ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
VII. KÖTET. XXIII. SZÁM. 1880.

VONALGEOMETRIAI TANULMÁNYOK.

SILBERSTEIN SALAMONTÓL.

(A III. osztály űlésén 1880. nov. 15. bemutatta Hunyady J. l. t.)

Ára 20 kr.

BUDAPEST, 1881.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

VONALGEOMETRIAI

TANULMÁNYOK.

SILBERSTEIN SALAMONTÓL.

(A III. osztály űlésén 1880. nov. 15. bemutatta Hunyady J. l. t.)

BUDAPEST, 1880.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

Az Akadémia épületében.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

Vonalgeométriai tanulmányok.

A vonalgeométriának alapját Plücker vetette meg 1868-ban megjelent művével.[1]) Pont és sík után az egyenes vonalat venni térbeli alkotó elemnek, elég közel fekvő dolog, és a gondolatot magát Plücker már 1846-ban fejezte ki. [2]) A vonalgeométriának csiráit különben már régibb dolgozatokban lehet feltalálni; itt is kifejezésre jut tehát azon törvény, hogy a tudomány fejlődésmenete a fölfedezéseket mintegy előkészíti. Tiszta geométriai speculátió révén Mőbius, Chasles és Sylvester jutottak alakzatokhoz, melyek Plücker complexének megfelelnek. Cayley az egyenes vonalnak hat coordinátáját vezette be, melyet később Plücker használt és egyáltalán a legjobb úton volt, hogy egy vonalgeométriát alkosson, a mint ezt mutatja azon körülmény, hogy a harmadrendű térgörbét mint vonalképződményt kezdte analytikailag tárgyalni. Mechanikai vizsgálatok (az erőpárok elmélete) is a vonalgeométria felé utaltak; viszont általa élesztve látjuk fejlődése első stádiumaiban a projectiv mechanikát. Egyenes vonalak rendszereinek megvizsgálására kiválóan az optika serkentett. Itt főleg egy felület normálisainak rendszere jött szóba, mert Malus törvénye szerint egy pontból kiinduló sugarak (vagyis egy gömb normálisainak rendszere) akárhány tükörfelületről viszaverve és akárhányszoros közegváltoztatás által megtörve, mindig megőrzik azon tulajdonságot, hogy egy bizonyos felület normálisainak rendszerét képezik. Ezen tulajdonságot csak az irregulär sugarak vesztik el a fénynek kristályokon történő átmeneténél, a mi

---

[1]) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der Linie als Raumelement.

[2]) System der Geometrie des Raumes.

Hamiltont általános sugárrendszerek vizsgálatára vezette. Hamilton eredményeit elegans analysissel adta elő Kummer,[1]) a tárgyat érdekes kapcsolatba hozván a Gauss-féle görbületmérték elméletével. Ugyancsak Kummer terjedelmes és gazdag tartalmú dolgozatot tett közzé az első és másodrendű sugárrendszerek elméletéről,[2]) melynek értékéből mit sem von le azon körülmény, hogy Plücker egy évvel előbb megjelent értekezésével a vonalgeométriát a mai analytikai geométria egy önálló és kiegészítő részévé tette.

Az egyenes vonal a térben négy állandó által van meghatározva, vagy más szavakkal: a térben ∞^4 sok egyenes vonal van. Kummer sugárrendszerei ∞^2 sok egyenes vonalból álló geométriai alakzatok, melyek tehát a tért ugy hálózzák be, hogy annak minden pontján általában véges és meghatározott számú egyenesek mennek keresztűl. A sugárrendszer rendjét az egy ponton átmenő egyenesek száma, osztályát pedig az egy síkban fekvő egyenesek száma állapítja meg. E szerint az összes egy ponton átmenő egyenesek egy első rendű és 0-ad osztályú, ellenben egy síkot betöltő összes egyenesek egy 0-ad rendű és első osztályú sugárrendszert képeznek. A sugárrendszer singuláris pontjai lesznek azok, melyeken egyszerűen végtelen sok egyenes mén keresztűl, melyek egy kúpfelületet alkotnak. Ha egy sugárrendszer valamely pontján ∞^2 sok egyenes mén keresztűl, akkor ennek kiválasztása által — minthogy maga is sugárrendszert alkot, — az eredeti rendszer rendszáma egygyel lejebb száll. A sugárrendszer singuláris síkjai azok lesznek, melyekben a rendszernek egyszerüen végtelen sok egyenese fekszik, melyek egy görbét burkolnak be. Ha pedig vannak olyan síkok, melyeknek összes egyenesei a rendszerhez tartoznak, akkor ez által a rendszer osztályszáma lejebb száll. Kummert az utoljára említett értekezésében különösen a sugárrendszerek gyujtó felületei foglalkoztatják, melyek görbe vonalakká fajúlhatnak. Egy algebrai sugárrendszer gyujtó felületének azon pontok mértani helyét definiálja, a melyekben a sugárrendszer egyenesei közűl kettő összeesik.

[1]) Crelle, 57. k.

[2]) Abh. der Akad. der Wissensch. zu Berlin, 1866.

Ugyanezen felületet burkolják be azon síkok, a melyekben a sugárrendszer egyenesei közűl kettő összeesik. A sugárrendszerek és gyújtó-felületeik viszonyát jellemzi azon tétel, hogy a sugárrendszer minden sugara kétszer érinti a gyujtó felűletet. De nem minden, a gyujtó felületet kétszer érintő vonal tartozik a sugárrendszerbe, hanem különböző sugárrendszerek ugyanazon gyujtó felülettel birhatnak, vagy más szóval, a kétszer érintő egyenesek összesége reductibilis, azaz alsóbb rendű rendszerekre bomló sugárrendszert képez.

A gyújtó felület, mint említve volt, görbékké fajúlhat, még pedig vagy csak egy köpenye, vagy mind a kettő. A gyujtó görbék a sugárrendszer valamennyi sugarai által metszetnek. Kummer kimutatja, hogy az első rendű sugárrendszerek csak is gyujtógörbékkel birnak.

Az első rendű sugárrendszerek közűl csakis az bír egyetlen egy gyujtógörbével, mely a harmadrendű térgörbe összes húrjaiból áll, mert a harmadrendű térgörbe az egyetlen, mely egy és csak is egy látszólagos kettősponttal bir, vagyis melynél a tér egy tetszőleges pontjából csak is egy oly egyenes húzható, mely a görbét kétszer metszi.

Azon negyedrendű térgörbe, mely két másodrendű felület teljes metszése által származik, az egyetlen, mely két s csak is két látszólagos kettősponttal bir; ennélfogva az egyetlen másodrendü sugárrendszer, melynek csak egy gyujtógörbéje van, az, melynek két másodrendű felület negyedrendű metszése szolgált gyujtógőrbéűl.

Kummernek számos tételei közűl még a következőket említem meg: A másodrendű sugárrendszerek a hetedik osztályon túl legalább egy gyujtógörbével bírnak, úgy hogy tisztán gyujtófelületet csak inclusive a hetedik osztályig várhatunk. Ezen gyujtófelületek negyedrendűek lévén, melyeknek elmélete még nincs általánosan megvizsgálva, Kummer a másodrendü sugárrendszereket a hetedik osztályig részletesen discutálja, és ezzel együtt a negyedrendű felületek egy osztályának — mely szerinte is lett elnevezve — elméletét állapítja meg.

Kummer ezen kutatásai nem annyira módszerük, mint eredményeik által fontosak. Az általános analytikai módszert ilyen geométriai problémák tárgyalására Plücker adta az egyenesnek mint térbeli alkotó elemnek bevezetése által. Tudományos vizsgálatokban pedig — mint már Descartes is mondotta — a módszer a legfontosabb, minélfogva nem Kummer, hanem Plücker tekintendő az új disciplina megalapítójának.

Az öntudatos törekvés egy vonalgeométriának megalkotása felé Plückerrel egy új geométriai alakzatot, a vonalcomplexet, fedeztette fel, mely alakzat ∞^3 sok egyenesből áll. Egy n-ed fokú complex analytikailag, egy n-ed fokú egyenlet által ábrázoltatik az egyenes vonal hat homogén coordinátája között, melyhez egy a coordinátákat összefűző quadratikus föltételi egyenlet járúl. Geométriai definítiója szerint a complex oly rendszere az egyeneseknek, melyek a térnek mindenik pontjában egy n-ed rendű kúpot alkotnak, vagy a térnek mindenik síkjában egy n-ed osztályú görbét burkolnak be.

Két complex közös egyenesei egyszersmind végtelen sok complex — egy kéttagú complexcsoport — közös egyenesei és egy ∞^2 sok egyenesből álló rendszert képeznek (Kummer sugárrendszere), melyet Plücker congruentiának nevez. Egy m-ed és egy n-ed rendű complex közös egyenesei egy $m \cdot n$-ed rendű és ugyanoly osztályú congruentiát képeznek.

Három complexnek közös egyenesei egyszersmind ∞^2 sok complex közös egyenesei és egy sugárfelület alkotóit képezik, mely 2 m, n, p-ed rendű, ha a complexek rendszámai: m, n, p.

Plücker az egyenes vonal coordinátáinak megállapítása után a lineáris complexek elméletére tér át, melyeknek először poláris viszonyait vizsgálja. Egy pontnak a lineáris complexre nézve sík, viszont síknak pont felel meg, de úgy hogy ezen reciproc elemek együttes helyzetűek. (Mőbius nullsystemája.) Az egyenes vonalnak polárisa a lineáris complexre nézve ismét egyenes vonal; a két poláris közös transversálisai megannyian a complex egyenesei közé tartoznak. Egy egyenes vonal összes transversálisai egy speciális lineáris complexet képeznek, amaz egyenest pedig a speciális complex tengelyének nevezzük. A végtelen sok complex között, melyek egy közös congruentiával bírnak, van két speciális, melyeknek tengelyei a congruentia összes egyenesei által metszetnek;

ezeket Plückerrel a lineáris congruentia két directrixének nevezzük. (Kummerrel azt mondanók, hogy az első rendű és első osztályú sugárrendszernek gyujtógörbéi). A directrixek poláris egyenesek a kéttagú complexcsoport bármelyik complexére nézve.

Három lineáris complex közös egyenesei általában egy ágú hyperboloid alkatórendszereinek egyikét képezik. A ∞^2 lineáris complex között, melyek egy közös egyágú hyperboloiddal bírnak, van egyszerűen végtelen sok specialiscomplex, melyek nek tengelyei ama hyperboloid másik alkotó rendszerét adják. A másodrendű felületek elméletének vonalgeométriai fejtegetése után Plücker áttér a másodfokú complexek elméletére, hol őt főleg a negyedrendű és negyedosztályú felületek egy bizonyos csoportja foglalkoztatja, melyeket aequatorialis és meridian felületeknek nevez, közös szóval complex felületeknek. A másodrendű complex egyenesei egy másodosztályú görbét burkolnak be a tér egy tetszőleges síkjában; ezen sík forgatása által egy egyenes vonal mint tengely körűl ama másodosztályú görbe egy felületet ír le — a meridianfelületet. Világos, hogy a forgatás tengelye a származott felület kettős egyenese. Ugyanezen felületet burkolják be a másodrendű complex azon kúpjai, melyeknek csúcsai a forgási tengely mentében fekszenek. Ha a felület kettős egyenese a végtelenbe távozik, akkor a meridiánfelületből aequatoriális felület lesz; ez tehát oly complexgörbe által iratik le, melynek síkja önmagával párhuzamosan halad tovább és oly hengerek által burkoltatik be, melyeknek oldalai egy síkkal párhuzamosak. — A complex-felületek négy kettős ponttal, és ugyanennyi kettős síkkal bírnak, melynek helyzetét a kettős egyeneshez képest Plücker részletesen megvizsgálja. Nála egyáltalán a complexek és complexfelületek elmélete egymást kölcsönösen átlátszóbbá és könnyebben kezelhetővé teszik.

A complexek általános elméletéről Plücker művében tüzetesen egy czikk szól, a mely a lineáris polárcomplexeket tárgyalja. Hogy polaris függvények alatt mit kell érteni, az az algebrai görbék elméletéből eléggé ismeretes, a hol a sík egy tetszőleges pontjához egy lineáris, egy conikus etc. poláris görbe tartozik. Ha a pont magán az adott görbén fekszik, akkor poláris egyenese érintő lesz ama pontban. Ép ily értelemben szólunk poláris complexekről, csakhogy itten egy tetszőleges egyeneshez az adott n-edrendű complexre nézve nem csak egy poláris complex tartozik, hanem végtelen sok, melyek egy poláris congruentiát képeznek. Oka ennek az, hogy a complex egyenletéhez még egy a coordinátákat összefűző feltételi relátió járúl. Egy A egyeneshez tartozó lineáris poláris congruentia általában két directrixxel bir, melyeknek egyike az A egyenessel összeesik. Ha azonban az A egyenes az adott n-ed rendű complexbe tartozik, akkor poláris congruentiájának mindkét directrixe az A egyenesbe esik, és ekkor a congruentia tangentialis congruentia nevet nyer — analog az érintő egyeneshez a görbéknél. Lesznek az n-ed rendű complexnek oly A egyenesei — és ezek $2n(n-1)$-edrendű congruentiát képeznek — a melyekhez tartozó tangentiális congruentiák oly sajátságos módon specializálódnak, hogy belőlök sík lesz, jobban mondva, a congruentia végtelen sok directrixxel fog birni, melyek egy sík sugársort képeznek, úgy hogy a síknak összes egyenesei ezen congruentiába tartoznak. Ama sugársor középpontja a complex singuláris pontjának, síkja a complex singuláris sikjának neveztetik, az A egyenesek pedig singuláris egyeneseknek.

Plücker ezen általános fogalmakat mindjárt értékesíti a másodrendű complexek elméletében. Itten a singuláris pontok egy 4-edrendű és 4-ed osztályú felületet képeznek, mely egyszersmind a singuláris síkok által beburkoltatik, és melynek a singuláris egyenesek a kettős érintői. Ezen felület 16 kettős ponttal és ugyanennyi kettős síkkal bír és Plücker által singuláris felületnek neveztetik.

Itt van azon pont, a hol Kummer és Plücker vizsgálatai érintkeznek, mert Kummernek negyedrendű gyújtó felülete, mely 16 kettős ponttal bir, nem más, mint Plücker singuláris felülete. Erre — ugy hiszem — Klein Felix figyelmeztetett legelőször, ki a szóban forgó felületeket behatóan megvizsgálta.[1])

Plücker óta a complexek elmélete mindjobban magára

[1]) Zur Theorie der Liniencomplexe des 1-ten u. 2-ten Grades. Math. Ann. II. köt.

vonta a geometrák figyelmét, és az új disciplina körűl, — minthogy jelentősége a geometriai felfogásra nézve általában nem csekélyebb volt mint a felületek s ezek között speciálisan a sugárfelületek elméletére — már szép litteratura fejlődött ki, melynek itt főbb mozzanatait sem fejthetem ki, mert nagyon a detailba vezetne.

Dolgozatom elkészítése alatt élénk eszmecserében állottam mélyen tisztelt tanárommal, Dr. Hunyady Jenő úrral, és tán fölösleges is megemlítenem, hogy ezen körűlmény igen buzdítólag és fejlesztőleg hatott reám.

I. Az egyenes vonal coordinátái.

1. A vonalgeométria igen fiatal ága lévén a mai elemző geométriának, nem csodálkozhatunk, hogy bizonyos elemi feladatok, melyek majdan egy rendszerezett vonalgeometria első fejezeteit képezendik, eddig ki nem dolgoztattak. Dolgozatom, mely e hiányt némileg pótolni törekszik, a történelmi bevezetéstől eltekintve, három részre oszlik. E czikkben a módszer alapjait — melyek Plückernél hosszadalmasan vannak fejtegetve — tárgyalom; a következő czikkben az egyenes vonal egyenletének különböző alakjaira térek át, melyek eddig tudomásom szerint föl nem állíttattak, mig az utolsó czikkben két vonal momentumának geometriai fogalmát értékesítem, egyebek között Hesse-nek a Pascal és Brianchon tételeihez analóg tételeit a hyperboloidra nézve bizonyítom be a vonalgeométria módszereivel.

2. Plücker magát az alkotó elemet, az egyenes vonalat, kétféleképen fogja fel: mint két pont összekötőjét — mint sugarat — és mint két sík metszését — mint tengelyt. Ennek megfelelően az egyenesnek kétféle coordinátáit, sugár- és tengely coordinátáit vezeti be.

Ha
$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{matrix}$$

két pont homogén coordinátái a térben, akkor az őket összekötő egyenes homogén sugárcoordinátáiul a következő hat kifejezés egymáshoz való viszonyát definiáljuk:

$$x_1=l_1\, m_4-l_4\, m_1 \qquad x_2=l_2\, m_4-l_4\, m_2 \qquad x_3=l_3\, m_4-l_4\, m_3$$
$$x_4=l_2\, m_3-l_3\, m_2 \qquad x_5=l_3\, m_1-l_1\, m_3 \qquad x_6=l_1\, m_2-l_2\, m_1$$

Ugyanezen kifejezésekre kell jutnunk és jutunk is, ha az illető egyenes tetszőleges más két pontjából indulunk ki.

Ha pedig

$$\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{matrix}$$

két sík homogén coordinátái, akkor metszési vonaluknak homogén tengelycoordinátái az előbbiekhez analóg alkotott kifejezések

$$\xi_1=\lambda_1\, \mu_4-\lambda_4\, \mu_1 \qquad \xi_2=\lambda_2\, \mu_4-\lambda_4\, \mu_2 \qquad \xi_3=\lambda_3\, \mu_4-\lambda_4\, \mu_3$$
$$\xi_4=\lambda_2\, \mu_3-\lambda_3\, \mu_2 \qquad \xi_5=\lambda_2\, \mu_1-\lambda_1\, \mu_2 \qquad \xi_6=\lambda_1\, \mu_2-\lambda_2\, \mu_1$$

A hat sugárcoördináta között egy relátió áll fenn, mely az

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 & l_2 & m_2 \\ l_3 & m_3 & l_3 & m_3 \\ l_4 & m_4 & l_4 & m_4 \end{vmatrix} =0$$

azonosságból olvasható ki. A baloldalon álló determinánst ugyanis Laplace tétele szerint kifejtve a sugárcoordináták definítiójának tekintetbe vételével:

$$(xx) \equiv x_1\, x_4+x_2\, x_5+x_3\, x_6=0$$

és hasonlóan ... (1)

$$(\xi\xi) \equiv \xi_1\, \xi_4+\xi_2\, \xi_5+\xi_3\, \xi_6=0$$

Megjegyzem, hogy az (1) alatti relátiók csak akkor azonosságok, ha visszatérünk az x_i és ξ_i definítiójára pont coordinátákból, illetőleg sík coordinátákból, ellenben quadratikus föltételi egyenletek jelentőségével bírnak, ha csak azt kérdezzük, hogy minő relatiónak tartozik 6 mennyiség eleget tenni, hogy egy egyenes vonal homogén coordinátáinak tekinthetők legyenek. Az (1) alatti relátio által az egyenes vonal meghatározására használandó coordináták száma a kellőre van reducálva.

Ezután világos, hogy a vonalgeométriában mindig simultán alakokkal lesz dolgunk, igy példáúl egy tetszőleges complex egyenlete

$$f\,(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6)=0$$
$$(xx)=0$$

szóval 5 homogén változó alakjai helyett, 6 homogén változó simultán alakjai vizsgáltatnak.

E helyen még meg akarom említeni, hogy Lie, Plücker gondolatát általánosítva, egy görbét, mely három tetszőleges parametert tartalmaz, tekint alkotó elemnek, a mi őt görbékből álló complexek vizsgálatára vezeti.

3. Az egyenes vonal sugár- és tengelycoordinátái között ezen relátio áll fenn

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = \xi_4 : \xi_5 : \xi_6 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$$

Ezt a következőképen bizonyíthatjuk be. Legyen az egyenes vonal az l és m pontok által meghatározva és vegyünk fel két tetszőleges p és q pontot. Az l, m és p pontok által megállapított sík coordinátái

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} l_2 & l_3 & l_4 \\ m_2 & m_3 & m_4 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{vmatrix} l_3 & l_1 & l_4 \\ m_3 & m_1 & m_4 \\ p_3 & p_1 & p_4 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_4 \\ p_1 & p_2 & p_4 \end{vmatrix} \qquad \lambda_4 = \begin{vmatrix} l_1 & l_3 & l_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \\ p_1 & p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

és hasonlóan fejezhetjük ki az l, m, q egyenesek álal meghatározott sík $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \mu_4$ coordinátáit. A λ és μ síkok metszésvonala ugyanaz mint az l és m pontok összekötő egyenese, tehát ennek tengelycoordinátái:

$$\lambda_2\,\mu_3 - \lambda_3\,\mu_2 = \begin{vmatrix} l_3 & l_1 & l_4 \\ m_3 & m_1 & m_4 \\ p_3 & p_1 & p_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_4 \\ p_1 & p_2 & p_4 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_4 \\ p_1 & p_2 & p_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_3 & l_1 & l_4 \\ m_3 & m_1 & m_4 \\ p_3 & p_1 & p_4 \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

Az adjungált determináns minorjairól szóló tétel szerint azonban

$$\begin{aligned} \lambda_2\,\mu_3 - \lambda_3\,\mu_2 &= D.(l_1\,m_4 - l_4\,m_1) \\ \lambda_3\,\mu_1 - \lambda_1\,\mu_3 &= D.(l_2\,m_4 - l_4\,m_2) \qquad \ldots(2) \\ \lambda_1\,\mu_2 - \lambda_2\,\mu_1 &= D.(l_3\,m_4 - l_4\,m_3) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

hol

$$D=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{vmatrix}$$

A (2) alatti egyenletek a föntebb fölírt aránysorozatot fejezi ki.

4. Könnyű kifejezni azon föltételt, mely alatt két egyenes vonal egymást metszi. Határozzuk őket meg az l, m illetőleg p, q pontok által, és nevezzük a két egyenest α és β-nak, akkor hogy az α és β egyenesek egymást messék, annak föltétele, hogy az l, m, p, q pontok egy síkban feküdjenek, azaz

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{vmatrix}=0$$

vagy kifejtve:

$$(\alpha\beta)\equiv\alpha_4\beta_1+\alpha_5\beta_2+\alpha_6\beta_3+\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_5+\alpha_3\beta_6=0 \quad \ldots(3)$$

5. Ha a β egyenest az előbbi egyenlet értelmében változónak tekintjük, akkor ezen egyenlet az α egyenesnek összes transversálisait, vagy ha akarjuk, magát az α egyenest ábrázolja; tehát az α egyenes egyenlete Plücker-féle coordinátákban.

$$(\alpha x)\equiv\alpha_4 x_1+\alpha_5 x_2+\alpha_6 x_3+\alpha_1 x_4+\alpha_2 x_5+\alpha_3 x_6=0 \quad \ldots(4)$$

Itt természetesen

$$(\alpha\alpha)\equiv\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_5+\alpha_3\alpha_6=0,$$

mert az α_1 egy egyenes vonalnak coordinátáit jelentik.

Ha az α egyenes egyenletében a változókat egy tetszőleges β egyenes coordinátái által helyettesítjük, akkor egy

$$(\alpha\beta)\equiv\alpha_1\beta_4+\alpha_2\beta_5+\alpha_3\beta_6+\alpha_4\beta_1+\alpha_5\beta_2+\alpha_6\beta_3$$

kifejezést nyerünk, mely nem más mint a két egyenes minimális távolságának szorzata a két egyenes hajlásszögének sinusával, azaz

$$(\alpha\beta)=r.\ sin\ \theta. \quad \ldots(5)$$

Ezt következőképen láthatjuk be; jelöljünk ki az α egyenesen egy l pontot és tőle ϱ távolságra fekvő pontot, hasonlóan a β egyenesen egy m pontot és egy ettől ϱ távolságra fekvő pontot, akkor az ezen 4 pont által meghatározott tetraëder térfogatát kétféleképen fejezhetjük: egyszer a 4 pont coordinátái által determináns alakban, mely kifejtve a

$$6\,T = \varrho\,\varrho'\,(\alpha\beta)$$

képletet adja, máskor azon szabály szerint (lásd Salmon térmértanát I, 71), hogy a tetraëder 6-szoros térfogata egyenlő két átellenes élhosszának és ezek minimális távolságának, végre a két él hajlásszöge sinusának szorzatával, azaz

$$6\,T = \varrho.\,\varrho'.\,r.\,\sin\,\theta.$$

A térfogatot kifejező két formula összehasonlítása adja az egyenletet.

$$(\alpha\beta) = r.\sin\,\theta$$

egyenletet.

Az $(\alpha\beta) = r.\ \sin\theta$ kifejezést a két egyenes vonal momentumának nevezik, egy elnevezés, mely a mechanikából van átvéve, hol erőknek momentumáról van szó egyenes vonalakra vonatkoztatva. (Lásd Zeuthen, Math. Ann. I.)

6. Egy α egyenes α_1, α_2, α_3 sugárcoordinátái — mint azonnal észrevehető — az illető egyenes iránycosinusaival arányos mennyiségek, még pedig

$$\cos\alpha x = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}} \qquad \cos\alpha y = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}$$

$$\cos\alpha z = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}}$$

Az α és β egyenesek által képezett szögre nézve

$$\cos\alpha\beta = \frac{\alpha_1\,\beta_1+\alpha_2\,\beta_2+\alpha_3\,\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\ \sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}$$

$$\sin^2\alpha\beta = \frac{(\alpha_2\,\beta_3-\alpha_3\,\beta_2)^2+(\alpha_3\,\beta_1-\alpha_1\beta_3)^2+(\alpha_1\,\beta_2-\alpha_2\,\beta_1)^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\ (\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)}$$

tehát a merőlegesség föltétele

$$[\alpha\beta] \doteq \alpha_1\,\beta_1+\alpha_2\,\beta_2+\alpha_3\,\beta_3 = 0 \qquad \ldots(6)$$

és a párhuzamosság föltételei

$$\alpha_2\,\beta_3-\alpha_3\,\beta_2=0 \qquad \alpha_3\,\beta_1-\alpha_1\,\beta_3=0 \qquad \alpha_1\,\beta_2-\alpha_2\,\beta_1=0$$

7. Egy pontnak egyenletét Plücker-féle coordinátákban akarjuk előállítani. E czélra kifejezzük, hogy az α egyenes minő föltétel alatt megyen át az l ponton. Ha az α egyenes a λ és μ síkok metszése, akkor az l pontra nézve ezen egyenletek állanak

$$\begin{aligned}\lambda_1\,l_1+\lambda_2\,l_2+\lambda_3\,l_3+\lambda_4\,l_4&=0\\ \mu_1\,l_1+\mu_2\,l_2+\mu_3\,l_3+\mu_4\,l_4&=0\end{aligned}$$

ezekből kiküszöbölés által nyerhetjük:

$$\begin{array}{cccccc} . & -l_3\,\alpha_2 & +l_2\,\alpha_3 & +l_4\,\alpha_4 & & =0\\ l_3\,\alpha_1 & . & -l_1\,\alpha_3 & . & +l_4\,\alpha_5 & =0\end{array}$$

Tekintsük az egyenest változónak, akkor az

$$\begin{array}{lccccc} (lx)_1\equiv & . & -l_3\,x_2+l_2\,x_3+l_4\,x_4 & & . & =0\\ (lx_2)\equiv l_3\,x_1 & . & -l_1\,x_3 & . & +l_4\,x_5 & =0\end{array}$$

egyenletek az

$$(xx)=0$$

kiséretében azon egyenesek összeségét fejezik ki, melyek az l ponton átmennek, vagy ha akarjuk, magát az l pontot. A három egyenlet összefoglalása által egy

$$(lx)_3\equiv-l_2\,x_1+l_1\,x_2\;\;.\;\;.\;\;.\;+l_4\,x_6=0$$

egyenletet állíthatunk elé, melylyel pótolni fogjuk az $(xx)=0$ egyenletet. Így a pontnak egyenletei Plücker-féle coordinátákban:

$$\left.\begin{array}{lcccccc} (lx)_1\equiv & . & -l_3\,x_2 & +l_2\,x_3 & +l_4\,x_4 & . & . =0\\ (lx)_2\equiv & l_3\,x_1 & . & -l_1\,x_3 & . & +l_4\,x_5 & . =0\\ (lx)_3\equiv & -l_2\,x_1 & +l_1\,x_2 & . & . & . & +l_4\,x_6=0\end{array}\right\}\ldots(7)$$

Hasonlóan fejezhetjük ki azon föltételeket, melyek alatt egy egyenes egy λ síkban fekszik, és állíthatjuk elé a λ sík egyenletet mint a benne fekvő egyenesek összeségét:

$$\left.\begin{array}{lcccccc} (\lambda x)_4\equiv & \lambda_4 x_1 & . & . & . & -\lambda_3\,x_5 & +\lambda_2\,x_6=0\\ (\lambda x)_5\equiv & . & \lambda_4\,x_2 & . & +\lambda_3\,x_4 & . & -\lambda_1\,x_6=0\\ (\lambda x)_6\equiv & . & . & \lambda_4\,x_3 & -\lambda_2\,x_4 & +\lambda_1\,x_5 & . =0\end{array}\right\}\ldots(8)$$

8. Ha három egyenes egymást kölcsönösen metszi, azaz mindegyikök metszi a többi kettőt, akkor vagy egy síkban fekszenek, vagy egy ponton mennek keresztűl. Ez utóbbi esetben a következő egyenletek állanak

$$\begin{array}{ll}
\alpha_3\, l_2 - \alpha_2\, l_3 + \alpha_4\, l_4 = 0 & -\alpha_3\, l_1 + \alpha_1\, l_3 + \alpha_5\, l_4 = 0 \\
\beta_3\, l_2 - \beta_2\, l_3 + \beta_4\, l_4 = 0 & -\beta_3\, l_1 + \beta_1\, l_3 + \beta_4\, l_4 = 0 \\
\gamma_3\, l_2 - \gamma_2\, l_3 + \gamma_4\, l_4 = 0 & -\gamma_3\, l_1 + \gamma_1\, l_3 + \gamma_5\, l_4 = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\alpha_2\, l_1 - \alpha_1\, l_2 + \alpha_6\, l_4 = 0 \\
\beta_2\, l_1 - \beta_1\, l_2 + \beta_6\, l_4 = 0 \\
\gamma_2\, l_1 - \gamma_1\, l_2 + \gamma_6\, l_4 = 0
\end{array}$$

Hogy tehát a három egyenes egy ponton menjen keresztűl, annak föltételei:

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_4 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_5 \\ \beta_3 & \beta_1 & \beta_5 \\ \gamma_3 & \gamma_1 & \gamma_5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_6 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_6 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_6 \end{vmatrix} = 0$$

Ha a három egyenes egy síkban fekszik, akkor

$$\begin{array}{ll}
\alpha_6\, \lambda_2 - \alpha_5\, \lambda_3 + \alpha_1\, \lambda_4 = 0 & -\alpha_6\, \lambda_1 + \alpha_4\, \lambda_3 + \alpha_2\, \lambda_4 = 0 \\
\beta_6\, \lambda_2 - \beta_5\, \lambda_3 + \beta^1\, \lambda_4 = 0 & -\beta_6\, \lambda_1 + \beta_4\, \lambda_3 + \alpha_2\, \lambda_4 = 0 \\
\gamma_5\, \lambda_2 - \gamma_5\, \lambda_3 + \gamma_1\, \lambda_4 = 0 & -\gamma_6\, \lambda_1 + \gamma_4\, \lambda_3 + \gamma_2\, \lambda_4 = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\alpha_5\, \lambda_1 - \alpha_4\, \lambda_2 + \alpha_3\, \lambda_4 = 0 \\
\beta_5\, \lambda_1 - \beta_4\, \lambda_2 + \beta_3\, \lambda_4 = 0 \\
\gamma_5\, \lambda_1 - \gamma_4\, \lambda_2 + \gamma_3\, \lambda_4 = 0
\end{array}$$

honnét

$$\begin{vmatrix} \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_1 \\ \beta_6 & \beta_5 & \beta_1 \\ \gamma_6 & \gamma_5 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 & \alpha_2 \\ \beta_6 & \beta_4 & \beta_2 \\ \gamma_6 & \gamma_4 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 \\ \beta_5 & \beta_4 & \beta_3 \\ \gamma_5 & \gamma_4 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

II. Az egyenes vonal egyenlete.

Az egyenes vonal — mint említve volt — négy állandó által van meghatározva. Ezen állandók itt egyszerű geométriai föltételek által állapíttatnak meg, hogy azonban ezen geometriai föltételek analytikai kifejezéseiből, ne kelljen a keresett egyenes coordinátáit egyenként külön-külön kiszámítani, egy linearis egyenlet hozzátoldása által nem annyira a keresett egyenes, mint inkább az összes őt metsző egyenesek complexje állapíttatik meg. A hozzátoldott egyenletet pedig — röved szólásmóddal élve — az egyenes egyenletének nevezem, értv· ez alatt oly egyenletet, mely egy egyenes vonalnak összes transi versálisait ábrázolja.

1. A keresett ε egyenes messe az α, β, γ egyeneseket és álljon merőlegesen a δ egyenesre. Ezen föltételeket a következő egyenletek fejezik ki:

$$
\begin{aligned}
(\alpha\varepsilon) &\equiv \alpha_4\,\varepsilon_1+\alpha_5\,\varepsilon_2+\alpha_6\,\varepsilon_3+\alpha_1\,\varepsilon_4+\alpha_2\,\varepsilon_5+\alpha_3\,\varepsilon_6=0\\
(\beta\varepsilon) &\equiv \beta_4\,\varepsilon_1+\gamma_5\,\varepsilon_2+\beta_6\,\varepsilon_3+\beta_1\,\varepsilon_4+\beta_2\,\varepsilon_5+\beta_3\,\varepsilon_6=0\\
(\gamma\varepsilon) &\equiv \gamma_4\,\varepsilon_3+\gamma_5\,\varepsilon_2+\gamma_6\,\varepsilon_3+\gamma_1\,\varepsilon_4+\gamma_2\,\varepsilon_5+\gamma_3\,\varepsilon_6=0\\
[\delta\varepsilon] &\equiv \delta_1\,\varepsilon_1+\delta_2\,\varepsilon_2+\delta_3\,\varepsilon_3=0\\
(\varepsilon\varepsilon) &\equiv \varepsilon_1\,\varepsilon_4+\varepsilon_2\,\varepsilon_5+\varepsilon_3\,\varepsilon_6=0
\end{aligned}
$$

Ha x egy változó egyenest jelent, mely az ε egyenest metszi

$$(x\varepsilon)\equiv x_4\,\varepsilon_1+x_5\,\varepsilon_2+x_6\,\varepsilon_3+x_1\,\varepsilon_4+x_2\,\varepsilon_5+x_3\,\varepsilon_6=0$$

A 6 egyenletből, melyek között az 5-ödik quadratikus,[1]) kiküszöbölés által nyerjük az ε egyenes egyenletét, illetőleg azon két egyenes egyenleteinek szorzatát, melyek a kivánt föltételeknek megfelelnek. Ez egyenlet:

$$
\begin{vmatrix}
0 & (\alpha x) & (\beta x) & (\gamma x) & [\delta x]\\
(\alpha x) & 0 & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & [\alpha\delta]\\
(\beta x) & (\alpha\beta) & 0 & (\beta\gamma) & [\beta\delta]\\
(\gamma x) & (\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & 0 & [\gamma\delta]\\
[\delta x] & [\alpha\delta] & [\beta\delta] & [\gamma\delta] & 0
\end{vmatrix}=0 \qquad \ldots(1)
$$

3. A keresett ε egyenes messe az α és β egyeneseket és álljon merőlegesen a γ és δ egyenesekre. E föltételek analytikai kifejezései:

$$
\begin{aligned}
(\alpha\varepsilon) &\equiv \alpha_4\,\varepsilon_1+\alpha_5\,\varepsilon_2+\alpha_6\,\varepsilon_3+\alpha_1\,\varepsilon_4+\alpha_2\,\varepsilon_5+\alpha_3\,\varepsilon_6=0\\
(\beta\varepsilon) &\equiv \beta_4\,\varepsilon_1+\beta_5\,\varepsilon_2+\beta_6\,\varepsilon_3+\beta_1\,\varepsilon_4+\beta_2\,\varepsilon_5+\beta_3\,\varepsilon_6=0\\
[\gamma\varepsilon] &\equiv \gamma_1\,\varepsilon_1+\gamma_2\,\varepsilon_2+\gamma_3\,\varepsilon_3=0\\
[\delta\varepsilon] &\equiv \delta_1\,\varepsilon_1+\delta_2\,\varepsilon_2+\delta_3\,\varepsilon_3=0\\
(\varepsilon\varepsilon) &\equiv \varepsilon_4\,\varepsilon_1+\varepsilon_5\,\varepsilon_2+\varepsilon_6\,\varepsilon_3=0
\end{aligned}
$$

---

[1]) Hogy kelljen az eliminátiót végezni $n-1$ elsőfokú s egy másodfokú egyenlet között, lásd dr. König Gyula tanár úr jegyzetét a »Műegyetemi lapok« II. kötetében.

melyekhez járúl

$$(x\varepsilon) \equiv x_4\,\varepsilon_1 + x_5\,\varepsilon_2 + x_6\,\varepsilon_3 + x_1\,\varepsilon_4 + x_2\,\varepsilon_5 + x_3\,\varepsilon_6 = 0$$

mint annak kifejezése, hogy a változó x egyenest az ε egyenes transversálisának akarjuk tekinteni. Az eliminatió eredménye itt:

$$\begin{vmatrix} x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\gamma_2\delta_3} & \overline{\gamma_3\delta_1} & \overline{\gamma_1\delta_2} \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(2)$$

melyet a következő alakra hozhatunk:

$$\begin{vmatrix} [\gamma x] & [\delta x] & (\gamma\delta x_4) \\ [\alpha\gamma] & [\alpha\delta] & (\gamma\delta\alpha_4) \\ [\beta\gamma] & [\beta\delta] & (\gamma\delta\beta_4) \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(3)$$

hol a jelölések értelmezésére álljon:

$$\overline{\gamma_2\,\delta_3} = \gamma_2\,\delta_3 - \gamma_3\,\delta_2$$

$$(\gamma\delta x_4) = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix}$$

Ha a γ egyenest az α-val és β egyenest a δ-val ejtjük össze, akkor ε azon egyenessé lesz, melyben az α és β egyenesek minimális távolságát mérjük és ekkor az ε egyenest az α és β egyenesek közös normálisának nevezem. Két egyenesnek az előbbiek szerint általában csak egy közös normálisa lesz, melynek egyenlete Plücker féle coordinátákban:

$$\begin{vmatrix} x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\alpha_2\beta_3} & \overline{\alpha_2\beta_1} & \overline{\alpha_1\beta_2} \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(4)$$

vagy

$$\begin{vmatrix} [x\alpha] & [x\beta] & (x_4\alpha\beta) \\ [\alpha\alpha] & [\alpha\beta] & (\alpha_4\alpha\beta) \\ [\alpha\beta] & [\beta\beta] & (\beta_4\alpha\beta) \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(5)$$

3. Felállítandó azon γ egyenes egyenlete, mely keresztűl megy az l ponton és metszi az α és β egyenest. E czélra az l pont egyenleteit

$$\begin{array}{l}
(l\gamma)_1 \equiv \quad \cdot \quad -l_3\gamma_2+l_2\gamma_3+l_4\gamma_4 \quad \cdot \quad \cdot \quad =0 \\
(l\gamma)_2 \equiv \quad l_3\gamma_1 \quad \cdot \quad -l_1\gamma_3 \quad \cdot \quad +l_4\gamma_5 \quad \cdot \quad =0 \\
(l\gamma)_3 \equiv -l_2\gamma_1+l_1\gamma_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad +l_4\gamma_6=0
\end{array}$$

össze kell foglalnunk a metszés föltételeivel:

$$\begin{array}{l}
(\alpha\gamma)\equiv\alpha_4\gamma_1+\alpha_5\gamma_2+\alpha_6\gamma_3+\alpha_1\gamma_4+\alpha_2\gamma_5+\alpha_3\gamma_6=0 \\
(\beta\gamma)\equiv\beta_4\gamma_1+\beta_5\gamma_2+\beta_6\gamma_3+\beta_1\gamma_4+\beta_2\gamma_5+\beta_3\gamma_6=0 \\
(x\gamma)\equiv x_4\alpha_1+x_5\gamma_2+x_6\gamma_3+x_1\gamma_4+x_2\gamma_5+x_3\gamma_6=0
\end{array}$$

mely hat egyenletből a γ egyenes egyenlete Plücker-féle coordinátákban:

$$\begin{vmatrix}
0 & -l_3 & l_2 & l_4 & 0 & 0 \\
l_3 & 0 & -l_1 & 0 & l_4 & 0 \\
-l_2 & l_1 & 0 & 0 & l_4 & l_4 \\
\alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\
\beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\
x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3
\end{vmatrix}=0 \qquad \ldots(6)$$

vagy

$$\begin{vmatrix}
(l\alpha)_1 & (l\beta)_1 & (lx)_1 \\
(l\alpha)_2 & (l\beta)_2 & (lx)_2 \\
(l\alpha)_3 & (l\beta)_3 & (lx)_3
\end{vmatrix} \qquad \ldots(7)$$

Ez egyenletet úgy foghatjuk fel mint föltételt, melyet a γ egyenesnek ki kell elégítenie, hogy az α, β, és χ egyeneseket messe. A (7) alatti egyenlet tehát az egyágú hyperboloid egyenlete homogén pontcoordinátákban, ha l_i a futó coordináták, mialatt x_i állandók.

4. Ezután igen egyszerű azon egyenes egyenletének felállítása, mely a λ síkban fekszik és az α meg β egyeneseket metszi, mert csak az előbbi feladat első három egyenlete a λ sík egyenletei által

$$\begin{array}{l}
(\lambda\gamma)_4\equiv\lambda_4\gamma_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad -\lambda_3\gamma_5+\lambda_2\gamma_6=0 \\
(\lambda\gamma)_5\equiv \quad \cdot \quad \lambda_4\gamma_2 \quad \cdot \quad +\lambda_3\gamma_4 \quad \cdot \quad -\lambda_1\gamma_6=0 \\
(\lambda\gamma)_6= \quad \cdot \quad \cdot \quad \lambda_4\gamma_3-\lambda_2\gamma_4+\lambda_1\gamma_5- \quad \cdot \quad =0
\end{array}$$

helyettesítendő. Tehát a γ egyenes egyenlete Plücker-féle coordinátákban:

$$\begin{vmatrix} \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_4 & 0 & \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_5 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad .. (8)$$

vagy

$$\begin{vmatrix} (\lambda\alpha)_4 & (\lambda\beta)_4 & (\lambda x)_4 \\ (\lambda g)_6 & (\lambda\beta)_5 & (\lambda x)_5 \\ (\lambda\alpha)_6 & (\lambda\beta)_6 & (\lambda x)_6 \end{vmatrix} = 0 \quad ..(9)$$

Itt x-et állandónak tekintve, ellenben λ_i homogén síkcoordinátákat változóknak véve, ez egyenlet nem más mint az α β és x egyenesek által meghatározott egyágú hyperboloid egyenlete homogén síkcoordinátákban.

5. Keressük azon γ egyenes egyenletét Plücker-féle coordinátákban, mely átmegy az l ponton, metszi az α egyenest és merőleges a β egyenesekre. E föltételeknek a következő 6 egyenlet ád kifejezést:

$$(l\gamma)_1 = 0, \quad (\lambda\gamma)_2 = 0 \quad (\lambda\gamma)_3 = 0 \quad [\beta\gamma] = 0 \quad (\alpha\gamma) = 0 \quad (x\gamma) = 0,$$

melyekből a γ egyenlete.

$$\begin{vmatrix} 0 & -l_3 & l_2 & l_4 & 0 & 0 \\ l_3 & 0 & -l_1 & 0 & l_4 & 0 \\ -l_2 & l_1 & 0 & 0 & 0 & l_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad .. (10)$$

vagy

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & (l\alpha)_1 & (lx)_1 \\ \beta_2 & (l\alpha)_2 & (lx)_2 \\ \beta_3 & (l\alpha)_3 & (lx)_3 \end{vmatrix} = 0 \quad ...(11)$$

Ha a β egyenest az α egyenessel összeejtjük akkor az előbbi egyenlet a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & (l\alpha)_1 & (lx)_1 \\ \alpha_2 & (l\alpha)_2 & (lx)_2 \\ \alpha_3 & ('\alpha)_3 & (lx)_3 \end{vmatrix} = 0 \quad ...(12)$$

és ez azon normális egyenlete, melyet az l pontból az α egyenesre bocsáthatunk.

6. Az l pontból az egyenesre bocsátható normális talp pontjának homogén pontcoordinátái, a mint ez könnyen megállapítható,

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha_1^2\, l_1 + \alpha_1\, \alpha_2\, l_2 + \alpha_1\, \alpha_2\, l_3 + (\alpha_3\, \alpha_5 - \alpha_2\, \alpha_6)\, l_4 \\ m_2 &= \alpha_2\, \alpha_1\, l_1 + \alpha_2^2\, l_2 + \alpha_2\, \alpha_2\, l_3 + (\alpha_1\, \alpha_6 - \alpha_2\, \alpha_4)\, l_4 \\ m_3 &= \alpha_3\, \alpha_1\, l_1 + \alpha_3\, \alpha_2\, l_2 + \alpha_3^2\, l_2 + (\alpha_2\, \alpha_4 - \alpha_1\, \alpha_5)\, l_4 \\ m_4 &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\, l_4 \end{aligned} \qquad \ldots (13)$$

Legyen most adva négy egyenes α, β, γ, δ és egy pont l, melyből a megfelelő egyenesekre bocsátott normálisok talppontjai legyenek: m, n, p, q. Hogy ez a négy pont egy síkban feküdjék, annak föltétele

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\ldots 14)$$

mely egyenlet a (13) alatti egyenletek tekintetbe vételével hol, a talppont coordinátái mint az l pont coordinátáinak linearis függvényei vannak feltüntetve, a következő geométriai tételnek ad kifejezést:

Azon pontok mértani helye, melyekből 4 adott egyenesre bocsátott normálisok talppontjai egy síkban fekszenek, egy harmadrendű felületet képez.

7. Azon egyenes egyenlete a mely az λ síkban fekszik az α egyenest metszi és a β egyenesre merőleges:

$$\begin{vmatrix} \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_4 & 0 & \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (15)$$

vagy egyszerű átalakítás által

$$\begin{vmatrix} -\lambda_3\, \beta_2 + \lambda_2\, \beta_3 & (\lambda\alpha)_4 & (\lambda x)_4 \\ \lambda_3\, \beta_1 - \lambda_1\, \beta_3 & (\lambda\alpha)_5 & (\lambda x)_4 \\ -\lambda_2\, \beta_1 + \lambda_1\, \beta_2 & (\lambda\alpha)_6 & (\lambda x)_6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (16)$$

Továbbá igen egyszerű feladat, azon egyenes egyenletét megállapítani mely az l ponton megy keresztűl és az α meg β egyenesekre merőleges. Ennek egyenlete:

$$\begin{vmatrix} 0 & -l_3 & l_2 & l_4 & 0 & 0 \\ l_3 & 0 & -l_1 & 0 & l_4 & 0 \\ -l_2 & l_1 & 0 & 0 & 0 & l_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(17)$$

vagy

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & (lx)_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & (lx)_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & (lx)_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(18)$$

III. Egyenes vonalak momentumai.

Hét egyenes vonalat $\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ féleképen lehet párosával összefoglalni, e huszonegy pár ugyanennyi momentuma között egy relátió áll fenn, melyet vonalgeometriai tárgyalásnál igen egyszerűen az által nyerünk, képezzük a következő két eltünő determináns szorzatát:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \varepsilon_5 & \varepsilon_6 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 & \varphi_6 & 0 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 \\ \varepsilon_4 & \varepsilon_5 & \varepsilon_6 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 0 \\ \varphi_4 & \varphi_5 & \varphi_6 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \\ \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & 0 \end{vmatrix}$$

mi által a következő relatiót nyerjük

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & (\alpha\delta) & (\alpha\varepsilon) & (\alpha\varphi) & (\alpha\psi) \\ (\alpha\beta) & 0 & (\beta\gamma) & (\beta\delta) & (\beta\varepsilon) & (\beta\varphi) & (\beta\psi) \\ (\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & 0 & (\gamma\delta) & (\gamma\varepsilon) & (\gamma\varphi) & (\gamma\psi) \\ (\alpha\delta) & (\beta\delta) & (\gamma\delta) & 0 & (\delta\varepsilon) & (\delta\varphi) & (\delta\psi) \\ (\alpha\varepsilon) & (\beta\varepsilon) & (\gamma\varepsilon) & (\delta\varepsilon) & 0 & (\varepsilon\varphi) & (\varepsilon\psi) \\ (\alpha\varphi) & (\beta\varphi) & (\gamma\varphi) & (\delta\varphi) & (\varepsilon\varphi) & 0 & (\varphi\psi) \\ (\alpha\psi) & (\beta\psi) & (\gamma\psi) & (\delta\psi) & (\varepsilon\psi) & (\varphi\psi) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ..(1)$$

Könnyen belátható, hogy 8 vagy több soros determinánsokat vévén alapúl, hasonló relatiót vezethetünk le 8, illetőleg több egyenes momentumai között. Az ép levezetett relátióból mint közös forrásból több formula származtatható le.

1. Egy lineáris complex öt egyenes vonal által lévén meghatározva, hat egyenesnek egy föltételt kell kielégítenie, hogy egy azon lineáris complexbe tartozzék. E föltétel ugyan egyszerűen 6 lineáris egyenlet kiküszöbölési eredője által fejezhető ki, de ennek négyzetre emelése által a következő alakban állítható elő:

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & (\alpha\delta) & (\alpha\varepsilon) & (\alpha\varphi) \\ (\alpha\beta) & 0 & (\beta\gamma) & (\beta\delta) & (\beta\varepsilon) & (\beta\varphi) \\ (\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & 0 & (\gamma\delta) & (\gamma\varepsilon) & (\gamma\varphi) \\ (\alpha\delta) & (\beta\delta) & (\gamma\delta) & 0 & (\delta\varepsilon) & (\delta\varphi) \\ (\alpha\varepsilon) & (\beta\varepsilon) & (\gamma\varepsilon) & (\delta\varepsilon) & 0 & (\varepsilon\varphi) \\ (\alpha\varphi) & (\beta\varphi) & (\gamma\varphi) & (\delta\varphi) & (\varepsilon\varphi) & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(2)$$

hol az egyes elemek geométria jelentőséggel bírnak.

2. Hogy öt egyenes vonal egy közös transversálissal bírjon, arra nézve egy föltételnek kell fennállania, melyet következőképen találunk meg. Legyen α, β, γ, δ, ε az öt egyenes, továbbá ψ ezeknek közös transversalisa és φ egy egészen tetszőleges egyenes vonal, akkor e hét egyenes vonal között (1) szerint a következő relatio áll fenn:

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & (\alpha\delta) & (\alpha\varepsilon) & (\alpha\varphi) & 0 \\ (\alpha\beta) & 0 & (\beta\gamma) & (\beta\delta) & (\beta\varepsilon) & (\beta\varphi) & 0 \\ (\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & 0 & (\gamma\delta) & (\gamma\varepsilon) & (\gamma\varphi) & 0 \\ (\alpha\delta) & (\beta\delta) & (\gamma\delta) & 0 & (\delta\varepsilon) & (\delta\varphi) & 0 \\ (\alpha\varepsilon) & (\beta\varepsilon) & (\gamma\varepsilon) & (\delta\varepsilon) & 0 & (\varepsilon\varphi) & 0 \\ (\alpha\varphi) & (\beta\varphi) & (\gamma\varphi) & (\delta\varphi) & (\varepsilon\varphi) & 0 & (\varphi\psi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\varphi\psi) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{vagy } (\varphi\psi)^2 .\ R = 0$$

és minthogy $(\varphi\psi)$ el tűnik, szükségképen eltűnik R; tehát a keresett föltétel:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & (\alpha\delta) & (\alpha\varepsilon) \\ (\alpha\beta) & 0 & (\beta\gamma) & (\beta\delta) & (\beta\varepsilon) \\ (\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & 0 & (\gamma\delta) & (\gamma\varepsilon) \\ (\alpha\delta) & (\beta\delta) & (\gamma\delta) & 0 & (\delta\varepsilon) \\ (\alpha\varepsilon) & (\beta\varepsilon) & (\gamma\varepsilon) & (\delta\varepsilon) & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(3)$$

3. Négy egyenesnek általában két közös transversalisa van, melyek egyenleteinek szorzatát a következőképen állíthatjuk elő. Legyen α, β, γ, δ a négy egyenes, ε és φ két közös transversalisuk és x egy változó egyenes, mely ez utóbbiakat metszi, akkor az (1) alatt relátió alapján az ε és φ egyenesek egyenleteinek szorzata:

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & (\alpha\delta) & (\alpha x) \\ (\alpha\beta) & 0 & (\beta\gamma) & (\beta\delta) & (\beta x) \\ (\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & 0 & (\gamma\delta) & (\gamma x) \\ (\alpha\delta) & (\beta\delta) & (\gamma\delta) & 0 & (\delta x) \\ (\alpha x) & (\beta x) & (\gamma x) & (\delta x) & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(4)$$

Ha az egymásután következő egyenesek egymást metszik azaz:

$$(\alpha\beta)=0 \quad (\beta\gamma)=0 \quad (\gamma\delta)=0 \quad (\delta\alpha)=0,$$

akkor a négy fölvett egyenes egy térbeli négyszöget képez és két közös transversálisuk azon két egyenes melylyel együtt egy tetraëdernek hat élét képezik. A tetraëder két átellenes éle egyenleteinek szorzata tehát a többi négy él által kifejezve:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & (\alpha\gamma) & 0 & (\alpha x) \\ 0 & 0 & 0 & (\beta\delta) & (\beta x) \\ (\alpha\gamma) & 0 & 0 & 0 & (\gamma x) \\ 0 & (\beta\delta) & 0 & 0 & (\delta x) \\ (\alpha x) & (\beta x) & (\gamma x) & (\delta x) & 0 \end{vmatrix} =$$

vagy a determinánst kifejtve és $(\alpha\gamma)$ $(\beta\delta)$-val osztva:

$$(\beta\delta)\,(\alpha x)\,(\gamma x) + (\alpha\gamma)\,(\beta x)\,(\delta x) = 0 \qquad \ldots(5)$$

4. Az (1) alatti formulából továbbá levezethetjük az egyágú hyperboloid egyenletét Plückerfél-e coordinátákban, melyre Klein más úton jutott. Legyen α, β, γ három egyenes vonal, melyek más három α', β', γ' egyenesek által metszetnek és x egy változó egyenes, mely az utolsó hármat metszi; akkor e hét egyenes között (1) szerint a következő relátio áll fenn:

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & (\alpha x) & 0 & 0 & 0 \\ (\alpha\beta) & 0 & (\beta\gamma) & (\beta x) & 0 & 0 & 0 \\ (\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & 0 & (\gamma x) & 0 & 0 & 0 \\ (\alpha x) & (\beta x) & (\gamma x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha'\beta') & (\alpha'\gamma') \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha'\beta') & 0 & (\beta'\gamma') \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha'\gamma') & (\beta'\gamma') & 0 \end{vmatrix} = 0$$

vagy

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha'\beta') & (\alpha'\gamma') \\ (\alpha'\beta') & 0 & (\beta'\gamma') \\ (\alpha'\gamma') & (\beta'\gamma') & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & (\alpha x) \\ (\alpha\beta) & 0 & (\beta\gamma) & (\beta x) \\ (\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & 0 & (\gamma x) \\ (\alpha x) & (\beta x) & (\gamma x) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

és minthogy az első tényező el nem tűnhetik, (mert ez nem más mint $(\beta'\gamma')(\gamma'\alpha')(\alpha'\beta')=0$ volna, a mi azt tenné, hogy kettő az α', β', γ' egyenesek közűl egymást metszi) szükségképen

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha\beta) & (\alpha\gamma) & (\alpha x) \\ (\alpha\beta) & 0 & (\beta\gamma) & (\beta x) \\ (\alpha\gamma) & (\beta\gamma) & 0 & (\gamma x) \\ (\alpha x) & (\beta x) & (\gamma x) & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(6)$$

és ez lesz a kétágú hyperboloid egyenlete a változó x_i Plücker-féle coordinátákban.

5. Hesse a Crelle Journal 24 kötetében a Pascal és Brianchon tételeihez analog tételeket állított fel a kétágú hyperboloidra nézve. Az általa geométriailag bebizonyított két tételt itt analytikailag akarom levezetni. Legyen a, b, c három egyenes vonal, mely az egyágú hyperboloid egyik alkotórendszerébe tartozik, még az a', b', c' egyenesek a másik alkotórendszerbe tartozzanak, akkor

$$\begin{matrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{matrix}$$

egy a hyperboloidra felirt hatszög átellenes oldalainak tekinthetők, melynek egymasután következő oldalai

$$a \quad c' \quad b \quad a' \quad c \quad b'$$

E hatszög oldalaiból a következő három térbeli négyszöget teszszük össze

$$\begin{matrix} b & c' & b' & c \\ c & a' & c' & a \\ a & b' & a' & b \end{matrix}$$

melyeknek mindegyike két diagonálissal bír, és ezeket páronkint összeállítva következőképen jelölünk

$$\begin{array}{c|c} \delta & \delta' \\ \varepsilon & \varepsilon' \\ \varphi & \varphi' \end{array}$$

akkor e diagonálisok egyik csoportja: δ, ε, φ egy ponton megy keresztűl, míg másik csoportja δ', ε', φ', egy síkban fekszik. E tételek bebizonyítására tekintsük ezen 6 egyenest

$$b \quad c \quad b' \quad c' \quad d \quad e$$

hol d és e képviselői a δ és δ' illetőleg ε és ε' egyeneseknek és legyen λ egy hetedik egyenes mely a

$$b \quad c \quad d \quad e$$

egyeneseket metszi, akkor a hét egyenes között fennálló relatio szerint, a feladat követeléseinek tekintetbe vételével:

$$\begin{vmatrix} 0 & (bc) & 0 & 0 & 0 & (be) & 0 \\ (bc) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b'c') & 0 & (b'e) & (b'\lambda) \\ 0 & 0 & (b'c') & 0 & 0 & 0 & (c'\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (de) & 0 \\ (be) & 0 & (b'e) & 0 & (de) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b'\lambda) & (c'\lambda) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

vagy kifejtve

$$(bc)^2 \, (b'c') \, (b'\lambda) \, (c'\lambda) \, (de)^2 = 0$$

Világos, hogy a bal oldalon álló tényezők közt az első négynek egyike sem tűnhetik el, mert ez azt jelentené, hogy oly egyenesek metszik egymást, melyeknél a metszés lehetősége ki van zárva; ennélfogva

$$(de) = 0 \qquad \ldots(7)$$

Ha ép így járunk el a

$$\begin{matrix} & c & a' & c' & a & e & f \\ \text{illetőleg} & a & b' & a' & b & f & d \end{matrix}$$

*

egyenesekkel, hol f közös képviselője a φ és φ' egyeneseknek, akkor ezen egyenleteket kapjuk

$$(ca)_2\ (c'a')\ (c'\mu)\ (a'\mu)\ (ef)^2 = 0$$
$$(ab)^2\ (a'b')\ (a'\nu)\ (b'\nu)\ (fd)^2 = 0$$

hol μ és ν a $c\ a'\ e\ f$ illetőleg $a\ b'\ f\ d$ közös transversalisait jelentik, akkor mint fenn, úgy itt is

$$\left.\begin{array}{l}(ef) = 0\\ (fd) = 0\end{array}\right. \quad \ldots(8)$$

A (7) és (8) alatti egyenlet azt fejezi ki, hogy az e, f, d egyenesek egymást kölcsönösen metszik, tehát vagy egy ponton mennek keresztűl vagy egy síkban fekszenek. Hogy mikép áll itt a dolog, azt a Voss által kifejezett elv dönti el, mely így hangzik:

»Ha az egész alakzat, melyre vizsgálatunk vonatkozik, önmagában duális, akkor az egyik esetnek (hogy t. i. egyeneseknek egy ponton kell keresztűl menniök) ép annyiszor kell beállania mint a másik esetnek (hogy t. i. egyeneseknek egy síkban kell feküdniök) Egy különös kriterium alkalmazása, (mint a milyent tényleg levezettem) fölöslegessé válik, mely körülmény a vonalgeométriai vizsgálatokat gyakran igen egyszerűsíti.«

Ez elv alkalmazása közvetlenűl úgy interpretálja a (7) és (8) alatti egyenleteket, a mint ezt Hessének tételei követelik. A bizonyítás egyszerű volta mutatja, hogy az ilyszerű tételeknek analytikai levezetésére tényleg a vonalgeométria szolgáltatja a legkezelhetőbb eszközöket.

6. Adva van két egyenespár a, b és c, d, melyeknek közös normálisai legyenek e és f. Meghatározandó e két közös normalisnak momentuma. Az e és f egyenesek egyenletei a megelőző czikkben (5) alatt vannak felállítva, ezeket ily alakban akarjuk írni

$$e_4\ x_1 + e_5\ x_2 + e_6\ x_3 + e_1\ x_4 + e_2\ x_5 + e_3\ x_6 = 0$$
$$f_4\ x_1 + f_5\ x_2 + f_6\ x_3 + f_1\ x_4 + f_2\ x_5 + f_3\ x_6 = 0$$

akkor a keresett momentum

$$(ef) = e_1 f_6 + e_2 f_5 + e_3 f_6 + e_4 f_1 + e_5 f_2 + e_6 f_3$$

Úgy látszik, hogy a számításba jövő determinánsokat fel kell bontani, ez azonban fölösleges és czélirányos eljárásnál a következő kifejezést nyerjük

$$(ef) = \begin{vmatrix} (ac) & (ad) & (a_4cd) & [ac] & [ad] \\ (bc) & (bd) & (b_4cd) & [bc] & [bd] \\ (c_4ab) & (d_4ab) & 0 & (abc) & (abd) \\ [ac] & [ad] & (acd) & 0 & 0 \\ [bc] & [bd] & (bcd) & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \ldots(9)$$

Ha $(ef) = 0$, akkor a két közös normális egymást metszi; állandóknak véve tehát az a, b, c egyeneseket és $d = x$ által kijelölve hogy d változó, az előbbi egyenlet mutatja, hogy:

mindazon egyenes vonalak, melyeknek közös normálisa c-vel metszi az a és b egyenesek közös normálisát egy harmad rendű complexet képeznek;

továbbá azon egyenes vonalak, melyeknek közös normálisai c, c′ c″-vel metszi a b egyenesek közös normálisát, egy $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$ *54-ed fokú sugárfelület alkotóit képezik.*

Ha a (9) alatti egyenletben a d egyenest összeejtjük a b-vel és ezenkívül fölteszszük, hogy a metszi a b egyenest és b metszi a c egyenest, akkor világos, hogy, (ef) az a b és b c egyenes párak közös normálisainak momentumát jelölvén, (ef) nem mást mint a b egyenes azon részének hossza, mely az a és c egyenesek között fekszik, megszorozva azon szög sinusával, melyet az ab és bc egyenes párak által megállapított síkok egymással képeznek. E szorzatot így jelölvén $(b)\ sin\, \frac{(bc)}{(ab)}$,

$$(b) . sin \frac{(bc)}{(ab)} = \begin{vmatrix} (ac) & 0 & (a_4cb) & [ac] & [ab] \\ 0 & 0 & (b_4cb) & [bc] & [bb] \\ (c_4ab) & (a_4bb) & 0 & (abc) & 0 \\ [ac] & [ab] & (acb) & 0 & 0 \\ [bc] & [bb] & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \ldots(10)$$

A $sin \frac{bc}{ba}$ kifejezése az a, b, c egyenesek coordinátáiból az eddigiek alapján igen egyszerűen kiszámítható és igy a (10) alatti formula módot nyújt egy tetszőleges térbeli polygon oldalhoszszainak kiszámítására, ha az oldalaknak Plücker-féle coordinátái adva vannak.

**

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.

II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.

III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.

IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.

V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.

VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.

VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.

VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.

IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.

X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.

XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.

II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.

III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.

IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . . . 20 kr.

V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.

VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.

II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.

III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.

IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgés-forrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.

V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.

VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt

VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.

VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.

II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.

III. Szily Kálmán. A hő elmélet második fő tétele, levezetve az elsőből 10 kr

IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont féltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hullo csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámítása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . . . 20 kr.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.