ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

VII. KÖTET. XVIII. SZÁM. 1880.

A MÁSODFOKÚ GÖRBÉK ÉS FELÜLETEK MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. október 16-án.)

Ára 20 kr.

BUDAPEST, 1880.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az akadémia épületében.)

A MÁSODFOKÚ

GÖRBÉK ÉS FELÜLETEK

MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. október 16-án.)

BUDAPEST, 1880.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

Az Akadémia épületében.

Budapest, 1880. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

A másodfokú görbék és felületek meghatározásáról.

Ismeretes, hogy a másodfokú görbe, azaz a kúpszelet öt mértani feltételből, a másodfokú felület pedig kilencz mértani feltételből meghatározható; az itten előforduló különféle feladatoknak csak a legkevesebb esetben felel meg egyetlen egy megoldás, vagy másképen az adott adatok csak a legritkább esetekben határozzák meg a kúpszeletet, vagy másodfokú felületet egyértelműleg, és így a szóban forgó feladatoknak a legtöbb esetben több megoldásuk lesz.

Az ezen nemű feladatok közűl a kúpszeleteknél a legegyszerűebb esetek, azaz azok, a melyekben követeltetik, hogy a kúpszelet adott pontokon menjen át és adott egyeneseket érintsen — melyek összesen hat esetet adnak — már gyakrabban minden tekintetben és irányban kielégítően vannak megvizsgálva. A complikáltabb esetekben, a melyekben a kúpszelettől kivántatik, hogy az öt adott, átalában különböző rendű algebrai görbét érintsen Chasles [1]) módszereinek segítségével melyeket »*méthodes des caractéristiques*« név alatt vezetett be a tudományba, képesek vagyunk a kérdésben forgó feladatok megoldásának számát meghatározni, így p. 3264 kúpszelet van, mely öt adott kúpszeletet érint. A másodfokú felületeknél mindaz, mit az említett nemű feladatokról még a legegyszerűbb esetekben is tudunk, azaz azokban, a melyekben követeltetik, hogy a másodfokú felület adott pontokon menjen át és adott síkokat és egyeneseket érintsen — melyek összesen negyvenöt esetet adnak — pusztán csak a Chasles-féle karakteristi-

[1]) Lásd különböző értékezéseit a párizsi académie des sciences 1864. és 1867. comptes rendus-iben.

kák meghatározására szorítkozik,[1]) a mi valóban nem meglepő, ha meggondoljuk, hogy a másodfokú felületeknél az ide tartozó két legegyszerűbb feladat, — e felület meghatározása pusztán adott pontokból, vagy csak érintő-síkokból — eddig kielégítő megoldásnak még korántsem örvend.

Ezen sorok czélja szintén kúpszelet — és másodfokú felület — meghatározások, ámde más nemű adatokból, mint az előbb említettek. Előre kijelentjük, hogy az itten tárgyalt feladatok kivétel nélkül olyanok, hogy a feladat adataiból a kúpszelet, vagy másodfokú felület csak egyértelműleg van meghatározva.

Az ezen sorokban tárgyalt kúpszelet-meghatározások mind oly esetekre vonatkoznak, a melyekben a kúpszelet conjugált idomokból és pontokból, vagy conjugált idomokból és érintőkből, a másodfokú felület pedig conjugált idomokból és pontokból, vagy conjugált idomokból és érintősíkokból meghatározandó.

A szóban forgó feladatok megoldásánál az analytikai módszert használva, e megoldásokat egyenletek alakjában nyerjük, melyeknek transformátiója által azokat a legrövidebb alakban kapjuk meg, mely transformátiók egyszersmind a másodfokú görbék és felületek conjugált idomokra vonatkoztatott egyenleteinek legdirektebb lehozatalát vezetik elénkbe.

Ezen utóbb felemlített körülményre különösen nagy súlyt fektetünk, mely tekintetben ezen értekezésnek a kúpszeletre vonatkozó részében különösen azon transformátiókra utalunk, melyek az 1. és 2. §-ban a (3) alatti egyenleteket az (5) alatti alakokra, a 10. §-ban pedig a (2) alatti egyenletet a (4) alatti alakra vezették. A másodfokú felületekre vonatkozó részt illetőleg pedig azon átalakításokat említjük fel, melyek segítségével a 4. és 5. §-ban a (3) alatti egyenleteket az (5) alatti egyenletek alakjára hoztuk. Véleményünk szerint, a kúpszelet egyenletének transformátióját a conjugált háromszögre, négyszögre és ötszögre, valamint a másodfokú felület transformá-

---

[1]) Zeuthen : »Nouvelles annales de mathématiques. II. sér. 7-dik kötet 355. l. és Schubert értekezését Borchardt Journaljának 71. kötet 366. l.

tióját a conjugált tetraéderre és pentaéderre inkább geometriai szellemben oldottuk meg, mintsem ez eddig azon tisztán algebrai felfogású transformátiók segítségével történt, melyekre bennünket leginkább Jacobi, Hesse és Paul Serret tanítottak.

Szabadjon azon állást, melyet ezen értekezés fejtegetései ez előbb említett mathematikusok buvárlataival szemben elfoglal, párhuzamba állítani egy másik általánosabban ismert transformátió-problémával.

A másodfokú görbék és felületek transformátiójánál a főtengelyekre vagy azon utat követhetjük, hogy a főtengelyek s az általuk meghatározott főátmérősíkok geometriai tulajdonságait előrebocsátva, a transformátió-problémát geometriailag szabatosan jelezzük, vagy pedig megforditva a szóban forgó mértani alakzatok egyenleteit hozzuk az úgynevezett kanonikus alakokra, és épen ezen transformátiók által vezetjük be a kúpszeletek és másodfokú felületek elméletébe a főtengelyeket. Az ezen értekezésben tárgyalt vizsgálatokat a most jelzett problémával párhuzamba állítva, kijelentjük, hogy azok az első utat követik, mire nagy súlyt fektetünk, miután tekintettel arra, hogy az analytikai geometria főleg geometriai disciplina, abban igénytelen véleményünk szerint mindenütt oda kell törekednünk, hogy az eszközt a czéllal össze nem tévesztve, ne az algebrának és analysisnek engedjük át a primszerep viselését, hanem főleg a tulajdonképeni czélt, a geometriát léptessük előtérbe. Ezen nézetünknek további támaszát még azon megfontolás is képezi, hogy az analytikai geometria letárgyalásánál az evvel ellenkező úton, könnyen eshetnénk azon szélsőségbe, hogy a geometria analytikai tanitását pusztán csak az algebra és analysis példatárává degradálnók, mi minden esetre a tudomány szellemével a legnagyobb ellentétben állana. Tagadhatlan azonban, hogy a másik irányban haladva, számos alkalomból indíttatunk a geometriai problémák abstractiójára, mely elvont feladatok megoldásából viszont uj néz-pontokat nyerünk azon geometriai problémákról, melyek tulajdonképen bennünket ezen általánosító vizsgálatokra indítottak.

1. Mielőtt a kitűzött feladatok megoldásához fognánk, néhány definitiónak és jelölésnek megalapítását czélszerűnek tartjuk.[1])

Ismeretes, hogy két pont a kúpszelet síkjában conjugált harmonikus pólusnak, vagy rövidebben *conjugáltnak* neveztetik, ha e két pont közül akármelyiknek a polára a kúpszeletben a másik ponton átmegy; továbbá két egyenes conjugáltnak mondatik a kúpszeletben,ha az egyiknek a pólusa a másikán fekszik.

Valamely háromszög a kúpszelet conjugált háromszögének neveztetik, ha a háromszögnek minden csúcspára conjugált pont-pár a kúpszeletben; szintén mondhatjuk, hogy ekkor a háromszög és a kúpszelet conjugáltak.

Ha a négyszög szembenfekvő csúcsai conjugáltak a kúpszeletben, azt mondjuk, hogy a négyszög és a kúpszelet conjugáltak.

Ha az ötszög mindegyik csúcsa a szembenfekvő oldal pólusa a kúpszeletben, azt mondjuk, hogy az ötszög és a kúpszelet conjugáltak.

Ha a négyoldal (Vierseit) szembenfekvő oldalai conjugáltak a kúpszeletben, azt mondjuk, hogy a négyoldal és a kúpszelet conjugáltak.

A három-oldal (Dreiseit) és az öt-oldal (Fünfseit) egyrészt, másrészt még a kúpszelet ugyanazon feltételek mellett conjugáltak, mint a háromszög és ötszög még a kúpszelet.

2. A térnek két pontja a másodfokú felületben conjugált harmonikus pólusok vagy egyszerűbben *conjugált pontok*, ha a két pont közül akármelyiknek a polár-síkja a másodfokú felületben, a másik ponton átmegy; két sík a másodfokú felületben conjugáltnak mondatik, ha az egyiknek pólusa a másodfokú felületben, a másikban fekszik.

Ha a tetraédernek csúcsai, pólusai a szembenfekvő tetraéder lapsíkoknak valamely másodfokú felületben, a tetraéder és a másodfokú felület conjugáltnak neveztetik.

Ha a pentaéder csúcsainak polársíkjai a másodfokú felületben, a pentaéder szembenfekvő élein mennek át, a pentaéder és a másodfokú felület conjugáltnak neveztetik.

---

[1]) Lásd a definitiókat illetőleg Paul Serret: Geométrie de Direction czimű munkájában az 54.—57. ll.

Ezekhez hasonlóan még a következő elnevezéseket használjuk:

A térbeli négyszög és a másodfokú felület conjugáltak, ha a négyszögnek minden csúcsa pólusa a hátralevő három csúcsból meghatározott síknak a másodfokú felületben.

A térbeli ötszög és a másodfokú felület conjugált, ha az ötszög bármely szögsíkjának megfelelő pólus az ötszög szembenfekvő oldalán fekszik.

A térbeli hatszög azaz a hexagonális octaéder és a másodfokú felület conjugáltak, ha az octaéder bármely lapsíkjának pólusa az octaéder szembenfekvő lapsíkján fekszik.

3. A síkban a tetszőleges pontnak homogén viszonycoordinátáit x, y, z-vel, az i pontnak coordinátáit x_i, y_i, z_i-vel és az ik egyenesnek coordinátáit pedig $\xi_{ik}, \eta_{ik}, \zeta_{ik}$-val jelöljük, úgy, hogy

$$\left.\begin{aligned} \xi_{ik} &= y_i z_k - y_k z_i \\ \eta_{ik} &= z_i x_k - z_k x_i \\ \zeta_{ik} &= x_i y_k - x_k y_i \end{aligned}\right\} \ldots \text{(a)}$$

Továbbá az ik egyenes egyenlete

$$(iko) = o \ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

és a következő determináns

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} = (ikl) \ldots \text{(c)}$$

A térben a tetszőleges pont homogen viszonycoordinátáit x, y, z, p-vel, az i pontnak coordinátáit x_i, y_i, z_i, p_i-vel, az ikl síknak a coordinátáit pedig $\xi_{ikl}, \eta_{ikl}, \zeta_{ikl}, \pi_{ikl}$-lel jelöljük, úgy, hogy

$$\left.\begin{aligned} \xi_{ikl} &= \begin{vmatrix} y_i & z_i & p_i \\ y_k & z_k & p_k \\ y_l & z_l & p_l \end{vmatrix}, \quad \eta_{ikl} = -\begin{vmatrix} z_i & p_i & x_i \\ z_k & p_k & x_k \\ z_l & p_l & x_l \end{vmatrix} \\ \zeta_{ikl} &= \begin{vmatrix} p_i & x_i & y_i \\ p_k & x_k & y_k \\ p_l & x_l & y_l \end{vmatrix}, \quad \pi_{ikl} = -\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \ldots \text{(d)}$$

Továbbá az ikl síknak az egyenlete:

$$(iklo) = o \;. \;. \;. \;(e)$$

a következő determináns pedig

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ x_k & y_k & z_k & p_k \\ x_l & y_l & z_l & p_l \\ x_m & y_m & z_m & p_m \end{vmatrix} = (iklm) \ldots (f)$$

4. Legyen a másodfokú görbének az egyenlete pontcoordinátákban a következő:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{12}xy = o \ldots (g)$$

akkor az i pont a (g) alatti kúpszeleten fekszik, ha:

$$a_{11}x_i^2 + a_{22}y_i^2 + a_{33}z_i^2 + 2a_{23}y_iz_i + 2a_{13}x_iz_i + 2a_{12}x_iy_i = o, \ldots (h)$$

továbbá a (g) alatti kúpszeletben az i és k pontok conjugált harmonikus pólusok, ha

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_ix_k + a_{22}y_iy_k + a_{33}z_iz_k + a_{23}(y_iz_k + y_kz_i) + a_{13}(x_iz_k + x_kz_i) \\ + a_{12}(x_iy_k + x_ky_i) = o \end{aligned}\right\} \ldots (i)$$

Legyen továbbá a másodfokú felületnek az egyenlete pontcoordinátákban a következő:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}p^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}yp \\ + 2a_{23}yz + 2a_{24}yp + 2a_{34}zp = o \end{aligned}\right\} \ldots (k)$$

akkor az i pont a (k) alatti másodfokú felületen fekszik, ha a következő feltétel áll:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_i^2 + a_{22}y_i^2 + a_{33}z_i^2 + a_{44}p_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + 2a_{13}x_iz_i + 2a_{14}x_ip_i \\ + 2a_{23}y_iz_i + 2a_{24}y_ip_i + 2a_{34}z_ip_i = o \end{aligned}\right\} \ldots (l)$$

az i és k pontok pedig a következő feltétel mellett conjugált harmonikus pólusok a (k) alatti másodfokú felületben:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_ix_k + a_{22}y_iy_k + a_{33}z_iz_k + a_{44}p_ip_k + a_{12}(x_iy_k + x_ky_i) \\ + a_{13}(x_iz_k + x_kz_i) + a_{14}(x_ip_k + x_kp_i) + a_{23}(y_iz_k + y_kz_i) \\ + a_{24}(y_ip_k + y_kp_i) + a_{34}(z_ip_k + z_kp_i) = o \end{aligned}\right\} \ldots (m)$$

1. §. A másodfokú görbe meghatározása két pontból és a conjugált háromszögből.

5. Legyenek az 123 háromszög csúcsainak coordinátái x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 és x_3, y_3, z_3 és a 4 és 5 pontok coordinátái x_4, y_4, z_4; x_5, y_5, z_5, kerestetik azon kúpszelet egyenlete, mely az utóbbi két ponton megy át és az 123 háromszöghöz conjugált.

Legyen a (g) alatti egyenlet a kúpszeletnek keresett egyenlete, akkor a kérdésben forgó kúpszelet a 4 és 5 pontokon a következő feltételek mellett megy át:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_4^2+a_{22}y_4^2+a_{33}z_4^2+2a_{23}y_4z_4+2a_{13}x_4z_4+2a_{12}x_4y_4=o \\ a_{11}x_5^2+a_{22}y_5^2+a_{33}z_5^2+2a_{23}y_5z_5+2a_{13}x_5z_5+2a_{12}x_5y_5=o \end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

Továbbá az előrebocsátott definitiók szerint a (g) alatti kúpszelet és az 123 háromszög a következő feltételek mellett conjugáltak:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_2x_3+a_{22}y_2y_3+a_{33}z_2z_3+a_{23}(y_2z_3+y_3z_2)+2a_{13}(x_2z_3 \\ +x_3z_2)+2a_{12}(x_2y_3+x_3y_2)=o \\ a_{11}x_1x_3+a_{22}y_1y_3+a_{33}z_1z_3+2a_{23}(y_1z_3+y_3z_1)+2a_{13}(x_1z_3 \\ +x_3z_1)+2a_{12}(x_1y_3+x_3y_1)=o \\ a_{11}x_1x_2+a_{22}y_1y_2+a_{33}z_1z_2+2a_{23}(y_1z_2+y_2z_1)+2a_{13}(x_1z_2 \\ +x_2z_1)+2a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)=o \end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

Ha pedig a (g), (1) és (2) alatti egyenletekből a bennük vonalosan és *homogénen*, előforduló a_{11}, stb. állandókat elimináljuk, a kérdéses kúpszelet egyenlete, a következő jelölés használata mellett:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & 2yz & 2xz & 2xy \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & 2y_4z_4 & 2x_4z_4 & 2x_4y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & 2y_5z_5 & 2x_5z_5 & 2x_5y_5 \\ x_2x_3 & y_3y_2 & z_2z_3 & y_2z_3+y_3z_2 & x_2z_3+x_3z_2 & x_2y_3+x_3y_2 \\ x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & y_1z_3+y_3z_1 & x_1z_3+x_3z_1 & x_1y_3+x_3y_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+y_2z_1 & x_1z_2+x_2z_1 & x_1y_2+x_2y_1 \end{vmatrix} = K_{123}^{45} \ldots(\text{n})$$

ez lesz:

$$K_{123}^{45}=o\ \ldots\ldots(3)$$

6. A K_{123}^{45} determinánst még átalakíthatjuk, ha azt a következő hatodfokú determinánssal sokszorozzuk:

$$\begin{vmatrix} \xi_{23}^2 & \eta_{23}^2 & \zeta_{23}^2 & \eta_{23}\zeta_{23} & \xi_{23}\zeta_{23} & \xi_{23}\eta_{23} \\ \xi_{31}^2 & \eta_{31}^2 & \zeta_{31}^2 & \eta_{31}\zeta_{31} & \xi_{31}\zeta_{31} & \xi_{31}\eta_{31} \\ \xi_{12}^2 & \eta_{12}^2 & \zeta_{12}^2 & \eta_{12}\zeta_{12} & \xi_{12}\zeta_{12} & \xi_{12}\eta_{12} \\ 2\xi_{12}\xi_{13} & 2\eta_{12}\eta_{13} & 2\zeta_{12}\zeta_{12} & \eta_{12}\zeta_{13}+\eta_{13}\zeta_{12} & \xi_{12}\zeta_{13}+\xi_{13}\zeta_{12} & \xi_{12}\eta_{13}+\xi_{13}\eta_{12} \\ 2\xi_{12}\xi_{23} & \cdot & \cdot & \eta_{12}\zeta_{23}+\eta_{23}\zeta_{12} & \cdot & \cdot \\ 2\xi_{13}\xi_{23} & \cdot & \cdot & \eta_{13}\zeta_{23}+\eta_{23}\zeta_{13} & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \ldots\ldots (n')$$

melynek három utolsó oszlopát 2-vel sokszorozva és három utolsó sorát 2-vel osztva, egy determinánsba megy át, melynek értéke : $= (123)^{8}$ [*)]

A sokszorozás eredménye a következő:

$$\begin{vmatrix} (023)^2 & (013)^2 & (012)^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ (423)^2 & (413)^2 & (412)^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ (523)^2 & (513)^2 & (512)^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -(123)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (123)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (123)^2 \end{vmatrix} = (123)^6 \begin{vmatrix} (023)^2 & (013)^2 & (012)^2 \\ (423)^2 & (413)^2 & (412)^2 \\ (523)^2 & (513)^2 & (512)^2 \end{vmatrix},$$

a honnét végre ered hogy :

$$K_{1:3}^{45}\,(123)^2 = \begin{vmatrix} (023)^2 & (013)^2 & (012)^2 \\ (423)^2 & (413)^2 & (412)^2 \\ (523)^2 & (513)^2 & (512)^2 \end{vmatrix} \ldots\ldots (4)$$

---

[1]) Lásd Scholtz : »A kúpszeleten fekvő hat pont és a hexagrammum mysticum tétele« czimű értekezésében a (6) alatti egyenletet. (Műegy. lapok II. köt. 68. l.)

és így a 4 és 5 pontokon átmenő s ' az 123 háromszögnek conjugált kúpszelet egyenletét még a következő alakban irhatjuk:

$$\begin{vmatrix} (023)^2 & (013)^2 & (012)^2 \\ (423)^2 & (413)^2 & (412)^2 \\ (523)^2 & (513)^2 & (512)^2 \end{vmatrix} = o \ldots (5)$$

2. §. *A három pontból és conjugált négyszögből meghatározott kúpszelet.*

7. Legyenek a négyszög szögpontjai rendszerént 1, 2, 3, 4 és ezek coordinátái x_1, y_1, z_1; $x_2 \ldots$; $x_3 \ldots$; $x_4 \ldots$, az adott pontok pedig 5, 6 és 7, melyeknek coordinátái x_5, y_5, z_5; $x_6 \ldots$ és $x_7 \ldots$, akkor az 5, 6 és 7 pontok a (g) alatti kúpszelet kerületén feküsznek, ha a következő egyenletek állanak:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_5^2+a_{22}y_5^2+a_{33}z_5^2+2a_{23}y_5z_5+2a_{13}x_5z_5+2a_{12}x_5y_5=o \\ a_{11}x_6^2+a_{22}y_6^2+a_{33}z_6^2+2a_{23}y_6z_6+2a_{13}x_6z_6+2a_{12}x_6y_6=o \\ a_{11}x_7^2+a_{22}y_7^2+a_{33}z_7^2+2a_{23}y_7z_7+2a_{13}x_7z_7+2a_{12}x_7y_7=o \end{array}\right\} \ldots (1)$$

az 1 2 3 4 négyszög és a (g) alatti kúpszelet az 1-ső számban adott definitiók szerint conjugáltak a következő feltételek mellett:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1x_3+a_{22}y_1y_3+a_{33}z_1z_3+a_{23}(y_1z_3+y_3z_1)+a_{13}(x_1z_3 \\ +x_3z_1)+a_{12}(x_1y_3+x_3y_1)=o \\ a_{11}x_2x_4+a_{22}y_2y_4+a_{33}z_2z_4+a_{23}(y_2z_4+y_4z_2)+a_{13}(x_2z_4 \\ +x_4z_2)+a_{12}(x_2y_4+x_4y_2)=o \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Ha tehát a (g), (1) és (2) alatti egyenletekből az $a_{11}, \ldots$ mennyiségeket elimináljuk, a következő jelölés használata mellett:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & 2yz & 2xz & 2xy \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & 2y_5z_5 & 2x_5z_5 & 2x_5y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & 2y_6z_6 & 2x_6z_6 & 2x_6y_6 \\ x_7^2 & y_7^2 & z_7^2 & 2y_7z_7 & 2x_7z_7 & 2x_7y_7 \\ x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & y_1z_3+y_3z_1 & x_1z_3+x_3z_1 & x_1y_3+x_3y_1 \\ x_2x_4 & y_2y_4 & z_2z_4 & y_2z_4+y_4z_2 & x_2z_4+x_4z_2 & x_2y_4+x_4y_2 \end{vmatrix} = K_{1234}^{567} \ldots (o)$$

$$K_{1234}^{567} = o \ldots\ldots (3)$$

a kiküszöbölési eredő, mely a nevezett három pontból és conjugált négyszögből meghatározott kúpszeletnek az egyenlete.

8. Az *(o)* alatti determinánst még átalakíthatjuk, ha azt a következő hatodfokú determinánssal sokszorozzuk:

$$\begin{vmatrix} \xi_{12}^2 & \eta_{12}^2 & \zeta_{12}^2 & \eta_{12}\zeta_{12} & \xi_{12}\zeta_{12} & \xi_{12}\eta_{12} \\ \xi_{23}^2 & \eta_{23}^2 & \zeta_{23}^2 & \eta_{23}\zeta_{23} & \xi_{23}\zeta_{23} & \xi_{23}\eta_{23} \\ \xi_{34}^2 & \eta_{34}^2 & \zeta_{34}^2 & \eta_{34}\zeta_{34} & \xi_{34}\zeta_{34} & \xi_{34}\eta_{34} \\ \xi_{14}^2 & \eta_{14}^2 & \zeta_{14}^2 & \eta_{14}\zeta_{14} & \xi_{14}\zeta_{14} & \xi_{14}\eta_{14} \\ \xi_{24}^2 & \eta_{24}^2 & \zeta_{24}^2 & \eta_{24}\zeta_{24} & \xi_{24}\zeta_{24} & \xi_{24}\eta_{24} \\ \xi_{13}^2 & \eta_{13}^2 & \zeta_{13}^2 & \eta_{13}\zeta_{13} & \xi_{13}\zeta_{13} & \xi_{13}\eta_{13} \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots (p)$$

A sokszorozás eredménye a következő:

$$\begin{vmatrix} (012)^2 & (023)^2 & (034)^2 & (014)^2 & (013)^2 & (024)^2 \\ (512)^2 & (523)^2 & (534)^2 & (514)^2 & (513)^2 & (524)^2 \\ (612)^2 & (623)^2 & (634)^2 & (614)^2 & (613)^2 & (624)^2 \\ (712)^2 & (723)^2 & (734)^2 & (714)^2 & (713)^2 & (724)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (124)(324) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (213)(134) \end{vmatrix} =$$

$$= (234)\,(134)\,(124)\,(123) \begin{vmatrix} (012)^2 & (023)^2 & (034)^2 & (014)^2 \\ (512)^2 & (523)^2 & (534)^2 & (514)^2 \\ (612)^2 & (623)^2 & (634)^2 & (614)^2 \\ (712)^2 & (723)^2 & (734)^2 & (714)^2 \end{vmatrix}$$

A (p) alatti determináns értékét legegyszerűbben úgy puhatoljuk ki, ha azt a következővel sokszorozzuk:

$$\begin{vmatrix} x_3x_4 & y_3y_4 & z_3z_4 & y_3z_4+y_4z_3 & x_3z_4+x_4z_3 & x_3y_4+x_4y_3 \\ x_1x_4 & y_1y_4 & z_1z_4 & y_1z_4+y_4z_1 & x_1z_4+x_4z_1 & x_1y_4+x_4y_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+y_2z_1 & x_1z_2+x_2z_1 & x_1y_2+x_2y_1 \\ x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3+y_3z_2 & x_2z_3+x_3z_2 & x_2y_3+x_3y_2 \\ x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & y_1z_3+y_3z_1 & x_1z_3+x_3z_1 & x_1y_3+x_3y_1 \\ x_2x_4 & y_2y_4 & z_2z_4 & y_2z_4+y_4z_2 & x_2z_4+x_4z_2 & x_2y_4+x_4y_2 \end{vmatrix} \ldots\ldots (q)$$

melynek értéke a következő:

$$-\,(234)\,(134)\,(124)\,(123);$$ [1]

a (p) és (q) alatti determinánsok sokszorozásának eredménye pedig:

$$(234)^3\,(134)^3\,(124)^3\,(123)^3,$$

és így a (p) alatti determinánsnak az értéke ez:

$$-\,(234)^2\,(134)^2\,(124)^2\,(123)^2$$

[1]) L. A műegyetemi lapok II. kötetének 256. lapján a 33. feladatot.

a miből végre az előbbieknél fogva következik, hogy

$$K_{1231}^{567}\,(234)(134)(124)(123) = -\begin{vmatrix} (012)^2 (023)^2 (034)^2 (014)^2 \\ (512)^2 (523)^2 (534)^2 (514)^2 \\ (612)^2 (623)^2 (634)^2 (614)^2 \\ (712)^2 (723)^2 (734)^2 (714)^2 \end{vmatrix} \quad \ldots (4)$$

a miért az 5, 6, 7 pontokból és az 1 2 3 4 conjugált négyszögből meghatározott kúpszelet egyenletét a következően írhatjuk:

$$\begin{vmatrix} (012)^2 & (023)^2 & (034)^2 & (014)^2 \\ (512)^2 & (523)^2 & (534)^2 & (514)^2 \\ (612)^2 & (623)^2 & (634)^2 & (614)^2 \\ (712)^2 & (723)^2 & (734)^2 & (714)^2 \end{vmatrix} = o \ldots . (5)$$

3. §. A kúpszelet meghatározása a conjugált háromszögből és négyszögből.

9. Legyenek az 123 háromszög szögpontjainak coordinátái x_1, y_1, z_1; $x_2 \ldots$; $x_3 \ldots$; a 4567 négyszög csúcsainak coordinátái pedig x_4, y_4, z_4; $x_5 \ldots$, $x_6 \ldots$, $x_7 \ldots$, akkor a (g) alatti kúpszelet, a 4567 négyszögnek conjugált a következő feltételek mellett:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_4x_6 + a_{22}y_4y_6 + a_{33}z_4z_6 + a_{23}(y_4z_6 + y_6z_4) + a_{13}(x_4z_6 \\ &\qquad + x_6z_4) + a_{12}(x_4y_6 + x_6y_4) = o \\ &a_{11}x_5x_7 + a_{22}y_5y_7 + a_{33}z_5z_7 + a_{23}(y_5z_7 + y_7z_5) + a_{13}(x_5z_7 \\ &\qquad + x_7z_5) + a_{12}(x_5y_7 + x_7y_5) = o \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

az 123 háromszög pedig szintén a (g) alatti kúpszeletnek conjugált, ha a következő feltételek állanak:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_2x_3 + a_{22}y_2y_3 + a_{33}z_2z_3 + a_{23}(y_2z_3 + y_3z_2) + a_{13}(x_2z_3 \\ &\qquad + x_3z_2) + a_{12}(x_2y_3 + x_3y_2) = o \\ &a_{11}x_1x_3 + a_{22}y_1y_3 + a_{33}z_1z_3 + a_{23}(y_1z_3 + y_3z_1) + a_{13}(x_1z_3 \\ &\qquad + x_3z_1) + a_{12}(x_1y_3 + x_3y_1) = o \\ &a_{11}x_1x_2 + a_{22}y_1y_2 + a_{33}z_1z_2 + a_{23}(y_1z_2 + y_2z_1) + a_{13}(x_1z_2 \\ &\qquad + x_2z_1) + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) = o \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

ezért az 123 háromszögnek és a 4567 négyszögnek egyidejűleg conjugált kúpszeletnek az egyenletét úgy kapjuk meg, hogy a (g), (1) és (2) alatti egyenletekből az a_{11} sat. mennyiségeket elimináljuk. A kiküszöbölés eredménye a következő jelölés használata mellett:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & 2yz & 2xz & 2xy \\ x_4x_6 & y_4y_6 & z_4z_6 & y_4z_6+y_6z_4 & x_4z_6+x_6z_4 & x_4y_6+x_6y_4 \\ x_5x_7 & y_5y_7 & z_5z_7 & y_5z_7+y_7z_5 & x_5z_7+x_7z_5 & x_5y_7+x_7y_5 \\ x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3+y_3z_2 & x_2z_3+x_3z_2 & x_2y_3+x_3y_2 \\ x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & y_1z_3+y_3z_1 & x_1z_3+x_3z_1 & x_1y_3+x_3y_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+y_2z_1 & x_1z_2+x_2z_1 & x_1y_2+x_2y_1 \end{vmatrix} = K_{123,4567} \quad \text{(r)}$$

ez lesz:

$$K_{123,4567} = 0. \quad \ldots (3)$$

10. A háromszög és négyszögnek egyidejűleg conjugált kúpszelet egyenletét transformátiók által még két nevezetes alakra hozzuk. Ha nevezetesen először az (r) alatti determinánst a (n') determinánssal sokszorozzuk, a sokszorozás eredménye ez esetben a következő lesz:

$$\begin{vmatrix} (023)^2 & (013)^2 & (012)^2 & . & . & . \\ (234)(236) & (134)(136) & (124)(126) & . & . & . \\ (235)(237) & (135)(137) & (125)(127) & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -(123)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (123)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(123)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (123)^6 \begin{vmatrix} (023)^2 & (013)^2 & (012)^2 \\ (234)(236) & (134)(136) & (124)(126) \\ (235)(237) & (135)(137) & (125)(127) \end{vmatrix}$$

a miből következik, ha még a (n') alatti determináns értékét (l. a 6. számot) tekintetbe vesszük, hogy:

$$K_{123,4567}\,(123)^2 = \begin{vmatrix} (023)^2 & (013)^2 & (012)^2 \\ (234)(236) & (134)(136) & (124)(126) \\ (235)(237) & (135)(137) & (125)(127) \end{vmatrix} \ldots (4)$$

és ezért az 123 háromszögnek és az 4567 négyszögnek egyidejüleg conjugált kúpszeletnek az egyenletét még a következő alakban nyerjük:

$$\begin{vmatrix} (023)^2 & (013)^2 & (012)^2 \\ (234)(236) & (134)(136) & (124)(126) \\ (235)(237) & (135)(137) & (125)(127) \end{vmatrix} = 0 \ldots (5)$$

11. Az (r) alatti determinánst még úgy is transformálhatjuk, hogy azt a következővel sokszorozzuk:

$$\begin{vmatrix} \xi_{45}^2 & \eta_{45}^2 & \zeta_{45}^2 & \eta_{45}\zeta_{45} & \xi_{45}\zeta_{45} & \xi_{45}\eta_{45} \\ \xi_{56}^2 & \eta_{56}^2 & \zeta_{56}^2 & \eta_{56}\zeta_{56} & \xi_{56}\zeta_{56} & \xi_{56}\eta_{56} \\ \xi_{67}^2 & \eta_{67}^2 & \zeta_{67}^2 & \eta_{67}\zeta_{67} & \xi_{67}\zeta_{67} & \xi_{67}\eta_{67} \\ \xi_{47}^2 & \eta_{47}^2 & \zeta_{47}^2 & \eta_{47}\zeta_{47} & \xi_{47}\zeta_{47} & \xi_{47}\eta_{47} \\ \xi_{57}^2 & \eta_{57}^2 & \zeta_{57}^2 & \eta_{57}\zeta_{57} & \xi_{57}\zeta_{57} & \xi_{57}\eta_{57} \\ \xi_{46}^2 & \eta_{46}^2 & \zeta_{46}^2 & \eta_{46}\zeta_{46} & \xi_{46}\zeta_{46} & \xi_{46}\eta_{46} \end{vmatrix}, \quad \ldots .(s)$$

melynek értékét a (p) alatti determináns értékéből a következőnek találjuk: (l. a 8- számot.)

$$-(567)^2(467)^2(457)^2(456)^2$$

A sokszorozás eredménye ez esetben a következő:

$$\begin{vmatrix} (045)^2 & (056)^2 & (067)^2 & (047)^2 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(457)(567) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(456)(467) \\ (245)(345) & (256)(356) & (267)(367) & (247)(347) & . & . \\ (145)(345) & (156)(356) & (167)(367) & (147)(347) & . & . \\ (145)(245) & (156)(256) & (167)(267) & (147)(247) & . & . \end{vmatrix} =$$

$$= (567)(467)(457)(456) \begin{vmatrix} (045)^2 & (056)^2 & (067)^2 & (047)^2 \\ (245)(345) & (256)(356) & (267)(367) & (247)(347) \\ (145)(345) & (156)(356) & (167)(367) & (147)(347) \\ (145)(245) & (156)(256) & (167)(267) & (147)(247) \end{vmatrix}$$

a miért, ha még az (s) alatti determináns értékét figyelembe vesszük, találjuk, hogy

$$K_{123;4567}\,(567)(467)(457)(456) =$$

$$= -\begin{vmatrix} (045)^2 & (056)^2 & (067)^2 & (047)^2 \\ (245)(345) & (256)(356) & (267)(367) & (247)(347) \\ (145)(345) & (156)(356) & (167)(367) & (147)(347) \\ (145)(245) & (156)(256) & (167)(267) & (147)(247) \end{vmatrix} \quad \ldots .(6)$$

és ezért az 123 háromszögnek és a 4567 négszögnek egyidejüleg conjugált kúpszelet egyenletét még a következő alakban is írhatjuk:

$$\begin{vmatrix} (047)^2 & (056)^2 & (067)^2 & (047)^2 \\ (245)(345) & (256)(356) & (267)(367) & (247)(347) \\ (145)(345) & (156)(356) & (167)(367) & (147)(347) \\ (145)(245) & (156)(256) & (167)(267) & (147)(247) \end{vmatrix} = o \ldots (7)$$

4. §. A kúpszelet meghatározása egy pontból és két conjugált négyszögből.

12. Legyenek az adott pont coordinátái x_9, y_9, z_9 az 1234 és 5678 négszögök csúcsainak coordinátái pedig x_1, y_1, z_1; .. ... x_8, y_8, z_8, akkor a (g) alatti kúpszelet a 9 ponton a következő feltétel mellett megy át :

$$a_{11}x_9^2 + a_{22}y_9^2 + a_{33}z_9^2 + 2a_{23}y_9z_9 + 2a_{13}x_9z_9 + 2a_{12}x_9y_9 = o \ldots (1)$$

továbbá a (g) alatti kúpszelet az 1234 és 5678 négyszögöknek conjugált, ha a következő feltételek állanak:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1x_3 + a_{22}y_1y_3 + a_{33}z_1z_3 + a_{23}(y_1z_3 + y_3z_1) + a_{13}(x_1z_3 \\ + x_3z_1) + a_{12}(x_1y_3 + x_3y_1) = o \\ a_{11}x_2x_4 + a_{22}y_2y_4 + a_{33}z_2z_4 + a_{23}(y_2z_4 + y_4z_2) + a_{13}(x_2z_4 \\ + x_4z_2) + a_{12}(x_2y_4 + x_4y_2) = o \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_5x_7 + a_{22}y_5y_7 + a_{33}z_5z_7 + a_{23}(y_5z_7 + y_7z_5) + a_{13}(x_5z_7 \\ + x_7z_5) + a_{12}(x_5y_7 + x_7y_5) = o \\ a_{11}x_6x_8 + a_{22}y_6y_8 + a_{33}z_6z_8 + a_{23}(y_6z_8 + y_8z_6) + a_{13}(x_6z_8 \\ + x_8z_6) + a_{12}(x_6y_8 + x_8y_6) = o \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

és így a 9 ponton átmenő még az 1234 és 5678 négyszögöknek conjugált kúpszelet egyenletét nyerjük, ha a (g), (1), (2) és (3) alatti egyenletekből az a-kat kiküszöböljük. Az eredő egyenlet a következő jelölés használata mellett :

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & 2yz & 2xz & 2xy \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & 2y_9z_9 & 2x_9z_9 & 2x_9y_9 \\ x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & y_1z_3 + y_3z_1 & x_1z_3 + x_3z_1 & x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_2x_4 & y_2y_4 & z_2z_4 & y_2z_4 + y_4z_2 & x_2z_4 + x_4z_2 & x_2y_4 + x_4y_2 \\ x_5x_7 & y_5y_7 & z_5z_7 & y_5z_7 + y_7z_5 & x_5z_7 + x_7z_5 & x_5y_7 + x_7y_5 \\ x_6x_8 & y_6y_8 & z_6z_8 & y_6z_8 + y_8z_6 & x_6z_8 + x_8z_6 & x_6y_8 + x_8y_6 \end{vmatrix} = K_{1234;5678}(t)$$

ez lesz :

$$K^9_{1234;5678} = o \ldots\ldots (4)$$

mely, amint már említettük, a kérdéses kúpszeletnek az egyenlete.

13. A (4) alatti kúpszeletnek az egyenletét még másalakokban is nyerjük, ha a (t) determinánst transformáljuk, sokszorozzuk tehát ezen czélból először a (t) alatti determinánst a (p) alattival, akkor a sokszorozás eredménye ez lesz:

$$\begin{vmatrix} (012)^2 & (023)^2 & (034)^2 & (014)^2 & . & . \\ (129)^2 & (239)^2 & (349)^2 & (149)^2 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(124)(234) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(123)(134) \\ (125)(127) & (235)(237) & (345)(347) & (145)(147) & . & . \\ (126)(128) & (236)(238) & (346)(348) & (146)(148) & . & . \end{vmatrix} =$$

$$= (234)\,(134)\,(124)\,(123) \begin{vmatrix} (012)^2 & (023)^2 & (034)^2 & (014)^2 \\ (129)^2 & (239)^2 & (349)^2 & (149)^2 \\ (125)(127) & (235)(237) & (345)(347) & (145)(147) \\ (126)(128) & (236)(238) & (346)(348) & (146)(148) \end{vmatrix}$$

és ha még a (p) alatti determináns értékére (l. a 8. számot) vagyunk tekintettel, úgy találjuk, hogy

$$K^{9}_{12345678}\,(234)(134)(124)(123) =$$

$$= -\begin{vmatrix} (012)^2 & (023)^2 & (034)^2 & (014)^2 \\ (129)^2 & (239)^2 & (349)^2 & (149)^2 \\ (125)(127) & (235)(237) & (345)(347) & (145)(147) \\ (126)(128) & (236)(238) & (346)(348) & (146)(148) \end{vmatrix} \ldots\ldots(5)$$

és ezért a 9 ponton átmenő még az 1234 és 4567 négyszögeknek conjugált kúpszelet egyenletét a következőképen írhatjuk:

$$\begin{vmatrix} (012)^2 & (023)^2 & (034)^2 & (014)^2 \\ (129)^2 & (239)^2 & (349)^2 & (149)^2 \\ (125)(127) & (235)(237) & (345)(347) & (145)(147) \\ (126)(128) & (236)(238) & (346)(348) & (146)(148) \end{vmatrix} = o \ldots (6)$$

Ugyan ilyen módon a kérdéses kúpszeletet még más egyenlet által fejezhetjük ki; az átalakítás levezetése ez esetben felesleges volna, miután az az előbbihez egészen hasonló és abból ered, ha a kérdésben forgó négyszögöket egymás között felcseréljük. A nevezett kúpszelet egyenletét ez esetben még így is írhatjuk:

$$\begin{vmatrix} (056)^2 & (067)^2 & (078)^2 & (058)^2 \\ (569)^2 & (679)^2 & (789)^2 & (589)^2 \\ (156)(356) & (167)(367) & (178)(378) & (158)(358) \\ (256)(456) & (267)(567) & (278)(478) & (258)(458) \end{vmatrix} = o \ldots (7)$$

5. §. *A másodfokú felület meghatározása három pontból és egy conjugált tetraéderből.*

14. Legyenek az 1234 tetraéder csúcsainak coordinátái $x_1, y_1, z_1, p_1; \ldots \ldots x_4, y_4, z_4, p_4$, az 5, 6, 7 pontok coordinátái pedig x_5, y_5, z_5, p_5; sat., akkor ez utóbbi pontokon a (k) alatti másodfokú felület a következő feltételek mellett megy át:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_5^2 + a_{22}y_5^2 + a_{33}z_5^2 + a_{44}p_5^2 + 2a_{12}x_5y_5 + 2a_{13}x_5z_5 + 2a_{14}x_5p_5 & \\ + 2a_{23}y_5z_5 + 2a_{24}y_5p_5 + 2a_{34}z_5p_5 &= o \\ a_{11}x_6^2 + a_{22}y_6^2 + a_{33}z_6^2 + a_{44}p_6^2 + 2a_{12}x_6y_6 + 2a_{13}x_6z_6 + 2a_{14}x_6p_6 & \\ + 2a_{23}y_6z_6 + 2a_{24}y_6p_6 + 2a_{34}z_6p_6 &= o \\ a_{11}x_7^2 + a_{22}y_7^2 + a_{33}z_7^2 + a_{44}p_7^2 + 2a_{12}x_7y_7 + 2a_{13}x_7z_7 + 2a_{14}x_7p_7 & \\ + 2a_{23}y_7z_7 + 2a_{24}y_7p_7 + 2a_{34}z_7p_7 &= o \end{aligned}\right\} (1)$$

és a (k) alatti másodfokú felület az 1234 tetraédernek conjugált, ha a következő feltételek állanak:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1x_2+a_{22}y_1y_2+a_{33}z_1z_2+a_{44}p_1p_2+a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+a_{13}(x_1z_2+x_2z_1)+a_{14}(x_1p_2+x_2p_1)+a_{23}(y_1z_2+y_2z_1)\\
\qquad\qquad+a_{24}(y_1p_2+y_2p_1)+a_{34}(z_1p_2+z_2p_1)=o\\
a_{11}x_1x_3+a_{22}y_1y_3+a_{33}z_1z_3+a_{44}p_1p_3+a_{12}(x_1y_3+x_3y_1)+a_{13}(x_1z_3+x_3z_1)+a_{14}(x_1p_3+x_3p_1)+a_{23}(y_1z_3+y_3z_1)\\
\qquad\qquad+a_{24}(y_1p_3+y_3p_1)+a_{34}(z_1p_3+z_3p_1)=o\\
a_{11}x_1x_4+a_{22}y_1y_4+a_{33}z_1z_4+a_{44}p_1p_4+a_{12}(x_1y_4+x_4y_1)+a_{13}(x_1z_4+x_4z_1)+a_{14}(x_1p_4+x_4p_1)+a_{23}(y_1z_4+y_4z_1)\\
\qquad\qquad+a_{24}(y_1p_4+y_4p_1)+a_{34}(z_1p_4+z_4p_1)=o\\
a_{11}x_2x_3+a_{22}y_2y_3+a_{33}z_2z_3+a_{44}p_2p_3+a_{12}(x_2p_3+x_3p_2)+\ldots\ldots\ldots\ldots=o\\
a_{11}x_2x_4+\;\ldots\;+a_{12}(x_2y_4+x_4y_2)+\ldots\ldots\ldots\ldots=o\\
a_{11}x_3x_4+\;\ldots\;+a_{12}(x_3y_4+x_4y_3)+\ldots\ldots\ldots\ldots=o
\end{array}\right\}\quad(3)$$

és ezért az 5, 6 és 7 pontokon átmenő még az 1234 tetraédernek conjugált másodfokú felület egyenletét nyerjük, ha a (k), (1) és (2) alatti egyenletekből az a_{11} sat. mennyiségeket kiküszöböljük. Az eliminátió eredménye a következő jelölés használata mellett.

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
x^2 & y^2 & z^2 & p^2 & 2xy & 2xz & 2xp & 2yz & 2yp & 2zp\\
x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & p_5^2 & 2x_5y_5 & 2x_5z_5 & 2x_5p_5 & 2y_5z_5 & 2y_5p_5 & 2z_5p_5\\
x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & p_6^2 & 2x_6y_6 & 2x_6z_5 & 2x_6p_6 & 2y_6z_6 & 2y_6p_6 & 2z_6p_6\\
x_7^2 & y_7^2 & z_7^2 & p_7^2 & 2x_7y_7 & 2x_7z_7 & 2x_7p_7 & 2y_7z_7 & 2y_7p_7 & 2z_7p_7\\
x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & p_1p_2 & x_1y_2+x_2y_1 & x_1z_2+x_2z_1 & x_1p_2+x_2p_1 & y_1z_2+y_2z_1 & y_1p_2+y_2p_1 & z_1p_2+z_2p_1\\
x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & p_1p_3 & x_1y_3+x_3y_1 & x_1z_3+x_3z_1 & x_1p_3+x_3p_1 & y_1z_3+y_3z_1 & y_1p_3+y_3p_1 & z_1p_3+z_3p_1\\
x_1x_4 & y_1y_4 & z_1z_4 & p_1p_4 & x_1y_4+x_4y_1 & . & . & . & . & .\\
x_2x_3 & . & . & . & x_2y_3+x_3y_2 & . & . & . & . & .\\
x_2x_4 & . & . & . & x_2y_4+x_4y_2 & . & . & . & . & .\\
x_3x_4 & . & . & . & x_3y_4+x_4y_3 & . & . & . & . & .
\end{array}\right|=F_{1234}^{567}\ldots\text{(u)}$$

ez lesz:

$$F_{1234}^{567}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

15. A (3) alatti másodfokú felület egyenletét más alakban az (u) alatti determináns átalakításából nyerjük, ha azt a következő tizedfokú determinánssal sokszorozzuk :

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
\xi_{234}^2 & \eta_{234}^2 & \zeta_{234}^2 & \pi_{234}^2 & \xi_{234}\eta_{234} & \xi_{234}\zeta_{234} & \xi_{234}\pi_{234} & \eta_{234}\zeta_{234} & \eta_{234}\pi_{234} & \zeta_{234}\pi_{234} \\
\xi_{341}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{341}\eta_{341} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{412}^2 & \cdot & \cdot & : & \xi_{412}\eta_{412} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{123}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{123}\eta_{123} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2\xi_{234}\xi_{341} & 2\eta_{234}\eta_{341} & 2\zeta_{234}\zeta_{341} & 2\pi_{234}\pi_{341} & \xi_{234}\eta_{341}+\xi_{341}\eta_{234} & \xi_{234}\zeta_{341}+\xi_{341}\zeta_{234} & \xi_{234}\pi_{341}+\xi_{341}\pi_{234} & \eta_{234}\zeta_{341}+\eta_{341}\zeta_{234} & \eta_{234}\pi_{341}+\eta_{341}\pi_{234} & \zeta_{234}\pi_{341}+\zeta_{341}\pi_{234} \\
2\xi_{234}\xi_{412} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{234}\eta_{412}+\xi_{412}\eta_{234} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2\xi_{234}\xi_{123} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{234}\eta_{123}+\xi_{123}\eta_{234} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2\xi_{341}\xi_{412} & \cdot & : & \cdot & \xi_{341}\eta_{412}+\xi_{412}\eta_{341} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2\xi_{341}\xi_{123} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{341}\eta_{123}+\xi_{123}\eta_{341} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2\xi_{412}\xi_{123} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{412}\eta_{123}+\xi_{123}\eta_{412} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right| ,\text{(v)}$$

melynek első négy sorát kettővel sokszorozva, első négy oszlopát pedig 2-vel elosztva, könnyen belátjuk, hogy az a szerző következő czimű értekezésében »A másodfokú felületek elméletéhez« 23. lapján előforduló (17) alatti determinánstól nem különbözik, *) az utóbbinak értékét pedig ugyanott találtuk, hogy

$$= (1234)^{15}$$

A sokszorozás eredménye a következő :

---

*) Ért. a math. tud. köréből VII. köt. V. szám.

$$\begin{vmatrix}
(0234)^2 & (0134)^2 & (0124)^2 & (0123)^2 & . & . & . & . & . & . \\
(2345)^2 & (1345)^2 & (1245)^2 & (1235)^2 & . & . & . & . & . & . \\
(2346)^2 & (1346)^2 & (1246)^2 & (1236)^2 & . & . & . & . & . & . \\
(2347)^2 & (1347)^2 & (1247)^2 & (1237)^2 & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1234)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1234)^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)^2
\end{vmatrix} =$$

$$= (1234)^{12} \begin{vmatrix}
(0234)^2 & (0134)^2 & (0124)^2 & (0123)^2 \\
(2345)^2 & (1345)^2 & (1245)^2 & (1235)^2 \\
(2346)^2 & (1346)^2 & (1246)^2 & (1236)^2 \\
(2347)^2 & (1347)^2 & (1247)^2 & (1237)^2
\end{vmatrix}$$

és így míg a (v) alatti determináns értékét tekintetbe véve találjuk, hogy

$$F_{1234}^{567} (1234)^3 = \begin{vmatrix}
(0234)^2 & (0134)^2 & (0124)^2 & (0123)^2 \\
(2345)^2 & (1345)^2 & (1245)^2 & (1235)^2 \\
(2346)^2 & (1346)^2 & (1246)^2 & (1236)^2 \\
(2347)^2 & (1347)^2 & (1247)^2 & (1237)^2
\end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

a honnét következik, hogy az 5, 6, 7 pontokon átmenő és az 1234 tetraédernek conjugált másodfokú felület egyenletét a következő alakban írhatjuk:

$$\begin{vmatrix} (0234)^2 & (0134)^2 & (0124)^2 & (0123)^2 \\ (2345)^2 & (1345)^2 & (1245)^2 & (1235)^2 \\ (2346)^2 & (1346)^2 & (1246)^2 & (1236)^2 \\ (2346)^2 & (1347)^3 & (1247)^2 & (1237)^2 \end{vmatrix} = o \quad . (5)$$

6. §. A másodfokú felület meghatározása négy pontból és a conjugált pentaéderből.

16. A 6789 pontok coordinátáit $x_6, y_6, z_6, p_6 \ldots\ldots\ldots x_9, y_9, z_9, p_9$ az 12345 pentaéder csúcsainak coordinátáit $x_1, y_1, z_1, p_1; \ldots\ldots\ldots x_5, y_5, z_5, p_5$-tel jelölve, a (k) alatti másodfokú felület a 6, 7, 8, 9 pontokon a következő feltételek mellett megy át:

$$\left.\begin{aligned} & a_{11}x_6^2+a_{22}y_6^2+a_{33}z_6^2+a_{44}p_6^2+2a_{12}x_6y_6+2a_{13}x_6z_6+2a_{14}x_6p_6 \\ & \qquad 2a_{23}y_6z_6+2a_{24}y_6p_6+2a_{34}z_6p_6=o \\ & a_{11}x_7^2+a_{22}y_7^2+a_{33}z_7^2+a_{44}p_7^2+2a_{12}x_7y_7+2a_{13}x_7z_7+2a_{14}x_7p_7 \\ & \qquad +2a_{23}x_7z_7+2a_{24}y_7p_7+2a_{34}z_7p_7=o \\ & a_{11}x_8^2+a_{22}y_8^2+a_{33}z_8^2+a_{44}p_8^2+2a_{12}x_8y_8+2a_{13}x_8z_8+2a_{14}x_8p_8 \\ & \qquad +2a_{23}x_8z_8+2a_{24}y_8p_8+2a_{34}z_8p_8=o \\ & a_{11}x_9^2+a_{22}y_9^2+a_{33}z_9^2+a_{44}p_9^2+2a_{12}x_9y_9+2a_{13}x_9z_9+2a_{14}x_9p_9 \\ & \qquad +2a_{23}y_9z_9+2a_{24}y_9p_9+2a_{34}z_9p_9=o \end{aligned}\right\} (1)$$

az 12345 pentaédernek pedig conjugált, ha a következő feltételek állanak:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1x_3+a_{22}y_1y_3+a_{33}z_1z_3+a_{44}p_1p_3+a_{12}(x_1y_3+x_3y_1)+a_{13}(x_1z_3+x_3z_1)+a_{14}(x_1p_3+x_3p_1)+a_{23}(y_1z_3+y_3z_1)\\
&\qquad\qquad+a_{24}(y_1p_3+y_3p_1)+a_{34}(z_1p_3+z_3p_1)=o\\
&a_{11}x_2x_4+a_{22}y_2y_4+a_{33}z_2z_4+a_{44}p_2p_4+a_{12}(x_2y_4+x_4y_2)+a_{13}(x_2z_4+x_4z_2)+a_{14}(x_2p_4+x_4p_2)+a_{23}(y_2z_4+y_4z_2)\\
&\qquad\qquad+a_{24}(y_2p_4+y_4p_2)+a_{34}(z_2p_4+z_4p_2)=o\\
&a_{11}x_3x_5+a_{22}y_3y_5+a_{33}z_3z_5+a_{44}p_3p_5+a_{12}(x_3y_5+x_5y_3)+a_{13}(x_3z_5+x_5z_3)+a_{14}(x_3p_5+x_5p_3)+a_{23}(y_3z_5+y_5z_3)\\
&\qquad\qquad+a_{24}(y_3p_5+y_5p_3)+a_{34}(z_3p_5+z_5p_3)=o\\
&a_{11}x_4x_1+a_{22}y_4y_1+a_{33}z_4z_1+a_{44}p_4p_1+a_{12}(x_1y_4+x_4y_1)+a_{13}(x_1z_4+x_4z_1)+a_{14}(x_1p_4+x_4p_1)+a_{23}(y_1z_4+y_4z_1)\\
&\qquad\qquad+a_{24}(y_1p_4+y_4p_1)+a_{34}(z_1p_4+z_4p_1)=o\\
&a_{11}x_5x_2+a_{22}y_5y_2+a_{33}z_5z_2+a_{44}p_5p_2+a_{12}(x_2y_5+x_5y_2)+a_{13}(x_2z_5+x_5z_2)+a_{14}(x_2p_5+x_5p_2)+a_{23}(y_2z_5+y_5z_2)\\
&\qquad\qquad+a_{24}(y_2p_5+y_5p_2)+a_{34}(z_2p_5+z_5p_2)=o
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

A kérdéses másodfokú felületnek az egyenletét tehát nyerjük, ha a (k), (1) és (2) alatti egyenletekből az a_{11}, sat. mennyiségeket elimináljuk. A kiküszöbölési eredő a következő jelölés használata mellett:

$$\begin{vmatrix}
x^2 & y^2 & z^2 & p^2 & 2xy & 2xz & 2xp & 2yz & 2yp & 2zp\\
x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & p_6^2 & 2x_6y_6 & 2x_6z_6 & 2x_6p_6 & 2y_6z_6 & 2y_6p_6 & 2z_6p_6\\
x_7^2 & . & . & . & 2x_7y_7 & . & . & . & . & .\\
x_8^2 & . & . & . & 2x_8y_8 & . & . & . & . & .\\
x_9^2 & . & . & . & 2x_9y_9 & . & . & . & . & .\\
x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & p_1p_3 & x_1y_3+x_3y_1 & x_1z_3+x_3z_1 & x_1p_3+x_3p_1 & y_1z_3+y_3z_1 & y_1p_3+y_3p_1 & z_1p_3+z_3p_1\\
x_2x_4 & . & . & . & x_2y_4+x_4y_2 & . & . & . & . & .\\
x_3x_5 & . & . & . & x_3y_5+x_5y_3 & . & . & . & . & .\\
x_4x_1 & . & . & . & x_1y_4+x_4y_1 & . & . & . & . & .\\
x_5x_2 & . & . & . & x_2y_5+x_5y_2 & . & . & . & . & .
\end{vmatrix}\; F^{6789}_{12345} \quad \ldots\ldots(20)$$

ez lesz

$$F^{6789}_{12345}=o, \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

mely a 6789 pontokon átmenő és az 12345 pentaédernek conjugált másodfokú felületnek az egyenletét fejezi ki.

17. A (3) alatti másodfokú felületnek az egyenletét, a (w) alatti determináns átalakitása által, más alakban nyerjük, ha az utóbb említett determinánst a következő tizedfokú determinánssal sokszorozzuk:

$$\begin{vmatrix}
\xi_{512}^2 & \eta_{512}^2 & \zeta_{512}^2 & \pi_{512}^2 & \xi_{512}\eta_{512} & \xi_{512}\zeta_{512} & \xi_{512}\pi_{512} & \eta_{512}\zeta_{512} & \eta_{512}\pi_{512} & \zeta_{512}\pi_{512} \\
\xi_{123}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{123}\eta_{123} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{234}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{234}\eta_{234} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{345}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{345}\eta_{345} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{451}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{451}\eta_{451} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{135}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{135}\eta_{135} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{124}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{124}\eta_{124} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{235}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{235}\eta_{235} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{245}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{245}\eta_{245} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{134}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{134}\eta_{134} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (x)$$

melynek értéke

$$= (2345)^3\ (3451)^3\ (4512)^3\ (5123)^3\ (1234)^3\ {}^{*)}$$

A sokszorozás eredménye ez:

---

*) L. az e. i h. 15. számának (m) és (23) alatti egyenleteit.

$$
\begin{vmatrix}
(0512)^2 & (0123)^2 & (0234)^2 & (0341)^2 & (0451)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(5126)^2 & (1236)^2 & (2346)^2 & (3416)^2 & (4516)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(5127)^2 & (1237)^2 & (2347)^2 & (3417)^2 & (4517)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(5128)^2 & (1238)^2 & (2348)^2 & (3418)^2 & (4518)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(5129)^2 & (1239)^2 & (2349)^2 & (3419)^2 & (4519)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1245)(2345) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1235)(1345) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)(1245) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1235)(2345) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1234)(1345)
\end{vmatrix} =
$$

$$
= (2345)^2\ (3451)^2\ (4512)^2\ (5123)^2\ (1234)^2.
\begin{vmatrix}
(0512)^2 & (0123)^2 & (0234)^2 & (0341)^2 & (0451)^2 \\
(5126)^2 & (1236)^2 & (2346)^2 & (3416)^2 & (4516)^2 \\
(5127)^2 & (1237)^2 & (2347)^2 & (3417)^2 & (4517)^2 \\
(5128)^2 & (1238)^2 & (2348)^2 & (3418)^2 & (4518)^2 \\
(5129)^2 & (1239)^2 & (2349)^2 & (3419)^2 & (4519)^2
\end{vmatrix}.
$$

Ha tehát még az (x) alatti determináns értékére tekintettel vagyunk, a következő azonos egyenletünk van:

$$F_{12345}^{6789}\,(2345)\,(3451)\,(4512)\,(5123)\,(1234) =$$

$$= \begin{vmatrix} (0512)^2 & (0123)^2 & (0234)^2 & (0341)^2 & (0451)^2 \\ (5126)^2 & (1236)^2 & (2346)^2 & (3416)^2 & (4516)^2 \\ (5127)^2 & (1237)^2 & (2347)^2 & (3417)^2 & (4517)^2 \\ (5128)^2 & (1238)^2 & (2348)^2 & (3418)^2 & (4518)^2 \\ (5129)^2 & (1239)^2 & (2349)^2 & (3419)^2 & (4519)^2 \end{vmatrix} \quad \ldots . (4)$$

és így a (3) alatti másodfokú felületnek az egyenletét még a következőképen írhatjuk:

$$\begin{vmatrix} (0512)^2 & (0123)^2 & (0234)^2 & (0341)^2 & (0451)^2 \\ (5126)^2 & (1236)^2 & (2346)^2 & (3416)^2 & (4516)^2 \\ (5127)^2 & (1237)^2 & (2347)^2 & (3417)^2 & (4517)^2 \\ (5128)^2 & (1238)^2 & (2348)^2 & (3418)^2 & (4518)^2 \\ (5129)^2 & (1239)^2 & (2349)^2 & (3419)^2 & (4519)^2 \end{vmatrix} = o, \ldots . (5)$$

mely a 6, 7, 8, 9 pontokon átmenő és az 12345 pentaédernek conjugált másodfokú felület egyenlete.

7. §. *A másodfokú felület meghatározása hat pontból és a conjugált háromszögből.*

18. Legyenek az 1,. . .6 pontok coordinátái x_1, y_1, z_1, p_1, ... x_6, y_6, z_6, p_6, a 789 háromszög csúcsainak coordinátái pedig x_7, y_7, z_7, p_7, akkor a (k) alatti másodfokú felület az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokon a következő feltételek mellett megy át:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 + a_{44}p_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + 2a_{13}x_1z_1 + 2a_{14}x_1p_1 \\ + 2a_{23}x_1z_1 + 2a_{24}y_1p_1 + 2a_{34}z_1p_1 = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11}x_6^2 + a_{22}y_6^2 + a_{33}z_6^2 + a_{44}p_6^2 + 2a_{12}x_6y_6 + 2a_{13}x_6z_6 + 2a_{14}x_6p_6 \\ + 2a_{23}x_6z_6 + 2a_{24}y_6p_6 + 2a_{34}z_6p_6 = o \end{array}\right\} (1)$$

és a 789 háromszöghöz conjugált, ha a következő feltételek állanak:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_8x_9 + a_{22}y_8y_9 + a_{33}z_8z_9 + a_{44}p_8p_9 + a_{12}(x_8y_9 + x_9y_8) \\ + a_{13}(x_8z_9 + x_9z_8) + a_{14}(x_8p_9 + x_9p_8) + a_{23}(y_8z_9 + y_9z_8) \\ + a_{24}(y_8p_9 + y_9p_8) + a_{34}(z_8p_9 + z_9p_8) = o \\ a_{11}x_7x_9 + \ldots\ldots + a_{12}(x_7y_9 + x_9y_7) + \ldots\ldots\ldots = o \\ a_{11}x_7x_8 + \ldots\ldots + a_{12}(x_7y_8 + x_8y_7) + \ldots\ldots\ldots = o \end{array}\right\} \ldots (2)$$

és így a kérdéses másodfokú felület egyenletét nyerjük, ha az (1) (k) és (2) alatti egyenletekből az a mennyiségeket kiküszöböljük.

Jelöljük a kiküszöbölési-eredő egyenletnek első tagját

$$F^{123456}_{789}\text{-el},$$

akkor, ha abban az utolsó három sort 2-vel sokszorozzuk és az utolsó hat oszlopot 2-vel elosztjuk, találjuk, hogy:

$$F^{123456}_{789} = 8.\left|\begin{array}{cccccccccc} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & p_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & x_1p_1 & y_1z_1 & y_1p_1 & z_1p_1 \\ y_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_2y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_3^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_3y_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_4y_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_5y_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_6y_6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^2 & y^2 & z^2 & p^2 & xy & xz & xp & yz & yp & zp \\ 2x_8x_9 & 2y_8y_9 & 2z_8z_9 & 2p_8p_9 & x_8y_9+x_9y_8 & x_8z_9+x_9z_8 & x_8p_9+x_9p_8 & y_8z_9+y_9z_8 & y_8p_9+y_9p_8 & z_8p_9+z_9p_8 \\ 2x_7x_9 & \cdot & \cdot & \cdot & x_7y_9+x_9y_7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2x_7y_8 & \cdot & \cdot & \cdot & x_7y_8+x_8y_7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right| \ldots\ldots(y)$$

és így azon másodfokú felület egyenlete, mely az 1,. ..6 pontokon átmegy és az 789 háromszöghöz conjugált, a következő:

$$\tfrac{1}{8}F^{123456}_{789} = o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

19. A (3) alatti másodfokú felületnek az egyenletét más alakban nyerjük, ha az (y) alatti determinánst átalakítjuk, ezt pedig átalakítjuk, ha azt a következővel sokszorozzuk:

$$
(z)\quad \left|\begin{array}{cccccccccc}
\xi_{123}\xi_{456} & \eta_{123}\eta_{456} & \zeta_{123}\zeta_{456} & \pi_{123}\pi_{456} & \xi_{123}\eta_{456}+\xi_{456}\eta_{123} & \xi_{123}\zeta_{456}+\xi_{456}\zeta_{123} & \xi_{123}\pi_{456}+\xi_{456}\pi_{123} & \eta_{123}\zeta_{456}+\eta_{456}\zeta_{123} & \eta_{123}\pi_{456}+\eta_{456}\pi_{123} & \zeta_{123}\pi_{456}+\zeta_{456}\pi_{123} \\
\xi_{134}\xi_{256} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{134}\eta_{256}+\xi_{256}\eta_{134} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{145}\xi_{236} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{145}\eta_{236}+\xi_{236}\eta_{145} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{125}\xi_{346} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{125}\eta_{346}+\xi_{346}\eta_{125} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{236}\xi_{456} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{236}\eta_{456}+\xi_{456}\eta_{236} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{134}\xi_{456} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{134}\eta_{456}+\xi_{456}\eta_{134} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{125}\xi_{456} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{125}\eta_{456}+\xi_{456}\eta_{125} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{123}\xi_{256} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{123}\eta_{256}+\xi_{256}\eta_{123} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{123}\xi_{346} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{123}\eta_{346}+\xi_{346}\eta_{123} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_{123}\xi_{145} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{123}\eta_{145}+\xi_{145}\eta_{123} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right|
$$

melynek értéke ez:

$$(1234)^2(1235)^2(1236)^2(1456)^2(2456)^2(3456)^2[(1245)(1346)(2356)-(1256)(1345)(2346)]$$

[l. az i. h. a 13. szám (21) alatti egyenletét]. A sokszorozás eredménye ez:

$$
\left|\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & (1236)(1456) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)(2456) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1235)(3456) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1234)(2456) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1235)(3456) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1236)(1456) \\
(0123)(0456) & (0134)(0256) & (0145)(0236) & (0125)(0346) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(8123)(9456)+(9123)(8456) & (8134)(9256)+(9134)(8256) & (8145)(9236)+(9145)(8236) & (8125)(9346)+(9125)(8346) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(7123)(9456)+(9123)(7456) & (7134)(9256)+(9134)(7256) & (7145)(9236)+(9145)(7236) & (7125)(9346)+(9125)(7346) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(7123)(8456)+(8123)(7456) & (7134)(8256)+(8134)(7256) & (7145)(8236)+(8145)(7236) & (7125)(8346)+(8125)(7346) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right|
$$

$$= (1234)^3(1235)^2.(1236)^2(1456)^2.(2456)^2(3456)^2 \begin{vmatrix} (0123)(0456) & (0134)(0256) & (0145)(0236) & (0125)(0346) \\ (8123)(9456)+(9123)(8456) & (8134)(9256)+(9134)(8256) & (8145)(9236)+(9145)(8236) & (8125)(9346)+(9125)(8346) \\ (7123)(9456)+(9123)(7456) & (7134)(9256)+(9134)(7256) & (7145)(9236)+(9145)(7236) & (7125)(9346)+(9125)(7346) \\ (7123)(8456)+(8123)(7456) & (7134)(8256)+(8134)(7256) & (7145)(8236)+(8145)(7236) & (7125)(8346)+(8125)(7346) \end{vmatrix}$$

vagy még a (z) alatti determináns értékét tekintetbe véve, találjuk:

$$\tfrac{1}{8}\, F^{123456}_{789}\,[(1245)(1346)(2356) - (1256)(1345)(2346)] =$$

$$= \begin{vmatrix} (0123)(0456) & (0134)(0256) & (0145)(0236) & (0125)(0346) \\ (8123)(9456)+(9123)(8456) & (8134)(9256)+(9134)(8256) & (8145)(9236)+(9145)(8236) & (8125)(9346)+(9125)(8346) \\ (7123)(9456)+(9123)(7456) & (7134)(9256)+(9134)(7256) & (7145)(9236)+(9145)(7236) & (7125)(9346)+(9125)(7346) \\ (7123)(8456)+(8123)(7456) & (7134)(8256)+(8134)(7256) & (7145)(8236)+(8145)(7236) & (7125)(8346)+(8125)(7346) \end{vmatrix}$$

végre pedig a kérdéses másodfokú felületnek az egyenletét a következő alakban:

$$\begin{vmatrix} (0123)(0456) & (0134)(0256) & (0145)(0236) & (0125)(0346) \\ (8123)(9456)+(9123)(8456) & (8134)(9256)+(9134)(8256) & (8145)(9236)+(9145)(8236) & (8125)(9346)+(9125)(8346) \\ (7123)(9456)+(9123)(7456) & (7134)(9256)+(9134)(7256) & (7145)(9236)+(9145)(7236) & (7125)(9346)+(9125)(7346) \\ (7123)(8456)+(8123)(7456) & (7134)(8256)+(8134)(7256) & (7145)(8236)+(8145)(7236) & (7125)(8346)+(8125)(7346) \end{vmatrix} = o \,.\,.\, (5)$$

8. §. *A másodfokú felület meghatározása a conjugált tetraéderből és a conjugált háromszögből.*

20. Legyenek az 1234 tetraéder csúcsainak coordinátái $x_1, y_1, z_1, p_1; \ldots\ldots x_4, y_4, z_4, p_4,$ 567 háromszög csúcsainak coordinátái pedig $x_5, y_5, z_5, p_5; \ldots\ldots x_7, y_7, z_7, p_7,$ akkor a (k) alatti másodfokú felület az 1234 tetraéderhez és 567 háromszöghöz a következő feltételek mellett conjugált:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1x_2+a_{22}y_1y_2+a_{33}z_1z_2+a_{44}p_1p_2+a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+a_{13}(x_1z_2+x_2z_1)+a_{14}(x_1p_2+x_2p_1)+a_{23}(y_1z_2+y_2z_1)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+a_{24}(x_1p_2+x_2p_1)+a_{34}(z_1p_2+z_2p_1)=o\\
a_{11}x_1x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{12}(x_1y_3+x_3y_1)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=o\\
a_{11}x_1x_4+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{12}(x_1y_4+x_4y_1)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=o\\
a_{11}x_2x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{12}(x_2y_3+x_3y_2)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=o\\
a_{11}x_2x_4+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{12}(x_2y_4+x_4y_2)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=o\\
a_{11}x_3x_4+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{12}(x_3y_4+x_4y_3)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=o
\end{array}\right\}\ (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_6x_7+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{12}(x_6y_7+x_7y_6)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=o\\
a_{11}x_5x_7+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{12}(x_5y_7+x_7y_5)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=o\\
a_{11}x_5x_6+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{12}(x_5y_6+x_6y_5)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=o
\end{array}\right\}\ (2)$$

és ezért a kérdésben forgó másodfokú felületnek az egyenletét, az a mennyiségek kiküszöbölése által az (1), (k) és (2) alatti egyenletekből nyerjük. A kiküszöbölés eredője a következő jelölés használata mellett:

$$\begin{vmatrix}
x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & p_1p_2 & x_1y_2+x_2y_1 & x_1z_2+x_2z_1 & x_1p_2+x_2p_1 & y_1z_2+y_2z_1 & y_1p_2+y_2p_1 & z_1p_2+z_2p_1\\
x_1x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1y_3+x_3y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
x_1x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1y_4+x_4y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
x_2x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & x_2y_3+x_3y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
x_2x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & x_2y_4+x_4y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
x_3x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & x_3y_4+x_4y_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
x^2 & y^2 & z^2 & p^2 & 2xy & 2xz & 2xp & 2yz & 2yp & 2zp\\
x_6x_7 & y_6y_7 & z_6z_7 & p_6p_7 & x_6y_7+x_7y_6 & x_6z_7+x_7z_6 & x_6p_7+x_7p_6 & y_6z_7+y_7z_6 & y_6p_7+y_7p_6 & z_6p_7+z_7p_6\\
x_5x_7 & \cdot & \cdot & \cdot & x_5y_7+x_7y_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
x_5x_6 & \cdot & \cdot & \cdot & x_5y_6+x_6y_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix}=$$

$$=F_{1234,567}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (x)$$

ez lesz

$$F_{1234,567}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

21. Az 1234 tetraéderhez és az 567 háromszöghöz egyidejűleg conjugált másodfokú felületnek (3) alatti egyenletét még átalakíthatjuk, ha az (x) alatti determinánst a (v) alattival sokszorozzuk. A sokszorozás eredménye a következő :

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1234)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1234)^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)^2 \\
(0234)^2 & (0341)^2 & (0412)^2 & (0123)^2 & . & . & . & . & . & . \\
(6234)(7234) & (6341)(7341) & (6412)(7412) & (6123)(7123) & . & . & . & . & . & . \\
(5234)(7234) & (5341)(7341) & (5412)(7412) & (5123)(7123) & . & . & . & . & . & . \\
(5234)(6234) & (5341)(6341) & (5412)(6412) & (5123)(6123) & . & . & . & . & . & .
\end{vmatrix} =$$

$$= (1234)^{12} \begin{vmatrix}
(0234)^2 & (0341)^2 & (0412)^2 & (0123)^2 \\
(6234)(7234) & (6341)(7341) & (6412)(7412) & (6123)(7123) \\
(5234)(7234) & (5341)(7341) & (5412)(7412) & (5123)(7123) \\
(5234)(6234) & (5341)(6341) & (5412)(6412) & (5123)(6123)
\end{vmatrix}$$

ha tehát még tekintetbe vesszük, hogy a (v) alatti determináns értéke : $(1234)^{15}$, akkor a kérdéses másodfokú felület egyenletét még így is írhatjuk:

$$F_{1234,567}(1234)^3 = \begin{vmatrix} (0234)^2 & (0341)^2 & (0412)^2 & (0123)^2 \\ (6234)(7234) & (6341)(7341) & (6412)(7412) & (6123)(7123) \\ (5234)(7234) & (5341)(7341) & (5412)(7412) & (5123)(7123) \\ (5234)(6234) & (5341)(6341) & (5412)(6412) & (5123)(6123) \end{vmatrix} = o \ldots (4)$$

9. §. *A másodfokú felület meghatározása egy pontból, egy conjugált pentaéderből és egy conjugált háromszögből.*

22. Legyenek x_9, y_9, z_9, p_9 az adott pont coordinátái, a 678 háromszög csúcsainak coordinátái pedig $x_6, \ldots; x_7, \ldots; x_8, \ldots;$ végre az 12345 pentaéder (térbeli ötszög) csúcsainak coordinátái : $x_1, y_1, z_1, p_1; \ldots$ x_5, y_5, z_5, p_5, akkor a (k) alatti másodfokú felület a 9 ponton a következő feltétel mellett megy át :

$$a_{11}x_9^2 + a_{22}y_9^2 + a_{33}z_9^2 + a_{44}p_9^2 + 2a_{12}x_9y_9 + 2a_{13}x_9z_9 + 2a_{14}x_9p_9 + 2a_{23}y_9z_9 + 2a_{24}y_9p_9 + 2a_{34}z_9p_9 = o \ldots\ldots\ldots (1)$$

ugyane felület pedig a 678 háromszöghöz és az 12345 pentaéderhez a következő feltételek mellett conjugált:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_7x_8 + a_{22}y_7y_8 + a_{33}z_7z_8 + a_{44}p_7p_8 + a_{12}(x_7y_8 + x_8y_7) + a_{13}(x_7z_8 + x_8z_7) + a_{14}(x_7p_8 + x_8p_7) + a_{23}(y_7z_8 + y_8z_7) \\ \qquad + a_{24}(y_7p_8 + y_8p_7) + a_{34}(z_7p_8 + z_8p_7) = o \\ a_{11}x_6x_8 + \ldots\ldots\ldots + a_{12}(x_6y_8 + x_8y_6) + \ldots\ldots\ldots = o \\ a_{11}x_6x_7 + \ldots\ldots\ldots + a_{12}(x_6y_7 + x_7y_6) + \ldots\ldots\ldots = o \end{array}\right\} \ldots (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1x_3 + a_{22}y_1y_3 + a_{33}z_1z_3 + a_{44}p_1p_3 + a_{12}(x_1y_3 + x_3y_1) + a_{13}(x_1z_3 + x_3z_1) + a_{14}(x_1p_3 + x_3p_1) + a_{23}(y_1z_3 + y_3z_1) \\ \qquad + a_{24}(y_1p_3 + y_3p_1) + a_{34}(z_1p_3 + z_3p_1) = o \\ a_{11}x_2x_4 + \ldots\ldots\ldots + a_{12}(x_2y_4 + x_4y_2) + \ldots\ldots\ldots = o \\ a_{11}x_3x_5 + \ldots\ldots\ldots + a_{12}(x_3y_5 + x_5y_3) + \ldots\ldots\ldots = o \\ a_{11}x_4x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{12}(x_4y_1 + x_1y_4) + \ldots\ldots\ldots = o \\ a_{11}x_2x_5 + \ldots\ldots\ldots + a_{12}(x_2y_5 + x_5y_2) + \ldots\ldots\ldots = o \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Ha tehát a (k), (1), (2) és (3) alatti egyenletekből az a-kat elimináljuk, a kiküszöbölési eredő a következő jelölés használata mellett:

$$\begin{vmatrix}
x^2 & y^2 & z^2 & p^2 & 2xy & 2xz & 2xp & 2yz & 2yp & 2zp \\
x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & p_9^2 & 2x_9y_9 & 2x_9z_9 & 2x_9p_9 & 2y_9z_9 & 2y_9p_9 & 2z_9p_9 \\
x_7x_8 & y_7y_8 & z_7z_8 & p_7p_8 & x_7y_8+x_8y_7 & x_7z_8+x_8z_7 & x_7p_8+x_8p_7 & y_7z_8+y_8z_7 & y_7p_8+y_8p_7 & z_7p_8+z_8p_7 \\
x_6x_8 & . & . & . & x_6y_8+x_8y_6 & . & . & . & . & . \\
x_6x_7 & . & . & . & x_6y_7+x_7y_6 & . & . & . & . & . \\
x_1x_3 & . & . & . & x_1y_3+x_3y_1 & . & . & . & . & . \\
x_2x_4 & . & . & . & x_2y_4+x_4y_2 & . & . & . & . & . \\
x_3x_5 & . & . & . & x_3y_5+x_5y_3 & . & . & . & . & . \\
x_4x_1 & . & . & . & x_4y_1+x_1y_4 & . & : & . & . & . \\
x_5x_2 & . & . & . & x_5y_2+x_2y_5 & . & . & . & . & .
\end{vmatrix} =$$

$$= F^{9}_{12345;678} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

ez lesz:

$$F^{9}_{12345;678} = o, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

mely a kérdésben forgó másodfokú felület egyenletét fejezi ki.

23. A (4) alatti felületnek az egyenletét más alakban nyerjük, ha a benne előforduló determinánst átalakítjuk, mi olyképen történik, hogy a (β) alatti determinánst az (x) alattival sokszorozzuk. A sokszorozás eredménye a következő:

$$\begin{vmatrix}
(0512)^2 & (0123)^2 & (0234)^2 & (0345)^2 & (0451)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(9512)^2 & (9123)^2 & (9234)^2 & (9345)^2 & (9451)^2 & . & . & . & . & . \\
(7512)(8512) & (7123)(8123) & 7234)(8234) & (7345)(8345) & (7451)(8451) & . & . & . & . & . \\
(6512)(8512) & (6123)(8123) & (6234)(8234) & (6345)(8345) & (6451)(8451) & . & . & . & . & . \\
(6512)(7512) & (6123((7123) & (6234)(7234) & (6345)(7345) & (6451)(7451) & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1245)(2345) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1235)(1345) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)(1245) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2345)(1235) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1234)(1345)
\end{vmatrix} =$$

$$= (2345)^2\,(1345)^2\,(1245)^2\,(1235)^2\,(1234)^2.$$

$$\begin{vmatrix}
(0512)^2 & (0123)^2 & (0234)^2 & (0345)^2 & (0451)^2 \\
(9512)^2 & (9123)^2 & (9234)^2 & (9345)^2 & (9451)^2 \\
(7512)(8512) & (7123)(8123) & (7234)(8234) & (7345)(8345) & (7451)(8451) \\
(6512)(8512) & (6123)(8123) & (6234)(8234) & (6345)(8345) & (6451)(8451) \\
(6512)(7512) & (6123)(7123) & (6234)(7234) & (6345)(7345) & (6451)(7451)
\end{vmatrix}$$

és így még az (x) alatti determináns értékét tekintetbe véve, találjuk:

$$F^{9}_{12345;678}\,(2345)(1345)(1245)(1235)(1234) =$$

$$= \begin{vmatrix}
(0512)^2 & (0123)^2 & (0234)^2 & (0345)^2 & (0451)^2 \\
(9512)^2 & (9123)^2 & (9234)^2 & (9345)^2 & (9451)^2 \\
(7512)(8512) & (7123)(8123) & (7234)(8234) & (7345)(8345) & (7451)(8451) \\
(6512)(8512) & (6123)(8123) & (6234)(8234) & (6345)(8345) & (6451)(8451) \\
(6512)(7512) & (6123)(7123) & (6234)(7234) & (6345)(7345) & (6451)(7451)
\end{vmatrix} = o \quad \ldots (5)$$

mely a 9 ponton átmenő és az 12345 pentaéderhez, valamint a 678 háromszöghöz conjugált másodfokú felület egyenlete.

10. §. A kúpszelet meghatározása a conjugált ötszögből.

24. Legyenek az 12345 sík ötszög csúcsainak coordinátái $x_1, y_1, z_1; \ldots\ldots x_5, y_5, z_5$, akkor a (g) alatti kúpszelet a nevezett ötszöghöz a következő feltételek mellett conjugált:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1x_3+a_{22}y_1y_3+a_{33}z_1z_3+a_{12}(x_1y_3+x_3y_1)+a_{13}(x_1z_3\\
&\qquad +x_3z_1)+a_{23}(y_1z_3+y_3z_1)=o\\
&a_{11}x_2x_4+a_{22}y_2y_4+a_{33}z_2z_4+a_{12}(x_2y_4+x_4y_2)+a_{13}(x_2z_4\\
&\qquad +x_4z_2)+a_{23}(y_2z_4+y_4z_2)=o\\
&a_{11}x_3x_5+a_{22}y_3y_5+a_{33}z_3z_5+a_{12}(x_3y_5+x_5y_3)+a_{13}(x_3z_5\\
&\qquad +x_5z_3)+a_{23}(y_3z_5+y_5z_3)=o\\
&a_{11}x_4x_1+a_{22}y_4y_1+a_{33}z_4z_1+a_{12}(x_4y_1+x_1y_4)+a_{13}(x_4z_1\\
&\qquad +x_1z_4)+a_{23}(y_4z_1+y_1z_4)=o\\
&a_{11}x_5x_2+a_{22}y_5y_2+a_{33}z_5z_2+a_{12}(x_5y_2+x_2y_5)+a_{13}(x_5z_2\\
&\qquad +x_2z_5)+a_{23}(y_5z_2+y_2z_5)=o
\end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

és ezért az 12345 conjugált ötszögből meghatározott kúpszelet egyenletét nyerjük, ha a (g) és (1) alatti egyenletekből az a mennyiségeket kiküszöböljük. A kiküszöbölési eredő a következő jelölés használata mellett:

$$\begin{vmatrix}
x^2 & x^2 & z^2 & 2xy & 2xz & 2yz\\
x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & x_1y_3+x_3y_1 & x_1z_3+x_3z_1 & y_1z_3+y_3z_1\\
x_2x_4 & y_2y_4 & z_2z_4 & x_2y_4+x_4y_2 & x_2z_4+x_4z_2 & y_2z_4+y_4z_2\\
x_3x_5 & y_3y_5 & z_3z_5 & x_3y_5+x_5y_3 & x_3z_5+x_5z_3 & y_3z_5+y_5z_3\\
x_4x_1 & y_4y_1 & z_4z_1 & x_4y_1+x_1y_4 & x_4z_1+x_1z_4 & y_4z_1+y_1z_4\\
x_2x_5 & y_2y_5 & z_2z_5 & x_2y_5+x_5y_2 & x_2z_5+x_5z_2 & y_2z_5+y_5z_2
\end{vmatrix} = K_{12345}\ (\gamma)$$

ez lesz $K_{12345}=o \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

mely a kérdéses kúpszeletnek az egyenlete.

25. A (2) alatti kúpszelet egyenletének még más alakot is adhatunk, melyet nem csak sajátságosnak, hanem meglepőnek is mondhatunk. A nevezett czél elérésére a (p) alatti determináns átalakítása szükségeltetik.

Ha egyelőre a $p, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ mennyiségek alatt egészen tetszőleges mennyiségeket értünk, akkor a (γ) alatti determinánst a következő tizedfokú determináns alakjában írhatjuk:

$$
-\begin{vmatrix}
x^2 & y^2 & z^2 & p^2 & 2xy & 2xz & 2xp & 2yz & 2yp & 2zp \\
x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & p_1p_3 & x_1y_3+x_3y_1 & x_1z_3+x_3z_1 & x_1p_3+x_3p_1 & y_1z_3+y_3z_1 & y_1p_3+y_3p_1 & z_1p_3+z_3p_1 \\
x_2x_4 & y_2y_4 & z_2z_4 & p_2p_4 & x_2y_4+x_4y_2 & x_2z_4+x_4z_2 & x_2p_4+x_4p_2 & y_2z_4+y_4z_2 & y_2p_4+y_4p_2 & z_2p_4+z_4p_2 \\
x_3x_5 & y_3y_5 & z_3z_5 & p_3p_5 & x_3y_5+x_5y_3 & x_3z_5+x_5z_3 & x_3p_5+x_5p_3 & y_3z_5+y_5z_3 & y_3p_5+y_5p_3 & z_3p_5+z_5p_3 \\
x_4x_1 & y_4y_1 & z_4z_1 & p_4p_1 & x_4y_1+x_1y_4 & x_4z_1+x_1z_4 & x_4p_1+x_1p_4 & y_4z_1+y_1z_4 & y_4p_1+y_1p_4 & z_4p_1+z_1p_4 \\
x_5x_2 & y_5y_2 & z_5z_2 & p_5p_2 & x_5y_2+x_2y_5 & x_5z_2+x_2z_5 & x_5p_2+x_2p_5 & y_5z_2+y_2z_5 & y_5p_2+y_2p_5 & z_5p_2+z_2p_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

és ezt az (x) alatti determinánssal sokszorozva, a sokszorozás eredménye a következő lesz:

$$
-\begin{vmatrix}
(0512)^2 & (0123)^2 & (0234)^2 & (0345)^2 & (0451)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1245)(2345) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1235)(1345) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1234)(1245) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2345)(1235) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1234)(1345) \\
\xi_{512}\pi_{512} & \xi_{123}\pi_{123} & \xi_{234}\pi_{234} & \xi_{345}\pi_{345} & \xi_{451}\pi_{451} & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\eta_{512}\pi_{512} & \eta_{123}\pi_{123} & \eta_{234}\pi_{234} & \eta_{345}\pi_{345} & \eta_{451}\pi_{451} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\zeta_{512}\pi_{512} & \zeta_{123}\pi_{123} & \zeta_{234}\pi_{234} & \zeta_{345}\pi_{345} & \zeta_{451}\pi_{451} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\pi_{512}^2 & \pi_{123}^2 & \pi_{234}^2 & \pi_{345}^2 & \pi_{451}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix} =
$$

$$= -(2345)^2(1345)^2.(1245)^2(1235)^2.(1234)^2 \begin{vmatrix} (0512)^2 & (0123)^2 & (0234)^2 & (0345)^2 & (0451)^2 \\ \xi_{512}\pi_{512} & \xi_{123}\pi_{123} & \xi_{234}\pi_{234} & \xi_{345}\pi_{345} & \xi_{451}\pi_{451} \\ \eta_{512}\pi_{512} & \eta_{123}\pi_{123} & \eta_{234}\pi_{234} & \eta_{345}\pi_{345} & \eta_{451}\pi_{451} \\ \zeta_{512}\pi_{512} & \zeta_{123}\pi_{123} & \zeta_{234}\pi_{234} & \zeta_{345}\pi_{345} & \zeta_{451}\pi_{451} \\ \pi_{512}^2 & \pi_{123}^2 & \pi_{234}^2 & \pi_{345}^2 & \pi_{451}^2 \end{vmatrix}$$

vagy ha még az (x) alatti determináns értékére figyelünk, akkor találjuk, hogy

$$-K_{12345}(2345)(1345)(1245)(1235)(1234)$$
$$= \begin{vmatrix} (0512)^2 & (0123)^2 & (0234)^2 & (0345)^2 & (0451)^2 \\ \xi_{512}\pi_{512} & \xi_{123}\pi_{123} & \xi_{234}\pi_{234} & \xi_{345}\pi_{345} & \xi_{451}\pi_{451} \\ \eta_{512}\pi_{512} & \eta_{123}\pi_{123} & \eta_{234}\pi_{234} & \eta_{345}\pi_{345} & \eta_{451}\pi_{451} \\ \zeta_{512}\pi_{512} & \zeta_{123}\pi_{123} & \zeta_{234}\pi_{234} & \zeta_{345}\pi_{345} & \zeta_{451}\pi_{451} \\ \pi_{512}^2 & \pi_{123}^2 & \pi_{234}^2 & \pi_{345}^2 & \pi_{512}^2 \end{vmatrix}, \ldots (3)$$

a miért a (2) alatti kúpszeletnek az egyenletét még így is írhatjuk:

$$\begin{vmatrix} \frac{(0512)^2}{\pi_{512}} & \frac{(0123)^2}{\pi_{123}} & \frac{(0234)^2}{\pi_{234}} & \frac{(0345)^2}{\pi_{345}} & \frac{(0451)^2}{\pi_{451}} \\ \xi_{512} & \xi_{123} & \xi_{234} & \xi_{345} & \xi_{451} \\ \eta_{512} & \eta_{123} & \eta_{234} & \eta_{345} & \eta_{451} \\ \zeta_{512} & \zeta_{123} & \zeta_{234} & \zeta_{345} & \zeta_{451} \\ \pi_{512} & \pi_{123} & \pi_{234} & \pi_{345} & \pi_{451} \end{vmatrix} = o \,.\, . (4)$$

Ezen egyenlet mértani magyarázata miatt szem előtt kell tartanunk, hogy $x\ y\ z$ alatt a sík valamely pontjának homogén viszonycoordinátáit értjük, úgy, hogy azon pont orthogonál coordinátái $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$; a tetszőleges p mennyiségnek pedig oly mértani jelentést tulajdoníthatunk, hogy $\frac{p}{z}$ az $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ ponton átmenő és annak síkjára merőlegesen álló egyenesben bármely pontnak coordinátáját jelenti. Igy tehát a sík 12345 pontjainak megfelelőleg végtelen sokféleképen vehetünk fel öt pontot a térben, melyet ugyanazen számokkal jelölve, szintén 1 2 3 4 5 lesz és ezeknek orthogonál vetületei az $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ síkban a sík adott öt pontja.

Ha tehát a sík adott ötszögének megfelelőleg egy térbeli ötszögöt veszünk fel, mely csak azon feltételnek van alávetve, hogy a sík-ötszög a térbeli ötszögnek vetülete, akkor a

$(0512)=o\ (0123)=o,\ (0234)=o,\ (0345)=o\ (0451)=0\ldots(5)$

síkok egyenletei az 1 2 3 4 5 térbeli ötszögben a szögsíkok egyenletei és az 12345 síkszöghöz conjugált kúpszelet egyenlete olyként van componálva az (5) alatti sík-egyenletek első tagjaiból, amint azt a (4) alatti egyenlet mutatja.

11. §. Az előbbi feladatoknak megfelelő reciprokális feladatok.

27. Az előbb megoldott feladatok közül azok, melyek a kúpszelet meghatározására vonatkoznak, az 1, 2, 3, 4 és 10. §§-ban tárgyaltattak, a nékiök megfelelő reciprokális feladatok a következők:

a) A kúpszelet meghatározása a conjugált három-oldalból és két érintő egyenesből.

b) A kúpszelet meghatározása a conjugált négy oldalból és három érintő egyenesből.

c) A kúpszelet meghatározása egy conjugált három oldalból és egy conjugált négy-oldalból.

d) A kúpszelet meghatározása két conjugált négy oldalból és egy érintő egyenesből.

e) A kúpszelet meghatározása a conjugált ötoldalból (Fünfseit). Ezeknek megoldásait

a .... $\overbrace{(3),(5)}^{1.}$ $\overbrace{(3),(5)}^{2.}$ $\overbrace{(3),(5),(7)}^{3.}$ $\overbrace{(4),(6),(7)}^{\text{és } 4.\ \S\S.}$ alatti egyenletek adják, ha azokban x_k y_k z_k alatt a (k) egyenesnek vonalcoordinátáit értjük és ehhez hasonlóan a (g) alatti egyenletben x, y, z alatt a kúpszelet tetszőleges érintőjének coordinátáit. Ezen felvételek mellett az a) alatti feladat megoldása az 1. §-ban tárgyalt feladat megfejtéséből a következőképen leolvasandó.

Az (1) alatti egyenletek fejezik ki, hogy a 4 és 5 egyenesek a (g) alatti másodosztályú vonalat (ha t. i. x, y, z alatt vonalcoordinátákat értünk) érintik, a (2) alatti egyenletek pedig, hogy 123 három-oldalhoz conjugált a (g) alatti másodosztályú vonal. A (g) (1) és (2) alatti egyenletekből az a mennyiségeket kiküszöbölve, nyerjük a (3) alatti egyenletben azon másodosztályú vonal egyenletét, mely az 123 három-oldalhoz conjugált és a 4 és 5 egyeneseket érinti. A (3) alatti egyenletnek további átalakítása vezet azután az (5) alatti egyenletre, melyben a zérussal összehasonlított x y és z-ben lineáris polynomok a három-oldal csúcsainak egyenleteit fejezik ki.

A 10. §. (2) és (4) alatti egyenletei pedig az e) alatti feladatra vonatkoznak, ha a (2) alatti egyenletben x, y, z alatt vonalcoordinátákat, a (4) alatti egyenletben x, y, z, p alatt síkcoordinátákat értünk.

28. Az 5. 6. 7. 8. 9. §§-ban a másodfokú felületekre vonatkozó feladatoknak reciprokális feladatai a következők:

a) A másodfokú felület meghatározása a conjugált tetraéderből és három érintősíkból.

b) A másodfokú felület meghatározása a conjugált pentaéderből és négy érintősíkból.

c) A másodfokú felület meghatározása a conjugált háromszögből és hat érintősíkból.

d) A másodfokú felület meghatározása a conjugált háromszögből, és tetraéderből.

e) A másodfokú felület meghatározása a conjugált háromszögből pentaéderből és egy érintősíkból.

Az előbb említett §§-ban a következő egyenletek:

(3),(5); (3),(4); (3),(5); (3),(4); (3),(5)

fejtik meg ezen feladatokat, ha a (k) alatti egyenletben x, y, z, p síkcoordinátákat, valamint x_i, y_i, z_i, p_i egy adott i-sík coordinátáit jelentik.

Budapesten, 1880. július hónapban.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgésforrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában . . . 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . . . 20 kr.

Budapest, 1880. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.