VIII.

Bolyai Farkas,
műve,

Bólyai, Farkas, 1775-1856 248

KURZER GRUNDRISS EINES VERSUCHS

I. Die *Arithmetik*, durch zvekmässig construirte Begriffe, von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen.

II. In der *Geometrie*, die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen, und der Krummen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. d. gl. nicht nur scharf zu bestimmen; sondern auch ihr Seyn im Baume zu beweisen: und da die Frage, *ob zwey von der dritten geschnittene Geraden, wenn die summe der inneren Winkel nicht $=2R$, sich schneiden oder nicht?* niemand auf der Erde ohne ein Axiom (wie *Euclid* das XI) aufzustellen, beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern; und eine auf die *Ja-* Antwort, andere auf das *Nein* so zu bauen, dass die Formeln der letzten, auf einen Wink auch in der ersten gültig seyen.

Nach einem lateinischen Werke von 1829. M. Vásárhely, und eben daselbst gedruckten ungrischen.

MAROS VÁSÁRHELY 1851.

NEWTON sagt:

Multiplicatio aptioris vocabuli defectu dici solet, quaerendo novam quantitatem in ea quacunque ratione ad multiplicandum, quam habet multiplicator ad unitatem. Neque tantum fit per abstractas, sed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, superficies, pondera, motum localem etc. quatenus haec ad aliquam sui generis notam quantitatem, tanquam unitatem relatae, rationes numerorum exprimere possunt et vices supplere. Quemadmodum si quantitas A multiplicanda sit per lineam 12 pedum, posito quod linea bipedalis sit unitas; producetur per istam multiplicationem $6A$; quum $6A$ sit in ea ratione ad A, quam habet linea 12 pedum ad unitatem bipedalem.

Atque ita si duas quasvis lineas per se multiplicare oportet: producetur linea, quam Geometria posita unitate rite exhibet . . .

Mos quidem obtinuit, ut genesis seu descriptio superficiei per lineam super alia linea ad rectos angulos motam, dicatur multiplicatio istarum linearum; quamvis linea utcunque multiplicata non possit evadere superficies; adeoque haec superficiei e lineis generatio longe alia sit a multiplicatione: at non alius sensus est, quam quod productum e duabus lineis eam ad linearem unitatem habeat rationem, quam superficies dicta ad superficialem unitatem, si pro hac quadratum, cujus latus unitas linearis est accipiatur . . . Idem ad productum e tribus lineis applicatur . . .

. . . .

I. So klar und bestimmt auch diese Worte des grossen Mannes waren: demungeachtet nahmen viele aus der gemeinen Sprache den Sinn mitnehmende Wörter zu Führern der Wissenschaft, gaben ihr Vorrecht der freyen Construction, Begriffen beschränkter Sphäre zu Preise; und um nicht zu sagen *linie—mal Linie*, und die Division blos theilen zu lassen, weil der Pöbel 2 mal 3 mal nimmt, und in zveye dreye theilt, scheuten keine Künsteleyen, bis zu einem sonderbaren Gaukelspiele, wo unmögliche mit unmöglichen gepaart reelles gebähren, zu einem grösseren Wunder, als aus Nichts etwas zu schaffen.

Die Mathematik müsste sich solcher Wunder schämen: alles was sie behandelt, soll reell anschaulich seyn; und die Operationen sollen so construirt werden, dass alle die Wunder natürlich geschehen. Das wäre ein Wunder: dass auf solchen Gründen, Pfeiler theils aus unmöglichen Stücken, theils ohne vereinigende Kraft allumfassender Begriffe, zwar mit allen Ordnungen des Unendlich-kleinen geziert, den in die Himmels-höhen steigenden Tempel tragen; welcher den seinigen gegen die äussere Stürme Zuflucht bietet, des Wetters manche Blitze ableitet; und zeigt die Erde dem Wanderer der Ewigkeit, als einen bald zurüchbleibenden kothigen Fleck, auf dem heiligen Wege zur Urquelle der Wahrheit, und der alles zu Eins schaffenden Liebe.

II. Newtons Worten gemäs, soll für alle homogene Grössen eine Einheit gedacht werden: woraus auch ferner mannigfaltiger Vortheil entspringt; und sonst manche Ungereimtheiten entstehen: *z. B.*

1. Wenn der Multiplicator *B* einer Linie *a*

nur absract (*z.b.* 2 drittel) seyn soll: das Product wird Linie seyn, wie der Multiplicand. Was ist denn der andere Factor? ist es blos ein Zeiger? oder wovon ist es 2 drittel? ganz abstract hat auch 2 : 3 keinen allgemeinen sinn; denn 2 ist dann von jeden zveyen abstrahirt, und es läst sich davon nur das behaupten, was jedem zukömt: 2 Puncte aber lassen sich durch 3 nicht theilen.

Eigentlich soll man, wenn vom allgemeinen gesprochen wird, immer von den darunter begriffenen eines denken, obwohl jedes gedacht werden kann; man spricht nicht vom Worte, sondern von denen die damit benannt sind.

2. Demnach könnte B nicht $= a$ seyn, wenn a eine Linie ist: folglich wäre aa Unsinn: obwohl von vielen gesagt wird, dass $a + a^2 + a^3$ darum keinen Sinn habe; weil a eine Linie, a^2 Fläche und a^3 Körper sey. Was wird nun a^4, da der Raum nicht 4 Dimensionen hat? und nach was für einem Begriffe der Multiplication kann eine multiplicirte Linie anderes als Linie seyn?

3. Wenn der Multiplicator nur abstract ist: um so mehr verschieden ist es; ob in der Division der Multiplicator oder der Multiplicand zu suchen sey.

4. Da viele auch zum Divisor blos abstracte Zahl nehmen, und behaupten, dass blos concrete negativ seyn kann: so könnte kein negativer Divisor seyn.

5. Das Übrige wird aus den folgenden erhellen: da es nicht versagt werden kann, Begriffe zu construiren, bis zu einem leichter und anschaulicher zum Zwecke führenden Versuche.

§. 1. Die erste Operation ist das *Wegnehmen* von dem, was irgendwo ist: und wenn in dem Gedanken alles bis auf etwas, und dann auch dieses davon weggenommen wird; so sagt man, dass Nichts bleibe, und bezeichnet es mit 0.

§. 2. Dann folgt die Operation des *Hinzuthuns* des A zu B; wovon das Resultat durch $A+B$ bezeichnet werden kann. Es wird gezeigt, dass wenn A oder B, 0 ist, $A+B$ das andere sey; wornach $0+0=0$ wird.

§. 3. Nun kömmt die Operation des *Zählens* nach u; wenn nehmlich zuerst 0 gedacht, und immer u hinzugethan wird: ensteht folgende Reihe 0, u, $u+u$, $u+u+u\ldots$; wo jedes Glied *Zahl* in Hinsicht des u genannt, und jedes besonders bezeichnet wird; z. *B.* $0u$, $1u$, $2u$, $3u\ldots$, wo die Zeichen vor u, die unterscheidende Zahl-namen bedeuten.

Aus §. 2. folgt: dass wenn $u=0$, die 0 jedes namens Zahl in Hinsicht des $u=0$ seyn kann; aber wenn u nicht 0 ist, kann 0 in Hinsicht eines solchen u nur Zahl namens 0 seyn; welches in Fällen der Multiplication und Division klar zum Gesuchten führen wird.

§. 4. Wenn nun A und B, jedes ein Glied der gesagten Reihe ist; z. *B.* $A=3u$, $B=2u$ ist (wo jedes von 2 und 3, Repraesentant jedes Zahl-namens ist): so wird A vom B *drey zweytel*, und B vom A *zwey drittel* genannt; und dieses zu finden heist A und B gegenseitig zu *messen*; und die Operation wird *Messung* genannt. Wenn von A gesagt wird, dass es vom B drey *zweytel* sey, so wird B die *Mass*, und A das *Gemessene*, und wenn vom B gesagt wird, dass es vom A zwey drittel sey, so wird A die *Mass*; und B das *Gemessene* genannt.

§. 5. Nach einer Messung folgen zweye:

und wenn in der Zahl-reihe v statt u gesetzt, $a=3v$ und $b=2v$; so kann man sagen, dass A mit B und a mit b *gleichmässig* (oder in *Gleichmässigkeit*) sind; oder dass A *so vieltes* von B ist, wie a von b (das Wort *viel* nicht wörtlich genommen).

Anmerkung. Indessen wird dieser Begriff der *Proportion*, nach der Verbindung der Quantität mit der Qualität erweitert; schon hier ist allgemeiner folgendes: wenn n, m Zahlnamen bedeuten; und für jedes $A=nu$ und $a=nv$, sey entweder $B=mu$ und $b=mu$, oder $B=mu+(\omega<u)$ und $b=mv+(\lambda<v)$; so sind A, B, a, b in *Proportion*.

§. 6. Nach zwey Messungen folgen mehrere: und um Grössen derselben Gattung leichter zu vergleichen, und die Mass nicht immer nennen zu dürfen; entsteht der Gedanke; *für jede Gattung gewisse Mass zu bestimmen*, und wenn keine Mass genannt wird, *z. B.* unter 2 drittel, das 2 drittel von jener (*Unitas* Einheit) zu verstehen; und dieses auch auf die Zahl-namen auszudehnen, so dass wenn U die Einheit wäre, 2 bedeute $2U$. So *z.B.* venn der Linien Einheit 2′ wäre, 2 drittel bedeute (wenn von Linie die Rede ist) 8″, und 2 bedeute 4′.

§. 7. Und nun entstehen zweyerlei Messungen: *Hauptmessung*, wenn etwas mit seiner Einheit gemessen wird; und *relative*, wenn die Mass genannt wird.

§. 8. Aus der Haupt-messung und der relativen, entstehen die Begriffe de *Multiplication* und *Division*, in einer Zeile dargestellt, wobey aber gesagte Worte nicht wörtlich genommen werden.

Wenn nehmlich 3 und 2 jede Zahl-namen vorstellen, und $1=3u$, $B=2u$; $a=3v$, $b=2v$, wo 1 die Einheit jeder Gattung bedeuten mag: so sagt man, dass *a* mit *B multiplicirt* *b* zum *Producte* gebe; und wird kurz gesagt, dass *B* mal *a* sey *b*; worunter aber das verstanden werden soll; dass *b* in Hinsicht des *a gleichmässig* dem *B* sey (bey *B* da keine Mass genannt wird, die Einheit verstanden). Es ist *der Hauptmessung gleiche relative.*

§. 9. Wenn aber aus *b* und einem von den Factoren *a* und *B*, der andere gesucht wird; die Operation wird *Division* genannt: es fällt in die Augen, dass hier 2 Fälle sind; nehmlich in einem wird im vorigen Beyspiele 2 drittel, im anderen die relative Mass gesucht; und auf die Frage, wie vielmal *a* ist *b*? oder wie vieltes ist *b* vom *a*? antwortet der erste Fall; und auf die Frage, was ist wovon *b* 2 drittel ist, oder was enthält *b* 2drittmal? der zweyte. Der letzte ist *Theilung*, obwohl der gemeine Sinn auch am Theilen in 2 drittel anstöst. Der erste giebt sovieltes von der Einheit als *b* von *a* ist.

Bey dem Bruche z. *B.* $\frac{2C}{3}$ ist der zweyte Fall; in der Proportion $A:B=a:b$ ist der erste.

Die Antwort wird auch auf verschiedene Art hervorgebracht: auf die Frage, wie vielmal so gros ist $\frac{2C}{3}$ als $\frac{4C}{5}$? beyde *C* werden ausgestrichen, und es wird $\frac{2.5}{3.4}$; wenn aber gefragt wird, was enthält $\frac{2C}{3}$ in sich $\frac{4}{5}$ mal? so mus das *C* bleiben, und es wird $\frac{5.2C.}{3.4}$

§. 10. Der Multiplicator von *a*, mag Linie, Gewicht, Zeit, oder was immer seyn; wenn es von seiner Einheit ebensovieltes ist (*z. B.* 2 drittel); giebt dasselbe Product, nehmlich 2 drittel von *a*. Ebenso ist, wenn *b* durch *a* dividirt wird, der erste Fall der Division, und jedes kann Quotient seyn, was seiner Einheit 2 drittel ist, in sofern, dass *a* damit multiplicirt, *b* hervorbringt: aber abgesehen von der Gattung kommt in diesem Falle nur das in Betracht, wie vieltes es von seiner Einheit ist. Im zweyten Falle aber kann *a*, wenn *b* eine Linie ist, nur Linie seyn.

Was die Umtauschung der Factoren anbetrift: kommt in jedem Falle ebensovieltes von der Einheit des Multiplicanden heraus.

Unten (§ 28) wo auch heterogene durch gerade Linien vorgestellt werden: wird alles anschaulicher.

Nach der gleich folgenden Verbindung der Quantität mit der Qualität: wird auch der Begriff der Multiplication und Division erweitert (wie § 5 die Proportion).

§. 11. Wenn Q und q solche Qualitäten sind, und die Bedingung dessen, was zu thun und zum Resultate zu nehmen sey, wenn eine von den Grössen G mit Q und g mit q zu der anderen gesetzt wird, solche ist; dass das Resultát 0 sey wenn $G = g$, und wenn $G > g$, das Resultat dasjenige aus G mit der Qualität Q sey, welches (wenn die kleinere zuerst gesetzt würde) nicht seyn sollte, dass 0 das Resultat wäre: so heissen G mit Q und g mit q *entgegen gesetzte Grössen* (unter gesagter Bedingung). Das eine wird *positiv*, das andere *negativ* genannt: und wenn $G = g$, wird G mit Q des g mit q *Entgegengesetztes* genannt.

Das Zeichen vom positiven mag $+$ und

— vom negativen: $+a$ bedeute das was a, aber $-a$ bedeute das entgegengesetzte von dem was a bedeutet; folglich kann $-a$ auch $+$ seyn.

Beyspiele. G und g sollen Wege eines in einer Geraden vom Puncte a derselben bewegten Punctes, und Q, q die Richtungen der Bewegung (rechts, links) seyn; und zum Resultate soll der Abstand des Endpunctes von a genommen werden.

Die Gerade mag was immer für eine Lage haben. Und ebenso kann der Abstand von einer Geraden oder Ebene gefragt werden.

So sind auch Schulden und Vermögen; und auf einen Punct in derselben Geraden einander entgegen wirkende Kräfte u. d.gl.

Sogar jede Grösse kann, ohne eine andere Qualität, blos mit der, dass aus ihr eine andere nach Möglichkeit abzuziehen verlangt werden kann, als $+$, und die abzuziehende als $-$ angesehen werden: die Bedingung kann fordern, dass nachdem soviel als möchlich abgezogen worden, zum Resultate das genommen werde, was bleibt, entweder aus jenem, oder aus diesem was nicht abgezogen verden konnte.

Es bedeute 2 soviel als $+2$, und $2:3$ positives 2 drittel der Einheit: aber -2 bedeute negative 2 Einheiten, $-(2:3)$ negatives 2 drittel der Einheit.

Anmerkung. 1. Wenn *Peter* 4 Gulden im Beutel und 8 Gulden Schulden, *Paul* 12 *G* und 2 *G* Schulden haben: dass sie nichts haben, sollten Peters 4 *G* Schulden nicht seyn, und dem Paul 10 *G* im Beutel fehlen. Allein Pauls positives tilgt Peters negatives nicht: es sey denn die Bedingung, dass beyder Vermögen zu einem Ziele zusammengeschmolzen werde.

2. Zur Rechtfertigung der sehr vortheil-

haften Anwendung der Entgegengesetzten auf die Geometrie, mus die Bedingung auch construirt werden.

Es soll in einer Ebene E, eine Gerade X vor Augen seyn, und ein Punct a in ihr; ferner soll in X aus a ein Punct links und ein anderer sich rechts bewegen, und Wege des ersten sollen x und des andern x' heissen. Und es mag irgend ein x oder x' seyn: von dessen Ende sollen wieder zwey Puncte sich in der Senkrechten auf X in E bewegen; der vorne Weg heisse y, der hintere y'. Ferner mag irgend eines von y oder y' seyn: zwey Puncte sollen sich wieder von dessen Ende in der Senkrechten auf E bewegen; und der obere Weg heisse z, der untere z'.

Das eine von x und x' wird $+$, und das andere $-$, y und z werden $+$, y' und z' $-$ genommen.

Was x und x' anbetrift: es sey x $+$; dass wenn $x = x'$ ist (ungeachtet der Lage) zusammen 0 gebe, kann die Bedingung folgende seyn, welche auch zu dem Falle dient, wenn x nicht $= x'$. Die gesagte Bewegung von 2 Puncten soll durch einen einzigen verrichtet gedacht werden: so dass von a angefangen zuerst der eine Weg, und von dessen Ende rückwärts der andere beschrieben werde: der Abstand des Endpunctes ist 0, wenn beyde Wege gleich sind; und es ist der obige Fall; auf welchen auch der andere durch folgende Construction reducirt wird.

Wenn irgend eines von x, y, z, zu irgend einem vom x' y' z' unter der Bedingung gesetzt würde; dass die Bewegung der zweyen durch eine, in X repraesentirt sey, und zwar so; dass die Bewegung von a beginne, und x,

y, x, durch links, $x^{\prime}$, $y^{\prime}$, $z^{\prime}$ durch rechts gehende beschrieben werde; und das Resultat auch hier der Abstand des Endpunctes von a sey.

Auch die Peripherie wird von einem Puncte derselben von einer Seite $+$, und $-$ von der andern genommen; zwey Puncte wie vorhin vom ersten angefangen mögen immer fortgehen: auch hier kann die Bewegung zweyer auf die eines Punctes reducirt werden; sogar können der erste Punct in a, und die Wege in X wie vormals gedacht werden.

§. 12. Wenn a, b . . . durch Geraden vorgestellt werden; und a mit einen Ende in a von da links in X gelegt wenn es $+$ ist, rechts wenn es $-$ ist, und von dessen Ende b in X gelegt wird, links wenn es $+$, rechts wenn es $-$ ist, und sofort: der Abstand des letzten Endpunctes von a, wird die *Summe* von a, b ..., genannt. Und es wird bewiesen, dass die *Summanden in jeder Ornung dasselbe hervorbringen*; also auch wenn zuerst alle $+$ve und dann alle negative gesetzt werden. Dasselbe wird von jeder Ordnung der Factoren in der Multiplication bewiesen, ihre Anzahl mag beliebig gross seyn.

Wenn nun $A+B=S$; so kömmt der Gedanke, aus S und A das zu suchen, womit es S zur Summe hervorbringt: diese Operation heist *Subtraction*. Es ist klar, dass das gesuchte $B=S-A$; denn $A+S-A=S$; wovon die Regel folgt, dass das *Entgegengesetzte des Subtrahenden, also der Subtrahend mit ungeänderten Zeichen zu S nehmlich zum sogenannten Minuenden addirt werde.*

§. 13. Da nun auch die Einheit sowohl $+$ als $-$ genommen werden kann: so entstehen

Grössen mit + 1 und Grössen mis —1 begabt; beyde gleich reell, und die letzteren sind, welche man *imoginäre* nennt.

Und nun entseht die § 5 und 10 versprochene Erweiterung der Begriffe. Wenn nehmlich eine Grösse mit der anderen gemessen wird: so wird (um das Gemessene in Hinsicht der Mass näher zu bestimmen) ein *Messbild* aus Antworten auf 3 Fragen gestaltet: I, II, III werden vertical geschrieben; und nach I schreibt man, wie vieltes das Gemessene der Mass ist? (abgesehen von der dazu gelegten Qualität); nach II schreibt man *Ja* oder *Nein*, nachdem beyde + oder beyde — sind, oder nicht (nehmlich das eine + das andere — ist); und nach III wird *Ja* geschrieben, wenn beide mit positiver, oder beyde mit negativer Einheit begabt sind, und wird *Nein* geschrieben, wenn das eine mit positiver, das andere mit negativer Einheit begabt ist.

Nach diesem wird also dann *Gleichmässigkeit*, wenn die zwey Messbilder gleich sind. Folglich erfordert auch die Multiplication *Gleichheit des Messbildes der relativen Messung, mit dem Haupt-Messbilde* (nehmlich dem Messbilde der Haupt-messung); wornach die Division sogleich bestimmt wird.

Anmerkung. 1. Dass auch bey Umtauschung der Factoren (*z. B.* wenn beyde Geraden sind) immer dasselbe Product sey; wird festgesetzt: dass *die zwey Messbilder sonst gleich, in dem einzigen Falle in sofern ungleich seyn sollen*; dass wenn der Multiplicator mit negativer und die relative Mass (nemlich der Multiplicand) mit positiver Einheit begabt sind; im relativen Messbilde soll nach II, *Ja* geschrieben werden, wenn im Hauptmessbilde nach II, *Nein* steht, und *Nein* wenn da *Ja* steht; Dasselbe kömmt heraus, wenn für die Antwort nach II in diesem Falle +1 statt —1 gedacht wird.

2. Grössen mit +1 seyen kurz *reell* die mit —1 *imaginär*, und beyde *reine Grössen* benannt. Sie sind zwar alle reell: aber im gesagten Sinne können die gebrauchte Wörter bleiben.

3. Unten (§. 26) wird für das Messbild, wenn auch *Gemischtes* da ist, Regel gegeben.

§. 14. Die Einheit kann zwar beliebig für jede Gattung bestimmt werden; *z. B.* für alle Linien kann gewisse Gerade *E* gedacht seyn: welche ohne ausdrüchliche Erinnerung nicht geändert werde; sogar als Führerin aller von der Hauptmessung abhängenden Operationen, kann sie, selbt mit ihr gleichen nicht verwechselt allein stehen; dass dieselbe zur Hauptmessung jeder Linie, wenn diese reell ist mit positiver, und wenn sie imaginär ist, mit negativer Qualität diene; sie selbst in beyden Fällen reell gedacht, nehmlich sowohl diesem ✠ *E* als diesem ⊢ *E* soll, wenn ihre Hauptmessung erfordert würde, das erste zur Mass dienen.

§. 15. Wenn nun zuerst alle viere in zwey Messungen reine Gössen sind; und das Reelle mit · das Imaginäre mit * bezeichnet wird: so entstehen folgende vier (alle Fälle enthaltende) Zeilen; die 2 ersten in Hinsicht des ✠ und ⊢, und die 2 letzten in Hinsicht des Reellen und Imaginären. Jede Zeile enthält 4 Fälle; jeder besteht aus 4 Zeichen; die 2 ersten gehören der ersten, die 2 letzteren der zweyten Messung, und das erste gehört der Mass, das zweyte dem Gemessenen, Es ist leiht einzusehen, dass alle Fälle enthalten sind.

✠✠✠✠	✠✠——	✠—✠—	✠——✠
—✠✠—	—✠—✠	——✠✠	————
. . . .	. . * *	. * . *	. * * .
* * * *	* * . .	* . * .	* . . *

Es ist sichtbar: dass in jedem Falle, wenn die mittleren Zeichen gleich oder ungleich sind, so sind auch die äusseren gleich oder ungleich. Aber die 3 erste Zeilen betreffen die Multiplication (und Division zugleich): die 2 ersten in Hinsicht der Einheit, die dritte in Hinsicht der Realität. Das erste Zeichen gehört überall der Einheit, das zweyte dem Miltiplicator, das dritte dem Multiplicanden, das vierte dem Producte.

1. Aus der dritten Zeile ist offenbar: dass wenn die Factoren reell, oder beyde imaginär sind, das Product reell sey; denn sonst wären die Antworte nach III verschieden. Aus derselben Ursache ist klar: dass wenn das vierte dem Dividend und eines von den mittlern dem Divisor angehört; *Reell durch Reell oder Imaginär durch Imaginär dividirt reelles gebe, und sonst der Quoticnt imaginär sey.*

2. Aus der oberen Zeile ist zu sehen: dass wenn die Einheit ✠ ist, das Product wenn beyde Factoren zugleich ✠ oder zugleich — sind, ✠ sey, sonst is es —.

3 Die zweyte Zeile zeigt: dass wenn die Einheit — ist, das Product, wenn beyde Factoren zugleich ✠ oder beyde — sind, —, und sonst ✠ sey,

4. Im ersten Falle der dritten Zeile gehört das zweyte Zeichen dem Multiplicator, und da dieser reell ist, so ist die Einheit ✠. Dasselbe gilt von folgenden Falle. Im vierten Falle ist die Einheit negativ, wo Reelles durch Imaginäres dividirt imaginäres giebt, und zwar ne-

gatiwes, wenn beyde ✠ sind. Der dritte Fall wird (§. 13. Anmerk.) in Hinsicht der Antwort nach II auf $+1$ reducirt.

§. 16. Das Zeichen-Gesetz für $+$ und $-$ folgt hieraus anschaulich: es werde zuerst die oberste Zeile betrachtet: die zweyte wird auf die nehmliche Art erwiesen.

Es sollen zuerst a, b beyde ✠ oder beyde ⊢⊣ seyn; so sind auch $-a$ und $-b$ beyde ⊢⊣ oder beyde ✠; also $+a \,.\, +b$ sowie $a \,.\, b = +ab$, und $-ab$ wäre ⊢⊣. Aber $+a \,.\, (-b)$ ist $-ab$; denn a und $-b$ sind dann weder beyde ✠ noch beyde ⊢⊣, das Product ist also ⊢⊣, und $+ab$ wäre ✠.

Wenn aber $+a$ und $+b$ nicht beyde ✠ oder ⊢⊣ sind; so sind es auch $-a$ und $-b$ nicht; folglich $a \,.\, b = +ab$ ist ⊢⊣, so wie $-a.(-b)$; und $-ab$ wäre ✠. Und dann sind $-a$ und $+b$ entweder beyde ✠, oder beyde ⊢⊣; folglich mus $-ab$ seyn; denn $+ab$ wäre ⊢⊣ statt ✠.

Eben so folgt: dass wenn die Einheit ⊢⊣ ist, gleiche Zeichen $-$ und ungleiche $+$ geben.

Dasselbe Gesetz ist bey der Division: denn der Divisend ist $+$ oder $-$, und gleichfalls der Divisor: es sind also 4 Fälle leicht zu durchsehen; z. B. wenn die Einheit ✠ ist, und der Dividend $+$, der Divisor $-$ ist; mus der Quotient $-$ seyn, dass er mit dem Divisor, $+$ im Producte gebe.

Ein Sternchen vor der Grösse links oben bedeute, dass sie mit -1 begabt ist: so ist z. B. folgendes; $+6 : +{}^*2 = -{}^*3$; $+6 : -{}^*2 = +{}^*3$; $-6 : +{}^*2 = +{}^*3$; $-6 : -{}^*2 = -{}^*3$. Für den imaginären Dividenden sind die 2 mittlere Fälle in der dritten Zeile (§ 15).; wo die 2 erste Fälle haben $+1$ am Anfange, und der dritte kömmt auch in Hinsicht des $+1$ oder

—1 dazu, wie es am Ende von §. 15 gesagt wird).

§. 17. In Hinsicht der Einheit ist auch bemerkenswerth: dass venn etwas in Hinsicht des k als *respective Grösse* z genannt wird; so mus die Einheit des z die Einheit des k seyn. Und wenn y in Hinsicht seines Werthes für $x=1$, als respective Grösse z genannt wird; die Einheit der z soll dasjenige y seyn, dessen Werth für $x=1$ die Einheit des k ist.

Beyspiele für das este: jede krumme Linie ist respective Grösse in Hinsicht der Geraden, welche die Gränze der Summe der nacheinander gelegten Sehnen ist, wie jede krumme Fläche in Hinsicht der Gränze der Summe der nacheinander gelegten Triangel u. d. gl.

Für das Zweite ist die Einheit der Geschwindigkeit, diejenige, mit welcher die Einheit des Weges in der Einheit der Zeit beschrieben wird. So die Einheit der Dichtigkeit ist die, wo die Einheit der Masse in der Einheit des Volumens ist.

Man kann sogar alle Flächen als respective Grössen betrachten, in Hinsicht der Länge eines Rectangels wovon die Höhe Einheit der Geraden ist; und jeden Körper in Hinsicht der Länge eines Paralellelopipeds, wovon der Boden Quadrat der Einheit der Geraden ist.

§. 18. Um aber die in Zahlen gegebene Grössen behandeln zu können; ensteht die Aufgabe, die Zahlen zu bezeichnen? Wenn von 0 begonnen, jeder bis zu einer gewissen, besonderes Zeichen gegeben wird, und sammt 0 und dem letzten, n Zeichen sind: der glückliche indische Gedanke, dass jedes um eine Stelle links n mal soviel bedeute, brachte es auf eine selbst dem *Archimed* unbekante Art zu stande.

§. 19. Diesem nach sey ...1 1 1 1,1 1 1...
und darunter ...3 2 1 0-1-2-3...
In der unteren Reihe zeigt 1 die Stelle an, wo in der oberen das Zeichen 1 seinen Werth links zuerst ändert; von da folgen links die 2te 3te Stellen; und auf einen Gedanken sind beyde Reihen links und reckts ins Unendliche ausgedehnt; und die Glieder der unteren, als Stellzeiger der darüber stehenden angesehen.

Ferner kömmt der Gedanke, anstatt α jede beliebige Grösse a setzen zu können. Und nun da leicht bemerkt wird, daas wenn P, Q Glieder der oberen Reihe sind, wo der Werth a über 1 steht, und z. B. p das unter P steht, 2 mal so gross ist wie q das unter Q steht, dann $P=QQ$ ist: so entsteht die Frage, wie vielmal so gross der Stellzeiger eines Gliedes als des andern ist? Ist z. B. der Stellzeiger des P $c$mal so gross, wie der von Q; so wird P mit Q^c, und Q mit $\sqrt[c]{P}$ bezeichnet (in Hinsicht des a). Es ist P gleichsam *c mal stelligtes* Q, und Q $c$mal entstelligtes P. Es ist offenbar: dass wenn q unter Q, und p unter P steht, und q nicht 0 ist, $c=p:q$ ist; weil $(p:q).q=p$ ist. Ebenfalls ist $Q=P^{\frac{q}{p}}$ wenn p nicht 0 ist; folglich wenn von p, q keines 0 ist, $c=p:q$, und $\sqrt[c]{P}=P^{\frac{1}{c}}$.

Z. B. Wenn $p=2$, und $q=-5$ ist: so ist der Stellz. von P, $(-2:5)$ mal so gross wie der von Q, und der Stellz. von Q ist $(-5:2)$ mal so gros wie $p=2$; denn $-5=(-5:2).2$, Es ist also eben das, was mit $\sqrt[-2:5]{P}$ bezeichnet wird. Wenn $P=a^p$ ist, so ist $P^0=1$, weil der Stellz. von 1 nehmlich $0=0.p$ ist; also

$\sqrt[0]{1} = P$; welches weil P jedes bedeuten kann, unendlich viele Werthe hat. So ist $a = a^1$, weil $1 . 1 = 1$; $P = a^p$, $Q = a^q$, und $P = Q^{\frac{p}{q}}$; und $a^2 = aa$, $a^{-2} = 1 : a^2$ . . .

Unten wird noch der Begriff erweitert, wo das Haupt der Reihe beständig wird.

§. 20. Nun is es leicht zu beweisen.

1. Das wenn P, Q Glieder der vorigen oberen Reihe sind, und p unter P, und q unter Q steht: so steht PQ über $p+q$: denn es is leicht 4 Fälle zu durchsehen: es sey zuerst $p=2$, dann -2, und q zuerst 3 dann -3.

2. Wenn $u = v^q$; so ist $u^s = v^{qs}$; denn es sind auch hier 4 Fälle leicht durch zusehen; es sey q zuerst 2 dann -2, und s zuerst 3 dann -3; z. b. wenn $q = 2$ und $s = -3$, so ist $u^s = (v^2)^{-3} = 1 : (v^2)^3 = 1 : v^{2.3} = v^{-2.3}$.

3. Wenn zum Haupt der Reihe so ein v^q gesetzt wird, dass $v^s = a$ sey: so wird s unter Q stehen; denn $(v^q)^s = v^{qs} = (v^s)^q = a^q = Q$. Es stehe R über r; so ist $R = (v^q)^r = v^{qr}$, und zugleich $R = Q^{\frac{r}{s}}$, und in der Reihe des a war $P = Q^{\frac{p}{q}}$.

Es sey nun v das Haupt: unter $v^{qs} = Q$ wird qs, und unter $v^{qr} = R$ wird qr, und unter $v^{ps} = (v^s)^p = a^p = P$ wird ps stehen. Folglich ist $P = Q^{\frac{p}{q}} = Q^{\frac{ps}{qs}}$, und $R = Q^{\frac{r}{s}} = Q^{\frac{rq}{qs}}$. Es könnnen also die Exponenten auf einerley Benennung gebracht verden,

Es ist auch nach 1 sichtbar; dass unter

PR $ps+qr$ steht: folglich ist $PR = Q^{\frac{ps+qr}{qs}}$ $= Q^{\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)}$

Und hieraus ist $u^k : u^h = u^{k-h}$. Denn u^h. $u^{k-h} = u^{h+k-h} = u^k$.

4. $\left(P = Q^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = Q^{\frac{pr}{qs}}$. Denn dieses ist in der vorigen Reihe das über pr stehende Glied; dessen Stellzeiger pr also, $(pr : ps) = (r : s)$ mal so gross ist, wie ps der Stellzeiger von P, und zugleich $(pr : qs)$ mal so gross wie qs der Stelz. von Q. Also ist $P^c = Q^{\frac{pc}{q}}$.

Hieraus wird (§. 19.) $\sqrt[c]{P} = P^{\frac{1}{c}} = P^{\frac{p}{qc}}$

5. Es sey a ✠ und reell (der Anschaulichkeit wegen durch eine Gerade vorgestellt), und x bedeute jedwede ✠ oder — Gerade. Es wird bewiesen, dass a^x (wenn auch x mit der Einheit incommensurabel ist) eine bestimmte Gerade sey: welcher dann x in Hinsicht der Basis a logarithm genannt wird.

Um aber die den Logarithmen entsprechende Grössen leichter zu vergleichen, und die Basis nicht immer nennen zu dürffen (wie oben die Einheit entstand); wird eine Basis festbestimmt, und diese ist gemeiniglich 10. Es wird bewiesen: dass für jede ✠ve Gerade G, so ein x giebt, dass $10^x = G$ sey; und wenn x ✠ ist und wächst, auch 10^x wächst.

Demnach werden vorige Rechnungsvortheile (3, 4,) anwendbar: da Tafeln sind, durch welche sich entsprechende Logarithmen und Zahlen gefunden werden.

Sogar aus $B^z = P$ wird z gefunden: da

$\log(B^z)$ das ist $z \log B = \log P$, also $z = (\log P) : \log B$. Nehmlich es sey $B = 10^b$, und $P = 10^p$; so ist $B^z = 10^{bz}$ (4); folglich $bz = z \log B = p = \log P$.

Z. B. a zu c pro Cent geliehen, und die Zinsen zugeschlagen, wächst auf das Ende des $n$ten Jahres zu $s = ap^n$, wo $p = (100 + c) : 100$. Woraus $\log s = n \log p + \log a$, und der Werth von s auf die Gegenwarth reducirt werden kann. Wenn aber mit Ende jeden Jahres $k \pm q$ weggenommen wird, wo k die jährliche Zinsen von a, und $+q$ positives bedeuten; und der Rest R am Ende des $n$ten Jahres gesucht wird: so ist $R = a \pm (100q : c)(1 - p^n)$ Und dass $R = 0$ sey für $+q$, ist $a = (100q : c)(p^n - 1)$, und $n = [\log(k+q) - \log q] : \log p$.

§. 21. Derselbe Weg führt zu einem *höheren Begriff der Potenz und Logarithmen.*

Es werde in §. 19 statt 1 mit dem Comma, r und s statt n, und in der unteren Reihe h statt 0, und $d : \mu$ anstatt 1 gesetzt; und μ bedeute positive Zahl die so gross genommen werden kann, wie beliebt, jedes von d, r, s, h aber mag jedes beliebige bedeuten. Der linke Arm soll rechts und links der rechte gesetzt werden: und r mit dem darunter stehenden h sollen *Mittelglieder*, und rs^μ *Haupt-glied* genannt werden: welche aber im Falle wenn $r = 1$ und $h = 0$, *normale* heissen sollen.

Auch hier können die unteren Glieder Stellzeiger der oberen seyn; und wenn zwey Glieder der obern K und J sind, und $h+k$ unter K und $h+i$ unter I stehen; des K Stellzeiger ist $(h+k) : (h+i)$ mal so gross als der von I.

Es seyen nun zwey Paar Reihen A und B, beyde mit normalen Mittel-gliedern. Im A sollen s und d positiv und reell seyn, und das Haupt-glied heisse e, alle Glieder werden $+$ und reell.

Im B soll d rein imaginär $= {}^*q$, und das Haupt-glied $= {}^*1$ seyn: es wird bewiesen, dass so ein positives t sey, dass $t^\mu = {}^*1$, und wenn μ auch ins ∞ wächst, beyde Haupt-glieder beständig bleiben.

Nun wird es auch bewiesen: dass für jedes gegebene g, sey so ein N des A und M des B (als Glieder der oberen Reihen), dass $NM = g$ sey. Jedes Gliedes sowohl in A als in B ist das darunter stehende Stellzeiger, so dass §. 20 bis auf 5 beyden gemein ist.

Wenn der Stellz. des N, $nd:\mu$ und $m^*q:\mu$ der Stellz. von M ist; und aus dem oberen allgemeinen Reihen-Paare, in B zu Mittelgliedern N mit dem darunter stehenden $nd:\mu$ gesetzt wird, so wird NM an die Stelle von M kommen, und darunter $(nd+m^*q):\mu$ Stellzeiger seyn. Aber um $(NM)^2$ hervorzubringen, müssten aus A das Glied N^2 mit dem darunter stehenden $2nd:\mu$, in B zu Mittelgliedern genommen werden; wo dann über $2nd:\mu + 2m^*q:\mu$, in der obern Reihe $N^2.M^2$ stehen wird.

Um aber das veränderliche. Mittelglied zu vermeiden: läst man die normalen in A, B, und addirt den Stellzeiger des N aus A zum Stellz. des M aus B. Es wird auch $d=1$ genommen; und da 1 unter e steht, nimmt man sie zur Basis: und es werden N, M, NM demselben e auf $n:\mu$, $m^*q:\mu$, $(n+m^*q):\mu$ erhoben gleich: denn z. B. der Stellz. von NM ist $(n+m^*q):\mu$ mal 1.

Zwey Gründe sind dessen, das q imaginär genommen wird. 1 Wenn beyde Stellz. zusammen zählbar wären, und wäre z. B. der eihe 2 der andere $*3$, und würde 3 anstatt $*3$ genommen; e^r wäre was anderes als e^{2+*2}

2. Es wird auch bewiesen: dass so ein q sey, dass wenn es imaginär genommen wird, aus jedem Stellz. das obere Glied bestimmt werden kann; worauf die nehmliche Art wird auf A angewandt, folglich auch e bestimmt.

§. 22. Wenn in diesem Sinne k Stellz. von K ist; so kann K mit ♀k bezeichnet werden. Und da bewiesen wird, dass ♀k. ♀h = ♀$(k+h)$ sey: so ist ♀$*q = *1$, ♀$2*q = -1$, ♀$3*q = -*1$, ♀$4*q = 1$ = ♀$\widehat{\nu}*\alpha$, wenn $\alpha = 4q$ und $\widehat{\nu}$ jede ganze Zahl bedeutet ✠ oder — auch 0 nicht ausgeschlossen; und so ist ♀$(k\widehat{\nu}*\alpha)$ = ♀k; und es ist auch ♀$\left[\frac{(k+\widehat{\nu}*\alpha)}{n}\right]^n$ = ♀k.

Folglich auch $\sqrt[m]{1}$ = ♀$\frac{\widehat{\nu}*\alpha}{m}$; wo gezeigt wird, dass wenn anstatt ν die Zahlen $0, 1 \ldots (m-1)$ gesetzt werden, m verschiedene Werthe herauskommen, und alle andere Zahlen geben nur solche, welche unter denen sind.

Wobey zu bemerken ist: dass sie alle aus dem leichten Satze dargestellt werden können, $\left(\cos\frac{q}{m} + *\sin\frac{q}{m}\right)^m = \cos q + *\sin q = *1$, wenn q den quadranten des Zirkels vom radius 1 bedeutet.

Dieses vorausgesetzt wird da eine allgemeine Theorie gegeben, nebst einem allgemeinen Begriffe von Potenz, Wurzel, und Logarithm.

§. 23. Aber eben daselbst ist auch eine andere rein arithmetische Methode: nachdem der binomische Satz (zuerst bloss für ganzen ✠

Expon.) bewiesen worden; wird bewiesen, dass wenn n ins ∞ wächst, $\left(1+\frac{v}{n}\right)^n$ am Gränzwerthe $= 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{2.3}$ . ., welches mit ♄ v bezeichnet wird; und ferner, dass wenn die Summe der Glieder deren Anzahl ungerade ist, mit ☾v, und deren Anzahl gerade ist mit ☽v bezeichnet wird, (☾v)^2—(☽v)$^2 = 1$ sey in jedem Falle; wenn aber $v = {}^*u$, so wird ☾$v = \cos u$, und ☽$v = {}^*\sin u$.

Ferner wird rein arithmetisch ebendaselbst bewiesen: dass es so ein q gebe, dass ♄$\,{}^*q = {}^*1$.

Dann wird bewiesen: dass ♄v . ♄k = ♄$(v+k)$; also [♄$(v:m)$]^m = ♄v, (♄v)^k = ♄vk, demnach (♄1)^k = ♄k sey.

Woraus (§. 21) e = ♄1 = (♄$(1:\mu)$)$^\mu$; und alles von ♀ gesagte gilt von ♄ m. Z. B. ♄$(\widehat{\nu}\,{}^*a:m)$ enthält alle Werthe von $\sqrt{1}$, so wi ♄ $\frac{2^*q+\widehat{\nu}\,{}^*\alpha}{m}$ von —1, und ♄ $\frac{{}^*q+\widehat{\nu}\,{}^*\alpha}{m}$ von ^{*1} alle m te Wurzeln.

§. 24. Und nun kommt die *Definition der Potenz* und *Logarithm*; vermittelst folgender verschiedenen Gleichheitszeichen:

x (= j bedeute, dass jeder Werth des x irgend einem Werthe von j gleich sey; dasselbe bebedeute j =) x.

x (=) j bedeute: dass eines jeden von x und j, jeder Werth, irgend einem Werthe des anderen gleich sey.

x)= j so wie x =(j bedeute: dass irgend ein Werth des x irgend einem Werthe des j gleich sey.

$x = j$ bedeute: dass jedweder Ausdruck, welcher im der Gleichung gleich ist, auch gleiches bedeute .z.b.

*1 $(= \sqrt{-1}$, aber *1 ist nicht $(=) \sqrt{-1}$; $\sqrt{-1} + \sqrt{-1} =$ aber nicht $(=)$ $2\sqrt{1}$; da im letzteren Gliede der Gleichung, jedes Ausdrucks jeder Werth genommen werden kann: es ist wie das Auflősungszeichen in der Musik.

Da nun ♀v = ♄v war; es sey gleich V. Von diesem V wird v *lognat* genannt, aber mit dem Zeichen v $(= \lg V$. Und wenn jedes von c, C, a einzigen Werth hat, und $c\lg a$ $) = \lg C$; so wird C $(= a^c$, und a $(= \sqrt[c]{C}$, und c $(=$ $\log C$ in Hinsicht des a bezeichnet und benannt. Wenn a = ♄1 ist, so ist es e Basis des natürlichen Systems.

Und wenn a = ♄b, und $C (= a^c$; so ist C = ♄bc; und $1 : b$, durch welches der $\lg C$ multiplicirt, den $\log C$ in Hinsicht der Basis a giebt, wird *Modul* des Systems der Basis a genannt. Daher giebt ♄$(1 : \sigma)$ die Basis a, wenn σ den Modul bedeutet.

Anmerkung. Das Zeichen $) =$ ist darum: weil $c\lg a$ nicht $(= \lg C$, noch $\lg a$ $(= \lg C : c$ ist. Denn (wenn k ein $\lg a$ ist), fürs erste wäre $ck + c\widehat{v}^* \alpha$ $(= ck + \widehat{r}^* \alpha$; wenn aber $c = 2:3$ und $v = 5$, müsste $2.5:3$ ganze Zahl seyn; fürs zweyte wäre $k + \widehat{v}^* \alpha$ $(= k + \widehat{r}^* \alpha : c$; folglich vc $(= \widehat{r}$, also $2.5:3$ müsste ganze Zahl seyn.

So auch $(\sqrt[k]{h})^c$ ist nur $) = \sqrt[k]{(h^c)}$; und aus $A^m = B^n$ folgt selbst $A) = B^{\frac{n}{m}}$ nicht; z.b. fürs erste sey $k = 3:2$, und $c = 1:2$, und $h = 1$. Der erste Ausdruck hat 6 und der zweyte 7 Werthe; und nur dreye von jenen sind dreyen von diesen gleich. Für das zweyte $1^2 = (-1)^2$, aber $1^{\frac{2}{2}}$ ist nicht -1. Wenn aber n, m unter sich Primzahlen sind, so folgt A (= $B^{\frac{n}{m}}$.

Auch $a^b . a^c$ ist allgemein nur =) a^{b+c}. Im Werke sind die und ähnliche Fälle vermittelst des Zeichens ♀ durchgesehen, und mit Beyspielen erläutert.

§. 25. Da nun ferner bewiesen wird, dass jede Grösse durch $y \cos u + y^* \sin u$ ausgedruckt werden kann; wo y und u reell sind, und u den Weg eines Punctes in der Peripherie vom Halbmesser 1 bedeutet: so sind daselbst nicht nur die Grösse, sondern auch ihre Potenzen (der Exponent mag reell oder imaginär oder gemischt seyn) sammt allen Logarithmen dargestellt.

Es sind nehmlich zwey parallele Abscissen-Linien: auf beyden sind die Abscissen x gleich; von einem Puncte a in jeder rechts $+$ links $-$; auch die Ordinaten y sind in beyden, an den Enden $\mathfrak{p}$ der gleichen x gleich. Es sey nun am Ende $\mathfrak{p}$ jeder Abscisse x, ein darauf senkrechter Kreis des radius 1; und vom oberen Ende des auf x aus dessen Ende $\mathfrak{p}$ senkrechten Durchmessers, bewege sich ein Punct immer weiter, zuerst hinter die Tafel gerichtet; sein Weg sey u, und der EndPunct immerwo sey $\mathfrak{p}'$, und ♄ x sey y. Und auf der oberen Abscissen-Linie werde von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ (gegen $\mathfrak{p}'$) $y \cos u$, auf der unteren $y^* \sin u$ aufgetragen: es ist leicht zu beweisen, dass das erste die Gestalt 8, das zweyte die Gestalt ∞ giebt; welche immer ähnlich, rechts unendlich zu und links unendlich abnehmen. Das erste Reelle ist da zum Unterschiede schwarz, das zweyte (rein imaginär) roth angedeutet.

Jeder Grösse $Q = y \cos u + y^* \sin u$ entspricht demnach gewisses $\mathfrak{p}$ und gewisses u, folglich $y \cos u$ im oberen Theile des Schema, und $y^* \sin u$ im unteren. Und jeder *lognat* Q ist im $a\mathfrak{p} + {}^*u + \widehat{\nu}\,{}^*\alpha$ begriffen.

§. 26. Oben (§. 13) erwähnte *Regeln für die Messbilder der Gemischten* sind.

1. Für das *Messbild der Hauptmessung* einer Reellen c mit rein imaginären ${}^*d$ verbundenen: soll jede mit ihrer Einheit gemessen werden; aber nach I, II, III soll links das Messbild des c, und rechts des ${}^*d$ geschrieben werden.

2. Wenn $c + {}^*d$ mit einer reinen gemessen wird: zuerst soll diejenige gemessen werden, welche mit der Mass dieselbe $+$ oder $-$ Einheit hat; und dieses Messbild links, das andere rechts geschrieben werden.

3. Wenn aber die Mass gemischt ist; z. B. $a + {}^*b$, wo a, b reell sind, und K mit $a + {}^*b$ gemessen werden soll: so kann K immer $= P + Q$ seyn, wo sowohl P als Q gemischte Grössen sind; und wenn P mit a, uud Q mit ${}^*b$ gemessen gleiches Messbild geben: so soll dieses, Messbild der Messung von K mit $a + {}^*b$ seyn. Nehmlich K sey $c + {}^*d = P + Q$, wo c und d reell sind: so ist $P = ax - a^*y$, und $Q = {}^*bx - by$, und $x = \frac{d}{b} + \frac{abc - a^2 d}{a^2 b - b^3}$ und $y = \frac{bc - ad}{a^2 - b^2}$.

Dass aber $P : a = Q : {}^*b$ sey; sollte $P = ax + {}^*ay$ und $x = \frac{d}{b} + \frac{abc - a^2 d}{a^2 b + b^3}$ und $y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}$ genommen werden. Denn das vorige ist für die Gleicheit der Messbilder, welches mit der Gleicheit der Quotienten nicht identisch ist, wie leicht gezeigt werden kann; aber der Kürze wegen sammt der Art, die Werthe von P, Q,

x, y zu finden wegbleibt. Im letzteren wird $K = P + Q = a(x + {}^*y) \dagger {}^*b(x + {}^*y) = (a \dagger {}^*b)(x \dagger {}^*y)$; denn dass Messbild von K in Hinsicht des $(a + {}^*b)$ ist gleich der Hauptmessung des $(x \dagger {}^*y)$ (mit der gesetzlichen Ausnahme §. 13 Anmerk).

§. 27. Endlich wird bewiesen: dass aus jedweder Anzahl der Glieder die Factoren bestehen mögen; es kömmt dasselbe heraus, wenn jedes Glied des Multiplicanden mit jedem Gliede des Multiplicators multiplicirt wird; und diese partial-Producte addirt werden; als wenn die Summe $a + {}^*b$ des Multiplicanden, mit der Summe $x + {}^*y$ des Multiplicators multiplicirt wird; wo jedes auch 0 seyn kann.

Dass auch die Factoren, wie viele und wie beschaffen sie seyn mögen: in jeder Ordnung dasselbe Product geben, wird freylich erwiesen.

§. 28. Jede auch *heterogene Grössen* können *vermittelst der Einheit* zugleich *auf der Tafel erscheinen*: jede nehmlich durch einen Repraesentanten, welcher des E (§. 14. Einheit der Geraden) eben sovieltes ist, wie die repraesentirte der Einheit ihrer Gattung. Ferner soll jeder Repraesentant auf den Fall der Addition und Subtraction mit positiver oder negativer Qualität, und auf den Fall der Hauptmessung mit $+1$ oder -1 begabt werden.

Es sind zwey Hauptfragen, 1 Wenn gewisse Grössen mit gewissen Qualitäten begabt, mit gewissen Operationen behandelt werden, was das Resultat wird?

2. Um gewisses Resultat zu erhalten, was für Grössen mit welchen Qualitäten begabt, mit welchen Operationen behandelt werden sollen?

Wenn nun die gesuchte Grösse z. 6 als

2 drittel der Einheit E heraus kömmt: so ist sie 2 drittel der Einheit ihrer Gattung.

Anmerkung. 1. Des gesagten Sinn aber ist nicht, die Operationen mit den repraesentirenden Geraden geometrisch auszuführen: es ist nur eine die gewöhnliche Erscheinung der Heterogenen auf der Tafel, rechtfertigende Vorstellungs-Art, welche es in helles Licht setzt. Es können zwar diese Repraesentanten mit ihrer Einheit gemessen, auch in Zahlen ausgedruckt werden.

2. Die Geometrie kann zwar die Gerade zur Geraden hinzuthun, eine aus der anderen, wegnehmen, auch $a.b$, $a:b$, $\sqrt{a}$, a^c wenn $c=n:2^m$, vollkommen herausgeben, wenn auch a oder b oder beyde mit der Einheit incommensurabel sind, m, n aber ganze ✠ Zahlen sind.

Sogar wenn die Grössen nicht in Linien gegeben werden; kann sie sie in Linien ausdrücken, die Einheit theilend, und der Theile Anzahl nehmend; und so auch umgehehrt eine Gerade mit der Einheit messen. Auch im Falle, wo sie das Resultat nicht vollkommen giebt, annähert es ohne Ende.

Die Arithmetik hingegen braucht eine Ewigkeit z. B. zu $\sqrt{2}$; sogar die Multiplication jeder Linie a kann sie mit einer mit der Einheit inconmensurablen niht vollenden: sie kann sich auch gar nicht rühren, wenn ihr die Grössen nicht gemessen gegeben werden; wie die Geometrie ohne Einheit, in den von der Hauptmessung abhängenden Operationen nichts thun kann.

3. Zur ersten der 2 Fragen gehören: was giebt $^*a$ mit $^*b$ was mit $-{}^*b$ multiplicirt? Das erste is $-ab$, das zweyte ab (jedes von a, b

mag + oder — seyn). Was giebt $^*a$ mit $^*b$, was mit $—^*b$, was mit b, was a mit $^*b$, was mit $—^*b$ dividirt?

Zur 2ten Frage gehören: womit soll $c+^*d$ multiplicirt werden, dass $a+^*b$ herauskomme? es is leicht einzusehen, dass allgemein weder x noch $^*y$ allein, sondern $x+^*y$ seyn soll; und es wird $(ac+bd+^*bc—^*ad):(c^2+d^2)$. Was ist, welches mit ihrem Entgegengesetzten multiplicirt, 16 giebt? es ist ^{*4} auch $—^*4$. Giebt es so ein $^*x$, dass $(^*x)^2=4$ sey? Das ist unmöglich.

Der Preis von 1 Elle ist 3 Gulden, was ist von 2? der Multiplicator 2 mit —1 begabt würde ^{*6} Gulden geben: welches zwar eben soviel ist, als wenn es mit +1 begabt wäre; aber wenn ferner eine Multiplication mit ^{*1} ist, käme —6 heraus, weil $^*6.\ ^*1=—6$. Es soll der einfachste Weg gewählt werden: und nur da —1 gegeben werden, wo es nöhtig ist, und wenn es das Resultat der Operation erfordert; besonders welche zusammenzuzählen sind, sollen mit derselben Einheit begabt seyn.

§. 29. In jedem von $A+B=S$, $a.B=b$, $C(=a^c$ sind 3 Dinge, und 3 Dinge haben 3 Amben: woraus die Frage entsteht; aus jeder Ambe ihr drittes zu suchen.

Durch Wiederholung der Operationen, (wozu auch gewisse Bedingung hinzukommen kann) entstehen die *Reihen*, und Reihen aus Reihen.

Und aus allen diesen entsteht das, was man *Function* nennt: ein Ausdruck, in welchen eine oder mehrere Veränderliche mit Constanten, und gewisser Bestimmung zusammengefügt sind.

Das Ganze ist unter dem Sinnbilde eines Baumes dargestellt: dessen Stamm, aus den

Gründen, durch eine im Ungrischen vermittelst der (§. 24.) Gleichheits-Zeichen kurze, auch die Axiomen darstellende Logik, emporgewachsen, sich in eine mit der Theorie der Functionen blühende Krone ausbreitet; und die erhabene Frucht bringt, dass ein sterbliches Aug die Gesetze der unendlichen Natur lesen lerne.

§. 30. Mit der Function entstehen folgende Hauptfragen.

1. Was der Werth der Function sey, wenn jeder der darinn vorhandenen Veränderlichen gewisser Werth gegeben wird?

2. Was für ein Werth den Veränderlichen gegeben werde, dass der Function Werth gewisser Bedingung entspreche? z. B. das es *Maximum* oder *Minimum*, oder der Werth $=0$ sey? (das letzte ist der Gleichungen Aufgabe) oder was soll v seyn, dass $\mathfrak{F}v = K$ sey?

3. Was für eine Function soll seyn, dass sie gewisser Bedingung entspreche?

4. Was ist das Increment I der Function F, für gewisses increment i der Veränderlichen? z. B. wenn aus x, $x+i$ wird. Hieher gehört nicht nur das *Binom*, (z. B. wenn $F = x^h$, für $(x+i)^h$ wird $x^h + I$), sondern auch *Taylors* Satz.

5. Aus der Vergleichung des I mit i, entsteht die Frage: was $I:i$ wird: wenn i kleiner als jedes gegebene wird? Ob es nicht eine gewisse Function zur Gränze habe? Und dann wie aus dieser zu der ersten Function zu kommen sey?

6. Und wenn dieses mit der Gränz-function, und immer weiter wiederholt wird; entsteht der Gedanke: ob es nicht möglich sey rückwärts zur ersten Function zu gelangen,

das heisst, diese durch jene auszudrücken? *Maclaurins* Reihe, welche vom *La Grange* die Beweis-art, und wo man aufhören will, die Bestimmung der Gränzen, zwischen welche die Ergänzung der Reihe fällt, erhalten hat; welches im Ungrischen anschaulich dargestellt ist.

7. Wenn nun zweyer Functionen F und F' Incremente I und I', in beyden für das Increment i der Veränderlichen sind; entsteht die Frage: ob aus dem Verhältniss des I zu I' nicht auf das Verhältniss des F zu F' zu schliessen sey? z. B. wenn des $I:I'$ Gränzwerth 1 ist, in dem i kleiner als jedes gegebene wird. Hieraus entspringt der folgende §. Schon *Archimed*, den *Newton*, *Princeps Mathematicorum* nennt, hat aus der Gleicheit der Gränzwerthe des $I:i$ und $I':i$ auf die Gleichheit des F zu F' geschlossen.

Es seyen folgende Bezeichnungen.

1. $Q \frown b$ bedeute: dass wenn b eine endliche beständige Grösse oder $=0$ ist; für jedes zu b und Q addirbare ω nicht 0, so ein Q sey, dass $Q-b < \omega$ sey; wenn aber $b = \infty$, so bedeute $Q \frown \infty$, dass Q grösser als jedes gegebene werden könne. Es wird b *limes* des Q genannt.

2. Aber $a < c$ bedeute: dass a (abgesehen von $+$, $-$ $+1$, -1) gleich einem Theile des c sey; $a \lessdot d$ aber bedeute, dass wenn beyde vom 0 Puncte einer Abscissen Linie in dieselbe gelegt gedacht werden, was $+$ ist rechts und links was $-$ ist, der Endpunct des a vom Endpuncte des d links fällt. So ist $-3 \lessdot 0$, $0 \lessdot 1$ nicht $0 < 1$

Anmerkung. Folgender in der §. 29 erwähnten Logik bewiesener Satz, ist zum Beweise des *limes* nöthig, und auch in manchen anderen Fällen dienlich.

Wenn nach dem Puncte a einer stetigen Zeit ab, in jedem ihrer Puncte ist A, nach b aber in irgend einem Puncte ist A nicht: die Zeit, binnen welcher vor ihrem Ende bis a immer A ist, muss einen Endpunct p haben; so dass wenn der Zeitpunct t nach p ist, von dem t bis a nicht immer A ist. Und in dem Puncte p ist entweder das letzte A, oder das erste *Nicht A*, und zwar so ein Nicht A, nach welchem eine Weile immer Nicht A ist, im Falle, wenn nach p nicht jeder p' (bis zu einem gewissen) solcher ist, dass zwischen p und p' sowohl A als Nicht A sey.

§. 31. Nun folgen nach 5 und 7 im vorigen §. die *erste Gründe der Differential Rechnung*.

I. Wenn auch mehrere Veränderliche zugleich gesetzt wären: diejenige z.b x, welcher ein gewisser Werth y durch eine ✠ ganze Zahl n getheilt gedacht werde; soll die *Haupt-veränderliche*; heissen, und $y:n$ soll mit $\dot{x}$ bezeichnet werden.

II. Jeder Veränderlichen z.b. y, welche mit x zugleich vorkommt, soll derjenige Werth verstanden werden, welchen sie am Ende dessen x hat: und $\dot{y}$ bedeute $y-y'$, unter y' denjenigen Werth von y verstanden, welchen es für $x-\dot{x}$ hat, wenn vom Ende des x ein $\dot{x}$ weggenommen wird.

III. Ein Buchstab (oder Zeichen) in Klammern geschlossen, mit nachgesetzten einer oder mehreren Veränderlichen: bedeute eine diejenige Veränderlichen enthaltende Function. z.b. $(A)x$ kann einen von x abhängenden Ausdruck bedeuten; kann aber als selbst mit x veränderliches, u genannt werden; also (nach II) wird $\dot{u} = (A)x - (A)(x-\dot{x}) = u - (A)(x-\dot{x})$; folglich $u - \dot{u} = (A)(x-\dot{x})$. Es soll $\dot{u}$ auch durch

$(a)x$ bezeichnet werden: und dieselbe Bezeichnung gelte auch für andere Buchstaben. Es heisse auch $(a)x$ das *wahre Differential* des $(A)x$; von dem mit diesem zur folgenden Absicht gleichgeltenden *Differentiale* wird unten.

IV. Aus $(A)\mathrm{x}$, wenn anstatt x zuerst $n\dot{\mathrm{x}} = \gamma$, dann $(n-1)\dot{\mathrm{x}}$, nachdem $(n-2)\dot{\mathrm{x}}$, und so w. bis $(p-1)\dot{\mathrm{x}} = \beta$ gesetzt wird, (unter p ganze ✠ Zahl verstanden): entsteht folgende Reihe $(A)n\dot{\mathrm{x}}$, $(A)(n-1)\dot{\mathrm{x}} \ldots (A)p\dot{\mathrm{x}}$, $(A)p-1)\dot{\mathrm{x}}$.

Es ist offenbar: dass $(A)p\dot{\mathrm{x}} - (A)(p-1)\dot{\mathrm{x}}$ das dem $p$ten $\dot{\mathrm{x}}$ entsprechende Increment des $(A)(p-1)\dot{\mathrm{x}} = (A)\beta$ sey; und so dem $p$ten, $p+1$ ten .... $n$ten $\dot{\mathrm{x}}$ entsprechende Incremente, folgende Reihe darstellt (von der Rechten gegen die Linke gehend).

$(A)n\dot{\mathrm{x}} - (A)(n-1)\dot{\mathrm{x}}, (A)(n-1)\dot{\mathrm{x}} - (A)(n-2)\dot{\mathrm{x}},$
$(A)(n-2)\dot{\mathrm{x}} - (A)(n-3)\dot{\mathrm{x}} \ldots . (A)p\dot{\mathrm{x}} - (A)(p-1)\dot{\mathrm{x}};$
welcher allgemeines Glied $(A)m\dot{\mathrm{x}} - (A)(m-1)\dot{\mathrm{x}}$ mit a_m bezeichnet werden kann; wo m jede ganze Zahl von p bis n (einschliesslich) bedeuten kann. Wenn aber n z. B. 3 mal so gross wird, auch p und die Anzahl der Glieder wird 3 mal so gross.

Es ist auch klar: dass die Summe dieser Reihe, da die mittlere Glieder sich aufheben, $(A)n\dot{\mathrm{x}} - (A)(p-1)\dot{\mathrm{x}}$, das ist $(A)\gamma - (A)\beta$ das dem $\gamma - \beta$ entsprechende Increment des $(A)\beta$ sey; welches hier mit $(\mathfrak{A})$ bezeichnet werden kann.

V. Wenn $n \nearrow\!\!\!\searrow \infty$; jede Reihe wird immer endliche Zahl der Glieder und letztes Glied haben: aber letzte Reihe ist nicht.

Es giebt Functionen, in welchen dem $\gamma - \beta$ entsprechendes Increment von n unabhängig, und solche wo es abhängig ist: es sey z. B. ein $\triangle$ $\mathfrak{abc}$; $\mathfrak{ab}$ sey die Grundlinie, und $\mathfrak{bc}$

$\llcorner ab$; es sey a Anfang der Abscissen, und $ab = \gamma$, $n = 7$ und $p = 3$; folglich $\beta = 2\dot{x}$, $\gamma = 7\dot{x}$.

Es bedeute (Δ)x die Fläche des $\triangle$, dessen Basis x und Höhe die Ordinate am Ende des x ist: so ist das dem $p$ten $\dot{x}$ entsprechende Increment das *Trapez* zwischen den Ordinaten am Anfange und Ende desselben $\dot{x}$, und so w. und das dem $\gamma - \beta$ entsprechende ist das Trapez, welches auf $\gamma - \beta$ steht zwischen den Ordinaten der Enden von β und γ. Welches dassselbe bleibt, n möge wachsen wie es will.

Nun werde vom oberen Ende der Ordinate von γ, parallele bis zur nächsten Ordinate zur Basis gedacht: so entsteht ein Rectangel, wovon die Basis $\dot{x}$ und die Höhe die Ordinate am Ende desselben $\dot{x}$ ist. Wenn dieses bey jedem $\dot{x}$ bis a fortgesetzt wird, und die Summe dieser Rectangel (V)x benannt wird; so ist die Function offenbar von n abhängig. Dasselbe ist, wenn vom Ende jeder Ordinate die parallele bis zur nächsten Ordinate vorwärts gegen b gedacht wird: die Summe dieser Rectangel sey (U)x. Es ist auch klar, dass sowohl (V) als (U) von n abhängig sind.

VI. Wenn $x : x' =$ oder $\frown 1$; so heissen x und x' *gleichgeltend*; es wird (in den am Titelblatte genannten Werken) $x \overset{\circ}{=} x'$ bezeichnet: wo vorzüglich im späteren vieles zur absichtlichen Verwandlung der Differentiale in gleichgeltende bewiesen wird.

Wenn $x - x' < (x' : N)$ für beliebig grosses N; so ist $x : x' \frown 1$. Denn durch x' dividirt, wird $(x : x') - 1 < (1 : N)$.

Wenn $x : x' \frown 1$; so sind x und x' entweder beyde $+$ oder beyde $-$. (Denn sonst wäre $x : x'$ $-$, und $(x : x') - 1$ wäre > 1 (nach p. 31).

Wenn (c)x : $\dot{v} =$ oder $\frown u$; so ist $\dot{v}u : (c)$x

$=$ oder $\frown$ 1, und wenn u eine von n unabhängige Function ist, heisst $\sqrt{u}$ *Differential* des $(C)x$, dessen *wahres Differential* $(c)x$ ist, bey jenem wird das Wort *wahres* weggelassen.

VII. Wenn z das Differential des $(A)x$, und $z' = (a)x$ ist: so ist für $z' = z + qz$ das $q \frown 0$. Denn $z : (a)x \frown 1$ (wo nicht $=$ ist); folglich (bey endlichen q) wird $-q > (1+q) : N$ (für $N \frown \infty$); denn $(z : z') - 1 < (1 : N)$, folglich $z - (z+qz) < (z+qz) : N$.

Wenn nun t das Differential des $(B)x$ und $t' = (b)x$ ist; so ist gleichfalls $t' = t + q't$, wo $q' \frown 0$.

Folglich wenn $z : t \frown 1$; ist auch $(a)x : (b)x \frown 1$. Denn es ist auch $t = z + q''z$, und $q'' \frown 0$. Also $(z' - t') : t'$ (das ist $(z' : t') - 1$)

$$= \frac{z + zq - (z + zq'' + zq' + q'q''z)}{z + q''z + q'z + q'q''z} = \frac{q - (q' + q'' + q'q'')}{1 + q' + q'' + q' + q''},$$

welches $\frown 0$, da nur der Zähler $\frown 0$.

Wenn also die Differentialen der $(A)x$, $(B)x$ gleichgeltend sind (wenn sie auch in Hinsicht verschiedener Veränderlichen genommen wären): so sind auch $(a)x$ und $(b)x$ gleichgeltend.

VIII. Wenn $(a)x : (b)x \frown 1$; so ist auch $a_m : b_m \frown 1$. Denn a_m, b_m sind unter $(a)x$, $(b)x$ begriffen (IV). Und wenn $a_m : b_m \frown 1$, und zwar jedes für dasselbe n; also $a_m - b_m = f_m b_m \varrho$ (wo f_m ächter $+$ oder $-$ Bruch, und $\varrho = 1 : N$ ist): es ist dann $(A) = (B)$ (IV).

Denn substituirt dem m von n bis p, entstehen folgende 3 verticale Reihen.

$$\begin{array}{lcl} a_n - b_n & = & f_n b_n \varrho \\ a_{n-1} - b_{n-1} & = & f_{n-1} b_{n-1} \varrho \\ - \quad - & - & - \\ - \quad - & - & - \\ a_p - b_p & = & f_p b_p \varrho \end{array}$$

Wo die Summe der 2 ersten Columnen $(A) - (B)$ ist; und die dritte $< [(B)\varrho = (B) : N]$, welches $\frown 0$, da N

$\frown \infty$. Es kann auch in jedem Gliede $k\dot{x}$ substituirt werden, wo $k=(B):(\gamma-\beta)$ bedeutet; wornach alle $\dot{x}$ die in $\gamma-\beta$ sind, zusammen gleichsam ein Rectangel bilden, wovon die Basis $\gamma-\beta$ und die Hőhe k ist; welches wenn auch n wächst, beständig bleibt, da wenn n dreymal grösser wird, $|\dot{x}$ dreymal kleiner wird, aber 3 Glieder mit der nehmlichen Hőhe darauf kommen. Dieses auch wird mit dem Factor ϱ kleiner als jedes angebliche. Folglich ist keine Grösse g dass $(A)-(B)>g$ sey. Also ist $(A)=(B)$, wie 2 Geraden, deren Unterschied nicht grösser als eine angebbare ist, gleich sind.

Wenn also die Differentialen von $(A)x$ und $(B)x$ gleichgeltend sind: so ist $(A)=(B)$.

Dass es für ein gegebenes N, für alle Glieder von β bis γ dasselbe n gebe; erhellet so: in jedem Puncte von β bis γ kann das hinlängliche n als Ordinate gedacht seyn; und es kann n auch noch grösser als jede genommen werden.

IX. Wenn $(A)=(B)$ das ist $(A)\gamma-(A)\beta=(B)\gamma-(B)\beta$; so ist $(A)\gamma=(B)\gamma-(B)\beta+(A)\beta$; welches mit $(A)x=(B)x+\text{const.}$ bezeichnet werden kann, da $(A)\beta-(B)\beta$ constant ist.

Diese constante ist $\alpha-(B)h$, venn so ein h gefunden wird, dass $(A)h=\alpha$, und das gesagte von h bis β gilt; denn da wird $(A)\beta-(A)h=(B)\beta-(B)h$; also $(A)\beta=\alpha+(B)\beta-(B)h$; folglich $(A)\gamma=(B)\gamma+\alpha-(B)h$. Dasselbe ist, wenn das Ende des h weiter als des β ist.

X. Es kann γ beliebig gross genommen werden, wenn das gesagte Statt findet. Auch wird die gesagte Gleichheit nicht gestöhrt; wenn solchem Theile des $\gamma-\beta$, welcher $\frown 0$, entsprechendes Increment auch $\frown 0$.

XI. Wenn das von (A)x gesagte auch von (K)x gilt: wird auch $(K)\gamma = (B)\gamma - (B)\beta + (K)\beta$; und nachdem $(A)\beta$ oder $(K)\beta$ zu (B) addirt, wird, kann das *Integral* des Differentialen des (B)x in Hinsicht des (A)x oder (K)x benannt werden. Das Zeichen des Integralen ist $\int$ vor das Differential gesetzt.

Freylich sind diese Integralen nur um eine Constante unterschieden: denn $(A)\beta - (K)\beta$ ist constant. Auch umgekehrt, nur um Constante unterschiedene Functionen, haben gleiche Differentialen: denn *z.b* $a + x^2 - [a + (x - \dot{x})^2] = x^2 - (x - \dot{x})^2$.

XII. Oben (VI) war $\dot{v}u$ *Differential* des (C)x genannt: das gewöhnliche Zeichen davon ist $d(C)$x, und u wird *Differentialquotient* genannt; welches da (so wie das Differential) in Hinsicht der Veränderlichen v ist. Des Differentialquotienten Diff. quotient wird der zweyte und des $p$ten der $p+1$ te genannt; nach *La Grange* erste, zweyte . . . . $p$te $(p+1)$te Function, nehmlich abgeleiteten aus der *Haupt* (oder *ur*) Function, die er *Fonction primitive* nennt. Er bezeichnet eine Function von x mit fx, die abgeleiteten mit f'x, f''x, f'''x... oder wenn $f\text{x} = y$, bezeichnet die abgeleiteten mit y', y'', y'''..—; Nach der gewöhnlichen Art wird die $p$te abgeleitete mit $\frac{d^p X}{dx^p}$ bezeichnet, wo X eine Function von x bedeutet.

So wie alle obige Bezeichnungen bloss zu dem Endwecke gewählt sind, dass die Theorie leichter praeciser und anschaulicher werde; sey es auch hier erlaubt, (theils wegen der Buchstaben und Accente Sparung zu auderem zwecke, theils der Bequemlichkeit mehrfacher Bestimmung), das Differential anstatt d mit ᵭ, und die abgeleitete mit ∂ zu bezeichnen; ${}^{x}\partial X$ bedeute das Differential des X in Hinsicht des x genommen, ${}^{x}\partial^{p} X$ bedeute die $p$te abgeleitete des X in Hinsicht des x. Wenn es einmal gesagt wird, dass sie z. B. in Hinsicht des x genommen werden, braucht man es nicht hinzuschreiben; wornach dX, ∂X das Differential und die erste abgeleitete in Hinsicht des x, bedeuten.

So kann auch das Integral-Zeichen der abgeleiteten vorgesetzt werden: $\int u$ kann die Function bedeuten, welcher die erste abgeleitete u ist in Hinsicht des x, und ${}_{x}\int^{m} u$ solche welcher die $m$te abgeleitete u ist.

XIII. Wenn $(v)x > (a)x > (u)x$, (entweder alle dreye +, oder alle negativ), und $(vx):(u)x \frown 1$; so ist auch $(v)x:(a)x \frown 1$ und $(u)x:(a)x \frown 1$. Denn es ist dann für jedes grosse N so ein n, dass $[(v)x : (u)x]-1 < (1 : N)$, also $(v)x-(u)x < (u)x:N$. Aber $(v)x-(a)x < (v)x-(u)x$, und $(a)x > (u)x$; folglich $(v)x-(a)x < (a)x:N$; also $[(v)x:(a)x]-1 < (1:N)$. Gleichfalls ist $(a)x-(u)x < (a)x:N$, folglich dividirt durch $(a)x$, wird $1-[(u)x:(a)x] < 1:N$; also $[(u)x:(a)x]-1 < 1:N$ (p. 31.).

XIV. Um das Differential zu finden: muss so eine von n unabhängige Function u gesucht werden, dass wenn δ das wahre Differential der Function z. B. X bedeutet, und dessen Differential in Hinsicht z. B. des x gesucht wird, $\delta:\dot{x} =$ oder $\frown u$ sey. (VI) Wozu das vorige XIII oft dienet. Rückwärts von dem gegebenen Differential (oder abgeleiteten) auf das Integral (Ur-Function), haben den Weg die Riesen der Paar — Jahrhunderte weiter zu bahnen der Zukunft überlassen. Das bisher gefundene ist in *Integral-tafeln* gebracht.

XV. Wie man die hőhere Differentiale nimmt, erhellt aus folgendem Beyspiele: es ist bewiesen, dass wenn m nicht 0 ist, so ist $d(x^m) = mx^{m-1}dx$; nun differenzirt man dieses so dass dx constant betrachtet werde; es wird $(m-1)mx^{m-2}dx^2$, welches man $dd(x^m)$ oder d^2x^m schreibt; und hier ebenfalls dx^2 constant gesetzt, differenzirend, wird $dddx^m$ oder $d^3x^m = (m-2)(m-1)mx^{m-3}dx^3$ und so w. Und da werden diese hőhere Differentialien *höhere Ordnungen des unendlich kleinen* genannt. Allein ausser dem, dass die einfache Reinheit, dieser gezwungenen Erzeuguns-art der Hirngespinnste fremd ist: erschwert sie ohne alle Noth die Bezeichnung. *Z*. B. die Taylorsche Reihe, welche das ausdrücket, was aus X wird, wenn darinn $x+i$ austatt x gesetzt wird, ist $X+\frac{idX}{dx}$

$+\frac{i^2d^2X}{2\,dx^2}+\frac{i^3d^3X}{2.3\,dx^3}\ldots$, welches mit $X+iJX+$ $\frac{i^2J^2X}{2}+\frac{i^3J^3X}{2.3}\ldots$ oder nach Lagrange mit $fx+$ $if'x+\frac{i^2f''x}{2}+\frac{i^3f'''x}{2.3}\ldots$ oder $y+iy'+\frac{i^2y''}{2}+\frac{i^3y'''}{2.3}\ldots$ (wenn $fx = X = y$), bezeichnet werden kann.

So wird der Krümmungs-halbmesser $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx-dxddy^2}$ einfacher durch $\frac{(1+Jy^2)^{\frac{3}{2}}}{-J^2y}$ bezeichnet, welhes wieder $= \frac{-N^3}{y^3J^2y}$ ist, wenn N die Normale bedeutet, welche $= y\sqrt{(1+Jy^2)}$ ist.

Lagrange behandelt alles sogar ohne erste Diferentialen, braucht selbst das Zeichen $\int$ nicht: beydes kann aber wo es erleichtert und veranschaulicht, gebraucht werden. Allein die höhere Differentialen, compliciren die einfache Theorie, verdunckeln die Klarheit, erschweren die Bezeichnung, und das alles ohne Vortheil: die Vernunft gebietet also das Feld von der ganzen Legion dieser aller Ordnungen des ∞ kleinen, zur helleren Aussicht zn räumen.

Indessen ist zu bemerken: dass dx^2 soviel bedeutet als $(dx)^2$, welches von $d(x^2)$ verschieden ist, eben so bedeutet ∂y^2 nicht $\partial(y^2)$ sondern soviel als $(\partial y)^2$; also auch $f'x^2$ ist $(f'x)^2$.

Es ist auch klar: dass $\dot{x} = {}^x dx$, und ${}^x\partial x = 1$, wenn auch x nicht die Hauptveränderliche ist, nur mit ihr verändert wird. Z. b. Es sey t die Zeit die Haupt-veränderliche, und $(D)t$ bedeute die Geschwindigkeit v am Ende des t; so wird $(D)m\dot{t} - (D)(m-1)\dot{t} = \dot{v}$, und $\dot{v} : \dot{v} = 1$.

XIV. Die Bücher (am Titelblatte) abzuschreiben war nicht der Plan; also sammt anderen, auch hier die Anwendnng auf Geometrie und Mechanik, und die Variations—Rechnung wegbleiben muss: dennoch muss die Theorie mit Paar leichteren Beyspielen erleuchtet werden.

1. Es seyen auf der Ebene die Abscisse x, und die senkrechte Ordinate y, und x sey die Hauptveränderliche. Die Fläche zwischen x, den y an beyden Enden, und der durch die Enden der y erzeugten Linie sey (A)x. Aus XIII soll (v)x und (u)x genommen werden; es ist leicht einzusehen, dass (a)x inzwischen fällt, und $(v)x : (u)x \frown 1$; folglich kann (VII.) angewandt werden; und $d(A)x = \dot{x}y$, und $\partial(A)x = y$; es soll also y ausgedruckt, und dasjenige (B)x gesucht werden, dessen abgeleitete dassel-

be y ist. z. b. Es sey $y=1:(1+x)$, wie bey der gleichseitigen Hyperbel auf der Assymptote: so wird $(B)x=$ lognat $(1+x)$; denn es wird bewiesen, dass d lognat $z = \dot{z} : z$. Folglich $(A)\gamma-(A)\beta=(B)\gamma-(B)\beta$; also für $\beta=0$, wird $(A)\gamma=$ lognat$(1+\gamma)$, weil lognat $(1+0)=0$.

2. Wenn $(H)x$ den Inhalt eiues durch die Rotation des vorigen, entstandenen Körpers bedeutet: so wird auf vorige Art $d(H)x=\dot{x}y^2\pi$, nehmlich ein Cylinder dessen Höhe $\dot{x}$, Grundfläche der Kreis des radius y ist: also $\dot{(H)}x= y^2\pi$. Also im vorigen Falle wird $y^2\pi=(1+x)^{-2}\pi$; und es ist sowohl $-\pi(1+x)^{-1}$ als $\pi x(1+x)^{-1}$ so eine Function $(I)x$, welcher abgeleitete $(1+x)^{-2}\pi$ ist; welche freylich beyde nur um Constante unterschieden sind.

Also $(H)\gamma-(H)\beta=\frac{\pi\gamma}{1+\gamma}-\frac{\pi\beta}{1+\beta}$; also für $\beta=0$ wird $(H)\gamma=\frac{\pi\gamma}{1+\gamma}$. Dasselbe ist für den anderen Werth von $(I)x$; denn es wird $(H)\gamma=-\frac{\pi}{1+\gamma}+\frac{\pi}{1}=\frac{\pi\gamma}{1+\gamma}$.

Wenn $x \frown \infty$; die vorige Fläche $\frown \infty$, aber dieser Körper $\frown \pi$.

3. Es sey r der Halbmesser der Erde, c ihr Mittelpunct; und in der Verlängerung des r ein Punct a; und ac soll a genannt werden, und s der Weg eines aus a gegen c in der Zeit t fallenden Punctes, und am Ende des s und des t sey die Geschwindigkeit v, und die beschleunigende Kraft w. Die Hauptveränderliche sey t, und $a-s$ sey x genannt.

Weil die Schwerkraft sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält; so ist $w=r^2g':(a-s)^2$, wenn an der Oberfläche der Erde, $w=g'$ ist; nehmlich die Einheit der

Zeit $=1''$ gesetzt, die Geschwindigkeit ist der Schuche Anzahl, welche ein Punct bloss nach der vorherigen Ursache in $1''$ beschriebe; und w ist die Geschwindigkeit, welche eine Kraft, während einer Secunde gleichwirkend, an derselben Ende hervorbrächte. Und so ist $g'=2g$ wenn der fallende Körper an der Erd-Oberfläche in $1''$ den Weg g beschreibt.

Sowohl $v^2:2$ als $r^2g':(a-s)$ sind von t abhängende Ausdrücke: es sey also jenes $(G)t$. und dieses $(S)t$.

Es wird bewiesen; dass $v\dot{v}=ws$, $v\dot{v}$ Differential von $v^2:2$, und $w\dot{s}=\frac{r^2g'\dot{s}}{(a-s)^2}$ Differential von $\frac{r^2g'}{a-s}$ ist. Folglich ist $(G)=(S)$ (p. 36); also $(G)\gamma-(G)\beta=(S)\gamma-(S)\beta$; nehmlich wenn am Ende der Zeit γ der Weg $s=\sigma$, wird für $\beta=0$, $\frac{v^2}{2}=\frac{r^2g'}{a-\sigma}-\frac{r^2g'}{a}$; und $v^2=2r^2g'\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{a}\right)$, wenn x' das x am Ende der Zeit γ bedeutet.

Folglich ist $v=r\sqrt{2g'\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{a}\right)}$. Und wenn $x'=r$, so wird $v=r\sqrt{2g'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}$, welches $\backsim\sqrt{2rg'}$, wenn $a\backsim\infty$; welche eben die der Höhe r entsprechende Geschwindigkeit ist.

Woraus erhellet, dass von der Oberfläche jedes Himmel- körpers, wenn da die Schwerkraft g'', der raduis r' ist, die kleinste Geschwindigkeit, mit welcher eine Kugel in der Richtung des Halbmessers weggeschossen, nie zurückkehrte (alle Hindernisse weggedacht) der Höhe r' entsprechende wäre: nehmlich die Endgeschwindigkeit aus dem ∞ gefallenen, ist dann die anfängliche.

VON DEN GRÜNDEN DER GEOMETRIE (so viel als kurz und ohne Figuren seyn kann).

§. 32. *Nic. Lobatschewsky* Kais. russ. wirkl. Staatsrath und ord. Prof. der Mathematik bey der Universität Kasan, sagt in einem treflichen zu Berlin 1840 gedruckten Werke: dass „Dunkelheit in den ersten Begriffen, Art und Weise, wie man sich die Ausmessung der geom. Grössen vorstellt, und die wichtige Lücke der Parallelen, sind hauptsächlich, warum die Geometrie, solange sie nicht in die Analysis übergeht, bis jetzt keinen Schritt vorwärts thun konnte aus demjenigen Zustande, in welchem sie von Euclid überkommen ist."

Obwohl kein anderes Werk von ihm hieher angelangt ist; dieses allein ist ein Beweis eines ausserordentlichen Geistes: Hauptgegenstand davon ist die Theorie der Parallelen. Von andern Gründen der Geometrie steht nichts mehr, als 1. dass die Gerade eine Linie sey, welche ihren Ort nicht verändert, wenn sie 2 unbewegliche Puncte mit einer sich drehenden Fläche gemein hat. 2. dass zwey Oberflächen gleich sind, wenn sie durch Zusammenfügung oder Trennung gleicher Theile entstehen. Wahrscheinlich wird in den gelehrten Schriften der UniversitätKasan, davon womit er Jahrthausende beschuldigt, noch mehr getilgt.

Auch hier erschien im Jahre 1832 am Ende des ersten lateinischen Bandes eine Appendix, welche jenem so sehr ähnlich ist: dass beyden (da keiner den anderen gesehen hat) dasselbe Orginal der Wahrheit nach Jahrthausenden erschienen sey.

Doch sind sie auch in manchen verschieden: theils einigermassen am Wege, und durchaus in den Bezeichnungen, von welchen nur der Buchstabe *e* beyden gemein ist; welchen der hiesige als *Basis der natürl. Logar.* ausdrücklich braucht, sogar in seinem Gange darauf geleitet angenommen hat; jener aber jede Grösse die > 1 darunter versteht, mit dem Zusatze, dass es auch die *Nepersche Basis* seyn könne.

Von hiesigen sind einige nach Wien, Berlin, Göttingen.. noch dazumal hinausgeschickt worden; aus Göttingen schrieb der Mathematische Riese, welcher aus erhabenen Thürmen, von den Sternen bis auf die tiefe Gründe mit gleichem Auge sieht; dass er überrascht war, gethan zu sehen, was er begonnen hat, um es unter seinen Papieren zu hinterlassen.

Es betrifft die am Titelblatte geschriebene grosse Frage: vieles wird unseren zu kleinen Weiten gewöhnten Sinnen zuwider; die Winkelsumme des $\triangle \frown 0$, wenn die Seiten $\frown \infty$; und sie $\frown 2R$ nur wenn diese $\frown 0$; es ist kein Rectangel, kein Quadrat, obwohl in der Peripherie 3, 4... gleichseitige Figuren sind; ist auch keine vollständige Ähnlichkeit.

In jenem wird diese *Imaginäre Geometrie* genannt: im hiesigen ist der Titel *Absolutwahre Raumlehre*; nehmlich unter der auf die *Nein-Antwort* gebauten Geometrie, nur soviel verstanden, dass es nicht gewiss sey, dass die Antwort *Ja* sey; und es werden auf jeden Fall solche Formeln herausgebracht, dass die Werthe von einer Geraden *i* abhängen, welche auf den Fall der *Nein*-Antwort zwar gewisse Constante ist, aber a priori nicht bestimmt werden kann, ob sie ein Schuch oder Syrius-Weite sey; und je grosser sie wäre, desto näher wären die Werthe denen, welche im Falle der *Ja*-Antwort wären. So dass in den Formeln des Hiesigen, im Falle der Nein-Antwort dem i sein Werth den er dann hat, substituirt, und auf den Fall der Ja-Antwort $i \frown \infty$ gesetzt werden muss, um den wahren Werth zu erhalten.

Der Theil der Geometrie, welcher unabhängig von der *Ja* oder *Nein* Antwort, folglich von der Grösse des hiesigen i ist, abgesondert enthält; Gleichheit der Triangel. Gleichen Seiten gegenüber stehen gleiche Winkel, grösseren grössere, und umgekehrt. Grösse der Winkel um einen Punct; auf der Geraden die Summe $2R$, und umgekehrt. Daher die Scheitel-Winkel. Des $\triangle$ äusserer Winkel grösser als jeder innere gegenüber. Senkrechte aufrichten, fällen. Sie ist einzige aus einem Puncte auf eine Gerade. Sie ist auch die kürtzeste Gerade. Gerade und Winkel halbiren; zu einem $\triangle$ oder Winkel gleichen zu construiren. Gerade mit dem Kreise einen Punct, zwey Puncte gemein, mehr nicht. Aus seinen 3 Puncten den Mittelpunct zu finden. Mehrere den Kreis schneidende Geraden. Möglichkeit der Polygone, aber Construction nur des 4, 8, 16.... ecks. Kreis mit dem Kreise einen Punct, zweye gemein, mehr nicht.

Aehnlichkeit aber, Theilung der Geraden in 3, um jeden $\triangle$ einen Kreis zu beschreiben, absolute Grösse eines Polygon-Winkels, mit einem Worte alles was zusammenhängt mit der 2Rechten gleichen Winkel-Summe des $\triangle$ bleibt weg: da es bewiesen wird; dass wenn die Antwort nicht *Ja* ist, die Winkelsumme verschieden und zwischen 0 und $2R$ unbestimmt sey, nur $> 2R$ nicht seyn könne.

Auch vieles auf der Sphaere gehört in die unabhängige Geometrie, wo (da sich diese Fläche auch wie die Ebene) um jeden ihrer Puncte in sich bleibend drehen kann, viel analoges Statt hat. Das Lineal vertritt ein auf gewisse Art eingerichteter beweglicher Kreis dessen Halbmesser = jenem der Sphäre ist: mit dem blossen Cirkel würde es unendliche Anzahl von Operationen erfordern. Unter andern werden die Sphär. △; Ihre Gleichheit; gleichen Seiten gegenüber gleiche Winkel, und umgekehrt u. d. gl. Seiten, Winkel zu halbiren. Senkrechte errichten, fällen. Gleiche △, Winkel zu construiren. Kreise zu beschreiben. Berührungen hervorbringen. Polygone von 4, 8, 16. . Seiten zu construiren. Sogar der Mittelpunct auf der Sphaere, der durch jede darauf gegebene 3 Puncte gehenden Peripherie kann gefunden werden; welches auf der Ebene eine ohne die *Ja*-Antwort nicht auflösliche Aufgabe ist: könnten jede 3 Puncte, die nicht in einer Gerade sind, in eine sphäre fallen; so wäre das Eucl. *Ax.* XI bewiesen.

Beyde Schriften beweisen auch: dass die Sphärische Trigonometrie, unabhängig sey von der *Ja* oder *Nein* Antwort. Die hiesige *berechnet* auch die *Kugel-Oberfläche unabhängig davon.* Also gehört das auch hieher. Auf den Fall der *Nein* Antwort zeigt aber die hiesige Schrift auch die *Quadratur des Kreises.*

Beyde leiten Formeln ab, welche die Abhängigkeit der Seiten und Winkel im △ ausdrücken; welche zwar verschieden aussehen, aber wirklich ürbereinstimmen.

Beyde haben auch, obwohl auf verschiedenen Wegen die Formeln beyder Trigonometrien zur Übereinstimmung gebracht: das hiesige steht im 2ten Bande des Lateinischen (1833) pag. 380, aus den Formeln der geradlinigen Trigonemetrie unmittelbar gefolgert, wo auch der pythagorische Satz auf den Fall der *Ja* Antwort gezeigt ist.

Beyde erzeugen eine Fläche, wo *Ja* die Antwort, und die Euclidische Geometrie wahr ist; ob sie aber mit der Ebene einerley sey, bleibt unbestimmt: es ist die Gränze der Sphäre, wenn der Halbmesser $\frown \infty$; und die Stelle der Geraden darinn vertretende Linie ist der Kreise Gränze da der radius $\frown \infty$. In der *Kasanischen* Schrift wird diese Fläche *Orisphaere*, und die Linie *Oricykel* genannt; die hiesige nennt die Fläche *F*, und *L* die Linie.

Auch darinn stimmen sie überein: dass es bloss auf Messungen a posteriori ankomme, zu entscheiden: ob auf die *Ja* Antwort gegründete Geometrie soweit unsere Messung reicht, keinen in unsere Sinne fallenden Fehler zeigt. Auch pag. 489 des I ten Lateinischen Bandes steht folgendes: *Tempus ab aeterno connata spatii soror, ei auxilio venit; et quum motus corporum coelestium calculis Ax. XI posito innixis conveniant: pro omni mensurationum nostrarum sphaera, in praxi eidem tuto conquiescere monet.*

Dieses im voraus: etwas mehr (so viel als hier seyn kann) wird unten gesagt.

Die Frage ist aber doch: ob nicht ein annehmbares Axiom zu finden sey? Im 1 ten lateinischen Bande sind mehrere, von welchen jedes hinreicht, wenn es angenommen wird. Von denen ist auch das folgende. Wenn ein Theil *T* des Raumes so beschaffen ist, dass er *n* mal neben einander gelegt, den ringsum unendlichen Raum ausfüllt: aus demselben Theile können nicht *n* ringsum unendliche Räume ausgelegt werden. Obgleich *n* wie immer grosse Zahl bedeuten kann; für ein Axiom ist keines einfach genug. *T* kann den Theil des Raumes zwischen zwey sich aus einer Gerade gehenden auf einer Seite ∞ und einen beliebig kleinen Winkel bildenden Ebenen seyn.

Indessen wenn auch die *Ja* Antwort bestimmt wäre: die auf jeden Fall allgemeine Geometrie bliebe für die Wissenschaft interessant.

§. 53. Dieses vorausgeschickt ist die Ordnung folgende.

I. Nach der Anschanung des Raumes, einige Begriffe, und Erzeugung der Gerade, und der Ebene, und daraus enstandene Begriffe.

II. Die Ebene öfnet ein Feld hellerer Aussicht dem forseheuden Auge: da kömmt zuerst die einfache Bewegung, dann die aus zweyen zusammengesetzte in Betracht.

III. Nach einer hinlänglichen Untersuchung, hebt es sich mit dem da erworbenen Schatze in den unendlichen Raum zurück.

§. 34. Der Begriff des Raumes entsteht durch das Wegdenken aller Erden und Sonnen: es ist der Ort der ganzen Aussenwelt — eine heilige Nacht, in welcher die zahllose Lampen zum Unsichtbaren hinleuehten — und ein unendliches Feld das innere Aug eröfnet—

Die Anschauung zeigt ihn ringsum unendlich, ewig, stetig, homogen, unwandelbar, so dass kein Theil andere Veränderung erfahren kann, als dass er bald einem bald einem anderen Beweglichen zum Orte dienen kann.

§. 35. Allgemein kann *a Theil* von *A* genannt werden: wenn *A* das *a* in sich hat und ausserdem auch anderes in sich hat. Der *Theil* aber heisse *unzertrenulich*, welcher zwar abstrahirt Gegenstand des Denkens werden kann, aber so getrennt kann nicht gedacht werden, dass er nicht ganz da bleibe .z.b. Punct oder Puncte aus der Linie, Linie aus der Fläche u.d.gl.

Bestandtheile werden sowohl a als b genannt: wenn der Inbegriff beyder, A selbst ist; und a und b entweder keinen Theil gemein haben, oder das beyden gemeine beyder unzertrennliches ist.

Solcher Theil, welcher gewissemal nach einander gelegt das A vollkommen ausfüllt und herstellt: kann *ausfüllender* heissen.

§. 36. Wenn von etwas gesagt wird, dass es aus $\alpha, \beta \ldots$ besteht: soll es ausser $\alpha, \beta \ldots$ nichts enthalten, und jedes der $\alpha, \beta \ldots$ soll Bestandtheil davon seyn.

§. 37. Wenn jede Bestandtheile des A aus welchen es besteht, etwas gemein haben: wird A *stetig* genannt.

§. 38. Wenn von etwas z. b. α gesagt wird, dass es *gleich* dem β sey, und die Gleichheit nicht näher betimmt ist: bedeutet, dass α von β, abgesehen vom Orte (Lage), nicht zu unterscheiden sey.

§. 39. Wenn Q aus $A, B \ldots$ besteht, und q aus $a, b \ldots$ eben sovielen Theilen; und die gleichnahmige Buchstaben gleiche bedeuten: so werden Q und q *theilweise gleich* genannt. Dieselbe Benennung bleibt, wenn die gleiche Anzahl der Theile beyder ins ∞ wächst, und das was aus Q und q übrig bleibt, $\frown$ 0. Es ist im Lateinischen mit $Q \mathbin{\text{I}} q$ bezeichnet.

§. 40. *Quantität* wird daselbst. A genannt: wenn es entweder keine oder solche Bestandtheile hat; dass jeder, selbst oder ein Bestandtheil davon, dem anderen oder einem Bestandtheile davon, gleich sey. Z.b. Raum, Zeit, Gerade, Kreis, Schraubenlinie, Ebene, Sphäre, Cylinder-fläche, Raumpunct, Zeitpunct, 0. Der Zeitpunct ist, welcher, obgleich ihm keine Bewegung entspricht, die heftigste Bewegungen verewigt (auf der Mahlers-tafel). Es kann auch etwas in jedem Puncte einer Zeit vor und nach einem gewissen Puncte seyn, und in dem einzigen nicht.

Aus §. 17 ist ersichtlich, wie auch Dinge die in diesem Sinne nicht Qauntitäten sind; auf Quantität reducirt *respective Grössen* werden.

§. 41. Die Anschanung zeigt: 1. Das jeder stetige Bestandtheil des Raumes, aus zwey solchen Theilen besteht, welche ein stetiges, beyder unzertreunliches *c* gemein haben. 2. Dass dieses *c* gleichfalls aus zwey solchen Theilen besteht, welche wieder ein stetiges, beyder unzertrennliches *d* gemein haben. 3. Dass dieses *d* auch so einen unter seinen Bestandtheilen hat, welcher selbst stetig ist, aber mit dem übrigen, zwey bestandtheilose *Puncte* genannt gemein hat, und nichts mehr.

Sowohl *c* als jeder Bestandtheil davon, sogar alles was aus solchen Theilen besteht heisst *Fläche*, gleichfalls *d* und jeder Bestandtheil, auch jedes was aus solchen Theilen besteht, *Linie*. Der Punct ist eigentlich *Raumpunct*; und die Anschauung zeigt, dass solche in Raume überall, und alle gleich sind.

Anmerkung. 1. Je feiner zugespitzter Bleystift, und dessen Spur führt auch auf ideellen Punct und Linie.

2. Wenn der Punct aus jedem Puncte eines stetigen räumlichen, in diesem endliche Zahl von Wegen hat, so ist es eine Linie; wenn es aber aus jedem Puncte unzählige Wege hat,

und dabey keinen Bestandtheil des Raumes in sich hat, so ist es eine Fläche.

3. Die *Linie* wird *einfach* genannt, wenn der Punct aus keinem Puncte in ihr mehr als 2 Wege hat: und *Figur* wird sie genannt, wenn ein Punct sie so beschreiben kann, dass er bloss in den ersten Ort zurückkehrt, z. b. △, O...

§. 42. Da aber der Raum unwandelbar ist: so kann kein △ auf den andern gelegt werden, ohne folgendes geometrisch zu construiren. Ein Rückblick aus dem abstrahirten Raume in die Aussenwelt, leitet auf die Frage: ob diejenige Örter, in welchen derselbe Körper zu verschiedenen Zeiten war, gleich seyen? Und da die Antwort anschaulich bejahend ist; so wird das *geometrisch Bewegliche* construirt, welches von Körper nichts weiter hat ausser der Beweglichkeit, und dass es in derselben Zeit an verschiedenen Örtern nicht seyn könne.

Und hiemit entsteht das *Axiom der Congruenz*: dass wenn so ein Mobile zuerst mit *A* hernach mit *B* zusammen fällt, so ist *A* gleich *B*.

§. 43. Wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.. Puncte sind: $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}\ldots$ bedeute dieselben unverändert in ihrer Lage, und $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}\ldots \doteq \mathfrak{a}'_*\mathfrak{b}'\ldots$ bedeute, dass in dem Beweglichen, in welches zuert $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\ldots$ fielen, hernach $\mathfrak{a}'$ dahin fallen könne wo $\mathfrak{a}$ war, und $\mathfrak{b}'$ dahin wo $\mathfrak{b}$ war, und sofort, wenn mehrere sind.

Und wenn kein solcher vom Puncte $\mathfrak{c}$ verschiedener Punct $\mathfrak{d}$ ist, dass $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}_*\mathfrak{c} \doteq \mathfrak{a}_*\mathfrak{b}_*\mathfrak{d}$; so kann man sagen, dass $\mathfrak{c}$ *einziges* des $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}$ sey.

§. 44. Der Inbegriff aller Puncte, deren jeder $\mathfrak{p}$ so beschaffen ist, dass für bestimmte Puncte $\mathfrak{c}, \mathfrak{b}$ allgemein sey $\mathfrak{c}_*\mathfrak{p} \doteq \mathfrak{c}_*\mathfrak{b}$; heisst *Sphäre* (aus $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b}$). Die Anschauung zeigt, dass sie überall gleichförmig, stetig, und des

Raumes unzertrennliches, ihn in zwey Bestandtheile theilt, von welchen sie einen einsperrt; der andere bleibt draussen ringsherum ∞; und kein Punct kann von aussen in das innere (oder von innen hinaus) kommen, ohne durch sie zu gehen. Das letzte wird auf alles auf diesseits und jenseits gewissermassen ausgedehnt.

Das eingesperrte sammt der Oberfläche wird *Kugel* genannt; unter der *Sphäre* wird nur das gesagte verstanden.

§. 45. Wenn des A jede zwey Puncte a, b so beschaffenn sind, dass jeder Punct im Raume, welcher des a_*b einziges ist, in A sey: so wird A, wenn es Linie ist, *Gerade*, wenn es Fläche ist, *Ebene* genannt; wenn Körper, so ist es der *Raum* (jedes ganz unendlich).

Anmerkung. 1. Eine Linie ab ist (kurz) *gerade*, wenn von a bis b keine ihr gleiche von ihr verschiedene ist.

2. *Richtung* ist *idem per idem*. Der kürzeste weg ist unlogisch: kleiner ist a als b, bedeutet, dass a ⌶ einem Bestandtheile des b sey: wie kann man von einer Linie sagen, dass sie kleiner als eine andere sey, wenn kein Bestandtheil der einen irgend einem der andern gleich ist? Selbst die Peripherie vom einem Zoll-durchmesser kann kleiner als die Syrius Weite nur als respective Grösse (§. 17.) behauptet werden.

3. Der Inbegriff aller Puncte, deren jeder p, für gewisse 2 Puncte a, b (welche dieselbe bleiben) so beschaffen ist, dass $a_*p \doteq b_*p$, heisst *Ebene*; und der Schnitt zweyer Ebenen, *Gerade*.

4. Im folenden § werden sie auf eine andere Art, wie im Lateinischen ist, construirt: hauptsächlich um das entbehren zu können, dass die Sphäre eine endliche Grösse sey.

§. 46. Zur *Construction der Gerade und der Ebene*, wird folgendes axiomatisch gesetzt: von welchen die meisten auch sonst Stillschweigend gesetzt werden.

1. Gleiche Bestimmungen erzeugen gleiches, dieses ist ein Grundsatz sowohl in der Geometrie als in der Arithmetik,

2. Jeder Punct kann zu jedem hingehen, sammt jedwedem, in welches er fällt,

3. Für jeden Punct $\mathfrak{c}$ und jedes im Raume begrenzte C, ist aus dem Mittelpuncte $\mathfrak{c}$ eine das C einschliessende Sphäre.

4. Wenn die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in das Bewegliche fallen: so kann $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}$ um $\mathfrak{a}$ auf unzählige Art (auch bis zur Rückkehr bewegt werden.

5. Wenn die Puncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ in dem Beweglichen $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{d}'$ fallen; und $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}_*\mathfrak{d}$ so gelegt wird, dass $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{a}'$ fallen: wenn $\mathfrak{d}$ um $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}$ beweglichwar; wird dann $\mathfrak{d}'$ auch um $\mathfrak{b}'_*\mathfrak{a}'$ beweglich.

6. Wenn $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}_*\mathfrak{d}$ um $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}$ bewegt wird: so hat $\mathfrak{d}$ aus jedem Orte 2 und nicht mehr Wege, nehmlich vor und rückwärts, und beyde gleicher weise.

7. Wenn um $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}$ jeder der Puncte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$.. beweglich ist: so ist auch ihr Inbegriff um $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}$ beweglich und jeder Punct thut das was er allein in der Bewegung um $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}$.thäte.

8. Wenn 2 Sphären s und S aus den Mittelpuncten $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{C}$, ringsum stetiges g gemein haben, so ist dieses ringsum in Hinsicht des $\mathfrak{c}_*\mathfrak{C}$ gleich bestimmt; so dass es um $\mathfrak{c}_*\mathfrak{C}$ in sich bleibend bis zur Rückkehr bewegt werden kann.

9. Aus einem Puncte $\mathfrak{a}$ bewegter Punct kann nicht in einen anderen $\mathfrak{b}$ gelangen; ohne zuerst eine Weile durch die Sphären des Mittelpunctes $\mathfrak{a}$, aus inneren immer weiter in äussere zu gehen.

§. 47. Es sollen aus e und $\mathfrak{E}$ gleiche Sphären s und S paarweise erzeugt werden, zuerst aus e mit $\mathfrak{E}$ und aus $\mathfrak{E}$ mit e; dann immer weiter ausgedehnt ins ∞.

Jedes von diesen Paaren (s und S) muss etwas ringsum stetiges gemein haben. Denn etwas von S muss ausserhalb s seyn; denn sonst müsste die Kugel der S ganz in die Kugel der s fallen: als Theil kann nicht dem Ganzen gleich seyn, (auch fiele auch die andere Kugel als Theil in diese); also müssten beyde zusammenfallen, dessen Unmöglichkeit gleich bewiesen wird. Allein etwas won S mnss auch innerhalb s seyn; denn sonst fiele die Kugel der S ganz ausserhalb s, obwohl e welches in ersten Falle in S, in anderen Fällen inerhalb S, und immer innerhalb s ist.

Folglich hat S irgend einen Punct p ausserhalb s, und irgend einen p' innerhalb. Also da ein Punct aus p nach p' im S gehen hann, muss es durch s gehen (§. 44.); folglich S und s etwas gemein haben. Dieses gemeine kann aber nicht nur ein Punct weder getrenntes seyn: denn so könnte der Punct aus p in S nach p' hingelangen, ohne durch s zu gehen. Folglich muss es ringshernm stetig, und in Hinsicht des $e_*\mathfrak{E}$ gleich bestimmt, um $e_*\mathfrak{E}$ einen Ring haben (§. 46.).

Dass 2 gleiche Sphaeren nicht verschiedene Mittelpuncte haben, erhellet so: wenn der Mittelpunct m einer Sphäre s in einen andern Punct m' geht; die sphaere s fällt mit ihrem ersten Orte nicht zusammen. Denn es sey σ die Sphaere aus m mit m': wenn s mit ihrem ersten Orte zusammen fällt, so ist wieder der erste Fall: und so wie m in m' kam, kann von da in m'' kommen, durch ein neues aus

m' beschriebenes σ; und der erste Fall kömmt immer wieder. Der Punct m kann aber nach jedem Puncte des Raumes hingehen, welches nicht anderst, als durch solche σ geschehen kann. Folglich würde die Sphaere s ihren Ort nicht verlassen können; und es wäre nur die einzige der s gleiehe sphaere im Raume, nehmlich sie selbst.

§. 48. Es sey zuerst das erste Paar, wo c im S ist, und es soll in dem Segmente des gemeinen Ringes, in welchem Segmente nehmlich c ist, aus c ein Punct in S bis zum Ringe gehen, und mit jedem Puncte dieses Weges sollen aus c Sphaeren gedacht werden; diese werden von c begonnen, bis zum Ringe seyn, und alles vorigo gilt von jeder; denn c bleibt in S, und alles von S was vorhin ausserhalb s var, ist auch ausserhalb der inneren. Folglich hat jeder Punct des Weges einen Ring, und die ganze Linie kann um c in S bis zur Rückkehr bewegt werden (§. 46 7).

Folglich venn ein Punct aus c im S bewegt wird, muss in seinem Wege so ein Punct p seyn, dass der Weg cp eine einfache Linie sey, und von c begonnen der Punct immer in äussere Ringe komme: denn wo er den Weg in derselben Sphaere thäte, oder zurück in innere käme, das müsste irgendwo zum erstenmal seyn. Diese cp also wird im S von c bis p immer weitere Ringe bilden.

§. 49. Wenn $c_* \mathfrak{C}_* \mathfrak{f} \doteq c_* \mathfrak{C}_* \mathfrak{f}'$ (wo die Buehstaben Puncte bedeuten): so kann (wenn $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ verschieden sind) $c_* \mathfrak{C}_* \mathfrak{f}$ um $c_* \mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{f}'$ bis zur Rückkehr bewegt werden.

Denn es seyen 2 Sphaeren S und s aus $\mathfrak{C}$ und c, beyde mit $\mathfrak{f}$; so werden $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ beyden gemein. Die 2 Kugeln sind entweder gleich, oder die eine ist kleiner. Wenn sie gleich sind; so hat S etwas ausserbalb s; es soll der Punct $\mathfrak{d}$ seyn; es werde eine Sphaere σ aus $\mathfrak{c}$ zwischen s uud der Sphaere aus $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{d}$; dieses σ schliesst die s, folglich die Puncte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ des S und s ein; also hat S den Punct $\mathfrak{d}$ ausserhalb σ und $\mathfrak{f}$ innerhalb σ; folglich bilden S und σ einen Ring in S (§. 47). Und (der gleichen Bestimmung wegen) müssen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ auf derselben Seite des Ringes fallen.

Wenn S und s ungleich sind: es sey s kleiner, und es sey eine Sphaere σ' aus $\mathfrak{c}$ der S gleich; so wird (wie vorher) $\mathfrak{f}$ innerhalb σ' seyn, und S und σ' bilden einen Ring.

In jedem Falle sey der Ring R genannt, und $\mathfrak{z}$ das Segment, wo $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ sind; und sey $\mathfrak{P}$ ein Punct des R; R hat so einen Punct $\mathfrak{g}$ (§.48), dass ein Theil $\mathfrak{P}\mathfrak{g}$ des Ringes, von $\mathfrak{P}$ begonnen jeder weitere Punct immer weitere Ringe im S bilde, den Punct $\mathfrak{P}$ einschliessend. Es soll $\mathfrak{g}$ in so einer aus $\mathfrak{P}$ beschriebenen inneren Sphaere genommen werden, welche durch einen inneren Punct des $\mathfrak{z}$ geht. Auf der anderen Seite des $\mathfrak{P}$ im Ringe sey $\mathfrak{P}\mathfrak{g}' = \mathfrak{P}\mathfrak{g}$, und jedem Puncte des $\mathfrak{P}\mathfrak{g}$ im Ringe soll das entsprechende in $\mathfrak{P}\mathfrak{g}'$ gedacht werden. Vom Ringe jedes Punctes $\mathfrak{g}$ fällt ein Theil in $\mathfrak{z}$; wie $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{g}'$ geht, und er kann durch keinen anderen Punct zwischen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ gehen, sonst hätte eine äussere Sphaere mit der inneren gemeines. Dasselbe gilt von den übrigen Puncten des $\mathfrak{P}\mathfrak{g}$.

Jeder in $\mathfrak{z}$ fallende Ring-theil soll halbirt werden: es gehe nehmlich ein Punct aus $\mathfrak{g}$ gegen $\mathfrak{g}'$ und ein anderer aus $\mathfrak{g}'$ gegen $\mathfrak{g}$, beyde gleicherweise; wo sie sich begegnen, da ist die Mitte. Der Inbegriff aller dieser Mitten ist eine einfache Linie, denn in jedem Bogen hat es nur einen Punct, und ein durch die Mitten gehender Punct geht immer in äussere Sphaeren.

Diese Linie steht auf dem Ringe beyderseits gleich bestimmt; ist aus allen Puncten des Ringes gleicherweise zu errichten; so dass ein Punct in *R* gehend sie im *S* mitführen kann. Sie heisse λ.

Jeder Punct $\mathfrak{p}$ des Bewegten λ bleibt entweder an demselben Orte, oder ist ringsherum in Hinsicht des $c_*\mathfrak{C}$ gleich bestimmt: folglich macht einen Ring. Vom Anfang $\mathfrak{P}$ des λ in *R* kann eine Weile nicht jeder Punct des λ ruhen; denn da würden solche Puncte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ des λ seyn, um welche der Theil von da bis *R* (nehmlich $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ um $\mathfrak{p}$, und $\mathfrak{p}'\mathfrak{P}$ um $\mathfrak{p}'$) ringsum bewegt das Segment z beschriebe; folglich $\mathfrak{p}\mathfrak{P} = \mathfrak{p}'\mathfrak{P}$ wäre (Theil dem Ganzen).

Demnach sind von *R* begonnen, eine Weile immer Ringe (p. 56). Und wenn $\mathfrak{k}$ keinen Ring hat; so kann (§. 30. Anm.) angewandt werden: es muss nehmlich in dem Wege eines Punctes in *S* von $\mathfrak{P}$ bis $\mathfrak{k}$, ein letzter seyn, vor welchem bis $\mathfrak{P}$ immer Ring ist, und da entweder der *letzte Ring* oder *zuerst kein Ring* ist.

Der letzte ist nicht: denn es waere wieder ein Segment, und das vorige anwendbar. Also hat der Punct keinen Ring, und der Inbegriff der vorigen Ringe bis *R* ist das Segment z. Dieser Punct ist entweder $\mathfrak{k}$, oder ein anderer: $\mathfrak{k}$ kann nicht seyn; denn $\mathfrak{k}'$ ist ausser $\mathfrak{k}$ in z, folglich hat es einen Ring; und wegen beyder gleiche Bestimmung müsste auch $\mathfrak{k}$ einen haben. Es ist also ein anderer: und sowohl $\mathfrak{k}$ als $\mathfrak{k}'$ haben Ring; beyde Ringe müssen aber eines seyn; denn wenn des $\mathfrak{k}$ Ring weiter wäre als des f′, müsste auch dieser weiter als jener seyn.

Folglich kann c * C * f um c * C durch f′ bis zur Rückkehr bewegt werden.

§. 50. Es sollen nun (wie §. 47.) aus c und C gleiche Sphaeren paarweise erzeugt werden, zuerst aus c mit C, und aus C mit c; und dann immer weiter ins ∞.

Es sey zuerst der erste Ring, aus a einem ihrer Puncte, in b halbirt: nehmlich durch das Begegnen zweyer aus a zu beyden seiten gleich bewegten Puncte; es ist nehmlich jeder, zwischen a und dem andern (p. 52). Gleichfalls sollen p und q die Mitten der zwey Hälften seyn.

Und ein Punct f gehe aus a durch alle äussere, durch die immer weitere Sphaeren-Paare gebildete Ringe: und es werde in jedem gefragt, ob der Punct einziges des a * b sey? wo die Antwort *Nein* ist; da kann sich f um a * b bewegen (§. 49.). Es ist aber auch a * b * c ≟ a * b * C; folglich kann sowohl c als C um a * b bewegt werden, und wenn c in C kommt, wird C wo c war seyn. Es sey nun das vorige Schema für diese Lage des c und C gedacht: die Sphaere des c wird in die des C, und diese in jene fallen; und jedes Sphaeren-Paares gemeiner Ring derselbe seyn; und f auch in denselben Ring fallen, es falle in f′. Dieses f′ kann mit f nicht dasselbe seyn; denn es beschriebe dann um a * b keinen Ring, und die Antwort wäre nicht *Nein* gewesen.

Es sey die Mitte m des Bogens ff′, und derselbe Ring sey aus m halbirt in i, auch die 2 Hälften in p′, q′. Und es sollen 2 Puncte aus m in mq′i und mp′i gleich bewegt werden; die Endpuncte der gleichen Wege seyen *x* und *x′*. Es wird

$a_* b_* x \cong a_* b_* x'$ sowohl als $i_* m_* x \cong i_* m_* x'$; also x kann sich mit ruhenden a, b, i, m um sie bewegt werden.

Wenn nun f durch alle Ringe aller Sphaeren-Paare ins ∞ gehend, und in jedem die mit $a_* b$ oben ruhende Puncte m, m' und von einer Seite p, p'... von der andern q, q'..., und die unten mit $a_* b$ ruhende Puncte i, i'... gedacht werden: so wird der Inbegriff aller Ringe mit den ruhenden a, b, m, m'... bewegt werden können (§. 46.). Es heisse I dieser Weg.

Der Inbegriff der Ringe ist stetig: denn zwischen jeden zweyen sind unzählbar viele Sphaeren, sich von inneren bis dahin ausdehnend. Der Inbegriff der a, m, m'... ist eine einfache Linie; denn das eben gesagte gilt auch hier, und da es in jedem Bogen $p'mq'$ nur einen Punct hat, kann kein Punct in ihr einen dritten Weg haben. Ebenso ist der Inbegriff der p, p'.. und so der q, q'.. und der b, i, i'.. So dass den Inbegriff der Ringe gleichsam ein Kreutz in 4 gleiche Theile theilt.

§. 51. Zwischen jeden 2 Puncten f und g ist eine solche Linie wie amm'.. Denn es werde die Sphaere aus f mit g, in das vorige Schema so gelegt, dass f in a falle; und es sey aus f eine die hingebrachte einschliessende Sphaere. Der Punct, welchen diese mit ihrem Paare der Linie am..giebt, liegt ausserhalb jener, folglich geht die Linie durch die hingebrachte Sphaere; es sey in r, und bewege sich g um a bis in r.

§. 52. Da jeder der Puncte des am... einziges des $a_* b$ ist; ist auch jeder b desselben jeder zweyen m, m' einziges: denn in der Bewegung um das ruhende $a_* b$ ruhte zugleich m, m'$_*$m folglich wenn b um m$_*$m' beweglich wäre, könnte es sich um m$_*$m' bewegen und nicht bewegen.

§. 53. Wenn nun die Linie m m' verkehrt gelegt wird, dass m in m' falle; sie werden sich decken: denn wenn ein Punct b der m m' ausserhalb m m' in b' fiele, würde m'$_*$m$_*$b' um m'$_*$m beweglich, und dann wäre (§. 46. 5) auch m$_*$m'$_*$b um m$_*$m' beweglich. Jeder Punct nehmlich in den halben Ringen paq, p'mq'.... folglich auch ihr Inbegriff ist um amm'... bis zur Rückkehr beweglich; und die vorige Linie mm' fällt innerhalb dieses Weges: es soll nun ein Punct in der umgekehrten Linie vom vorigen m bis zum vorigen m' gehen; sobald der Puuct aus der vorigen mm' ausgeht, fällt er in beweglichen Puuct.

§. 54. Demnach ist die Linie von m nach m' und von m' nach m gleich gestaltet: wenn also von beyden Enden 2 Puncte sich gleicher Weise entgegen gehen, begegnen sie sich in der Mitte. Da von m eine Sphaere mit a$_*$b (nemlich a als Mittelpunct in m gesetzt) gedacht werden kann; es sey m' wo die Linie durch die Sphaere geht; die mm' sey nun so gelegt, dass m in a und m' in b falle; und die Mitte sey M.

Es sollen aber die erste Namen a, b bleiben: und es werde die Linie Mam... auf dem Ringe apq (oder um c$_*$C) bis zur Rückkehr bewegt: so ist der Inbegrifft *I* der Ringe geschlossen; sey ganz *P* genannt; zeigt zu beyden Seiten gegen c und C gleiches Gesicht, und theilt den Raum in 2 Theile, in deren jedwedem, jedem ausserhalb *P* liegendem Puncte ein gleichliegender im anderen ist.

§. 55. Jeder Punct des *P* ausserhalb der

$\ldots i\mathfrak{bMa}\ldots$ hat sein Paar, welches dem zu einer Seite fallenden an der anderen entspricht; folglich ist ganz *P* um die $\ldots\mathfrak{bMa}\ldots$ bis zur Rückkehr beweglich. Es ist auch kein Punct $\mathfrak{b}$ im Raume, welcher nicht in diesen Weg falle: denn es sey von der einen seite des ersten *P*, so ist ein gleichliegender auf der anderen, folglich ist $\mathfrak{b}$ um $\mathfrak{b}*\mathfrak{a}$ beweglich, und der beschriebene Ring geht bey der Bewegung des *P*, in $\mathfrak{b}$.

§. 56. Die Linie $\ldots\mathfrak{bMa}\ldots$ ist eine *Gerade*, und *P* ist eine *Ebene*. Denn jedweder Punct im Raume, welcher jedweder zweyen in sie fallenden einziges ist, ist in ihnen.

I. Denn es seyen $\mathfrak{f},\mathfrak{g}$ Puncte der Linie: jeder Punct der $\widetilde{\mathfrak{fg}}$ ist einziger des $\mathfrak{f}*\mathfrak{g}$; und es ist kein Punct ausserhalb $\widetilde{\mathfrak{fg}}$, welcher einziger des $\mathfrak{f}*\mathfrak{g}$ wäre: denn wenn es ausserhalb *P* fällt ist von der anderen Seite noch ein gleichliegender; und auch wenn es in *P* fällt, jeder ausserhalb $\widetilde{\mathfrak{fg}}$ liegende Punct ist um $\mathfrak{f}*\mathfrak{g}$ belich (§. 52).

Anmerk. Wenn $\mathfrak{ab}$ eine Gerade ist: bedeute $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ dieselbe beyderseits ∞, $\mathfrak{a}\widetilde{\mathfrak{b}}$ aber dieselbe aus $\mathfrak{a}$ auf der Seite wo $\mathfrak{b}$ ist, ∞.

II. *P* ist eine Ebene. Denn es seyen jedwede 2 Puncte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in ihr: jeder Punct welcher des $\mathfrak{A}*\mathfrak{B}$ einziges ist, fällt (nach vorigen) in $\widetilde{\mathfrak{AB}}$, und kein Punct der Gerade $\widetilde{\mathfrak{AB}}$ fält ausserhalb *P*.

§. 57. Die Gerade $\mathfrak{Mam}\ldots$ geht aus jeder Sphaere des Mittelpunctes $\mathfrak{M}$ hinaus. Denn es sey aus $\mathfrak{C}$ eine Sphaere von welcher jene eingeschlossen ist: die wird mit ihrem Paare einen Punct der Linie $\widetilde{\mathfrak{Ma}}$ ausserhalb der ersten Sphaere geben.

§. 58. Jede Geraden decken sich wenn ihre Enden $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ zusammenfallen. Denn es soll $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{g}$ in irgend ein $\mathfrak{m}$ fallen: wenn irgend ein Punct ausserhalb der $\widetilde{\mathfrak{Mm}}$ fiele, würde der obige Fall: auch in die Linie weiter als $\mathfrak{m}$ kann er nicht fallen, denn Theil wäre dem Ganzen gleich.

Daher wenn ein Punct in der ∞ Geraden fortgeht, kann eine Gerade in derselben mitführen: denn aus jedem Puncte sind die Geraden zwischen gleichweiten Endpuncten congruent.

§. 59. Durch jede 3 Puncte $\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$,$\mathfrak{K}$ ist eine Ebene, und nur eine, wenn die 3 Puncte nicht in einer Gerade liegen.

Denn mit Geraden verbunden, sey $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ in ein $\mathfrak{m}$ gelegt; und wenn $\mathfrak{K}$ nicht in P fällt, drehe sich P um $\mathfrak{a}_*\mathfrak{b}$ bis es den Punct $\mathfrak{K}$ erreicht.

Es sey nun aus einem inneren Puncte $\mathfrak{d}$ der Gerade $\mathfrak{AB}$, die Gerade $\mathfrak{dK}$, und aus einem inneren Puncte $\mathfrak{w}$ der $\mathfrak{dK}$ bewege sich $\widetilde{\mathfrak{wd}}$ rings um auf dem Dreyecke: jeder Punct von der bewegten Linie ist in P, aber auch jeder Punct des P ist in diesem Wege; denn dieser Punct ist entweder ausserhalb, oder im Dreyecke; die Gerade von aussen geht durch den Perimeter des Δ; ist er innerhalb, so geht die Gerade durch ihn aus w durch den Perimeter.

§. 60. Um jeden Punct des P kann mit jedveder gerade G ein Kreis beschrieben werden; und dessen Peripherie (sammt dem was sie einschliest) kann in sich selbst bewegt werden. Denn der vorige Δ kann in P so gelegt werden, dass $\mathfrak{w}$ in den gegebenen Punct falle: es seyen alle Geraden aus $\mathfrak{w}$ im vorigeu der G gleich: der Inbegriff der Endpuncte ist die

Peripherie. Denn es mag $\mathfrak{bw}$ um $\mathfrak{w}$ bewegt ringsum in jede der vorigen Geraden kommen; das vorige wiederholt bringt immer dasselbe heraus.

Also kann auch P um jeden Punct in sich bleibend bewegt werden: und wenn ein Punct in *P* geht, kann den Kreis in *P* mitführen.

Anmerk. Nur die Sphaere ist noch (im Eucl. Syst) um jeden ihrer Puncte in sich beweglich; im antieuclidischen sind unzählige. Um einen Punct sind Kegel, Paraboloid u. d. gl. in sich beweglich. Ohne Ruhe in sich können, Gerade, Schraubenlinie, Kreis, und gewisse nach diesen construirte, sich fortbewegen. Selbst ganz in sich bleibend kann (ohne dass etwas davon ruhe), jedes beliebigen um eine ausserhalbige Axe bis zur Rückkehr bewegten, Weg bewegt werden.

§. 61. *Nach der Construction der Gerade und der Ebene, werden folgende Begriffe construirt.*

Zwey Ebenen, und so Ebene und Gerade, auch zwey Geraden in derselben Ebene, werden *parallel* genannt, wenn sie ins ∞ gedehnt sich nicht schneiden.

Im Eucl. Syst. ist durch einen Punct zu einer Gerade eine einzige Parallele; sonst sind unzählige: nehmlich die Gerade $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}$ um $\mathfrak{a}$ auf der gerade $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{d}}$ fortbewegt, bis sie es zuerst verlässt, wenn sie dann $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{b}}'$ ist, sey mit $\mathfrak{ab}' \mid\mid\mid \mathfrak{bd}$ bezeichnet. Dieses ist im Eucl. Syst. wenn die Summe der inneren Winkel $= 2R$ ist, und da kommt anstatt $\mid\mid\mid$ das Zeichen $\parallel$.

§. 62. Der Inbegriff aller gleichen Geraden, die zu einer derselben $\mathfrak{bd}$ $\mid\mid\mid$ sind, und deren Anfangspuncten Inbegriff eine Form *F* ist: heisst *prismatisch*; welches demnach von F und ||| oder II abhängt. Wenn F eine Gerade ist, so wird für II ein Parallelogramm, und Cylinder wenn F ein Kreis ist. Für ||| unendlich verlängert, gehen die Geraden unendlich nahe zu einander, ohne sich zu erreichen: gleichsam wie alle Ich in der Ewigkeit zu einander, und dem Iche aller.

Anmerk. Wenn P, Q Ebenen sind, und P II Q; und p (Linie oder Ebene) zuerst in P fallend, beliebig bewegt wird, bis es in Q fällt, nur dass es immer weiter in eine solche zu P parallele Ebene falle, in welcher es vorher nicht war: der Weg hängt von p, und der Bewegung ab; wenn p eine Gerade ist, und ihr Anfangspunct in einer Senkrechten auf P geht, und der Endpunct eine Schrauben-Linie beschreibt, entsteht eine in sich fortbewegliche Fläche; gleichfalls kann der Endpunct zugleich Mittelpunct eines dem P parallelen Kreises von kleinerem Halbmesser als das vorige p seyn. Und durch gleiche p von P bis Q erzeugten sind nur in gewissen Fällen ⌶, wenn p eine Linie ist; aber immer wenn p Fläche ist.

§. 62. Aus sich schneidenden Geraden entsteht: das *pyramidale*, die *winkelige Form*, die *winkelfreye*, das *Krumme*..., die *verkehrte*, die *allgemeine geometrische Gleichheit*, und für || die *Aehnlichkeit*.

Der Inbegriff aller gleichen Geraden aus einem Puncte ist die Kugel, und wenn sie in einer Ebene sind, der *Kreis*. Der Inbegriff aller Geraden, die aus einem Puncte zu allen Puncten einer Form F sind; heisst *pyramidal*. Ist F ein *Kreis*, und der Punct ausserhalb der Ebene, so wird es Kegel; ist F eine Gerade, und der Punct in der Ebene (ausser F), so ist es ein $\triangle$. Es sind also *Flächen-* und *Körper—pyramidalen.*

§. 63. Wenn b eine einfache Linie ist; welche Bestandtheil von B ist, wenn B eine Linie ist, wenn aber B eine Fläche ist, Bestandtheil des Schnittes einer unendlichen Ebene mit B ist; und $\mathfrak{p}$ so ein Punct zwischen den Enden der Linie b und K so ein Kegel ist; dass der Punct $\mathfrak{p}$ in die Spitze des Kegels K, und b ausser $\mathfrak{p}$ ganz innerhalb des Kegels falle: so wird gesagt, dass B in $\mathfrak{p}$ *Winkel* bilde; und wird auch von jeder Fläche gesagt, dass sie an der Linie L Winkel habe, wenn sie an jedem Puncte der L Winkel hat.

Anmerk. Der *Winkel* zweyer Geraden ist eine respective Grösse (§. 17), in Hinsicht dessen, wie-vieltes, der Bogen zwischen den Schenkeln, der ganzen Peripherie ist, der Halbmesser mag beliebig seyn. Ist es ein *viertel*, so wird es *rechter Winkel* genannt. Ein Schenkel α wird dann auf den anderen β *senkrecht* genannt, und mit $\alpha \llcorner \beta$ bezeichnet. Es wird auch (§. 54) die Gerade $\mathfrak{C}\mathfrak{M} \llcorner P$ genannt, weil $\mathfrak{C}\mathfrak{M} \llcorner$ auf jede durch $\mathfrak{M}$, gehende Gerade der Ebene P ist. Und wenn $\mathfrak{S}$ ein Punct ausserhalb P ist, auf derselben Seite wo $\mathfrak{C}$ ist: so wird das Complement des Winkels $\mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{S}$ zu einem Rechten, für die Grösse des Winkels der Gerade $\mathfrak{S}\mathfrak{M}$ mit P genommen. Und wenn die Ebenen P, Q den Punct $\mathfrak{M}$ gemein haben: so wird, wenn $\mathfrak{M}\mathfrak{K} \llcorner Q$, der Winkel $\mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für die Grösse des Winkels der Ebenen P, Q genommen: und dieser is auch $=$ dem Winkel der Senkrechten in P und Q aus $\mathfrak{M}$ auf ihren Schnitt.

Für den Winkel einer Geraden mit der Ebene könnte man auch den auf der Sphaere des 𝔐, kürzesten Weg von der Linie bis zur Ebene nehmen; dass nehmlich kein kürzerer sey, (für denselben Halbmesser).

§. 65. Hat eine Form in keinem ihrer Puncte einen Winkel: so ist sie *winkelfrey*; und *krumm* wird die winkelfreye Form genannt, wenn kein Bestandtheil davon Gerade oder Ebene ist. Gerade mit einem Bogen kann winkelfrey, aber nicht krumm seyn.

§. 66. Wenn winkelfreye Formen *A* und *B* so ein *k* (Punct oder einfache Linie) gemein haben, dass aus jedem Puncte des *k*, so ein Bestandtheil *a* des *A* und *b* des *B* sey; dass der Inbegriff des *a* und *b* stetig und winkelfrey sey: so wird gesagt, dass *A* und *B* *sich in k berühren*.

§. 67. Wenn *A* eine die Form *B* im Puncte 𝔭 berührende Ebene ist, und eine Gerade 𝔭𝔮 ⊥ *A* ist: so wird 𝔭𝔮 auch auf *B senkrecht* genannt; sogar wenn eine Linie *v* in eine Fläche *C* fällt, und aus jedem Puncte der *v* Senkrechte auf *C* giebt; der Inbegriff aller dieser Senkrechten wird auch ⊥ auf *C* genannt.

§. 68. *Geraden aus einem Puncte mit der Multiplication:* Wenn *Q* gewisse Puncte, Form, oder was immer im Raume (wenn auch den Ort eines Sonnen-systems) bedeutet; und jede Gerade welche sich aus demselben Anfangspuncte 𝔭 in *Q* endigt *x*, und sein Endpunct 𝔮, und *x* mit einer beständigen Grösse *a* multiplicirt *y* desselben *x* genannt werden; und auf jedes *x* sein $y = ax$ von 𝔭 aus in $\widetilde{𝔭𝔮}$ gelegt wird: so wird der Inbegriff aller von 𝔭 verschiedener Endpuncte der *y*, dem *Q ähnlich* genannt. Allein wenn jedes *y* auf der anderen Seite des *x* genommen wird; so kann es *verkehrt ähn-*

lich genannt werden. Der Inbegriff der von p verschiedenen Enden gewisser *y*, und diesen entsprechenden q Inbegriff, werden *homolog* genannt.

Anmerk. 1. Wenn *Q* ein △ ist, so sind alle den homologen Seiten gegenüberliegende Winkel, wenn *a* nicht $=1$, allgemein nur unter der Bedingung des Eucl. Axioms gleich.

2. Wenn alle *y* auf der anderen Seite genommen werden: können auch wenn $a=1$, uncongruente Formen entstehen; z. B. wenn *Q* die rechte Hand ist, wird jene eine linke, auf welche der Handschuch der Rechten nur umgewendet passen kann.

3. Es kann leicht gezeigt werden: dass ein gleiches hervorgebracht werden kann, wenn aus jedem Puncte des *Q* auf eine Ebene gefällte Senkrechten auf der anderen Seite gleich verlängert werden; es ist wie das Bild im ebenen Spiegel.

4. Dies ist nun eine *verkehrte Gleichheit*: und *geometrisch gleich* können *A* und *B* genannt werden; wenn das Bewegliche, nachdem es mit *A* congruirt, auch entweder mit *B* selbst, oder weninstens mit seinem gesagten Bilde congruiren kann.

5. So wird das Parallelepiped durch die Diagonalen, in zwey gleiche triangular-Prismen getheilt, welche aber nur in gewissen Fällen congruiren können. Nehmlih es sey ein Parallelogramm 𝔄ℭ𝔅𝔠, und 𝔣 der Durchschnitt der Diagonalen 𝔄𝔅 und ℭ𝔠; und die parallele Kanten seyen 𝔄𝔄', 𝔅𝔅', ℭℭ', 𝔠𝔠'; die Prismen der △𝔄ℭ𝔅 und 𝔄𝔠𝔅 decken sich nur wenn die Ebene ℭ'ℭ𝔠 senkrecht auf die Grundfläche, und entweder ∧ℭ'ℭ𝔣 $=R$, oder 𝔄ℭ $=$ ℭ𝔅. Denn selbt △𝔄𝔅𝔠 kann den △𝔄𝔅ℭ nicht anderst decken, wenn die untere Seite schwarz, und

die andere weiss gedacht wird, ausser dass verschiedene Farben auf einander fallen, im Falle wenn 𝔄ℭ nicht $=$ ℭ𝔅 ist; allein wenn diese gleich sind, kann △𝔄𝔅𝔠 um 𝔄𝔅 bewegt auch mit der schwarzen Farbe auf die schwarze des andern fallen; im ersten und jeden Falle kann △𝔄𝔅𝔠 um 𝔣 bewegt, bis ein Punct einen halben Kreis beschreibt, mit der schwarcen Farbe auf die weisse jener fallen.

Wenn nun ℭ′ℭ ⊥ ℭ𝔠; so wird des bewegten Triangels Prisma in das andere kommen.

Wenn aber z. B. ∧ℭ′ℭ𝔠 $<R$ ist, und 𝔄ℭ $=$ ℭ𝔅; so wird 𝔠′𝔠 mit der Verlängerung der ℭ𝔠 dem ∧ℭ′ℭ𝔠 gleichen Winkel machen. Folglich wenn △𝔄𝔅𝔠 um 𝔄𝔅 bewegt mit der schwarzen Farbe auf die schwarze des △𝔄𝔅ℭ fällt: die Kante an 𝔠 des mitgeführten jetzt unten fallenden Prisma, wird in die Verlängerung der ℭ′ℭ fallen; also das untere Prisma in das obere geschoben werden können.

Die Unmöglichkeit der übrigen Fälle kann gleichfalls bewiesen werden: allein die Hülle des einen umgewendet, congruirt mit der anderen. In manchen Fällen erfordert auch die Umwendung Vorsicht: einem Cubus kann eine Pyramide so aufgelegt werden; dass die Spitze unterwärts falle. Es muss jedem Winkel sein verticaler entsprechen. So entsteht auf einem sphaerischen Dreyecke 𝔄𝔅ℭ auf der Sphaere ein anderer 𝔞𝔟𝔠, wenn (§. 68.) 𝔭 der Mittelpunct, und $a=1$ ist, und die y jenseits genommen werden: allein wenn der △𝔄𝔅ℭ nicht gleichschenkelig ist, können sich nie decken.

Nehmlich überhaupt können 2 nicht gleichschenklige sphaerische △𝔄𝔅ℭ, 𝔞𝔟𝔠 (die gleichnahmige Seiten gleich verstanden) nur dann congruiren: wenn 𝔄ℭ und 𝔞𝔠 in demselben gössten Kreise *C* liegen, und 𝔄 in *C* so bewegt, dass es gegen 𝔈 gehend und den Bögen 𝔄𝔈 vor sich schiebend, den △ 𝔄𝔅𝔈 auf der Sphaere mit sich führe, bis 𝔄 in *a* gelangt; nicht durch *c* gegangen ist im Falle, wenn beyde △ in dieselbe Hemischphaere sind, aber im Falle dass sie auf verschiedene Hemisphaeren fallen, zuerst durch *c* hat gehen müssen.

Allein ein schöner Gedanke ist in der oben gepriesenen *Kasaner Schrift*, um sie theilweise sich decken zu lassen: sie lässt Kreis um die Spitzen beschreiben, und aus dem Mittelpuncte des Kreises auf der Sphaere, erzeugt durch an die Spitzen des △ geführte Bögen 3 gleichschenklige △, welche mit den im anderen △ entsprechenden sich decken können. Es gilt freylich nur für den Fall, wenn der Mittelpunct innerhalb des △ fällt: allein der scharfsinnige Verfasser dat die Allgemeinheit wahrscheinlich dem Leser überlassen.

Wenn 𝔄𝔈 vor den Augen ist, und 𝔅 oben, 𝔄 links und 𝔈 rechts liegt, und 𝔄𝔅 < 𝔅𝔈 ist, und der Bögen aus dem auf der Sphaere unten fallenden Mittelpuncte 𝔎 zur Spitze 𝔅, den Bogen 𝔄𝔈 in 𝔇 schneidet: wird der ∧ 𝔅𝔇𝔈 ein stumpfer, und im △ werden keine 2 Seiten gleich, 𝔅𝔈 wird > 𝔅𝔇, 𝔅𝔈 > 𝔇𝔈, 𝔇𝔈 > 𝔅𝔇; woraus ungeachtet der entstandenen 3 gleichschenkeligen △, das theilweise Decken nach dem obgesagten nicht gelingt.

Allein auf jeden Fall gelingt das theilweise Decken folgendermassen: es sollen des △ *abc* zwey Winkel *a*, *b* halbirt werden; und aus dem Puncte *f*, wo sich, 2 halbirende Bögen schneiden, sollen auf alle 3 Seiten senkrechte Bögen gefällt werden, *fb* auf *ab*, *ff* auf *bc*, und *fg* auf *ac*, und es sey auch ein Bogen aus *f* nach *c*. Es sind 6 Triangel entstanden; △ *bbf* =

bfk, △adk=agk; also die 3 seknrechte Bögen sind gleich; woraus auch △cfk=cgk wegen der gemeinen Seite kc, des rechten Winkels bey f und g, und der gleichen Senkrechten fk und gk: also ist auch der Winkel c halbirt. Folglich ist in jedem von diesen 6 Triangeln kein Winkel an den äusseren Seiten grösser als ein Rechter, es ist also die Frage nur von den 6 Winkeln an der gemeinen Spitze k. Bey jedem Winkel des △abc, macht der halbirende Bogen mit den ihm nächsten Senkrechten gleiche Winkel; wenn also diese zwey Senkrechten, bey allen Winkeln an der Spitze k kleineren Winkel als 2 *R* machen; so wird keiner von den Winkeln der 6 Triangel $\angle$ *R* seyn. Also da durch die Sehnen gebildete Winkel kleiner werden; so wird durch die Sehnen aus jedem von den 6 Triangeln ein spitzwinkeliger: folglich fällt der Mittelpunct des um jeden beschriebenen Kreises innerhalb der Pyramide, folglich innerhalb des △ auf der Sphaere. Demnach enstehen 18 gleichschenklige △, welche die im anderen △ ABC entsprechende decken können.

Im Falle aber, wenn z.B. kf mit kg gegen c convexen Winkel bilden: dieses kann dann bey keinem von den zwey anderen seyn; und dann sind fc und gc jedes grösser als ein Quadrant; und c zum Pole genommen, fällt k in die untere Hemisphaere des aus c beschriebenen grössten Kreises; welcher die Bögen ca, cb in m, n schneiden soll. Der Punct in welchem diesen Kreis der Bogen ck schneidet, sey p; es entstehen 4 rechtwinklige Dreyecke; kgm, mpk, kfn, npk, deren jede Seite kleiner als ein Quadrant ist; nehmlich kf, kg, pm, pn, pk und mp, fn sind kleiner, und da km, kn Hypotenusen sind, ist $\cos fm = \cos fg \cdot \cos gm$, also fm, gleichfalls fn ist kleiner als ein Quadrant. Also ist in diesen Triangeln kein Fall des convexen Winkels; folglich gilt das oben gesagte, auch für die obere Triangel. Dass fg kleiner als ein Quadrant sey, erhellet daraus, dass wenn dem halben Winkel bey c am anderen Pole c' entsprechende α genannt wird; ist $1 : \sin \alpha = \sin c'f : \sin gf$; folglich $\sin gf = \sin \alpha . \sin c'f$, welches < 1 ist.

Was die Grösse anbelangt: von den obigen Triangeln, 𝔄𝔅ℭ und abc kann keines grösser seyn wie das andere; denn da müsste auch dieses grösser wie jenes seyn. Und was die Congruenz anbetrift; jede sphärische Formen können in beliebig kleine gleichschenklige △ zergliedert werden; und wenn das übrige von beyden ⟶ 0; werden sie unendlich theilweis ≍. Welches auch auf Körpern und respective Grössen angewandt werden kann.

§. 69. Nun da den ∞ Raum die Ebene in zwey gleiche Theile theilend, eine klare Aussicht darbietet: lässt sich das forschende Aug eine Weile darnieder; wornach es wieder zurückkehren wird.

Auf der Ebene kommt zuerst die *einfache Bewegung*, dann die *zusammengesetzte* in Betracht: Die erste ist, wenn jede Bewegung eines Punctes zuerst vollendet wird, ehe die Bewegung eines andern anfängt; die zweyte ist, wenn wärend der Bewegung eines Punctes, in einer mitgeführten Form auch ein anderer Punct bewegt wird: denn alles wird durch Punctes Bewegung verrichtet; nehmlich ein Punct kann gerade, oder sonst, oder um einen Punct in der Ebene bewegt werden, kann in derselben zu jedem Puncte hinkommen, jedes wo es hineinfällt mitführend. Zusammengesetzt ist, wenn indem ein Punct den Weg x beschreibt, in der mitgeführten Senkrechten, ein anderer den Weg y beschriebe, wo y eine Function des x seyn, und der Inbegriff der Endpuncte der y verschieden seyn kann: folgendes mag zur Erläuterung dienen.

I. Wenn $(\alpha)x-(\beta)x=0$, kein Glied enthält, welches nicht unter die Formel $ax^p y^q$ fällt (wo, a eine Constante, 0 oder eine andere, jede der p und q aber entweder 0 oder andere ✠ ganze Zahl bedeuten); und wenigstens in irgend einem Gliede, in welchem der constante Factor nicht 0 ist, $p+q=m$ ist: so heisst die durch die Endpuncte der y erzeugte Linie der *m*ten *Ordnung*. So wird die Gerade *der ersten*, der Kreis der *zweyten Ordnung*; es werden auch alle Kegelschnitte Linien der 2-ten Ordnung, und alle Linien der 2-ten Ordnung Kegelschnitte.

II. Wenn 2 Functionen y und Y für dieselben x die Linien l uud L erzeugen, und für jedes k (welches eine ✠ ganze Zahl von 1 bis h einschliesslich bedeute), $J^k Y = J^k y$ für $x=\alpha$, aber $J^{h+1} Y$ nicht $= J^{h+1} y$ ist: so wird gesagt, dass L und l sich am Ende der Ordinate des $x=\alpha$ im *hten Grade berühren.*

Es wird gezeigt: dass die Gerade nur im ersten, der Kreis auch im 2ten (höher nicht) berühren kann; und dann wird sein Halbmesser, *Krümmungs-Halbmesser* der Krumme an dem Berührungspuncte genannt. Wenn Gerade berührt, kann zwischen ihr und der Berührten keine Gerade gezogen werden: gleichfalls ist zwischen dem gesagten Kreise und der berührten Krumme kein Kreis.

III. Wenn eine Gerade und eine Krumme nichts gemein haben, dennoch keine Gerade zwischen ihnen ins ∞ verlängert werden kann; so heist jene *Asymptote.* Auch zwey Krummen können sich asymptotisch nähern, wenn für dieselbe Abscissen, der Ordinaten Unterschied $\frown$ 0.

IV. Der Inbegriff *V* der Endpuncte der Krümmungshalbmessern an allen Puncten einer Krummen *v*; heisst *Evolute* der *v*, und *v* *Evolvente* der *V*.

V. Wenn sowohl die berührende Gerade, als der auf diese (aus dem Berührungspuncte) senkrechte Krümmungshalbmesser, bis zur Abscissen-Linie verlängert werden: die erste vom Berührungspuncte bis zur Absc. Linie wird *Tangente*, die zweyte wird *Normale* genannt; und bis zur Ordinate, wird die Absc. Linie von ihrem Schnitte mit der Tangente *Subtangente* *s*, und mit der Normale *Subnormale* genannt.

VI. Es wird (wenn y' die Senkrechte vom Ende der Abscisse $x \pm \dot{x}$ bis zur Tangente) ist, $s : y = s \pm \dot{x} : y'$. Es wird auch bewiesen, dass $s = y : \partial y$; folglich $y' = y \pm \dot{x}\,\partial y$. Und da $s : y = 1 :$ tang v ist, wenn v den Winkel der Tangente mit s bedeutet: so wird tang $v = \partial y$.

Welches nicht nur die Lage der Tangente an jedem Puncte der Curve, sondern auch dieser Gang vermittelst des *Taylorischen* zeigt. Nehmlich wenn $y = (F)x$, so wird $(F)(x \pm \dot{x})$ $= y \pm \dot{x}\,\partial y + \dot{x}^2\,\partial y : 2 \ldots$; und es wird bewiesen, dass $\dot{x}$ so klein genommen werden kann, dass jedes Glied grösser als die Summe aller nachfolgenden werde; Ausnahme ist nur bey einzelnen Puncten, wo die Linie auch etwas besonderes hat. Wenn nun $\partial^k y$ der Kürze wegen mit ∂^k bezeichnet wird, und m eine ganze Zahl zwischen 1 und n bedeutet, und n eine paare Zahl ist: so ist sie für den Werth des x, wo J^n + und nicht 0 ist, wenn kein J^m ist welches nicht 0 wäre, convex gegen die Absc. Linie, und concav wenn es — ist. Denn y' war $= y \pm \dot{x} Jy$, folglich wenn das übrige der Reihe + ist, geht die Linie über die Tangente, und darunter venn es — ist: wenn nun z.b. $n=2$ ist, und J^2 + ist, so ist sowohl für $\dot{x}$ als $-\dot{x}$ dasselbe; denn $(-\dot{x})^2 = \dot{x}^2$, also ist zu beyden Seiten + wenn J^2 + ist, und — wenn J^2 — ist, wenn y zu beyden Seiten reellen Werth hat, sonst auf der, wo es einen hat.

Die Tangente hängt aber von J ab, denn tang $v = Jy$; wenn $J=1$, so ist $v = R:2$; wenn $J=\infty$, so ist $v=R$; wenn $J=0$, so ist die Tang. ||

Maximum oder *Minimum* erfordert so einen Werth des x, dass wenn J nicht ∞ ist, $=0$ sey; (obwohl aus $J=0$ Maximum oder Minimum nicht folgt): denn $(F)(x+\omega)-(F)x$ so wie $(F)(x-\omega)-(F)x$ ist $(\omega:2)J^2(F)x$, nebst einer Grösse, welche kleiner als diese wird, wenn $\omega \frown 0$. Auch für $J=\infty$ kann Maximum oder Minimum seyn; und der Werth dafür des x wird im ersten Falle aus $J=0$ im zweyten aus $1:J=0$ gesucht, nehmlich aus $J=1:0$ wird $1:J=0$. Ob es aber für diesen Werth α ein Maximum oder Minimum sey, wird durch ein je kleines ω versucht; nemlich $\alpha \pm \omega$ statt α, in y gesetzt.

Es sey nun $y=q$ für $x=p$, und $\mathfrak{p}$ das Ende des q. Wenn J einzigen Werth und die Curve 2 solche Zweige hat aus $\mathfrak{p}$, dass entweder beyde convex oder beyde concav gegen die Absc. Linie sind, oder die eine convex die andere concav, beyde auf eine Seite des q fallen: so wird die Form am $\mathfrak{p}$ *cuspis* genannt. Wenn aber im letzten Falle der eine Zweig auf die eine und der andere auf die andere Seite des q fällt; so wird es *inflexio*, und p *Wendungspunct* genannt. In allen diesen Fällen ist für $x=p$ dieselbe Tangente aus p für beyde Zweige. Der *Cuspis* sind 2 Arten, nachdem jeder gegen den andern die convexe Seite kehrt, oder es nur einer thut; und jeder ausser dem letzten Falle, hat 2 Fälle, nachdem sie gegen die Absc. Linie convex oder concav sind.

Inflexion kann nicht seyn wenn das obere J'' nicht 0 ist; denn da wäre es zu beyden Seiten convex, oder concav. Allein auch *cuspis* ist nicht wenn $J''=0$.

Ob aber der Zweige einer und der andere convex oder concav sey? thut man einmal $p+\dot{x}$ in J'' und für den anderen Zweig $p-\dot{x}$ (nach VI). Es kann von einer Seite imaginär seyn, und auf der anderen 2 Werthe haben.

Wenn J für $x=p$ verschiedene Werthe hat: so wird p *punctum multiplex*, für die mit verschiedenen Tangenten begabte Zweige.

Es giebt auch solche Function, welche für gewissen Werth des x nur isolirten Punct giebt.

Alle diese werden *singuläre Puncte* genannt.

Es ist zu bemerken: dass wenn z. B. $y=\sqrt{x}$ (welches die Parabel mit parameter $=1$ giebt); und die Frage für den oberen Arm ist, ob es convex oder concav sey? y ist da $\pm$, folglich muss auch in $J''=-(1:4)x^{-\frac{3}{2}}$ die Wurzel aus x^{-3} $\pm$ genommen werden, und unten $-$ in $J''=(1:4)\,x^{-\frac{3}{2}}$; und so wird beydes $-$ und beyde gegen die Absc. Linie concav. Für $x=0$, wird $J''=\infty$, was weder convex noch concav giebt. Und für $x-\dot{x}$ ist J'' imaginär, für $\dot{x}$ aber reel.

Beyspiele. $y = b + x^{\frac{3}{2}}$, $y = b + x^{\frac{2}{3}}$, $y = b - x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}}$ geben für $x = 0$ mehrere Arten der *Cuspis*: die 3 ersten geben die erste, die 4 te die 2 te Art. Bey der ersten und 4 ten ist $J = 0$, bey der 2 ten und 3 ten ist ∞; folglich ist in jenen die Tangente parallel, bey diesen senkrecht. Bey den 3 ersten ist $J^2 = \infty$, aber bey der 4 ten ist es $= 2$ für $x = 0$, und die 2 Zweige fallen im letzten auf eine Seite der Ordinate y, auf der anderen wird es imaginär.

Das vierte giebt aber für gewissen Werth des x, $J^2 = 0$, und da wird ein Wendungspunct.

Das zweyte giebt auch Minimum, und das dritte Maximum, mit $J = \infty$. Allein mit $J = 0$, giebt $y = b + x^2$ (welches die Parabel ist, die Abcissen-Linie senkrecht auf die vorige genommen), das b für Minimum.

Isolirten Punct giebt $y = \sqrt{(x^3 - x^2)}$ für $x = 0$.

Und $y = (x^2 - x^4)$ giebt für $x = 0$ einen vielfachen Punct, und eine Linie der Gestalt ∞.

Die zusammengesetzte Bewegung kann vielerley seyn: z. B. im vorigen kann y mit der Absc. Linie einen Winkel bilden, welcher constant oder veränderlich seyn kann. Auch kann eine Linie um das eine Ende c auf einem Kreise des Halbmessers $cp = 1$, und in der Linie ein Punct bewegt werden; und dieser Weg kann y, der Weg des mit dem Kreise gemeinen Punctes der bewegten Linie kann u genannt werden; und y auf gewisse Art von u abhängen. z. B. $y = au$ giebt die *Arhimedische*, $y = a^u$ *Jac. Bernoullis Spirale*; welcher entdeckend, dass die Linie ihrer Evolute gleich sey, sie auf den Grabstein mit der Inschrift *Haec* *eadem mutata resurget* verlangte. Auch andere Curven können durch solche *Polar* genannte *Coordinaten* ausgedruckt werden.

§. 79. Nun auf dem im vorigen §. gewiesenen Wege weiter folgt, in der Ebene die Untersuchung zuerst der einfachen Bewegung: und bloss *Linien* zuerst, nachdem der *Flacheninhalt*.

Die Linien fangen mit Geraden an, dann kommen die Kreise dazu. Zuerst 2 nachdem mehrere Geraden: aus einem Puncte zuerst; zweye bilden Winkel (Viertel, grösser, kleiner); zu einer dritten bilden den △; mehrere wachseu von der Senkrechten weiter, und der $\wedge \sim 0$. Ob aber von der dritten geschnittene sich schneiden oder nicht? ist die Frage am Titelblatte, wovon noch etwas unten gesagt wird. Beweis dass allgemein nur 4 Bedingungen der Gleichheit der △ sind. Abhängigkeit der Seiten und Winkel von einander; vozu die Hauptsätze der Ergänzung gleich nach der Aehnlichkeit kurz und leicht folgen kann. Alles wird nun im Eucl. Systeme verstanden.

4. *Geraden*: entweder ist kein Paar II, oder nur ein Paar, oder mehrere. Wenn nur ein Paar ist: entsteht die Aehnlichkeit der △; 5 Bedingungen, deren jede hinreicht. *Multiplication*, *Division*, *Quadrat-Wurzel* in Geraden; und $c^2 = a^2 + b^2$, wenn a, b Kathede und c Hypot. sind.

Gerade und Kreis: kleinster Schnitt, grösster. Mehrere Geraden mit dem Kreise, aus einem Puncte, inneren, aüsseren, oder in die Peripherie fallenden; Winkel an der Peripherie. Entstehen der Polygone: ihre Construction, welche durch die *Gaussische Theorie* ergänzt wird.

Kreis und Kreis: kleinster Schnitt, grösster

Mehrere sich berührende Kreise. Winkellose Formen, auch Gerade dazu genommen.

Nachdem kommt der *Flächen*-inhalt der geometrisch construirten. Zuerst vom Regtangel, dessen Basis b, Höhe a ist, wird bewiesen; dass das Product aus den Linien a und b so eine Gerade sey, welche sovieltes der Einheit der Geraden ist, als das Rectangel des Quadrats dessen Seite jene Einheit ist. Ferner wird bewiesen: dass alle Parallelogramme von gleicher Höhe einander ⌶ und zwar endlich gleich sind (§. 39); ebenfalls alle $\triangle$ von gleicher Basis und gleicher Höhe; und die gleiche Theile werden construirt gezeigt.

Ferner wird bewiesen: dass wenn a, A, b, B Gerade sind, und die Gerade $A.b = B.b$; das Parallelogramm aus A, a dem aus B, b ⌶ (und zwar endlichgleich) ist, wenn $\wedge Aa = \wedge bB$ ist, auch hier werden die entsprechende Theile construirt; und nach derselben Regel werden die Theile construirt, aus welchen das Quadrat der Hypot. aus den Quadraten der Katheden ausgelegt werden kann. Und auf dieselbe Art, wird jede Fläche in so ein Rectangel verwandelt, dessen Höhe die Einheit der Geraden ist (§.17).

Endlich folgt die *Kreis-fäche*, nebst seiner Länge.

Nach diesem kömmt die *Zusamengesetzte Bewegung* in der Ebene: Linien zuerst, deren jeder Punct geometrisch construirt werden kann, alle aber nie.

Eingenschaften, Flächen und Längen.

§. 80. Endlich wird aus der Ebene in den Raum zurückgetreten. Und da kömt zuerst die Ebene mit einer dann mehreren Geraden; nachdem mehrere Ebenen, auch mit einer und mehreren Geraden.

Nun kann auch hier zuerst *einfache Bewegung* Gegenstand der Untersnchung seyn: nehmlich Bewegung *um einen Punct*, dann Bewegung um 2 Puncte; zum ersten gehört, wenn eine ∞ Gerade um einen ihrer Puncte auf einer Linie L bewegt wird; und es kann hiezu genommen werden, wenn die Entfernung des Punctes $\frown \infty$, da alle Gerapen auf der Linie $\|$ werden. Das erste erzeugt das *pyramidale*, wo wenn L ein Kreis ist, ein Kegel entsteht; das zweyte giebt ein *Prisma.*

Um 2 *Puncte.* Wenn 2 Geraden sich schneiden, nnd die eine sich um 2 Puncte der andern (also um die andere) dreht: entsteht eine Ebene, wenn des Schnittes Winkel R ist, sonst 2 verticale Kegel. Ist die bewegte $\|$, so entsteht ein Cylinder; und wenn das Bewegte ein Halb-Kreis ist, so wird es *Sphaere*; welche wie die Ebene dem forschenden Auge, da sie nur allein (im Eucl. Syst.) das mit der Ebene gemein hat, dass sie sich um jeden ihrer Puncte in sich bleibend bewegen kann; ein eigenes Feld darbietet. Hieher gehören in die Sphaere eingeschriebene Körper aller Art.

Bewegung um 2 Puncte erzeugt mannigfaltige: z b Paraboloid, Ellipsoid. u. d. gl.

Inhalt und Fhäche wird untersucht.

Endlich werden die durch Zusammensetzung der entstandenen, mit der Ebene, und mit einander entstandenen Formen untersucht.

Der Inhalt wird durch die in §39 mit **I** bezeichneten Gleichheit und überall (wo es angeht, und gewusst ist) durch endliche bewiesen: mit Parallelepipeden geht es an; aber von $\triangle$ Pyramiden wird nur die unendliche Gleichheit bewiesen; die zwey triangulare Prismen, in welche das Parallelepiped getheilt wird, können auch in den Fällen, wo sie nicht congruent sind, theilweise ausgelegt werden.

Allein die Inhalts-Berechnung beginnt bey den Parallelepipeden, wie in der Ebene bey den Parallelogrammen; und wird bewiesen, dass wenn die Länge, Breite, Höhe A, a, α sind, die Gerade, welche aus der Multiplication dieser 3 Geraden herauskommt, soviel-tes der Geraden-Einheit ist. als das Parallelepiped des Cubus dessen liniarische Seite die Geraden-Einheit ist. Und wenn auch B, b, β Geraden sind, und die Producte $A.a.\alpha$ und $B.b.\beta$ gleiche Geraden sind, das Parallelepiped aus A, a, α ist endlicher Weise $=$ dem Parallelepiped aus B, b, β, wenn ihr Winkel gleich ist, z.b. wenn sie rechtwinklig sind.

Also werden auch alle Körper, (wie vorhin die Flächen) auf Geraden reducirt, nemlich auf die Länge eines rechtwinkligen Parallelepipeds, wovon der Boden Quadrat der Einheit ist . . .

Aus dem Parallelepiped folgen alle Prismen: wie aus der triangular-Pyramide, andere Pyramidalen. Die triangulare Pyramide wird im Lateinischen nur so in ein Parallelepiped ausgelegt, dass der überbleibende Theil $\frown$ 0.

§. 71. Nach den durch die einfache Bewegung hervorgebrachten folgt die zusammengesetzte: im ersten Falle kann ein Punct in der bewegten Gerade nach gewissem Gesetze fortgehen, und sein Weg untersucht werden; sowohl wenn die Gerade um einen bestimmten Punct, als wenn sie zur ersten ∥ geht; auch im 2ten Falle, wo die Bewegung um 2 Puncte ist, kann diese Bewegung gleichförmig oder sonst bestimmt seyn, und während dem kann im Bewegten ein Punct nach gewissen Gesetze bewegt werden, (*z.b.* im um den Durchmesser bewegten Kreise); oder auch kann die obige Ebene (§. 69) mit dem in der Ordidate bewegten Puncte um die Abscissen-Linie bewegt werden; und der Punct auch ein Bewegungs-System mit sich führen; und es können ins unendliche gehende mannigfaltige Bewegungen zusammengesetzt werden.

Allein allgemein wird ein Punct im Raume auf folgende Art bestimmt: in der Ebene E sollen sich 2 unendliche Geraden X und Y senkrecht in a schneiden, und aus a auf E die Gerade Z senkrecht seyn; und die Ebene der Z und X soll X', und die der Z und Y soll Y' bezeichnet werden; sowohl X' als Y' werden senkrecht auf E seyn; und sie sollen sammt Z unendlich gedacht seyn. Der Raum wird in 8 gleiche Theile getheilt. Es ist einleuchtend, dass jeder Punct, durch seine Fernen von E, X', Y' bestimmt wird; wenn die Entfernungen von jeder der 3 Ebenen auf einer Seite $+$ und $-$ auf der anderen genommen werden. Dasselbe gilt von einem anderen Puncte, also von zwey Enden der Gerade, und von allen Puucten jeder Form.

Es kann auch durch den Pythag. Satz leicht bewiesen werden: dass wenn ein Punct p ist, und x, y, z in obiger (p. 10) Bedeutung genommen werden, $ap^2 = x^2 + y^2 + z^2$, nehmlich das Quadrat der Gerade ist gleich der Summe der Quadrate ihrer Projectionen auf die Geraden X, Y, Z; und dasselbe ist von der Gerade pq, wenn anstatt a ein anderer Punct q gesetzt wird.

Wenn nehmlich B eine Gerade oder Ebene ist: der Inbegriff der Enden der Senkrechten aus allen Puncten des A auf B, heisst Projection des A auf B.

Es ist offenbar: dass der Punct $\mathfrak{p}'$ wo die Senkrechte aus $\mathfrak{p}$ auf E fällt, seine horizontale Projection ist, wenn E horizontal genommen wird; und wenn ausser diesem auch x die verticale Höhe des $\mathfrak{p}$ gegeben ist; so ist die Lage des $\mathfrak{p}$ bestimmt. Wenn die Projection des $\mathfrak{p}$ auf Y' der Punct $\mathfrak{P}$ ist, und die Senkrechte aus $\mathfrak{P}$ auf Y in $\mathfrak{P}'$ fällt; so ist $\mathfrak{P}\mathfrak{P}' = x$. Wenn also Y' um Y gedreht wird, bis es in E kommt; so wird $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}'\mathfrak{p}'$ fallen; es sey der Ort mit $\mathfrak{p}''$ bezeichnet. Ebenfalls soll ein Punct $\mathfrak{q}$ den Punct $\mathfrak{q}''$ in E geben: so wird die Gerade $\mathfrak{pq}$ auf der Ebene E durch $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{p}''\mathfrak{q}''$ dargestellt: nehmlich die aus $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{q}''$ auf die Gerade Y Senkrechten, sind die verticale Höhen der Endpuncte der Gerade $\mathfrak{pq}$. Welches der Anfang der *darstellenden Geometrie* ist: die jeden im Raume bestimmten Körper auf eine Ebene so darzustellen lehrt, dass er mit Hülfe geschickt unterscheidender Zeichen, aus der Zeichnung hergestellt werden könne.

§. 72. Endlich soll dem obigen Versprechen gemäss, das dort gesagte, soweit es der beschränkte Plan dieser Schrift zulässt, und ohne Figur thunlich ist, ergänzt werden.

Beyde nehmen auf der Sphaeren-gränze 2 Puncte, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und zwey Axen $\widetilde{\mathfrak{ac}}$ und $\widetilde{\mathfrak{bd}}$ derselben; und beweisen, dass wenn α der Kreis-Gränz-Bogen von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{b}$ ist, und auf gleiche Weiten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Axen mit gleichlaufenden solchen Bögen verbunden, und der Bogen auf gewisse 1 Weite β und auf gewisse x Weite γ genannt werden; $\alpha:\gamma = (\alpha:\beta)^x$ sey.

Hier ist das einzige beyden Schriften gemeine Zeichen: nehmliich die Kasanische drückt dies γ mit e^{-x} aus, mit der Bemerkung, dass der Werth des e gleichgültig, nur dass es >1 sey; also auch die Nepersche Basis seyn könne.

Die hiesige wird ausdrücklich auf die Basis e der natürlichen Logarithmen geleitet: nehmlich der Quotient $\alpha:\gamma$ auf x Weite wird mit X, auf y Weite mit Y, auf i Weite mit I und so w. bezeichnet. Also wenn $\alpha:\beta=\delta$, wird $X=\delta^x$, $Y=\delta^y$, $I=\delta^i$; also $Y=I^{\frac{y}{i}}$; denn $I=\delta^i$, folglich $I^{\frac{y}{i}}=\delta^y=Y$.

Nachdem beweist die hiesige: dass in jedem geradlinigen $\triangle$, die sinus der Winkel sich so verhalten, wie die Peripherien der mit den gegenüberliegeden Seiten als Halbmessern beschriebener Kreise. Und darauf beweist, dass in jedem sphaerischen $\triangle$, die sinus der Winkel, wie die sinus der gegenüberliegenden Seiten sich verhalten.

Nachdem beweist die hiesige: dass $Y=\cot(u:2)$, wenn u den Winkel bedeutet, welchen am Anfange der Gerade y mit ihr die Gerade macht, welche aus ihr um diesen Punct auf der auf y am anderen Ende derselben errichteten Senkrechten bewegt, sie zuerst verlässt.

Woraus folgt: dass (wenn das Complement des u zu einem Rechten z genannt wird), $\tang z=(Y-Y^{-1}):2$. Es ist nehmlich $Y=\cot(u:2)=\tang(z+u')$, (wenn $u'=u:2$); und dieses ist $=\frac{\sin z\cos u'+\cos z\sin u'}{\cos z\cos u'-\sin z\sin u'}=\frac{\tang z+\tang u'}{1-\tang z.\tang u'}$; und weil dies $=Y$, wird $Y-Y\tang z.\tang u'=\tang z+\tang u'$; und weil $\tang u'=1:\cot u'=1:Y$, wird $Y-\tang z=\tang z+(1:Y)$.

Folglich $\operatorname{tang} z(1+1) = Y - Y^{-1} = (I^{\frac{2y}{i}} - 1) : I^{\frac{y}{i}}$.

Nachdem wird daselbst bewiesen: dass $r : \operatorname{tang} z$ eine constante Grösse ist, welche i benannt wird, wo y die Senkrechte aus einem Ende des Kreis-gränz-bogens r auf die Axe, welche aus dem anderen Ende des r, also die halbe Sehne des Bogens $2r$ ist. Wenn also dieser Bogen $2r$ durch seine Sehne $2y$ dividirt $\frown 1$ indem $y \frown 0$; so wird $y : \operatorname{tang} z \frown i$; also den Werth von $\operatorname{tang} z$ substituirt, und mit i dividirt, wird ($2y : i = k$ gesetzt) $\frac{k I^{\frac{y}{i}}}{I^k - 1} \frown 1$.

Und wenn $l = \text{lognat}\, I$, wird $I^k - 1 = kl + \omega$ (den Werth $\frac{k^2 l^2}{2} + \frac{k^3 l^3}{2 \cdot 3} \ldots = \omega$ gesetzt);

so wird $\frac{I^{\frac{y}{i}}}{l + \omega : k} \frown 1$; also wenn $y \frown 0$,

und zugleich $\omega : k \frown 0$, wird $I^{\frac{y}{i}} \frown 1$, und $l + \omega : k \frown l$; folglich $\frac{1}{\text{lognat}\, I}$, und 1 beyde

sind Gränz-werthe des $\frac{I^{\frac{y}{i}}}{l + \omega : k}$; also $\frac{1}{\text{lognat}}$

$= 1$, folglich $I = e$.

Da nun in der Sphaeren - Gränze (wo die Euclid. Geometrie gilt) die Peripherie des Halbmessers $r = 2\pi r$, und dieselbe beschreibt der Halbmesser y; so ist diese $= 2\pi i \operatorname{tang} z$, weil $r = i \operatorname{tang} z$ war; also den Werth der $\operatorname{tang} z$ substituirt, wird die Peripherie des Halbmessers $y = \pi i (Y - Y^{-1}) = \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{\frac{-y}{i}})$.

Woraus alle nöthige Formeln hergeleitet werden. Das einzige wird hier gemerkt: dass da bewiesen war, dass im geradlinigen $\triangle$ die sinusse der Winkel sich wie die Peripherien der Seiten als Halbmessern verhalten; so wird wenn a, b die Seiten, und α, β die gegenüberliegende Winkel sind; $\sin\alpha : \sin\beta = \pi i(A - A^{-1}) : \pi i(B - B^{-1})$

$$= e^{\frac{a}{i}} - e^{\frac{-a}{i}} : e^{\frac{b}{i}} - e^{\frac{-b}{i}} = \frac{e^{\frac{a}{i}} - e^{\frac{-a}{i}}}{2\sqrt{-1}} : \frac{e^{\frac{b}{i}} - e^{\frac{-b}{i}}}{2\sqrt{-1}}$$

$= \sin(a\sqrt{-1}) : \sin(b\sqrt{-1})$ wenn $\dfrac{e^{\frac{p}{i}} - e^{\frac{-p}{i}}}{2\sqrt{-1}}$ $\sin p$ genannt wird (für jeden Werth des p.)

Also wären in beyden Trigonometrien die Sinus der Winkel, wie die Sinus der gegenüberliegenden Seiten, nur dass in der Sphaere die Seiten reell, und in der Ebene imaginär genommen werden, als wenn die Ebene eine imaginäre Sphaere (nach der hiesigen Schrift) wäre.

Das gesagte Herleiten des e war zur nächsten Proportion nicht unumgänglich nöthig. Denn wenn r: tang $z = q$ gesetzt wird, die Peripherie des $r = \pi q(Y - Y^{-1})$ = der Peripherie des y; woraus dieselbe Proportion folgt: venn i die Weite bedeutet, wo der Quotient $I = e$ ist.

Wenn das XI Axiom nicht wahr ist: so existirt ein bestimmtes i, welche in die Formeln gesetzt wird. Auf den Fall der Wahrheit des XI Ax. wird in den Formeln $i \frown \infty$ genommen, wie es daraus erhellt, dass oben (p.82) der Quotient immer 1 ist, da in dem Falle die Sphaeren-Gränze die Ebene ist, und die Axen euclidisch || sind; folglich muss der Exponent 0 also i im Nenner des Exponenten ∞ seyn.

Mehr von dieser Schrift erlaubt die nothwendige Kürze nicht zu sagen.

Die treffliche Kasanische Schrift sagt: dass ihre Formeln für sehr kleine Seiten des $\triangle$ in die gewöhnliche Geometrie übergehen; und setzt am Ende hinzu: dass es bemerkenswerth sey, dass ihre Gleichungen für die Ebene Trigonometrie in die Gleichungen der Sphaerischen übergehen, wenn man statt der Seiten a, b, c setzt $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$.

Indessen stimmen doch beyde überein, wie verschieden auch sie aussehen. Das obige Y wird im kasanischen e^y, und u mit $\Pi(y)$ bezeichnet. Demnach ist da eine Hauptformel $\tang \Pi(a) = \sin B \tang \Pi(p)$, wo a Hypotenuse und B den der Kathede p gegenüberliegenden Winkel bedeutet. Nach der hiesigen Schrift ist $1 : \sin B = A - A^{-1} : P - P^{-1}$, welches $= \tang \Pi(p) : \tang \Pi(a)$ ist. Denn es sey $\Pi(k)$ kurz (k) bezeichnet, und $(k) : 2$ mit k'; so wird $\tang (k) = \tang 2k'$; und den Werth von A, P substituirt, wird $\tang 2p' : \tang 2a' = \cot a' - \tang a' : \cot p' - \tang p'$. Denn das Product der äusseren ist gleich dem Producte der inneren: nemlich $\frac{\cos a'}{\sin a'} - \frac{\sin a'}{\cos a'} : \frac{\cos p'}{\sin p'} - \frac{\sin p'}{\cos p'}$ $= \frac{2 \sin p' \cos p'}{\cos^2 p' - \sin^2 p'} : \frac{2 \sin a' \cos a'}{\cos^2 a' - \sin^2 a'}$. Denn die 2 ersten Glieder der Proportion werden $\frac{\cos^2 a' - \sin^2 a'}{\sin a' \cos a'}$ und $\frac{\cos^2 p' - \sin^2 p'}{\sin p' \cos p'}$; folglich das Product der äusseren ist 2, so wie der Mittleren.

Schluss. Die Abweichung von der Heerstrasse war nicht vorsätzlich: es war der Magnet-Nadel ihre auf der unendlichen Tiefe; die Berichtigung wird eben so willkommen seyn, als ihr treu zu folgen, dem allein nach Wahrheit rein strebenden frey war.

Errata: Pag 1 statt *Anwort* sey *Antwort*; p. 3 statt *beschänkter* sey *beschränkter*. Mehrere der Art sind leichter zu verbessern: den Sinn betreffen folgende: pag. 6 statt 8 sey 2. 8; pag. 16 statt *Werthes* sey *W*erthes *k*; p. 22 statt e^{s} sey e^5, und statt $n-1$ sey $m-1$; p. 24 statt log C sey lg$C$; und unten statt $h=3:2$; sey $k=3:2$; p. 38 statt ^2J sey ^zJ; p. 54 statt e sey c; p. 60 statt mm' sey mm'; pap. 63 statt ab' ||| ab sey ab' ||| bb.

Pag. 32 am Ende des § 30 fehlt die 2te Anmerkung: nehmlich der Gränz-werth des Resultats, indem jede veränderliche sich ihrer Gränze nähert, wird in Hinsicht dieser Gränzen mit demselben Namen belegt. So ist $1:0 = \infty$.

In den am Titelblatte genannten Werken sind auch viele Fehler. In Hinsicht der Convergenz der Reihen ist die Verbesserung hinzugesetzt; indem einige Merkmale, nebst dem Fehler mehrerer in ihres Ruhmes würdigen Büchern stehenden gezeigt werden. Auch einiges der Chronologie im 2ten latein. Bande verbessert das ungrische.

Der elementare Schlüssel zur Theilbarkeit der Zahlen ist zwar allgemein bewiesen; aber in einigen Ziffern gefehlt: von der Rechten zur Linken sollen unter decadisch geschriebene Zahlen 1, 3, 2, —1, —3, —2 ... für 7; 1, —1 ... für 11; 1, 10, 9, —1, —10, —9 .... für 13; u. sow; 1, 10, —11, 1, 10—11 ... für 37 u. sow. stehen; und wenn jede mit der darüber stehenden multiplicirt, die Summe der Reste aus der Division der einzelnen Producte theilbar ist, so ist es auch die Zahl, sonst nicht.

Jede Primzahl die >3 ist, gehört unter die Form $6n\pm1$; aber nicht umgekehrt. Z. B.

2^m+1 hat wenn m gerade ist immer die Form $6n-1$, allein ist nur dann eine Primzahl, wenn m Glied der Reihe 1, 2, 4..., oder $=0$ ist, und auch dann für $m=32$ schon nicht; über die folgende im voraus zu entscheiden ist höher. Alle und nur die der Form. 2^m+1 sind nach Gauss die Primzahlen, in welche der Kreis durch geometr. Constr. getheilt werden kann; wozu jedes Product kommt, dessen Factor keine andere Primzahl und keine (ausser 2) mehrmal ist.

Jede Primzahl ist auch ungerad: und wenn die Qnadrat. Wurzel einer ungeraden N keine ganze Zahl ist, und jede Primzahl die >1 und $<\sqrt{N}$ ist, u genannt wird, und für jedes u die ¡ Hälfte von $N-u$ durch 2 solang dividirt, bis ungerades q herauskommt, q durch u nicht theilbar ist: so ist N eine Primzahl und sonst nicht.

Denn es sey N das $n$te und u das n' te Glied der Reihe 1, 3, 5, 7... Es sind N und $n-n'$ durch u zugleich theilbar. Denn es ist $u=2n'-1$, und $N=2n-1=2n'-1+2(n-n')$; folglich wenn $n-n'$ durch $2n'-1$ theilbar ist, ist es auch $2n'-1+2(n-n')$. Und wenn $n-n'$ durch u nicht theilbar ist, ist auch $2(n-n')$ nicht; weil u ungerad ist; folglich auch $u+2(n-n')=N$ nicht. Es ist aber $n=(N+1):2$, und $n'=(u+1):2$, folglich $n-n'=(N-u):2$. Und N ist ohne einen u Factor zu haben, nicht theilbar; denn 2 Primfactoren, deren jeder $>\sqrt{N}$ ist, kann es nicht haben.

Eine grosse Zahl zu prüfen und ihre Primfactoren zu finden, zeigt Gauss 2 kürzere Wege, im unsterblichen Werke: worinn die unendliche Zahlen-Wissenschaft, sowohl durch die aus dem Ocean gehobene Wunder, als die unergründliche Tiefen, in ihren hohen und eigentlichen Reizen erscheint.