ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.

VII. KÖTET. XIX. SZÁM. 1880.

TÉTELEK

AZON DETERMINÁNSOKRÓL

MELYEK ELEMEI

ADJUNGÁLT RENDSZEREK ELEMEIBŐL

VANNAK COMPONÁLVA.

HUNYADY JENŐ
LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. október 18-án.)

Ára 20 kr.

BUDAPEST, 1880.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

TÉTELEK

AZON DETERMINÁNSOKRÓL,

MELYEK ELEMEI

ADJUNGÁLT RENDSZEREK ELEMEIBŐL

VANNAK COMPONÁLVA.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. október 18-án.)

BUDAPEST, 1880.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

Az Akadémia épületében.

Budapest, 1880. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva.

Angol mathematikusok componált, vagy összetett determinánsnak (compound determinant) átalában az olyant nevezik, melyeknek egyes elemei szintén determinánsok.

E sorokban a componált determinánsoknak egyik különös, *eddig még meg nem vizsgált nemével* foglalkozunk, mely azon determinánsokat karolja fel, melyeknek elemei két adjungált rendszer elemeiből vannak componálva. Indítványozom hogy ezen determinánsokat *kevert adjungált determinánsoknak* nevezzük.

1. Ha α_{xy} az a_{xy} elem együtthatója az

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot \cdot \cdot \cdot a_{1n} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ a_{n1} \cdot \cdot \cdot \cdot a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánsban, akkor Cauchy[1]) szerint az

$$\begin{matrix} \alpha_{11} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_{1n} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \alpha_{n1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_{nn} \end{matrix}$$

rendszert az a rendszer adjungált rendszerének nevezzük. Az

[1]) Sur le Nombre des Valeurs qu'une fonetion peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les maniéres possibles les quantités quelle renferme. Journ. d. l'éc. polyt. 17. Cah. 64. l.

adjungált rendszer determinánsának értékét Cauchy[1]) határozta meg, az ugyanazon rendszer minoraira vonatkozó tétel pedig Jacobitól[2]) ered.

Az 1, 2,....n számsorból m különböző számot

$$\mu = \binom{n}{m} -$$

féleképen lehet kiválasztani. Jelöljük ezen combonátiókat egészen tetszőlegesen 1, 2,....μ számokkal; ha p. az $r_1, r_2, \ldots r_m$ és $s_1, s_2, \ldots s_m$ combinátióknak az x és y számjelzők felelnek meg, akkor legyen az A determinánsnak következő m-ed fokú partiális determinánsa:

$$\Sigma \pm a_{r_1 s_1}\, a_{r_2 s_2} \ldots a_{r_m s_m} = c_{xy},$$

c_{xy} együtthatója pedig az A determinánsban (mely n-m-ed fokú) legyen γ_{xy}, ekkor a következő determináns-rendszereket:

$$\begin{array}{llll} c_{11} & c_{22} & \ldots\ldots & c_{1\mu} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots\ldots & c_{2\mu} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ c_{\mu 1} & c_{\mu 2} & \ldots\ldots & c_{\mu\mu} \end{array}$$

és

$$\begin{array}{llll} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots\ldots & \gamma_{1\mu} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots\ldots & \gamma_{2\mu} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} & \ldots\ldots & \gamma_{\mu\mu} \end{array}$$

szintén adjungáltaknak nevezhetjük.[3]) Az ezen adjungált rendszerekből meghatározott μ-dik fokú determinánsok sokszorozatát szintén Cauchy[4]) határozta meg. Ezen vizsgálatok végre

[1]) Az i. h. 82. l. (36) alatti egyenlet.

[2]) De formatione et proprietatibus determinantium. Crelle Journal 22. köt. 11. czik.

[3]) Lásd Baltzer: Theorie und Anwendung der Determinanten czimű munkájában (3. kiadás) 6. §. 6-dik czikkét.

[4]) Az i. h. 102. l. (58) alatti egyenlet.

Franke [1]) úréival érték el befejezésüket, ki az előbb említett μ-dik fokú determinánsokat egyenként, valamint minorainak értékét határozta meg.

2. Áttérve a kevert adjungált determinánsok megvizsgálására, azt az egyszerű adjungált rendszerek tekintetbe vételével kezdjük meg. Ezen számban nevezetesen azon kevert adjungált determináns értékét fogjuk meghatározni, mely az A determinánsból úgy ered, hogy annak tetszőleges p sorát $(p < n)$ az adjungált rendszer tetszőleges p sorával pótoljuk.

Legyenek $f, g, \ldots$ és $i, k, \ldots$ az $1, 2, \ldots n$ számoknak tetszőleges p-kénti combinátiói, valamint $r, s, \ldots$ és $u, v, \ldots$ a hátramaradt n-p-kénti combinátiók, úgy hogy $f, g, \ldots r, s,$ és $i, k, \ldots u, v, \ldots$ az $1, 2, \ldots n$ számoknak tetszőleges permutátióit jelentik, végre pedig értsük ε és ε' alatt majd a positiv, majd a negativ egységet, a miként az $f, g, \ldots r, s, \ldots$ és $i, k, \ldots u, v, \ldots$ permutátiók az $1, 2, \ldots n$ permutátióval vagy ugyanazon vagy pedig különböző osztályba tartoznak, akkor ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = A'$$

úgy ezen és az előbbi szám jelölése szerint

$$\varepsilon A = \begin{vmatrix} a_{f1} & a_{f2} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{fn} \\ a_{g1} & a_{g2} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{gn} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{rn} \\ a_{s1} & a_{s2} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{sn} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

[1]) Über Determinenten aus Unterdeterminanten. Borchardt Journal 61. köt. 359—355. ll.

$$\varepsilon' A' = \begin{vmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{in} \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{kn} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \alpha_{u1} & \alpha_{u2} \ldots\ldots \quad \ldots\ldots & \alpha_{un} \\ \alpha_{v1} & \alpha_{v2} \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{vn} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

Ha tehát εA-ban az első p sort $\varepsilon' A'$ első p sorával pótoljuk és az ilyként származtatott determinánst $A^{fg\ldots}_{p^{ik\ldots}}$-val jelöljük, akkor:

$$A^{fg\ldots}_{p^{ik\ldots}} = \begin{vmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{in} \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} \ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{kn} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{rn} \\ a_{s1} & a_{s2} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{sn} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}, \quad \ldots\ldots (1)$$

mely determináns értékének meghatározására sokszorozzuk azt a következő determinánssal:

$$\varepsilon' A = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots\ldots \quad \ldots & a_{in} \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots\ldots\ldots \quad \ldots & a_{kn} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ a_{u1} & a_{u2} \ldots\ldots \quad \ldots\ldots & a_{un} \\ a_{v1} & a_{v2} \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{vn} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}, \ldots\ldots (2)$$

mely sokszorozás eredménye a következő egyenletek tekintetbe vétele:

$$\left.\begin{aligned} a_{x1}\alpha_{y1} + a_{x2}\alpha_{y2} + \ldots\ldots + a_{xn}\alpha_{y} &= o \\ a_{x1}\alpha_{x1} + a_{x2}\alpha_{x2} + \ldots\ldots + a_{xn}\alpha_{xn} &= A \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3)$$

és a következő jelölés használata mellett:

$$a_{x1}\, a_{y1} + a_{x2}\, a_{y2} + \ldots\ldots + a_{xn}\, a_{yn} = d_{xy} = d_{xy} \ldots (4)$$

ez lesz:

$$\varepsilon' A^{fg\ldots}_{\substack{ik\ldots\\ p}} . A = \begin{vmatrix} A & o \ldots\ldots & o \ldots\ldots & o \\ o & A \ldots\ldots & o \ldots\ldots & o \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ d_{ri} & d_{rk} \ldots & d_{ru} & d_{rv} \ldots \\ d_{si} & d_{sk} \ldots & d_{su} & d_{sv} \ldots \\ . & . & & \\ . & . & & \end{vmatrix}$$

$$= A^p \begin{vmatrix} d_{ru} & d_{rv} \ldots \\ d_{su} & d_{sv} \ldots \\ . & . \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix}$$

a honnét végre következik, hogy:

$$A^{fg\ldots}_{\substack{ik\ldots\\ p}} = \varepsilon' A'^{p-1} \begin{vmatrix} d_{ru} & d_{rv} \ldots \\ d_{su} & d_{sv} \ldots \\ . & . \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix} \ldots (5)$$

mely eredményt, ha meggondoljuk, hogy a jobb oldalon előforduló determináns $d_{fi}\ d_{gk} \ldots$-nak együtthatója $\varepsilon\varepsilon'\ A^2$-ban, a következő tételben mondhatjuk ki:

»*Az* $A^{fg\ldots}_{\substack{ik\ldots\\ p}}$ *determináns egyenlő* εA^{p-1} *sokszorozva* $d_{fi}\ d_{gk} \ldots$*-nak együtthatójával* $\varepsilon\varepsilon' A^2$*-ben.*«

Példa. Legyen

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

ennek adjungált rendszere pedig:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots a_{15} \\ . \\ . \\ . \\ a_{51} \ldots\ldots\ldots a_{55} \end{vmatrix}$$

és cseréljük fel A-ban az 1. 3. és 5. sort A'-nak 2. 4. 5. sorával, úgy, hogy

$$\underset{3}{A}{}^{135}_{245} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

akkor az előbb levezetett tétel értelmében

$$\underset{3}{A}{}^{135}_{245} = -A^2 \begin{vmatrix} d_{21} & d_{23} \\ d_{41} & d_{43} \end{vmatrix}$$

a hol

$$\begin{aligned} d_{21} &= a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} + a_{24}a_{14} + a_{25}a_{15} \\ d_{23} &= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} + a_{24}a_{34} + a_{25}a_{35} \\ d_{41} &= a_{41}a_{11} + a_{42}a_{12} + a_{43}a_{13} + a_{44}a_{14} + a_{45}a_{15} \\ d_{43} &= a_{41}a_{31} + a_{42}a_{32} + a_{43}a_{33} + a_{44}a_{34} + a_{45}a_{35} \end{aligned}$$

3. Az előbbihez hasonló módon határozhatjuk meg

$$\underset{p}{A}{}^{ik\ldots}_{fg\ldots} = \begin{vmatrix} a_{f1} & a_{f2} \ldots\ldots\ldots & a_{fn} \\ a_{g1} & a_{g2} \ldots\ldots\ldots & a_{gn} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{u1} & a_{u2} \ldots\ldots\ldots & a_{un} \\ a_{v1} & a_{v2} \ldots\ldots\ldots & a_{vn} \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

determináns értékét, ha azt a következővel sokszorozzuk.

$$\varepsilon A = \begin{vmatrix} a_{f1} & a_{f2} & \dots\dots & a_{fn} \\ a_{g1} & a_{g2} & \dots\dots & a_{gn} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots\dots & a_{rn} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots\dots & a_{sn} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix}, \dots (6)$$

a sokszorozás eredménye ez lesz:

$$\varepsilon A^{ik\dots}_{pfg\dots} \cdot A = \begin{vmatrix} A & o & \dots & o & \dots & o \\ o & A & \dots & o & \dots & o \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ d_{fu} & d_{gu} & \dots & d_{ru} & d_{su} & \dots \\ d_{fv} & d_{gv} & \dots & d_{rv} & d_{sv} & \dots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

$$= A^p \begin{vmatrix} d_{ru} & d_{su} \dots\dots \\ d_{rv} & d_{sv} \dots\dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

és innét

$$\varepsilon A^{ik\dots}_{p^{fg\dots}} = A^{p-1} \cdot \begin{vmatrix} d_{ru} & d_{s} \dots\dots \\ d_{rv} & d_{sv} \dots\dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \dots (7)$$

Az (5) és (7) alatti egyenletek összehasonlításából, ha még $\varepsilon\varepsilon' = \lambda$-val tesszük, végre a következő nevezetes egyenletet nyerjük:

$$A^{ik\dots}_{p^{fg\dots}} = \lambda\, A^{fg\dots}_{p^{ik\dots}} \dots\dots (8)$$

a mely egyenletben λ vagy a pos tiv, vagy pedig a negativ egységet jelenti, amiként az 1, 2,....n számsornak $f, g, \dots r, s, \dots$ és $i, k, \dots u, v, \dots$ permutátiói vagy ugyanazon, vagy pedig különböző osztályba tartoznak.

4. Az (1) és (6) alatti egyenleteket egymással sokszorozva, a (4) alatti és a következő jelölések használata mellett:

$$\alpha_{x1}\,\alpha_{y1}+\alpha_{x2}\,\alpha_{y2}+\ldots\ldots+\alpha_{xn}\,\alpha_{yn}=\delta_{xy}=\delta_{yx}\ldots(9)$$

találjuk, hogy:

$$\frac{A^{fg\ldots}}{p^{ik\ldots}}\cdot\frac{A^{ik\ldots}}{p^{fg\ldots}}=\begin{vmatrix} \delta_{fi} & \delta_{gi} & \ldots & o & \ldots & o \\ \delta_{fk} & \delta_{gk} & \ldots & o & \ldots & o \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ o & o & \ldots & d_{ru} & d_{su} & \ldots \\ o & o & \ldots & d_{rv} & d_{sv} & \ldots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

az az

$$\frac{A^{fg\ldots}}{p^{ik\ldots}}\cdot\frac{A^{ik\ldots}}{p^{fg\ldots}}=\begin{vmatrix} d_{ru} & d_{su} & \ldots \\ d_{rv} & d_{sv} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \delta_{fi} & \delta_{gi} & \ldots \\ \delta_{fk} & \delta_{gk} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}\ldots(10)$$

Ha továbbá ezen egyenletben még a (8) alattira vagyunk tekintettel, akkor azt még a következő alakban írhatjuk:

$$\left(\frac{A^{fg\ldots}}{p^{ik\ldots}}\right)^2=\left(\frac{A^{ik\ldots}}{p^{fg\ldots}}\right)^2=\lambda\begin{vmatrix} d_{ru} & d_{su} & \ldots \\ d_{rv} & d_{sv} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \delta_{fi} & \delta_{gi} & \ldots \\ \delta_{fk} & \delta_{fk} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}\ldots\quad(11)$$

5. Válasszunk ki az A rendszerből p sort az A' rendszerből pedig q sort, legyenek ezek az első rendszer $f, g, \ldots$ és a második rendszer $r, s, \ldots$ sorai, a hol az $f, g, \ldots$ és $r, s, \ldots$ számok egészen tetszőlegesek, úgy, hogy e két számsorban egy vagy több pár egyenlő is lehet, mint p. lehetne $r=f$, stb. p és q legyenek a következő megszorításnak alávetve:

$$p+q<n$$

akkor nyerünk egy kevert adjungált rendszert, mely az a elemeknek p sorát és az α elemeknek q sorát tartalmazza, az oszlopok száma pedig n, azért az előbbi feltételnél fogva ezen rendszerből

$$\binom{n}{p+q}$$

$p+q$-dik fokú determinánst képezhetünk, melyek közül egynek az értékét meg fogjuk határozni.

Határozzuk meg tehát a következő $p+q$-dik fokú determinánsnak az értékét:

$$D = \begin{vmatrix} a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rp+q} \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sp+q} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{f1} & a_{f2} & \ldots & a_{fp+q} \\ a_{g1} & a_{g2} & \ldots & a_{gp+q} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix}, \ldots (12)$$

mely czélból azt még a következőképen írjuk:

$$D = \begin{vmatrix} a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rq} & a_{rq+1} \ldots & a_{rp+q} & a_{rp+q+1} \ldots & a_{rn} \\ a_{s1} & a_{s2} \ldots a_{sq} & a_{sq+1} \ldots & a_{sp+q} & a_{sp+q+1} \ldots & a_{sn} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f1} & a_{f2} \ldots a_{fq} & a_{fq+1} \ldots & a_{fp+q} & a_{fp+q+1} \ldots & a_{fn} \\ a_{g1} & a_{g2} \ldots a_{gq} & a_{gq+1} \ldots & a_{gp+q} & a_{gp+q+1} \ldots & a_{gn} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \quad 0 & 0 & 0 & 1 \quad 0 & 0 \\ 0 & 0 \quad 0 & 0 & 0 & 0 \quad 1 & 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \end{vmatrix}. (13)$$

Ha továbbá az $1, 2, \ldots n$ számokból a következő q számot választjuk ki: $r, s, \ldots$ a hátralevő $n-q$ számot $i, k, \ldots$ jelöljük és ε alatt vagy a positiv, vagy pedig a negativ egységet értjük, a miként az $r, s, \ldots i, k, \ldots$ permutátió az $1, 2, \ldots n$ permutátióval ugyanazon vagy pedig különböző osztályba tartozik, akkor

$$\varepsilon A = \begin{vmatrix} a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rq} & a_{rq+1} \ldots a_{rp+q} & a_{rp+q+1} \ldots a_{rn} \\ a_{s1} & a_{s2} \ldots a_{sq} & a_{sq+1} \ldots a_{sp+q} & a_{sp+q+1} \ldots a_{sn} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{iq} & a_{iq+1} \ldots a_{ip+q} & a_{ip+q+1} \ldots a_{in} \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{kq} & a_{kq+1} \ldots a_{kp+q} & a_{kp+p+1} \ldots a_{kn} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}$$

és ha a (13) alatti determinánst ezen determinánssal sokszorozzuk, akkor a (4) alatti jelölést tekintve találjuk, hogy :

$$\varepsilon A.\, D = \begin{vmatrix} A & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & A \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \ldots\ldots A & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ d_{fr} & d_{fs} \ldots\ldots 0 & d_{fi} & d_{fk} \quad \cdot \quad \cdot \\ d_{gr} & d_{gs} \ldots\ldots 0 & d_{gi} & d_{gk} \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{rp+q+1} & a_{sp+q+1} \ldots & a_{ip+q+1} & a_{kp+q+1} \\ a_{rp+q+2} & a_{sp+q+2} \ldots & a_{ip+q+2} & a_{kp+q+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

és így még továbbá:

$$\varepsilon A.\, D = A^q \begin{vmatrix} d_{fi} & d_{fk} \ldots\ldots \\ d_{gi} & d_{gk} \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{ip+q+1} & a_{kp+q+1} \ldots \\ a_{ip+q+2} & a_{kp+q+2} \ldots \end{vmatrix}$$

vagy ha még a jobb oldalon álló $n-q$-dik fokú determinánsnak a_{fp+q+1}-gyel szorzott $p+1$-dik, a_{fp+q+2}-vel sokszorozott $p+2$-dik, stb. sorát az első sorból, továbbá az a_{gp+q+1}-gyel sokszorozott $p+1$-dik az a_{gp+q+2}-vel sokszorozott $p+2$-dik stb. sort, annak második sorából kivonjuk és így tovább, akkor, miután a (4) alatti egyenlètnél fogva:

$$d_{x'y} - [a_{xp+q+1}\, a_{yp+q+1} + \ldots + a_{xn}\, a_{yn}] =$$
$$= a_{x1}\, a_{y1} + \ldots + a_{xp+q}\, a_{yp+q} = d'_{xy} = d'_{yx}, \ldots (14)$$

az előbbi egyenletből végre találjuk, hogy:

$$D = \varepsilon\, A^{q-1} \begin{vmatrix} d'_{fi} & d'_{fk} \ldots\ldots \\ d'_{gi} & d'_{gk} \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{ip+q+1} & a_{kp+q+1} \ldots\ldots \\ a_{ip+q+2} & a_{kp+q+2} \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \ldots (15)$$

mely egyenletben megjegyzendő, hogy ε a positiv, vagy negativ egységet jelenti, a miként $r, s, \ldots i, k, \ldots$ permutátió az 1, 2, ... n permutátióval ugyanazon, vagy pedig különböző osztályba tartozik.

Azon felvételnek, hogy $p+q>n$, egy olyan kevert adjungált rendszer felel meg, melyben a sorok száma nagyobb az oszlopok számánál, ha tehát ezen $n(p+q)$ elemből az

$$\binom{p+q}{n}$$

lehetséges n-edik fokú determinánsokat képezzük, akkor azok közül bármelyik is olyan lesz, hogy annak értékét a 2-dik szám szerint meghatározhatjuk.

6. Vizsgálatainkban tovább haladva, azon μ-dik fokú kevert adjungált determinánsokra térünk át, melyek elemei az 1. számban értelmezett c_{xy} és γ_{xy} mennyiségekből vannak componálva.

Jelöljük a c_{xy} rendszer determinánsát A_m-mel, a nékie adjungált γ_{xy} rendszernek, tehát az A_m-nek adjungált determinánsát pedig A'_{n-m}-mel, továbbá legyenek $fg \ldots$ és $i, k, \ldots$ az 1, 2, .. μ számsornak tetszőleges p-kénti combinátiói, $r, s \ldots$ és $u, v \ldots$ a $\mu-p$ hátralevő számok, végre ε és ε' a positiv, vagy negativ egység a miként az $f, g, \ldots r, s, \ldots$ és $i, k, \ldots u, v \ldots$ permutátiók az 1, 2, .. μ permutátióval vagy ugyanazon vagy pedig különböző osztályba tartoznak, akkor

$$\varepsilon A_m = \begin{vmatrix} c_{f1} & c_{f2} & \ldots\ldots\ldots & c_{f\mu} \\ c_{g1} & c_{g2} & \ldots\ldots\ldots & c_{g\mu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots\ldots\ldots & c_{r\mu} \\ c_{s1} & c_{s2} & \ldots\ldots\ldots & c_{s\mu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix} \ldots (16)$$

és

$$\varepsilon' A'_{n-m} = \begin{vmatrix} \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \ldots\ldots\ldots & \gamma_{i\mu} \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \ldots\ldots\ldots & \gamma_{k\mu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \gamma_{u1} & \gamma_{u2} & \ldots\ldots\ldots & \gamma_{u\mu} \\ \gamma_{v1} & \gamma_{v2} & \ldots\ldots\ldots & \gamma_{v\mu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix} \ldots (17)$$

Jelöljük végre azon kevert adjungált determinánst, mely εA_m-ből ered, ha ennek első p sorát a nékie adjungált $\varepsilon' A'_{n-m}$ determináns első p sorával pótoljuk, $D^{fg\ldots}_{\substack{ik\ldots \\ p}}$-val, úgy, hogy:

$$D^{fg\ldots}_{\substack{ik\ldots \\ p}} = \begin{vmatrix} \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \ldots\ldots\ldots & \gamma_{i\mu} \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \ldots\ldots\ldots & \gamma_{k\mu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots\ldots\ldots & c_{r\mu} \\ c_{s1} & c_{s2} & \ldots\ldots\ldots & c_{s\mu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix} \ldots (18)$$

7. A $D^{fg\ldots}_{\substack{ik\ldots \\ p}}$ determináns értékét a következőképen határozhatjuk meg. Feltéve, hogy $m \leq n-m$, mit elérni mindig lehetséges, akkor a kitűzött czél elérésére sokszorozzuk meg a (18) alatti determinást a következővel:

$$\varepsilon' A_m = \begin{vmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots\dots & c_{i\mu} \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots\dots & c_{k\mu} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ c_{u1} & c_{u2} & \dots\dots & c_{u\mu} \\ c_{v1} & c_{v2} & \dots\dots & c_{v\mu} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \end{vmatrix}$$

a sokszorozás eredménye a következő egyenleteknél fogva:

$$\left.\begin{aligned} c_{x1}\gamma_{x1}+c_{x2}\gamma_{x2}+\dots\dots+c_{x\mu}\,\gamma_{x\mu}&=A \\ c_{x1}\gamma_{y1}+c_{x2}\gamma_{y2}+\dots\dots+c_{x\mu}\,\gamma_{x\mu}&=o \end{aligned}\right\}^{1)} \dots (19)$$

és a következő jelölés használata mellett:

$$e_{xy}=c_{x_1}\,c_{y_1}+c_{x_2}\,c_{y_2}+\dots\dots+c_{x\mu}\,c_{y\mu}=e_{yx}\dots(20)$$

ez lesz:

$$\varepsilon' \, D^{fg\dots}_{\substack{ik\dots \\ p}} \, A_m = \begin{vmatrix} A & 0\dots\dots0\dots\dots0 \\ 0 & A\dots\dots0\dots\dots0 \\ . & . \quad . \quad . \\ . & . \quad . \quad . \\ e_{ri} & e_{rk}\dots\dots e_{ru}\; e_{rv}\dots \\ e_{si} & e_{sk}\dots\dots e_{su}\; e_{sv}\dots \\ . & . \quad . \quad . \\ . & . \quad . \quad . \end{vmatrix}$$

$$= A^p. \begin{vmatrix} e_{ru} & e_{rv}\dots \\ e_{su} & e_{sv}\dots \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix}$$

vagy ha még megjegyezzük, hogy

$$A_m = A^\nu,^{2)}$$

a hol

$$\nu = \frac{n-1.\; n-2.\dots\dots m}{1.\; 2.\dots\dots n-m}$$

[1]) Lásd Cauchy az i. h. 100. és 101. ll.

[2]) Lásd Borchardt Journaljának 61-dik kötetében 355. l. a (6) alatti egyenletet. Megjegyzendő, hogy ezen képletben esetünknek megfelelőleg m-et fel kell cserélni n-m-mel.

akkor találjuk, hogy:

$$D^{fg\dots}_{p^{ik\dots}} = \varepsilon'.A^{p-\nu}\begin{vmatrix} e_{ru} & e_{rv}\dots \\ e_{su} & e_{sv}\dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}\dots (21)$$

A $D^{fg\dots}_{p^{ik\dots}}$ determinánsnak az értékét még más alakban nyerjük, ha a (18) alatti determinánst a következővel sokszorozzuk:

$$\varepsilon A'_{n-m} = \begin{vmatrix} \gamma_{f1} & \gamma_{f2} & \dots\dots & \gamma_{f\mu} \\ \gamma_{g1} & \gamma_{g2} & \dots\dots & \gamma_{g\mu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \gamma_{r1} & \gamma_{r2} & \dots\dots & \gamma_{r\mu} \\ \gamma_{s1} & \gamma_{s2} & \dots\dots & \gamma_{s\mu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix};$$

a sokszorozás eredménye ez esetben a (19) alatti egyenletek tekintetbe vételével és a következő jelölés használata mellett

$$\varepsilon_{xy} = \gamma_{x1}\gamma_{y1} + \gamma_{x2}\gamma_{y2} + \dots\dots \gamma_{x\mu}\gamma_{y} = \varepsilon_{yx}\dots (22)$$

ez lesz:

$$\varepsilon D^{fg\dots}_{p^{ik\dots}}\ A'_{n-m} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{if} & \varepsilon_{ig} & \dots\dots \varepsilon_{ir} & \varepsilon_{is} & \dots\dots \\ \varepsilon_{kf} & \varepsilon_{kg} & \dots\dots \varepsilon_{kr} & \varepsilon_{ks} & \dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots\dots A & 0 & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots\dots 0 & A & \dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

vagy még:

$$\varepsilon D^{fg\dots}_{p^{ik\dots}}\ A'_{n-m} = A^{\mu-p}\begin{vmatrix} \varepsilon_{if} & \varepsilon_{ig} & \dots\dots \\ \varepsilon_{kf} & \varepsilon_{kg} & \dots\dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

vagy ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$A'_{n-m} = A^{\mu-\nu}$$

akkor végre $D^{fg\ldots}_{\underset{p}{ik\ldots}}$ determináns értékét a következő alakban nyerjük.

$$D^{fg\ldots}_{\underset{p}{ik\ldots}} = \varepsilon\, A^{\nu-p}. \begin{vmatrix} \varepsilon_{if} & \varepsilon_{ig} \ldots\ldots \\ \varepsilon_{kf} & \varepsilon_{kg} \ldots\ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \ldots (23)$$

A $D^{fg\ldots}_{\underset{p}{ik\ldots}}$ determináns értékét a (21) és (23) alatti egyenletekben kétféle alakban nyerjük, ezen egyenletek közül vagy az elsőt, vagy pedig a másodikat használjuk, amiként $p \geq \nu$ vagy pedig $p < \nu$, miután ilyen módon az A tényezőt minden esetben a legmagasabb hatványban nyerjük.

1-ső Példa. Legyen

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

akkor, ha rövidség kedvéért

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1\, b_2)$$

stb., ennek együtthatóját A-ban pedig

$$\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = (a_1\, b_2)'-$$

vel jelöljük, akkor

$$A_2 = \begin{vmatrix} (a_1b_2) & (a_1c_2) & (a_1d_2) & (b_1c_2) & (b_1d_2) & (c_1d_2) \\ (a_1b_3) & (a_1c_3) & (a_1d_3) & (b_1c_3) & (b_1d_3) & (c_1d_3) \\ (a_1b_4) & (a_1c_4) & (a_1d_4) & (b_1c_4) & (b_1d_4) & (c_1d_4) \\ (a_2b_3) & (a_2c_3) & (a_2d_3) & (b_2c_3) & (b_2d_3) & (c_2d_3) \\ (a_2b_4) & (a_2c_4) & (a_2d_4) & (b_2c_4) & (b_2d_4) & (c_2d_4) \\ (a_3b_4) & (a_3c_4) & (a_3d_4) & (b_3c_4) & (b_3d_4) & (c_3d_4) \end{vmatrix}$$

$$A'_2 = \begin{vmatrix} (a_1b_2)' & (a_1c_2)' & (a_1d_2)' & (b_1c_2)' & (b_1d_2)' & (c_1d_2)' \\ (a_1b_3)' & (a_1c_3)' & (a_1d_3)' & (b_1c_3)' & (b_1d_3)' & (c_1d_3)' \\ (a_1b_4)' & (a_1c_4)' & (a_1d_4)' & (b_1c_4)' & (b_1d_4)' & (c_1d_4)' \\ (a_2b_3)' & (a_3c_2)' & (a_2d_3)' & (b_2c_3)' & (b_2d_3)' & (c_2d_3)' \\ (a_2b_4)' & (a_2c_4)' & (a_2d_4)' & (b_2c_4)' & (b_2d_4)' & (c_2d_4)' \\ (a_3b_4)' & (a_3c_4)' & (a_3d_4)' & (b_3c_4)' & (b_3d_4)' & (c_3d_4)' \end{vmatrix}$$

ezen esetben tehát $n=4$, $m=n-m=2$, $\mu=6$, $\nu=3$.

Ha A_2-ben a 2. 4. és 6. sort a A'_2 1. 3. és 5. sorával pótoljuk, úgy miután ezen esetben $p=3$ és $\nu=3$, tehát a (21) alatti egyenletet fogjuk alkalmazni, mely szerint találjuk, hogy:

$$D^{216}_{3\,135} = \begin{vmatrix} (a_1b_2)' & (a_1c_2)' & (a_1d_2)' & (b_1c_2)' & (b_1d_2)' & (c_1d_2)' \\ (a_1b_4)' & (a_1c_4)' & (a_1d_4)' & (b_1c_4)' & (b_1d_4)' & (c_1d_4)' \\ (a_2b_4)' & (a_2c_4)' & (a_2d_4)' & (b_2c_4)' & (b_2d_4)' & (c_2d_4)' \\ (a_1b_2) & (a_1c_2) & (a_1d_2) & (b_1c_2) & (b_1d_2) & (c_1d_2) \\ (a_1b_4) & (a_1c_4) & (a_1d_4) & (b_1c_4) & (b_1d_4) & (c_1d_4) \\ (a_2b_4) & (a_2c_4) & (a_2d_4) & (b_2c_4) & (b_2d_4) & (c_2d_4) \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} e_{12} & e_{14} & e_{16} \\ e_{23} & e_{34} & e_{36} \\ e_{25} & e_{45} & e_{56} \end{vmatrix}$$

a hol:

$$e_{12} = (a_1b_2)(a_1b_3)+(a_1c_2)(a_1c_3)+(a_1d_2)(a_1d_3)+(b_1c_2)(b_1d_3)$$
$$+(b_1d_2)(b_1d_3)+(c_1d_2)(c_1d_3)$$
$$e_{14} = (a_1b_2)(a_2b_3)+(a_1c_2)(a_2c_3)+(a_1d_2)(a_2d_3)+(b_1c_2)(b_2c_3)$$
$$+(b_1d_2)(b_2d_3)+(c_1d_2)(c_2d_3)$$
$$e_{16} = (a_1b_2)(a_3b_4)+(a_1c_2)(a_3c_4)+(a_1d_2)(a_3d_4)+(b_1c_2)(b_3c_4)$$
$$+(b_1d_2)(b_3d_4)+(c_1d_2)(c_3d_4)$$
$$e_{23} = (a_1b_3)(a_1b_4)+(a_1c_3)(a_1c_4)+(a_1d_3)(a_1d_4)+(b_1c_3)(b_1d_4)$$
$$+(b_1d_3)(b_1d_4)+(c_1d_3)(c_1d_4)$$
$$e_{34} = (a_1b_4)(a_2b_3)+(a_1c_4)(a_2c_3)+(a_1d_4)(a_2d_3)+(b_1c_4)(b_2d_3)$$
$$+(c_1d_4)(b_2d_3)+(c_1d_4)(c_2d_3)$$
$$e_{36} = (a_1b_4)(a_3b_4)+(a_1c_4)(a_3x_4)+(a_1d_4)(a_3d_4)+(b_1c_4)(b_3c_2)$$
$$+(b_1d_4)(b_3d_4)+(c_1d_4)(c_3d_4)$$
$$e_{25} = (a_1b_3)(a_2b_4)+(a_1c_3)(a_2c_4)+(a_1d_3)(a_2d_4)+(b_1c_3)(b_2c_4)$$
$$+(b_1d_3)(b_2d_4)+(c_1d_3)(c_2d_4)$$
$$e_{45} = (a_2b_3)(a_2b_4)+(a_2c_3)(a_2c_4)+(a_2d_3)(a_2d_4)+(b_2c_3)(b_2c_4)$$
$$+(b_2d_3)(b_2d_4)+(c_2d_3)(c_2d_4)$$
$$e_{56} = (a_2b_4)(a_3b_4)+(a_2c_4)(a_3c_4)+(a_2d_4)(a_2d_4)+(b_2c_4)(b_3c_4)$$
$$+(b_2d_4)(b_3d_4)+(c_2d_4)(c_3d_4)$$

2-dik példa. Ha pedig A_2-ben a 3. és 5. sort A'_2 1. és 4. sorával pótoljuk, akkor mivel $p=2$ és $\nu=3$, a (13) alatti egyenletnél fogva találjuk, hogy:

$$D^{35}_{\substack{14\\2}} = \begin{vmatrix} (a_1b_2)' & (a_1c_2)' & (a_1d_2)' & (b_1c_2)' & (b_1d_2)' & (c_1d_2)' \\ (a_2b_3)' & (a_2c_3)' & (a_2d_3)' & (b_2c_3)' & (b_2d_3)' & (c_2d_3)' \\ (a_1b_2) & (a_1c_2) & (a_1d_2) & (b_1c_2) & (b_1d_2) & (c_1d_2) \\ (a_1b_3) & (a_1c_3) & (a_1d_3) & (b_1c_3) & (b_1d_3) & (c_1d_3) \\ (a_2b_3) & (a_2c_3) & (a_2d_3) & (b_2c_3) & (b_2d_3) & (c_2d_3) \\ (a_3b_4) & (a_3c_4) & (a_3d_4) & (b_3c_4) & (b_3d_4) & (c_3d_4) \end{vmatrix}$$

$$= A. \begin{vmatrix} \varepsilon_{13} & \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{34} & \varepsilon_{45} \end{vmatrix}$$

a hol:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13} &= (a_1b_2)'(a_1b_4)' + (a_1c_2)'(a_1c_4)' + (a_1d_2)'(a_1d_4)' + (b_1c_2)'(b_1c_4)' \\ &\quad + (b_1d_2)'(b_1d_4)' + (c_1d_2)'(c_1d_4)' \\ \varepsilon_{15} &= (a_1b_2)'(a_2b_4)' + (a_1c_2)'(a_1c_4)' + (a_1d_4)'(a_2d_4)' + (b_1c_2)'(b_2c_4)' \\ &\quad + (b_1d_2)'(b_2d_4)' + (c_1d_2)'(c_2d_4)' \\ \varepsilon_{34} &= (a_1b_4)'(a_2b_3)' + (a_1c_4)'(a_2c_3)' + (a_1d_4)'(a_2d_3)' + (b_1c_4)'(b_2c_3) \\ &\quad + (b_1d_4)'(b_2d_3)' + (c_1d_4)'(c_2d_3)' \\ \varepsilon_{45} &= (a_2b_3)'(a_2b_4)' + (a_2c_3)'(a_2c_4)' + (a_2d_3)'(a_2d_4)' + (b_2c_3)'(b_2c_4) \\ &\quad + (b_2d_3)'(b_2d_4)' + (c_2d_3)'(c_2d_4)' \end{aligned}$$

8. Ha továbbá $\varepsilon' A_m$-ben az első p sort $\varepsilon . A'_{n-m}$ első p sorával pótoljuk, akkor az a (18) alatti jelölés értelmében $D^{ik\ldots}_{\substack{fg\ldots\\p}}$ lesz, úgy, hogy:

$$D^{ik\ldots}_{\substack{fg\ldots\\p}} = \begin{vmatrix} \gamma_{f1} & \gamma_{f2} \ldots\ldots & \gamma_{f\mu} \\ \gamma_{g1} & \gamma_{g2} \ldots\ldots & \gamma_{g\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{u1} & c_{u2} \ldots\ldots & c_{u\mu} \\ c_{v1} & c_{v2} \ldots\ldots & c_{v\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \ldots (24)$$

és ha ezen determinánst a következővel sokszorozzuk:

$$\varepsilon A_m = \begin{vmatrix} c_{f1} & c_{f2} \dots & \dots c_{f\mu} \\ c_{g1} & c_{g2} \dots & \dots c_{g\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1} & c_{r2} \dots & \dots c_{r\mu} \\ c_{s1} & c_{s2} \dots & \dots c_{s\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

akkor a sokszorozás eredménye, a (19) és (20) alatti egyenleteket tekintetbe véve ez lesz:

$$\varepsilon \, {}^{D^{ik\dots}}_{p^{fg\dots}} \cdot A_m = \begin{vmatrix} A & 0 \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \\ 0 & A \dots\dots 0 & 0 \dots\dots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ e_{fu} & e_{gu} \dots e_{ru} & e_{su} \dots\dots \\ e_{fv} & e_{gv} \dots e_{rv} & e_{sv} \dots\dots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= A^{p}. \begin{vmatrix} e_{ru} & e_{su} \dots \\ e_{rv} & e_{sv} \dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

a honnét miután $A_m = A^{\nu}$, még következik, hogy:

$$ {}^{D^{ik\dots}}_{p^{fg\dots}} = \varepsilon . \, A^{p-\nu} \begin{vmatrix} e_{ru} & e_{su} \dots \\ e_{rv} & e_{sv} \dots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \dots (25)$$

mely egyenletet a (21) alattival összehasonlítva, a következő megjegyzésre méltó egyenletet találjuk:

$$ {}^{D^{ik\dots}}_{p^{fg\dots}} = \lambda \, {}^{D^{fg\dots}}_{p^{ik\dots}} \quad \dots\dots (26).$$

melyben $\varepsilon\varepsilon' = \lambda$ tétetett és így λ vagy a positiv, vagy pedig a negativ egységet jelenti, a miként az $fg \dots rs \dots$ és $ik \dots uv \dots$ permutátiók vagy ugyanazon, vagy pedig különböző osztályba tartoznak. Továbbá még megjegyzendő, hogy a (26) alatti egyenlet a (8) alatti egyenletet, mint speciális esetet magában foglalja.

9. Ha a (17) alatti determinánst a (24) alattival sokszorozzuk, akkor a következő egyenletet nyerjük:

$$D^{ik\ldots}_{p^{fg\ldots}} \cdot D^{ik\ldots}_{p^{ik\ldots}} = \begin{vmatrix} \gamma_{i1} & \gamma_{i2} \ldots & \gamma_{i\mu} \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} \ldots & \gamma_{k\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1} & c_{r2} \ldots & c_{r\mu} \\ c_{s1} & c_{s2} \ldots & c_{s\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{f1} & \gamma_{f2} \ldots & \gamma_{f\mu} \\ \gamma_{g1} & \gamma_{g2} \ldots & \gamma_{g\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{u1} & c_{u2} \ldots & c_{u\mu} \\ c_{v1} & c_{v2} \ldots & c_{v\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

vagy ha a kijelölt műtéteket végrehajtjuk és a (19), (20) alatti egyenleteket tekintetbe vesszük, akkor még továbbá:

$$D^{fg\ldots}_{p^{ik\ldots}} \cdot D^{ik\ldots}_{p^{fg\ldots}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{if} & \varepsilon_{ig} \ldots\ldots & 0 & 0 \ldots \\ \varepsilon_{kf} & \varepsilon_{kg} \ldots\ldots & 0 & 0 \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots\ldots & e_{ru} & e_{rv} \ldots \\ 0 & 0 \ldots\ldots & e_{su} & e_{sv} \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

és így végre a következő nevezetes egyenletet nyerjük:

$$D^{fg\ldots}_{p^{ik\ldots}} \cdot D^{ik\ldots}_{p^{fg\ldots}} = \begin{vmatrix} e_{ru} & e_{rv} \ldots \\ e_{su} & e_{sv} \ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_{fi} & \varepsilon_{fk} \ldots \\ \varepsilon_{gi} & \varepsilon_{gk} \ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \ldots (27)$$

a melyből még a (26) alatti egyenlet tekintetbe vétele után ezt nyerjük:

$$\left(D^{fg\ldots}_{p^{ik\ldots}}\right)^2 = \left(D^{ik\ldots}_{p^{fg\ldots}}\right)^2 = \lambda \begin{vmatrix} e_{ru} & e_{rv} \ldots \\ e_{su} & e_{sv} \ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_{fi} & \varepsilon_{fk} \ldots \\ \varepsilon_{gi} & \varepsilon_{gk} \ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \ldots (28)$$

és ha végre e en egyenlet, vagy a (21) alatti, vagy pedig a (23) alatti egyenlettel elosztjuk, akkor a következő egyenleteket nyerjük :

$$D^{fg\dots}_{p^{ik\dots}} = \varepsilon\, A^{\nu-p}. \begin{vmatrix} \varepsilon_{fi} & \varepsilon_{fk} \dots \\ \varepsilon_{gi} & \varepsilon_{gk} \dots \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix},$$

$$D^{fg\dots}_{p^{ik\dots}} = \varepsilon'\, A^{p-\nu} \begin{vmatrix} e_{ru} & e_{rv} \dots \\ e_{su} & e_{sv} \dots \\ . & . \\ . & . \end{vmatrix},$$

mely egyenletek a (23) alatti és (21) alatti egyenletekkel azonosak.

10. Az 5. számban kifejtett átalánosabb vizsgálatokat a (6) számban megkezdett vizsgálatokra is kiterjeszthetjük, mely vizsgálatokkal ezen értekezést befejezzük.

Válaszunk ki az A_m rendszerből p sort a A'_{n-m} rendszerből pedig q sort, legyenek ezek az első rendszer $f, g \dots$ és a második rendszer $r, s, \dots$ sorai, (az $f, g \dots$ és $r, s, \dots$ számok egészen tetszőlegesek, úgy, hogy e két számsorban egy, vagy több pár egyenlő is lehet, mint p. lehetne $r = f$ stb.), továbbá legyenek p és q a következő megszoritásnak alávetve:

$$p + q < \mu,$$

akkor nyerünk egy kevert conjugált rendszert, mely a c elemeknek p sorát és a γ elemeknek q sorát tartalmazza, a rendszer oszlopainak száma pedig μ, azért tehát az előbbi feltételnél fogva ezen rendszerből:

$$\binom{\mu}{p+q}$$

$p+q$-dik fokú determinánst képezhetünk, melyek közül egynek az értékét most meghatározzuk.

Legyen

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \gamma_{r1} & \gamma_{r2} \ldots\ldots \gamma_{r\mu} \\ \gamma_{s1} & \gamma_{s2} \ldots\ldots \gamma_{s\mu} \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ c_{f1} & c_{f2} \ldots\ldots c_{f\mu} \\ c_{g1} & c_{g2} \ldots\ldots c_{g\mu} \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \end{vmatrix} \ldots (29)$$

akkor a $\varDelta$ $p+q$-dik fokú determinánst még a következő μ-dik fokú determináns alakjában írhatjuk:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \gamma_{r1}\ \gamma_{r2} \ldots \gamma_{rq} & \gamma_{rq+1} \ldots \gamma_{rp+q} & \gamma_{rp+q+1} \ldots \gamma_{r\mu} \\ \gamma_{s1}\ \gamma_{s2} \ldots \gamma_{sq} & \gamma_{sq+1} \ldots \gamma_{sp+q} & \gamma_{sp+q+1} \ldots \gamma_{s\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ c_{f1}\ c_{f2} \ldots c_{fq} & c_{fq+1} \ldots c_{fp+q} & c_{fp+q+1} \ldots c_{f\mu} \\ c_{g1}\ c_{g2} \ldots c_{gq} & c_{gq+1} \ldots c_{gp+q} & c_{gp+q+1} \ldots c_{g\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 1\ 0 \ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0\ 1 \ldots 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} \ldots (30)$$

Válasszuk ki továbbá az $1\ 2 \ldots \mu$ számsorból az $r, s \ldots$ számokat a hátralevő $\mu - q$ szám pedig legyen $i, k\ \ldots$, akkor ε alatt vagy a positiv vagy pedig a negativ egységet értve, a miként az $r, s, \ldots i, k, \ldots$ permutátió az $1, 2 \ldots \mu$ permutátióval ugyanazon, vagy pedig különböző osztályba tartozik.

$$\varepsilon\, A_m = \begin{vmatrix} c_{r1}\ c_{r2} \ldots c_{rq} & c_{rq+1} \ldots c_{rp+q} & c_{rp+q+1} \ldots c_{r\mu} \\ c_{s1}\ c_{s2} \ldots c_{sq} & c_{sq+1} \ldots c_{sp+q} & c_{sp+q+1} \ldots c_{s\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ c_{i1}\ c_{i2} \ldots c_{iq} & c_{iq+1} \ldots c_{ip+q} & c_{ip+q+1} \ldots c_{i\mu} \\ c_{k1}\ c_{k2} \ldots c_{kq} & c_{kq+1} \ldots c_{kp+q} & c_{kp+q+1} \ldots c_{k\mu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}$$

Ha most a (30) alatti determinánst az előttünk lévővel sokszorozzuk, akkor a (19) és (20) alatti egyenletek tekintetbe vételével találjuk:

$$\varepsilon A_\nu . \Delta = \begin{vmatrix} A & 0 \ldots . 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & A \ldots . 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e_{fr} & e_{fs} & \cdot \quad e_{fi} & e_{fk} & \ldots \ldots \\ e_{gr} & e_{gs} & \cdot \quad e_{gi} & e_{gk} & \ldots \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{rp+q+1} & c_{sp+q+1} \ldots & c_{ip+q+1} & c_{kp+p+1} & \ldots \\ c_{rp+q+2} & c_{sp+q+2} \ldots & c_{ip+q+2} & c_{kp+q+2} & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= A^q . \begin{vmatrix} e_{fi} & e_{fk} & \ldots \ldots \\ e_{gi} & e_{gk} & \ldots \ldots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ c_{ip+q+1} & c_{kp+q+1} & \ldots \ldots \\ c_{ip+q+2} & c_{kp+q+2} & \ldots \ldots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

vagy ha még az utolsó $\mu - q$-dik fokú determinánsnak utolsó $\mu - q - p$ sorát rendszerint c_{fp+q+1}, c_{fp+q+2}, stb. sokszorozzuk és az első sorból kivonjuk, azután ugyanazon sorokat c_{gp+q+1}, c_{gp+q+2}-vel stb. sokszorozzuk és a második sorból kivonjuk és így tovább, akkor miután a (20) alatti egyenletnél fogva

$$e_{xy} - \left[c_{xp+q+1}\, c_{yp+q+1} + \ldots . c_{x\mu}\, c_{y\mu}\right] =$$
$$= c_{x_1} c_{y_1} + \ldots + c_{xp+p}\, c_{yp+q} = e'_{xy} \ldots (31)$$

az előbbi egyenletből végre találjuk, hogy:

$$\Delta = \varepsilon A^{q-\nu} . \begin{vmatrix} e'_{fi} & e'_{fk} & \ldots \ldots \\ e'_{gi} & e'_{gk} & \ldots \ldots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ c_{ip+q+1} & c_{kp+q+1} & \ldots \ldots \\ c_{ip+q+2} & c_{kp+q+2} & \ldots \ldots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

11. Ha az $1, 2, \ldots \mu$ számsorból tetszőlegesen kiválasztott p számot f, g-vel, jelölünk a hátralevő $\mu - p$ számot pedig $u, v, \ldots$ akkor ha a következő determinánst:

$$
(-1)^{pq}\Delta = \begin{vmatrix}
c_{f_1} & c_{f_2} \cdots c_{fq} & c_{fq+1} \cdots & c_{fp+q} & c_{fp+q+1} \cdots c_{f\mu} \\
c_{g_1} & c_{g_2} \cdots c_{gq} & c_{gq+1} \cdots & c_{gp+q} & c_{gp+q+1} \cdots c_{g\mu} \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\
\gamma_{r_1} & \gamma_{r_2} \cdots \gamma_{rq} & \gamma_{rq+1} \cdots & \gamma_{rp+q} & \gamma_{rp+q+1} \cdots \gamma_{r\mu} \\
\gamma_{s_1} & \gamma_{s_2} \cdots \gamma_{sq} & \gamma_{sq+1} \cdots & \gamma_{sp+q} & \gamma_{sp+q+1} \cdots \gamma_{s\mu} \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\
0 & 0 \quad 0 & 0 & 0 & 1 \quad 0 \\
0 & 0 \quad 0 & 0 & 0 & 0 \quad 1 \quad 0 \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot
\end{vmatrix}
$$

a következővel sokszorozzuk:

$$
\varepsilon' A'_{n-m} = \begin{vmatrix}
\gamma_{f1} & \gamma_{f2} \cdots & \gamma_{fp+q} \cdots & \gamma_{f\mu} \\
\gamma_{g1} & \gamma_{g2} \cdots & \gamma_{gp+q} \cdots & \gamma_{g\mu} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\gamma_{u1} & \gamma_{u2} \cdots & \gamma_{up+q} \cdots & \gamma_{u\mu} \\
\gamma_{v1} & \gamma_{v2} \cdots & \gamma_{vp+q} \cdots & \gamma_{v\mu} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}
$$

és a (19) és (22) alatti egyenleteket tekintetbe vesszük, a sokszorozás eredménye a következő lesz:

$$
\varepsilon'(-1)^{pq}\Delta A'_{n-m} = \begin{vmatrix}
A & 0 & \ldots 0 \ldots & 0 & 0 & \ldots \\
0 & A & \ldots 0 \ldots & 0 & 0 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\varepsilon_{rf} & \varepsilon_{rg} & \cdots\cdots & \varepsilon_{ru} & \varepsilon_{rv} & \ldots \\
\varepsilon_{sf} & \varepsilon_{sg} & \cdots\cdots & \varepsilon_{su} & \varepsilon_{sv} & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\gamma_{fp+q+1} & \gamma_{gp+q+1} & \cdots\cdots & \gamma_{up+q+1} & \gamma_{vp+q+1} & \ldots \\
\gamma_{fp+q+2} & \gamma_{gp+q+2} & \cdots\cdots & \gamma_{rp+q+2} & \gamma_{sp+q+2} & \ldots
\end{vmatrix}
$$

$$\varepsilon'(-1)^{pq}\Delta A'_{n-m}=A^p.\begin{vmatrix} \varepsilon_{ru} & \varepsilon_{rv} & \dots \\ \varepsilon_{su} & \varepsilon_{sv} & \dots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \gamma_{up+q+1} & \gamma_{vp+q+2} & \dots \\ \gamma_{up+q+2} & \gamma_{vp+q+2} & \dots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

vagy ha még az utolsó $\mu-p$-dik fokú determinánst úgy alakítjuk át, hogy abban az utolsó $\mu-p-q$ sort γ_{rp+q+1}, γ_{rp+q+1} stb. sokszorozzuk és az első sorból kivonjuk, azután ugyanazon utolsó sorokat γ_{sp+q+1}, γ_{sp+q+2}, stb. sokszorozzuk és a másodikból kivonjuk és így tovább, végre még tekintetbe vesszük, hogy a (22) alatti egyenletnél fogva:

$$\varepsilon_{xy}-\left[c_{xp+q+1}\,c_{yp+q+1}+\dots\dots+c_{x\mu}\,c_{y\mu}\right]=$$
$$=c_{x1}c_{ya}+c_{x2}\,c_{y2}+\dots\dots+c_{xp+q}\,c_{yp+q}=\varepsilon'_{xy}$$

akkor az előbbi egyenletből a következőt nyerjük:

$$\Delta=(-1)^{pq}.\ \varepsilon' A^{p+\nu-\mu}.\begin{vmatrix} \varepsilon'_{ru} & \varepsilon'_{rv} & \dots \\ \varepsilon'_{su} & \varepsilon'_{sv} & \dots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \gamma_{up+q+1} & \gamma_{vp+q+1} & \dots \\ \gamma_{up+q+2} & \gamma_{vp+q+2} & \dots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}, \dots\dots (33)$$

a hol még meg kell jegyeznünk, hogy ε' alatt a positiv, vagy negativ egységet értjük, amint az $f\ g\dots u\ v\dots$ és $1\ 2\dots\mu$ permutátiók vagy ugyanazon, vagy pedig különböző osztályba tartoznak.

Czélunknak megfelelőleg, majd a (32) alatti, majd pedig a (33) alatti egyenletet fogjuk Δ meghatározásánál alkalmazni.

Ha az előbbi számban előforduló felvétellel ellenben

$$p+q>\mu$$

akkor az ezen esetben lehetséges

$$\binom{p+q}{\mu}$$

μ-dik] fokú determinánsok olyanok lesznek, hogy azok értékei a 7. számban előforduló (21) és (23) alatti egyenletek segitségével meghatározhatók.

Budapesten, 1880. augusztus hónapban.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgés forrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24 η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . 20 kr.

Budapest, 1880. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.