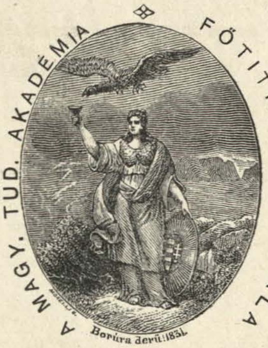
A MAGY. TUD. AKADÉMIA FŐTITKÁRI HIVATALA
Borúra derű! 1831.

ÉRTEKEZÉSEK

A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

XIV. KÖTET. 3. SZÁM. 1889.

AZ ORTHOGONÁLIS SUBSTITUTIÓ EGYÜTTHATÓINAK PARAMÉTERES ÉRTÉKEI.

HUNYADY JENŐ

R. TAGTÓL.

(Mint az ápril 15. tartott székfoglalójának folytatását előadta a III. osztály ülésén, 1889. október 21.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1889.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet. — Második kötet. — Harmadik kötet. — Negyedik kötet. Ötödik kötet.

Hatodik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén I. rész. 1871—1873. Ára 20 kr. — II. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára 20 kr. — III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik *dr. Gruber Lajos* és *Kurländer Ignácz* kir. observatorok. 10 kr. — IV. *Schenzl Guido.* Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. 20 kr. — V. *Gruber Lajos.* A november-havi hullócsillagokról 20 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára 20 kr. — VII. *Konkoly Miklós.* A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára 20 kr. — VIII. *Konkoly Miklós.* Mercur átvonulás a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án 10 kr.

Hetedik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. 10 kr. — *Konkoly Miklós.* Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr. — III. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban IV. rész. Ára 10 kr. — IV. *Konkoly Miklós.* A nap felületének megfigyelése 1878-ban ó-gyallai csillagdán. 10 kr. — VI. *Hunyady Jenő.* A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében 10 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 10 kr. — VIII. *Dr. Weinek László.* Az instrumentális fényhajlás szerepe és Vénus-átvonulás photographiai felvételénél 20 kr. — IX. *Suppan Vilmos.* Kúp- és hengerfelületek önálló ferde vetitésben. (Két táblával.) 10 kr. — X. *Dr. Konek Sándor.* Emlékbeszéd Weninger Vincze l. t. fölött. 10 kr. — XI. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1879-ben. 10 kr. — XII. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok radiatio pontjai, levezetve a magyar korona területén tett megfigyelésekből 1871—1878. végéig 20 kr. — XIII. *Konkoly Miklós.* Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1879-ben. (Egy tábla rajzzal.) 30 kr. — XIV. *Konkoly Miklós.* Adatok Jupiter és Mars physikájához, 1879. (Három tábla rajzzal.) 30 kr. — XV. *Réthy Mór.* A fény törése és visszaverése homogén isotrop átlátszó testek határán. Neumann módszerének általánositásával és bővitésével. (Székf. ért.) 10 kr. — XVI. *Réthy Mór.* A sarkitott fényrezgés elhajlitó rács által való forgatásának magyarázata, különös tekintettel Fröhlich észleteire. 10 kr. — XVII. *Szily Kálmán.* A telitett gőz nyomásának törvényéről. 10 kr. — XVIII. *Hunyadi Jenő.* Másodfoku görbék és felületek meghatározásáról. 20 kr. — XIX. *Hunyady Jenő.* Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva. 20 kr. — XX. *Dr. Frölich Izor.* Az állandó elektromos áramlások elméletéhez. 20 kr.

ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUD. AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.

AZ ORTHOGONÁLIS SUBSTITUTIÓ EGYÜTTHATÓINAK PARAMÉTERES ÉRTÉKEI.

HUNYADY JENŐ
r. tagtól.

(Mint az ápril 15. tartott székfoglalójának folytatását előadta a III. osztály ülésén, 1889. október 21.)

Nagyon közel fekvő gondolat, hogy az orthogonális helyettesítés általános feladata nem-e tárgyalható ugyanazon elvek szerint, mint székfoglaló értekezésemben annak azon különös esete tárgyaltatott, melyben egy térbeli orthogonális koordinátarendszerről egy másik szintén orthogonális rendszerre térünk át.

E sorok czélja kimutatni, hogy a már tüzetesen tárgyalt eseten kívül a probléma még a síkban is ugyanazon elvek szerint tárgyalható, de mihelyt a változók száma a hármat felülmulja, akkor a kifejtett elvek alapján a probléma többé nem tárgyalható, mit különösen négy változó esetében teszünk beláthatóvá.

1. Ha ugyanis a sík P pontjának orthogonális koordinátait az XOY és $X'OY'$ koordinátarendszerekben x, y; és x', y'-nal jelöljük, akkor ha az átmenetet az első koordinátarendszerről a másikra a következő helyettesítések eszközlik:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' \\ y &= a_2 x' + b_2 y' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

a következő azonosság áll fen:

$$x^2 + y^2 \equiv x'^2 + y'^2, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

melyből az (1) alatti helyettesítés együtthatóira nézve a következő egyenletek folynak:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + \quad a_2^2 &= 1 \\ b_1^2 + \quad b_2^2 &= 1 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

a melyekből még továbbá ezek erednek:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + \quad b_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + \quad b_2^2 &= 1 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Amint ismeretes a (3) alatti rendszer egyenletei egymástól függetlenek, a (4) alattiak pedig azok következményei. Miután továbbá a (3) alatti rendszerben az a_1, b_1, a_2, b_2 mennyiségek között három egyenlet áll fenn, abból azon következtetésre jutunk, hogy az (1) alatti orthogonál helyettesítés együtthatói egy változó paraméter függvényeiként előállíthatók.

2. A probléma megoldása czéljából először a következő feladatot oldjuk meg:

Az egészen tetszőleges

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a_1 \xi' + \beta_1 \eta' \\ \eta &= a_2 \xi' + \beta_2 \eta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

helyettesítésekben, melynek determinánsa el nem tűnik, ha

$$\left.\begin{aligned} \xi &= l x, & \eta &= m y \\ \xi' &= l' x', & \eta' &= m' y' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

tétetik, lehetséges-e az l, m, l', m' mennyiségeket úgy meghatározni, hogy x, y és x', y' két orthogonális rendszert constituáljon.

Az (5) alatti egyenletek a (6) alatti helyettesítések által a következőkbe mennek át:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{l'}{l} a_1 x' + \frac{m'}{l} \beta_1 y' \\ y &= \frac{l'}{m} a_2 x' + \frac{m'}{m} \beta_2 y' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

hogy pedig az x, y és x', y' két orthogonális rendszert állapítsanak meg a (3) és (4) alatti egyenleteknél fogva a következő feltételek állanak:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2 \frac{l'^2}{l^2} + \alpha_2^2 \frac{l'^2}{m^2} &= 1 \\ \beta_1^2 \frac{m'^2}{l^2} + \beta_2^2 \frac{m'^2}{m^2} &= 1 \\ \alpha_1\beta_1 \frac{1}{l^2} + \alpha_2\beta_2 \frac{1}{m^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2 \frac{l'^2}{l^2} + \beta_1^2 \frac{m'^2}{l^2} &= 1 \\ \alpha_2^2 \frac{l'^2}{m^2} + \beta_2^2 \frac{m'^2}{m^2} &= 1 \\ \alpha_1\alpha_2 l'^2 + \beta_1\beta_2 m'^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

A (8) alatti feltételek 1-ső és 3-ik egyenletéből, valamint 3-dik és 2-dik egyenletből találjuk, ha

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

hogy

$$\left.\begin{aligned} \frac{l'^2}{l^2} &= \frac{\beta_2}{\alpha_1\Delta}, & \frac{l'^2}{m^2} &= -\frac{\beta_1}{\alpha_2\Delta} \\ \frac{m'^2}{l^2} &= -\frac{\alpha_2}{\beta_1\Delta}, & \frac{m'^2}{m^2} &= \frac{\alpha_1}{\beta_2\Delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Végre a (7) és (1) alatti egyenletek összehasonlítása által, ha még a (10) alatti egyenleteket tekintetbe veszszük, találjuk, hogy:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{\alpha_1\beta_2}{\Delta}, & b_1^2 &= \frac{-\alpha_2\beta_1}{\Delta} \\ a_2^2 &= \frac{-\alpha_2\beta_1}{\Delta}, & b_2^2 &= \frac{\alpha_1\beta_2}{\Delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

mely egyenletekből látjuk, hogy az (1) alatti orthogonális helyettesítés a_1, b_1, a_2, b_2 együtthatói az egészen tetszőleges $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ mennyiségek által vannak kifejezve, mely sajátságos körülmény az előbbi szám azon kimondásával látszik ellentétben lenni, melynél fogva az orthogonális helyettesítés együtthatói egy változó paraméter függvényeiben kifejezhetők.

E látszólagos ellenmondás rögtön meg van magyarázva, ha a (11) alatti képletekben észreveszszük, hogy az $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ mennyiségek csak az $\alpha_1\beta_2$ és $\alpha_2\beta_1$ összeköttetésekben fordulnak elő, úgy hogy ha

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\beta_2 &= p \\ -\alpha_2\beta_1 &= q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

a (11) alatti képletek a következő alakot veszik fel

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{p}{p+q} & b_1^2 &= \frac{q}{p+q} \\ a_2^2 &= \frac{q}{p+q} & b_2^2 &= \frac{p}{p+q} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

mely képletekből világosan kivehető, hogy az orthogonális substitutió együtthatói a p és q paraméterek viszonya áttal vannak meghatározva.

3. A (11) alatti képletekből nyerjük az eddig ismeretes paraméterelőállításokat, ha

a) A (13) alatti egyenletekben

$$\begin{aligned} p &= \cos^2\vartheta \\ q &= \sin^2\vartheta \end{aligned}$$

tétetik, akkor

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \cos^2\vartheta, & b_1^2 &= \sin^2\vartheta \\ a_2^2 &= \sin^2\vartheta, & b_2^2 &= \cos^2\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

b) Ha pedig a (13) alatti egyenletekben:

$$\begin{aligned} p &= (1-\lambda^2)^2 \\ q &= 4\lambda^2 \end{aligned}$$

tétetik, akkor

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}, & b_1^2 &= \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \\ a_2^2 &= \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}, & b_2^2 &= \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2} \end{aligned}\right|^{*} \quad \ldots \quad (15)$$

* Cayley: «Sur quelques propriétés des déterminants gauches», Czelle Journal f. r. u. a. Mathematik XXXII. köt. 119—123 ll. vagy Baltzer: «Theorie und Anwendung der Determinanten 5. kiadásának 193. lapját.

c) Ha végre a (11) alatti képletekben

$$\alpha_1 = \lambda_3 - \lambda_1, \qquad \beta_1 = \lambda_4 - \lambda_1$$
$$\alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_2, \qquad \beta_2 = \lambda_4 - \lambda_2$$

tétetik, akkor miután

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \lambda_3 - \lambda_1 & \lambda_4 - \lambda_1 \\ \lambda_3 - \lambda_2 & \lambda_4 - \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \lambda_3 - \lambda_4 & \lambda_4 - \lambda_1 \\ \lambda_3 - \lambda_4 & \lambda_4 - \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_3 - \lambda_4 & \lambda_4 - \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$\varDelta = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4),$$

hogy akkor:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}, & b_1^2 &= -\frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)} \\ a_2^2 &= -\frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}, & b_2^2 &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)} \end{aligned}\right\}^{*} \quad (16)$$

4. A megelőző számokban az orthogonális substitutió problémáját a síkban, valamint székfoglaló értekezésemben ugyanazon problémát a térben, sajátságos úton oldottuk meg, itt tehát okvetlenűl azon kérdés tárul fel előttünk, hogy az orthogonális substitutió általános problémája nem volna-e szintén ugyanolyan úton megoldható.

Hogy az orthogonális substitutió átalános problémája, azaz n változó esetében ezen az úton meg nem oldható, azt a legközelebbi eseten, azaz azon, a melyben a változók száma 4, fogjuk kimutatni.

Ismeretes ugyanis, hogy ha a következő helyettesítések:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' + d_1 p' \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' + d_2 p' \\ z &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' + d_3 p' \\ p &= a_4 x' + b_4 y' + c_4 z' + d_4 p' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

a következő azonosságot:

$$x^2 + y^2 + z^2 + p^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 + p'^2 \quad . \quad . \quad (18)$$

* Hoesse: Vorlesungen aus der analitischen Geometrie der geraden Linie etc. etc. 2. kiadásában 119—123. ll.

kielégítik, hogy akkor a (17) alatti substitutiú orthogonálisnak neveztetik, a (17) alatti orthogonális helyettesítés együtthatói pedig a következő feltételeknek vannak alávetve:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = 1 \\ d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4 = 0 \\ a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 + a_4 d_4 = 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = 0 \\ b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 + b_4 d_4 = 0 \\ c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 + c_4 d_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (20)$$

5. Itt is azon kérdést vetjük fel, hogy ha a ξ, η, ζ és π mennyiségek a ξ', η', ζ' és π' mennyiségeknek tetszőleges lineáris függvényei, azaz ha

$$\left.\begin{aligned} \xi = \alpha_1 \xi' + \beta_1 \eta' + \gamma_1 \zeta' + \delta_1 \pi' \\ \eta = \alpha_2 \xi' + \beta_2 \eta' + \gamma_2 \zeta' + \delta_2 \pi' \\ \zeta = \alpha_3 \xi' + \beta_3 \eta' + \gamma_3 \zeta' + \delta_3 \pi' \\ \pi = \alpha_4 \xi' + \beta_4 \eta' + \gamma_4 \zeta' + \delta_4 \pi' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21)$$

mely helyettesítésnek:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

determinánsa el nem tűnik, tudjuk-e az l, m, n, u; l', m', n', u' szorzókat úgy meghatározni, hogy ha

$$\left.\begin{aligned} \xi = lx \,, \quad & \xi = l'x' \\ \eta = my, \quad & \eta = m'y' \\ \zeta' = nz \,, \quad & \zeta' = n'z' \\ \pi = up \,, \quad & \pi' = u'p' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

tétetik, hogy akkor az x, y, z, p; és x', y', z', p' két orthogonális rendszert constituáljanak.

A (21) és (23) alatti egyenletekből ezek erednek:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \alpha_1 \frac{l'}{l} x' + \beta_1 \frac{m'}{l} y' + \gamma_1 \frac{n'}{l} z' + \delta_1 \frac{u'}{l} p' \\
y &= \alpha_2 \frac{l'}{m} x' + \beta_2 \frac{m'}{m} y' + \gamma_2 \frac{n'}{m} z' + \delta_2 \frac{u'}{m} p' \\
z &= \alpha_3 \frac{l'}{n} x' + \beta_3 \frac{m'}{n} y' + \gamma_3 \frac{n'}{n} z' + \delta_3 \frac{u'}{n} p' \\
p &= \alpha_4 \frac{l'}{u} x' + \beta_4 \frac{m'}{u} y' + \gamma_4 \frac{u'}{u} z' + \delta_4 \frac{u'}{u} p'
\end{aligned}\right\} . \qquad (24)$$

és így annak a feltételei, hogy x, y, z, p; és x', y', z', p' két orthogonális rendszerhez tartozók legyenek a (19) és (20) alatti egyenleteknél fogva ezek:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1^2 \frac{l'^2}{l^2} + \alpha_2^2 \frac{l'^2}{m^2} + \alpha_3^2 \frac{l'^2}{n^2} + \alpha_4^2 \frac{l'^2}{u^2} &= 1 \\
\beta_1^2 \frac{m'^2}{l^2} + \beta_2^2 \frac{m'^2}{m^2} + \beta_3^2 \frac{m'^2}{n^2} + \beta_4^2 \frac{m'^2}{u^2} &= 1 \\
\gamma_1^2 \frac{n'^2}{l^2} + \gamma_2^2 \frac{n'^2}{m^2} + \gamma_3^2 \frac{n'^2}{n^2} + \gamma_4^2 \frac{n'^2}{u^2} &= 1 \\
\delta_1^2 \frac{u'^2}{l^2} + \delta_2^2 \frac{u'^2}{m^2} + \delta_3^2 \frac{u'^2}{n^2} + \delta_4^2 \frac{u'^2}{u^2} &= 1
\end{aligned}\right\} . \; . \qquad (25)$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 \beta_1 \frac{1}{l^2} + \alpha_2 \beta_2 \frac{1}{m^2} + \alpha_3 \beta_3 \frac{1}{n^2} + \alpha_4 \beta_4 \frac{1}{u^2} &= 0 \\
\alpha_1 \gamma_1 \frac{1}{l^2} + \alpha_2 \gamma_2 \frac{1}{m^2} + \alpha_3 \gamma_3 \frac{1}{n^2} + \alpha_4 \gamma_4 \frac{1}{u^2} &= 0 \\
\alpha_1 \delta_1 \frac{1}{l^2} + \alpha_2 \delta_2 \frac{1}{m^2} + \alpha_3 \delta_3 \frac{1}{n^2} + \alpha_4 \delta_4 \frac{1}{u^2} &= 0 \\
\beta_1 \gamma_1 \frac{1}{l^2} + \beta_2 \gamma_2 \frac{1}{m^2} + \beta_3 \gamma_3 \frac{1}{n^2} + \beta_4 \gamma_4 \frac{1}{u^2} &= 0 \\
\beta_1 \delta_1 \frac{1}{l^2} + \beta_2 \delta_2 \frac{1}{m^2} + \beta_3 \delta_3 \frac{1}{n^2} + \beta_4 \delta_4 \frac{1}{u^2} &= 0 \\
\gamma_1 \delta_1 \frac{1}{l^2} + \gamma_2 \delta_2 \frac{1}{m^2} + \gamma_3 \delta_3 \frac{1}{n^2} + \gamma_4 \delta_4 \frac{1}{u^2} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

6. Az $\frac{1}{l^2}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}$-ben lineáris és homogén (26) alatti

hat egyenletből következik, hogy ezek, ha az $\frac{1}{l^2}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{u^2}$ 0-értékeitől eltekintünk, ha a következő hat soros és négy oszlopos matrix valamennyi determinánsa eltűnik, mit így akarunk jelölni:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_3\beta_3 & \alpha_4\beta_4 \\ \alpha_1\gamma_1 & \alpha_2\gamma_2 & \alpha_3\gamma_3 & \alpha_4\gamma_4 \\ \alpha_1\delta_1 & \alpha_2\delta_2 & \alpha_3\delta_3 & \alpha_4\delta_4 \\ \beta_1\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \beta_3\gamma_3 & \beta_4\gamma_4 \\ \beta_1\delta_1 & \beta_2\delta_2 & \beta_3\delta_3 & \beta_4\delta_4 \\ \gamma_1\delta_1 & \gamma_2\delta_2 & \gamma_3\delta_3 & \gamma_4\delta_4 \end{matrix} \right\| = 0, \quad . \quad (27)$$

mely symbolikus egyenlet első tagjában előforduló matrixból 15 negyedfokú determináns képezhető lévén a (27) alatti symbolikus egyenlet ezen 15 negyedfokú determináns eltünését fejezi ki.

A kérdéses 15 negyedfokú determináns eltünése, ugyanannyi megszorítást állapít meg a (21) alatti helyettesítés 16 $\alpha_1, \beta_1, \ldots . \delta_4$ együtthatóira nézve ezek közűl tehát csak egy lesz szabadon választható.

Feltéve tehát, hogy a (21) alatti helyettesítés 16 együtthatója az említett 15 feltételt kielégíti, a (25) és (26) alatti egyenletekből képesek vagyunk

$$\begin{matrix} \frac{l'^2}{l^2}, & \frac{m'^2}{l^2}, & \frac{n'^2}{l^2}, & \frac{u'^2}{l^2} \\ \frac{l'^2}{m^2}, & \frac{m'^2}{m^2}, & \frac{n'^2}{m^2}, & \frac{u'^2}{m^2} \\ \frac{l'^2}{n^2}, & \frac{m'^2}{n^2}, & \frac{n'^2}{n^2}, & \frac{u'^2}{n^2} \\ \frac{l'^2}{u^2}, & \frac{m'^2}{u^2}, & \frac{n'^2}{u^2}, & \frac{u'^2}{u^2} \end{matrix}$$

meghatározni, tehát a (17) alatti orthogonális helyettesítés együtthatóit is, de mindnyájukat csak egy független paraméter által, a mi magában véve absurdum.

Miután a (27) alatti mátrix 15 negyedfokú determinánsa sem független egymástól, hanem amint a STERN-féle * tétel mutatja 9-ből a hátralevő hat meg van határozva, úgy hajlandók volnánk hinni, hogy az előbb említett 15 feltétel, szintén már 9-ből következik, de ez tényleg nincs úgy, miután azon hat egyenlet, mely STERN úr tétele szerint, a hat hátralevő negyedfokú determinánst 9 által meghatározza, felmondja a szolgálatot, azaz identikussá válik, mihelyest a 9 negyedfokú determináns eltűnik.

7. Végre felhasználom az alkalmat, hogy székfoglaló értekezésem némely pontjára nézve még egyet mást megjegyezzek.

Székfoglaló értekezésem II. fejezetében (lásd a 20—26 ll.) térbeli promléma tárgyalásánál elért eredmény a következőkben foglalható össze.

Ha

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{matrix}$$

olyan mennyiségeket értünk, melyek a következő feltételt:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \quad (28)$$

kielégítik, akkor az orthogonális substitutió $a_3, b_1, \ldots c_3$ együtthatói a következőképen vannak meghatározva:

$$\left.\begin{matrix} a_1^2 = \dfrac{\alpha_1 A_1}{\varDelta}, & b_1^2 = \dfrac{\beta_1 B_1}{\varDelta}, & c_1^2 = \dfrac{\gamma_1 C_1}{\varDelta} \\ a_2^2 = \dfrac{\alpha_2 A_2}{\varDelta}, & b_2^2 = \dfrac{\beta_2 B_2}{\varDelta}, & c_2^2 = \dfrac{\gamma_2 C_2}{\varDelta} \\ a_3^2 = \dfrac{\alpha_3 A_3}{\varDelta}, & b_3^2 = \dfrac{\beta_3 B_3}{\varDelta}, & c_3^2 = \dfrac{\gamma_3 C_3}{\varDelta} \end{matrix}\right\} \quad . \; . \quad (29)$$

* L. STERN: «Über die Bestimmung der Constanten in der Variationsrechnung» czímű értekezésében a 4. számot és tovább. [Abhandlungen der kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd. XIII]. STERN tétele a következőképen kimondható az n $\begin{matrix}\text{soros}\\ \text{oszlopos}\end{matrix}$ és k $\begin{matrix}\text{oszlopos}\\ \text{soros}\end{matrix}$ (feltéve, hogy $n \geq k$) mátrix $\binom{n}{k}$ k-dik fokú determinánsaiból $k\,(n-k)+1$-ből a többi meghatározható.

hol

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

$A_1, B_1, \ldots . C_2$ alatt pedig a $\varDelta$ determinánsban az $\alpha_1, \beta_1, \ldots \gamma_3$ elemeknek az együtthatóit értjük.

A $\varDelta$ determinánsról itt még különösen kiemeljük, hogy annak eltünnie nem szabad, a mit székfoglaló értekezésünkben hallgatva tételeztünk fel, miután kiinduló pontunkat a 11. sz. (1) alatti vonalos helyettesítés képezte.

A 26. l. (24) alatti egyenlethez tartozó jegyzetben pedig megjegyeztük, hogy minden félreértés kikerülése miatt kiemeljük, hogy az $\alpha_1, \beta_1, \ldots . \gamma_3$ paraméterek három független paraméterrel æquivalensek, a nélkül, hogy ezen állításunkat bebizonyítottuk volna; e hézagpótló bebizonyítást a következőkben közöljük.

8. Ha ugyanis a (29) alatti egyenletekben a számlálókat kifejtett alakjukban írjuk, akkor azok még így is írhatók:

$$\left.\begin{aligned}
a_1^2 &= \frac{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2}{\varDelta}, & b_1^2 &= \frac{\beta_1\gamma_2\alpha_3 - \beta_{13}\gamma\alpha_2}{\varDelta} \\
&& c_1^2 &= \frac{\gamma_1\alpha_2\beta_3 - \gamma_1\alpha_3\beta_2}{\varDelta} \\
a_2^2 &= \frac{\alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3}{\varDelta}, & b_2^2 &= \frac{\beta_2\gamma_3\alpha_1 - \beta_2\gamma_1\alpha_3}{\varDelta} \\
&& c_2^2 &= \frac{\gamma_2\alpha_3\beta_1 - \gamma_2\alpha_2\beta_3}{\varDelta} \\
a_3^2 &= \frac{\alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1}{\varDelta}, & b_3^2 &= \frac{\beta_3\gamma_1\alpha_2 - \beta_3\gamma_2\alpha_1}{\varDelta} \\
&& c_3^2 &= \frac{\gamma_3\alpha_1\beta_2 - \gamma_3\alpha_2\beta_1}{\varDelta}
\end{aligned}\right\} . \quad (31)$$

a (30) alatti determinánst pedig szintén kifejtve így:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta = \; & \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 \\
+ & \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 \\
+ & \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1
\end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (32)$$

már most szembetűnő, hogy a (31) alatti egyenletek számlálóiban és közös nevezőjében az $\alpha_1, \beta_1, \ldots \gamma_3$ mennyiségeknek csak a következő hat összeköttetése fordul elő:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 \beta_2 \gamma_3, & \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 \\ \alpha_2 \beta_3 \gamma_1, & \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 \\ \alpha_3 \beta_1 \gamma_2, & \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 \end{array}$$

azért tehát, ha a következő jelöléseket vezetjük be:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 = p_1 & \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 = q_1 \\ \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 = p_2 & \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 = q_2 \\ \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 = p_3 & \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 = q_3 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (33)$$

akkor a (31) és (31) alatti egyenletek a következőkbe mennek át:

$$\left.\begin{array}{lll} a_1^2 = \dfrac{p_1 - q_1}{\varDelta}, & b_1^2 = \dfrac{p_3 - q_2}{\varDelta}, & c_1^2 = \dfrac{p_2 - q_3}{\varDelta} \\ a_2^2 = \dfrac{p_2 - q_2}{\varDelta}, & b_2^2 = \dfrac{p_1 - q_3}{\varDelta}, & c_2^2 = \dfrac{p_3 - q_1}{\varDelta} \\ a_3^2 = \dfrac{p_3 - q_3}{\varDelta}, & b_3^2 = \dfrac{p_2 - q_1}{\varDelta}, & c_3^2 = \dfrac{p_1 - q_2}{\varDelta} \end{array}\right\} \quad . \quad (34)$$

a hol már most

$$\varDelta = p_1 - q_1 + p_2 - q_2 + p_3 - q_3 \cdot \quad . \; . \; . \quad (35)$$

Így tehát, ha a (29) és (30) alatti egyenleteket a (34) és (35) alatti alakban írjuk, tisztán látjuk, hogy az orthogonális helyettesítés $a_1, b_1, \ldots c_3$ együtthatói pusztán csak a $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ paraméterektől tehát hat paramétertől függenek. De miután a (34) alatti egyenletek számlálóiban és közös nevezőjében a p és q paraméterek homogénen lépnek fel azokat őt egymástól független paraméternek kell tekintenünk. A (33) alatti jelölésekből pedig világos, hogy a p és q paraméterek a következő megszorításnak vannak alávetve:

$$p_1 p_2 p_3 = q_1 q_2 q_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

A p és q paraméterek végre még egy megszorításnak vannak alávetve, mely az egész probléma megfejtésének alapföltételét képezi, t. i. a (28) alatti feltételnek, melyben a determinánst kifejtve és a (33) alatti jelöléseket tekintetbe véve, a szóban forgó feltételt a következő alakban nyerjük:

$$p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 \quad . \quad . \quad (37)$$

így tehát öt független paraméterrel æquivalensnek bebizonyított hat p és q paraméter még két további t. i. a (36) és (37) alatti megszorításnak lévén alávetve, világos, hogy a hat p és q paraméter csak három paraméterrel æquivalensnek tekinthető és így székfoglaló értekezésünknek 26. lapjának jegyzetében előforduló azon állításunk, hogy az ugyanazon lap (24) alatti egyenleteiben előforduló $\alpha_1, \beta_1, \ldots . \gamma_3$ paraméterek három paraméterrel æquivalensnek tekintendő, be van bizonyítva.

9. Székfoglaló értekezésem egy másik pontjára nézve pedig a következőket jegyzem meg.

Az ottan használt jelölések megtartásával az orthogonális helyettesítés $a_1, b_1, \ldots c_3$ együtthatói között a következő egyenletek állanak:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 \end{aligned}\right\} . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \\ a_1 a_3 + b_2 b_3 + c_1 c_3 = 0 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \end{aligned}\right\} . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

továbbá feltéve, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +1$$

még a következők:

$$\left.\begin{aligned} a_1&=b_2\,c_3-b_3\,c_2, & b_1&=c_2\,a_3-c_3\,a_2, & c_1&=a_2\,b_3-a_3\,b_2,\\ a_2&=b_3\,c_1-b_1\,c_3, & b_2&=c_3\,a_1-c_1\,a_3, & c_2&=a_3\,b_1-a_1\,b_3,\\ a_3&=b_1\,c_2-b_2\,c_1, & b_3&=c_1\,a_2-c_2\,a_1, & c_3&=a_1\,b_2-a_2\,b_1, \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

10. Az i. h. 11. számában, midőn ott az (5), (6), (7) és (8) alatti egyenleteket felállítottuk pusztán csak az itt felsorolt (38)—(41) alatti egyenletekre voltunk tekintettel, holott a (43) alattiakat egészen figyelmen kívül hagytuk. Az i. h. (6) és (8) alatti egyenletei a (9) és (10) alatti feltételekre vezettek, melyekről ki lett mutatva, hogy e két feltétel tulajdonképen csak egy.

Kérdés már most, hogy ha a (43) alatti egyenleteket is alkalmazzuk az i. h. (3) alatti egyenleteiben előforduló együtthatókra, hogy nem vezettetünk az $\alpha_1, \beta_1, \ldots \gamma_3$ mennyiségek új megszorításaira.

Ha székfoglaló értekezésem 11. sz. (3) alatti együtthatóira nézve a (43) alatti egyenletek négyzeteit írjuk fel, akkor azok a következők:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2\frac{l'^2}{l^2} &= \frac{m'^2 n'^2}{m^2 n^2}A_1^2, & \beta_1^2\frac{m'^2}{l^2} &= \frac{l'^2 n'^2}{m^2 n^2}B_1^2,\\ & & \gamma_1^2\frac{n'^2}{l^2} &= \frac{l'^2 m'^2}{m^2 n^2}C_1^2,\\ \alpha_2^2\frac{l'^2}{m^2} &= \frac{m'^2 n'^2}{l^2 n^2}A_2^2, & \beta_2^2\frac{m'^2}{m^2} &= \frac{l'^2 n'^2}{l^2 n^2}B_2^2,\\ & & \gamma_2^2\frac{n'^2}{m^2} &= \frac{l'^2 m'^2}{l^2 n^2}C_2^2,\\ \alpha_2^2\frac{l'^2}{n^2} &= \frac{m'^2 n'^2}{l^2 m^2}A_3^2, & \beta_3^2\frac{m'^2}{n^2} &= \frac{l'^2 n'^2}{l^2 m^2}B_3^2,\\ & & \gamma_3^2\frac{n'^2}{n^2} &= \frac{l'^2 m'^2}{l^2 m^2}C_3^2, \end{aligned}\right\} . \quad (44)$$

ha pedig ezen egyenletekből a $\frac{l'^2}{l^2}, \frac{m'^2}{l^2}, \dots \frac{n'^2}{n^2}$ mennyiségeket az i. h. 14. sz. (23) alatti egyenleteinek segítségével kiküszöböljük, mindössze a következő feltételeket nyerjük:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \Delta = A_1 B_2 C_3, & \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 \Delta = A_1 B_3 C_2 \\ \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 \Delta = A_2 B_3 C_1, & \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 \Delta = A_2 B_1 C_3 \\ \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 \Delta = A_3 B_1 C_2, & \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 \Delta = A_3 B_2 C_1 \end{array}\right\}. \quad (45)$$

a mely feltételi egyenletek egymástól alakilag ugyan különböznek, de azért maguk között, valamint az i. h. 11. számának (9) alatti egyenletével azonosak, miről könnyen meggyőződhetünk *és így a (45) alatti feltételekről kimondhatjuk, hogy azok az* α, β, γ *mennyiségekre nézve új megszorításokat egyáltalában meg nem állapítanak.*

XXI. *Hunyady Jenő.* Tételek a componalt determinánsoknak egy különös neméről. 10 kr. — XXII. *König Gyula.* A raczionális függvények általános elméletéhez. 10 kr. — XXIII. *Silberstein Salamon.* Vonalgeometriai tanulmányok 20 kr. — XXIV. *Hunyady János.* A Steiner-féle kritériumról a kúpszeletek elméletében. 10 kr. — XXV. *Hunyady Jenő.* A pontokból vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok. 10 kr.

Nyolczadik kötet.

I. szám. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1880-ban. *Konkoly Miklóstól.* Egy tábla rajzzal. — II. szám. Adatok Jupiter physikájához az 1880-ik évből. Egy függelékkel. *Konkoly Miklóstól.* — III. szám. A Bólyai-féle algorithmus. *Dr. Farkas Gyulától.* — IV. szám. Napfoltok megfigyelése 1880-ban, és 1382 napfolt micrometricus mérése. *Konkoly Miklóstól.* Két tábla rajzzal. — V. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1880-ban a magyar korona területén. V-ik rész. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. 102 hullócsillag kisugárzási pont, levezetve 518 megfigyelésből, melyek a magyar korona területén 1879. és 1880-ban tétettek. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Új villámzáró vagy nyitókészűlék normálórán, és a Jürgenssen-féle óraszerkezet. *Konkoly Miklóstól.* Egy képtáblával. — IX. szám. Adatok Jupiter forgási elemeihez. *Dr. Kobold Ármintól.* — X. szám. A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendü partialis differentiálegyenletek általános elmélete. Székfoglaló értekezés. *König Gyulától.* — XI. szám. A hadtudomány viszonya a többi tudományokhoz. *Kápolnai Pauer Istvántól.* Székfoglaló értekezés. — XII. szám. Egy negyedrendü felületről. *Hunyady Jenőtől.*

Kilenczedik kötet.

I. szám. Astrophisikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. (Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — II. szám. Az ó-gyallai csillagvizsgáló földrajzi szélessége. *Dr. Lakits Ferencztől.* — III. szám. A herényi astrophysikai observatorium leirása, és az abban tett megfigyelések 1881-ben. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. szám. Napfoltok és a nap felületének megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — V. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. Adatok Jupiter és Mars physikájához, az 1881. évi megfigyelésekből. (III. rész. Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Az üstökösök vegytani alkotása. *Konkoly Miklóstól.* — IX. szám. Az 1871—1880. években, Magyarországban megfigyelt hullócsillagok pályaelemei. *Kövesligethy Radótól.* — X. szám. Néhány determináns-egyenletről. *Hunyady Jenőtől.* — XI. Perspectiv helyzetű alakzatokról *Dr. Klug Lipóttól.* — XII. szám. Az elhajlott fény intenzitásának vizsgálata. (A math. és természettudományi állandó bizottság segélyezésével készült dolgozat. Tizenkét ábrával a szöveg között.) *Dr. Fröhlich Izortól.* — XIII. szám. Az algebrai egyenletek elméletéhez. *König Gyulától.*

Tizedik kötet.

I. A nap felületének megfigyelése 1882-ben. *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések 1882-ben. *a)* A Wells-üstökös szinképe. *b)* A szeptemberi nagy üstökös szinképe. *c)* 9 Meteor szinképe. *d)* 115 állócsillag spectruma. *e)* Coloremetricus megfigyelések. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén. 1882. *Konkoly Miklóstól.* —

IV. Egy uj reversio-spectroscop s annak használata. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — V. Az ó-gyallai csillagvizsgálón eszközölt csillagászati megfigyelések eredménye. 1882. *Konkoly Miklóstól.* — VI. Néhány szó az üstökösök vegytani alkotásáról, összehasonlitva a meteoritekkel. *Konkoly Miklóstól.* — VII. Egy uj szerkezetü spectroscop. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Astrophysikai megfigyelések a herényi observatoriumon, 1882. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. Adatok Jupiter és Mars bolygók physikájához. (Három táblával.) *Gothard Sándortól.* — X. Egy uj spectroscop. (Egy táblarajzzal.) *Gothard Jenőtől.* — XI. Astrophysikai megfigyelések 1883. (Egy táblával.) I. rész. *a)* γ Cassiopejae spectruma. *b)* α Ursae minoris spectruma. *l)* A Swift üstökös spectruma. *d)* A Brooks üstökös spectruma. *e)* Colorimetricus megfigyelése 65 állócsillagnak. *Konkoly Miklóstól.*

Tizenegyedik kötet.

I. Astrophysikai megfigyelések 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. (II-ik rész, 3 tábla.) *Konkoly Miklóstól.* — II. A nap felületének megfigyelése 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — IV. 615 állócsillag spectruma. A déli öv átkutatásának I. része. *Konkoly Miklóstól.* — V. Megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon 1883-ban. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VI. A Pons-Brooks üstökös spectroscopicus megfigyelése a herényi astrophysikai observatoriumon. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VII. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagdán 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Előleges vizsgálatok néhány szénhydrogén-gáz spectrumán, spectroscoppal és spectralphotometerrel. (3 táblával s 2 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — IX. Adatok Bolyai Farkas életrajzához. *Szily Kálmántól.* — X. A herényi astrophysikai observatorium sarkmagasságának meghatározása. *Gothard Jenőtől.*

Tizenkettedik kötet.

I. A napfoltok és a nap felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (1 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (4 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — III. Az 1884. évi megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon. (2 ábra és 3 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. Hulló-csillagok megfigyelése a m. korona területén 1884-ben. 26 radiatio ponttal. *Konkoly Miklóstól.* — V. 615 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.* — VI. A napfoltok gyakoriassága 1872-től 1884 végéig. (2 kőnyomatu táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VII. Adatok Jupiter physikájához. (2 táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Tanulmányok az égitestek photographálása terén. (1 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. A Haynald-observatoriumban 1880—1884-ben megfigyelt napfoltok. *Hüninger Adolftól.* — X. Az 1873. VII. sz. Coggia-Winnecke-féle üstökös pályaszámitása. *Schulhof Lipóttól.* — XI. A folytonos spectrumok elmélete. *Kövesligethi Radótól.*

Tizenharmadik kötet.

I. A földnehézség meghatározása Budapesten 1885-ben (4 táblával). *Gruber Lajostól.* — II. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1885-ben. *Konkoly Miklóstól.* — III. 855 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.*

Tizennegyedik kötet.

I. A dinamika alapegyenleteinek jelentéséről. *Kőnig Gyulától.* — II. Az orthogonális substitutió együtthatóinak paraméteres értékei. *Hunyady Jenőtől.*

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.