ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.

VIII. KÖTET. III. SZÁM. 1881.

A BÓLYAI-FÉLE ALGORITHMUS.

Dr. FARKAS GYULÁTÓL.

(A III. osztály ülésén 1881. febr. 14. beterjesztette Szily K. r. t.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1881.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

A BÓLYAI-FÉLE
ALGORITHMUS.

Dr. FARKAS GYULÁTÓL.

(A III. osztály ülésén 1881. febr. 14. beterjesztette Szily K. r. t.)

BUDAPEST, 1881.
A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.

A Bólyai-féle algorithmus.

Nevezzük így Bólyai Farkas által Tentamenjának első kötetében a 412., 413. és 414. oldalokon először tárgyalt kifejezést, mely az $x^m = a + x$ egyenletben gyökeredzik. Ez egyenletből folyólag $x = \sqrt[m]{a + x}$. A jobb-oldali x-et szakadatlanúl a teljes jobb-oldallal váltva fel, jutunk Bólyaival algorithmusához, a mi tehát nem egyéb, mint végetlen gyökláncz. Sem Bólyainál, sem egyebütt nincsenek kutatva azon föltételek, melyek alatt ez algorithmus valóban gyöke az egyenletnek, melyből származik. Dr. König Gyula úr tett figyelmessé e körülményre s az itt következendők eme hézag némi pótlását czélozzák.

A tárgyalás egyszerüsítése végett az

1. $$x^m = a + bx$$

általánosabb alakú egyenletből indulok ki, és noha az elértem eredmények némelyei más esetekben is érvényesek, hogy bizonyos tekintetben kikerekített egészet képezzenek, már előzetesen fölteszem, hogy m positiv egész szám és a, b reális véges mennyiségek. Irjuk

2. $$x_1 = \sqrt[m]{a}, \quad x_2 = \sqrt[m]{a + bx_1}, \quad x_3 = \sqrt[m]{a + bx_2}, \quad \ldots$$

Nyilvánvalólag, $x_\infty = x$, ha

3. $$(x_{k+1})_{k=\infty} = (x_k)_{k=\infty},$$

és csakis ekkor. Mondjuk az e föltételnek eleget tevő x_∞-ről hogy összetartó.

I. Minthogy az 1. egyenlet minden gyöke véges, az összetartáshoz okvetetlenűl szükséges, hogy az algorithmus értéke véges legyen. Erre nézve állítom, hogy $m > 1$ miatt az algorithmus értéke mindig véges.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a és b positiv, és hogy mindenkor a positiv reális gyök jő számításba, vagyis hogy minden egyes gyökjel 0 argumentumra lesz vonatkoztatva. Ha p reális positiv szám és elég nagy arra, hogy

$$p > \sqrt[m]{a+bp}$$

legyen, ha továbbá

$$z_1 = \sqrt[m]{a+bp}, \quad z_2 = \sqrt[m]{a+bz_1}, \quad z_3 = \sqrt[m]{a+bz_2}, \ldots$$

teszszük, úgy $p > z_1$ miatt, $z_1 > z_2$, e miatt $z_2 > z_3$, e miatt $z_3 > z_4$ s i. t. Azonban $x_k < z_k$, és ha a, b és a gyökök minőségének megszorítását mellőzve, x'_k-et irunk x_k helyett, $x_k >$ mod. x'_k.

II. Azon esetek, melyekben a (tulajdonképen hátulról előre-felé kiszámítandó) gyökláncz bármelyik gyökvonásnál imaginárissá válik, kizárják használhatóságát. Ez eseteket már csak ezért is mellőzöm. A többit így osztályozom:

1. a positiv, b positiv,
2. a positiv, b negativ, $a >$ mod $b\sqrt[m]{a}$,
3. a positiv, b negativ, $a <$ mod $b\sqrt[m]{a}$,
4. a negativ, b positiv,
5. a negativ, b negativ,

(3.–5.:) m páratlan.

Hozzáteszem még, hogy az 1. és 2. alatti esetekben, akkor is, midőn m páros, minden gyökjel 0 argumentumra lesz vonatkoztatva. Ha ugyanis páros m-nél a gyökjeleket 0 helyett $m\pi$ argumentumra vonatkoztatjuk, ez annyi, mint b és az egész kifejezés előjelét ellenkezőre változtatva, a gyökjeleket 0 argumentumra vonatkoztatni, odaértve, hogy ez egyáltalán lehetséges, ellenkező esetben feltevésünknek, hogy t. i. a kifejezés minden pontjában reális, vége szakad.

Fontoljuk meg továbbá, hogy, ha m páratlan, $x_k = f(a, b)$ téve, $f(-a, b) = -f(a, b)$. Ennek következtében a 4. és 5. alatti esetek nem tartalmaznak újat.

III. A következő tételeket fogom megállapítani:
az 1. alatti esetben az algorithmus összetartó,

a 2. alattiban, ha valamely, különben tetszőleges véges k mellett $mx_{2k}^{m-1} > -b$,

a 3. alatti esetben nem összetartó.

1. Irjuk

$$\frac{bx_1^2}{ma} = v_0, \quad \frac{bx_2}{m\,(a+bx_1)} = v_2, \quad \frac{bx_3}{m\,(a+bx_2)} = v_2, \ldots\ldots$$

Ha p reális positiv szám,

$$4. \qquad \sqrt[m]{1+p} < 1 + \frac{p}{m}.$$

Ennek folytán

$$(x_2 = \sqrt[m]{a+bx_1}) < x_1 + v_0,$$

tehát

$$(x_3 = \sqrt[m]{a+bx_2}) < \sqrt[m]{a+bx_1+bv_0}$$

és igy 4.

$$x_3 < x_2 + v_0 v_1,$$

tehát

$$(x_4 = \sqrt[m]{a+bx_3}) < \sqrt[m]{a+bx_2+bv_0v_1}$$

és így 4.

$$x_4 < x_3 + v_0 v_1 v_2$$

Folytatólag találjuk, hogy

$$x_{k+1} < x_k + v_0 v_1 v_2 \ldots v_{k-1}.$$

Behelyezve ide a v értékeket, $\frac{a}{b} = c$ téve és kissé más rendezést eszközölve, lesz

$$x_{k+1} - x_k < \frac{x_1}{c}\,\frac{x_k}{m^k}\,\frac{x_1}{c+x_1}\,\frac{x_2}{c+x_2} \cdots \frac{x_{k-1}}{c+x_{k-1}}$$

Másrészt pedig

$$x_{k+1} - x_k > o.$$

Világos, hogy $(x_{k+1} - x_k)_{k=\infty} = o.$

2. Irjuk $b=-b'$, s fontoljuk meg mindenekelőtt, hogy $a>b'x_1$ miatt még inkább

$$a>b'x_2,\quad a>b'x_3,\quad \ldots.$$

Nyilvánvalólag

$$o<\sqrt[m]{a-b'x_1}<\sqrt[m]{a},$$

azaz

$$o<x_2<x_1.$$

Ennek alapján

$$\sqrt[m]{a}>\sqrt[m]{a-b'x_2}>\sqrt[m]{a-b'x_1},$$

azaz

$$x_1>x_3>x_2.$$

Ennek alapján

$$\sqrt[m]{a-b'x_1}<\sqrt[m]{a-b'x_3}<\sqrt[m]{a-b'x_2},$$

azaz

$$x_2<x_4<x_3.$$

Igy haladva, ezen hármas egyenlőtlenségi sorozathoz jutunk:

$$5.\quad \left\{\begin{array}{c} x_1>x_3>x_5>\ldots \\ x_2<x_4<x_6<\ldots \\ x_1>x_2<x_3>x_4<x_5>x_6<\ldots. \end{array}\right.$$

Vezessük be a következő rövidítéseket:

$$\frac{b'x_2}{m(a-b'x_1)}=u_1,\quad \frac{b'x_4}{m(a-b'x_3)}=u_3,\quad \frac{b'x_6}{m(a-b'x_5)}=u_5,\quad \ldots$$

A 4. alatti egyenlőtlenség folytán

$$(x_1=\sqrt[m]{a-b'x_1+b'x_1})<x_2+x_1u_1,$$

tehát

$$(x_3=\sqrt[m]{a-b'x_2})<\sqrt[m]{a-b'x_1+b'x_1u_1}$$

és így 4.

$$x_3 < x_2 + x_1 u_1^2,$$

tehát

$$(x_3 = \sqrt[m]{a - b' x_2}) < \sqrt[m]{a - b' x_3 + b' x_1 u_1^2}$$

és így 4.

$$x_3 < x_4 + x_1 u_1^2 u_3,$$

tehát

$$(x_5 = \sqrt[m]{a - b' x_4}) < \sqrt[m]{a - b' x_3 + b' x_1 u_1^2 u_3},$$

és így 4.

$$x_5 < x_4 + x_1 u_1^2 u_3^2.$$

Ekként folytatva találjuk, hogy

$$\begin{cases} x_{2k-1} - x_{2k} < x_1 (u_1 u_3 \dots u_{2k-3})^2 u_{2k-1}, \\ x_{2k+1} - x_{2k} < x_1 (u_1 u_3 \dots u_{2k-1})^2. \end{cases}$$

A jobb-oldalok k-nak növekedtével o végértékhez fognak közeledni, ha valamely véges h mellett

$$\frac{b' x_{2h}}{a - b' x_{2h-1}} < m.$$

Ugyanis a

$$\frac{b' x_{2h}}{a - b' x_{2h-1}} = b' x_{2h}^{\,1-m}$$

identitás alapján ezen föltétel így is formulázható:

$$\frac{b'}{m} < x_{2h}^{\,m-1}.$$

Ámde 5.-ből folyólag még inkább

$$\frac{b'}{m} < x_{2(h+1)}^{\,m-1}, \qquad \frac{b'}{m} < x_{2(h+2)}^{\,m-1}, \qquad \dots .$$

Minthogy továbbá 5.

$$x_{2k-1} - x_{2k} > o, \qquad x_{2k+1} - x_{2k} > o,$$

bizonyos, hogy ha a mondott föltételnek elég van téve,

$$(x_{k+1})_{k=\infty} = (x_k)_{k=\infty}.$$

Hogy vajjon áll-e ez tágabb föltétel alatt is, az további kutatást igényelne.

3. Nyilvánvalólag

$$x_1=\sqrt[m]{a} \text{ positiv},$$

$$x_2=\sqrt[m]{a-b'x_1}=-\sqrt[m]{b'x_1-a} \text{ negativ},$$

$$x_3=\sqrt[m]{a-b'x_2}=\sqrt[m]{a+b'\sqrt[m]{b'x_1-a}} \text{ positiv},$$

továbbá, minthogy $a<b'x_1$ miatt még inkább $a<b'x_3$,

$$x_4=\sqrt[m]{a-b'x_3}=-\sqrt[m]{b'x_3-a} \text{ negativ},$$

$$x_5=\sqrt[m]{a-b'x_4}=\sqrt[m]{a+b'\sqrt[m]{b'x_3-a}} \text{ positiv},$$

minthogy $a<b'x_1$ miatt még inkább $a<b'x_5$,

$$x_6=\sqrt[m]{a-b'x_5}=-\sqrt[m]{b'x_5-a} \text{ negativ},$$

$$x_7=\sqrt[m]{a-b'x_6}=\sqrt[m]{a+b'\sqrt[m]{b'x_5-a}} \text{ positiv},$$

s igy t. Felváltva positiv és negativ értékek következnek. E szerint csak úgy létesűlhetne összetartás, ha az értékek o véghatár felé közelednének. Ez azonban nem történhetik, mert, mint már látók, inkább, mint $a < b'x_1$ áll, hogy

$$a < b'x_{2k-1}.$$

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai ho-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgésforrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan. trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hullo csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Alló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.
VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.
VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . . 20 kr.

Budapest, 1881. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.