; adeoque si + sit numero $m$, et — numero $m'$ superius, erit — numero $m$, et + numero $m'$ inferius; et si $m$ par sit, etiam $m'$ par, si $m$ impar, etiam $m'$ impar esse debet, (ut numerus eorum par prodeat); si $m$ par sit, factum et supra et infra + habebit, si $m$ impar sit, factum superius ex $m'$ prodibit —, manens — etiam per $m$, infra pariter ex $m$ (impari) prodibit —, manens per $m'$. Signum quoti vero, ex his quotis tanquam factoribus prodeuntis, per factores reliquos signo + gaudentes relinquitur; uti etiam signum facti e dividendis cum signo facti e divisoribus manet idem; (nam in quovis reliquorum supra et infra signum idem est); atque adeo factum superius primum per factum inferius primum divisum daret + (contra hypothesim); *quamobrem quoti dicti (ut factores partiales) signo — gaudentes, numero pari esse nequeunt*; sunt igitur numero impari, et tum etiam hoc pacto signum — prodit. Reliqua pariter patent.

XXIX. *Quod potentia possibilis sit*, (§ 34, pag. 50), sive commensurabile sit $q$, sive non et sive positivum, sive negativum, patet sic.

1. Si $q$ integer sit, erit ex. gr. $a^2 = aa$, si

$$\frac{aaaa}{aa} = \frac{AAA}{AA}, \quad (\text{seu } aa = A),$$

et dicitur per definitionem

$$a^{\frac{4-2}{3-2}} = A,$$

atque

$$a = \sqrt[2]{A},$$

(seu brevius $\sqrt{A}$); ita

$$a = A^{\frac{3-2}{4-2}} = A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}.$$

Ita pro $m$ integro positivo est

$$\sqrt[m]{A}=A^{\frac{1}{m}}=a\,,\quad \text{si}\quad a^m=A\,,$$

Est etiam

$$\sqrt[m]{a^m}=\sqrt[m]{A}=a.$$

*Si vero* $a=\frac{b}{c}$, *tum* $a^m=\frac{b^m}{c^m}$.

Nam tum $\frac{b}{c}$, adeoque tam $b$ superius, quam $c$ inferius (per præced.) ponitur $m$-ies.

Est etiam conversim

$$\sqrt[m]{\frac{b^m}{c^m}}=\frac{\sqrt[m]{b^m}}{\sqrt[m]{c^m}}=\frac{b}{c}\,,$$

nam

$$\left(\frac{b}{c}\right)^m=\frac{b^m}{c^m}.$$

2. Si $\frac{aaa}{aa}$ sit $\frac{AAA}{AA}$, adeoque $a=A$, tum

$$a^{\frac{3-2}{3-2}}=A=a=a^1\,,$$

et

$$\sqrt[1]{a}=a.$$

Patet autem quotcunque factores sive ad sinistram sive ad dextram adnecti posse, dummodo tam superius quam inferius numero eodem sint.

3. Si $\frac{aa}{aa}=\frac{AAA}{AA}$ [seu $1=A$], tum

$$a^{\frac{2-2}{3-2}}=a^0=1,$$

et

$$\sqrt[0]{1}=a,$$

adeoque quantitati cuilibet æquale.

4. Si $\frac{aa}{aaaa}=\frac{AAA}{AA}$, (seu $\frac{1}{aa}=A$), tum

$$a^{\frac{2-4}{3-2}}=A=a^{-2}$$

et per definitionem

$$\sqrt[-2]{A}=a\,;$$

et

$$\frac{1}{A} = aa,$$

adeoque (per 1.) est

$$\frac{1}{\sqrt[2]{A}} = a$$

nempe

$$a = \sqrt[2]{\frac{1}{A}} = \sqrt[-2]{A}.$$

Si vero $\frac{aaaa}{aa} = \frac{AAAAA}{AA}$ (seu $aa = AAA$), tum

$$a^{\frac{4-2}{5-2}} = a^{\frac{2}{3}} = A, \quad \text{et} \quad \sqrt[\frac{2}{3}]{A} = a.$$

Ita si $\frac{aa}{aaaa} = \frac{AAAAA}{AA}$ (seu $\frac{1}{a^2} = A^3$);
est

$$a^{\frac{2-4}{5-2}} = a^{\frac{-2}{3}} = A, \quad \text{et} \quad \sqrt[\frac{-2}{3}]{A} = a.$$

5. Sed quæritur, num detur tale $A$, ut $aa = AAA$? nempe *num pro quovis $K$ positivo et quovis integro $m$ detur tale $k$, ut $k^m = K$?*

Si $K = 0$ sit, tum patet $0^m = K$ esse.

Si non, tum datur tale $z$, ut $z^m < K$, et tale $Z$, ut $Z^m > K$ sit. Nam accipiatur talis integer $n$, ut $\frac{1}{n} < K$, erit

$$\left(\frac{1}{n}\right)^m = \frac{1}{n^m} < \frac{1}{n} < K;$$

item pro integro $N > K$, est

$$N^m > N > K.$$

Itaque (E, pag. 20) datur (Fig. 16.) a $\mathfrak{p}$ incipiendo quantitate usque ad $N > K$ crescente punctum aliquod $*$, intra quod quidvis tale est ut id, quod a $\mathfrak{p}$ eo usque est, ad $m$ elevatum sit $< K$; eritque in $*$ aut *ultimum tale* aut *primum non tale.*

Dicatur $x'$ id, quod a $\mathfrak{p}$ usque in $*$ est; erit, quod a $\mathfrak{p}$ usque ad quidvis intra $*$ est, $x' - \omega$, et, quod a $\mathfrak{p}$ usque ad quidvis ultra $*$ est, $x' + \omega$ (pro $x'$ et $\omega$ positivis). Si $\omega$ tendat ad 0, tum $x' \pm \omega$ tendit ad

$x'$, adeoque $(x' \pm \omega)(x' \pm \omega)$ tendit ad $x'x'$ (XXV, 11. pag. 85) et $(x' \pm \omega)^m$ tendit ad $x'^m$; atque cum $x' + \omega$ ultra $*$ sit, est $(x' + \omega)^m$ aut $= K$, aut $> K$.

Hinc in $*$ non erit ultimum tale, ergo primum non tale, nec enim plus quam $K$ producit; nam si illorum ultimum esset, sit $x'^m = K - b$; si primum non tale eiusmodi esset, sit $x'^m = K + c$, pro $b$ et $c$ constantibus positivis; erit (cum statim demonstretur, crescente factore crescere factum, nisi factor aliquis o sit)

$$(x' + \omega)^m > x'^m > (x' - \omega)^m;$$

sit ($\lambda$ et $\lambda'$ o vel positiva denotantibus)

$$(x' + \omega)^m = K + \lambda, \quad (x' - \omega)^m = K - \lambda';$$

adeoque si

$$x'^m = K - b,$$

erit

$$(x' + \omega)^m - x'^m = K + \lambda - (K - b) = \lambda + b,$$

quod non tendit ad o, cum utrumque positivum et $b$ constans sit.

Si vero

$$x'^m = K + c,$$

tum

$$x'^m - (x' - \omega)^m = K + c - (K - \lambda') = c + \lambda',$$

quod pariter non tendit ad o.

Est igitur $x'^m$ neque $> K$, neque $< K$, adeoque ipsi $K$ æquale est.

6. *Quod crescente factore, crescat factum, (omnibus positivis)* adeoque maius ad idem $m$ elevatum fiat maius, patet inde, quod si manente multiplicando $\alpha$ sit prius multiplicator $\frac{m}{n} + p$, dein $\frac{m+1}{n} + p'$ (ubi $p < \frac{1}{n}$ et $p' < \frac{1}{n}$) erit factum in casu primo $< (m+1)\frac{\alpha}{n}$; in posteriore ve $=$ vel $> (m+1)\frac{\alpha}{n}$, patet vero, quod si $B > A$ fuerit, mensurato quoad 1 utroque, poterit 1 per talem integrum $n$ dividi, ut $\frac{1}{n}$ in $B$ saltem uno pluries contineatur; alioquin si

$$A = \frac{m}{n} + p, \quad B = \frac{m}{n} + p' \quad \left(p < \frac{1}{n}, \quad p' < \frac{1}{n}\right),$$

pro $n \rightharpoonup \infty$, $p \rightharpoonup 0$, $p' \rightharpoonup 0$ et $A = B$. Si etiam $\alpha$ crescat, manifesto adhuc magis crescet factum. Unde patet, maius ad exponentem integrum elevatum dare maius.

Ast etiamsi exponens crescat, dum radix $> 1$, maius prodit. Sit enim $a^{\frac{4}{3}}$ et $a^{\frac{5}{3}}$ (denominatore exponentium prius eodem); erit schema (per præcedentia):

$$\begin{array}{c} a \;.\; a \;.\; a \;.\; a \\ xxx \;.\; xxx \;.\; xxx \;.\; xxx \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c} a \;.\; a \;.\; a \;.\; a \;.\; a \\ xxx \;.\; xxx \;.\; xxx \;.\; xxx \;.\; xxx \end{array}$$

Nempe quodvis $a$ est æquale $x.x.x$, et prima $x$ accipiendo erit

$$x.x.x.x = a^{\frac{4}{3}} \quad \text{et} \quad x.x.x.x.x = a^{\frac{5}{3}},$$

ubi patet unum factorem $x$ accedere; adeoque si $x$ est unitate maius, maius prodire; sed $x$ nonnisi tunc fractio vera est, si $a$ talis sit, quia si $x$ fractio vera est, etiam $xxx$ talis et adhuc minor erit.

Possunt vero *exponentes* (ut fractiones) *ad denominationem eandem reduci valore immutato.*

Sit enim

$$a^{\frac{2}{3}} = x,$$

nempe $aa = xxx$; erit etiam

$$a^{\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}} = x;$$

nám tum

$$a^{2 \cdot 5} = x^{3 \cdot 5},$$

quia

$$\begin{aligned} a^{2 \cdot 5} &= aa \;.\; aa \;.\; aa \;.\; aa \;.\; aa \\ &= xxx \;.\; xxx \;.\; xxx \;.\; xxx \;.\; xxx, \end{aligned}$$

nempe $a^2$ ponitur 5-ies, adeoque $x$ ponitur $3.5$-ies.

Hinc etiam (pro integris $n$ et $m$) est

$$a^n = a^{\frac{n}{1}} = a^{\frac{mn}{m}}.$$

Numeros 2, 3, 5 scilicet quorumque integrorum positivorum vices subire manifestum est.

7. Sit prius $a$ positivum, et (pro integris positivis $n$ et $m$) sit $\frac{n}{m}$ tendens ad limitem $q$, nempe

$$1 = mu, \quad q = nu + \omega, \quad \omega \lessdot u, \quad u \backsim 0.$$

Erit crescente $\frac{n}{m}$ sine fine (pro $a > 1$) semper (per præc.)

$$a^{\frac{n+1}{m}} > a^{\frac{n}{m}}, \quad \text{et} \quad \frac{n+1}{m} > q,$$

atque

$$a^{\frac{n+1}{m}} > a^q.$$

Fiat $n'$ ex $n$, et $m'$ ex $m$; reducendo ad denominationem eandem erit

$$a^{\frac{nm'}{mm'}} < a^{\frac{mn'}{mm'}},$$

nam

$$nm' < mn'.$$

Crescit igitur valor $A$ ipsius $a^{\frac{n}{m}}$ sine fine, manens tamen minor primo $a^{\frac{n+1}{m}}$, itaque $a^{\frac{n}{m}}$ tendit ad limitem aliquem $B$, dum $\frac{n}{m}$ tendit ad $q$; adeoque (per definitionem) est

$$B = a^q, \quad \text{et} \quad a = \sqrt[q]{B}.$$

Si $a = 1$, manifesto $a^{\frac{n}{m}}$ semper unitati æquale erit; nam

$$a^n = 1, \quad \text{et} \quad \sqrt[m]{1} = 1, \quad \text{quia} \quad 1^m = 1;$$

et non erit $A \backsim B$, sed est $A = B = 1$, et cum $a^n$ semper æquale est $B^m$, atque $\frac{n}{m}$ tendit ad $q$, est (per definitionem)

$$a^q = B, \quad \text{id est} \quad 1^q = 1.$$

Si vero $a < 1$ sit, tunc crescente $\frac{n}{m}$ decrescet $a^{\frac{n}{m}}$; nam si $a$ fractio vera sit, crescente $n$ decrescet $a^n$, atque (ut antea ad denominationem eandem reducendo) erit

$$a^{mn'} < a^{m'n} \quad \text{et} \quad \sqrt[mm']{a^{mn'}} < \sqrt[mm']{a^{m'n}},$$

seu

$$a^{\frac{n'}{m'}} < a^{\frac{n}{m}}.$$

Decrescit itaque sine fine $a^{\frac{n}{m}}$, nunquam tamen fiens 0; itaque limite gaudet, qui (per definitionem) est potentia *exponentis $q$ ipsius $a$.*

Si $q$ negativum sit (pro $\frac{n}{m}$ posito $\frac{-n}{m}$), et $a$ positivum sit, erit

$$a^{-n} = A^m,$$

nempe datur tale $A$, ut sit

$$\frac{1}{a^n} = A^m,$$

nimirum

$$A = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}},$$

quod, si $a > 1$, decrescit, cum denominator crescat, nunquam tamen fiens 0; si $a = 1$, semper 1 erit; si $a < 1$, crescet manens tamen certo finito minus, cum denominator limite finito gaudeat. Unde patet et hic dari potentiam exponentis $q$ ipsius $a$.

Hinc etiam, cum $\frac{-n}{m} \smile q$ atque $\frac{n}{m} \smile -q$, est

$$a^q = \frac{1}{a^{-q}}, \quad \text{et} \quad a^{-q} = \frac{1}{a^q}.$$

*Unde potentia e divisore in dividendum poni potest, exponente in oppositum mutato.* Ex. gr.

$$\frac{b}{a} = ba^{-1}.$$

8. Notatu dignum est, quod *quodvis datum $N$ et quaevis fractio vera $f$ sit, tam $\sqrt[m]{N}$ quam $\sqrt[m]{f}$ tendit ad unitatem, si integer $m \smile \infty$.*

Nam quivis integer $n$ sit, est

$$(n+1)^2 > n^2 + 2n,$$

et si

$$(n+1)^i > n^i + in^{i-1}$$

sit, multiplicando per $n+1$ erit

$$(n+1)^{i+1} > n^{i+1} + (i+1)n^i,$$

atque adeo

$$(n+1)^m > n^m + mn^{m-1},$$

et

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^m > \frac{n^m + mn^{m-1}}{n^m},$$

et dividendo per $n^{m-1}$ patet

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^m > \frac{n+m}{n}.$$

Sed $m$, adeoque $\frac{m}{n}$ tendit ad infinitum, cum $n$ maneat.

Ita

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^m < \frac{n^m}{n^m + mn^{m-1}}$$

$$< \frac{n}{n+m},$$

ubi $\frac{n}{n+m} \frown 0$.

9. *Est* $a^q . a^Q = a^{q+Q}$.

Sit enim (pro integris $n$, $m$, $\nu$ ad denominationem eandem reducendo)

$$\frac{n}{m} \frown q, \quad \text{et} \quad \frac{\nu}{m} \frown Q;$$

erit

$$a^{\frac{n}{m}} \frown a^q, \quad \text{et} \quad a^{\frac{\nu}{m}} \frown a^Q,$$

atque

$$a^{\frac{n}{m}} . a^{\frac{\nu}{\nu}} \frown a^q . a^Q.$$

Sit

$$a^n = x^m \quad \text{et} \quad a^\nu = y^m,$$

erit

$$x = a^{\frac{n}{m}}, \quad y = a^{\frac{\nu}{m}} \quad \text{et} \quad xy = a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{\nu}{m}};$$

atque

$$x^m y^m = a^n a^\nu, \quad \text{seu} \quad (xy)^m = a^{n+\nu},$$

consequenter

$$xy = a^{\frac{n+\nu}{m}},$$

quod tendit ad $a^{q+Q}$; nam $\frac{n}{m}$ tendit ad $q$ et $\frac{\nu}{m}$ ad $Q$, adeoque (XXV, 3. pag. 80) $\frac{n+\nu}{m} \frown q+Q$.

Est igitur (XXV, 11. pag. 85)

$$a^q a^Q = a^{q+Q}.$$

Si $n$ aut etiam $\nu$ negativum sit, pariter patet.

Unde etiam

$$\frac{a^q}{a^Q} = a^{q-Q}.$$

Nam

$$a^Q a^{q-Q} = a^{Q+q-Q} = a^q.$$

10. Si $\frac{n}{m} = q$, *et* $a^n = B^m$, *tum non tantum*

$$a^{\frac{n}{m}} = B, \quad \textit{sed etiam} \quad B^{\frac{m}{n}} = a = B^{\frac{1}{q}},$$

quia $\frac{m}{n} = 1 : \frac{n}{m}$.

*At etiam si* $\frac{n}{m} \sim q$, *et* $a^q = B$, *est*

$$a = B^{\frac{1}{q}}.$$

Nam

$$\frac{n+1}{m} > q > \frac{n}{m};$$

itaque (7. pag. 101)

$$a^{\frac{n+1}{m}} > a^q > a^{\frac{n}{m}};$$

et hinc

$$a^{n+1} > B^m > a^n,$$

atque

$$B^{\frac{m}{n+1}} < a < B^{\frac{m}{n}}.$$

At

$$B^{\frac{m}{n+1}} - B^{\frac{m}{n}} \sim 0,$$

adeoque etiam (XXV, 5. pag. 81)

$$a - B^{\frac{m}{n}} \sim 0,$$

nempe

$$\frac{n}{m} \sim q, \quad \text{et} \quad \frac{m}{n+1} - \frac{m}{n} \sim 0;$$

consequenter (XXV, 4. pag. 81)

$$a = B^{\frac{1}{q}}.$$

Hinc etiam, si

$$B^{\frac{1}{q}} = a,$$

est

$$B = a^{1:\frac{1}{q}} = a^q;$$

ita sive $a = \sqrt[q]{B}$, sive $a = B^{\frac{1}{q}}$ scribatur, perinde est.

11. *Pro integris $n$ et $m$ est $(\sqrt[m]{B})^n$, id est $(B^{\frac{1}{m}})^n = \sqrt[m]{B^n}$.*

Nam sit

$$B = z^m,$$

adeoque

$$z = B^{\frac{1}{m}}, \quad z^n = \sqrt[m]{z^{mn}}.$$

12. *Est* $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{b^{n:m}}{c^{n:m}}$.

Nam

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{b}{c}\right)^n} = \sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}} = \frac{x}{y},$$

si

$$x^m = b^n \quad \text{et} \quad y^m = c^n;$$

nam

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}.$$

Est vero tunc

$$x = b^{\frac{n}{m}}, \quad y = c^{\frac{n}{m}},$$

adeoque

$$\frac{x}{y} = \frac{b^{n:m}}{c^{n:m}} = \sqrt[m]{\left(\frac{b}{c}\right)^n} = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Si vero $\frac{n}{m} \frown q$, tum

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{n}{m}} \frown \left(\frac{b}{c}\right)^q,$$

item $b^{\frac{n}{m}}$ tendit ad $b^q$, et $c^{\frac{n}{m}}$ tendit ad $c^q$; consequenter (XXV, 14. pag. 89.)

$$\left(\frac{b}{c}\right)^q = \frac{b^q}{c^q}.$$

Ita

$$\sqrt[q]{\frac{b}{c}} = \frac{\sqrt[q]{b}}{\sqrt[q]{c}};$$

nempe tum $\frac{m}{n}$ tendit ad $\frac{1}{q}$, atque

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{b^{m:n}}{c^{m:n}},$$

unde reliqua patent.

13. *Pro $n$, $m$, $\nu$, $\mu$ integris est*

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{\nu}{\mu}} = a^{\frac{n\nu}{m\mu}}.$$

Nam sit

$$a = x^{m\mu}, \quad \text{adeoque} \quad \sqrt[m\mu]{a} = x,$$

erit

$$a^n = x^{nm\mu},$$

et $\sqrt[m]{a^n}$, nempe

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^{nm\mu}} = x^{n\mu};$$

itaque

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\nu} = x^{n\mu\nu},$$

atque

$$\sqrt[\mu]{\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\nu}} = \sqrt[\mu]{x^{n\mu\nu}} = x^{n\nu} = \left(\sqrt[m\mu]{a}\right)^{n\nu},$$

porro (per 11., pag. 105)

$$= a^{\frac{n\nu}{m\mu}}.$$

Unde etiam si $\frac{n}{m} \backsim q$ et $\frac{\nu}{\mu} \backsim p$, adeoque $\frac{n\nu}{m\mu} \backsim pq$, et $a^{\frac{n}{m}} \backsim a^q$, atque

$$a^{\frac{n\nu}{m\mu}} \backsim a^{pq} = (a^q)^p.$$

Nam

$$\frac{n+1}{m} > q > \frac{n}{m},$$

adeoque

$$a^{\frac{n+1}{m}} > a^q > a^{\frac{n}{m}},$$

ita

$$\frac{\nu+1}{\mu} > p > \frac{\nu}{\mu};$$

itaque erit etiam

$$\left(a^{\frac{n+1}{m}}\right)^{\frac{\nu+1}{\mu}} > (a^q)^p > \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

(Posito $a > 1$; pro $a < 1$ esset $<$ loco $>$)

Consequenter

$$a^{\frac{(n+1)(\nu+1)}{m\mu}} > (a^q)^p > a^{\frac{n\nu}{\mu m}},$$

ubi differentia postremi a primo tendit ad o; nam $a^{\frac{(n+1)(\nu+1)}{m\mu}}$ et $a^{\frac{n\nu}{m\mu}}$ limite communi gaudent (ut in 10. pag. 104), nam $\frac{n+\nu+1}{m\mu}$ tendit ad o, quia $\frac{n}{m}$ et $\frac{\nu}{\mu}$ manet finito minus, $\frac{1}{\mu}$ et $\frac{1}{m}$ vero limite o gaudent. Unde (XXV, 8. pag. 81) $a^{\frac{n\nu}{m\mu}}-(a^q)^p$ tendit ad o, et (XXV, 4. pag. 81) cum $a^{\frac{n\nu}{m\mu}}$ tendit ad $a^{pq}$, est

$$a^{pq}=(a^q)^p.$$

Hinc etiam $\sqrt[k]{a^q}$ est æquale $a^{\frac{q}{k}}$. Nam

$$\sqrt[k]{a^q}=(a^q)^{\frac{1}{k}}=a^{\frac{q}{k}}.$$

14. Si $a<1$ aut exponens uterque (aut unus tantum) negativum fuerit tum quoque omnia mutatis mutandis (7. pag. 101 sequ.) dicta valent. Ex. gr.

$$(a^{-p})^{-q}=\left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q}=\left(1:\frac{1}{a^p}\right)^{q}=(a^p)^q=a^{pq}.$$

Ita

$$(a^{-\alpha})^{\frac{1}{\beta}}=a^{\frac{-\alpha}{\beta}}=a^{-\frac{\alpha}{\beta}};$$

nam

$$a^{\frac{-\alpha}{\beta}}=\sqrt[\beta]{a^{-\alpha}}=\sqrt[\beta]{\frac{1}{a^\alpha}}=\frac{1}{\sqrt[\beta]{a^\alpha}}=\frac{1}{a^{\alpha:\beta}};$$

atque etiam

$$a^{\frac{\alpha}{-\beta}}=\sqrt[-\beta]{a^\alpha}=\sqrt[\beta]{\frac{1}{a^\alpha}}=\frac{1}{a^{\alpha:\beta}}.$$

Ita

$$a^{\frac{-\alpha}{-\beta}}=\sqrt[-\beta]{a^{-\alpha}}=\sqrt[-\beta]{\frac{1}{a^\alpha}}=\sqrt[\beta]{1:\frac{1}{a^\alpha}}=\sqrt[\beta]{a^\alpha}=a^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Hinc si

$$\frac{\alpha}{\beta}=q \quad \text{et} \quad a^\alpha=b^\beta,$$

est quoque

$$(a^\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=(b^\beta)^{\frac{1}{\beta}},$$

seu

$$a^{\frac{\alpha}{\beta}}=b,$$

seu

$$a^q=b.$$

Conversim etiam si

$$a^{\frac{\alpha}{\beta}} = b,$$

est

$$a^\alpha = b^\beta;$$

nam

$$\left(a^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta = b^\beta \quad \text{seu} \quad a^\alpha = b^\beta.$$

15. *Est* $(abc\ldots)^q = a^q . b^q . c^q \ldots$

Nam si $\frac{n}{m} \frown q$ (ut supra), erit

$$(abc)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(abc)^n} = \sqrt[m]{a^n b^n c^n} = \sqrt[m]{x^m y^m z^m} = xyz,$$

si

$$a^n = x^m, \quad b^n = y^m, \quad c^n = z^m.$$

Est vero tum

$$x = a^{\frac{n}{m}}, \quad y = b^{\frac{n}{m}}, \quad z = c^{\frac{n}{m}},$$

adeoque

$$xyz = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{n}{m}} c^{\frac{n}{m}} = (abc)^{\frac{n}{m}} \frown (abc)^q;$$

porro

$$a^{\frac{n}{m}} \frown a^q, \quad b^{\frac{n}{m}} \frown b^q, \quad c^{\frac{n}{m}} \frown c^q,$$

consequenter

$$(abc)^q = a^q . b^q . c^q.$$

Unde etiam

$$\sqrt[k]{abc} = (abc)^{\frac{1}{k}} = a^{\frac{1}{k}} b^{\frac{1}{k}} c^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}\, \sqrt[k]{b}\, \sqrt[k]{c}.$$

16. Si *(nunc ut inferius quantitatibus ad potentiam elevandis et negativis admissis)* $a$ negativum sit et $\frac{n}{m}$ gaudeat limite $q$, poterit $n$ aut $m$, aut utrumque sive par, sive impar accipi, semper prouti visum fuerit; nam $\frac{n \pm 1}{m}$ aut $\frac{m \pm 1}{n}$ ita $\frac{n \pm 1}{m \pm 1}$ quoque tendunt ad $q$ (XXV, 6. 7. pag. 81). Si $n$ par sit, erit $a^n$ positivum, et si $m$ quoque par sit, $a^{n:m}$ duos valores, unum positivum alterum negativum habet, alioquin æquales; si $m$ impar sit, unus datur valor positivus, nam negativum ad numerum imparem elevatum negativum est. Si vero $n$ impar sit, erit $a^n$ negativum, et pro $m$ impari habet $a^{n:m}$ unum valorem negativum, at positivum non, quia huius potentia positiva, non negativa est.

Si igitur $q$ incommensurabile sit, duobus valoribus gaudet $a^q$ æqualibus uno positivo, altero negativo, sive positivum sive negativum sit $a$; si vero $q = \frac{n}{m}$, et $n$ impar, atque $a$ negativum, et $m$ quoque impar sit, unus erit valor et quidem negativus; sed si pro $n$ impari $m$ par sit, nec positivus nec negativus valor datur, quod ad numerum parem elevatum negativum sit. Dicuntur eiusmodi quantitates imaginariæ, ut $\sqrt{-4}$; nempe tam $+2$ quam $-2$ per se multiplicatum fit $+4$, non $-4$.

XXX. At priusquam de imaginariis ageretur, sit fas de logarithmo elementari, ad quem (pagina 50.) conceptus potentiæ deduxerat, et hic aliquid referre.

1. Si basis $a$ *(positiva)* $> 1$, vel $< 1$ sit (pag. 50), quomodo reperiatur pro quovis $P$ positivo tale $p$, ut $a^p = P$ sit, infra dicetur. Patet autem, si $a < 1$ sumeretur, crescente $p$, decrescere $a^p$, et crescere crescente $-p$.

Erit:

$$\log. a = 1, \quad \text{quia} \quad a^1 = a$$

$$\log. 1 = 0, \quad \text{quia} \quad a^0 = 1.$$

2. Si $a^p = P$ et $a^q = Q$, tum $p = \log. P$ et $q = \log. Q$ quoad basim eandem $a$, atque etiam (XXIX, 9. pag. 103)

$$a^{p+q} = PQ,$$

et

$$p + q = \log. P + \log. Q = \log. PQ.$$

Unde, de $n$ ad $n+1$ progrediendo, *logarithmus facti aequalis est summae logarithmorum factorum. Et vicissim quantitas, cuius logarithmus est $p+q+\ldots$, est $a^p.a^q\ldots$, nempe haec talis est, cuius logarithmus est $p+q+\ldots$*

Si $q = 0$, est $Q = 1$.

3. Quum sit

$$a^p : a^q = P : Q = a^{p-q},$$

atque $p - q$ sit $\log. (P:Q)$, est *logarithmus quoti differentia logarithmi divisoris a logarithmo dividendi*, nempe

$$\log.\frac{P}{Q}=\log.P-\log.Q$$

*Et vicissim quantitas, cuius logarithmus est $p-q$, erit $a^p:a^q$. Hinc pro basi $a>1$ fractionis verae logarithmus negativus est, et logarithmo negativo respondens quantitas fractio vera est*; nam

$$\log.\tfrac{2}{3}=\log.2-\log.3\,;$$

et conversa (XXIX, 6. pag. 99) quoque valet, nempe etiam idem positivum et $>1$ ad maius elevandum est, ut maius prodeat; quia ad exponentem minorem elevatum dat quantitatem minorem, ad idem elevatum dat idem. Et vicissim negativo fractio vera respondet; nempe tum $a$ ad $-k$ elevatur (pro $k$ positivo), id est unitas per $a^k$ dividatur (XXIX, 7. pag. 101); est vero $a>1$ et $a^k$ etiam positivum et unitate maius; nam $1^k=1$ et si $a>1$, etiam $a^k>1$.

4. *Erit* $(a^p)^q=P^q=a^{pq}$. (XXIX, 13. pag. 106) Itaque *logarithmus potentiae est aequalis logarithmo quantitatis elevandae per exponentem multiplicato.*

Nam

$$pq=\log.P^q=q\log.P.$$

*Et vicissim quantitas ipsi $pq$ tanquam logarithmo respondens est aequale $P^q$.* Hinc

$$\log.P+2\log.Q=\log.P.Q^2$$

et

$$\log.P-3\log.Q=\log.\frac{P}{Q^3}.$$

5. *Est* $\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{P}$.

Est vero

$$\frac{p}{q}=\frac{\log.P}{q}=\log.\sqrt[q]{P}.$$

Itaque *quotus e logarithmo quantitatis, e qua radix extrahenda est, per exponentem radicalem diviso, est logarithmus radicis quaesitae.* Et vicissim quantitas, cuius logarithmus est $\frac{\log.P}{q}$, est $\sqrt[q]{P}$.

6. Hinc etiam, si pro basi quavis aliqua dati sint logarithmi, *pro quovis $\alpha$ reperitur tale $x$, ut $\alpha^x$ aequale dato $\beta$ sit*; nempe (4. pag. 110.)

$$x \log.\alpha = \log.\beta,$$

adeoque (per $\log.\alpha$ dividendo utrinque) est

$$x = \frac{\log.\beta}{\log.\alpha}.$$

De hisce operationum commodis inferius plura. Quum pro exponentibus integris manifestum esset in multiplicatione addi, in divisione subtrahi, in elevatione multiplicari, in radice (ex. gr. in $\sqrt[3]{a^6}$) dividi: idem ad exponentem fractum extendere pronum erat; atque tum quæstione pagina 50. proposita satagere, ut compendiis his numeri omnes subjiciantur.

Notandum adhuc est, quod si basis logarithmica $a < 1$ (ex. gr. $\frac{2}{3}$) poneretur, pro $q$ positivo et in infinitum crescenti $\left(\frac{2}{3}\right)^q$ tendit ad limitem 0, (patet ex XXIX, 8. pag. 102); adeoque (sensu pag. 46) $\log.0$ esset $\vdash\!+\!\dashv\infty$, uti pro basi positiva et $< 1$ est $\vdash\!-\!\dashv\infty$. Pro $q = 1$ fit potentia ipsa basis $\frac{2}{3}$, et pro $q = 0$ fit 1; postea vero crescente exponente negativo in infinitum $\left(\frac{2}{3}\right)^{-q}$ crescit in infinitum.

De logarithmo elementari ac sublimiori adhuc quædam paulo inferius dicenda erunt.

XXXI. Ad omnes istas operationes autem unitatem determinatam eandemque pro omnibus suppositam esse dictum supra est. At quæstio oritur, *quidsi alia unitas poneretur? idemne maneret, aut in quem mutaretur expressionis valor? aut expressiones quoad diversas unitates factae quomodo ad eandem reduci queant?*

*Quantitates* (uti certum tempus, certa recta &c), quarum unitas $u$ talis in intuitu exhiberi potest, ut non aliud, nisi quod æquale $u$ est, pro illo casu unitas esse queat, *concretas*, easque *generales* sive *abstractas* dicere licet, quæ cuivis unitati sed nulli exclusive appertinent; nempe in quo conveniunt plura (quovis quoad suam unitatem relato), ex. gr. $\frac{2}{3}$ dici de quovis potest, quod suæ unitatis tertiam bis continet; hoc sensu est (§ 32., pag. 44.) quotus ex. gr. e duobus pedibus per tres pedes divisis unicus, cum alioquin quidvis, quod suæ unitatis tertiam bis continet, quotus sit. Si quantitas abstracta sit multiplicator aut divisor, utcunque mutata multiplicandi (dividendive) unitate, resultatum idem est; imo etiamsi abstracta multiplicetur per concretam, si in hoc casu expressio prodiens semper ad unitatem concretæ referatur, resultatum idem manet; ex. gr. si $a$ denotet quinque pedes, sitque prius unitas $u = 1'$, dein sit $U = \frac{u}{2}$, erit

$$\frac{2}{3} \cdot a = \frac{2 \cdot 5'}{3} = \frac{5 \cdot 2'}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{3} \frac{1'}{2};$$

itaque factores abstracti, ubivis occurrant, factum non mutant; idem est si in divisore occurrat abstracta; nam

$$a : \tfrac{2}{3} = a \cdot \left(1 : \tfrac{2}{3}\right).$$

Concreta per concretam homogeneam divisa quoque, utcunque mutata unitate, quotum eundem dat; sed si in divisore plures factores concreti sint, quam in dividendo, ex. gr. sit $\frac{\alpha\beta}{abc}$, atque unitas sit $u$, resultatum manebit idem, si supra quodvis tale concretum (ut $c$) ponatur $u$, ut sit $\frac{\alpha\beta u}{abc}$; ita si sit ex. gr. $\frac{2}{c}$ et ponatur $\frac{2u}{c}$, manebit valor idem, alioquin mutata unitate mutatur. At quæritur, quomodo factum concretorum mutetur unitate mutata? et idem etiam ad quotos, quorum et dividendus et divisor factum e factoribus concretis est, applicari poterit.

Exprimantur quantitates concretæ $a$ et $b$ prius quoad $u = 1$, tum quoad unitatem ex $u$ in $U = ku$ mutatam; sitque $\frac{\nu u}{\mu} = U$ vel $\backsim U$, et pro integris $\nu$, $\mu$, $a'$, $b'$, $n$

$$\frac{a'u}{n} = \text{vel} \backsim a, \qquad \frac{b'u}{n} = \text{vel} \backsim b;$$

erit

$$\frac{\mu a' U}{\nu n} = \text{vel} \backsim a, \qquad \frac{\mu b' U}{\nu n} = \text{vel} \backsim b;$$

nam aut

$$U = \frac{\nu u}{\mu}$$

et tum

$$\frac{\mu U}{\nu} = u,$$

aut

$$U - \frac{\nu u}{\mu} \backsim 0,$$

et multiplicando per $\frac{\mu}{\nu}$, finito certo minus etiam

$$\frac{\mu}{\nu}\left(U - \frac{\nu u}{\mu}\right) = \frac{\mu U}{\nu} - u \backsim 0.$$

Si iam $a$ per $b$ quoad $u = 1$ dividendum sit, erit

$$\frac{a'u}{n} : \frac{b'u}{n} = \frac{a'}{b'} = \text{vel} \backsim \frac{a}{b};$$

et operatione quoad $U = 1$ facta quoque erit idem, nempe

$$\frac{\mu a' U}{\nu n} : \frac{\mu b' U}{\nu n} = \frac{a'}{b'} = \text{vel} \backsim \frac{a}{b},$$

(XXV, 14. pag. 89.) itaque nec eiusmodi factores, ut $\frac{a}{b}$, factum mutant.

*At si factores numero $m$ singuli quantitates concretae et homogeneae sint, ex. gr. $a, b, c, \ldots$, atque factum quoad $u = 1$ sit $f$, factum quoad $U = 1 = ku$ sit $F$; erit*

$$f = F.k^{m-1} \quad \text{et} \quad F = \frac{f}{k^{m-1}};$$

ubi $k$ et $m$ quantitates abstractæ adeoque expressiones determinatæ sunt.

Unde etiam (signo $[A^m]_{u=1}$ pro quantitate $A$ quoad $u = 1$ ad $m$ elevatam &.)

$$[a^m]_{u=1} = k^{m-1}[a^m]_{U=1},$$

atque

$$[a^m]_{U=1} = \frac{[a^m]_{u=1}}{k^{m-1}}.$$

Constructis tam quoad $u = 1$, quam quoad $U = 1$ schematibus patet (etsi pro $\backsim$ stet $=$):

$$n\frac{u}{n}=u=1,\qquad b'\frac{u}{n}\backsim b;\qquad n\frac{a}{n}=a,\qquad b'\frac{a}{n}\backsim ba,$$

$$n\nu\frac{U}{n\nu}=U=1,\quad b'\mu\frac{U}{n\nu}\backsim b;\quad n\nu\frac{a}{n\nu}=a,\quad b'\mu\frac{a}{n\nu}\backsim\frac{ba}{k};$$

prius factum quoad $u=1$, posterius quoad $U=1$ est; sed

$$\frac{\mu}{\nu}\eqsim\frac{1}{k},$$

itaque

$$\frac{\mu b'a}{\nu n}\eqsim\frac{f}{k}.$$

Si novus factor eiusmodi accedat, manifestum est, factum istud denuo per $k$ dividi; adeoque si tres factores eiusmodi sint, exponens ipsius $k$ erit 2, et ulterius progrediendo erit exponens apud $m$-tum factorem $m-1$.

Hinc etiam superius pro exponente $m$ integro patet. At sit exponens $q$; erit hic aut quantitas abstracta uti $\frac{2}{3}$ aut pariter divisore $u=1$ subposito evadet $\frac{q}{u}$ determinatum; aut erit $q$ tantum quantitas concreta, cuius expressione quoad unitatem novam mutata potentia eatenus quoque mutatur. Sit prius casus prior; dicaturque $r$ valor, qui prodit $a$ ad $\frac{q}{u}$ quoad $u=1$ elevato, et $R$ valor qui fit elevatione quoad $U=ku=1$ facta; erit

$$R=r.k^{1-\frac{q}{u}}=\frac{r}{k^{\frac{q}{u}-1}},$$

et

$$r=R.k^{\frac{q}{u}-1}.$$

Sit $\frac{n}{m}=q$ (pro integris $n$ et $m$), seu

$$\frac{q}{u}=\frac{n}{m};$$

inde etiam casus, quodsi $\frac{n}{m}\backsim q$, sequitur. Erit tunc:

$$[\sqrt[m]{a^n}]_{u=1}=r\quad\text{et}\quad[\sqrt[m]{a^n}]_{U=1}=R;$$

est vero

$$[a^n]_{U=1}=\frac{[a^n]_{u=1}}{k^{n-1}},$$

atque

$$[r^m]_{u=1} = [a^n]_{u=1} = k^{n-1}[a^n]_{U=1}.$$

Vero est

$$[r^m]_{U=1} = \frac{k^{n-1}}{k^{m-1}}[a^n]_{U=1} = \frac{1}{k^{m-1}}[r^m]_{u=1}$$

per præcedentia. Hinc dividendo utrinque per $\frac{k^{n-1}}{k^{m-1}}$ fit

$$\frac{k^{m-1}}{k^{n-1}}[r^m]_{U=1} = k^{m-n}[r^m]_{U=1} = [a^n]_{U=1};$$

atque radicem $m$ gradus sumendo est

$$rk^{1-\frac{n}{m}} = \left[\sqrt[m]{a^n}\right]_{U=1} = \left[a^{\frac{n}{m}}\right]_{U=1}.$$

Consequenter

$$R = rk^{1-\frac{q}{u}} = \frac{r}{k^{\frac{q}{u}-1}},$$

et

$$r = Rk^{\frac{q}{u}-1}.$$

Si $\frac{n}{m}$ tendat ad $\frac{q}{u}$, tum

$$rk^{1-\frac{n}{m}} = \frac{rk}{k^{n:m}}$$

tendit ad

$$rk^{1-\frac{q}{u}} = \frac{rk}{k^{q:u}},$$

et tum $R = [a^{n:m}]_{U=1}$ tendit ad $[a^{q:u}]_{U=1}$.

Si vero quantitas concreta ex. gr. recta sit exponens, muteturque eius expressio mutata unitate, ut nempe si $q$ erat $\frac{nu}{m}$, nunc sit $\frac{n\mu U}{m\nu}$

$$\text{pro } U = ku = 1, \quad \text{et} \quad k = \frac{\nu}{\mu},$$

atque ex $\frac{q}{u}$ fiat $\frac{q}{ku}$: erit quoad $U = 1$ elevando

$$\left[a^{\frac{q}{ku}}\right]_{U=1} = \left[R^{\frac{1}{k}}\right]_{U=1} = \left[\left(rk^{1-\frac{q}{u}}\right)^{\frac{1}{k}}\right]_{U=1}.$$

Nam quoad $U=1$ elevando est

$$R=\left[a^{\frac{q}{u}}\right]_{U=1} \quad \text{et} \quad \left[a^{\frac{q}{ku}}\right]_{U=1}=\left[\left(\left[a^{\frac{q}{u}}\right]_{U=1}\right)^{\frac{1}{k}}\right]_{U=1}$$

Idem patet, si $\frac{n}{m} \frown \frac{q}{u}$ et $\frac{\nu}{\mu} \frown k$, nempe tum $\frac{n\mu}{m\nu} \frown \frac{q}{ku}$, et $a^{n\mu:m\nu}=a^{\frac{n}{m}:\frac{\nu}{\mu}} \frown a^{\frac{q}{u}:k} \frown a^{\frac{q}{ku}}$

*Exempla.* Sit

$$q=3^\circ, \quad u=1^\circ, \quad a=1^\circ, \quad U=\frac{1^\circ}{2};$$

erit quoad $u=1$

$$r=a^q=1^\circ,$$

et $a^q$ quoad $U=1$ est $a^6$ (quoad $\frac{1^\circ}{2}=1$ facta elevatione) $=32^\circ$.

Estque (quoad $U=1$ facta elevatione)

$$R=a^3=1^\circ\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-2}=4^\circ,$$

atque $R^{\frac{1}{k}}$ id est $R^2$ quoad $U=\frac{1^\circ}{2}$ elevando fit æquale $32^\circ$; nempe pro $\frac{1^\circ}{2}$ æquale unitati, et factore utroque æquali $4^\circ=8$ schema est:

$$1\left[\tfrac{1^\circ}{2}=1\right]=1, \quad 8.1=4^\circ; \quad 1.4^\circ=4^\circ, \quad 8.4^\circ=32^\circ.$$

Ita æquatio omnium linearum secundi ordinis inferius (ubi ad repetitionem evitandam hæc citabuntur), pro coordinatis rectangulis erit

$$y^2=x-\frac{x^2}{\pm a},$$

adeoque ordinata

$$y=\sqrt{x-\frac{x^2}{\pm a}},$$

ubi unitas, ad radicis extractionem requisita, dicitur *parameter* lineæ; $a$ sumitur positivum, et quod ipsorum $+a$, $-a$, ponitur, dicitur *axis maior* lineæ, meditullium eius *centrum* audit, duplum ordinatæ e centro *axis minor*, et punctum abscissæ, e quo duplum ordinatæ est æquale unitati id est parametro, *focus* vocatur, ac recta e foco ad quodvis lineæ punctum *radius vector*.

Dicitur vero linea *parabola*, si $a \sim \infty$, et ex $x - \frac{x^2}{\pm a}$ fiat (§ 32, 3.) $x$, *ellipsis* si ante $a$ sit $+$, et *hyperbola* si $-$ sit.

Patebit etiam quamvis coni verticaliter producti sectionem cum plano ita exprimi posse veluti lineam, cuius æquatio superior est, quantumvis sit $a$, et quantavis sit unitas, nempe parameter, lineam eius e sectione plani per conum produci posse. Si $a$ æquale est unitati, id est parametro, linea, cuius æquatio est

$$y^2 = x - \frac{x^2}{-a} = x + x^2,$$

dicitur *hyperbola aequilatera*, si vero $+a$ sit,

$$y^2 = x - x^2$$

æquatio *circuli* erit pro diametro $=$ axi maiori $= 1 =$ parametro.

Si iam manente linea et parametro, unitas alia ponatur ex. gr. radius, adeoque priore unitate $u$ dicta, sit nova unitas $U = ku = \frac{1}{2}u$; et quæratur pro eadem abscissa $x$ eiusdem ordinatæ $y$ expressio quoad $U$; erit idem

$$y = \sqrt{x - \frac{x^2}{2}} . \sqrt{2}$$

(operatione quoad $U = 1$ facta) seu:

$$y = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \sqrt{2x - x^2}$$

(quoad radium æqualem unitati, sed qui iam parameter non est, æquatione mutata).

Quod $\sqrt{x - x^2}$ quoad $u = 1$ in dictam mutetur, patet e præcedentibus; nam recta $x$ manet æquale $x$, utcunque mutetur unitas, at ex $x^2$ (quoad $u$) fit $\frac{x^2}{2}$ (quoad $U = \frac{1}{2}u = 1$); radix secundi gradus quoad $U = 1$ vero, nempe $R$ multiplicari per

$$k^{\frac{q}{n} - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2} - 1} = \sqrt{2}$$

debet (per antea dicta).

Ita si quinta pars diametri ponatur $=1$, idem $y$ pro eodem $x$ erit $\sqrt{5x-x^2}$ (operatione quoad $U=\frac{1}{5}u=1$ facta).

Pro abscissis in hyperbola æquilatera ad asymptotam sumtis, et ordinatis ad asymptotam alteram parallelis, est

$$y=\frac{q^2}{x}=q.\frac{q}{x}$$

(per $q$ intelligendo ordinatam e vertice hyperbolæ): patet vero $q.\frac{q}{x}$ (per dicta) pro quavis unitate manere, itaque $q=1$ poni potest; quo pacto (ut suo loco dicetur), erit area quævis inter asymptotam et $y$, hyperbolam et $q$ *logarithmus* (*naturalis* dictus) abscissæ e centro acceptæ.

Interim altera quæstio est, quanta fiat ordinata pro eadem abscissa et alio parametro? Erat pro parabola:

$$y=[x^{\frac{1}{2}}]_{u=1};$$

eritque

$$Y=[x^{\frac{1}{2}}]_{U=ku=1}=$$

$$=k^{\frac{1}{2}}[x^{\frac{1}{2}}]_{u=1};$$

nempe ordinatæ pro eadem abscissa in diversis parabolis sunt, uti radices quadratæ parametrorum; (in eadem vero secundæ potentiæ ordinatarum sunt, uti abscissæ).

*Logarithmus etiam quantitatis concretae $P$ quoad unitatem ex $u$ in $U=ku=1$ mutatam reperiri potest. Quivis logarithmus est quoad certam basim et certam unitatem*; atque dum ex

$$\alpha^z=P$$

concluditur (pag. 111.)

$$z\log.\alpha=\log.P,$$

intelligitur pro basi $\alpha$ et $u=1$ esse

$$[\alpha^y]_{u=1}=\alpha,$$

atque

$$[\alpha^z]_{u=1}=P;$$

adeoque

$$zy = z \log. \alpha$$

(quoad basim $a$ et $u = 1$)

$$= \log. P.$$

Sit

$$[a^p]_{u=1} = P,$$

erit

$$p = \log. P \quad \text{quoad basim } a \text{ et } u = 1.$$

Sit quantitas abstracta $k$, et

$$\left[\left(\frac{a}{ku} . u\right)^x\right]_{u=1} = \left(\frac{P}{ku}\right) u,$$

erit

$$x \log. \left(\frac{a}{ku} . u\right) = \log. \frac{P}{ku} . u,$$

seu

$$x (\log. a - \log. ku) = \log. P - \log. ku$$

$$= x (1 - \log. ku),$$

quia $\log. a = 1$ (XXX. 1. pag. 109); hinc

$$x = \frac{\log. P - \log. ku}{u - \log. ku}$$

(omnia quoad basim $a$ et $u = 1$ intelligendo); eritque $\frac{au}{ku}$ quoad $u = 1$ elevatum ad $x$ æquale $\frac{P}{ku} u$; atque tum etiam $\frac{a}{ku} U$ quoad $U = 1$ elevatum ad $x$ erit æquale $\frac{P}{ku} . U$ (ut statim patebit). Est vero

$$\frac{a}{ku} . U = a, \quad \text{et} \quad \frac{P}{ku} . U = P \text{ (pro } U = ku).$$

Consequenter $[a^x]_{U=1} = P$.

Sit nempe (pro casu commensurabilitatis, unde per superiora generaliter patet)

$$k = \frac{\nu}{\mu}, \quad a = \frac{a'u}{N}, \quad P = \frac{P'u}{N}, \quad \text{et} \quad x = \frac{n}{m},$$

(denotantibus $a'$, $N$, $P'$, $\nu$, $\mu$, $n$, $m$ integros); erit

$$\frac{a}{ku} = \frac{a'u}{N} : \frac{\nu u}{\mu} = \frac{a'\mu}{N\nu};$$

adeoque si

$$\left(\frac{a}{ku} . u\right)^x = \frac{P}{ku} . u,$$

erit

$$\left(\frac{a'\mu}{N\nu} u\right)^n = \left(\frac{P'\mu}{N\nu} u\right)^m,$$

seu

$$\left(\frac{a'\mu}{N\nu}\right)^n . u = \left(\frac{P'\mu}{N\nu}\right)^m . u;$$

nempe pro $n = 2$ fieret schema:

$$\frac{N\nu . u}{N\nu} = u = 1, \quad \frac{a'\mu . u}{N\nu} = \frac{a}{ku} . u, \quad \frac{N\nu . a'\mu u}{N\nu . N\nu} = \frac{a'\mu}{N\nu} . u$$

et factum est

$$\left(\frac{a'\mu}{N\nu}\right)^2 u.$$

Pariter patet schema idem manere, nonnisi $U = 1$ in locum ipsius $u$ posito, ut sit

$$N\nu \frac{U}{N\nu} = U = 1.$$

Est hinc

$$\left|\frac{a'\mu}{N\nu} U\right]^n_{U=1} = \left|\frac{P'\mu}{N\nu} U\right]^m_{U=1},$$

adeoque

$$\left[\frac{a'\mu}{N\nu} U\right]^{\frac{n}{m}}_{U=1} = \frac{P'\mu}{N\nu} U,$$

id est

$$\left[\frac{a}{ku} U\right]^x_{U=1} = \frac{P}{ku} U.$$

Ex. gr. Sit prius

$$u = 1, \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{10}, \quad a = 10u, \quad P = 100u;$$

erit

$$a^2 = 100u = P,$$

atque (pro $u = 1$ et basi $a$)

$$\log. P = 2u,$$

$$\log. ku = 0 - (\log. 10)u = -1u,$$

quia

$$\log. a = 1;$$

adeoque

$$\frac{\log. P - \log. ku}{1. u - \log. ku} = \frac{2u - (-1u)}{1u - (-1u)} = \frac{3u}{2u},$$

est vero

$$[a^{\frac{3}{2}}]_{U=1} = \sqrt{1\,000\,000}\, U = 1000\, U =$$
$$= 100\, u = P.$$

XXXII. Si quodvis $a$ ut radix secunda ex aliquo $\pm B$ spectetur, *realitas ipsius* $a$, prouti quoad $+1$ vel $-1$ multiplicatum per se producat $\pm B$, *multiplicationi quoad* $+1$ *vel* $-1$ *innixa* dicitur, et ob determinationem hanc, (uti positiva et negativa in § 10.) nova oriuntur nomina. Nempe unitas (pag. 37.) arbitrarie positiva accipitur et $\sqrt{-4}$ nonnisi propter multiplicationem huic hypothesi innixam caret realitate; quidsi unitas negativa poneretur? manifesto (ut p. 42.) signa æqualia darent $-$, et inæqualia darent $+$. Sit igitur fas, ea, quorum realitas multiplicationi quoad $+1$ innititur, *realia quoad* $+1$ (breviter *realia*), illa vero, quorum realitas multiplicationi quoad $-1$ innixa est, *realia quoad* $-1$, sive *pure imaginaria* dicere. ($\sqrt{-a}$ potest reale esse, si $a$ denotet ex. gr. $-4$.) Insigniantur realia quoad $-1$ litera $i$ postposita vel anteposita; ex. gr. $\sqrt{-4} = \pm 2i$, $\sqrt{4} = \pm 2$; *atque realia quoad* $-1$ *seorsim addita, cum summa realium quoad* $+1$ *connexa non commixta efficiant summam* (pag. 31); ex. gr. $2i + 1 - 3i = 1 - 1i$. Dicitur hoc (latius) *imaginarium.*

Quantitates imaginarias et fractos exponentes *Des Cartes** introduxit, eoque plurimum ad generalitatem elegantiamque contulit, campumque ad nova invenienda patefecit. Quem in finem, ut operationes sub velo generalitatis continuari queant, nec, in quantum fieri potest, generalitas exui

* Cartesio nimium tribuitur; nescio quomodo mihi tanquam certo genio eius conveniens inhæserat, quod nuper eum revolvens, haud reperi; quanquam sequentibus verbis pulchris præfationem suæ Geometriæ claudat: ‚Spero posteris mihi gratiam habitum iri, non solum pro iis, quæ hic explicui, sed etiam pro iis, quæ consulto omisi, quo ipsis voluptatem illa inveniendi relinquerem.'

Montucla refert Wallisium prius exponentem integrum negativum introduxisse; sed opera eius hic non habentur; quicunque introduxerit et fractos imaginariaque primus, adsunt, et (ut numeratione) grati iis utimur. (Annotatio autoris, ed. or. t. I. Errata pag. XXXVII.)

debeat, sequentes regulæ ponuntur multiplicationis quoque conceptu eatenus extenso (p. 42.) Manent quidem etiam alioquin casus generalitatis exuendæ, ubi nempe (aliis verbis) generalitas non perfecta sed cum exceptione certa est; ex. gr. ex eo, quod $ba=ca$, non sequitur pro quibusvis valoribus, esse $b=c$; si nempe $a=0$, $b=2$, $c=3$ (p. 45.).

1. Pro duobus eiusmodi factoribus, quorum neuter est summa e reali quoad $+1$ et reali quoad $-1$, multiplicatio tunc et nonnisi tunc instituatur quoad $-1$, si uterque factor quoad $-1$ realis sit; adeoque si alteruter quoad $+1$ realis sit, multiplicatio quoad $+1$ fiat. Ex. gr. $2.3i=6i$.

2. *Determinatio quoad realitatem* facti et multiplicandi eadem vel diversa sit, prouti multiplicatoris et unitatis eadem vel diversa est (ad instar legis determinationum positivorum et negativorum pag. 42.).

$$\sqrt{-9}.\sqrt{-9}=\pm 3i.\pm 3i=-3^2,$$

juxta schema

$$-1,\quad \pm 3i;\quad \pm 3i,\quad -3.3.$$

Accipi vero aut ubique $+3i$ debet, aut ubique $-3i$, quod de aliis quoque imaginibus æqualibus tenendum est; at $\sqrt{4}\,\sqrt{9}$ potest esse $\pm 2.3$.

3. Unde si in facto occurrat $\sqrt{-1}$ ut factor pluries, pro quovis pari numero factorum $\sqrt{-1}$ ponatur $-1$, et quod hoc pacto manet aut prodit, illud per factum cœfficientium multiplicatum accipiatur pro facto. Si non alius cœfficiens adsit, pro tali reputetur $+1$ ipsius $\sqrt{-1}$ et $-1$ ipsius $-\sqrt{-1}$. Quivis factor vero ita expressus cogitetur (quod fieri posse patebit), ut radicis ex $-1$ nullibi binario altior exponens sit.

Hinc

$$-\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=+1.$$

Regula tertia ex duobus prioribus fluit.

Atque iam hoc pacto dicitur $F$ factum expressionum $E$ et $e$ (absque eo, ut mentio multiplicationis respectivæ quoad $+1$ aut $-1$ fieret), si pro quovis valore $Q'+Qi$ ipsius $E$ et pro quovis valore $q'+qi$ ipsius $e$ gaudeat $F$ valore tali, qui sit æqualis summæ omnis cuiusvis ipsorum

$Q'$ et $Qi$ per quodvis ipsorum $q'$ et $qi$ iuxta regulas plane præscriptas multiplicatorum; nec $F$ alium valorem habeat. *Quo conceptus multiplicationis* (§ 26.) *extenditur*, fitque generalis primitivum conceptum continens.

Si quivis terminus quantitatis complexæ $C$ per quemvis alterius $c$ iuxta regulas dictas multiplicetur, demonstrabitur factorum partialium summam esse facto ex $C$ et $c$ æqualem.

Expressionum multarum plures valores dantur: quamobrem æqualitatis earum casus strictius determinandus est.

$\sqrt{1}$ habet duos valores, nempe

$$+1 \quad \text{et} \quad -1;$$

ita $\sqrt[3]{1}$ habet tres valores, nempe

$$1 \text{ et } \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{atque} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

seu si radix positiva ex 3 dicatur $\alpha$, erunt valores

$$1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}i \quad \text{ac} \quad -\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}i,$$

quorum quivis per regulas dictas ad 3 elevatas dat 1, ut statim patebit.

Ita pro integro $m$ et

$$x^m \pm 1 = 0 \quad \text{seu} \quad x^m = \mp 1, \quad \text{seu} \quad x = \sqrt[m]{\mp 1}$$

totidem nec plures valores dari dicetur, quorum quilibet ipsi $x$ salva æquatione substitui potest, uti in

$$x^3 - 1 = 0$$

quilibet valorum trium dictorum. Ita duæ valores sunt (nempe 2 et 3), quorum quivis in

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

in locum ipsius $x$ positus valorem expressionis ad 0 reducit; ubi notandum, quod si dicatur, quantitatem aliquam $Q = 2$ talem esse, cuius quintuplum secundam potentiam senario superet, minime asseratur quidvis, quod tale est, ipsi $Q$ æquale esse. Potest autem $z \Longleftarrow y$, aut $y \Longrightarrow z$ denotare, cuivis valori ipsius $z$ dari valorem ipsius $y$ æqualem; $z \Longleftrightarrow q$ vero potest significare, cuivis valori cuiusvis ipsorum $z$, $q$ dari valorem alterius æqualem.

Ex. gr.

$$\sqrt{1} \Longleftarrow \sqrt[4]{1},$$

ita

$$1^{\frac{1}{2}} \Longleftarrow 1^{\frac{1}{4}}, \quad \text{sed} \quad 1^{\frac{1}{2}} \quad \text{non} \quad \Longleftrightarrow 1^{\frac{1}{4}};$$

nam $\sqrt{1}$ habet duos valores $1$ et $-1$, $\sqrt[4]{1}$ vero habet 4 valores nempe $\pm 1$, et $\pm\sqrt{-1}$.

Interim inde, quod $x \Longleftarrow y$ et $z \Longleftarrow y$, non sequitur, dari ullum valorem ipsius $x$ valori ulli ipsius $z$ æqualem; possunt enim valores ipsius $z$ plane illis valoribus ipsius $y$ æquales esse, quos $y$ præter valores valoribus ipsius $x$ æquales ($D$ p. 15.) habet; sed si $x \Longleftarrow y \Longleftarrow z$, tum $x \Longleftarrow z$. E contextu etsi aliud signum haud adoptetur, quo sensu veniat $=$ perspici potest.

Radix realis positiva insigniatur stellula sub $\sqrt{\ }$ posita.

1. Estque $\sqrt{-4} = \underset{*}{\sqrt{4}} . \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = \pm 2i$ nam $2 . \pm 1 i = \pm 2i$, (per schema $1, \pm 1 i$; $2, \pm 2 i$, vel $1, 2$; $\pm 1 i, \pm 2 i$), patet per 1. et 2., e quo fluit 3. pag. 122. Nempe per schemata $(\pm 1 i)^{2n}$ pro $n$ pari est $+1$, pro impari est $-1$, ac $(\pm 1 i)^{2n} . \pm 1 i$ pro $n$ pari est $\pm 1 i$, pro $n$ impari $\mp 1 i$. Sit factum $f$ e factoribus realibus, hoc accedentibus quotvis factoribus $\sqrt{-1}$ manet, nisi quod si unus tantum sit (ubivis), in $\pm f i$, per adhuc unum in $-f$, tum in $\mp f i$, dein in $\pm f$ varietur &c.

$$\sqrt{-4} . \sqrt{-9} \Longleftrightarrow \sqrt{4} . \sqrt{-1} . \sqrt{9} . \sqrt{-1} = -1 . \sqrt{4 . 9} = \mp 6,$$

quia

$$\sqrt{4 . 9} = \pm 6, \quad \text{et} \quad -1 . \pm 6 = \mp 6.$$

$$\sqrt{-4} . \underset{*}{\sqrt{9}} = \sqrt{4} . \sqrt{-1} . \underset{*}{\sqrt{9}} = \sqrt{4 . 9} . \sqrt{-1} = \pm 6 i.$$

Imo si $a = -4$ sit, etiam tum

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} . \sqrt{-1} = \sqrt{-4}\sqrt{-1} = \pm \underset{*}{\sqrt{4}} . \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = \mp \underset{*}{\sqrt{4}}.$$

Unde $a$, $b$ qualiavis realia denotent est $\sqrt{a} . \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; atque de quotvis ad uno plura concludere fas est.

2. Sed valet idem etiam generaliter: nempe denotante $P$ positivum, exprimitur radix imaginaria ex $P$ generaliter (pro integro $n$) per $\sqrt[2n]{-P}$; atque $\sqrt[2n]{-P} = \sqrt[2n]{P} . \sqrt[2n]{-1}$. Potest enim *quivis valor ipsius* $\sqrt[2n]{-1}$ per $a + b\sqrt{-1}$ *exprimi, denotantibus* $a$, $b$ *realia (haud excluso* o*)*; quod breviter huc adnectere fas sit (post Trigonometriam facile intelligendum).

Est

$$(\cos. a + \sqrt{-1} \sin. a)^2 = (\cos. a)^2 + 2 \cos. a \sin. a \sqrt{-1} - (\sin. a)^2 =$$
$$= \cos. 2a + \sqrt{-1} \sin. 2a;$$

atque si

$$\cos. ma + \sqrt{-1} \sin. ma$$

per

$$\cos. a + \sqrt{-1} \sin. a$$

multiplicetur, fit

$$\cos. ma . \cos. a + \sqrt{-1} (\sin. ma . \cos. a + \cos. ma . \sin. a) - \sin. ma . \sin. a =$$
$$= \cos. (m+1) a + \sqrt{-1} \sin. (m+1) a,$$

seu (pro quovis integro $n$)

$$\cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha = \left(\cos. \frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1} \sin. \frac{\alpha}{n}\right)^n;$$

$\left(\text{nam } \alpha = \frac{n . \alpha}{n}\right)$.

Ponatur iam prius

$$1 = \cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha;$$

fieri hoc potest, si $\sin. \alpha = 0$ et $\cos. \alpha = 1$, quod fit, si $\alpha = \mu . 2\pi$ (pro ntegro $\mu$, haud excluso o, et $\pi$ æquali dimidiæ peripheriæ pro radio 1).

Substituendo itaque ipsi $\mu$ integros 0, 1, 2, ..., $n-1$, exhibebit

$$\cos. \frac{2\mu\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin. \frac{2\mu\pi}{n}$$

radices $n$-ti gradus ipsius 1, numero $n$.

Ita poni potest

$$-1 = \cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha,$$

pro $\cos. \alpha = -1$ et $\sin. \alpha = 0$, quod fit pro

$$\alpha = 2\mu\pi + \pi,$$

adeoque substituendo ipsi $\mu$ hic quoque $0, 1, 2, \ldots, n-1$, prodibunt ipsius $-1$ radices gradus $n$-ti numero $n$; erunt vero manifesto duæ tantum radices ipsius $1$ reales pro $n$ pari, et una pro $n$ impari, ipsius $-1$ vero una realis pro $n$ impari, omnes aliæ radices vero ipsius $\pm 1$ erunt sub formam dictam $a + b\sqrt{-1}$ venientes; nam terminus prior in expressione utraque realis est, alter vero factum e reali in $\sqrt{-1}$ est.

Nulla vero est radicum dictarum ipsius $\pm 1$ ulli alii earundem plane æqualis, quamvis in paria (a signis abstrahendo æqualia) dispesci possint. Sit nimirum $n$ prius par, ex. gr. 6, tum sit impar, ex. gr. 5; erit $\frac{\alpha}{n}$ pro casu primo

$$0, \frac{1}{6}2\pi, \quad \frac{2}{6}2\pi, \quad \frac{3}{6}2\pi, \quad \frac{4}{6}2\pi, \quad \frac{5}{6}2\pi;$$

pro secundo vero

$$0, \frac{1}{5}2\pi, \quad \frac{2}{5}2\pi, \quad \frac{3}{5}2\pi, \quad \frac{4}{5}2\pi;$$

in casu primo est $n - 1 = 5$, atque

$$\frac{5}{6}2\pi + \frac{1}{6}2\pi = 2\pi,$$

ita

$$\frac{4}{6}2\pi + \frac{2}{6}2\pi = 2\pi;$$

et ita si numerus par $n$ quantusvis esset, a dictis extremis æquidistantium summa est toti peripheriæ æqualis, usque quo ad medium perveniatur, (uti hic $\frac{3}{6}2\pi$ est) qui semper $= \pi$ est. Si $n$ impar sit quoque, idem est, præterquam quod ibi medius non detur. Sunt vero (in Trigonometria) sinus arcuum, quorum summa est æqualis toti peripheriæ, oppositi (alioquin æquales); ita $\cos. 0 = 1$ et $\cos. \pi = -1$, in casu primo sunt oppositi; et in omni casu arcu a $0$ ultra $\pi$ crescente, utrinque æquidistantes efficere $2\pi$ facile patet, adeoque manifestum est omnes radices differre. Plures vero esse nequeunt, nam infra probabitur $x$, ut $x^n + \beta = 0$ sit, nonnisi $n$ valores habere.

*Exempla. Pro* $n = 3$, et $r = \sqrt{3}$, adeoque $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \pm ri$ erunt valores ipsius $\sqrt[3]{1}$ sequentes:

$$1, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ri, \quad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ri,$$

quorum quivis iuxta datas regulas multiplicando elevatus producit 1.

Valores ipsius $\sqrt[3]{-1}$ vero sunt:

$$-1, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}ri, \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{2}ri.$$

Ita valores ipsius $\sqrt[4]{1}$ sunt:

$$1, \ -1, \ +\sqrt{-1}, \ -\sqrt{-1}, \text{ id est } \pm 1 \text{ et } \pm 1\, i.$$

Valores ipsius $\sqrt[4]{-1}$ autem sunt:

$$+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}}, \quad -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}}.$$

Pro quovis integro $n$ sinus cosinusque adeoque radices approximando (quam proxime) exhiberi possunt.

*Hinc si* $\sqrt[m]{P}$ *sit* $p$, *quivis valor ipsius* $\sqrt[m]{-P}$ *per*

$$p\,(a+b\sqrt{-1})$$

*exprimi poterit, pro* $a$, $b$, *realia juxta praecedentia talia denotantibus, ut sit*

$$(a+b\sqrt{-1})^m=-1.$$

Erit enim

$$[p\,(a+b\sqrt{-1})]^m=p^m(a+b\sqrt{-1})^m=P.-1=-P.$$

Namque

$$p^2(a+b\sqrt{-1})^2=(ap+bp\sqrt{-1})^2,$$

peracto calculo patet. Si vero de $\mu$-ta potentia valet, de $(\mu+1)$-ta quoque valet: nempe tum

$$p^\mu(a+b\sqrt{-1})^\mu=(ap+bp\sqrt{-1})^\mu,$$

seu brevius

$$p^\mu(A+B\sqrt{-1})=A'p^\mu+B'p^\mu\sqrt{-1};$$

nimirum $(a+b\sqrt{-1})^\mu$ manifesto nonnisi e factoribus $a$, $b$, $\sqrt{-1}$ coaluit, ubi $\sqrt{-1}$ in nullo termino ut factor bis manet per 3. pag. 122.; adest præterea $p$ in quovis termino; et quovis per quemvis multiplicato, exponens ipsius $p$ (prius æqualis exponenti elevationis 2) semper uno crescit simul cum hoc. Unde etiam patet

$$A+B\sqrt{-1}=A'+B'\sqrt{-1}$$

esse, adeoque reale æquale reali, et imaginarium imaginario; et hinc

$$A=A', \quad \text{et} \quad B=B'$$

Consequenter etiam

$$p^{\mu+1}(A+B\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})=(A'p^\mu+B'p^\mu\sqrt{-1})(ap+bp\sqrt{-1});$$

seu

$$p^{\mu+1}(Aa+Ab\sqrt{-1}+Ba\sqrt{-1}-Bb)=$$
$$=p^{\mu+1}A'a+p^{\mu+1}A'b\sqrt{-1}+p^{\mu+1}B'a\sqrt{-1}-p^{\mu+1}B'b.$$

Est igitur etiam

$$(p\sqrt[m]{-1})^m=-P$$

et

$$\sqrt[m]{-P}=\sqrt[m]{P}_*.\sqrt[m]{-1}.$$

*Ita*

$$\sqrt[m]{-P}.\sqrt[m]{Q}=\sqrt[m]{P}_*.\sqrt[m]{-1}.\sqrt[m]{Q}=\sqrt[m]{-PQ}.$$

Nam si

$$\sqrt[m]{P}_*.\sqrt[m]{-1} \quad \text{per} \quad a+b\sqrt{-1}$$

et

$$\sqrt[m]{Q} \quad \text{per} \quad \alpha+\beta\sqrt{-1}$$

exprimi possit; erit:

$$(a+b\sqrt{-1})^m(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m=(a\alpha+b\alpha\sqrt{-1}+a\beta\sqrt{-1}-b\beta)^m.$$

Est enim hoc manifestum pro $m=2$ peracto calculo; valetque de quovis exponente $\mu+1$, si de $\mu$ valet. Sit enim

$$(a+b\sqrt{-1})^\mu=A+B\sqrt{-1},$$

et

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu}=A'+B'\sqrt{-1},$$

atque

$$[(a+b\sqrt{-1})\,(\alpha+\beta\sqrt{-1})]^{\mu}=A''+B''\sqrt{-1},$$

(patet nempe in elevatione ista, ut supra, præter reale nonnisi tale manere, cuius unus factor realis, alter $\sqrt{-1}$ est). Erit (per hyp.)

$$AA'+AB'\sqrt{-1}+A'B\sqrt{-1}-BB'=A''+B''\sqrt{-1};$$

adeoque partes reales, uti partes imaginariæ utrinque æquales erunt; nempe

$$AA'-BB'=A''; \quad A'B+AB'=B''.$$

Multiplicetur iam $A+B\sqrt{-1}$ per $a+b\sqrt{-1}$, ut prodeat

$$(a+b\sqrt{-1})^{\mu+1},$$

et multiplicetur $A'+B'\sqrt{-1}$ per $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, ut prodeat

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu+1},$$

ac multiplicentur hæc duo facta in se invicem; atque multiplicetur etiam

$$A''+B''\sqrt{-1} \quad \text{per} \quad (a+b\sqrt{-1})\,(\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$

ut prodeat huius potentia $(\mu+1)$-ta; et substituantur ipsis $A''$, $B''$ valores supradicti; calculo peracto, terminos terminis singillatim æquales esse patebit.

*Potest vero de quotvis ad uno plura pariter concludi, ut*

$$\sqrt[m]{A}\,\sqrt[m]{B}\,\sqrt[m]{C}\ldots=\sqrt[m]{ABC\ldots}$$

*sit (etsi imaginaria adfuerint).*

Patet vero $\sqrt[m]{-P}\,\sqrt[m]{Q}$ esse $\Longleftrightarrow \sqrt[m]{-PQ}$.

Nam $\sqrt[m]{-PQ}$ habet $m$ valores;

$$\sqrt[m]{-P} \quad \text{seu} \quad \sqrt[m]{P}\sqrt[m]{-1}$$

item $m$ valores habet, qui per quemvis valorem $x$ ipsius $\sqrt[m]{Q}$ multiplicati dant $m$ valores, quorum quivis ad $m$ elevatus $= -PQ$; neque si per aliud $x$ fiat multiplicatio, ullus alius valor prodire potest, quia tum $-PQ$ plures numero $m$ radices haberet. Aliud est, si id tantum constet, esse $z \models \sqrt[m]{P}$, et $y \models \sqrt[m]{Q}$, tum sequitur tantum $zy \models \sqrt[m]{PQ}$.

3. *Atque porro si*

$$\sqrt[m]{a} = x,$$

*est*

$$x^m = a,$$

*adeoque*

$$x^{mn} = a^n;$$

*consequenter*

$$x \models \quad \textit{sed non} \quad \mathrel{|\!\!=\!\!|} \sqrt[mn]{a^n};$$

nam $x^m$ ponitur $n$-ies ut factor in $a^n$ (id est $n$-ies posito $a$), et $x$ ipsum ponitur $mn$-ies; adeoque $x$ adest inter valores ipsius $\sqrt[mn]{a^n}$, sed hoc habet valores numero $mn$, $x$ vero nonnisi $m$ valores habet. Patet etiam esse $x = \sqrt[m]{a} \models \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}$; ita $x^n = \sqrt[m]{a^n}$, adeoque

$$x \models \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^n}}$$

$$\models \sqrt[mn]{a^n}.$$

Unde

$$\sqrt[2.3]{-1} \mathrel{|\!\!=\!\!|} \sqrt{-1},$$

nempe $\sqrt{\sqrt[3]{-1}}$ unum valorem $\sqrt{-1}$ æqualem habet.

Ita $\sqrt{-1}$ seu $(-1)^{\frac{1}{2}} \models$ sed non $\mathrel{|\!\!=\!\!|} (-1)^{\frac{2}{4}}$ seu $\sqrt[4]{1}$; valores nimirum ipsius $\sqrt{-1}$ sunt $+1i, -1i$, qui inter ipsius $(-1)^{\frac{2}{4}}$ quatuor valores

$$1,\ -1,\ +1i,\ -1i$$

adsunt; sed hic præter illos duo adhuc sunt. Non tamen hoc pacto reale ex imaginario fiet; neque enim scribitur $(-1)^{\frac{1}{2}} \mathrel{|\!\!=\!\!|} (-1)^{\frac{2}{4}}$, uti nec $1^{\frac{1}{2}} \mathrel{|\!\!=\!\!|} 1^{\frac{2}{4}}$ scribi potest; sed scribitur tantum $(-1)^{\frac{1}{2}} \models (-1)^{\frac{2}{4}}$.

4. Quoad elevationem imaginariorum, quæstio ad $\sqrt[2n]{-1}$ redit. Est $2n$ aut potentia ipsius $2$ integra, aut factum e tali et numero impari; nempe si non formæ $2 . 2 \ldots 2$ est, aliquem factorem imparem esse oportet.

$\sqrt[2^p]{-1}$ nonnisi ad $m.2^p$ elevatum dat reale, et quidem $+1$ pro $m$ pari, $-1$ pro $m$ impari.

Nam $\sqrt[2^p]{-1}$ est ipsum $-1$ præposito $p$-ies signo $\sqrt{}$; elevatur hoc ad 2, delebitur unum $\sqrt{}$, et si quid maneat, item ad 2 elevato, item unum $\sqrt{}$ delebitur: atque demum omnia $\sqrt{}$ (quæ numero $p$ sunt) nonnisi operatione $p$-ies facta delebuntur, prodibitque $-1$; est vero tum tota prior expressio ad $2^p$ elevata. Si vero idem ad $2^p+1$ elevetur, prodibit $-1.(\sqrt[2^p]{-1})^1$, si ad $2^p+2$ elevetur, fiet $-1.(\sqrt[2^p]{-1})^2$, et ita porro dum ad $2^p+2^p$ elevatum fit $-1.(\sqrt[2^p]{-1})^{2^p}=-1.-1=+1$. Ita elevando ad $3.2^p$ prodit $-1.-1.-1=-1$; atque continuando alternatim prodeunt $-1$ et $+1$, prouti cœfficiens ipsius $2^p$ impar aut par erit; pro aliis exponentibus elevationis autem signum $\sqrt{}$ cum exponente pari ex $-1$ haud delebitur.

Si vero $m$ sit impar; tum

$$\sqrt[m2^p]{-1}=\sqrt[2^p]{\sqrt[m]{-1}}=\sqrt[2^p]{-1},$$

nam unus valor ipsius $\sqrt[m]{-1}$ est $-1$, adeoque si $\sqrt[m2^p]{-1}$ ad $2^p$ elevetur, gaudebit uno valore reali.

Ex. gr. $(\sqrt[2]{-1})^2=-1$; $(\sqrt[2^2]{-1})^2=(\sqrt{\sqrt{-1}})^2=\sqrt{-1}$; $\sqrt[3.2]{-1}=\sqrt{-1}$, adeoque $(\sqrt[3.2]{-1})^2=-1$; $(\sqrt[2^3]{-1})^2=(\sqrt{\sqrt[4]{-1}})^2=\sqrt[4]{-1}$; $(\sqrt[5.2]{-1})^2=-1$ et ita porro exponenti radicali semper binarium addendo et elevando ad 2, alternatim prodibunt imaginarium et unus valor realis.

5. *Etiamsi $p, q, r, \ldots$ potentiae integrae fuerint ipsius 2, et*

$$p<q<r<\ldots$$

*adeoque*

$$q=p'p, \quad r=q'q, \ldots$$

($p', q', \ldots$ potentias integras ipsius 2 denotantibus):

$$\sqrt[p]{-1}.\sqrt[q]{-1}.\sqrt[r]{-1}\ldots$$

*nullum reale dare potest.*

Sit enim

$$\sqrt[p]{-1}\,.\,\sqrt[pp']{-1}=x;$$

erit

$$x^p=-1\,.\,\sqrt[p']{-1};$$

nam

$$x^p=(\sqrt[p]{-1}\,.\,\sqrt[p]{\sqrt[p']{-1}})^p$$

$$=(\sqrt[p]{-1})^p\,.\,(\sqrt[p]{\sqrt[p']{-1}})^p.$$

Est porro

$$(x^p)^{p'}=x^{pp'}=(-1\,.\,\sqrt[p']{-1})^{p'}$$

$$=(-1)^{p'}\,.\,-1$$

$$=+1\,.\,-1$$

$$=-1,$$

(nam $p'$ est numerus par); itaque

$$x=\sqrt[pp']{-1}$$

est imaginarium; nam $pp'$ est par.

Si vero de binis factoribus valet, valet de tribus, et ita de quotvis ad uno plures ascendere licet. Si enim novus $\sqrt[q]{-1}$ accedat, erit (substituendo)

$$x\,\sqrt[q]{-1}=\sqrt[pp']{-1}\,.\,\sqrt[pp'q']{-1};$$

sit hoc $y$;
erit

$$y^{pp'}=-1\,.\,\sqrt[q']{-1}$$

et elevando ad $q'$ erit

$$y^{pp'q'}=+1\,.\,-1=-1,$$

atque

$$y=\sqrt[pp'q']{-1}$$

item imaginarium est.

6. *Radices ipsius* $-1$ *exponentis* $2^n$ (pro quovis integro $n$) *eaedem quidem cum iis, quas formula superior pro hoc exponente dat, sed alia via formaque prodeunt.*

Paulo inferius tradita æquatione quadratica facile perspici potest. Occurrunt nempe expressiones formæ

$$\sqrt{a+\sqrt{b}},$$

quod simplicius redditur modo sequenti (et ad repetitionem evitandam post æquationem quadraticam citabitur).

Si ponatur

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{z},$$

atque

$$a=x+z;$$

demonstrabitur tam $x$ quam $z$ habere valorem, ut substituendo æquationi utrique satisfiat; valores quoque statim prodituros tales esse patebit.

E prima æquatione sequitur (elevando ad 2)

$$a+\sqrt{b}=x+z+2\sqrt{xz},$$

et substituendo $a=x+z$, fiet

$$\sqrt{b}=2\sqrt{xz},$$

et hinc

$$b=4xz,$$

et hinc (quia $a=x+z$)

$$x=a-z=\frac{b}{4z};$$

unde

$$b=4az-4z^2;$$

et hinc

$$z^2-az+\frac{b}{4}=0,$$

adeoque

$$z=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{b}{4}}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},$$

atque cum $x=a-z$ sit, $\sqrt{x}+\sqrt{z}$ quoque datur.

Applicatur hoc pro scopo præsenti sic:

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{0+\sqrt{-1}},$$

ubi

$$a=0, \quad \text{et} \quad b=-1;$$

adeoque

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}=\frac{1}{2}=z,$$

et

$$x=a-z=-\frac{1}{2},$$

atque

$$\sqrt{x}+\sqrt{z}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{-1}\;\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{-1};$$

ita $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}}$ hoc pacto prodit

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}+\sqrt{-1}\;\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt[2^3]{-1}.$$

Unde si ulterius quoque continuetur, lex formationis perspicitur facile demonstranda. Erit

$$\sqrt[2^4]{-1}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}+\sqrt{-1}\;\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}};$$

Nimirum quævis radix exponentis $2^n$ ex $-1$, constat ex duobus terminis alioquin æqualibus per $+$ connexis, præterquam quod posteriori adnectitur ut factor $\sqrt{-1}$, atque post illud $\frac{1}{2}$ quod primum signum $\sqrt{\ }$ excipit, in priore termino signum $+$, in posteriore signum $-$ est; semper autem dum uno altius ascenditur, in utroque termino, ultimo $\frac{1}{2}$, additur $+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$, post quodvis signum novum $\sqrt{\ }$ (præter ultimum) in quovis terminorum, (prioris posteriorisve) parenthesi nova interius posita; ita ut in $\sqrt[2^n]{-1}$ sint in quovis amborum terminorum signa $\sqrt{\ }$ (excepto factore $\sqrt{-1}$) numero $n-1$; nempe pro $n=2$ est 1, et semper dum $n$ uno crescit, unum novum signum $\sqrt{\ }$ in utroque accedit. Notandum vero est quodvis $\sqrt{\ }$ duos valores habere, quorum quemvis accipere licet, et nonnisi tunc valores æquales accipiendos esse, si æqualibus imaginibus præfixa sint. Ex. gr. in ultima expressione pro exponente $2^4$, (pro quo 16 valores sunt), $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$ habet 4 valores, nam uterque valor ipsius $\sqrt{\frac{1}{2}}$ combinatur cum utroque valore signi $\sqrt{\ }$ prioris; at pro quovis casu valor iste in termino priore et posteriore, ubi signo contrario afficitur, idem esse debet; interim in termino priore signum primum $\sqrt{}$ numerum valorum item per 2 multiplicat, et numerum hunc item duo signa $\sqrt{}$ in posteriore item per 2 multiplicant; ut numerus valorum fiat $2.2.2.2 = 16$.

Facile vero patet, quod si formula dicta pro $\sqrt[2^n]{-1}$ elevetur ad 2, ut prodeat $\sqrt[2^{n-1}]{-1}$, deleatur in termino utroque ad lævam unum signum $\sqrt{}$ (ut statim ostendetur), operatione eadem secunda deleatur item unum $\sqrt{}$ in utroque ad lævam; et ita porro, donec $(n-2)$-ta operatione $n-2$ signis $\sqrt{}$ deletis, maneat

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{-1},$$

quo item ad 2 elevato prodit $\sqrt{-1}$, et hoc ad 2 elevato, operatione $n$-ta demum prodit $-1$.

Si nempe $u$ nominetur generaliter quod post secundum signum $\sqrt{}$ in primo termino est; erit formula sequens:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{u}} + \sqrt{-1}\ \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{u}};$$

et hoc ad 2 elevatum est

$$\sqrt{u} + 2\sqrt{-1}\ \sqrt{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}u} = \sqrt{u} + \sqrt{-1}\ \sqrt{1-u}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \ldots}}} + \sqrt{-1}\ \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \ldots}}}$$

quia

$$u = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \ldots}}\,.$$

Ubi patet unum signum radicale ad lævam in utroque termino deleri, exponente ipsius 2 in signo radicali unitate imminuto; nempe ex $\sqrt[2^n]{-1}$ facto $\sqrt[2^{n-1}]{-1}$ et ita porro, donec operatione $n$-ies facta, $-1$ prodeat.

7. Radix igitur cuiusvis exponentis paris $m$ e quocunque negativo etiam, sub formam $a + b\sqrt{-1}$ venit (p. 125.); sed quæritur num summa

quantitatum, quæ sub hanc formam veniunt, aut hæc per reale, aut per eiusdem formæ quantitatem multiplicata aut divisa, imo etiam $(a+b\sqrt{-1})^q$ sub eandem formam veniat? Quamobrem de quantitatum complexarum, quæ terminis talibus quoque gaudere possunt, additione, subtractione, multiplicatione et divisione agere convenit. Notandum vero est, quantitatem pure imaginariam nonnisi determinatione dicta, qua afficitur (XXXII.) a reali differre, uti $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv 4$ a $\vdash\!\!\dashv 4$, adeoque omnes in intuitu exhiberi; nec scientiam, quæ præcisione evidentiaque gloriatur, meris imaginibus nullo originali gaudentibus contentam esse posse. Vide mox, dum $\sqrt{-1}$ etiam in exponentem ascendit.

XXXIII. Summa totalis est summa realium connexa cum summa pure imaginariorum (p. 121.); summa realium est illud reale positivum vel negativum, quo summæ realium positivorum et summæ realium negativorum alterutrum superat alterum, aut 0, si æquales sint; summa pure imaginariorum pariter est 0, si positivum æquale sit negativo, aut illud, quo summæ positivorum et summæ negativorum alterutrum alterum superat (p. 30). Regula additionis est:

Pro quovis pari terminorum præter cœfficientes æqualium (id est factore communi gaudentium), scribatur factor eorum communis, cum cœfficiente æquali summæ cœfficientium; summa omnium terminorum hoc modo prodeuntium, nec non terminorum reliquorum, erit æqualis summæ omnium priorum terminorum. Si inter hos terminos quoque adsint termini factore communi gaudentes, operatio toties quoties repeti poterit, donec summa quæsita forma simplicissima exhibeatur.

Quod hoc pacto summæ quæsitæ æquale prodeat, patet sic. Sint prius tantum realia.

1. *Regula valet de duobus terminis.* Sint enim

$$\alpha c+\beta c,\quad \text{aut}\quad -\alpha c-\beta c,\quad \text{aut}\quad \alpha c-\beta c,$$

(neque alius casus datur); erit $c$ aut positivum aut negativum, pariter $\alpha$ et pariter $\beta$. Sint (pro $\alpha'$, $\beta'$, $n$ integris positivis)

$$\alpha=\pm\frac{\alpha'}{n},\quad \beta=\pm\frac{\beta'}{n}\quad \text{et}\quad \frac{c}{n}=u.$$

Percurrendo casus singulos prodibit per regulam pro casu primo

$$(\alpha+\beta)c,$$

pro secundo

$$(-\alpha-\beta)c,$$

pro tertio

$$(\alpha-\beta)c.$$

Summa vera quoque eadem erit; ex. gr. pro $\alpha$ positivo et $\beta$ negativo erit

$$\alpha c=\alpha' u, \quad \beta c=-\beta' u,$$

atque

$$\alpha c+\beta c=\alpha' u-\beta' u=(\alpha'-\beta')u=\frac{(\alpha'-\beta')c}{n}=\left(\frac{\alpha'}{n}-\frac{\beta'}{n}\right)c$$
$$=(\alpha+\beta)c$$

Ita reliqui casus patent.

Si vero $\frac{\alpha'}{n}$ tendat ad $\alpha$ et $\frac{\beta'}{n}$ tendat ad $\beta$, tum $\frac{\alpha'\pm\beta'}{n}$ tendit ad $\alpha\pm\beta$ et $\frac{(\alpha'\pm\beta')c}{n}$ tendit ad $(\alpha\pm\beta)c$.

2. *Si vero certorum quotvis terminorum summa $S$ iuxta regulam vera prodierit atque accedat novum par terminorum factore communi gaudentium, quorum summa sit $s$; erit summa prius additorum simul cum novo pari ipsi $S+s$ aequalis.*

Sit enim in prius additis summa omnium positivorum $A$, et $-B$ sit summa negativorum in iis; in $S$ vero sit $a$ summa positivorum et $-b$ summa negativorum; atque novum par sit ex. gr. (pro $k$ positivo) $2k-k=k$, Aut erit $A=B$, aut $A=B+B'$ aut $A+A'=B$ (pro $A$, $B$, $A'$, $B'$. positivis).

Si $A=B$, etiam $a=b$; quia $A-B=a-b$ per hypothesim; sed $A-B=0$, ergo et $a-b=0$ quod, nisi $a=b$ sit, esse nequit.

Si $A<B$ et $A+A'=B$, tum

$$A-B=A-A-A'=-A'=a-b;$$

adeoque $b$ superat ipsum $a$ quantitate $A'$; nempe $b=a+A'$ esse debet, ut sit

$$a-(a+A')=-A' \quad \text{et} \quad a=(a+A')-A'=b-A'.$$

Superius (XIX. 2. pag. 64.) dictum est, demtione etiam per partes undevis facta, prodire æqualia, quod hic tenendum est; substitutiones etiam rite fieri statim dicetur.

Si $A=B+B'$; tum $A-B=B+B'-B=a-b$; adeoque $B'=a-b$; et hinc $a=b+B'$.

Quod substitutiones factas attinet; dum ex. gr. $a=b-A'$ substituitur ipsi $a$ in $a-b$, est tum

$$B=A+A',$$

adeoque $-B=-A-A'$ et $A-B=A-(A+A')$; ubi manifesto $-A'$ manet, (partem $A$ ipsius $B$ ex $A$ demendo); unde $a$ prodit $=b-A'$, et simul $b=a+A'$. Si iam in $a-b$ ponatur in locum ipsius $a$ valor dictus, erit $b-A'-b$, et si in locum primi $b$ ponatur valor eius $a+A'$, erit $a+A'-A'-b$, quod demto $A'$ ex $A'$ erit ipsum $a-b$. Quicunque iam fuerit casus; ex. gr. si $A+A'=B$, erit summa vera $A-B+k$

$$A-A-A'+k=-A'+k;$$

summa iuxta regulam autem est (quia tum $a=b-A'$)

$$a-b+k=b-A'-b+k=-A'+k;$$

adeoque summa iuxta regulam est summæ veræ æqualis. Manifesto vero de quotvis ad novum par concludere licet, donec (terminis quorum nulli duo factore communi gaudent omnibus præmissis) nullus amplius supersit. Possunt quidem demum termini prodeuntes ordine quocunque poni, cum per superius dicta summa prodeat eadem.

3. *Imo etsi imaginaria adfuerint, regula eadem valet.*

Exprimantur enim hæc per $X, Y, Z, V, \ldots$ sitque

$$X=x+x'\sqrt{-1}, \quad Y=y+y'\sqrt{-1}\ldots.$$

$x, x', y, y', \ldots$ realia denotandibus, ex. gr. si $X=2-3\sqrt{-1}$, est $x=2$, $x'=-3$; atque $\pm x'i$ exprimit valores ipsius $-3\sqrt{-1}$.

Substituatur (in 1.) $X$ ipsi $c$, erit pro omni casuum ibidem dictorum summa iuxta regulam summæ veræ æqualis, notando quod ibi $\frac{c}{n}=u$

sit $=\frac{x}{n}+\frac{x'\sqrt{-1}}{n}$, ubi $c$ aut tota (id est pars utraque tam realis quam imaginaria) positiva esse potest, aut utraque negativa, aut una positiva, altera negativa. Singulis casibus percursis, regulam de duobus terminis $\alpha X+\beta X$ valere patet.

Si vero de quotvis et qualibusvis terminis, quorum summa iuxta regulam sit $S$, valeat; valebit, etiamsi novum par accedat. Namque sit summa omnis realis in eousque additis $A$, et $-B$ summa negativi, ac summa omnis pure imaginarii positivi sit $I$, et $-K$ sit summa negativi; summaque omnis realis positivi in $S$ sit $a$, et $-b$ summa realis negativi, imaginarii puri vero positivi summa sit $j$, et negativi sit $-k$ (ubi horum quodvis etiam o esse possit). Erit non solum $A-B=a-b$, sed etiam $I-K=j-k$ (per hyp.): atque ut supra, pro quovis casuum, ubi aut $A=B$, aut $A+A'=B$, aut $A=B+B'$, erit aut $I=j$, aut $I+I'=K$, aut $I=K+K'$; quos singulos combinando regulæ generalitas prodit.

Ex. gr. Sit $A=B+B'$, et $K=I+I'$; erit (per superiora) $a=b+B'$, et $j=k-I'$, omnibus literis positiva denotantibus; accedat novum par, ex. gr. $3X-2X$; erit summa iuxta regulam $a-b+j-k+X$; est vero summa vera $A+x-B+I+x'\sqrt{-1}-K$; sint nunc reale $x$ et pure imaginarium $x'\sqrt{-1}$ positiva, pariter pro aliis valoribus patet. Substituendo valores ipsorum $A, K, a, j$ in summa vera, et summa iuxta regulam, erit prior

$$B+B'+3x-B-2x+I+3x'\sqrt{-1}-I-I'-2x'\sqrt{-1},$$

et posterior est

$$b+B'+x-b+k-I'+x'\sqrt{-1}-k;$$

atque utrumque demtis demendis est

$$=B'+x+x'\sqrt{-1}-I'.$$

Consequenter quum et hic semper ad novum par assurgere liceat (ut antea), evidens est, sive tantum realia, sive tantum imaginaria, sive permixta fuerint, regulam additionis valere. Imo etiam si expressioni e quotvis terminis constanti, cujus valor sit ex. gr. $+\alpha - I$, addatur per regulam expressio, cuius valor sit ex. gr. $-\beta + j$; prodibit summa vera $\alpha - \beta + j - I$ (denotantibus $j$, $I$ pure imaginaria). Unde si expressionibus valorum æqualium expressiones valorum æqualium addantur juxta regulam, æqualia prodibunt.

4. *Regula subtractionis* in promptu est: nempe signis suhtrahendi inversis, mutatur subtrahendus, si reale sit, in oppositum; idem fieri etiam cum imaginariis, clarum est; ex. gr. $-X$ et $+X$ opposita sunt, nam si $X = \vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv x \vdash\!\!\dashv x'i$ erit $-X = \vdash\!\!\dashv x \vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv x'i$, est vero $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv x$ ipsius $\vdash\!\!\dashv x$ oppositum, ita $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv x'i$ ipsius $\vdash\!\!\dashv x'i$; ita quotvis fuerint $X + Y + \ldots$ erit $-X - Y - \ldots$ oppositum summæ realium, quæ $X + Y + \ldots$ continet, et summæ pure imaginariorum, quæ in iisdem adsunt. Itaque si *subtrahendus* signis inversis alteri *(minuendo)* juxta regulam addatur, *differentia* prodit.

5. *Factum* vero reperitur, si multiplicandi terminus quivis per terminum quemvis multiplicatoris, ubicunque regulæ (pag. 122.) applicari possunt, iuxta illas multiplicetur; aut pro notis quantitatum generalibus factum e dictis terminis eiusmodi omnibus ita exprimatur, ut notis generalibus quidvis substituendo verum factum exhibeatur; aut saltem legem signorum $+$, $-$ tenendo, factores post se invicem scribantur; et factores ita ordinentur formenturque, ut factum eiusmodi quo simplicius prodeat, ac denique facta omnia partialia addantur.

Nam sint prius tantum realia; sitque unus factor $A + B$, alter vero sit $C$, aut $C + D$, (quodvis ipsorum $A, B, C, D$ sive positivum sive negativum denotaverit): erit factum in casu primo

$$AC + BC,$$

in secundo

$$AC + BC + AD + BD.$$

Denotent enim $a$, $b$, $c$, $d$ positiva, et sit (pro integris $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $n$)

$$a = \frac{a'}{n}, \quad b = \frac{b'}{n}, \quad c = \frac{c'}{n}, \quad d = \frac{d'}{n},$$

sitque ipsius $A$ valor aut $a$ aut $-a$, ipsius $B$ valor aut $b$ aut $-b$, &c. Erunt casus sequentes:

$$(a+b)\ (c+d),\ (-a-b)\ (-c-d),\ (a+b)\ (-c-d)$$
$$(a+b)\ (c-d),\ (a-b)\ (c-d);$$

nempe si in uno factore tantum $c$ sit, $d=0$ poni potest, et aut singuli termini positivi erunt, aut singuli negativi; aut in uno factore ambo positivi in altero ambo negativi, aut in uno uterque terminus positivus et in altero unus positivus, alter negativus; aut in utroque unus positivus, alter negativus.

Percurrantur casus: sicubi $a+b$ est,

$$\text{aut}\quad a=b,\quad \text{aut}\quad a=b+q,\quad \text{aut}\quad b=a+r;$$

et ubi $c-d$ est, pariter est

$$\text{aut}\quad c=d,\quad \text{aut}\quad c=d+s,\quad \text{aut}\quad d=c+t,$$

ipsis $q$, $r$, $s$, $t$ positiva denotantibus.

Est $(a+b)\ (c+d)$ iuxta regulam (pag. 59 et 68)

$$ac+bc+ad+bd=\frac{a'c'}{nn}+\frac{b'c'}{nn}+\frac{a'd'}{nn}+\frac{b'd'}{nn}$$
$$=\frac{a'+b'}{n}\cdot\frac{c'+d'}{n},$$

quæ est summa vera; nam

$$a+b=\frac{a'+b'}{n}\quad \text{et}\quad c+d=\frac{c'+d'}{n}.$$

Si omnia negativa sint, manifesto idem prodit; si vero unus factor negativus sit, idem quidem, sed negativum fit.

Considerentur iam casus $(a+b)\ (c-d)$ omnes. Erit pro $c=d$ factum verum 0, et factum iuxta regulam

$$ac-ad+bc-bd,$$

item 0.

Pro $c = d + s$, est factum verum $(a+b)s$, atque et facti iuxta regulam valor est $as + bs$; nam

$$ac = a(d+s) = ad + as,$$

ita

$$bc = b(d+s) = bd + bs;$$

adeoque

$$ac - ad + bc - bd = as + bs.$$

Pro $d = c + t$ factum verum est $-at - bt$, et idem valor facti iuxta regulam est; nam

$$-ad = -ac - at$$

et

$$-bd = -bc - bt;$$

unde patet.

Si vero $(a-b)(c-d)$ fuerit; pro $a = b$ factum verum $0$ est, et idem iuxta regulam fieri clarum est. Ita si $b = a + r$ vel $a = b + q$; ex. gr.

Si $a = b + q$, erit factum verum

$$q(c-d) = qc - qd$$

(per præcedentia); iuxta regulam vero

$$(b+q)\ c - bc - (b+q)d + bd = qc - qd.$$

Est vero per superiora factum idem etiam permutatis factoribus, atque monomia per monomiam quoque iuxta legem signorum rite multiplicatur; idemque est, quæcunque per alteram multiplicetur. Consequenter summa duorum terminorum realium qualiumvis per summam duorum realium terminorum qualiumvis multiplicatum, est æqualis summæ factorum e termino utroque multiplicandi et termino utroque multiplicatoris.

Si vero de duobus terminis valet regula, valet de tribus, et ita de quotvis ad uno plura concludere licet. Denotent enim iam literae sive positiva sive negativa, et sit $a$ summa terminorum multiplicatoris, $A$ summa terminorum multiplicandi; atque $a'$ sit unus terminus multiplicatoris, reliquorum summa sit $b$, et $b'$ unus terminus eorum, quorum summa est $b$, reliquorum summa sit $c$; et $c'$ unus terminus eorum, quorum summa est $c$, ac reliquorum summa sit $d$, et ita porro usque ad terminum ultimum; ita $A'$ sit unus terminus multiplicandi, et reliquorum summa sit $B$, ac $B'$ sit unus terminus eorum, quorum summa est $B$, et summa reliquorum sit $C$ &. Sit ex. gr. ultimus multiplicatoris terminus $c$, multiplicandi sit $D$. Erit (per præcedentia)

$$aA = (a'+b)A = a'A + bA,$$

est vero

$$a'A = a'(A'+B) = a'A' + a'B;$$

et

$$a'B = a'(B'+C) = a'B' + a'C,$$

atque

$$a'C = a'(C'+D) = a'C' + a'D.$$

Itaque

$$a'A = a'A' + a'B' + a'C' + a'D,$$

ita

$$bA = (b'+c)A = b'A + cA;$$

eritque ut prius

$$b'A = b'A' + b'B' + b'C' + b'D.$$

Ita

$$cA = cA' + cB' + cC' + cD.$$

Quod cum quotvis fuerint termini, usque ad ultimum in utroque factore continuare liceat; manifesto factum summa ex factis omnibus e singulis terminis multiplicatoris per singulos multiplicandi est.

Quoad casum autem, si imaginaria adfuerint, regulam valere patet sic.

Retentis denotationibus $X, Y, \ldots, Z, V, \ldots$ (p. 138) sed proximis haud retentis, si realium $A, B, C, \ldots$ summa sit $\alpha$, est

$$AX + BX + \ldots = \alpha X.$$

Nam

$$AX = A(x + x'\sqrt{-1}) = Ax + Ax'\sqrt{-1}$$

(quia $AX$ factum iuxta definitionem denotare debet). Ita

$$BX = Bx + Bx'\sqrt{-1},$$
$$CX = Cx + Cx'\sqrt{-1},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

adeoque

$$\begin{aligned} AX+BX+\ldots &= Ax+Bx+\ldots+Ax'\sqrt{-1}+Bx'\sqrt{-1}+\ldots \\ &= (A+B+\ldots)x+(A+B+\ldots)x'\sqrt{-1} \\ &= \alpha x+\alpha x'\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

quod per definitionem factum ex $\alpha$ et $X$ est. Nempe si (pro integris $A', B', n$) sit

$$A=\frac{A'}{n},\ B=\frac{B'}{n},\ u=\frac{x'i}{n},$$

et accipiatur ex. gr. $+1i$ pro valore ipsius $\sqrt{-1}$ ubique, erit:

$$Ax'i=\frac{A'}{n}x'i=A'u;$$

unde

$$A'u+B'u=(A'+B')u=(A+B)x'i.$$

Imo etsi $\frac{A'}{n}\backsim a$, vel etiam $\frac{B'}{n}\backsim B$, erit

$$\frac{A'+B'}{n}x'i\backsim(A+B)x'i,$$

quod ad plura quoque extendi clarum est.

Ita

$$AY+BY+\ldots=\alpha y+\alpha y'i;$$

idem pariter continuari potest, quotvis post $X, Y,\ldots$ fuerint. Consequenter si quodvis ipsorum $X, Y,\ldots$ per quodvis ipsorum $A, B,\ldots$ multiplicetur, prodibit

$$\alpha(x+y+\ldots)+\alpha(x'i+y'i+\ldots),$$

nempe factum iuxta definitionem.

Consideretur iam $XZ$; exprimet hoc factum ex $x+x'i$ et $z+z'i$ (ubique $+1i$ pro valore ipsius $\sqrt{-1}$ sumendo, posset ubique $-1i$ sumi). Per definitionem multiplicationis $XZ$ denotabit

$$xz+xz'i+zx'i-x'z',$$

nempe $x'\sqrt{-1}\,.\,z'\sqrt{-1}=-x'z'$ (p. 122).

Si ipsius $x'i, y'i,\ldots$ terminus quivis per terminum quemvis ipsius $z'i+v'i+\ldots$ multiplicetur, manifesto (ut pag. 140. sequ.) factum ex

$(x'i+y'i+\ldots)(z'i+v'i+\ldots)$ prodibit, cum omnia ibidem dicta heic locum habeant, nisi quod ibi quoad $+1$, hic quoad $-1$ fiat multiplicatio. Erit vero hoc factum

$$-x'z'-x'v'-y'z'-y'v';$$

ita

$$(x'i+y'i)(z'i+v'i)=-(x'+y')(z'+v')$$

Sit iam unus factor

$$A+B+\ldots+X+Y\ldots,$$

alter sit

$$a+b+\ldots+Z+V\ldots;$$

et summa realium $A, B,\ldots$ sit $\alpha$, summa realium $a, b,\ldots$ sit $\beta$, atque, summa realium in $X+Y+\ldots$ sit $R$, pure imaginoriorum sit $I$ et summa realium in $Z+V+\ldots$ sit $r$, pure imaginariorum sit $j$. Multiplicatis singulis terminis unius factoris per singulos alterius prodibit

$$\begin{aligned}&\beta\alpha+\beta X+\beta Y+\ldots+\alpha Z+\alpha V+\ldots\\&\quad+ZX+ZY+\ldots+VX+VY+\ldots=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\beta\alpha&+\beta x+\beta y+\ldots+\beta x'i+\beta y'i+\ldots\\&+\alpha z+\alpha v+\ldots+\alpha z'i+\alpha v'i+\ldots\\&+zx+zy+\ldots+vx+vy+\ldots\\&+zx'i+zy'i+\ldots+vx'i+vy'i+\ldots\\&+xz'i+yz'i+\ldots+xv'i+yv'i+\ldots\\&+(-x'z'-y'z'-\ldots-x'v'-y'v'-\ldots),\end{aligned}$$

ubi expressio in parenthesi $=(x'i+y'i+\ldots)(z'i+v'i+\ldots)$, quod plane factum iuxta definitionem est, cum

$$\begin{aligned}R&=x+y+\ldots, & I&=x'i+y'i+\ldots,\\ r&=z+v+\ldots, & j&=z'i+v'i+\ldots,\end{aligned}$$

adeoque factum esse debet

$$\begin{aligned}&(\alpha+x+y+\ldots)(\beta+z+v+\ldots)+(\alpha+x+y+\ldots)(z'i+v'i+\ldots)\\&+(\beta+z+v+\ldots)(x'i+y'i+\ldots)+(x'i+y'i+\ldots)(z'i+v'i+\ldots);\end{aligned}$$

et hoc prodiisse manifestum est, nempe

$$(\alpha+R)(\beta+r)+(\alpha+R)j+(\beta+r)I+Ij.$$

6. *Divisio quantitatum complexarum* fit modo sequenti. E quolibet termino dividendi per quemvis divisoris diviso prodeat quotus $a$, hoc $a$ per totum divisorem multiplicatum e dividendo subtrahatur; atque illi, quod in quoto prodiit, addatur semper quotus novus, quem e quovis *termino differentiæ novissimæ* per quemvis divisoris diviso reperire licet; atque novissimo quoto per totum divisorem multiplicato, et facto e novissima differentia subtracto, operatio continuetur, donec differentia aut $=0$ sit, aut si alicubi subsistere libeat, atque summa omnis, quod eousque in quoto prodiit sit $q$, differentia sit $r$, divisor sit $d$, et dividendus $D$; erit $q+\frac{r}{d}=D:d$. Dicitur $\frac{r}{d}$ complementum quoti.

Prodeat enim prius $a$, postea $b$, adeoque $q=a+b$; erit differentia prima

$$=D-da,$$

secunda erit

$$=D-da-db=D-d(a+b)=D-dq,$$

adeoque complementum erit $\frac{D-dq}{d}$; est autem

$$\left(q+\frac{D-dq}{d}\right)d=\frac{qd+D-dq}{d}d=D.$$

Quotvis adhuc post $a,b$ fuerint, idem applicari patet.

Sint exempla quædam ad multiplicationem, divisionemque, in quibus et additio subtractioque occurrit.

7. *Erit*

$$(a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)(a-b) = a^2-2ab+b^2;$$
$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2-\beta^2.$$

Ita

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b.$$

Hinc etiam

$$[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b),$$

si nempe $a+b$ ipsi $\alpha$ et $c$ ipsi $\beta$ in factore priore, tum $c$ ipsi $\alpha$ et $a-b$ ipsi $\beta$ in altero substituantur. Idem valor est æqualis facto quod prodit multiplicatione duorum primorum peracta; quod inferius citabitur. Peragatur multiplicatio:

$$\begin{array}{r} (a+b)^2-c^2 \\ \underline{c^2-(a-b)^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &(a+b)^2c^2-c^4-(a+b)^2(a-b)^2+c^2(a-b)^2= \\ &=(a^2+2ab+b^2)c^2+c^2(a^2-2ab+b^2)-[(a+b)(a-b)]^2-c^4= \\ &=2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4; \end{aligned}$$

nam $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ et $(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$.

8. *Multiplicetur*

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{\beta ab-\beta^2a}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}+\frac{\alpha b-\beta a}{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{-1} \textit{ per } \alpha+\beta\sqrt{-1};$$

prodibit

$$a+\frac{\beta\alpha b-\beta^2a}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2b-\alpha\beta a}{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{-1}$$

$$+\frac{\beta a}{\alpha}\sqrt{-1}+\frac{\beta^2\alpha b-\beta^3a}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\sqrt{-1}+\frac{\beta^2a-\alpha\beta b}{\alpha^2+\beta^2};$$

quod si termini quorum $\sqrt{-1}$ factor communis est, ad denominationem eandem reducantur, tertio termino per $\alpha$, quarto per $\alpha^2+\beta^2$ supra et infra multiplicato, erit pure imaginarii summa $b\sqrt{-1}$, atque summa terminorum reliquorum nempe primi, secundi et ultimi $a$. Adeoque factum:

$$=a+b\sqrt{-1}.$$

Unde qualiumvis realium et qualiumvis pure imaginariorum summa per $a+b\sqrt{-1}$ expressa, dividatur per summam ipsius $\alpha$ summæ realium et ipsius $\beta\sqrt{-1}$ summæ pure imaginariorum; datur quotus, atque is multiplicandus in schemate est.

9. *Elevetur* $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$ *seu* $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha i$ *ad* 3 (p. 123).

Erit

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha i \text{ multiplicatum per}$$

$$\underline{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha i}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\alpha i-\frac{1}{4}\alpha i-\frac{1}{4}\alpha^2=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha i-\frac{1}{4}\alpha^2, \text{ quo item multiplicato per}$$

$$\underline{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha i} \text{ prodibit:}$$

$$-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\alpha i+\frac{1}{8}\alpha^2+\frac{1}{8}\alpha i+\frac{1}{4}\alpha^2-\frac{1}{8}\alpha^2\alpha i,$$

quod substituendo 3 ipsi $\alpha^2$ (p. 124) est

$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}3+\frac{2}{8}3+\frac{2}{8}\alpha i+\frac{1}{8}\alpha i-\frac{3}{8}\alpha i=1.$$

Dictum nimirum (p. 122) est pure imaginaria quoad $-1$ multiplicari.

10. *Si*

$$a\sqrt[p]{P^n}+\frac{1}{b\sqrt[q]{Q^m}}$$

*multiplicandum sit per*

$$b\sqrt[q]{Q^m}-\frac{1}{a\sqrt[p]{P^n}}$$

*erit factum*

$$ab\sqrt[pq]{P^{nq}\,Q^{mp}}-\frac{1}{ab\sqrt[pq]{P^{nq}\,Q^{mp}}}.$$

Nimirum duorum factorum intermediorum summa est o; et $P^{\frac{n}{p}}=P^{\frac{nq}{pq}}$ (p. 129.), ita $Q^{\frac{m}{q}}=Q^{\frac{mp}{pq}}$; atque $\sqrt[p]{P^n}$ habet $p$ valores, qui cum $\sqrt[q]{Q^m}$ combinati dant valores numero non maiore, quam $pq$, qui omnes adsunt inter valores numero $pq$ ipsius $\sqrt[pq]{P^{nq}\,Q^{mp}}$. Unde etiam regula pro talibus casibus liquet; nempe

$$a\sqrt[p]{P^n}\,.\,b\sqrt[q]{Q^m}=ab\sqrt[pq]{P^{nq}\,Q^{mp}};$$

quod etiam ad plures factores quotvis, exponentibus fractis ad denominationem eandem reductis, extendi patet.

11. Evenit etiam sæpius, ut in pluribus terminis expressiones signo $\sqrt{}$ affectæ primo obtuitu quidem per additionem simplicius exprimi nequeant; sed transformatione aliqua hoc obtineatur. Sit ex. gr.

$$2\sqrt{a^2\sqrt{b^2c}} - a\sqrt{b\sqrt{c}};$$

est hoc

$$= a\sqrt{b\sqrt{c}};$$

nam quicunque valores substituantur ipsis $a$, $b$, $c$, est

$$\sqrt{b^2c} = b\sqrt{c},$$

et

$$2\sqrt{a^2\sqrt{b^2c}} = 2a\sqrt{\sqrt{b^2c}} = 2a\sqrt{b\sqrt{c}}.$$

In genere pro $\alpha\sqrt[m]{\beta}$ scribi $\sqrt[m]{\beta\alpha^m}$, atque illud pro hoc potest; est nempe

$$\alpha = \alpha^{\frac{m}{m}},$$

et

$$\alpha^{\frac{m}{m}}\beta^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\alpha^m}.\sqrt[m]{\beta} = \alpha\sqrt[m]{\beta}.$$

Unde patet modus, *factorem signo $\sqrt{}$ praepositum introducendi, aut quantitatem, quae signo $\sqrt{}$ subest, educendi.*

12. Si *$A\sqrt[m]{a}$ dividendum per $B\sqrt[m]{b}$* sit, *erit*

$$A\sqrt[m]{a} : B\sqrt[m]{b} = \frac{A}{B}\cdot\sqrt[m]{\frac{a}{b}};$$

nam $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ (p. 105.). Ita

$$A\sqrt[p]{P^n} : B\sqrt[q]{Q^m} = \frac{A}{B}\sqrt[pq]{\frac{P^{nq}}{Q^{mp}}};$$

nam $\sqrt[p]{P^n} = \sqrt[pq]{P^{nq}}$ et $\sqrt[q]{Q^m} = \sqrt[pq]{Q^{mp}}$,

atque

$$\frac{\sqrt[pq]{P^{nq}}}{\sqrt[pq]{Q^{mp}}} = \sqrt[pq]{\frac{P^{nq}}{Q^{mp}}}$$

13. *Sit dividendum $x^n - 1$ per $x - 1$*, quod item sæpe occurrit. Erit schema operationis sequens.

$$
\begin{array}{r|l|l}
x-1 & x^n-1 & x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1 \\
 & *\mp x^{n-1} & \\ \hline
 & x^{n-1}-1 & \\
 & *\mp x^{n-2} & \\ \hline
 & x^{n-2}-1 & \\
 & \vdots \quad \vdots & \\ \hline
 & x^2-1 & \\
 & *\mp x & \\ \hline
 & x-1 & \\
 & *\mp 1 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Nempe $x^n$ per $x^1$ diviso prodit $x^{n-1}$; nam (p. 103) si quantitas eadem elevata sit, in multiplicatione exponentes adduntur, in divisione subtrahitur exponens divisoris ex exponente dividendi; multiplicando per quotum $x^{n-1}$ divisorem totum, omnino $x^n$ prodit, quo subtracto $x^n$ deletur; adeoque in casibus similibus stellula tantum scribitur; $-1.\ x^{n-1}=-x^{n-1}$ quo ex $-1$ substracto, (proprie $x^n-x^{n-1}$ esset ex $x^n-1$ substrahendum), prodit differentia $x^{n-1}-1$; atque eadem operatione juxta regulam continuata, si $n$ integer positivus sit, aliquando manebit $x^2-1$, unde e schemate patet quotum esse seriem ad dextram, et differentiam ultimam o esse. Ita:

$$(x^n-a^n):(x-a)=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-1}.$$

14. *Sit* 1 *per* $1-x$ *dividendum.* Erit schema sequens:

$$
\begin{array}{r|l|l}
1-x & 1 & 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\dfrac{x^n}{1-x}, \\
 & *\mp x & \\ \hline
 & x & \\
 & *\mp x^2 & \\ \hline
 & x^2 & \\
 & *\mp x^3 & \\ \hline
 & x^3 & \\
 & \vdots \quad \vdots & \\ \hline
 & x^{n-1} & \\
 & *\mp x^n & \\ \hline
 & x^n &
\end{array}
$$

quod, quum complementum adsit, verus quotus est (p. 145); at

$$1 + x^2 + x^2 + x^3 + \ldots$$

tunc tantum quotus est, dum complementum $\backsim 0$, quod fieri, si $x < 1$, statim probabitur.

Dicitur eiusmodi *series convergens*, cuius summa terminorum limite finito gaudet. Seriem, quæ quantitatem finitam exprimit, talem esse debere clarum est, ut valor errore dato quovis minore exhiberi queat; imo eo quoque nitendum est, ut si apud quemvis terminum subsistere libuerit, duæ quantitates quam proximæ assignari queant, intra quas valor complementi cadat.

15. *E schemate hoc etiam fluit sequens:*

$$\frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

quod itaque est

$$= \frac{1-x^n}{1-x};$$

et multiplicando utrumque per $a$ est

$$a + ax + ax^2 + \ldots + ax^{n-1} = \frac{a-ax^n}{1-x};$$

dicitur vero series, cujus quivis terminus per idem (quod exponens seriei audit) multiplicatus producit sequentem, *geometrica;* cujus igitur si primus terminus $a$ sit, exponens $e$, erit $n$-tus terminus $ae^{n-1}$; qui si tanquam ultimus $u$ dicatur, erit summa

$$\frac{a-ue}{1-e} = \frac{ue-a}{e-1};$$

quod si $e < 1$ sit, tendit ad $\frac{a}{1-e}$; nam tunc $\frac{ue}{1-e}$ tendit ad 0, quia $ue = ae^n$ et $e^n$ tendit ad 0, si $n$ tendat ad infinitum (ut statim patebit), unde etiam $ae^n \backsim 0$.

Casus si $e = 1$, adeoque $ue = a$ et $\frac{a-eu}{1-e} = \frac{0}{0}$ excipitur (p. 45); quomodo reperiatur in eiusmodi casibus valor verus, formulæ alioquin generalis, infra tradetur. Facile patet esse limitem valoris formulæ, dum $e$ tendit ad $1$.

Quod $e^n \backsim 0$, si $e \lessdot 1$ et $n \backsim \infty$, patet sic. Etsi denominator ipsius $e$ numeratorem unitate superet, sitque

$$\vdash\!\!\!+ e = \frac{h}{h+1}$$

erit

$$\vdash\!\!\!+ e^n = \frac{h^n}{(h+1)^n};$$

Si $h+1$ per se $n$-ies multiplicetur, facile patet (tam e binomio statim tradendo, quam de $n$ prius $= 2$ posito et semper uno altius ascendendo) esse priores duos terminos $h^n + nh^{n-1}$ et esse

$$(h+1)^n > h^n + nh^{n-1};$$

itaque

$$e^n \lessdot \frac{h^n}{h^n + nh^{n-1}},$$

itaque et numeratorem et denominatorem per $h^n$ dividendo, est

$$e^n \lessdot \frac{1}{1+\frac{n}{h}},$$

quod tendit ad $0$, quia $n$, adeoque $n \cdot \frac{1}{h}$ tendit ad $\infty$.

Unde etiam supra $\frac{x^n}{1-x} \backsim 0$, si $x \lessdot 1$ et $n \backsim \infty$, atque limes summæ seriei

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$\frac{1}{1-x}$ est; nam summa terminorum usque ad quemvis $u$ est $\frac{1-ux}{1-x}$, et differentia huius ab $\frac{1}{1-x}$ est $\frac{ux}{1-x}$, quod tendit ad $0$.

16. Series innumerabiles dantur iuxta legem, qua termini se invicem excipiunt. Unam tamen magis obviam, de qua iam (p. 32) mentio facta est, subiungere libet: nempe cuius formula est sequens,

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots,\ a+(n-1)d.$$

cuius summa prodit, si modo sequenti sibi addatur. Dicatur summa $s$, ultimus nempe $n$-tus terminus

$$a+(n-1)\,d=a+nd-d$$

sit $U$; eritque

$$a+a+d\qquad+a+2d\qquad+\ldots+U=s,$$

et

$$U+a+(n-2)\,d+a+(n-3)\,d+\ldots+a=s,$$

atque

$$(a+U)\,n=2s\,;$$

nam summa paris post $a+U$ eadem erit; quum superius addatur $d$, inferius subtrahatur et in quovis sequente pari ipsi $a+U$ addatur $d-d$.

Unde

$$s=\frac{(a+U)n}{2}.$$

*Exempla.*

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{3.3.3}+\ldots\frown\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

$$1+(1+2)+(1+2.2)+(1+3.2)+\ldots+\big(1+(n-1)2\big)=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2,$$

quæ summa numerorum imparium ab 1 usque ad $n$-tum inclusive est.

17. Dicitur $a$, $a+d$, $a+2d, \ldots$, $a+(n-1)\,d$ *series arithmetica* 0-*ti ordinis, si* $d=0$, *secus* dicitur *ordinis primi*; et omnes vocantur series arithmeticæ, quæ ex hac modo sequenti formantur; scilicet series, cuius quilibet $n$-tus terminus est æqualis summæ terminorum seriei ordinis $m$-ti a primo usque ad $n$-tum inclusive, dicitur *series arithmetica ordinis* $(m+1)$-ti.

Si $a=1$ sit, series ordinis secundi

| | | |
|---|---|---|
| (pro $d=1$) | erit | 1, 3, 6, 10, ... |
| (pro $d=2$) | | 1, 4, 9, 16, ... |
| (pro $d=3$) | | 1, 5, 12, 22, ... |

atque series ordinis tertia

| | | |
|---|---|---|
| (pro $d=1$) | erit | 1, 4, 10, 20, ... |
| (pro $d=2$) | | 1, 5, 14, 30, ... |
| (pro $d=3$) | | 1, 6, 18, 40, ... |

Vocantur *numeri* serierum harum, priorum (*quæ ordinis secundi sunt*) *polygonales*, et quidem *numeri* seriei prioris *triangulares*, sequentis *quadrangulares*, insequentis *pentagonales* et ita porro, propter quod globuli numeris illis in tales formas disponi queant. Serierum ordinis tertii numeri vero dicuntur *pyramidales*, cum globuli seriei primæ in pyramides basis triangularis, secundæ in pyramides basis quadratæ, tertiæ in pyramides basis pentagonalis & exstrui queant; nempe si $n$-tus terminus seriei tertii ordinis sit, pro fundamento ponitur terminus $n$-tus seriei ordinis secundi, e qua illa exorta est, ei superponitur terminus huius $(n-1)$-tus et ita porro usque quo primus terminus (nempe 1) huius seriei apicem claudat.

18. Erat superius *$a+b$ per se multiplicatum; quaestio succurrit, quidsi adhuc semel per idem multiplicetur, aut quidsi id $n$-ies fiat?* et quid si eadem operatio cum tribus aut quatuor vel pluribus terminis suscipiatur?

Si $a+b$ per se multiplicetur, prodit

$$a^2+2ab+b^2;$$

si $(a+b+c)$ per se multiplicetur, prodit

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

seu summa cuiusvis termini ad 2 elevati, necnon duplum termini cuiusvis per summan antecedentium multiplicati. Si vero hoc de summa $s$ numero $m$ terminorum constet, etiam de uno pluribus constat; sit enim $t$ terminus novus; erit

$$(s+t)^2 = s^2+2st+t^2;$$

in $s^2$ adest cuiusvis terminorum priorum potentia secunda, necnon quivis terminus priorum per duplam summam antecedentium multiplicatus, cui modo accessit $2st$ et $t^2$.

Ita summæ terminorum quotvis potentia tertia est æqualis summæ cuiusvis termini ad 3 elevati, necnon tripli cuiusvis termini per secundam potentiam summæ antecedentium multiplicati, atque termini cuiusvis ad 2 elevati per triplam summam antecedentium multiplicati. Verum enim hoc est $(a+b)$ aut $(a+b+c)$ ad 3 elevato; et si verum de $s$ æquali summæ numero $m$ terminorum, verum etiam accedente termino $t$ est; nempe

$$(s+t)^3 = s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3,$$

unde ut prius patet.

Altior etiam potentia quævis ita elaborari potest; sed reliquis supersedendo expressio tantum ipsius $(a+b)^n$ quæritur pro quovis integro $n$.

XXXIV. *Quaeritur expressio ipsius $(a+b)^n$ pro quovis integro $n$.*

Ultro patet formulam simpliciorem fieri, si pro $(a+b)$ stet $(1+x)$; nec difficile est ex $(a+b)$ ipsum $a$ per $a$ dividendo in 1 mutare, sed tum ultro patet totam quantitatem, quæ operationi elevationis subest, dividendam esse, atque tum quærere, quoties sit maior vel minor nova quantitas, nempe $(a+b)$ per $a$ divisa, quam prior, si utraque ad $n$ elevatur? Est

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^n = \frac{(a+b)^n}{a^n};$$

itaque

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n . a^n = (a+b)^n.$$

Transformatio ista sæpius in aliis casibus quoque usui erit. Simili modo quivis factor e quovis termino binomii ad exponentem elevati tolli potest. Ex. gr.

$$(\alpha^p + \beta y^q)^r = \left(\frac{\alpha^p}{y^q}+\beta\right)^r . y^{rq} = (\alpha^p y^{-q} + \beta)^r . y^{rq},$$

nam

$$\left(\frac{\alpha^p+\beta y^q}{y^q}\right)^r . y^{rq} = \frac{(\alpha^p+\beta y^q)^r}{y^{qr}} y^{rq} = (\alpha^p+\beta y^q)^r.$$

Reperitur quidem sine hoc artificio quoque $(a+b)^n$; sed quia per se simplicior casus est, consideretur $(1+x)^n$. Est

$$(1+x)^2 = x^2 + 2x + 1,$$
$$(1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$
$$(1+x)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$
$$(1+x)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1.$$

Ita ulterius quoque computando, animadverti possunt sequentia.

1. Exponens summus ipsius $x$ est exponenti binomii æqualis, et in quovis sequenti termino uno decrescit, usquequo in ultimo $x^0 = 1$ fiat. Unde etiam patet idem de quovis exponente uno altiore; nam si talis series per $1+x$ multiplicetur, 1 exponentem ipsius $x$ non, $x$ vero quemvis uno augebit.

2. In quavis harum serierum sunt coefficientes a primo ad dextram usque ad ultimum, et ab ultimo ad lævam usque ad primum iidem.

3. Sint in serie tali per $1+x$ multiplicanda, $\alpha x^m + \beta x^{m-1}$ duo termini quivis proximi; erit $\alpha x^m \,.\, 1 = \alpha x^m$, nec ullus alius terminus per 1 multiplicatus $x^m$ producet, $\beta x^{m-1} \,.\, x$ vero $= \beta x^m$, neque ullus alius terminus per $x$ multiplicatus $x^m$ producet; itaque coefficiens ipsius $x^m$ in facto erit $(\alpha + \beta)$.

4. Coefficiens termini primi est 1, coeff. secundi est coeff. primi per exponentem, quem $x$ in hoc habet, multiplicatus, at coeff. secundi per exponentem, quem $x$ in hoc habet, multiplicatus, est duplum coefficientis tertii; et ita porro in omnibus his casibus, coefficiens termini $m$-ti per exponentem, quem $x$ in termino $m$-to habet, multiplicatus, est $m$-tuplum coefficientis $(m+1)$-ti.

Unde si hoc de $(1+x)^{n-1}$ valeat, erit

$$(1+x)^{n-1} = x^{n-1} + (n-1)\,x^{n-2} + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}\,x^{n-3} + \\ + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2 \cdot 3}\,x^{n-4} + \ldots + x^0;$$

nimirum duplum eius, quod quæritur, per 2 dividi debet, uti triplum per 3, in genere $m$-tuplum per $m$.

Si vero de $(1+x)^{n-1}$ valet, valet etiam de $(1+x)^{n-1}\,(1+x)$, id est

$(1+x)^n$. Invertatur enim series, ut simplicius fiat (in casibus elaboratis nimirum series coefficientium eadem antrorsum et retrorsum est); erit

$$(1+x)^{n-1} = 1 + \mathrm{I}\,x + \mathrm{II}\,x^2 + \mathrm{III}\,x^3 + \ldots,$$

si

$$\mathrm{I} = n-1,$$

$$\mathrm{II} = \frac{(n-1)\,(n-2)}{1.2},$$

$$\mathrm{III} = \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.2.3},$$

et ita porro in infinitum; nam sicubi ex $n$ subtrahitur $n$, factor is fit $0$ in numeratore, adeoque cum factor is iuxta legem hanc semper maneat, abinde omnes termini sunt $0$; plane antea vero, dum ipso $n$ uno minus (nempe $n-1$) subtrahitur ex $n$, manet $1$, fitque hoc ad exponentem $(n-1)$ ipsius $x$: nempe exponens ipsius $x$ est æqualis numero, qui ex $n$ ultimo subtrahitur [pro $(1+x)^{n-1}$], atque tum coefficiens est

$$\frac{(n-1).(n-2)\ldots\ldots 2.1}{1.2\ldots\ldots(n-2)\,(n-1)} = 1.$$

Sit iam in serie ipsius $(1+x)^{n-1}$ quivis exponens ipsius $x$, ex. gr. sit $5$ instar cuiusvis; erit ipsius $x^5$ in serie ipsius $(1+x)^n$ coefficiens æqualis summæ $\mathrm{IV}+\mathrm{V}$ (per 3.), hoc vero est

$$= \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,n-4)}{1.2.3.4} + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1.2.3.4.5}$$
$$= \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.2.3.4.5};$$

si nimirum prioris numeratore denominatoreque per $5$ multiplicato ad denominationem eandem reducantur, et in numeratoribus factor communis $(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$ eximatur, atque per factorum sociorum summam $5+n-5=n$ multiplicetur.

Ita serie ut prius ab $x^{n-1}$ incipiente, quum sit in casibus computatis

$$(1+x)^{n-1} = x^{n-1} + \mathrm{I}\,x^{n-2} + \mathrm{II}\,x^{n-3} + \mathrm{III}\,x^{n-4} + \mathrm{IV}\,x^{n-5} + \mathrm{V}\,x^{n-6} + \ldots + x^0,$$

erit (cum heic exponentes ipsius $x$ decrescant) ipsius $x^{n-5}$ in $(1+x)^n$ coefficiens $=$ IV$+$V; nam 1 nonnisi per IV $x^{n-5}$ multiplicatum producit $x^{n-5}$, et $x$ nonnisi per V $x^{n-6}$ producit $x^{n-5}$; est vero in $(1+x)^n$ terminus, in quo $x^{n-5}$ est, $(5+1)$-tus ab $x^n$ inclusive, uti antea ab 1 usque ad $x^5$. Unde cum ipsi 5 numerum quemvis sufficere liceat, patet, de quavis binomii potentia uno altius ascendendo, esse coefficientes terminorum ab extremis æquidistantium æquales; atque pro quovis integro $n$ esse

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^3 + \ldots;$$

atque si ipsi $x$ substituatur (ex p. 155) $\frac{b}{a}$, est $a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n =$

$$(a+b)^n = a^n + na^n\frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{2}a^n\frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^n\frac{b^3}{a^3} + \ldots$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

Patet etiam $(a+b)^n$ constare ex $n+1$ terminis; nempe præter primum sunt $n$ termini, donec ex $n$ subtrahatur $n$.

Est quoque in quovis termino summa exponentium ipsorum $a$, $b$ plane $n$; et si $\mu$, $\nu$ integri positivi sint, et $\mu+\nu=n$, in aliquo termino adest $a^\mu b^\nu$; nam terminus primus est $a^n b^0$, et exponens ipsius $a$ terminatim uno decrescit ab $n$ usque ad 0, crescente simul exponente ipsius $b$ a 0 ad $n$.

Sed præter plures alias, etiam via sequenti ad idem perveniri potuit. Quidnam ex $(\alpha+a).(\beta+b)$, quid ex $(\alpha+a).(\beta+b).(\gamma+c)\ldots$ fiat, ultro considerandum venit. Ut res simplicior fiat, ponatur $\alpha=\beta=\gamma=\ldots$, imo ut adhuc simplicius sit, fiat $\alpha=1=\beta=\gamma=\ldots$ Peracta multiplicatione, erit

$$(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab,$$

quo multiplicato per $1+c$, prodit

$$1+a+b+c+ab+ac+bc+abc;$$

quod continuando facile animadvertitur, primo prodire semper $1$, deinde summam singularum literarum, tum summam omnium ambarum, tum omnium ternarum, et ita porro. Unde de $m$ literis ad $m+1$ prona conclusio fit; nempe $1$ in novo multiplicatore dat $1$ in novo facto, dein summam singularum $m$ literarum, tum omnes ambas, quæ ex $m$ accipi possunt, dein omnes ternas, postea omnes quaternas, et ita porro, usque ad factum ex omnibus $m$ literis; per literam novam multiplicando vero prodit ex $1$ multiplicandi litera ipsa nova, qua accedente ad summam singularum $m$ literarum omnes $m+1$ literae aderunt; dein e singulis $m$ literis $a+b+c+\ldots$ per novam multiplicatis omnes ambæ novam literam continentes prodibunt; adeoque cum reliquæ ambæ iam adsint, accedentibus his omnes ambæ, quae ex $m+1$ literis accipi possunt, aderunt in facto; ita quaecunque combinationes omnes $m$ literarum, e literis numero $\mu$ constantes, per novam literam multiplicatæ, dabunt omnes combinationes ex $\mu+1$ literis constantes eas, quæ literam novam continent; cum omnes combinationes $m$ literarum e $\mu$ literis constantes adsint, nec ulla ex $m+1$ literis combinatio ex $\mu+1$ literis constans novam literam continens datur, nisi in qua litera nova, $\mu$ literas e prioribus nanciscitur. Prodibunt itaque omnes combinationes ex $\mu+1$ literis constantes literam novam continentes, reliquæ vero, quæ præter hanc accipi possunt, adsunt, relictæ multiplicatione per terminum priorem $1$; adsunt igitur omnes, quæ ex $m+1$ literis accipi possunt. Continuando usque ad finem, donec $\mu=m$ fit, tum is terminus ultimus multiplicandi est, qui per novam literam multiplicatus dat combinationem omnium $m+1$ literarum, quæ sola est, neque in multiplicando adest ulterius combinatio ulla, quæ per $1$ multiplicata huic accedat; estque omnino sola, cum ex $m+1$ literis $m+1$ literæ (ab ordine abstrahendo) unico modo accipi queant.

Post hæc, dum de $(1+x)^n$ agitur, facilis reflexio est; casum eundem esse, si $a=b=c=\ldots=x$ ponatur; adeoque nonnisi numerum amborum, ternorum... &, quæ ex $n$ rebus accipi queunt, quærendum esse, quod facile reperitur.

Sint nempe $a, b, c\ldots$ numero $n$; et ponatur post quamvis quævis reliquarum, quæ numero $n-1$ sunt; prodibunt imagines, quarum nullæ duæ sunt æquales, et in quarum aliqua litera quævis præposita et quævis alii postposita adest, adeoque numerus omnium amborum simul cum permutationibus literarum, atque numerus imaginum harum est $n(n-1)$; et e qualibet harum imaginum, (in quibus iam 2 literæ sunt), si cuilibet imagini literarum reliquarum (quæ pro quavis imagine numero $n-2$ sunt) quævis postponatur, oriuntur $n(n-1)(n-2)$ eiusmodi imagines, quarum nullæ duæ sunt æquales; nam imagines binarum omnes diversæ sunt, adeoque etsi omnibus eadem litera postponeretur, omnes inæquales manerent; adest quoque quævis permutatio e 3 literis constans inter istas imagines; nam quævis data fuerit, in illa erit litera eius postrema permutationi alicui e 2 literis constanti postposita; adest vero quævis talis permutatio, quavis literarum reliquarum postposita; (nulla nimirum litera in ulla imaginum bis occurrente).

Unde ad uno plura concludere licet. Si nempe ex $n$ literis permutationes ex $m$ literis constantes, numero $n(n-1)\ (n-2)\ldots(n-(m-1))$ accipi possint, erunt permutationes ex $m+1$ literis constantes numero $n(n-1)\ldots(n-m)$; nam si ut antea cuivis priorum permutationum e literis $m$ constantium quævis reliquarum literarum, (quæ pro quavis permutatione numero $n-m$ sunt) postponatur, orientur $n(n-1)\ldots(n-m)$ permutationes singulæ diversæ, (quia diversæ ante postpositionem erant), et inter quas quævis permutatio ex $m+1$ literis constans aderit; nam ut antea quæcunque talis permutatio detur, erit in ea, litera eius postrema, alicui permutationi ex $m$ literis, (talibus, inter quas illa postrema non adest) constanti postposita; aderant vero omnes permutationes ex $m$ literis constantes, et cuivis quævis ex $n$ literis, quæ in illa non adest, postposita est.

Si vero tantum de numero combinationum quæratur (abstrahendo a literarum earundem ordine in quavis imagine), tum manifesto, cum omnes permutationes quoque adsint, toties plures imagines ex. gr. ex $m$ literis constantes erunt, quoties $m$ literæ permutari possunt; adeoque numerus imaginum per numerum permutationum dividi debet. Sunt vero duarum literarum permutationes duo nempe $ab$, $ba$; accedente nova, hæc in quavis harum aut ante aut postponitur, aut inter reliquas; itaque trium rerum erunt permutationes numero $2.3$, et si $m-1$ literarum sint $2.3\ldots(m-1)$ permutationes, erunt $m$ literarum $2.3\ldots m$; nam nova litera $m$-ta in quavis imagine $m$ loca habet; nempe $m-1$ literarum loca intermedia sunt uno pauciora quam literæ, adeoque $m-2$, quod cum locis ante et post literas efficit $m$; per quod numerus prior multiplicatur.

Hinc ex $n$ literis numerus amborum est

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

numerus ternorum est

$$\frac{n(n-1)\,n-2)}{2.3}$$

et ita porro.

Consequenter

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^3+\ldots,$$

(ut antea).

Dicitur hoc *Theorema Binomiale*, cujus inventio *Paschali* tribuitur, at *Newton* primus animadvertit (exemplis pluribus obviam venientibus), idem ad exponentem quemvis etiam fractum negativumque extendi; fertur quoque, cum hoc tam cardinale in Arithmetica sit, quam *Pythagoricum* in Geometria, formulam binomii sepulchro Newtoni incisam esse, quamvis indemonstratam reliquerit, neque universaliter vera est, nisi $b<a$ sit. Itaque hae series pro exponente non integro considerandæ veniunt: erit is aut $<$ aut $>1$, atque aut positivus aut negativus.

XXXV. *Si $x$ et $e$ positiva fuerint, atque pro $(1\pm x)^{\pm e}$ condatur series ea lege, ut pro $(1+z)^E$ sit primus terminus $z^0=1$, et quivis terminus, denotante $\mu$ exponentem ipsius $z$ in eo, multiplicatus per $\frac{E-\mu}{\mu+1}.z$ det sequentem* (ut antea); *tum*

1. *Si $e<1$ sit, pro $(1+x)^e$ erit series sequens:*

$$1+ex+\frac{e(e-1)x^2}{2}+\ldots,$$

et coefficiens $e$ positivus erit, veluti ubique, ubi exponens ipsius $x$ impar est, et negativus, ubi exponens ipsius $x$ par est; nam si e fractione vera integer subtrahatur, negativum manet; adeoque ad exponentem parem factores negativi numero impari erunt, et pari ad imparem.

Pro $(1-x)^e$ erit

$$1-ex+\frac{e(e-1)}{2}x^2-\ldots;$$

ubi coefficiens $-e$ negativum est, quia $e$ per $-x$ multiplicatur, et postea quoque omnes coefficientes negativi erunt; nam ad exponentem parem potentia positiva est, et numerus factorum negativorum est impar, et par ad exponentem imparem ipsius $-x$.

Pro $(1+x)^{-e}$ fit

$$1-ex+\frac{-e(-e-1)}{2}x^2+\ldots;$$

ubi coefficientes ad exponentem imparem sunt negativi et positivi ad parem; nam ad imparem exponentem factorum negativorum numerus impar est, et par ad parem. Inverse est, dum tam $e$, quam $x$ cum $+$ est.

Pro $(1-x)^{-e}$ fiunt omnes termini positivi, quum ad exponentem imparem potentia negativa sit cum numero factorum negativorum impari, et hi numero pari sint ad exponentem parem.

2. *Si* $e>1$, *erunt pro* $(1+x)^e$ termini priores positivi, usquequo factores cœfficientis fractio vera $f$ prima vice ingreditur (ex $e$ integris ab 1 incipiendo subtractis); et tum terminus sequens fit negativus, nam cœfficienti priori accedit factor $f-1$, quod negativum est; atque deinde termini signa alternabunt; nempe factores cœfficientis sequentis duo negativi et sequentis tres negativi &c, ingrediuntur.

Pro $(1-x)^e$ cœfficiens ipsius $x$ est negativus propter $-x$, et ad exponentem imparem semper negativus erit et positivus ad parem eousque, dum ex $e$ ipso maius subtrahitur, et fractio vera negativa factores cœfficientis prima vice ingreditur; abinde vero erunt vel omnes positivi vel omnes negativi; nempe si factor negativus ad exponentem imparem ipsius $-x$ nascatur, terminus is positivus erit (propter duos factores negativos), et sequens quoque ex exponente pari et numero factorum negativorum pari positivus fiet, et ita porro. Si vero id ad exponentem parem fiat, terminus is negativus erit, et sequens quoque e potentia impari ipsius $-x$ et numero factorum negativorum pari negativus eri? &c.

Pro $(1+x)^{-e}$ fient termini ad exponentem imparem negativi et positiv ad parem; uti pro $(1+x)^{-e}$ et $e<1$ (in 1.).

Pro $(1-x)^{-e}$ erit cœfficiens ipsius $x$ positivus, uti omnes sequentes: nam ad exponentem imparem, erit factorum negativorum numerus impar, et par ad parem, uti erat pro $e<1$ et $(1-x)^{-e}$.

3. Relatis omnibus casibus, facile patet, quod *cuiusvis serierum harum (excepto, si $x$ non $\lessdot 1$ est) terminus tendit ad 0 et summa limitem habet.*

Nam dicatur generaliter exponens $E$, et id per quod cœfficiens multiplicatur, ut sequens prodeat, dicatur *exponens coefficientis*, id vero per quod seriei terminus multiplicatur, ut sequens prodeat, dicatur *exponens seriei*; quo pacto exponens cœfficientis erit

$$\frac{E-\mu}{\mu+1},$$

exponens seriei vero

$$\frac{E-\mu}{\mu+1}\cdot \pm x,$$

prouti $1+x$ vel $1-x$ elevatur.

Si $E$ positivum sit, sive $>1$, sive $<1$, dicatur $-f$ prima fractio vera negativa, quam $E-\mu$ dat. Nempe si $E<1$, pro $\mu=0$ est $E-\mu<1$ et pro $\mu=1$ est $E-\mu$ negativum et $\lessdot 1$; ita si $E>1$, aliquando prodit fractio vera positiva et postea statim negativa fit. Est vero tum (pro dicto $\mu$) exponens cœfficientis

$$\frac{-f}{\mu+1}\lessdot 1,$$

et postea quivis per

$$\frac{-f-m}{\mu+1+m}$$

exprimi potest, qui item $\lessdot 1$, quia numerator $\lessdot$ denominatore.

Crescit quidem hic exponens (semper $\lessdot 1$) signo — sublato, et tendit ad $-1$. Nam sequens est

$$=\frac{-f-m-1}{\mu+2+m},$$

adeoque duo proximi (per $-1$ multiplicati) per $\frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{\alpha+1}{\beta+1}$ exprimi possunt, quibus ad denominatorem eandem reductis numerator prioris manifesto est minor, cum $\alpha<\beta$ sit; at si $\mu \rightharpoondown \infty$, ipsum $\frac{E-\mu}{\mu+1} \rightharpoondown -1$.

Consequenter ab illo termino, a quo exponens cœfficientis semper unitate minor est, exponens seriei semper $\lessdot x$ est.

Interim usquequo, pro $E$ positivo et $>1$, fuerit $E-\mu<1$, si dentur termini, exponens cœfficientis decrescit eousque. Nam sint duo proximi

$$\frac{E-m}{m+1} \quad \text{et} \quad \frac{E-m-1}{m+2};$$

erit numerator uterque positivus, et priore $\alpha+1$ dicto posterior $\alpha$ erit, adeoque (pro $m+1=\beta$) est

$$\frac{\alpha+1}{\beta}>\frac{\alpha}{\beta+1}$$

Si $E$ *negativum et* $\lessdot 1$ *sit, tunc iam primus cœfficiens est* $E=-f$; atque abinde omnia ut prius valent.

Si vero $E$ negativum et $\gtrdot 1$, sit

$$E=-e, \quad \text{et} \quad x=\frac{l}{L}, \quad \text{atque} \quad L=l+k.$$

Decrescit tum signo — sublato exponens cœfficientis (semper $\gtrdot 1$); nam

$$\frac{-e-\mu}{\mu+1}>\frac{-e-\mu-1}{\mu+2}.$$

Ceteroquin $\frac{E-\mu}{\mu+1} \rightharpoondown -1$, si $\mu \rightharpoondown \infty$.

Seriei ipsius exponens vero fit a certo termino incipiendo fractio vera et quidem semper decrescens et tendens ad limitem $-\frac{l}{L}$. Datur enim tale $\mu$, ut

$$\frac{-e-\mu}{\mu+1}\cdot\frac{l}{L} \lessdot 1$$

sit; fiet hoc, si

$$(e+\mu)l \lessdot (\mu+1)L;$$

seu pro certo $p$ positivo sit

$$el+\mu l+p=\mu L+L,$$

quod fit pro

$$\mu=\frac{le+p-L}{L-l}=\frac{le+p-l-k}{k}=\frac{le+p-l}{k}-1,$$

ubi positivum $p$ quantumvis accipere licet. Adeoque si $p$ crescere a 0 concipiatur, ubi expressio prima vice integrum positivum dabit, illud erit primum quæsitum $\mu$, atque abinde seriei exponens ($\lessdot 1$) semper decrescet; nam

$$\frac{e+\mu}{\mu+1}>\frac{e+\mu+1}{\mu+2} \quad \text{et} \quad \frac{-e-\mu}{\mu+1}\frac{l}{L}>\frac{-e-\mu-1}{\mu+2}\frac{l}{L}.$$

In prioribus casibus itaque exponens seriei a certo termino $\alpha$ incipiendo semper $\lessdot x$ est. Adeoque, cum si $x \lessdot 1$, etsi ubique exponens $=x$ esset, $\alpha x^m \to 0$, si $m \to \infty$ (pag. 150.), etiam terminus seriei tendit ad 0. Atque si summa terminorum usque ad $\alpha$ exclusive sit $a$, etsi omnes termini positivi essent, summa quotvis terminorum maneret (p. 150.)

$$\lessdot a+\frac{\alpha}{1-x};$$

nam sequens terminus est $\lessdot \alpha x$, postea sequens $\lessdot \alpha x^2$ etc. Unde ubicunque subsistatur post $\alpha$ ex. gr. ad terminum $t$ error erit $\lessdot \frac{t}{1-x}$.

In postremo casu quoque, si $b$ sit terminus, in quo terminus seriei fractio vera $f$ fit deinde semper decrescens, manifesto $bf^m \to 0$, si $m \to \infty$; adeoque et terminus seriei tendit ad 0. Atque si summa usque ad $b$ (exclusive) $\beta$ dicatur, erit summa terminorum quotvis (etsi omnia positiva essent)

$$\lessdot \beta+\frac{b}{1-f};$$

nam terminus sequens est $\lessdot bf$, postea sequens $\lessdot bf^2$ &c.

4. *Sed gaudet etiam summa cuiusvis harum serierum limite.* Nam si ab aliquo saltem signo omnes termini positivi vel omnes negativi sint, patet, quum crescat manens tamen certo finito minor. In omni alio casu vero (per præcedentia) signa ab aliquo termino alternabunt; sit $A$ summa usque ad alternantium terminum quendam positivum (hunc excludendo), et accipiantur abinde quotvis paria; erit summa cuiusvis paris (cum terminus quilibet $>$ sequente sit) positiva, adeoque $A$ semper incrementa capit, nunquam tamen finitum supra dictum attingens; sit itaque (per pag. 55.) limes $S$, et sit $s$ summa ipsius $A$ cum summa quotvis parium, atque sit $t$ terminus paria addita excipiens. Erit

$$S-s \rightharpoondown 0,$$

et quia $t \rightharpoondown 0$, etiam

$$S-(s+t) \rightharpoondown 0;$$

adeoque $s$ et $s+t$ utrumque tendit ad limitem $S$.

5. *Inquirendum etiam, num*

$$1+ex+\frac{e(e-1)}{2}x^2+\ldots \rightharpoondown (1+x)^e,$$

*quodlibet ipsorum $x$ et $e$ sive positivum, sive negativum denotet.*

Sit prius $x<1$, et $e=\frac{\pm n}{m}$ (pro $n$ et $m$ integris); id tantum demonstrandum erit, quod

$$\left(1+ex+\frac{e(e-1)}{2}x^2+\ldots\right)^m \rightharpoondown (1+x)^{\pm n},$$

nam tum (p. 104.)

$$1+ex+\frac{e(e-1)}{2}x^2+\ldots \quad \rightharpoondown (1+x)^{\frac{\pm n}{m}}.$$

Patebit statim pro quovis reali $r$, quod si

$$1+ex+\frac{e(e-1)}{2}x^2+\ldots \rightharpoondown s$$

et

$$1+rex+\frac{re(re-1)}{2}x^2+\ldots \rightharpoondown S$$

etiam

$$1+(r+1)ex+\frac{(r+1)e\big((r+1)e-1\big)}{2}x^2+\ldots\sim Ss,$$

nempe in prima serie substituto ipsi $e$ ubique $re$ pro secunda serie et $(r+1)e$ pro tertia.

Dicatur $s'$ summa seriei prioris usque ad terminum (inclusive) in quo $x^\mu$ est, secundæ sit $S'$, tertiæ sit summæ limes $\Sigma$ et summa usque ad $x^\mu$ inclusive $\Sigma'$. Prodibit

$$s'S=\Sigma'+\omega,$$

ubi $\omega$ tendit ad 0, si $\mu$ tendat ad infinitum. Atque tum $S-S'$ et $s-s'$ tendunt ad 0; adeoque $Ss-S's'$ tendit ad 0, atque etiam

$$Ss-(\Sigma'+\omega)=Ss-\Sigma'-\omega\sim 0,$$

consequenter

$$Ss-\Sigma'\sim 0;$$

sed etiam

$$\Sigma-\Sigma'\sim 0;$$

erit igitur (p. 80.)

$$\Sigma=Ss.$$

Id ergo tantum demonstrandum est, quod usque ad $x^\mu$ series tertia rite exhibeat factum, atque $\omega$, quod post $x^\mu$ ex $S's'$ prodit, tendit ad 0. Tunc enim ponatur prius 1 pro $r$, tum 2 et ita porro usque ad $m$, et prodibit prius $s'^2$, tum $s'^3$, et ita porro usque ad $s'^m$, prodibitque pro $r=m$

$$1+mex+\frac{me(me-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{me(me-1)\ldots(me-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu}x^\mu,$$

quod pro $e=\frac{n}{m}$ est

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\ldots$$
$$=(1+x)^n.$$

Si vero pro $e$ ubique $-\frac{n}{m}$ ponatur, manifesto $(1+x)^{-n}$ prodit.

Designetur hunc in finem cœfficiens seriei prioris tanto numero romano, quantus exponens ipsius $x$ in illo termino est, ita in secunda et tertia quoque eo discrimine, quod numerus romanus insigniatur in secunda uno accento, in tertia duobus, et consideretur quivis exponens ex. gr. 5 instar omnium.

Erit $V'' = V' + IV'.I + III'.II + II'.III + I'.IV + V$; namque $x^5$ nonnisi e facto terminorum prodit, in quibus summa exponentium est 5, quod cum summa numerorum romanorum convenit.

Est

$$V' = \frac{re-4}{5} IV', \quad IV' = \frac{re-3}{4}.III', \quad III' = \frac{re-2}{3}.II',$$

$$II' = \frac{re-1}{2}.I', \quad I' = \frac{re}{1};$$

$$I = e, \quad II = \frac{e-1}{2}.I, \quad III = \frac{e-2}{3}.II, \quad IV = \frac{e-3}{4}.III, \quad V = \frac{e-4}{5}.IV.$$

Hinc substituendo superius in valore ipsius $V''$, est

$$IV'.I = \frac{re-3}{4}.III'.I; \quad III'.II = \frac{re-2}{3}.II'.II;$$

$$II'.III = \frac{re-1}{2}.I'.III; \quad I'.IV = re.IV; \quad V = V.$$

Consideretur porro, quod si $\frac{\alpha}{k} = \frac{\beta}{h} = u$, atque $k + h = l$ sit, tum $\frac{\alpha+\beta}{l} = u = \frac{\alpha}{k}$ sit; nempe

$$\frac{ku}{l} + \frac{hu}{l} = \frac{(k+h)u}{l} = \frac{lu}{l} = u$$

adeoque

$$\frac{k}{l}\cdot\frac{\alpha}{k} + \frac{h}{l}\frac{\beta}{h} = \frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{l} = \frac{\alpha+\beta}{l} = u = \frac{\alpha}{k}.$$

Erit hinc (quum $V' = \frac{re-4}{5}.IV'$),

$$IV'.I = \frac{re-3}{4} III'.I = IV'\frac{e}{1} = \frac{e}{5} IV' + \frac{re-3}{5} III'.I;$$

nam $1+4=5$, uti $k+h=l$ erat. Ita

$$III'.II=\frac{re-2}{3}II'.II=III'.\frac{e-1}{2}I=\frac{e-1}{5}III'.I+\frac{re-2}{5}II'.II,$$

$$II'.III=\frac{re-1}{2}I'.III=II'.\frac{e-2}{3}II=\frac{e-2}{5}II'.II+\frac{re-1}{5}I'.III,$$

$$I'.IV=\frac{re}{1}.IV=I'.\frac{e-3}{4}III=\frac{e-3}{5}I'.III+\frac{re}{5}IV,$$

$$V=\frac{e-4}{5}.IV.$$

Unde pro valore ipsius $V''$, e quavis linea terminos duos posteriores accipiendo, pro $IV'.I$, $III'.II$, $II'.III$, $I'.IV$ terminis rite dispositis, oritur schema sequens:

$$V'=\frac{re-4}{5}IV',$$

$$IV'.I=\frac{e}{5}IV'+\frac{re-3}{5}.III'.I,$$

$$III'.II=\frac{e-1}{5}.III'.I+\frac{re-2}{5}.II'.II,$$

$$II'.III=\frac{e-2}{5}.II'.II+\frac{re-1}{5}.I'.III,$$

$$I'.IV=\frac{e-3}{5}.I'.III+\frac{re}{5}.IV,$$

$$V=\frac{e-4}{5}.IV.$$

Ubi in quavis columna patet numerum romanum factorem communem esse, et summam factorum sociorum esse $\frac{re+e-4}{5}$; nam ubi orti sunt hi valores, in termino cuiusvis lineæ ultimo numerus romanus convenit cum penultimo lineæ sequentis, atque ex $e$ in quavis linea sequenti uno maius, ex $re$ vero uno minus subtrahitur; quod etiam generaliter ostendi potest. Denotent $M$, $N$ numeros romanos ita $[M-1]$, $[N-1]$, $[N+1]$, nempe ita ut si ex. gr. $N=V$, $[N-1]$ denotet $IV$; $m$, $n$ vero denotent numeros communes, significatione priore haud retenta, ita ut si ex. gr. $M$ denotet $V$, denotet $m$ tum 5, et accipiantur duo eiusmodi valores proximi ut antea, $M'N$ et $[M'-1][N+1]$; erit

$$M'N=\frac{re-(m-1)}{m}[M'-1]N=M'\frac{e-(n-1)}{n}[N-1],$$

$$[M'-1][N+1]=\frac{re-(m-2)}{m-1}[M'-2][N+1]=$$

$$=[M'-1]\frac{e-n}{n+1}N,$$

adeoque

$$M'N=\frac{e-n+1}{n+m}M'[N-1]+\frac{re-m+1}{n+m}[M'-1]N,$$

$$[M'-1][N+1]=\frac{e-n}{n+m}[M'-1]\ N+\frac{re-m+2}{n+m}[M'-2][N+1];$$

ubi prioris ultimo et posterioris penultimo est factor $[M'-1]N$ communis, ac summa factorum sociorum est

$$\frac{e(r+1)-(m+n-1)}{m+n}.$$

Facile etiam patet numeros romanos accento insignitos post alterum a summo semper uno decrescere in linea sequenti, et socium accento destitutum ad finem lineæ secundæ esse $I$, et uno crescere semper, donec in columna ultima summus numerus (heic $IV$) maneat sine accento, uti in prima idem cum accento uterque bis.

Itaque redeundo ad schema, ut res clarior fiat: substitutis ipsorum $V'$, $IV'.I$, $III'.II$, ... valoribus erit

$$V''=\frac{e(r+1)-4}{5}(IV'+III'.I+II'.II+I'.III+IV)=\frac{e(r+1)-4}{5}.IV'';$$

nam erat $IV'+III'.I+II'.II+I'.III.+IV=IV''$.

Rite igitur prodire superius $S's'$ usque ad $x^{\mu}$, applicando ad $I''$, $II''$... patet; $\omega$ vero, quod pro $\mu=5$ prodit, est

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
V.I' & x^6 + \quad V.II' & x^7 + \quad V.III' & x^8 + \quad V.IV' & x^9 + V.V'x^{10}. \\
+IV.II' & +IV.III' & +IV.IV' & +IV.V' & \\
+III.III' & +III.IV' & +III.V' & & \\
+\ II.IV' & +\ II.V' & & & \\
+\ \ I.V' & & & &
\end{array}$$

Hoc autem tendit ad 0, si $\mu$ tendat ad infinitum. Accipiantur enim positive termini omnes in seriebus

$$1,\ Ix,\ IIx^2, \ldots, Mx^m,\ \ldots, [2M]\,x^{2m},$$
$$1,\ I'x,\ II'x^2, \ldots, M'x^m, \ldots, [2M']\,x^{2m},$$

per $M$, $M'$ cœfficientes ipsius $x^m, \ldots$ per $[2M]$, $[2M']$ vero cœfficientes ipsius $x^{2m}$ intelligendo. Utraque series, etsi omnes termini positive accipiantur, limite gaudet (pag. 166.); sit

$$1 \dotplus Ix \dotplus IIx^2 \dotplus \ldots \frown A,$$
$$1 \dotplus I'x \dotplus II'x^2 \dotplus \ldots \frown A'.$$

Pro quibusvis datis $x$ et $\lambda$ positivis potest utraque series ad tantum exponentem eundem usque sumi, ut si summa prioris usque ad $x^m$ (inclusive) dicatur $u$ et $u'$ posterioris, atque $\overset{*}{u}$ prioris usque ad $x^{2m}$ et $\overset{*}{u}'$ posterioris, tam $A - u$ quam $A' - u'$ sit $\lessdot x$, et $AA' - uu' \lessdot \lambda$.

Est vero

$$AA' \gtrdot \overset{*}{u}\overset{*}{u}' \gtrdot uu',$$

itaque

$$\overset{*}{u}\overset{*}{u}' - uu' \lessdot \lambda.$$

Estque porro in $uu'$ summa potentia in facto partiali $MM'x^{2m}$ (neque in ullo alio amplius tanta est). Itaque si $\omega'$ dicatur summa omnium factorum partialium illorum, in quibus exponens ipsius $x$ excedit $2m$, quum omnia positive accipiantur, erit $\omega'$ pars ipsius $\overset{*}{u}\overset{*}{u}' - uu'$; nam in hoc adsunt etiam illa, quæ adhuc (uti e schemate videtur) deficiunt ultra $x^m$ usque ad $x^{2m}$. Est igitur $\omega' \lessdot \lambda$.

Sed facta illa partialia, quæ ultra $x^{2m}$ prodeunt (per multiplicationem serierum usque ad $x^{2m}$ sumtarum), sunt præterquam, quod heic omnia positive accepta sint, plane eadem; consequenter si horum summa $\omega$ dicatur, ac omnium terminorum positive acceptorum summa $\omega' \lessdot \lambda$ fuerit, et signis terminorum mutatis erit $\omega \lessdot \lambda$; atque si $2m = \mu$ sit, et $\mu$ tendat ad infinitum, $\omega \rightharpoonup 0$.

Consequenter omnibus, quæ superius requirebantur, demonstratis, pro $x \lessdot 1$ et $e = \pm \frac{n}{m}$ est

$$(1+x)^e = 1 + e\,x + \frac{e(e-1)}{1.2}x^2 + \frac{e(e-1)(e-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Unde etiam (pag. 158.)

$$(a+b)^e = a^e + e\,a^{e-1}\,b + \frac{e(e-1)}{1.2}a^{e-2}\,b^2 + \frac{e(e-1)(e-2)}{1.2.3}a^{e-3}\,b^3 + \ldots,$$

si $b \lessdot a$.

6. Si vero $b \gtrdot a$, idest $x = \frac{b}{a} \gtrdot 1$, tum $(1+x)^e$ ita exprimi nequit. Nam $(1+x)^e$ determinato finito valore gaudet; si vero $x = \frac{k}{h}$ et $k \gtrdot h$, fiet summa terminorum omni dabili maior. Nam terminus $n$-tus erit

$$\frac{e(e-1)\ldots(e-(n-1))}{1.2\ldots n}\frac{k^n}{h^n} = \frac{ek}{1h}\cdot\frac{(e-1)k}{2h}\cdots\frac{(e-(n-1))k}{nh}$$

et exponens seriei per $\frac{e-n}{n+1}\frac{k}{h}$ exprimi potest; fit vero $e-n$ aliquando negativum et ab illo termino incipiendo aut est $\frac{e-n}{n+1}$ semper unitate maius aut quovis dato, quod $\lessdot 1$, maius, adeoque exponens seriei unitate maior fit et abinde semper crescens tendit ad $-\frac{k}{h}$. Nam si $e$ negativum et unitate maius est, exponens cœfficientium semper unitate maior est; si non, et per $\frac{e-n}{n+1}$ exprimatur, pro quavis fractione vera positiva $f$, quæ $\gtrdot \frac{h}{k}$, fit

$$\frac{e-n}{n+1}\frac{k}{h} \gtrdot 1,$$

si $n \gtrdot \frac{e+f}{1-f}$; nam pro

$$\frac{e-n}{n+1} = -f$$

prodit

$$n=\frac{e+f}{1-f},$$

ubi $n$ pro $f$ positivo et unitate minore (si $f>e$ accipiatur pro casu, si $e$ negativum et unitate minus sit) prodit positivum, uti esse debet; crescente autem $n$ crescit $\frac{n-e}{n+1}$. Atque si

$$f=\mp\frac{h+\lambda}{k}$$

(ita ut $h$ et $\lambda$ utrumque positivum aut utrumque negativum sit), est

$$\mp f\frac{k}{h}=\mp\frac{h+\lambda}{k}\,\frac{k}{h}=\frac{h+\lambda}{h}>1.$$

Si iam ab aliquo termino incipiendo omnes termini positivi aut omnes negativi sint, manifesto series tenderet ad infinitum. Si non, tum ab aliquo termino incipiendo (ubi iam exponens seriei unitate maior factus est) signa alternabunt; sit terminus aliquis $A$ negativus, sequens $B$ positivus, postea $C$ negativus, $D$ positivus, atque considerentur $A+B$ et $C+D$.

Exprimi $B$ potest per $A\frac{e-n}{n+1}\frac{k}{h}$ et $D$ per $C\,\frac{e-n-2}{n+3}\,\frac{k}{h}$, estque

$$A+B=A\left(1-\frac{n-e}{n+1}\,\frac{k}{h}\right)\quad\text{et}\quad C+D=C\left(1-\frac{n+2-e}{n+3}\,\frac{k}{h}\right);$$

in utraque parenthesi negativum prodit et maius in posteriore, si pro $x=\frac{k}{h}$ positivo sit $e$ positivum, nec integrum, vel negativum et unitate minus.* Præterea $C>A$, adeoque incrementa semper nova accedunt cum quovis novo pari, et quidem semper maiora.

E pag. 161—163 signa nonnisi pro $(1+x)^e$ et $(1+x)^{-e}$ alternant. Itaque nonnisi de $(1+x)^e$, ubi $e$ negativum et $>1$, quæstio fit pro $x=\frac{k}{h}$ et $k>h$, ($k$ et $h$ positivis). Sit

$$x=1+q$$

* Nam $\frac{n-e}{n+1}$, quod crescens et ad 1 tendens, maius quam $\frac{h}{k}$ sit, et $\frac{n+2-e}{n+3}$ consideranda veniunt. Accipiatur nempe pro $e$ positivo et $>1$, $n$ tantum ut sit $>e$; atque tum patet $\frac{n-e}{n+1}<1$ esse, uti pro $e<1$ est $\frac{n-e}{n+1}<1$; est autem in casu utroque $n-e$ positivum; adeoque numeratori fractionis veræ positivo addendo $+2$ et denominatori positivo addito $+2$ maius prodit. Nempe in utraque parenthesi terminus ad dextram negativus et $>1$ est; adeoque addito 1 maius negativum in secunda manet.

et

$$\frac{e-n}{n+1} = -1 - Q,$$

pro $Q$ positivo; accipiaturque $n$ tantum, ut sit

$$Q < 2q \quad \text{et} \quad Q < q^3;$$

quod fieri potest, quum $\frac{e-n}{n+1}$ tendat ad $-1$.

Sint termini eiusmodi signis alternantibus $A$, $B$, $C$, $D$ se invicem excipientes, sitque $A$ positivum, $B$ negativum, $C$ positivum, $D$ negativum; exprimentur hi per

$$A, \quad A\frac{e-n}{n+1}x, \quad A\frac{(e-n)(e-n-1)}{(n+1)(n+2)}x^2, \quad A\frac{(e-n)(e-n-1)(e-n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}x^3;$$

eritque factor ipsius $Ax^2$ positivus, quum $A$ et $C$ positiva sint, factor ipsius $Ax^3$ autem negativus est, quum $A$ et $x$ positivum, $D$ vero negativum sit.

Est autem $A$ tam in duobus prioribus, quam in duobus posterioribus factor communis; estque summa factorum sociorum in duobus prioribus, substituendo valores dictos:

$$1 + \frac{e-n}{n+1}x = -Q - Qq - q;$$

in duobus postremis autem, si in postremo pro $\frac{e-n-2}{n+3}$, quod $> -1$, tantum $-1$ ponatur, summa factorum sociorum ipsius $A$ erit

$$> (-x^3 + x^2)\frac{(e-n)(e-n-1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Est autem, substituto valore ipsius $x$,

$$x^2 - x^3 = -q - 2q^2 - q^3,$$

quod per valorem suppositum ipsius $n$

$$> -q - Qq - Q$$

est. Fit vero adhuc maius negativum, si per coefficientem positivum multiplicetur; fieritque adhuc maius, si pro $-1$ poneretur $\frac{e-n-2}{n+3}$.

Ita si $a = b$, facile patet formulam nonnisi pro casibus particularibus valere.

7. Notandum autem incrementis decrescentibus, imo ad limitem o tendentibus etiam posse summam omni dabili maiorem fieri: ex. gr.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots \sim \infty.$$

Si enim exponens seriei ab aliquo termino incipiendo semper abinde $\geqq 1$, et (ut antea in serie, cuius termini sunt $A+B$, $C+D\ldots$) idem omni dabili pluries accedit: summa seriei tendit ad $\infty$.

Si vero exponens seriei certa fractione vera $f$ ab aliquo termino $\alpha$ incipiendo abinde nunquam maior fit, etsi semper crescat, summa inde erit $\lessdot \frac{\alpha}{1-f}$, cui summa terminorum anteriorum addita, maius tota seriei summa prodit (pag. 151).

At si exponens seriei semper quidem unitate minor sit, sed semper crescat, neque tamen maneat certa fractione vera $f$ minor, tum pro diversis casibus, summa finita aut infinita esse potest. Si pro certo $b$ seriei ab aliquo $a$ incipiendo tot termini accipi possint usque ad aliquem $u$, ut summa eorum (si exponens seriei illo, qui ad $a$ est, dicto $e$ constans maneret) non sit $\lessdot b$, et post quodvis $u$ (sequente termino $a'$ et exponente, qui ibi est, $e'$ dicto), detur talis terminus $u'$, ut summa ab $a'$ usque $u'$ (si exponens constans $e'$ maneret) non sit $\lessdot b$, et summæ hæ signo eodem gaudeant, tum manifesto series tendit ad infinitum.

Pro

$$b=\frac{ue-a}{e-1}$$

esset (pag. 151.)

$$u=\frac{a+eb-b}{e};$$

adeoque si exprimantur $u$, $a$, $e$ generaliter (pro serie tali aut in talem mutata, ut termini omnes adeoque et $a$, $e$, $u$, $b$ positivi sint et semper sit

$$a+eb>b,$$

(ut $u$ prodeat positivum) atque sit

$$\frac{a+eb-b}{e}<a,$$

nam $u < a$ propter exponentem unitate minorem est; tum summa seriei tendit ad infinitum.

Ex. gr. In serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots$$

pro $a=\frac{1}{n}$ est $e=\frac{n}{1+n}$.

Sit $b=1$; erit $a+eb>b$, nempe

$$\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}=\frac{n+1+n^2}{n^2+n}>1,$$

atque

$$u=\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}-1\right):\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}:\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n^2}.$$

Si $a=\frac{1}{2}$, erit

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1,$$

et si $a=\frac{1}{5}$, erit

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{5^2}>1$$

et ita porro, adeoque prodit

$$1+1+1+\ldots\backsim\infty.$$

Pro $b=\frac{7}{8}$, erit primum

$$\begin{aligned} u &= \frac{a+eb-b}{e} \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\,\frac{7}{8}-\frac{7}{8}\right):\frac{2}{3}=\frac{15}{48}; \end{aligned}$$

sed in quovis seriei termino numerator 1 est; atque si $\frac{15}{48}$ ad numeratorem 1 reducatur, fiet $\frac{15}{48}=\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{15}}$ unde quum $u$ sit $<\frac{1}{3}$, si series usque ad $\frac{1}{3}$ summetur, prodibit ipso $b$ maius.

Series $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ e facto numerorum naturalium $1, 2, 3, \ldots$ per $2, 3, 4, \ldots$ diviso oritur: nempe

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3},$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4},$$
$$\cdots\cdots$$

Unde etiam

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \frown 0,$$

si $n \frown \infty$; imo ubicunque incipiendo, ex. gr.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{n}{n+1} = \frac{3}{n+1} \frown 0.$$

Criterium divergentiæ aliter exponi potest. Pro

$$U_n = U_{n-1} \frac{n-m}{n}$$

est

$$m = n \frac{U_{n-1} - U_n}{U_{n-1}};$$

et si $\frac{n U_{n-1}}{m}$ sive $\frac{U_{n-1}^2}{U_{n-1} - U_n}$ non gaudeat limite 0, series divergit. Si vero ab aliquo termino porro $m$ semper positivum et maius certo unitatem superante manet, series convergit.

Notandum vero quoad $m$, primum ipsius $n$ valorem ibi accipi, ubi $n$ prima vice $> m$ est. Pro $m = 1$, si primus terminus $= 1$ pronatur, fit

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

et pro $m = 2$, si duo priores termini 1 et $\frac{1}{2}$ accipiantur, fit

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots$$

Quo maius $m$ vero, eo maius subtrahitur ex $n$, eoque fit exponens minor, terminique minores; decrescenteque $m$ contrarium evenit.

8. *Si* $\frac{n}{m}$ *tendit ad* $q$, *est*

$$(a+b)^q = a^q + q a^{q-1} b + \frac{q(q-1)}{2} a^{q-2} b^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{2 \cdot 3} a^{q-3} b^3 + \ldots$$

Nam si duæ series fuerint, una terminorum constantium

$$a + b + c + \ldots = \text{ vel } \sim A,$$

altera

$$a' + b' + c' + \ldots = \text{ vel } \sim A',$$

et quotvis termini accipiantur prioris, totidem posterioris; si quivis $n$-tus terminus huius dicatur $t'$, priorisque $n$-tus $t$ sit, fieri possit pro dato quovis $\alpha = \frac{A}{N}$

$$\frac{t'}{t} - 1 < \frac{1}{N};$$

et quidem id pro omnibus $t$ et $t'$ simul sit: tum $A = A'$

Namque tum (si ex. gr. termini usque ad $f$, $f'$ accipiantur),

$$\frac{a'}{a} \sim 1, \quad \frac{b'}{b} \sim 1, \quad \frac{c'}{c} \sim 1, \ldots \frac{f'}{f} \sim 1;$$

et (pag. 93 sub 5.)

$$\frac{a' + b' + c' + \ldots + f'}{a + b + c + \ldots + f} \sim 1;$$

atque

$$\frac{a' + b' + c' + \ldots + f'}{a + b + c + \ldots + f} - 1 < \frac{1}{N}$$

fieri potest: adeoque

$$a' + b' + \ldots + f' - (a + b + \ldots + f) < \frac{a + b + \ldots + f}{N}$$

quod

$$< \frac{A}{N} = \alpha$$

est. Itaque quotvis terminorum seriei

$$a' + b' + c' + \ldots$$

summæ, quæ tendit ad $A'$, differentia ab $A$ quovis dabili minor fieri potest. Unde patet.

Notandum vero, inde quod si duæ series sint totidem terminorum sibi invicem respondentium, et cuiusvis termini differentia ab ei respondenti tendit ad o, non sequi, summas serierum esse æquales.

Ex. gr.

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots$$

non est æquale

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots,$$

si ex. gr. utrumque ex $n$ terminis constet; erit nempe prius $=1$, posterius $=\frac{1}{2}$, quamvis.

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\frown 0, \quad \text{si} \quad n\frown\infty.$$

Applicando hoc ad $(1+x)^{\frac{n}{m}}$ et $(1+x)^q$, in quovis termino prioris præter potentiam ipsius $x$ nonnisi cœfficiens

$$\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right)\dots}{2\cdot 3\dots}$$

adest; et si hic per

$$\frac{q(q-1)(q-2)\dots}{2\cdot 3\dots}$$

dividatur, quotus pro dato quovis $N$ fieri $\lessdot 1+\frac{1}{N}$ potest; nam

$$\frac{n}{m}:q,\quad \left(\frac{n}{m}-1\right):(q-1),\quad \left(\frac{n}{m}-2\right):(q-2),\dots$$

quodvis $\lessdot 1+\frac{1}{N}$ fieri potest, itaque et factum e factoribus eiusmodi; $2, 3\dots$ in utroque denominatore adesse patet.

Hinc si termini ipsius $(1+x)^{\frac{n}{m}}$ sint

$$a'+b'+\dots=S',$$

terminique iidem substitituto $q$ ipsi $\frac{n}{m}$ sint

$$a+b+\dots=S,$$

fiet

$$\frac{a'}{a}-1<\frac{1}{N},\quad \frac{b'}{b}-1<\frac{1}{N},\ldots$$

seu

$$a'-a<\frac{a}{N},\quad b'-b<\frac{b}{N},\ldots$$

adeoque

$$a'+b'+\ldots-(a+b+\ldots)<\frac{a+b+\ldots}{N},$$

seu

$$S-S<\frac{S}{N}.$$

Consequenter quum $S'$ et $S$ limite gaudeant, si ii $S'+z'$ et $S+z$ sint, erit $S'+z'=S+z$, quia $z', z, \frac{S}{N}$ tendunt ad o.

Quod vero pro quovis $N$ detur pro quotvis terminis idem $m$, patet sic. Dicatur generaliter $\nu$ integer ex $\frac{n}{m}$ subtrahendus, ut pro $q=\frac{n}{m}+\omega$ sit

$$\frac{\frac{n}{m}-\nu}{\nu+1}:\frac{\frac{n}{m}+\omega-\nu}{\nu+1}-1<\frac{1}{N};$$

debet esse

$$\frac{\frac{n}{m}-\nu}{\frac{n}{m}+\omega-\nu}-1<\frac{1}{N},$$

id est

$$\frac{-\omega}{q-\nu}<\frac{1}{N},$$

et si $\omega=\frac{k}{m}$, pro quovis $\nu$ debet esse

$$\frac{k}{m(q-\nu)}<\frac{1}{N},$$

unde

$$\frac{k}{m}<\frac{q-\nu}{N}.$$

Itaque inter omnia $\nu$, quæ inter terminos datos adsunt, illud accipiendum est. quod quotum $\frac{q-\nu}{N}$ minimum reddit, et si $\omega$ illo minus reddatur, tum pro illo $m$ quivis quotus eiusmodi (ut antea) fit $\lessdot 1 + \frac{1}{N}$; adeoque et factum ex eiusmodi factoribus est $\lessdot 1 + \frac{1}{N'}$, pro certo $N > N'$.

9. Denique omnibus, quæ de elevatione binomii $a+b$ dicta sunt, mutatis mutandis, ad $a+b\sqrt{-1}$ applicatis facile patet, formulam generaliter valere, si $b \lessdot a$; (ita si ponatur $b\sqrt{-1}+a$, et $a \lessdot b$ sit).

Nempe

$$(1+x\sqrt{-1})^q = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{q(q-1)}{2}x^2 - \frac{q(q-1)(q-2)}{2.3}x^3\sqrt{-1} + \\ + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{2.3.4}x^4 + \frac{q(q-1)\ldots(q-4)}{2.3.4.5}x^5\sqrt{-1} + \ldots$$

ubi tam summa realium, quam pure imaginariorum limite gaudet, quum etsi omnia realia et positiva essent, limitem haberent, tam termini reales seorsim, quam ubi $\sqrt{-1}$ factor est; nempe ad exponentem parem termini reales sunt, et imaginarii ad imparem; et horum per superiora factore communi $\sqrt{-1}$ omisso summæ limes datur, qui per $\sqrt{-1}$ multiplicatus limes summæ imaginariorum erit.

10. Si exponens binomii sit fractio vera $\frac{n}{n+\nu}$, erit pro $n+\nu=p$ cœfficiens $\mu$-tus

$$\frac{n}{p} \cdot \frac{-\nu}{2p} \cdot \frac{-2\nu-n}{3p} \cdot \frac{-3\nu-2n}{4p} \cdots \frac{n(2-\mu)+\nu(1-\mu)}{\mu p}.$$

Nam

$$\frac{n}{n+\nu} - 1 = \frac{n-n-\nu}{n+\nu} = \frac{-\nu}{n+\nu},$$

et

$$\frac{n}{n+\nu} - (\mu-1) = \frac{n - n\mu + n - \nu\mu + \nu}{n+\nu} = \frac{2n - \mu n + \nu - \mu\nu}{n+\nu} = \\ = \frac{n(2-\mu)+\nu(1-\mu)}{n+\nu}.$$

Ex. gr., si $b \lessdot a$ est

$$\sqrt{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}b - \frac{1.1}{2.4}a^{-\frac{3}{2}}b^2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}a^{-\frac{5}{2}}b^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}a^{-\frac{7}{2}}b^4 + \ldots$$

Idem ad alios exponentes applicari posse patet.

XXXVI. Si porro in $(1+x)^n$ sit $x=\frac{1}{m}$, erit

$$(1+x)^n=\left(\frac{m+1}{m}\right)^n,$$

quod (pag. 102, sub 8.) tendit ad $\infty$, si $n \frown \infty$, uti

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^n \frown 0.$$

Sed

1. *Quidsi etiam $m \frown \infty$, ab $n$ certimodo dependens?*

Sit casus simplicissimus: nempe sit $n$ integer positivus et $=m$; fiet tum

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.n^3}+\dots.$$

quod pro $n \frown \infty$

$$\frown 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\dots.$$

at series prior manet ista semper minor; nam quotusvis terminus ex. gr. $p$-tus sumatur, primum non annumerando, erit is

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{2.3\ \dots\ p.n^p}$$

per ei respondentem, nempe per $\frac{1}{2.3\dots p}$ divisus

$$\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-p+1}{n},$$

quod tendit ad 1, nam

$$\frac{n}{n}=1,\ \frac{n-1}{n}-1=\frac{-1}{n}\frown 0,\dots$$

ita etiam

$$\frac{n-p+1}{n}-1=\frac{1-p}{n},$$

quod item tendit ad 0, quum $n$ pro illo $p$ utvis augere liceat; itaque usque ad quotumvis terminum $p$-tum accipiatur summa, pro dato quovis $\omega$ ita accipi $n$ potest, idem pro omnibus, nempe maximum eorum, quem eorundem aliquis requirit, ut quivis terminus seriei prioris a quovis ei respondente differat $<\frac{\omega}{p}$, adeoque omnes simul differant $<\omega$.

Interim series prior manifesto est $<$ posteriore; nam $\frac{n-1}{n}$ est $<1$, ita $\frac{n-p+1}{n}$ fractio vera est, adeoque terminus quivis $p$-tus prioris $<p$-to posterioris.

Ita

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \backsim 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}-\dots$$
$$=\frac{2}{2.3}+\frac{4}{2.3.4.5}+\frac{6}{2.3.4.5.6.7}+\dots$$

Pariter

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nq}=1+\frac{nq}{n}+\frac{nq(nq-1)}{2n^2}+\frac{nq(nq-1)(nq-2)}{2.3.n^3}+\dots$$
$$\backsim 1+q+\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2.3}+\dots,$$

qualevis reale, sive positivum, sive negativum denotet $q$.

Limes ad quem summa seriei.

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\dots$$

tendit, plerumque litera $e$ insignitur; atque *logarithmi*, qui huic basi superstruuntur, *naturales* dicuntur.

Unde, quum $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ elevatum ad $q$ tendit ad $e^q$ et simul tendit ad

$$1+q+\frac{q^2}{1.2}+\frac{q^3}{1.2.3}+\frac{q^4}{1.2.3.4}+\dots,$$

manifesto $e^q$ per hanc seriem expressa est; cuius, summæ limitis logarithmus naturalis $q$ est. Est nempe series ista convergens; cum quamtumvis sit $q$, aliquando fiet exponens seriei $q$ divisum per integrum illo maiorem, postea semper crescentem.

2. Sed non tantum e logarithmo quantitas ei respondens, verum ex hac quoque eius logarithmus reperiri potest. Nimirum dari paulo inferius probabitur; sit $u$ positivum et $<1$, atque nominetur $\alpha$ logarithmus ipsius $(1+u)$, nempe $e^\alpha=1+u$; erit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\alpha}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha<e^\alpha$, (nempe minus positivum); nam $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ (pag. 182 sub 1.), et $\alpha$ positi-

vum est, nam $e < 1$, adeoque ad exponentem quemvis negativum elevatum fit $< 1$; nempe $e^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$, et radix quævis exponentis integri positivi e potentia quavis integra ipsius $e$ est $> 1$. (pag. 102)

Est itaque

$$1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots \backsim 1 + u > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\alpha}$$

$$> 1 + \frac{n\alpha}{n} + \frac{n\alpha(n\alpha - 1)}{2n^2} + \ldots;$$

sed hoc quoque est $> 1$; erit enim $1 + \frac{1}{n}$ ad quemvis positivum exponentem elevatum $> 1$; ex. gr.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{1 + \frac{1}{n}} > 1$$

est. Sit id $u'$, quo series posterior ipsum 1 superat, atque sit $\alpha$ semper $\frac{a}{n}$, nempe utcunque crescat $n$, ex. gr. si $n$ fiat $kn$, fiat $a$ tum $ka$, ut $\frac{ka}{kn} = \alpha$ sit. Erit tum

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a} = 1 + u',$$

et hinc

$$\frac{1}{n} = (1 + u')^{\frac{1}{a}} - 1,$$

atque

$$\alpha = \frac{a}{n} = a \,.\, \frac{1}{n} = a\left((1 + u')^{\frac{1}{a}} - 1\right);$$

consequenter est (pag. 172)

$$\alpha = a\left(1 + \frac{1}{a}u' + \frac{1}{a}\,\frac{1-a}{a}\,\frac{u'^2}{2} + \ldots - 1\right)$$

$$= u' + \frac{1-a}{a}\,\frac{u'^2}{2} + \frac{1-a}{a}\,\frac{1-2a}{a}\,\frac{u'^3}{2.3} + \ldots$$

atque, dum $n$ tendit ad $\infty$,

$$\alpha \backsim u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots = \text{log. nat.}\,(1 + u).$$

Nam accipiantur item quotvis termini usque ad $p$-tum e priore, et dividatur quivis per ei respondentem e posteriore; quivis quotus tendit ad $1$; ex. gr.

$$\frac{1-a}{a}\frac{u'^2}{2}:-\frac{u^2}{2}=\frac{2(1-a)}{2.a}\frac{u'.u'}{u.u},$$

ubi

$$\frac{1-a}{a}\sim -1,$$

quia $\frac{a}{n}$ quidem est constans, sed dum $n\sim\infty$, etiam $a\sim\infty$; porro $\frac{u'}{u}\sim 1$, nam $1+u'\sim 1+u$; ita pro $p$-to termino est

$$\frac{1-a(1-2a)\dots(1-(p-1)a)}{a\;.\;a\;\dots\;a\;.}\frac{u'^p}{2.3\dots p}:\frac{u^p}{p}$$
$$=\frac{1-a}{a}\cdot\frac{1-2a}{a}\dots\frac{1-(p-1)a}{a}\frac{u'^p}{u^p}\cdot\frac{p}{2.3\dots(p-1)p}$$

quod tendit ad $\pm 1$; nam

$$\frac{1-a}{a}\sim -1,\frac{1-2a}{a}\sim -2,\dots\frac{1-(p-1)a}{a}\sim -(p-1),\text{ et }\frac{u'}{u}\sim 1.$$

Ita datur eiusmodi exponens $-\beta$ (pro $\beta$ positivo) ut $e^{-\beta}=1-u$ (pro quovis $u$ fractione vera positiva); nempe quum $e>1$ sit, et $e^0=1$, $1$ per positivam potentiam ipsius $e$ divisum quodvis positivum producere potest, quod $<1$ est.

Eritque et hic ut antea, $\left(\text{pro } \beta \text{ semper}=\frac{b}{n}\right)$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-b}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-\frac{b}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{nb}{n}}\sim e^{-\beta},$$
$$e^{-\beta}=1-u=1-\beta+\frac{\beta^2}{2}-\frac{\beta^3}{2.3}+\dots$$

Est nempe summa seriei huius limes summæ seriei

$$1-\frac{b}{n}+\frac{b(b-1)}{2n^2}-\frac{b(b+1)(b+2)}{2.3n^3}+\dots=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}$$

(plane ita uti superius). Est præterea (pag. 182.)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1\quad\text{et}\quad\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e\,.$$

adeoque

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-b}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{b}}<1,$$

atque valor eius per $1-z$ exprimi potest (pro $z$ positivo et $<1$). Atque pro

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-b}=1-z$$

erit

$$1+\frac{1}{n}=(1-z)^{-\frac{1}{b}},$$

adeoque

$$\frac{1}{n}=(1-z)^{-\frac{1}{b}}-1,$$

et

$$\begin{aligned}\beta=\frac{b}{n}&=b\left((1-z)^{-\frac{1}{b}}-1\right)\\ &=b\left(1+\frac{z}{b}+\frac{1}{b}\,\frac{1+b}{b}\,\frac{z^2}{2}+\frac{1}{b}\,\frac{1+b}{b}\,\frac{1+2b}{b}\,\frac{z^3}{2\cdot 3}+\ldots-1\right)\\ &=z+\frac{1+b}{b}\,\frac{z^2}{2}+\frac{1+b}{b}\,\frac{1+2b}{b}\,\frac{z^3}{2\cdot 3}+\ldots;\end{aligned}$$

quæ series plane ut antea

$$\backsim u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots,$$

nempe

$$\frac{z}{u}\backsim 1,\ldots$$

Consequenter est

$$-\beta=-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\ldots=\text{log. nat.}\,(1-u)$$

Unde cum sit

$$\alpha=\text{log. nat.}\,(1+u)$$

et

$$-\beta=\text{log. nat.}\,(1-u),$$

atque quantitas quævis positiva $Q$ per $\frac{1+u}{1-u}$ exprimi queat, si $u=\frac{Q-1}{Q+1}$ ponatur, quod manifesto $<1$ est, erit inde

$$\log.\,\text{nat.}\,Q = \log.\,\text{nat.}\,\frac{1+u}{1-u} = \log.\,\text{nat.}\,(1+u) - \log.\,\text{nat.}\,(1-u)$$
$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots - \left(-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \ldots\right)$$
$$= 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \ldots\right).$$

Si apud $\frac{2u^n}{\mu}$ subsistere libeat, terminorum sequentium summam constat esse minorem eodem termino per $(1-u^2)$ diviso (pag. 150); nam quilibet exponens seriei in posterum est $< u^2$; nempe post $\frac{u^3}{3}$ est $\frac{3u^2}{5}$, postea $\frac{5u^2}{7}$ &, adeoque semper $< u^2$, quod $< 1$ est, quia $u < 1$.

Alias series citius convergentes vide infra, una cum applicationibus earundem.

3. Sit $e^c = C$; erit $C^b = e^{cb} = C' = 1 + cb + \frac{c^2 b^2}{2} + \ldots$, et est
$$cb = \log.\,\text{nat.}\,C',$$
$$c = \log.\,\text{nat.}\,C,$$
$$b = \log.\,C' \text{ (quoad basim } C);$$

*diciturque* $b$, si $c$ non est $= 1$, *logarithmus artificialis.*

Ita
$$C^k = e^{ck} = C'' = 1 + ck + \frac{c^2 k^2}{2} + \ldots$$

et $k = \log.$ art. $C''$ quoad eandem basim $C$; atque $\frac{1}{c}$ nempe per quod logarithmus naturalis multiplicatus dat logarithmum artificialem (heic pro basi $C$) dicitur *modulus systematis*, cuius basis $C$ est; estque

$$\text{modulus} = \frac{1}{\log.\,\text{nat.}\,C} = \frac{1}{c}.$$

Si $c = 1$, est $\frac{1}{c} = 1$ et $\frac{1}{\log.\,\text{nat.}\,e} = 1$ est modulus systematis naturalis; nempe log. $e$, quoad basim $e$ est 1, quia $e^1 = e$.

Unde si modulus dicatur $\mu$, est

$$\mu = \frac{1}{\log.\,\text{nat.}\,C},$$

et hinc

$$\frac{1}{\mu} = \text{lognat } C,$$

adeoque

$$e^{\frac{1}{\mu}} = C;$$

et inde basis $C$ innotescit, nam

$$e^{\frac{1}{\mu}} = 1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\mu^2} + \frac{1}{2.3\mu^3} + \ldots$$

Si vero fuerint qualesvis duæ bases $B$ et $C$, et $\log. N$, quoad $B$ sit $b$, et $\log. N$, quoad $C$ sit $c$, erit $b : c = \log. C : \log. B$, quoad quamvis basim eandem accipiantur logarithmi basium $C, B$. Nam tum $B^b = C^c$; et hinc $b \log. B = c \log. C$ (pag. 110).

Notandum etiam, quod

$$\log. (1 - u) = -\left(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots\right),$$

quod, si $u$ tendat ad 1, erit

$$\frown -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) = -\infty$$

(pag. 175), atque tum $1 - u \frown 0$ et sensu (pag. 46) fit $\log. 0 = -\infty$.

XXXVII. 1. Si in præc. in serie ipsum $e^{cb}$ exprimenti substituatur ipsi $cb$ quantumvis reale $\alpha$ vel $\beta$, sive positivum sive negativum, sive $\alpha + \beta$, vel $\alpha - \beta$ aut $\alpha\beta$, vel $\alpha : \beta$, quævis eiusmodi series ad limitem tendit; excepto si ipsi $cb$ plane 0 substituatur, tunc enim primus terminus est 1, reliqui omnes 0. Imo si

$$1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots \frown A,$$

$$1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{2.3} + \ldots \frown B$$

erit etiam

$$1 + (\alpha + \beta) + \frac{(\alpha + \beta)^2}{2} + \frac{(\alpha + \beta)^3}{2.3} + \ldots \frown AB,$$

atque
$$1+(\alpha-\beta)+\frac{(\alpha-\beta)^2}{2}+\frac{(\alpha+\beta)^3}{2.3}+\ldots\to\frac{A}{B}.$$

Nam $e^\alpha=A$, $e^\beta=B$, $e^\alpha.e^\beta=AB=e^{\alpha+\beta}$; et $e^\alpha:e^\beta=A:B=e^{\alpha-\beta}$; atque $e^{\alpha+\beta}$ est limes seriei prioris, $e^{\alpha-\beta}$ autem posterioris.

Ita
$$(e^\alpha)^\beta=e^{\alpha\beta}=1+\alpha\beta+\frac{(\alpha\beta)^2}{2}+\frac{(\alpha\beta)^3}{2.3}+\ldots$$
et
$$\sqrt[\beta]{e^\alpha}=e^{\frac{\alpha}{\beta}}=1+\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2:2+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3:2.3+\ldots$$

2. Quum hæc ita sint, facile succurrit quærere: quidsi ipsi $\alpha$, aut etiam $\beta$, $r+j$ aut $R+I$ substitueretur, pro $R$, $r$ realibus, et $I$, $j$ pure imaginariis; num series eædem tum quoque ad limitem tenderent? et an una per alteram multiplicata, aut divisa &c, series eiusmodi ut prius producant?

Sit prius $r=0$, et sit ex. gr. $j=2\sqrt{-1}$; si in serie ipsius $e^\alpha$, ipsi $\alpha$ substituatur $j$, fiet $1+2\sqrt{-1}-\frac{4}{2}-\frac{8\sqrt{-1}}{2.3}+\frac{16}{2.3.4}+\ldots$, et terminorum realium seorsim addendorum, exponens seriei primus est $-\frac{4}{2}$, pure imaginariorum vero est $-\frac{-4}{2.3}$, et postea in utroque, si factor ultimus $\mu$ sit in denominatore termini, exponens est $\frac{-4}{(\mu+1)(\mu+2)}$; unde quum numerator constans sit, et $\mu\to\infty$, manifesto in aliquo termino primum fiet exponens seriei fractio vera, quæ in posterum quoque semper decrescet; præterea vero terminorum signa in serie utraque alternant; et quilibet maior sequenti atque terminus utriusque $\to 0$; itaque ut supra series utraque tam realium quam imaginariorum gaudet limite; adeoque et summa totalis seriei totius.

Ponatur iam $a+b\sqrt{-1}$ pro $a$, $b$ realibus in locum ipsius $\alpha$. Si $a+b$ poneretur, summa quotvis terminorum, etsi omnia positive accipiantur, certo finito minor maneret; accedente $\sqrt{-1}$ autem termini manent iidem, præterquam quod quidam signum mutent, quidam factore $\sqrt{-1}$ afficiantur. Itaque et horum summa manet priore finito minor; adeoque tam pars realis quam imaginaria, nisi constans sit, limite gaudet.

Quod multiplicationem serierum eiusmodi attinet; absque eo, ut resultato, quod sub signis generalibus $\alpha$, $\beta$ pro casu realitatis prodit, deducatur; e multiplicatione serierum immediata patet sic. Accipiantur termini numero $m$, tam in

$$\alpha^0 + \alpha^1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots + \frac{\alpha^m}{2.3\ldots m},$$

quam in

$$\beta^0 + \beta^1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{2.3} + \ldots + \frac{\beta^m}{2.3\ldots m};$$

atque instituatur multiplicatio; 1 et potentiæ omnes ipsius $\alpha$, multiplicabuntur per 1 et potentias omnes ipsius $\beta$ (usque ad $m$-tam); adeoque prius prodibit 1, præterea prodibit (pro quovis integro positivo $\mu$ quod non $> m$) terminus quivis ipsius $(\alpha+\beta)^\mu$, divisus per $2.3\ldots\mu$; et quod præterea prodit, $\frown 0$, dum $m \frown \infty$. Sit enim generaliter (denotante $\mu$ numerum quemvis ab 1 usque ad $m$ inclusive) $\mu = p + q$ pro $p, q$ integris positivis; cuiusvis termini ipsius $(\alpha+\beta)^\mu$ forma est

$$\frac{\mu.(\mu-1)\ldots(\mu-q+1)}{2.3\ldots q}\alpha^p\beta^q,$$

ubi $\mu - q + 1 = p + 1$, uti facile e quovis exemplo patet; exsurget vero e termino, in quo $\alpha^p$ est, per terminum, in quo $\beta^q$ est (quod nonnisi semel est),

$$\frac{\alpha^p\beta^q}{2.3\ldots p.2.3\ldots q};$$

atque hic erit plane terminus unicus ipsius $(\alpha+\beta)^\mu$, in quo $\alpha^p\beta^q$ est, per $2.3\ldots\mu$ divisus, uti forma seriei ostendit. Nam multiplicentur numerator denominatorque ipsius $\frac{\alpha^p}{2.3\ldots p}$ per

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-q+1) = (p+1)(p+2)\ldots(\mu-2)(\mu-1)\mu;$$

erit

$$\frac{\alpha^p\beta^q}{2.3\ldots p.2.3\ldots q} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-q+1)\alpha^p\beta^q}{2.3\ldots q} : 2.3\ldots p(p+1)\ldots\mu;$$

qui plane terminus superior generalis est, per denominatorem terminis ipsius $(\alpha+\beta)^{\mu}$ omnibus communem divisus. Pro quovis $\mu$ non $>m$ autem et quibusvis $p$, $q$ adest $\alpha^{p}$ in serie superiore, et $\beta^{q}$ in inferiore; at non si $\mu>m$ ex. gr. $=m+1$ sumatur. Nam si $\mu=m$, sit $p=0$, (aut $=m$), aderit in serie superiore $\alpha^{0}$, infra $\beta^{m}$, ita $\alpha^{m}$ et $\beta^{0}$; si $\mu<m$, quodvis $p$ et $q<m$ adesse patet; at pro $\mu=m+1$ et $p=m+1$, non adest $\alpha^{m+1}$, adeoque hic terminus ipsius $(\alpha+\beta)^{m+1}$ deest; adsunt vero omnes ipsius $\alpha+\beta$ potentiæ a 0 usque ad $m$ inclusive; dicatur summa eius, quod e multiplicatione insuper exsurgit, $\omega$. Accipiantur iam termini etiam porro usque ad $\alpha^{2m}$ et $\beta^{2m}$; pariter prodibunt etiam post $(\alpha+\beta)^{m}$ potentiæ omnes ipsius $(\alpha+\beta)$ usque ad $(\alpha+\beta)^{2m}$, in quas $\omega$ totum ingreditur, nempe præbendo unicum terminum $\alpha^{m}\beta^{m}$ ipsi $(\alpha+\beta)^{2m}$, et reliquos terminos omnes potentiis inferioribus suppeditando; nempe $m$ ipsum quoque, eo magis numerus ipso $m$ minor, cum numero $<m$, summam $<2m$ facit. Si vero $m \rightharpoondown \infty$, post $(\alpha+\beta)^{m}$ summa omnium $\rightharpoondown 0$, adeoque et pars $\omega \rightharpoondown 0$, ut supra (pag. 167).

Hinc series prior per secundam multiplicata, dat seriem formæ eiusdem, nonnisi $\alpha+\beta$ ipsi $\alpha$ in priore substituto, quidcunque denotent $\alpha$, $\beta$. Nempe ut supra (pag. 167) si de utraque serie usque ad exponentem quemvis accepta valet, de seriebus ipsis valet.

Hinc etiam series prior per secundam divisa, dat quotum

$$=1+(\alpha-\beta)+\frac{(\alpha-\beta)^{2}}{2}+\frac{(\alpha-\beta)^{3}}{2.3}+\ldots;$$

nam hoc per seriem secundam multiplicatum, dat priorem (per præcedentia).

Imo hinc etiam, etsi $c$ non sit reale, si $b=\frac{n}{m}$ (pro $n$, $m$ integris) reale sit, erit

$$\left(1+c+\frac{c^{2}}{2}+\frac{c^{3}}{2.3}+\ldots\right)^{b}=1+bc+\frac{(bc)^{2}}{2}+\frac{(bc)^{3}}{2.3}+\ldots$$

Est enim (per præcedentia)

$$\left(1+c+\frac{c^{2}}{2}+\frac{c^{3}}{2.3}+\ldots\right)^{2}=1+2c+\frac{(2c)^{2}}{2}+\frac{(2c)^{3}}{2.3}+\ldots,$$

et porro eundo, ut (pag. 167) usque ad $n$-tam potentiam est

$$\left(1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{2.3}+\ldots\right)^n=1+nc+\frac{(nc)^2}{2}+\frac{(nc)^3}{2.3}+\ldots$$

Ita

$$\left(1+nc+\frac{(nc)^2}{2}+\frac{(nc)^3}{2.3}+\ldots\right)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{nc}{m}+\frac{(nc)^2}{2m^2}+\frac{(nc)^3}{2.3m^3}+\ldots;$$

namque hoc elevatum ad $m$ dat

$$1+nc+\frac{(nc)^2}{2}+\frac{(nc)^3}{2.3}+\ldots$$

Itaque erit

$$\left(1+bc+\frac{(bc)^2}{2}+\ldots\right)^m=\left(1+c+\frac{c^2}{2}+\ldots\right)^n,$$

adeoque

$$\left(1+c+\frac{c^2}{2}+\ldots\right)^{\frac{n}{m}}=1+bc+\frac{(bc)^2}{2}+\ldots,$$

et

$$1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{2.3}+\ldots=\sqrt[\frac{n}{m}]{1+bc+\frac{(bc)^2}{2}+\frac{(bc)^3}{2.3}+\ldots},$$

ubi $cb=\frac{cn}{m}$ per $\frac{n}{m}=b$ divisum substituitur ipsi $cb$ in serie posteriore, e qua radix exponentis $\frac{n}{m}$ extrahenda est.

Quæstio etiam suboritur, num pro quovis $P$, sive reali (positivo vel negativo), sive pure imaginario, sive mixto, detur tale $p$, ut

$$1+p+\frac{p^2}{2}+\frac{p^3}{2.3}+\ldots\sim P.$$

Quum dari omnino statim probetur:

3. Animadvertitur, has series, etsi imaginaria contineant, analogis subesse operationibus, ac si exponentes ipsius $e$ reales essent; ex. gr. si $\alpha$, $\beta$ realia fuerint, sicuti $e^\alpha . e^\beta=e^{\alpha+\beta}$, ita series ipsi $\alpha$ superstructa per seriem ipsi $\beta$ superstructam multiplicata dat seriem $(\alpha+\beta)$ superstructam, etsi $\alpha$, $\beta$ imaginaria contineant... Unde passus ad *novem conceptum latiorem* aperitur; redeundo quasi a serie huius formæ, ad quam conceptus *potentiae elementaris* (pag. 50) deduxit, nempe si ipsi $\alpha$ substituatur ex. gr. $\sqrt[4]{16}$, exprimet series, omnes valores ipsius $e$ elevati ad $\sqrt[4]{16}$, pro duorum valorum realium ipsius $\sqrt[4]{16}$ (nempe $+2, -2$) quovis. Hinc

quum operationes potentiarum de seriebus dictis, etsi imaginariis superstructæ sint, valeant, imaginem ex. gr.

$$e^{\sqrt[4]{16}} = 1 + \sqrt[4]{16} + \frac{(\sqrt[4]{16})^2}{2} + \ldots$$

pro quovis valore exponentis retinere libuit, formando conceptum sequentem, quasi *potentiae*, *radicis*, *logarithmique conceptus superior* (in posterum quoque manens) alio nomine signoque designatus fuisset, (quamobrem etiam *elementares* dicti sunt, nomen hoc retinentes).

Si nimirum

$$1 + bc + \frac{(bc)^2}{2} + \frac{(bc)^3}{2.3} + \ldots = \text{vel} \frown B,$$

et

$$1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} + \ldots = \text{vel} \frown C;$$

atque $bc = r + j$ (pro $r$ reali et $j = 0$ vel pure imaginario): dicatur in posterum $B$ per quamvis potentiam elementarem exponentis $r$ ipsius $1$ multiplicatum *potentia exponentis $b$ ipsius $C$*, et $C$ dicatur *radix exponentis $b$ ipsius potentiae; logarithmus* vero nonnisi *$b$ ipsius $B$ quoad basim $C$ dicatur.*

Si $c = 1$, adeoque $C = e$; est $B = e^b$, et si $C = e^0 = 1$, est $B = e^{0b} = e^0$.

Patet vero conceptum potentiæ hoc sensu extendi, et priore latiorem fieri, logarithmi autem conceptum partim extendi, partim restringi. Nempe si $\alpha$ reale sit,

$$1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{2.3} + \ldots$$

quoque reale est, et quidem semper positivum, etsi $\alpha$ negativum sit: nam si negativum sit, ex. gr. $-3$; erit

$$e^{-3} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \ldots = \frac{1}{e^3};$$

adeoque

$$1 = e^3 \cdot \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \ldots\right);$$

ubi $e^3$ positivum est, consequenter et alter factor positivus est. Itaque series ista pro $a$ reali nonnisi valores positivos ipsius $e^a$ eos quidem omnes exhibet. Quamobrem ut omnes alii quoque valores comprehendantur, fit multiplicatio per $1^r$, sensu elementari intelligendo. Ubi nempe (pag. 183) ex $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nq}$ series

$$1+q+\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2.3}+\dots$$

prodibat, fuisset reipsa ex. gr. $\left(\text{pro } q=\frac{3}{2}\right)$

$$1^{\frac{3n}{2}}+\frac{3n}{2}.1^{\frac{3n-2}{2}}+\dots,$$

ubi $1^{3n}$, $1^{3n-2}$ semper $=1$, et $\sqrt{1}$ in quovis termino positive aut in omnibus negative accipiendus est; et quum quilibet accipi possit, valor omnis exhibetur; in serie

$$1+q+\frac{q^2}{2}+\dots$$

autem potentiæ ipsius 1 unicus tantum valor nempe $+1$ ponitur, omissis ceteris valoribus; quos tamen multiplicatio per $1^r$, sensu potentiæ elementaris intellectum, omnes exhibet. Per $1^r$ idcirco semper potentia elementaris intelligenda.

*Logarithmus realis autem, sensu proximo*, quoad basim $e$ vel $e^c$ pro $c$ reali *quantitati negativae neutiquam competit*; nam $B$ pro quibusvis $b$, $c$ realibus per dicta semper positivum est; atque nonnisi $b$ logarithmus ipsius $B$ quoad $e^c$ dicebatur. Restringitur itaque logarithmi conceptus, in quantum logarithmo elementari negativa realia quoque gaudent; extenditur vero, quum sensu proximo non solum $A+B\sqrt{-1}$, quæcunque realia denotent $A$, $B$, logarithmo gaudeat, sed et ipsum $A+B\sqrt{-1}$ logarithmus esse queat.

Nempe (pag. 51 et 96) est $\frac{-10.-10}{-10.-10}=\frac{1.1.1}{1.1}$, itaque (per definitionem pag. 51) $(-10)^{\frac{2-2}{3-2}}=1$, et $\frac{0}{1}$ seu $0=\log.1$, quoad $-10$; ita $\frac{10\cdot10}{10\cdot10}=\frac{-1.-1.-1.-1}{-1.-1}$ adeoque $10^{\frac{2-2}{4-2}}=-1$, et $0=\log.(-1)$, quoad 10; ita

$$\frac{10.10}{10.10} = \frac{\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}$$

ac $10^{\frac{2-2}{6-2}} = \sqrt{-1}$, et o est log. $\sqrt{-1}$, quoad 10: atque $10^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{1000}$, adeoque $\frac{3}{2}$ est logarithmus tam positivæ quam negativæ radicis ipsius 1000, quoad basim 10; ita omnes logarithmi in tabulis, ubi radix decies millionesima adeoque exponentis paris extrahitur ex 10 elevato ad logarithmum, qui ibidem est, commate deleto, sensu priore elementari, tam positivo quam negativo competunt. In genere pro quovis reali $R = e^r$, est $R$ non $\Leftrightarrow$ sed $\Leftarrow e^{\frac{2r}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{e^{2r}}$; atque $\frac{2r}{2} = r$, tanquam logarithmus elementaris tam ipsi $R$, quam ipsi $-R$ competit.

Datur autem pro quibusvis realibus $A$, $B$, etsi aliquod eorum o sit, tale $x$, ut sit

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \ldots = \text{vel} \smile -A + B\sqrt{-1};$$

atque tum

$$x = \log.(A + B\sqrt{-1}), \text{ quoad basim } e;$$

imo quævis basis $C = e^c$ sit, poterit $x$ in duos factores discerpi, quorum unus $c$ sit; nempe si ponatur $x = bc$, erit $b = \frac{x}{c}$, (quotumque dari, etsi $x$, $c$ utrumque imaginarium contineat, (pag. 147) dictum est); adeoque hoc $b$ erit logarithmus ipsius $A + B\sqrt{-1}$, quoad basim $C$. Si $A = 0$ sit, tum idem de $B\sqrt{-1}$ valet; si vero utrumque $= 0$ sit, tum o logarithmo nonnisi sensu (pag. 46) gaudet, eo quidem $-\infty$, ut paulo inferius dicetur.

Ratio prioris, Trigonometriæ elementis primis perspectis, (pag. 125) facile intelligitur. Erat ibidem

$$\cos. a + \sqrt{-1}.\sin. a = \left(\cos.\frac{a}{n} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{a}{n}\right)^n$$

quod (si $n$ tam magnum accipiatur, ut $\frac{a}{n}$ dimidio quadrante minus sit adeoque $\cos.\frac{a}{n} > \sin.\frac{a}{n}$ sit), erit per (pag. 172)

$$= \left(\cos.\frac{a}{n}\right)^n + n\left(\cos.\frac{a}{n}\right)^{n-1}\sqrt{-1}\sin.\frac{a}{n} - \frac{n(n-1)}{2}\left(\cos.\frac{a}{n}\right)^{n-2}\left(\sin.\frac{a}{n}\right)^2 -$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\left(\cos.\frac{a}{n}\right)^{n-3}\sqrt{-1}\left(\sin.\frac{a}{n}\right)^3 + \ldots,$$

ubi manifesto *summa terminorum realium est* $=\cos. a$, *et summa reliquorum* per $\sqrt{-1}$ multiplicatorum est $\sqrt{-1}.\sin. a$ atque *deleto* $\sqrt{-1}$ utrinque fit $=\sin. a$.

Si $n$ integer positivus finitus sit, series ex $n+1$ terminis constat exhibens cosinum sinumque arcus $n$-tupli, nec tum $\sin.\frac{a}{n} \lessdot \cos.\frac{a}{n}$ esse necesse est (pag. 172).

*Si vero* $n \sim \infty$, *datur series talis ut supra* (pag. 178), *cuius summa limes huius est, nempe:*

$$1+a\sqrt{-1}-\frac{a^2}{2}-\frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3}+\frac{a^4}{2.3.4}+\frac{a^5\sqrt{-1}}{2\ldots5}-\frac{a^6}{2\ldots6}-\ldots$$

Nam si $n \sim \infty$, tum $\frac{a}{n} \sim 0$, et $\cos.\frac{a}{n} \sim \cos. 0 = 1$, et $\left(\cos.\frac{a}{n}\right)^n$, $\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n-1}$, uti omnes reliquæ potentiæ ipsius $\cos.\frac{a}{n}$ tendunt ad 1; constabit præterea inferius, quod $\left(\sin.\frac{a}{n}\right):\frac{a}{n} \sim 1$; adeoque si (ut pag. 179) in quovis termino potentiæ ipsius $\cos.\frac{a}{n}$ substituatur 1, et $\frac{a}{n}$ ipsi $\sin.\frac{a}{n}$ erit

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{2.3\ldots m}\,\frac{a^m}{n^m}:\frac{a^m}{2.3\ldots m} \sim 1;$$

nam quotus hic est

$$=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\ldots\frac{n-m+1}{n},$$

ubi

$$\frac{n}{n}=1,\ \frac{n-1}{n}\sim 1,\ \frac{n-2}{n}\sim 1,\ldots \text{ et } \frac{n-m+1}{n}\sim 1,$$

atque omnia ut supra applicari possunt neque heic iam brevitatis studio repetuntur.

Unde etiam, quum hoc pro quovis $a$ valeat, est

$$\cos. a+\sqrt{-1}\sin. a = 1+a\sqrt{-1}-\frac{a^2}{2}-\frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3}+\frac{a^4}{2.3.4}+\ldots;$$

atque, ut prius, $\cos. a =$ summæ realium, nempe

$$\cos. a = 1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{2.3.4}-\frac{a^6}{2.3\ldots6}+\ldots$$

et $\frac{\sqrt{-1}\sin.a}{\sqrt{-1}} =$

$$\sin. a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3\ldots7} + ..$$

Sed ad scopum præsentem sufficit, quod (pag. 193)

$$\cos. a + \sqrt{-1} \sin. a = e^{a\sqrt{-1}};$$

sit $K$ positivum et æquale $e^k$; erit (pag. 183)

$$K = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2.3} + \ldots$$

et

$$e^{a\sqrt{-1}} \,.\, e^k = e^{a\sqrt{-1}+k} = 1 + (a\sqrt{-1}+k) + \frac{(a\sqrt{-1}+k)^2}{2}$$

$$= K(\cos. a + \sqrt{-1} \sin. a).$$

Si itaque

$$K(\cos. a + \sqrt{-1}\sin. a) = A + B\sqrt{-1},$$

seu

$$K\cos. a = A \text{ et } K\sin. a = B,$$

erit

$$A + B\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}+k}$$

Id ergo quæritur, num hoc fieri possit?

Sit $B = \frac{A}{p}$, nempe $A = Bp$. Casus si $A = 0$ excluditur, tunc enim facile est $a$ ita accipere ut $\cos. a = 0$ sit. Quæstio igitur eo reddit, num detur tale $a$, ut

$$\cos. a = p \sin. a$$

sit?

$$p \sin. a = p\sqrt{1 - \cos.^2 a}$$

seu

$$\cos.^2 a = p^2 - p^2 \cos.^2 a,$$

unde

$$\cos.^2 a\,(1 + p^2) = p^2,$$

et

$$\cos. a = \sqrt{\frac{p^2}{p^2+1}},$$

quod cum $<1$ sit, omnia pro radio 1 intelligendo, omnino datur, arcuque gaudet. Itaque si pro tali arcu $a$ accipiatur

$$K = \frac{A}{\cos. a},$$

quod semper *positivum* esse potest, nam $p$ sive positivum sive negativum sit, $\frac{p^2}{p^2+1}$ positivum est et pro $A$ negativo radix negativa accipi potest; erit

$$K \cos. a = A$$

atque

$$K \sin. a = \frac{K \cos. a}{p} = \frac{A}{p} = B;$$

adeoque

$$K(\cos. a + \sqrt{-1}. \sin. a) = A + B\sqrt{-1} = e^{k+a\sqrt{-1}}$$

et

$$\log. \text{nat.} (A + B\sqrt{-1}) = k + a\sqrt{-1}.$$

Patet etiam esse

$$K^2 = \frac{A^2}{(\cos a)^2} = A^2 : \frac{p^2}{1+p^2} = \frac{A^2 p^2 + A^2}{p^2} = A^2 + B^2.$$

Si (pag. 125) quivis arcuum sumatur, sive positive sive negative, quorum cosinus $= 1$ et sinus $= 0$, substituiturque ipsi $a$ pro quovis reali $K = e^k$, erit

$$K(\cos. a + \sqrt{-1}. \sin. a) = K(1 + \sqrt{-1}. 0) = K = e^k e^{a\sqrt{-1}} = e^{k+a\sqrt{-1}}$$

atque

$$\log. \text{nat.} K = k + a\sqrt{-1},$$

cuius valores, propter valores innumerabiles ipsius $a$, innumerabiles sunt, omnes imaginarii præter unicum, si nempe $a = 0$.

Ita si $a$ ita sumatur, ut $\cos. a = -1$ et $\sin. a = 0$, erit

$$\log. \text{nat.} (-K) = k + a\sqrt{-1};$$

inter hoc valores ipsius $a$ enim $0$ non adest, quia $\cos. 0 = 1$, consequenter negativum nullo reali logarithmo (ut supra quoque dictum est) et innumerabilibus imaginariis gaudet, uti etiam positivum, quod tamen unicum realem quoque habet. Si $K = 1$, tum pro $k = 0$ logarithmi omnes pure imaginarii sunt, præter unicum valorem ipsius $a$, pro $+1$ ipsi $0$ æqualem.

At quæritur etiam; num pro quovis positivo $K$ detur tale $k$, ut $e^k = K$ sit? (Quod in demonstratione supponebatur). Sit prius $K > 1$. Si positivum $n$ tendit ad $\infty$, $e^n$ quoque tendit ad $\infty$, quum $e > 1$ sit; $e^{-n}$ seu $\frac{1}{e^n}$ vero tendit ad 0, $e^{\frac{1}{n}}$ id est $\sqrt[n]{e}$ vero (semper $> 1$) tendi ad 1 (pag. 102).

Quæratur (Fig. 17. *bis*) a $\mathfrak{p}$ eundo semper porro in $\infty$, in quovis puncto $\mathfrak{p}'$, num $e^{\mathfrak{pp}'} < K$ sit? aliquamdiu prodibit minus, et aliquando maius, nam $e^0 = 1$, et exponens positive crescit a 0 in $\infty$. Datur itaque (pag. 20) punctum aliquod ultimum $*$, intra quod et $\mathfrak{p}$ quodvis $\mathfrak{p}'$ tale est, ut $e^{\mathfrak{pp}'} < K$ sit; erit vero tum $e^{\mathfrak{p}*} = K = \mathfrak{ab}$; nam secus esset $< \mathfrak{ab}$ aut $> \mathfrak{ab}$; neutrum vero fieri potest.

Sit enim $e^{\mathfrak{p}*} = \mathfrak{ac} = \mathfrak{ab} - \mathfrak{cb}$, erit $\mathfrak{ac}.\, e^{\frac{1}{n}} \sim \mathfrak{ac}$, quia $e^{\frac{1}{n}} \sim 1$, adeoque $\mathfrak{ac}.\, e^{\frac{1}{n}} - \mathfrak{ac}$ dato quovis ergo et $\mathfrak{cb}$ minus fieri potest, sit $= \mathfrak{cq}$; erit $\mathfrak{ac}.\, e^{\frac{1}{n}} = \mathfrak{ac} + \mathfrak{cq}$ seu $e^{\mathfrak{p}* + \frac{1}{n}} = \mathfrak{aq}$; adeoque in $*$ non esset ultimum tale punctum, ut dictum est; nam $\mathfrak{p}* + \frac{1}{n}$ ultra $*$ terminatur, attamen $e^{\mathfrak{p}* + \frac{1}{n}} < K$; ad quemvis exponentem minorem elevatum vero minus est.

Neque $e^{\mathfrak{p}*} = \mathfrak{ad}$ esse potest; nam $e^{\frac{-1}{n}} = 1 : \sqrt[n]{e}$ quod $< 1$, sed tendit ad 1; adeoque $\mathfrak{ad}.\, e^{\frac{-1}{n}} - \mathfrak{ad}$ quovis dato, ergo et ipso $\mathfrak{bd}$ minus fieri potest; differentia negativa est, sit $-\mathfrak{rd}$; erit $\mathfrak{ad}.\, e^{\frac{-1}{n}} - \mathfrak{ad} = -\mathfrak{rd}$, adeoque $e^{\mathfrak{p}* - \frac{1}{n}} = \mathfrak{ab} + \mathfrak{br}$; itaque $e$ ad exponentem minorem ipso $\mathfrak{p}*$ elevatum $> K$ esset. Est igitur $K$, si $> 1$ est, $= e^{\mathfrak{p}*}$. Si vero $K < 1$, tum datur tale $N > 1$, ut $NK > 1$; et tum dantur talia $x$, $z$, ut $e^x = NK$ et $e^z = N$; adeoque $\frac{e^x}{e^z} = e^{x-z} = K$.

*Exempla.*

1. Pro quovis $a$, cuius cos. $= 1$ et sin. $= 0$, est (pag. 197)

$$\cos. a + \sqrt{-1}.\, \sin. a = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} + \ldots = e^{a\sqrt{-1}};$$

seriei summa igitur $\sim 1$; quod fieri nequit, nisi summa realium præter terminum primum $\sim 0$, et summa pure imaginariorum quoque $\sim 0$. Est vero pro quovis dicto $a$, $a\sqrt{-1} = \log.$ nat. 1, et inter innumerabiles logarithmos solus 0 est realis, pro $a = 0$.

2. Pro quovis $a$, cuius cos. $= -1$, et sin. $= 0$, est

$$\cos. a + \sqrt{-1}. \sin. a = -1 = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} + \ldots = e^{a\sqrt{-1}};$$

itaque summa realium præter *terminum primum* $\sim -2$, et summa pure imaginariorum $\sim 0$. Innumerabilium valorum ipsius $a$ unus est $\pi$: adeoque $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, et $\pi\sqrt{-1}$ est unus logarithmorum naturalium innumerabilium ipsius $-1$; atque

$$\pi = \frac{\log. \text{nat.} (-1)}{\sqrt{-1}};$$

quod tamen nihil quoad quantitatem ipsius $\pi$ determinat, quum log. nat. $(-1)$ iam involvat eam, neque aliunde notus sit.

3. Pro $a = 1 =$ radio est

$$\cos. 1 + \sqrt{-1}. \sin. 1 = e^{1\sqrt{-1}} = 1 + \sqrt{-1} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \ldots$$

et inde

$$\sqrt{-1} = \log. \text{nat.} (\cos. 1 + \sqrt{-1}. \sin. 1),$$

atque

$$e = \sqrt[\sqrt{-1}]{\cos. 1 + \sqrt{-1} \sin. 1}.$$

Itaque (pag. 121.)

$$e^{1i} = 1 + 1i - \frac{1}{2} - \frac{1i}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots$$

Patetque omnia in intuitu exhiberi: imo quum pure imaginaria a realibus nonnisi determinatione differant, ut positiva a negativis, et maioritatis minoritatisque sensus (pag. 26) ad pure imaginaria cum realibus comparata extendi potest.

4. Pro $\cos. a = 0$, et $\sin. a = 1$, est

$$e^{a\sqrt{-1}} = \cos. a + \sqrt{-1} \sin. a = \sqrt{-1} = 1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3\sqrt{-1}}{2.3} + \ldots,$$

adeoque pars realis tendit ad $0$ et pars imaginaria tendit ad $\sqrt{-1}$; atque

$$\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}}$$

et

$$a\sqrt{-1} = \log. \text{nat.} \sqrt{-1}.$$

5. Si vero (in 4.) sit $a\sqrt{-1}=c$ et $b=\sqrt{-1}$, erit

$$bc=a\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-a,$$

atque

$$e^c=e^{a\sqrt{-1}}=\sqrt{-1},$$

et

$$e^{bc}=e^{-a}=1-a+\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{2.3}+\ldots$$
$$=e^{a\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}$$
$$=(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$$

et inde

$$\sqrt{-1}=\sqrt[\sqrt{-1}]{e^{-a}}.$$

Est vero $\frac{\pi}{2}$ talis valor ipsius $a$ uti in (4.) requiritur; imo (pro $n$ integro quovis) $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ tale est.

6. Solet etiam ex $\cos. a+\sqrt{-1}\sin. a$ sequens deduci.

Est nempe (pag. 197)

$$e^{a\sqrt{-1}}-\cos. a=\sqrt{-1}\sqrt{1-\cos.^2 a},$$

et hinc elevando ad 2 est

$$e^{2a\sqrt{-1}}+\cos.^2 a-2e^{a\sqrt{-1}}\cos. a=-1+\cos.^2 a;$$

adeoque

$$2e^{a\sqrt{-1}}\cos. a=1+e^{2a\sqrt{-1}};$$

consequenter

$$\cos. a=\frac{1}{2e^{a\sqrt{-1}}}+\frac{e^{a\sqrt{-1}}}{2}$$
$$=\frac{e^{-a\sqrt{-1}}+e^{a\sqrt{-1}}}{2}.$$

Hinc etiam substituendo $\cos. a+\sqrt{-1}\sin. a$ ipsi $e^{a\sqrt{-1}}$ est

$$\cos. a=\frac{e^{-a\sqrt{-1}}+\cos. a+\sqrt{-1}\sin. a}{2},$$

et hinc

$$\sqrt{-1}\,\sin. a = \cos. a - e^{-a\sqrt{-1}} = \frac{e^{-a\sqrt{-1}} + e^{a\sqrt{-1}}}{2} - e^{-a\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2};$$

consequenter

$$\sin. a = \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Quæ formulæ sinum cosinumque ita exhibent, ut per $e^{a\sqrt{-1}}$ limes summæ seriei

$$1 + a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2.3}\sqrt{-1} + \ldots$$

per $e^{-a\sqrt{-1}}$ vero limes summæ ipsius

$$1 - a\sqrt{-1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{2.3}\sqrt{-1} + \ldots$$

intelligatur.

7. Quum ut iam sæpius dictum est, pure imaginaria a realibus nonnisi determinatione alia differant: possunt quantitates pure imaginariæ in Geometria exhiberi, certo modo a realibus distinctæ. Et facile patet æquationem circuli pro diametro $=1$, nempe

$$y = \sqrt{x - x^2}$$

exhibere valoribus pure imaginariis hyperbolam æquilateram, æquationem ellipseos vero omnes hyperbolas (quoad formam); uti æquatio hyperbolæ æquilateræ exhibet circulum pro valoribus pure imaginariis (ex. gr. serie punctorum, aut alio colore a reali distingvendum), et æquatio hyperbolæ generalis, exhibet omnes ellipses (sensu dicto); æquatio parabolæ dat quoad valores pure imaginarios quoque, parabolam quoad formam æqualem quasi imaginem virtualem sibi æqualem; in prioribus vero imaginariorum forma realibus contraria erat.

8. Si logarithmi sensu elementari accipiantur, est etiam

$$\log. (-2) - \log. (-3) = \log. \frac{-2}{-3} = \log. \frac{2}{3};$$

at si logarithmus sensu dicto veniat, tum (pag. 199)

$$\log.(-2)-\log.(-3)=\log.\mathrm{el}.\,2+\pi\sqrt{-1}-(\log.\mathrm{el}.\,3+\pi\sqrt{-1});$$

at si ex. gr. in posteriore $3\pi\sqrt{-1}$ sit, logarithmus realis ipsius $\frac{2}{3}$ haud exhibetur. Vide infra in differentiatione logarithmi, atque in explicatione spatiorum hyperbolæ asymptoticorum.

# CONSPECTUS ARITHMETICAE GENERALIS.

SECTIO II.

## CALCULUS DIFFERENTIALIS ET INTEGRALIS, ET PRIMAE LINEA CALCULI VARIATIONIS.

§. 36.

Filum sectione præcedenti certo respectu interruptum tandem ulterius continuatur: ut Tyrones ex imis radicibus arborem scientiæ cum præcipuis eius ramis excrescentibus in lucem exsurgere cernant.

Mens abstrahendo varia, abstractaque vario modo componens, de omnium illarum operationum, quæ ante sectionem præcedentem prodierant, omnimoda compositione ad conceptum generaliorem ascendit: nimirum qualiumvis operationum, quæ in tempore spatiove suscipi possunt, qualibusvis afficiantur quantitates, expressio id denotans (nomine a *Leibnitio* introducto) vocatur *functio*, et quidem *sensu lato* quantitatis cuiusvis, quæ in expressione adest, *strictius* autem tantum quantitatis variabilis, quæ in expressione est, aut plurium, si plures adsint. Variabiles plerumque postremis alphabeti literis $x$, $y$,.., imo $p$, $q$,... denotantur, constantes prioribus, nisi aliud monitum fuerit; intelligitur autem per *variabilem* ex. gr. $x$, certum quantitatum genus, quas nomine generali $x$ denotare libet; ita ut ipsi $x$ quævis quantitas sub eo genere contenta, in expressione substitui possit, nisi id pro certa quæstione aut conditione aliquatenus restringatur; *constans* vero est, quæ utcunque mutata variabili, id est ex. gr. ipsi $x$ quidvis substituatur, eadem manet.

Quum heic (veluti in oceanum omnia confluunt, ut inde sublata in altum variis phænomenis redeant) innumeris functionis modis campus infinitus aperiatur: pronum est vias prospectusque eius patefientes sequi.

Nimirum si quantitates, quarum genus $x$ est, nulla alia operatione afficiantur, nisi quod sub certa conditione acceptæ post se invicem ponantur: oritur *Theoria combinationum*. Ex. gr. conditio esse potest, ut ex 5 rebus, quarum genus $x$ est, accipiantur duæ: ita quoad ordinem aliqua determinatio esse potest, aut ordo in censum non vocatur (pag. 159) et quæri potest quotnam et qui sint functionis valores.

Si vero quantitates operationibus arithmeticis geometricisve aut aliis quoque connexæ sint, variabilis quævis erit genus aut omnis quantitatis (sive realis sive imaginariæ), aut non omnis sed tantum realium, imo tantum numerorum integrorum, aut illarum tantum quantitatum, quæ a valore certo $a$ usque ad valorem $b$ (inclusive) sunt, aut denique variabilis genus certarum functionum esse potest.

In quovis dictorum casuum, ultro succurrit inquirere:

1. Pro certa functionis conditione, in variabilium valores (qualitatesque).

2. Pro certa variabilium conditione, in functionis valorem (qualitatemque).

3. Pro certa functionis qualitate, quicunque fuerit (absque aut sub certa conditione) valor quantatis variabilis, in certorum functionem constituentium qualitatem.

4. Pro certorum functionem constituentium certa qualitate, in functionis qualitatem.

Ex. gr. Si in (1.) conditio ea sit, ut valor functionis 0 sit: quæritur, num detur talis quantitas, quæ si variabili substituatur, functio $= 0$ fiat? et quotnam qualesque dentur? Ita si plures insint functioni variabiles. Huc pertinet *problema aequationum*; ex gr. $x^2 - x - 2 = 0$ nonnisi pro $x = 2$ et $x = -1$ est. Præter alias conditio esse potest, ut *valor* functionis *maximus* vel *minimus* fiat; quærique, num detur eiusmodi valor, qui si variabili substituatur, functionis valor maximus vel minimus omnium eius valorum fiat?

Si vero variabilis ipsa in functione genus certarum functionum sit et quæratur talis, quæ si variabili substituatur, functio certa qualitate prædita sit: *calculus variationum* dicitur. Ex. gr. dum linearum aream certam claudentium minima quæritur (sub hac vel illa conditione).

Si variabilis quævis nonnisi integros denotet: quæstiones e superioribus promanantes naturam numerorum concernunt. Si ex. gr. functio sit $4x+1$ et $x$ tale sit ut $4x+1$ numerus primus sit, functio gaudebit illa qualitate ut duorum integrorum ad 2 elevatorum summa sit (et quidem unico tantum modo); at non ut hac qualitate gaudeat, primus esse debet. Ramus hic Arithmeticæ immensus sagacitatem ingenii maximam postulans flores fructusque veritatis puræ æternæque præbet. Vide opus immortale: *Disquisitiones Arithmeticae Auctore C. F. Gauss 1801 Lipsiae.*

Ad (3.) pertinet: quod si $Ax^a+Bx^b+\dots$ pro quovis valore ipsius $x$ sit $=0$, quilibet coefficientium est $=0$.

E (2.) vero pluribus modis calculus differentialis originem capit et variæ promanant series: si nempe conditio ea sit, ut in functione ipsius $x$ substituatur ipsi $x$ (generi omnis quantitatis, quæ est a 0 usque ad $\alpha$) prius $\frac{\alpha}{n}$, tum $\frac{2\alpha}{n}$, dein $\frac{3\alpha}{n}$ et ita porro usque ad $\frac{n\alpha}{n}$. Attamen ut clarius exponatur, prius distinctio denotatioque functionum præmittenda.

1. Functio, cuius valor pro quovis determinato valore variabilis, quæ in ea est, numerabilibus eiusmodi operationibus prodit, quarum quævis est *addere* aut *multiplicare* (imo etiam *radicem gradus commensurabilis extrahere*), dicitur *algebraica*; si vero valor dictus nonnisi innumerabilibus eiusmodi operationibus reperiatur, functio *transcendens* audit.

Dicitur porro *quoad valores functio m-formis*, si valores eius numero $m$ sint (pro determinato valore variabilis in ea). Ex. gr. $\sqrt{x}$ est functio biformis.

Si vero $x=a$ per integrum $n$ dividatur et $n$ tendat ad $\infty$, dicitur $x$ *variabilis absoluta*; atque si valor functionis ipsius $x$ (pro valore eodem ipsius $x$) pro quovis $n$ sit idem, *functio absoluta* dicitur. Ex. gr. in figura (19.) $F+G+H+f+g+h$ mutato $n$ mutatur.

2. Solet vero functio variabilium $x$ vel $x, y, \ldots$ denotari per $f(x)$, $F(x, y, \ldots)$, literis parenthesi præpositis forma functionis denotata, et quidem ita, ut si per $f(x)$ denotetur ex. gr.

$$ax^2 + bx - c,$$

tum $f(a)$ denotet

$$aa^2 + ba - c,$$

et $f(0)$ denotet

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 - c = -c,$$

substituendo nempe ubique ipsi $x$ in casu primo $a$ et in secundo $0$.

Ita si $f(x) = x^m$, sit $f(x+\omega) = (x+\omega)^m$; et si $F(x, y) = \alpha xy$, sit $F(x+\omega, b) = \alpha(x+\omega)b$; unde et casus alii patent.

Ita mox dicenda modo sequenti significari possunt. *Differentiale absolutum* $n$-tum functionis variabilium $x$, vel $x, y \ldots$ quod per $d^n f(x, \ldots)$ denotari solet, scribi potest $\mathfrak{d}^n f(x, \ldots)$, vel si $n = 1$, tantum $\mathfrak{d} f(x, \ldots)$. *Differentiale* $n$-tum quoad $x$ vero per $\mathfrak{d}^n_x f(x, y, \ldots)$, et si $n = 1$, per $\mathfrak{d}_x f(x, y, \ldots)$, ita *differentiale* sinus $x$ *quoad cotangentem* per $\mathfrak{d}_{*t} \sin. x$, ($*t$ cotangentem significante) denotari potest.

Ita *coefficiens* vel *quotiens differentialis absolutus* $n$-tus, qui vulgo $\frac{d^n f(x)}{(dx)^n}$, iuxta Lagrange vero $f^{(n)}(x)$, et pro $n = 1$ $f'(x)$, pro $n = 2$ $f''(x)$, scribitur, denotari per $\boldsymbol{\mathfrak{d}}^n f(x)$, ($\boldsymbol{\mathfrak{d}} f(x)$, $\boldsymbol{\mathfrak{d}}^2 f(x), \ldots$) potest. Si vero quoad $x$ sit, $\boldsymbol{\mathfrak{d}}^n_x f(x, y, \ldots)$ vel $\underset{x}{\overset{n}{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}} f(x, y, \ldots)$ aut $\underset{n,x}{f}(x, y, \ldots)$ scribi potest; et $n$-tus coefficiens differentialis quoad $z$ $m$-ti coefficientis differentialis quoad $x$ accepti per $\boldsymbol{\mathfrak{d}}^n_z \underset{m,x}{f}(x, y, z \ldots)$ aut $\underset{z}{\overset{n}{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}} f_{m,x}(x, \ldots)$ significari. Ita si $f(x, y, z, \ldots)$ dicatur ex. gr. $X$, quid $\mathfrak{d} X$, $\boldsymbol{\mathfrak{d}} X$, $\boldsymbol{\mathfrak{d}}^m_x X$, $\underset{x}{\overset{m}{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}} X$, $\underset{m,x}{X}$, $\underset{m,x;\,n,z}{X}$ significet, patet.

*Integrale* denotatur per $\int$ præpositum differentiali; potestque tantum coefficienti differentiali præponi: si is ex. gr. $1$ sit, scribi potest

$$ {}_x\!\int 1$$

id est integrale quoad $x$ ipsius $1$ tanquam coefficientis differentialis.

Si vero variabili functio certa substituatur, scribi

$$A\big(B(x)\big) \quad \text{vel} \quad A\big(B(x), C(y), \ldots\big)$$

potest; et si $A\big(A(A(x))\big)$ esset, per $A^3(x)$ significari potest, quum $A$ non quantitatem denotet, adeoque numerus haud exponens sit; uti $\big(A(x)\big)^3$ denotat tertiam functionis potentiam. Patet hinc $\int^2$ denotare $\int\int$.

Si nulla variabilis postponatur, potest $(\underset{n}{A})$, ita $(\underset{n}{U})$ vel aliud terminum $n$-tum certæ seriei denotare.

3. Si iam in $A(x)$ substituatur $x+i$ ipsi $x$, ut sit $A(x+i)$, quæritur expressio prior valorque eius quomodo mutetur? Vocatur hoc *Theorema Tayloriarum*, cuius unus casus est binomiale, si nempe $A(x)=x^p$.

Reflectere ad augmentum positivum vel negativum valoris functionis pronum est, imo id etiam cum augmento ipsius $x$ comparare, et tum comparationem istam inter augmenta simultanea ipsius $x$ et functionis ad diversos valores ipsius $i$ extendere. Casus se offerebant tales, ubi ratio augmentorum simultaneorum pro quantovis $i$ eadem manet, et alii, ubi mutatur, sed decrescente $i$ ad aliquam functionem ipsius $x$ propius venit, imo

$$\frac{A(x+i)-A(x)}{i}$$

tendit ad $A'(x)$, dum $i$ tendit ad o. Hoc est, quod NEWTON *rationem primam vel ultimam augmentorum nascentium vel evanescentium* dixit, hac via *calculum*, quem *fluxionum* dixit, reperiens. Insignis certe limes iste est, ad quem quotus dictus tendit, priusquam omnino dividendus aut divisor $=$ o fieret, qui plane supponantur ita decrescere, ut zero nunquam attingant: naturam enim eorum, quæ per functionem determinantur (ex. gr. curvæ &), quasi in germine continet, quod iam BARROW (cuius NEWTON discipulus fuit) animadverterat. Est vero hoc quod supra per $\partial A(x)$ scriptum est, et coefficiens differentialis dictum est.

4. Quidsi ipsi $x$ substituatur prius o, dein $\frac{x}{n}$, tum $\frac{2x}{n}$ et ita porro usque ad $\frac{nx}{n}$; ultro succurrit, functione ita mutata, a quovis ad sequen-

tem eundo, augmenta adeoque seriem augmentorum considerare. Denotetur $\frac{x}{n}$ per $\dot{x}$; accipiendo certum valorem $\alpha$ ipsius $x$, erunt valores functionis sequentes:

$$A(0\dot{x}), A(1\dot{x}), A(2\dot{x}), \ldots, A\left((n-1)\dot{x}\right), A(n\dot{x}),$$

id est

$$A(0), A\left(\frac{\alpha}{n}\right), A\left(2\frac{\alpha}{n}\right), \ldots, A\left((n-1)\frac{\alpha}{n}\right), A\left(n\frac{\alpha}{n}\right);$$

atque series augmentorum erit a fine incipiendo

$$A(n\dot{x}) - A\left((n-1)\dot{x}\right), \ldots, A(2\dot{x}) - A(\dot{x}), A(\dot{x}) - A(0),$$

ubi *terminus seriei generalis* obviam venit; nempe si in

$$A(m\dot{x}) - A\left((m-1)\dot{x}\right)$$

ipsi $m$ quicunque integer $k$ ab 1 usque ad $n$ inclusive substituatur, prodit terminus seriei $k$-tus; ex. gr. $A(3\dot{x}) - A(2\dot{x})$ est a primo incipiendo (inclusive) tertius.

Patet etiam summam seriei, terminis intermediis se invicem destruentibus, esse

$$A(n\dot{x}) - A(0) = A(x) - A(0),$$

nempe *summam incrementorum*, quæ ipsi $A(0)$ usque ad $A(x)$ inclusive accessit, uti pro $n=3$ fig. (18) ostendit.

*Series incrementorum eiusmodi* (terminorum numero certo $n$) e functione aliqua $A(x)$ modo dicto derivata dicatur breviter *series ex $A(x)$ derivata* aut brevius *series ipsius $A(x)$*; et terminus generalis huius, nempe

$$A(m\dot{x}) - A\left((m-1)\dot{x}\right)$$

dicatur breviter *terminus seriei generalis ipsius $A(x)$*.

5. Porro alia functio quoque se offerebat, e qua derivatæ seriei totidem terminorum, cuiusvis $m$-ti termini ad terminum $m$-tum prioris (adeoque termini generalis huius ad terminum generalem prioris) relatio certa eadem palam fuit; quo sectiones simultaneæ Archimedis (rite

intellectæ) viam patefecerant, sed lingua generalitatis nondum fari ceperat. Cartesius dedit pennas, quibus crescentibus oceani continentisque genii e græco nido cœlipeti tractu evolarunt.

Si nimirum functionum absolutarum $A(x)$ et $B(x)$ serierum termini generales denotentur per $a(m\dot{x})$ et $b(m\dot{x})$, aut brevius per $a(x)$ et $b(x)$, nempe

$$a(m\dot{x}) = A(m\dot{x}) - A\big((m-1)\dot{x}\big),$$

$$b(m\dot{x}) = B(m\dot{x}) - B\big((m-1)\dot{x}\big),$$

summa seriei ipsius $A(x)$ autem dicatur $A$, et $B$ sit summa seriei ipsius $B(x)$, ut sit nempe

$$A = A(x) - A(0), \qquad B = B(x) - B(0),$$

atque pro eodem $n$ quodvis

$$b(m\dot{x}) = \beta a(m\dot{x}),$$

adeoque

$$\frac{b(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = \beta,$$

quicunque numerus ab 1 usque ad $n$ inclusive substituatur ipsi $m$, manifesto est

$$B = \beta A;$$

atque si $\dfrac{b(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = 1$, tum $B = A$; nempe

$$A(x) - A(0) = B(x) - B(0),$$

adeoque

$$A(x) = B(x) - B(0) + A(0).$$

Hinc talibus casibus venientibus, ubi $u(m\dot{x})$, — nempe terminus generalis seriei e functione non absoluta $U(x)$ derivatæ, cuius seriei summa dicatur $U$, — talis est, ut $\dfrac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})}$ quidem non est $=1$, sed aucto $n$ ipsi 1 propius accedit: facilis passus erat quærere, num dato quovis $\omega$ propius ire queat? id est num detur tale $n$ (idem pro omnibus terminis), ut quicunque numerus ab 1 usque ad $n$ inclusive substituatur ipsi $m$, sit $\frac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} - 1 \lessdot \omega$? In pluribus casibus ita esse patebat. Et nova quæstio ultro exorta est, num si in $\frac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = 1$ loco signi $=$ signum $\backsim$ tantum locum habeat, pro $U = A$ fiat $U \backsim A$? Responsio in promptu erat:

Si nempe $A(x)$ functio absoluta sit, adeoque $A$ pro quovis $n$ maneat idem, et in serie huius $A(x)$ termini omnes eodem signo gaudeant atque pro quantovis $N$ detur tale $n$ idem pro omnibus, ut

$$\frac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} - 1 \lessdot \frac{1}{N}$$

sit, erit

$$u(m\dot{x}) - a(m\dot{x}) \lessdot \frac{a(m\dot{x})}{N},$$

et hinc

$$u(1\dot{x}) - a(1\dot{x}) \lessdot \frac{a(1\dot{x})}{N},$$

$$u(2\dot{x}) - a(2\dot{x}) \lessdot \frac{a(2\dot{x})}{N},$$

$$u(3\dot{x}) - a(3\dot{x}) \lessdot \frac{a(3\dot{x})}{N},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u(n\dot{x}) - a(n\dot{x}) \lessdot \frac{a(n\dot{x})}{N};$$

consequenter summa columnarum verticalium priorum duarum est minor quam summa columnæ verticalis tertiæ, id est

$$U - A \lessdot \frac{A}{N},$$

itaque

$$U - A \backsim 0,$$

et

$$U \backsim A,$$

idest $A$ limes ipsius $U$ est.

Ex. gr. si (Fig. 19)

$$A(x) = F + G + H,$$

et sit (pro $n = 3$)

$$a(1\dot{x}) = F, \; a(2\dot{x}) = G, \; a(3\dot{x}) = H,$$

et

$$u(1\dot{x}) = F + f, \; u(2\dot{x}) = G + g, \; u(3\dot{x}) = H + h,$$

nempe

$$U(3\dot{x}) = F + f + G + g + H + h,$$
$$U(2\dot{x}) = F + f + G + g,$$
$$U(1\dot{x}) = F + f, \quad U(0) = 0;$$

tum si pro $N = 7$ sit

$$\frac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} - 1 \lessdot \frac{1}{N},$$

idest

$$H + h - H \lessdot \frac{H}{7},$$
$$G + g - G \lessdot \frac{G}{7},$$
$$F + f - F \lessdot \frac{F}{7},$$

esset $F + f + G + g + H + h - (F + G + H)$ seu

$$f + g + h \lessdot \frac{F + G + H}{7}.$$

Et si pro $N$ utvis magno daretur tale $n$ (idem pro omnibus terminis), ut schema hoc valeat scribendo in primam columnam verticalem terminos seriei ipsius $U(x)$, in secundam terminos simultaneos ipsius $A(x)$, atque in tertiam quoque hos per $N$ divisos: manifesto esset $U - A \rightharpoondown 0$ et $U \rightharpoondown A$, dum $n \rightharpoondown \infty$.

In fig. (19) facile patet pro quovis $N$ posse $n$ ita augeri, ut quodvis ipsorum $f, g, h, \ldots$ sit minus quam litera magna nominis eiusdem per $N$ divisa, et quidem pro eodem $n$. Nempe si ordinata prima dicatur $y$, et secunda ad lævam sit $y - \omega$, erit $h \lessdot \omega\dot{x}$ et $(y - \omega)\dot{x} \lessdot H$; atque si $\omega \lessdot \frac{y - \omega}{N}$, erit et $\omega\dot{x} \lessdot \frac{y - \omega}{N}\dot{x}$; consequenter $h \lessdot \frac{H}{N}$.

Poterit vero, si ex. gr. ab recta sit et $y = \beta x + \gamma$ quodvis $\omega$ (pro eodem $n$ et certa constante $\beta$) per $\beta\dot{x}$ exprimi; et si $n$ non $\lessdot \frac{N\beta x}{\gamma}$ accipiatur, quævis litera parva erit minor quam litera magna nominis eiusdem per $N$ divisa. Nam tum quivis numerus ab 1 usque ad $n$ substituatur ipsi $m$, erit pro $\gamma + \beta m\dot{x}$ ipsi $m\dot{x}$ respondente

$$\frac{\omega}{\gamma+\beta m\dot{x}}=\frac{\beta\dot{x}}{\gamma+\beta m\dot{x}}=\frac{\beta\frac{x}{n}}{\gamma+\beta m\frac{x}{n}}=\frac{\beta x}{\gamma n+\beta mx},$$

quod item valore dicto ipsi $n$ substituto est

$$=\frac{\beta x}{N\beta x+m\beta x}=\frac{1}{N+m}<\frac{1}{N}.$$

6. Sæpissime tamen est, ut non detur pro dato $N$ tale $n$, ut quodvis

$$\frac{u(m\dot{x})-a(m\dot{x})}{a(m\dot{x})}<\frac{1}{N}$$

sit, nisi $m$ ita accipiatur, ut $m\dot{x}$ non sit $<zx$ at $z$ dabili quovis minus accipi queat.

Ex. gr. in figura (20) est

$$\text{pro } m=1,\ f=F,$$
$$\text{pro } m=2,\ g=\frac{G}{3},$$
$$\text{pro } m=3,\ h=\frac{H}{5},$$

et ita porro, ut quantusvis sit $N$, primi denominatores sint $1, 3, 5, \ldots$ At vero quantumvis exiguum sit $z$ (adeoque $zx$), si omne $m\dot{x}$, quod non est $<zx$ et non est $>n\dot{x}$, dicatur $q$: erunt duæ ordinatæ proximæ $\beta q$ et $\beta(q-\dot{x})$, et $\omega=\beta\dot{x}$. Atque

$$\frac{\omega\dot{x}}{\beta(q-\dot{x})\dot{x}}=\frac{\beta\dot{x}}{\beta(q-\dot{x})}=\frac{x}{nq-x},$$

quod item, si $n=$ aut $>\frac{(N+2)x}{q}$ accipiatur, est $<\frac{1}{N}$. Nempe substituendo ipsi $n$ fiet

$$\frac{x}{nq-x}=\frac{x}{(N+2)x-x},$$

quod est

$$=\frac{1}{N+1},$$

quod est $<\frac{1}{N}$.

Est quoque hoc tanto fortius, si $n$ adhuc maius accipiatur. Valent itaque superius dicta omnia de $u(m\dot{x})$ et $a(m\dot{x})$ simultaneis ultra $zx$ acceptis omnibus.

Hinc si demonstretur, quod pro quovis $N$ detur tale $n$ (idem pro terminis omnibus), ut pro $z$ utvis parvo sed determinato sit generaliter

$$\frac{U(q)-U(q-\dot{x})-(A(q)-A(q-\dot{x}))}{A(q)-A(q-\dot{x})} = 0 \text{ aut} \lessdot \frac{1}{N},$$

erit manifesto

$$U(x)-U(zx) \backsim A(x)-A(zx);$$

atque si

$$U(zx)-U(0) \backsim 0 \text{ et } A(zx)-A(0) \backsim 0,$$

etiam

$$U(x)-U(0) \backsim A(x)-A(0).$$

Dicantur vero $U(q)-U(q-\dot{x})$ et $A(q)-A(q-\dot{x})$ *aequipollentia*; denotarique id per signum $\triangleq$ interiectum potest.

7. At quæritur, num inde, quod pro dato quovis $N$ et dato quovis $q$ (quod non est $\lessdot zx$ et non $\gtrdot x$) detur tale $n$, omnino finitum, ut

$$\frac{U(q)-U(q-\dot{x})}{A(q)-A(q-\dot{x})} - 1 \lessdot \frac{1}{N}$$

sit, sequatur dari $n$ integrum, eundem pro omnibus, talem ut

$$u(m\dot{x})-a(m\dot{x}) \lessdot \frac{a(m\dot{x})}{N}$$

sit, quicunque numerus ab 1 usque ad $n$ inclusive substituatur ipsi $m$, dummodo $m\dot{x}$ non sit $\lessdot zx$?

Cogitetur punctum e fine dati $zx$ porro ferri in $x$ usque ad finem huius et quæratur ubique, num detur pro illo $q$ tale $n$ finitum, ut

$$\frac{U(q)-U(q-\dot{x})}{A(q)-A(q-\dot{x})} - 1 \lessdot \frac{1}{N}$$

sit; et eo, quo maius non est omnium finitorum $n$ (quasi quodvis $n$ tanquam ordinata finita e loco puncti cogitatione lati, tanquam fine ipsius $q$ erecta esset), accipiatur numerus integer quantovis maior: erit iste integer quæsitum $n$. Nam tum $\dot{x}$ adhuc minus erit, quam pro quovis $q$ requiritur; et facile in quovis casu patet, quo minus $\dot{x}$, id est quo maius $n$ est, omnia superius dicta tanto fortius valere, quum nonnisi ab aucto $n$ dependeat, ut sit

$$\frac{U(q)-U(q-\dot{x})}{A(q)-A(q-\dot{x})}-1 \lessdot \frac{1}{N}.$$

8. Sed et alia functio absoluta $B(x)$ obviam venire poterat pro eodem $x$, e qua derivatæ seriei termino generali $b(m\dot{x})$ dicto

$$\frac{u(m\dot{x})}{b(m\dot{x})}-1 \lessdot \frac{1}{N}$$

fieri possit, quicunque numerus substituatur ipsi $m$ ab 1 usque ad $n$, saltem si $m\dot{x}$ non est $\lessdot zx$ nec $\gtrdot x$ et quidem pro eodem $n$; et patebat — summa seriei ipsius $B(x)$ per $B$ denotata — esse $U \backsim B$; atque quum etiam $U \backsim A$, esse $A=B$. Unde manifesto

$$A(x)-A(0)=B(x)-B(0),$$

consequenter

$$A(x)=B(x)-B(0)+A(0).$$

Dicitur $A(x)$ *integrale* ipsius $u(x)$, designaturque per $\int u(x)$; et $u(x)$ *differentiale* tam ipsius $A(x)$ quam ipsius $B(x)$ audit, per $u(x)$ nonnisi $u(m\dot{x})$ sensu superiore intelligendo.

Atque quum $A(0)-B(0)$ constans sit, scribitur

$$\int u(x)=B(x)+c,$$

et constantis $c$ valor quæritur. Si ex. gr.

$$A(x)=\int\frac{\dot{x}}{(1+x)^2}+c=B(x)-B(0)+A(0),$$

et $A(0)$ sit $=a$, erit

$$A(x)=-\frac{1}{1+x}+1+a;$$

nam patebit infra esse

$$d\left(-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{\dot{x}}{(1+x)^2},$$

et tum

$$B(0)=-\frac{1}{1+0}=-1.$$

Consequenter est

$$A(x)=-\frac{1}{1+x}+1+a=a+\frac{x}{1+x},$$

quod $=\frac{x}{1+x}$, si $A(0)=0$.

Potest etiam $B(0)=0$ esse; ex. gr. $(1+x)^{-2}\dot{x}$ est differentiale etiam alius functionis, nempe ipsius $\frac{x}{1+x}$ quoque; et si pro $B(x)$ hoc accipiatur, erit $B(0)=0$, et constans erit $a-0=a=0$, si et $A(0)=0$. Interim $-\frac{1}{1+x}$ et $\frac{x}{1+x}$ nonnisi constante 1 differunt.

Constans autem innotescet, si pro valore aliquo $\alpha$ ipsius $x$, de quo valent quæ dicta sunt, nempe ut sit $A(\alpha)=B(\alpha)-B(0)+A(0)$, constans nota sit, ut sit

$$A(\alpha)=B(\alpha)+c;$$

erit

$$A(0)-B(0)=c;$$

adeoque pro quovis valore tali $\beta$ ipsius $x$, ut sit $A(\beta)=B(\beta)-B(0)+A(0)$, eadem constans $c$ nota erit.

Si autem fuerit $A(a)=a'$ et $A(b)=b'$, adeoque

$$\int u(a)=a'+c,\ \int u(b)=b'+c$$

et $a<b$ sit: erit

$$\int u(b)-\int u(a)=b'-a'$$

parti a fine ipsius $a$ usque ad finem ipsius $b$ appertinenti æqualis. Dicuntur in tali casu $a$ et $b$ *limites integralis*, et *integrale ab a usque ad b extendi* dicitur.

9. Unus solus casus, ubi e functione quadam absoluta $A(x)$, cuius valor ignotus erat, derivatæ seriei incrementorum terminus generalis æquipollebat termino generali seriei incrementorum functionis absolutæ

$B(x)$, cuius valor notus erat, atque per id valor prioris innotuit, protinus viam ad aliarum functionum quoque, quarum valor notus est, terminos generales quærendos aperuit, eosque cum terminis generalibus functionum, quarum valor ignotus erat, comparare induxit; ut si quis priorum terminorum generalium alicui posteriorum æquipolleret, functionis valor ignotus innotescat.

Dicitur $B(x)$ *functio summatrix*, per quam $A(x)$ innotescit; $a(m\dot{x})$, id est $A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})$ vero *differentiale verum* seu *elementum* ipsius $A(x)$, uti $b(m\dot{x})$ ipsius $B(x)$ audit. Atque si $u(m\dot{x})$ utrique elemento æquipolleat et ita expressum sit, ut $\dot{x}$ nonnisi in prima potentia occurat, tum $u(x)$ *differentiale strictum* (aut tantum *differentiale*) dicitur, per $\partial A(x)$, $\partial B(x)$ denotatum; atque functio absoluta æqualis summæ omnis eius, per quod $\dot{x}$ in $u(x)$ multiplicatum est, *coefficiens differentialis* sive *derivata* vocatur, denotata per $\dot{\partial} A(x)$, $\dot{\partial} B(x)$. [Vide de aliis literis puncto insignitis inferius sub (12).]

10. Notandum vero est, functionem absolutam $A(x)$, cuius valor quæritur, aut in concreto exhiberi, aut sæpe per limitem tantum functionis cuiuspiam exponi; atque in casu postremo limitem eiusmodi dari demonstrandum est.

Utcunque sit, functionis dictæ $A(x)$ differentiale, — id est elemento eius nempe ipsi $A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})$ æquipollens expressio forma differentialis stricti prædita, — reperitur quærendo duas functiones $U_1(x)$ valore crescente et $U_2(x)$ valore decrescente (dum $n$ crescit) tales, ut sit semper

$$U_1(q)-U_1(q-\dot{x})<A(q)-A(q-\dot{x})<U_2(q)-U_2(q-\dot{x})$$

et $U_1(q)-U_1(q-\dot{x})$ gaudeat forma differentialis stricti, atque

$$\frac{U_1(q)-U_1(q-\dot{x})}{U_2(q)-U_2(q-\dot{x})}\frown 1,$$

omnia sensu dicto intelligendo. Tunc enim semper est

$$U_1(x)-U_1(0)<A(x)-A(0)<U_2(x)-U_2(0)$$

et

$$U_2(x) - U_2(0) - \big(U_1(x) - U_1(0)\big) \backsim 0,$$

adeoque

$$U_1 \backsim A.$$

Functionis summatricis $B(x)$ vero elemento id est ipsi

$$B(m\dot{x}) - B(m - \dot{x})$$

æquipollens differentiale strictum erit $u(x)$, si forma dicta prædita atque talis sit, ut sensu dicto

$$\frac{u(q)}{B(q) - B(q - \dot{x})} \backsim 1.$$

Exemplis hæc facilioribus tam geometricis quam mechanicis paulo inferius illustrabantur.

11. Si differentialia stricta $u\dot{x}$ et $v\dot{x}$ æquipolleant, adeoque $\frac{u\dot{x}}{v\dot{x}}$ $=$ vel $\backsim 1$, tum $\frac{u}{v}$ quoque $=$ vel $\backsim 1$. At vero $u$ et $v$ sunt functiones absolutæ pro quovis valore ipsius $n$ valore eodem gaudentes (per præcedentia); itaque $\frac{u}{v}$ non $\backsim 1$ sed $= 1$, adeoque $u = v$ est.

Et vicissim si derivatæ $u$ et $v$ sint æquales, differentialia stricta quoque sunt æqualia, unam tantum adhuc variabilem $x$ supponendo. Itaque, si

$$u = A'(x) = B'(x),$$

est

$$A(x) = B(x) - B(0) + A(0).$$

Neque functiones $A(x)$ et $B(x)$ derivata æquali gaudentes præter constantem differunt. Nam tum

$$A(x) = B(x) - B(0) + A(0),$$

adeoque $A(x)$ et $B(x)$ nonnisi constante differunt.

Sed nec ulla functio $A(x)$ et ab hac nonnisi constante differens $B(x)$ inæqualibus derivatis gaudent. Nam tum $A(m\dot{x}) - A\big((m-1)\dot{x}\big)$ et $B(m\dot{x}) - B\big((m-1)\dot{x}\big)$ sunt æqualia; quia, si constans $c$ sit, quo differunt et

$$A(x) = B(x) + c,$$

erit

$$A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) = B(m\dot{x}) + c - (B((m-1)\dot{x}) + c)$$
$$= B(m\dot{x}) - B((m-1)\dot{x}),$$

cui tam $u\dot{x}$ quam $v\dot{x}$ æquipollere nequeunt, nisi $u = v$ sit.

Unde nec functiones summatrices, nec integralia differentialium æqualium præter constantem differunt. Imo evidens est, nonnisi derivatam ipsius $A(x)$ et functionem summatricem $B(x)$ quærendam esse, cuius derivata derivatæ ipsius $A(x)$ æqualis sit; atque si hæc $u$ sit, pro $\int u\dot{x}$ brevius $\int u$ scribi posse, si nonnisi $x$ variabilis sit.

12. Interim variabiles plures $y, z, \ldots$ quoque functioni inesse possunt, quæ etsi ab $x$ variabili absoluta haud necessario dependeant, in quovis tamen casu cum quovis $m\dot{x}$ tam $y$ quam $z \ldots$ per legem certam quantitate certa simul ponuntur; adeoque hoc pacto in dependentia mutua simultanea sunt; adeoque omnes variabiles quidem in quovis casu quantitatis determinatæ concipiantur, ita tamen, ut nulli casui quidquam præter magnitudinem, quod non omni competit, tribuatur; id enim tantum generaliter verum est, quod de quovis casu speciali valet.

Ex. gr. si in plano $P$ sit $x$ (variabilis absoluta) linea recta, in qua abscissæ e certo puncto $\mathfrak{p}$ in una plaga positive in altera negative accipiantur, et rectæ in $P$ ad $x$ perpendiculares ab extremitatibus abscissarum dicantur *ordinatae* $y$, prouti in unam alteramve abcissæ plagam cadunt, positive aut negative acceptæ; item perpendiculares ab extremitatibus ipsarum $y$ ad planum $P$ erectæ dicantur *secundae ordinatae* $z$, prouti in plani unam alteramve plagam cadunt, positive aut negative acceptæ: patet ipsi $y$ ab $x$, necnon ipsi $z$ ab $y$ variam dependentiam tribui posse, in quovis tamen casu tam $z$ quam $y$ in dependentia simultanea a quovis $m\dot{x}$ esse (quicunque numerus ab 1 usque ad $n$ substituatur ipsi $m$), atque hoc pacto, quodvis spatii punctum determinari posse.

Ita in Mechanica, si vis continuo agens sit $w$, spatium sub tempore $t$ percursum sit $s$, et velocitas finalis ad finem temporis $t$ sit $v$: ipsi

$w$, sive a tempore sive a velocitate, qua tum gaudet mobile, sive a spatio eousque percurso dependentia certa tribui potest.

Quæcunque sint variabiles $y, z, \ldots$ ab absoluta $x$ utcunque (etsi tantum suppositive) dependentes: *denotetur illud* $y$, *quod cum* $m\dot{x}$ *simul ponitur, per* $y(m\dot{x})$, *et illud* $z$, *quod item tum ponitur, per* $z(m\dot{x})$.

Unde seriei ex $A(x, y, \ldots)$ functione absoluta derivatæ terminus generalis (differentiale verum ut supra) est

$$A(m\dot{x}, y(m\dot{x}), \ldots) - A((m-1)\dot{x}, y((m-1)\dot{x}), \ldots).$$

Denotetur autem

$$y(m\dot{x}) - y((m-1)\dot{x}) \quad \text{per} \quad \dot{y},$$

ita

$$z(m\dot{x}) - z((m-1)\dot{x}) \quad \text{per} \quad \dot{z},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

uti

$$m\dot{x} - (m-1)\dot{x} = \dot{x},$$

observando punctum nonnisi literæ variabilem *absolutam* denotanti impositum significare illam per $n$ divisam (nisi aliunde constet) atque $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$ semper pro quovis supra dicto et eodem valore ipsius $m$ intelligi.

Si iam seriei ex $A(x, y, \ldots)$ — quotvis insint variabiles — derivatæ terminus generalis æquipollet tali expressioni, in qua, si pro $m\dot{x}$ ubique $x$ scribatur, necnon, si adsit $y(m\dot{x})$, pro eo $y$ scribatur, et ita si plures adsint, nulla litera puncto insignita ut factor ad prima altiorem potentiam elevata occurrat: tum talis expressio (substituto $x$ ipsi $m\dot{x}$, et si adsit, $y$ ipsi $y(m\dot{x})$, &) dicitur *differentiale strictius* ipsius $A(x, y, \ldots)$. Summa vero coefficientis omnis, per quem litera puncto insignita multiplicata est, vocatur *coefficiens* vel *quotiens differentialis* sive brevius *derivata ipsius* $A(x, y, \ldots)$.

Dum pro $m\dot{x}$ $x$ id est $n\dot{x}$ scribitur, patet $n$ termini ultimi numerum esse, uti seriei arithmeticæ terminus generalis per ultimum nempe $a + (n-1)d$ exprimitur. Nihilominus tamen, ut Tyrones minus confundantur præcisiusque rem intelligent, ubi necesse est pro dicto $n\dot{x}$ scribetur $m\dot{x}$, — atque etiam ubi dicetur ex. gr. $a(x)$ esse $\partial A(x)$, intelligatur $a(m\dot{x})$, sensu pag. 210.

13. Si una tantum sit litera puncto insignita in duobus differentialibus functionis eiusdem, sed non eadem, ex. gr. $\partial U = u\dot{x} \dot{=} v\dot{z}, U, u, v$ certas functiones denotantibus: tum $v\dot{z}$ dicitur *differentiale quoad* $z$ et $u\dot{x}$ quoad $x$ acceptum, atque $v$ dicitur *derivata ipsius* $U$ *quoad* $z$ et $u$ derivata quoad $x$ accepta; denoteturque differentiale strictius per $\partial$, derivata vero per $\partial\!\!/$, annotando quoad $x$ vel $z$ &c.

Est quoque manifesto

$$\dot{z} = 1\dot{z} = z^{\circ}\dot{z} = \partial z \text{ quoad } z,$$

uti $\dot{x}$ est $\partial x$ quoad $x$; atque utrumque tam verum quam strictum differentiale est; nempe

$$\dot{z} = z(m\dot{x}) - z\big((m-1)\dot{x}\big).$$

Ita quum constans $a$ cum quovis $m\dot{x}$ ponatur, differentiale constantis est o: nempe

$$a(m\dot{x}) - a\big((m-1)\dot{x}\big) = a - a = 0;$$

unde et $\int 0$ æquale est quantitati cuilibet.

14. Si $v$ nullam aliam variabilem nisi $z$ complectatur, $v\dot{z}$ *differentiale purum* audit; ita $u\dot{x}$, si $u$ nullam aliam nisi $x$ complectatur. Atque ita $v$ et $u$ *derivatae purae* sunt. Patetque integrale ipsius $v\dot{z}$ esse functionem illam (ab ill. Lagrange *primitivam* dictam), cuius derivata est $v$ quoad $z$. Ubi itaque nulla litera puncto insignita est in expressione aliqua ex. gr. $\alpha(z)$, una tantum variabili ex. gr. $z$ gaudente: si ei signum $\int$ præponatur, intelligatur per $\int\alpha(z)$ functio illa primitiva, cuius derivata quoad $z$ est $\alpha(z)$; id est plane id quod $\int\dot{z}\alpha(z)$ denotat, constantem in utroque casu semper addendo; nempe derivata ipsius $\int\dot{z}\alpha(z)$ est $\alpha(z)$, quoad $z$ accepta.

Si vero $p$, $u$ item nulla litera puncto insignita affectæ sint, per $\int u$ (quoad $z$) intelligatur $\int u\dot{z}$, atque ut $u$ derivata pura fiat, $u$ per $z$ exprimendum est. Siquidem $\dot{z} \stackrel{\circ}{=} p\dot{v}$ adeoque $u\dot{z} \stackrel{\circ}{=} up\dot{v}$, erit $up$ derivata quoad $v$ ipsius $\int u\dot{z}$, atque hæc functio primitiva quoad $v$ ipsius $up$, nempe $\int\limits_{(\text{quoad } v)} up = \int\limits_{(\text{quoad } z)} u$.

15. Si plures insint functioni variabiles, et accipiatur differentiale derivataque eius quoad aliquam variabilium reliquis constantibus suppositis: dicuntur *differentiale partiale, et derivata partialis quoad illam variabilem.* Patebit mox summam differentialium partialium quoad singulas variabiles acceptorum esse differentiale ipsum functionis, et idem quoad derivatam probabitur.

16. *Derivata* dicitur *prima*, quod tamen, ubi necesse non est, omittitur; et $\mu$-tæ derivatæ prima derivata dicitur *derivata* $(\mu+1)$-ta *functionis primitivae, functio* $(\mu+1)$-ta iuxta LAGRANGE.

*Differentiale* quoque dici solet *primum*, et differentiale primum $\mu$-ti differentialis ita acceptum, ut literæ puncto insignitæ constantes supponantur, *differentiale* $(\mu+1)$-tum *functionis primitivae* dici solet. Sed derivatis prima, secunda, ... & omnia iuxta ill. LAGRANGE perfici possunt; adsummum derivatæ alicuius $\mu$-tæ differentiale claritatis gratia adferri potest.

17. Quæcunque variabiles $u, v, z, \ldots$ fuerint, a certa variabili absoluta (ex. gr. $x$) sive necessario sive per certam in quovis casu conditionem præcepta positione simultanea dependentes: $u$ dicatur $B(x)$, ac $v$ dicatur $C(x)$, et $z$ dicatur $D(x)$; differentiale verum ipsius $u(x)$ vero, id est $u(m\dot{x}) - u((m-1)\dot{x})$ dicatur $b(x)$, ita ipsius $C(x)$ sit $c(x)$, et ipsius $D(x)$ sit $d(x)$; atque sint $b(x)$ et $b_{,}(x)$ æquipollentia, ita $c(x)$ et $c_{,}(x)$, atque $d(x)$ et $d_{,}(x)$, nempe

$$\frac{b_{,}(x)}{b(x)} \backsim 1, \frac{c_{,}(x)}{c(x)} \backsim 1, \frac{d_{,}(x)}{d(x)} \backsim 1, \ldots$$

pro $x$ ubique $m\dot{x}$ ponendo et omnia sensu superiore (pag. 210) intelligendo.

Quoad quasvis variabilium $u, v, z, \ldots$ essent differentialia $b_{,}(x)$, $c_{,}(x), \ldots$ accepta, imo etsi non gaudeant forma differentialis stricti; $b_{,}(x)$ ut terminus generalis seriei summam eandem dat quam $b(x)$; superius (pag. 211 et sequ.) dicta enim applicari possunt.

Idem patet si tam $b_1(x)$ quam $b(x)$ per æqualia multiplicentur, imo etsi per æquipollentia multiplicentur, nempe (pag. 94) etiam

$$\frac{b_1(x)\,c_1(x)}{b(x)\,c(x)} \backsim 1,$$

et eadem applicari posse manifestum est, pro $x$ ponendo $m\dot{x}$ et substituendo ipsi $x$ ut supra, ut prodeant termini simultanei $b_1(m\dot{x})\ c_1(m\dot{x})$ et $b(m\dot{x})\ c(m\dot{x})$ pro serie utraque. Ad quotvis factores æquipollentes, semper uno altius ascendendo, idem extendi patet.

Ita (pag. 93) si æquipollentibus serierum terminis generalibus æquipollentia addantur, prodibunt termini generales summis serierum incrementorum æqualibus gaudentes; nempe

$$\frac{b_1(x)+c_1(x)}{b(x)+c(x)} \backsim 1.$$

Unde etiam *differentiale seriei convergentis*

$$B(x)+C(x)+\ldots$$

*est summa differentalium functionum singularum.*

Si nempe $\partial B(x)$ sit $b_1(x)$ et $\partial C(x)$ sit $c_1(x)$ &, atque summæ serierum functionum $B(x)$, $C(x)$, … sint $B$, $C$, …, et quas $b_1(x), c_1(x), \ldots$ dant, sint $B_1$, $C_1$, …, atque

$$B+C+\ldots \backsim S,$$

et

$$B_1+C_1+\ldots = S_1,$$

ac summa totidem terminorum seriei $B+C+\ldots$ sit

$$= S - \omega;$$

pro quovis dato $N$ datur tale $n$, idem pro quotvis functionibus certo numero acceptis semper, ut sit

$$(B_1 + C_1 + \ldots) - (B + C + \ldots) < \frac{S - \omega}{N}$$

sive

$$S_1 - S + \omega < \frac{S - \omega}{N};$$

unde quum $\omega \sim 0$, etiam $S_1 - S \sim 0$.

Est quoque manifesto derivata summæ functionum quoad eandem variabilem (ex. gr. $x$) accepta summa derivatarum singularum quoad eandem variabilem acceptarum. Nempe si

$$\partial\big(B(x) + C(x) + \ldots\big) = p\dot{x} + q\dot{x} + \ldots,$$

est

$$\partial_x\big(B(x) + C(x) + \ldots\big) = p + q + \ldots$$

Sed e prius dictis id quoque sequitur, quod in quovis termino seriei incrementorum generali cuivis quantitati ei æquipollens (eatenus quod summa per id non mutetur) substitui possit. Itaque si terminus aliquis generalis integrandus sit, poterit in eo, differentiali cuivis quodvis aliud, quoad quamvis variabilem acceptum fuerit, dummodo omnia eidem variabili absolutæ ut basi respondeant, substitui; imo si toti termino alius æquipollens substituatur, unam tantum variabilem (ex. gr. $z$) continens, differentiale purum erit; termini æquipollentes vero integralia æqualia dabunt (pag. 215) præter constantem. Imo etiam si tantum derivata accipiatur, functio primitiva quoad $z$ eadem prodibit.

18. Ut Tyrones primis elementis aliquantum imbuti ad sublimiora progredi animos capiant, exemplis quibusdam facilioribus (tam e Geometria quam e Mechanica) applicationem theoriæ dictæ illustrare libet; prius certarum functionum absolutarum valoris noti differentialia derivatasque referendo; tum certarum functionum absolutarum, quarum valor quærendus est, differentialia et derivatas exponendo; atque priora cum posterioribus (iuxta pag. 208) comparando; ut si æquipolleant, valores quæsiti innotescant.

Supponantur (paulo inferius demonstranda) sequentia, $x, u, v, z, p, \cdots$ ut sub (17.) intelligendo:

I. Est

$$\partial au^k \triangleq aku^{k-1}\dot{u} = aku^{k-1}v\dot{x},$$

si $v\dot{x} \triangleq \dot{u}$ (pag. 221). Ex. gr. si $u = bx$ et $k = 3$, erit

$$\partial au^k = 3ab^2x^2b\dot{x},$$

nam tum

$$\dot{u} = bm\dot{x} - b(m-1)\dot{x} = b\dot{x}.$$

II. Per præcedentia

$$\partial(u + v + z + \ldots) \triangleq \partial u + \partial v + \partial z + \ldots$$

III. Est

$$\partial(uv) \triangleq u\dot{v} + v\dot{u},$$

imo differentiale facti quotvis functionum æquipollet summæ productorum e differentiali cuiusvis in factum reliquarum.

IV. Ex I et III fit

$$\partial\frac{u}{v} = \partial uv^{-1} \triangleq u(-v^{-2})\dot{v} + v^{-1}\dot{u} \triangleq -\frac{u\dot{v}}{v^2} + \frac{\dot{u}}{v} \triangleq$$
$$\triangleq \frac{v\dot{u} - u\dot{v}}{v^2}.$$

V. Est

$$\partial \log. u \triangleq \frac{\dot{u}}{u} = \frac{v\dot{x}}{u}, \text{ [pro } v\dot{x} \triangleq \dot{u}].$$

Per log. intelligitur logarithmus naturalis, per Log. vero artificialis.

VI. Hinc

*a)* Si $A(x)$ functio absoluta fuerit et sit

$$B(x) = au^k,$$

et

$$\partial A(x) \triangleq aku^{k-1}\dot{u} \triangleq \partial B(x),$$

erit (per I. et pag. 215)

$$A(x) = au^k - B(0) + A(0);$$

nempe

$$\int aku^{k-1}\dot{u} = au^k + \text{constans}$$

prodibit, si resecto $\dot{u}$ exponenti ipsius $u$ addatur 1, et reliquum, nempe derivata ipsius $B(x)$ quoad $u$ per summam dictam dividatur; excepto si $k=0$ sit [per V.]; constans vero addenda ei, quod hoc pacto prodit, postea quæritur. Ex. gr. si pro $u$ ponatur $x$, erit

$$\int x^2 \dot{x} = \frac{x^3}{3} + \text{constans},$$

et (per V.)

$$\int x^{-1}\dot{x} = \log. x + \text{constans}.$$

*b)* Ex II. est

$$\int (\dot{u} + \dot{v} + \ldots) = \int \dot{u} + \int \dot{v} + \ldots + \text{constans}.$$

*c)* Ex III. est

$$\int (u\dot{v} + v\dot{u}) = uv + \text{constans}.$$

et ex IV. est

$$\int \frac{v\dot{u} - u\dot{v}}{v^2} = \frac{u}{v} + \text{constans}.$$

*d)* Ex V. vero est

$$\int \frac{\dot{u}}{u} = \log. u + \text{constans}.$$

*e)* Si vero terminus generalis seriei incrementorum, ut dictum (pag. 210) est, sit $b(m\dot{x})$, et alius seriei terminus generalis sit $a(m\dot{x})$, atque

$$\frac{b(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} = \beta;$$

erit

$$B = \beta A,$$

summa prioris $B$ et posterioris $A$ dicta. Hinc

$$\int a(x) = \frac{\int b(x)}{\beta} + \text{constans},$$

nempe $A = \frac{B}{\beta}$. Ex. gr.

$$\frac{2x\dot{x}}{x\dot{x}} = 2 \quad \text{et} \quad 2x\dot{x} = \partial x^2 \ \text{[per I]},$$

itaque

$$\int 2x\dot{x} = x^2 \quad \text{et} \quad \int x\dot{x} = \frac{x^2}{2}.$$

Ita

$$\int \frac{x^2\dot{x}}{ax^3} = \frac{1}{3a} \log. ax^3,$$

nam si (in V.) $u = ax^3$ tum est (per I.) $\partial u = 3ax^2\dot{x}$; itaque

$$\int \frac{3ax^2\dot{x}}{ax^3} = \log. ax^3,$$

est vero

$$\frac{3ax^2\dot{x}}{ax^3} : \frac{x^2\dot{x}}{ax^3} = 3a.$$

*f)* Sed ex

$$\partial \log. u \stackrel{\circ}{=} \frac{\dot{u}}{u}$$

sequitur etiam

$$u\partial \log. u \stackrel{\circ}{=} \dot{u},$$

per quod functio, etsi variabilis in exponente sit, differentiari potest. Sit ex. gr.

$$u = \alpha^{ax};$$

erit

$$\partial u = \alpha^{ax}\partial \log. \alpha^{ax} = \alpha^{ax}\partial(ax \log. \alpha)$$

(pag. 110), quod est $= \dot{x}\alpha^{ax}a \log. \alpha$.

Hinc

$$\int a\alpha^{ax} \log. \alpha = \alpha^{ax} + \text{const.}$$

atque (per præc.)

$$\int \alpha^{ax} = \frac{1}{a \log. \alpha} \int a\alpha^{ax} \log. \alpha = \frac{\alpha^{ax}}{a \log. \alpha} + \text{const.}$$

Ita (per V.)

$$\int \frac{a\alpha^{ax} \log. \alpha}{\alpha^{ax}} = \log. \alpha^{ax} + \text{const.}$$

*g)* Si terminorum plurium summa ad exponentem positivum integrum elevatorum sit derivata e talibus terminis constans, qui singuli integrari possunt: tum summa integralium singulorum terminorum erit integrale totius (pag. 226); id est summa functionum primitivarum terminorum singulorum tanquam derivatarum erit functio primitiva derivatæ datæ. Sit nempe

$$\dot{u} \stackrel{\circ}{=} p\dot{x},\ \dot{v} \stackrel{\circ}{=} q\dot{x}, \ldots$$

erit (pag. 93)

$$\dot{u} + \dot{v} + \ldots \stackrel{\circ}{=} p\dot{x} + q\dot{x} + \ldots$$

atque $p + q + \ldots$ erit derivata quoad $x$ ipsius $\int(p\dot{x} + q\dot{x} + \ldots)$; (pag. 223).

Si autem differentiale sit series infinita convergens formæ

$$(Ax^a + Bx^b + \ldots)\dot{x},$$

exponente ab aliquo incipiendo unitatem superante et crescente in infinitum, uti fit per formulam binomii quoque: tum terminis pariter integratis prodit

$$\frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \ldots,$$

quod est

$$= x\left(\frac{Ax^a}{a+1} + \frac{Bx^b}{b+1} + \ldots\right),$$

quæ item series convergens est, si prior talis sit. Nam ab aliquo termino denominator $\gtrdot 1$ fit, abinde semper crescens; sit is $\beta$, et summa seriei prioris ab illo termino sit $s$, erit huius seriei summa ab eodem termino $< \frac{xs}{\beta}$, eousque autem termini numero certo sunt, neque denominator o est (nempe si in VI a) $k = 0$ sit, patet).

Pro litera puncto insignita vero literam nominis eiusdem signo $\partial$ præposito substitui posse, (quoad æquipollentiam, adeoque summam seriei incrementorum, et integrale) evidens est (pag. 210 &); uti etiam omnia dicta valent (ex. pag. 223), si litera puncto insignita ex. gr. $\dot{z}$ ex $p\dot{z}$ omissa, coefficientis differentialis $p$, *ut derivatae quoad* $z$, *functio primitiva quoad* $z$ quæratur; imo si

$$\dot{z} \stackrel{\circ}{=} v\dot{u} \text{ adeoque } p\dot{z} \stackrel{\circ}{=} pv\dot{u},$$

et $p$ ac $v$ per variabilem $u$ exprimatur, adeoque $pv$ derivata pura quoad $u$ fiat; tunc quoque etsi derivata prior quoad $z$ pura non fuerit, hoc pacto quoad $u$ pura reddita est, et erit

$$\int p\dot{z} = \int_{\text{(quoad } u)} pv = \int_{\text{(quoad } z)} p$$

si $\dot{z} \stackrel{\circ}{=} v\dot{u}$ (pag. 221).

VII. Ita demonstrabitur paulo inferius:

*a)* Si $A(x)$ *aream* in plano denotet, inter $y$ et $x$ coordinatas perpendiculares et lineam per complexum extremitatum ordinatarum factam comprehensam: differentiale eius est $y\dot{x}$, derivata vero $y$, nempe ordinata abscissæ $x$ variabilis absolutæ.

*b)* Si vero $A(x)$ lineam dictam denotet: derivata eius quoad $x$ est $\left(1 + (\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ seu $(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$, si $y'$ derivatam ipsius $y$ significet.

*c)* Si $A(x)$ soliditatem corporis per revolutionem lineæ dictæ circa abscissarum lineam orti denotet: derivata eius quoad $x$ est $\pi y^2$; et superficiei corporis huius derivata quoad $x$ est

$$2\pi y\left(1 + (\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ seu } 2\pi y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

*d)* Ita paulo inferius (definiendo prius geometrice *centrum gravitatis*) demonstrabitur, derivatam (quoad abcissam $x$) distantiæ centri gravitatis ipsius $M$ a certo plano $P$ extra $M$ cadente, esse $\frac{(a+x)\,\partial M}{M}$ per $a$ distantiam a $P$ talis puncti ipsius $M$ intelligendo, quo nullum ipsi $P$ propius est, per $x$ vero rectam $a$ (omnino ad $P$ perpendicularem, ut lineam abcissarum, pro $M$ quoad illam exprimendo) continuatam intelligendo. Unde distantia ipsa centri gravitatis erit

$$\int \frac{(a+x)\,\partial M}{M},$$

quod item

$$= \frac{1}{M} \int (a+x)\,\partial M,$$

quia $M$ constans pro quovis casu manet idem, pro quovis $m\dot{x}$ in serie incrementorum ubique, adeoque et summa tota per $M$ dividitur.

*e)* Ita si in motu rectilineo, ad finem spatii $s$ tempore $t$ percursi, velocitas $v$ dicatur, et $w$ vis continuo agens, sive constans sive lege certa variabilis sit, sive ipsius mobilis directione sive ei contraria agat; ponaturque pro mobili $M$ punctum vel sphæra massæ 1; atque $t$ sit variabilis absoluta, a qua reliquæ in quovis casu in dependentia simultanea sunt: erunt

$$s(m\dot{t}) - s((m-1)\dot{t}) \quad \text{et} \quad v(m\dot{t}) - v((m-1)\dot{t}),$$

nempe $\dot{s}$ et $\dot{v}$ differentialia vera ipsorum $s$ et $v$, imo stricta quoque, prius quoad $s$, posterius quoad $v$. Velocitas $v$ est quantitas respectiva (pag. 47), exprimiturque numero pedum, qui sub temporis unitate (ex. gr. sub 1'') motu æquabili percurrerentur; vis $w$ vero velocitate finali, quæ produceretur, si $w$ constanter eadem ageret in ipsum $M$ sub 1''.

Paulo inferius demonstrabitur quod sit

$$\frac{\dot{v}}{w\dot{t}} = \frac{\dot{v}}{w} : \dot{t} \frown 1,$$

et

$$\frac{\dot{s}}{v\dot{t}} = \frac{\dot{s}}{v} : \dot{t} \frown 1.$$

Unde

$$w\dot{t} \stackrel{\circ}{=} \dot{v} \quad \text{et} \quad \frac{\dot{v}}{w} \stackrel{\circ}{=} t,$$

atque

$$v\dot{t} \stackrel{\circ}{=} \dot{s} \quad \text{et} \quad \frac{\dot{s}}{v} \stackrel{\circ}{=} \dot{t},$$

$w$ autem est derivata quoad $t$ ipsius $v$, et $\frac{1}{w}$ derivata quoad $v$ ipsius $t$, ac $v$ est derivata quoad $t$ ipsius $s$, et $\frac{1}{v}$ derivata quoad $s$ ipsius $t$ (pag. 221). Itaque integrale $w$ quoad $t$, sive

$$\int w\dot{t} = \int \dot{v} = v;$$

et $\int \frac{1}{w}$ quoad $v$, sive

$$\int \frac{\dot{v}}{w} = \int \dot{t} = t;$$

et $\int v$ quoad $t$, sive

$$\int v\dot{t} = \int \dot{s} = s\,;$$

et $\int \frac{1}{v}$ quoad $s$, sive

$$\int \frac{\dot{s}}{v} = \int \dot{t} = t.$$

Imo quum

$$\dot{s} \overset{\circ}{=} v\dot{t} \quad \text{et} \quad \dot{t} \overset{\circ}{=} \frac{\dot{v}}{w},$$

adeoque (pag. 94)

$$\dot{s}\dot{t} \overset{\circ}{=} \frac{v\dot{t}\dot{v}}{w}, \quad \text{et} \quad \frac{v\dot{v}}{w} \overset{\circ}{=} \dot{s}, \quad v\dot{v} \doteq w\dot{s},$$

et hinc etiam

$$s = \underset{(\text{quoad } v)}{\int \frac{v}{w}},$$

ac (VI)

$$\frac{v^2}{2} = \int w\dot{s},$$

et

$$v = \sqrt{2\int w\dot{s}}.$$

Ubilibet vero pro re nata applicatur (pag. 221).

Item ex eo, quod

$$v = \eth s_{(\text{quoad } t)},$$

sequitur, quoad eandem variabilem $t$ accipiendo differentialia et derivatas,

$$\partial v = \partial \eth s \quad \text{atque} \quad \eth v = \eth^2 s\,;$$

idest differentiale ipsius $v$ quoad $t$ est differentiale quoad $t$ derivatæ quoad $t$ ipsius $s$; derivata vero quoad $t$ ipsius $v$ est derivata quoad $t$ derivatæ quoad $t$ ipsius $s$, idest *derivata* ipsius $s$ quoad $t$ *secunda*, quod per $\eth^2 s$ denotari potest; atque $\int \partial \eth s$ sive

$$\underset{(\text{quoad } t)}{\int \eth^2 s} = v \quad \text{et} \quad \underset{(\text{quoad } t)}{\iint \eth v} = s.$$

Solet hoc, quod $\eth v$ sit $= \eth\eth s$ sive $\eth^2 s$ exprimi modo sequenti:

$$vdt = ds, \quad \text{et} \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{et inde} \quad dv = d\frac{ds}{dt},$$

ita tamen, ut $dt$ pro constante reputetur. Exemplo sit

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

ut in motu uniformiter accelerato; est

$$\boldsymbol{\partial} s = gt, \text{ quia } \partial s = gt\dot{t},$$

et

$$\partial\boldsymbol{\partial} s = \partial(gt) = g\dot{t}, \text{ ac } \boldsymbol{\partial}^2 s = g;$$

itaque

$$\partial v = g\dot{t} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\partial} v = g,$$

atque $\int g$ quoad $t$ sive

$$\int gt = gt.$$

Est etiam pro $dt$ constante

$$d\frac{ds}{dt} = d\frac{d.gt^2}{2dt} = d\frac{gtdt}{dt} = d.gt = gdt,$$

et

$$\int dt \int gdt = \frac{gt^2}{2} = s.$$

VIII. *a)* Quod $\int \dot{v}$ sive $\int 1$ (quoad $v$) seu $\int \partial v$ æquale est $v$, patet: quum sit (pag. 220)

$$\dot{v} = v(m\dot{t}) - v((m-1)\dot{t}),$$

ubi si ipsi $m$ omnes numeri ab 1 usque ad $n$ (inclusive) substituantur, terminis (ut pag. 209) intermediis seriei se mutuo destruentibus, manet $v(nt) - v(0\dot{t})$, idest $v$ ipsum, quod ad finem ipsius $t$ est, subtracto illo $v$, quod in initio est; nempe constans semper in integralibus et functionibus primitivis subintelligenda est, etsi alicubi omissa fuerit.

*b)* Notandum adhuc est: quod si functio absoluta $A(x)$, cuius valor quæritur, talis sit, ut crescente $x$ valor eius decrescat, ita ut minus positivum fiat, adeoque $A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$ negativum sit, atque $B(x)$ sit functio summatrix, adeoque (pag. 215)

$$A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) \doteq B(m\dot{x}) - B((m-1)\dot{x}) \doteq u(m\dot{x}):$$

erit quodvis horum differentialium negativum æquipollens ipsi

$$-\bigl(A((m-1)\dot{x}) - A(m\dot{x})\bigr) \doteq -\bigl(B((m-1)\dot{x}) - B(m\dot{x})\bigr);$$

eritque

$$A(x) - A(0) = B(x) - B(0)$$

utrumque negativum; $A(0) - A(x)$ vero positivum atque

$$A(0) = B(0) - B(x) + A(x);$$

et quum sæpe valor ipsius $A(x)$ plane pro $x = 0$ quæratur, valor quæsitus hoc modo exhibetur; idem patet, si valor ipsius $A(x)$ pro alio valore ipsius $x$ quæratur.

Ex. gr. sit trianguli abscissa (Fig. 21)

$$a - (b + x) = y,$$

denotetque $A(x)$ aream inter abscissam et ordinatam atque rectam: erit

$$\frac{(a-(b+m\dot{x}))^2}{2} < \frac{(a-(b+(m-1)\dot{x}))^2}{2},$$

adeoque

$$A(m\dot{x}) < A((m-1)\dot{x});$$

est vero

$$A((m-1)\dot{x}) - A(m\dot{x}) \doteq \bigl(a - (b + m\dot{x})\bigr)\dot{x};$$

itaque

$$A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) \doteq -\bigl(a - (b + m\dot{x})\bigr)\dot{x},$$

seu

$$\partial A(x) = -y.$$

Unde $\int(-y)$ seu hic

$$\int\limits_{(\text{quoad } x)} (b + x - a) = \int b + \int x - \int a = bx + \frac{x^2}{2} - ax + \text{const.};$$

et hoc est, constante posito 0, $B(x)$, cui addi debet $A(0) - B(0)$, ut $A(x)$ prodeat; interim heic $A(x) = 0$ pro $x = a - b$ et $B(0) = 0$. At si area pro $x = 0$ quæratur, erit

$$A(0) = B(0) - B(x) + A(x) = A(x) - \left(bx + \frac{x^2}{2} - ax\right),$$

quod pro $x = a - b$ est

$$= a(a-b) - b(a-b) - \frac{(a-b)^2}{2},$$

et hoc reducendo:

$$= \frac{(a-b)^2}{2}.$$

Si (Fig. 22) $A(x)$ aream inter abscissam $1-(b+x)$ et ordinatam ipsius atque arcum circuli pro radio 1, a fine radii usque ad ordinatam e fine ipsius $b+x$ seu ipsius $1-(b+x)$ erectam denotet: et hic est $\mathfrak{d}A(x)$ manifeste non $+y\dot{x}$ sed $\mapsto y\dot{x}$, adeoque derivata quoque negativa; itaque $\int(\mapsto y)$ quærendum est pro valore $A(x) - A(0)$; atque æquatione e centro

$$y = \left(1 - (b+x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\int \mapsto \left(1 - (b+x)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \int \left(1 - (b+x)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

nam ut (pag. 194) dictum est, in evolutione binomiali (hic integranda), quum radicis quadratæ valor etiam negativus detur, valor uterque exhibetur, adeoque et positivus pro $A(0) - A(x)$.

*c)* Est etiam aliquando functionis valor $\infty$ pro $x = 0$; de quo casu aliquid adiiciendum est ad dilucidationem paginæ (214) et sequentium. In hoc casu si $A(0) = \pm\infty$, non fit

$$A(zx) - A(0) \sim 0;$$

et serierum ex $A(x)$ et $B(x)$ derivatarum termini non debent usque ad 0 extendi, sed tantum usque ad certum $zx = p$; fietque

$$A(x) = B(x) - B(p) + A(p);$$

adeoque constans tum $A(p) - B(p)$ sumitur, haud immiscendo infinitum per $A(0) - B(0)$. In præcedentibus est $zx$ ad finem ipsius $x$; omnia tamen rite applicantur.

*d)* Pagina (215) differentiale *terminum generalem* $u(m\dot{x})$, *non valorem specialem* denotare dictum est; at quæri potest terminus seriei $\mu$-tus pro $x = a$; de punctis discretis, ubi $n$-tus fit $= 0$ vel $= \infty$, inferius.

IX. *a)* Hinc (ex I et VII) lineæ, cuius ordinata $y$ ad abscissam $x$ perpendicularis est $= ax^p$, area inter coordinatas $x, y$ atque lineam ipsam comprehensa est $= \int y$, quoad $x$, (uti hic, donec aliud monitum fuerit, semper intelligendum est), et hoc

$$= \frac{ax^{p+1}}{p+1} + \text{constans},$$

ubi constans $= 0$, quum

$$A(0) - B(0) = 0,$$

nam tam area, quam $B(x)$ est $0$ pro $x = 0$. Est vero hoc de quovis valore sive fracto sive negativo ipsius $p$ verum, excepto si $p = -1$, tunc enim (VI, *d*)

$$\int y = \int \frac{a}{x} = a \log. x$$

et tum hæc erit areæ expressio, ut statim hyperbolæ exemplum ostendet.

Ita area parabolæ, cuius $y = ax^{\frac{1}{2}}$ (pro $a$ æquali radici quadratæ parametri), est

$$= ax^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} = \frac{2}{3} ax^{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} xy.$$

*b)* Si $y = \frac{1}{1+x}$ sit, uti (Fig. 23) ad hyperbolæ æquilateræ asymptotam ordinata perpendicularis, area (VII, *a*) est $\int \frac{1}{1+x}$; et soliditas per revolutionem orta est $\int \frac{\pi}{(1+x)^2}$; est vero (V.)

$$\frac{1}{1+x} = \partial \log.(1+x),$$

itaque

$$\log.(1+x) = B(x)$$

functio summatrix erit et

$$\int \frac{1}{1+x} = \log.(1+x);$$

crescente itaque $x$ ad dextram positive, crescet area in infinitum; de casu pro abscissa negativa statim dicetur. Soliditas vero erit finita semper; imo si $x \sim \infty$, soliditas hyperbolæ circa asymptotam revolutae tendit ad $\pi$; nempe

$$\int \frac{\pi}{(1+x)^2} = \pi \int \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{\pi x}{1+x} + \text{constans} = \frac{-\pi}{1+x} + \text{constans};$$

nempe heic tam $\frac{\pi x}{1+x}$, quam $\frac{-\pi}{1+x}$ functio summatrix esse potest, discrimenque tantum in constante est (pag. 218), nimirum differentiale derivataque tam ipsius $\frac{x}{1+x}$, quam ipsius $\frac{-1}{1+x}$ eadem sunt, nempe derivata utriusque est (IV.) $\frac{1}{(1+x)^2}$; nimirum

$$\partial \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)\partial x - x\partial(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{(1+x).1 - x.1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2},$$

ita

$$\partial \frac{-1}{1+x} = \frac{(1+x)\partial(-1) - (-1)\partial(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{0+1}{(1+x)^2}.$$

Sed prouti $\frac{x}{1+x}$ vel $\frac{-1}{1+x}$ pro functione summatrice accipiatur, constans alia erit; nam in casu primo

$$B(0) = \frac{0}{1+0} = 0,$$

in altero vero

$$B(0) = \frac{-1}{1+0} = -1;$$

adeoque quum heic $A(0) = 0$, erit constans prior

$$A(0) - B(0) = 0,$$

posterior vero erit

$$A(0) - B(0) = 1;$$

itaque integrale nempe

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{1+x} + 0,$$

et simul

$$= \frac{-1}{1+x} + 1 = \frac{x}{1+x},$$

idem in utroque casu. Consequenter:

$$\pi \int \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{\pi x}{1+x},$$

quod $\frown \pi$, si $x \frown \infty$, quia tum $\frac{x}{1+x} \frown 1$.

Est autem $\pi$ area circuli, cuius radius $1$ est; nam diameter est tum $= 2$, peripheria $= 2\pi$, et $2\pi . \frac{1}{2} = \pi$; est igitur soliditas hæc æqualis basi, nempe areæ circuli ipso $\mathfrak{af} = 1$ tanquam radio in revolutione dicta descripti; omnibus quoad unitates suas expressis (pag. 36).

*c)* Aliquid de area inter asymptotam et hyperbolam quoad logarithmos negativorum annotare liceat. Sit $\mathfrak{c}$ centrum hyperbolæ æquilateræ, ubi angulus asymptotarum rectus est; sitque $\mathfrak{ac} = \mathfrak{cd} = 1$; sintque $\mathfrak{f}, \mathfrak{k}$ vertices hyperbolæ; $\mathfrak{af}, \mathfrak{dk}$ (*potentiae hyperbolae* dictæ) manifesto sunt unitati æquales. Dicantur abscissæ ex $\mathfrak{c}$ ad asymptotam sumtæ (ad dextram positivæ, ad lævam negativæ) nomine generali $z$; et sit $z$ variabilis absoluta, adeoque $\dot{z} = \frac{z}{n}$. Accipiantur præterea areæ ab utraque potentia hyperbolæ versus asymptotam alteram introrsum negative, positive extrorsum; et erit area inter ordinatam, abscissam $z$, hyperbolam, et potentiam hyperbolæ ordinatæ proximam comprehensa, logarithmus naturalis ipsius $z$, sensu elementari.

Quodsi ordinatæ inferius negative accipiantur, facile patet, per $y = \frac{1}{z}$ totam hyperbolam exhiberi. Nam si e quocunque hyperbolæ puncto $\mathfrak{g}$, sint perpendiculares $\mathfrak{gp}$, $\mathfrak{gh}$, pro abscissa $\mathfrak{cp}$ esset ordinata $\mathfrak{gp} = \frac{1}{\mathfrak{gh}}$ quia $\mathfrak{gh} = \mathfrak{cp}$; consequenter $\mathfrak{gh} = \frac{1}{\mathfrak{gp}} = \frac{1}{\mathfrak{ch}}$; adeoque punctum $\mathfrak{g}$ per ordinatam abscissæ $\mathfrak{ch}$ determinatur. Idem de plaga inferiore patet; uti etiam abscissam quamvis, utvis parvam etiam, per ordinatam suam multiplicatam esse $= 1$.

*d)* Derivetur series incrementorum ex $\log . z$; erit terminus generalis

$$\log .(m\dot{z}) - \log .((m-1)\dot{z}) = \log . \frac{m\dot{z}}{m\dot{z}-\dot{z}},$$

quod item

$$= \log . \left(1 : \frac{m\dot{z}-\dot{z}}{m\dot{z}}\right) = -\log . \frac{m\dot{z}-\dot{z}}{m\dot{z}} = -\log . \left(1 - \frac{\dot{z}}{m\dot{z}}\right),$$

quod quum $n$ ita augere liceat, ut $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$ fractio vera sit, est (pag. 188)

$$= -\left(-\frac{\dot{z}}{m\dot{z}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}\right)^3 - \ldots\right)$$

substituendo $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$ ipsi $u$, quum utrumque positivum sit, propter $\dot{z}$ et $m\dot{z}$ utrumque simul negativum aut simul positivum. Erit autem terminus seriei primus $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$, et si summa seriei $s$ dicatur, atque (pag. 214) $m\dot{z}$ utvis parvum sed determinatum $q$ sit, poterit $n$ ita augeri pro dato quovis $N$ idem pro terminis omnibus quos $q$ haud excedit, ut

$$\left(\frac{\dot{z}}{q} : s\right) - 1 = \frac{\dot{z}}{qs} - 1$$

sit $< \frac{1}{N}$, seu breviter $\frac{\dot{z}}{q} : s \frown 1$.

Nam seriei summa tota esset (per pag. 187)

$$< \left(u + \frac{u^2}{2}\right) : (1 - u^2) = \frac{2u + u^2}{2 - 2u^2},$$

et

$$u : \frac{2u + u^2}{2 - 2u^2} = \frac{2 - 2u^2}{2 + u},$$

quod $\frown 1$, dum $u \frown 0$.

Consequenter $\frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$, idest modo consueto exprimendo $\frac{\mathfrak{d}z}{z}$ *differentiale*, $\frac{1}{z}$ vero *derivata quoad z logarithmi naturalis ipsius z est.*

Denotet iam superius $A(z)$ aream antea dictam, dicaturque differentiale verum eius $a(z)$, et log. $z$ dicatur $B(z)$, atque differentiale verum eius sit $b(z)$; erit $B(z)$ functio summatrix pro $A(z)$. Nam

$$a(m\dot{z}) \doteq \dot{z}y \doteq \frac{\dot{z}}{z};$$

namque differentiale verum ipsius $A(z)$ est

$$A(m\dot{z}) - A\big((m-1)\dot{z}\big),$$

quod (Fig. 23) est $< \frac{\dot{z}}{(m-1)\dot{z}}$ et $> \frac{\dot{z}}{m\dot{z}}$; atque

$$\frac{\dot{z}}{(m-1)\dot{z}} : \frac{\dot{z}}{m\dot{z}} = \frac{m}{m-1},$$

quod $\frown 1$, quum pro quovis $q$ liceat $n$ ita augere, ut dictum est; consequenter si $\frac{\dot{z}}{z} = \dot{z}y$, sitque hoc superius $u(z)$ (pag. 214), erit

$$a(m\dot{z}) \doteq u(m\dot{z}) \doteq b(m\dot{z});$$

itaque esset per (pag. 225) $A(z) = \int u(z)$ id est $\int \frac{\dot{z}}{z}$, sive $\int \frac{1}{z}$ quoad $z$, (si tantum derivata ponatur); nempe $A(z) = \log. z + \text{const.}$, quia demonstratum est, differentiale logarithmi naturalis ipsius $z$ esse $\frac{\dot{z}}{z}$ et derivatam quoad $z$ esse $\frac{1}{z}$.

Constans heic et in casu simili prodit sic. Est omnino

$$A(z) - A(p) = B(z) - B(p),$$

pro $p$ utvis parvo (pag. 214) et quovis $z$, adeoque etiam pro $z = 1$; itaque

$$A(1) - A(p) = B(1) - B(p);$$

sed

$$A(1) = 0 = B(1),$$

adeoque

$$A(p)=B(p) \text{ et } A(p)-B(p)=0;$$

consequenter

$$A(z)=B(z)+A(p)-B(p)=B(z).$$

Patet autem inter potentias hyperbolæ crescente $z$ decrescere tam logarithmum quam aream, quum $z$ ibi unitate minus sit; et logarithmum areamque negativa esse, adeoque tam $B(m\dot{z})-B((m-1)\dot{z})$ quam $A(m\dot{z})-A((m-1)\dot{z})$ positiva, e minore negativo maius negativum subtrahendo. Ultra potentias extrorsum utrinque crescente $z$, area logarithmusque positive crescit et incrementum positivum fit, e maiore positivo minus subtrahendo. Ita $\frac{\dot{z}}{z}$, nempe differentiale, semper positivum erat.

Quod vero logarithmos abscissarum negativarum attinet: etiamsi

$$B(z)=\log. z$$

sensu (pag. 193) sit, poterunt in terminis seriei incrementorum, cuius terminus generalis est $B(m\dot{z})-B((m-1)\dot{z})$, logarithmi tales valores accipi, ut

$$A(m\dot{z})-A((m-1)\dot{z}) \doteq B(m\dot{z})-B((m-1)\dot{z}),$$

ut antea incrementa ab $A(p)$ et $B(p)$ incipiendo. Nempe (pag. 200)

$$\log.(m\dot{z}) = \log.\ \text{elem.}(m\dot{z})+\pi\sqrt{-1},$$

et si pro quovis $m$ idem $\pi\sqrt{-1}$ ponatur, fiet

$$\begin{aligned} & B(m\dot{z})-B((m-1)\dot{z}) \\ & =\log.\text{elem.}(m\dot{z})+\pi\sqrt{-1}-\left(\log.\text{elem.}((m-1)\dot{z})+\pi\sqrt{-1}\right) \\ & =\log.\ \text{elem.}(m\dot{z})-\log.\ \text{elem.}((m-1)\dot{z}). \end{aligned}$$

Itaque hoc pacto fiet

$$A(z)-A(p)=B(z)-B(p);$$

sed pro $z=-1$ fiet

$$A(-1)=0, B(-1)=\pi\sqrt{-1},$$

idest unus valor ipsius log. $(-1)$ est $\pi\sqrt{-1}$; consequenter

$$-\pi\sqrt{-1}=A(p)-B(p),$$

atque

$$A(z)=B(z)-\pi\sqrt{-1}=\text{log. elem.}\,z+\pi\sqrt{-1}-\pi\sqrt{-1}=\text{log. elem.}\,z.$$

Non igitur areæ inferiores logarithmos sensu (pag. 193) nempe quantitates imaginarias exhibent, sed elementares tantum; atque si in terminis seriei diversa imaginaria adnexa sint, se invicem haud elident imaginaria, ut cum terminis seriei areæ simultaneis æquipolleant.

Notandum vero est, differentiale logarithmi naturalis ipsius $z$ tunc quoque $\frac{\partial z}{z}$ esse, si $z$ non ipsa variabilis absoluta, sed qualisvis eius functio fuerit.

Sit nempe $z=C(x)$, erit

$$\dot{z}=C(m\dot{x})-C((m-1)\dot{x}).$$

Sed

$$\begin{aligned}C((m-1)\dot{x})&=C(m\dot{x})-\big(C(m\dot{x})-C((m-1)\dot{x})\big)\\&=C(m\dot{x})-\dot{z}=q-\dot{z},\end{aligned}$$

si $C(m\dot{x})$ generaliter $q$ dicatur. Itaque terminus generalis seriei ex log. $z=$ log. $C(x)$ derivatæ est

$$\begin{aligned}\text{log.}\,C(m\dot{x})-\text{log.}\,C((m-1)\dot{x})&=\text{log.}\,q-\text{log.}\,(q-\dot{z})=\text{log.}\,\frac{q}{q-\dot{z}}=\text{log.}\left(1:\frac{q-\dot{z}}{q}\right)\\&=-\text{log.}\left(1-\frac{\dot{z}}{q}\right);\end{aligned}$$

ubi pariter ut antea $n$ ita accipi posse facile patet, ut $\frac{\dot{z}}{q}\lessdot 1$ sit, atque seriei ex (pag. 186) evolutæ terminus primus $\frac{\dot{z}}{q}$ summæ seriei totius æquipolleat. Est igitur $\frac{\dot{z}}{C(m\dot{x})}$, sive $x$ pro $m\dot{x}$ ponendo (pag. 220) $\frac{\dot{z}}{C(x)}$, id est $\frac{\dot{z}}{z}$ differentiale quoad $z$ logarithmi naturalis ipsius $z=C(x)$ et $\frac{1}{z}$ derivata quoad $z$. Potest vero (pag. 224) ipsi $\dot{z}$ $\partial C(x)$ substitui; estque

$$\int \frac{\partial C(x)}{C(x)} = \log. C(x) + \text{constans}.$$

*e) Soliditas paraboloidis* est (pag. 229)

$$\int \pi y^2 = \int \pi p x = \frac{\pi p x^2}{2}$$

pro parametro $p$; constans est 0, quia pro $x = 0$ est tam area quam $\frac{\pi p x^2}{2}$, nempe functio summatrix $= 0$. Ita soliditas pro $y = a x^p$ est

$$\int \pi a^2 x^{2p} = \frac{\pi a^2 x^{2p+1}}{2p+1}.$$

*Ellipsoidis soliditas* pariter, per

$$y = \left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

pro $a$ axem maiorem denotante, est æqualis

$$\int \pi y^2 = \int \pi \left(px - \frac{px^2}{a}\right) = \int \pi p x - \int \frac{\pi p x^2}{a} = \frac{\pi p x^2}{2} - \frac{\pi p x^3}{3a} = \pi p \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right).$$

Eadem expressio hyperboloidis est, signo $-$ in $+$ mutato, quum pro parametro $p$ et axe maiore $a$ sit in ellipsi $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, et in hyperbola $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$

*f)* Notandum vero est ex (pag. 210) sequi, quod si duarum functionum $A(x)$ et $B(x)$ derivatæ $u$ et $v$ quoad eandem variabilem acceptæ tales fuerint, ut $\frac{u}{v} = k$, quosvis terminos simultaneos ita ut superius intelligendo, etiam $A(x) - A(0)$, nempe summa seriei ex $A(x)$ derivatæ sit $= k\big(B(x) - B(0)\big)$. Si nimirum termini generales sint $a(m\dot{x})$, $b(m\dot{x})$ et

$$a(x) \stackrel{\circ}{=} u\dot{x}, \text{ atque } b(x) \stackrel{\circ}{=} v\dot{x}, \text{ atque } \frac{u\dot{x}}{v\dot{x}} = k$$

adeoque

$$u\dot{x} = kv\dot{x};$$

per consequentiam $a(x) \stackrel{\circ}{=} k\, b(x)$ esse e superioribus evidens est.

Applicando hoc ad aream soliditamque ellipseos ad aream soliditatemque circuli relatam, erit ordinatis (pro eodem $x$) $y', y$ dictis, et diametro circuli $= a$

$$\frac{y'}{y} = \left(px - \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} : (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{p(ax - x^2)}{a(ax - x^2)}} = \sqrt{\frac{p}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a};$$

si nimirum $b$ dicatur axis minor (pag. 116), pro $y' = \frac{b}{2}$ et $x = \frac{a}{2}$ erit

$$\frac{b^2}{4} = \frac{pa}{2} - \frac{pa^2}{4a} = \frac{ap}{4},$$

unde $b^2 = ap$ et $p = \frac{b^2}{a}$; quum ergo sit $\frac{y'}{y} = \frac{b}{a}$, est area circuli $C$ et area ellipseos $E$ dicta, $\frac{E}{C} = \frac{b}{a}$, et $E = \frac{bC}{a} = \frac{ba^2\pi}{4a} = \frac{ba\pi}{4}$, quum area circuli sit $\frac{a^2\pi}{4}$ pro diametro $a$.

Ita soliditatum $E'$ et $C'$ dictarum, derivatis $Y'$ et $Y$ dictis; est

$$\frac{Y'}{Y} = \pi\left(px - \frac{px^2}{a}\right) : \pi(ax - x^2) = \pi y'^2 : \pi y^2 = \frac{p(ax - x^2)}{a(ax - x^2)} = \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Itaque

$$\frac{E'}{C'} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ et } E' = \frac{C'b^2}{a^2},$$

quod, quum soliditas sphæræ sit $\frac{a^3\pi}{6}$, est $= \frac{ab^2\pi}{6}$; quæ nempe soliditas ellipsoidis, cuius axis minor $b$ est, circa axem maiorem $a$ revolutæ est.

*g)* Si arcus circuli $x$ sit variabilis absoluta, demonstrabitur paulo inferius derivatam ipsius $x$ quoad tangentem eius acceptam esse $(1 + z^2)^{-1}$, si $z$ dicatur tang. $x$; unde

$$x = \int_{(\text{quoad } z)} (1 + z^2)^{-1} = \int (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots),$$

quod item est

$$= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$$

et hoc, si $x$ æquale est dimidio quadranti, adeoque $z$ æquale radio $=1$, est

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

quæ series Leibnitziana est, totaque peripheria octuplum eius est; atque et hic si ex. gr. apud $\frac{1}{3}$ subsistatur, defectus, nempe quod adhuc addendum esset, est $<\frac{1}{5}$; et si illum terminum negativum, in quo subsistere libet, excipiens denominator $\mu$ sit, erit defectus $<\frac{1}{\mu+2} \frown 0$.

*h)* Sit exemplum etiam ad longitudinem arcus per formulam superius allatam, determinandam (pag. 229). Sit $u$ arcus circuli, pro abscissa $x$ e centro, atque pro $x=\sin. u$, est $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ pro radio $1$; erat vero

$$\partial u=\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

estque

$$\partial y=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}2x=-x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{et} \quad (\partial y)^2=\frac{x^2}{1-x^2},$$

atque

$$1+(\partial y)^2=\frac{x^2+1-x^2}{1-x^2}=(1-x^2)^{-1}, \quad \text{et} \quad \partial u=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

atque

$$u=\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\int\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\right)$$

$$=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\ldots$$

quod pro $u=30°$, adeoque $x=\sin. 30°=\frac{1}{2}$ fit

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{3.2^3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5.2^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7.2^7}+\ldots$$

atque $\pi$, id est dimidium peripheriæ pro radio $1$, seu per quod diameter quilibet multiplicatus dat peripheriam, seu area circuli radii $1$, nempe $2\pi\frac{1}{2}=\pi$, est series hæc per 6 multiplicata; atque si ad $n$-tum terminum subsistatur, denominator est

$$2.4\ldots(2n-2).(2n-1)\,2^{2n-1},$$

et terminum sequentem producit

$$\frac{(2n-1).(2n-1)2^{2n-1}}{2n.(2n+1)\,2^{2n+1}}=\frac{1}{4}\,\frac{(2n-1).(2n-1)}{2n.(2n+1)},$$

et quum exponens iste $<\frac{1}{4}$ sit, error summa (per pag. 151) calculata minor est.

*i)* Si æquatio lineæ $u$ sit

$$y=\log.\left(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

erit (per *d)* pag. 238).

$$\partial y=\left(1+x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\right):\left(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}:\left(x+(x^4-1)^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

atque

$$(\partial y)^2=(x^2-1)^{-1},$$

et

$$1+(\partial y)^2=\frac{1}{x^2-1}+1=x^2(x^2-1)^{-1},$$

et

$$\partial u=\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}=x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

cuius integrale est $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$; huius enim derivata quoad $x$ est

$$\frac{1}{2}.2x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Consequenter arcus est $=\sqrt{x^2-1}$ exacte; quia pro $x=1$ est arcus $=0$ et $\sqrt{x^2-1}$ quoque $=\sqrt{1-1}=0$; itaque constans $=0$, quum superius $A(0)-B(0)=0$ sit, (pag. 215). Unitas per (pag. 111) mutatur.

Est vero linea hæc, quæ *catenaria* vocatur, (atque etiam quadrabilis est), insignibus alioquin etiam proprietatibus gaudens. Est linea transscendens, quum æquatio eius logarithmum involvat; estque linea illa, (Fig. 24) in qua filum perfecte flexibile (quasi lineam ubique æque gravem), extremitatibus non in eadem verticali fixis, distantia earum longius, intensibile, conquiesceret; quam idcirco magnus GALILÆUS parabolam esse arbitrabatur, et nonnisi progressu Matheseos ulteriori tandem LEIBNITZ, JACOBUS ac JOHANNES BERNOULLII determinarunt.

Demonstratur nempe in Mechanica, quod si vires quorumvis arcuum ab imo puncto incipientium pondera directionibus tangentium ad fines eorum ductarum tenentes, ita decomponantur, ut pars horizontalis ubique sit æqualis, et altera sit verticalis, sint vires verticaliter tenentes, uti arcuum dictorum pondera, adeoque uti arcus. Si iam curva ista in eodem plano verticali invertatur, lineæ quæ antea quasi sursum trahendo tenebant, nunc pondera arcuum superiorum sustinebunt. Hinc catenaria in hoc situ *limes est formæ e quam plurimis (nempe tenuissimis) prismatibus æqualibus structi fornicis sine ullo cæmento proprio pondere stantis.*

Inservit eadem deorsum versa etiam pontibus exstruendis; duabus catenis sat firmis nempe extremitatibus ad litora fixis sustinetur pons ipse horizontalis.

*k)* Superficiei per revolutionem lineæ circa abscissam $x$ ortæ derivata quoad $x$ erat (pag. 229) $2\pi y\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}$; atque si linea circulus sit, erat (p. 244) $\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, et hoc per $2\pi y$ (id est per $2\pi(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$) multiplicatum, est $=2\pi$. Consequenter $\int 2\pi = 2\pi x =$ zonæ superficiei sphæricæ pro abscissis ordinatisque e centro incipientibus; atque si $x=1$ fiat, prodit $2\pi$, nempe dimidia superficies sphærica pro radio 1.

X. Exemplis his facilioribus e Geometria in gratiam Tyronum allatis, sit fas e Mechanica quoque faciliora quædam addere; applicando ea, quæ de motu rectilineo (pag. 230) dicta sunt, observandoque:

*a)* quod *quantitates respectivae* plane diversæ quoque *eadem quantitate* (ex. gr. *recta*) *sed diversis determinationibus expressae*, etsi quoad eas quantitates, quibus exprimuntur, æquales sint, nisi expresse aliud moneatur, tunc tantum dicuntur æquales, si cum determinationibus suis connexæ æquales sint; atque ut determinationes oppositorum et imaginariorum, nec aliæ determinationes cum quibus expresse ponuntur quantitates, sunt ab iisdem avellendæ; ex. gr. dici quidem potest $+1$ et $-1$ esse æquales abstrahendo a determinatione, sed non potest $+1=-1$ dici.

Ita tam *vis*, quæ *momentanea* dicitur, quam vis *constanter agens* recta exhiberi certis determinationibus possunt: nempe sit $p$ punctum temporis expers, et dicatur primum $1''$ in $p$ incipiens *primum* $1''$, et sequens $1''$ dicatur *secundum* $1''$; si iam in $p$ talis vis adsit, quæ massam $M=1$ sub primo $1''$ ad $k$ pedum distantiam ferret, absque eo, ut inter initium finemque primi $1''$ ulla vis egisset, vis dicitur *momentanea* in $p$, — si neque in censum veniat virium numerus, qualitas, *tempusque actionis*, *dummodo resultatum* in $p$; *vis constanter agens* vero exprimitur numero pedum, quos $M$ describeret sub secundo $1''$, si vis quæ in $p$ est sub primo $1''$ continuo ageret in $M$, adeoque hic vis dictæ *tempus actionis* figitur.

In puncto temporis experte $p$ vim motum producere concipi nequit: agere incipit, et in aliquo temporis puncto desinit. Potest quidem pro data quavis velocitate vis tanta agere, ut dato quovis tempore minus requiratur ad eam producendam; sed si hoc pacto tempus actionis tendat ad $0$, velocitas finalis, quam eadem vis sub $1''$ continuo agendo produceret, tendit ad $\infty$.

*b)* Interim quidcunque sit vis, nonnisi in effectu nota, potest etiam non ut *respectiva*, sed ut *absoluta quantitas* considerari, et inde velocitas educi; posito vim eandem $\mu$-tuplo tempore continuo agentem $\mu$-tuplum effectum præstare, atque plurium virium quotvis directione eadem in idem agentium effectum esse summam effectuum singularum; nempe vim illam, qua massa $M$ prope terram deorsum urgetur, *pondus $M'$ massae $M$ ad terram* dictam, sub $1''$ in ipsam $M$ constanter agentem, illi velocitatem finalem $g=$ prope $31'$ procurare constat; si itaque eandem massam premat pondus $P$ seu vis$=\mu M'$, vis ista constanter sub $1''$ agendo, velocitatem finalem $\mu g=\frac{Pg}{M'}$ ipsi $M$ conciliabit.

*c)* Denotetur (pag. 219) pro variabili absoluta $t$ spatium usque ad finem $m$-ti $\acute{t}$ percursum per $s(m\acute{t})$, velocitas, quæ ad finem $m$-ti $\acute{t}$ est, sit $v(m\acute{t})$, vis autem velocitate finali (sensu pag. 230) expressa, quæ ad finem $m$-ti $\acute{t}$ adest, continuo agens denotetur pariter per $w(m\acute{t})$, atque sit $w$ prius constans, ex. gr. $=g$.

Erit in hoc casu $\dot{s}$ id est

$$s(m\acute{t})-s((m-1)\acute{t})>\acute{t}v((m-1)\acute{t}),$$

quia spatium hoc sub $\acute{t}$ motu æquabili nonnisi velocitate $v((m-1)\acute{t})$ percursum est, præterea vero sub $m$-to $\acute{t}$ agente vi constante, sub quavis parte continua ipsius $\acute{t}$ crevit velocitas: at idem $\dot{s}$ est $<\acute{t}.v(m\acute{t})$, quia velocitas sub $m$-to $\acute{t}$ semper minor fuit antea quam ad finem. Est autem in hoc casu $v(m\acute{t})=gm\acute{t}$, quia vis eadem quo longius constanter agit, eo maiorem velocitatem producit, atque $\frac{\acute{t}g(m-1)\acute{t}}{\acute{t}g\,m\acute{t}}$ est $=\frac{m-1}{m}$; hoc vero tendit ad 1, dum $n \frown \infty$.

Itaque $\frac{\dot{s}}{\acute{t}g\,m\acute{t}} \frown 1$, (pag. 218); et $gt$ ponendo pro $gm\acute{t}$ atque $v$ pro $g\acute{t}$, est $v\acute{t}$ differentiale ipsius $s$. Differentiale ipsius $v$ autem est $w\acute{t}$, in hoc casu $g\acute{t}$; nam $v(m\acute{t})$ est $=gm\acute{t}$; quia si ad finem unius 1″ producat vis constans velocitatem $g$, ad finem temporis $m\acute{t}$ dabit $mg\acute{t}$; itaque

$$v(m\acute{t})-v((m-1)\acute{t})=gm\acute{t}-g(m-1)\acute{t}=g\acute{t}.$$

Ex

$$\dot{s} \triangleq v\acute{t}=gt\acute{t}$$

est (pag. 225)

$$s=\int\limits_{(\text{quoad } t)} gt=\frac{gt^2}{2}.$$

Si vero $w$ non sit constans, aut crescet aliquamdiu aut decrescet; ponatur crescere, quum eadem mutatis mutandis facile applicentur. Erit $s(m\acute{t})-s((m-1)\acute{t}$, ut antea, $\dot{s}$ dicto,

$$v((m-1)\acute{t})\acute{t}+\frac{w((m-1)\acute{t})}{2}\acute{t}^2<\dot{s}<v((m-1)\acute{t})\acute{t}+\frac{w(m\acute{t})}{2}\acute{t}^2;$$

nempe $\dot{s}$ est spatium sub $m$-to $\dot{t}$ percursum partim velocitate finali illa, quæ ad finem $(m-1)$-ti $\dot{t}$ est, quæ sola motu æquabili produceret spatium $\dot{t}v((m-1)\dot{t})$, partim vi $w$, quæ ad finem $(m-1)$-ti $\dot{t}$ est, abinde crescens; itaque incrementum istud spatii verum erit maius, quam si vis quæ in initio $m$-ti $\dot{t}$ fuit, eadem usque ad finem $m$-ti $\dot{t}$ mansisset; esset vero, hoc posito, incrementum hoc (per præcedentia) $\frac{w((m-1)\dot{t})}{2}\dot{t}^2$.

Est etiam idem incrementum verum minus quam si sub $m$-to $\dot{t}$ vis, quæ ad finem $m$-ti $\dot{t}$ est, quavis antea agente maior egisset; ita vero item per præcedentia esset incrementum $\frac{w(m\dot{t})}{2}\dot{t}^2$.

Sed

$$\frac{\dot{t}v((m-1)\dot{t})+\dot{t}^2\frac{w((m-1)\dot{t})}{2}}{\dot{t}v((m-1)\dot{t})+\dot{t}^2\frac{w(m\dot{t})}{2}}\frown 1;$$

nam dividendo per $\dot{t}$, terminus secundus tam numeratoris quam denominatoris per primum divisus omni dabili minorem quotum dare potest (pag. 93), atque

$$\frac{v((m-1)\dot{t})\dot{t}}{v((m-1)\dot{t})\dot{t}}=1.$$

Consequenter etiam (pag. 218).

$$\frac{\dot{s}}{v((m-1)\dot{t})\dot{t}+\frac{w(m\dot{t})}{2}\dot{t}^2}\frown 1,$$

imo etiam

$$\frac{\dot{s}}{v((m-1)\dot{t})\dot{t}}\frown 1;$$

imo quum $v((m-1)\dot{t}):v(m\dot{t})\frown 1$, quod patet si velocitates istæ ut ordinatæ proximæ ad abscissam tempus repræsentantem concipiantur, erit etiam

$$\frac{\dot{s}}{v(m\dot{t})\dot{t}}\frown 1;$$

atque hinc iuxta superiora et $v\acute{t}$ differentiale ipsius $s$ et $v$ derivata quoad $t$ est; nempe more solito $n$ ponendo pro $m$, fiet $v(n\acute{t}).\acute{t}=v\acute{t}$, quia $v(n\acute{t})$ significat illam velocitatem, quæ ad finem ipsius $t$ est.

Pari modo prodit

$$\frac{\dot{v}}{w(m\acute{t}).\acute{t}} \frown 1;$$

Nam per $\dot{v}$ intelligendo $v(m\acute{t})-v((m-1)\acute{t})$ est

$$w((m-1)\acute{t}).\acute{t} \lessdot \dot{v} \lessdot w(m\acute{t}).\acute{t};$$

namque velocitas, quæ sub $m$-to $\acute{t}$ accedit, producitur per vim, quæ ab initio $m$-ti $\acute{t}$ crescens constanter agit, si non cresceret, produceret velocitatem $w((m-1)\acute{t}).\acute{t}$, quia sub $1''$ producit $w((m-1)\acute{t})$, (et $1''=1$ ponitur); si vis $w(m\acute{t})$ ageret sub $\acute{t}$, produceret $w(m\acute{t}).\acute{t}$; at vis ante finem $m$-ti $\acute{t}$ agens est semper $\lessdot w(m\acute{t})$.

Est autem

$$\frac{w((m-1)\acute{t}).\acute{t}}{w(m.\acute{t}).\acute{t}} \frown 1,$$

quod patet ut antea. Consequenter (pag. 218) etiam $\frac{\dot{v}}{w(m\acute{t}).\acute{t}} \frown 1$: atque ut antea $w\acute{t}$ est differentiale ipsius $v$, et $w$ est derivata quoad $t$.

Functio differentianda hic non in concreto (ut ex. gr. area parabolæ) exhibetur, sed per limitem concipitur (pag. 217); quem dari patet, quum crescente $n$ sine fine, crescat $s$ sine fine, nunquam tamen fiat tantum, quam si per totum tempus velocitas ultima fuisset. Vide uberius in exemplo centri gravitatis paulo inferius methodum, functionem nonnisi per limitem datam differentiandi.

Reliqua (pag. 230—31) dicta fluunt.

*d)* Sit prius exclusa medii resistentia; sitque $w$ prius ab $s$ tum a $t$ dependens.

(Fig. 25). Sit $c$ centrum terræ, initium ipsius $x$ distantiam positivam a centro denotantis (sive ante sive post centrum sit); sitque $x<a$, de

cuius fine massa $M$ libere, seposita omni resistentia, sola vi gravitatis cadat; (*supponendo, quasi nonnisi $c$ et nota vis in eo esset, plane usque* ad centrum valere legem rationis inversæ duplicatæ distantiarum, quamvis pro globo uniformiter denso sint vires attractivæ intra superficiem, ut distantiæ a centro); quæritur velocitas $v$ directione prima ad finem ipsius $x$ (sive ante sive post centrum) corporis per $a-x$ aut $a+x$ delapsi quanta sit?

Spatium $s$ ante centrum est $= a-x$, si post centrum terminetur est $a+x$; vis $w$ sub conditione dicta est $=\frac{r^2 g}{x^2}$, pro radio terræ $= r$ et vi gravitatis ad superficiem $= g$. Erat autem (pag. 231)

$$v = \sqrt{2 \int_{(\text{quoad } s)} w \, \partial s} = r \sqrt{2g \int_{(\text{quoad } x)} \frac{1}{x^2} \, \partial (a-x)},$$

et hoc est

$$= r \sqrt{2g \int_{(\text{quoad } x)} \frac{-1}{x^2}};$$

nam $\partial (a-x) = -1$. Est vero

$$\int_{(\text{quoad } x)} \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x} + \text{const.}, \text{ nam } \partial \frac{1}{x} = \frac{x \partial 1 - \partial x}{x^2} = \frac{-1}{x^2}.$$

Itaque

$$v^2 = r^2 \frac{2g}{x} + \text{constans}.$$

Reperitur autem constans, si $v^2$ dicatur $A(x)$ et functio summatrix sit

$$B(x) = r^2 \frac{2g}{x};$$

nempe $A(a)$, uti velocitas pro $x = a$, est $= 0$; atque

$$B(a) = r^2 \frac{2g}{a};$$

consequenter

$$A(a) = B(a) + \text{constans},$$

sive

$$o = r^2 \frac{2g}{a} + \text{constans},$$

atque hinc

$$\text{constans} = - r^2 \frac{2g}{a};$$

et est pro velocitate quæsita

$$v^2 = r^2 \frac{2g}{x} - r^2 \frac{2g}{a} = r^2 \frac{2g(a-x)}{ax},$$

id est

$$v = r \sqrt{\frac{2g(a-x)}{ax}}.$$

Manifesto sub conditione dicta, si $x \frown o$, fit $v \frown \infty$; at nonnisi in centro in puncto temporis experte esset velocitas $\infty$, sine ullo tempore tamen, quo effectum aliquem producere queat; post centrum enim extemplo ad quasvis distantias æquales incrementa, quæ ante centrum positiva erant, negativa fiunt, et eædem velocitates finitæ erunt ad distantias a centro easdem $x$, tam ante quam post centrum; eritque post centrum ad distantiam $x = a$ velocitas o uti ante centrum, ut formula exhibet. Inde vero iterum redeundo, patet oscillationem perpetuam fieri: atque reditu quovis directionem velocitatis mutari; et innumerabilibus, spatiis quoad summam pedum percursorum acceptis, temporibusque competere velocitatem eandem: quæri tamen minimum tempus spatiumque pro data velocitate directione una vel altera potest; loca autem duo tantum pro velocitate quavis dantur, ad distantias a centro æquales, et ad distantiam ipso $a$ maiorem formula quoque imaginarium dat.

Spatium $s$ e valore ipsius $v$ prodit; quum $x$ inde repertum aut ex $a$ substrahi, aut ipsi $a$ addi debeat; prior est valor minimus, reliqua patent; temporis autem valor formularum heic nondum traditarum plurium alicuius integrationem requirit.

Quod vero formula superior velocitatem etiam ultra centrum exhibeat, quamvis ibi vis alia, nempe negative agens sit, inde patet: quod si $x$ etiam ultra centrum positive accipiatur, tantum ut distantia a centro, et sit ex. gr. $n = 3$, atque ad finem ipsius $x$ sit $v = \beta$ ante centrum; erit series ex $A(x)$ derivata (pag. 209), si post $A(1\dot{x}) - A(0\dot{x})$, quum pro $x$ ultra centrum incrementa ad distantias æquales opposita priorum sint, quasi retrorsum continuetur, sequens:

$$A(3\dot{x}) - A(2\dot{x}) + A(2\dot{x}) - A(1\dot{x}) + A(1\dot{x}) - A(0\dot{x}) + A(0\dot{x}) -$$
$$- A(1\dot{x}) + A(1\dot{x}) - A(2\dot{x}) + A(2\dot{x}) - A(3\dot{x}),$$

nempe incrementum supra $\beta$ erit 0; id est, erit et hic velocitas eadem, nempe $\beta$.

Erat autem conditio tantum supposita, quasi punctum in spatio vi attractiva telluris tota polleret. Si vero globus radii $r$ uniformiter densus esset, tum vires attractivæ essent ut distantiæ $z$ a centro. Unde quum vis sit $\frac{zg}{r}$, erit

$$v = \sqrt{\frac{2g}{r} \int_{(\text{quoad } z)} z\, d(r - z)} = \sqrt{-\frac{2g}{r} \int_{(\text{quoad } z)} z} =$$

$$= \sqrt{-\frac{2g}{r} \frac{z^2}{2} + \text{const.}} = \sqrt{-\frac{gz^2}{r} + \text{const.}}$$

Est autem constans $= gr$; nam pro $z = r$ sit $v = 0$; erit

$$A_1(r) = 0, \text{ et } B_1(r) = -\frac{gr^2}{r} = -gr$$

adeoque constans $= gr$. Consequenter

$$v^2 = gr - \frac{gz^2}{r} = \frac{g}{r}(r^2 - z^2),$$

unde pro $z = 0$ fit $v = \sqrt{gr}$; et si hoc $gr$ addatur quadrato velocitatis, quam formula superior ad superficiem terræ dat, prodit quadratum velocitatis finitæ ad centrum.

Si nempe $s$ usque ad superficiem terræ protendatur, erit $x = r$; adeoque

$$v = r\sqrt{2g\,\frac{a-r}{ar}},$$

et si altitudo celeritati hinc competens $\alpha$ dicatur, est

$$\alpha = \frac{v^2}{2g} = \frac{2r^2 g(a-r)}{2gar} = \frac{r(a-r)}{a}.$$

Hoc tendit ad $r$, si $a \frown \infty$; id est altitudo celeritati minimæ competens, qua globus de superficie terræ verticaliter explodendus esset (seposita resistentia), ut nunquam redeat, sive velocitati, qua ad terram sola telluris attractione ex æternitate, — in certo tamen tempore, — perveniret, radio terræ æquatur. Ita pro quovis corpore cœlesti, radius corporis illius prodit.

Sit iam $w$ functio temporis, deinde velocitatis. Sit $w = gt^\mu$; erit

$$v = \int_{(\text{quoad } t)} w = \int_{(\text{quoad } t)} gt^\mu = \frac{gt^{\mu+1}}{\mu+1} + \text{constans},$$

quod, si $\mu = 0$, fit $= gt$, uti est in motu uniformiter accelerato, ubi in quovis tempore vis eadem $gt^0$ egit; est enim constans $= 0$, si pro $t = 0$ velocitas $0$ sit; si vero velocitas $c$ sit (positiva vel negativa), erit

$$c = \frac{g.0}{1} + \text{constans},$$

adeoque constans $= c$. Est porro

$$s = \int_{(\text{quoad } t)} v = \int_{(\text{quoad } t)} \frac{gt^{\mu+1}}{\mu+1} = \frac{gt^{\mu+2}}{(\mu+1)(\mu+2)} + \text{constans},$$

quod pro $\mu = 0$, ut in motu uniformiter accelerato, fit $\frac{gt^2}{2}$.

Sed erat etiam (pag. 230).

$$t = \int_{(\text{quoad } s)} \frac{1}{v} = \int_{(\text{quoad } s)} \frac{\mu+1}{gt^{\mu+1}},$$

potest autem $t$ per $s$ exprimi, ut substituendo derivata pura reddatur; nam

$$t = \sqrt[\mu+2]{\frac{(\mu+1)(\mu+2)s}{g}},$$

adeoque

$$t^{\mu+1} = \beta s^{\frac{\mu+1}{\mu+2}},$$

si coefficiens ipsius $s$ ad $\frac{1}{\mu+2}$ elevati $\beta$ dicatur. Erit igitur

$$\frac{\mu+1}{g t^{\mu+1}} = \frac{\mu+1}{g\beta} s^{-\frac{\mu+1}{\mu+2}},$$

atque huius functio primitiva est per (pag. 225) $\frac{(\mu+1)(\mu+2)s^{\frac{1}{\mu+2}}}{g\beta}$, quod pro casu, ubi $\mu = 0$, fit $\sqrt{\frac{2s}{g}}$; nam tum

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{g}}, \frac{1}{\mu+2} = \frac{1}{2}, \mu+2 = 2 = \sqrt{2}\sqrt{2},$$

e quo per $\sqrt{2}$ in valore ipsius $\beta$ deletur unus factor, uti ex $g = \sqrt{g}.\sqrt{g}$ unus per $\sqrt{g}$ ex $\beta$ deletur.

*e)* Sit iam vis $w$ functio velocitatis $v$; uti in medio resistenti ponitur, resistentiam in ratione quadrata velocitatum esse, pro eadem densitate, tenacitate, et eiusdem corporis superficie eadem obversa (quamvis experimentis a clarissimo Benzenberg institutis nonnisi intra certos limites comprobetur).

Si celeritas initialis $C$ sit, adeoque pro $t = 0$ sit $v = C$, et motus in medio uniformiter denso fiat, nec ulla alia vis agat præter medii resistentiam; erit $w$ negativum atque per $-\alpha v^2$ exprimi poterit, per $\alpha$ positivum coefficientem ipsius $v^2$ illum constantem intelligendo, quem densitas medii, superficies obversa & determinant.

Exemplo sit sphæra, cuius diameter sit $D$, massa $M$, densitas $N$-ies maior quam medii, pondus ad terram — in vacuo — sit $M' = 1$ (eiusdem massæ ad $\mu$-tuplam a centro terræ distantiam $\mu^2$-ies minus, ad solem vero ultra 20-ies maius esset).

Demonstratur in Physica: 1) quod sive planum in fluidum, sive fluidum in planum impegerit perpendiculariter, celeritate $c$, quantitas vis agentis sit (intra iustos limites per alias caussas physicas exortos) æqualis ponderi prismatis ex illo fluido ad basim dicto plano æqualem constructi, ad altitudinem illam, qua corpus prope terram *libere* labendo ad imum velocitatem finalem $c$ acquireret. 2) Demonstratur etiam, quod si pro plano dicto sphæra diametri $D$ sit, basis prismatis dicti (propter faciliorem per superficiem sphæricam defluxum) dimidia area circuli maximi ponenda sit. Dicatur hoc *prisma resistentiae*.

Erit hoc pacto prismatis resistentiæ soliditas $\frac{\pi D^2}{8} \cdot \frac{v^2}{2g}$, pondus vero $\frac{3}{4DN} \cdot \frac{v^2}{2g}$; nam dimidia area circuli maximi est $\frac{\pi D^2}{8}$, altitudo velocitati $v$ competens autem est $\frac{v^2}{2g}$ (pro $g$ vim gravitatis ad terram velocitate finali expressam denotante); esset porro pondus prismatis huius, si materia eius cum sphæræ materia homogenea esset, $\frac{3v^2}{8gD}$, nam sphæræ soliditas est $\frac{\pi D^3}{6}$, pondus autem ponitur 1, unde

$$\frac{\pi D^3}{6} : \frac{\pi D^2}{8} \frac{v^2}{2g} = 1 : \frac{3v^2}{8Dg};$$

et si medii materia N-ies rarior sit, pondus prismatis est $\frac{3v^2}{8gDN}$.

Si iam altitudo illa $A$ quæratur, (quæ *exponens resistentiae* dicitur), de qua libere lapsum corpus ad imum velocitatem finalem $c$ tantam acquireret, ut pondus prismatis resistentiæ (adeoque resistentia) ponderi sphæræ esset æqualis: erit pondus prismatis, cuius basis $\frac{\pi D^2}{8}$ altitudo $A$, (eodem modo ut supra) $= \frac{3A}{4DN}$; quod si $= 1$ (ponderi sphæræ) sit, erit $A = \frac{4DN}{3}$, atque velocitas $c$ ipsi $A$ competens est $= \sqrt{2Ag}$. Unde resistentia pro velocitate $v$ æquatur $\frac{v^2}{2Ag} = \frac{v^2}{c^2}$; nam hoc est

$$= v^2 : \frac{8DNg}{3} = \frac{3v^2}{8DNg};$$

atque, quum vis ponderis I in sphæram massæ $M$ agens sub I″ producat velocitatem $g$, vis ponderis $\frac{v^2}{c^2}$ in eandem massam agens produceret velocitatem $\frac{v^2 g}{c^2}$ sub I″, adeoque $\frac{v^2 g \dot{t}}{c^2}$ sub $\dot{t}$. Erat vero (pag. 249)

$$\dot{v} \doteq w\dot{t} \quad \text{et} \quad \dot{t} \doteq \frac{\dot{v}}{w},$$

adeoque

$$\dot{v} \doteq -\frac{v^2 g \dot{t}}{c^2} \quad \text{et} \quad \dot{t} \doteq -\frac{c^2 \dot{v}}{v^2 g} = -\frac{c^2}{g} v^{-2} \dot{v}.$$

Est igitur heic

$$\alpha = \frac{g}{c^2},$$

quod etiam

$$= \frac{1}{2A} = \frac{3}{8DN}.$$

Est (pag. 230)

$$t = \int_{(\text{quoad } v)} \frac{1}{w} = \int_{(\text{quoad } v)} \frac{-1}{\alpha v^2} = \frac{1}{\alpha v} + \text{constans};$$

nam (pag. 225)

$$\frac{-1}{\alpha v^2} = \partial \frac{1}{\alpha v}.$$

Constans vero prodit, si ponatur $\frac{1}{\alpha v} = B(t)$ et $t = A(t)$; erit

$$A(0) = 0, \quad \text{et} \quad B(0) = \frac{1}{\alpha C},$$

quia pro $t = 0$ est $v = C$, adeoque $\frac{1}{\alpha v}$ fit $\frac{1}{\alpha C}$; itaque

$$A(0) - B(0) = -\frac{1}{\alpha C},$$

atque

$$t = \frac{1}{\alpha v} - \frac{1}{\alpha C} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{C}\right).$$

Unde patet, pro $t$ utvis magno posse $v$ tam parvum accipi, ut ei æquetur, et æternitatem requiri, ut motus desinat, quantumvis fuerit $C$.

Hinc prodit

$$v = \frac{C}{\alpha Ct + 1};$$

unde, si ipsi $\alpha$ substituetur $\frac{1}{2A} = \frac{3}{8DN}$, erit

$$v = \frac{8CDN}{3Ct + 8DN},$$

quod crescet, sive $D$ crescat sive $N$; patet enim sive $D$ sive $N$ per $i > 1$ multiplicetur, reducendo ad denominatorem eundem valorem maiorem fieri. Quo densior itaque massa, maiorque globi diameter eadem velocitate $c$ explosi, eo maius $v$.

Est quoque

$$\int_{\text{(quoad } t)} v = s, \quad \text{et} \quad \dot{t} \doteq \frac{\dot{v}}{w},$$

sive ex $\dot{s} \doteq v\dot{t}$ et $\dot{t} \doteq \frac{\dot{v}}{w}$, adeoque $\dot{s} \doteq \frac{v\dot{v}}{w}$ etiam $\int_{\text{(quoad } v)} \frac{v}{w} = s$: itaque pro hoc casu (pag. 225)

$$s = \int_{\text{(quoad } v)} \frac{v}{-\alpha v^2} = \int_{\text{(quoad } v)} \frac{1}{-\alpha v} = \frac{1}{-\alpha} \log. v + \text{constans}.$$

Prodit vero constans $= \alpha^{-1} \log. C$; quum pro $s = 0$ sit $v = C$, adeoque si $s = A(s)$ sit, et $B(s) = -\alpha^{-1} \log. v$, erit $B(0) = -\alpha^{-1} \log. C$; consequenter

$$A(0) - B(0) = \frac{1}{\alpha} \log. C,$$

atque

$$s = \frac{1}{\alpha} \log. C - \frac{1}{\alpha} \log. v = \frac{1}{\alpha} (\log. C - \log. v) = \frac{1}{\alpha} \log. \frac{C}{v}.$$

Itaque spatium omni dabili maius fieri potest.

Si vis constans $g$ continuo agens supponatur, uti ad haud ita magnam a terra distantiam cum errore exiguo vis gravitatis est, atque supponatur item medium uniformiter densum: erit vis, quæ in corpus vi $g$ deorsum sollicitatum agit, $w = g - \alpha v^2$.

Eritque

$$t = \int \frac{1}{w} = \int_{(\text{quoad } v)} \frac{1}{g - \alpha v^2};$$

est autem, si $\frac{g}{\alpha}$ brevitatis caussa $\beta$ dicatur,

$$\frac{1}{g - \alpha v^2} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} \left( \frac{1}{\sqrt{\beta} + v} + \frac{1}{\sqrt{\beta} - v} \right),$$

ut substituendo patet; itaque

$$t = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} \left( \int \frac{1}{\sqrt{\beta} + v} + \int \frac{1}{\sqrt{\beta} - v} \right) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} (\log.(\sqrt{\beta} + v) - \log.(\sqrt{\beta} - v));$$

esset nempe $\frac{-1}{\sqrt{\beta} - v}$ derivata quoad $v$ ipsius $\log.(\sqrt{\beta} - v)$; itaque

$$t = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\beta}} \log. \frac{\sqrt{\beta} + v}{\sqrt{\beta} - v} + \text{constans},$$

et constans $= 0$, si pro $t = 0$ et $v = 0$, adeoque $\frac{\sqrt{\beta} + v}{\sqrt{\beta} - v} = 1$ et $\log. 1 = 0$ sit.

Hinc

$$2\alpha t \sqrt{\beta} = \log. \frac{\sqrt{\beta} + v}{\sqrt{\beta} - v},$$

adeoque (pag. 183 et 50)

$$e^{2\alpha t \sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + v}{\sqrt{\beta} - v},$$

atque unitatem per utramque dividendo est

$$e^{-2\alpha t \sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} - v}{\sqrt{\beta} + v},$$

quod itaque tendit ad $0$, si $t \frown \infty$; et hinc crescendo quidem semper $v \frown \sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$, hoc nunquam attingendo; scilicet tum $\sqrt{\beta} - v \frown 0$.

Patet vero $v$, datis $\alpha$, $t$, $g$ ex æquatione ista prodire.

Spatium $s$ autem est

$$\int \frac{v}{w} = \int_{(\text{quoad } v)} \frac{v}{g - \alpha v^2};$$

porro per (pag. 225)

$$s = -\frac{1}{2\alpha}\log.(g - \alpha v^2) + \text{constans};$$

nam $\frac{-2\alpha v}{g - \alpha v^2}$ derivata quoad $v$ ipsius $\log.(g - \alpha v^2)$ est. Constans vero est $\frac{1}{2\alpha}\log. g$, nam $s = 0$ pro $t = 0$, et tum $v$ quoque positum est $= 0$; itaque

$$0 = -\frac{1}{2\alpha}\log. g + \text{constans};$$

itaque constans $= \frac{1}{2\alpha}\log. g$, atque

$$s = \frac{1}{2\alpha}\bigl(\log. g - \log.(g - \alpha v^2)\bigr) = \frac{1}{2\alpha}\log.\frac{g}{g - \alpha v^2}.$$

Notandum vero est, quod si durante motu per medium massa $M$ gravitet, e pondere eius nempe ex $M$ subtrahi debeat pondus medii cuius locum occupat, quum hoc a medio ipso teneatur; itaque si globus *N-ies* densior sit medio, pro pondere sphæræ in hoc casu non 1, sed $1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$, adeoque pro $g$ in $g - \alpha v^2$, ponendum $\frac{(N-1)g}{N}$ erit.
Unde limes dictus velocitatis est

$$\sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{(N-1)}{N} g : (1 : 2A)} = \sqrt{\frac{2A(N-1)}{N} g} = c\sqrt{\frac{N-1}{N}},$$

si velocitas altitudini $A$ competens $c$ dicatur; nam erat $\alpha = \frac{1}{2A}$, et $c^2 = 2Ag$, adeoque $c = \sqrt{2Ag}$. Et quo densior globus est, id est quo maius $N$, celeritas eo propius ipsi $c$ venit, nunquam tamen eam assequens, de quacunque altitudine per medium uniformiter densum cadat. Unde cur pluviæ per aërem cadentes crania haud perforent, intelligitur; densitas quidem aëris sursum decrescit, quod tamen etiam data lege in calculum revocari potest. Patet etiam globum verticaliter deorsum celeritate dicta explosum, ut resistentia ponderi eius æquetur, in medio uniformiter denso uniformiter cadere.

XI. Si $C$ continuum aliquod e spatio sit, deturque tale punctum, per quod transeunte plano quovis eiusmodi, ut una portio ipsius $C$ in unam illius plagam, altera in alteram cadat, ipsum $C$ bisecetur: dicitur punctum illud *centrum magnitudinis* ipsius $C$.

Per tria plana unum punctum $A$ commune habentia, et ad se invicem perpendicularia quodvis spatii punctum, data eius a singulis distantia, manifesto determinatur pro $A$ tanquam capite abscissarum; potestque quodvis finitum $M$ ita poni, ut totum $M$ in aliquem 8 angulorum, qui per eiusmodi tria plana efformantur, saltem nulla pars extus cadat.

Si $M$ ita cadat, ut plane dicebatur, et pro quovis $P$ dictorum trium planorum, ductis ad aliquod eorundem planis ad intervalla numero $n$ æqualia paralellis, a puncto proximo ipsius $M$ usque ad remotissimum (id est ab illo, quo nullum propius est, usque ad illud, quo nullum remotius est); et partibus ipsius $M$ inter quævis proxima plana parallela dicta contentis nomine generali $z'$ dictis, respondeat cuivis $z'$ inter eadem plana contentum aliquod $z''$, aut ipsum gaudens centro magnitudinis, aut constans e partibus certis centro magnitudinis gaudentibus; deturque tale punctum $p$ ad distantiam $D$ a $P$, ut si quodvis $z''$, ipsum, si centro magnitudinis gaudeat, si non, tum partes dictæ centro magnitudinis gaudentes nomine generali $z$ dicantur, et $S$ dicatur summa omnium productorum e quovis $z$ in distantiam centri magnitudinis eius a $P$, possit $n$ pro quovis dato $\omega$ ita augeri, et ipsa $z$ ea lege accipi, ut $S-MD$ sit $<\omega$ aut $=0$, atque $\frac{z'}{z''}$ sit $=1$ aut $\sim 1$, si $n \sim \infty$; tum $p$ dicitur *centrum gravitatis geometricum ipsius M.*

Demonstrari potest dari pro quovis $M$ tale $p$, ut $S=MD$, sive $S \sim MD$, adeoque $\frac{S}{M}=D$, vel $\frac{S}{M} \sim D$, atque pro $S \sim S'$ esse $\frac{S'}{M}=D$. Dari igitur talem limitem pro tali casu demonstrandum est, et quidem ita, ut (pro quovis $z'$ et $z''$ simultaneis) $\frac{z''}{z'} \sim 1$; atque tum methodus exponenda est, functionem istam, non in concreto, sed nonnisi per limitem datam (pag. 217) differentiandi.

*a)* Si $u$ sine fine crescat (Fig. 26) ex $\mathfrak{b}$ versus $\mathfrak{c}$, et simul $u_1$ sine fine decrescat ex $\mathfrak{d}$ versus $\mathfrak{b}$, atque $u$ semper $<\mathfrak{ac}$ sit: tum $u$ gaudet limite (per pag. 55), et si limes iste $\beta$ dicatur, ex $\mathfrak{a}$ incipiendo neque ultra $\mathfrak{c}$, nec intra nec in $\mathfrak{b}$ terminatur; adeoque est $< \mathfrak{ac}$, et $> \mathfrak{ab}$.

Nam si ultra $\mathfrak{c}$ ex. gr. in $*$ terminaretur; tum cuiusvis $u$ differentia a $\beta$ esset $\triangleright \mathfrak{c}*$, quia quodvis $u$ ante limitem $\triangleleft \mathfrak{ac}$ est. Ita si ante $\mathfrak{b}$ terminaretur $\beta$, quantitate $q$, cuiusvis $u$ (quum inter $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ terminetur) differentia a $\beta$ esset $\triangleright q$. Quum igitur in neutro casu tendere differentia ad o posset, $\beta$ limes ipsius $u$ non esset. Ita nec in $\mathfrak{b}$ terminatur.

*b)* Atque hinc, si $\beta$ sit

$$=F\,(m\dot{x}) - F\,((m-1)\dot{x}) = f\,(m\dot{x}),$$

et $u_1$ sit

$$=U_1(m\dot{x}) - U_1((m-1)\dot{x}) = u_1(m\dot{x}),$$

atque $u$ sit

$$=U\,(m\dot{x}) - U\,((m-1)\dot{x}) = u\,(m\dot{x});$$

ac (pro $n=\infty$) $\frac{u\,(m\dot{x})}{u_1(m\dot{x})} \frown 1$, tum etiam $\frac{u\,(m\dot{x})}{f\,(m\dot{x})} \frown 1$; et si

$$B(m\dot{x}) - B((m-1)\dot{x}) = b\,(m\dot{x})$$

tale sit, ut $\frac{u\,(m\dot{x})}{b\,(m\dot{x})} \frown 1$, erit

$$F(x) - F(0) = B(x) - B(0);$$

et si $B(x)$ functio summatrix valoris noti sit, fiet

$$\int u\,(x) = F(x) = B(x) + \text{constans}.$$

Sit ex. gr. (Fig. 27) centri gravitatis areæ in plano inter abscissam $x$, et ordinatam $y$, atque lineam, cuius æquatio sit $y = A(x)$, comprehensæ, distantia prius a plano $P$, deinde ab alio ex $x$ ad $P$ perpendiculari quærenda.

Consideretur cuivis $\dot{x}$ appertinens $z'$ superius inter plana ad $P$ parallela contentum, sitque $z$ rectangulum $2\alpha$; erit distantia centri magnitudinis huius $a + v + \frac{\dot{x}}{2}$; multiplicato autem $n$ per 2, orientur duo rectangula, $\alpha$ et $\alpha+\omega$, atque distantiæ centrorum magnitudinis (retinendo valorem ipsius $\dot{x}$ priorem) erunt $a+v+\frac{\dot{x}}{4}$ et $a+v+\frac{3\dot{x}}{4}$, et producta ex ipsis $z$ in distantias erunt prius $2\alpha\left(a+v+\frac{\dot{x}}{2}\right)$, postea vero

$$\alpha\left(a+v+\frac{\dot{x}}{4}\right)+(\alpha+\omega)\left(a+v+\frac{3\dot{x}}{4}\right)=2\alpha\left(a+v+\frac{4}{8}\dot{x}\right)+\omega\left(a+v+\frac{3\dot{x}}{4}\right).$$

Quod si continuetur semper porro multiplicando $n$ per 2, manifesto crescet productorum istorum summa, tam huic quam cuivis $\dot{x}$, adeoque etiam toti $x$ appertinens: manebit tamen ipsi $x$ appertinens $\lessdot xy\ (a+x)$ et pars ipsi $\dot{x}$, valorem eius priorem intelligendo, appertinens manebit $\lessdot \dot{x}y\,(a+x)$. Gaudet igitur tam pars toti $x$ quam ipsi $\dot{x}$ appertinens limite (pag. 55) et summa limitum, ad quos tendent partes omnibus $\dot{x}$ appertinentes, est limes ipsi $x$ appertinens, qui per constantem $M$ divisus, dat (per definitionem) distantiam $D$ a $P$.

Manifesto vero, si limes toti $x$ appertinens $F(x)$ dicatur, erit limes $m$-to $\dot{x}$ appertinens $F(m\dot{x})-F((m-1)\dot{x})$ sive brevius $f(m\dot{x})$, differentiale verum ipsius $F(x)$.

Sed ex *a)* si $\dot{x}y\,(a+x)$ (omnia ad rectam reducendo) sit id, quod ibi $\mathfrak{ab}$ erat, et $(\dot{x}y-k)\ (a+x)$ sit id quod ibi $\mathfrak{ac}$ erat, et $u$ sit summa productorum e rectangulis inscriptis in distantias centrorum magnitudinis, nonnisi ipsi $\dot{x}$ priori appertinentibus, semper per 2 dividendo, $u_1$ vero sit summa rectangulorum circumscriptorum simultaneorum per distantias centrorum magnitudinis multiplicatorum; manifesto manebit $u$ semper $\lessdot (\dot{x}y-k)\,(a+x)$, crescens sine fine a $2\alpha\left(a+v+\frac{\dot{x}}{2}\right)$ incipiendo; limes igitur dictus ipsi $\dot{x}$ appertinens est $\gtrdot y_1\dot{x}\ (a+x-\dot{x})$ atque est $\lessdot y\dot{x}\ (a+x)$. (pag. 261)

Valet autem hoc de quovis $\dot{x}$, etsi $n$ pro $\mu$ integro utvis magno per $2^\mu$ multiplicetur; estque

$$\frac{(a+x-\dot{x})y_1\dot{x}}{(a+x)y\dot{x}} \frown 1;$$

nam (pag. 93)

$$\frac{\dot{x}}{\dot{x}}=1,\ \frac{y_1}{y}\frown 1 \quad \text{et} \quad \frac{a+x-\dot{x}}{a+x}\frown 1,$$

consequenter etiam

$$\frac{(a+x)y\dot{x}}{f(m\dot{x})} \frown 1,$$

estque $\frac{(a+x)y\dot{x}}{M}$ differentiale ipsius $\frac{F(x)}{M}$, et $\frac{(a+x)y}{M}$ derivata quoad $x$ est, atque $\frac{1}{M}\int(a+x)\partial M$ est distantia centri gravitatis a $P$, quum $y=\partial M$ in hoc casu; et pariter pro aliis casibus idem prodit.

Si vero distantia centri gravitatis ab $X$ quæratur, prius $z$ erit $y_1\dot{x}$, et distantia centri magnitudinis est $\frac{y_1}{2}$, adeoque factum $=\frac{1}{2}\dot{x}y_1^2$; si vero bisecetur $\dot{x}$, erit summa factorum $=\frac{1}{2}\alpha y_1+\frac{1}{2}(\alpha+\omega)\ (y_1+\lambda)$, si ordinata intermedia præcedentem quantitate $\lambda$ superet. Crevit itaque, crescetque sine fine summa productorum, ut antea, manens tamen $\lessdot xy^2$, quapropter hic quoque limitem dari constat. Est quoque limes hic $\gtrdot \frac{1}{2}y_1^2\dot{x}$ et $\lessdot \frac{1}{2}y^2\dot{x}$ ac

$$\frac{1}{2}y_1^2\dot{x}:\frac{1}{2}y^2\dot{x}=y_1^2:y^2,$$

quod $\frown 1$; hinc $\frac{1}{2M}y^2\dot{x}$ differentiale et $\frac{y^2}{2M}$ derivata (quoad $x$) distantiæ ab axe centri gravitatis areæ est; pro linea ipsa vero prodire $\frac{y\partial M}{M}$ (pro $M$ lineam denotante) facile patet.

Si $X$ figuram in duas partes geometrice æquales symmetrice dividat; atque distantia centri gravitatis a $H$ ultra figuram ad distantiam $D'$ ipsi $X$ parallelam quæratur; rectangulorum priorum inscriptorum (ita et circumscriptorum) dupla fient, et cuiusvis eiusmodi dupli centrum magnitudinis in $X$ cadet; unde manifesto etiam limes summæ productorum e rectangulis inscriptis in distantiam a $H$ constantem $D'$, erit $MD'$, atque distantia centri gravitatis a $H$ erit $\frac{MD'}{M}=D'$ per definitionem.

Quoad lineam ipsam autem pro hoc casu erit $z''$ superius, complexus chordarum arcuum inter plana ad $P$ parallela proxima; quarum nunc æqualium quævis (sensu pag. 261) $z$ dici potest: est autem unum $z$ ipsi $H$ propius altero eidem symmetrice respondente, atque si illius $z$, quod ipsi $H$ propius est, distantia centri magnitudinis a $H$ dicatur $b$, remotioris vero distantia ab $X$ dicatur $c$; erit summa productorum ex utroque $z$ in centrorum magnitudinis eorum distantias

$$= bz + (b + 2c)z = 2z(b + c);$$

est autem $2(b+c)$ constans, utcunque mutentur $b$ et $c$; adeoque et hic limes summæ productorum omnium $z$ in suas distantias, erit $2M(b+c)$, (pro $M$ lineam dimidiam denotante) et distantia centri gravitatis a $H$ erit

$$\frac{2M(b+c)}{2M} = b + c;$$

quæ distantia ipsorum $H$ et $X$ est. Consequenter centrum gravitatis in $X$ cadit.

Corporis per revolutionem circa axem generati quoque centrum gravitatis in axem cadere pariter patet.

Omnia dicta vero ad ordinatas decrescentes quoque facile applicantur.

Pro linea curva, etsi non in planum cadat, chordæ arcuum inter plana dicta parallela contentorum, sunt ipsa $z''$ centro magnitudinis gaudentia; pro superficiebus autem talia plana $z$ ponuntur centro magnitudinis gaudentia, quorum summæ limes sit superficies ipsa; idem quoad solida patet.

Est autem etiam, dum tantum longitudo curvæ, aut area superficiei curvæ quæritur, functio, cuius differentiale quæritur, non in concreto (ut ex. gr. area parabolæ) data: sed demonstrandum est limitem dari, qui functionem absolutam differentiandam præbeat. Ita (pag. 250) spatium in motu difformi est functio absoluta per limitem tantum data; quem dari ibi quoque patet.

Demonstrari potest, pro quavis linea, superficie, et corpore quovis dari centrum gravitatis; imo si planum quodvis $Q$ per id ducatur, atque agantur plana ei utrinque ad distantias æquales parallela, et respectiva $z$ inter proxima plana parallela contenta per distantias centrorum magnitudinis a $Q$ multiplicata *momenta* vocentur, ac in una ipsius $Q$ plaga accipiantur positive, in altera negative: erit limes summæ omnium momentorum o. Si vero in $p$ e fine ipsius $D$ — in casu superiore — ducatur perpendicularis ad $D$, et ad hanc perpendicularem fiat planum perpendiculare $P'$ ultra $M$, et sectio planorum $P$ et $P'$ fiat axis motus plani $P'$: tum in vecte homodromo quies erit. Si ex. gr. $P'$ horizontaliter concipiatur, et singulæ partes ipsius $M$ in distantiis suis deorsum gravitent, atque vis tota $M$ in $p$ sursum agat: erit nempe summa momentorum o, quum nulla assignabili sit maius vel minus unum nempe $MD$, quam summa reliquorum.

*Exempla.*

*a*) Si $M$ *dimidium segmentum parabolae* sit; et quæratur distantia centri gravitatis a vertice; erit per $\partial M = y$

$$\frac{1}{M}\int x\partial M = \frac{1}{M}\int xy$$

et hoc est (pag. 235)

$$= \frac{1}{M}\int xp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{p^{\frac{1}{2}}}{M}\int x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} : \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{5}\,x.$$

Si hoc in axe sumatur, erit centrum gravitatis totius segmenti; si vero centrum gravitatis dimidii segmenti quæratur: tum etiam distantia eius ab axe $= \frac{1}{2M}\int y^2$ quærenda est (pag. 264).

*b*) Si $M$ *paraboloidem* denotet, est (pag. 242)

$$\int\frac{x\partial M}{M} = \frac{\pi p}{M}\int x^2 = \frac{\pi p x^3}{3M} = \frac{\pi p x^3}{3} : \frac{\pi p x^2}{2} = \frac{2}{3}\,x,$$

per $M = \frac{\pi p x^2}{2}$.

*c*) Si $M$ *segmentum sphaerae* sit, est

$$\frac{1}{M}\int x\partial M = \frac{1}{M}\int x\pi y^2 = \frac{\pi}{M}\int x\,(2x - x^2),$$

pro abscissa a fine diametri et radio 1, et hoc est (pag. 225)

$$=\int\frac{2\pi x^2}{M}-\int\frac{\pi x^3}{M}=\left(\frac{2\pi x^3}{3}-\frac{\pi x^4}{4}\right):M=\pi\,\frac{8x^3-3x^4}{3.4}:M.$$

Sed

$$M=\int\pi y^2=\int\pi\,(2x-x^2)=\int 2\pi x-\int\pi x^2=\pi x^2-\frac{\pi x^3}{3}=\pi\,\frac{3x^2-x^3}{3}.$$

Consequenter

$$\frac{1}{M}\int x\partial M=\pi\,\frac{8x^3-3x^4}{3.4}:\pi\,\frac{3x^2-x^3}{3}=\frac{2x-\frac{3}{4}x^2}{3-x}.$$

*d*) Si $M$ *arcum circuli* a fine diametri incipientem denotet usque ad ordinatam abscissæ $a+x$ e centro acceptæ, erit pro distantia centri gravitatis a centro (pag. 229 et 234)

$$\frac{1}{M}\int(a+x)\partial M=\vdash\dashv\frac{1}{M}\int(a+x)(1+y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

quod item, quum sit

$$y=\left(1-(a+x)^2\right)^{\frac{1}{2}},\qquad y'=-(a+x)\left(1-(a+x)^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

atque

$$1+y'^2=\frac{(a+x)^2+1-(a+x)^2}{1-(a+x)^2}=\left(1-(a+x)^2\right)^{-1},$$

erit

$$\vdash\dashv\frac{1}{M}\int(a+x)\left(1-(a+x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\vdash\dashv\frac{1}{M}\left(1-(a+x)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Unde si (ut in *a*) et ab altera parte accipiatur arcus æqualis, totius arcus distantia centri gravitatis a centro erit quarta proportionalis ad totum arcum, chordam et radium, heic $=1$.

*e*) Si $M$ *segmenti circularis* dimidium sit; et distantia centri gravitatis a centro quæratur: erit

$$\frac{1}{M}\int(a+x)\partial M=\vdash\dashv\frac{1}{M}\int(a+x)y=\vdash\dashv\frac{1}{M}\int(a+x)\left(1-(a+x)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\vdash\dashv\frac{1}{3M}\left(1-(a+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}=\vdash\dashv\frac{1}{3M}y^3,$$

æquale distantiæ centri gravitatis a centro pro segmento toto quoque, ut in *a)*.

*f)* Pro *sphaerae superficie* est (pro abscissa et distantia centri gravitatis a fine diametri)

$$\frac{1}{M}\int x\partial M = \frac{1}{M}\int 2\pi x(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

nam heic (pag. 229)

$$\partial M = 2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$y=(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y'=(1-x)(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

atque

$$1+y'^2 = 1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2} = \frac{1}{2x-x^2},$$

adeoque

$$2\pi yx(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = 2\pi x\frac{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi x;$$

et (per pag. 229)

$$\frac{1}{M}\int 2\pi x = \pi x^2 : \int 2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = \pi x^2 : \int 2\pi = \frac{\pi x^2}{2\pi x} = \frac{x}{2}.$$

*g) Superficies per revolutionem circa axem generata* $\int 2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ *est aequalis lineae, cuius revolutione generata est, per distantiam ab axe centri gravitudinis lineae multiplicatae.*

Nam linea est $=\int(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$, distantia centri gravitatis lineæ ab axe est

$$\int y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} : \int(1+y'^2)^{\frac{1}{2}};$$

nam heic

$$\partial M = \int(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

et distantia ab axe centri gravitatis est (pag. 263) $= \frac{1}{M}\int y\partial M$.

Est autem peripheria (radii distantiæ centri gravitatis æqualis)

$$= 2\pi\int y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} : \int(1+y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

et hoc per lineam ipsam $=\int(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ multiplicatum est $=\int 2\pi y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$, æquale superficiei.

*Soliditas eadem revolutione generata est aequalis areae per peripheriam centro gravitatis areae descriptam multiplicatae.*

Nam soliditas est $\int \pi y^2$, et hæc est

$$=\frac{2\pi\int\frac{1}{2}y^2}{\int y}\int y;$$

atque centri gravitatis areæ distantia ab axe erat

$$=\frac{\int\frac{1}{2}y^2}{M}=\frac{\int\frac{1}{2}y^2}{\int y},$$

et peripheria radii huic æqualis est

$$=2\pi\frac{\int\frac{1}{2}y^2}{\int y},$$

quod per aream æqualem $\int y$ multiplicatum est $=\int \pi y^2$.

XII. Si vero $M$ in plani $P$ plagam aliquam cadens, circa rectam in $P$ cadentem ut motus axem, vi gravitatis descendat; punctum illud, cuius distantia $q$ ab axe æquatur longitudini penduli simplicis cum dicto composito isochroni, *centrum oscillationis* audit. Si tantum geometrice pro ipso $M$ ubique æque denso et æque gravi consideretur, prodit $q$, si quodvis $z$ (in XI) per distantiæ (heic ab axe motus) non primam, ut ibi, sed secundam potentiam multiplicetur, et summæ productorum eiusmodi limes per $MD$ dividatur, $D$ distantiam centri gravitatis ab axe denotante; nempe

$$q=\frac{\int x^2 \partial M}{MD}$$

pro eo, quod ibi $a+x$ erat, heic distantia ab axe $x$ dicta.

Si ex. gr. $M$ rectam $x$ denotet, extremitate una fixa oscillantem, erit

$$D = \frac{x}{2}, \text{ et } \partial M = 1, \text{ atque } \int x^2 \partial M = \frac{x^3}{3},$$

adeoque

$$q = \frac{\int x^2 \partial M}{DM} = \frac{x^3}{3} : \frac{x}{2} . x = \frac{2}{3} x \cdot$$

et pendulum simplex longitudinis $\frac{2}{3} x$ ipsi $x$ circa finem oscillanti isochronum est.

(Fig. 28). Si nimirum (iuxta ingeniosum JOHANNIS BERNOULLII conceptum) rectæ rigidæ et gravitatis expertis, extremitate superiore fixæ, non verticaliter sitæ certis punctis affigi certa pondera $\alpha$, $\beta$, . . (ut res simplicior sit, instar puncti considerata) concipiantur: descendent massæ hoc pacto connexæ, motu quidem accelerato, nam undevis descenderent, donec centrum gravitatis in verticalem pervenerit; at minus accelerato, quam si sola massa $\alpha$ ad distantiam $a$ posita esset, et magis accelerato, quam si sola massa $\beta$ ad distantiam $b$ esset.

Quasvis massarum $\alpha$, $\beta$, . . . tamen eadem vis gravitatis sollicitat verticaliter deorsum, quod BERNOULLIUS per *massas gravitate* (hac vel alia) *animari* exprimit: at cuivis massarum $\alpha$, $\beta$, . . . certam certa gravitate animatam substituit, et omnibus prioribus annihilatis, omnes substitutas gravitatibus propriis animatas eidem puncto * affigendo, novum pendulum simplex fictitium construit, cuiuscunque longitudinis datæ priori composito isochronum; et inter omnia talia pendula simplicia priori isochrona illud quærit, quod plane gravitate, quæ ad terram est, animatur.

Ponatur gravitas ista, quæ ad terram est, $= 1$, ad quam reliquæ gravitates referantur. Notum est, spatium, quod verticaliter quævis massarum $\alpha$, $\beta$, . . . sub $t$ vi gravitatis describeret, esse idem; atque decomponendo, virium una a puncto suspensionis elisa, alteram esse vim $w$, quæ punctum quodvis in arcu percurrendo urget; atque hanc esse vi gravitatis per sinum anguli $u$ (pro radio 1 acceptum) multiplicatæ æqualem (pro quovis angulo $u$).

Ita etiam notum est, pro temporis oscillatione eodem esse longitudines pendulorum simplicium, uti gravitates. Hinc si massa ad $\mu$-tuplam distantiam $\mu$-tupla gravitate animetur, pendula simplicia, quantavis fuerit massa eadem gravitate animata, isochrona erunt.

Si iam massam $\alpha$ tollere libeat, et ad distantiam $q$ massa $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ gravitate $\frac{q}{a}$ animata ponatur; erit vis illa, qua gravitas $\frac{q}{a}$ massam $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ urget, ad vim illam, qua gravitas $= 1$ massarum $\alpha, \beta, \ldots$ quamlibet urget, uti $\frac{q}{a}$ ad 1, id est uti $q$ ad $a$, adeoque uti arcus simul per fines rectarum $q$ et $a$ describendi; momentaque nempe producta e distantiis a puncto fixo $k$ in massas per ipsarum vires multiplicatas erunt æqualia; nempe si vis, qua urgetur $\alpha$, dicatur $w$, momentum ipsius $\alpha$ erit $\alpha a w$, momentum massæ $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ vero erit

$$\frac{\alpha a^2}{q^2} \cdot \frac{qw}{a} \cdot q = \alpha a w.$$

Sublato itaque $\alpha$, massa $\frac{\alpha a^2}{q^2}$ gravitate $\frac{q}{a}$ animata ad distantiam $q$ a puncto suspensionis posita massarum reliquarum motum non magis promovebit aut retardabit, quam $\alpha$ ad distantiam $a$.

Sublato $\beta$ etiam massa $\frac{\beta b^2}{q^2}$ gravitate $\frac{q}{b}$ animata ad distantiam $q$ posita, idem in motu penduli, quod antea $\beta$, præstabit. Eodem modo sublatis $\alpha, \beta, \ldots$ omnibus, et ad distantiam $q$ positis massis $\frac{\alpha a^2}{q^2}, \frac{\beta b^2}{q^2}, \ldots$ gravitatibus $\frac{q}{a}, \frac{q}{b}, \ldots$ animatis, orietur novum pendulum simplex longitudinis $q$, massis dictis, gravitatibus propriis animatis ad imum appensis, priori composito isochronum.

Si unitatis massarum, gravitate ad terram $= 1$ posita, pondus sit $P$ (ex. gr. unius libræ), et $P = 1$ ponatur, massæ $\mu$ gravitate $\gamma$ animatæ pondus erit $\mu\gamma P$, sive $\mu\gamma$ (pro $P = 1$ posito); si ex. gr. $\mu$ quoad unitatem massarum expressum sit $\frac{2}{3}$, et $\gamma$ quoad gravitatum unitatem sit $= 4$, erit pondus $\frac{2 \cdot 4}{3}$, id est $\frac{8}{3}$ librarum.

Sint massæ plures $\mu, \mu', \ldots$ gravitatibus $\gamma, \gamma', \ldots$ animatæ: erit summa ponderum $= \mu\gamma + \mu'\gamma' + \ldots$; et si omnes hæ massæ gravitate $Q$ animari concipiantur, pondus summæ earum erit $(\mu + \mu' + \ldots) Q$; atque pondus hoc priori summæ ponderum æquale erit, si

$$Q = \frac{\mu\gamma + \mu'\gamma' + \ldots}{\mu + \mu' + \ldots},$$

nam ex hoc sequitur

$$Q(\mu + \mu' + \ldots) = \mu\gamma + \mu'\gamma' + \ldots$$

In hoc casu itaque pondera massarum ad idem punctum * positarum gravitatibus propriis animatarum erunt

$$\frac{\alpha a^2}{q^2} \cdot \frac{q}{a} + \frac{\beta b^2}{q^2} \cdot \frac{q}{b} + \ldots$$

nempe massæ $\frac{\alpha a^2}{q^2}, \frac{\beta b^2}{q^2}, \ldots$ gravitatibus $\frac{q}{a}, \frac{q}{b}, \ldots$ animantur; unde $Q$ prodibit dividendo, ut prius, summam ponderum per summam massarum; nempe

$$Q = \frac{\alpha a + \beta b + \ldots}{q} : \frac{\alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots}{q^2} = \frac{q(\alpha a + \beta b + \ldots)}{\alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots};$$

atque si ex omnibus quibuslibet valoribus ipsius $q$ is quæratur, pro quo fit $Q = 1$, nempe gravitati ad terram æqualis, erit

$$q = \frac{\alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots}{\alpha a + \beta b + \ldots} = \frac{\alpha a^2 + \beta b^2 + \ldots}{MD},$$

si $\alpha + \beta + \ldots$ dicatur $M$, et $D$ sit distantia centri gravitatis ab axe motus, nam (XI.) est

$$\alpha a + \beta b + \ldots = MD.$$

Erit autem etiam pro hoc $q$ (quum pro quolibet sit) pendulum priori composito isochronum; atque nunc massa penduli simplicis gravitate 1 animatur, nec massa influit.

*Centrum percussionis* ipsius $M$, quo feriente omnis partis huius celeritas 0 fieri potest, non supponit gravitatem; recta cum massis $\alpha, \beta, \ldots$ mota circa $k$, sit $\gamma a$ celeritas finalis ipsius $\alpha$, dum istud $M$ in puncto * aliquam massam ferit, $\gamma$ coefficientem aliquem denotante; erit celeritas tunc $\gamma b$ ipsius $\beta$, ita cuiusvis reliquarum celeritas erit $\gamma$ per distantiam a $k$ multiplicata. Quantitates actionis autem erunt $\alpha\gamma a . a$, $\beta\gamma b . b, \ldots$, nempe per distantias sunt vires multiplicandæ. Si iam vires æquales ipsis $\alpha\gamma a$, $\beta\gamma b$, ... ad distantiam $q$ ponantur directione opposita, et $q$ tale sit, ut

$$(\alpha\gamma a+\beta\gamma b+\ldots)\ q=\alpha\gamma a^2+\beta\gamma b^2+\ldots:$$

tum omnis actio elidetur; erit autem

$$q=\frac{\alpha a^2+\beta b^2+\ldots}{\alpha a+\beta b+\ldots},$$

ubi denominatori pariter substitui potest $MD$. Itaque formula eadem prodit; at centrum percussionis est idem in vacuo, aëre, aqua &c. Centrum oscillationis, si rectæ dictæ massæ densitatis diversæ affigantur, mutatur in diversæ gravitatis specificæ fluidis; econtra in eodem fluido centrum percussionis a situ percussi dependet, quum pro hoc casu centrum oscillationis maneat.

## §. 37.

Plura adferre, quum nonnisi primaria fundamenta, e quibus reliqua promanant, exponere propositum sit, supervacuum est; attamen in §. 36. supposita demonstrare superest; et tum paucis adhuc, intellectu facilioribus, campum visionis in gratiam Tyronum augere licebit.

I. Sit $u=A(x)$, atque $A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})$ dicatur, ut supra, $\dot{u}$; erit

$$\dot{u}=A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})=q-(q-\dot{u}),$$

si $A(m\dot{x})$ generaliter $q$ dicatur, sensu pag. (213), et $A((m-1)\dot{x})=q-\dot{u}$; atque si *quaeratur differentiale derivataque functionis:*

$$u^k=(A(x))^k,$$

quod dicatur $A_1(x)$; erit terminus generalis seriei ex $A_1(x)$ derivatæ

$$A_1(m\dot{x})-A_1((m-1)\dot{x})=q^k-(q-\dot{u})^k=$$
$$=q^k-\left(q^k-kq^{k-1}\dot{u}+\frac{k(k-1)}{2}q^{k-2}\dot{u}^2-\ldots\right),$$

quod item est

$$=kq^{k-1}\dot{u}+s,$$

si summa aut limes summæ terminorum post $kq^{k-1}\dot{u}$ sequentium $s$ dicatur.

Sed

$$\frac{kq^{k-1}\dot{u}}{kq^{k-1}\dot{u}+s} \frown 1,$$

si $n \frown \infty$; nam (pag. 163) in formula binomiali pro exponente $k$, si $k \gtrdot 1$, demonstratum (pag. 163) est, exponentem coefficientis nunquam $k$ maiorem esse; et pro $k$, sive positivo sive negativo, unitate minore esse quemvis exponentem coefficientis $\lessdot 1$.

Hinc quum duo casus sint; nempe series binomialis aut terminata aut infinita est: terminatur pro $k$ positivo et integro; si non terminetur, tum exponens coefficientis quivis aut $\lessdot k$ aut $\lessdot 1$ est.

Consideretur prius ubi series infinita est et exponentium coefficientis maximus $k$ est. Exponens seriei a $kq^{k-1}\dot{u}$ incipiendo semper fractio vera pro terminis sequentibus esse poterit; nempe $n$ ita augeri potest pro dato quovis $\omega$, ut $\dot{u} \lessdot \omega$, adeoque $\dot{u} \lessdot \frac{q}{k}$ et $\frac{k\dot{u}}{q} \lessdot 1$ fiat; est autem quivis seriei exponens $\frac{\dot{u}}{q}$ per exponentem coefficientis multiplicatus adeoque $\lessdot \frac{k\dot{u}}{q}$ est.

Erit igitur, si $kq^{k-1}\dot{u}$ dicatur $K$, et limes summæ terminorum post $K$ sequentium (etsi omnes positivi essent) $s$ dicatur, per (pag. 151)

$$s \lessdot \frac{(k-1)K\dot{u}}{2q} : \left(1-\frac{k\dot{u}}{q}\right),$$

nempe terminus post $K$ sequens est $\frac{(k-1)K\dot{u}}{2q}$; itaque

$$s \lessdot \frac{(k-1)K\dot{u}}{2(q-k\dot{u})},$$

et

$$\frac{s}{K} \lessdot \frac{(k-1)K\dot{u}}{2(q-k\dot{u})K},$$

id est

$$\frac{s}{K} \lessdot \frac{(k-1)\dot{u}}{2q-2k\dot{u}},$$

quod $\frown 0$, si $\dot{u}$ quovis dabili minus fieri queat.

Unde per (pag. 93) $\frac{K}{K+s} \frown 1$.

Consequenter

$$\frac{k(A(m\dot{x}))^{k-1}\dot{u}}{A_1(m\dot{x})-A_1(m-1)\dot{x})} \frown 1,$$

id est differentiale verum, sive terminus generalis seriei ex $A_1(x)=(A(x))^k=u^k$ derivatæ, æquipollet ipsi $k(A(m\dot{x}))^{k-1}$; estque $n$ ponendo more consueto pro $m$

$$\mathrm{d}A_1(x)=k(A(x))^{k-1}\dot{u},$$

id est $ku^{k-1}\dot{u}$ *est differentiale* (sensu stricto pag. 217), *et* $ku^{k-1}$ *derivata ipsius* $u^k$, quoad $u$.

Idem etiam ad integrum positivum $k>1$, applicari potest; nempe tum quoque exponens seriei quilibet $\lessdot \frac{k\dot{u}}{q} \lessdot 1$ fieri potest, atque ibi $s$ adhuc minus est, quam si series geometrica exponentis $\frac{k\dot{u}}{q}$ in infinitum extendatur.

Si vero $k \lessdot 1$, sive positivum sive negativum sit, *exponens coefficientis* ubique unitate minus erit, adeoque exponens seriei quilibet $\lessdot \frac{\dot{u}}{q}$ erit; atque tum in

$$\frac{s}{K} \lessdot \frac{(k-1)\dot{u}}{2q-2k\dot{u}}$$

erit, si $k$ positivum sit, $k-1 \lessdot 1$, si vero $k$ negativum sit, $k-1 \lessdot 2$, et pariter in utroque casu patet, ut prius, quod $\frac{(k-1)\dot{u}}{2q-2k\dot{u}} \frown 0$.

Unde reliqua fluunt; nempe per (pag. 225):

1. Si $\dot{u} \doteq a(x)\dot{x}$, hoc ipsi $\dot{u}$ substitui potest, ut sit $ku^{k-1}a(x)\dot{x}$ differentiale et $ku^{k-1}a(x)$ derivata quoad $x$ ipsius $u^k$. Ex. gr. pro $u=\alpha-\alpha x$ atque $\alpha$ constante posita

$$\partial(\alpha - \alpha x)^k = -\alpha k(\alpha - \alpha x)^{k-1}\dot{x},$$

et derivata quoad $x$

$$\partial(\alpha - \alpha x)^k = -\alpha k(\alpha - \alpha x)^{k-1}.$$

2. Dari autem tale $n$, idem pro omnibus $q$ pro dato quovis $N$ et $z$, ut (pag. 214) poscitur, in quovis casu patet, si demonstretur, pro quovis $q$ dari tale aliquod $n$, atque id pro eodem $q$ crescente $n$ adhuc fortius valere.

Generaliter si superius

$$A(q) - A(q - \dot{u}) = a(q)\dot{u} + s$$

sit, atque

$$\frac{a(q)\dot{u}}{a(q)\dot{u} + s} \sim 1,$$

id est pro $N$ utvis magno, manente $q$, possit $n$ ita accipi, ut

$$\frac{a(q)\dot{u} - (a(q)\dot{u} + s)}{a(q)\dot{u} + s}, \text{ id est } \frac{-s}{a(q)\dot{u} + s} < \frac{1}{N}$$

sit; tum

$$\frac{a(q)\dot{u} + s}{s} > N,$$

adeoque

$$\frac{a(q)\dot{u}}{s} > N - 1,$$

pro casu, si $a(q)\dot{u}$ et $s$ utrumque positivum aut utrumque negativum est, si vero opposita sint, tum

$$\frac{a(q)\dot{u}}{s} > N + 1.$$

Si iam expressiones pro quovis $n$ eædem maneant, sintque in quovis termino ipsius $s$ literæ puncto insignitæ una plures, eædem aut diversæ quoque, inter quas tamen $\dot{u}$ adsit; atque crescente priore $n$, ex $\dot{u}$ fiat $\frac{\dot{u}}{\nu}$ (pro $\nu > 1$), et per hoc quævis litera puncto insignita dividatur per quantitatem unitate maiorem; quivis terminus ipsius $s$ per ipso $\nu$ maius dividetur; sit $b > 1$ minimum illorum, (saltem quo nullum est minus) per quæ terminus aliquis ipsius $s$ dividitur; manifesto, si ex $s$ fieret $\frac{s}{p}$, ex $\frac{a(q)\dot{u}}{s}$ fieret $\frac{a(q)p\dot{u}}{\nu s}$, quod priore valore maius est; reipsa autem $s$ per ipso $p$ maius dividitur, adeoque valor adhuc maior est. Consequenter crescente $n$, tanto fortius est novum $\frac{a(q)\dot{u}}{s} \triangleright N-1$, si ex. gr. tam $a(q)\dot{u}$ quam $s$ positivum sit; et si opposita sint, tum $\frac{a(q)\dot{u}}{s} \triangleright N+1$; adeoque in casu utroque est $\frac{a(q)\dot{u}+s}{s} \triangleright N$; et hinc $\frac{s}{a(q)\dot{u}+s} \triangleleft \frac{1}{N}$, sive

$$\frac{a(q)\dot{u}-a(q)\dot{u}-s}{a(q)\dot{u}+s} \triangleleft \frac{1}{N}.$$

Attamen pro casu antea relato valorem quoque talis $n$, eiusdem (dato $z$ et $N$) pro omnibus $q$, exhibere Tyronibus supervacuum non erit. Consideretur prius casus simplicior, nempe $x^k$, pro $u=x$: est id, quod antea $a(q)\dot{u}$ erat, heic $kq^{k-1}\dot{x}$, dicaturque hoc $K$, ut supra. Erit, ut ibidem, $s \triangleleft \frac{(k-1)K\dot{x}}{2q-2k\dot{x}}$, idest $\frac{x}{n}$ ponendo pro $\dot{x}$, erit $s \triangleleft \frac{K(k-1)x}{2qn-2kx}$; atque ipsi $n$ substituatur $\frac{((N+1)(k-1)+2k)x}{2q}$, posito (sed statim demonstrando) dato quolibet maius tale $N$ accipi posse, ut hic valor integer positivus sit, per quem variabilis absoluta dividitur, atque sit $\triangleright \frac{kx}{q}$, ut exponens seriei, ut supra, $\frac{k\dot{x}}{q} \triangleleft 1$ sit; erit

$$s \triangleleft K(k-1) : \frac{2q((N+1)(k-1)+2k)}{2q} - 2k;$$

idest

$$s \triangleleft \frac{K(k-1)}{(N+1)(k-1)+2k-2k},$$

et

$$s \triangleleft \frac{K}{N+1};$$

unde

$$K \triangleright (N+1)s,$$

atque etsi $K$ et $s$ opposita sint, $s$ ex $K$ nonnisi unum $s$ delendo, manet

$$K+s \triangleright Ns,$$

consequenter

$$\frac{-s}{K+s} \lessdot \frac{1}{N}.$$

Quod vero ipsum $N$ quovis dato maius ita eligere liceat, ut $n$ dato quovis maius positivum sit, patet sic.

Si $\alpha \gtrdot \beta$ sit, est pro $\mu$ positivo et $>1$

$$\mu\alpha-\beta \gtrdot \alpha-\beta.$$

Nam $\alpha$ et $\mu\alpha$ tunc aut utrumque positivum aut utrumque negativum est, atque erit, pro $\beta$ et $\omega$ aut utroque positivo aut utroque negativo:

$$\alpha=\beta+\omega, \text{ aut } \alpha=-\beta-\omega.$$

In casu primo est

$$\mu\alpha-\beta=\mu\beta+\mu\omega-\beta=\mu\omega+(\mu-1)\beta$$

et

$$\alpha-\beta=\omega,$$

quod est $\lessdot \mu\omega+\beta(\mu-1)$; nam $\mu-1$ ita $\mu$ est positivum, atque $\omega$, $\beta$ est aut utrumque positivum aut utrumque negativum. In altero casu autem est

$$\mu\alpha-\beta=-\mu\beta-\mu\omega-\beta=-\mu\omega-(\mu+1)\beta,$$

et

$$\alpha-\beta=-\omega-2\beta,$$

quod item est $\lessdot -\mu\omega-(\mu+1)\beta$; nam

$$\mu\omega \gtrdot \omega, \quad \text{et} \quad (\mu+1)\beta \gtrdot 2\beta$$

quia $\mu>1$.

Multiplicetur iam $n$ per $\mu$: erit

$$\frac{K(k-1)x}{2qn-2kx} \gtrdot \frac{K(k-1)x}{2q\mu n-2kx},$$

si $2qn \gtrdot 2kx$; nam denominator prioris est minor per præcedentia.

Si igitur $2qn \gtrdot 2kx$, ac superius $s \lessdot \frac{K(k-1)x}{2\mu qn-2kx}$ et hoc erit $\lessdot \frac{K}{N+1}$, et quodvis tale $s \lessdot \frac{K(k-1)x}{2qn-2kx}$ et tanto fortius $\lessdot \frac{K}{N+1}$; nam denominator, ubi $\mu$ est, maior adeoque quotus minor est. Quærendum itaque tantum maximum eorum $n$ erit, quæ pro quopiam $q$ requiruntur, ut idem omni $q$ satisfaciat; nempe illi $q$ quoque inserviente maiore $n$, quod minoris $n$ indigeret.

Ut $2qn \triangleright 2kx$ sit, sumatur prius

$$v=(k-1)(N+1),$$

unde

$$N=\frac{v}{k-1}-1,$$

atque accipiatur $v \triangleright 5k$ vel $v=5k$; substituendo hunc valorem ipsius $N$ in valore superiore ipsius $n$, erit

$$2qn=\frac{(v-(k-1)+(k-1))(k-1)x}{(k-1)}+2kx=vx+2kx,$$

quod, si $v=\pm 5k$ aut $v \triangleright \pm 5k$ sit, est $\triangleright 2kx$, nempe

$$\pm 5k+2k \triangleright 2k,$$

sive opposita sint $v$ et $k$ sive non.

Itaque si tale $2qn=(v+2k)x$ sit superius $\alpha$, et $2kx$ sit $\beta$, de $\alpha-\beta$ et $\mu\alpha-\beta$ dicta applicari poterunt et $\frac{K(k-1)x}{2qn-2kx}$ decrescet, crescente $n$.

Poterit autem $n$ utvis magnum accipi, adeoque etiam tantum, ut exponens seriei $\triangleleft 1$ sit $\left(\text{nempe hic } \frac{kx}{nq} \text{ fit} \triangleleft 1, \text{ si } n>\frac{kx}{q}\right)$. Nam ex

$$2qn=(v+2k)x$$

est

$$n=\frac{(v+2k)x}{2q},$$

atque pro hoc $n$ est

$$v=\frac{2qn}{x}-2k;$$

sit $n'$ prius $n$ pro $v=5k$; pro novo $n=\mu n'$ erit

$$v=\frac{2q\mu n'-2kx}{x};$$

nam substituendo in $\frac{(v+2k)x}{2q}$ erit

$$\frac{(2q\mu n' - 2kx + 2kx)x}{2qx} = \mu n'.$$

Crescit vero crescente $n$ etiam

$$N = \frac{v}{k-1} - 1 = \frac{2q\mu n' - 2kx}{x(k-1)} - 1;$$

nam hoc est $> \frac{2qn' - 2kx}{x(k-1)} - 1$, qui valor prioris $N$ est pro $v$ priore, imo dato quovis maius esse potest; si nempe accipiatur

$$\mu = \frac{N'x(k-1) + x(k-1) + 2kx}{2qn'},$$

substituendo patet $N'$ prodire. Si valor ipsius $\mu$ negative prodiret, ponendo oppositum eius positivum erit.

Ut vero $n$ integer prodeat, $\mu$ ita eligi potest, ut $\mu n'$ integer sit; atque si prius $v$ tale est, ut

$$N = \frac{v-(k-1)}{k-1}$$

daret

$$n = \frac{(v+2k)x}{2q}$$

negativum; erit

$$-N = \frac{v-(k-1)}{-(k-1)},$$

atque in valore superiore ipsius $n$ ponendo $-(N+1)$ pro $N+1$ erit

$$2qn = \frac{(v-(k-1)+(k-1))(k-1)x}{-(k-1)} + 2kx = -vx + 2kx,$$

erat vero $v$ negativum, ut $v+2k$ negativum sit, quia $v > 2k$, unde $n = -\frac{(v-2k)x}{2q}$ positivum est. Denique valor ipsius $n$ pro omni $q$, quod non est $< zx$ (pag. 214), idem reperitur sic. Sit $zx = q'$, quodvis aliud $q$ est $> zx$, sit pro $r > 1$

$$z = \frac{1}{r},$$

sitque $q$ aliquod quodvis$=\frac{x}{r'}$; est $r > r'$, sitque $r = r''r'$; erit

$$K(k-1)x\colon \frac{2x}{r'} \cdot \frac{(N+1)(k-1)x+2kx}{\frac{2x}{r'}} - 2kx = \frac{K(k-1)x}{2qn-2kx} = \frac{K}{N+1} < \frac{K}{N};$$

si vero pro $r'$ ponatur $r''r'$ in denominatore infimo divisoris, denominator ipsius $K(k-1)$ manebit $2qr''n-2kx$. Consequenter si pro $n$ ponatur valor

$$((N+1)(k-1)x+2kx)\colon \frac{2x}{r''r'} = ((N+1)(k-1)x,+2kx)\colon 2q'$$

idem et cuivis $q$ satisfaciat.

Idem ad $u = A(x)$ applicatur modo sequente. Sit pro certo $q$ (pag. 214

$$A(q) - A(q-\dot{x}) = \dot{u} = \frac{u}{n''},$$

id est pro certo $n$, per quem variabilis absoluta $x$ dividitur, cum qua $u$ in dependentia simultanea (pag. 193) est, fiat pro hoc $q$

$$\dot{u} = \frac{u}{n''} \text{ et } n'' > \frac{ku}{q},$$

ut exponens seriei $\frac{k\dot{u}}{q} < 1$ sit, atque etiam $2qn'' > 2ku$ in

$$s < \frac{(k-1)Ku}{2qn''-2ku};$$

ut dicta applicentur. Hoc pacto manifesto tantum $n$ erit ita augendum, ut

$$n'' = \text{ aut } > \frac{((N+1)(k-1)+2k)x}{2q'}$$

sit pro $q' = zx$, et hoc $n''$, adeoque illud $n$, per quod hoc ponitur, idem omnibus satisfaciet.

II. *Quod* $\partial uv = u\partial v + v\partial u$, patet sic. Sit

$$u = A(x), \quad v = B(x);$$

erit seriei ex $uv = A(x)\ B(x)$ derivatæ terminus generalis

$$A(m\dot{x})\,B(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})\,B((m-1)\dot{x}) = A(q)\,B(q) - (A(q)-\dot{u})(B(q)-\dot{v});$$

nam pro $m\dot{x}$ ut supra $q$ poni potest, atque

ita
$$A((m-1)\dot{x}) = A(m\dot{x}) - (A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})) = A(q) - \dot{u},$$
$$B((m-1)\dot{x}) = B(q) - \dot{v}.$$

Consequenter terminus generalis seu differentiale verum est

$$A(q)\,B(q) - A(q)\,B(q) + B(q)\,\dot{u} + A(q)\,\dot{v} - \dot{u}\dot{v} = B(q)\,\dot{u} + A(q)\,\dot{v} - \dot{u}\dot{v}.$$

Sed
$$\frac{B(q)\,\dot{u} + A(q)\,\dot{v}}{\dot{u}\dot{v}} = \frac{B(q)}{\dot{v}} + \frac{A(q)}{\dot{u}}$$

quovis dabili maius fieri potest: consequenter

$$\frac{B(q)\,\dot{u} + A(q)\,\dot{v}}{B(q)\,\dot{u} + A(q)\,\dot{v} - \dot{u}\dot{v}} \frown 1,$$

atque $m\dot{x}$ pro $q$ et $n$ pro $m$, atque $u$ pro $A(x)$ et $v$ pro $B(x)$ ponendo, est

$$\partial uv \stackrel{\circ}{=} v\dot{u} + u\dot{v};$$

et si ex. gr.
$$\dot{u} \stackrel{\circ}{=} p\dot{z} \text{ et } \dot{v} \stackrel{\circ}{=} q\dot{z},$$
est quoad $z$
$$\partial(uv) = pv + qu.$$

Ex. gr. si
$$u = ax, \qquad v = (1-x^2)^{\frac{1}{2}},$$
est
$$\partial(uv) = a(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - ax^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si accedat $z$ et $uv$ dicatur $p$: erit

$$\partial(pz) = p\partial z + z\partial p = uv\partial z + zu\partial v + zv\partial u;$$

et ita semper ad uno plura eundo patet regula (pag. 225).

III. Quum de logarithmi differentiali (pag. 238) dictum sit, *differentialia functionum trigonometricarum* quoque adnectere liceat; quum a primis Trigonometriæ elementis imbuto facile intelligi possint. Sit variabilis absoluta, arcus $x$ per $n$ divisus; atque tam differentialia quam derivatæ et integralia, ubi non aliud monitum fuerit, quoad $x$ hic arcum denotantem intelligantur.

1. Si *∂ sin. x quaeratur:* erit item $m\dot{x} = q$, ut antea, et terminus generalis seriei ex sin. $x$ derivatæ est

$$\sin. m\dot{x} - \sin.(m-1)\dot{x} = \sin. q - \sin.(q-\dot{x})$$
$$= \sin. q - \sin. q \cos. \dot{x} + \cos. q \sin. \dot{x}:$$

atque

$$\frac{\dot{x}\cos. q}{\sin. q - \sin. q\cos.\dot{x} + \cos. q \sin.\dot{x}} \sim 1.$$

Nam

$$\sin. q - \sin. q\cos.\dot{x} = \sin. q\,(1-\cos.\dot{x}) = \sin. q\left(1-(1-\sin.^2\dot{x})^{\frac{1}{2}}\right)$$

quum $\cos.\dot{x} = \sqrt{1-\sin.^2\dot{x}}$ omnia pro radio 1 intelligendo.

Est autem, quum $\sin.\dot{x} < 1$ sit

$$(1-\sin.^2\dot{x})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\sin.^2\dot{x} - \frac{1}{8}\sin.\dot{x}^4 - \frac{1}{16}\sin.^6\dot{x} - \dots,$$

atque si limes summæ omnium post $-\frac{1}{2}$ (sin. $\dot{x}$) sequentium $s$ dicatur, pro dato quovis $N$ fieri $-\frac{1}{2}\sin.^2\dot{x} > Ns$ potest; adeoque $(1-\sin.^2\dot{x})^{\frac{1}{2}}$ per $1-u\sin.^2\dot{x}$ exprimi potest, ipso $u$ quantitatem aliquam inter 0 et 1 denotante; eritque

$$1-\cos.\dot{x} = 1-(1-u\sin.^2\dot{x}) = u\sin.^2\dot{x},$$

atque

$$\sin. q - \sin. q\cos.\dot{x} = u\sin. q\sin.^2\dot{x}.$$

Itaque

$$\frac{\dot{x}\cos. q}{\sin. q - \sin. q\cos.\dot{x} + \cos. q\sin.\dot{x}} = \frac{\dot{x}\cos. q}{u\sin. q\sin.^2\dot{x} + \cos. q\sin.\dot{x}}$$

quod tendit ad 1 (pag. 93); nam

$$\frac{\dot{x}}{\sin.\dot{x}} \sim 1, \quad \frac{\cos. q}{\cos. q} = 1,$$

atque $\frac{\cos. q}{u \sin. q \sin. \dot{x}}$ dato quovis maius fieri potest; nam $\sin. \dot{x}$ quovis dato minus fieri potest, $u$ vero est $\lessdot 1$, adeoque $u \sin. q \sin. \dot{x} \frown 0$ manente dividendo $\cos. q$.

Consequenter

$$\frac{\dot{x} \cos. m\dot{x}}{\sin. m\dot{x} - \sin. (m-1)\dot{x}} - 1 \lessdot \frac{1}{N}$$

fieri pro dato quovis $N$ potest; adeoque $\dot{x} \cos. (m\dot{x})$ termino generali seriei ex $\sin. x$ derivatæ æquipollet; adeoque iuxta sæpius dicta $\dot{x} \cos. x$ est differentiale ipsius $\sin. x$, et quidem sensu stricto, quum forma quoque requisita gaudeat; et $\cos. x$ derivata quoad $x$ ipsius $\sin. x$ est.

2. *Est*

$$d \cos. x = -\dot{x} \sin. x \text{ et } \partial \cos. x = -\sin. x.$$

Nam terminus generalis seriei e $\cos. x$ derivatæ est

$$\begin{aligned} \cos. q - \cos. (q - \dot{x}) &= \cos. q - \cos. q \cos. \dot{x} - \sin. q \sin. \dot{x} \\ &= u \cos. q \sin.^2 \dot{x} - \sin. q \sin. \dot{x}, \end{aligned}$$

per præcedentia $u \sin.^2 \dot{x}$ pro $1 - \cos. \dot{x}$ ponendo; atque

$$\frac{-\dot{x} . \sin. q}{u \cos. q \sin.^2 \dot{x} - \sin. q \sin. \dot{x}} \frown 1,$$

nam

$$\frac{\dot{x}}{\sin. \dot{x}} \frown 1, \; \frac{\sin. q}{\sin. q} = 1, \text{ adeoque } \frac{\dot{x} \sin. q}{\sin. q \sin. \dot{x}} \frown 1,$$

atque etiam

$$\frac{\sin. q \sin. \dot{x}}{u \cos. q \sin.^2 \dot{x}} = \frac{\sin. q}{u \cos. q \sin. \dot{x}}$$

dato quovis maius fieri potest; nam $\frac{\sin. q}{\cos. q}$ manet, $u \lessdot 1$, atque $\sin. \dot{x} \frown 0$.

3. *Est*

$$d \operatorname{tang}. x = \frac{\dot{x}}{\cos.^2 x}, \quad \partial \operatorname{tang}. x = \frac{1}{\cos.^2 x}.$$

Nam terminus generalis seriei e $\operatorname{tang}. x$ derivatæ est

$$\text{tang.}\,q - \text{tang.}\,(q-\dot{x}) = \frac{\sin.\,q}{\cos.\,q} - \frac{\sin.\,(q-\dot{x})}{\cos.\,(q-\dot{x})}$$

$$= \frac{\sin.\,q}{\cos.\,q} - \frac{\sin.\,q\cos.\,\dot{x} - \cos.\,q\sin.\,\dot{x}}{\cos.\,q\cos.\,\dot{x} + \sin.\,q\sin.\,\dot{x}}$$

$$= \frac{\sin.\,q\cos.\,q\cos.\,\dot{x} + \sin.^2 q\sin.\,\dot{x} - \sin.\,q\cos.\,q\cos.\,\dot{x} + \cos.^2 q\sin.\,\dot{x}}{\cos.^2 q\cos.\,\dot{x} + \sin.\,q\cos.\,q\sin.\,\dot{x}}$$

$$= \frac{\sin.\,\dot{x}(\sin.^2 q + \cos.^2 q)}{\cos.^2 q\cos.\,\dot{x} + \sin.\,q\cos.\,q\sin.\,\dot{x}} = \frac{\sin.\,\dot{x}}{\cos.^2 q\cos.\,\dot{x} + \sin.\,q\cos.\,q\sin.\,\dot{x}},$$

nam $\sin.^2 q + \cos.^2 q = 1$; hoc autem per $\dfrac{\dot{x}}{\cos.^2 q}$ divisum $\frown 1$: fit enim quotus

$$\frac{\sin.\,\dot{x}}{\dot{x}}\,\frac{\cos.^2 q}{\cos.^2 q\cos.\,\dot{x} + \cos.\,q\sin.\,q\sin.\,\dot{x}},$$

quod limite 1 gaudet (pag. 93 et 94); nam

$$\frac{\sin.\,\dot{x}}{\dot{x}} \frown 1, \quad \frac{\cos.^2 q}{\cos.^2 q\cos.\,\dot{x}} \frown 1,$$

et $\dfrac{\cos.^2 q\cos.\,\dot{x}}{\cos.\,q\sin.\,q\sin.\,\dot{x}}$ quovis dato maius fieri potest; fiat ex. gr. $\cos.\,\dot{x} > \frac{3}{4}$, crescente $n$ fit cosinus semper maior tendens ad limitem 1, denominator autem $\frown 0$.

Consequenter

$$\partial\,\text{tang.}\,x = \frac{\dot{x}}{\cos.^2 x} \quad \text{et} \quad \partial\,\text{tang.}\,x = \frac{1}{\cos.^2 x}.$$

4. *Est*

$$\partial\cot.\,x = -\frac{\dot{x}}{\sin.^2 \dot{x}} \quad \text{et} \quad \partial\cot.\,x = -\frac{1}{\sin.^2 x}.$$

Nam terminus generalis seriei ex cotg. $x$ derivatæ est

$$\cot.\,q - \cot.\,(q-\dot{x}) = \frac{\cos.\,q}{\sin.\,q} - \frac{\cos.\,q\cos.\,\dot{x} + \sin.\,q\sin.\,\dot{x}}{\sin.\,q\cos.\,\dot{x} - \cos.\,q\sin.\,\dot{x}}$$

$$= \frac{\cos.\,q\sin.\,q\cos.\,\dot{x} - \cos.^2 q\sin.\,\dot{x} - \cos.\,q\sin.\,q\cos.\,\dot{x} - \sin.^2 q\sin.\,\dot{x}}{\sin.^2 q\cos.\,\dot{x} - \sin.\,q\cos.\,q\sin.\,\dot{x}}$$

$$= \frac{-\sin.\,\dot{x}}{\sin.^2 q\cos.\,\dot{x} - \sin.\,q\cos.\,q\sin.\,\dot{x}},$$

cui item (ut antea) æquipollet $\frac{-\dot{x}}{\sin.^2 q}$; nam prius per posterius dividendo quotus $\frown 1$. Consequenter $-\frac{\dot{x}}{\sin.^2 q}$ differentiale et $-\frac{1}{\sin.^2 q}$ derivata est.

5. Sed differentiale derivataque alicuius functionis trigonometricæ quoad aliam quoque sæpius quæritur. Denotentur hic brevitatis caussa, sin. $x$ per $s$, cos. $x$ per $c$, tang. $x$ per $t$, cot. $x$ per $C$, atque literæ eædem puncto insignatæ differentialia denotent.

*Erit quoad* $C$

$$ds = -cs^2\,\dot{C} \text{ et } \mathfrak{d}s = -cs^2.$$

Nam (pag. 283 et 285)

$$\frac{\dot{s}}{c\dot{x}} \frown 1, \text{ et } \dot{C} : \frac{-\dot{x}}{s^2} = \frac{s^2\,\dot{C}}{-\dot{x}} \frown 1;$$

atque hinc

$$\frac{\dot{s}}{c\dot{x}} : \frac{s^2\,\dot{C}}{-\dot{x}} = \frac{\dot{s}}{-cs^2\,\dot{C}} \frown 1.$$

Consequenter $-cs^2\dot{C} \doteq \dot{s}$ et $-cs^2\dot{C}$ differentiale sinus quoad $C$ atque $-cs^2$ derivata est.

Ita reliquarum functionum trigonometricarum differentialia, tam quoad $x$, quam quoad alias earundem reperiuntur.

6. At ex his *arcus quoque differentiale derivataque* quoad functiones trigonometricas eiusdem prodeunt.

Nempe ex

$$\frac{\dot{s}}{c\dot{x}} \frown 1$$

sequitur

$$\frac{c\dot{x}}{\dot{s}} \frown 1 \text{ seu } \dot{x} : \frac{\dot{s}}{c} \frown 1;$$

consequenter $\frac{\dot{s}}{c} \doteq \dot{x}$, et $\frac{\dot{s}}{c}$ differentiale, ac $\frac{1}{c}$ derivata quoad $s$ ipsius $x$ (nempe arcus) est; et hinc

$$\underset{(\text{quoad } s)}{\int} \frac{1}{c} = x,$$

adeoque quum

$$c = (1 - s^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{c} = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}},$$

est

$$\int\limits_{(\text{quoad } s)} (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} = x$$

$=$ arcui; est videlicet differentiale purum (pag. 221), et per theorema binomiale evolvi potest, quum $s$ ex. gr. $= \sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$ accipere liceat, atque tum (per pag. 225) integrari potest.

Simili modo est $\eth x$ (quoad $c$) $= \frac{-\dot{c}}{s}$ et derivata $\frac{-1}{s}$ est. Nam erat

$$\frac{\dot{c}}{-s\dot{x}} \frown 1, \text{ adeoque } \frac{-s\dot{x}}{\dot{c}} \frown 1, \text{ et hinc } \dot{x} : \frac{-\dot{c}}{s} \frown 1.$$

Est porro $\eth x$ (quoad $t$) $= c^2 \dot{t}$ et derivata quoad $t$ est $c^2$. Erat enim

$$t : \frac{\dot{x}}{c^2} \frown 1,$$

et hinc $\frac{c^2 \dot{t}}{\dot{x}}$ seu $\frac{\dot{x}}{c^2 \dot{t}}$ limite 1 gaudet. Consequenter $\dot{x} \doteq \dot{t} c^2$ et $c^2 \dot{t}$ differentiale arcus $x$ atque $c^2$ derivata quoad $t$ est. Est autem

$$(1 + t^2)^{-1} = 1 : 1 + \frac{s^2}{c^2} = 1 : \frac{c^2 + s^2}{c^2} = 1 : \frac{1}{c^2} = c^2,$$

(nempe $c^2 + s^2 = 1$).

Hinc $\int \dot{x}$ seu

$$x = \int\limits_{(\text{quoad } t)} c^2 = \int\limits_{(\text{quoad } t)} (1 + t^2)^{-1};$$

quod per theorema binomiale ut supra, (pag. 243) pro $t^2 < 1$, imo etsi $t^2 = 1$ sit), evolvi atque integrari potest.

7. Singulosque casus considerando patet, tendentias ad limites dictos pro quovis $q$, quo maius $n$ accipitur, et hic eo fortius valere, ut supra.

IV. Sed iuxta superius (pag. 229) promissa, demonstrare superest; quod si arcus ipsi $\dot{x}$ respondens $s$, et chorda eius $c$ dicatur, $\frac{s}{c} \frown 1$, si $n \frown \infty$; et tum differentialia dicta lineæ, superficiei planæ a linea et abscissa ordinataque clausæ nec non tam superficiei quam soliditatis per lineam circa axem revolutam ortæ stabilienda sunt. Ut vero hoc fieri possit, quædam de lineis et partim de superficiebus dicenda sunt.

1. Dum recta cum curva comparatur, per longitudinem curvæ intelligitur limes, ad quem summa chordarum (ab una extremitate curvæ usque ad alteram ita se invicem excipientium, ut cuiusvis finis præter ultimæ finem sit novæ initium) tendit, si chordarum quævis tendit ad o. Si plures quoque rami sint, per cuiusvis longitudinem limes talis intelligitur, et summa limitum erit tota curva ad rectam reducta. Demonstrandum itaque est dari limitem eiusmodi, eumque nonnisi unicum esse, quibusvis modis tendant chordæ singulæ ad limitem o.

Dum superficies curva $C$ cum plano comparatur, intelligitur per superficiem curvam limes sequens. Ponatur triangulum una cum area intellectum ita, ut apices eius in $C$ cadant, et quodvis latus eius sit latus novi trianguli verticem in $C$ habentis, atque cuiusvis trianguli novi hoc pacto prodeuntis lateri novum triangulum, verticem in $C$ nec ullam portionem cum ullo præcedentium communem habens, imponatur, et cuiusvis area tendat ad limitem o. Si iam detur tale rectangulum $\alpha$, ut nequeant triangula modo dicto ita sumi, ut summæ eorum limes sit $> \alpha$, sed possint ita sumi pro dato quovis $\omega$, ut summa eorum ab $\alpha$ minus ipso $\omega$ differat; tum per aream ipsius $C$, dum cum plano comparatur, ipsum $\alpha$ intelligitur; nempe limes summæ triangulorum dictorum, quorum nulla bina quidquam areæ commune habent, et quodvis tendit ad o.

In plano autem qualiscunque figura sit, ad rectangulum eius area reducitur, cui si non terminata, saltem interminata æqualitate sit æqualis, (pag. 26) et quidem ad rectangula altitudinis, aut baseos eiusdem (unitati rectarum æqualis) reducuntur omnia, ut arithmetice clare tractentur, ita solida cuiuscunque superficiei ad parallelepipedum reducuntur, cuius basis, eadem pro omnibus, quadrato æqualis est, cuius latus æquale est unitati rectarum (pag. 27).

2. *Formae curvae* definitio paulo inferius dabitur; sed *concavitatis*, *convexitatis*, *tangentis*, *subtangentis*, *normalis*, *subnormalisque* conceptus hic explicandi veniunt. Sit abscissa $x$ variabilis absoluta.

*Concava* dicitur linea versus $x$, si arcus quilibet in chordæ suæ plagam unam, et abscissa arcui respondens in plagam chordæ alteram cadat; si vero arcus quilibet cum abscissa ei respondente in cordæ plagam eandem cadant, *convexa* audit. Per abscissam arcui respondentem intelligitur pars ipsius $x$, inter ordinatas perpendiculares ab extremitatibus arcus demissas contenta.

Hinc si concava sit, e quovis puncto intermedio arcus ducantur chordæ ad eius extrema, et ex his demittantur ordinatæ ad $x$ perpendiculares, recta fines harum coniungens erit chorda arcus totius, et basis trianguli, quod cum prioribus duabus chordis efficit; caditque hoc triangulum in plagam baseos superiorem, si pars abscissæ arcui respondens inferius sit; atque angulus basi oppositus est $\lessdot 2R$ (per $R$ rectum intelligendo). Est itaque angulus, quem curvæ versus abscissam concavæ chordæ e finibus arcus ad punctum intermedium efficient, $\lessdot 2R$; pariter patet angulum quemvis eiusmodi curvæ versus abscissam convexæ, esse $\gtrdot 2R$ (omnino versus abscissam intelligendo). Potest vero etiam per hoc ipsum definiri curva concava et convexa, quum ex hoc sequatur id, quod in definitione dictum est; possuntque alia criteria quoque dari.

Si lineæ nulla portio recta sit, e talibus portionibus constare debet, quarum cuiusvis aut crescunt ordinatæ aut decrescunt (ad dextram intelligendo). Nam feratur ordinata $y$ ad dextram continuo eundo perpendiculariter ad $x$, atque e fine primi $y$ feratur punctum $\mathfrak{p}$ in dicto $y$, ut sit semper in fine ordinatæ, illi abscissæ respondentis, ad cuius finem tunc dictum $y$ pervenit; $\mathfrak{p}$ in eodem puncto huius $y$ manere sub nullo tempore continuo potest; nam tunc alicui portioni ipsius $x$ recta responderet; itaque $\mathfrak{p}$ aut sursum movetur aliquamdiu, aut deorsum; in casu priore crescentibus, in posteriore decrescentibus ordinatis. Si vero prius sursum moveatur, aut usque ad finem sursum movebitur, aut non; si non, tum datur ultimum temporis punctum $P$ (pag. 20), ante quod quodvis punctum temporis tale est, ut $\mathfrak{p}$ post illud in $y$ sursum motum sit; itaque $P$ tale non est, quia si tale esset, punctum $\mathfrak{p}$ ex eo loco, in quo sub $P$ est, adhuc sursum moveretur: adeoque adhuc ultra $P$ deberet punctum temporis ultimum dictum accipi. Post $P$ itaque $\mathfrak{p}$ sursum non movetur, neque in loco manet; adeoque deorsum movetur. Quod porro continuari posse patet.

Si vero ordinatæ crescant ad dextram: sive concava sive convexa sit curva, angulus, quem $y$ cum chorda e fine eius ad dextram ducta facit, obtusus est. Nam si acutus aut rectus esset, ordinata sequens ad dextram ab altera extremitate chordæ demissa esset priore minor, aut ei æqualis.

3. (Fig. 29). Ad scopum præsentem hic sermo de recta *lineam curvam* in plano sitam *tangenti* est, definitione generali inferius tradenda. Si curvæ detur talis arcus $\mathfrak{ap}$, ut inter hunc et certam rectam $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ in eodem plano sitam ex $\mathfrak{p}$ nulla recta duci possit; *arcum* hunc dicitur $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ *tangere*, imo et *totam curvam*, si aut $\mathfrak{p}$ eius extremum sit, aut detur arcus $\mathfrak{ap}$ talis continuatio $\mathfrak{pb}$, ut inter hanc et continuationem rectæ $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$ nulla recta duci possit. Pars abscissæ autem, quæ ab ordinata ex $\mathfrak{p}$ ad lineam abscissarum perpendiculari usque ad sectionem tangentis et rectæ abscissarum est, dicitur *subtangens* in casu sectionis; si vero sectio non sit, *subtangens infinita* dicitur. *Normalis* autem dicitur recta ex $\mathfrak{p}$ ad tangentem perpendicularis, et pars lineæ abscissarum ab ordinata dicta ipsius $\mathfrak{p}$ usque ad sectionem normalis et lineæ abscissarum dicitur *subnormalis.*

Gaudet vero curva in quovis puncto, recta tangenti.

Sit enim $\mathfrak{apb}$ talis arcus, ut aut totus concavus aut totus convexus, aut $\mathfrak{ap}$ concavus et $\mathfrak{pb}$ convexus sit. Vertatur in casu primo chorda $\mathfrak{ap}$ circa $\mathfrak{p}$ sursum; cadent scilicet arcus chordæque ex $\mathfrak{p}$ incipiendo sequentes omnes supra præcedentes, lineaque abscissarum infra chordam primam et omnes cadet (pag. 288). Erit vero (pag. 20) ultimum aliquod $P$ punctum temporis, intra quod recta mota $\mathfrak{ap}$ semper in aliquam chordam cadit; tum vero in nullam chordam cadere poterit; quia arcus huius chordæ sursum caderet (pag. 288), adeoque adhuc darentur chordæ superius, et $P$ non esset ultimum tale, ut dictum est. Nulla recta autem inter $\mathfrak{a}'\mathfrak{p}$, si recta mota $\mathfrak{ap}$ tunc in $\mathfrak{a'p}$ sit, atque arcum $\mathfrak{ap}$ duci potest; nam si posset, non esset $\mathfrak{a'p}$ ultima, intra quam mota $\mathfrak{ap}$ in aliquam chordam cadit, adeoque ante $P$ esset ultimum illud temporis punctum, intra quod mota $\mathfrak{ap}$ circa $\mathfrak{p}$ semper in chordam cadit.

Sed continuatio quoque rectæ $\mathfrak{a'p}$ tangens arcus $\mathfrak{pb}$ est, si $\mathfrak{apb}$ proprie sic dicta curva sit. Nam si tam $\mathfrak{ap}$ quam $\mathfrak{pb}$ concava, aut utraque convexa sit, et pro casu primo $\mathfrak{pc}$ secet, tanquam continuatio rectæ $\mathfrak{a'p}$, ipsam $\mathfrak{pb}$ in $\mathfrak{c}$; vertatur $\mathfrak{pc}$ sursum circa $\mathfrak{p}$, ut tamen chorda maneat, *perveniendo in* $\mathfrak{pd}$; *vertatur item deorsum* $\mathfrak{a'p}$ *circa* $\mathfrak{p}$, *sed ad angulum* $\sphericalangle\mathfrak{cpd}$, quantumvis exiguum, perveniatque in $\mathfrak{pe}$; erit angulus $\mathfrak{epd}$ (superius intelligendo) $\sphericalangle 2R$: nam prius ex $2R$ subtractus est angulus $\mathfrak{cpd}$, et postea hoc minus additum est. Consequenter initia arcuum ex $\mathfrak{p}$ inter crura anguli duobus rectis minoris cadunt; itaque per definitionem formæ curvæ infra tradendam, curva non erit.

Si vero (Fig. 30) continuatio ipsius $\mathfrak{a'p}$ sit $\mathfrak{pq}$, et possit duci recta $\mathfrak{pr}$ inter $\mathfrak{pq}$ et $\mathfrak{pb}$; tum pariter angulus $\mathfrak{a'pr}$ (deorsum intelligendo) est $\sphericalangle 2R$, et initia arcuum ex $\mathfrak{p}$ inter crura erunt.

Idem patet si arcus uterque convexus sit. Si vero $\mathfrak{ap}$ concavus et $\mathfrak{pb}$ convexus sit, (pro fig. 31) vertatur $\mathfrak{pq}$ usque in $\mathfrak{pr}$, et $\mathfrak{a'p}$ vertatur minus usque in $\mathfrak{pf}$; angulus $\mathfrak{fpr}$ (superius intelligendo) $\sphericalangle 2R$ (ut antea).

Pro (Fig. 32) autem, si nempe $\mathfrak{pc}$ chorda sit continuatio rectæ $\mathfrak{a'p}$; vertatur $\mathfrak{pc}$ circa $\mathfrak{p}$ usque in $\mathfrak{pd}$; erit angulus $\mathfrak{a'pd}$ (deorsum intelligendo) $\sphericalangle 2R$; atque initia arcuum ex $\mathfrak{p}$ item inter crura continebuntur.

4. Crescentibus ordinatis, tangens cum ordinata perpendiculari nonnisi in puncto coincidere potest; et quidem nonnisi ad punctum primum, si concava sit, et ad ultimum, si convexa sit.

Nam *sit prius concava, quævis ordinata sit post primam;* ab ea retrorsum decrescentibus ordinatis, pars ordinatæ continuatæ supra curvam cadens, etsi per quadrantis intervallum circa punctum, quod in curva habet, moveretur, curvam attingere nequit.

In convexa autem nonnisi ultima ordinata tangens esse potest. Nam quævis alia ordinata sit, ducatur ad eam e puncto curvæ antrorsum perpendicularis; ordinata ipsa circa punctum curvæ usque ad hanc perpendicularem mota adhuc curvam non attinget.

5. Sed neque ad ordinatam potest tangens perpendicularis esse crescentibus ordinatis alibi, nisi in concavæ puncto ultimo et primo convexæ.

Nam si in concava tangens ad aliam ordinatam perpendicularis esset: ordinatæ sequentes antrorsum minores essent; in convexa autem retrorsum maiores essent.

6. Tangens cum ordinata non coincidens secat ordinatas omnes. Nam recta rectam secans, secat omnes huic paralellas, omnia iuxta elementa Geometriæ communia supponendo.

Hinc tangentes eiusmodi e finibus cuiusvis arcus secant se invicem. Nempe crescentibus ordinatis tangens ad $\mathfrak{a}$ cadit inter rectæ ordinatæ partem superiorem et arcum $\mathfrak{ap}$ in concava, in convexa autem inter ordinatam ipsam et arcum; tangens ad $\mathfrak{b}$ autem secat rectam ordinatam puncti $\mathfrak{a}$ continuatam; hoc autem fieri nequit, nisi tangens ad $\mathfrak{a}$ inter rectam dictam et arcum cadens secetur.

Facit autem crescentibus ordinatis tangens cum ordinata antrorsum angulum obtusum, retrorsum acutum. Nam si acutum aut rectum faceret; essent sequentes ordinatæ antrorsum in concava minores, et retrorsum in convexa maiores.

7. Sit tangens $t$ et chorda $c$, (Fig. 33) intelligendo per $t$ heic tangentem ex initio arcus ordinatarum crescentium, usquequo rectam, in quam ordinata finis arcus cadit, secat; erit $\frac{t}{c} \rightharpoonup 1$ si $n \rightharpoonup \infty$.

Nam in triangulo, cuius latera sunt $t$, $c$, $\lambda - \dot{y}$, est

$$t : c = \sin.(2R - \alpha - (\beta - u)) : \sin.\alpha;$$

id est

$$\frac{t}{c} = \frac{\sin.(2R - \alpha - (\beta - u))}{\sin.\alpha}.$$

Hoc autem $\rightharpoonup 1$; nam $2R - \alpha$ et $\alpha$ sinu eodem gaudent, $\alpha$ vero est constans, manens nempe etsi tangens eadem per ordinatam aliam priori (dato quovis propius) parallelam secetur; $\beta - u$ vero $\sim 0$; nam crescente $n$, decrescit $\dot{x}$, atque chorda tangenti dato quovis angulo propius venit. Itaque

$$2R - \alpha - (\beta - u) \sim 2R - \alpha;$$

si vero duo anguli sint $\gamma$ et $\gamma \pm \omega$, et $\omega \sim 0$, erit

$$\frac{\sin.(\gamma \pm \omega)}{\sin.\gamma} \sim 1;$$

nempe

$$\frac{\sin.\gamma \cos.\omega \pm \cos.\gamma \sin.\omega}{\sin.\gamma} = \cos\omega \pm \cot.\gamma \sin.\omega,$$

quod $\sim 1$, nam $\cos.\omega \sim 1$, $\sin.\omega \sim 0$, et $\cot.\gamma$ est quantitas determinata, cuius factor $\sin.\omega \sim 0$, dum $\omega \sim 0$.

Unde quum sit $c = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$, si demonstretur differentiale arcus verum semper inter chordam et tangentem cadere, utpote illa maiorem hacque minorem; erit arcu $s$ et differentiali vero $\dot{s}$ dicto, etiam

$$\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}}{\dot{s}} \sim 1.$$

At demonstrandum prius est, dari limitem, qui per longitudinem arcus intelligitur, eumque inter tangentem chordamque cadere. (Fig. 34).

Sint $a + \beta$, $b$, $c + \delta$, $d$ tangentes pro ordinatis crescentibus: erit $a + \beta + c + \delta > a + b + c + d$. Nam $\beta > b$, et $\delta > d$; quia sit (Fig. 35) $\mathfrak{ps}$ continuatio chordæ $\mathfrak{ap}$; tangentem $b$ infra $\mathfrak{ps}$ cadere oportet, ut et ab altera parte tangens sit; est autem angulus $\mathfrak{prq}$ acutus, cui perpendicularis $\mathfrak{pf}$ obiecta cadit; estque angulus $\mathfrak{prf} > \mathfrak{psf} > v$; consequenter angulus $\mathfrak{prf} > v$; atque hinc si triangulum $\mathfrak{prf}$ feratur sursum inter easdem ordinatas, donec $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{b}$ cadat, situ ipsius $\mathfrak{pf}$ priori parallelo, et $\mathfrak{pr}$ ac $\mathfrak{bc}$ in plagam eius eandem superiorem cadentibus: manifesto $\mathfrak{r}$ infra $\mathfrak{c}$ cadet, propter angulum ad $\mathfrak{r}$ ipso $v$ maiorem; eritque $\mathfrak{pr} < \mathfrak{bc}$.

Duplicato $n$, pariter patet novam tangentium summam esse minorem ipso $a + b + c + d$, atque idem repetendo semper porro, summam tangentium semper decrescere; summam chordarum autem semper crescere propter summam duorum trianguli laterum tertio maiorem; esseque chordam quamvis tangente respondente minorem propter angulum chordæ acutum, quem cum ordinata sequente facit, maiorem illo, quem tangens cum eadem ordinata efficit.

Hinc summa tangentium $S'$ et summa chordarum $s'$ dicta, tam $S'$ sine fine decrescens, quam $s'$ sine fine crescens limite gaudet; quum illud primo $s'$ semper maius, et $s'$ primo $S'$ semper minus maneat.

*Sit* $S' \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} S$ *et* $s' \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} s$: *erit* $S = s$. Nam sit terminus generalis seriei ex $S'$ derivatæ $u_1(m\dot{x})$ et ex $s'$ sit $u(m\dot{x})$: erit

$$u_1(1\dot{x}) + u_1(2\dot{x}) + \ldots + u_1(n\dot{x}) \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} S$$
$$u\,(1\dot{x}) + u\,(2\dot{x}) + \ldots + u\,(n\dot{x}) \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} s;$$

sed $\dfrac{u_1(m\dot{x})}{u\,(m\dot{x})} \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} 1$. Itaque $S = s$.

Cadit vero differentiale verum ipsius $s$ inter $u_1(m\dot{x})$ et $u(m\dot{x})$, nempe

$$u_1(m\dot{x}) > \dot{s} > u\,(m\dot{x});$$

consequenter et $\dfrac{u\,(m\dot{x})}{\dot{s}} \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} 1$, idest quum $u(m\dot{x})$ chordam denotet et hæc est $= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, erit $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2(\partial y)^2} = \dot{x}\sqrt{1 + (\partial y)^2}$ differentiale, ac derivata arcus quoad abscissam $x$ est $\sqrt{1 + (\partial y)^2}$; nam $\dot{y} = \dot{x}\partial y + \omega$, nempe $\dot{y} - \dot{x}\partial y$ dicatur $\omega$, eritque

$$\frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2(\partial y)^2}} \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} 1,$$

nam

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{x}^2(\partial y)^2}{\dot{x}^2 + (\dot{x}\partial y + \omega)^2} \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} 1,$$

nam $\dfrac{\dot{x}^2}{\dot{x}^2} = 1$ et $\dfrac{\dot{x}\partial y}{\dot{x}\partial y + \omega} \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} 1$ quia $\dfrac{\dot{x}\partial y}{\omega}$ dato quovis maius fieri potest; consequenter per (pag. 93 et 94)

$$\frac{(\dot{x}\partial y)^2}{(\dot{x}\partial y + \omega)^2} \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} 1, \text{ atque } \frac{\dot{x}^2 + \dot{x}^2(\partial y)^2}{\dot{x}^2 + (\dot{x}\partial y + \omega)^2} \mathrel{{\cdot}\!-\!\!-} 1,$$

adeoque etiam radix secundi gradus $\backsim 1$; et hinc $\dot{x}\sqrt{1+(\partial y)^2}$ *differentiale sensu stricto*, $\sqrt{1+(\partial y)^2}$ autem, sive $(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$ *derivata arcus* est.

Quoad convexam idem eodem modo prodit, si tangentes ad ductum ordinatarum decrescentium accipiantur.

Potest etiam idem per summam tangentium se mutuo inter ordinatas secantium ostendi.

8. Sed limes iste etiam semper idem est; nempe utcunque accipiantur chordæ se invicem modo superius dicto excipientes, summæ earum limes idem $s$ superius erit. Nam sit certo modo acceptis in curva punctis limes chordarum maior aut minor quam prior limes $s$ quantitate $\omega$.

Si maior fuerit, tum dari oportet chordas tales modo certo positas, ut summæ earum differentia a limite $s+\omega$ sit $<\omega$, nempe summa ipsa sit $>s$; quod vero absurdum est. Nam accipiatur omnium partium ipsius $x$, e cuius finibus erectæ ordinatæ chordas terminant, illa, qua nulla earum minor est; item accipiatur $n$ modo priore tam magnum, ut in minimam partem dictam ipsius $x$ quoque ipsa $\dot{x}$ ad minimum numero $\mu$ cadant, quem utvis augere manifesto licet. Erigantur ordinatæ e finibus cuiusvis $\dot{x}$; terminabuntur pro quovis arcuum ordinatæ extimæ aut in finibus eorum, aut terminabitur una tantum in arcus fine, aut neutra. Si pro omnibus arcubus ordinatæ extimæ in eorum finibus terminentur; erit ductis novis ad minimum $\mu$ chordis pro quovis arcu earum summa maior eo, quod ipso $s$ maius erat; adeoque maior limite illo, quo semper minor manet.

Si una tantum duarum ordinatarum extimarum aut neutra terminetur ad chordæ finem, ducantur ubique, ubi ita est, a finibus ordinatarum extimarum chordæ ad proximos arcuum fines; erit tum summa chordarum novarum maior summa priorum; nam quævis harum est summa novarum ei respondentium maior. At quum chordæ non omnes ita ut superius positæ sint, sit numerus arcuum priorum $\nu$; in totidem locis tantum fieri potest, ut ordinatæ extimæ dictæ per duplicationem numeri $n$ ortæ cum ordinatis ad fines arcuum non coincidant; sit chordarum, quæ hoc pacto ex $s'$ (pag. 294) desunt, nec plures quam numero constante $\nu$ esse possunt, summa $u$, et earum quæ accedunt, nec plures quam numero $2\nu$ esse possunt, summa sit $u'$; erit $u' > u$ (propter duorum laterum trianguli summam tertio maiorem), at $n$, adeoque $\mu$ ita augeri poterit, ut $u' - u$ dato quovis $k$ minus fieri queat; si ex. gr. arcus ita accipiantur, ut nullius chorda ulla sit $> \frac{k}{2\nu}$, erit $u' < \frac{2k\nu}{2\nu}$, et quum $u' - u < u'$ sit, est $u' - u < k$. Est autem quodvis $s' + u' - u > s + \omega$, et utrumque positivum est, ita et $s$ atque $s' + u' - u - s$ et $s + \omega - s$ positiva sunt, atque $s' + u' - u - s$ maius positivum est quam $s + \omega - s$, id est quam $\omega$; sed $s' - s \backsim 0$, ita $u' - u \backsim 0$; itaque $s' + u' - u - s \backsim 0$; adeoque quantitas, quæ omni dabili minor fieri potest, maneret maius positivum, quam determinatum $\omega$.

Sed nec minor esse limes alio modo potest. Sit enim limes $s - \omega$; ponantur chordæ prius modo priore, ut sit $s' > s - \omega$, nempe $s'$ sit (omnino positivum) $= s - \omega + \alpha$, quod quum $s$ limes ipsius $s'$ sit, pro certo $\alpha$ positivo et ipso $\omega$ minore fieri potest; ponantur tum chordæ modo altero, ita ut in quemvis arcum plures cadant, quum illas quoque quam proxime accipere liceat; dicanturque sensu ut antea $u'$ et $u$, eo discrimine, quod pro chordis alio modo positis intelligantur; sitque summa harum $s - \omega - z$ pariter positivum. Erit $s - \omega - z + u' - u$ quoque positivum et $> s - \omega + \alpha$; atque subtrahendo posterius positivum e maiore positivo, manebit positivum; nempe $u' - u - z - \alpha$ semper positivum esse deberet, quamvis $\alpha$ constans positivum, adeoque $-\alpha$ constans negativum sit, $u' - u$ autem $\backsim 0$, et $z$ quoque $\backsim 0$, quum $s - \omega$ limes summæ chordarum modo alio positarum sit, adeoque $u' - u - z \backsim 0$, et quantitatem constantem negativam positivam reddere nequit.

9. *Sit area* a linea, cuius ordinata $y = B(x)$, atque ordinatis et abscissa $x$ comprehensa $= A(x)$; erit *functio differentianda* non ut antea, sed in concreto data; estque differentiale verum, nempe terminus generalis seriei ex $A(x)$ derivatæ, $A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$; atque manifesto est pro (Fig. 36)

$$y\dot{x} \lessdot A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) \lessdot (y + \dot{y})\dot{x},$$

per $\dot{y}$ intelligendo differentiam ipsius $y$ ab ordinata sequenti, nempe e fine ipsius $\dot{x}$ erecta. Sed

$$\frac{y}{y+\dot{y}} \frown 1;$$

consequenter

$$\frac{y\dot{x}}{A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})} = \frac{\dot{x}B(m\dot{x})}{A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})} \frown 1.$$

Est igitur $\dot{x}B(x)$ *differentiale*, et quidem sensu stricto, ipsius $A(x)$; et $y = B(x)$ derivata eius quoad $x$ est.

10. Ita si $A(x)$ *soliditatem, quae per revolutionem lineae circa abscissam generatur*, denotet: per $y\dot{x}$ et $(y+\dot{y})\dot{x}$ describentur cylindri, quorum soliditates sunt $y^2\pi\dot{x}$ et $(y+\dot{y})^2\pi\dot{x}$; est autem pro (Fig. 36)

$$y^2\pi\dot{x} \lessdot A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x}) \lessdot (y+\dot{y})^2\pi\dot{x}.$$

Sed $\frac{y}{y+\dot{y}} \frown 1$, adeoque $\frac{y \,.\, y\pi\dot{x}}{(y+\dot{y})(y+\dot{y})\pi\dot{x}} \frown 1$, consequenter

$$\frac{y^2\pi\dot{x}}{A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})} \frown 1;$$

itaque $y^2\pi\dot{x}$ termino generali seriei ex $A(x)$ derivatæ æquipollet, nempe si $y = B(x)$, est

$$\frac{(B(m\dot{x}))^2 \,.\, \pi\dot{x}}{A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})} \frown 1,$$

atque $\dot{x} \,.\, \pi(B(x))^2$ id est $\dot{x} \,.\, \pi y^2$ *differentiale* sensu stricto ipsius $A(x)$ et $\pi y^2$ *derivata* quoad $x$ est.

11. Si $A(x)$ *superficiem revolutione lineae circa abscissam ortae* denotet, sit prius (Fig. 34) linea concava, crescentibus ad dextram ordinatis. Dicatur $t$ tangens $a+\beta$, et $C$ chorda ei respondens, item chorda tangenti $a$ respondens dicatur $c'$, et $c''$ sit chorda tangenti $b$ respondens. Describuntur revolutione schematis coni truncati, qui dicantur coni truncati ipsius $(a+\beta)$, id est ipsius $t$, ita ipsorum $a$, $b$, $c'$, $c''$. Est autem superficies coni truncati facto e summa radiorum basium parallelarum et $\pi$

atque latere coni truncati æqualis. Erit itaque conus truncatus ipsius $a+\beta$

$$=\pi(a+\beta)(y+y''+\lambda),$$

ita coni truncati ipsorum $a$, $b$, et ipsius $C$ ac ipsorum $c'$, $c''$ erunt $\pi a(y+y'+\lambda')$, $\pi b(y'+y''+\lambda'')$, $\pi C(y+y'')$, $\pi c'(y+y')$, $\pi c''(y'+y'')$. Unde conus truncatus ipsius $(a+\beta)$ maior est quam coni truncati ipsorum $a$ et $b$; quo continuato patet summam conorum truncatorum per tangentes descriptorum decrescere. Est etiam manifesto conus truncatus chordæ $C$ minor summa conorum truncatorum ipsarum $c'$ et $c''$; itaque si duplicato $n$, numerus chordarum semper porro duplicetur, crescet summa conorum truncatorum per chordas descriptorum, manet tamen semper minor summa conorum truncatorum per tangentes simultaneas descriptorum, adeoque minor cono truncato per $a+\beta$ descripto, quum summa plane dicta sit hoc minor. Datur itaque limes summæ conorum truncatorum per chordas descriptorum, atque

$$C\pi(y+y'') \lessdot A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x}) \lessdot t\pi(y+y''+\lambda).$$

Est autem (pag. 292)

$$\frac{C}{t}\frown 1, \text{ et } \frac{y+y''}{y+y''+\lambda}\frown 1;$$

itaque

$$\frac{C\pi(y+y'')}{t\pi(y+y''+\lambda)}\frown 1.$$

Consequenter

$$\frac{C\pi(y+y'')}{A(m\dot{x})-A((m-1)x)}\frown 1;$$

atque quum $y+y'':2y\frown 1$ et $C=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$, fit $2\pi y(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$, id est $2\pi y(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}\dot{x}$ *differentiale* limitis conorum per chordas lineæ se invicem ut supra (pag. 288) excipientes descriptorum; $2\pi y(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}$ autem *derivata* quoad $x$ est.

Quoad convexam quoque idem prodit. Superficies quæritur (Fig. 37), quæ erit limes viæ chordarum se invicem excipientium. Vertatur in $\mathfrak{b}f'$ tangens $\mathfrak{b}f$, et si duplicato $n$ tangentes $\mathfrak{b}d$, $\mathfrak{d}f''$ oriantur, vertatur $\mathfrak{d}f''$ in

$\mathfrak{d}f'''$ circa perpendicularem ex $\mathfrak{d}$ ad $y$, ac pro duplicato iterum $n$, ortisque tangentibus $\mathfrak{b}c$, $cd'$, $\mathfrak{d}e'$, $eg$, vertatur quævis circa perpendicularem e puncto tactus ad $y$ missam; et idem continuetur semper duplicato $n$ et tangentium numero duplicato. Consideretur iam conus truncatus ipsius $f'\mathfrak{b}$, tum summa conorum truncatorum ipsorum $\mathfrak{b}d'$, $\mathfrak{d}f'''$, tum summa conorum truncatorum ipsorum $\mathfrak{b}c'$, $cd''$, $\mathfrak{d}e''$, $eg'$; patet conum truncatum primum esse maiorem summa sequente conorum truncatorum, et hanc maiorem summa sequente, atque hoc continuari sine fine posse; nempe manifesto conus truncatus $\mathfrak{b}f'$ constat e cono truncato $\mathfrak{b}d'$ et cono truncato $d'f'$, et posterior est $=\pi(d'\mathfrak{d}'+f'\mathfrak{a}')d'f'$; summa conorum truncatorum $\mathfrak{b}d'$ et $\mathfrak{d}f'''$ æqualis cono truncato $\mathfrak{b}d'+\pi(\mathfrak{d}\mathfrak{d}'+f'''\mathfrak{a}')\mathfrak{d}f'''$; atque $\mathfrak{d}\mathfrak{d}'<d'\mathfrak{d}'$ et $f'''\mathfrak{a}'<f'\mathfrak{a}'$, (quia angulus $u>v$ est, adeoque $h$ supra $l$ cadit) ac $(\mathfrak{d}f'''=\mathfrak{d}f'')<(d'f'=df)$ per (pag. 293); ita valores reliqui, e quibus coni truncati exsurgunt, crescunt excepto $\pi$ et illis quæ manent, ex. gr. in prima duplicatione manent $\mathfrak{b}d'$ et basium radii. Ducatur perpendicularis ex $\mathfrak{a}$ ad $y$; erit quævis conorum truncatorum summa semper maior, quam via ipsius $\mathfrak{a}k$. Unde limitem decrescentis summæ dictæ dari constat; dicatur is $A(x)$.

Dicaturque terminus generalis seriei conorum truncatorum dictorum $u(m\dot{x})$; erit

$$u(1\dot{x})+u(2\dot{x})+\ldots+u(n\dot{x})\frown A(x);$$

denotetque $a(m\dot{x})$ conum truncatum chordæ; facile patet quod

$$u(m\dot{x}):a(m\dot{x})\frown 1;$$

adeoque per superiora etiam

$$a(1\dot{x})+a(2\dot{x})+\ldots+a(n\dot{x})\frown A(x);$$

atque hinc est et hic $2\pi y(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}\dot{x}$ differentiale limitis viæ chordarum, et $2\pi y(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}$ est derivata quoad $x$.

Interim tamen proprie de trapeziis tantum, quæ (pag. 288) in triangula apices in superficie habentia dispesci possunt, sermo est, atque limite summæ eorum; at omnia dicta valent, si pro arcu $=\frac{2\pi}{\mu}$, ubi integer $\mu\frown\infty$, trapezia simultanea considerentur.

Imo etiam et hic limitem eundem esse ut supra demonstrari potest, *utcunque ponantur triangula sub conditione ibidem dicta*; partes nempe eorum in plana ad abscissam e finibus ipsorum $\dot{x}$ contentæ considerari debent, quod tamen brevitatis studio omittitur.

12. Si e *lineae* $S$ puncto quovis demittatur perpendicularis $z$ ad planum $P$ idem pro omnibus punctis ipsius $S$, complexus $s$ sectionum omnium $z$ cum $P$ vocatur *proiectio* ipsius $S$ in $P$. Si in $P$ sita recta acceptis a puncto certo incipiendo abscissis $x$ æquatio ordinatæ $y$ pro $s$ data sit, atque data etiam æquatio sit, per quam e cuiusvis $y$ fine erecta perpendicularis $z$, nempe distantia puncti ipsius $S$ a $P$, determinatur, manifesto tota $S$ in spatio determinata erit. Ordinatæ omnino accipiuntur in $P$ in una ipsius $x$ plaga positive, et negative in altera, ita ipsa $z$ accipiuntur in una plaga ipsius $P$ positive et negative in altera; ita ab initio abscissarum accipiuntur abscissæ in una plaga positive et negative in altera.

Si $s = a(x)$ et $S = A(x)$ atque $a(m\dot{x}) - a((m-1)\dot{x})$ denotetur per $\dot{s}$ et $A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})$ per $\dot{S}$: erit

$$\dot{s} \stackrel{\circ}{=} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,;$$

atque e finibus ipsius $\dot{s}$ erectæ ordinatæ (usque ad fines ipsius $\dot{S}$ ipsi $\dot{s}$ respondentis) dicantur $z$ et $z_1$, et chorda ipsius $\dot{s}$ dicatur $c$; erit perpendicularis ab extremitate ipsius $z$ ad $z_1$ missa $= c$; orieturque triangulum rectangulum, cuius unus cathetus est $c$, alter est $\dot{z}$ pro $z_1 = z + \dot{z}$, hypothenusa autem est chorda ipsius $\dot{S}$, quæ itaque est $= \sqrt{c^2 + \dot{z}^2}$. Sed $c^2 \stackrel{\circ}{=} \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Consequenter pro $\dot{y} \stackrel{\circ}{=} y'\dot{x}$ et $\dot{z} \stackrel{\circ}{=} z'\dot{x}$

$$\dot{S} \stackrel{\circ}{=} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \stackrel{\circ}{=} \dot{x}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

Estque hoc *differentiale ipsius S* nempe *limitis summae chordarum*, atque *derivata* quoad *x est* $\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$. Nempe et hic ut supra limitem dari demonstrari potest, si pro ordinatis $z$ crescentibus tangentibus plana ad abscissam perpendicularia ordinatas sequentes complectentia, quas secent, obiiciantur; sed brevitas necessaria uberius exponere vetat.

V. Notandum est sæpius esse, ut expressio differentialis strictioris, adeoque derivatæ, quum $\dot{x}$ semper finitum et nunquam $0$ sit, sed dabili quovis minus fieri queat, pro certo valore ipsius $x$ fiat $=0$ aut $\infty$, vel $0:0$; imo si derivata prima, secunda, &c accipiantur, sæpius quævis usque ad aliquam fiat $=0$, pro valore certo ipsius $x$, aut derivata prima, secunda finitæ vel $0$ sint, et ab aliqua incipiendo omnes infinitæ fiant. Sunt autem valores eiusmodi ipsius $x$ nonnisi in punctis discretis, (patet si functio linea expressa per ordinatas cogitetur); atque vocantur hæc *puncta singularia*, quum linea ad puncta his respondentia qualitatibus talibus gaudeat, quibus reliqua inter hæc non gaudent; sunt quoque ibi differentialia cum veris haud æquipollentia, at derivatæ primæ ibi quoque limites sunt quotorum e differentialibus veris per $\dot{x}$ divisis.

Superius (pag. 217) dictum est differentiale verum esse terminum generalem seriei e functione aliqua derivatæ; itaque si $n$ sufficienter augeatur, quum $x$ e talibus portionibus constet, quarum cuivis respondentes ordinatæ aut crescent ab initio usque ad finem, aut decrescent, hoc nunquam $=0$ esse potest. At etiam differentiale strictius dictum est esse terminum seriei totidem terminorum generalem, differentiali vero sub certa saltem conditione æquipollentem (pag. 214); conditio quæ ibi simplicitatis et claritatis caussa per $zx$ expressa est, quamvis omnia per partes eo reduci queant, generalius ita exprimi potest. *Si* $\dfrac{u(m\dot{x})}{a(m\dot{x})} \frown 1$ *pro quovis* $m\dot{x}$ *a certo valore* $a$ *ipsius* $m\dot{x}$ *usque ad certum valorem* $b$ *ipsius* $m\dot{x}$, *ita ut quae excipiuntur, nonnisi punctum aut puncta discreta sint, aut simul vel sine illis pars ipsius* $x$ *talis sit, quae dato quovis minor fieri potest: tum* $u(x)$ *dicitur differentiale generalius ipsius* $A(x)$ *a valore* $a$ *ipsius* $x$ *usque ad valorem* $b$. Atque manifesto

$$A(b)-A(a)=B(b)-B(a)$$

et

$$A(b)=B(b)-B(a)+A(a),$$

si tam

$$\frac{u(m\dot{x})}{A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})} \frown 1,$$

quam

$$\frac{u(m\dot{x})}{B(m\dot{x})-B((m-1)\dot{x})} \backsim 1.$$

Imo valor ipsius $m$ extendi potest, ut etiam o et integros negativos denotare queat, ut sit pro $\dot{x}$ positivo series incrementorum

$$\ldots .\, A(2\dot{x})-A((2-1)\dot{x}),\ A(1\dot{x})-A((1-1)\dot{x}),\ A(0\dot{x})-A((0-1)\dot{x}),$$
$$A((0-1)\dot{x})-A((-1-1)\dot{x}),\ A(-2\dot{x})-A((-2-1)\dot{x}).\ldots .$$

Si ex. gr. $A(x)=\sqrt{x-1}$, valores omnes imaginarii erunt ab $x=0$ usque ad $x=1$; at etiam differentiale integraleque imaginarium accipi a valore o ipsius $x$ usque ad 1 poterit, aut vero abscissa (post $x=1$) a o crescens accipi poterit, aut ut dictum est ab $x=1$ usque ad certum valorem $b>1$ accipietur.

Erit autem aut certus seriei, cuius terminus generalis est $u(m\dot{x})$, terminus $m$-tus $=0$, sed ita, ut si ipsi $m$ substituatur $m-1$, sit

$$\frac{u((m-1)\dot{x})}{a((m-1)\dot{x})} \backsim 1,$$

aut sive pro $x=0$ fiet expressio differentialis $=0\dot{x}$, si in ea o substituatur ipsi $x$, sive id pro alio tali $m\dot{x}$ fiet ita, ut $u((m-1)) : a((m-1)\dot{x})$ non tendit ad 1. Ex. gr.

$$\partial(b-x)^2=-2(b-x)\dot{x}$$

et pro $x=b$ fit $(n-1)\dot{x}=b-\dot{x}$, ac $u((n-1)\dot{x})$ fit $-2\dot{x}^2$, $a((n-1)\dot{x})$ autem fit

$$(b-(b-\dot{x}))^2-(b-(b-2\dot{x}))^2=-3\dot{x}^2,$$

atque $2\dot{x}^2 : 3\dot{x}^2$ non tendit ad 1, sed est $=\frac{2}{3}$. Nempe $A(m\dot{x})-A((m-1)\dot{x})$ dicitur $a(m\dot{x})$.

Quoad casum primum, pro $u(m\dot{x})=\dot{x}\ u_1(m\dot{x})$ est

$$\frac{A((m-1)\dot{x})-A(m-2)\dot{x})}{\dot{x}\,.\,u_1((m-1)\dot{x})} \backsim 1,$$

adeoque

$$\frac{A((m-1)\dot{x})-A((m-2)\dot{x})}{\dot{x}} \backsim u_1((m-1)\dot{x}) \backsim u_1(m\dot{x})=0.$$

Sed

$$\frac{A(m\dot{x}) - A((m-1)\dot{x})}{A((m-1)\dot{x}) - A((m-2)\dot{x})} \backsim 1,$$

si neutrum o aut $\infty$ sit. Nam (Fig. 38)

$$\gamma + \lambda = (h^2 - \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\gamma = (i^2 - \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}};$$

atque

$$\frac{i^2 - \dot{x}^2}{h^2 - \dot{x}^2} \backsim 1,$$

quia $\frac{i}{h} \backsim 1$, namque et $\frac{i}{t} \backsim 1$, eodem modo patet, uti (pag. 292). Itaque

$$\frac{\gamma}{\gamma + \lambda} \backsim 1,$$

consequenter

$$\frac{\dot{y}}{\gamma + \lambda} = \frac{2\gamma}{\gamma + \lambda} \backsim 2$$

et

$$\frac{\dot{y}}{\gamma + \lambda} - 1 = \frac{\dot{y} - (\gamma + \lambda)}{\gamma + \lambda} \backsim 1.$$

Si vero pro $x = k$, ubi $k$ etiam o significare potest, fiat expressio derivatæ $= 0$, atque non sit casus is, ubi si tantum uno $\dot{x}$ ultra vel intra $k$ accipiatur differentiale verum, quotus ex hoc per expressionem differentialis strictioris tendat ad 1, poterit accipi $\omega$ utvis parvum positive aut negative prouti casus poscit (ex. gr. pro $k = 0$, sumatur positive), ut sit

$$\frac{A(k + \omega + \dot{x}) - A(k + \omega)}{\dot{x} \, . \, u_1(k + \omega + \dot{x})} \backsim 1;$$

nam nulla pars continua ex $k$ incipiendo est per hypothesim, ubi hoc non valeat. Inde vero est

$$\frac{A(k + \omega + \dot{x}) - A(k + \omega)}{\dot{x}} \backsim u_1(k + \omega + \dot{x});$$

sed $u_1(k + \omega + \dot{x}) - u_1(k) \backsim 0$; itaque

$$\frac{A(k+\omega+\dot{x})-A(k+\omega)}{\dot{x}} \backsim u_1(k)=0.$$

Itaque patet ordinatarum puncto, ubi $k$ terminatur, quam proximarum incrementa per $\dot{x}$ divisa hoc pacto ad limitem $0=u_1(k)$ tendere.

Interim si $A(k+\omega-\dot{x})-A(k+\omega)$ dicatur $\dot{y}$ et $A(k+\omega)-A(k)$ dicatur $z$, erit $\frac{\dot{y}}{z} \backsim 1$.

Nam $\dot{y}-z < \frac{z}{N}$ fieri pro dato quovis $N$ potest; nam pro

$$\dot{y}=\frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)z}{N}$$

fit

$$\dot{y}-z=\frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)z}{N}-z=\frac{z}{2N};$$

potest autem $\dot{y}$ et $z$ ita sumi, ut $\dot{y}$ superet ipsum $z$ quantitate minore quam $\frac{z}{N}$. Est vero tunc

$$\frac{\dot{y}:\dot{x}}{z:\dot{x}} \backsim 1;$$

itaque quum $\dot{y}:\dot{x}$ dato quovis minus fiat dum $n \backsim \infty$, $\frac{z}{\dot{x}}$ dato maius manere nequit; consequenter quum $z$ non $0$ sit, $\frac{z}{\dot{x}}$ dato quovis minus fit idest $\frac{z}{\dot{x}} \backsim 0$. Si $\dot{y}:\dot{x}$ dato quovis maius fiat, $z:\dot{x}$ dato minus non manet, fitque dato quovis maius.

Pariter patet, si $u_1(k)=\infty$. Sit ex. gr. $k=0$; tum item $\omega$ dato quovis minus accipere licet, ut sit

$$\frac{A(\omega+\dot{x})-A(\omega)}{\dot{x}\,.\,u_1(\omega+\dot{x})} \backsim 1,$$

adeoque

$$\frac{A(\omega+\dot{x})-A(\omega)}{\dot{x}} \backsim u_1(\omega+\dot{x}).$$

Sed si $u_1(0)=\infty$, tum $u_1(\omega+\dot{z})$ dato quovis maius fieri debet, dum $\omega+\dot{x} \backsim 0$, atque et hic ut prius $\frac{\dot{y}}{z} \backsim 1$ applicatur.

Quod differentiæ ordinatarum finitarum, abscissarum differentia ad limitem o tendente, tendunt ad o; atque ut ordinata infinita fiat, antea omni dabili maior fieri debeat; partim de qualibet functione speciatim demonstrari potest, (uti etiam factum iam de pluribus est), partim inferius demonstrabitur; intuitui vero per ordinatas in plano, in quarum qualibet uno puncto terminante valorem functionis complexus eorum interrumpi nequit, exhibetur.

VI. Quum tamen hæc exemplis geometricis, singularitatem eiusmodi punctorum ostendentibus, illustrare supervacuum non sit; sit (Fig. 39) chorda ex $\mathfrak{p}$ incipiens, vertaturque usquequo tangens fiat, et sit subtangens $s$, ac

$$y = A(m\dot{x});$$

erit

$$\dot{y} : \dot{x} = y : s',$$

adeoque

$$s' = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} y;$$

est autem $s - s' = \omega$, quod $\frown$o, atque

$$\frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{y\dot{x} : \dot{x}}{\dot{y} : \dot{x}} = \frac{y}{\dot{y} : \dot{x}};$$

itaque

$$\frac{y}{\dot{y} : \dot{x}} = s - \omega \text{ et } \frac{y}{\dot{y} : \dot{x}} \frown s.$$

Erat vero $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \frown \partial y$, atque hinc iuxta (pag. 89) de tali $y$ loquendo, quod neque $\infty$ neque o est (nempe si quod $=$o esset, augeatur quævis ordinata quantitate $b$, ut in Fig. 40), erit

$$\frac{y}{\dot{y} : \dot{x}} \frown \frac{y}{\partial y} \text{ et } s = \frac{y}{\partial y}.$$

Eritque $s =$o, si $\dot{y} : \dot{x}$ omni dabili maius adeoque $\partial y = \infty$ fiat; item $s$ fiet $\infty$, si $\dot{y} : \dot{x}$ omni dabili minus, adeoque $\partial y =$o fiat.

Ostendit Figura (39*) casum, ubi $s = s' - \omega$; at ibi quoque omnia applicari patet.

Pro casu, ubi $y=0$, autem res iuxta Fig. (41), quoque considerari potest. Sit certa abscissa constans $\alpha$, cui respondeat $y$; erit

$$\dot{x}:\dot{y}=\alpha:S' \text{ et } S'=\frac{\alpha\dot{y}}{\dot{x}};$$

atque si $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\backsim\infty$, erit $S=\alpha\infty$, nempe tangens ipsi $y$ parallela, adeoque perpendicularis ad abscissam; est autem hic

$$A(\dot{x})=A(1\dot{x})-A(0.\dot{x})=\dot{y},$$

atque pro $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\backsim\infty$ est $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\backsim 0$.

Est etiam (Fig. 42)

$$s:y=1:\text{tang.}\,v,$$

item

$$y:s=1:\text{tang.}\,u.$$

Unde

$$\text{tang.}\,v=\frac{y}{s},$$

item per $s=y:\partial y$

$$\text{tang.}\,v=y:\frac{y}{\partial y}=\partial y;$$

atque

$$\text{tang.}\,u=\frac{s}{y}=1:\partial y.$$

Quantitates tangentis $T$, normalis $N$ et subnormalis, e triangulis rectangulis prodire patet.

Sed si consideretur, qualisnam curvæ ductus ante et post punctum tactus sit, erit (Fig. 43)

$$s:y=s+\dot{x}:y_1+\omega;$$

et hinc

$$y_1+\omega=\frac{y(s+\dot{x})}{s}=y+\frac{y\dot{x}}{s}=y+y'\dot{x}.$$

Sit $y=A(x)$; erit (per *Taylorianum* paulo inferius)

$$y_1=A(x+\dot{x})=A(x)+\dot{x}\,\partial A(x)+\frac{\dot{x}^2}{2}\partial^2 A(x)+\frac{\dot{x}^3}{2.3}\partial^3 A(x)+\ldots$$
$$=y+\dot{x}.y'+\frac{\dot{x}^2}{2}y''+\frac{\dot{x}^3}{2.3}y'''+\ldots$$

et summa terminorum duorum priorum $= y_1 + \omega$; itaque si terminus sequens negativus sit, quod fit si derivata secunda negativa sit, curva ductum infra tangentem, si vero derivata secunda positiva sit, supra tangentem *e puncto tactus incipit; quum quemlibet terminum, nisi* o *sit,* summa omnium sequentium maiorem fieri posse demonstretur. Si vero derivata secunda imo et postea sequentes o fuerint, prouti prima quæ non o est, positiva vel negativa est, curva versus abscissam convexa vel concava erit. Idem et ante punctum patet. Erit nempe ibi

$$s : y = s - \dot{x} : y_2 + \omega_1,$$

et hinc

$$y_2 + \omega_1 = y - y'\dot{x},$$

atque

$$A(x - \dot{x}) = y - \dot{x}y' + \frac{\dot{x}^2}{2}y'' - \frac{\dot{x}^3}{2.3}y''' + \ldots$$

et hinc si derivata secunda non sit o, et negativa sit, erit et ramus ad lævam concavus, si positiva, convexus; si vero $y'' = 0$ et $y'''$ non sit o atque sit ex. gr. positivum, erit ad dextram incrementum $+ \frac{\dot{x}^3}{2.3}y'''$, ad lævam autem oppositum eius, atque idem eveniet, si derivatæ ipsi o æquales in derivata numeri paris desinant; erit itaque post punctum tactus ramus ad dextram convexus, ad lævam concavus. Vocatur eiusmodi *punctum flexus.*

Patet etiam, quod si derivata secunda sit functio certi valoris, nec o, nec $\infty$, inflexionem non esse; quia si valor is positivus sit, linea utrinque convexa, si negativus, utrinque concava erit. Si derivata secunda sit o aut $\infty$, vel sub formam $\frac{0}{0}$ veniat pro valore certo $a$ ipsius $x$; accipiatur tum una vice $x = a + \omega$, altera vice autem $x = a - \omega$, pro $\omega$ positivo et quantumvis exiguo, et quæratur pro his valoribus ipsius $x$, num rami e fine ipsius $x = a$, utrinque concavi aut utrinque convexi sint, vel unus concavus et alter convexus sit.

Dantur etiam alia puncta singularia: nempe si duo rami ad certum punctum tangente communi gaudeant, et aut utraque aut una tantum convexam faciem alteri obvertat, dicitur prior *cuspis primi generis,* posterior *secundi*; et cuiusvis duæ species sunt, prouti versus abscissam convexi fuerint rami, aut concavi; pro cuspide primi generis tangens inter utrumque cadit, pro altera non. (Fig. 45, 46, 47, 48.)

Si plures rami tangentibus ad idem punctum diversis gaudeant, vocatur punctum *multiplum*; quod fieri posse manifestum est, si functionis plures valores (ex. gr. per radicalia) fuerint, qui pro certo valore ipsius $x$, disparentibus ex. gr. certis radicalibus, ad unicum redigantur; uti exempla ostendent. Pertinent vero etiam cuspides ad puncta multipla; at cuspidis ramus uterque tangente eadem gaudet; et dantur eiusmodi puncta multipla, ut rami ex eodem puncto prodeuntes diversis tangentibus gaudeant; est autem omnibus punctis multiplis commune, quod ordinata, quæ ad tale punctum est, derivata quoad omnes ramos inde prodeuntes non una gaudeat, uti quævis alia etiam ordinatarum plurium eidem puncto respondentium.

Dantur etiam puncta *isolata* dicta: datur nempe functio talis, cuius ex. gr. a valore certo ipsius $x$ usque ad certum (aut in $\infty$), nonnisi pro certo aut certis valoribus detur valor realis; atque si talis valor o sit, per $y$ punctum abscissæ ibidem determinetur.

*Exempla.*

*a*) Si ordinata $y$ sit $=b+ax^2$, erit pro $b$ positivo et $a$ positivo linea versus abscissam convexa, et concava si $a$ negativum sit, et quidem utrinque ab $x=0$ incipiendo, tam pro $x$ positive quam pro $x$ negative incipiente; excurruntque duo rami utrinque æqualiter, ordinatis crescentibus in $\infty$; transibunt autem per axem ad distantias a capite abscissarum æquales, si $a$ negativum fuerit, ubi $ax^2=-b$, quum ibi $y=0$ sit; ac tangens erit axi parallela pro $x=0$. Nam derivata prima (quæ breviter $\partial$ atque ita secunda dici potest $\partial^2$) est $2ax=0$ pro $x=0$; $\partial^2$ autem $=2a$, quod positivum est pro $a$ positivo, et negativum si $a$ negativum fuerit, adeoque linea in casu primo ex $x=0$ incipiendo versus abscissam convexa, in altero concava erit.

Patet vero $\partial^2$ esse pro quovis valore ipsius $x$ positivum pro $a$ positivo et negativum pro $a$ negativo; interim post $ax^2=-b$, pro $a$ negativo, transeuntibus ramis in alteram axeos plagam, erunt hi ad partem axeos illis respondentem convexæ; at ut ita loqui fas sit, id quod faciei axeos superiori concavum, inferiori convexum est; concipiatur axis deorsum sibi parallele ad distantiam $d$ moveri; quævis ordinata incrementum $d$ capiet, et pro $b$ fiet $b+d$ manente curva; atque $\partial^2$ pro quavis abscissa infra curvam, etiam pro parte antea infra axem cadente, negativum fiet, et curva versus superiorem axeos faciem concava erit.

Est autem linea hæc plane parabola (Fig. 44), si axis a vertice parabolæ ad distantiam $b$ sumatur ad axem $X$ perpendicularis; nempe si $Y^2=\frac{X}{a}$ pro parametro $=\frac{1}{a}$, et $Y=x$ atque $y=b+X$, est $y=b+ax^2$.

$b$) Si $y=b+x^3$, pro $x=0$ inflexio est. Nam $\partial y=3x^2$ et $\partial^2 y=2.3x$, quod pro $x$ positivo positivum, pro $x$ negativo negativum est, adeoque pro $x$ positivo curva ultra $x=0$ forma convexa, et concava pro $x$ negativo incipit. Est autem tangens axi parallela pro $x=0$, quia $\partial y=0$; est quidem tunc et $\partial^2 y=0$, sed si $x$ crescat positive aut negative, fiatque $\omega$ positive aut negative quantovis minus, prius dicta valent.

$c$) Si $y=b+x^{\frac{3}{2}}$, aut $y=b+x^{\frac{2}{3}}$, aut $y=b-x^{\frac{2}{3}}$, orietur pro $x=0$ cuspis primi generis; primum dat (Fig. 45), sequens dat (Fig. 46), tertium exhibet (Fig. 47); nempe $\partial$ prioris est $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, quod pro $x=0$ fit $0$, adeoque tangens axi parallela est; $\partial^2 y=\frac{1.3}{2.2}x^{-\frac{1}{2}}$, quod pro $x=0$ fit $\infty$; at si pro $x$ ponatur $\pm\omega$, quantovis minus, fiet $\frac{3}{4\sqrt{\omega}}$, cuius duo valores sunt, unus positivus, alter negativus, alioquin æquales, et prior denotat convexitatem rami superioris, qui e valore positivo ipsius $\sqrt{x^3}$ ipsi $b$ addito generatus est, posterior concavitatem rami inferioris, qui e $-\sqrt{x^3}+b$ factus est. Patet quoque pro $x$ negativo ordinatam $\sqrt{x^3}$ imaginariam, at pro $b+x^{\frac{2}{3}}$ sive positivum sive negativum sit $x$, ordinatam unicam respondere abscissæ cuivis, et ab $x=0$ utrinque æqualiter excurrere ramos; est vero pro hoc casu

$$\partial y=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}},$$

quod pro $x=0$ fit $\infty$, efficitque tangentem axi perpendiculariter insistentem; estque tum $\partial^2 y = -\frac{2}{9} x^{\frac{-4}{3}}$, quod quidem pro $x=0$ fit $\infty$, at substituendo (ut prius) $\omega$, fiet pro $\omega$ tam positivo quam negativo negativum, adeoque curva utrinque concava. Patet vero, quod si in expressionibus ipsius $y$ ponatur $x-a$ pro $x$, dicta pro $x=a$ fiant.

*d*) Si vero $y=b-x^{\frac{2}{3}}$, $\partial y$ pariter infinita pro $x=0$, tangentem item perpendicularem dabit, sed $\partial^2 y$ erit $\frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}}$ positivum ab $x=0$ incipiendo utrinque, adeoque curva utrinque versus abscissam convexa.

*e*) Si $y=x^2+x^{\frac{5}{2}}$, prodit pro $x=0$, cuspis secundi generis, et tangens axi parallela, (nempe ad distantiam 0). Nam

$$\partial y = 2x + \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}, \text{ et } \partial^2 y = 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} x^{\frac{1}{2}},$$

atque prius fit 0 pro $x=0$, posterius fit $=2$, ostenditque ramum utrumque versus axem ab $x=0$ incipiendo convexum esse; nempe abinde pro abscissa positiva quavis $\sqrt{x^5}$ duos valores habet, pro negativa autem imaginarum fit. At ramus superior e radice positiva ex $x^5$ exsurgens tantum manet semper convexus ad axem, alter autem tantum eousque manet talis, donec $x=\left(\frac{8}{15}\right)^2$ fiet, nempe ubi fit

$$\partial^2 y = 2 - \frac{15}{4} \sqrt{x} = 2 - \frac{15}{4} \cdot \frac{8}{15} = 0;$$

ibique inflexio est, nam addito $\omega$ positivo utvis parvo, et altera vice subtracto $\omega$ e valore dicto ipsius $x$, erit pro vice prima $\partial^2 y$ negativum et positivum pro altera; nempe

$$2 \vdash\!\dashv \frac{15}{4} \cdot \sqrt{\frac{8^2}{15^2} + \omega}$$

negativum et

$$2 \vdash\!\dashv \frac{15}{4} \sqrt{\frac{8^2}{15^2} - \omega}$$

positivum est; tangens autem non est tum axi parallela, nam

$$\partial y = 2\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^2 + \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{8^2}{15^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

non $=0$. Fit præterea ordinata adhuc semel $0$, nempe tunc esse debet $x^2 - \sqrt{x^5} = 0$, adeoque $x^2 = \sqrt{x^5}$, atque $x^4 = x^5$, quod nonnisi pro $x = 0$, et $x = 1$ fieri potest.

*f*) Si $y = b + x^2 + \sqrt{x^5}$ ponatur, linea eadem prodibit, cuspide ad distantiam $b$ ab axe exorta, et tangens erit ad distantiam $b$ parallela axi; sed ramus inferior non pro $x = 1$ transibit per axem, verum pro illo $x$, pro quo fiet $b + x^2 = \sqrt{x^5}$, id est

$$b^2 + 2bx^2 + x^4 = x^5.$$

Ita in superioribus potest $0$ ipsi $b$ substitui. (Fig. 48).

*g*) Si $y = \sqrt{x^2 - x^4}$; oritur pro $x = 0$ punctum multiplum eiusmodi, ad quod non ut in cuspidibus, quæ ipsa quoque puncta multipla sunt, rami tangente communi gaudent, sed tangentes ramorum ex eodem puncto, ubi $x = 0$, diversæ erunt. Nempe pro $x = 0$, item pro $x = 1$ et $x = -1$, est $y = 0$, et pro $x = 1 + \omega$, sive pro $x = -1 - \omega$ (quantumvis exiguum sit $\omega$) valor fit imaginarius; nam

$$(\pm 1 \pm \omega)^2 - (\pm 1 \pm \omega)^2 (\pm 1 \pm \omega)^2$$

est negativum; crescente autem $x$ a $0$ usque ad $1$ positive, ubique ordinatæ duæ æquales erunt, una positiva supra, altera negativa infra axem; erit autem linea versus abscissam concava; nam est

$$\partial y = (x^2 - x^4)^{\frac{-1}{2}}(x - 2x^3),$$

quod fit $\frac{0}{0}$ pro $x = 0$, disparente factore priore radicali, et altero factore quoque simul in $0$ mutato; quomodo valor verus sub imagine ista generali quantitatem quamvis denotante latens reperiatur, de eo statim dicetur aliquid; at hic, modo in casibus similibus usitato, factorem signo radicali subiectum eximendo, valor iste facile reperitur; nempe

$$\frac{x-2x^3}{\sqrt{x^2-x^4}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

quod pro $x=0$ fit $=1=$ tangenti anguli tangentis (pag. 306), qui idcirco est $=$ dimidio recto, quum ibi tangens æqualis sit radio; atque si pro $x$ ponatur $\omega$ quantovis minus, et tendens ad limitem 0, ad dextram positive ad lævam negative, manifesto angulus tangentis, tam pro ramo ad dextram quam ad lævam, $\backsim 1$, itaque duæ erunt tangentes, ad idem punctum ipsi $x=0$ respondentes. Erit porro $\partial((x-2x^3)(x^2-x^4)^{-\frac{1}{2}})$, id est

$$\partial^2(x^2-x^4)^{\frac{1}{2}}=\frac{1-6x^2}{\sqrt{x^2-x^4}}-\frac{(x-2x^3)(x-2x^3)}{\sqrt{(x^2-x^4)^3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2-x^4}}\left(1-6x^2-\frac{(x-2x^3)^2}{x^2-x^4}\right).$$

ubi factor posterior reducendo ad denominatorem eundem, et terminos numeratoris denominatorisque per $x^2$ dividendo, fit

$$\frac{1-x^2-6x^2+6x^4-(1-4x^2+4x^4)}{1-x^2}=\frac{2x^4-3x^2}{1-x^2},$$

quod, quum tantum de $x<1$ quæstio sit, negativum esse facile patet; est nempe tum $x^4<x^2$, adeoque etiam $2x^2>2x^4$, tanto fortius vero superat $-3x^2$ ipsum $2x^4$. Est igitur linea pro ordinatis positivis supra axem versus ipsum concava, et quidem utrinque ab $x=0$, quia $x^2$, $x^4$ eadem sunt pro $x$, sive positivum sive negativum fuerit; pro ordinatis negativis autem erit alter factor (nempe $\frac{1}{\sqrt{x^2-x^4}}$) quoque negativus, itaque $\partial^2 y$ erit positivum et linea quoad faciem axeos superiorem convexa, seu concava versus inferiorem, uti (pag. 308) dictum est; nempe tota supra axem concipi potest, axe deorsum ita lato, ut punctum aliquod eius ad axem priorem describat perpendicularem $=\frac{1}{\sqrt{2}}$; nam hanc esse ordinatam maximam statim patebit. Referet hinc lineæ istius pars quoad $+1$ realis formam signi $\infty$; pars imaginaria quoque facile patet, (pag. 202); interest quippe sæpius reale imaginariumque ex eadem expressione sibi invicem respondentia considerare.

Est autem linea ab $x=0$ utrinque symmetrice æqualis; quum $x^2$ et $x^4$ sint eadem, pro eadem quantitate ipsius $x$ sive positiva sive negativa; atque pro $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ utrinque tangens axi parallela est; nempe pro hoc valore fit

$$\partial y=\frac{x-2x^3}{\sqrt{x^2-x^4}}=0;$$

et substituto $\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\pm\omega$ ipsi $x$ in $y=\sqrt{x^2-x^4}$, ordinatam quamvis aliam minorem esse, quam pro $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ patet, nempe tum est

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Si vero pro parte ex. gr. positiva ipsius $x$ ad dextram considerentur ordinatæ intra $x=+\frac{1}{\sqrt{2}}$, erit

$$x^2-x^4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\omega\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\omega\right)^4$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{2\omega}{\sqrt{2}}+\omega^2-\left(\frac{1}{4}-\frac{4\omega}{2\sqrt{2}}+\frac{6\omega^2}{2}-\frac{4\omega^3}{\sqrt{2}}+\omega^4\right)$$
$$=\frac{1}{4}-2\omega^2+\frac{4\omega^3}{\sqrt{2}}-\omega^4,$$

quod minus priore $\frac{1}{4}$ est; nam $2\sqrt{2}.\omega^3-2\omega^2-\omega^4$ negativum est, pro valore ipsius $\omega$ minore quam $\frac{1}{\sqrt{2}}$; nam etsi $\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ponatur, erit $2\sqrt{2}.\omega^3=2\omega^2$, et si valor ipsius $\omega$ adhuc minor fractio vera sit, erit $2\omega^2>2\sqrt{2}.\omega^3$. Ita si ultra $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ accipiatur $\frac{1}{\sqrt{2}}+\omega=x$, erit

$$x^2-x^4=\frac{1}{4}-2\omega^2-2\sqrt{2}\,\omega^3-\omega^4,$$

ubi omnes termini præter primum, qui valor ipsius $x^2-x^4$ pro $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ est, negativi sunt.

*h*) Ast etiam pro $\partial=\infty$ fieri maximum vel minimum potest. Exemplum superius, $y=b-x^{\frac{2}{3}}$ dat maximum, et $y=b+x^{\frac{2}{3}}$ dat minimum pro

$x=0$; nempe $y$ pro quantumvis parvo $\omega=x$ posito, donec $\omega^{\frac{2}{3}}=b$ fiat, ordinatam $b-\omega^{\frac{2}{3}}$ utrinque minorem dat, quam $b-0^{\frac{2}{3}}=b$; postea vero fient ordinatæ utrinque negativæ crescentes in $\infty$; ita $y=b+(\pm\omega)^{\frac{2}{3}}$ dat pro quantovis $\omega$ ordinatam ipso $b$ maiorem.

De quo tamen plura inferius.

*i*) Punctum isolatum exhibet $y=\sqrt{x^3-x^2}$, pro $x=0$; nempe tum $y=0$, et initium abscissarum solus valor realis erit, usquequo $x=1$ fiat, et tum item $y=0$ punctum in abscissa dabit, unde linea ordinatis crescentibus ramo uno superius alteroque æquali inferius incipiet; ab $x=0$ autem sive negative in infinitum, sive positive usque ad 1 crescat $x$, valores omnes imaginarii sunt; nam $(\vdash x)^3$ et $-x^2$ utrumque negativum est, $(+x)^3$ autem pro $x<1$ est $<x^2$, adeoque radix e negativo erit. Est autem

$$\partial y=\frac{\frac{1}{2}(3x^2-2x)}{\sqrt{x^3-x^2}},$$

quod item imaginarium est tam pro $x$ negativo quam pro $x<1$; nempe ante et post punctum isolatum incrementa imaginaria sunt. Est autem

$$\partial^2 y=\frac{6x-2}{2\sqrt{x^3-x^2}}-\frac{(3x^2-2x)^2}{4\sqrt{(x^3-x^2)^3}},$$

quod pro $x>1$ aliquamdiu tantum negativum est; nam multiplicando per $4\sqrt{x^3-x^2}$, erit

$$12x-4-\frac{(3x^2-2x)^2}{x^3-x^2}=12x-4-\frac{(3x-2)^2}{x-1}$$

$$=\frac{12x^2-4x-12x+4-(9x^2-12x+4)}{x-1}$$

$$=\frac{3x^2-4x}{x-1},$$

ubi quum $x>1$ sit, $x-1$ positivum est, adeoque tantum de numeratore quæstio est; et facile valor reperitur, usque ad quem crescente $x$ ultra 1, $3x^2-4x$ semper negativum, postea autem semper positivum est;

itaque eousque lineæ ramus superior concavus, postea semper convexus erit. Est nempe $3x^2-4x=0$ pro $x=0$ et $x=\frac{4}{3}$. Dum $x$ positivum et $<\frac{4}{3}$, numerator $x(3x-4)$ semper negativus, pro $x>\frac{4}{3}$ autem semper positivus. Itaque pro $x=\frac{4}{3}$ inflexio est.

*k*) Sint denique adhuc exempla ad subtangentem finitam. Parabolæ pro parametro $p$ est

$$y=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}},\ \text{et}\ \partial y=\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-1}{2}};$$

adeoque subtangens

$$=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}:\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-1}{2}}=2x,$$

quod ad verticem fit o; et derivatæ ibidem valore infinito reddito, angulus tangentis, tangenti infinitæ respondens, rectus est.

Si $y=a^x$ sit, quod lineam logarithmicam exhibet, in qua abscissæ logarithmi ordinatarum quoad basim $a$ sunt, est (pag. 227)

$$\partial(a^x)=a^x\,\partial\log.(a^x)=a^x\,\partial(x\log.a)=a^x\log.a,$$

log. $a$ quoad $e$ intelligendo (pag. 183), unde

$$s=\frac{a^x}{a^x\log.a}=\frac{1}{\log.a};$$

et subtangens pro quovis $x$ est constans, æqualis modulo systematis, cuius basis $a$ est (pag. 187). Pro $a=e$ fit log. $a=1$, et $s=1$; est etiam tangens anguli, quem tangens cum axe facit $=1$ pro $x=0$; nam $e^0\log.e=1$, et angulus ipse est dimidius rectus; atque dum $x$ positive tendat ad $\infty$, tang. anguli tangentis crescit in infinitum, adeoque angulus tendit ad rectum; si vero $x$ negative $\rightharpoondown\infty$, tum $e^x\rightharpoondown 0$, adeoque tang. anguli tangentis $\rightharpoondown 0$ et angulus $\rightharpoondown 0$, fitque axis *asymptota*.

Nempe si detur talis recta $\mathfrak{A}$, qua pro axe sumta, dum abscissa crescit in infinitum, ordinata tendit ad o, adeoque non fit o (pag. 35 d citur $\mathfrak{A}$ *asymptota* lineæ generatæ. Sermo hic tantum de asymptota recta in plano est.

Posset quoque dici: si inter rectam infinitam $\mathfrak{A}$ et ramum $r$ lineæ cuiuspiam nulla recta cadat, quæ sufficienter producta aut cum neutro quidquam aut nonnisi punctum unum utrique commune habeat; tum $\mathfrak{A}$ dicitur *asymptota* ipsius $r$, si nihil cum $r$ commune habeat; si vero punctum commune habeat, *tangens* audit.

E definitione priore patet, quod si linea abscissarum et angulus ordinatarum ita accipi queat, ut a certo valore $\alpha$ abscissæ usque ad certum valorem $\beta$ eundo, ordinata $\rightharpoondown\infty$, priusquam abscissa $=\beta$ fieret, pro abscissa $=\beta$ vero fiat $\infty$, ordinata ista asymptota erit. Nempe et ordinata huic quam proxima secabit curvam. Ex. gr. si $y=\frac{1}{x}$, eundo a valore certo ex. gr. 1 ipsius $x$ usque ad $x=0$, fit, priusquam $x=0$ fierit, $y$ omni dabili maius, et pro $x=0$ fit $\infty$; et quicunque fuerit angulus ordinatarum, recta e puncto, ubi $x=0$ est, ordinatis reliquis parallela, asymptota lineæ per æquationem dictam generatæ est.

Sed pro valore ipsius $x$ crescente in infinitum, recta $Q$ infinita ad axem ex initio abscissarum perpendicularis explorandæ asymptotæ inservit: nimirum quævis recta $P$ in eodem plano est aut ipsi $Q$ parallela aut ad certum angulum $v$ secat eam et quidem ad certam distantiam $Z$ ab initio abscissarum, aut supra aut infra axem, aut in axe pro $Z=0$. Si $v$ rectus sit, ordinatæ ipsius $P$ omnes æquales erunt. Ordinatæ curvæ et rectæ $P$ dicantur $y$ et $Y$ pro eodem abscissæ fine. Si $v$ non sit rectus, $P$ secabit axem ad certum angulum $u$, qui pro angulo ordinatarum recto ipsum $v$ ad rectum complebit, per $v$ duorum angulorum deinceps positorum minorem intelligendo.

Nisi vero asymptota ad axem perpendicularis sit, quo in casu necesse est, a valore certo ipsius $x$ usque ad certum ordinatam curvæ fieri dato quovis maiorem, talia $Z$ et $u$ quærenda sunt, ut $Y-y$ a certo valore ipsius $x$ incipiendo in infinitum nunquam fiat $=0$, sed tendat ad 0.

In (Fig. 49) est $s:y=s-x:z$, et hinc, propter $s=\frac{y}{\partial y}$,

$$z=y-x\partial y;$$

erat vero $\partial y$ æquale tangenti illius anguli, ad quem tangens axem secat; et hinc si $x$ ad $\infty$ tendente $z\rightharpoondown Z$ ac $\partial y\rightharpoondown \text{tang.}\,u$, erit

$$Z - (y - x \,\text{tang.}\, u) \backsim 0.$$

In (Fig. 50) item est

$$K : Z = K + x : Y \quad \text{et} \quad K : Z = 1 : \text{tang.}\, u\,;$$

atque hinc

$$K = \frac{Z}{\text{tang.}\, u} \text{ et } Y = Z + x \,\text{tang.}\, u\,;$$

unde

$$Y - y = Z + x \,\text{tang.}\, u - y = Z - (y - x \,\text{tang.}\, u),$$

quod ut plane dictum est, tendit ad 0. Consequenter $\mathfrak{A}$ asymptota est.

Exemplo sit hyperbola æquilatera pro axe $= 1$, ubi

$$y = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\partial y = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x}} = \frac{1 + \frac{1}{2x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}},$$

quod $\backsim 1$, dum $x \backsim \infty$; itaque tangens anguli $u$ est 1. adeoque $u$ æquale est dimidio recto, $Z$ autem $= \frac{1}{2}$; nam

$$z = y - x\partial y = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} - \frac{x\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + x}} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

quod $\backsim \frac{1}{2}$, dum $x \backsim \infty$.

Si igitur tam $z = y - x\partial y$, quam $\partial y$ limite non infinito gaudeant, recta per finem ipsius $Z$ ad angulum, qui ipsum $u$ ad rectum complet, posita asymptota erit. Si $u = 0$ sit, manifesto

$$(y - x\partial y) \backsim y = Z,$$

atque tum ex

$$Z - (y - x \,\text{tang.}\, u) \backsim 0,$$

fit

$$Z - y \backsim 0.$$

Si $Z = 0$ esset, poterit ordinata quævis constante $b$ augeri, ut $Z = b$ fiat.

Si vero $\mathfrak{A}$ asymptota sit, ramus idem nulla alia gaudet. Nam quæcunque alia recta sit, sive parallela ipsi $\mathfrak{A}$ sive non, si ordinatæ huius cum $Y$ et $y$ iisdem abscissæ punctis respondentes $Y'$ dicantur, $Y'-Y$ adeoque $Y'-y$ non tendit ad o.

Imo demonstrari etiam potest, pro $x \rightharpoondown \infty$, asymptotam nonnisi tunc esse, si nec $z$, nec $\partial y$ tendat ad $\infty$; uti applicatio ad alios casus, ubi curva versus axem convexa atque et $Z$ infra axem cadit, facile ostenditur; sed ne figuræ multiplicentur, rem attigisse sufficiat.

Ex. gr. In parabola pro parametro $=1$, est

$$y=x^{\frac{1}{2}} \text{ et } \partial y=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

quod $\rightharpoondown 0$; atque

$$z=y-x\partial y=\sqrt{x}-\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{x},$$

quod $\rightharpoondown \infty$; itaque tangens ipsam $z$ ad distantiam data quavis maiorem ad angulum recto quam proximum secat, tendens eo ut axi parallela fiat, quod tamen ad distantiam omni dabili maiorem id est in nullo loco determinato fieri potest, ut ibidem asymptotam præbeat.

Exhiberi quidem linea pro quovis finito $Z$ et angulo $u$ potest, cuius ibidem asymptota sit; si nempe $y=Z+x\,\text{tang.}\,u+\omega$ sit, per $\omega$ functionem ipsius $x$ talem intelligendo, quæ $\rightharpoondown 0$, dum $x \rightharpoondown \infty$, tunc enim

$$y-x\,\text{tang.}\,u=Z+\omega \text{ et } y-x\,\text{tang.}\,u \rightharpoondown Z,$$

atque tum

$$Y-y=Z+x\,\text{tang.}\,u-y=Z-(y-x\,\text{tang.}\,u)\rightharpoondown 0.$$

Et facile patet, ordinatarum simultanearum lineæ, pro qua $y-x\partial y \rightharpoondown \infty$ differentiam non tendere ad o, ut asymptota eadem gaudeant. Ex. gr. pro casu præsente parabolæ (pro quovis $Z$)

$$Z+x\,\text{tang.}\,u+\omega-x^{\frac{1}{2}} \rightharpoondown -\infty$$

VII. Sed per superius (pag. 311) promissum aliquid de valore quoti duarum functionum $u$ et $v$, dum, pro $x=b$, utraque o fit, adiiciendum.

Si pro quovis $x$ sit $vz=u$, atque a certo valore $a$ ipsius $x$, ante-quam $x=b$ fiat, semper sit $z=\frac{u}{v}$, pro $x=b$ vero $u$ fiat $=0$ et $v=0$; valor quoti verus sub forma $\frac{0}{0}$ quantitatem quamvis denotante latens reperitur sic.

Ex $u=vz$ sequitur $\partial u=v\partial z+z\partial v$, quod pro $x=b$ fiet $=z\partial v$, quia tum $v=0$; atque hinc $z=\partial u:\partial v$, si non sit iterum $\partial u=0=\partial v$ pro $x=b$. Si vero utrumque 0 fiat, operatio dicta iterum atque iterum repeti potest.

Ex. gr. Formula summæ seriei geometricæ pro exponente $x$ et numero terminorum $\mu$ atque termino primo $=\alpha$, est $(\alpha x^{\mu}-\alpha):(x-1)$; quod pro $x=1$ fit $\frac{0}{0}$, series autem est $\alpha+\alpha+\alpha+\ldots$; atque est pro $x=1$

$$\frac{\partial(\alpha x^{\mu}-\alpha)}{\partial(x-1)}=\frac{\mu\alpha x^{\mu-1}}{1}=\mu\alpha\,,$$

quæ plane summa vera est.

Ita si $z=\frac{\alpha^2-x^2}{\alpha-x}$; fit hoc quoque $\frac{0}{0}$ pro $x=\alpha$; at

$$\frac{\partial(\alpha^2-x^2)}{\partial(\alpha-x)}=\frac{-2x}{-1}=2\alpha$$

pro $x=\alpha$, qui plane valor verus est; nimirum eousque semper $\alpha+x$ fuit quotus, nempe $(\alpha+x)(\alpha-x)=\alpha^2-x^2$; et dum $x\frown\alpha$, quotus $\frown 2\alpha$; crescente vero postea ipso $x$, item semper $\alpha+x$ fit quotus in $\infty$, uti etiam pro $x=\alpha$ est $2\alpha=\alpha+x$.

Sæpe evenit, ut quotus $\frac{u}{v}$ formam $\frac{\infty}{\infty}$ induat pro valore certo ipsius $x$; atque huius quoque valor reperiatur, reducendo ad formam $\frac{0}{0}$; nempe $\frac{1}{\infty}=0$.

VIII. Hactenus ordinatæ omnes parallelæ erant; mentio etiam facienda est ordinatarum e puncto exeuntium, pro abscissis aut in recta ut prius acceptis, aut in peripheria radii 1 e puncto ordinatarum communi tanquam centro descripta, ita ut via puncti a certo puncto peripheriæ dictæ pro principio abscissarum posito semper porro moti, sive positive sive negative incipiendo continuandoque motum, determinet abscissam.

Exemplo quoad prius sit parabola (Fig. 49), ubi $y=x^{\frac{1}{2}}$ pro parametro $=1$. Est

$$k+x:y=1:\text{tang.}\,q\,;$$

et hinc

$$k\,\text{tang.}\,q+x\,\text{tang.}\,q=y=x^{\frac{1}{2}},$$

atque

$$x=k^2\,\text{tang.}^2\,q+x^2\,\text{tang.}^2\,q+2kx\,\text{tang.}^2\,q\,;$$

e quo exprimi $x$ per $q$ et $k$, atque expressio talis ipsius $x$ in $y=x^{\frac{1}{2}}$ substitui potest, ut $y$ per $k$ et $q$ expressum prodeat; atque hinc etiam ordinata quævis $\mathfrak{ab}$ pro principio abscissarum $\mathfrak{a}$ et angulo $q$, quum sit $=\sqrt{(k+x)^2+y^2}$, per $k$ et $q$ exprimi potest, ut in expressione nonnisi $q$ sit variabilis.

Exemplo quoad posterius sit spiralis archimedea, et spiralis logarithmica. In priore est ordinata $y=au$, in posteriore autem $y=a^u$; in utroque certam unitatem ponendam esse e superioribus manifestum est. Prior æquatio eadem, quæ rectæ pro abscissis in recta et ordinatis parallelis est; posterior eadem quæ lineæ logarithmicæ.

Fiet vero $y=au=0$ pro $u=0$, et $y=a$ pro $u=1$, et $y=2a$ pro $u=2$ & . . .

Ita $y=a^u$ fiet $=1$ pro $u=0$, et $y=a$ fiet pro $u=1$, atque $y=a^2$ pro $u=2$ & . . . Pro $u=-1$ autem fiet $y=a^{-1}$, et pro $u=-2$ fiet $y=a^{-2}$. Unde si positivum $a>1$ sit, $y\rightharpoonup\infty$ dum positivum $u\rightharpoonup\infty$, at $y\rightharpoonup 0$ dum negativum $u\rightharpoonup\infty$. Atque si positivum $a<1$, res inverse est; nempe $y\rightharpoonup 0$, dum $u$ positivum $\rightharpoonup\infty$, et $y\rightharpoonup\infty$, dum $u$ negativum $\rightharpoonup\infty$. In utroque casu autem $y$, dum tendat ad $0$, nunquam $=0$ fiet, adeoque nec unquam in principium ordinatarum, centrumque peripheriæ radii $1$, in qua abscissæ $u$ accipiuntur, perveniet, in quantumvis excreverit abscissa $u$.

Si vero $a=1$, tum in perpetuum in peripheria radii $1$ terminabuntur ordinatæ.

Est autem manifesto $u=\log.y$ (quoad $a$), si $y=a^u$.

Hæc est illa linea, cuius evolutam ipsi æqualem esse Iac. Bernoulli detegens eam cum inscriptione «*Haec eadem mutata resurgit*» sepulcro suo incidi postulabat, ut quum semper renascatur, resurrectionis vitæque nunquam interituræ spei symbolum esset.

Quomodo vero subtangentes pro talibus curvis et reliqua determinentur, instituti ratio silentio præterire iubet.

IX. Superius (pag. 208) et proxime (pag. 306) mentione *Theorematis Tayloriani* facta, exponendum venit.

1. Si a valore certo $\alpha$ ipsius $x$ usque ad valorem certum $\beta$ sit pro iisdem finitis $A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots$

$$F(x+\omega)=A+B(x+\omega)^b+C(x+\omega)^c+\ldots,$$

sive $\omega=0$, sive tale fuerit, ut evolutio binomialis (pag. 172) in omnibus terminis locum habeat, quod semper est pro $\omega \lessdot x$, atque hæc series aut terminata aut convergens sit: erit

$$F(x+\omega)=F(x)+\omega\,\partial F(x)+\frac{\omega^2}{2}\,\partial^2 F(x)+\frac{\omega^3}{2.3}\,\partial^3 F(x)+\ldots$$

Nam terminis per (pag. 172) evolutis, et serie e quovis termino orta verticaliter deorsum scripta, erit:

$$\begin{aligned} F(x+\omega)=A+Bx^b+Cx^c+\ldots \\ +(bBx^{b-1}+cCx^{c-1}+\ldots)\,\omega \\ +\big((b-1)bBx^{b-2}+(c-1)cCx^{c-2}+\ldots\big)\frac{\omega^2}{2} \\ +\big((b-2)(b-1)bBx^{b-3}+(c-2)(c-1)cCx^{c-3}+\ldots\big)\frac{\omega^3}{2.3} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Est autem linea superior $=F(x)$, secunda vero $=\omega\partial F(x)$, tertia $=\frac{\omega^2}{2}\partial^2 F(x)$, quarta $=\frac{\omega^3}{2.3}\partial^3 F(x)$, ... et $\mu$ta$=\frac{\omega^{\mu-1}}{2.3\ldots(\mu-1)}\partial^{\mu-1}F(x)$.

Nempe etiamsi

$$A+B(x+\omega)^b+C(x+\omega)^c+\ldots$$

series infinita sit, accipiantur termini numero certo $m$, et quidem tali pro quovis dato $N$, ut summa terminorum illorum $S$ dicta, sit $F(x+\omega)-S<\frac{1}{N}$, atque etiam summa totidem terminorum seriei

$$A+Bx^b+Cx^c+\ldots$$

$s$ dicta, sit $F(x)-s<\frac{1}{N}$. Patet, cuivis termino lineæ horizontalis secundæ adjecto factore communi, ita porro cuiusvis lineæ horizontalis termino cuivis adiecto factore communi ad finem posito, seriem verticalem, cuius primus terminus est $Bx^b$, esse seriem convergentem (per hypothesim), cuius summa $\frown B(x+\omega)^b$, ita seriem verticalem, cuius primus terminus est $Cx^c$ esse seriem convergentem, cuius summa $\frown C(x+\omega)^c$, et ita porro; atque seriei, cuius termini sunt lineæ horizontales, summam

$$\frown A+B(x+\omega)^b+C(x+\omega)^c+\ldots+M(x+\omega)^m.$$

Sed est etiam

$$bBx^{b-1}=\partial Bx^b \text{ et } cCx^{c-1}=\partial Cx^c,$$

et ita porro usque ad ultimum; atque hinc (pag. 225) est

$$bBx^{b-1}+cCx^{c-1}+\ldots+mMx^{m-1}=\partial(Bx^b+Cx^c+\ldots+Mx^m)=\partial s.$$

Ita in quavis columna quivis terminus deorsum sequens, derivata præcedentis est, et quævis $\mu$-ta linea horizontalis (præter factorem ultimum communem) est, si linea prima non numeretur, $=\partial^\mu s$.

Unde manifesto

$$s+\omega\partial s+\frac{\omega^2}{2}\partial^2 s+\frac{\omega^3}{2.3}\partial^3 s+\ldots\frown S.$$

Ast etiam ipsi $s$ ubique $F(x)$ substituendo, seriei summa ad limitem eundem tendit, ad quem $S$, nempe $\frown F(x+\omega)$. Nam consideratis terminis seriei utriusque simultaneis, quilibet prioris per ei respondentem terminum posterioris divisus tendit ad 1; nempe

$$s : F(x) \backsim 1, \quad \partial s : \partial F(x) \backsim 1, \ldots$$

Nam si $\partial s - \partial F(x)$ pro dato quovis $N$ nequeat fieri $\lessdot \partial F(x) : N$, sit $k$ minimum tale ut sit

$$\partial s - \partial F(x) \gtrdot \frac{\partial F(x)}{k};$$

erit

$$\int \partial s - \int \partial F(x) \gtrdot \int \frac{\partial F(x)}{k},$$

seu

$$s - F(x) \gtrdot \frac{F(x)}{k},$$

contra hypothesim, quum $s - F(x) \backsim 0$. Pariter patet quod $\partial^2 s : \partial^2 F(x) \backsim 1$, et ita porro. Consequenter quum etiam $\dfrac{S}{F(x+\omega)} \backsim 1$, sequitur per (pag. 178) etiam:

$$F(x) + \omega \partial F(x) + \frac{\omega^2}{2} \partial^2 F(x) + \frac{\omega^3}{2.3} \partial^3 F(x) + \ldots \backsim F(x+\omega).$$

Valet autem hoc de casu quovis, ubi supposita locum habent; nempe de quavis functione, quæ forma dicta exprimi potest, atque de talibus valoribus ipsorum $x$ et $\omega$, ut dictum est.

2. Interim tamen quæcunque functio $k(x)$ fuerit, serie analoga evolvi poterit; et quidem iuxta ill. LAGRANGE ubicunque subsistere libuerit, valoribus complementi maximo minimoque quasi finibus, inter quos continetur, assignatis. Unde quando complementum tendit ad 0, dum numerus terminorum tendat ad infinitum, series converget, ut (pag. 150). Est nimirum

$$k(x) = k(0) + x \partial k(u) = k(0) + x \partial k(0) + \frac{x^2}{2} \partial^2 k(u) = \ldots$$

$$= k(0) + x \partial k(0) + \frac{x^2}{2} \partial^2 k(0) + \frac{x^3}{2.3} \partial^3 k(0) + \ldots + \frac{x^\nu}{1.2.3\ldots\nu} \partial^\nu k(u);$$

per $k(0)$ intelligendo id quod fit, si in $k(x)$ ipsi $x$ ubique 0 substituatur, et per $\partial k(0)$ intelligendo hic non derivatam ipsius $k(0)$, sed id quod fit, si in $\partial k(x)$ ipsi $x$ ubique 0 substituatur, (quod etiam ad ambiguitatem tollendam stellula præposita distingui posset), per $u$ vero intelligitur quantitas quæpiam a o usque ad $x$ inclusive.

Nam poni potest

$$k(x) = k\big((x - xz) + xz\big) = k(x - xz) + xP,$$

ubi

$$P = \frac{k(x) - k(x - xz)}{x};$$

est vero manifesto $P = 0$ pro $z = 0$, quia tum fit $k(x - xz) = k(x)$.

Ita poni potest

$$k(x) = k\big((x - xz) + xz\big) = k(x - xz) + xz\partial k(x - xz) + x^2 Q;$$

nam dici potest

$$Q = \frac{k(x) - k(x - xz) - xz\partial k(x - xz)}{x^2};$$

quod continuari posse patet, ut prodeant $R$, $S$, $T$, . . . cum derivatis ipsius $k(x - xz)$ ac potentiis ipsius $xz$ altioribus. Est autem etiam $Q = 0$ pro $z = 0$, nam ut prius expressio tunc ad $k(x)$ redigitur; idem de $R$, $S$, . . . patet.

Hinc si $k(x)$ constans ponatur, et derivatæ utrinque quoad $z$ accipiantur, erit

$$0 = -x\partial k(x - xz) + x\partial k(x - xz) - x^2 z\partial^2 k(x - xz) + x^2\partial Q,$$

idest

$$0 = -x^2 z\partial^2 k(x - xz) + x^2\partial Q,$$

adeoque

$$\partial Q = z\partial^2 k(x - xz)$$

et

$$k(x) = k(x - xz) + xz\partial k(x - xz) + x^2 \int z\partial^2 k(x - xz).$$

Ita poni potest

$$k(x) = k(x - xz) + xz\partial k(x - xz) + \frac{x^2 z^2}{2}\partial^2 k(x - xz) + \frac{x^3 z^3}{2.3}\partial^3 k(x - xz) + \dots$$

$$+ \frac{x^{p-1} z^{p-1}}{2.3\dots\overline{p-1}}\partial^{p-1} k(x - xz) + \frac{x^p z^p}{2.3\dots p}\partial^p k(x - xz) + x^{p+1} T;$$

nam subtrahendo terminos ad dextram omnes præter ultimum, et dividendo per $x^{p+1}$, quotus $T$ dici potest ut antea, quod item manifesto $=0$ pro $z=0$ fieri debet, summa ceterorum terminorum ad $k(x)$ reducta.

Accipiendo autem derivatam utrinque quoad $z$, fiet

$$0=-x\partial k(x-xz)+x\partial k(x-xz)-x^2z\partial^2 k(x-xz)+\frac{2x^2z}{2}\partial^2 k(x-xz)-\ldots$$
$$-\frac{x^p z^{p-1}}{2.3\ldots p-1}\partial^p k(x-xz)+\frac{px^p z^{p-1}}{2.3\ldots p}\partial^p k(x-xz)$$
$$-\frac{x^{p+1}z^p}{2.3\ldots p}\partial^{p+1}k(x-xz)+x^{p+1}\partial T,$$

ubi *quum primum par terminorum, ita secundum et quotumvis* $=0$ sit, fiet

$$\partial T=\frac{z^p}{2.3\ldots p}\partial^{p+1}k(x-xz),$$

adeoque

$$T=\int\frac{z^p\partial^{p+1}k(x-xz)}{2.3\ldots p};$$

nempe post terminum $x^p z^p \partial^p k(x-xz):2.3\ldots p$ complementum est:

$$\frac{x^{p+1}}{2.3\ldots p}\int x^p\partial^{p+1}k(x-xz).$$

Si iam valor ipsius $z$ accipiatur nonnisi a $0$ usque ad $1$ inclusive, et dicatur $M_{p+1}$ valor ipsius $\partial^{p+1}k(x-xz)$ maximus sensu algebraico (uti pag. 31, ubi $0>-1$), et minimus valor eius dicatur $N_{p+1}$: tum pro nullo valorum dictorum ipsius $z$ est

$$\int z^p N_{p+1}>\int z^p\partial^{p+1}k(x-xz)>\int z^p M_{p+1}.$$

Sed $M_{p+1}$ et $N_{p+1}$ constantes sunt, adeoque

$$\int z^p M_{p+1}=\frac{z^{p+1}}{p+1}M_{p+1}\ \text{ et }\ \int z^p N_{p+1}=\frac{z^{p+1}}{p+1}N_{p+1}.$$

Consequenter complementum nempe $x^{p+1}\,T$ pro $z=1$ non est

$>x^{p+1} M_{p+1} : 1.2.3\ldots p(p+1)$ et non $<x^{p+1} N_{p+1} : 1.2.3\ldots p\,(p+1)$, nempe tum $z^{p+1}=1$.

At si $u$ quantitatem quamlibet denotet a o usque ad $x$; quum $x-xz=x\,(1-z)$, pro valore ipsius $z$ a o usque ad 1 accepto, manifesto per $u$ valor quivis ipsius $x-xz$ denotari potest; itaque sub $\partial^{p+1} k(u)$ continentur omnes valores ipsius $\partial^{p+1} k(x-xz)$, adeoque etiam $M_{p+1}$ et $N_{p+1}$.

Poterit igitur complementum per $x^{p+1}\,\partial^{p+1}\,k(u)$ exprimi, ita ut si maximus minimusque valor huius quæratur, complementum inter hos contineri pro quovis $z$, adeoque et pro $z=1$ constet. Sed pro $z=1$ fit $x-xz=0$ et $k(x-xz)=k(0)$ atque $\partial k(x-xz)=\partial k(0)$.

Consequenter

$$k(x)=k(0)+x\partial k(0)+\frac{x^2}{2}\partial^2 k(0)+\ldots+\frac{x^p\partial^p k(0)}{2.3\ldots p}+\frac{x^{p+1}\partial^{p+1}k(u)}{2.3\ldots p(p+1)}.$$

Ex. gr. Sit $k(x)=(a+x)^\mu$; erit

$$(a+x)^\mu=a^\mu+\mu a^{\mu-1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{2}a^{\mu-2}x^2+\ldots+\frac{x^\nu\partial^\nu k(u)}{2.3\ldots\nu};$$

nam

$$\partial k(x)=\mu(a+x)^{\mu-1},\ \partial^2 k(x)=\mu(\mu-1)(a+x)^{\mu-2},\ \ldots$$

adeoque

$$x\partial k(0)=x\mu a^{\mu-1},\ \frac{x^2}{2}\partial^2 k(0)=\frac{x^2}{2}\mu(\mu-1)a^{\mu-2},\ \ldots$$

Complementum $x^\nu\partial^\nu k(u) : 2.3\ldots\nu$ autem est

$$\frac{x^\nu\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{2.3\ldots\nu}(a+u)^{\mu-\nu},$$

cuius valores omnes prodibunt, si ipsi $u$ valores a o usque ad $x$ substituantur; eritque manifesto valor verus inter

$$\frac{x^\nu\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{2.3\ldots\nu}a^{\mu-\nu}\ \text{et}\ \frac{x^\nu\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{2.3\ldots\nu}(a+x)^{\mu-\nu}.$$

3. Hinc substituendo e superiore $F(x+\omega)$, $k$ ipsi $F$, et $x$ ipsi o atque $\omega$ ipsi $x$: prodibit formula eadem pro $k(\omega)=F(x+\omega)$, quæ prius; nempe

$$k(\omega)=F(x+\omega)=k(0)+\omega\vartheta k(0)+\frac{\omega^2}{2}\vartheta^2 k(0)+\ldots+\frac{\omega^\nu}{2.3\ldots\nu}\vartheta^\nu k(u)$$

$$=F(x)+\omega\vartheta F(x)+\frac{\omega^2}{2}\vartheta^2 F(x)+\ldots+\frac{\omega^\nu}{2.3\ldots\nu}\vartheta^\nu F(x+u),$$

per $u$ quantitatem quampiam a o usque ad $\omega$ intelligendo, ubi terminus ultimus complementum est, quod si $\sim 0$, series convergens est, alioquin etiam maximum minimumque valorem, inter quos verus continetur, exhibens.

4. Quod complementum dictum in exemplo prius allato pro $x \lessdot a$ semper tendit ad o, excepto si $\mu$ integer sit, quo in casu fit post aliquem terminum semper $=0$, e superiore (pag. 172) patet; attamen quoad alios casus necesse est de valore facti e factoribus, quorum numerus crescit ad infinitum, uti hic $\frac{\mu}{1}\cdot\frac{\mu}{2}\ldots\frac{\mu-\nu+1}{\nu}$, aliquid dicere.

Sint factores $A$, $B$, $C$, ...; erit (pag. 163)

$$A\,.\,B\,.\,C\ldots=e^{\log.A+\log.B+\log.C+\ldots}.$$

Itaque si

$$\log.A+\log.B+\log.C+\ldots\sim\alpha,$$

tum $ABC\ldots\sim e^\alpha$; adeoque si $\alpha=0$, tum $ABC\ldots\sim 1$; si $\alpha=\,\mapsto\!\!+\infty$, tum $ABC\ldots\sim\infty$; si $\alpha=\,\mapsto\!-\infty$, tum $ABC\ldots\sim 0$, nam 1 divisum per $e$, elevatum ad quantitatem positivam in omni dabili maius crescentem, tendit ad o.

Distinguantur factores hi, qui singuli certo finito eodem minores sint, nec ullus $=0$ sit, et omnes positive accipiantur, in duas species: primo in tales, quorum quivis $\lessdot 1$, secundo in tales quorum quivis $\gtrdot 1$; nempe factores quotvis unitati æquales non mutant factum.

Lege factorum data, poterunt plures in unum mutari, et si præter numerum certum factorum reliquorum factores, quorum numerus dabili quovis maior est, ad primam speciem pertineant: erit, si innumerabiles eiusmodi factores inter eos dentur, quorum quivis certa eadem fractione vera minor est, factum ex iis $\sim 0$, adeoque etiam factum ex his et ceteris, qui numero finito sunt, $\sim 0$.

Si factores ii, quorum numerus dabili quovis maior est, ad secundam speciem pertineant: tum si inter eos innumerabiles dentur tales, quorum quivis $> 1+\beta$, per $\beta$ quantitatem positivam, etsi $\lessdot 1$ sit, intelligendo eandem pro omnibus, erit factum $\sim \infty$.

At si solummodo tales factores primæ speciei innumerabiles sint, quorum quivis est $> \frac{1}{3}$, atque ab aliquo $a$ eorundem incipiendo sequentes $b, c, \ldots$ crescant tendendo ad limitem 1, erit ipsorum $a', b', \ldots$ quilibet positivum et $< \frac{2}{3}$, si $1-a$ dicatur $a'$, $1-b$ dicatur $b'$ &c.

Est autem (pag. 184)

$$\log. a = \log.(1-(1-a)) = \log.(1-a') = -a' - \frac{a'^2}{2} - \frac{a'^3}{3} - \ldots,$$

ita

$$\log. b = -b' - \frac{b'^2}{2} - \frac{b'^3}{3} - \ldots,$$

atque primus terminus cuiusvis harum serierum est maior summa sequentium; nam

$$\frac{a'^2}{2} + \frac{a'^3}{3} + \ldots < \frac{a'^2}{2(1-a')},$$

quia exponens seriei primus est $\frac{2a'}{3}$, sequens est $\frac{3a'}{4}$ et ita porro; est nempe ubivis exponens $< a'$, adeoque summa seriei vera minor, quam si exponens ubique $a'$ esset. Est autem $a' > a'^2 : 2(1-a')$, quum $a'$ positivum et $< \frac{2}{3}$ sit; nam dividendo per $a'$, est

$$1 > \frac{a'}{2(1-a')},$$

et substituendo $\frac{2-\omega}{3}$ ipsi $a'$, pro $\omega$ positivo et $< 2$ est

$$1 > \frac{2-\omega}{3} : \frac{2(3-2+\omega)}{3}; \quad \text{nempe } 1 > \frac{2-\omega}{2+2\omega}.$$

Unde quum termini omnes negativi sint, nonnisi de $a'+b'+c'+\ldots$ quæstio fit, atque si hoc tendit ad infinitum, tum $ABC\ldots abc\ldots\backsim e^{-\infty}$ adeoque $\backsim 0$; si vero $a'+b'+c'+\ldots\backsim\alpha$ finitum quoddam, $abc\ldots\backsim e^{-\alpha}$, et $ABC\ldots abc\ldots\backsim Pe^{-\alpha}$ finitum quoddam, si factum e reliquis factoribus, quorum numerus certus est, $P$ dicatur; signum facti autem e signis factorum liquet.

Si vero factores innumerabiles speciei secundæ sint, quorum quilibet est $\lessdot 1+\frac{2}{3}$, atque a certo $a$, eorum incipiendo sequentes $b, c, \ldots$ decrescendo tendunt ad limitem 1, et $a-1$ dicatur $a'$, $b-1$ dicatur $b'$ &c.: erit

$$\log. a = \log.\bigl(1+(a-1)\bigr) = \log.(1+a')$$

$$= a' - \frac{a'^2}{2} + \frac{a'^3}{3} - \ldots,$$

ita

$$\log. b = b' - \frac{b'^2}{2} + \frac{b'^3}{3} - \ldots;$$

eritque ut prius et hic cuiusvis seriei primus maior quam summa sequentium, etsi omnes positivi essent; est autem $a'+b'+\ldots$ positivum, atque si $a'+b'+\ldots\backsim\alpha$, tum pro $\alpha$ finito, $abc\ldots$ tendit ad $e$ elevatum ad positivum aliquod; nam etsi omnes sequentes termini negativi essent, summa eorum ab $a'+b'+c'+\ldots$ superaretur. Si vero $a'+b'+c'+\ldots\backsim\infty$, tum $abc\ldots$ quoque fit omni dabili maius; nam terminus secundus seriei logarithmum ipsius $a$ exprimentis est maior summa sequentium negativorum; et idem terminus est minor, quam tertia pars prioris.

Nempe $a'^4 : 4(1-a'^2)$ est maius summa negativorum post $\frac{a'^3}{3}$ sequentium. Nam per $a'^2$ dividendo est

$$\frac{1}{2} > \frac{(2-\omega)^2}{4\cdot 3^2} : \left(1 - \frac{(2-\omega)^2}{3^2}\right),$$

quia hoc est

$$= \frac{(2-\omega)^2}{4\cdot 3^2 - 4(2-\omega)^2},$$

ubi numerator est $<4$ et denominator $>20$. Idem de $b$ et reliquis patet. Porro quum

$$a' < \frac{2}{3},\ b' < \frac{2}{3}, \ldots$$

est

$$\frac{a'^2}{2} < \frac{2a'}{3.2},\ \frac{b'^2}{2} < \frac{2b'}{3.2}, \ldots;$$

itaque

$$\frac{a'^2}{2} + \frac{b'^2}{2} + \frac{c'^2}{2} + \ldots < \frac{2}{3.2}(a' + b' + c' + \ldots)$$

Unde quum summa omnis negativi sit

$$\lhd a'^2 + b'^2 + c'^2 + \ldots,$$

et hoc sit

$$\lhd \frac{2}{3}(a' + b' + c' + \ldots),$$

manebit additis seriebus omnibus maius positivum quam $\frac{1}{3}(a'+b'+c'+\ldots)$.

Consequenter, si $a'+b'+c'+\ldots \frown \infty$, etiam $abc\ldots \frown \infty$, adeoque et $ABC\ldots abc \frown \infty$.

5. Applicando hoc ad theorema binomiale (pag. 122) posito $a=1$ erit

$$k(x) = (1+x)^\mu = k(0) + x\partial k(0) + \frac{x^2}{2}\partial^2 k(0) \ldots + \frac{x^\nu}{2.3\ldots\nu}\partial^\nu k(u)$$

$$= 1 + x\mu + x^2\mu\frac{(\mu-1)}{2} + \ldots + x^\nu\mu\frac{(\mu-1)}{2}.\frac{\mu-2}{3}\ldots\frac{\mu-\nu+1}{\nu}(1+u)^{\mu-\nu},$$

et ultimus terminus complementum est; nempe in nullis terminis potentiæ ipsius 1 sunt adscriptæ, quamvis proprie $\partial k(x)$ fuisset $\mu(1+x)^{\mu-1}$ adeoque $\partial k(0) = \mu(1+0)^{\mu-1}$. Erit autem complementum istud pro quovis $\mu$ sive positivo sive negativo, si $x \lhd 1$ fuerit, semper tendens ad 0, si $\nu \frown \infty$, uti superius demonstratum est; at applicetur ad $x = \pm 1$, unde applicatio ad alios casus patet.

Sit $\mu$ negativum et $\rhd 1$: erit coëfficientis $(p+1)$-ti formula

$$\frac{\mu'}{1}.\frac{\mu'+1}{2}\frac{\mu'+2}{3}\ldots\frac{\mu'+p-1}{p},$$

si factores positive accipiantur et $\mu' = -\mu$ sit, ubi factor quilibet $> 1$ est, nam $\mu' > 1$, at

$$\frac{\mu'+p-1}{p}-1=\frac{\mu'-1}{p}\sim 0$$

Sit $(\mu'+p-1):p$, id quod $a$ dictum erat, erit

$$b=\frac{\mu'+p}{p+1} \text{ et } c=\frac{\mu'+p+1}{p+2}, \ldots$$

atque

$$a'=\frac{\mu'-1}{p},\ b'=\frac{\mu'-1}{p+1},\ c'=\frac{\mu'-1}{p+2}, \ldots$$

atque

$$a'+b'+c'+\ldots=(\mu'-1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p+3}+\ldots\right),$$

quod $\sim\infty$, quum $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\sim\infty$. (pag. 175).

Itaque quum potentia ipsius $x$ in hoc casu neque augeat neque minuat, complementum continebitur inter quantitatem omni dabili maiorem per $(1+0)^{\mu-r}=1$ multiplicatam, atque eandem per $(1+1)^{\mu-r}$, quod omni dabili minus fieri potest, multiplicatam.

Aliud est, si $x<1$ sit, tunc enim (pag. 165) $p$ ita accipi potest, ut quum totidem factores $x$ sint, $\frac{x(\mu'+p-1)}{p}<1$ sit; atque postea quivis et factor certa eadem fractione vera minor maneat. Nempe pro $\mu$ negativo est formula $p$-ti factoris positive accepti

$$\frac{x(\mu'-1+p)}{p}=\frac{x(\mu'-1)}{p}+x,$$

ubi patet, quod $x(\mu'-1):p$ decrescat crescente $p$ (sive $\mu'>1$ sive $\mu'<1$ sit) et tendit ad 0, si $p\sim\infty$; unde factor $\sim x$. Est autem $\mu'-1$ positivum pro $\mu'>1$, adeoque factor decrescit, tendendo ad limitem $x$. Si itaque fractio vera

$$f=x+\lambda \text{ et } \frac{x(\mu'-1)}{p}<\lambda$$

fiat, erit in posterum quivis factor $<f$, consequenter factum tendet ad 0.

6. At pro $x=1$, si $\mu'$ (denotans oppositum ipsius $\mu$) sit $\lessdot 1$, erit formula $p$-ti factoris

$$\frac{\mu'-1+p}{p}=1+\frac{\mu'-1}{p},$$

ubi $(\mu'-1):p \rightharpoondown 0$, dum $p \rightharpoondown \infty$, adeoque factor $\rightharpoondown 1$, sed est semper $\lessdot 1$, quia $\mu'-1$ negativum est, fit autem $(\mu'-1):p$ crescente $p$ minus adeoque factor maior; et erit pro hoc casu superius

$$a'+b'+c'+\ldots=\frac{1-\mu'}{p}+\frac{1-\mu'}{p+1}+\frac{1-\mu'}{p+2}+\ldots$$

$$=(1-\mu')\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots\right),$$

quod $\rightharpoondown\infty$; consequenter pro hoc casu factum $\rightharpoondown 0$. (pag. 329).

Itaque complementum seriei ipsius $(1+1)^{\mu}$ lege binomiali evolutæ continebitur inter factum dictum, quantitatem quæ omni dabili minor reddi potest, per $(1+1)^{\mu-n}$, quæ item dabili quovis minor fit, multiplicatum, et idem factum dictum per $(1+0)$ multiplicatum.

Idem patet de $\mu$ positivo, sive $>1$ sive $=1$ sive $<1$ sit; nempe formula factoris $p$-ti est

$$\frac{\mu+1-p}{p}-=\frac{\mu+1}{p}-1,$$

quod positive accipiendo fit $1-\frac{\mu+1}{p}$; et factum ut prius $\rightharpoondown 0$.

7. Quod vero series ipsius $(1+1)^{e}$ pro $e$ negativo et $\gtrdot 1$ divergat, subsidio criterii recentius ab Oliviero detecti, nuper mihi communicati, facile patet. Nempe si $u_n$ sit terminus generalis seriei, cuius omnes termini positivi vel omnes negativi sint, atque non sit $n\,.\,u_n \rightharpoondown 0$, series divergit.

Construatur series accipiendo summas parium oppositorum se invicem excipientium; nempe in $(1+1)^{e}$ pro $e$ negativo evolutæ, erit terminus primus $1$, *sequens erit negativus, et tum positivus, item negativus, positivus &,*

summa primi negativi et sequentis positivi, ac summa sequentis negativi et positivi, et ita porro dabunt seriem, cuius terminus quivis $\frac{n+2}{2}$-tus exprimi per

$$\frac{(e+1)\ e(e-1)\dots(e-n)}{2.3\dots(n+1)(n+2)}$$

poterit; nam duo termini proximi per

$$\frac{e(e-1)\dots(e-n)}{2.3\dots(n+1)} \text{ et } \frac{e(e-1)\dots(e-n)\ (e-n-1)}{2.3..(n+1)\ (n+2)}$$

exprimi possunt; et horum summa est

$$=\frac{e(e-1)..(e-n)(n+2+e-n-1)}{2.3..(n+1)\ (n+2)}=\frac{e(e-1)\dots(e-n)(e+1)}{2.3\dots(n+1)(n+2)};$$

erit autem terminus iste novæ seriei $\frac{n+2}{2}$-tus; et substituendo $\frac{n+2}{2}$ ipsi $n$ in $n.u_n$ et valorem dictum ipsius $u_n$, erit

$$\frac{(e+1)(n+2)\ e(e-1)\dots(e-n)}{2(n+2)\ 2.3\dots(n+1)}=n.u_n;$$

quod $\backsim\infty$, quia $\frac{(e+1)}{2}$ est constans, $\frac{n+2}{n+2}=1$, et (pag. 331)

$$\frac{e(e-1)\dots(e-n)}{2.3\dots(n+1)}\backsim\infty.$$

Nempe duobus terminis proximis constructis, fit exponens seriei $\frac{(e-n-1)\ (e-n-2)}{(n+3)\ (n+4)}$, qui pro $e$ negativo et $\lessdot 2$ erit $\lessdot 1$, adeoque termini decrescent. Pro $e=-2$ autem est constans, et pro $e$ negativo et $\gtrdot 2$ fit $\gtrdot 1$, et termini crescent.

Consequenter $(1+1)^e$ serie binomiali rite exprimitur, excepto si $e$ negativum et non $\lessdot 1$ sit, quo in casu non aliter, nisi complemento addito valet. Nimirum

8. Si $e=-1$ fuerit: erit $(1+1)^{-1}=\frac{1}{2}$, fietque quilibet factor $p$-tus

$$=\frac{-1-p+1}{p}=-1;$$

atque complementum continetur inter

$$\pm 1 . (1+0)^{-1-n} = \pm 1 \text{ et } \pm 1 . (1+1)^{-1-n} = \frac{\pm 1}{2^{1+n}},$$

quod tendit ad o; nempe

$$(1+1)^{-1} = 1 - 1 + c_1,$$

ubi complementum $c_1$ inter $1 . (1+0)^{-1-2}$ et $1 . (1+1)^{-3}$, nempe inter 1 et $1 : 2^3$ contentum est; ita

$$(1+1)^{-1} = 1 - 1 + 1 + c_2,$$

ubi complementum $c_2$ inter $-1$ et $-1 : 2^4$ contentum esse patet. Quod igitur nullius valoris est.

9. Superius (pag. 243) in $(1+z^2)^{-1}$ ponendum est $z \lessdot 1$; si ex. gr. $z = 1 - \omega$, pro $\omega$ positivo utvis parvo valebit formula, atque integrale erit

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots;$$

at si $\omega \sim 0$

$$\frac{(1-\omega)^3}{1} \sim 1, \quad \frac{(1-\omega)^5}{1} \sim 1, \ldots;$$

consequenter dum $\omega \sim 0$, adeoque $z \sim 1$, tum

$$z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots$$

atque

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

simul cum arcu ipsi $z$ ibidem respondenti ad limitem communem tendunt.

Nempe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\right),$$

et seriei parenthesi inclusæ terminus $n$-tus per

$$\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$$

exprimi potest; nimirum quivis denominator est factum e duobus imparibus, quorum prior est numerus impar $(2n-1)$-tus, cuius valor est $4n-3$. Seriem dictam convergentem esse, supra (pag. 244 et 341) demonstratum est.

10. Quod $(1-1)^e$ attinet, non pro $e$ positivo solum valet formula binomialis, sed certo sensu etiam pro $e$ negativo valet, sive pro $e'=-e$ posito $e'<1$, sive $e'=1$, sive $e'>1$ sit; nempe pro $e$ negativo est

$$(1-1)^e = \frac{1}{0^{e'}}$$

quod $=\infty$; nempe pro $x$ positivo, $\frac{1}{(1-x)^{e'}} \backsim \infty$ dum $x \backsim 1$; fietque etiam $(1-1)^e$ serie binomiali expressum omni dabili maius, ut statim patebit.

Est nimirum pro $e$ positivo

$$(1-1)^e = 0^e = 0 = 1 - e + \frac{e(e-1)}{2} - \ldots + \frac{e(e-1)\ldots(e-n+1)}{2.3\ldots n} + c,$$

complemento $c$ contento inter

$$\frac{e(e-1)\ldots(e-n)}{2.3\ldots(n+1)}(1+0)^{e-n}$$

et

$$\frac{e(e-1)\ldots(e-n)}{2.3\ldots(n+1)}(1-1)^{e-n},$$

adeoque inter quantitatem, quæ quovis dabili minor fit, atque eandem per $\infty$ multiplicatam. Atque huius complementi fines, inter quos continetur, semper amplius removentur, quamvis series convergat, et complementum tendat ad $0$; interim tamen complementum inter fines illos continetur hic quoque, etsi ad illud æstimandum nihil valeat, possitque aliter facile æstimari.

Quod autem $(1-1)^e$ per seriem binomialem rite exprimatur pro $e$

positivo, patet sic: $(1-x)^e$ pro $x<1$ rite exprimitur; si $x \sim 1$, tum et $x^2 \sim 1$, $x^3 \sim 1, \ldots$; itaque et

$$\frac{-ex}{-e} \sim 1, \quad \frac{e(e-1)x^2}{2} : \frac{e(e-1}{2} \sim 1,$$

atque quivis terminus seriei ipsius $(1-x)^e$ per ei respondentem terminum seriei ipsius $(1-1)^e$ divisus $\sim 1$; si igitur demonstretur seriem ipsius $(1-1)^e$ convergere, constabit per (pag. 172) seriem ipsius $(1-x)^e$ et seriem ipsius $(1-1)^e$ ad limitem eundem tendere, dum $x \sim 1$; nempe series ipsius $(1-1)^e \sim 0$, quia $(1-x)^e \sim 0$, dum $x \sim 1$. Convergit autem series ipsius $(1-1)^e$, ut ex additamentis patebit.

Pro $e$ negativo etsi $\lessgtr 1$ est $\frac{e-1}{1} > 1$, atque hinc $\frac{e-n}{n} > 1$; suntque termini seriei ipsius $(1-1)^e$ omnes positivi, et factum $nu_n$ non tendit ad $0$ Itaque series divergit, et summa $\sim \infty$, uti debet; nempe $(1-1)^{\frac{-3}{2}} = 1 : 0^{\frac{3}{2}} = \infty$. Complementum per formulam autem est inter omni dabili maius, et idem per $\frac{1}{0^{n-e}}$ multiplicatum.

Ex. gr.

$$\begin{aligned}
(1-1)^{-1} &= 1+1+\ \ 1+\ \ 1+\ldots\\
(1-1)^{-2} &= 1+2+\ \ 3+\ \ 4+\ldots\\
(1-1)^{-3} &= 1+3+\ \ 6+10+\ldots\\
(1-1)^{-4} &= 1+4+10+20+\ldots
\end{aligned}$$

Quod continuando, pro $(1-1)^{-m}$ arithmetica series $(m-1)$-ti ordinis (pag. 153) prodibit, $1+1+1+\ldots$ serie $0$-ti ordinis dicta: nempe ex $(1-1)^{-2}$ prodit series primi ordinis, et de quovis exponente $-m$ ad uno altiorem concludere licet, multiplicando $(1-x)^{-m}$ per $(1-x)^{-1}$, $x$ scribendo pro $1$. Prodeant nimirum ex $(1-x)^{-m}$ termini

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots$$

et ex $(1-x)^{-1}$ totidem termini

$$1+x+x^2+x^3+\ldots;$$

et patet in facto coëfficientem ipsius $x$ esse $1+A$, ipsius $x^2$ autem $1+A+B$, et $1+A+B+C$ ipsius $x^3$ &. Hinc $n$tus terminus seriei ordinis $m$ti exprimitur.

11. Sit adhuc unum exemplum pro facto e factoribus innumerabilibus. Sint

$$1 \pm \frac{1}{2},\ 1 \pm \frac{1}{4},\ 1 \pm \frac{1}{8} \ldots,$$

Pro signo superiore erit

$$a' + b' + c' + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

pro signo — prodit idem; utrumque $\frown 1$; itaque factum utrumque tendit ad limitem certum finitum non 0, et prius ad maius, posterius ad minus unitate (pag. 329).

12. Ut vero dignosci possit, ad qualemnam tendat limitem $a'+b'+c'+\ldots$; partim comparantur termini cum terminis seriei, de qua iam constat ad quem limitem tendat, ut etiam (pag. 331) factum est; partim alia etiam præter superius dicta criteria serierum convergentium divergentiumque dantur; quæ quamvis nosse maxime intersit, brevitas necessaria nonnisi supra laudatum OLIVIERianum, prouti mihi nuper communicatum est, (vix præter signa mutatum) addere permittit.

De serie tali sermo est, cuius termini omnes simul positivi aut simul negativi sunt atque termini semper porro minores fiunt. Designentur termini per $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_{2r}$, nempe terminus $n$tus per $u_n$; atque $u_{r+1}+u_{r+2}+\ldots+u_{2r}$ dicatur $R$. Si series convergens fuerit, manifesto $R \frown 0$, dum $r \frown \infty$. Est autem $u_{2r} \lessdot$ quovis præcedentium, adeoque et quovis ad lævam usque ad $u_r$ inclusive et $u_r \gtrdot$ quovis sequentium (per hyp.), adeoque et quovis abinde ad dextram usque ad $u_{2r}$ inclusive; atque hinc

$$r \cdot u_{2r} \lessdot R \lessdot r \cdot u_r,$$

nempe $R$ est summa $r$ terminorum ab $u_r$ usque ad $u_{2r}$.

Unde quum si series convergat adeoque $R \frown 0$, atque $2R \frown 0$; tum et $2r . u_{2r}$, quod $\lessdot 2R$ est, $\frown 0$; consequenter $n$ ponendo pro $2r$ erit $n . u_n \frown 0$.

Ex. gr. series

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \frown \infty;$$

nam $n \frac{1}{n}$ non $\frown 0$; nempe terminus $n$tus $u_n$ est $\frac{1}{n}$, et $n . u_n = 1$.

Criterium convergentiæ vero, nec

$$n u_n \frown 0$$

nec ab auctore celebri allatum

$$\frac{u_n \; u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}} \frown 0$$

generale est; nam series, cuius terminus generalis $\frac{1}{n \log. n}$ est, contra utrumque divergit, ut infra patebit.

13. Sit denique adhuc exemplum ad (pag. 327).

Denotet arctg. $T$ arcum tangentis $T$, id est arcum, cuius tangens $T$ est; ita arctg. $(T+q)$ significet arcum, cuius tangens $T+q$ est, atque $k(q)$ denotet idem quod arctg. $(T+q)$ significabat. Erit

$$k(q) = k(0) + q \partial k(0) + \frac{q^2}{2} \partial^2 k(0) + \ldots + \frac{q^{\nu-1}}{2.3\ldots(\nu-1)} \partial^{\nu-1} k(0) + \frac{q^\nu}{2.3\ldots\nu} \partial^\nu k(u),$$

ubi $u$ quantitatem quampiam a $0$ usque $q$ denotat, et

$$k(0) = \text{arctg.}\,(T+0) = \text{arctg.}\ T,$$

$\partial k(0)$ autem significat id quod fit, si in derivata ipsius $k(q)$ id est in $\partial$ arctg. $(T+q)$ pro $q$ ubique $0$ ponatur, quod $= \partial$ arctg. $T$, si pro $T$ variabili posita acciperetur derivata; eritque complementum inter

$$\frac{q^\nu}{2.3\ldots\nu} \partial^\nu \text{arctg.}\,(T+q) \quad \text{et} \quad \frac{q^\nu}{2.3\ldots\nu} \partial^\nu \text{arctg.}\ T.$$

Sit $x$ arcus tangentis $T$ et $x+z$ æquale quadranti, accipianturque derivatæ quoad tang. $x$, idest cotg. $z$. Dividatur quivis arcus, de quo sermo erit nempe, $x, z$ ita $\mu z$ per $n$, denoteturque $\frac{x}{n}$ per $\dot{x}$ et $\frac{z}{n}$ per $\dot{z}$, adeoque $\frac{\mu z}{n}$ per $\mu\dot{z}$.

Erit

$$k(0)=x,\ \partial k(0)=\partial x,\ \partial^2 k(0)=\partial^2 x, \ldots;$$

atque $\partial x$ quoad cotg. $z=\sin^2 z$, nempe (pag. 254) est

$$dx=\cos^2 x\, d\,\text{tang.}\, x=\sin^2 z\, d\cot. z,$$

quia

$$\cos. x=\sin z \text{ et } \text{tang.}\, x=\cot. z;$$

$\partial^2 x$ autem $=2\sin. z\,\partial\sin. z$, quoad cot. $z$ intelligendo utrumque.

Est autem (pag. 286) quoad cotg. $z$

$$\partial\sin. z=-\cos. z\sin^2 z,$$

ita quoad cotg. $\mu z$

$$\partial\sin. \mu z=-\cos. \mu z\sin^2 \mu z,$$

et quoad cotg. $z$ erit

$$\partial\sin. \mu z=-\mu\cos. \mu z\sin^2 z;$$

nam

$$d\sin. \mu z=-\cos. \mu z\sin^2 \mu z\, d\,\text{cotg.}\, \mu z,$$

sed (pag. 285)

$$d\,\text{cotg.}\, \mu z=\frac{-\mu\dot{z}}{\sin^2 \mu z} \text{ et } d\,\text{cotg.}\, z=-\frac{\dot{z}}{\sin^2 z}$$

adeoque

$$\dot{z}\doteq-\sin^2 z\, d\,\text{cotg.}\, z;$$

itaque per (pag. 224) substituendo $-\mu\dot{z}:\sin^2 \mu z$ ipsi $d\,\text{cotg.}\, \mu z$ et tum $-\sin^2 z\, d\,\text{cotg.}\, z$ ipsi $\dot{z}$ erit

$$-\cos. \mu z\sin^2 \mu z\ d\,\text{cotg.}\, \mu z\doteq\mu\dot{z}\cos. \mu z\doteq-\mu\cos. \mu z\sin^2 z\ d\,\text{cotg.}\, z;$$

consequenter est

$$\partial\sin. \mu z_{\text{(quoad cotg. } z)}=-\mu\cos. \mu z\sin^2 z.$$

Unde iam derivatæ ipsius $x$ quoad cotg. $z$ facile reperiuntur. Nempe

$$\partial x \;= \sin.^2 z$$
$$\partial^2 x = 2 \sin. z \,\partial \sin. z = -2 \sin. z \cos. z \sin.^2 z = -\sin.^2 z \sin. 2z,$$

nempe $2 \sin. z \cos. z = \sin. 2z$. Ita

$$\begin{aligned}\partial^3 x &= -2 \sin. z \sin. 2z\, \partial \sin. z - \sin.^2 z\, \partial \sin. 2z \\ &= 2 \sin. 2z \cos. z \sin.^3 z + 2 \cos 2z \sin.^4 z \\ &= 1.2 \sin.^3 z \sin. 3z,\end{aligned}$$

nam $\sin. 2z \cos. z + \cos. 2z \sin. z = \sin. 3z$.

Si vero
$$\partial^\nu x = \pm 1.2.3 \ldots (\nu-1) \sin.^\nu z \sin. \nu z,$$

tum quoad $\operatorname{cotg.} z$

$$\partial^{\nu+1} x = \mp 1.2.3 \ldots (\nu-1)\nu \sin.^{\nu+1} z \sin. (\nu+1) z.$$

Nam differentiando quoad $\operatorname{cotg.} z$, erit ipsius $\partial^\nu(x)$ derivata

$$\begin{aligned}\partial^{\nu+1} x = &\mp 1.2.3 \ldots (\nu-1)\nu \sin.^{\nu-1} z \cos. z \sin.^2 z \sin. \nu z \\ &\qquad\qquad \mp 1.2.3 \ldots (\nu-1) \sin.^\nu z \,.\, \nu \cos. \nu z \sin.^2 z \\ = &\mp 1.2.3 \ldots (\nu-1)\nu \sin.^{\nu+1} z (\sin. \nu z \cos. z + \cos. \nu z \sin. z) \\ = &\mp 1.2.3 \ldots (\nu-1)\nu \sin.^{\nu+1} z \sin. (\nu+1) z,\end{aligned}$$

nam $\sin. \nu z \cos. z + \cos. \nu z \sin. z = \sin. (\nu+1) z$.

Itaque

$$k(q) = \operatorname{arctg.}(T+q) = k(0) + q\partial k(0) + \frac{q^2}{2}\partial^2 k(0) + \ldots + \frac{q^\nu}{1.2.3 \ldots \nu}\partial^\nu k(u)$$
$$= \operatorname{arctg.} T + q \sin.^2 z - \frac{1}{2} q^2 \sin.^2 z \sin. 2z + \ldots$$

addito complemento quod continetur inter

$$\frac{1.2.3 \ldots (\nu-1) q^\nu}{2.3 \ldots (\nu-1)\nu} \partial^\nu \operatorname{arctg.} T \text{ et } \frac{1.2.3 \ldots (\nu-1) q^\nu}{2.3 \ldots (\nu-1)\nu} \partial^\nu \operatorname{arctg.} (T+q),$$

Decrescat $T$ et fiat demum 0, fiet $z$ æquale quadranti et

$$\sin. z = 1,\; \sin. 2z = 0,\; \sin. 3z = -1,\; \sin. 4z = 0, \ldots$$

sitque $q = 1 =$ tangenti dimidii quadrantis pro radio 1 : erit arctg. $T = 0$, fietque arcus tangentis dimidii quadrantis pro radio 1, nempe pro hoc casu $k(q) = \text{arctg.}(T+q) = \text{arctg.}\,0 + q$ fiet (ut pag. 334)

$$= 0 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots;$$

atque complementum est inter 0 et

$$\frac{1.2.3\ldots(\nu-1)\,q^{\nu}\sin.^{\nu} z\,\sin.\nu z}{1.2.3\ldots(\nu-1)\,\nu},$$

quod $\frown 0$, dum $\nu \frown \infty$, quum nullus sinus sit maior unitate et alter factor $\frac{1}{\nu} \frown 0$.

Unde tota peripheria est octuplum huius seriei, et peripheria per quartam radii id est per $\frac{1}{4}$ multiplicata præbet aream duplo huius seriei æqualem pro radio 1.

14. Nec silentio præteriri potest, quomodo *Taylorianum* ad plures variabiles applicetur; atque inde differentiale functionis plures variabiles involventis sit summa differentialium partialium quoad singulas variabiles seorsim, reliquis constantibus suppositis, acceptarum.

Considerentur prius duæ tantum variabiles; atque $F(x, y)$ dicatur $u$, et functio eadem, si variabili $x$ addatur $\omega$ ipso $y$ constante posito, dicatur $U$, atque si in $U = F(x+\omega, y)$ ipso $x$ constante posito addatur $\lambda$ ipsi $y$, functio $U$ ita mutata dicatur $v$; et pro $x$, $y$ utroque variabili, atque addito $\omega$ ipsi $x$, et $\lambda$ ipsi $y$, functio $F(x+\omega, y+\lambda)$ dicatur $V$. Quæritur $V$ ex $u$, atque $\partial V$ et $\partial V$ quæritur.

Est (pag. 321)

$$F(x+\omega, y) = U = u + \omega \underset{1,x}{u} + \frac{\omega^2}{2} \underset{2,x}{u} + \frac{\omega^3}{2.3} \underset{3,x}{u} + \ldots$$

Ita

$$F(x+\omega, y+\lambda) = V = U + \lambda \underset{1,y}{U} + \frac{\lambda^2}{2} \underset{2,y}{U} + \frac{\lambda^3}{2.3} \underset{3,y}{U} + \ldots$$

Substituatur cuivis termino seriei posterioris valor e serie priore; nempe pro $U$ ponatur

$$u+\omega\underset{1,x}{u}+\frac{\omega^2}{2}\underset{2,x}{u}+\frac{\omega^3}{2.3}\underset{3,x}{u}+\ldots,$$

pro $\lambda\underset{1,y}{U}$ venit

$$\lambda\vartheta\left(u+\omega\underset{1,x}{u}+\frac{\omega^2}{2}\underset{2,x}{u}+\frac{\omega^3}{2.3}\underset{3,x}{u}+\ldots\right),$$

pro $\frac{\lambda^2}{2}\underset{2,y}{U}$ venit

$$\frac{\lambda^2}{2}\vartheta^2\left(u+\omega\underset{1,x}{u}+\frac{\omega^2}{2}\underset{2,x}{u}+\frac{\omega^3}{2.3}\underset{3,x}{u}+\ldots\right),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

derivatas quoad $y$ accipiendo.

Unde porro continuando, si derivata $\nu$-ta quoad $y$ derivatæ $\mu$-tæ ipsius $u$ quoad $x$ acceptæ per $\underset{\mu,x\,;\,\nu,y}{u}$ denotetur, est

$$\begin{aligned}F(x+\omega,y+\lambda)= &\quad u+\omega\underset{1,x}{u}+\frac{\omega^2}{2}\underset{2,x}{u}+\frac{\omega^3}{2.3}\underset{3,x}{u}+\ldots\\ &+\lambda\left(\underset{1,y}{u}+\omega\underset{1,x;\,1,y}{u}+\frac{\omega^2}{2}\underset{2,x;\,1,y}{u}+\frac{\omega^3}{2.3}\underset{3,x;\,1,y}{u}+\ldots\right)\\ &+\frac{\lambda^2}{2}\left(\underset{2,y}{u}+\omega\underset{1,x;\,2,y}{u}+\frac{\omega^2}{2}\underset{2,x;\,2,y}{u}+\frac{\omega^3}{2.3}\underset{3,x;\,2,y}{u}+\ldots\right)\\ &+\frac{\lambda^3}{2.3}\left(\underset{3,y}{u}+\omega\underset{1,x;\,3,y}{u}+\frac{\omega^2}{2}\underset{2,x;\,3,y}{u}+\frac{\omega^3}{2.3}\underset{3,x;\,3,y}{u}+\ldots\right)\\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Quibus rite ordinatis fiet

$$\begin{aligned}F(x+\omega,y+\lambda)=u+\omega\underset{1,x}{u}+\lambda\underset{1,y}{u}+\frac{\omega^2}{2}\underset{2,x}{u}+\frac{\lambda^2}{2}\underset{2,y}{u}+\omega\lambda\underset{1,x;1,y}{u}+\\ +\frac{\omega^3}{2.3}\underset{3,x}{u}+\frac{\lambda^3}{2.3}\underset{3,y}{u}+\frac{\omega^2\lambda}{2}\underset{2,x;\,1,y}{u}+\frac{\omega\lambda^2}{2}\underset{1,x;\,2,y}{u}+\ldots\end{aligned}$$

Nempe terminus generalis est

$$\frac{\omega^\mu\lambda^\nu}{1.2\ldots\mu.1.2\ldots\nu}\underset{\mu,x\,;\,\nu,y}{u},$$

ita ut omnes possibiles imagines literarum, inter quas nonnisi $\omega$, $\lambda$ sint numero $\mu+\nu$ positarum compareant, at $\frac{\omega^\mu}{2.3\ldots\mu}\underset{\mu,x}{u}$ si $\lambda$ desit, et si $\omega$ desit $\frac{\lambda^\nu}{2.3\ldots\nu}\underset{\nu,y}{u}$ ponatur.

Nimirum si $\omega^\mu$ sit sine $\lambda$, tum nonnisi e linea superiore accipitur terminus, eritque $\frac{\omega^\mu}{2.3\ldots\mu}\underset{\mu,x}{u}$. Si $\lambda^\nu$ sit sine $\omega$, tum $\lambda^\nu$ extra parenthesim erit in factore $\frac{\lambda^\nu}{2.3\ldots\nu}$, et factor socius eius, ut sine $\omega$ sit, nonnisi terminus primus eiusdem lineæ horizontalis erit, nempe $\underset{\nu,y}{u}$. Si vero $\omega^\mu\lambda^\nu$ sit; tum $\lambda^\nu$ nonnisi in columna verticali extra parenthesim reperitur, in factore $\frac{\lambda^\nu}{2.3\ldots\nu}$, atque factor socius eius complectens $\omega^\mu$, nonnisi in linea horizontali eadem erit $\frac{\omega^\mu}{2.3\ldots\mu}\underset{\mu,x;\nu,y}{u}$. Evidenter vero quilibet terminus constat, aut e factoribus $\frac{\omega^\mu}{1.2\ldots\mu}$ et $\underset{\mu,x}{u}$ aut ex $\frac{\lambda^\nu}{1.2\ldots\nu}$ et $\underset{\nu,y}{u}$, aut ex $\frac{\omega^\mu}{1.2\ldots\mu}.\underset{\mu,x;\nu,y}{u}$ et $\frac{\lambda^\nu}{1.2\ldots\nu}$.

Manifesto autem suppositum est, *Taylorianum* tam pro $\omega$ in serie prima, quam pro $\lambda$ in serie secunda ita valere, ut complementum tendat ad 0; alioquin autem complementum et hic exprimi posse.

Ut differentiale prodeat substituatur $-\dot{x}$ ipsi $\omega$, et $-\dot{y}$ ipsi $\lambda$; nempe etsi $y$ independens sit ab $x$, quum in quovis casu simul cum $x$ et certa quantate ponatur, dependentia in omni casu simultanea est (pag. 192); quapropter $y$ dici $p(m\dot{x})$ potest et

$$\dot{y}=p(m\dot{x})-p\big((m-1)\dot{x}\big),$$

atque $F(x,y)=u$ dici $A(m\dot{x})$ potest. Quibus positis erit

$$A(m\dot{x})-A\big((m-1)\dot{x}\big),$$

nempe differentiale verum ipsius $F(x,y)$ æquale ei, quod remanet, subtracta ex $u$ tota serie, quæ ultimo prodiit, ipsi $\omega$ ubique $-\dot{x}$ et $-\dot{y}$ ipsi $\lambda$ prius suffecto; nempe dum in $F(x,y)$ ponitur $(m-1)\dot{x}$, idest $m\dot{x}-\dot{x}$, pro $y$ ponitur $p\big((m-1)\dot{x}\big)$ idest

$$p(m\dot{x})-\big(p(m\dot{x})-p((m-1)\dot{x})\big)=y-\dot{y}.$$

Atque hoc pacto differentiale verum ipsius $F(x,y)$ erit

$$u-\Big(u-\dot{x}\underset{1,x}{u}-\dot{y}\underset{1,y}{u}+\frac{\dot{x}^2}{2}\underset{2,x}{u}+\frac{\dot{y}^2}{2}\underset{2,y}{u}+\dot{x}\dot{y}\underset{1,x;1,y}{u}-\ldots,\Big)=$$
$$=\dot{x}\underset{1,x}{u}+\dot{y}\underset{1,y}{u}-\frac{\dot{x}^2}{2}\underset{2,x}{u}-\frac{\dot{y}^2}{2}\underset{2,y}{u}-\dot{x}\dot{y}\underset{1,x;1,y}{u}+\ldots,$$

et facile patet, quod duorum priorum terminorum summa per totum differentiale verum divisa tendat ad 1, dum $n \frown \infty$; atque summa differentialium partialium quoad singulas variabiles sit differentiale sensu stricto, et derivata quoque sit summa derivatarum quoad singulas variabiles acceptarum.

Unde de duabus variabilibus ad tertiam $z$ et semper porro ad una plures progredi licet. Nempe $(x, y)$ dicatur $X$ et $F(x, y, z)$ dicatur $f(X, z)$: erit

$$\eth f(X, z) = \eth f(X, z)_{\text{(quoad } X)} + \eth f(X, z)_{\text{(quoad } z)}$$

sed $\eth f(X, z)_{\text{(quoad } X)} = \eth F(x, y, z)$, si differentiale ita accipiatur, ut $z$ constans supponatur; et $\eth f(X, z)_{\text{(quoad } z)} = \eth F(x, y, z)$ pro $x, y$ constantibus positis. Est autem $\eth f(X, z)$ pro $z$ constante differentiale functionis duarum variabilium $x, y$; quod igitur summa differentialium functionis $F(x, y, z)$ quoad $x$ et $y$ seorsim acceptarum est, cui accedit etiam differentiale functionis eiusdem quoad $z$ acceptum.

De lege generali, qua functio quotvis variabilium evolvitur, videatur LAGRANGE, *Théorie des fonctions*, 1813. pag. 130.

Exemplo tamen facili evolutionem functionis duarum variabilium illustrare libet.

Sit

$$F(x,y) = a + bxy\,;$$

erit

$$F(x+\omega, y+\lambda) = a + b(x+\omega)(y+\lambda) = a + bxy + b\omega y + b\lambda x + b\omega\lambda,$$

quod si $-\dot{x}$ substituatur ipsi $\omega$ et $-\dot{y}$ ipsi $\lambda$ fit

$$= a + bxy - by\dot{x} - bx\dot{y} + b\dot{x}\dot{y},$$

et hoc si ex $a + bxy$ subtrahatur, differentia est

$$by\dot{x} + bx\dot{y} - b\dot{x}\dot{y},$$

quod $\doteq by\dot{x} + bx\dot{y}$. Prodit etiam manifesto idem, sive ipsis $x, y$ simul substituatur $x+\omega$, $y+\lambda$, sive prius tantum ipsi $x$ substituatur $x+\omega$ et tum in hoc substituatur $y+\lambda$ ipsi $y$; nam si tantum ipsi $x$ substituatur

$x+\omega$ manente $y$ sine addito $\lambda$, functio nonnisi in eo differet ab $F(x+\omega, y+\lambda)$ quod pro $y+\lambda$ solum $y$ sit; quod si addatur, nihil differet.

X. Superius (pag. 313) mentio maximi minimique fuit; nec superfluum est Theorematis Tayloriani applicationes quasdam ad casus saltem simpliciores ostendere.

1. *Si functio $F(x)$ talis sit, ut pro $x=\alpha$ et $\omega$ dabili quovis minore sit $F(x\pm\omega)<F(x)$ aut sit $F(x\pm\omega)>F(x)$, tum $F(x)$ in casu priore maximum, in posteriore minimum est.*

Nimirum

$$F(\alpha+\omega)=F(\alpha)+\omega\,\partial F(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}\partial^2 F(\alpha)+\ldots,$$

et

$$F(\alpha-\omega)=F(\alpha)-\omega\,\partial F(\alpha)+\frac{\omega^2}{2}\partial^2 F(\alpha)-\ldots,$$

ubi pro $\omega \frown 0$ quivis terminus fit maior summa sequentium, si is non sit $=0$, nec ullus fiat $\infty$.

Hinc in omni tali casu $\partial F(x)$ pro $x=\alpha$ pro casu maximi vel minimi necessario $=0$ esse debet; quum series superior ostendat pro $\omega$ positivo incrementum $\omega\,\partial F(\alpha)$, inferior autem $-\omega\partial F(\alpha)$, et terminus uterque maior summa sequentium fiat, dum $\omega \frown 0$; adeoque si ex. gr. tam $\omega$ quam $F(\alpha)$ positivum sit et pro $\alpha+\omega$ incrementum ipsius $F(\alpha)$, quantumvis exiguum sit pro $\omega \frown 0$, positivum, pro $\alpha-\omega$ erit negativum; si $\omega$ negativum sit, erit prius incrementum negativum, posterius positivum.

At conversim si pro $x=\alpha$ sit $\partial F(x)=0$, non sequitur maximum vel minimum esse; potest enim etiam terminus sequens $=0$ esse, imo etiam postea sequentes usque ad $\mu$-tam derivatam; suntque termini pro paribus potentiis ipsius $\omega$ in utraque serie æquales, pro imparibus quilibet terminus est ei respondentis oppositus; itaque possunt, si $\mu$ numerus par sit, derivatæ eousque singulæ $=0$ sine maximo vel minimo esse, quum in serie superiore sequens terminus, maior summa sequentium, oppositus termini illius sit, qui in serie inferiore ei respondet. Unde pro statu maximi vel minimi, derivatas omnes usque ad $\mu$-tam pro $\mu$ impari, singulas æquales o esse debere patet, et quidem ut sequens derivata non sit o; negativa dat maximum, positiva minimum.

Num vero maximum vel minimum sit, substituendo $\omega$ utvis parvum tentari etiam potest, eruto prius valore ipsius $\alpha$ ex $\partial(F)x = 0$ posito; imo ut supra dictum est, quum etiam pro $\partial(F)x = \infty$ maximum vel minimum fieri possit, etiam ex

$$\partial F(x) = \infty = \frac{1}{0}, \text{ idest } \frac{1}{\partial F(x)} = 0$$

quæri $\alpha$ potest; quamvis, ut plane monitum est, conversim non sequatur maximum vel minimum esse.

2. *Exempla faciliora.*

a) *Dividatur $x$ in duas partes $a$ et $x-a$ tales, ut $x(a-x)$ maximum sit.*

Ponatur $\partial . x(a-x) = 0$; erit

$$\partial . x(a-x) = a - 2x = 0,$$

et hinc

$$a = 2x \text{ et } x = \frac{a}{2}.$$

b) *Sit in dimidium circulum maximum rectangulum inscribendum.* Erit area rectanguli (Fig. 49*) $2x(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, et huius derivata

$$2(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x^2(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0;$$

et hinc

$$r^2 - x^2 = x^2, \text{ atque } r^2 = 2x^2, \text{ et } x = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

c) *Sit recta $\alpha$ in tres eiusmodi partes $b$, $x$ et $\alpha - b - x$ dividenda, ut triangulum ex iis fiat maximum.*

Planimetria docet esse aream trianguli

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

si $a$, $b$, $c$ latera trianguli sint, et $s$ æquale dimidio perimetri sit. Itaque pro $s = \frac{\alpha}{2}$ erit area

$$=\left(\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-b\right)\left(\frac{\alpha}{2}-x\right)\left(\frac{\alpha}{2}-(\alpha-b-x)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{2}}(\alpha-2b)^{\frac{1}{2}}(\alpha-2x)^{\frac{1}{2}}(2b+2x-\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

cuius derivata, si constans omittatur, utpote quæ ad maximum minimumve nihil confert, quum usque ad finem maneat et demum æquatio per eam dividatur, erit

$$-(\alpha-2x)^{-\frac{1}{2}}(2b+2x-\alpha)^{\frac{1}{2}}+(\alpha-2x)^{\frac{1}{2}}(2b+2x-\alpha)^{-\frac{1}{2}}=0,$$

et per $(\alpha-2x)^{\frac{1}{2}}(2b+2x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ multiplicando fit

$$2b+2x-\alpha=\alpha-2x,$$

et hinc

$$4x=2\alpha-2b, \text{ atque } x=\frac{\alpha-b}{2}.$$

Nempe triangulum pro area maxima æquicrurum erit. Maximum esse patet, quum derivata secunda negativa sit.

*d*) Si *trianguli aequicruri basis* $z$ *quaeratur pro area maxima* (fig. 50*), sit $a$ summa laterum; erit

$$y=\left(x^2-\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x=\frac{1}{2}(a-z),$$

atque area

$$\frac{1}{2}z\left(x^2-\frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{4}(a-z)^2-\frac{1}{4}z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}z\left((a-z)^2-z^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}z(a^2-2az)^{\frac{1}{2}},$$

cuius derivata factore $\frac{1}{4}$ omisso est

$$(a^2-2az)^{\frac{1}{2}}-az(a^2-2az)^{-\frac{1}{2}},$$

quo posito 0 et multiplicando per $(a^2-2az)^{\frac{1}{2}}$ fit

$$a^2-2az-az=0,$$

et hinc

$$a^2-3az=0, \text{ atque } z=\frac{a}{3};$$

nempe pro area maxima trianguli æquicruri triangulum æquilaterum est.

3. Interim, ut dictum est, derivata prima infinita esse potest, statu maximi vel minimi per id haud sublato; est nempe id momentaneum, pro certo puncto ipsius $x$, intra et ultra quod terminato $x$ illico derivata finita fiet. Ex. gr. (pag. 313) erat pro

$$b \pm x^{\frac{2}{3}} = y$$

derivata infinita pro $x = 0$, et simul maximum pro signo $-$, minimum pro $+$. At hic quoque valor ipsius $x$, pro quo hoc fit, reperitur modo sequenti:

$$\partial y = \pm \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \pm \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}},$$

quod o esse nequit; at si ponatur

$$1 : \pm \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} = \pm 3x^{\frac{1}{3}} = 0:$$

prodibit $x = 0$ pro hac æquatione, et derivata infinita; atque quum neque ex $\partial y = 0$ nec ex $\partial y = \infty$ sequatur maximum vel minimum esse, tentari potest, num pro illo valore ipsius $x$ ita sit, et si fuerit, quodnam sit.

Vix monendum est, maxima aut minima pro pluribus etiam valoribus ipsius $x$ dari posse, uti etiam maximorum vel minimorum maximum vel minimum posse in certis casibus dari.

XI. Sit fas applicationem *Tayloriani* etiam ad varios *tactus* ordines, et *radium curvaturae*, e quo etiam conceptus *evolutae* et *evolventis* nascitur, breviter addere.

1. Lineam $l$ dicitur tactus ordine $\mu$-to tangere linea $L$, si ordinata $Y$ ipsius $L$ sit $= F(x)$, et ordinata $y$ ipsius $l$ sit $= f(x)$, atque pro $x = \alpha$ sit

$$F(\alpha) = f(\alpha),\ \partial F(\alpha) = \partial f(\alpha),\ \partial^2 F(\alpha) = \partial^2 f(\alpha), \ldots,\ \partial^\mu F(\alpha) = \partial^\mu f(\alpha),$$

et non sit $\partial^{\mu+1} F(\alpha) = \partial^{\mu+1} f(\alpha)$.

Patebit rectam nonnisi ordine tactus primo tangere; circulum vero dari, qui ordine tactus primo, dari, qui etiam secundo tactus ordine tangat curvam; nec inter hunc et curvam e puncto tactus ullum alium circulum duci posse, uti nulla recta inter tangentem et curvam duci potest. Radius illius circuli vocatur *radius osculi* vel *curvaturae*, et *circulus* ipse *osculator* audit; nempe quum de quantitate curvedinis ad aliquod punctum $p$ sermo est, circulus iste intelligitur.

2. Ponatur tam in $F(\alpha)$, quam in $f(\alpha)$, $\alpha+\dot{x}$ pro $\alpha$: erit

$$F(\alpha+\dot{x})=F(\alpha)+\dot{x}\,\partial F(\alpha)+\frac{\dot{x}^2}{2}\partial^2F(\alpha)+\frac{\dot{x}^3}{2.3}\partial^3F(\alpha)+\ldots,$$

et

$$f(\alpha+\dot{x})=f(\alpha)+\dot{x}\,\partial f(\alpha)+\frac{\dot{x}^2}{2}\partial^2 f(\alpha)+\frac{\dot{x}^3}{2.3}\partial^3 f(\alpha)+\ldots$$

Sitque linea tertia $\lambda$, cuius ordinata $u=k(x)$, et sit pro $x=\alpha$

$$F(x)=f(x)=k(x),$$

atque

$$\partial F(x)=\partial f(x),$$

sed non $=\partial k(x)$, sintque $F(x)$, $f(x)$, $k(x)$ positiva; et dicatur terminorum seriei ipsius $f(x+\dot{x})$ per *Taylorianum* evolutæ post $\partial f(x)$ sequentium summa $S$ et terminorum seriei ipsius $k(x+\dot{x})$ item per *Taylorianum* evolutæ post $\partial k(x)$ sequentium dicatur $s$, ac brevitatis gratia $\dot{x}\partial f(x)$ dicatur $\partial$ et $\dot{x}\partial k(x)$ dicatur $\partial'$.

Erit $\partial$, $\partial'$ aut utrumque positivum, aut utrumque negativum, aut unum positivum alterum negativum.

*a*) Sit prius utrumque positivum, et pro $\omega$ positivo sit $\partial=\partial'+\omega$. Pro $N>1$ et utvis magno poterit $\dot{x}$ tam parvum accipi, ut $S<\frac{\partial}{N}$ et simul etiam $s<\frac{\partial'}{N}$ sit; atque tum $\partial+S$ positivum et $>\partial-\frac{\partial}{N}$. Nam etsi $S$ negativum esset, ipso $\frac{\partial}{N}$ minus destrueret ex $\partial$; item $\partial'+s$ positivum et $<\partial'+\frac{\partial'}{N}$. Hinc poni

$$\partial-\frac{\partial}{N}=a,\ \partial'+\frac{\partial'}{N}=b+q,\ \partial+S=a+p,\ \partial'+s=b$$

potest pro $a$, $p$, $b$, $q$ positivis; et patet

$$a+p-b>a-(b+q)$$

esse sensu (pag. 37).

Itaque

$$\vartheta+S-(\vartheta'+s)>\vartheta-\frac{\vartheta}{N}-\left(\vartheta'+\frac{\vartheta'}{N}\right),$$

adeoque si probetur posterius positivum et non o esse, prius maius positivum erit.

Est vero

$$\vartheta-\frac{\vartheta}{N}-\left(\vartheta'+\frac{\vartheta'}{N}\right)=\vartheta-\vartheta'-\frac{\vartheta+\vartheta'}{N}$$

$$=\omega-\frac{2\vartheta'+\omega}{N}=\frac{(N-1)\omega-2\vartheta'}{N},$$

quod positivum est. Nam

$$\omega=\dot{x}\left(\vartheta f(x)-\vartheta k(x)\right),$$

quod $=\dot{x}\,.\,h(x)$ poni potest; itaque

$$\frac{(N-1)\omega-2\vartheta'}{N}=\dot{x}\,\frac{(N-1)h(x)-2\vartheta k(x)}{N},$$

ubi in numeratore $N-1$, $h(x)$, $\vartheta k(x)$ positiva sunt, et

$$(N-1)h(x)>2\vartheta k(x)$$

est, simulac

$$N-1>\frac{2\vartheta k(x)}{h(x)}$$

accipiatur.

Itaque in hoc casu $f(x+\dot{x})>k(x+\dot{x})$, et linea tertia $\lambda$ infra lineam $l$ e puncto communi $\mathfrak{p}$ cursum incipit; et quum idem ad $Y=F(x)$ applicetur, $\lambda$ infra $L$ et $l$ cursum ex $\mathfrak{p}$ incipiet.

$b$) Si vero $\vartheta$ et $\vartheta'$ utrumque negativum sit et $\vartheta>\vartheta'$, pro serie ipsius $f(x+\dot{x})$ maius negativum prodibit. Nam si negativa positive et positiva negative acciperentur, maius positivum prodiret; atque huius modo oppositum prodire debet. Itaque linea $\lambda$ e puncto communi $\mathfrak{p}$ cursum supra lineas $L$ et $l$ incipit, quum eadem ad $L$ applicentur.

$c$) Si autem unum positivum, alterum negativum, ex. gr. $\partial'$ negativum et $\partial$ positivum sit, tum etsi totum $S$ negativum esset, ipsum $\partial$ destruere non poterit, itaque $\partial + S$ necessario positivum erit; $s$ vero etsi totum positivum esset, $\partial' + s$ negativum erit; itaque $f(x)$ ipsum positivum, addito

$$\dot{x} \,.\, \partial f(x) + S,$$

nanciscetur incrementum positivum, $k(x)$ autem pariter positivum, addito

$$\dot{x} \,.\, \partial k(x) + s,$$

imminuetur; adeoque $\lambda$ cursum e puncto communi infra $L$ et $l$ incipit.

Idem ad reliquos casus applicari evidens est; atque simul idem etiam porro donec libuerit continuari posse; si nempe pro $x = \alpha$ sit:

$$F(x) = f(x),\ \partial F(x) = \partial f(x),\ \partial^2 F(x) = \partial^2 f(x), \ldots, \partial^{\mu-1} F(x) = \partial^{\mu-1} f(x),\ \partial^{\mu} F(x) = \partial^{\mu} f(x),$$

et

$$f(x) = k(x),\ \partial f(x) = \partial k(x),\ \partial^2 f(x) = \partial^2 k(x), \ldots,\ \partial^{\mu-1} f(x) = \partial^{\mu-1} k(x),$$

sed non $\partial^{\mu} f(x) = \partial^{\mu} k(x)$, tum linea $\lambda$ per $k(x)$ generata e puncto tactus cursum aut supra $L$ et $l$ utramque aut infra utramque incipiet.

3. *Sit $L$ linea recta*; poterit hæc, ubivis fuerit in eodem plano cum $l$, per $(\beta + x)b$, pro $\beta$, $b$ certis constantibus, exprimi, nisi perpendicularis ad $x$ vel ipsi parallela fuerit; pro quo casu linea abscissarum $x$ ita mutari poterit, ut $L$ per $(\beta + x)b$ exprimatur. Ponatur

$$F(x) = fx \text{ et } \partial F(x) = \partial f(x)$$

pro $x = \alpha$; erit

$$(\beta + \alpha)b = f(\alpha) \text{ et } b = \partial f(\alpha);$$

atque quum $\beta b + \alpha b = f(\alpha)$ sit, est

$$\beta = \frac{f(\alpha)}{b} - \frac{\alpha b}{b} = \frac{f(\alpha)}{\partial f(\alpha)} - \alpha,$$

atque hinc ordinata rectæ $L$, quæ pro $x = \alpha$ æqualis est ordinatæ $y$ lineæ $l$, et quarum etiam derivatæ primæ sunt æquales, est

$$=\left(\frac{f(\alpha)}{\partial f(\alpha)}-\alpha+x\right)\partial f(\alpha)$$
$$=f(\alpha)+(x-\alpha)\partial f(\alpha).$$

Neque vero recta ulla alia, cuius ordinata

$$Y'=(\gamma+x)c,$$

datur, quæ e fine ipsius $y$ inter $L$ et $l$ duci possit; nam tum pro $x=\alpha$ debet

$$(\gamma+\alpha)c=F(\alpha) \text{ et } \partial(\gamma+\alpha)c=\partial F(\alpha)$$

esse; alioquin recta nova supra vel infra $L$ et $l$ cursum incipiet; e dictis æquationibus autem, $\gamma=\beta$, et $c=b$, atque $Y'=Y$, adeoque recta prior $L$ prodibit.

Ex. gr. Sit $y=x^{\frac{1}{2}}$ ut in parabola pro parametro $=1$; erit pro $x=\alpha$ recta tangens, quæ per

$$\beta=\frac{\sqrt{\alpha}}{\partial\sqrt{\alpha}}-\alpha=\alpha \text{ et } b=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

determinatur.

Patet vero derivatam secundam ipsius $Y$ esse $\partial b=0$; adeoque quum derivata secunda pro nulla linea præter rectam o sit, rectam exceptis singulis punctis (pag. 307) allatis tactus ordinis secundi incapacem esse.

4. Sit $L$ circulus; quicunque circulus radii $r$ sit in eodem plano cum $l$, ordinata eius poterit pro quavis abscissarum linea $T$, et quovis abscissarum $t$ initio $*$, atque pro certis constantibus $b$ et $a$, per

$$b+\sqrt{r^2-(t-a)^2}$$

exprimi. Sit enim diametri ipsi $T$ parallelæ distantia $b$ a $T$, sitque $z$ ordinata pro abscissis e centro in diametro acceptis; sitque ex. gr. $t$ uti in (fig. 51) est; erit

$$Y=b+\sqrt{r^2-(t-a)^2};$$

donec vero $t$ ab $*$ incipiendo in tantum excrescat, ut $t-a$ aliquamdim non sit $\triangleright r$, eousque $\sqrt{r^2-(t-a)^2}$ semper imaginarium est. Reliqui casus quoque patent.

At si $x$ ponatur pro $t$, atque sit $Y=F(x)$ et simul $\partial F(x)=\partial f(x)$, atque etiam $\partial^2 F(x)=\partial^2 f(x)$ pro certo valore $\alpha$ ipsius $x$, reperianturque ex his æquationibus $r$, $a$, $b$ circulum illum determinantia, pro quo dicta locum habent: tum inter hunc circulum $L$ et curvam $l$ nullus alius circulus duci poterit. Nam sit circulus, cuius pro $x=\alpha$ ordinata

$$k(x)= \quad f(x)=F(x);$$

nisi etiam

$$\partial k(x)=\partial f(x)=\partial F(x),$$

et simul

$$\partial^2 k(x)=\partial^2 f(x)=\partial^2 F(x)$$

ist, circulus novus aut infra lineam utramque $L$ et $l$, aut supra utramque cursum e puncto communi incipiet. Si vero hæ æquationes locum habeant, tres constantes dictæ eædem prodibunt, modo statim (num. 6) dicendo.

5. Extendi hoc ad quemvis tactus ordinem posse clarum est. Si nempe $F(x)=f(x)$ et derivata pro $L$ et $l$ prima primæ, secunda secundæ, $\mu$-ta $\mu$-tæ æquales sint valore certo $\alpha$ ipsius $x$, atque æquatio ipsius $L$ contineat constantes numero $(\mu+1)$: hæ e totidem æquationibus dictis determinantur; nec ulla linea inter $L$ et $l$ duci poterit, pro qua derivatæ usque ad $\mu$-tam æquales non sunt; si vero æquales fuerint, eædem constantes et idem $L$ prodibunt.

6. Reperiuntur (in numero 4.) dicta $r$, $a$, $b$ modo sequenti.

$a$) Est

$$Y=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}=f(x)=y$$

$b$) Hinc

$$\partial y=\frac{-(x-a)}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}} \text{ et } (\partial y)^2=\frac{(x-a)^2}{r^2-(x-a)^2},$$

et hinc valor ipsius $(x-a)$ reperitur; nempe

$$r^2(\partial y)^2-(x-a)^2(\partial y)^2=(x-a)^2,$$

adeoque

$$r^2(\partial y)^2=(x-a)^2(1+(\partial y)^2),$$

et

$$(x-a)^2=\frac{r^2(\partial y)^2}{1+(\partial y)^2},\ \text{atque}\ \ x-a=\frac{r\partial y}{\sqrt{1+(\partial y)^2}},$$

et

$$a=x-\frac{r\partial y}{\sqrt{1+(\partial y)^2}};$$

attamen adhuc expressio ipsius $a$ ipsum $r$ involvit nondum determinatum.

*c*) Est porro

$$\partial^2 y=-\frac{(x-a)^2}{\sqrt{(r^2-(x-a)^2)^3}}-\frac{1}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}},$$

quod si ad denominatorem priorem reducatur, multiplicando posterioris tam numeratorem quam denominatorem per $r^2-(x-a)^2$, fiet

$$=\frac{-(x-a)^2-r^2+(x-a)^2}{\sqrt{(r^2-(x-a)^2)^3}}=\frac{-r^2}{\sqrt{(r^2-(x-a)^2)^3}}.$$

*d*) Erat vero in *b*)

$$(\partial y)^2=\frac{(x-a)^2}{r^2-(x-a)^2},\ \text{atque}\ \ x-a=\frac{r\partial y}{\sqrt{1+(\partial y)^2}};$$

e priore est

$$\frac{x-\alpha}{\partial y}=\sqrt{r^2-(x-a)^2},$$

e posteriore est

$$\frac{x-\alpha}{\partial y}=\frac{r}{\sqrt{1+(\partial y)^2}};$$

itaque

$$\sqrt{r^2-(x-a)^2}=\frac{r}{\sqrt{1+(\partial y)^2}}.$$

*e*) Valore hoc ipsius $\sqrt{r^2-(x-a)^2}$ in valore ipsius $\partial^2 y$ in *c*) reperto substituto, erit

$$\partial^2 y=-r^2:\frac{r^3}{\sqrt{(1+\partial^2 y)^3}}=\frac{\sqrt{(1+(\partial y)^2)^3}}{-r}$$

et hinc

$$r = -\frac{(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y},$$

quæ igitur expressio radii osculi est.

*f*) Constantes reliquæ $a$, $b$ quoque reperiuntur: nempe in $b$) erat

$$a = x - \frac{r\partial y}{\sqrt{1+(\partial y^2)}},$$

atque ex $a$) est

$$b = y - \sqrt{r^2 - (x-a)^2};$$

atque hinc in valore ipsius $b$ substituendo valorem ipsius

$$\sqrt{r^2-(x-a)^2} = \frac{r}{\sqrt{1+(\partial y)^2}}$$

erit

$$a = x - \frac{\partial y}{\sqrt{1+(\partial y)^2}} \frac{(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y} = x - \frac{(1+(\partial y)^2)\,\partial y}{\partial^2 y}$$

et

$$b = y - \frac{r}{\sqrt{1+(\partial y)^2}} = y + \frac{1+(\partial y)^2}{\partial^2 y}.$$

7. Notandum nempe est, expressionis, quæ in exponentis denominatore numerum parem habet, valorem eundem esse sive + sive — ante expressionem ponatur: nempe si dicatur $2 = -\sqrt{4}$, est 2 alicuius valoris ipsius $\sqrt{4}$ oppositum (pag. 124). Ita (in numero *g*) $r$ potest dici $\sqrt{(1+(\partial y)^2)^3} : \partial^2 y$

8. *Exempla.*

*a*) Est (Fig. 42, pag. 305)

$$y^2 = s\nu = \frac{y\nu}{\partial y},$$

unde subnormalis

$$\nu = y\partial y.$$

Est porro, normali dicta $N$,

$$N^2 = \nu(s+\nu) = y\partial y\left(\frac{y}{\partial y} + y\partial y\right),$$

et

$$N = y\sqrt{1+(\partial y)^2},$$

atque hoc in valore ipsius $r$ posito, fit

$$r = \frac{(1+(\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}}{-\partial^2 y} = \frac{-N^3}{y^3\partial^2 y}.$$

Atque hinc si

$$y = x^{\frac{1}{2}},$$

ut in parabola pro parametro $=1$, est radius osculi $4N^3$; nam

$$y^3\partial^2 y = -\frac{1}{4}.$$

Nempe

$$y^3 = x^{\frac{3}{2}}, \text{ et } \partial y = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \text{ atque } \partial^2 y = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

et

$$y^3\partial^2 y = -\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}.$$

Ita ex æquatione generali sectionis conicæ cuiusvis facile prodit, esse $y^3\partial y = -\frac{1}{4}p$ pro parametro $p$; adeoque radium osculi esse $\frac{4N^3}{p}$.

*b*) Si (Fig. 52) recta $A$ parallela ad rectam $B$ sit; et $\mathfrak{ba} = 2$ perpendicularis ad $A$ sit diameter circuli, feraturque $\mathfrak{b}$ in $B$, prius ad lævam, simul cum circulo; atque cogitetur e quovis loco $\mathfrak{b}'$ ipsius $\mathfrak{b}$ accipi ad lævam arcus $\mathfrak{b}' * \mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}'\mathfrak{b}$, usquequo extremitas arcus accepti prima vice in $A$ cadat; et idem fiat ad dextram: complexus omnium extremitatum, in quibus arcus accepti desinunt, dicitur *cyclois*, et *circulus* dictus *genitor* audit. Facile patet viam puncti rotæ per rectam devolutæ huic approximari.

Est autem manifesto ordinata $y$ pro abscissa $v$, sinu verso arcus $\mathfrak{b} * \mathfrak{c}$,

$$y = \mathfrak{cd} + z = \sqrt{2v - v^2} + \text{arc. sin. vers. } v,$$

nam

$$\mathfrak{b}''\mathfrak{d} \perp \mathfrak{ba} \text{ et } \mathfrak{b} * \mathfrak{c} = \mathfrak{b}' * \mathfrak{b}'',$$

itaque

$$z = \mathfrak{b}'\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' * \mathfrak{b}'' = \mathfrak{b} * \mathfrak{c} = \text{arc. sin. vers. } v.$$

Estque

$$\partial y = (2v^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \partial^2 y = v^{-2}(2v^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Nam quoad $v$ accipiendo derivatas

$$\partial y = \partial \sqrt{2v - v^2} + \partial z = (1 - v)(2v - v^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sin. z};$$

nam $z$ æquale est arcui, cuius $v$ sinus versus est, et arcus $z$ derivata quoad sinum versum est $\frac{1}{\sin. z}$; hoc autem est

$$= \frac{1}{\sqrt{2v - v^2}} = (2v - v^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Itaque

$$\partial y = (1 - v)(2v - v^2)^{-\frac{1}{2}} + (2v - v^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (2v - v^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - v + 1) = \frac{2 - v}{(2v - v^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2 - v)(2v - v^2)^{\frac{1}{2}}}{2v - v^2}$$

$$= \frac{(2 - v)\left(\frac{2}{v} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{2 - v} = (2v^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Unde

$$\partial^2 y = - v^{-2}(2v^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

atque

$$r = \frac{(1 + (\partial y)^2)^{\frac{3}{2}}}{-\partial^2 y} = \frac{(1 + 2v^{-1} - 1)^{\frac{3}{2}}}{v^{-2}(2v^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}} (2v^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}}{v^{-2}}$$

$$= \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{v} - 1}}{v^{-\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 - v},$$

quod pro puncto $\mathfrak{b}$, ubi $v = 0$ est, fit

$$2^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{1}{2}} = 2^2 = 4;$$

nempe radius curvaturæ ibidem est quadruplus radii circuli genitoris.

Quod vero $\partial x$ quoad $v$ sit $= \frac{1}{\sin. x}$, patet sic. Dicatur

$$\dot{v} = \sin. \text{vers.}\, m\dot{x} - \sin. \text{vers.}\, (m - 1)\dot{x},$$

nempe differentiale verum sinus versi $x$, et dicatur $m\dot{x}$, ut (pag. 273) $q$. Est

$$v = 1 - \cos. q,$$

et

$$\begin{aligned}\dot{v} &= 1 - \cos. q - \big(1 - \cos.(q - \dot{x})\big)\\ &= 1 - \cos. q - (1 - \cos. q \cos. \dot{x} - \sin. q \sin. \dot{x})\\ &= \cos. q (\cos. \dot{x} - 1) + \sin. q \sin. \dot{x},\end{aligned}$$

hoc autem per $\sin. q \sin. \dot{x}$ divisum tendit ad 1; nam

$$\frac{\sin. q \sin. \dot{x}}{\cos. q (\cos. \dot{x} - 1)} \frown \infty;$$

nam (pag. 283)

$$\cos. \dot{x} = 1 - u \sin.^2 \dot{x},$$

denotante $u$ quantitatem aliquam inter 0 et 1; itaque

$$\cos \dot{x} - 1 = - u \sin.^2 \dot{x};$$

adeoque

$$\frac{\sin. q \sin. \dot{x}}{\cos. q (\cos. \dot{x} - 1)} = \frac{-\sin. q}{\cos. q \,.\, u \sin.^2 \dot{x}} \frown \infty,$$

atque (pag. 284) $\sin. q \sin. \dot{x}$ differentiale ipsius $v = \sin. \text{vers.}\, x$ est; nempe

$$\dot{v} \doteq \sin. q \sin. \dot{x};$$

hinc autem

$$\sin. \dot{x} \doteq \frac{\dot{v}}{\sin. q}$$

et quum $\sin. \dot{x} \doteq \dot{x}$, sequitur

$$\dot{x} \doteq \frac{\dot{v}}{\sin. q};$$

nempe differentiale arcus est æquipollens differentiali sinus versi per sinum arcus diviso; atque derivata arcus quoad sinum versum est $= 1$ divisa per sinum arcus, omnino omnibus pro radio 1 intellectis.

Quum vero

$$r = 2^{\frac{1}{2}} \sqrt{2 - v} = 2 \sqrt{2(2 - v)}$$

sit, est (Fig. 53) $r = 2q$, per $q$ chordam arcus $\alpha$ circuli genitoris cycloidis dimidiæ bta intelligendo; nam

$$q^2 = 2(2 - v),$$

adeoque

$$q = \sqrt{2(2 - v)}.$$

Si itaque ex $\mathfrak{t}$ ducatur ad $q$ parallela $a+b=2q$; terminabitur hæc in cycloide $\mathfrak{a}*\mathfrak{t}'$; cuius summum punctum $\mathfrak{a}$ est, et circulus genitor priori, adeoque et ipsa inferiori $\mathfrak{bta}$ æqualis est. Nam $a=q$, adeoque $b=q$; sed utrumque $q$, nempe chordæ arcuum $\alpha$ utriusque circuli genitoris et $b=q$ sunt parallela; itaque et $\alpha''$ est parallela et $=\alpha'$, et $\alpha''+\gamma$ perpendicularis ad diametrum circuli genitoris utriusque. Est vero $\alpha'+z'$ $=\alpha+z$, et quum $z=z'$, est $\alpha'=\alpha$. Erit igitur ordinata $\gamma+\alpha''=\gamma+\alpha$; itaque $\mathfrak{t}'$ punctum cycloidis inferiori æqualis erit.

Est autem $a+b$ plane normalis ad punctum $\mathfrak{t}$. Nam subtangens

$$s=\frac{y}{\partial y}=\frac{z+\gamma}{\sqrt{2v^{-1}-1}}=\frac{v(z+\gamma)}{\sqrt{2v-v^2}}=\frac{v(z+\gamma)}{\gamma}.$$

Itaque $\gamma:v=\gamma+z:s$, adeoque chorda arcus $\mathfrak{bc}$ est ad tangentem $\mathfrak{th}$ parallela; atque hinc quum $\alpha$ et $q$ sint parallela, et angulus ad $\mathfrak{c}$ in semicirculo rectus sit, est $a\perp\mathfrak{th}$.

Hinc autem manifesto pro quovis arcu $z$ circuli genitoris inferioris normalis ordinatæ respondens, radio osculi eidem respondenti æqualis facta, atque ordinata superius ipsi $\pi-z$ respondens in eodem puncto terminatur. Itaque complexus extremitatum normalium omnium cycloidis inferioris radiis osculi respondentibus æqualium est cyclois superior. Est igitur cycloidis *evoluta* quoque cyclois priori *evolventi* æqualis.

Nimirum si $E$ complexus omnis puncti sit, in quo normalis aliqua formæ $F$, radio osculi eidem normali respondenti æqualis accepta terminatur; dicitur $E$ *evoluta* ipsius $F$, atque $F$ *evolvens* ipsius $E$.

Est autem (pag. 306)

$$\text{tg.}p=\frac{1}{\partial y}=1:\sqrt{2v^{-1}-1}=1:\sqrt{\frac{2-v}{v}}=\sqrt{\frac{v}{2-v}}.$$

Si vero $z$ in inferiore circulo genitore fiat $=\alpha$, a $\mathfrak{b}$ incipiendo, ut fiat $V$ ex $v$, erit tangens anguli, quem tangens cum ordinata facit,

$$=1:\sqrt{2V^{-1}-1}=\sqrt{\frac{2-v}{v}},$$

nam $V=2-v$. Est vero $\sqrt{\frac{2-v}{v}}$ cotangens anguli illius, cuius tangens $\sqrt{\frac{v}{2-v}}$ est.

Itaque angulus, cuius $\sqrt{\frac{2-v}{v}}$ tangens est, angulum priorem $p$ ad rectum complet adeoque est $=u$, et $a+b$ tangens cycloidis superioris est. Extendi hoc ad alias evolutas quoque potest, quum $u$ suo alterno æquale sit.

Ingeniose hinc Hugenius qui primus pendulum ad horologiis motum æquabiliorem conciliandum applicavit, laminam et ad dextram ipsi $\mathfrak{a}*\mathfrak{f}$ parem posuit, ut *filo de laminis cycloidalibus in tangente tenso, centrum* oscillationis cycloidem describeret. Quum enim demonstretur ad descensum de cycloidis $\mathfrak{atb}$, pro $\mathfrak{bh}$ verticali, puncto quovis usque ad infimum $\mathfrak{b}$ tempus æquale requiri; sive ad maiorem sive ad minorem arcum ob inæqualitatem dentium excurrat pendulum, isochronum in theoria manet; tempus descensus autem per arcus circuli inæquales inæquale est.

Ultro itaque suboritur quæstio: quomodo e data forma $F$, eius evoluta $E$, atque ex $E$ eius evolvens $F$ reperiatur. Sed hoc tantum commemorasse sufficiat.

XII. Quum superius (pag. 206) quæstio suborta fuerit, quænam sit e functionum certarum genere illa, cuius functio certa determinata sub certa quapiam conditione certa quadam qualitate gaudeat: huius etiam, *Calculi variationum* dicti, idea casibus simplicioribus exponenda est.

Sit $x$ variabilis absoluta per $n$ divisa, et sit $y=k(x)$, cuius derivatæ quoad $x$ accipiantur; atque functionum sub genere certo contentarum derivatæ formula generalis sit ex. gr.

$$Ay^a+A'y^{a'}+\ldots+B(\partial y)^b+B'(\partial y)^{b'}+\ldots+Cy^c(\partial y)^d+C'y^{c'}(\partial y)^{d'}+\ldots=X;$$

nempe sit casus, ubi in nullo termino factor alius sit, præter potentiam aliquam ipsius $y$, potentiam aliquam ipsius $\partial y$, functionem aliquam ipsius $x$, et constantem. Quæritur talis functio $y$ ipsius $x$, quæ si $Y$ dicatur, integrale derivatæ dictæ, substituto $Y$ ipsi $y$, maximum vel minimum sit inter omnia derivatæ huius integralia, quæ pro alio $y$ sumerentur.

Ponatur $Y+\omega$ pro $Y$ denotante $\omega$ functionem ipsius $x$, quæ dato quovis minor fieri possit debeatque, et *variatio functionis* $Y$ dicitur; prodibit pro $\partial Y$ tum $\partial(Y+\omega)=\partial Y+\partial\omega$, et pro $(\partial Y)^r$ erit $(\partial Y+\partial\omega)^r$; atque pro casu integralis maximi minimive incrementum totius derivatæ, tam pro $+\omega$ quam pro $-\omega$, oportet esse aut simul positivum, aut simul negativum. Hoc autem aliter fieri nequit, ut statim demonstrabitur, nisi summa coefficientium ipsius $\omega$ in terminis, ubi $\omega$ tantum ad 1 elevatur, nec derivata eius adest, $N$ dicta, et summa coefficientium ipsius $\partial\omega$ in terminis, ubi nec $\omega$, nec derivatæ eius prima altiores adsunt, et $\partial\omega$ in prima tantum potentia occurrit, $P$ dicta, sit

$$\int(N\omega+P\partial\omega)=0;$$

$N$ et $P$ autem prodibunt, quum statim pateat in derivata derivatæ datæ esse $N$ coefficientem ipsius $\partial y$, et $P$ coefficientem ipsius $\partial^2 y$, tam $\partial y$ quam $\partial(\partial y)$ quoad $x$ accepto.

Imo tunc etiam patebit, esse $N-\partial P=0$ pro statu maximi minimive; atque ex hoc et data conditione eruitur $Y$; quamvis conversim non sequatur, maximum vel minimum esse, ut supra (pag. 345). Inferius quidem brevius ostendetur, quomodo $N$, $P$ ex evolutione functionis plurium variabilium Tayloriana (pag. 341) reperiantur.

Demonstrandum idcirco venit primo, quod in derivata derivatæ datæ prodeat $N\partial y+P\partial^2 y$, si pro $Y$ ponendo $Y+\omega$, coefficientium ipsius $\omega$ summa sit $N$, et coefficientium ipsius $\partial\omega$ summa sit $P$; secundo, quod nisi $\int(N\omega+P\partial\omega)=0$ sit, maximum vel minimum esse nequeat.

Sunt duæ variabiles $y$ et $\partial y$; et $\partial(\partial y)$ quoad $x$ est $=\partial^2 y$; adeoque per (pag. 273 et 281)

$$\partial X=(aAy^{a-1}+a'A'y^{a'-1}+\ldots)\partial y+(bB(\partial y)^{b-1}+b'B'(\partial y)^{b'-1}+\ldots)\partial^2 y+$$
$$(cCy^{c-1}(\partial y)^d+c'C'y^{c'-1}(\partial y)^{d}+\ldots)\partial y+(dCy^c(\partial y)^{d-1}+d'C'y^{c'}(\partial y)^{d'-1}+\ldots)\partial^2 y+\ldots$$

Unde

$$N=aAy^{a-1}\quad+\ldots+cCy^{c-1}(\partial y)^d+\ldots$$

et

$$P=bB(\partial y)^{b-1}+\ldots+dCy^c(\partial y)^{d-1}+\ldots$$

Ponatur iam $y+\omega$ pro $y$; fiet functio nova, per theorema binomiale evolvenda

$$A(y+\omega)^a+A'(y+\omega)^{a'}+\ldots+B(\partial y+\partial\omega)^b+B'(\partial y+\partial\omega)^{b'}+\ldots$$
$$+C(y+\omega)^c(\partial y+\partial\omega)^d+C'(y+\omega)^{c'}(\partial y+\partial\omega)^{d'}+\ldots=$$
$$=Ay^a+A'y^{a'}\ldots+B(\partial y)^b+B'(\partial y)^{b'}+\ldots+Cy^c(\partial y)^d+\ldots+$$
$$+(aAy^{a-1}+a'A'y^{a'-1}+\ldots)\omega+(bB(\partial y)^{b-1}+b'B'(\partial y)^{b'-1}+\ldots)\partial\omega+$$
$$+(cCy^{c-1}(\partial y)^d+c'yC'^{-1}(\partial y)^{d'}+\ldots)\omega+(dCy^c(\partial y)^{d-1}+d'C'y^{c'}(\partial y)^{d'-1}+\ldots)\partial\omega+s$$

ubi $s$ æqualis est summæ terminorum, quorum quivis ipsorum $\omega$, $\partial\omega$ tanquam factorem aut utrumque aut aliquem pluries continet. Nam in termino sub formula $A(y+\omega)^a$ contento, evolutoque, post $aAy^{a-1}\omega$ sequitur $\frac{a(a-1)}{2}Ay^{a-2}\omega^2$, et postea semper crescunt exponentes ipsius $\omega$; ita in $B(\partial y+\partial\omega)^b$ evoluto post $bB(\partial y)^{b-1}\partial\omega$ sequitur $\frac{b(b-1)}{2}B(\partial y)^{b-2}(\partial\omega)^2$ et dein semper crescunt exponentes ipsius $\partial\omega$; atque si evolvatur $C(y+\omega)^c(\partial y+\partial\omega)^d$, erit

$$(Cy^c+cCy^{c-1}\omega+\frac{c(c-1)}{2}Cy^{c-2}\omega^2+\ldots)(\partial y^d+d(\partial y)^{d-1}.\partial\omega+\frac{d(d-1)}{2}(\partial y)^{d-2}.(\partial\omega)^2+\ldots),$$

ubi nonnisi duo priores termini in factore utroque considerandi veniunt, *quum reliqui potentiam ipsius $\partial\omega$ aut ipsius $\omega$ prima altiorem contineant*; est vero

$$(Cy^c+cCy^{c-1}\omega)((\partial y)^d+d(\partial y)^{d-1}\partial\omega)=$$
$$Cy^c(\partial y)^d+cCy^{c-1}(\partial y)^d.\omega+dCy^c(\partial y)^{d-1}\partial\omega+cdCy^{c-1}(\partial y)^{d-1}.\omega\partial\omega,$$

ubi terminus primus ad $X$ pertinet, de posteriore, qui $\omega\partial\omega$ continet, quæstio non est, et reliqui duo suis locis adsunt; patetque valores ipsorum $N$, $P$ esse qui dicebantur.

2. Potest vero $\omega$ tam parvum accipi, ut incrementum functionis dictæ dato quovis minus fiat. Sit quippe $\omega=iv$, pro $i$ constante aliqua, et $v$ functione quapiam ipsius $x$, quam prouti libuerit, imminuere licebit; in terminis, ubi $\partial\omega$, $(\partial\omega)^2$ &c ut factores continentur, quoque aderit ubique constans $i$; imo ubi $\omega^2$ aut $(\partial\omega)^2$, $\omega\partial\omega$ &c sunt, ad minimum secunda potentia ipsius $i$ aderit. Itaque in $\int(N\omega+P\partial\omega)$ aderit $i$ in prima potentia, in integrali partis reliquæ autem ad minimum in secunda, cum factore

socio aliquo omnino finito, omnibus heic finitis suppositis. Consequenter pro dato quovis valore posterioris licebit $i$ tam parvum accipere, ut a priore, nisi hoc $=0$ sit, superetur.

Pro statu maximi minimive igitur oportet $\int(N\omega + P\partial\omega) = 0$ esse; nam secus accepto una vice $+\omega$, alteravice $-\omega$, prodibit una vice id, quo ab integrali isto reliquum exceditur positive et altera vice negative, adeoque nec maximum nec minimum locum habebit.

Est autem $\int(N\omega + P\partial\omega)$ formæ $\alpha + \beta\omega$ pro $\alpha$ constante; nam

$$\partial(\alpha + \beta\omega) = \beta\partial\omega + \omega\partial\beta,$$

ubi

$$N = \partial\beta \text{ et } P = \beta,$$

atque hinc

$$\partial P = \partial\beta \text{ et } N - \partial P = \partial P - \partial P = 0.$$

Pariter si adessent $Q\partial^2\omega + R\partial^3\omega$ (nempe si in expressione superiore ipsius derivatæ datæ derivatæ altiores ipsius $y$ occurerent) patet

$$\int(N\omega + P\partial\omega + Q\partial^2\omega + R\partial^3\omega)$$

esse formæ

$$\alpha + \beta\omega + \gamma\partial\omega + \delta\partial^2\omega;$$

nam huius derivata est

$$\beta\partial\omega + \omega\partial\beta + \gamma\partial^2\omega + \partial\gamma\partial\omega + \delta\partial^3\omega + \partial\delta\partial^2\omega,$$

ubi esset

$$N = \partial\beta,\ P = \beta + \partial\gamma,\ Q = \gamma + \partial\delta,\ R = \delta;$$

atque hinc

$$N - \partial P + \partial^2 Q - \partial^3 R = \partial\beta - \partial\beta - \partial^2\gamma + \partial^2\gamma + \partial^3\delta - \partial^3\delta = 0.$$

*Exempla.*

1. *Quaeratur aequatio ordinatae $y$ pro abscissa indefinita $t$ aream datam $x$ longitudine minima claudens.*

Concipiantur $y$, $\partial y$ quoad $x$ expressa acceptaque, et consideretur res in plano.

Dividatur $x$ per $n$ denoteturque $\frac{x}{n}$ per $\dot{x}$, atque $m$-to $\dot{x}$ respondens pars abscissæ sit, ut (pag. 220), $t(m\dot{x}) - t((m-1)\dot{x})$, dicaturque $\dot{t}$, atque $\dot{t}$ et $\dot{x}$ simultanea sibi invicem respondentia intelligantur. Erit (pag. 297)

$$\dot{x} \doteq y\dot{t};$$

longitudinis lineæ vero differentiale, ipso $\partial y$ quoad $x$ expresso, est (pag. 293)

$$(\dot{t}^2 + (\dot{y})^2)^{\frac{1}{2}} = (\dot{t}^2 + (\partial y)^2 . \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}};$$

quod si $y\dot{t}$ substituatur ipsi $\dot{x}$, fit

$$\dot{t}(1 + y^2(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}} \doteq \frac{\dot{x}}{y}(1 + y^2(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}};$$

et $\frac{1}{y}(1 + y^2(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}$ dicatur $V$.

Cuius si, ut dictum est, derivata accipiatur: erit

$$\partial V = \frac{y\partial y\partial^2 y}{\sqrt{1 + y^2(\partial y)^2}} - \frac{\partial y}{y^2\sqrt{1 + y^2(\partial y)^2}};$$

nam (pag. 225 et 281) $V$ sub formam $\frac{u}{v}$ venit pro

$$v = y \text{ et } u = (1 + y^2(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}};$$

adeoque $(v\partial u - u\partial v) : v^2$ accipiendum erit. Est autem

$$\partial u = \frac{1}{2}(1 + y^2(\partial y)^2)^{-\frac{1}{2}} \partial(1 + y^2(\partial y)^2),$$

et

$$\partial(1 + y^2(\partial y)^2) = \partial(y^2(\partial y)^2),$$

quod (pag. 281) est

$$= y^2 \partial(\partial y)^2 + \partial(y^2) . (\partial y)^2 = 2y^2\partial y\partial^2 y + 2y\partial y . (\partial y)^2.$$

Consequenter si $1 + y^2\partial y^2$ breviter $k$ dicatur, erit

$$\partial V = \frac{yy\partial y . (\partial y)^2 . k^{-\frac{1}{2}} + yy^2\partial y\partial^2 y k^{-\frac{1}{2}} - k^{\frac{1}{2}}\partial y}{y^2}$$

$$= \frac{y^2\partial y(\partial y)^2}{y^2\sqrt{k}} + \frac{y\partial y\partial^2 y}{\sqrt{k}} - \frac{\partial y\sqrt{k}}{y^2};$$

et si terminus posterior ad denominatorem prioris reducatur, erit

$$-\frac{\partial y\sqrt{k}}{y^2}=-\frac{(1+y^2(\partial y)^2)\partial y}{y^2\sqrt{k}}=-\frac{\partial y+y^2(\partial y)^2\partial y}{y^2\sqrt{k}},$$

quod priori termino additum fit

$$-\frac{\partial y}{y^2\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}},$$

et terminus qui superest, est

$$\frac{y\partial y\partial^2 y}{\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}}.$$

Est igitur

$$N=-\frac{-1}{y^2\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}} \text{ et } P=\frac{y\partial y}{\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}};$$

pro maximo minimove autem est

$$N-\partial P=0, \text{ adeoque } N=\partial P;$$

atque quum

$$\partial V=N\partial y+P\partial^2 y,$$

est etiam

$$\partial P\partial y+P\partial^2 y=\partial V.$$

Consequenter

$$\int(\partial P.\partial y+P.\partial^2 y)=V+\text{constans}=P\partial y+\text{constans},$$

nam

$$\partial(P\partial y)=\partial P.\partial y+P\partial^2 y.$$

Est igitur

$$V+\text{constans}=P\partial y+\text{constans},$$

nempe

$$\frac{\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}}{y}=\frac{y(\partial y)^2}{\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}}+\text{constans}.$$

Unde per $y\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}$ multiplicando fit

$$1+y^2(\partial y)^2=y^2(\partial y)^2+\text{const.}\,y\sqrt{1+y^2(\partial y)^2};$$

atque hinc

$$\text{constans}=\frac{1}{y\sqrt{1+y^2(\partial y)^2}}, \text{ adeoque } \frac{1}{\text{constans}}=y\sqrt{1+y^2(\partial y)^2},$$

quo $b$ dicto erit

$$b^2 = y^2 + y^4(\eth y)^2, \text{ atque } b^2 - y^2 = y^4(\eth y)^2, \text{ et } \sqrt{b^2 - y^2} = y^2 \eth y,$$

adeoque

$$\eth y : \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y^2} = 1.$$

Erat vero $\eth y$ derivata ipsius $y$ quoad $x$ accepta, atque

$$\dot{x} \doteq \dot{t}y;$$

adeoque

$$\eth y : \frac{dy}{\dot{t}y} = \frac{dy}{\dot{x}} : \frac{dy}{\dot{t}y} \sim 1.$$

Atque hinc

$$\frac{dy}{\dot{t}y} : \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y^2} \sim 1;$$

seu

$$\frac{y dy}{\dot{t}\sqrt{b^2 - y^2}} \sim 1;$$

adeoque

$$\frac{\dot{t}\sqrt{b^2 - y^2}}{y dy} = \dot{t} : \frac{y dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} \sim 1.$$

Consequenter

$$\int \dot{t} = \int \frac{y dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = t = \sqrt{b^2 - y^2},$$

namque huius differentiale quoad $y$ est $y dy : \sqrt{b^2 - y^2}$. Unde

$$t^2 = b^2 - y^2,$$

quæ æquatio circuli pro radio $b$ et abcissis $t$ e centro acceptis est.

2. *Linea Brachystochrona*, seu linea, per quam grave ex $A$ ad $C$ punctum in alia verticali cadens brevissimo tempore descendit, reperitur hoc modo. (Fig. 54). Dividatur $x$ per $n$, ducanturque per fines ipsorum $\dot{x}$ horizonti parallelæ; sit tempus descensus $t$, et respondeat $\dot{t}$ ipsi $\dot{x}$, nempe si de $m$-to $\dot{x}$ sermo sit, per $\dot{t}$ intelligatur tempus, quo de parallela per $m$-ti $\dot{x}$ finem superiorem ad parallelam per finem $m$-ti $\dot{x}$ pervenit grave.

Spatium sub $t$ percursum exprimi per $\dot{t}\sqrt{gx}$ poterit; nempe facile demonstratur in mechanica, velocitatem esse pro quavis linea curva eandem, quæ ad imum abscissæ verticalis $x$ esset; atque superius (pag. 248 et sequ.) erat $v\dot{t} \stackrel{\circ}{=} \dot{s}$.

Consideretur et hic res prius ad planum restricta. Est longitudinis lineæ differentiale $\dot{x}(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}$. Erit igitur spatium prius huic æquipollens; nempe

$$\frac{\dot{t}\sqrt{gx}}{\dot{x}\sqrt{1+(\partial y)^2}} \backsim 1,$$

adeoque

$$\dot{t} : \frac{\dot{x}(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{gx}} \backsim 1;$$

adeoque, si pro dato $x$ minimum ipsius $\int \frac{\dot{x}(1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{gx}}$ reperiatur, minimum $t$ erit.

Accipiatur itaque $\frac{1}{\sqrt{gx}} \partial (1+(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}$ pro certo valore ipsius $x$, idem e certo valore ex. gr. $0$ usque ad $2r$ ad quemvis applicari patebit. Erit derivata quæsita quoad $x$ accepta

$$\frac{(1+(\partial y)^2)^{-\frac{1}{2}} \partial y \partial^2 y}{\sqrt{gx}},$$

nempe $\partial\partial y$ *quoad* $x$ *est* $\partial^2 y$ *et* $\sqrt{gx}$ *pro certo* $x$ *sumitur.*

Itaque

$$N=0, \quad P=\frac{(1+(\partial y)^2)^{-\frac{1}{2}} \partial y}{\sqrt{gx}}.$$

Sed

$$N=\partial P; \text{ adeoque } \partial P=0 \text{ et } P=\text{constans}.$$

Itaque

$$\frac{\partial y}{\sqrt{gx}\sqrt{1+(\partial y)^2}}=\text{constans},$$

sit $=\alpha$; atque hinc

$$\partial y=\alpha\sqrt{gx}\sqrt{1+(\partial y)^2}, \text{ et } (\partial y)^2=\alpha^2 gx+\alpha^2 gx(\partial y)^2$$

et hinc

$$(\partial y)^2=\frac{\alpha^2 gx}{1-\alpha^2 gx}=\frac{\beta x}{1-\beta x}$$

pro $\alpha^2 g=\beta$.

Erat autem (pag. 357) pro cycloide

$$(\partial y)^2 = 2v^{-1} - 1$$

pro circuli genitoris radio $= 1$, estque

$$(\partial y)^2 = 2rv^{-1} - 1$$

pro radio $r$; hic autem

$$v = 2r - x,$$

quo substituto in $2rv^{-1} - 1$ erit

$$\frac{2r}{v} - 1 = \frac{2r}{2r-x} - 1 = \frac{x}{2r-x},$$

quod item tam numeratorem quam denominatorem per $2r$ dividendo fit

$$= \frac{\frac{1}{2r} \cdot x}{1 - \frac{1}{2r} \cdot x} = \frac{\alpha^2 g x}{1 - \alpha^2 g x},$$

si $\alpha^2 g = \frac{1}{2r}$ accipiatur.

Est igitur, quum hoc pro quovis valore ipsius $x$ ita prodeat, cyclois linea, pro qua quæsitum locum habere potest.

Atque etiamsi non restringatur ad planum, facile prodit, eam in plano et quidem verticali esse debere. Nempe si differentiale ipsius $\sqrt{1 + (\partial y)^2 + (\partial z)^2} : \sqrt{gx}$ accipiatur, et coefficiens ipsius $\partial z$ dicatur $N'$, et $P'$ coefficiens ipsius $\partial^2 z$, erit

$$\partial P = 0 = \partial P', \text{ quia } N = 0 = N';$$

itaque $P$ et $P'$ constantes erunt, et $z = y.\text{const.}$ Erit igitur linea in plano et quidem verticali, quum $x$ verticalis sit.

3. Interim tamen e dictis neutiquam maximum minimumve adesse constat, quum nonnisi conditioni, sine qua maximum minimumve fieri nequeat, satisfactum sit; constat quidem, in casu primo circulum, in posteriore cycloidem esse lineam quæsitam, si maximum minimumve detur; sed etiamsi detur, quodnam sit, indecisum adhuc est. At responsio quoad casum præsentem facilis est.

Nempe sit

$$\left(1 + (\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}} = f(\partial y)$$

pro variabili $\partial y$; erit per (pag. 321) derivatis quoad $\partial y$ acceptis

$$f(\partial y+\partial\omega)=f(\partial y)+\partial\omega\partial f(\partial y)+\frac{(\partial\omega)^2}{2}\partial^2 f(\partial y)+\ldots$$

$$=\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\partial\omega\left(1+(\partial y)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\partial y+\frac{(\partial\omega)^2}{2}\left(-\left(1+(\partial y)^2\right)^{-\frac{3}{2}}(\partial y)^2+\left(1+(\partial y)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)+\ldots$$

ubi coefficiens ipsius $\partial\omega$ est id, quod supra $P$ erat; et terminus sequens est

$$=\frac{(\partial\omega)^2}{2\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

nam parenthesi clausum est

$$=\frac{-(\partial y)^2}{\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1+(\partial y)^2-(\partial y)^2}{\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Potest autem $\omega$ tam parvum accipi, ut $\frac{(\partial\omega)^2}{2}\partial^2 f(\partial y)$ maius fiat summa sequentium; itaque in hoc casu incrementum derivatæ, $y+\omega$ ponendo pro $y$, erit positivum; nam pro hoc casu est

$$\frac{(\partial\omega)^2}{2}\partial^2 f(\partial y)=\frac{(\partial\omega)^2}{2\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

quod positivum est, namque $(\partial\omega)^2$ positivum est et $\left(1+(\partial y)^2\right)^{\frac{3}{2}}$ quoque hic positive accipitur, adeoque et denominator positivus est. Unde in casu tali etiam integrale pro $\omega$ utvis parvo positive crescit; consequenter in casu relato minimum est.

4. Possunt quidem etiamsi plures adfuerint valores omnia dicta ex evolutione functionis plurium variabilium (pag. 342) deduci; at Tyronum captui aptius videbatur modo relato incipere.

Nempe si functio superior (pag. 360) dicatur $F(y,\ \partial y)=u$: (pag. 342); erat ibidem

$$F(y+\omega,\partial y+\partial\omega)=u+\omega\underset{1,y}{u}+\partial\omega\,.\underset{1,\partial y}{u}+\ldots,$$

si heic $y$ sit, quod ibi $x$ erat et quod ibi $y$ erat heic $\partial y$ sit, atque ipsius $\lambda$ vicem $\partial\omega$ subeat; prodibitque coefficiens tam ipsius $\omega$ quam ipsius $\partial\omega$, plane is, qui pag. 361 prodiit; nimirum $\underset{1,y}{u}$, nempe derivata ipsius $u$ quoad $y$ accepta, est

$$aAy^{a-1}+\ldots+cCy^{c-1}(\eth y)^{d}+\ldots;$$

nam termini ubi tantum altera variabilis $\eth y$ reperitur (quæ dum derivata quoad aliam accipitur, constans supponitur) derivata quoad $y$ est 0.

Ita

$$\underset{1,\eth y}{u}=bB(\eth y)^{b-1}+\ldots+dCy^{c}(\eth y)^{d-1}+\ldots;$$

nam terminorum ubi tantum altera variabilis $y$, dum derivata quoad aliam nempe $\eth y$ accipitur, constans supposita adest, derivata quoad $\eth y$ est 0.

Itaque superius

$$N=\underset{1,y}{u} \text{ et } P=\underset{1,\eth y}{u}$$

per $u$ ipsum $F(y,\eth y)$ intelligendo.

Erat ex. gr. in exemplo prius allato, ubi aream datam claudens linea brevissima quærabatur, derivata quoad $\dot{x}$, denotante $x$ aream datam,

$$\frac{1}{y}\left(1+y^{2}(\eth y)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sit hoc $=u=F(y,\eth y)$; erit

$$F(y+\omega,\eth y+\eth\omega)=u+\omega\,\underset{1,y}{u}+\eth\omega\,.\,\underset{1,\eth y}{u}+\ldots;$$

atque (uti pag. 365)

$$\underset{1,y}{u}=\left(\eth\frac{\left(1+y^{2}(\eth y)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{y}\right)_{\text{quoad } y}=\frac{y\left(1+y^{2}(\eth y)^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}y(\eth y)^{2}-\left(1+y^{2}(\eth y)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{y^{2}},$$

et hoc est

$$=\frac{y^{2}(\eth y)^{2}}{y^{2}\left(1+y^{2}(\eth y)^{2}\right)}-\frac{\left(1+y^{2}(\eth y)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{y^{2}},$$

quod item ad denominatorem eundem reductum est

$$=\frac{-1}{y^{2}\left(1+y^{2}(\eth y)^{2}\right)},$$

æquale coefficienti ipsius $\omega$, atque superiori $N$.

Ita

$$\underset{1,\partial y}{u}=\left(\partial\frac{(1+y^2(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}}{y}\right)_{\text{quoad}\,\partial y}=\frac{(1+y^2(\partial y)^2)^{-\frac{1}{2}}y^2(\partial y)}{y}=\frac{y\partial y}{(1+y^2(\partial y)^2)^{\frac{1}{2}}},$$

quum heic $y$ sit constans, et derivata quoad $\partial y$ accipiatur; quod igitur coefficiens ipsius $\partial\omega$ est et superiori $P$ æqualis.

Idem ad evolutionem plurium variabilium applicari atque pro statu maximi minimive

$$\int(N\omega+P\partial\omega+Q\partial^2\omega+\ldots)=0$$

esse debere et superius dicta sequi patet.

5. Notandum tamen est et hic ut (pag. 345) terminos ulterius quoque $=0$ esse posse; at si integrale partis reliquæ pro $\omega$ utvis exiguo sive negative sive positive accepto positivum sit, minimum, et si negativum sit, maximum esse. Quod si plures adfuerint variabiles, uti in exemplo allato $\partial z$ erat, necesse sit pro casu maximi minimive esse seorsim quoque

$$N-\partial P=0 \text{ et } N'-\partial P'=0;$$

si seorsim quæratur conditio pro statu maximi minimive pro una variabili reliquis constantibus positis, et tum pro altera variabili prioribus constantibus positis, perspici potest.

At quum instituti ratio pluribus vacare haud permittat, sufficiat re vix attacta monstrare, unde plura accipi possint; magnus LAGRANGE est, qui lucem huic disquisitionum generi quoque primus affudit; legatur *Théorie des fonctions*, opus sæpius citatum, nunquam satis laudandum, quamvis giganteo plerumque passu per alpes gradiens ambulantes in vallibus relinquat. Inter plurima alia ibidem criteria etiam generalia exponuntur, e quibus dignosci queat, num partis reliquæ integrale positivum vel negativum, adeoque maximum vel minimum aut vero nullum sit; imo etiam ad casum, ubi id, quod 0 erat, $\infty$ fit ut supra extenditur.

---