ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
VII. KÖTET. XXI. SZÁM. 1880.

TÉTELEK
A
COMPONÁLT DETERMINÁNSOKNAK
EGY KÜLÖNÖS NEMÉRŐL.

HUNYADY JENŐ
LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. október 18-án.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1880.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

TÉTELEK

A

COMPONÁLT DETERMINÁNSOKNAK

EGY KÜLÖNÖS NEMÉRŐL.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. október 18-án.)

BUDAPEST, 1880.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

Az Akadémia épületében.

Tételek a componált determinánsoknak egy különös neméről.

Amint azt a következő czímű értekezésünkben »Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva«, már megemlítettük: componált, vagy összetett determinánsnak angol mathematikusok szerint az olyant nevezzük, melyeknek elemei ismét determinánsok.

E sorok czélja a componált determinánsoknak egy különös osztályát megvizsgálni, melyek elemei két adott determináns elemeiből vannak componálva. Az itt közlött fejtegetések Sylvesternek egyik tételéből indulnak ki, mely tételnek uj bebizonyitásával kezdjük meg vizsgálatainkat.

1. (Sylvester tételének uj bebizonyítása). [1]) Legyenek a következő n-ned fokú determinánsok:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = A$$

és

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots\ldots & b_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{vmatrix} = B$$

[1]) Sylvester : Phil. Mag. 1851, I. 297. l.

és származtassuk az A és B determinánsokból az A_{xy} determinánst akképen, hogy A-ban az x-edik sort B-nek y-adik sorával pótoljuk, akkor az n^2 A_{xy} elemből componált determinánst D-vel jelölvén,

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots\ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \ldots\ldots & A_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} \ldots\ldots & A_{nn} \end{vmatrix} = A^{n-1}. B \ldots (1)$$

Bebizonyítás. Jelöljük az A determinánsban az a_{xy} elem együtthatóját α_{xy}-nal, akkor A_{xy} előrebocsátott értelmezése szerint:

$$A_{xy} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & \ldots a_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{x-11} & a_{x-12} \ldots\ldots & a_{x-1n} \\ b_{y1} & b_{y2} \ldots\ldots & b_{yn} \\ a_{x+11} & a_{x+12} \ldots\ldots & a_{x+1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

vagy ha az A_{xy} determinánst annak x-edik sora szerint felbontjuk, akkor az előrebocsátott jelölés megtartásával azt még a következőképen írhatjuk:

$$A_{xy} = \alpha_{x1}\, b_{y1} + \alpha_{x2}\, b_{y2} + \text{»} \quad \ldots\ldots + \alpha_{xn}\, b_{yn} \ldots (2)$$

Az A_{xy} elemek ezen összetételénél fogva az α és b elemekből rögtön felismerjük, hogy:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots\ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots\ldots \alpha_{2n} \\ . & . \quad\quad . \\ . & . \quad\quad . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots\ldots \alpha_{nn} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots\ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots\ldots b_{2n} \\ . & . \quad\quad . \\ . & . \quad\quad . \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots\ldots b_{nn} \end{vmatrix}$$

A jobb oldalon álló első determináns az A determinánsnak adjungált determinánsa lévén, annak értéke A_{n-1}, a második determináns pedig B, úgy, hogy ezen észrevételek folytán az (1) alatti egyenletre jövünk, melynek helyességét tehát bebizonyítottuk.

2. Világos, hogy, ha a B determinánsban az x-edik sort, az A determináns y-adik sorával pótoljuk és az ily módon eredő determinánst B_{xy}-nal jelöljük, akkor az (1) alatti egyenletnél fogva:

$$D' = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \ldots & \ldots B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} \ldots & \ldots B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n1} & B_{n2} \ldots & \ldots B_{nn} \end{vmatrix} = B^{n-1}. A \ldots (3)$$

Továbbá, ha az (1) alatti egyenletet a (3) alattival sokszorozzuk, akkor a következő nevezetes egyenletet nyerjük.

$$DD' = A^n B^n \ldots\ldots\ldots (4).$$

3. (A Sylvester-féle tétel általánosítása). Ha az A determináns n sorának bármely m-enkénti combinátióját a B determináns sorainak

$$\binom{n}{m} = \mu$$

lehetséges combinátióival pótoljuk, és ha az ily módon képezett μ^2 determinánsból a Δ μ-dik fokú determinánst képezzük, akkor

$$\Delta = A^\nu B^{\mu-\nu} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

a hol

$$\nu = \frac{n-1.\ n-2. \ldots\ldots n-m}{1.\ 2. \ldots m} \ldots (6)$$

Bebizonyítás. Ha az $1, 2, \ldots n$ számoknak következő m-enkénti combinátióit: $r_1, r_2, \ldots r_m$ és $s_1, s_2, \ldots s_m$ x és y-nal jelöljük, akkor legyen:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial^m A}{\partial a_{r_1 s_1}\, \partial a_{r_2 s_2} \ldots \partial a_{r_m s_m}} \ldots (7)$$

$$\delta_{xy} = \frac{\partial^m B}{\partial b_{r_1 s_1}\, \partial b_{r_2 s_2} \ldots \partial b_{r_m s_m}} \ldots (8)$$

továbbá c_{xy} és d_{xy}, γ_{xy} és δ_{xy} együtthatói az A és B determinánsokban és e_{xy} az, a mi A-ból lesz, ha abban a következő m sort, mint $r_1, r_2 \ldots r_m$ a B determinánsnak következő m sorával, mint $s_1, s_2, \ldots s_m$ pótoljuk, akkor

$$\varDelta = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \ldots\ldots e_{1\mu} \\ e_{21} & e_{22} \ldots\ldots e_{2\mu} \\ & . \\ & . \\ e_{\mu 1} & e_{\mu 2} \ldots\ldots e_{\mu\mu} \end{vmatrix} \ldots. (9)$$

A $\varDelta$ determináns e elemeinek képzésére az előrebocsátott jelöléseket tekintetbe véve, a következő egyenletben kifejezett szabályt nyerjük:

$$e_{xy} = \gamma_{x1} d_{y1} + \gamma_{x2} d_{y2} + \ldots + \gamma_{xn} d_{yn}, \ldots (10)$$

mely elemeknek ezen összetételéből a γ és d elemekből világosan látjuk, hogy a (9) alatti determináns két determináns sokszorozatából áll, melyek közül az egyik a γ elemeket, a másik pedig a d elemeket tartalmazza, úgy, hogy:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \ldots\ldots \gamma_{1\mu} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \ldots\ldots \gamma_{2\mu} \\ . & \\ . & \\ \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} \ldots\ldots \gamma_{\mu\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \ldots\ldots d_{1\mu} \\ d_{21} & d_{22} \ldots\ldots d_{2\mu} \\ . & \\ . & \\ d_{\mu 1} & d_{\mu 2} \ldots\ldots d_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

A jobb oldalon álló két determináns közül az elsőnek értéke $A^{\mu-\nu}$, a másodiknak értéke pedig B^{ν} lévén,[1]) az előttünk lévő egyenletből következtethetjük az (5) alatti egyenlet helyességét, a mely bebizonyítandó volt.

4. Ha a B determinánsból épen úgy származtatjuk a $\varDelta'$ determinánst, mint amiként a $\varDelta$ determinánst az A determinánsból származtattuk, hogy ha t. i. a B determináns n sorának lehetséges m-enkénti combinátióit az A determináns sorainak m-enkénti combinátióival pótoljuk és az ilyként eredő e'_{xy}

[1]) Lásd: Franke következő czímű értekezésében: Über Determinanten aus Unterdeterminanten a (6) alatti egyenletet (Borchardt Journal für Math. 61. köt. 355. l.)

determinánsokat mint egy μ-dik fokú determináns elemeit fogjuk fel, úgy, hogy:

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} e'_{11} & e'_{12} \ldots\ldots e'_{1\mu} \\ e'_{21} & e'_{22} \ldots\ldots e'_{2\mu} \\ . & \\ . & \\ e'_{\mu 1} & e'_{\mu 2} \ldots\ldots e'_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

akkor találjuk, hogy:

$$\varDelta' = A^{\nu} B^{\mu-\nu} \ldots\ldots\ldots (11)$$

Ha pedig végre az (5) és (10) alatti egyenleteket egymással sokszorozzuk, akkor a következő nevezetes egyenletre jövünk:

$$\varDelta\varDelta' = A^{\mu} B^{\mu} \ldots\ldots (12)$$

5. (A D determináns minorainak meghatározása). Áttérünk az 1. és 3. számokban meghatározott D és $\varDelta$ determinánsok minor determinánsainak meghatározására, vizsgálatainkat a D determináns p-dik fokú minorainak meghatározásával kezdjük meg.

Ha a D determináns p sorának és ugyanannyi oszlopának közös elemeiből alkotott p-dik fokú minort, mint például az $f, g, \ldots$ sorok és az $i, k, \ldots$ oszlopok közös elemeiből alkotott minort $D^{fg\ldots}_{ik\ldots}$-val jelöljük, akkor:

$$D^{fg\ldots}_{ik\ldots} = A^{p-1} \cdot \begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ik} \ldots b_{iu} & b_{iv} \ldots \\ b_{ki} & b_{kk} \ldots b_{ku} & b_{kv} \ldots \\ . & . \quad\quad . & . \\ . & . \quad\quad . & . \\ a_{ri} & a_{rk} \ldots a_{ru} & a_{rv} \ldots \\ a_{si} & a_{sk} \ldots a_{su} & a_{sv} \ldots \\ . & . \quad\quad . & . \\ . & . \quad\quad . & . \end{vmatrix} \ldots (12)$$

Bebizonyítás. Legyen $f, g, \ldots$ és $i, k, \ldots$ az $1, 2, \ldots n$ számoknak két p-kénti combinátió csoportja, továbbá $r, s, \ldots$ és $u, v, \ldots$ az előbbi csoportoknak megfelelő hátralevő

$n-p$-kénti combinátió-csoportok, úgy, hogy $f, g, .. r, s$, és $i, k, ... u, v$, az $1, 2, ... n$ számsornak két tetszőleges permutátióját jelentik, akkor az előre kimondott tételben felemlítetteknél fogva:

$$D_{ik...}^{fg...} = \begin{vmatrix} A_{fi} & A_{fk} \ldots \\ A_{gi} & A_{gk} \ldots \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix}, \ldots (13)$$

mely egyenlet jobb oldalán előforduló determinánsa a (2) alatti egyenletben kifejezett A_{xy} elemek képezésénél fogva a determinánsok átalánosított sokszorozási tétele szerint,[1]) miután $p<n$ determináns sokszorozatok összegébe bontható fel, úgy, hogy:

$$D_{ik...}^{fg...} = \Sigma \begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} \ldots \\ a_{gi} & a_{gk} \ldots \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ik} \ldots \\ b_{ki} & b_{kk} \ldots \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix}, \ldots (13)$$

a hol az összegezés mind azon sokszorozatokra terjed ki, melyek az itt felirottból akként keletkeznek, hogy azokban a második mutatókat az $1, 2, ... n$ számok lehetséges $\binom{n}{p}$ p-kénti combinátiókra terjesztjük ki.

A (13) alatti egyenlet jobb oldalán előforduló első tényezőnek az értéke Jacobi[2]) tétele szerint a következőképen meg lévén határozva:

$$A^{p-1}. \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{rv} \ldots \\ a_{su} & a_{sv} \ldots \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix}$$

a (13) alatti egyenletet a következőképen írhatjuk:

---

[1]) Lásd Baltzer: Theorie und Anwendung der Determinanten czimű munkájának 3-dik kiadásának 38. l. 5. §. 1.

[2]) Ugyanott 6. §. 2.

$$D^{fg\ldots}_{ik\ldots} = A^{p-1}\,\Sigma \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{rv}\ldots \\ a_{su} & a_{sv}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ik}\ldots \\ b_{ki} & b_{kk}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

itt az összegezés most oly módon kiterjesztendő, hogy a második determinánsban az i, k,...mutatók, az elsőben pedig az u, v,...mutatók változók, még pedig úgy, hogy i, k,...és u, v,...helyett a lehetséges p-kénti és az 1, 2,...n számsorból hátramaradt $n—p$-kénti csoportozatokat helyettesítjük. Az egyenlet jobb oldalán álló sokszorozmányok összege a Laplace-féle tétel [1]) szerint a következő determinánssal:

$$\begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ik}\ldots & b_{iu} & b_{iv}\ldots \\ b_{ki} & b_{kk}\ldots & b_{ku} & b_{kv}\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ri} & a_{rk}\ldots & a_{ru} & a_{rv}\ldots \\ a_{si} & a_{sk}\ldots & a_{su} & a_{sv}\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

egyenlő a miért is az előbbi egyenletből a (12) alatti egyenlet helyessége következik.

6. (A Δ determináns minorainak meghatározása). Ha a Δ determináns p sorának és ugyanannyi oszlopának közös elemeiből alkotott minordeterminánst $\Delta^{fg\ldots}_{ik\ldots}$-val jelöljük, akkor

$$\Delta^{fg\ldots}_{ik\ldots} = A^{p-\nu}. \begin{vmatrix} d_{ii} & d_{ik}\ldots & d_{iu} & d_{iv}\ldots \\ d_{ki} & d_{kk}\ldots & d_{ku} & d_{kv}\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{ri} & c_{rk}\ldots & c_{ru} & c_{rv}\ldots \\ c_{si} & c_{sk}\ldots & c_{su} & c_{sv}\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \ldots (14)$$

[1]) Lásd Baltzer: Theorie und Anwendung der Determinanten czimű munkájának 3-dik kiadásában 4. §. 4.

vagy pedig:

$$\Delta_{ik\ldots}^{fg\ldots} = A^{\nu-p} \begin{vmatrix} \gamma_{fi} & \gamma_{fk}\ldots\gamma_{fu} & \gamma_{fv}\ldots \\ \gamma_{gi} & \gamma_{gk}\ldots\gamma_{gu} & \gamma_{gv}\ldots \\ \cdot & \cdot \quad\; \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\; \cdot & \cdot \\ \delta_{ui} & \delta_{uk}\ldots\delta_{uu} & \delta_{uv}\ldots \\ \delta_{vi} & \delta_{vk}\ldots\delta_{vu} & \delta_{vv}\ldots \\ \cdot & \cdot \quad\; \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\; \cdot & \cdot \end{vmatrix} \ldots (15)$$

Bebizonyítás. Legyenek ismét $f, g, \ldots$ és $i, k, \ldots$ az $1, 2, \ldots n$ számoknak p-kénti combinátiói a hátralevő $n-p$ szám csoportjai pedig $r, s, \ldots u, v, \ldots$, akkor, ha a Δ determinánsf $f, g, \ldots$ sorának és $i, k, \ldots$ oszlopának közös elemeiből alkotott determinánst $\Delta_{ik\ldots}^{fg\ldots}$-val jelöljük

$$\Delta_{ik\ldots}^{fg\ldots} = \begin{vmatrix} e_{fi} & e_{fk}\ldots \\ e_{gi} & e_{gk}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \ldots (16)$$

vagy ha az e_{xy} elem összetételére (l. a 10. a. egyenl.) és a determinánsok átalánosított sokszorozási tételére vagyunk tekintettel, a (16) alatti egyenletnek még a következő alakot adhatjuk:

$$\Delta_{ik\ldots}^{fg\ldots} = \Sigma \begin{vmatrix} \gamma_{fi} & \gamma_{fk}\ldots \\ \gamma_{gi} & \gamma_{gk}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{ii} & d_{ik}\ldots \\ d_{ki} & d_{kk}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \ldots (17)$$

a mely egyenlet jobb oldalán az összegezés mindazon determináns sokszorozatokra kiterjed, melyek az itt felirottakból akként erednek, hogy ezekben a második $i, k, \ldots$ mutatók helyébe az $1, 2, \ldots n$ számsor lehetséges p-kénti combinátióit helyettesítjük. Miután pedig az első determinánst még a következőképen írhatjuk:

$$A^{p-\nu}\begin{vmatrix} c_{ru} & c_{rv} \dots \\ c_{su} & c_{sv} \dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \text{*)}$$

azért a (17) alatti egyenletet még így is írhatjuk:

$$\Delta^{fg\dots}_{ik\dots} = A^{p-\nu}\,\Sigma \begin{vmatrix} c_{ru} & c_{rv} \dots \\ c_{su} & c_{sv} \dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{ii} & d_{ik} \dots \\ d_{ki} & d_{kk} \dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

mely egyenletben az összegezés most olyképen terjesztendő ki, hogy az előttünk lévő determináns sokszorozatban a második mutatók változnak akként, hogy a második tényezőben az i, k, ...második mutatók helyébe az 1, 2,...n számsor lehetséges p-kénti combinátiói, az első determináns u, v,...második mutatók helyébe pedig az előbbieknek megfelelő n—p-kénti combinátiók tétetnek. Ezek szerint a jobb oldalon álló determinánssokszorozatok összege Laplace tétele szerint egyenlő a következő determinánssal:

$$\begin{vmatrix} d_{ii} & d_{ik} \dots & d_{iu} & d_{iv} \dots \\ d_{ki} & d_{kk} \dots & d_{ku} & d_{kv} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{ri} & c_{rk} \dots & c_{ru} & c_{rv} \dots \\ c_{si} & c_{sk} \dots & c_{su} & c_{sv} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

minek tekintetbe vételével az előbbi egyenlet a (14) alatti egyenletre vezet, mely bebizonyítandó volt.

Vagy ha a (17) alatti egyenletekben a második determinánst a következőképen fejezzük ki:

$$A^{\nu-p}.\begin{vmatrix} \delta_{uu} & \delta_{uv} \dots \\ \delta_{vu} & \delta_{vv} \dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

[1]) Lásd Franke e. i. ért. a (7) alatti egyenletet.

akkor azt a következőképen írhatjuk:

$$\Delta^{fg\ldots}_{ik\ldots} = \Delta^{\nu-p} \sum \begin{vmatrix} \gamma_{fi} & \gamma_{fk}\ldots \\ \gamma_{gi} & \gamma_{gk}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{uu} & \delta_{uv}\ldots \\ \delta_{vu} & \delta_{vv}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \ldots (18)$$

a hol az összegezés a determinánsok második mutatóira terjed ki, úgy, hogy az elsőben $i, k \ldots$ helyett az $1, 2, \ldots n$ számoknak lehetséges p-kénti combinátiói és a másodikban $u, v, \ldots$ helyett pedig az előbbieknek megfelelő $n-p$-kénti combinátiók veendők. A Laplace-féle tétel értelmében az előbbi szorozmányok összege a következő determinánsban lévén kifejezhető:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{fi} & \gamma_{fk}\ldots & \ldots\gamma_{fu} & \gamma_{fv}\ldots \\ \gamma_{gi} & \gamma_{gk}\ldots & \ldots\gamma_{gu} & \gamma_{gv}\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{ui} & \delta_{uk}\ldots & \ldots\delta_{uu} & \delta_{uv}\ldots \\ \delta_{vi} & \delta_{vk}\ldots & \ldots\delta_{vu} & \delta_{vv}\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

a (18) alatti egyenletből a (15) alattira vezettetünk, a mely bebizonyítandó volt.

Megjegyzendő végre, hogy a (14) vagy (15) alatti képletet választjuk $\Delta^{fg\ldots}_{ik\ldots}$ minordetermináns meghatározására, amiként $p \lessgtr \nu$.

7. (Az előbbi tételeknek egyszerű geometriai alkalmazásai). A kifejtett tételeknek segítségével több geometriai identitást vezethetünk le.

Ha a sík i pontjának orthogonál coordinátáit x_i, y_i-val jelöljük, továbbá még rövidség kedvéért

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix} = (ikl), \ldots . (19)$$

akkor ismeretes, hogy (ikl) determináns az i, k, l pontokból meghatározott háromszög positiv, vagy negativ kétszeres területét fejezi ki, amiként az $ikli$ körülirás positiv, vagy negativ.

Ha a síkban az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokat tekintjük, akkor az ezen pontokból meghatározott háromszögök területei között az 1. és 2. számban kimondott tételek szerint a következő azonos egyenletek állanak fenn:

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} (234) & (235) & (236) \\ (314) & (315) & (316) \\ (124) & (125) & (126) \end{vmatrix} &= (123)^2\,(456) \\ \begin{vmatrix} (561) & (562) & (563) \\ (641) & (642) & (643) \\ (451) & (452) & (453) \end{vmatrix} &= (123)\,(456)^2. \end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{I.})$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} (243) & (245) & (246) \\ (413) & (415) & (416) \\ (123) & (125) & (126) \end{vmatrix} &= (124)^2\,(356) \\ \begin{vmatrix} (561) & (562) & (564) \\ (631) & (632) & (634) \\ (351) & (352) & (354) \end{vmatrix} &= (124)\,(356)^2 \end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} (253) & (254) & (256) \\ (513) & (514) & (516) \\ (123) & (124) & (126) \end{vmatrix} &= (125)^2\,(346) \\ \begin{vmatrix} (461) & (462) & (465) \\ (631) & (632) & (635) \\ (341) & (342) & (345) \end{vmatrix} &= (125)\,(346)^2 \end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{III})$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} (263) & (264) & (265) \\ (613) & (614) & (615) \\ (123) & (124) & (125) \end{vmatrix} &= (126)^2\,(345) \\ \begin{vmatrix} (451) & (452) & (456) \\ (531) & (532) & (536) \\ (341) & (342) & (346) \end{vmatrix} &= (126)\,(345)^2 \end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{IV})$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{vmatrix} (342) & (345) & (346) \\ (412) & (415) & (416) \\ (132) & (135) & (136) \end{vmatrix} &= (134)^2\,(256) \\ \begin{vmatrix} (561) & (563) & (564) \\ (621) & (623) & (624) \\ (251) & (253) & (254) \end{vmatrix} &= (134)\,(256)^2 \end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{V})$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} (352) & (354) & (356) \\ (512) & (514) & (516) \\ (132) & (134) & (136) \end{vmatrix} = (135)^2\,(246) \\ \\ \begin{vmatrix} (461) & (463) & (465) \\ (621) & (623) & (625) \\ (241) & (243) & (245) \end{vmatrix} = (135)\,(246)^2 \end{array}\right\} \ldots \text{(VI)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} (362) & (364) & (365) \\ (612) & (614) & (615) \\ (132) & (134) & (135) \end{vmatrix} = (136)^2\,(245) \\ \\ \begin{vmatrix} (451) & (453) & (456) \\ (521) & (523) & (526) \\ (241) & (243) & (246) \end{vmatrix} = (136)\,(245)^2 \end{array}\right\} . \text{ (VII)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} (452) & (453) & (456) \\ (512) & (513) & (516) \\ (142) & (143) & (146) \end{vmatrix} = (145)^2\,(236) \\ \\ \begin{vmatrix} (361) & (364) & (365) \\ (621) & (624) & (625) \\ (231) & (234) & (235) \end{vmatrix} = (145)\,(236)^1 \end{array}\right\} . \text{ (VIII)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} (462) & (463) & (465) \\ (612) & (613) & (615) \\ (142) & (143) & (145) \end{vmatrix} = (146)^2\,(232) \\ \\ \begin{vmatrix} (351) & (354) & (356) \\ (521) & (524) & (526) \\ (231) & (234) & (236) \end{vmatrix} = (146)\,(235)^2 \end{array}\right\} .. \text{ (IX)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} (562) & (563) & (564) \\ (612) & (613) & (614) \\ (152) & (153) & (154) \end{vmatrix} = (156)^2\,(234) \\ \\ \begin{vmatrix} (341) & (345) & (346) \\ (421) & (425) & (426) \\ (231) & (235) & (237) \end{vmatrix} = (156)\,(234)^2 \end{array}\right\} \ldots \text{ (X.)}$$

8. Ha a tér i pontjának orthogonál coordinátáit x_i, y_i, z_i-vel jelöljük és még rövidség kedvéért:

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \\ x_l & y_l & z_l & 1 \\ x_m & y_m & z_m & 1 \end{vmatrix} = (iklm)$$

tesszük, akkor tudjuk, hogy $(iklm)$ determináns az i, k, l, és m pontokból meghatározott tetraéder positiv vagy negativ hatszoros köbtartalma, amiként az $iklmi$ körülirás positiv, vagy negativ. Ha 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a térnek nyolcz pontja, akkor az 1. számban kimondott tételnél fogva a következő azonos egyenletek állanak:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix} (5234) & (6234) & (7234) & (8234) \\ (5341) & (6341) & (7341) & (8341) \\ (5412) & (6412) & (7412) & (8412) \\ (5123) & (6123) & (7123) & (8123) \end{vmatrix} = (1234)^3\,(5678) \\ \begin{vmatrix} (1678) & (2678) & (3678) & (4678) \\ (1785) & (2785) & (3785) & (4785) \\ (1856) & (2856) & (3856) & (4856) \\ (1567) & (2567) & (3567) & (4567) \end{vmatrix} = (1234)\,(5678)^3 \end{array}\right\}\ldots\text{(A)}$$

Megjegyzendő, hogy az (A) alatti egyenletrendszer egészben véve harminczöt rendszernek a képviselője, a mennyiben a nyolcz pontból 70-szer választhatunk ki négyet, mely négyenkénti combinátióit a nyolcz pontnak 35-párba oszthatjuk fel, úgy, hogy mindegyik pár mind a nyolcz pontot magában foglalja.

Az előbbi felvételek mellett a 3. szám tétele szerint pedig a következő azonos egyenletet nyerjük:

$$\begin{vmatrix} (1256) & (1356) & (1456) & (2356) & (2456) & (3456) \\ (1257) & (1357) & (1457) & (2357) & (2457) & (3457) \\ (1258) & (1358) & (1458) & (2358) & (2458) & (3458) \\ (1267) & (1367) & (1467) & (2367) & (2467) & (3467) \\ (1268) & (1368) & (1468) & (2368) & (2468) & (3468) \\ (1278) & (1378) & (1478) & (2378) & (2477) & (3478) \end{vmatrix} = (1234)^3\,(5678)^3. \quad \text{(B)}$$

ezen egyenlet szintén harminczöt egyenletnek a képviselője.

Budapesten, 1880. október havában.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK
a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgés. forrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erömütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . 20 kr.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.