ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
VII. KÖTET. IX. SZÁM. 1879.

KÚP- ÉS HENGERFELÜLETEK

ÖNÁLLÓ FERDE VETÍTÉSBEN.

SUPPAN VILMOS
SZÉKELY-UDVARHELYI FŐREÁLISKOLAI TANÁRTÓL.

KÉT TÁBLÁVAL.

(A III. osztály ülésén 1879. okt. 20. bemutatta Hunyady J.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1880.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

KÚP- ÉS HENGERFELÜLETEK

ÖNÁLLÓ FERDE VETÍTÉSBEN.

SUPPAN VILMOS

SZÉKELY-UDVARHELYI FŐREÁLISKOLAI TANÁRTÓL.

KÉT TÁBLÁVAL.

(A III. osztály ülésén 1879. okt. 20. bemutatta Hunyady J.)

BUDAPEST, 1880.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1880. Az A t h e n a u m r. társ. könyvnyomdája.

BEVEZETÉS.

Az ábrázoló geometria föladata az, hogy térbeli alakzatokat más, rendesen síkbeli alakzatok által meghatározzon; az általa alkalmazott vetítésmódok lényegökben nem egyebek a térbeli alakzatoknak síkbeliekre való vonatkoztatásánál sugárrendszerek segítségével. A vetítés vagy középpontos (centrális) vagy párhuzamos, a mint a sugárrendszerek középpontja véges vagy végtelen távolságban van. A párhuzamos vetítés megint kétféle: derékszögű (orthogonális), ha a vetítősugarak a képsíkra merőlegesek; ferde (klinogális), ha a képsíkkal ferde szöget képeznek.

E különböző vetítésmódok közűl a legspeciálisabb, a derékszögű az, mely könnyen átlátható okokból legkorábban fejlődött ki s leggyakrabban alkalmaztatik. A centrális vetítés sokáig csak aesthetikai tekintetekből ápoltatott a »perspektiva« neve alatt, de nem önállóan, hanem a derékszögű vetítésre támaszkodva. Még kevesbbé használták a ferde vetítést; a szükséget, melyet pótolhatott volna, inkább axonometrikai ábrázolások által elégítették ki.

Ujabb időben a centrális vetítés hatalmas lendületet nyert az újabb, vagy helyzeti geometria megalapítása és fejlesztése által, s ennek köszönheti, hogy ma már mint *önálló* vetítésmód az őt megillető helyre jutott, s a fejlődését akadályozó idegen támaszoktól, nevezetesen a derékszögű vetítéstől megszabadult. De a ferde vetítés nem. dicsekedhetik ily eredményekkel. Felismerték ugyan, hogy a hosszadalmas axonometriai ábrázolásokhoz sokkal egyszerűbben juthatunk ferde vetítés által; igyekeztek is az igy keletkezett »parallelperspektivát« az előbb szokásos trigonometriai analysis helyett tisztán geometriai alapra fektetni[1]); de a derékszögű vetítéstől függetlenné, azaz önállóvá nem tehették. Ennek az oka abban a körülményben keresendő, hogy a derékszögű vetítés mintájára a ferde vetítésben is két kép által határozták meg a térbeli alakokat, melyek közül az egyiknek egyszerűség kedveért derékszögűnek kellett lenni.

Ha sikerülne a két kép általi meghatározásmód helyett olyat találni, milyennel az újabb perspektiva (a centrális vetítés) a térmennyiségek végtelenben levő elemeiben bir, akkor az oly feladatokat, melyek a helyzet geometriájába tartoznak, a ferde vetítésben is ugyanazon vonalcombinátiók által oldhatnók meg, mint a centrális vetítésben[2]) és a ferde vetítés is önálló, a többiektől független vetítés-móddá fejlődhetnék.

A végtelenben levő elemeket ugyan a ferde vetítésben nem használhatjuk, minthogy párhuzamos vetítősugarak mellett képök szintén a végtelenben vannak; de használhatunk a képsíkon kivül egy határozott, véges térben levő síkot, hasonló módon mint a distánc-síkot a centrális projectióban.

Ezen eszmét Peschka Gusztáv pendíté meg. A bécsi akadémia tudósításaiban megjelent értekezésében[3]) fejtegeti, mikép lehet a térbeli pontot, egyenest és síkot »önálló ferde vetítésben« ábrázolni, s megold nehány, amaz első foku alakzatokra vonatkozó feladatot.

Ez értekezésemben azt a feladatot tűztem ki magamnak, hogy az önálló ferde vetítés elveit a kúp- és hengerfelületek ábrázolására és síkmetszeteik meghatározására alkalmazzam; különösen meg akarom mutatni azon egyszerűsítéseket, melyekhez a vetítősugár irányának kellő megváltoztatása által juthatunk.

Azonban mielőtt ezekre áttérhetnék, röviden elő kell adnom az önálló ferde vetítés elveit s össze kell állítanom azon alapfeladatokat, melyekre későbben szükségem lesz.

---

[1]) Staudigl, die axonometrische und schiefe Projektion. Wien 1875. 20. lap.

[2]) Staudigl, Über die Identität stb. (Sitzungberichte der kais. Akademie. Wien. 64. köt.)

[3]) Peschka: Freie schiefe Projection. (Sitzungsberichte 75. köt. 1877).

I. Az önálló ferde vetítés elvei.

1. A képsík (π) mindig adott helyzetben van és rajzlapúl szolgál. Bizonyos adott, állandó távolságban (distanc) egy vele párhuzamos síkot képzelünk, a *distánc-síkot*, mely tetszőleges ugyan, de egyszer megtörtént fölvétele után változatlan. A térmennyiségeknek π képsíkban fekvő elemeit, vagyis π-vel való metszetöket, *nyomoknak* nevezzük; a Δ distánc-síkkal való metszeteket *distáncmetszeteknek*, — a distáncmetszetek képeit *distáncelemeknek* hivjuk.[1]) A nyomok és distáncelemek által a térbeli alakzatok a vetítősugár adott iránya mellett tökéletesen meg vannak határozva.

2. A vetítősugár irányát az ábrázolásnál a következő módon fogjuk meghatározni. Képzelünk a distáncsík valamely P pontjából egy $PP_1 \perp \pi$ egyenest és egy PP' vetítősugarat vonva. Az első a képsíkot P_1-ben metszi, a másik P'-ben; P_1 a P pont derékszögű képe, P' a ferde képe, melyet ezután röviden csak képnek fogunk nevezni, ez alatt mindig ferde vetítés által nyert képét értvén. Képzeljük a P_1-nél derékszögű PP_1P' háromszöget P_1P' befogója körül π-re fektetve, akkor benne eszközt nyerünk, melylyel a vetítősugár irányát s a distáncsík helyzetét meghatározhatjuk. Ezt a háromszöget *vetítés-háromszögnek* nevezzük s adottnak tekintjük *nagyság és helyzetre* nézve, azaz: az adott PP_1P' vetítés-háromszöget (1. ábra) elmozdíthatjuk ugyan a π-ben, de csakis első helyzetével párhuzamosan.

3. A térbeli pont két rajta átmenő egyenes által meg van határozva. Ha az egyik egyenesnek a ponton átmenő vetítősugarat vesszük, akkor mondhatjuk, hogy a pont a képe s egy rajta átmenő egyenes által meg van határozva.

4. Az egyenest meghatározzuk N'_g nyoma és D'_g distáncpontja által (1. ábra). Ha D'_g-nél a PP_1P'-vel összevágó és

---

[1]) Peschka a distáncmetszeteket distáncelemeknek, s képeiket megkülönböztetésül irányelemeknek (Fluchtelemente) nevezi. Én ezt az utóbbi elnevezést nem tartom helyesnek, mivel az irány (Flucht) csak a végtelenben fekvő elemekre vonatkozhatik, nem pedig a véges távolságban levő distáncelemekre.

párhuzamosan fekvő $D'_o D_1 D'_g$ háromszöget szerkesztjük, s ezt $D_1 D'_g$ körül fölállítjuk, mig π-re merőleges, akkor a felállított D'_o pont az egyenes distáncmetszete. Ez, meg a nyom tökéletesen meghatározzák a térbeli g egyenest.

A D_1 pont nem egyéb a distáncmetszet derékszögű képénél s igy $D_1 N'_g$ az egyenes derékszögű képe, g_1.

Ha az egyenes a képsíkra merőleges, akkor az $N'_g D'_g$ alaptávolság egyenlő és párhuzamos $P_1 P'$-vel; mert $P_1 P'$ nem egyéb a π-re merőleges PP_1 egyenes képénél, párhuzamos vetítés mellett pedig egyenlő és párhuzamos vonalrészek képei egyenlők és párhuzamosak. A párhuzamosság alatt itt egyirányuságot is értünk; az irányt akár az N'_g nyomtól, akár a D'_g distáncponttól számíthatjuk.

Ha az egyenes a képsíkkal párhuzamos, akkor nyoma és distáncpontja a végtelenben van. Ez esetben meghatározható egyik pontja (3) és képe által, melylyel párhuzamos.

Ha az egyenes párhuzamos a vetítősugárral, képe egy pont.

5. A síkot meghatározzuk n_α nyoma és d_α distáncvonala által (1. ábra). Mivel $\Delta \parallel \pi$-vel, azért a d_α distáncmetszet $\parallel$ az n_α nyommal, s igy képe, a d'_α distáncvonal is $\parallel$ n_α-val. Ha d'_α valamely D'_h pontjához a vetítésháromszöget rajzoljuk s fölállítjuk, akkor D_o-ban a distáncmetszet egyik pontját kapjuk, mely n_α egyenessel együtt a térbeli síkot meghatározza.

A D_1-en átmenő $d_1 \parallel n_\alpha$ egyenes a distáncmetszet derékszögű képe.

A sík merőleges π-re, ha keresztül megy egy π-re merőleges egyenesen. Ha párhuzamos π-vel, akkor meg van határozva egyik pontja által. Ha párhuzamos a vetítősugárral, akkor d'_α összeesik n_α-val ; a sík képe egyenessé válik.

6. Egy az α síkban levő h egyenes N_h nyoma a sík n_α nyomában, D'_h distáncpontja a sík d'_α distáncvonalában van (1. ábra).

Ezért két, $(n_\alpha d'_\alpha)$ és $(n_\beta\ d'_\beta)$ sík metszetét kapjuk, ha (2. ábra) az $n_\alpha\ n_\beta$ nyomok N_m metszéspontját összekötjük a $d'_\alpha\ d'_\beta$ distáncvonalak D'_m metszéspontjával. Az N_m a metszésvonal nyoma, D'_m a distáncpontja.

Két sík párhuzamos egymással, ha az $(n_\alpha\ n_\beta)$ távolság egyenlő és egyértelmü a $(d_\alpha d_\beta)$ távolsággal.

7. Egymást metsző egyenesek ugyanazon síkban vannak; ezért a nyomaikat összekötő $N_g N_h$ egyenes párhuzamos a distáncpontjaikat összekötő $D'_g D'_h$ egyenessel. Ugyanez áll az egymással párhuzamos egyenesekre is; ezeknél azonkivül $g' \parallel h'$-vel.

Adott (P', h') ponton át úgy szerkesztünk párhuzamost egy adott $(N_g D'_g)$ egyenessel (4. ábra), hogy előbb D'_h-en át $k \parallel g$ egyenest rajzoljuk, s $N_g N_k \parallel D'_g D'_k$ egyenes segítségével az N_k nyomát keressük; a keresett l egyenes k és h egyenesekkel ugyanazon síkban van, l' képe $\parallel g'$-tel, s igy N_l nyoma az $N_k N_h$ egyenesben, D'_l distáncpontja az $D'_h D'_l \parallel N_k N_h$ egyenesben fekszik.

A P' pont osztásviszonya $\frac{N_h P'}{D'_h P'}$ valamennyi rajta átmenő egyenesre nézve állandó.

8. Adott g egyenes átdöfését adott α síkkal úgy kapjuk, hogy ha (3. ábra) a g-n keresztül $(n_\beta\ d'_\beta)$ síkot fektetünk, s az $\alpha\beta$ síkok $(N_m D'_m)$ metszetét keressük. Ennek metszéspontja a g egyenessel adja a keresett átdöféspontot.

Az egyenes párhuzamos a sikkal, ha párhuzamos valamely a síkban levő egyenessel.

9. Sok esetben szükséges, hogy az egyenest a képsíkra fektessük; ezt általában bármely az egyenesen átmenő síkkal tehetjük, de legczélszerűbben az egyenes valamely vetítősíkját használjuk.

Midőn orthogonális vetítősíkjával akarjuk az egyenest a képsíkra fektetni, akkor mindenekelőtt az egyenes g_1 orthogonális képét keressük (5. ábra). A distáncpont D_0 lefektetését kapjuk, ha a $D_0 D_1 \perp g_1$ egyenesre reámérjük az adott distáncot $(D_1 D)$. A $D_0 N$ lesz az egyenes lefektetése g_0. Bármely az egyenesen fekvő pont A_0 lefektetését nyerjük, ha $A' A_0 \parallel D' D_0$ egyenest vonunk; s viszont a B_0 lefektetésből a B' képet a $B_0 B' \parallel D_0 D'$ egyenes segítségével nyerjük. — A $D_0 N D_1$ szög az egyenes hajlásszöge a képsíkhoz.

Midőn ferde vetítősíkjával akarjuk az egyenest π-re fektetni, akkor g' a forgástengely (6. ábra). Mindenekelőtt a

D pont D_1 orthogonális képét keressük, melyből $D_1R \perp g'$ és $D_1D'_0 \parallel g'$ egyeneseket vonjuk; ha D'_0D_1-et egyenlővé teszszük a DD_1 distánccal,akkor D'_0R a distáncmetszet g'-től való távolsága. Most RD_0-t egyenlővé tesszük RD'_0-lal; D_0 lesz a D pont lefektetése, D_0N az egyenesé.

Azonban egyszerűbben is kaphatjuk a D_0 pontot. — Ugyanis a g' körüli lefektetés alkalmával az egyenes és g' viszonyos helyzete nem változik s igy a DD' távolság sem, melylyel tehát egyszerűen D'-ből átmetsszük az RD_1 egyenest. A $D'D_0$ nem egyéb az egyenes distáncmetszetéhez tartozó vetítősugár lefektetésénél.

10. Adott $(n_\alpha\ d'_\alpha)$ síknak képsíkhoz való hajlása szögének meghatározása végett oly síkot szerkesztünk, mely merőleges α és π metszésvonalára, n_α-ra. E sík magában foglal egy π-re merőleges D_1D' egyenest (7. ábra), s n_ν nyoma, meg d'_ν distáncvonala merőlegesek n'_α-re. E sík az α síkot egy n_α-ra merőleges e egyenesben metszi, melynek hajlásszöge egyenlő az α síkéval; ezért az e egyenest ND_1 orthogonális képe körül lefektetvén, D_0ND_1 szögben a keresett hajlásszöget kapjuk.

Ha $D_0N_n \perp ND_0$ vonatik, akkor D_0N_n nem egyéb azon n egyenes lefektetésénél, mely a D pontban az α síkra merőleges. Ezen egyenes képe N_nD'.

2. A kör önálló ferde vetitésben.

11. *Adva van egy kör (nd') síkjával való lefektetése által; határozzuk meg a kör ferde vetítés által nyert képét, ha a vetítősugár iránya a PP_1P' vetítésháromszög által adatik* (8. ábra).

A kör ferde képe ellipsis, mely affin rokonságban van a kör lefektetésével; a körsík nyoma az affinitás tengelye. — E szerint legegyszerűbben úgy kapjuk a kör képét, hogy a lefektetett kör affin rokonalakzatát szerkesztjük. E czélra meghatározzuk az affinitás-sugarak irányát; az n-re merőleges s P_1P'-en átmenő sík segítségével az n-re merőleges e egyenes N_eP' képét keressük, s meghatározzuk N_eP' távolság valódi hosszuságát, $N_eP'_0$-et (10). Az e egyenes merőleges n-re, s igy α síkkal való lefektetése e_0 is merőleges n-re; most $N_eP_0 = N_eP'_0$

tesszük, úgy P_0 a P' képű pont α síkkal való lefektetése s igy P_0P' az affinitás sugarak iránya.

Ha C_0 középponton keresztül az $A_0B_0 \perp n$ és $D_0E_0 \parallel n$ átmérőket vonjuk, akkor az első átmérő képe $\parallel e'$-vel (nálunk összeesik vele), a második átmérőé $\parallel n$-nel. A középpont s az AB pontok képeit e' egyenesen, a DE pontok képeit a $D'E'$ egyenesen nyerjük a pontok lefektetéseiből P_0P'-tel párhuzamosan vont affinitássugarak segítségével. Az $A'B'$, $D'E'$ távolságok az ellipsis kapcsolt átmérői.

Az ellipsistengelyek meghatározására a kör azon kapcsolt átmérőpárját keressük, melynek képe is derékszöget képez. E czélra a C_0C' egyenes felezőpontjában $LK \perp C_0C'_0$ egyenest vonjuk, melynek n-nel való metszetéből egy, a $C_0C'_0$ pontokon keresztül menő kört rajzolunk. Ez az n nyomot a kivánt átmérőpár GH nyomaiban metszi. Az $M_0N_0 \perp R_0S_0$ azon átmérők, melyeknek képei $M'O'$, $R'S'$ egymásra merőlegesek s ezen okból ellipsistengelyek.

12. A körkép meghatározásánál szükségtelen a kört az n nyom körül π-re fektetni; néha egyszerűbben jutunk czélhoz a körnek $D'E'$, π-vel párhuzamos átmérője körüli forgása által, melylyel a kört π-vel párhuzamos helyzetbe hozzuk. Az affinitássugarak meghatározására a B pont képét keressük, az által, hogy az N_eP_0'-en a C középpont lefektetésétől számítva a $C'_0B''_0$ távolságot egyenlővé tesszük a kör küllőjével, és a $B''_0B' \parallel P'_0P'$ által az N_eP'-en a B' képet kimetszük. Vagy pedig $C'P''_0 = C'_0P'$ tétetvén, P''_0P'-ben is az affinitássugarak irányát kapjuk. A szerkesztés lényegében ugyanaz marad, csakhogy most $D'E'$ az affinitás tengelye.

13. *Határozzuk meg a körnek a képsíkra vetett árnyékát párhuzamos fénysugarakat véve* (9. ábra). A kör adva van (nd') síkja és lefektetése által; a fénysugarak iránya $P'N_l$. A kör képét 11. szerint szerkesztjük.

Feladatunk azonos ezzel: adott henger metszetét keresni a képsíkkal. A kör a henger vezetővonala, alkotói párhuzamosak az adott fénysugárral; a henger metszete π-vel adja a kör árnyékát. Azonban másképpen nézve a dolgot, a kör árnyéka nem egyéb a kör ferde képénél, melyre nézve a fénysugarak a vetítősugarak. E szerint megkapjuk az árnyékot, ha

l'-let vetítősugárnak véve az adott kör ferde képét szerkesztjük. A vetítősugár változtatása mellett a distancelemek megváltoznak, a nyomelemek változatlanul maradnak.

Az új affinitássugár meghatározására a P'-en keresztül párhuzamost szerkesztünk a fénysugárral, melynek P'' nyoma a P distáncmetszet új képét adja, úgy hogy most P_0P' az affinitássugarak iránya. Ezzel a 11. szer. a kör affin alakzatát szerkesztjük, tekintettel arra, hogy az n-re merőleges PQ átmérő új képe a $P''Q''$.

A nyert $H''Q''G''1''P''F''$ ellipsis affinitásban van a körrel s az eredeti körképpel. Ezen utóbbi affinitásra nézve a sugarak iránya $P'P''$. A két ellipsisnek párhuzamos közös érintői vannak, $F'F''$ és $G'G''$, melyeket a $C'C''$ egyenes lefektetése segítségével pontosan meg lehet határozni. E közös érintő nem egyebek a fényhenger szélső alkotóinál, illetőleg a vetítősugárral párhuzamos érintősíkok nyomainál.

3. Kúp- és hengerfelületek ábrázolása.

14. Egy kúpfelület meg van határozva csúcsa és vezetővonala által. Legyen a kúp v' nyoma a vezetővonala (11. ábra) és S' a csúcs képe, meghatározva a rajta keresztül menő $C_vC'_w$ egyenes által. A kúpalkotók nyomai v-ben vannak, így az SA alkotó-é A'-ban; ebből meghatározhatjuk az alkotó B' distáncpontját. Valamennyi alkotó distáncpontjainak geometriai helyéül egy a kúp nyomához hasonló és hasonló helyzetü görbét kapunk, a csúcs képére mint hasonlóságpontra nézve. E görbe a kúp distáncmetszetének képe, melyet röviden *distáncgörbé*nek nevezünk. E görbe egyszersmind a kúpfelület érintősíkjaihoz tartozó distáncvonalak burkolója.

A hengerfelületeknél a nyom és distáncgörbe összevágók és párhuzamos fekvésüek.

A kúpfelület szélső alkotóit nyerjük, ha a v, w hasonló görbék közös érintőit szerkesztjük, $M'O'$ és $N'P'$. Ezek a vetítősugárral párhuzamos érintősíkok nyomai.[1])

---

[1]) Ez teljesen megegyez a centrálprojectió hasonló eredményeivel, úgy annyira, hogy ezt az ábrát centrálprojectiósnak is vehetnők; v. ö. Fiedler, darstellende Geometrie 1871. 208. old.; Peschka-Koutny freie Perspective 304. old.

15. *Ábrázoljunk oly egyenes körkúpot, melynek alapja egy adott* (n_α d'_α) *síkban van* (10. ábra). Mindenekelőtt az alapkör képét szerkesztjük (12.). Azután egy α síkra merőleges egyenes képét keresvén, az N_eP' egyenes N_e P_0 lefektetésére valamely B'_0 pontban geometriailag merőleges B'_0 N_n egyenest vonjuk, mely egy α-ra merőleges egyenes lefektetése; képét kapjuk, hogyha az N_n pontot összekötjük B'-tel. Ha ezen $B'N_n$ egyenessel a C' középponton keresztül párhuzamost vonunk, akkor a kúptengely képét kapjuk, melyen meghatározzuk a csúcs S' képét.

A szélső alkotók meghatározására a vetítősugárral párhuzamos érintősíkokat szerkesztjük. A csúcson keresztül menő vetítősugár az α alapsíkot átdöfi egy pontban, melynek képe összeesik S'-tel. Ezért S'-et a síkban fekvő pont képének tekintjük s lefektetjük $D'E'$ körül; az S_0 lefektetéséből S_0M_0, S_0N_0 érintőket szerkesztjük a kör lefektetéséhez, s ezeknek képeit keressük, azáltal, hogy a $D'E'$ affinitás-tengelybe eső uv pontjukat egyszerűen összekötjük S'-tel. Ezek az érintősíkok metszetei az α síkkal; minthogy azonban az érintősíkok párhuzamosak a vetítősugárral, ezért $S'M'$ és $S'N'$ egyszersmind nyomok és szélső alkotók is. Az ellipsist az M', N' pontokban érintik, ezeket pedig M_0N_0-ból kapjuk affinitás sugarak segélyével.

16. *Határozzuk meg az egyenes körkúp saját és vetett árnyékát párhuzamos fénysugarakat véve* (10. ábra). A fénysugarak irányát a $D'_v S''_v$ egyenes jelzi, melyet egyszerűség kedvéért mindjárt a kúp csúcsán fektettem keresztül; az S'' nyoma adja a kúp csúcsának árnyékát a képsíkon. A saját árnyék meghatározására a fénysugárral párhuzamosan érintősíkokat szerkesztünk, mely czélra a csúcson átmenő fénysugár A' átdöfését keressük az alap síkjával (az $S_2\varphi, D'_v\delta$ segédsík segítségével), s A'-ből $A'R'$, $A'Q'$ érintőket szerkesztjük az alap képéhez. Ezen érintők szerkesztésére lefektetjük az A pontot; A_0-ból érintőket vonunk az alap lefektetéséhez s a nyert A_0R_0, A_0Q_0 érintőket visszaforgatjuk. Az $A'R'$, $A'Q'$ érintők nem egyebek a fénysugárral párhuzamos érintősíkoknak az alapsíkkal való metszeteinél; ennélfogva határolják a kúpnak az alapsíkra vetett árnyékát. Ez megszakad az alap-

sík n_α nyománál és áttörik a képsíkra ($U'S''V'$). Az érintősíkok $R'S'$ és $Q'S'$ érintésalkotói a sajátárnyék határát képezik.

Ugyanezen a módon szerkeszthetjük a kúp megvilágítását egy pontból kiinduló fénysugarakra nézve, s megfejthetjük a tárgyalt feladatokat a hengerfelületekre nézve, szem előtt tartva, hogy a hengerfelületek oly kúpfelületeknek tekintendők, melyeknek csúcsok a végtelenben van.

4. Kúpok síkmetszetei.

17. Kúpok síkok által oly görbékben metszetnek, melyek perspektivai collineátióban vannak a kúp alapjával (vagy más síkmetszetével). Nevezetesen, ha a kúp alapja (vagy valamely síkmetszete) kör vagy ellipsis, akkor a metszet ellipsis, parabola vagy hyperbola a szerint, a mint a kúp csúcsán keresztűl a metsző síkkal párhuzamosan vezetett sík a kúpot nem metszi, érinti vagy metszi. A metszet képe centrumos collineátióban van az alap képével; a csúcs képe a collineátió középpontja, a metsző s alapsík metszésvonalának képe a collineátió tengelye. Az ellentengelyek ezek: a csúcson keresztül az alapsíkkal párhuzamosan vezetett síknak a metszősíkkal való metszésvonalának képe, és a csúcson keresztül a metszősíkkal párhuzamosan vezetett síknak az alapsíkkal való metszésvonalának képe.[1])

Ezen centrumos collineátió alapján könnyen szerkeszthetjük a metszet képét az ismeretes módokon. Lehet azonban a dolgot még egyszerűbbé tenni az által, hogy *egy új vetítősugarat választunk, mely párhuzamos a metszősík valamely egyenesével;* ezáltal a metszősík vetítősíkká válik s a metszet képe a sík nyomába esik, melyből azután könnyen meghatározhatjuk az eredeti képet.

Legyen adva egy ferde körkúp (14. ábra), melynek alapja az (n_α d'_α) síkban van s melynek csúcsa a ($D'_g N_g$) egyenes által van meghatározva. Felvesszük az (n_β d'_β), ellipsis szerint metsző síkot s keressük a metszet képét. Uj vetitősugárúl az $\alpha\beta$ síkok ($N_m D'_m$) metszetét választjuk, mivel

[1]) L. Fiedler i. h. 215. old.

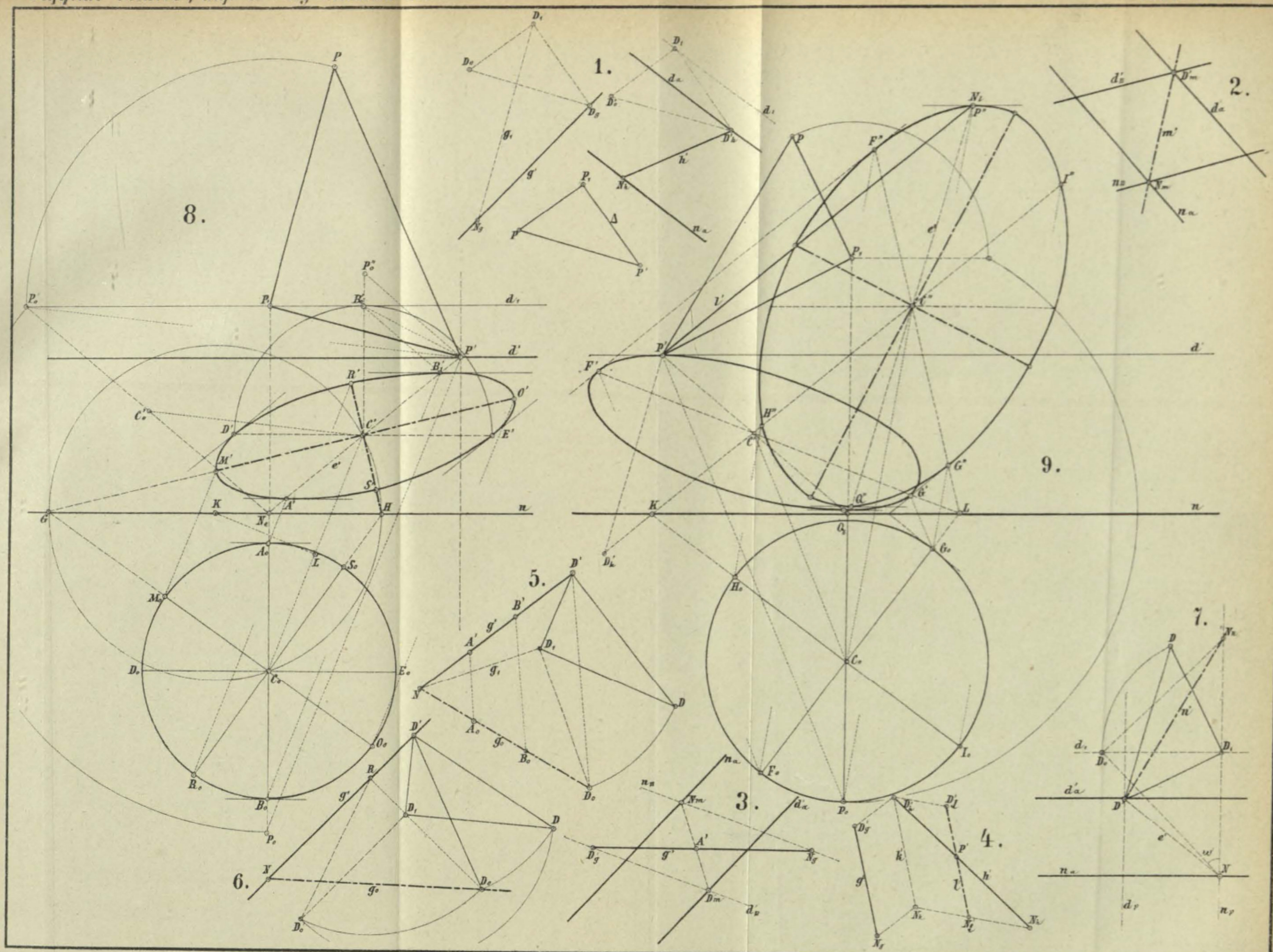
ennél nem csak a metszet, hanem az alap is egyenesbe fog vetíttetni. Az alap képét kapjuk, ha az alap képéhez $N_m D'_m$-tel párhuzamosan érintőket szerkesztünk (a leforgatás segítségével); az $F''G''$ köz (Strecke), melyet az $F'F''$, $G'G''$ érintők az alapsík n_α nyomán lemetszenek, lesz az alap új képe. A csúcs új képét az S'-en keresztül az új vetítősugárral párhuzamosan vont egyenes S'' nyomában kapjuk; s igy $S''F''G''$ a kúp új képe, és n_β-nak azon köze, mely e háromszögben foglaltatik, adja a metszet képét ($f''g''$). Az f'' g'' pontokból visszavetítés által az $F'S'$, $G'S'$ alkotókon az $f'g'$ pontokat kapjuk; $f'g'$ ellipsisátmérő, mely a centrumos collineátió alapján a homolog $F'G'$-tel a collineátiós tengely ugyanazon ψ pontjában találkozik. A vele kapcsolt átmérő $\parallel D'_m N_m$-mel; meghatározására felezzük az $f'g'$-et a c' pontban, melyhez az $S'c'$ collineátiós sugárral a homolog C' pontot keressük; ezen keresztül $H'J' \parallel N_m D'_m$ egyenest vonjuk, mely a kapcsolt átmérő homolog egyenese; hogyha ennek az ellipsisen fekvő H', J' pontjait összekötjük az S'-tel, úgy a $h'i' \parallel N_m D'_m$ egyenesen a kapcsolt átmérő $h'i'$ végpontjait kapjuk. Ezen pontokat az új képből is szerkeszthetjük az ábrából látható módon.

Bármely BS alkotón megkapjuk az ellipsispontot, hogy ha az alkotó $B''S''$ új képét keresvén, az itt nyert b'' átdöféspontot visszavetítjük a $B'S'$-re; a $b'\varphi$ érintőt a b pontbeli érintősíknak β síkkal való metszéséből kapjuk, vagy a collineátió alapján: a b' homolog B' pontjában $B'\varphi$ érintőt vonunk, melynek φ metszéspontját a collineátiós tengelylyel összekötjük a b' ponttal.

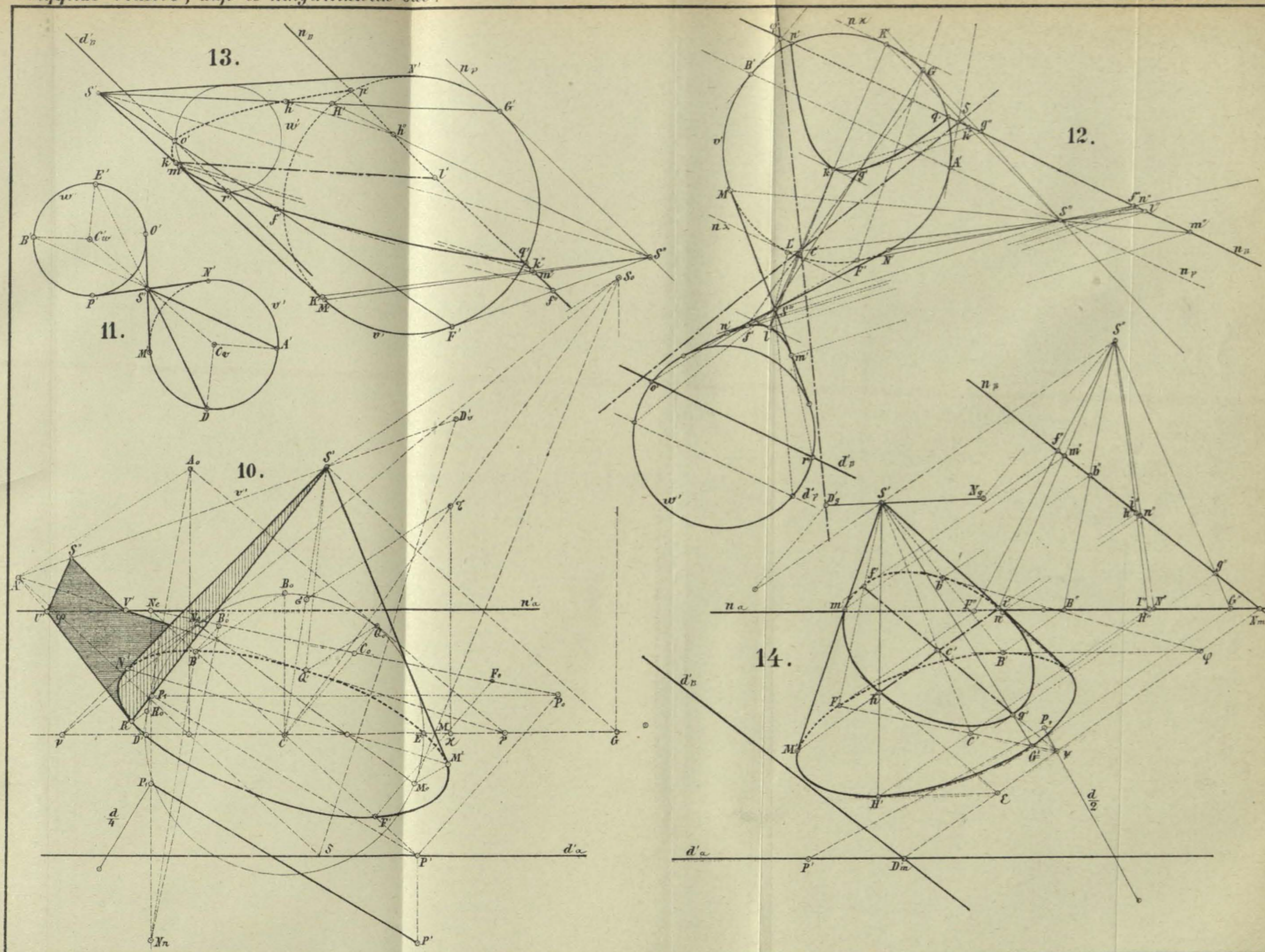
18. Még egyszerűbb az elv alkalmazása, midőn a kúp nyoma és distáncgörbéje által van megadva (14). Legyen (12. ábra) v' a kúp nyoma, w' a distáncgörbéje és S' a csúcsa; (n_β d'_β) oly sík, mely a kúpot hyperbolában metszi. A kúp csúcsán át β-val párhuzamos (n_γ d'_γ) síkot vezetünk, mely a kúpot az $A'S'$, $B'S'$ alkotókban metszi. Ezen esetben a β sík bármely vonala lehet vetítősugár; a kúp csúcsának új képe az n_γ-ban lesz, péld. SS'' vetítősugárt véve S''-ben. Az S''-ből v-hoz szerkesztett $F'S''$, $G'S''$ érintők az új kép szélső alkotói, melyek az n_β-ból a metszet $f''g''$ képét kimetszik. Az f'' g''-ből visszavetítés által f' g' pontokat kapjuk, melyekben az érintők

párhuzamosak $S' S''$-vel; azaz $f' g'$ egy átmérő. Valamely $K'S'$ alkotó k' átdöféspontját kapjuk, ha $K' S''$ új képének n_{β}-val való k'' metszéspontját visszavetítjük; az érintőt a k' pontban a collineátió alapján kapjuk. A hyperbola assymptotáit az $A'S'$, $B'S'$ alkotók szolgáltatják; uj képök az n_{γ} ellentengelybe esik. Ha $A'B'$ pontokban a körhöz érintőket szerkesztünk, s ezeknek $_{n}\beta$-val való δ φ metszéspontjain át párhuzamosakat vonunk $A' S'$, illetőleg $B' S'$-tel, úgy ezek az assymptoták, melyek átmennek az $f'g'$ átmérő C' felezőpontján, a hyperbola középpontján.

19. A 13. ábrában bemutatom a hasonló adatok alapján szerkesztett parabolametszetet. A csúcson keresztülmenő, β metszősíkkal párhuzamos sík a kúpot az $S' G'$ alkotóban érinti; vagy más szóval, az n_{γ} ellentengely a kört érinti. A szerkesztés itt is ugyanaz, mint az előbbi esetben.



Szerk. szerző.
M. T. Ak. Ért. a math. tud. köréből 1879. VII k. 9 sz.
Ny. Pataki J. udv. mint. Budapesten 1880.



Nyi. Pataki J. udv. műint. Budapesten 1880.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Fréia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgésforrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában. 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretű homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktani trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámítása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.

Budapest, 1880 Az Athenaeum r. társ könyvnyomdája