ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
VII. KÖTET. XXII. SZÁM. 1880.

A RACZIONÁLIS FÜGGVÉNYEK ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉHEZ.

KŐNIG GYULA
L. TAGTÓL.

(Előadta a III-ik osztály ülésén 1880. nov. 15.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1880.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

A

RACZIONÁLIS FÜGGVÉNYEK

ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉHEZ.

KŐNIG GYULA

L. TAGTÓL.

(Előadta a III-ik osztály ülésén 1880. nov. 15.)

BUDAPEST, 1880.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1880. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

Véges alakrendszerek a raczionális függvények elméletében.

Ha az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ változók n tetszőleges és független raczionális függvényének, $R_1, R_2, \ldots, R_n$-nek értékét teszőlegesen megszabva gondoljuk, akkor ugyane változók bármely más függvényének, pl.

$$F = F(u_1, \ldots, u_n)$$

értékét oly egyenletből vehetjük, mely keletkezik, ha az épen fölirtból és az

$$R_i = R_i(u_1, \ldots, u_n)$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

rendszerből az u-kat elimináljuk. Ez az egyenlet algebrai egyenlet lesz F-re nézve, melynek együtthatói $R_1 \ldots R_n$-ből raczionális módon vannak összerakva.

De van hasonló alakú egyenlet, melynek bevezetése után az $u_1 \ldots u_n$ összes raczionális függvényei emez egyetlenegy egyenlet gyökeinek raczionális függvenyei gyanánt tekinthetők. Ily módon a *Kronecker* [1]) által az ily gyökök függvényeire nézve megállapított fölosztást *faj*okra át lehet vinni az n változó raczionális függvényeire is. Így *az összes raczionalis függvényeket véges számú osztályba sorozzuk. Ezek az osztályok egy n független függvényből $(R_1 \ldots R_n)$ álló alaprendszerre vonatkoznak oly módon, hogy az ugyanazon osztályba tartozó függvények az alaprendszer segítségével bármelyikük által raczionálisan előállíthatók.* Ez által számtalan módon nyerhetni ú. n. *véges alakrendszereket,* melyekben még n tetszőleges, független függvény fordúl elő. Ezektől az osztályoktól

[1]) Monatsb. d. Berl. Ak. 1879. p. 211.

ismet visszatérhetünk a fajokhoz, ha az R-ek helyébe bizonyos speciális függvényeket, az $u_1 \ldots u_n$ symmetrikus elementáris függvényeit teszszük.

E tételek még akkor is érvényesek maradnak, ha nem az összes raczionalis függvényeket veszszük, hanem csak azokat, melyek egy bármikép megszabott föltételnek eleget tesznek. Csakhogy az ily »függvénycomplex« már nem tartalmaz mindíg n független függvényt és ekkor ennek megfelelőleg az R-ek száma is alászáll.

Az adott algebrai alakok rendszerének megfelelő simultán invariánsok és covariánsok ily complexet alkotnak; és így a következőkben egyszersmind bennfoglaltatik ama sokat keresett tétel bebizonyítása, hogy mindíg létezik oly véges alakrendszer, mely által minden invariáns és covariáns raczionálisan kifejezhető. Azonban az előállítás itt csak raczionális és nem egész, a minőt Gordan a binär alakokra adott, és így az »egész« kifejezés problémája még ezntán is nyilt kérdés marad, melyre — úgy remélem — még lesz alkalmam visszatérni.

I.

Adott egyenletrendszer csoportja.

Legyenek:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ R_2 &= R_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (1.) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_n &= R_n(u_1, u_2, \ldots, u_n); \end{aligned}$$

az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ mennyiségeknek oly raczionális függvényei, melyek egymástól függetlenek, azaz: a melyeknek függvénydeterminánsa nem tünik el. A következőkben e függvények rendszerét *alaprendszer*nek nevezzük, mert erre vonatkozik majd minden más raczionális függvény előállítása.

Ha az (1.) alatti egyenletrendszerben a balról álló $R_1, R_2, \ldots R_n$-t, mint tetszőleges, semmiféle megszorításnak alá nem vetett állandókat fogjuk föl, akkor ezen egyenleteket az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ meghatározására használjuk, és így általánosságban N különböző értékrendszert nyerünk az u-kra nézve, melyek az egyenleteket kielégítik. Ezek:

$$\begin{array}{l} \overset{0}{u}_1, \overset{0}{u}_2, \ldots, \overset{0}{u}_n, \\ \overset{1}{u}_1, \overset{1}{u}_2, \ldots, \overset{1}{u}_n, \\ \text{s. ú. t.} \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots (2.)$$

az R-eknek bizonyos véges függvényei, mert végtelen megoldás mindig külön kapcsolatot tételez föl az R-ek közt, míg ezeket teljesen tetszőlegeseknek hagytuk.

Az (1.) alatti rendszer megoldása ismeretes módon mindig visszavezethető az oly egyenletekére, melyek csak egy-egy ismeretlent tartalmaznak. Így p. az u_i-nak különböző értékeit oly egyenletből nyerhetjük, mely egyenlet maga a többi u kiküszöbölése által származik. Ily módon keletkeznek a következő egyenletek:

$$\begin{array}{l} \Phi_1(u_1, R_1, R_2, \ldots, R_n)=0, \\ \Phi_2(u_2, R_1, R_2, \ldots, R_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n(u_n, R_1, R_2, \ldots, R_n)=0. \end{array} \quad (3.)$$

Emez egy-egy ismeretlent tartalmazó egyenletek sorozata teljesen elegendő az eredeti rendszer megoldására, mert benne foglaltatik minden érték, mely a (2.) alatti táblázatban föllép, és így legfölebb még véges számú kisérlet szükséges arra, hogy az *összetartozó* gyökrendszereket is megtaláljuk. Kétséget sem szenved, hogy a rendszer megoldási módja — ily módon előterjesztve — még nem teljes. Ha p. az u_1 számára nyert egyenletnek nincsenek egyenlő gyökei, akkor már mind a többi u-t raczionális módon kifejezhetjük u_1 által. De további fejtegetéseinket legjobban a (3.) alatti rendszerhez csatolhatjuk, ez által ugyanis teljesen kikerüljük ama kivételes eset tárgyalását, mely az egyenlő gyökök föllépésének felel meg, és mely külön tekintetbe veendő, ha az $u_2, \ldots u_n$-t nem önállóan, hanem az u_1-ből akarjuk meghatározni. [1])

---

[1]) Egyenlő gyökök ugyanis előfordúlhatnak a 3. alatti egyenletekben még akkor is, ha az R-eket teljesen független mennyiségeknek tekintjük.

A (3.) alatti egyenletekben általánosságban most még redukczió lehetséges. Minthogy az R-ek tetszőleges mennyiségek, ez annyit jelent, hogy a Φ-ből még esetleg kiválaszthatunk oly alsóbbfokú szorzót, melynek együtthatói ismét raczionális módon vannak összerakva az R-ekből. Ha ez úgy van, az egyes tényezőket különválasztjuk, külön teszszük őket egyenlőkké zérussal, és így végre (3.) helyett a következő »irreduktibilis« egyenletek sorozatát nyerjük:

$$\begin{array}{l} \Phi_1^{(1)} = 0, \quad \Phi_1^{(2)} = 0, \ldots\ldots \\ \Phi_2^{(1)} = 0, \quad \Phi_2^{(2)} = 0, \ldots\ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \quad \ldots (4.)$$

Két ily egyenletnek most már vagy nincs is közös gyöke, vagy minden gyökük közös, a mint ez az irreduktibilitás elméletéből közvetetlenül foly. Ha a (4.) alatti rendszerben például k egyenlet ugyanazokat a gyököket adja, azazaz ugyanegy egyenlet k-szor fordúl elő, akkor ezt csak egyszer hagyjuk meg; ez által oly egyenleteket nyerünk, melyek még az összes, az eredeti rendszernek megfelelő u-értékeket adják, de mindegyiket csak *egyszer*.

Ha most még az ismeretlen jelölésére az összes egyenletekben ugyanazt a betűt használjuk, u-t mutató nélkül, és az egyenleteket egymással szorozzuk, lesz:

$$\Psi(u, R_1, R_2, \ldots, R_n) = 0, \quad \ldots\ldots (5.)$$

oly egyenlet, mely általánosságban raczionális tényezőkre bontható ugyan, de a melynek csupa *különböző* gyöke van.

Ennek az egy egyenletnek megoldása szolgáltatja az összes értékeket, melyek a (2.) alatti táblázatban előfordúlnak, tehát lényegben megadja az eredetileg föltett rendszernek megoldását.

Minden egyenlethez most már ismeretes módon meghatározhatjuk a hozzátartozó helyettesítési csoportot, oly módon, hogy minden raczionális függvénye a gyököknek, mely e helyettesítések alkalmazása által nem változik, már az $R_1, R_2, \ldots R_n$ által is kifejezhető raczionális módon és megfordítva. Ily csoport — a megelőzők értelmében — azonban nem csak a Ψ egyenletet jellemzi, hanem az eredetileg adott rendszert is, sőt a függvények amaz alaprendszerét is, a melyekből az első egyenleteket képeztük.

Ide csatolok mindjárt még egy rendszerünk megoldására vonatkozó megjegyzést, melyre majd ezután hivatkoznom kell. *Minden a rendszert kielégitő értéksorozat*:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

általánosságban különböző értékekből áll. Vezessük be ugyanis az $u_i = u_k$ föltételt az eredetileg adott rendszerbe; akkor n egyenletünk lesz, melyben csak $n-1$ ismeretlen fordúl elő. Ezeket tehát kiküszöbölhetjük, és a kiküszöbölés eredménye kapcsolatot állapítana meg az R-ek közt, a mi meg nem fér azzal, hogy ezeket egymástól függetleneknek állapítottuk meg.

II.

Az n változót tartalmazó raczionális függvények véges számú osztályba sorozhatók.

Ha most már az alaprendszerben benn foglalt

$$R_i = R_i\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

függvények segitségével az u-knak bármely más raczionális függvényét

$$F = F(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

akarjuk előállítani. akkor ebből az $n+1$ egyenletből majd kiküszöböljük az $u_1, u_2, \ldots, u_n$-t és ez által

$$\varphi\,(F, R_1, R_2, \ldots R_n) = 0$$

alakú algebrai egyenletet nyerünk F számára, melynek együtthatói ismét raczionális módon vannak összerakva az R-ekből.

Könnyű belátni, hogy a kiküszöbölés által nyert *teljes* egyenlet N-ed fokú.

Gondoljuk ugyanis, hogy az R-ek valamely eredetileg adott, bármiképen választott

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

rendszer által vannak meghatározva, akkor az egyenletrendszerre vonatkozó tárgyalásainkból tudjuk, hogy az R-ek így megszabott értékeinek, nemcsak ez az egy, hanem N értékrendszer felel meg; és kell, hogy az egyenlet a mindezeknek egyenkint megfelelő F értékeket szolgáltassa.

Legyen az először megszabott u rendszernek megfelelő gyöke az egyenletnek:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Más oldalról tudjuk, hogy $u_1, u_2, \ldots, u_n$ az előbbi czikkben (5.) alatt fölállított $\Psi(u) = 0$ egyenletnek is gyökei, még pedig az első czikk végén álló megjegyzés értelmében, különböző gyökei. És így tehát az F-et, mint a $\Psi(u) = 0$ egyenlet gyökeinek raczionális függvényét értelmezhetjük. Mint ilyennek, megfelel neki a helyettesítések bizonyos csoportja, mely a Ψ egyenlet helyettesítési csoportjában bennfoglaltatik, ès a mely csoportnak bármelyik helyettesítése változatlanúl hagyja az F algebrai alakját.

Legyenek ezek:

$$1, S_2, S_2, S_3, \ldots.$$

Ezekből az összes, a Ψ egyenletnek megfelelő csoportot nyerjük az által, hogy bizonyos

$$1, T_1, T_2, T_3, \ldots.$$

substitucziókkal szorzunk. Akkor az F függvénynek a T substitucziók alkalmazása által nyert értékei algebrai alakjukra nézve mindannyian különböznek ugyan, de daczára ennek még lehetnek köztük egyenlők, a nélkül, hogy ez kapcsolatot állapítana meg az R-ek közt.

Legyenek:

$$1, T_a, T_b, \ldots.$$

ama substitucziók — számra nézve p. k — melyek az R-ek tetszőleges volta mellett is az F-fel egyenlő értékeket szolgáltatnak.

Akkor:

$$\begin{array}{llll} 1, & S_1, & S_2, & \ldots. \\ T_a, & T_aS_1, & T_aS_2, & \ldots. \\ . & . & . & . \end{array}$$

ismét csoportot alkotnak, melyet az F függvény *numerikus* csoportjának lehet nevezni. E substitucziók változtatják ugyanis esetleg az F algebrai alakját, de nem ennek értékét, ha az érték meghatározásánál tekintetbe veszszük, hogy $u_1 \ldots u_n$ a

$$\Psi(u) = 0$$

egyenlet bizonyos gyökei.

Két függvény F_1 és F_2 ugyanabba az osztályba tartozzék, ha a kettőnek numerikus csoportja ugyanaz.[1] Az így keletkező osztályok száma véges; mert a $\Psi(u) = 0$ egyenlet csoportjában foglalt alcsoportok száma is az.

Két ugyanabba az osztályba tartozó függvény most már raczionálisan fejezhető ki egymás által, ha még segítségül veszszük az $R_1 \ldots R_n$ értékeket. Ha a két függvénynek algebrai és numerikus csoportja összeesik, akkor ez közvetetlenül világos a hasonló függvények elméletéből, a mint ezt még Lagrange adta; az általános esetben pedig a Lagrange-féle tételek amaz általánosításából, melyet Camille Jordan adott.[2])

Vizsgálódásaink kiinduló pontja az $u_1, u_2, \ldots u_n$-nek egy tetszőlegesen választott értékrendszere volt, és így tehát eredményeink érvényesek eme n változó bármily raczionális függvényére. Ezekre vonatkozólag kifejezve, a nyert eredmények a következők:

Az $u_1, u_2, \ldots, u_n$-nek minden raczionális függvényét az

$$R_i = R_i(u_1, u_2, \ldots u_n),$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

n egymástól független függvényből alkotott alaprendszerre vonatkozólag véges számmal lévő osztályba sorozhatjuk, oly módon, hogy minden függvény raczionálisan állítható elé bármely más, ugyanabba az osztályba tartozó függvény és az $R_1, R_2, \ldots R_n$ alapfüggvények által.

Ha például m osztály van és minden osztályból egy-egy függvényt választunk, akkor még tételünkből tüstént következtethetjük, hogy:

---

[1]) Az ily módon nyert osztályokra, valamint a Kronecker-féle fajokkal való kapcsolatra vonatkozólag l. a következő »A resolvensek elméletéhez« czímü értekezés végét.

[2]) Traité des substitutions., pag. 262.

Az n változót tartalmazó raczionális függvények összessége előállítható mint néhány kellően kiválasztott alaknak raczionális függvénye.

Különben általánosságban nem is lesz szükséges, hogy eme függvények rendszerébe, a melyek által már *minden* függvény raczionálisan kifejezhető, valóban bevegyük minden osztálynak egy-egy képviselőjét. Ezt könnyű volna kimutatni az által, hogy a hasonló függvényekre vonatkozó fejtegetéseket folytatnók; de ez mostani czélunkra fölösleges volna.

Végül álljon még itt az a megjegyzés, hogy az ily kifejezés

$$F_2 = \text{Rat. függv.}\ (F_1, R_1, R_2, \ldots, R_n)$$

— mint mindig hasonló alakoknál — bizonyos esetekben többé nem lesz érvényes. Ha az $u_1, u_2, \ldots, u_n$-t mint egy n irányban kiterjedt sokaság (Mannigfaltigkeit) coordinátáit fogjuk fel, akkor az u-knak e kivételes értékei egy n—1 méretű sokaságon feküsznek. Ezek természetesen ugyanazok, a melyekre nézve, ha $F, R_1\ R_2 \ldots R_n$ helyébe visszarakjuk az u-kat, az F_2 kifejezése analytikailag határozatlan lesz.

III.

Bizonyos föltétel által meghatározott függvénycomplex osztályozása.

Az n független függvényből álló alaprendszer helyett vegyünk most olyant, mely csak k függvényből áll:

$$R_i = R_i\ (u_1, u_2, \ldots, u_n),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k);$$

míg más oldalról az $u_1, u_2, \ldots u_n$ raczionális függvényei közül is csak azokat vizsgáljuk, melyeknek már e k függvénynyel van az u-któl független algebrai relácziójuk. Vagy — a mi ugyanaz, vizsgáljuk az u-k ama raczionális függvényeit, melyek mint gyökei tekinthetők az oly algebrai egyenleteknek, melyeknek együtthatói az $R_1, R_2, \ldots R_k$ raczionális függvényei.

Rövidség kedvéért az ily módon értelmezett függvények összességét *k-méretű függvénycomplex*nek nevezem. Az ily complexnek jellemző vonása az, hogy ha $k+1$ *tetszőleges* függvényt veszek belőle, ezek közt mindig van az u-któl független reláczió, de nem még k tetszőlegesen választott függvény közt. Látni továbbá, hogy az ily complex teljesen meg van határozva, ha a benne tartalmazott függvények sorából k egymástól független alak ismeretes, mert ezeknek segítségével eldönthető, vajjon valamely adott raczionális függvény a complexbe tartozik-e, vagy sem? Tehát minden k független függvényből álló rendszer alaprendszernek vehető.

Ha a változók száma n, csak egy n-méretű complex lehetséges, és ez magában tartalmazza az összes rationális függvényeket, melyeket n változóból alakíthatunk.

Hogy most az előbbi czikk eredményeit a jelen esetre alkalmazhassuk, mindenek előtt kiegészítjük az $R_1, \ldots R_k$ függvények alaprendszerét más $n-k$ független függvény által, mely azonban az eddigi fejtegetések értelmében nem tartozhatik többé a complexbe. Ez legegyszerűebben úgy történik, hogy ha az R egyenletek bizonyos k változó szerint megoldhatók, a többi változónak $n-k$ lineáris független függvényét veszszük. Legyenek ezek:

$$P_i = P_i\,(u_{k+1}, \ldots, u_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-k).$$

Erre az n függvényből álló alaprendszerre vonatkozólag most ismét az összes raczionális függvényeket osztályozzuk.

Ha e szerint F_1 és F_2 ugyanabba az osztályba tartozik, akkor p. F_2 raczionálisan kifejezhető $F_1, R_1, R_2, \ldots, R_k, P_1, P_2, \ldots P_{n-k}$ által.

Van továbbá F_1 és F_2 számára két egyenletünk, melynek alakja:

$$\Psi_1\,(F_1, R_1, \ldots R_k) = 0$$
$$\Psi_2\,(F_2, R_1, \ldots R_k) = 0,$$

míg F_2 számára még a következő kifejezés érvényes:

$$F_2 = r\,(F_1, R_1, \ldots, R_k, P_1, \ldots P_{n-k}).$$

Ha az F_2 e kifejezése *valóban* tartalmazná a P-ket, akkor, miután már $R_1, R_2 \ldots R_k$-nak bárminő állandó értékeket tulajdonítottunk, még mindig úgy lehetne a P-ket választani, hogy F_2 valami tetszőleges értéket nyerjen; de a $\Psi_2 = 0$ egyenlet mutatja, hogy $R_1, \ldots, R_k$ már megszabja az F_2 értékét. Ebből az következik, hogy az r függvényalak nem is tartalmazza a P-ket, és hogy az F_1 és F_2 közti kapcsolat már ily alakú egyenlet által van adva:

$$F_2 = r\,(F_1, R_1, R_2, \ldots R_k)$$

Ha az $u_1 \ldots u_n$ változók összes raczionális függvényeit osztályozzuk, akkor avval együtt természetesen ama raczionális függvények osztályozása is megtörtént, melyek az $R_1, \ldots, R_k$ által jellemzett complexbe tartoznak. Még pedig látni most már, hogy az utóbbi függvények osztályozása teljesen független a $P_1 \ldots P_{n-k}$ választásától; mert a kérdés egyszerűen az, vajjon az

$$\Psi_1\,(F_1, R_2, R_2, \ldots R_k) = 0$$
$$\Psi_2\,(F_2, R_1, R_2, \ldots R_k) = 0$$

egyenletek egy-egy nem redukálható tényezője átvezethető-e a másikba

$$F_2 = r_1\,(F_1, R_1 \ldots R_k)$$
$$F_1 = r_2\,(F_2, R_1 \ldots R_k)$$

alakú transformácziók segítségével; itt pedig a P függvények még a kérdés föltevésében sem szerepelnek.

Ily módon az összes raczionális függvényekre érvényes tételeket átvittük arra az esetre, midőn csak az egy bizonyos complexhez tartozó függvényeket akarjuk megvizsgálni. Az ily complexekre nézve a következő tételeket nyertük:

A k egymástól független függvény

$$R_i = R_i\,(u_1 \ldots u_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots k)$$

által meghatározott k-méretü függvénycomplexnek összes függvényeit véges számmal lévő osztályokba lehet sorozni, úgy hogy minden függvény raczionálisan állítható elé bármely más ugyanabba az osztályba tartozó függvény és az alaprendszer függvényei által.

Ismét egyszerű következménye e tételnek még a következő is:

Az összes függvények, melyek egy k-méretű complexbe tartoznak, raczionálisan állíthatók elé néhány kellően kiválasztott alak által.

IV.

Az invariáns elmélet alaptétele.

Legyenek most $u_1, u_2, \ldots u_n$ bárminő algebrai alak- vagy alakrendszernek összes együtthatói és változói. Az *algebrailag* független invariánsok [1]) száma akkor természetesen nem lehet nagyobb, mint n. Ismeretes különben, hogy e szám n-nél kisebb. Legyen e szám k, és e szerint

$$I_1, I_2, \ldots, I_k$$

az oly invariánsok sorozata, melyek közt nincs még az u-tól független kapcsolat, míg minden más invariáns alak most már $I_1 \ldots I_k$-hoz oly egyenlet által van hozzáfűzve, mely az eredetileg adott algebrai alak együtthatóit vagy változóit explicite már nem tartalmazza.

Az eddigiekben előadott kifejezésmód szerint — tehát a tárgyalt alak összes invariánsai bennfoglaltatnak az $I_1, I_2, \ldots I_k$ által meghatározott függvénycomplexben.

Osztályozzuk ismét e complexet a már részletesen kifejtett elvek értelmében. — Meglehet ekkor, hogy egyes osztályok nem is tartalmaznak invariáns alakot; akkor az illető osztályt egészen mellőzhetjük. Minden oly osztályból, melyben vannak invariánsok, kiválasztunk egyet, és akkor mind a többi — ebből az osztályból — kifejezhető raczionálisan $I_1, I_2, \ldots I_k$ és ezen egy által.

Legyen most már m az invariánsokat tartalmazó osztályok száma, és $i_1, i_2, \ldots i_m$ egy-egy invariáns minden osztályból, akkor *a tárgyalt algebrai alakrendszer minden invariánsa raczionális függvénye a következő invariánsoknak:*

---

[1]) A szövegben röviden »invariáns«-t mondok, hol tulajdonképen mindig »invariáns vagy covariáns«-t kellene mondani.

$$I_1, I_2, \ldots I_k, i_1, i_2, \ldots i_m,$$

hol még lehetséges az is, hogy az i-k közül egynehány a tétel ez utolsó fogalmazása mellett fölösleges.

A kezdetben elmondottaknak megfelelőleg, — és az igen fontos — e véges alakrendszer megállapításánál tulajdonképen nem is használtuk az invariáns-tulajdonságot; a módszer, melylyel az utolsó eredményeket nyertük, teljesen érvényes marad, ha mindenütt invariánsok helyett oly raczionális függvényekről beszélünk, melyek valami bármiképen megszabott föltételt kielégítenek.

Így tehát kimondhatjuk végre a következő tételt, mely a raczionális függvények elméletében nyert eredményeink legáltalánosabb kifejezése.

Mindazok a raczionális függvények, melyek eleget tesznek valami bárhogyan fogalmazott föltételnek, néhány közölük kellöen választott alak által raczionálisan fejezhetök ki.

Így p. *véges alakrendszert* nyerünk nem csupán valamely alakrendszer invariánsai számára, hanem ép ilyen felel meg amaz alakok összességének is, melyek p. nem az invariánsokat jellemző differencziálegyenleteknek, hanem bármi más ily differencziálegyenleteknek felelnek meg.

A resolvensek elméletéhez.

Legyen $f(x) = 0$ valamely n-edfokú egyenlet, melynek gyökei $x_1 \ldots . x_n$ mindannyian különbözők; legyen továbbá G az egyenlethez tartozó csoport és r e csoport rendje. Ha F alatt e gyökök raczionális függvényét értjük, akkor a G-ben bennfoglaltatik egy másik G' csoport — tegyük r' substituczióból álló — mely az F-nek algebrai alakját nem változtatja. Akkor F-nek mindössze

$$\frac{r}{r'} = k$$

algebrai alakjára nézve különböző értéke van:

$$F_1, F_2, \ldots, F_k;$$

melyek számára fölállíthatjuk a következő egyenletet:

$$((z-F_1)(z-F_2) \ldots (z-F_k) = 0.$$

Az így nyert egyenlet együtthatói az eredeti egyenlet együtthatóiból raczionális módon vannak összerakva, kiszámításukra tehát kész algorithmussal rendelkezünk. Ez az F-egyenlet ismeretes módon az eredeti egyenletnek resolvense, oldó egyenlete, mert ha csak egy gyökét, p. F_1-et ismerem, ez által az eredeti egyenlet csoportja G redukálva lesz G'-re, és az egyenlet rendje az eredeti r-ről leszállt r're.

Ha az algebrai alakjukra nézve különböző $F_1, F_2, \ldots F_k$ értékek számértékükre nézve is különböznek, az F-egyenlet mindig irreduktibilis.

Ezt bebizonyíthatjuk, kiindulva abból az elvből, melyet »Über rationale Functionen von n Elementen etc.« czímű értekezésemben [1]) bebizonyítottam, a mely szerint a G csoport x substitucziói isomorph $\mathfrak{G}$ csoportot adnak az $F_1 \ldots . F_r$ elemek közt, még pedig úgy, hogy az ekként keletkező $\mathfrak{G}$ csoport az F egyenletnek csoportja. Minthogy ugyanis $F_1 \ldots F_k$ a teljes értéksorozat, mely a G substitucziói által F_1-ből keletkezhetik, kell, hogy a $\mathfrak{G}$ csoportban legalább egy substituczió legyen, mely átviszi az F_1-et a tetszőleges F_2-be. E szerint az F egyenlet csoportja transitiv, és így az egyenlet maga nem bontható raczionális tényezőkre, azaz irreduktibilis. Ezt az eredményt még úgy is lehet kifejezni, hogy *az F egyenlet fölbontása raczionális tényezőkre csak akkor lehetséges, ha egyenlő gyökei vannak.*

Az utóbbi esetben tehát az oly F értékek, melyeknek különböző algebrai alakjuk van, tehát nem egyenlők *minden* x-re nézve, mégis egyenlők lesznek, mert hiszen az eredeti egyenletből az $x_1 \ldots x_n$ számértéke tulajdonképen meg van határozva.

E föltétel alatt vizsgáljuk meg részletesebben a resolvens tulajdonságait. Legyen az F egyenletben két tovább már föl nem bontható tényező:

$$(z-F_1)(z-F_2)\ldots.(z-F_{k'})$$

és

$$(z-F'_1)(z-F'_2)\ldots.(z-F'_{k''}).$$

Közvetlenűl látni, hogy ezek vagy csupa egyenlő, vagy csupa különböző gyököket adnak. Mert különben a közös gyökök bennfoglaltatnának egy raczionális műveletek segítségével fölállítható egyenletben és így a fölbonthatatlannak föltételezett tényezők újból szét volnának bontva.

A két tényező mindig ugyanazokat a gyököket szolgáltatja.

Az elsőt ugyanis még

$$z^{k'}+A_1 z^{k-1}+\ldots+A_{k'}=0$$

alakban írhatjuk, hol az A-k raczionálisak, tehát már egy substituczió által sem változnak. Ha most már p. azt a substitucziót alkalmazzuk, mely F_1-et átviszi F'_1-be, akkor egy oldalról azt

[1]) Math. Annalen XIV. kötet.

a tényezőt kell nyernünk, mely, egyenlővé téve zérussal, a F_1 gyököt adja, míg más oldalról e tényező utoljára kiirt alakja mutatja, hogy egyáltalában nem változik. A tetszőleges F'_1 gyök tehát szükségkép bennfoglaltatik már az $F_1 \ldots F_k$ gyökök közt; azaz a fölirt tényezők bármelyike szolgáltatja már az összes gyököket.

Minthogy e szerint az összes föl nem bontható tényezők egyenlők, világos, hogy minden gyöknek sokszorossági foka ugyanaz, és így, ha

$$\frac{k}{k'} = \lambda,$$

az F egyenlet többtagúja teljes λ-adik hatvány, maga a hatványozandó alak pedig irreduktibilis.

Ha a resolvens képezésénél tüstént a függvény numerikus csoportjából indulunk ki, és nem az algebrai csoportból, akkor a resolvens többtagúját mindjárt legegyszerűbb alakjában nyerjük és nem a λ-adik hatványon. Azonban épen arra az esetre kellett kifejteni a viszonyokat, midőn ismerjük ugyan az F függvény algebrai csoportját, de nem a numerikus csoportot. Adott egyenletnél általánosságban adva van ugyan a csoportja, de nem a gyökök numerikus értéke; és így az F függvénynek is csak az algebrai csoportja tekinthető ismeretesnek.

Vajjon az algebrai csoport egyáltalában különbözik-e a numerikus csoporttól, vajjon a mi ezzel együtt jár, ez az elsőnek alcsoportja-e, azt épen a resolvens kiszámítása által kell eldöntenünk.

Ha egy bizonyos F függvényre és egy bizonyos egyenletre vonatkozólag van különbség az algebrai és a numerikus csoport közt, akkor úgy e függvénynek, mint az F substitucziók csoportjának bizonyos speciális tulajdonságai vannak, melyeket az algebrailag különböző F értékek vizsgálatából kifejthetők. Legyenek ezek:

$$\begin{array}{l} F_1, F_2, \ldots . F_k, \\ F'_1, F'_2, \ldots . F'_k, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_1^{(\lambda-1)}, F_2^{(\lambda-1)}, \ldots F_{k'}^{(\lambda-1)}, \end{array}$$

még pedig úgy irva, hogy az egy sorban állók egyszersmind számértékben is különböznek, míg egy oszlopban a számértékre nézve egyenlő, de algebrai alakjukra nézve különböző értékek állanak. Akkor p.

$$F_1 - F_1'$$

zérus, így tehát raczionálisan van kifejezve, ennek következtében az adott egyenlet csoportja csak oly substituicziókat tartalmazhat, melyek e kifejezés értékét nem változtatják. Minthogy pedig két különböző oszlopban álló F különbsége a 0-tól különböző, *az eredetileg adott egyenlet csoportjának minden substituicziója vagy csak az egy-egy oszlopban álló elemeket cseréli föl egymás közt, vagy pedig az oszlopokat egészben, azaz az F substituicziók csoportja nem primitiv.*

Ezen az alapon most már könnyű *oly Φ függvényt képezni, melynek számértékei ugyanazok, mint az F-éi, de oly különbséggel, hogy* a *Φ-k algebrai alakjukra nézve is egyenlők lesznek, mihelyt értékükre nézve egyenlők.* Ez a következő:

$$\Phi_1 = \frac{1}{\lambda}(F_1 + F_1' + \ldots + F_1^{(\lambda-1)}),$$

a további értékei pedig:

$$\Phi_2 = \frac{1}{\lambda}(F_2 + F_2' + \ldots + F_2^{(\lambda-1)}),$$

$$\vdots$$

$$\Phi_{k'} = \frac{1}{\lambda}(F_{k'} + F_{k'}' + \ldots + F_{k'}^{(\lambda-1)}).$$

Közvetlenül látni, hogy $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$-nek ugyanaz az értéke, mint $F_1, F_2, \ldots$-nek, még pedig a Φ-k ugyanazon substituicziók által mennek át egymásba, mint az F numerikus értékei.

Kronecker valamely egyenlet gyökeinek raczionális függvényeire vonatkozólag *fajokra való fölosztásukat* következőkép állapítja meg:

Két függvény ugyanabba a fajba tartozik, ha mindegyik a másik által raczionálisan kifejezhető. Ezt az értelmezést fölcseréljük azonban a következővel, melyből tüstént kiviláglik a fajok véges száma.

Mindama függvények, melyeknek ugyanaz a numerikus csoport felel meg, egy fajba tartoznak. Ha ugyanis φ és ψ raczionálisan fejezhető ki egymás által, akkor numerikus csoportjuk mindig ugyanaz; mert $\varphi = R(\psi)$-ből következik, hogy oly substituczió, mely nem változtatja ψ-t a φ-t is változatlanúl hagyja. Minthogy ez pedig megfordítva is áll, kell, hogy a φ és ψ csoportja ugyanaz legyen. De hogy a két értelmezést valóban mindig föl lehessen cserélni, még a következő tételt kell bebizonyítanunk:

Ha φ és ψ-nek ugyanaz a numerikus csoportja, akkor raczionálisan fejezhetők ki egymás által.

Ha φ-t ugyanis adottnak veszszük, akkor az egyenlet csoportjában csak azok a substsocziók maradnak, melyek φ-t váitozatlanúl hegyják. De akkor az ily módon alakuló új csoport substitutiói a ψ-t sem változtatják, tehát ez raczionálisan kifejezhető lesz. Hasonlókép a ψ adjunkcziója raczionálissá teszi a φ-t is. (Camille Jordan, Traité des substitutions, p. 262.)

Látni ez alapon, hogy a megelőző értekezésemben adott osztályozása a raczionális függvényeknek következőképen is jellemezhető:

Az $u_1, u_2, \ldots u_n$ változók két raczionális függvénye az $R_1 \ldots . R_n$ alaprendszerre vonatkozólag ugyanabba az osztályba tartozik, ha az ott kifejtett $\Psi(u, R_1, \ldots R_n) = 0$ egyenlet bizonyos n gyökének függvénye gyanánt tekintve, ugyanabba a fajba sorozandó.

Ebből kitünik, hogy tehát nemcsak az egy osztályba tartozó függvények raczionálisan fejezhetők ki egymás által az alaprendszer segítségével, hanem hogy megfordítva két függvény, melyre nézve ez áll, mindig egy és ugyanazon osztályba tartozik.

Ha végre most az $R_1 \ldots R_n$ alaprendszer számára bizonyos speciális függvényalakokat veszünk, t. i. az $u_1 \ldots n_n$ ú. n. elemi symmetrikus függvényeit, akkor az így megállapított osztályok átmennek az általános n-edfokú egyenletre vonatkozó fajokba.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgés-forrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hullo csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . 20 kr.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.