ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
VII. KÖTET. XV. SZÁM. 1880.

A FÉNY TÖRÉSE ÉS VISSZAVERÉSE

HOMOGÉN ISOTROP ÁTLÁTSZÓ TESTEK HATÁRÁN

NEUMANN MÓDSZERÉNEK ÁLTALÁNOSITÁSÁVAL ÉS BŐVITÉSÉVEL.

SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉS

RÉTHY MÓR
LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. márczius 15.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1880.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

A

FÉNY TÖRÉSE ÉS VISSZAVERÉSE

HOMOGÉN ISOTROP ÁTLÁTSZÓ TESTEK HATÁRÁN

NEUMANN MÓDSZERÉNEK

ÁLTALÁNOSITÁSÁVAL ÉS BŐVITÉSÉVEL.

SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉS

RÉTHY MÓR

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1880. márczius 15.)

BUDAPEST, 1880.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

Az Akadémia épületében.

Budapest, 1880. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

A fény törése és visszaverése homogén isotrop átlátszó testek határán, Neumann módszerének általánosításával és bővitésével.

A Magyar Tudományos Akadémia kegyes volt engem 1878. évi nagygyülésén levelező tagjai sorába megválasztani. Jól tudom nem szerzett érdemekért, melyek vajmi csekélyek, hanem megválasztott irántam való jóindulatból, hogy kitartásra ösztönözzön az örök igazság kiderítésére irányzott törekvésemben. Fogadja ezért hálás köszönetemet. És fogadja kegyes elnézéssel jelen székfoglaló értekezésemet.

I. Tényül tekinthető, hogy a testek tömecsei, valamint az universum tömecsei — a csillagok — közötti tér is be van töltve egy anyaggal, mely rezgése által tova terjeszti a fényt. Az is el van fogadva, hogy ez anyag függélyesen rezeg a fény terjedésének irányára. Ellenben vita tárgyát képezi, hogy a rezgés benne történik-e a sarkitás lapjában avagy rá függélyesen. Neumann és Mac-Cullagh óta, kik Fresnel ellenében megmutatták, hogy a fény törése és visszaverése nyugvó közegek határán épúgy kimagyarázható az első föltevés alapján, mint a másodikén, a tudósok két táborba oszolnak. Fresnel követői meg vannak győződve a függőlegesség igazságáról; az ellen táborban állók vitatják, hogy egyik is másik is puszta föltevés, hogy egyiknek igazsága sincs ad evidentiam bizonyítva.

Meg kell engedni, hogy Fresnel követői nem ok nélkül szólnak határozott hangon: nyomós érvekkel lépnek föl.

Érveik között első helyen áll a hivatkozás a fény terjedésének tüneményére mozgó közegekben. E tünemény a legapróbb részletig egyez Fresnel egyszerű magyarázatával, melynek alapja abban áll, hogy az u. n. éther sürüsége a különböző testekben arányos a törésmutatók négyzetével. Ámde ez a fölvétel egyez Fresnel reflexio-elméletével, melynek másik föltevése a rezgés és a sarkitás lapjainak függőlegessége; és nem egyez Neumann reflexio elméletével, melynek alapjai diametrális módon ellenkezők. Ily körülmények között Neumann követői azon hypothézishoz kénytelenek folyamodni, hogy a mozgó anyagnak más a befolyása az éther elasticitására mint a nyugvónak sat.

A nevezett érvvel mások is vannak kapcsolatban. Ezek azonban vele állnak és buknak; azért hallgatással mellőzhetem őket.

A második érv a fénynek visszaverés által való ellipsises sarkitásából meríttetik. Tény, hogy e tüneménynek Cauchy általi magyarázatába könnyebb belenyugodni, mint az ellentáborban álló Zechébe. Az elsőben csak azt lehet kifogásolni, hogy kénytelen fölvenni »a határon nagy sebességgel csúszó« »longitudinális« hullámokat, — tehát egy új hypothézist és hogy mind a mellett is marad hátra a megfejtésben egy ismeretlen függvény, melynek meghatározása a kisérletre bizatik, vagy pedig új hypothézist igényel. De az eredmény teljesen öszhangzásba hozható a kisérleti tényekkel. Ellenben *Zech* maga kénytelen volt bevallani, hogy elmélete nem igen fér meg az olyan testeken tapasztalt tüneményekkel, a melyek ellipsises coefficiense negativ; és Quincke kisérletei után hozzátehetjük, hogy Zech elmélete szerint *egy ugyanazon* határrétegnek *különböző* vastagságokat kellene tulajdonítani a szerint, a mint a fénysugár *A* testből *B* testbe avagy pedig fordított irányban halad, — a mi nem járja.

Harmadik érvűl a diffractiót kisérő tüneményeket hozzák fel. Ez érvek azonban Quincke által megdöntettek, úgy vélem, teljesen alaposan. E tüneményekkel egyébiránt, — névszerint Fröhlich észleleteinek kimagyarázásával, más alkalommal szándékozom foglalkozni.

Jelen dolgozat czélja megmutatni, hogy a Fresnel követői által fölhozott érvek elseje megbuktat*hat*ja Neumann reflexio-elméletét, de nem is érinti a szóban lévő kérdést: a rezgés és sarkítás lapjai relativ helyzetének kérdését. Meg fogom egyúttal mutatni, hogy a fény ellipsises sarkitása még Cauchyénál is egyszerűbb magyarázatot nyer azon hypothézis alapján, hogy a szóban lévő két lap egymással parallel.

Mindkét kérdés tisztázása végett a fénytörés és visszaverés elméletének alapjait kellend bonczkés alá vennünk; ki fog tünni, hogy az alap, kelleténél szükebbre van mérve, minden kényszerítő ok nélkül.

II. A Cauchytól kiegészitett Fresnel-féle elméletben épúgy, mint a Mac-Cullagh Neumann-félében közös alapúl szolgál azon föltevés, hogy az éther ép oly sebességgel rezeg a határ egyik oldalán, mint a tulsón. Gyakran hangoztatják, hogy ez a föltevés helyes volta evidens, evidentiával határos stb.

Kétlem, hogy evidens legyen!

Ha két golyó pl. egy mozgó nyugvóval összeütközik, akkor az utóbbi annál kisebb sebességgel fog megindulni, minél nagyobb a tömege. Mért ne áll*hat*na az éthernél is hasonló? Mért kellene a sűrűbb éthernek *szükségkép* oly sebességgel rezegni, mint a ritkábbnak, miért ne *lehetne* kisebbel is? Kétségkivűl a súlyos anyag is együtt rezeg az étherrel. És ennek se *lehetne* semmi befolyása a rezgés sebességére pl. akkor, midőn a fénysugár a világürből egy súlyos testbe hatol?

Van befolyása, mondják sokan, de ezt a befolyást el lehet hanyagolni. Erre azt vagyok bátor megjegyezni, hogy az elhanyagolás a priori nincs indokolva és hogy ilyen elhanyagolásnál szó se lehet evidentiáról.

De még ha elhanyagoltatik is a súlyos test részeinek együttrezgése, akkor is bátorkodom emlékeztetni Fresnel követőit *Corn*unak hypothézisére, mely szerint bizonyos esetben nem a sebesség, hanem a mozgásmennyiség volt egyenlő a határ két oldalán. Ha e hypothézissel ki lehetett volna magyarázni az ellipsises sarkitást is, vajjon folyamodott volna-e valaha Cauchy longitudinalis, a határon roppant sebességgecsúszó hullámokhoz?

Nekem nem evidens se a Fresnel se a Cornuféle hipothézis és nem ütközöm meg se az egyiken se a másikon. De határozottan valószínűbbnek tartom, hogy az éther rezgés-sebességei közötti arány függ az illető testek minőségétől, mint az ellenkező szükre mért föltevést, hogy tőle független.

Meglehet, hogy csalódom, de belátásom szerint termé szetesebb — egyszerűbb — módon magyarázható a fény terjedése módja mozgó közegekben, Fresnel azon föltevése alapján, hogy az éther sűrűsége különböző testekben különböző, mint az ellenkező Neumann-féle alapon. Más részről az a tapasztalati tény, hogy minden ismert test e széles világon összenyomható, valószinütlenné teszi azt a föltevést, hogy a világ *legfinomabb* anyaga — az éther — kivételt képezzen az általános szabály alól; kivételt oly nagy mértékben, hogy az ő ellenállásán megtörik az óriási molekuláris erők hatalma is. Nem állítom, hogy e két okkal el volna döntve *ad evidentiam*, hogy az összenyomhatatlanság hypothézise valótlan, de igen is állítom, hogy kevés valószinüség szól mellette, vagy ellene. Miért ragaszkodjunk hát hozzá? Miért ne kísértenők meg a reflexio elméletét függetlenné tenni mindennemű, az étherek sürűségbeli arányát megszorító hypothézistől? *Az elöadandó elmélet tényleg nyiltan hagyja a kérdést, hogy az éther sürüsége különbözö testekben egyenlö-e vagy különbözö; még a Jamin-féle kisérletek kimagyarázásánál is csak azt a megszorítást teszi, hogy a nevezett sürüség csak a törésmutatótul függ, mig az ellipsises sarkitás koefficiensétöl nem; s ezt se kényszerüségböl teszi, hanem csak nagyobb egyszerüség végett.*

Épúgy elhagyom azon, mint kifejtém, kényszerítő ok nélkül szűkre mért s a mellett valószinütlen hypothézist, hogy az eredő rezgés sebessége független az éther sürűségétől, független az együttrezgő testrészek minőségétől. E föltevést fölcserélem egy általánosabbal, mely azt magában foglalja mint speciális esetet. Szerintem ugyanis *a határ két oldalán az »eredö« rezgés-sebességek »iránya« egyenlö ugyan, de nagyságuk aránya, meglehet, nem annyi mint 1, hanem függ az érintkezö két test minöségétöl is.* Lehetne a föltevést magában véve még tovább is általánosítani; de jelen czélunkat tekintve, felesleges volna. Mellékesen megemlíthetem, hogy föltevésemet elfogadhatja az is, a ki az éthert »folytonos« anyagnak tekinti.

Fresnel elméletében az éther *elasticitása* ugyanaz minden testben, mig a *sürüségek* aránya nem ugyanaz; Neumannál épen megfordítva áll a dolog. Elméletem a priori nem köt ki semmi megszorítást se, mindkettő függhet az anyag minőségétől; a Jamin-féle kisérletek kimagyarázásánál is *csak* nagyobb egyszerüség végett fogadja el azt a divó s különben is elfogadható föltevést, hogy az éther elasticitása legfölebb a törésmutatótól függhet (de az ellipsises sarkitás koëfficiensétől független.)

Az eleven erő elve alapul szolgál itt is.

Neumann elméletében a ponderábilis anyagtól eredő nyomás nagysága más a határon, azon esetben, a midőn a rezgés a beesés lapjában, más a midőn rá függélyesen történik. Ugyanis első esetben függ a beesés szögétől is, második esetben zéró függetlenül a beesés szögétől. Említém, hogy Zech megkísérté az ellipsises sarkitást ezen az alapon kimagyarázni s hogy magyarázata nem kielégítő: nem is egyszerű. Nem látva semmi *kényszerítő* okot sem arra, hogy a nevezett hypothézist változatlanul elfogadjam, megkisértém mire jövök, ha a nyomás értékét teljesen határozatlanul hagyom. *A rezgés-sebességek elvéből rögtön kijött egy vonatkozás az u. n. reducált azimuth és a phászisküIönbség között, mely a Jamin-féle kisérletek adataival összehasonlítva, igaznak bizonyult be.* Azután kifejezém a nevezett nyomás legnagyobb p értékét a beeső, a visszavert és a tört hullámokbeli rezgés amplitudói és pházis-különbségei által, — mihez nem kellett semmiféle új hypothézis. A p értékét egyelőre ismertnek gondolva, e kifejezés némi reductió után, *egy második egyenletet* nyujtott a reducált azimuth és a pházisküIönbség meghatározására. A két egyenletből kiszámítva a nevezett két mennyiséget, feltünt, hogy a p bennök hasonló szerepet játszik, mint az u. n. »Extinctió« exponense a Cauchy féle elméletben, a mi arra ösztönzött, hogy számára a következő empirikus képletet kísértsem meg

$$p = \varepsilon^{\frac{m}{\sin \varphi}}$$

hol a φ a beesés szöge, továbbá ε az anyagtól függő állandó, az m pedig tőle független egész szám. A Jamin-féle észleletekkel való összehasonlitás után meggyőződtem, hogy $m=2$ legjobban megfelel; és láttam különben is, hogy ezt téve, közelítve a Cauchy-féle képletek jőnek ki. Ha továbbá $m=1$ tétetik, kisebb a megegyezés és ekkor kijőnek Green képletei stb.

Végezetül megkísértém a következő plausibilisnak látszó, lehető legegyszerűbb föltevést: *A ponderábilis anyagtól eredő* *nyomásnak a felszinen való értéke egységes törvény szerint függ a beesés szögétől és a három hullám amplitudóitól (bármilyen is a rezgés azimuthja és bármilyen is az anyag minősége); a kifejezés két különböző anyag avagy azimuthnál csak állandó koefficiensekben különbözhetik egymástól.*

Igy Cauchy képletei pontosabban jőnek ki:

Az elvek csak isotrop homogén átlátszó anyagokra fognak alkalmaztatni, itt is azon megszorítással, hogy a törő test nem halad. Az általánosításokat más alkalomra tartom fenn.

A beeső, a visszavert és a megtört hullámokbeli rezgés alakja, amplitudja, pházisa nem haladó testekben.

I. A két test határlapját, a tükröző lapot, választom x, y lapúl, normálisát z tengelyűl, a beesés lapját x, z lapul. A beeső hullám és a tükröző lap normálisai közötti szög legyen φ; a tört hullám megfelelő szöge φ_1; a hullám hoszsza λ illetőleg λ_1, a rezgés ideje T. A sebességek komponensei a beeső, a visszavert, illetőleg a megtört hullámban legyenek, u, v, w, — u_r, v_r, w_r, — u_1, v_1, w_1; a sebességek amplitudjai a beesés lapjában A, A_r, A_1, a beesés lapjára függélyesen B, B_r, B_1. A hullámok planhullámok.

Akkor, mint ismeretes,

$$\left.\begin{array}{l} u=A\cos\varphi \\ w=-A\sin\varphi \end{array}\right\} \sin 2\pi\left[\frac{x\sin\varphi+z\cos\varphi}{\lambda}+\frac{t}{T}\right]$$

$$v=B\sin 2\pi\left[\frac{x\sin\varphi+z\cos\varphi}{\lambda}+\frac{t}{T}\right]$$

$$1)\quad \left.\begin{array}{l} u_r=A_r\cos\varphi \\ w_r=A_r\sin\varphi \end{array}\right\} \sin\left\{2\pi\left[\frac{x\sin\varphi-z\cos\varphi}{\lambda}+\frac{t}{T}\right]+\delta'_r\right\}$$

$$v_r=B_r\sin\left\{2\pi\left[\frac{x\sin\varphi-z\cos\varphi}{\lambda}+\frac{t}{T}\right]+\delta_r\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1=A_1\cos\varphi_1 \\ w_1=-A_1\sin\varphi_1 \end{array}\right\} \sin\left\{2\pi\left[\frac{x\sin\varphi_1+z\cos\varphi_1}{\lambda_1}+\frac{t}{T}\right]+\delta'_1\right\}$$

$$v_1=B_1\sin\left\{2\pi\left[\frac{x\sin\varphi_1+z\cos\varphi_1}{\lambda_1}+\frac{t}{T}\right]+\delta_1\right\}$$

A kifejezésekben előforduló δ_r, δ_1, δ'_r, δ'_1 az illető hullámokbeli pháziskülönbségek; létrehozatnak az által, hogy a törés és visszaverés nemcsak a geometriai határon történik, hanem mélyebben is.

Legyen ν és ν_1 két állandó: a határ két oldalán való sebességek aránya. Akkor a határon

$$
2)\quad \begin{aligned}
\nu(u+u_r)&=\nu_1 u_1\\
\nu(v+v_r)&=\nu_1 v_1\\
\nu(w+w_r)&=\nu_1 w_1
\end{aligned}
$$

Végezetül az eleven erő elve megkívánja a következő relatiókat

$$
3)\quad \begin{aligned}
\mu(A^2-A_r^2)\sin 2\varphi&=\mu_1 A_1^2 \sin 2\varphi_1\\
\mu(B^2-B_r^2)\sin 2\varphi&=\mu_1 B_1^2 \sin 2\varphi_1
\end{aligned}
$$

a μ és μ_1 az éther sürüsége, az illető anyagban.

A 2) alatti egyenletekből következik mindenekelőtt Snellius törvénye és következnek ismert módon relatiók a sebesség amplitudók és pháziskülönbségek között. Ezek tárgyalására különválasztjuk a beesés lapjába eső komponens tárgyalását a másikétól.

II. *A rezgés a beesés lapjában történik.* Ez esetben csak úgy felelhetünk meg a 2 alatti egyenleteknek, ha δ'_r és δ'_1 anynyik, mint zéró avagy a 2π többszörösei és ha azonfölül a következő relatiók állnak fönn:

$$
4)\quad \begin{aligned}
\nu(A+A_r)\cos\varphi&=\nu_1 A_1 \cos\varphi_1\\
\nu(A-A_r)\sin\varphi&=\nu_1 A_1 \sin\varphi_1
\end{aligned}
$$

Ezekből következik, hogy

$$
4a)\quad \begin{aligned}
A_r&=\frac{\sin(\varphi-\varphi_1)}{\sin(\varphi+\varphi_1)}\,A\\
A_1&=\frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi+\varphi_1)}\,\frac{\nu}{\nu_1}\,A
\end{aligned}
$$

A 4) alatti két egyenlet szorzásából ered pedig:

$$\nu^2(A^2-A_r^2)\sin 2\varphi=\nu_1^2 A_1^2 \sin 2\varphi_1$$

mely egyenlet csak úgy egyezaz eleven erő elvével (a 3 egyenletek elsejével), ha

$$4b)\quad \nu^2 : \nu_1^2=\mu : \mu_1$$

azaz

$$4b_1)\quad \frac{\nu}{\nu_1}=\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}}$$

E szerint a sűrűségek aránya az eleven erő elve alapján meghatározza a ν és ν_1 mennyiségek arányát is. Az egyszerűség elve megkivánja, hogy a talált relatiót érvényesnek tekintsük, nemcsak a jelen esetben, a midőn a rezgések benne történnek a beesés lapjában, hanem az ellenkező esetben is. Meglátjuk, hogy csakis így jöhetünk a természettel megegyező eredményekre.

Az ellipsises sarkítás tárgyalásának előkészítése végett számitsuk ki azon nyomást, melyet a ponderabilis anyag a határlap egységére gyakorol, vagy miután csak egyik komponensére lesz szükségünk, szoritkozzunk ez egyre.

Jelöljük azon elasticitás koefficiensét, melylyel az éther birna, ha adott anyaga egymaga töltené be az illető test terét, K, illetőleg K_1-gyel. Akkor a határlap egysége gyakorolt nyomásának szóban levő komponense, — melyet szögletbeli nyomásnak fogok nevezni, arányos

$$K\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+K\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial w_r}{\partial x}\right) \text{ illetőleg } K_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)$$

mennyiségekkel. Betéve az 1) alatti értékeket s az eredményben téve $z=o$ értéket s tekintetbe véve Snellius törvényét, találtatik ezekből a szögletbeli nyomások számára

$$2\pi\frac{K}{\lambda}(A+A_r)\cos 2\varphi\cos\vartheta \text{ illetőleg } 2\pi\frac{K_1}{\lambda_1}A_1\cos 2\varphi_1\cos\vartheta,$$

hol rövidítésül tétetett

$$\vartheta=2\pi\left[\frac{x\sin\varphi}{\lambda}+\frac{t}{T}\right].$$

A két nyomás közötti különbség zéró volna, ha az éther egymaga töltené be a tért; tényleg a test ponderabilis tömege is gyakorol nyomást a határra; azért e nyomás tartja egyensúlyban a két éther nyomását. Ha tehát P_1-gyel jelölöm a ponderabilis anyag szóban levő nyomását, akkor

$$P_1=2\pi\left[\frac{K}{\lambda}(A+A_r)\cos 2\varphi-\frac{K_1}{\lambda_1}A_1\cos 2\varphi_1\right]\cos\vartheta.$$

Hypothézisem szerint ugyanez lesz a megfelelő szögletbeli nyomás alkotásának törvénye más azimuthnál is. Ha pl. a rezgés függélyesen történik a beesés lapjára, akkor az (y, z) szögletre eső nyomás

$$5)\ P=\alpha\left[\frac{K}{\lambda}(B+B_r)\cos 2\varphi-\beta\frac{K_1}{\lambda_1}B_1\cos 2\varphi_1\right]\cos(\vartheta+\delta)$$

hol α, β és δ az anyag természetétől függő állandók.

A nyomást lehetett volna máskép is általánosítani, jól tudom. Jelesül lehetett volna elébb mindent φ és φ_1-ben kifejezni és azután általánosítani. De az így talált törvény nem lett volna elementáris törvény; mert a ponderabilis anyag együtt rezgése, tehát befolyása is függ mindegyik hullámban az illető hullámbeli amplitudótól; ez amplitudók aránya pedig más azimuthnál más. Egyébiránt a tapasztalat dönt s nekem ad igazat.

III. *A rezgés iránya függélyes a beesés lapjára.* Vannak testek, melyeknél nem lehet ellipsises sarkítást észlelni a sarkítás szöge közelében se. Foglalkozzunk elébb ezekkel a testekkel. E testeknél tehát $\delta_r=\delta_1=o$ lévén a határegyenletek közül a 2b) megkívánja a következő relatiót:

$$6a)\quad \nu(B+B_r)=\nu_1 B_1.$$

Hozzá jő az eleven erő elve (3b), mely szerint

$$6b)\quad \mu(B^2-B_r^2)\sin 2\varphi=\mu_1 B_1^2\sin 2\varphi_1$$

A két egyenlet teljesen meghatározza B_r és B_1 sebesség amplitudók értékét. Ha ugyanis tekintetbe vétetik a 4b) alatti arány, akkor az imént felirt két egyenlet egymással osztva, ered

$$6c)\quad \nu(B-B_r)\sin 2\varphi=\nu_1 B_1\sin 2\varphi_1$$

Ez egyenlet, valamint a 6a) alatti egyenlet is, lineáris. A kettőből

$$7)\quad \begin{aligned} B_r &= \frac{\sin 2\varphi-\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi+\sin 2\varphi_1}B \\ B_1 &= \frac{2\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi+\sin 2\varphi_1}\frac{\nu}{\nu_1}B \end{aligned}$$

E képletek, valamint a 4a) alattiak is, csak a $\nu:\nu_1$ szorzóban különböznek Neumann képleteitől; e szorzó állandó; azért épugy megegyeznek a tapasztalattal, mint a nevezettek, úgy mint Fresnel képletei.

Kiszámítjuk az (y, z) szögletre eső nyomást az ismert $K\frac{\partial v}{\partial z}$ képlet alapján. Nyeretik a nyomás értékéül az egyik testben [közös szorzótól eltekintve]

$$2\pi\frac{K_1}{\lambda_1}\cos\varphi\,(B—B_r)\cos\vartheta$$

a másik testben

$$2\pi\frac{K_1}{\lambda_1}\cos\varphi_1\,B_1\cos\vartheta,$$

A ponderabilis anyag nyomása P e két étherét a határon egyensúlyban tartván, a kettő különbségével egyenlő. Igy hát

$$P=2\pi\left[\frac{K}{\lambda}(B—B_r)\cos\varphi-\frac{K_1}{\lambda_1}B_1\cos\varphi_1\right]\cos\vartheta.$$

Tekintetbe véve a 6c) alatti egyenletet, ez irható

$$P=2\pi\left[\frac{K}{\lambda}\frac{\nu_1}{\nu}\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}-\frac{K_1}{\lambda_1}\right]B_1\cos\varphi_1\cos\vartheta$$

Más részről az előző szakaszban 5) alatt álló értéke ugyanezen nyomásnak a 6a) felhasználásával irható:

$$8)\quad P=\alpha\left[\frac{K}{\lambda}\frac{\nu_1}{\nu}\cos 2\varphi-\beta\frac{K_1}{\lambda_1}\cos 2\varphi_1\right]B_1\cos(\vartheta+\delta)$$

hol α és β az illető két test természetétől függő állandók.

Látni való, hogy a két alak csakis úgy egyezhet egymással, ha mindkettő külön-külön zéró. Igy tehát egy részről

$$9a)\quad \frac{K}{\lambda}\frac{\nu_1}{\nu}\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}-\frac{K_1}{\lambda_1}=o$$

azaz

$$9)\quad K:K_1=\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}\right)^2\frac{\nu}{\nu_1},$$

más részről a szóban levő testeknél $\alpha=o$, honnan már látható, hogy α az ellipticitás koefficiensétől fog függni.

A 9) alatti relatió kifejezi az arányt a két testbeli éther azon elasticitása között, melylyel birna, ha *egymaga* töltené be az illető test terét. Az ellipsises sarkítást a ponderabilis anyag *direkt* hatása eszközli, *ha* eszközli. A relatiót igaznak kell tehát tekintenünk olyan testeknél is, melyek ellipsises sarkitást mutatnak. — Valójában, ha nem tekintenők igaznak, akkor egyugyanazon anyagot egyugyanazon állapotában, — t. i. ugyanazon sűrűség mellett, — különböző tulajdonokkal kellene felruháznunk; a mi legalább is nem volna olyan egy szerű föltevés, mint ha egyenlőkkel ruházzuk fel.

IV. *A rezgés a beesés lapjára függélyesen történik.* (folytatás)

Áttérünk olyan testek tárgyalására, melyek ellipsises sarkitást mutatnak.

A 2) alatti egyenletek másodikából ered általánosan

$$10)\quad \begin{aligned} \nu(B+B_r \cos\delta_r) &= \nu_1 B_1 \cos\delta_1 \\ \nu B_r \sin\delta_r &= \nu_1 B_1 \sin\delta_1 \end{aligned}$$

Hozzájő az eleven erő elve, melyből folyó 3) alatti második egyenletet a 4b relatiónál fogva igy írhatni

$$\nu^2(B^2-B_r^2)\sin 2\varphi=\nu_1^2 B_1^2 \sin 2\varphi_1$$

Az első két egyenlet négyzetre emelve és összeadva, kijő $B_1{}^2$ értéke. Az eredményt azután beteszszük az imént felirt egyenletbe. Rendezés után rögtön kijő

$$11a)\quad l_1 B_r^2+2B_r B\cos\delta_r+m_1 B^2=o,$$

hol

$$l_1=1+\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_1},\quad m_1=1-\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_1}$$

Ez egyenlet független mindennemü, — a ponderabilis anyag nyomására vonatkozó, — hypothézistöl. Áll akkor is, ha különben t e l j e s e n Neumannt követjük. Azért kivánatos volt ez egyenlet által nyujtott azon vonatkozást, mely fennáll a lineárisra redukált rezgés azimuthja és a pházisbeli különbség között, directe összehasonlítani Jamin nehány észleletcsoportjával. A következő táblázatból látható, hogy a megegyezés elméletem és a kisérlet között époly kielégítő, mint Cauchynál. Nem láttam szükségesnek több táblázatot közölni, miután egészen általánosan megmutathatom, hogy képleteim csak olyan tagokban különböznek Cauchy-éitól, melyek értéke mindig az észleleti hibák határán alúl esik.

Visszaverés üvegen (levegőbe).

Sarkítás szöge=59° 45′ (az adatok megvannak Wüllner Exp. Ph.-ben II. p. 492.)

φ	Észlelt $\frac{2\delta_r}{\lambda}$	Reducált azimuth $= arctg\,\frac{B_r}{A_r}$				
		Cauchy szerint számitott	Δ	Észlelt	Δ	11) alapján számitott
53°	0,026	10° 6′	+ 1′	10° 5′	− 1′	10° 4′
55°	0,039	7° 3′	+ 3′	7° 0′	+12′	7° 12′
57°	0,064	4° 17′	+14′	4° 3′	+11′	4° 14′
59°	0,217	1° 30′	+ 0′	1° 30′	− 2′	1° 28′
59° 30′	0,401	1° 3′	− 1′	1° 4′	+ 5′	1° 9′
60°	0,640	1° 3′	−10′	1° 13′	−15′	0° 58′
61°	0.877	2° 10′	−35′	2° 45′	−38′	2° 7′
63°	0,939	5° 9′	−37′	5° 46′	−37′	5° 8′
65° 15′	0,959	8° 31′	+15′	8° 16′	+10′	8° 26′

Ezek után számítsuk ki azon P nyomást, melyet a ponderábilis anyag az y, z szögletre a határlapon gyakorol. Ugyanazon eljárással, mint az előbbi egyszerű esetben találtatik

$$P=2\pi\left\{\frac{K}{\lambda}\cos\varphi\,(B\cos\delta-B_r\cos[\vartheta+\delta_r])-\right.$$
$$\left.-\frac{K_1}{\lambda_1}B_1\cos\varphi_1\cos(\vartheta+\delta_1)\right\}$$

Ez, tekintetbe véve a 9a) alatti relatiót, így írható:

$$P-2\pi\,\frac{K}{\lambda}\left\{\cos\varphi\,(B\cos\vartheta-B_r\cos[\vartheta+\delta_r])-\right.$$
$$\left.-\frac{\nu_1}{\nu}\,\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\,B_1\cos\varphi_1\cos(\vartheta+\delta_1)\right\}.$$

Ennek legnagyobb értéke p mint a 10 alatti egyenletek felhasználásával könnyen található, a következő képlet által adatik:

$$a^2 p^2 \sin^2\varphi = (m B - l B_r \cos\delta_r)^2 + l^2 B_r'^2 \sin^2\delta_r,$$

hol

$$a = \left(\pi \frac{K}{\lambda}\right)^{-1}; \quad l = \sin 2\varphi + \sin 2\varphi_1; \quad m = \sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1,$$

mely képlet rendezés után irható:

11b) $l^2 B_r^2 - 2lmBB_r \cos\delta_r + (m^2 - a^2p^2 \sin^2\varphi)B^2 = o$

A p maximális nyomás értékét ismertnek tételezve föl, ez egy második egyenlet B_r és $\cos\delta_r$ között. Az utóbbiak meghatározására a 11a) egyenletet így írjuk:

$$lB_r^2 + 2 \sin 2\varphi_1 BB_r \cos\delta r - mB^2 = o.$$

A két egyenlet megoldásául [$B=1$ téve], kijő:

12)
$$B_r^2 = \left(\frac{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi + \sin 2\varphi_1}\right)^2 \left[1 + \frac{a^2p^2 \sin^2\varphi \sin 2\varphi_1}{2(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi^2)\sin 2\varphi}\right]$$
$$B_r \cos\delta_r = \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi}\left[1 + \frac{a^2p^2 \sin^2\varphi}{2(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1)\sin 2\varphi}\right]$$

E képletek változatlanul igazak maradnak akkor is, ha a határon uralkodó nyomásnak a súlyos anyagtól eredő részére nézve semmi hypothézist sem teszünk, de az éther elasticitására sürüségére és a határföltételekre nézve egyébiránt teljesen Neumannt követjük. Jelentékenyen megrövidűlnek, ha a kisérletek által nyujtott eredményeket csak úgy nagyjában felhasználjuk.

Ismeretes, hogy a sarkitás szögénél [hol $\sin 2\varphi = \sin 2\varphi_1$]. a B_r igen kicsiny; következéskép e tájt a p is igen kicsiny. Ismeretes továbbá, hogy a sarkítás szögétől némi távolságban Fresnel képletei pontosan találnak a tapasztalattal. Ha tehát még tekintettel vagyunk a p függvény egyszerű alakjára (l. az 5 alatti képletet), akkor rögtön kimondhatjuk, hogy az α koefficiensnek minden testnél igen kicsinynek, — az ellipsises sarkitás Jamin-féle koefficiensével egyenlő rendünek, — kell lenni. A p értékét fölirjuk az 5) képletből; lészen

$$p = \alpha\left[\frac{K}{\lambda}(B + B_r)\cos 2\varphi - \beta\frac{K_1}{\lambda_1} B_1 \cos 2\varphi_1\right],$$

vagy a 9a tekintetbe vételével

$$p = \alpha\frac{K}{\lambda}\left[(B + B_r)\cos 2\varphi - \beta\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\frac{\nu_1}{\nu} B_1 \cos 2\varphi_1\right].$$

Az α igen kicsiny; a B_r és B_1 igen kevéssé térnek el a

Fresnel-féle értéktől. Azért csak másodrendű kicsinyeket hanyagolunk el, ha az itt B_r és B_1 helyett a Fresnel-féle értékeknek megfelelőket teszszük. Igy ered a 6a felhasználásával

$$p=\alpha\frac{K}{\lambda}\cdot\frac{\nu_1}{\nu}\left[\cos 2\varphi-\beta\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\cos 2\varphi_1\right]B_1,$$

hol vehető a 7) szerint [ha még $B=1$ tétetik]

$$\frac{\nu_1}{\nu}B_1=\frac{2\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi+\sin 2\varphi_1}$$

A β állandó felett rendelkezhetünk; a kisérletek tényleg nem eléggé pontosak arra, hogy belőlük két állandót is lehessen meghatározni. Rendelkezem β felett úgy, hogy

$$\beta\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}=1$$

legyen. Jelölöm egyúttal

$$\frac{\alpha}{a}\frac{K}{\lambda}\text{ azaz }\frac{\alpha}{\pi}\text{ értéket } \varepsilon\text{-nál.}$$

Akkor ered

$$\text{13a)}\quad ap=\varepsilon(\cos 2\varphi-\cos 2\varphi_1)\frac{2\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi+\sin 2\varphi_1}$$

azaz

$$\text{13b)}\quad ap=2\varepsilon\sin 2\varphi\, tg(\varphi_1-\varphi).$$

Ezek után jelöljük a 12 képletek elsejénél a zárjelben levő mennyiséget $\sec^2\psi$-vel. Akkor ered a nevezett képletből

$$\text{14)}\quad B_r\cos\psi=\left(\frac{\sin 2\varphi-\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi+\sin 2\varphi_1}\right)^2,$$

hol

$$tg^2\psi=\frac{a^2p^2\sin^2\varphi\sin 2\varphi_2}{(\sin 2\varphi-\sin 2\varphi_1)^2\sin 2\varphi}$$

azaz a 13a tekintetbe vételével

$$\text{14a)}\quad tg^2\psi=\varepsilon^2\sin^2\varphi\, tg^2(\varphi+\varphi_1).\frac{4\sin 2\varphi\sin 2\varphi_1}{(\sin 2\varphi+\sin 2\varphi_1)^2}$$

Kiszámítjuk végezetűl, a 12 képletek másodikánál is a zárjelben lévő mennyiség második tagját. E tag a 13b alatti képlet felhasználásával igy irható :

$$\frac{\varepsilon^2\sin 2\varphi\, tg^2(\varphi-\varphi_1)\sin^2\varphi}{\cos(\varphi+\varphi_1)\sin(\varphi-\varphi_1)}$$

E tag tökéletesen jelentéktelen értékű. Ugyanis a $\varphi-\varphi_1$ különbség a sarkitás szöge körűl, az első negyed közepe táján van és csak a $\cos(\varphi+\varphi_1)$ igen kicsiny. Ámde az ε is rendkívül kicsiny. Ha tehát pl.

$$\cos^2(\varphi+\varphi_1)=\varepsilon^2,$$

akkor már nagyon közel vagyunk a sarkitás szögéhez és a szóban levő tag számbeli értéke

$$=\varepsilon\frac{\sin^2\varphi \sin 2\varphi\, tg^2(\varphi-\varphi_1)}{\sin(\varphi-\varphi_1)},$$

tehát itt is az ε-nal egyenlő rendü.

Lássuk közelebb. A Jamin-féle flintüveg fennidézett példájánál $\varepsilon=0{,}017$. Ha tehát $\cos(^2\varphi+\varphi_1)=\varepsilon^2$, akkor $\varphi+\varphi_1$ itt $=90^0\pm1^0$; tehát csak 45'-nyire vagyunk a sarkitás szögétől. A szóban levő tag itt $=\pm$ 0·007. Ha azon szöget veszem, mely az egész kisérletsorban legközelebb áll a sarkitás szögéhez, akkor is csak $\pm$ 0·02 jő ki.

Ilyen kicsiny törtek a kisérleti pontosság jelenlegi fokánál bátran elhanyagolhatók az egység mellett.

Ha a tagot elhagyom, marad a 12) képletek másodikából

$$15)\quad B_r \cos\delta_r=\frac{\sin 2\varphi_1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_1+\sin 2\varphi},$$

mely egyenlet összehasonlítva a 14) alatt találttal, mutatja, hogy $\cos\delta_r=\pm\cos\psi$.

Igy a 14a)-ból következtethetjük, hogy

$$15a)\quad \pm tg\,\delta_r=\varepsilon \sin\varphi\, tg(\varphi+\varphi_1)\cdot\frac{2\sqrt{\sin 2\varphi \sin 2\varphi_1}}{\sin 2\varphi+\sin 2\varphi_1}.$$

A jobboldali utólsó szorzó

$$=\sqrt{1-\frac{tg^2(\varphi-\varphi_1)}{tg^2(\varphi+\varphi_1)}};$$

e szorzó tehát ismét bátran egynek vehető a sarkitás szöge környékén, azaz a szóban levő tájon. Ha pedig egynek vétetik, marad Cauchy rövidített képlete; a 15) alatti képlet is azonos a megfelelő Cauchy-félével.

Minden kétely megszüntetése végett kiszámítám az imént egységgel fölcserélt szorzónak logarithmusait, a többször nevezett kisérleti sorban. Valamennyien nagyobbak 9·999-nél; zérótól való eltérésük szót se érdemel.

Valaki azt az ellenvetést teheti, hogy theoriám szerint $\cos\delta_r$ nem volna zéró akkor, a midőn $\varphi+\varphi_1$ pontosan $=90^0$. Ám számítsuk a különbséget.

A 12) egyenletből a fenforgó esetben találtatik:

$$B_r=\frac{ap\sin\varphi}{\sin 2\varphi}$$

$$B_r\ ocs\,\delta_r=\frac{a^2p^2\sin^2\varphi}{4\sin^2 2\varphi},$$

tehát osztás által

$$\cos\delta_r=\frac{ap\sin\varphi}{2\sin 2\varphi},$$

e pedig a 13b) segélyével a következő alakra hozható:

$$\cos\delta_r=\varepsilon\sin\varphi\, tg\,(\varphi_1-\varphi)$$

A különbség e szerint kisebb az ellipsises sarkitás koefficiensénél is. Igy hát elméletem szerint a δr a nevezett helyen csak megmérhetetlen kicsinynyel különböznék a $\frac{\pi}{2}$-től.

Végezetűl megjegyzem, hogy csak a kisérletek nem eléggé pontos volta ösztönzött arra, hogy a β felett úgy rendelkezzem, a mint rendelkeztem. Ha pontosabb kísérletek lesznek, a β-át belőlük kellend meghatározni s *talán* valamivel más jő majd ki.

V. *A teljes visszaverés* esete épúgy tárgyalandó és ugyanazon eredményre vezet nálam, mint Neumann elméletében Valóban az ellipsises sarkítás kivételével csak az a különbség volt az eddigi számításokban is, hogy a tört hullám amplitudója helyett $\nu_1:\nu$-szerese lépett föl és hogy ez a többszörös négyzete $\mu_1:\mu$-vel egyenlőnek bizonyult be. A teljes visszaverés esetén is úgy áll a dolog; sőt itten ama többszörös értéke akár határozatlanúl is maradhat.

VI. Megmutattuk, hogy az ellipsises sarkítás egyszerű módon és teljesen kimagyarázható azon föltevés mellett, hogy a rezgés és sarkítás lapjai parallelek; kimagyarázható a nélkül, hogy az étherek sűrűségbeli arányát illetőleg bármit is kikössünk. Hátra van megmutatni, hogy azon relatiók, melyeket a $\mu_1:\mu$, $\nu_1:\nu$ és $K_1:K$ arányok között találtunk s melyet reflexio élméletünk megkövetel, megengedik, hogy a $\mu_1 : \mu$ felett úgy rendelkezzünk, a mint azt az aberratió tüneménye s általában a fény terjedése haladó közegekben megkivánja.

Erre nézve mindenekelőtt egy félreértésnek kell elejét vennem, melyre a 9) alatti relatió könnyen szolgáltathat alkalmat. Az egyenlet ugyanis így irható:

$$\frac{K_1}{\nu_1} : \frac{K}{\nu} = sin^2\varphi_1 : sin^2\varphi,$$

vagyis ha ν_1 és ν a terjedés sebességét jelentik az illető közegekben, így:

$$\frac{K_1}{\nu_1} : \frac{K}{\nu} = \nu_1^2 : \nu^2$$

Már mostan így folytathatná valaki. A sebesség négyzete = a rugalmasság tényezője osztva az éther sűrűségével; ergo következik az iménti egyenletből, hogy $\nu_1 : \nu = \mu_1 : \mu$ sat.

A ki így akar következtetni, az gondolja csak meg, mikép számítaná ki azon sebességet, melylyel a hang egy gázkeverékben terjed. Vajjon a gázok közűl csak egyre volna tekintettel? Pedig tökéletesen úgy áll a dolog a fény terjedésével is; a ponderabilis anyag ép úgy hat és rezeg, mint az éther.

Szerintem a reflexió elmélete csak vonatkozásokat nyujt a sűrűség, a sebesség és a feszélyek arányai között; ha más elmélet-módot nyújt az arányok egy valamelyikének meghatározására, ama relatiók megadják a többit.

Fresnel szerint a fény terjedése haladó közegekben könynyen megérthető, ha fölteszszük, hogy két anyagban tartalmazott éther sűrűségei olyan arányban állnak egymáshoz, mint törésmutatóik négyzetei: azaz $\mu_1 : \mu = n^2 : 1$. Így hát

$$\mu_1 : \mu = sin^2\varphi : sin^2\varphi_1.$$

Ez arányt elfogadva, a $4b_1$)-ből következik, hogy

$$\nu_1 : \nu = sin\,\varphi : sin\,\varphi_1$$

és végezetül a 9) egyenletből, hogy

$$K_1 : K = sin\,\varphi_1 : sin\,\varphi.$$

Ha még tekintetbe veszszük, hogy a 2) alatti egyenletek szerint a rezgés eredő sebességei, a két anyag határának egyik és másik oldalán a ν-kkel fordítva arányosak, akkor az imént nyert eredményeket igy foglalhatjuk össze:

*Ha Fresnel szerint elfogadtatik, hogy az éther sürüségei arányosak a törésmutatók négyzeteivel, akkor reflexio-elméletemből csak annyi következik, hogy az eredő sebességek, valamint a feszély-koefficiensek is fordítva arányosak a törésmutatók első hatványaival.**)

Az utóbbi körülményből további következményeket fogok vonni, melyek a reflexio-elmélet további általánosítására vezetendenek. De előbb a dispersió elméletével kellend foglalkoznunk. Azért ez alkalommal nem folytatjuk tovább; annál is inkább, mert különben heterogén tárgyakkal kellene foglalkoznunk.

---

*) A Cauchy-féle reflexio-képletek levezetésére vonatkozó eredmények más, a sarkitás lapjának rács által való elhajlitására vonatkozó eredményekkel együtt, a helybeli »Orvos-Természettudományi-Társulat« 1879. deczember 12-ki szakgyülésén közöltettek.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgés forrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában. 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretű homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . . . 20 kr.

Budapest, 1880. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.