BOLYAI FARKAS ÉS BOLYAI JÁNOS GEOMETRIAI VIZSGÁLATAI

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL

KIADTA

ÉLETRAJZZAL ÉS MAGYARÁZATTAL ELLÁTTA

STÄCKEL PÁL

MAGYARRA FORDÍTOTTA

RADOS IGNÁCZ

MÁSODIK RÉSZ.

SZEMELVÉNYEK A KÉT BOLYAI MŰVEIBŐL.

KILENCZVENNÉGY A SZÖVEG KÖZÉ NYOMTATOTT ÁBRÁVAL ÉS EGY TÁBLÁVAL

BUDAPEST

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

1914

Ára a két kötetnek 12 K

BOLYAI FARKAS ÉS BOLYAI JÁNOS GEOMETRIAI VIZSGÁLATAI

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL

KIADTA,

ÉLETRAJZZAL ÉS MAGYARÁZATTAL ELLÁTTA

STÄCKEL PÁL

MAGYARRA FORDÍTOTTA

RADOS IGNÁCZ

MÁSODIK RÉSZ.

SZEMELVÉNYEK A KÉT BOLYAI MŰVEIBŐL.

KILENCZVENNÉGY A SZÖVEG KÖZÉ NYOMTATOTT ÁBRÁVAL ÉS EGY TÁBLÁVAL

BUDAPEST

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

1914

A MÁSODIK RÉSZ TARTALMA.

Első szakasz: Bolyai Farkas.

Második szakasz: Bolyai János.

ELSŐ SZAKASZ

BOLYAI FARKAS

1. A PÁRHUZAMOSAK ELMÉLETE (1804) ÉS TOLDALÉKA (1808)
2. RÉSZLETEK A TENTAMENBŐL (1832)
3. RÖVIDEN VÁZOLT KISÉRLET (1851)

BOLYAI FARKAS

A PÁRHUZAMOSAK ELMÉLETE (1804) ÉS TOLDALÉKA (1808)

A párhuzamosak elmélete.

[A Gausshoz intézett, 1804 szeptember hó 16-ikán kelt levél melléklete.]

Megjegyzés [az eredeti szöveg ábráinak tábláján].

1. Valamely oldalt [fél vonalat, fél síkot] gyakran olyasvalamiről nevezek el, a mi benne van.

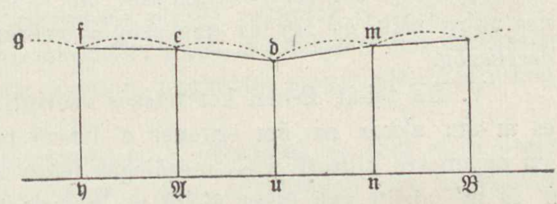
2. Felül vonással jelölt betű pontot jelent.

3. Az olyan [egyenes] vonalat (pl. $\mathfrak{du}$-t), mely mindkét részen a ∞-be van meghosszabbítva, $\mathfrak{du}\infty$-nel jelölöm.

4. Ha $\mathfrak{du}$ a $\mathfrak{d}'$-től [olvasd: vonásos $\mathfrak{d}$] kezdve azon a részen van a ∞-be meghosszabbítva, a melyben $\mathfrak{u}'$ van: akkor azt $\mathfrak{duu}'\infty$-nel jelölöm.

5. Az első feladat [1.] corollariumát (10. o.) nem kell elolvasni, mert benne más helyen adott értelmezésekre történik hivatkozás.

[**1.**] **Feladat.** Az 1. ábrában legyen $\mathfrak{du}$ az $\mathfrak{An}$ egyenesre merőleges (a $\mathfrak{P}$ síkban), és legyen $\mathfrak{Au} = \mathfrak{un}$. A $\mathfrak{du}$-ból és $\mathfrak{An}$-ből összetett vonalat nevezzük $\mathfrak{T}$-nek, és mozgassuk $\mathfrak{T}$-t, a $\mathfrak{P}$-ben oly módon, hogy $\mathfrak{An}$ az $\mathfrak{Ann}'\infty$-ben mindig tovább mozogjon egészen a végtelenig. Egyidejűleg mozgassunk $\mathfrak{P}$-ben valamely más $\mathfrak{T}$-t ugyanazon a módon, mint az elsőt, úgy hogy ennek az $\mathfrak{An}$-je $\mathfrak{nyy}'\infty$-ben mindig tovább mozogjon egészen a végtelenig. Kérdés már mostan, hogy a mozgó $\mathfrak{d}'$ milyen vonalat ír le.



1. ábra.

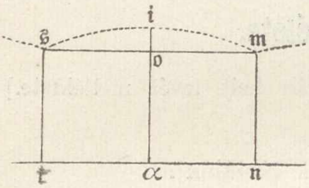
Megoldás. Nevezzük ezt a vonalat $\mathfrak{L}$-nek; $\mathfrak{L}$ egyenes.

Bebizonyítás.

I. $\mathfrak{L}$ nem tér vissza önmagába; mert különben két ugyanarra az $\mathfrak{AB}\infty$-[egyenes]re merőleges egyenes találkoznék. Ez pedig nem lehetséges; mert akkor (az esetek egyenlő volta miatt) ugyanazok a merőlegesek az $\mathfrak{AB}\infty$ egyenes másik oldalán is találkoznának.

II. Ha pedig $\mathfrak{L}$ nem volna egyenes, akkor önmagába térne vissza, mert:

III. Vegyük fel az 1. ábra alapján a 2. ábrát úgy, hogy $\mathfrak{sim}\infty$ legyen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{kn}\infty$ pedig $\mathfrak{An}\infty$; a α'-t vegyük fel tetszés szerint bárhol az $\mathfrak{An}\infty$-ben, csakhogy $\alpha\mathfrak{k} = \alpha\mathfrak{n}$ legyen; $\mathfrak{sk} = \mathfrak{nm} = \mathfrak{du} = \mathfrak{i}\alpha$ legyenek merőlegesek ugyanarra a $\mathfrak{kn}$-[egyenes]re. Ekkor $\mathfrak{si} = \mathfrak{im}$, mert ezek $\mathfrak{L}$-nek egyenlő módon származó részei; még pedig úgy, hogy $\mathfrak{u}'$-t α'-ba és $\mathfrak{d}'$-t $\mathfrak{i}'$-be helyezzük, $\mathfrak{T}$-t pedig (úgy mint fent) addig mozgatjuk, míg $\mathfrak{d}'$ az $\mathfrak{im}$ vonalat írja le, és egyszersmind a másik $\mathfrak{T}$-t is addig mozgatjuk, míg ennek $\mathfrak{d}'$-je az $\mathfrak{is}$ vonalat írja le. A származásnak e megegyezéséből kitűnik az is, hogy az $\alpha\mathfrak{is}$ szög mint az $\alpha\mathfrak{im}$-mel egyenlő szög keletkezik. E szerint az elmondottak még akkor is érvényesek, ha $\mathfrak{is}$-t és $\mathfrak{im}$-et egyeneseknek tekintjük; mert, ha $\mathfrak{L}$-nek $\mathfrak{is}$ és $\mathfrak{im}$ részei egybeesnek, az $\mathfrak{is}$ és $\mathfrak{im}$ egyenesek is egybeesnek.



2. ábra.

IV. Az $\alpha\mathfrak{i}$ egyenes, mely az $\mathfrak{sm}$ egyenest $\mathfrak{o}'$-ban metszi, azt merőlegesen metszi. Ha ugyanis $\mathfrak{o}\alpha\mathfrak{nm}$-et reáhelyezzük $\mathfrak{o}\alpha\mathfrak{ks}$-re: akkor α' megmarad α'-ban és $\mathfrak{o}'$ $\mathfrak{o}'$-ban, $\mathfrak{n}'$ $\mathfrak{k}'$-ra esik (mert a szerkesztés szerint $\mathfrak{o}\alpha\mathfrak{k}$ és $\mathfrak{n}\alpha\mathfrak{o}$ derékszögek), $\mathfrak{m}'$ pedig $\mathfrak{s}'$-re esik (mert a szerkesztés szerint az $\alpha\mathfrak{ks}$ szög $= \alpha\mathfrak{nm}$-mel, $\mathfrak{nm} = \mathfrak{ks}$). E szerint az $\mathfrak{om}$ egyenes $\mathfrak{os}$-re esik, és így az $\alpha\mathfrak{os}$ szög $= \alpha\mathfrak{om}$-mel. Tehát mind a kettő derékszög.

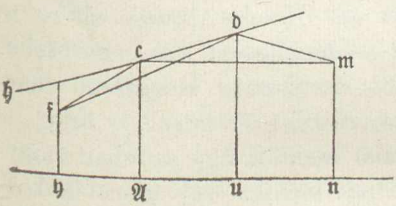
V. Ha tehát $\mathfrak{L}$-ben két tetszés szerinti pontot veszünk fel: $\mathfrak{s}'$-t és $\mathfrak{m}'$-et: akkor az $\mathfrak{sm}$ egyenes $\mathfrak{o}'$ felező pontjában magára erre az $\mathfrak{sm}$ egyenesre állított $\mathfrak{B}\infty$ merőleges felezi $\mathfrak{L}$-nek azt a részét, mely $\mathfrak{s}'$ és $\mathfrak{m}'$ között van (azaz $\mathfrak{s}'$-től $\mathfrak{m}'$-ig terjed).

VI. Ha továbbá a $\mathfrak{i}'$-ből kiinduló $\mathfrak{L}$-nek a $\mathfrak{s}'$ oldalon van a $\mathfrak{B}$ (vagyis $\alpha\mathfrak{i}$) merőlegessel egy közös $\mathfrak{h}$ pontja: akkor ugyanennek a $\mathfrak{h}'$-nek közösnek kell lennie $\mathfrak{L}$-nek a $\mathfrak{i}'$-ből kiinduló másik, $\mathfrak{m}'$ oldalával is. Ez kitűnik a két oldalnak egyenlő származásából, és az épen mondottakból is nyilvánvalóvá válik, ha az $\mathfrak{imm}'\infty$-ből és $\mathfrak{i}\alpha\infty$-ből összetett vonalat reáhelyezzük az $\mathfrak{iss}'\infty$-ből és az $\mathfrak{i}\alpha\infty$-ből összetett vonalra, a midőn α' megmarad α'-ban és $\mathfrak{i}'$ $\mathfrak{i}'$-ben, (lásd a 2. axiómát).

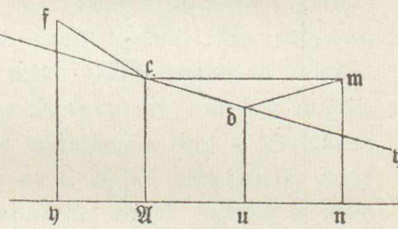
VII. Ha $\mathfrak{m}'$-et $\mathfrak{m}'$-ből kiindulva, $\mathfrak{mis}$-ben ($\mathfrak{L}$ egyik részében) egészen $\mathfrak{s}'$-ig mozgatjuk: akkor, ha feltételezzük, hogy $\mathfrak{L}$ nem egyenes, $\mathfrak{m}'$-nek, mihelyt $\mathfrak{m}'$-ből kiindul, azonnal el kell hagynia az $\mathfrak{ms}$ egyenest (mert ha bármi keveset is ebben mozogna, az út melyet e közben leírna, egyenes volna; ha pedig $\mathfrak{L}$-nek valamely része egyenes, akkor a végtelenig egyenletesen folytatódó származása miatt az egész $\mathfrak{L}$ is egyenes volna). Ámde (az $\mathfrak{ms}$-ben mozgatott) $\mathfrak{m}'$, midőn $\mathfrak{s}'$-be ér, újból belejut az $\mathfrak{ms}$ egyenesbe, és így ez már előbb is megtörtént, vagy pedig nem. Tekintsük az $\mathfrak{ms}\infty$ egyenesnek azt a pontját, a melybe $\mathfrak{m}'$, miután $\mathfrak{m}'$-et elhagyta, legelőször jutott, és nevezzük ezt a pontot $\mathfrak{c}'$-nek (1. ábra): akkor $\mathfrak{L}$-nek $\mathfrak{cdm}$ (vagyis $\mathfrak{cm}$) része a $\mathfrak{cm}$ egyenesnek ugyanarra az oldalára esik.

VIII. Felezzük az említett $\mathfrak{cdm}$ [részt] (V. szerint) $\mathfrak{d}'$-ben: akkor ott a $\triangle\mathfrak{cdm}$ származik.

IX. A $\mathfrak{c}'$-n túl vegyük fel $\mathfrak{L}$-nek $\mathfrak{fc} = \mathfrak{cd}$ darabját. Az $\mathfrak{fcd}$ szög $= \mathfrak{cdm}$ (mert úgy, a hogy az $\mathfrak{mdc}$ vonal származik, ugyanazon a módon származik a $\mathfrak{dcf}$ vonal is). Ha tehát az $\mathfrak{md}$, $\mathfrak{dc}$, $\mathfrak{cf}$ egyeneseket húzzuk, és a $\mathfrak{cdu}$ szög < a derékszögnél: akkor $\mathfrak{fcA}$ is < a



3. ábra.



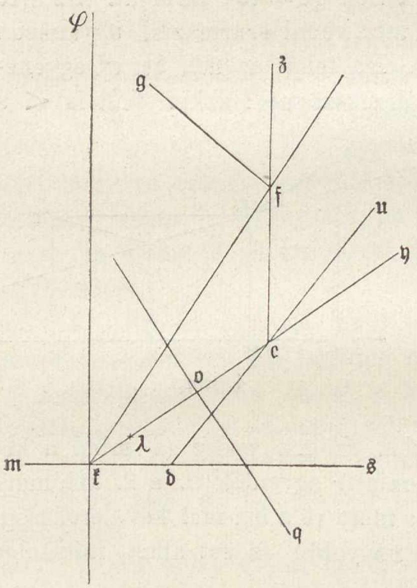
4. ábra.

derékszögnél, az $\mathfrak{fcA}$, $\mathfrak{dcA}$, $\mathfrak{cdu}$, $\mathfrak{udm}$ szögek pedig (a mind a két oldalon történő egyenlő származás miatt) egyenlők (l. a 2. axiómát). Derékszögek azonban nem lehetnek; mert $\mathfrak{cd}$ a $\mathfrak{dm}$-mel két derékszögnél kisebb (vagy a másik oldalon nagyobb) szöget alkot, minthogy $\mathfrak{cdm}$ $\triangle$ (VIII.).

X. Ha $\mathfrak{cdu}$ < a derékszögnél (3. ábra): akkor $\mathfrak{cdm}$ < 2 derékszögnél. E szerint a $\mathfrak{dm}$ egyenes a $\mathfrak{cd}\infty$ egyenesnek arra az oldalára esik, a melyen $\mathfrak{du}$ van. Épen úgy $\mathfrak{fcd}$ is < 2 derékszögnél. E szerint az $\mathfrak{fc}$ egyenes a $\mathfrak{cd}\infty$ egyenesnek $\mathfrak{A}'$ (vagy $\mathfrak{u}'$) oldalára esik és $\mathfrak{fc}$ meg $\mathfrak{dm}$ a $\mathfrak{cd}$ egyenesnek ugyanarra az oldalára esnek. Szembetűnő, hogy ez örökké így folytatódik; tehát egy egyenlő szögek alatt egymáshoz hajló egyenlő egyenesekből összetett $\mathfrak{mdcf}$... vonal származik; még pedig úgy, hogy az a két köz, mely valamely közhöz csatlakozik, mindig ennek ugyanarra az oldalára esik.

Ha azonban $\mathfrak{cdu}$ > a derékszögnél (4. ábra): akkor $\mathfrak{cdu}+\mathfrak{udm}$ > 2 derékszögnél (de mindenesetre kisebb 4 derékszögnél, mert ebből még hiányzik az a szög, a melyet $\mathfrak{cd}$ a másik oldalon alkot $\mathfrak{dm}$-mel). Így tehát szükséges, hogy $\mathfrak{dy}^1$ (azaz $\mathfrak{cd}$-nek meghosszabbítása) $\mathfrak{dm}$ és $\mathfrak{du}$ közé essék, és ezért $\mathfrak{dm}$ a $\mathfrak{cd}\infty$ egyenesnek arra az oldalára esik, a melyen $\mathfrak{u}'$ nincsen. Ekkor továbbá $\mathfrak{dc}\mathfrak{A}$ is $>$ a derékszögnél és $\mathfrak{dc}\mathfrak{A}+\mathfrak{A}\mathfrak{cf} > 2$ derékszögnél. Ebből következik, hogy $\mathfrak{ch}$ (t. i. $\mathfrak{dc}$-nek meghosszabbítása $\mathfrak{h}'$ felé) $\mathfrak{cf}$ és $\mathfrak{c}\mathfrak{A}$ közé esik, és így $\mathfrak{fc}$ a $\mathfrak{cd}\infty$ egyenesnek arra az oldalára esik, a melyen $\mathfrak{u}'$ nincsen (mert $\mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{u}'$ a $\mathfrak{dh}$ egyenesnek ugyanarra az oldalára esnek). $\mathfrak{fc}$ és $\mathfrak{dm}$ tehát a $\mathfrak{cd}$ egyenesnek ugyanarra az oldalára esnek.

Ha tehát ezt az eljárást a végtelenbe folytatjuk, mind a két esetben a származó vonal olyan, mint előbb világosan megmondtuk, és még sem tér vissza; mert különben két merőleges találkoznék egymással (1. ábra).



5. ábra.

XI. Képviseljen az 5. ábra ilyen $\mathfrak{mdcfg}\ldots$ vonalat és jelöljük azt Π-vel. Állítsuk $\mathfrak{md}$-re a $\varphi\mathfrak{k}\infty$ merőlegest és nevezzük $\mathfrak{kdd}'\infty$-t $\mathfrak{Q}$-nak. Mozgassuk már mostan $\mathfrak{Q}$-t $\mathfrak{k}'$ körül a $\mathfrak{dcfg}\ldots$ vonal mentén, úgy azonban, hogy $\mathfrak{Q}$ ne menjen túl $\varphi\mathfrak{k}$-n. Mikor $\mathfrak{Q}$ eléri $\mathfrak{kcc}'\infty$-t, akkor $\mathfrak{cf}$ (mely a $\mathfrak{cd}\infty$ egyenesnek ugyanarra az oldalára esik, mint $\mathfrak{dm}$) vagy $\mathfrak{cu}$ és $\mathfrak{ck}$ közé, vagy $\mathfrak{ck}$ és $\mathfrak{cd}$ közé, vagy pedig $\mathfrak{ckk}'\infty$-be esik.

Ha az utóbbi történik: akkor $\mathfrak{f}'$ vagy $\mathfrak{c}'$ és $\mathfrak{k}'$ közé esik, vagy $\mathfrak{k}'$-ba, vagy pedig túl a $\mathfrak{k}'$-n. Ha $\mathfrak{f}'$ a λ'-ba esnék: akkor állítsuk a $\mathfrak{o}'$ pontban, mely $\lambda\mathfrak{c}$-nek felező pontja, a $\mathfrak{c}\lambda$-ra merőleges $\mathfrak{oq}\infty$ egyenest. Ekkor (V.) $\mathfrak{oq}\infty$ felezné $\mathfrak{L}$-nek azt a részét, mely $\mathfrak{c}'$-től $\mathfrak{f}'$-ig terjed, és azonkívül szükséges volna, hogy valamelyik közön keresztül kilépjen Π-ből és messe $\mathfrak{L}$-nek azt a részét, mely ahhoz a közhöz tartozik. Így tehát $\mathfrak{L}$ önmagába térne vissza (VI.).

Ha azonban $\mathfrak{cf}$ a $\mathfrak{ck}$ és a $\mathfrak{cd}$ közé esnék: akkor $\mathfrak{cf}$ teljesen belül maradna azon a vonalon, a mely $\mathfrak{kc}$-ből és Π-nek abból a részéből van összetéve, mely $\mathfrak{k}'$-tól kezdve egészen $\mathfrak{c}$-ig származott; mert különben $\mathfrak{cf}$ (a X. záró megjegyzése ellenére) a Π nek épen említett részén haladna keresztül. Így tehát a $\mathfrak{cf}$-re a felező pontjában emelt merőlegesnek a Π említett részének valamely közén át ki kell lépnie, és így $\mathfrak{L}$-nek az ehhez a közhöz tartozó reszét is metszenie.

Ezen kívül (V.) metszené még $\mathfrak{L}$-nek azt a részét, a mely magához az $\mathfrak{fc}$-hez tartozik, és így tehát (VI.) $\mathfrak{L}$ önmagába visszatérő volna.

Megjegyzendő még, hogy ha $\mathfrak{fc}$ a $\mathfrak{cf}$-ra esnék, akkor $\mathfrak{f}'$-nek $\mathfrak{c}'$ és $\mathfrak{f}'$ közé kellene esnie; mert különben csorba esnék a X. záró megjegyzésén.

XII. Ha azonban $\mathfrak{f}'$ a $\mathfrak{cu}$ és a $\mathfrak{cf}$ közé esik: akkor az $\mathfrak{ucf}+\mathfrak{fcd}$ szög $=2$ derékszöggel $=\mathfrak{cds}+\mathfrak{cdm}$. Ámde (X.) $\mathfrak{cdm}=\mathfrak{fcd}$, és így tehát $\mathfrak{cds}=\mathfrak{ucf}$.

XIII. Jelentse $\mathfrak{R}$ a $\mathfrak{Q}$-nak azt a részét, a mely a Π-n túl fekszik, mint $\mathfrak{cyy}'\infty$ és $\mathfrak{dss}'\infty$. Ha már mostan $\mathfrak{Q}$-t az előírt módon $\mathfrak{f}'$ körül Π mentén tovább mozgatjuk: akkor minden egyes köz végpontjához érve, az a kérdés merül fel, vajjon a következő köz magára a $\mathfrak{Q}$-ra esik-e, vagy pedig ezen belül vagy kívül?

Ha a két első eset valamelyike áll be: akkor $\mathfrak{L}$ önmagába visszatérő (XI.); mert az eset itt ugyanaz [mint előbb]. Ha azonban [a következő köz] mindig $\mathfrak{Q}$-n kívül esik: akkor annak a köznek meghosszabbítása (a melynek a végéhez $\mathfrak{Q}$ épen ért) (mint a milyen $\mathfrak{cu}$ a $\mathfrak{cd}$ köz esetében) $\mathfrak{Q}$-nak azon az oldalán, a hol a következő köz van, $\mathfrak{R}$ és a következő köz közé esik. Ebből következik, hogy $\mathfrak{R}$, midőn a következő köz kezdőpontjához ér, ennek mindig a túlsó oldalán, tőle bizonyos eltérésre fekszik, a melyet $\mathfrak{R}$ az említett meghosszabbítással alkot (mint a milyen $\mathfrak{ycu}$), és ehhez még egy állandó eltérés járul hozzá, mely a $\mathfrak{cds}$ szöggel egyenlő (XII.). Az alatt továbbá, míg $\mathfrak{Q}$ az előírt mozgás közben Π-nek valamely köze mentén elhalad, ezt mindjárt kezdetben metszi és majd tovább is mindig metszi. Így tehát $\mathfrak{Q}$ mindig szöget ír le $\mathfrak{f}'$ körül, és ennyivel közelebb jut a $\varphi\mathfrak{f}$ egyeneshez.

E szerint $\mathfrak{R}$ mindig bizonyos eltéréssel túl marad Π-nek azon a részén, melyet $\mathfrak{Q}$ épen befutni kezd, és ez az eltérés messze van attól, hogy elenyészszék; sőt, mihelyt $\mathfrak{Q}$ valamely köz végpontjában megkezdi mozgását, mindig nagyobb az állandó $\mathfrak{cds}$ szögnél.

Így tehát $\mathfrak{R}$ nem kerülhet sohasem Π-n belül; mert nem lehetséges, hogy az eltérés elenyészszék, minthogy az olyan mennyiség, mely — még ha egyszer fogynia is kell — mielőtt teljesen kimerülne, mindig ugyanarra az állandóra, vagy annál még nagyobb mennyiségre egészül ki, nem enyészhetik el.

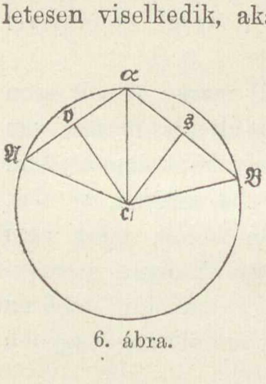
Ezért $\mathfrak{Q}$-t az előirt módon addig mozgathatjuk, míg $\mathfrak{f}\varphi\varphi'\infty$-be jut. De akkor Π [egyik pontja] szintén ott van, mert különben $\mathfrak{R}$ kilépett volna Π-ből, a minek lehetetlenségét bebizonyítottuk. Még pedig vagy Π valamelyik közének végpontja van a $\varphi\mathfrak{f}\infty$-en, és ekkor $\mathfrak{L}$-nek is valamely pontja (t. i. épen ugyanaz) $\varphi\mathfrak{f}\infty$-be esik, vagy pedig Π-nek valamely köze újra átmegy $\varphi\mathfrak{k}\infty$-en, és ekkor $\mathfrak{L}$ eme köz végpontjai között levő részének szintén át kellett mennie a $\varphi\mathfrak{k}\infty$-en. Mind a két esetben $\mathfrak{L}$ önmagába visszatérő (VI.).

E szerint $\mathfrak{L}$-nek, ha feltételezzük róla, hogy nem egyenes, önmagába visszatérőnek kell lennie, és így, minthogy (I.-ben) bebizonyítottuk, hogy $\mathfrak{L}$ nem tér vissza önmagába, hibás állítás az, hogy $\mathfrak{L}$ nem egyenes; mert ez a bebizonyított igazságot lerontaná. Valóban pedig minden, a mi az igazsággal ellenkezik, hibás.

[1.] *Corollarium.* Így tehát $\mathfrak{L}$ (1. ábra) az $\mathfrak{An}\infty$-nel párhuzamos egyenes; mert (a 42. értelmezés szerint) minden térbeli γ, a mely $=$ más valamely ilyen $\mathfrak{z}$-tel, ezzel hasonló is, ha ugyanabban az értelmezésben (különösen) azt tételezzük fel, hogy $\alpha=\beta$, és $\mathfrak{p}'$-t γ-ban veszszük fel, γ-t és $\mathfrak{z}$-et pedig oly helyzetbe hozzuk, hogy egymásra essenek. Ha továbbá, midőn az $\mathfrak{L}$ és $\mathfrak{An}\infty$ egyenesek már olyan helyzetben vannak, mint az 1. ábrában, $\mathfrak{L}$-nek két tetszés szerinti pontján át egyenest húzunk és $\mathfrak{An}\infty$-nek két tetszés szerinti pontján át egy másikat: akkor ezek az egyenesek ugyanabban a síkban lesznek és nem találkoznak egymással; mert az egyik közülök $\mathfrak{L}$-re, a másik pedig $\mathfrak{An}\infty$-re esik. Minthogy tehát ugyanez $\mathfrak{L}$-nek bármely két pontjára nézve és a vele hasonló $\mathfrak{An}\infty$-nek bármely két pontjára nézve érvényes, [azért] érvényes a megfelelő pontokra nézve is, és így (a 44. értelmezés szerint) $\mathfrak{L}$ és $\mathfrak{An}\infty$ párhuzamosak.

Megjegyzés. Mindazonáltal eddig nincsen bebizonyítva, hogy nem lehet más olyan az $\mathfrak{An}$-nel párhuzamos, mely $\mathfrak{L}$-nek valamely pontján átmegy. Mindaddig, míg ez meg nem történik, párhuzamosak alatt mindig olyanok értendők, melyek ezen a módon származnak vagy származtatandók.

2. *corollarium.* $\mathfrak{L}$ származtatásánál (1. ábra) $\mathfrak{bu}$ mindig egyenletesen viselkedik, akár valamely helyből kiindulva előre megy, akár pedig azon az úton, a melyen jött, visszatér; így tehát mindenütt és mind a két oldalon egyenlő, vagyis derékszöget alkot $\mathfrak{L}$-lel.



6. ábra.

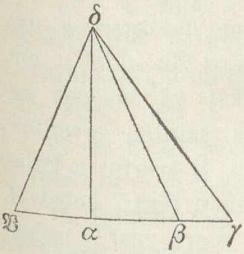
1. tantétel. (6. ábra.) *Egyenes kört kettőnél több pontban nem metszhet.*

Ha ugyanis az $\mathfrak{AB}$ egyenesnek α' pontja a kerületben feküdnék: akkor (az 1. feladathoz tartozó I. bebizonyítás ellenére) az ugyanarra az egyenesre merőleges $\mathfrak{co}$ és $\mathfrak{cs}$ egyenesek találkoznának egymással. Ha t. i. $\mathfrak{c}'$ a középpont, $\mathfrak{o}\alpha = \mathfrak{oA}$ és $\mathfrak{s}\alpha = \mathfrak{sB}$: akkor a $\mathfrak{o}'$ mellett fekvő szögek derékszögek; mert egyenlők (ugyanis $\mathfrak{co}$ közös, $\mathfrak{cA} = \mathfrak{c}\alpha$ és $\mathfrak{o}\alpha = \mathfrak{oA}$).

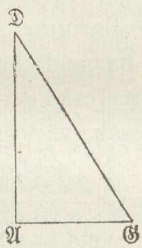
Corollarium. Így tehát $\mathfrak{AB}\infty$-nek az a része, a mely még $\mathfrak{AB}$-n kívül megvan, a kerületen kívül esik. Vegyünk fel ugyanis ugyanabban a síkban olyan kört, melynek középpontja $\mathfrak{B}'$, és a mely az $\mathfrak{A}\alpha\mathfrak{B}$ kört bezárja. (Hogy ez lehetséges, kitűnik, ha az említett síkban $\mathfrak{B}'$ körül, mint középpont körül minden olyan radiussal, melynek másik végpontja az $\mathfrak{A}\alpha\mathfrak{B}$ kerületnek valamely pontja, kört írunk le, és azután a $\mathfrak{B}'$ középpont körül leírt legkülsőbb ilyen körön túl ugyanabban a síkban egy tetszés szerinti $\mathfrak{p}'$ pontot veszünk fel, és a $\mathfrak{B}'$ középpont körül a $\mathfrak{B}\mathfrak{p}$ egyenessel kört írunk le.) Ekkor majd az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ egyenes a legkülsőbb kört a $\mathfrak{A}'$-n túl találja, és egyáltalában nem tér többé vissza az $\mathfrak{A}\alpha\mathfrak{B}$ kerület belsejébe; mert így az egyenes három pontjában metszené [ezt] a kört. Ugyanaz bizonyítható be az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\infty$ egyenes másik részéről is, ha $\mathfrak{A}'$-t veszszük középpontnak.

2. tantétel. (7. ábra.) *Ha az egyik befogó növekszik: akkor növekszik az átfogó is.*

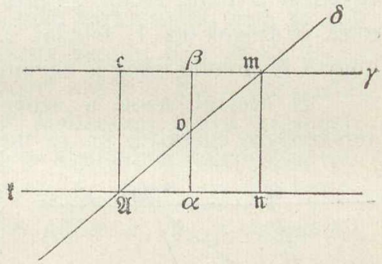
Írjunk le ugyanis a δ' középpont körül a $\delta\beta$ radiussal kört. Ennek $\beta\alpha\alpha'\infty$-nel még egy pontja, a $\mathfrak{B}'$ közös, ha $\mathfrak{B}\alpha = \alpha\beta$ (mert



7. ábra.



8. ábra.



9. ábra.

$\triangle\delta\alpha\beta = \triangle\delta\alpha\mathfrak{B}$). Így tehát a $\mathfrak{B}\beta\beta'\infty$ egyenes (eltekintve a $\mathfrak{B}\beta$-tól), és így γ' is a kerületen kívül van (I. tant. corr.), úgy hogy $\delta\gamma > \delta\beta$.

1. corollarium. (7. és 8. ábra.) E szerint derékszögű háromszögek esetében a befogó és az átfogó állapítják meg az egyenlőséget. Helyezzük ugyanis $\mathfrak{D}\mathfrak{A}$-t $\delta\alpha$-ra, úgy hogy $\mathfrak{D}'$ a δ'-ra és $\mathfrak{A}'$ a α'-ra essék; a $\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ és $\delta\alpha\gamma$ szögek derékszögek; végre szükséges (minthogy $\mathfrak{D}\mathfrak{G} = \delta\gamma$), hogy $\mathfrak{G}'$ a γ'-ra essék; mert valamennyi többi átfogó, melyet δ'-tól $\alpha\gamma\gamma'\infty$-ig húzhatunk, vagy nagyobb [mint amaz], vagy pedig kisebb.

Megjegyzés. Általánosságban azonban nem igaz, hogy két oldal és egy szög a háromszöget meghatározza. Így pl. $\triangle\beta\delta\gamma$ része a $\triangle\mathfrak{B}\delta\gamma$-nak, habár a γ szög bennük közös, a $\delta\gamma$ oldal is közös és $\delta\mathfrak{B} = \delta\beta$.

2. corollarium. Ha tehát (az 1. ábrából) kiveszszük $\mathfrak{c}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\mathfrak{A}$-t, és meghúzzuk $\mathfrak{A}\mathfrak{m}$-et (9. ábra): akkor $\triangle\,\mathfrak{m}\mathfrak{c}\mathfrak{A} = \triangle\,\mathfrak{A}\mathfrak{n}\mathfrak{m}$. Helyezzük az egyiket a másikra: akkor kitűnik, hogy a derékszögű $\triangle$ valamennyi szögének összege négy derékszögnek fele. Ugyanaz bármely derékszögű △-re nézve érvényes; mert $\mathfrak{An}$ és $\mathfrak{Ac}$ tetszés szerinti nagynak vehető fel.

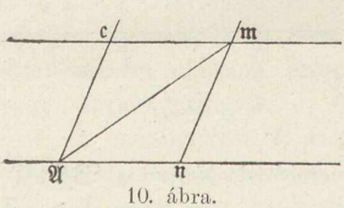
3. corollarium. Minthogy minden △ két derékszögű △-re bontható fel, e szerint bármely △ szögeinek összege = 2 derékszöggel.

3. tantétel. *Ha valamely egyenes két párhuzamost,* $\mathfrak{cm}$*-et és* $\mathfrak{An}$*-t* (9. ábra) *a* $\mathfrak{A}'$ *és* $\mathfrak{m}'$ *pontokban metszi: akkor az* $\mathfrak{mAn}$ *és* $\mathfrak{Amc}$ *váltószögek egyenlők, és* $\mathfrak{mAf} = \mathfrak{Am}\gamma$.

Felezze ugyanis $\mathfrak{o}'$ az $\mathfrak{Am}$-et, és bocsássunk $\mathfrak{o}'$-ból merőlegest $\mathfrak{An}$-re. Ha ez egybeesik $\mathfrak{oA}$-val: akkor (az 1. feladat 2. corollariuma szerint) a váltószögek derékszögek és egyenlők.

Ha [a $\mathfrak{o}'$-ból az $\mathfrak{An}$-re bocsátott merőleges] $\mathfrak{oA}$-n kívül (pl. $\mathfrak{o}\alpha$-ra) esik: akkor szükséges, hogy $\mathfrak{o}\alpha$ meghosszabbítása ($\mathfrak{cm}$-nek az 1. feladat és ábra szerint való származása miatt) a $\mathfrak{cm}$ egyenest messe. Miután $\alpha\mathfrak{o}$ az $\mathfrak{Am}$ egyenes másik oldalára ment át, messe az $\mathfrak{mc}$ egyenest β'-ban: akkor $\triangle\mathfrak{A}\alpha\mathfrak{o} = \mathfrak{m}\beta\mathfrak{o}$. A csúcsszögek egyenlők és az α és β szögek (az 1. feladat 2. corollariuma szerint) derékszögek, úgy hogy a harmadik szög is egyenlő a harmadikkal, és az $\mathfrak{Ao}$ oldal = $\mathfrak{om}$.

E szerint azok a szögek, melyek ezt a két váltószöget két derékszögre egészítik ki, és ugyancsak váltószögek, szintén egyenlők.



10. ábra.

1. corollarium. E szerint a külső szög is = az átellenben fekvő belsővel, t. i. $\gamma\mathfrak{m}\delta = \mathfrak{mAn}$; mert $\gamma\mathfrak{m}\delta$ = csúcsszögével, $\mathfrak{Amc}$-vel, a mely = $\mathfrak{mAn}$-nel.

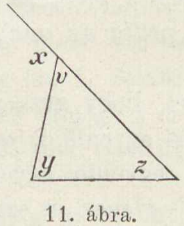
2. corollarium. Ha tehát két párhuzamos, $\mathfrak{cA}$ és $\mathfrak{mn}$ (10. ábra) metszi a $\mathfrak{cm}$ és $\mathfrak{An}$ párhuzamosakat, és a metszéspontok $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{n}'$: akkor $\mathfrak{cm} = \mathfrak{An}$ és $\mathfrak{cA} = \mathfrak{mn}$. Ugyanis $\triangle\mathfrak{cAm} = \mathfrak{nmA}$, minthogy a váltószögek egyenlők és $\mathfrak{Am}$ bennük közös.

4. tantétel. *Ha a váltószögek egyenlők* (9. ábra): *akkor a metszett egyenesek nem találkozhatnak egymással.*

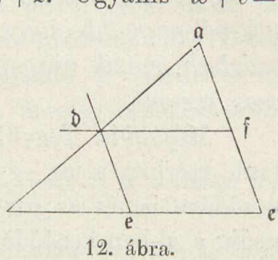
Ha ugyanis $\mathfrak{cmA} = \mathfrak{mAn}$: akkor egyszersmind $\mathfrak{Am}\gamma = \mathfrak{mAf}$. Helyezzük az $\mathfrak{Am}$-ből, $\mathfrak{m}\gamma\gamma'\infty$-ből és $\mathfrak{Ann}'\infty$-ből összetett vonalat az $\mathfrak{Am}$-ből, $\mathfrak{Aff}'\infty$-ből és $\mathfrak{mcc}'\infty$-ből összetett vonalra: akkor majd $\mathfrak{A}'$ a $\mathfrak{m}'$-re, $\mathfrak{m}'$ a $\mathfrak{A}'$-ra, $\mathfrak{m}\gamma\gamma'\infty$ az $\mathfrak{Aff}'\infty$-re és $\mathfrak{Ann}'\infty$ az $\mathfrak{mcc}'\infty$-re esik. Ebből következik, hogy ha $\mathfrak{mcc}'\infty$ és $\mathfrak{Aff}'\infty$ találkoznának, $\mathfrak{Ann}'\infty$ és $\mathfrak{m}\gamma\gamma'\infty$-nek is kellene találkozniok, és akkor két egyenes, melynek két közös pontja van, nem esnék egybe.

Corollarium. Hogy ha valamely belső szög az átellenben fekvő külső szöggel egyenlő: akkor ugyanaz bizonyítható be.

5. tantétel. (11. ábra). *Ha valamely* $\triangle$ *valamelyik oldalát meghosszabbítjuk: akkor a külső szög*: $x=y+z$. Ugyanis $x+v=$ 2 derékszöggel $=y+z+v$. Ha tehát mind a két oldalon v-t kivonjuk, $x=y+z$.



11. ábra.



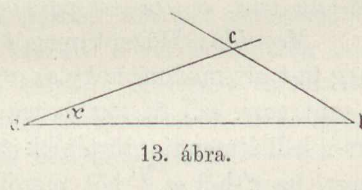
12. ábra.

6. tantétel. *Ha* (a 12. ábrában) $\mathfrak{ad}=\mathfrak{db}$ *és* $\mathfrak{af}=\mathfrak{fc}$: *akkor* $\mathfrak{df}=\frac{\mathfrak{bc}}{2}$.

Húzzuk ugyanis a $\mathfrak{d}'$-n át a párhuzamosat a $\mathfrak{bc}$ egyenessel: akkor szükséges, hogy az bizonyos $\mathfrak{f}'$ pontban az $\mathfrak{ac}$-n menjen át; még pedig azért, mert a $\mathfrak{bc}\infty$ egyenes felett a $\mathfrak{ba a}'\infty$ egyenesnek egyik oldaláról a másikra kell átmennie. Magára $\mathfrak{baa}'\infty$-re ugyanis nem eshetik, mert így nem volna párhuzamos. Így tehát belép $\triangle\mathfrak{abc}$-be és (a mint az 1. tantétel corollariumából kölcsönzött eljárással bebizonyítható) ebből ki is kell lépnie, a minek, minthogy $\mathfrak{bc}$-n át, mely t. i. vele párhuzamos, nem történhetik, $\mathfrak{ac}$-n át kell megtörténnie. Történjék meg $\mathfrak{f}'$-ben. Húzzuk azután $\mathfrak{d}'$-n át az $\mathfrak{ac}$-vel párhuzamosat, a mely $\mathfrak{e}'$-ben menjen át $\mathfrak{bc}$-n: akkor $\triangle\mathfrak{dbe}=\mathfrak{adf}$; mert a $\mathfrak{dbe}$ szög $=\mathfrak{adf}$ (t. i. a belső szög az átellenben fekvő külsővel), $\mathfrak{bd}=\mathfrak{da}$ és a $\mathfrak{bde}$ szög $=\mathfrak{daf}$ (a külső szög az átellenben fekvő belsővel). Így tehát $\mathfrak{be}=\mathfrak{df}=\mathfrak{ec}$, 3. tantétel, 2. corr., és $\mathfrak{bc}=2\mathfrak{df}$.

2. feladat. $\triangle$ *szerkesztendő olyan adott* x, y, z *szögekből, melyeknek összege* $=2$ *derékszöggel.*

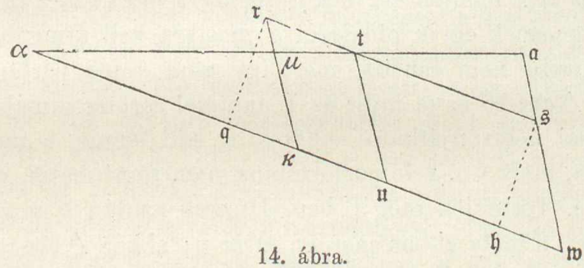
Megoldás. 13. ábra. Illeszszük az $\mathfrak{ab}$ és $\mathfrak{ac}$ egyeneseket $\mathfrak{a}'$-ban az x szög alatt egymáshoz, és húzzuk meg $\mathfrak{bc}$-t: akkor (a 2. tant. 3. corr. sz.) az $\mathfrak{acb}$ és $\mathfrak{abc}$ szögek összege $=y+z$. Így tehát vagy az egyik közülük egyenlő y-nal, a másik z-vel, vagy pedig az egyik közülük bizonyos mennyiséggel nagyobb az y és z egyikénél, a másik pedig ugyanannyival kisebb az y és z másikánál. Legyen $\mathfrak{abc}>y$; azután mozgassuk $\mathfrak{bcc}'\infty$-t $\mathfrak{b}'$ körül $\mathfrak{ca}$ mentén tovább, míg $\mathfrak{baa}'\infty$-be el nem jut, úgy hogy az $\mathfrak{abc}$ szög 0-sá váljék. E mozgás közben (mely alatt az $\mathfrak{abc}$ szög minden olyan szögön megy át, mely magánál $\mathfrak{abc}$-nél kisebb) állítsuk meg $\mathfrak{bcc}'\infty$-t azon a helyen, a melyen $\mathfrak{ba}$-val olyan szöget alkot, mely $=y$. A $\mathfrak{bcc}'\infty$ még ekkor is átmegy $\mathfrak{ac}$-n; mert minden a $\mathfrak{b}'$-ből kiinduló egyenes, melyet $\mathfrak{ab}$ és $\mathfrak{ac}$ között húzunk, $\mathfrak{ac}$-n tartozik átmenni. Evvel tehát megvan a kívánt $\triangle$; mert a harmadik szög $=2$ derékszög $-(x+y)=z$.



13. ábra.

3. feladat. *Legyen* (a 14. ábrában) $\alpha = x$, $\alpha\kappa\mu = y$, $\alpha\mu\kappa = z$ *és legyen adva bizonyos meghatározott b egyenes; meghatározandó a b-nél nagyobb olyan egyenes, melynek egyik végpontja az $\alpha\mathfrak{w}$ ($\mathfrak{w}'\infty$) szárban, másik végpontja pedig az $\alpha\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\infty$ szárban van és párhuzamos $\mu\kappa$-val.*

Megoldás. Tegyük fel, hogy $\kappa\mathfrak{w} = \kappa\alpha$ és $\mu\mathfrak{a} = \mu\alpha$: akkor (a 6. tant. szerint) a $\mathfrak{w}\mathfrak{a}$ egyenes egyenlő 2 $\mu\kappa$-val. Ha $\alpha\mathfrak{w}\mathfrak{w}'\infty$-ben $\mathfrak{w}'$-től kezdődve ismét az $\alpha\mathfrak{w}$-vel egyenlő egyenest veszünk fel, $\alpha\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\infty$-ben pedig a $\mathfrak{a}'$-ban kezdődő $\alpha\mathfrak{a}$ egyenest és ezt az eljárást folytatjuk: akkor $\kappa\mu$ geometriai haladvány szerint növekedik (s ennek hányadosa 2), tehát valamikor nagyobbá válik b-nél.



14. ábra.

Corollarium. Épen úgy, ha $\mu\kappa$ nagyobb a b-nél, $\mu\kappa$ olyan a a b-nél kisebb egyenesbe változtatható át, melynek egyik végpontja $\alpha\mu$-ben, a másik pedig $\alpha\kappa$-ban van; még pedig oly módon, hogy $\alpha\mu$-t és $\alpha\kappa$-t felezzük és az épen alkalmazott eljárást visszafelé folytatjuk, úgy hogy $\kappa\mu$ olyan geometriai haladvány szerint kisebbedjék, melynek hányadosa $\frac{1}{2}$ (6. tant.).

4. feladat. 14. ábra. *Legyen (az előbbi feladat szerint) $\kappa\mu < b$ és $\mathfrak{w}\mathfrak{a} > b$, továbbá $\mathfrak{w}\mathfrak{s} = b$ és $\kappa\mathfrak{r} = b$; meghatározandó olyan a b-vel egyenlő egyenes, a melynek egyik végpontja $\mathfrak{a}\mathfrak{w}$-ben, másik végpontja $\alpha\mathfrak{a}$-ban van, és $\mu\kappa$-val párhuzamos.*

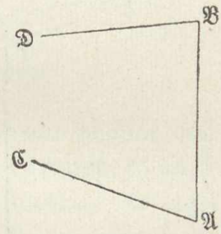
Megoldás. Húzzuk meg $\mathfrak{s}\mathfrak{r}$-t; ez $\mathfrak{t}'$-ben menjen át $\mu\mathfrak{a}$-n. Húzzuk meg $\mathfrak{t}\mathfrak{u}$-t oly módon, hogy az $\alpha\mathfrak{t}\mathfrak{u}$ szög egyenlő legyen $\alpha\mu\kappa$-val: akkor (a 4. tant. corr. sz.) $\mathfrak{t}\mathfrak{u}$, $\kappa\mu$ és $\mathfrak{w}\mathfrak{a}$ nem találkozhatnak soha, és így $\mathfrak{t}\mathfrak{u}$-nak $\kappa\mathfrak{w}$-n kell átmennie; történjék ez $\mathfrak{u}'$-ban. Továbbá $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ párhuzamos $\kappa\mathfrak{w}$-vel; mert, ha $\mathfrak{r}'$-ből és $\mathfrak{s}'$-ből merőlegeseket bocsátunk $\alpha\mathfrak{w}\infty$-re, azok vagy maguk a $\mu\kappa$ és $\mathfrak{s}\mathfrak{m}$ lesznek, és ekkor, minthogy $\mathfrak{r}\kappa = \mathfrak{s}\mathfrak{w}$, (az 1. feladat szerint) $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ és $\kappa\mathfrak{w}$ párhuzamosak, vagy pedig a $\mathfrak{r}'$-ből bocsátott merőleges $\mathfrak{r}\mathfrak{q}$ és a másik, a $\mathfrak{s}'$-ből bocsátott $\mathfrak{s}\mathfrak{h}$. Ekkor azonban $\triangle \mathfrak{r}\mathfrak{q}\kappa = \mathfrak{s}\mathfrak{h}\mathfrak{w}$; mert $\kappa = \mathfrak{w}$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{h}$, és így tehát $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}$, továbbá $\mathfrak{r}\kappa = \mathfrak{s}\mathfrak{w}$. E szerint $\mathfrak{r}\mathfrak{q} = \mathfrak{s}\mathfrak{h}$ és (az 1. feladat szerint) $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ párhuzamos $\kappa\mathfrak{w}$-vel. Továbbá $\mathfrak{t}\mathfrak{u}$ is párhuzamos $\mathfrak{s}\mathfrak{w}$-vel; mert $\mathfrak{t}'$-n át lehet párhuzamosat húzni

$\mathfrak{sw}$-vel, és ennek olyannak kell lennie, hogy a $\mathfrak{w}\alpha\alpha$ szög $= \mathfrak{ut}\alpha$ (mint belső szög az átellenben fekvő külsővel); $\mathfrak{tu}$ pedig ilyen, és az $\alpha\alpha$ egyenesnek ezen az oldalán más olyan egyenes nincsen, mely $\mathfrak{t}'$-ben $\alpha\mathfrak{t}$-vel olyan szöget alkotna, mely $\alpha\mathfrak{tu}$-val egyenlő. E szerint ez az egyenes az egyetlen, a mely (az 1. feladat 1. megjegyzésének értelmében) párhuzamos $\mathfrak{sw}$-vel és átmegy $\mathfrak{t}'$-n.

Így tehát (a 3. tant. 2. corr. szerint) $\mathfrak{tu} = \mathfrak{sw} = b$, a mint azt követeltük.

Corollarium. E szerint a 2., 3., 4. feladatokból kitűnik, hogy lehet olyan háromszöget szerkeszteni, a melynek egyik oldala az adott b és a mellette fekvő szögek közül az egyik az adott y, a másik pedig az adott z.

7. tantétel. (15. ábra.) *Legyen $\mathfrak{AB}$ valamely tetszés szerinti egyenes, a $\mathfrak{BD}$ és $\mathfrak{AC}$ egyenesek legyenek az $\mathfrak{AB}$ egyenesnek ugyanazon az oldalán ugyanabban a síkban, és legyen a $\mathfrak{CAB} + \mathfrak{ABD}$ szög < 2 derékszögnél: akkor $\mathfrak{ACC}'\infty$ és $\mathfrak{BDD}'\infty$ metszik egymást.*


15. ábra.

Legyen ugyanis (a 4. feladat és corr. szerint) az $\mathfrak{A}$ szög $= y$, a $\mathfrak{B}$ szög $= z$ és $\mathfrak{AB} = b$, és $\mathfrak{A}'$ essék $\mathfrak{u}'$-ra, $\mathfrak{B}'$ pedig $\mathfrak{t}'$-re: akkor majd $\mathfrak{BD}\infty$ és $\mathfrak{t}\mu\infty$ egybeesnek és épen úgy $\mathfrak{AC}\infty$ és $\mathfrak{u}\varkappa\infty$ is, úgy hogy az a pont, a mely közös a $\mathfrak{tu}\infty$ és $\mathfrak{u}\varkappa\infty$ egyenesekben, közös pontja egyszersmind a $\mathfrak{BD}\infty$ és $\mathfrak{AC}\infty$ egyeneseknek.

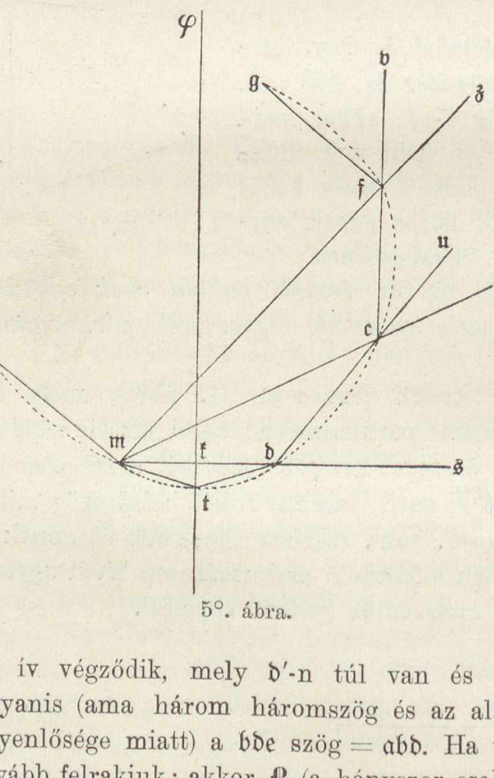
8. tantétel. *Valamely tetszés szerinti ponton csak egyetlen olyan egyenes megy át, mely valamely egyenessel párhuzamos.* (44. értelmezés.)

Húzzunk ugyanis egy másik [egyenest] (1. ábra), mely az egyik oldalon, az ott szerkesztett párhuzamoson belül fekszik: akkor erre nézve a belső szögek összege kevesebb lesz két derékszögnél; mert ugyanott (az 1. feladat 2. corr. szerint) a két belső szög mind a kettő derékszög, és így (a 7. tant. szerint) $\mathfrak{An}\infty$-nek és annak a vonalnak, melyet az 1. ábrában előforduló párhuzamoson kívül ugyanazon a ponton át húznánk, metszeniök kellene egymást.

A párhuzamosak elméletének toldaléka.

[A Gausshoz intézett, 1808 deczember hó 27-ikén kelt levél melléklete.]

XI. Az 5°. ábra képviseljen ilyen mdcfg . . . vonalat és nevezzük ezt Π-nek; md-re állítsuk a $\varphi\varkappa\infty$ merőlegest, továbbá nevezzük md (d′∞)-t Q-nak és mozgassuk Q-t m′ körül az mdcfg . . . vonal mentén mindig tovább, egészen a végtelenig. Midőn Q az mc (c′∞)-be ér, az a kérdés merül fel, hogy hová esik a következő köz. Hogy ezt tisztába hozhassuk, előbb még a következő szakaszszal foglalkozunk.

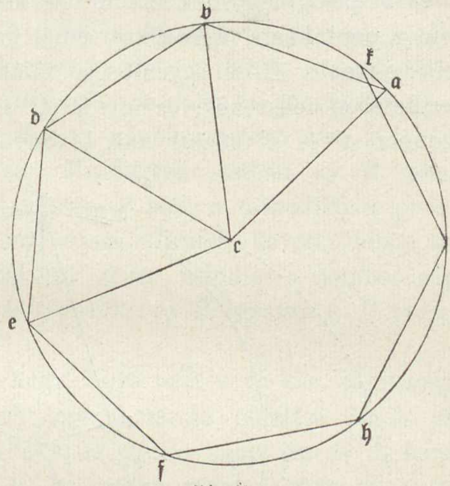


5°. ábra.

XII. 𝔏 szükségképen mdcfg . . .-n kívül esik (azaz oda, a hol a közök domború szöget alkotnak); mert:

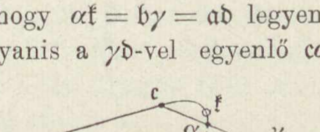
1. 5′. ábra. Ha 𝔏-nek olyan része van, a melynek közepe és két végpontja valamely kör kerületébe esik: akkor az egész 𝔏 [mintegy] gyűrűben csavarodik körül. Ama pontok ugyanis legyenek a′, b′, d′. Vegyük fel a bde szöget egyenlőnek abd-vel: akkor majd e′ az 𝔏-ben és ugyanabban a körkerületben lesz; mert e′ oda esik, a hol az az ív végződik, mely d′-n túl van és a db ívvel egyenlő. Ekkor ugyanis (ama három háromszög és az alapjaik mellett fekvő szögek egyenlősége miatt) a bde szög = abd. Ha tehát a db ívet e′-n túl így tovább felrakjuk: akkor 𝔏 (a hányszor csak tetszik) körülvonul. Ekkor ab vagy bizonyos hányadrésze a kerületnek, és így 𝔏 visszatér a′-ba, vagy pedig nem; ebben az esetben pedig származik az ik köz. Ekkor

az a merőleges, melyet bármely köz felező pontjában állítunk, midőn kilép, majd valamelyik más közt metsz, és így az $\mathfrak{L}$ vonalat legalább két pontban metszi. (Metszené az $\mathfrak{L}$ vonalnak azt a részét, a mely ahhoz a közhöz tartozik, a melyre a merőlegest állítottuk, és másodszor, mely ahhoz a közhöz tartozik, a melyen átment.) Ezen a módon $\mathfrak{L}$ önmagába tért vissza. (VI.)



5'. ábra.

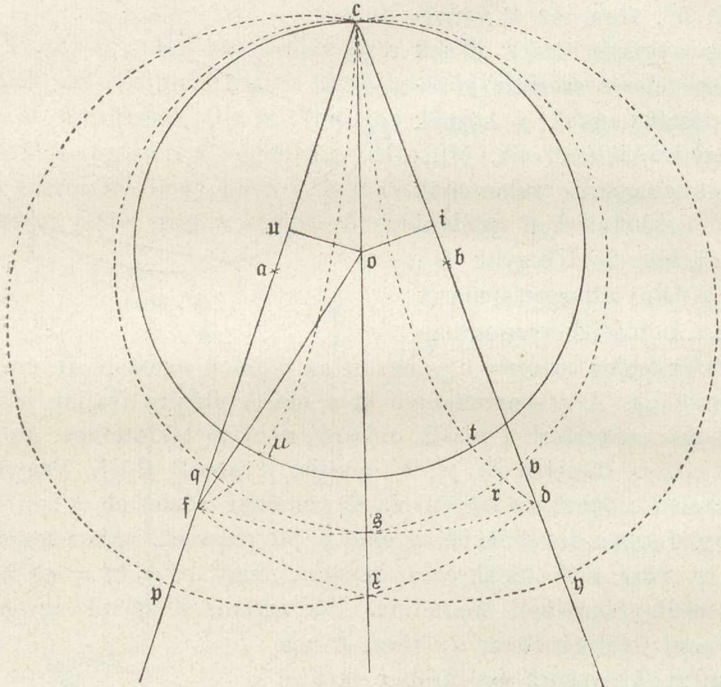
2. 5''. ábra. Az $\mathfrak{L}$ vonalnak az a része, mely Π-nek valamely tetszés szerinti középéhez tartozik, ennek a köznek csak egyik oldalára esik. Mindenekelőtt ugyanis valamelyik oldalon kezdődnie kell (például kívül, mint $\mathfrak{c}\alpha$). Tegyük fel, hogy [α'-ban] átmegy a másik oldalra. A másik végpontban (l. a 2. axiómát) szintén ugyanazon az oldalon egészen azonos módon kezdődik. A γ'-ban menjen át a másik oldalra (vajjon α' és γ' között már visszatért a másik oldalra, nem jő tekintetbe). Az egyenesnek [t. i. $\mathfrak{cd}$-nek] α', γ', $\mathfrak{d}'$ pontjai közösek $\mathfrak{L}$-lel. Vegyük fel $\mathfrak{b}'$-t az alsó oldalon, és legyen (az $\mathfrak{L}$ vonalnak része) $\mathfrak{ad} = \mathfrak{b}\gamma$: akkor $\mathfrak{ab} = \mathfrak{d}\gamma$. Legyen továbbá $\mathfrak{bf}$ egyenlő a $\gamma\alpha$ részszel: akkor majd $\mathfrak{f}'$ a $\mathfrak{c}'$ és α' közé esik. Szükséges ugyanis, hogy $\alpha\mathfrak{f} = \mathfrak{b}\gamma = \mathfrak{ad}$ legyen, $\mathfrak{fc}$-nek pedig fenn kell maradnia. Ha ugyanis a $\gamma\mathfrak{d}$-vel egyenlő $\mathfrak{c}\alpha$ részt A-val jelöljük és az $\alpha\gamma$ részt B-nek nevezzük: akkor a $\mathfrak{cd}$ egyeneshez tartozó rész $2A+B$ lesz, és ha ebből elveszszük $\mathfrak{ad}$-t (mely kisebb A-nál), több marad fenn, mint $A+B$; sőt az $A+B$-n felül még fenn kell maradnia $\mathfrak{fc}$-nek. Ekkor azonban az $\mathfrak{abf}$ rész $= \mathfrak{d}\gamma\alpha$ és $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{f}'$ ugyanabba az egyenesbe esnek. De ekkor az $\mathfrak{ab}$ egyenes, a mikor az egyik oldalról a másikra megy át, metszi $\mathfrak{acd}$ egyenest és épen úgy, midőn $\mathfrak{b}'$-ből $\mathfrak{f}'$-ba halad; két egyenesnek tehát két közös pontja van és (a fenntebb bebizonyítottaknak ellenére) még sem esik egybe. E szerint $\mathfrak{L}$-nek valamely egyenessel nem lehet három közös pontja.



5''. ábra.

A bebizonyítás ugyanaz marad, ha azt az egyenest veszszük köznek, mely az $\mathfrak{L}$ vonal (három említett) pontja közül a külsőket köti össze.

3. 5‴. ábra. Az $\mathfrak{L}$ vonalnak az a része, mely valamely közhöz tartozik, ennek aköznek külső oldalán fekszik. Legyenek ugyanis $\mathfrak{cf}$ és $\mathfrak{cd}$ a Π vonalnak közei, legyen $\mathfrak{co}$ az $\mathfrak{fcd}$ szöget felező egyenes, $\mathfrak{a}'$ és $\mathfrak{b}'$ pedig legyenek az említett közök felező pontjai. Ha az ezekben [a pontokban] (a közökre) emelt merőlegesek a $\mathfrak{co}\infty$ egyenest metszik: akkor a $\triangle$-ek egyenlősége miatt $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ ugyanannak a körnek kerületében fekszenek, és így $\mathfrak{L}$ (1. szerint) önmagába tér vissza. Ha azonban $\mathfrak{a}'$ és $\mathfrak{c}'$ között van bizonyos az $\mathfrak{fc}$-re merőleges egyenes, a



5‴. ábra.

mely, ha az $\mathfrak{fc}$-re merőleges egyenest $\mathfrak{c}'$-től kezdve $\mathfrak{co}$ ($\mathfrak{o}'\infty$) mentén mozgatjuk ($\mathfrak{cf}$-et meghagyva $\mathfrak{cf}$ ($\mathfrak{f}'\infty$)-ben), azt a határt alkotja, a mely előtt a mozgatott egyenes a $\mathfrak{co}\infty$ egyenest mindig metszi, és a melynél azt először nem metszi: akkor bocsássunk $\mathfrak{o}'$-ból merőlegest $\mathfrak{fc}$-re, mely ezt $\mathfrak{u}'$-ban messe, és a $\mathfrak{o}'$ középpontból írjunk le kört a $\mathfrak{co}$ radiussal. Ez majd (minthogy az $\mathfrak{oc}$ átfogó $>$ az $\mathfrak{uo}$ befogónál) $\mathfrak{cf}$-en kívül kezdődik és $\mathfrak{u}'$ és $\mathfrak{f}'$ között megy át $\mathfrak{uf}$-en; mert $\mathfrak{uf} > \mathfrak{uc}$, és így (az előbbiek szerint) $\mathfrak{fo} > \mathfrak{co}$.

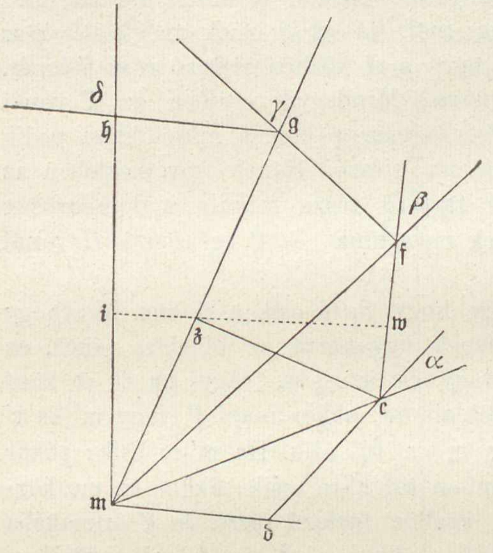
Így már mostan az $\mathfrak{L}$ vonalnak olyan része, mely valamely közhöz tartozik, (2. szerint) ennek vagy a belső oldalára, vagy pedig a külső oldalára esik. Ha a belső oldalára esik: akkor vagy belép a körbe (mint $\mathfrak{crd}$), vagy pedig nem. Ha az első eset áll be, hogy $\mathfrak{d}'$-be juthasson (mely a körön kívül fekszik), ki is kell lépnie, és ekkor $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{t}'$, μ' a kerületbe esnek, és így (1. szerint) $\mathfrak{L}$ visszatér. Ha nem lép be a körbe, a $\mathfrak{cd}$ közhöz tartozó rész vagy $\mathfrak{cqsd}$, vagy $\mathfrak{cpxd}$, a $\mathfrak{cf}$ közhöz tartozó rész pedig $\mathfrak{cpxd}$-nek megfelelőleg $\mathfrak{cyxf}$ és $\mathfrak{cqsd}$-nek megfelelőleg $\mathfrak{cvsf}$. (A $\mathfrak{cd}$ köznek megfelelő rész ugyanis nem mehet át $\mathfrak{f}'$-en; mert a $\mathfrak{cf}$ közhöz tartozó rész $\mathfrak{f}'$-ig ér, és így $\mathfrak{L}$ önmagába térne vissza.) Mindegyik esetben az $\mathfrak{L}$ vonal részei metszik egymást; az első esetben $\mathfrak{x}'$-ben, a másodikban pedig $\mathfrak{s}'$-ben, és akkor $\mathfrak{L}$ önmagába tér vissza. Ennek kővetkeztében az $\mathfrak{L}$ vonalnak valamely közhöz tartozó része mindig a domborúság oldalára esik (melyet külsőnek neveztünk), és $\mathfrak{L}$ egészen a Π vonal külső oldalára esik.

XIII. Most azt kérdezzük, hogy hová esik a $\mathfrak{cf}$ köz. Minthogy a $\mathfrak{cf}$ és $\mathfrak{dm}$ közök a $\mathfrak{cd}$ egyenesnek ugyanarra az oldalára esnek, az $\mathfrak{fc}$ köznek vagy $\mathfrak{mc}$-n felül, vagy $\mathfrak{cm}(\mathfrak{m}'\infty)$-be, vagy $\mathfrak{cm}$ és $\mathfrak{cd}$ közé kell esnie. Ha a második eset áll be: akkor majd $\mathfrak{f}'$ vagy $\mathfrak{m}'$ és $\mathfrak{c}'$ közé, vagy $\mathfrak{m}'$-re, vagy pedig $\mathfrak{m}'$-en túl esik. Ha $\mathfrak{m}'$-re esik: akkor $\mathfrak{L}$ önmagába tér vissza. Ha $\mathfrak{m}'$-en túl $\mathfrak{o}'$-ra esik: akkor az $\mathfrak{mr}$ közhöz tartozó rész metszi a $\mathfrak{cf}$ közhöz tartozó részt, és $\mathfrak{L}$ önmagába tér vissza. Ha $\mathfrak{m}'$-en belül esik: akkor a $\mathfrak{cf}$ köz felező pontjában emelt és mindkét felé a végtelenbe meghosszabbított merőleges az $\mathfrak{L}$ vonalat legalább két pontban metszi (a mennyiben először az $\mathfrak{L}$ vonalnak az $\mathfrak{fc}$ közhöz tartozó részén és másodszor az $\mathfrak{L}$ vonalnak $\mathfrak{mdc}$ részén megy át), és így (VI. és I. szerint) $\mathfrak{L}$ visszatér. Minthogy ezeket minden egyes következő köz helyzetére alkalmazhatjuk, azért minden következő köz is $\mathfrak{md}(\mathfrak{d}'\infty)$-en (vagyis Q-n) felül esik; t. i. $\mathfrak{fc}$ az $\mathfrak{mc}$-n felül, $\mathfrak{fg}$ az $\mathfrak{mf}$-en felül stb.

XIV. Ha most meghatározzuk minden egyes rész közepét (mint a milyen az $\mathfrak{md}$ részé $\mathfrak{t}'$-ben) és oda a közök végpontjaiból egyeneseket húzunk (mint a milyenek $\mathfrak{mt}$ és $\mathfrak{td}$), továbbá az $\mathfrak{mt}$ rész közepét is meghatározzuk és oda $\mathfrak{m}'$-ből és $\mathfrak{t}'$-ből húzunk egyeneseket, és ezt így vég nélkül tovább folytatjuk, úgy hogy az $\mathfrak{L}$ vonalnak minden közhöz tartozó része olyan geometriai haladvány szerint fogyjon, a melynek hányadosa $\frac{1}{2}$: akkor (XII. szerint) az $\mathfrak{mt}$ rész az $\mathfrak{mt}$ egyenesen kívül, és így $\mathfrak{L}$ valamennyi ilyen közön (azaz Π-n) kívül esik.

XV. A $\mathfrak{cf}$ rész a $\mathfrak{cy}$ és a $\mathfrak{cf}$ egyenes közé esik. Ha ugyanis a $\mathfrak{cy}$-on alúl esnék: akkor $\mathfrak{c}'$-ből $\mathfrak{f}'$-be átmenve, $\mathfrak{L}$-nek és az egyenesnek $\mathfrak{c}'$-n és $\mathfrak{m}'$-en kívül még valamijök közös volna, és így $\mathfrak{L}$ önmagába visszatérne. Hasonlóképen kitűnik, hogy a $\mathfrak{cf}$ rész a $\mathfrak{cu}$ és a $\mathfrak{cf}$ egyenesek közé esik.

XVI. 5''''. ábra. Az a szög, melyet $\mathfrak{md}$ azzal az egyenessel alkot, melyet $\mathfrak{m}'$-ből a Π bármely közének végpontjához húzunk, egyenlő azzal a szöggel, a melyet az a köz ugyanazzal az egyenessel alkot. Pl. $\mathfrak{gmd} = \mathfrak{mgf}$ és $\mathfrak{hmd} = \mathfrak{mhg}$. Ugyanis $\mathfrak{m}'$-től kezdve egészen ama végpontig a Π vonal közeinek száma vagy páros, vagy pedig páratlan. Ha páros (mint pl. $\mathfrak{m}'$-től egészen $\mathfrak{g}'$-ig), legyen $\mathfrak{z}'$ a $\mathfrak{gm}$ egyenesnek felező pontja. Húzzuk a $\mathfrak{cz}$ egyenest, és azután fektessük a $\mathfrak{gfcz}$-et az $\mathfrak{mdcz}$-re. A $\mathfrak{c}'$ maradjon meg $\mathfrak{c}'$-ben: akkor $\mathfrak{f}'$ reá eshetik $\mathfrak{d}'$-re, $\mathfrak{g}'$ pedig $\mathfrak{m}'$-re, és ekkor majd $\mathfrak{z}'$ reá esik $\mathfrak{z}'$-re; mert a $\mathfrak{cz}$ köz közös és $\mathfrak{mz} = \mathfrak{gz}$, $\mathfrak{cz}$ és $\mathfrak{mz}$ pedig (az előbbiek szerint) azon az oldalon csak egy pontban metszhetik egymást.



5''''. ábra.

Ha az a szám páratlan (mint $\mathfrak{hgfcdm}$-ben), legyen $\mathfrak{w}'$ a $\mathfrak{cf}$ köz felező pontja, $\mathfrak{i}'$ a $\mathfrak{hm}$ közé. Fektessük $\mathfrak{wfghi}$-t $\mathfrak{wcdmi}$-re; maradjon meg $\mathfrak{w}'$ $\mathfrak{w}'$-ben: akkor $\mathfrak{f}'$ reá eshetik $\mathfrak{c}'$-re, $\mathfrak{g}'$ $\mathfrak{d}'$-re és $\mathfrak{h}'$ $\mathfrak{m}'$-re. Ekkor az $\mathfrak{mi} = \mathfrak{hi}$ és az önmagával $= \mathfrak{wi}$ ezen az oldalon csak egy pontban metszhetik egymást.

XVII. Minthogy e szerint a $\mathfrak{m}'$ mellett levő szög a Q egyenes mozgásával növekedik, és a csúcsszögek egyenlők, az a szög, a mely $\mathfrak{d}'$-nél $=0$ és $\mathfrak{c}'$-nél $= \alpha$, nagyobbodik egészen β-ig és tovább nagyobbodik, míg γ-vá válik és tovább növekedik, mire az ennél nagyobb δ-t éri el és így tovább vég nélkül (a mivel azonban nem állítjuk, hogy a ∞-ig növekedik).

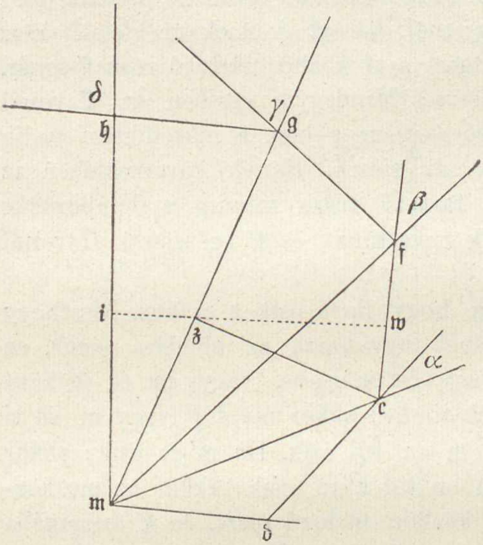
XVIII. 5°. ábra. Az a szög, a melyet minden egyes köznek meghosszabbítása a tovább terjedő $\mathfrak{L}$ vonallal alkot, (a mondottak szerint) mindenütt egyenlő. Az a szög, a melyet $\mathfrak{cu}$ az $\mathfrak{L}$ vonalnak (a $\mathfrak{cf}$ és $\mathfrak{cu}$ közé eső) $\mathfrak{cf}$ részével alkot, egyenlő azzal a szöggel, a melyet $\mathfrak{fv}$ alkot az $\mathfrak{L}$ vonalnak (az $\mathfrak{fv}$ és $\mathfrak{fg}$ közé eső) $\mathfrak{fg}$ részével, és világos, hogy ez így tovább vég nélkül folytatható. Ha azonban hozzáadjuk az $\mathfrak{ucy}$ szöget, t. i. azt, a melyet R a köz meghosszabbításával alkot (hol R a Q-nak, azaz $\mathfrak{md}$($\mathfrak{d}'\infty$)-nek az $\mathfrak{L}$-en túl eső részét jelenti): akkor, minthogy (XVII. szerint) ez [a szög] növekedik, az összeg is növekedik. Hogy ezt pontosabban felfoghassuk, írjuk le bizonyos radiussal (pl. $\mathfrak{cf}$-fel), a mely mindig ugyanaz maradjon, bizonyos középpont (ebben az esetben $\mathfrak{c}'$) körül az $\mathfrak{fh}$ ívet: akkor ez szolgálhat annak a szögnek mértékéül.

XIX. Vizsgáljuk meg azonban, vajjon az a szög, a melyet R az $\mathfrak{L}$-lel alkot, mindig tovább, vég nélkül folytonosan növekedik-e. Ha H-t a XIV. értelmében úgy változtatjuk, hogy közei minden megadható mennyiségnél kisebbekké váljanak, és [így] végpontjaik bármely megadható mennyiségnél közelebb jussanak egymáshoz: akkor is a szóban levő szög minden egyes köz kezdeténél növekedik. Nincsen azonban olyan idő, a mely alatt nem növekednék. Ennek az időnek kezdetével ugyanis messe Q az $\mathfrak{L}$ vonalat valamely ε' pontban (5$^{\text{v}}$. ábra) és végén η'-ban: akkor az $\mathfrak{L}$ vonalnak $\varepsilon\eta$ része több mint háromszorta nagyobb, mint az ($\mathfrak{mtd}$ rész). $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\mathfrak{mtd}}{2^n}$ (hol n valamely tetszés szerinti nagy számot jelent), a mi egy minden megadhatónál kisebb mennyiséggel egyenlő. Ha tehát a köznek végpontja nem is ε'-ba, hanem $\mathfrak{a}'$-ba esik: akkor, minthogy $\varepsilon\mathfrak{a}$ kisebb az $\mathfrak{L}$ vonal olyan részénél, mely csakis egyetlen közhöz tartozik, még mindig marad fenn valami, ha $\mathfrak{a}'$-tól kezdve két oldalt veszünk fel η' felé. E szerint az említett szög ez alatt az idő alatt is növekedik; mert minden köz végénél növekedik.

5$^{\text{v}}$. ábra.

XX. Minthogy ez a szög (melyet x-nek akarunk nevezni) egyidejűleg azzal a szöggel, melyet Q az első közzel alkot, vég nélkül folytonosan növekedik, az vagy annyira növekedik, hogy Q a $\varphi\mathfrak{t}\infty$-en túlmegy, és akkor, ha az eddig mondottakat a $\mathfrak{d}'$-ből kiinduló másik részre alkalmazzuk, az $\mathfrak{L}$ vonalnak mind az $\mathfrak{mtdcfg}\ldots$ része, mind a $\mathfrak{dmr}\ldots$ része majd túlmegy $\varphi\mathfrak{t}\infty$-en, és így $\varphi\mathfrak{t}\infty$-ben vagy két rész találkozik, vagy pedig $\varphi\mathfrak{t}\infty$-nek $\mathfrak{t}'$-n kívül még két közös pontja lesz $\mathfrak{L}$-lel, és így az $\mathfrak{L}$ visszatért; vagy pedig x-nek van olyan λ határa, a melyhez közelebb jut minden megadható mennyiségnél, a melyet azonban nem ér el soha az alatt, míg Q az $\mathfrak{L}$ mentén $\mathfrak{m}'$ körül mozog. Legyen akkor $\mathfrak{d}'$-ben $x=A$ és a mindig újabb és újabb növekményei legyenek α, β, γ, δ, ... A növekmények a folytonosság törvénye szerint keletkeznek ugyan, úgy hogy bármely kettő között még számtalan más van, mindamellett így állíthatók elő. Ezen a módon az $A+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots$ végtelen sor származik, a melynek összege határértékül a λ-t bírja, azaz, a melynek akárhány tagját is visszatérne. Hasonlóképen kitűnik, hogy a $\mathfrak{cf}$ rész a $\mathfrak{cu}$ és a $\mathfrak{cf}$ egyenesek közé esik.

XVI. 5''''. ábra. Az a szög, melyet $\mathfrak{md}$ azzal az egyenessel alkot, melyet $\mathfrak{m}'$-ből a Π bármely közének végpontjához húzunk, egyenlő azzal a szöggel, a melyet az a köz ugyanazzal az egyenessel alkot. Pl. $\mathfrak{gmd} = \mathfrak{mgf}$ és $\mathfrak{hmd} = \mathfrak{mhg}$. Ugyanis $\mathfrak{m}'$-től kezdve egészen ama végpontig a Π vonal közeinek száma vagy páros, vagy pedig páratlan. Ha páros (mint pl. $\mathfrak{m}'$-től egészen $\mathfrak{g}'$-ig), legyen $\mathfrak{z}'$ a $\mathfrak{gm}$ egyenesnek felező pontja. Húzzuk a $\mathfrak{cz}$ egyenest, és azután fektessük a $\mathfrak{gfcz}$-et az $\mathfrak{mdcz}$-re. A $\mathfrak{c}'$ maradjon meg $\mathfrak{c}'$-ben: akkor $\mathfrak{f}'$ reá eshetik $\mathfrak{d}'$-re, $\mathfrak{g}'$ pedig $\mathfrak{m}'$-re, és ekkor majd $\mathfrak{z}'$ reá esik $\mathfrak{z}'$-re; mert a $\mathfrak{cz}$ köz közös és $\mathfrak{mz} = \mathfrak{gz}$, $\mathfrak{cz}$ és $\mathfrak{mz}$ pedig (az előbbiek szerint) azon az oldalon csak egy pontban metszhetik egymást.



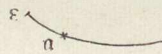
5''''. ábra.

Ha az a szám páratlan (mint $\mathfrak{hgfcdm}$-ben), legyen $\mathfrak{w}'$ a $\mathfrak{cf}$ köz felező pontja, $\mathfrak{i}'$ a $\mathfrak{hm}$ közé. Fektessük $\mathfrak{wfghi}$-t $\mathfrak{wcdmi}$-re; maradjon meg $\mathfrak{w}'$ $\mathfrak{w}'$-ben: akkor $\mathfrak{f}'$ reá eshetik $\mathfrak{c}'$-re, $\mathfrak{g}'$ $\mathfrak{d}'$-re és $\mathfrak{h}'$ $\mathfrak{m}'$-re. Ekkor az $\mathfrak{mi} = \mathfrak{hi}$ és az önmagával $= \mathfrak{wi}$ ezen az oldalon csak egy pontban metszhetik egymást.

XVII. Minthogy e szerint a $\mathfrak{m}'$ mellett levő szög a Q egyenes mozgásával növekedik, és a csúcsszögek egyenlők, az a szög, a mely $\mathfrak{d}'$-nél $=0$ és $\mathfrak{c}'$-nél $= \alpha$, nagyobbodik egészen β-ig és tovább nagyobbodik, míg γ-vá válik és tovább növekedik, mire az ennél nagyobb δ-t éri el és így tovább vég nélkül (a mivel azonban nem állítjuk, hogy a ∞-ig növekedik).

XVIII. 5°. ábra. Az a szög, a melyet minden egyes köznek meghosszabbítása a tovább terjedő $\mathfrak{L}$ vonallal alkot, (a mondottak szerint) mindenütt egyenlő. Az a szög, a melyet $\mathfrak{cu}$ az $\mathfrak{L}$ vonalnak (a $\mathfrak{cf}$ és $\mathfrak{cu}$ közé eső) $\mathfrak{cf}$ részével alkot, egyenlő azzal a szöggel, a melyet $\mathfrak{fv}$ alkot az $\mathfrak{L}$ vonalnak (az $\mathfrak{fv}$ és $\mathfrak{fg}$ közé eső) $\mathfrak{fg}$ részével, és világos, hogy ez így tovább vég nélkül folytatható. Ha azonban hozzáadjuk az $\mathfrak{ucy}$ szöget, t. i. azt, a melyet R a köz meghosszabbításával alkot (hol R a Q-nak, azaz $\mathfrak{mb}\,(\mathfrak{b}'\infty)$-nek az $\mathfrak{L}$-en túl eső részét jelenti): akkor, minthogy (XVII. szerint) ez [a szög] növekedik, az összeg is növekedik. Hogy ezt pontosabban felfoghassuk, írjuk le bizonyos radiussal (pl. $\mathfrak{cf}$-fel), a mely mindig ugyanaz maradjon, bizonyos középpont (ebben az esetben $\mathfrak{c}'$) körül az $\mathfrak{fh}$ ívet: akkor ez szolgálhat annak a szögnek mértékéül.

XIX. Vizsgáljuk meg azonban, vajjon az a szög, a melyet R az $\mathfrak{L}$-lel alkot, mindig tovább, vég nélkül folytonosan növekedik-e. Ha H-t a XIV. értelmében úgy változtatjuk, hogy közei minden megadható mennyiségnél kisebbekké váljanak, és [így] végpontjaik bármely megadható mennyiségnél közelebb jussanak egymáshoz: akkor is a szóban levő szög minden egyes köz kezdeténél növekedik. Nincsen azonban olyan idő, a mely alatt nem növekednék. Ennek az időnek kezdetével ugyanis messe Q az $\mathfrak{L}$ vonalat valamely ε' pontban (5^{v}. ábra) és végén η'-ban: akkor az $\mathfrak{L}$ vonalnak $\varepsilon\eta$ része több mint háromszorta nagyobb, mint az ($\mathfrak{mtb}$ rész). $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\mathfrak{mtb}}{2^n}$ (hol n valamely tetszés szerinti nagy számot jelent), a mi egy minden megadhatónál kisebb mennyiséggel egyenlő. Ha tehát a köznek végpontja nem is ε'-ba, hanem $\mathfrak{a}'$-ba esik: akkor, minthogy $\varepsilon\mathfrak{a}$ kisebb az $\mathfrak{L}$ vonal olyan részénél, mely csakis egyetlen közhöz tartozik, még mindig marad fenn valami, ha $\mathfrak{a}'$-tól kezdve két oldalt veszünk fel η' felé. E szerint az említett szög ez alatt az idő alatt is növekedik; mert minden köz végénél növekedik.



5^{v}. ábra.

XX. Minthogy ez a szög (melyet x-nek akarunk nevezni) egyidejűleg azzal a szöggel, melyet Q az első közzel alkot, vég nélkül folytonosan növekedik, az vagy annyira növekedik, hogy Q a $\varphi\mathfrak{k}\infty$-en túlmegy, és akkor, ha az eddig mondottakat a $\mathfrak{b}'$-ből kiinduló másik részre alkalmazzuk, az $\mathfrak{L}$ vonalnak mind az $\mathfrak{mtbcfg}\ldots$ része, mind a $\mathfrak{bmr}\ldots$ része majd túlmegy $\varphi\mathfrak{k}\infty$-en, és így $\varphi\mathfrak{k}\infty$-ben vagy két rész találkozik, vagy pedig $\varphi\mathfrak{k}\infty$-nek $\mathfrak{t}'$-n kívül még két közös pontja lesz $\mathfrak{L}$-lel, és így az $\mathfrak{L}$ visszatért; vagy pedig x-nek van olyan λ határa, a melyhez közelebb jut minden megadható mennyiségnél, a melyet azonban nem ér el soha az alatt, míg Q az $\mathfrak{L}$ mentén $\mathfrak{m}'$ körül mozog. Legyen akkor $\mathfrak{b}'$-ben $x = A$ és a mindig újabb és újabb növekményei legyenek α, β, γ, δ, ... A növekmények a folytonosság törvénye szerint keletkeznek ugyan, úgy hogy bármely kettő között még számtalan más van, mindamellett így állíthatók elő. Ezen a módon az $A+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots$ végtelen sor származik, a melynek összege határértékül a λ-t bírja, azaz, a melynek akárhány tagját is adjuk össze (elhagyva azt a részt, a mely a végtelenig terjed), az összeg mindig kisebb lesz λ-nál, és bármilyen q mennyiséget is adunk meg, bizonyos tagig valamennyi tag összege annyira terjeszthető ki, hogy az q-nál kevesebbet különbözzék λ-tól. Ha azonban a végtelen sor valamennyi tagját összegezhetnők, úgy hogy egy sem maradna fenn: akkor maga a határérték állana elő (ebben az esetben λ). Itt azonban Q, miután az $\mathfrak{L}_\infty$ vonal $\mathfrak{mtdcfg}$... részének minden pontján ment át, valamennyi növekményre tett szert. Ha tehát a sornak már valamennyi tagját összegeztük — és ez épen abban a rész nélküli időpontban áll majd be, midőn Q először nincsen $\mathfrak{L}$-ben, a mely időpont és az $\mathfrak{L}$ vonalnak elhagyása között semmi változás nem mehetett végbe, mert a változáshoz két időrész szükséges, az időpont pedig, a melyben Q először lépett ki $\mathfrak{L}$-ből rész nélküli — akkor az x szög csak akkor válhatott egyenlővé λ-val, miután Q az $\mathfrak{L}$-ből kilépett. Ez azonban képtelenség, mert akkor x a 0-sal vált egyenlővé. Így tehát képtelenség feltételezni azt, hogy x nem növekedett mindaddig, míg Q a $\varphi\mathfrak{k}\infty$-en megy át. Így tehát $\mathfrak{L}$, hacsak nem egyenes, (az I. ellenére) visszatér. Tehát $\mathfrak{L}$ egyenes.

BOLYAI FARKAS

RÉSZLETEK A TENTAMENBŐL (1832)

TENTAMEN

JUVENTUTEM STUDIOSAM

IN ELEMENTA MATHESEOS PURAE, ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS, METHODO INTUITIVA, EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA, INTRODUCENDI.

CUM APPENDICE TRIPLICI,

Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario.

Tomus Primus.

Maros Vásárhelyini. 1832.
Typis Collegii Reformatorum per JOSEPHUM, et SIMEONEM KALI de felső Vist.

Imprimatur.

M. Vásárhelyini Die

12 Octobris 1829.

Paulus Horváth m.p.

Abbas, Parochus et Censor

Librorum.

I.

Bevezetés.

Két eltörülhetetlen jellemvonása van az Isten képének: az *igazság* és a *szeretet*. Ezek a fény és a meleg, a halandó porban tündöklő örökkévaló nap sugarának szálai, melynek világossága a végtelennek fellegein áthatolva, mind a külső, mind a belső világban magának az Ősképnek feltétlen szépségét hirdeti. Viszonylagosan szépnek mondjuk azt, a mi az Ő gondalatát ébreszti bennünk, szétrebbentve a tiszteletreméltó fellegeket, hogy a tavaszi fény az egeket kereső szárnyakat megindítsa, a mikor a boldog hazába vezető út a végtelenben megnyílik.

Ez szükségképen arra serkent bennünket:

1. hogy hasonlóan a csodálatraméltó mindenségbe behatoló, legfelsőbb szemhez vég nélkül arra törekedjünk, hogy a mennyire csak lehet, az egészet minél behatóbban áttekintsük;

2. hogy hasonlóan az egész világot átölelő legfelsőbb Atyához, kitárva karjainkat minden érző vagy értelmes lény felé, időben és térben bárhol is legyenek azok, buzgón törekedjünk arra, hogy minden a kölcsönös szeretetben egyesüljön, és hogy a visszavonást mind az összességnek, mind az egyeseknek (erőre és terjedelemre nézve) lehető legnagyobb boldogságának összhangjába változtassuk át.

I. Az igazság.

Az igazságok feloszthatók *örökkévalókra*, azaz olyanokra, melyek a minden időben meglevő dolgokról zengenek, és *bizonyos időre tartozókra*, a melyek t. i. azokról a dolgokról szólanak, melyek csak bizonyos időben (tehát a jelenben, a multban vagy a jövőben) vannak meg. A multat előadni a *Történelem* feladata. Ez magyarázza meg a külső és belső világ fejlődésének minden nemét, hogy megértsük: a jelen miért olyan, a milyen. Magasabb értelem dolga volna megoldani azt a feladatot, hogy (miután a jelen a multnak leánya és a jövőnek anyja, és amaz mint eredményére, ez pedig mint okára vezet a jelenhez) az adott jelenből a jövőt és részben a multat határozza meg.

1. Képzetet alkotok, gondolkodom, következtetek: Mik e tevékenységnek formái? vajjon megfelel-e neki valami olyan, a mi a képzeten kívül van? függ-e ettől? továbbá melyek azok a végső helyek, a melyekben a képzetek, egyik a másik után, és az elképzeltek, egyik a másikon kívül (t. i. a külső világ) elhelyezhetők? Ezeket vizsgálja a *Philosophia*.

Ezeknek a végső helyeknek, t. i. az időnek és a térnek természetét, a mint azok az abstractio által a szemléletben megmaradnak, a *tiszta Mathesis* vizsgálja, a melyből az *alkalmazott* származik.

Mind a kettőt [a teret és az időt] elválasztjuk a képzetek kötelékétől, hogy a gondolkodás tárgyai lehessenek; de a képzelet által úgy szólván feltett és az evvel egyidejüleg született helyek valóságát a szemléleten kívül itt sem nem állítjuk, sem nem tagadjuk.

Azt mondjuk, hogy *következtetünk*, ha valamely itéletből, vagy az A, B, ... itéletekből újat állítunk elő.

Itéletnek nevezzük azt, a mi erre az alakra hozható: «az A B*, (vagy B-vel jár).» A-t *alanynak*, B-t pedig *állítmánynak* nevezzük. *Megfordításának* nevezzük a következőt: «a B A, (vagy A-val jár).» Ha B a nem-C-t jelenti: akkor az «A a B-vel jár» itéletből lesz: «A a nem-C-vel jár.»

Az itélet egyszerűekből [t. i. itéletekből] tehető össze, de az összetettek is az említett alakra vezethetők vissza. Mind A, mind B lehet összetett, még pedig többféle módon. Mind a kettő lehet collectiv, disjunctiv, feltételes, vagy bizonyos módon korlátozó.

A *valamelyik*, a *néhány*, vagy a *mindenik* szemben áll a *semilyennel*, a *mindenik* pedig a *nem mindenikkel*, és a *nem mindenik* meg lehet vagy *semilyen*, és lehet *valamelyik*, vagy *néhány* kizárólagosan. Még maga A is valamelyik az A-ból [valók közül]. Az A alany jelenthet bizonyos a, b, c, ...-ből vagy valamelyiket, vagy néhányat, vagy mindeniket, vagy nem mindeniket, vagy semilyent. Ha A jelenti a felsoroltaknak nem mindenikét és B jelenti a nem-C-t: akkor az «A a B-vel jár» itéletből ez lesz: «a, b, c, ...-nek nem mindenike jár a nem-C-vel». Hogy «A-ból semilyen sem jár B-vel», kifejezhető így is: «Az A-ból mindenık a nem-B-vel jár.» Akár az alany, akár az állítmány, sőt mind a kettő disjunctiv is lehet, sőt itélet is [lehet mindegyik.] Pl. «A vagy a B-vel, vagy a C-vel jár»,

* [A est B].

vagy pedig: «vagy A, vagy B a C-vel jár.» Épen úgy «A a B-vel jár» együtt jár a «C a D-vel jár» itélettel, azt jelenti, hogy ha A a B-vel jár: akkor C a D-vel jár. Nyilvánvaló, hogy ezeken kívül még változatos módon különféle ilyen kapcsolat létesíthető.

Értelmezni azt jelenti, hogy valamely fogalomnak nevet adunk, vagy, hogy valamely dolognak az őt egyedül megillető tulajdonságát fejtegetjük.

Az értelmezés szabatos, ha minél egyszerűbb, és nem tartalmaz olyan A-t és B-t, hogy A állítja B-t is.

Mindazonáltal meg van engedve, hogy bármely módon alkotott fogalmakat valamely jellel vagy szóval jelöljünk, a nélkül hogy valóságuk bizonyos volna, vagy bizonyíttatnék, sőt akkor is, ha valóságuk lehetetlen. De egyenlő jelek mindig egyenlőket jelentsenek, hacsak más megállapodás nem történt; egyenlőtlen jeleknek azonban, csakis azért, mert egyenlőtlenek, nem kell egyenlőtleneket jelenteniök.

Az *axióma* olyan itélet, a melyről a józan emberi ész minden okoskodás nélkül, már természeténél fogva belátja, hogy fennáll.

Valamely B-t *bebizonyítani* azt jelenti, hogy kimutatjuk róla, A-nak, azaz axiómáknak és értelmezéseknek valamely csoportja segítségével, hogy szükségképeni, hogy tehát A a B-vel jár.

A bebizonyítható itéletet *tételnek* nevezzük.

A *tudomány,* vagy inkább a *tudomány rendszere* áttekinthető rendben való összefoglalása:

[1.] a szabatos értelmezéseknek, hol a legegyszerűbb fogalmakból indulunk ki és a megalkotottakról újabb összetettekre haladunk előre (mindaddig, míg elő nem állanak azok [a fogalmak], melyek legalább mindazt felölelik, a mi odatartozik);

[2.] a legegyszerűbb axiómáknak, a melyek közül egyik sem vezethető le a többiből;

[3.] az ezek segítségével bebizonyított tételeknek.

Sem mindent értelmezni, sem pedig mindent úgy bebizonyítani nem lehet, hogy a végtelenig megyünk vissza (a mint a térnek fenekét sem lehet elérni.) Vannak dolgok, a melyeknek semmi további okát nem látjuk és olyanok, a melyeknek értelmezésére további világosabb szavaink nincsenek. Érdemes volna ezeket összeállítani.

2. A külső világ helyéről visszatérek magához a bámulatos mindenséghez és annak a megmérhetetlen óraműnek szerkezetét és gépezetét törekszem megismerni, melynek láncza a megszámlálhatlan tejutaknak gyűrűiből alakul, és nehezéke semmiféle talajt nem ér, óralapja pedig a Napnak és a Holdnak pályájával és ezer más körrel

van befestve. A legfőbb gépésznek alkotása az, az egyetlen örökké mozgó.

A legpompásabb templom változatos ékességgel díszített sokféle oszloprenddel, melynek boltozatán a napoknak miriádjai lámpákként égnek, míg a sphærák a láthatatlan hatalom dicsőségéről zengenek. A legfőbb építőmesternek alkotása.

Könyv, a melynek az egész látható világ csak külső foglalatja, és az a csillagok tüzével írt csodálatraméltó hieroglypha a legfőbb Szerző munkájának czíme.

Az óramű gépezetét megérteni, a templomnak vázlatát, oszlopzatát, építő köveit és az összekötő anyagot felfedezni, még az utolsó betűt is felismerni és a titkos írás kulcsát megtalálva, a mondatokat és az egészet [teljességében] elolvasni óhajtjuk. Olyan munka az, a melyet az egész örökkévalóságon át folytatnunk kell.

Erre törekszik (a bővebb értelemben vett külső) *Physika*, még pedig a mathesis alkalmazásával. A mathesis segítségével emeljük azt a Jakab létráját, a melyen az égig hágunk fel, a honnan tüzes szárnyak emelnek bennünket minden tejúton és az égő napok óczeánján túl, hogy beléhatoljunk a szentséges éjszakába, a hol a legfenségesebb Atya végtelen karjaival körülfogja az egész világot és fogadja visszatérő gyermekeit, kiket a szörnyű vihar kihajított az űrbe.

II. A szeretet.

1. A külső világból belépünk a külsőnek megfelelő belsőbe, hogy természetét kutassuk. A *tiszta Psychologia*, azaz a *belső Physika* a lélek tulajdonságait vizsgálja. Minthogy továbbá az akaratra való képesség szintén a lélek természetéhez tartozik, az akaratnak öröktől fogva előírt törvényeit a *tiszta Ethika* tanítja.

2. Mind a két világ egyesülésében a lélek természetét, a mint az a valóságban mutatkozik, a *tapasztalati Psychologia* vizsgálja. Az egésznek végtelen gazdagsága ugyanis a különféléknek egységes voltában és az egységesnek különféle voltában rejlik. Csodálatos minden egyén, mely a két rendszer (a szellemek és testek rendszereinek) egységében él. A külső világ a belsőnek kifejezése és mintegy arcza; mind a kettőt hasonló törvények igazgatják, a melyek egymásnak kölcsönösen megfelelnek. Így valamennyi lelket, mely egymást vonzza, magához vonzza az Isten, mint az egyetemes szeretet középpontja; és vannak más erők is, hasonlók azokhoz, melyek a külső világban nem engedik, hogy a bolygók napjaikba belé essenek, hanem őket pályáikba terelik. Ha a vonzáson kívül más erő nem volna, az

egész mint valami roppant nagy holt tetem az örök nyugalom sírjába hullana.

Ide tartozik az is, hogy megvizsgáljuk azoknak a dolgoknak a tulajdonságait és szabályait, a melyeket az imént említett egyesülésben (az előbb mondott értelemben véve) szépeknek találunk. Ez az *Aesthetika* tárgya.

Hogy a két világnak ebben az egyesülésében mi történjék, hogy egymás köreit nem zavarva, mindnyájan minél gyorsabban siethessünk az egyetemes szeretet czélja felé, a melyre a fent mondottak szerint törekednünk kell, arra tanít az *alkalmazott Ethika,* a melybe a *jogok* minden neme is belé tartozik. A *kötelesség* (subjective) az az édes szükségszerűség, a mely mindenkit bárhonnan is az említett czél felé vezet és a melynél fogva mindenki ahhoz közeledik, hacsak útja ki van világítva és a földi szenvedélyek bilincsei nem tartják vissza az ég gyermekét. A *kötelesség* (objective) maga ez az út. Miként valamennyi igazság, úgy az összeségnek valamennyi kötelessége is összefér egymással; és a mennyiben mindenkinek kötelessége, hogy senki mást a maga tevékenységében meg ne akadályozzon, ezt az utóbbi *jogának* nevezzük, a melyet (úgy, mint a kötelességet) különböző meghatározása szerint különböző névvel illetünk meg. Az előírt szabály szerint eltelt élet mutatja az Istennek látható képét, mely tanuságot tesz az eredetiről, és az időnek halvány nyugotját az örökkévalóság hajnalával sugározza be. Az erénynek gyakorlata napfény, tőle fakadnak a hitnek amaz égi virágai, a melyek a földtől elfordított arczulattal válogatott drágakövekként ragyognak.

A mathesis tiszta forrásából merített igazság az Istennek, az erkölcsiségnek és a halhatatlanságnak velünk született érzetét ébreszti fel bennünk, és bizonyos édes és kimondhatatlan gyönyörűséggel tölt el bennünket. Segítségével behatóbban ismerjük meg a belső és külső világot, úgy hogy napfényre kerül a világban élő igazság, és megszületik az erény.

A mindenütt jelenlevő, sehol sem látható és mindent meglátó istenség arczának fensége sugárzik az égből és a földből, és miközben a sugarakról a naphoz, a melyből erednek, a világban kifejezett képekről az ősképhez emelkedünk fel, a világnak dühöngő zivatarai között a halandó keblekbe az isteni nyugalom száll alá, és a hullámok lecsendesültével a megmérhetetlen űrben újból a vigasztaló csillagok tűnnek fel; sokat hányatva ennek a világnak a partjain és fáradtan végre a mindenség Atyjának végtelen keblén lehúnyt szemekkel nyugszunk meg.

Így tehát a tetőpontot a *Theológia* foglalja magában, a mely a világnak, mint valamely a pusztában bolygó árvának, megmutatja atyját és az utat, mely az utazásnak minden viszontagsága között ő hozzá vezet, a Szentírás fáklyájával világítja be, és lerántva a halálról az iszonyú álarczot, őt mint leküldött angyalt láttatja, a ki eltöri a külső burkot és az égi magot emeli ki belőle. Nincs a földön fenségesebb, mint midőn a belső emberben Isten eszméje fejlődik, és a végesben mintegy a végtelen jelen meg; ez az új angyalnak első életjele. A polusokat mintegy felcserélve, minden megváltozik. Minden évnek vége a másiknak kezdete, és a földbe kivánkozó aggastyán teste lehulló burokja az ég felé törekvő embriónak; a keserűből érett gyümölcs válik, a sebekből az égbe nyiló ajtó, a kimulónak fájdalmából tartós öröm, és a rút keresztből a világnak fénye, az a ⊢+⊣, mely megszünteti a ⊢—⊣-t.

II.

Előleges megjegyzések.

A.

Az axiómák és a mik belőlük előlegesen levezetendők, nehogy egyes esetekben szükséges legyen azokat ismételni, általános alakban kifejtve (a pontosabb térszemléletre vonatkozókat a maguk helyének fentartva).

Midőn az ész valamely jelenségről úgy, mint a folyóról azt kutatja, hogy honnan ered, akkor okról okra emelkedve, végre megállapodik valahol, a honnan továbbra előrehaladni nem tud, és ha itt olyan igazságokra akad, a melyeknek érvényességét minden további ok nélkül helyeseknek ismeri fel: akkor megnyugszik, és az ilyen esetekben talált igazságokat általános formulákban fejezi ki, részint a rövidség kedvéért, részint pedig azért, hogy tisztán felismerhetővé váljék, hogy mik azok, a miket bebizonyítás nélkül állítunk, és hogy mi az egész rendszer alapja.

I. Az idő folytonos mennyiség; de csak rész nélküli van belőle jelen, és ez mindig más és más; és bármelyik ilyen [rész nélküli rész] azt mindenünnen multra és jövőre osztja fel, melyek (ha eltekintünk a multnak és a jövőnek irányától) mindkét felé teljesen egyenlők.

II. Bármely véges idő, a mely még nem volt meg, majd eljön, de az idő összessége sohasem. Igen gyakori eset az, hogy valamit bármely egyesről ki lehet mondani, de az összességről nem.

III. A mi az időnek p oszthatatlan része alatt megvan, vagy a B *igenjével*, vagy a B *nemjével* (azaz B-vel, vagy *nem*-B-vel) van meg.

IV. Ha A és B a p idő alatt C *igenjét* és *nemjét* állítják, és A áll: akkor B nem áll; ha pedig A nem áll: akkor B áll. Ez alapja az apogogikus bebizonyításnak, melynél a következtetés a következő módon történik.

1. Ha B a következő alakú itélet: *a nem jár az x-szel*, és A *áll:* akkor B *nem áll*, azaz nem áll, hogy a nem jár x-szel. Ámde (III. szerint) valamelyiknek állania kell, t. i. vagy annak, hogy *a az x-szel jár*, vagy annak, hogy *a nem jár az x-szel*; az utóbbi azonban nem áll, tehát állania kell a másiknak, hogy *a az x-szel jár*. Ebből az is következik, hogy mihelyt kitűnik, hogy nem áll az, hogy *Q nem jár a Z-vel*, az elmondottaknak ismétlése nélkül azt következtethetjük, hogy *Q a Z-vel jár*.

2. Ha B a következő alakú: *a az x-szel jár*, és A *áll:* akkor az, hogy B nem áll, azt jelenti, hogy nem áll az, hogy *a az x-szel jár*, azaz, hogy *a nem jár az x-szel*. Így tehát mihelyt bizonyos, hogy egyidőben állítva B-t és A-t, mint olyan igazságot vagy igazságokat, melyek akár változhatatlanul, akár hipotézis által vannak megállapítva, egyidőben C-nek fennállása és nem léte is állíttatik: akkor a kifejtett eljárást minden egyes esetben ismételni felesleges.

V. Minden dolog az, a mi, és önmagával tökéletesen egyenlő. Ha azonban A és B absolute egyenlők és azokat az absolute egyenlő D és E műveleteknek vetjük alá: akkor bármely a D által A-ból származó eredménynek megfelelőleg lesz az E által B-ből származó eredmények közt egy olyan, mely vele egyenlő.

Ha a művelet csak egyetlen eredményre vezet, azaz olyan, hogy az A-ból származó eredmény csakis a és a B-ből származó eredmény csakis b: akkor a egyenlő b-vel.

A B-ből származó eredmények között egy van ugyanis olyan, a mely egyenlő a-val; legyen ez C: akkor (III. szerint) ez a C vagy b, vagy nem-b. Ha C nem-b volna: akkor avval, hogy b-n kívül C van, és avval, hogy b-n kívül más eredmény nincsen, állítanók, hogy b-n kívül *van is és nincsen is* más eredmény.

Ha a művelet természete olyan, hogy több eredményre vezet: akkor csak azt mondhatjuk, hogy minden az A-ból származó eredménynek megfelelőleg van a B-ből származó eredmények között egy olyan, a mely vele egyenlő. Ha A-t és B-t egymással egyenlő olyan műveleteknek vetjük alá, melyek csak egyetlen eredményre vezetnek és ezen a réven az a és b egyenlő eredmények származnak: akkor, ha A és B az a-ból és a b-ből szintén egyenlő, egyetlen eredményre vezető műveletek alkalmazása révén származnak, A és B is egyenlők.

Ha A egyenlő B-vel: akkor B az A helyébe helyettesíthető; a mennyiben, ha A-t bármely műveletnek vetjük alá és ugyanannak a műveletnek vetjük alá B-t is, az előbbivel egyenlő eredményt nyerünk. E szerint, ha A egyenlő B-vel és B egyenlő C-vel: akkor C a B helyébe tehető úgy, hogy ez származik: A egyenlő C-vel. Legyen ugyanis az [alkalmazott] művelet az összehasonlítás, akkor B és A összehasonlításának eredménye a megkülönböztethetetlenség, és C meg A összehasonlításának eredménye szintén a megkülönböztethetetlenséggel egyenlő.*

E.

Ha bizonyos, hogy a folytonos T időtartam minden pontjában A fennáll, és valamikor a t alatt, mely a T után következik be, A már nem áll fenn: akkor a végtelenbe növekedő T elejétől számítva [mindenesetre] találhatunk olyan p-t, a mely az utolsó azok között az időpontok között, a melyek mindegyikéről elmondhatjuk, hogy közte és a T eleje között A mindig fennáll; p-ben azonban vagy *utoljára* áll fenn A, vagy *legelőször* áll fenn *nem*-A. Ha p-ben *nem*-A állana: akkor a p után vagy egy darabig, vagy mindig A áll, vagy mindig *nem*-A; hacsak p után nem minden p' pont olyan, hogy p és p' között mind A, mind *nem*-A fordul elő. Ez alapja a határ fogalmának és sok más dologban is kisegít.

F.

Ha $A, B, C, \ldots$ egymásra következnek (akár végük szakad valahol, akár nem) és közülük bármely K olyan, hogy valahányszor K *az x-szel jár*, egyszersmind L is *az x-szel jár* (hol L a K után következőt jelenti), és ha áll, hogy A *az x-szel jár:* akkor az $A, B, C, \ldots$ közül bármely Q *szintén az x-szel jár*. Vegyük fel ugyanis bizonyos pontból kiindulva, a jövő irányában az időnek folytonos t részét, és bármely t után következzék egy másik t egészen a végtelenig, és gondoljuk, hogy A megfelel az első t-nek, továbbá $A, B, C, \ldots$ közül mindegyik következő a következő t-nek, és haladjunk előre

* [A B, C, D szakaszok elmaradtak, mert a következőkben nem jönnek tekintetbe.]

A-tól B-ig, innen C-ig stb., míg elérjük azt a t-t, a mely Q-nak felel meg. A (II. axióma szerint) majd ez a t bekövetkezik; ezért a neki megfelelő Q-ról is bizonyos [hogy x-szel jár]. A következtetésnek ezt az igen gyakran alkalmazott módját n-ről $n+1$-re való következtetésnek nevezzük. Azokat a dolgokat, a melyek a mondottakból még tovább következnek, itt mellőzhetjük.

III.

Részletek az arithmetika általános vázlatából.

1. §.

Az emberi szellem természeténél fogva az igazság után való vágytól ösztönözve, a megismerés határait mindig tovább törekszik kiterjeszteni, és szünet nélküli tevékenységgel részben azokból, a melyeket a képzeletben talál, némely dolgokat kiválaszt, részben ezeket azokkal, a melyek neki valamikor megjelentek, változatos módon összeteszi, és az akárhogyan is elébe kerülteket egymással összehasonlítja. Azokat, a melyeket arra érdemeseknek tart, állandó névvel jelöli meg, élve avval az ősi jogával, hogy mindent tetszése szerint valami jellel láthasson el; csakhogy akkor ugyanannak a jelnek, ha egyéb kikötve nincsen, mindenütt ugyanazt kell jelentenie.

2. §.

Ha bármit (mondjuk A-t) megfigyelünk, mindenekelőtt szemünkbe tűnik valami (mondjuk a), a mit A *magában foglal* (azaz a mi A-ból való), de a mi ettől mégis különböző (azaz nem azonos A-val); ezt az a-t az A *részének* mondjuk, A-t pedig és mindazt, a minek részei vannak (bármilyen módon is teszszük össze szemléletünkben, kizárva minden mást) *egésznek* nevezzük. Ebben az értelemben A-nak bizonyos tulajdonsága is, pl. bizonyos falnak fehérsége, ennek része (értve épen azt a fehérséget, a mely benne megvan). Ha a egyszersmind B-nek is része: akkor azt mondjuk, hogy *közös* A-ban és B-ben. Az $A, B,\ldots$ *összessége* alatt értjük azt, a mi ezek mindegyikét magában foglalja, de azon kívül semmi egyebet.

Ha a részeket vizsgáljuk, olyan x-re akadhatunk, hogy az egészből mindazoknak összessége [v. összefoglalása], a melyek nem x-ből valók, magában foglalja x-et is. Az ilyen részt *elválaszthatatlan*-

*nak** nevezzük. Lehetséges azonban, hogy bármiről, a mi x-nek kizárásával az egészből való, állítható olyas valami, a mit x-re nézve tagadunk. A nyolczadik órának vége és a kilenczediknek eleje része annak az időnek, a mely a hetedik órától egészen a tizedikig lefoly; de elválaszthatatlan része. Épen olyan a tengelye valamely testnek, a melyet úgy mozgatunk, hogy két pontja nyugalomban marad. Ámde, ha valamely egész egy pontból és valamely ezt nem tartalmazó gömbből áll, akkor a pont az egésznek nem ilyen része.

Az olyan p részt, a melynek semmi része vagy csak elválaszthatatlan része közös mindannak az összességével, a mi az egészben a p-n kívül megvan, *alkotó résznek* nevezzük. Így pl. az olyan vonal, a mely valamely felületből kiemelkedik, az egésznek alkotó része, a mint az előbb említett pont is az. Ámde az az összesség, a mely az említett vonalból és valamely a felületbe eső vonalból áll, része ugyan annak az egésznek, mely a felületből és abból a vonalból áll, de nem alkotó része, sem pedig elválaszthatatlan része.

Mindannak az összessége, a mi (pl.) az A-n kívül megvan, úgy képzelendő, a mint az a valóságban fennállhat.

Legyen szabad ehhez még csak néhány megjegyzést fűznöm, nehogy a sok beszéd fárasztó fecsegésnek lássék és undort keltsen.

A p résznek elválaszthatatlan i része a T egésznek elválaszthatatlan része. Ha ugyanis q összessége mindannak, a mi p-ben i-n kívül megvan, és Q összessége mindannak, a mi T-ben i-n kívül megvan: akkor világos, hogy Q magában foglalja q-t, és így tehát i-t, a melyet magában foglal q, magában foglalja Q is.

Az elválaszthatatlan i résznek p része a T egésznek elválaszthatatlan része. Ha ugyanis q összessége mindannak, a mi i-ben p-n kívül megvan, és Q összessége mindannak, a mi a T-ben i-n kívül megvan: akkor (az értelmezés szerint) i-t magában foglalja Q, és így (Q és q) is.

A P alkotó résznek p alkotó része a T egésznek alkotó része. Legyen ugyanis p' mindannak összessége, a mi P-ben p-n kívül megvan, és R összessége mindannak, a mi T-ben P-n kívül megvan, legyen továbbá A az, a mi P-ben és R-ben közös, és Q legyen mindannak az összessége, a mi P-ben A-n kívül megvan, a pedig legyen

* Az elválaszthatatlan rész úgy is értelmezhető, hogy a T egésznek olyan része, mely T-ből úgy elvonható, hogy a többi nélkül is lehet tárgya a gondolkodásnak; ő maga azonban még gondolatban sem választható el úgy, hogy a többi nélküle elgondolható legyen.

az, a mi közös R-ben és p-ben, és a' az, a mi R-ben és p'-ben közös: akkor kitűnik, hogy A-ban benne van a és a', de ezeken kívül semmi egyéb nincsen A-ban. Legyen q mindannak az összessége, a mi p-ben a-n kívül megvan, és q' összessége mindannak, a mi p'-ben a'-n kívül megvan: akkor világos, hogy (q és q') magában foglalja mindazt, a mi P-ben A-n kívül megvan, tehát magát Q-t is. Ámde (a feltevés szerint) P alkotó része T-nek, és ezért (az értelmezés szerint) A elválaszthatatlan része P-nek; így tehát Q magában foglal mindent, a mi A-hoz tartozik, tehát a-t is, a mi nem lehetséges, hacsak a nem elválaszthatatlan része p-nek. Ha ugyanis ez nem volna ilyen: akkor olyan a-ból való b-nek kellene lennie, a melyből semmit sem foglal magában q. Ha azonban q nem foglalja magában, (q és q') sem foglalja magában; mert p'-ben, és így q'-ban is csak a p-nek elválaszthatatlan része az, a mi közös q-val (minthogy p alkotó része P-nek). Így tehát volna valami az A-ból való, a mit (q és q') és e szerint Q sem foglal magában, és (a feltevés ellenére) P nem lenne alkotó része T-nek. Ha azonban p-nek semmije sem közös mindannak az összességével, a mi T-ben p-n kívül megvan: akkor az [állítás helyessége] (az értelmezés szerint) be van bizonyítva.

Legyen P a T-nek alkotó része, és mindannak összességét, a mi T-ben P-n kívül megvan, nevezzük p-nek: akkor p is, ha a valóságban megvan, alkotó része T-nek. Legyen ugyanis A az, a mi P-ben és p-ben közös, és q legyen összessége mindannak, a mi p-ben az A-n kívül megvan, azaz mindaz, a mi T-ben P-n kívül megvan (mert A megvan P-ben is): akkor világos, hogy q, ha a valóságban megvan, azonos p-vel, és e szerint, minthogy p magában foglalja A-t, ezt magában foglalja q is. Így tehát (az értelmezés szerint) p is alkotó része T-nek.

3. §.

A részből és az alkotó részből származik a mathematikai *semmi* és a *rész nélküli*. Ha ugyanis minden részt elveszünk, akkor származik a semmi fogalma, melynek jele 0. A mindentől a semmiig roppant nagy a lépés; egyetlen szóval mintegy megszüntetünk mindent, a mi a magasztos «Legyen» szóra keletkezett. A minek nincsen semminemű alkotó része, azt *rész nélkülinek* nevezzük. Ilyen pl. a térnek pontja és az időnek előbb említett pontja, a mely alatt semmi változás nem mehet végbe, de a Rajna zuhataga, Róma égése vagy valamely hőstett, mint az idő ilyen pontjai örökre rögzíttetnek a vászonra.

4. §.

Ha a részek vizsgálatát tovább folytatva, olyan A-ra akadunk, a melynek minden A' alkotó része olyan, hogy valamije közös avval a B-vel, a mely A-ban a A'-n kívül megvan: az ilyen A-t *kontinuumnak* nevezzük. Ennek példái a tér, az idő, a vonal, a felület stb.

5. §.

A tovább kutató ész különféle dolgokat vesz észre, a melyek A-n kívül megvannak és ettől meg is különböztethetők; de akad olyasvalamire, a mi A-hoz tartozik, és olyasvalamire, a mi B-hez tartozik, a mik habár A-t is meg B-t is jelenlevőnek tekintjük, nem különböztethetők meg egymástól. Ekkor azt mondjuk, hogy A és B ezekre vonatkozólag *egyenlők*. Ha ez az olyasvalami maga A és maga B: akkor azt mondjuk, hogy A *azonosan egyenlő* B*-vel*, a mi csak akkor van így, ha A maga a B. Ha ez az olyasvalami A és B eltekintve helyüktől, azaz, ha a jelen levő A és B eltekintve a helytől, nem különböztethetők meg egymástól: akkor *abszolut egyenlőségről* beszélünk. Ennek jelölésére szolgál: $A \doteq B$. Ilyen módon egyetlen balra csavarodó csavar sem lehet egyenlő valamely jobbra csavarodóval.

Ha az az olyasvalami valami egyéb: akkor *respectiv egyenlőségről* beszélünk, a melynek számtalan faja van. Valamely agyagból készült golyó a helyet illetőleg egyenlő lehet valamely arany golyóval.

6. §.

De az abszolut egyenlőségből és P-nek, valamint p-nek is alkotó részeiből még egy másik *respectiv* egyenlőség és a *mennyiség* fogalma is származik.

1. Ha ugyanis valamely A-val olyan q van együtt, melynek vagy semmi alkotó része nincsen, vagy a melyre nézve [A-nak] minden a és [q-nak] minden b alkotó része [magát A-t és q-t is beleértve] olyan, hogy a (maga vagy pedig valamely része) $\doteq b$-vel (magával vagy pedig valamely részével): akkor azt mondjuk, hogy A a q-ra nézve *mennyiség*. Még pedig, ha az a q épen maga A: akkor *abszolut mennyiségről*, különben pedig *respectiv mennyiségről* beszélünk. Az abszolut mennyiség példái: a tér, az idő, ennek mind a kettőnek pontja, az egyenes, a kör, a csavarvonal, a sík, a gömb, a henger, továbbá az egyenesekből összetett vonal, valamint az

egyenlő radiussal leírt köröknek íveiből összetett vonal és több más efféle. A respectiv mennyiség különféle példái: egy tömb arany és egy tömb vas, ha csak is súlyukat vagy térfogatukat, vagy fém voltukat tekintjük. Ha valamely L vonalat, a mely nincsen egyenesekből összetéve, összehasonlítunk valamely másikkal, a mely olyan, hogy a kettőnek összessége nem abszolut mennyiség: akkor mindig bizonyos olyan egyenes [egyenesvonalú köz] értendő, a mely L által meg van határozva (l. alább), és ép úgy bármely felület is a síkra vezethető vissza (l. u. o.). Sőt az egyszerűbb tárgyalás végett alább magukat az abszolut mennyiségeket is bizonyos respectiv mennyiségekre vezetjük vissza. Ezenkívül az alkotó részek megválasztása is megállapítható bizonyos módon. Így pl. az ember és a féreg (a pont és pont mintájára) respectiv mennyiséget alkotnak, ha feltételül kötjük ki, hogy ne tekintsük az embernek és a féregnek valamely alkotó részét, hanem az embernél és a féregnél pl. egyedül csak azt vegyük figyelembe, hogy mind a kettő halandó és a földnek neveltje.

2. Ha P az A, B,... alkotó részekből áll,

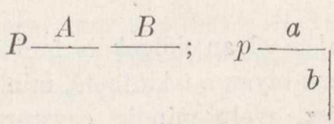
p az a, b,... alkotó részekből áll,

és

$$A \doteq a, \quad B \doteq b \text{ stb.},$$

úgy hogy az egyenlő alkotó részek bármely párjára egy másik ilyen következik mindaddig, míg P-ből és Q-ból semmi sem marad fenn: akkor ebből új, az alkotó részekre vonatkozó egyenlőség származik.

Pl.



Ebben az értelemben bármely egyenesvonalú idom egyenlő egy [alkalmasan meghatározott] négyzettel. De mi van akkor, ha P és p olyan — mint pl. a kör és bizonyos négyzet — hogy A, B,... és a, b,... sohasem fejeződnek be, hanem mind a kettőből fennmaradhat valami, a mi bármely megadhatónál kisebb? Hogy ilyen négyzet van, az bizonyos és a kör négyszögesítőjének feladata nem egyéb mint, hogy ezt véges számú olyan művelettel határozza meg, a melyek mindegyike abban áll, hogy egyenest vagy kört húz. Ezt a *tartalomra vonatkozó* egyenlőséget az első esetben *végszerűnek*, a második esetben pedig *végszerűtlennek* nevezhetnők. Vajjon a felhozott esetben végszerű-e vagy végszerűtlen, azt még senki sem mutatta ki. Jelölésére szolgál: $P \doteqdot p$.

Azt, hogy mely egyenlőség az, a melyet a = jellel jelölünk, lásd alább, és a kifejezések különféle egyenlőségére vonatkozókat stbit még alább.

7. §.

Mennyiség kapcsolatban mennyiséggel létrehozza a *homogeneitas*, valamint a nagyobb és a kisebb fogalmát. Ha t. i. az A és B mennyiségek, a melyeknek csak a kettőnek valamely elválaszthatatlan része közös, olyanok, hogy összességük mennyiség: akkor azt mondjuk, hogy A és B *homogének.** Így pl. a négyzet oldala és átlója homogének, habár bizonyos, hogy ugyanarra az egyre nézve nem fejezhetők ki számokkal.

Ha azonban A tartalmára vonatkozólag egyenlő B-nek valamely b alkotó részével: akkor azt mondjuk, hogy A *kisebb* B-nél és B *nagyobb* A-nál. Ezt jelekben így fejezzük ki: $A \lhd B$ vagy $B \rhd A$. Ez a jelölés megtartható akkor is, ha A és B (mint alább) bizonyos meghatározással vannak ellátva, úgy hogy azt is mondhatjuk, hogy $2 \lhd -5$. Azután még az a kérdés is merül fel, hogy mi marad fenn B-ből b-n felül? Ha ezt C-nek nevezzük: akkor azt mondjuk, hogy B a C-vel múlja felül az A mennyiséget. Azt a műveletet, a melylyel meghatározzuk, hogy mi marad fenn D-ből a d-n felül, ha d a D-ből való, és A tartalmára vonatkozólag egyenlő d-vel ($A \doteq d$), úgy nevezzük: A-nak *elvétele* D-ből.

8. §.

Minthogy különféle olyan dolgok is fordulnak elő, a melyeknél az elvétel művelete nem olyan áttekinthető, mint az idő és az egyenes esetében, azért az ész, mely mindig egyszerűségre és világosságra törekszik, olyan módról gondoskodik, melylyel minden mennyiséget ilyen alakra lehet visszavezetni. Ha az A, B, ... mennyiségek olyan A', B', ... mennyiségekre vezethetők vissza, hogy minden A', B', ... olyan, hogy $A \doteq A'$, $B \doteq B'$, ... és közülük bármelyik A' és B' olyan, hogy az egyik abszolute egyenlő a másikkal, vagy annak részével: akkor azt mondjuk, hogy A, B, ... *az idő alakjára vannak visszavezetve.* $A = B$ azt jelentse, hogy $A' \doteq B'$. Hogy ez lehetséges és hogy minden csak is egyetlen ilyenre vezethető vissza, az alábbiakban fog kitűnni.

* Vagy pedig, ha az A és B mennyiségek közül mindegyik a tartalomra vonatkozólag egyenlő a másikkal, vagy annak valamely alkotó részével: akkor azt mondjuk, hogy A és B *homogének.*

Bármely felület visszavezethető olyan derékszögű négyszögre, melynek magassága pl. 1 öl, bármely test olyan parallelepipedonra, melynek magassága és szélessége szintén 1 öl, és végül minden úgy redukálható, hogy nagysága idővel vagy egyenessel fejezhető ki.

9. §.

Az *arithmetika* az a tudomány, a mely csupán csak már az idő alakjára visszavezetett mennyiségeket és valamennyi műveletnek szintén erre az alakra visszavezetett eredményeit szemléli. *Tiszta* akkor, ha tárgya az idő vagy az egyenes, mely miután levezettük és származtattuk, az elmult időnek mintegy örökké megmaradó képe. Az itt talált igazságok könnyen alkalmazhatók más helyen.

Az *arithmetika általános,* ha a mennyiségeket általánosan tárgyalja a nélkül, hogy az egyikről vagy másikról külön valamit mondana; hiszen az észnek az a természete, hogy arról, a mi szem előtt van, az általánosabbhoz és elvontabbhoz emelkedik fel.

A tiszta arithmetikának első tárgya, az idő, reámutat arra, hogy az mintegy az idő tudományának, a geometria pedig a tér tudományának nevezhető; habár, mintegy örök házasságban élve, az egyik a másiknak segítségére van, és mind a kettő egybegyökerezett fáinak koronái a mérhetetlen egekben folynak össze.

10. §.

A *mennyiség* most már a *minőséggel* kapcsolatban létrehozza az ú. n. *ellenkezőket,* a $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv$-t *(pozitivot)* és a $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv$-t (azaz a *negativot*), valamint a $+$-t és a $-$-t.

Akadunk ugyanis olyan homogén mennyiségekre, a melyek különböző meghatározásokkal vannak megadva. Legyen pl. valamely egyenes kezdete a p pontban, és ugyanabba az egyenesbe helyezzünk egy másikat úgy, hogy ennek kezdete és az előbbinek vége azonosak legyenek. Itt különféle kérdések merülhetnek fel: *Milyen nagy az egész út?* vagy *milyen nagy vonal van p és az utóbb odahelyezettnek vége között?* vajjon ez p-től *jobbra* vagy *balra* esik-e? Világos, hogy az eredmény annyira változatos lehet, hogy *nagy* vonatkozással az előbbi kérdésre és 0 vonatkozással az utóbbira.

Ebből a következő fogalmat alkotjuk:

Ha P és N olyan meghatározásokat jelentenek, hogy, a mennyiben A a P meghatározással és B az N meghatározással van megadva, bizonyos C feltétel mellett abban az esetben, ha $A = B$, az eredmény 0, ha pedig $A \mathrel{|\!\!>} B$ és ezt felülmúlja a-val, fennmarad a a P meghatározással ellátva, és ha $B \mathrel{|\!\!>} A$ és ezt felülmúlja b-vel, fennmarad b az N meghatározással ellátva: akkor az egyiket, pl. A-t *pozitivnak*, a másikat, t. i. B-t *negativnak* nevezzük, és A-ról és B-ről azt mondjuk, hogy *ellenkező mennyiségek*. A pozitivot a $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv$ jellel, a negativot a $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv$ jellel lehet jelölni; de világos, hogy evvel csak az említett P és N meghatározásokra akarunk reámutatni.

Ha $A = B$, akkor a $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv A$ és $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv B$ mindegyike *a másiknak az ellenkezője*, és $-k$-val jelöljük az ellenkezőjét annak, a mit k kifejez, akár $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv$-ot, akár $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv$-ot jelentsen k; ellenben a $+$ jel nem változtatja azt az értéket, a melynek elébe van téve. A $+k = k$ lehet $= \vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv 5 = -5$, és ekkor $-k = 5 = +5 = \vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv 5$, úgy hogy abból, hogy valamely betű elé a $+$ vagy a $-$ jel van téve, nem következtethetünk arra, vajjon az pozitiv vagy negativ értéket jelent-e. Gondolatban helyezzük pl. akár az időben, akár az egyenesben a folytonos $A, B, \ldots$ részeket az egyiket a másik után a következő módon: Nevezzük mindegyiknek az egyik határát kezdetnek, a másikat pedig végnek, és annak a kezdete, melyet egyedülinek vagy pedig elsőnek vettünk fel, essék bizonyos p pontba, és minden másiknak kezdete legyen azonos a közvetetlenül előtte felvettnek végével. Legyen továbbá bizonyos q pont olyan, hogy valamennyi [rész] azon belül végződjék, ha úgy helyezzük el azokat, hogy mindegyiknek csak a kezdete legyen közös avval, a mit előbb odahelyeztünk, p' pedig legyen annak [a résznek] a vége, a melyet az először említett módon utoljára odahelyeztünk: akkor, ha p különböző p'-től, nevezzük p-t a pp' kezdetének, p'-t pedig végének, és $A, B, \ldots$ közül, valamint abból, a mi p és p' között van, minden olyanról, a minek a vége közelebb van q-hoz, mint a kezdete, azt mondjuk, hogy a P meghatározással van megadva, arról pedig, a minek a kezdete közelebb van hozzá, azt mondjuk, hogy az N meghatározással van megadva.

Ezen a módon kitűnik, hogy ha a C feltétel az, hogy eredménynek pp'-t vegyük: akkor, ha megadjuk $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv A$-t és $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv B$-t és $A = B$, az eredmény 0; ép úgy fennmarad $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv a$, ha $A \mathrel{|\!\!>} B$ és ezt felülmúlja a-val, és fennmarad $\vdash\!\!\!-\!\!\!\dashv b$, ha $B \mathrel{|\!\!>} A$ és ezt felülmúlja b-vel. Azt is mondhatjuk, hogy az, a minek csak a kezdete közös az előbb odahelyezettel, evvel megegyező, ellenkezőleg pedig tőle különböző meghatározású.

11. §.

Tetszés szerinti mennyiségek azonban a következő módon vezethetők vissza erre a meghatározásra.

Ha azt mondjuk, hogy a B az A-ra nézve mint az *elvétel mutatója* van megadva, ez a következő műveletet jelenti. Ha A-t már megadtuk, és megadunk olyan B-ből való b-t, hogy A-ban benne van egy vele egyenlő, de nagyobb ilyen B-ből való b-nél nincsen benne, akkor A-ból el kell vennünk b-t; ha $b = B$, akkor azt mondjuk, hogy az *elvétel mutatójának* eleget tettünk, ha azonban b-n felül még valamely b' is megvan B-ben, akkor az elvétel mutatójából fennmarad b', ha pedig semmi b-t sem lehetett elvenni, akkor fennmarad maga a B, a melynek nem tettünk eleget. Az említett esetek mindegyikében azt mondjuk, hogy *az elvétel mutatójának a lehetőségig eleget tettünk.*

Most már az N meghatározás, a melylyel B meg van adva, jelentse azt, hogy B-t minden olyan mennyiségre nézve, mely bizonyos P meghatározással van megadva vagy pedig majd azután adatik meg, elvétel mutatójának vegyük, és a C feltétel álljon abban, hogy, ha A már a P meghatározással van megadva, és A egyenlő B-vel vagy nagyobb B-nél, [eredménynek] vegyük azt, a mi A-ból fennmaradt, miután az elvétel mutatójának eleget tettünk; ha azonban ennek eleget tenni nem lehetett, azt vegyük [eredménynek], a mi az elvétel mutatójából fennmaradt, miután ennek a lehetőségig eleget tettünk, és azt, a mi az elvétel mutatójából fennmaradt, tartsuk meg mindig továbbra is az elvétel mutatójának azokra a mennyiségekre nézve, a melyek mint avval homogén mennyiségek a P meghatározással vannak megadva. Világos, hogy itt is a P meghatározás a $+$ jellel, a másik pedig a $-$ jellel jelölhető. Ha ugyanis $A = B$, akkor az eredmény 0, ha $A \triangleright B$, akkor az eredmény a a P meghatározással ellátva, ha pedig $B \triangleright A$, akkor az elvétel mutatójából b marad fenn, és így az eredmény b lesz az N meghatározással ellátva.

Pl.

$$\begin{array}{ccc} \underline{+A} & \underline{+A} & \underline{+A} \\ & a & \\ \underline{-B} & \underline{-B} & \underline{-B} \\ & & b \end{array}$$

Így jelenthet A bizonyos embereket, kiket bizonyos célból állítunk fel, és B szintén bizonyos embereket, kiket A-ra nézve az elvétel mutatójának veszünk, vagy A jelenthet bizonyos pénzmennyiséget, és B is bizonyos pénzmennyiséget, mely A-ra nézve mint az elvétel mutatója van kitéve stb.

12. §.

Az *összeadás* az a művelet, a melylyel megállapítjuk, hogy a C feltétel mellett mi az eredmény, ha A, B,... között vannak pozitivok és negativok, vagy pedig másképen, hogy mi származik, ha A, B,...-t együtt veszszük (a hol minden egyes esetben mindegyiküket, a mely 0-t jelent, elhagyjuk); az eredményt pedig az A, B,... összeadottak *összegének* nevezzük.

Sőt az összeg fogalma általánosítható is, a mennyiben azt mondjuk, hogy S és s az A, B,... valósok és az a, b,... képzetesek összege, ha azoknak összege S, és ezeké s (l. alább). Az előbbi esetet illetőleg világos, hogy fentebb $\vdash\!\!+\!\!\dashv A$ és $\vdash\!\!-\!\!\dashv B$ összege 0, $\vdash\!\!+\!\!\dashv a$, vagy $\vdash\!\!-\!\!\dashv b$; épen úgy világos, hogy

$$\underline{\vdash\!\!+\!\!\dashv A\ \ \vdash\!\!+\!\!\dashv B}$$

$\vdash\!\!+\!\!\dashv A$ és $\vdash\!\!+\!\!\dashv B$ összege.

13. §.

Itt önként az a kérdés támad, vajjon, ha (a 10. §-ban) bármely sorrendben veszszük fel az A, B,... mennyiségeket, az utoljára felvettnek mindig ugyanaz lesz-e a végpontja? És ugyanaz a kérdés, ha az elvétel bármely módon történik; akár úgy, hogy itt is, ott is veszünk el valami részt, akár pedig úgy, hogy valamennyi pozitivnak összegéből elveszszük valamennyi negativnak összegét (l. alább.)

Az összeadandók összegének kényelmes jelölésére is törekszünk. Olyan jeleknek összessége, a melyekkel mennyiségeket jelölünk, együtt a mindegyik elé helyezett $+$, $-$, $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, $\vdash\!\!-\!\!\dashv$ jelek egyikével, jelölje ezeknek (az eléjükbe tett jellel felvett) mennyiségeknek *összegét.* Ezt az összességet *komplex mennyiségnek* nevezzük. A $+$, $-$, $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, $\vdash\!\!-\!\!\dashv$ jelek utolsója után, vagy elseje elé írt mennyiséget, vagy pedig mindegyiket, a mely két szomszédos ilyen jel között áll, az elébe tett jellel együttvéve, *a komplex mennyiség tagjának* nevezzük. Ámde, ha más műveletet több [előjelekkel összekapcsolt] mennyiségre terjesztünk ki, az említett jelek az [ama művelet jelével] összekapcsolt mennyiségek közül nem választanak el tagokat [az egészből, hanem csak abból az összegből, a mely a műveleti jel alatt áll]. Így pl. d nem tagja $a+\sqrt{c-d}$-nek, de a és $\sqrt{c-d}$ igenis tagjai.

14. §.

Ha valahol meghatároztuk A-nak és B-nek S összegét, önként az a kérdés támad, vajjon S-ből és A-ból meghatározható-e A-nak társa, B? Ezt a műveletet nevezzük *A-nak S-ből való kivonásának*, és B-t nevezzük *A-nak S-től való különbségének*. Nyilvánvaló, hogy a 11. és 12. § schémáiban S először 0, azután $\vdash\!\!+\!\!\dashv a$, azután pedig $\vdash\!\!-\!\!\dashv b$ és végre $\vdash\!\!+\!\!\dashv A \vdash\!\!+\!\!\dashv B$; épen úgy lehetne $\vdash\!\!-\!\!\dashv A \vdash\!\!-\!\!\dashv B$ is. Továbbá a 11. §-ban $S-(\vdash\!\!+\!\!\dashv A)$ kiadódik mint $\vdash\!\!-\!\!\dashv B$, az $S-(\vdash\!\!-\!\!\dashv B)$ pedig mint $\vdash\!\!+\!\!\dashv A$, és a következő esetben $S-(\pm B)$ egyenlő $\pm A$-val. Ebből kitűnik, hogy a feltételezett összeghez a kivonandónak ellenkezőjét kell hozzáadnunk, hogy a kivonandó társát, t. i. a különbséget nyerjük. Valaminek ellenkezője pedig úgy származik, hogy az elébe tett jelt megváltoztatjuk, t. i. a $+$ helyébe a $-$-t és a $-$ helyébe a $+$-t teszszük. Így tehát a kivonandót megváltoztatott jellel adjuk hozzá. Itt azonban még csak egytagúakról van szó; a több tagból összetett mennyiségekre csak később térünk át.

15. §.

Továbbá még olyan p és s mennyiségekre is akadhatunk, hogy p-nek s-től való d különbsége egyenlő P-nek S-től való különbségével. Innen [csak] egy lépés ahhoz, hogy P maga legyen az s, és mindegyik mennyiség után következzék olyan másik, a melytől a megelőzőnek különbsége ugyanavval a d-vel egyenlő. Ezt nevezzük *arithmetikai sornak*. Itt t. i. származik a sor fogalma, a mely névvel illetjük az olyan mennyiségek összességét, melyek bizonyos törvény szerint következnek egymásra. Mihelyt ugyanis egyetlen ilyen törvény válik ismeretessé, számtalan törvény kigondolására nyílik meg a mező. A bizonyos törvény szerint egymásra következő mennyiségek mindegyikét *a sor tagjának* nevezzük.

16. §.

Könnyen jutunk azután arra, hogy p-t 0-nak vegyük, és a

$$0,\ A,\ B,\ C,\ldots$$

sort állítsuk fel, a melyben minden tagnak a következőtől való különbsége u, és hogy épen úgy egy másik

$$0,\ a,\ b,\ c,\ldots$$

sort is állítsunk fel, a melyben minden tagnak a következőtől való különbsége v, úgy hogy 0-t 0-sal, A-t a-val egyidejűleg adjuk meg, és (az egyik és a másik sorban) az egyidejűleg megadott tagokra következő tagokat is egyidejűleg adjuk meg. E sorok mindegyik tagját *számnak* nevezzük, még pedig az előbbiét *számnak az u-ra nézve*, az utóbbiét *számnak a v-re nézve.* Szabadságunkban áll, hogy mindegyiknek saját nevet adjunk, még pedig az egyidejűleg megadott tagoknak ugyanazt; csakhogy az első sor tagjainál hozzátesszük ezt: u-ra nézve, a második sor tagjainál pedig: v-re nézve. Így pl. 0-ról mondjuk, hogy zérus az u-ra nézve és zérus a v-ra nézve is, A pedig 1 az u-ra nézve, és a-ról mondjuk, hogy 1 a v-re nézve stb., vagy rövidebben azt mondjuk, hogy 0 az $0u$ és $0v$, A pedig $1u$, a meg $1v$ stb.; azt az F-et pl., a mely az n névvel megjelölt szám u-ra nézve, nu-nak nevezzük és a vele egyidejűleg megadott f tagot nv-nek. Arra a kérdésre, hogy F hány u? azt feleljük, hogy nu, és azt mondjuk, hogy F az u-t n-szer foglalja magában; azt pedig, hogy F-ből és n-ből meghatározzuk u-t, úgy nevezzük, hogy *F-et n-nel osztjuk.* Nincsen itt szó azonban a szorzásról és az osztásról, a melyeknek értelme általánosabb.

Mind u-t, mind v-t *egynek* nevezzük, a mi megkülönböztetendő az egységtől (23. §.).

0	$A\overset{u}{-}$,	$B\overset{u}{-}\overset{u}{-}$,	$C\overset{u}{-}\overset{u}{-}\overset{u}{-}$	...
$0u$	$1u$	$2u$	$3u$	...
0	$a\overset{v}{-}$,	$b\overset{v}{-}\overset{v}{-}$,	$c\overset{v}{-}\overset{v}{-}\overset{v}{-}$	...
$0v$	$1v$	$2v$	$3v$	...
0	$\star$	$\star\star$	$\star\star\star$	...
$0\star$	$1\star$	$2\star$	$3\star$	...
0	0	0	0	...
0 zérus	1 zérus	2 zérus	3 zérus	...

Világos, hogy ha az *egyet* zérusnak vesszük, akkor minden tag 0; mert mindegyikből a 0 áll elő mint eredmény, minthogy (a 12. § sz.) $0+0=0$.

17. §.

Ezzel kapcsolatban mindjárt a következő kérdések támadnak:

1. Mily módon nevezhetők el a számok a legegyszerűbben?

2. Ha N és M számoknak nevei, akkor Nu és Mu együtt hány u? és ha $Nu \lessdot Mu$ és amazt ebből elveszszük, akkor hány u marad?

3. Ha $U = Nu$, akkor MU hány u? Mondjuk, hogy nu: akkor N-ből és M-ből meg kellett határoznunk az n nevét. Azt is lehet követelni, hogy n-ből és az N és M egyikéből meghatározandó a másik.

Ez a számlálás és a négy számolási művelet, és habár ezek a fogalmak nélkülözhetetlenek, a négy művelet fogalma szélesebb körű.

A két elsőt már értelmeztük és kitűnt, hogy A és B összegét szemléltetően állíthatjuk elő, habár nincsen is szám által kifejezve; sőt még akkor is, ha pl. A valamely négyzetnek oldala és B ugyanannak a négyzetnek átlója, a mikor A és B ugyanarra az [egyre] nézve nem is lehetnek számok.

18. §.

Ezeken kívül még különféle kérdések merülnek fel.

1. Lehet-e bármely mennyiség bármely nevű szám?

2. Lehet-e ugyanaz ugyanarra az u-ra nézve különböző (azaz most ilyen, később más) nevű szám?

3. Van-e A bármely a alkotó részének megfelelőleg olyan n számnév, hogy $na \trianglerighteq A$ stb.?

Ha a q mennyiségnek vagy nincsen alkotó része, vagy minden alkotó része olyan, hogy annak ilyen n felel meg: akkor q-t *véges* mennyiségnek nevezzük. Ilyen mennyiségekkel foglalkozik az arithmetika. Ha u valamely időpontot jelent, $2u$ csak olyan szám lehet, a melynek neve 2 és 1; t. i. az utóbbi akkor, ha egynek veszszük $2u$-t. Hasonlóképen, ha egynek a 0-t választjuk, a 0 is lehet bármely nevű szám, de az, a mi nem 0, nem lehet a zérus névvel ellátott szám.

19. §.

Új kérdés továbbá az, vajjon B az A-ra nézve szám-e, és ha igen, mi akkor a neve? Abban az esetben pedig, ha B az A-ra nézve nem szám, az a kérdés támad, vajjon van-e olyan u, a melyre nézve mind A, mind B szám, és milyen nevű szám akkor A, milyen nevű B? Ezekből a következő fogalom származik:

Akár szám a B az A-ra nézve, akár nem az, azt mondjuk, hogy B-t A-val (vagy A-ra vonatkozólag) *mérjük*, ha meg kell állapítanunk, hogy A-nak és B-nek vagy $-B$-nek ugyanarra az u-ra nézve mint számoknak mi a nevük. A-ról azt mondjuk, hogy a *mérték*, B pedig az A-nak *mértje*. Ha pl.

$$A = 3u, \quad B = 2u \quad \text{vagy} \quad B = -2u:$$

akkor arra a kérdésre, hogy mely mértje B az A-nak, az első esetben azt válaszoljuk, hogy 2(3)-a, a második esetben pedig, hogy 2(3)-nak az ellenkezője. Épen úgy, ha A-nak mértékéül u-t veszszük: akkor az az u-nak 3(1)-e, úgy hogy ez és $3u$ ugyanazt jelentik.

20. §.

De olyan A-ra és B-re is akadhatunk, hogy habár homogének, nem találunk olyan u-t, a melyre nézve mind A, mind B szám; ez könnyen vezet annak megfontolására, hogy mi van akkor, ha ilyen [u] nincsen. Nem bizonyos ugyanis, hogy ilyennek lennie kell (és majd később kitűnik, hogy az arithmetikában is fordulnak elő ilyenek, mint pl. a $\sqrt{2}$). Az ilyen mennyiségeket egymás között *inkommenzurabiliseknek* nevezzük. Könnyen belátható azonban (a mit majd később bebizonyítunk), hogy ha u-t mindig felezzük, akkor B-ből bármely megadható z-nél kevesebb marad fenn, és a másik része az A-ra vonatkozólag mérhető.

21. §.

Itt először keletkezik a *változó* és a *határérték* fogalma. Ha p általános neve azoknak a véges mennyiségeknek, a melyek bizonyos feltétel mellett származhatnak, és $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ vagy $\vdash\!\!-p$ bármely adott vele homogén mennyiségnél nagyobbá válhatik, vagy pedig p-nek K-tól való különbsége sohasem válik ugyan 0-sá, de bármely adott z-nél kisebbé válhatik: akkor az első esetben azt szoktuk mondani, hogy (a ∞-nel jelölt) *végtelen*, a második esetben pedig, hogy K a p-nek *határértéke*. Azt, hogy p a határérték felé közeledik, az első esetben a következő módon jelöljük: $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ vagy $\vdash\!\!-p \rightharpoonup \pm\infty$.* a második esetben pedig így: $p \rightharpoonup K$. T. i. ott, a hol a $\rightharpoonup$ jel után $\pm\infty$ áll, az első esettel van dolgunk, a hol pedig a $\rightharpoonup$ jel után véges mennyiség áll, a másodikkal.

A nagyobbat és a kisebbet itt úgy állapítjuk meg, hogy a $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ és $\vdash\!\!-\!\!\dashv$ jelektől eltekintünk. Az arithmetika ugyan a véges mennyiségekkel foglalkozik és az infinitezimálisnak nevezett számításban sincsen szükség a végtelenre; de minthogy többen a végtelent is elfogadják határértéknek, meg van engedve a határérték fogalmát reá is kiter-

* A tiszta arithmetikában, a mely nem foglalkozik más mennyiségekkel, mint a 0-sal és pl. (a geometriából kölcsönzött) egyenessel, ∞ alatt nem értünk egyebet, mint *olyan pont útjának határértékét, mely az egyenesnek* $\mathfrak{p}$ *pontjából kiindulva, abban mindig tovább, bármely adott ponton túl mozog.* A végtelen elébe tett $+$ és $-$ jeleket illetőleg ugyan a C feltétel nem érvényes (10. §), de C érvényes bármely véges utakra nézve, melyek közül némelyik pl. jobb felé, némelyik pedig bal felé iratott le, ha a balra megtett út kezdetét, $\mathfrak{p}$-t a másik út végéhez csatoljuk, és akkor $-\infty$ alatt a $\mathfrak{p}$-ben kezdődő balra megtett útnak határértékét, $+\infty$ alatt pedig a $\mathfrak{p}$-ben kezdődő jobbra megtett útnak határértékét érthetjük.

jeszteni. (A geometriában vannak végtelenek; ilyen pl. azoknak a pontoknak az összessége, melyek bizonyos két ponttal együtt ugyanabban az egyenesben fekszenek, a mely a mindkét felé végtelen egyenes stb.)

Legyen pl., ha t az u-nál kisebb mennyiséget jelent,

$$A = nu, \quad B = mu + t, \quad \text{és legyen} \quad t \rightharpoondown 0:$$

akkor arra a kérdésre, hogy milyen mértje B az A-nak, azt válaszoljuk, hogy eltekintve valamitől, a mi a 0 felé közeledik, annak $m(n)$-ede. Világos azonban, hogy, a mint u-t kisebbnek veszszük fel, m és n változik. Azonban ott, a hol többször fordulnak elő, egyenlő jelek az egyidejüleg változtatott egyenlőket jelentsék, egyenlőtlen jelek azonban (hacsak más nincsen megállapítva) egyenlőket is jelenthetnek.

22. §.

Miután a B-t A-val megmértük, könnyen megesik, hogy C-t is ugyanavval az A-val mérjük meg, és ekkor B és C mindegyikét a másik *törtjének* nevezzük.

23. §.

Ha már mostan B-t és C-t ugyanavval az A-val megmértük, közel esik, hogy D-t is és azután $D, E, \ldots$-t és végre minden homogént ugyanavval az A-val mérjük meg, és ezt a mértéket valamennyire nézve *egységnek* nevezzük, valamint az is, hogy a megmért mennyiségek megnevezésénél a mértéket ne mindig ismételjük. Így pl. az egység $2(5)$-ét a mérték megnevezése nélkül csak $2(5)$-nek nevezzük; épen így, ha A az egység, A-nak $2(1)$-ét, azaz $2A$-t csak 2-nek nevezzük, és -1 jelenti a $-1A$-t.

IV.

A geometria általános vázlata.

A külső világról az absztrakczió vezet a *tiszta tér* fogalmára. Ha ugyanis gondolatban eltávolitjuk a testet, a melyet a külsö tapasztalat mindig helyével együtt ad meg: akkor megmarad a hely, melyet elfoglalni látszott, és a határ, a melyen belül volt. Ha azután kutatjuk, hogy mi van ezen a határon túl, és a tapasztalatilag megadott világot gondolatban eltávolítva, mindig továbbra terjesztjük ki kutatásunkat, odaérünk a szent éjszakához, mely meggyujtott lámpáinak miriádjaival a Legmagasabb Fenség jelenlétét hirdeti. Benne számtalan égi test kering, testvéri karjaikat egymás felé kitárva, míg mindenünnen fohászok a vidám és a szomorú szivek közös Atyját keresik. Benne viszi a Földanya a virágos keble alatt szunnyadó szülöttjeit az örökkévalóság hajnala felé. Benne van minden anyag és benne születnek csiráikból a csodálatos életerő létrehozta világok, melyek fejlődnek, élnek és követik az örökölt ösztönt, hacsak másfelé nem keríttetnek; végre pedig elpusztulnak mint a pára, mely zivatarok csattogása mellett hull vissza az óczeánba, hogy új származzék belőle. De a geometernek észlelő lelki szeme elől eltűnik a világban mutatkozó minden meghasonlás, melynek nagy problémáját egyetértéssé a halál *egyenlete* oldja meg, valamint mindannyinak küzdelme mindannyi ellen, a világoknak minden zsibongásával és zajával együtt — és azt, a kit a zivatarok fenyegető árja kivetett, a csendes éjnek békés és az Igazság jótékony fényétől megvilágított kikötője fogadja ölébe.

1. §.

[Tér és idő.]

A közvetetlen szemlélet a következőket mutatja: a tér *mennyiség, kontinuum, mindenfelé végtelen, örökkévaló, minden része mindig jelen van,* azon kívül *egyetlen* és akár önmagában, akár bármely részét tekintve, *változhatatlan,* csakhogy a többi dolgok változtathatják a benne elfoglalt részeket, t. i. helyüket.

Az idő is *mennyiség, kontinuum, egyetlen* és *végtelen,* de csakis *kétfelé* bármely részétől kezdve, mely mindig csak mint *rész nélküli* van jelen, és mindig *más* meg *más.*

2. §.

[Pont, felület, vonal, alakzat, metszés.]

A szemlélet továbbá a következőket mutatja: A tér bármely alkotó részének határa olyan kontinuum, a mely akként osztható két alkotó részre, hogy az, a mi e kettőnek határában közös, szintén kontinuum, mely akként osztható újra két alkotó részre, hogy a közös ezek határában rész nélküli.

Ehhez képest:

1. A térnek ilyen rész nélküli részét *térbeli pontnak* nevezzük; ez teljesen különböző az *idő pontjától.*

Hogy a tér bármely részében van pont, és hogy a tér minden pontja egyenlő, szintén a szemléletből tűnik ki.

2. Az először származott kontinuumnak alkotó részéből és azután az utóbb származott kontinuumnak alkotó részéből, ha az efféle alkotó részeket összekapcsoljuk, a következő fogalmak származnak:

I. Ha a kontinuum $A, B, \ldots, F$-ből áll és ezek mindegyike a tér valamely alkotó része határának alkotó része: akkor azt *felületnek* nevezzük.

II. Ha azonban a kontinuum $a, b, \ldots, k$-ból áll, és ezek mindegyike valamely felület határának alkotó része: akkor azt *vonalnak* nevezzük.

III. Ha pedig a kontinuum $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$-ból áll, és ezek mindegyike vagy felület, vagy vonal: akkor azt a szó tulajdonképeni értelmében *alakzatnak* nevezzük.

IV. Ha pedig P és Q a térnek bármely két olyan kontinuuma, melyben valami közös van, és ha az az I, a mely a kettőben közösnek összessége, mind a kettőnek elválaszthatatlan része (35.—36. o.): akkor I-t *az egymást kölcsönösen metsző P és Q metszésének* nevezzük.

3. Egyszersmind azt is mondhatjuk, hogy a felület a térnek olyan folytonos elválaszthatatlan része, a melynek semmi alkotó része sem vonal. Sőt az azonnal értelmezendő geometriai mozgás fogalmának megállapitása után még azt is mondhatjuk, hogy a vonal a pontnak útja, és hogy a vonal útja felület ugyan, de nem minden felület vonalnak útja.

3. §.

[Test vizsgálata különböző helyeken. Mozgathatónak szerkesztése. A kongruenczia axiómája. A geometriai mozgás.]

Ha a térből visszatérünk a külső világba, a melyből azt leszármaztattuk: akkor ugyanazt a testet más és más helyen látva, az a kérdés merül fel, *vajjon annak különböző helyei egyenlők-e?* A szemlélet azt mutatja, hogy egyenlők.

I. Minthogy a tér minden alkotó részében testet gondolhatunk, minden erő felvétele nélkül a tér bármely alkotó részének megfelelőleg *olyan mozgathatót alkothatunk,* a mely vele egybeesik, de gondolatban tőle elkülöníttetvén, a térben mindenűvé, a hová csak tetszik, vihető; a külső test tulajdonságaiból semmi egyebet nem tart meg, mint azt, hogy ugyanabban az időben különböző helyeket nem foglalhat el.

II. Az így megalkotott mozgathatóval ismét visszatérünk a térbe, és megalkotjuk *a kongruenczia axiómáját.* T. i., ha feltételezünk ilyen mozgathatót, és ez különböző időkben A-val és B-vel eshetik egybe: akkor a szemlélet azt mutatja, hogy $A \doteq B$.

Ámde ugyanaz a mozgatható nem eshetik egybe bármely vele *geometriailag egyenlő* A-val és B-vel (e fogalomról később lesz szó). Például, ha A és B csavarok, a melyek közül az egyik jobbra, a másik balra csavarodik, még ha egyébként egyenlők is. Majd kitűnik, hogy számtalan ilyen eset van. De a 60. oldal szerint bizonyos megállapítással olyan A és a létesíthető, hogy ugyanaz a mozgatható különböző időkben a-val és B-vel eshetik egybe.

Ha bármely P-ről azt mondjuk, hogy mozgatjuk: akkor mindig olyan folytonos mozgathatót kell gondolnunk, a melybe az egész P beleesik, még akkor is, ha P pontoknak összessége.

Ha pedig azt írjuk, hogy

$$A \star B \star C \star \ldots \doteq a \star b \star c \star \ldots,$$

ez úgy értendő, hogy az a mozgatható, a melybe A, B, $C, \ldots$ beleesnek, olyan helyzetbe hozható, hogy A a-val, B b-vel, C c-vel, ... egyidőben esik egybe.

Ha az említett mozgást megengedjük, a geometria élénkebbé, könnyebbé és érthetőbbé válik, és a *görög és a brittaniai* ARCHIMEDES alkalmazták is a mozgást; és mihelyt az egyik háromszöget a másikra helyezzük, mint azt EUKLIDES teszi, a mozgást a kifejtett értelemben mindig meg kell engednünk. Valóban ugyanis a térnek egyetlen része sem képes helyét változtatni, hanem csak azt a dolgot, a melyet bizonyos időpontban tartalmaz. Ugyanezek a dolgok a mozgás igénybevétele nélkül is tárgyalhatók, csakhogy sokkal hosszadalmasabban.

4. §.

[A geometriai mozgásra vonatkozó alapfogalmak.]

A mondottak szerint a továbbiakra nézve hasznos lesz, ha a mozgásra vonatkozó fogalmak meghatározását behatóan vizsgáljuk.

1. Az A *helyének* nevezzük a térben mindannak az összességét, a minek valamijével ugyanabban az időpontban A-nak valamije egybeesik.

2. Arról, a mi a T időnek minden pontjában van, azt mondjuk, hogy *mindig megvan a T alatt.*

3. Valahányszor bizonyos tekintetben fellép az a szólásmód, hogy *M-nek T alatt L a helye*, vagy hogy *T alatt az L hely M-é,* az a kérdés merül fel, hogy mit jelent majd az, ha valamennyi kapcsolaton végig menve, M-et ezekkel helyettesítjük: *valami az M-ből,*

minden az M-ből, nem minden az M-ből, semmi az M-ből, vagy *valami, a miből M ki van zárva; T* helyébe pedig ezeket teszszük: *néhány időpontja, minden időpontja, semmi időpontja*, vagy *néhány időpont*, melyek nem merítik ki a *T*-t, és *L* helyébe ezeket teszszük: *ugyanaz, nem ugyanaz*. Ily módon ezek mindegyikét lássuk el különböző meghatározással, és az így származó eseteket kapcsoljuk össze egymással különböző módon. Ámde a rövidség kedvéért csak néhány a legszükségesebbek közül sorolható itt fel, megjegyezve azt, hogy az összekapcsolás értelmére figyelem fordítandó. Pl. *mindennek a helye nem ugyanaz*, és *nem mindennek ugyanaz a helye*, nem egyenlő értékű kijelentések. Az első t. i. azt jelentheti, hogy mindennek nem ugyanaz a helye, azaz semminek a helye sem ugyanaz.

4. Ha *mindennek az M-ből*, azaz *mindennek, a mi M-ből való* a folytonos *T* idő alatt a térben *a helye ugyanaz* [marad], azt mondjuk, hogy *M a T alatt nyugalomban van.*

5. *M mozgása* alatt azt értjük, hogy *valaminek az M-ből T* egyes pontjai alatt *nem ugyanaz a helye.*

6. A *T* minden alkotó része alatt végbemenő mozgásról azt mondjuk, hogy *mozgás a T alatt.*

7. Ha azonban valaminek egymagában a helye mindig ugyanaz, akkor vagy az *egy helyben való mozgással* van dolgunk, mint a milyen például a gömbé, ha az a valami az *M* maga, vagy pedig *a nyugalom és mozgás összetételével*, t. i. ha valami nyugszik, midőn *M* mozog. A gömböt valóban egy helyben mozgathatjuk, úgy hogy vagy csak középpontja, vagy pedig valamelyik átmérője is nyugalomban marad.

8. Ha valamely *Q* a mozgó *M*-ből nyugalomban marad, azt mondjuk, hogy *M a Q körül mozog.*

9. Továbbá *T* néhány pontja alatt érthető két bizonyos módon meghatározott pontja is.

a) Ha mindennek az *M*-ből valamely időnek első és utolsó pontjában a helye ugyanaz, akkor azt *teljes visszatérésnek* nevezzük.

b) Abból, hogy *M*-nek *T* bizonyos *a* és *b* pontjában a helye nem ugyanaz, a következő fogalom származik. Ha a hely nem ugyanaz: akkor az előbbinek az utóbbival vagy van valamije közösen, vagy pedig nincsen. Ha általában semmijük sem közös, vagy pedig az, a mijük közös, a kettőnek elválaszthatatlan része: akkor azt mondjuk, hogy *M teljesen elmozdult.*

c) Ha *T* minden *a* pontjának megfelelőleg van *T*-nek az *a*-t magában foglaló olyan folytonos része, hogy ennek nincsen két olyan pontja, a melyben *M*-nek, vagy valamely alkotó részének a helye ugyanaz: akkor azt mondjuk, hogy *M tova* mozog.

5. §.

[A mozgás három primitiv faja.]

A mozgás első szemléletes faja.

[*Szabad mozgás.*]

Ebből különböző kérdések származnak:

I. Elmozdulhat-e a $\mathfrak{p}$ pont bárhonnan mindaddig, míg a térnek valamely tetszés szerint megadott M pontjába el nem jut; még pedig úgy, hogy mindent, a mibe belé esik, magával ragadjon? és milyen utat ír le $\mathfrak{p}$?

A szemlélet mutatja, hogy $\mathfrak{p}$ mindent, a mibe belé esik magával ragadva, bármely olyan úton, mely $\mathfrak{p}$-t M-mel összeköti (valóban tehát számtalan úton) mozgatható egészen M-ig, és hogy minden ilyen útja vonal.

Ez *a mozgás első szemléletes faja.*

A *vonalat egyszerűnek* nevezzük, ha egyetlen olyan pontja sincsen, a melyből a pontnak kettőnél több útja nyílik; a *felület* pedig *egyszerű* akkor, ha semmi olyan három alkotó része nincsen, hogy azoknak kettenként ugyanaz az egyszerű vonal a metszésük.

Az egyszerű *vonalról* azt mondjuk, hogy *önmagába visszatérő,* ha valamely benne mozgó pont első helyére térhet vissza a nélkül, hogy előbb valamely már elfoglalt helyen lett volna.

A mozgás második szemléletes faja.

[*Forgás egy szilárd pont körül.*]

II. Az a kérdés támad, vajjon mozoghat-e valamely mozgatható úgy, hogy valami belőle nyugalomban maradjon? Vajjon nyugalomban maradhat-e egy pontja és csakis egy? Vajjon kettő-e vagy több? és ekkor milyen mindannak az összessége, a mi a mozgás közben nyugalomban marad? milyen nem lehet az?

A mi az elsőt illeti, a szemlélet azt mutatja, hogy minden olyan M, a melybe $\mathfrak{p}$ beléesik, számtalan úton mozoghat $\mathfrak{p}$ körül; még pedig úgy, hogy minden az M-be eső (és $\mathfrak{p}$-től különböző) $\mathfrak{a}$ pont visszatérjen.

Ha erről áttérünk az egészre, származik a gömb felülete, t. i. mindazoknak a $\mathfrak{b}$ pontoknak összessége, a melyekre nézve $\mathfrak{p} \star \mathfrak{a} \doteqdot \mathfrak{p} \star \mathfrak{b}$.

A szemlélet azt mutatja:

1. Hogy ez az összesség felület, mely a teret két alkotó részre választja szét, melyek közül az egyiket, t. i. azt, a melynek $\mathfrak{p}$ belső

pontja, minden oldalról körülzárja, a másikat pedig, mely köröskörül a végtelenig terjed, kizárja; maga pedig e kettőnek közös határa.

2. Hogy egyetlen pont sem juthat az egyik alkotó részből a másikba a nélkül, hogy a közös határon át nem menne. Ez azután *kiterjeszthető minden kontinuumnak bármely két olyan alkotó részére, a melyeknek közös határuk van, ha a pontnak abban a kontinuumban kell mozognia.*

Az említett gömbről mondhatjuk, hogy *az* $\mathfrak{a}$ *pontnak az* $\mathfrak{a}$ *gömbje,* a melynek középpontja $\mathfrak{p}$; a felület pontjairól pedig mondhatjuk, hogy a középponttól *egyenlő távolságra* vannak, ha a $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{a}$ távolságát (az 52. oldal értelmében) $\mathfrak{a} \star \mathfrak{p}$ fejezi ki.

Ha nem fogadjuk el axiómának, hogy a középponttól egyenlő távolságra levő pontok összessége felület, azt be is lehet bizonyítani. Ha ugyanis a térnek alkotó részét foglalná magában, ennek köröskörül meg kellene lennie, még pedig minden kiemelkedés nélkül; mert akkor az ilyennek köröskörül mindenütt is meg kellene lennie, és így két olyan felületünk volna: egy külső és egy belső, a melyek a középpontot minden oldalról egyenlő távolságra levő pontokkal zárnák körül. Hogy ezek azonban különbözők nem lehetnek, az ismét a szemléletből tűnik ki.

A mozgás harmadik szemléletes faja.

[*Forgás két szilárd pont körül.*]

III. Ha azonban a gömböt vizsgáljuk, a szemlélet továbbá azt mutatja, hogy ha az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}$ pontok M-be esnek, és $\mathfrak{b}$-nek olyan útja van, mely $\mathfrak{a} \star \mathfrak{p}$-re vonatkozólag köröskörül egyenletesen meg van határozva: akkor M az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{p}$ körül úgy mozgatható, hogy $\mathfrak{b}$ az említett útat írja le.

IV. Ámde most az a kérdés támad:

1. Miképen lehet olyan $\mathfrak{b}$ pontot felmutatni, a melynek $\mathfrak{a} \star \mathfrak{p}$ körül van útja?

2. Vajjon lehetséges-e az is, hogy $\mathfrak{b}$-nek megfelelőleg csak egyetlen olyan $\mathfrak{d}$ van, a melyre nézve $\mathfrak{a} \star \mathfrak{p} \star \mathfrak{b} \div \mathfrak{a} \star \mathfrak{p} \star \mathfrak{d}$?

3. Végre, vajjon lehetséges-e az is, hogy nincsen olyan $\mathfrak{d}$, a melyre nézve $\mathfrak{a} \star \mathfrak{p} \star \mathfrak{b} \div \mathfrak{a} \star \mathfrak{p} \star \mathfrak{d}$?

Ha már mostan $\mathfrak{a} \star \mathfrak{p}$-t valamely tetszés szerinti A-val helyettesítjük, ebből a következő fogalom származik. Ha nincsen olyan a B-től különböző C, a melyre nézve $A \star B \div A \star C$, még pedig úgy, hogy midőn A-nak minden pontja megmarad első helyén, C nem ugyanarra a helyre esik mint B: akkor azt mondjuk, hogy *B az A-ra nézve* *egyetlen.* Ha pedig *B*-nek egyetlen pontja sem eshetik máshova: akkor azt mondjuk, hogy *B az A-ra nézve teljességgel egyetlen.*

Könnyen belátható, hogy *A* egybeeshetik önmagával, még ha nem is minden pontja marad az előbbi helyén. Ha például $\mathfrak{p}$ a gömb középpontja, $\mathfrak{a}$ pedig felületének valamely pontja, és $\mathfrak{a} \star \mathfrak{p}$-t *A*-val jelöljük: akkor, még ha $\mathfrak{p}$ az $\mathfrak{a}$-ba és $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{p}$-be esik is, a kettős gömb *A*-ra nézve egyetlen. Lehetne ennek az esetnek külön nevet is adni.

Egyébként még az a kérdés is merül fel, vajjon $\mathfrak{a} \star \mathfrak{p} \div \mathfrak{p} \star \mathfrak{a}$? A szemléletből kitűnik, hogy ez így van.

Példák:

Ha $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ valamely háromszög csúcsai, akkor minden, a mi a térhez tartozik, az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve teljességgel egyetlen. Az a felület, a mely úgy keletkezik, hogy valamely vonalat két pontja körül forgatunk, ezekre nézve egyetlen, de nem teljességgel egyetlen.

Ha azonban $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}$, akkor $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$ önmagával úgy is eshetik egybe, hogy $\mathfrak{a}$ önmagára, $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{c}$-re és $\mathfrak{c}$ a $\mathfrak{b}$-re esik, és ha a háromszög síkjának egyik oldalát α-nak, a másikat pedig β-nak nevezzük: akkor a háromszögnek az a felszíne, a mely előbb α felé fordult, most majd β felé fordul, míg α felé az fordul, a mely előbb β felé fordult. Ha továbbá $\mathfrak{p}$ valamely pont, mely az α oldalra esik, és feltételezzük, hogy a háromszög α-val együtt az $\mathfrak{a}$-ból a $\mathfrak{bc}$-re bocsátott merőleges körül forog: akkor, midőn α a β helyére jut, $\mathfrak{p}$ majd szintén β-ba jut, és ha $\mathfrak{p}'$-re esik, $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{p} \div \mathfrak{a} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{p}'$. Ugyanaz kiderül még akkor is, ha $\mathfrak{p}$ magába a síkba, az említett merőlegesen kívül esik, és így minden esetben csak egyetlen olyan $\mathfrak{p}'$ pont van, mint a milyent említettünk, hacsak $\mathfrak{p}$ nem esik az említett merőlegesbe. Ekkor azonban szintén úgy lesz, hogy $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{p} \div \mathfrak{a} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{p}$.

6. §.

[Egyenes, sík, kör, gömb.]

Erről áttérünk az egészre, azaz mindazoknak a pontoknak összességére, a melyek az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ pontokra nézve egyetlenek, t. i. az egyenesre, és ezt ismét szélesebbre kiterjesztve, a következő fogalomhoz jutunk.

A térből azt, a mi magában foglalja mindazokat a térbeli pontokat, a melyek bármely belőle való két pontra nézve egyetlenek, ha *vonal, egyenesnek,* ha pedig *felület, síknak* nevezzük. Majd kitűnik, hogy az [a térből való] maga a minden irányban a végtelenbe kiterjedő *tér,* ha *a térnek valamely alkotó részét* foglalja magában. Sőt ez az értelmezés az egyenest és a síkot is, mint végteleneket állítja elénkbe. Kérdés azonban, vajjon ilyenek egyáltalában vannak-e? Alább majd megmutatjuk, hogy bármely két ponton át van egyenes és bármely három ponton át van sík.

Minthogy ez az értelmezés egyszersmind a síknak az egyenessel való rokonságát fejezi ki, több pontos értelmezés mellőzhető. Legyen szabad azonban mégis egy ilyent bemutatni.

Az az alakzat, mely bizonyos két pontra nézve egyetlen, és a mely minden pontjának megfelelőleg ugyanaz a $\mathfrak{p}$ pont olyan, hogy az említett alakzat bármely két $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ pontjára nézve $\mathfrak{p} \star \mathfrak{a} \doteq \mathfrak{p} \star \mathfrak{b}$, abban az esetben, ha vonal, *kör*, abban pedig, ha felület, *gömb*.

Az az egyszerű vonal, mely bizonyos két pontra nézve egyetlen, akkor, ha önmagába visszatérő, *kör*, ha pedig nem ilyen, akkor *egyenes*.

Az az alakzat, mely valamely pontra nézve egyetlen, *gömb*.

Elegáns a síknak az az értelmezése, melyet Bolyai János, az Appendix szerzője nyújtott. Ő mindazoknak a $\mathfrak{p}$ pontoknak összességét, a melyekre nézve $\mathfrak{p} \star \mathfrak{a} \doteq \mathfrak{p} \star \mathfrak{b}$, hol $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ bizonyos két pont (mely minden $\mathfrak{p}$-re nézve ugyanaz), *síknak* nevezi, két sík metszését pedig *egyenesnek*.

7. §.

[Egyenesek és síkok kapcsolatai.]

A midőn megjelen a sík, a melybe beléesik bármely pontjától bármely más pontja felé húzott egyenes, evvel olyan egyszerűbb és áttekinthetőbb mező nyílik meg előttünk, a mely köröskörül a végtelenbe terjed, és a teret két egyenlő részre osztja fel; habár ezek (a mint majd alább megmutatjuk) nem eshetnek egybe akkor, ha annak, a mi a felosztást létesítette, minden pontja megmarad a helyén. Az értelem, mely ezért a mindenfelé végtelen térből ide száll le, mégis előbb az egyenes és a sík kapcsolatait vizsgálja meg általánosságban.

Bármely A és B, a melyek mindegyike vagy egyenest, vagy pedig síkot jelent, vagy metszik egymást, vagy nem metszik egymást. Kérdés tehát, vajjon metszhetik-e egymást, és lehetnek-e olyanok, hogy nem metszik egymást? és ha metszhetik egymást, mikor történik az? és a metszésük milyen?

Majd bebizonyítjuk, hogy minden adott P síknak és $\mathfrak{p}$ pontnak megfelelőleg van olyan a $\mathfrak{p}$-t magában foglaló sík, valamint egyenes is, a mely P-t nem metszi, ha mindjárt egyidejűleg végteleneknek gondoljuk az egyes alakzatokat. Épen úgy kitűnik majd, hogy valamely adott A egyenesnek és bármely $\mathfrak{p}$ pontnak megfelelőleg van olyan a $\mathfrak{p}$-t magában foglaló B egyenes, a mely, habár végtelennek gondoljuk mind a kettőt, nem metszi A-t; még pedig van ilyen abban a síkban, a mely A-t és $\mathfrak{p}$-t magában foglalja, valamint azon kívül is. Kitűnik továbbá az is, hogy egy és ugyanazon a ponton számtalan sík megy át, és hogy bármely két végtelen P és Q síknak, a melyeknek közös pontjuk van, a metszése egy mindkét felé a végtelenbe terjedő egyenes. Épen úgy bármely ponton számtalan egyenes megy át, és két egyenesnek, a melynek valamije közös, a metszése egyetlen pont.

Ámde most már az a kérdés támad, vajjon csak egyetlen, vagy több olyan sík van-e, a mely $\mathfrak{p}$-n megy át és a P síkot nem metszi? Ha csak egyetlen ilyen volna: akkor ennek az egyetlen P'-nek és a P síknak valamely harmadik (a P egyik pontjából a P' egyik pontjához húzott egyenesen átmenő) Q síkkal való metszete olyan pár egyenest adna, mely a Q síkba esik és nem metszi egymást, míg minden más egyenes, a mely a $\mathfrak{p}$ ponton megy át és ugyanabba a Q síkba esik, a P és Q síkok közös egyenesét metszi; mert, ha nem metszené, könnyen bebizonyíthatnók, hogy van olyan ezt a $\mathfrak{p}$ pontot tartalmazó egyenesen átmenő sík is, a mely nem metszi a P síkot. Így tehát ekkor, fennállana EUKLIDES XI. axiómája, a melyről azonban bővebben csak később lesz szó.

8. §.

[Ugyanazon a ponton átmenő egyenesek.]

Ha itt először is több ugyanabból a pontból kiinduló egyenest foglalunk össze, a következő fogalom származik.

I. [Gúla, hasonlóság, geometriai egyenlőség.]

Ha ugyanabból a $\mathfrak{p}$ pontból kiinduló egyenesek valamely f alakzatban végződnek (akár része ez a síknak, akár nem): akkor azoknak az egyeneseknek az összességét, a melyek $\mathfrak{p}$-től az f alakzat pontjaiig terjednek, (tágabb értelemben) *az f alapon nyugvó gúlának* nevezzük. Ide tartozik a háromszög is, ha az f alakzat egyenes.

Evvel egyszersmind meg van határozva amaz egyenesek mindegyikének nagysága is. Ha ezeket az egyeneseket $\mathfrak{p}$-ből kiindulóknak tekintjük, és végpontjaiknak összességét teszszük a vizsgálat tárgyává, könnyen merül fel az a kérdés, hogy mi lenne akkor, ha mindegyikük például kétszer, háromszor stb.-ször hosszabbá vagy rövidebbé válnék? szóval, ha mindegyikük az előbbinek $\frac{n}{m}$-edévé válnék? És ebből származik a következő fogalom, ha megállapítjuk, hogy *A-nak k oldala* alatt értjük az α és β alkotó részekből álló A kontinuumnak azt az α alkotó részét, a melyben benne van k, úgy hogy α, ha úgy van róla szó, hogy ki legyen belőle zárva az α, β-ban közös c, k-nak *c-ből való környékének* nevezhető. A kontinuum belseje alatt pedig értjük azt az ahhoz hozzátartozót, a minek a határral semmije sem közös.

1. Ha Q valami tetszés szerinti a térből való, a minek valamely pontját általánosságban $\mathfrak{Q}$-val jelöljük, és valamennyi $\mathfrak{Q}$-nak ugyanaz a $\mathfrak{p}$ pont és ugyanaz a β mennyiség felel meg, és minden a $\mathfrak{p}$-ből kiinduló és valamely $\mathfrak{Q}$-n átmenő egyenesben a $\mathfrak{pq}$ egyenes $= \beta \cdot \mathfrak{pQ}$, $\mathfrak{q}$-t mindig a $\mathfrak{pQ}$ egyenes abban az oldalában választva, a hol $\mathfrak{Q}$ van: akkor valamennyi $\mathfrak{q}$-nak P összességéről azt mondjuk, hogy *hasonló* Q-val, és a $\mathfrak{q}$-k bármely összességéről mondjuk, hogy *homologonja* azon $\mathfrak{Q}$-k összességének, a melyek ama $\mathfrak{q}$-knak megfelelnek. Hogy ilyen értelemben hasonlók csakugyan vannak, az világos.

Hasonlóknak mondhatjuk P-t és Q-t akkor is, ha a P és Q bármelyike minden pontjának megfelel a másiknak bizonyos pontja; még pedig más-más pontnak az egyikből mindig más-más pont a másikból, és mindannyinak megfelelőleg ugyanaz a β mennyiség olyan, hogy ha $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ a P-nek tetszés szerinti pontjai és $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ az ezeknek megfelelő pontok Q-ban, akkor $\mathfrak{AB} = \beta \cdot \mathfrak{ab}$. Hogy ilyenek lehetségesek, ha EUKLIDES XI. axiómája fennáll, olyan háromszögek segitségével mutatható ki, a melyeknek $\mathfrak{p}$ a közös csúcsuk.

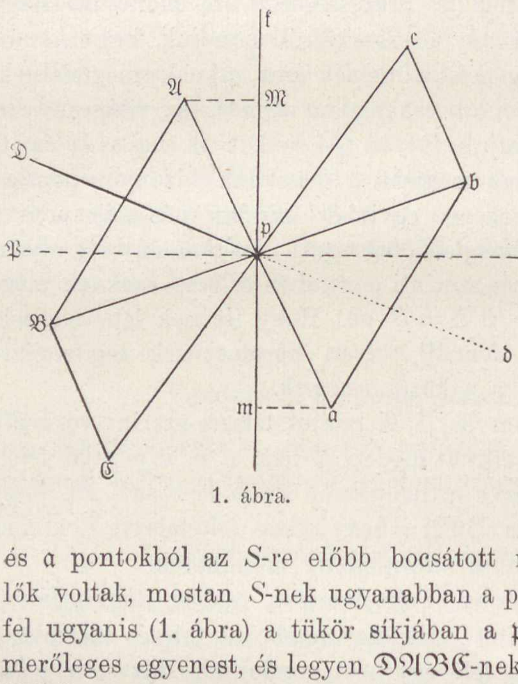
Vagy pedig, ha a három $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ pontot tetszés szerint veszszük fel P-ben, és ezeknek az említett módon Q-nak $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ pontjai felelnek meg, és a szögekre nézve (a melyekről alább lesz szó) áll, hogy $\mathfrak{ABC} = \mathfrak{abc}$, $\mathfrak{BAC} = \mathfrak{bac}$ és $\mathfrak{BCA} = \mathfrak{bca}$: akkor, feltételezve EUKLIDES XI. axiómáját, P és Q szintén *hasonlóknak* mondhatók.

Elegáns a *hasonlóknak* az értelmezése, melyet BOLYAI János, az *Appendix szerzője* nyújtott. Ha ugyanabból a tetszés szerinti $\mathfrak{p}$ pontból Q minden pontja felé egyenest gondolunk húzva, a $\mathfrak{p}$-ből Q valamennyi pontja felé húzott egyenesek közül a végtelenbe meghosszabbított legszélsőbbeknek összességét *Q relativ formájának* nevezve, P-t és Q-t *hasonlóknak* mondja, ha P minden relativ formájának megfelelőleg van Q-nak olyan relativ formája, mely vele egyenlő.

Hogy ezeknek az értelmezéseknek mindegyike bármelyik másik helyébe tehető, bebizonyítható, ha EUKLIDES XI. axiómája fennáll.

2. De az első értelmezéssel kapcsolatban könnyen az a kérdés merül fel, hogy mi lesz akkor, ha minden $\mathfrak{q}$-t a másik oldalban ve-

szünk fel (nem abban, a melyben a megfelelő Ω van)? Világos, hogy ezen a módon is bizonyos tekintetben hasonló alakzatok származnak, ha úgy tetszik, hogy e fogalmat ekként bővítsük ki. De abban az esetben is, ha $\beta = 1$, olyan egy közös csúcscsal biró alakzatok keletkeznek, melyek, ha egyébként bizonyos mindjárt jellemzendő tekintetben egyenlők is, még sem eshetnek egybe soha, és ha egyidejüleg vannak jelen, a helytől eltekintve is megkülönböztethetők egymástól. Legyen pl. Q a jobb kéz: akkor a másik oldalon $\mathfrak{p}$-n túl a bal kézzel egybevágó alakzat származik. Ha t. i. a keletkezett alakzatot úgy fordítjuk meg, hogy az, a mi fenn volt, lefelé, és a mi lenn volt, felfelé kerüljön: akkor olyan kép áll elő, a milyen valamely a $\mathfrak{p}$ ponton átfektetett S tükörben keletkezik, ha t. i. az említett, a $\mathfrak{p}$ pontban az S tükörre bocsátott merőleges körűl végzett forgatás két derékszögnyi volt. A Q képe alatt pedig itt azoknak a pontoknak az összességét értjük, melyek a Q minden pontjából az S síkra bocsátott és a másik oldalon velük egyenlő darabbal meghosszabbított merőlegeseket határolják. Könnyen belátható, hogy az említett forgatás után a bármely egymásnak megfelelő $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{a}$ pontokból az S-re előbb bocsátott merőlegesek, melyek egyenlők voltak, mostan S-nek ugyanabban a pontjában végződnek. Vegyük fel ugyanis (1. ábra) a tükör síkjában a $\mathfrak{p}$-n átmenő és a rajz síkjára merőleges egyenest, és legyen $\mathfrak{DABC}$-nek $\mathfrak{D}$ pontja a rajz síkja felett, $\mathfrak{ABC}$ a rajz síkjában, és $\mathfrak{ap} = \mathfrak{Ap}$, $\mathfrak{bp} = \mathfrak{Bp}$, $\mathfrak{cp} = \mathfrak{Cp}$ és $\mathfrak{dp} = \mathfrak{Dp}$: akkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{d}$ a rajz síkja alatt lesz, és hogy a közös csúcscsal biró egybevágó háromszögek miatt az egyenlő nevű betűkkel jelölt pontokból a tükörre bocsátott merőlegesek egyenlők. Ha tehát a kis betűkkel jelölt alakzatot a $\mathfrak{pf}$-ra merőleges $\mathfrak{Pp}$ körül két derékszögnyivel elforgatjuk: akkor az $\mathfrak{m}$ pont $\mathfrak{M}$-be esik stb. és $\mathfrak{d}$ szintén a rajz síkja felett szembe kerül $\mathfrak{D}$-vel.



1. ábra.

Ezt a dolgot még megvilágitja, ha két egyébként egyenlő csavar közül az egyik jobbra, a másik pedig balra csavarodik, és amazt a tükörtől oldalt, ezt pedig a tükör elé tartjuk. Ekkor a balra csavarodó csavar képe jobbra csavarodó csavar lesz, mely avval, a melyet oldalt tartottunk, egybeesni képes. Épen úgy lehet egybevágó a jobb kéznek képe a bal kézzel, de a jobb kézre illő keztyűnek belső felületét kifelé kell fordítanunk, hogy a bal kézre illővé váljék.

3. Ebből a következő fogalom is származik. Ha A-nak nincsen minden pontja ugyanabban a síkban, sem pedig A nem olyan a és b részeknek összefoglalása, hogy a és b-nek egyidejüleg jelenlevő képe csakis a helyre nézve különböztethetők meg egymástól: akkor A és minden olyan B, a mely A-nak egyidejüleg jelenlevő képétől csak a helyre nezve különböztethető meg, *ellenkező értelemben egyenlő alakzatok*. Ezek t. i. olyanok, hogy nem eshetnek egybe, habár ugyanannak a síknak ugyanazokban a pontjaiban emelt mind a két oldalon egyenlő merőlegesek révén az V. axióma szerint (33. old.) egyenlő műveletek eredményei, eltekintve attól, hogy az egyik az egyik oldalon, a másik pedig a másik oldalon származik.

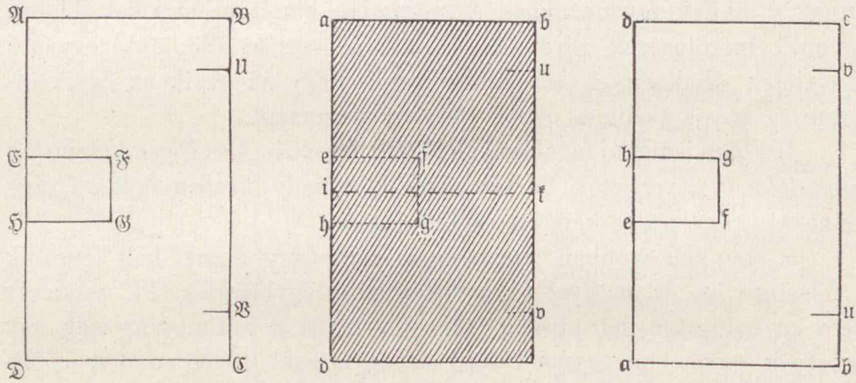
4. Ebből ismét új fogalom keletkezik. Ugyanis A és B *geometriailag egyenlőknek* nevezhetők, ha van olyan C, a mely mindegyikükkel vagy magával, vagy pedig képével eshetik egybe.

5. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy figyelemmel kell lennünk a felszínre is, a mellyel az egybeeshetők egybeesnek. Pl. valamely nem egyenlőszárú háromszög képe és maga a háromszög csak úgy eshetnek egybe, ha egymást vagy az egymással szemben fekvő felszíneikkel, vagy pedig az egymástól elfordított felszíneikkel fedik el. Hogy könnyebben fejezhessük ki magunkat, mondjuk, hogy az egymás felé fordított felszíneik egyenlő szinüek, pl. fehérek, az egymástól elfordítottak pedig feketék. Akkor arra, hogy egybeessenek, szükséges, hogy a fehér felszín a fehéret, vagy pedig a fekete a feketét fedje el. Ha azonban a parallelogramm egyik felszíne fehér és másik felszíne fekete: akkor az átló meghúzásával származó háromszögek általában csak úgy eshetnek össze egymással, ha az egyiknek fehér felszíne a másiknak fekete felszínét fedi el. Ha ellenben a körnek, vagy az egyenlőszárú háromszögnek képét a felező egyenes körül két derékszögnyivel elfordítjuk: akkor ezek úgy is eshetnek egybe [az eredetivel], ha a fekete felszínüket a fehér felé fordítják.

De az előbb mondottakat még megvilágítják a következők is. Ha a háromszög bármely pontjában a háromszög síkjára mindkét oldalon egyenlő merőlegeseket állítunk: akkor az F alakzatnak vannak olyan részei, a milyenekről fentebb szó volt. T. i. az az alakzat, mely a háromszögből és abból a merőlegesből áll, a mely az egyik oldalon van, és épen úgy az, a mely ugyanabból a háromszögből és a másik oldalon emelt merőlegesből áll, olyanok, hogy összefoglalásuk révén származik F, és mindegyikük teljesen egyenlő a másiknak képével. Így tehát F olyan, hogy képével egybe is eshetik.

De ha a merőleges csak az egyik oldalon van, továbbá nem valamely egyenlőszárú háromszöget felező merőlegesből emelkedik: akkor az így származó alakzatnak nincsen olyan két része, a milyenről előbb szó volt és így nem is eshetik egybe képével.

Hasonlóképen legyen (a 2. ábrában) 𝔄𝔅ℭ𝔇 egy ajtó; 𝔘-nál, 𝔅-nél legyenek sarkai, 𝔈𝔉𝔊ℌ legyen a kimagasló tolózárja, a mely 𝔈 kiszökellésével az ajtót zárja; képe legyen 𝔞𝔟𝔠𝔡 és az egymással szemben levő felszínek legyenek a fehérek. Akkor világos, hogy a zár és kiszökellő képe egymás felé nyúlnak, és midőn a fehér felszínek



a *b* *c*

2. ábra.

valamint 𝔄𝔅 és 𝔞𝔟 egybeesnek, a zár és képe ellenkező oldalokra kerülnek. Ha azonban minden, a mi 𝔉𝔈-nél és 𝔊ℌ-nál (fenn és lenn) van, egyenlő, úgy hogy két olyan rész van, a milyenről előbb szó volt: akkor ha 𝔞𝔟𝔠𝔡-t 𝔦𝔨 körül két derékszögnyire elforgatjuk, úgy hogy a képnek fekete felszíne a tárgynak fehér felszínével kerüljön szembe, 𝔡𝔠𝔟𝔞 származik, melynek fekete felszíne (a mint az ábra mutatja, a tolózárral együtt) egybevágó 𝔄𝔅ℭ𝔇-nek fehér felszínével. Ámde, ha úgy mint fent 𝔈 mellett van valami olyan, a mi ℌ mellett nincsen, az egybevágóság lehetetlen.

Minden állat külső alakját, ha rajta semmi rendellenes nincsen, a természet úgy alkotja, hogy két olyan részből áll, a milyenről előbb szó volt; t. i. olyanokból, melyek egyike a másiknak képe lehet, mintegy ugyanannak a síknak két oldalán úgy, a mint azt fentebb jellemeztük, egyenlő módon keletkezve, úgy hogy az említett értelemben geometriailag egyenlők.

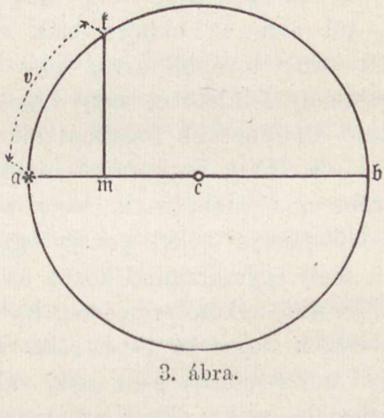
Megjegyzendő azonban, hogy valamennyi felület közül a sík az egyedüli, a mely olyan, hogy bármelyik felszíne a másik felé fordíttatva, ezt fedheti, és hogy Euklides rendszerében a sík egyedül a gömbbel egyezik meg abban, hogy mind a kettő bármely pontja körül önmagában mozgatható, és a döntő különbség [köztük] csak az, hogy a gömb minden pontja ugyanattól a bizonyos ponttól egyenlő távolságra van.

II. [Kör, kúp, szög, érintés, merőleges helyzet.]

Miután az előbbi fejezetben több, sőt számtalan olyan egyenessel volt dolgunk, a melyek a $\mathfrak{p}$ pontot közösen tartalmazták, könnyen arra a gondolatra jutunk, hogy a $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ egyenest $\mathfrak{p}$ körül mozgassuk és útjának alakját megvizsgáljuk. A lehetséges utak között akad olyan is, hogy a $\mathfrak{p}$ körül tovább mozgó $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ egyenes útja önmagába visszatérő. Az ilyen út vagy egészen egy és ugyanabba a síkba esik, vagy pedig nem.

1. Az első esetben $\mathfrak{p}$ kivételével minden pontnak útját *körnek* és ennek, azaz kerületének minden folytonos részét *ívnek*, azt az egyenest, mely $\mathfrak{p}$-től egészen addig a pontig terjed, a melynek útjáról szó van, *radiusnak* vagy *sugárnak*, $\mathfrak{p}$-t *középpontnak*, és az olyan egyenest, mely a kerület egyik pontjától annak valamely másik pontjáig terjed, *húrnak*, és ha ez a középponton megy át, *átmérőnek*, a síknak olyan részét, a melyet az ív és húr határol, *körszeletnek*, és a síknak olyan részét pedig, melyet az ív és ennek végpontjaihoz húzott két radius bezár, *körczikknek* nevezzük.

Ha pedig valamely pontot $\mathfrak{a}$-ból (3. ábra) kiindulva, a kerületben egészen valamely tetszés szerinti $\mathfrak{f}$ pontig mindig tovább mozgatunk, és útját, v-t mindig pozitivnak veszszük, ha a (*főátmérőnek* nevezett) $\mathfrak{ab}$ *átmérő* felett kezdődik, negativnak pedig, ha az az út $\mathfrak{ab}$ alatt kezdődik, továbbá az említett átmérőnek részeit a középponttól $\mathfrak{a}$ felé pozitivoknak, $\mathfrak{b}$ felé pedig negativoknak, és az $\mathfrak{ab}$-re bocsátott merőlegeseket, ha $\mathfrak{ab}$ fölött vannak, pozitivoknak, ha pedig $\mathfrak{ab}$ alatt vannak, negativoknak veszszük: akkor a $\mathfrak{f}$ pontnak $\mathfrak{ab}$-től való távolságát (azaz a $\mathfrak{f}$-ból a főátmérőre bocsátott merőlegest), $\mathfrak{fm}$-et az említett, $\mathfrak{a}$-tól $\mathfrak{f}$-ig megtett *v út sinusának* nevezzük, akár pozitiv, akár negativ irányban tétetett meg ez az út, sőt akár úgy is, hogy az



3. ábra.

említett pont mindig tovább mozogva, akárhányszor ismételten tért vissza $\mathfrak{a}$-ba, míg végre $\mathfrak{k}$-ban megállapodott. A középpontnak a sinustól való $\mathfrak{cm}$ távolságát pedig a *v cosinusának*, de az $\mathfrak{a}$ kezdőpontnak ugyancsak a sinustól való távolságát a *v sinus versusának* nevezzük, míg, ha a radius$=1$, $\frac{\sin v}{\cos v}$ a *v tangense* és $\frac{1}{\cos v}$ annak *secansa*. A *v complementumának* nevezzük az α ívet, ha $\alpha+v =$ a quadranssal, q-val. Például, ha $v = 3q$, akkor $\alpha = \overset{\longleftarrow}{2q}$. A $\sin \alpha$-t, $\operatorname{tang}\alpha$-t, sin vers α-t, $\sec\alpha$-t v-re vonatkoztatva ugyanazzal a névvel jelöljük, csakhogy a *co* szótagot teszszük elébe. Azt mondjuk ugyanis: *cosinus v*, *cotangens v*, *cosinus versus v* úgy, mintha mondanók: *complementi sinus stb.* Könnyen belátható, hogy a cosinusnak előbbi értelmezése ezzel megegyezik és hogy a sinus versus mint $1-\cos$ volna értelmezhető; továbbá, hogy ezek az ú. n. *trigonometrikus függvények* valamennyien a kellő helyen könnyű szerrel geometriai úton is állíthatók elő. A sinus neve onnan ered, hogy a kétszeres ívnek fél húrját így jelölték: s. ins. (azaz *semmissis inscriptae*).

2. Ha az egyenesnek előbb említett útja nem marad ugyanabban a síkban, könnyen elképzelhető, hogy a mozgatott egyenes legalább mindig bizonyos a $\mathfrak{p}$-n átfektetett síknak ugyanazon az oldalán marad mindaddig, míg tovább mozgatva vissza nem tér. Az ilyen utat $\mathfrak{p}$ *felé csúcsosodó* $\vee$ *-alakzatnak* nevezzük, mert nyilvánvaló, hogy az ilyen alakzat $\mathfrak{p}$-nél olyan különösséget mutat, mely közönségesen a *csúcs* néven szerepel.

3. Így aztán ez könnyen vezet reá bennünket olyan egyszerű vonal vizsgálatára, a melynek egyetlen, még pedig belső pontja a $\vee$-be és épen $\mathfrak{p}$-be esik, míg valamennyi többi pontja a térnek a $\vee$-től arra az oldalra esik, a mely különböző attól, a melyben a sík van; továbbá arra, hogy megvizsgálják az ilyen vonalat, ha valamely felületben, vagy végre a síkban fekszik, és azután a következő általánosabb fogalmat alkossuk.

4. Ha k vagy belső pontja az olyan l vonalnak, mely alkotó része az F alakzatnak, vagy pedig olyan vonal, melynek minden p belső pontja belső pontja egy-egy síkban fekvő olyan L vonalnak is, mely egyszersmind közös az F alakzatnak valamely nem az illető síkba eső alkotó részével; ha továbbá az első esetben az l vonal, melynek k pontja $\mathfrak{p}$-be esik, az utóbbi esetben pedig az L vonal, melynek p pontja $\mathfrak{p}$-be esik, valamely a $\mathfrak{p}$-ben csúcsosodó alakzatnak belsejébe esik: akkor azt mondjuk, hogy *F-nek k-nál szöge van*; mert azt az alakzatot, a melylyel F a k-nál kezdődik, *szögnek* nevezzük.

Könnyen belátható, hogy szögek előfordulhatnak vonalokban, felületekben, valamint olyan kontinuumban is, mely vonalból és felületből van összetéve.

5. Ámde most az a kérdés merül fel, vajjon a B egyenes i belső pontjából húzott A egyenes alkot-e szögeket? és hány szöget alkot az i-n túl meghosszabbított egyenes? vajjon néhány ezek közül egyenlő-e, és hogy melyek azok? Könnyen belátható, hogy azok, a melyeket csúcsszögeknek nevezünk, mindig egyenlők. Ha azonban mind a négy származott szög egyenlő, vagy pedig az a két szög egyenlő, a melyet az i-n túl meg nem hosszabbított A egyenes alkot: akkor mindegyiküket *derékszögnek* nevezzük. Két egyenes alkotta szög, melyet *egyenesvonalúnak* nevezünk, *respectiv mennyiséggé* (38. o.) válik oly módon, hogy azt az ívet, a melyet a szög csúcsa körül tetszés szerinti radiussal az egyik egyenestől a másikig leírunk, elosztjuk az ugyanazzal a rádiussal leírt egész kerülettel. Ha ezek a hányadosok két szögre nézve egyenlők, bebizonyítható, hogy azok a szögek egybevágóan kezdődnek; ha azonban az α szögnek a q, a β szögnek pedig a Q hányados felel meg és $q = \mu Q$, azt mondjuk, hogy az α szög a β szögnek μ-szerese. Két sík alkotta szög pedig respectiv mennyiséggé válik oly módon, hogy egész kerületével elosztjuk azt az ívet, melyet az egyik síknak bármely pontja leír, ha azt a metszés körül a másikig mozgatjuk. Világos, hogy ez a hányados mindig ugyanaz.

Az a szög, melyet az $\mathfrak{ab}$ egyenes a síkkal alkot, respectiv mennyiséggé válik oly módon, hogy egész kerületével elosztjuk azt az ívet, melynél kisebbet az $\mathfrak{a}$ metszéspont körül az $\mathfrak{ab}$ radiussal leírt gömb felületében a $\mathfrak{b}$ ponttól a síkig nem húzhatunk. A szöget a $\wedge$ jellel jelöljük.

6. Erről áttérünk annak meggondolására, hogy mi van akkor, ha valamely alakzatnak egyetlen pontjánál sincsen szög? Ilyen alakzatot *folyó alakzatnak* nevezünk, a mely ismét könnyen hozható kapcsolatba a mennyiség fogalmával. Így keletkezik az olyan alakzat fogalma, mely folyó is, és mennyiség is. Az ilyent *egyenletes alakzatnak* nevezhetjük. Ennek példái az egyenes, a kör, a csavarvonal, a sík, a gömb felülete, a henger felülete.

7. A folyó alakzatnak fogalma könnyen alkotható az egyenes és sík kizárásával is, és ekkor származik az olyan folyó alakzat, melynek semmi darabja sem egyenes vagy sík. Az ilyent *görbe alakzatnak* nevezzük.

8. Továbbá a *görbének* az egyenessel vagy a síkkal való összekapcsolására térve át, kérdezhetjük, vajjon görbe alakzatból és egyenes-

ből vagy síkból álló kontinuum lehet-e folyó alakzat? Így származik az *érintő* fogalma.

Azt mondjuk ugyanis, hogy az *F görbe alakzatot a* 𝔭 *pontban* valamely egyenes, vagy pedig az olyan egyenesek összessége *érinti*, a melyek mindegyikének van olyan az *F*-be eső belső pontja, 𝔭, hogy valamely a 𝔭-ben kezdődő alkotó részük valamely az *F*-ben fekvő és 𝔭-ben kezdődő vonallal folyó alakzatot alkot. Mindazoknak az ilyen egyeneseknek összességét, akár csak egy, akár pedig több van, *teljes érintőnek* nevezzük.

Például a gömböt egyenes érintheti, de [a gömbnek] teljes érintője sík, míg a köré egyenes.

Ebből kifolyólag könnyen jutunk azoknak a teljes érintőknek ismertető jeléhez, a melyek ugyanannak az *F* alakzatnak különböző pontjaiban teljes érintők. Ha *F*-ben van olyan *k*, hogy azoknak összessége, melyek *k* minden pontjában teljes érintők, ugyanaz mint a teljes érintő 𝔭-ben: akkor erről az érintőről mondjuk, hogy az *F* alakzatot nem csak a 𝔭 pontban, hanem *k-ban is érinti*. Így pl. ugyanaz a sík a hengert egy egyenesben és ennek minden pontjában is érintheti.

Sőt ebből kiindulva, továbbra is kiterjeszthető ez a fogalom, ha azt mondjuk, hogy *bármely F és f folyó alakzatok kölcsönösen érintik egymást k-ban*, ha *k* minden pontjában *F*-nek teljes érintője ugyanaz, mint *f*-é.

Innen származnak a fentebb említett fogalmak is. [A sík görbe érintője, normálisa, subtangense, subnormálisa.]

9. Könnyen kapcsolható továbbá össze a teljes érintő fogalma a derékszögnek kevéssel előbb tárgyalt fogalmával, és ezen a módon származik a *merőlegesség általános fogalma*.

Ha t. i. *T* az *F* alakzat teljes érintője a 𝔭 pontban, és a 𝔭-ben végződő *r* egyenes minden a *T*-ben fekvő és 𝔭-ben végződő egyenessel derékszöget alkot: akkor azt mondjuk, hogy a bármeddig meghosszabbított *r* egyenes 𝔭-*ben* vagy 𝔭-*ből* merőleges *T-re*, valamint *F*-re, ha az efféle mindkét felé végtelen egyenes, a melybe az ilyen *r* esik az egyetlen az olyan az *F* alakzatot magában foglaló felületre nézve is, a melynek teljes érintője 𝔭-ben sík. Azt, hogy *A* merőleges *B*-re így jelöljük: $A \perp B$.

Ugyanazt általánosabban kiterjeszthetjük *k*-ra is, mely akár pont, akár pedig vonal lehet. Ha ugyanis *k* minden pontjából van olyan merőleges, a milyenről szó volt: akkor azt mondjuk, hogy a *k* valamennyi pontjából kiinduló ilyen az *F*-re merőleges egyenesek összessége *k-ban*, vagy *k-ból merőleges F-re.*

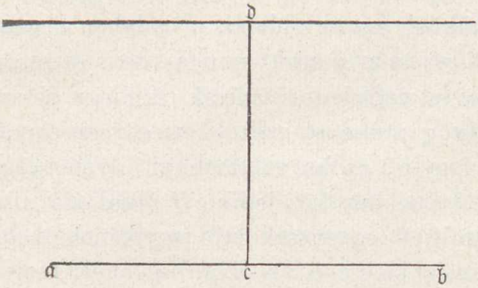
III. [Hasáb; párhuzamosság.]

Miután azokat az egyeneseket vizsgáltuk, a melyeket ugyanabból a $\mathfrak{p}$ pontból valamely tetszés szerinti f alakzat pontjaiig húztunk, közel esik az a gondolat, hogy egyiküknek azt az oldalát, a melyben $\mathfrak{p}$ van, a végtelenbe meghosszabbítsuk és a $\mathfrak{p}$ pontot mindig tovább mozgassuk, miközben a gúla csúcsa a végtelenbe távozik, és hogy ekkor kérdezzük, vajjon ez alatt az a szög, a melyet ezeknek az egyeneseknek valamelyike a csúcsnál alkot, fogy-e? és ha valamennyi [ilyen szög] fogy, vajjon mindegyik a 0 határértékhez közeledik-e? Majd kitűnik, hogy ez így van és hogy az említett egyenesek mindegyikének megfelelőleg egy olyan egyenes van, a melyben az olyan egyenes, melynek egyik végpontja $\mathfrak{p}$, másik végpontja pedig az f-ben fekvő $\mathfrak{q}$, midőn $\mathfrak{q}$ körül az említett egyenesen tovább mozog, ettől legelőször szakad el; sőt kitűnik még az is, hogy valamennyi egyenes, melyeknek $\mathfrak{p}$ a közös pontjuk, ily módon attól az egyenestől egyidejüleg szakadhatnak el legelőször, és így valamennyi egyidőben válhatik végtelenné.

1. Azonfelül még valamennyi [egyenest] végessé és egyenlő nagyságúvá teszszük és összességüknek nevet adunk. Nevezhetjük ezt [az összességet] általános értelemben vett *hasábnak*. Ha a végpontok összességét, a melyekben az f-ben kezdődő egyenlő egyenesek végződnek, F-nek nevezzük: akkor világos, hogy F és f minden pontjának a másiknak egy bizonyos pontja, még pedig mindegyiknek más és más, t. i. ugyanannak az egyenesnek másik végpontja felel meg.

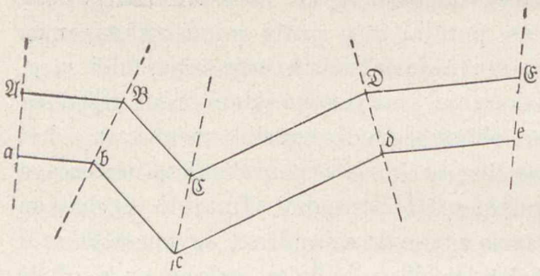
Így például, ha az f alakzat az r egyenes: akkor (mint majd az alábbiakból kitűnik) a síkban fekvő idom származik, a melyet a két szélső egyenes, az r egyenes és azoknak a pontoknak c összessége zár be, a melyek az r valamennyi pontjából kiinduló azokat az egyeneseket határolják, a melyek ugyanazt az említett egyenest először nem metszik. Itt most az a kérdés támad, hogy milyen az a c? és vajjon azok a szögek, a melyeket a szóban levő egyenlő egyenesek r-nek ugyanavval az oldalával alkotnak, egyenlők-e?

Erről áttérünk annak a meggondolására, hogy mi történik akkor, ha egyenlők? Kitűnik majd, hogy ha az r egyenes önmagában mozog tovább, míg kezdete a végére jut, és a szélső egyenest mindig ugyanabban a síkban magával viszi: akkor a szélső egyenes végpontjának útja azt a tulajdonságot mutatja, a melyet F-ről említettünk, eltekintve attól, hogy most már nem bizonyos, hogy a szóban levő valamennyi egyenes az előbbi módon egymást legelőször nem metszi. Ennek alapján a következő fogalom keletkezik: Ha az F és f alakzatok minden pontjának megfelel a másiknak egy bizonyos pontja, még pedig más-más pontnak az egyikből, más-más pont a másikból, továbbá a megfelelő pontok között elterjedő egyenesek egyenlők, és bármely kettejük ugyanabban a síkban van és még, ha végtelenek is, nem metszik egymást: akkor mindezeknek az egyeneseknek összességét általánosabb *hasábnak* nevezzük.

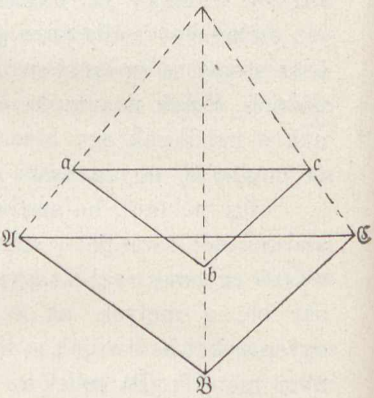


4. ábra.

2. Most már az épen említett szélső egyenes végpontjának útja új fogalomra vezet. Közel esik ugyanis, hogy azt a szöget, a melyet az [az egyenes] r-rel alkot, derékszögnek vegyük, és ha (a 4. ábrában) dc⊥ab és ac = cb: akkor nyilvánvaló, hogy akár jobbra, akár pedig balra mozgatjuk dcab-t, úgy hogy az ab egyenes mindig önmagában, és dc mindig ugyanabban a síkban maradjon, a d útja a mindkét felől és mindenünnen való egyenlő származásánál fogva (33. o.) olyan egyenletes vonal, mely mind a két oldalon és mindenütt egyenlő szögeket alkot dc-vel. (Hogy szöget alkot, majd



5. ábra.

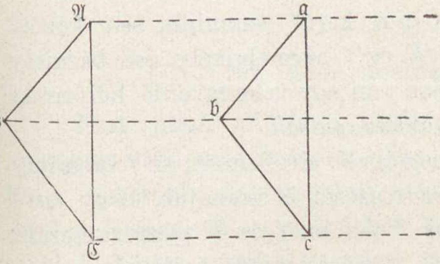


5a. ábra.

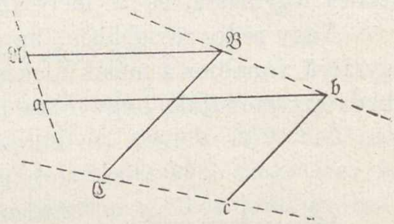
az alábbiakból tűnik ki.) A d útjáról, akár a végtelenig folytatjuk, akár pedig bármely folytonos részét tekintjük, azt mondjuk, hogy *a* cd *távolságban egyenlően folyó* ab-*vel.* Ez a vonal pedig egyenes, ha Euklides XI. axiómája fennáll, és ez fennáll, ha e vonal egyenes. Erről alább lesz szó.

3. Ezek után könnyen gondolhatjuk, hogy az ab egyenes valahol végződik, és ugyanott akár az előbbeni síkban, akár más síkban valamely másik [egyenes] kezdődik, a hol pedig ez végződik, ismét valamely másik kezdődik, és hogy az ezeknek az egyeneseknek

mindegyikével az ugyanabban a $\mathfrak{cd}$ távolságban egyenlően folyó is megvan, folytatva ezt, a meddig csak tetszik. Jelöljük az említett egyeneseket nagy betűkkel, a velük egyenlően folyókat az azonos nevű kis betűkkel; t. i. $\mathfrak{ABCD}$... legyen az $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CD}$,.., egye-



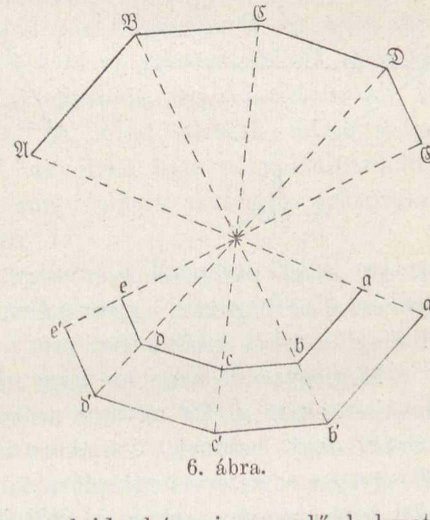
5*b*. ábra.



5*c*. ábra.

nesekből összetett vonal és $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$ legyenek azok az $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$-vel egyenlően folyók, melyek egymást $\mathfrak{b}$-ben metszik stb.

Most már az a kérdés támad, vajjon $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{b}$ az $\mathfrak{ABab}$ síkban az $\mathfrak{Aa}$ egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak-e? Ha általánosan feltételezzük, hogy $\mathfrak{H}$ a nagy betűk bármelyike és $\mathfrak{h}$ a megfelelő kis betű, és $\mathfrak{HI}$ meg $\mathfrak{hi}$ a $\mathfrak{HIhi}$ síkban a $\mathfrak{Hh}$ egyenesnek ugyanarra az oldalára esnek: akkor az egyenesekből összetett $\mathfrak{ABCD}$... vonalról és az $\mathfrak{abcd}$... vonalról azt mondjuk, hogy *tulajdonképeni egyenlő helyzetű* vonalak.



6. ábra.

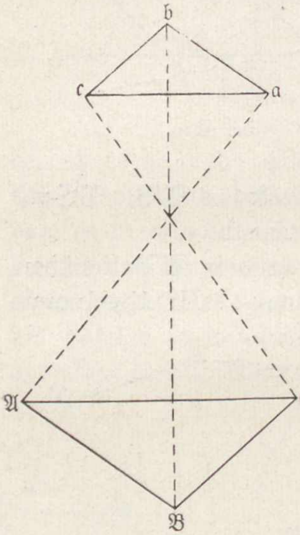
4. Ebből ismét a következő általánosabb fogalom származik: Ugyanis bármely L és l egyszerű vonalakat *általánosan egyenlő helyzetűeknek* nevezünk, ha bármely még olyan kicsiny k egyenesnek megfelelőleg vannak olyan tulajdonképeni egyenlő helyzetű L' és l' vonalok, hogy L és L' akármelyikének bármely pontja vagy a másikba esik, vagy pedig van olyan e pontból kiinduló és a másik vonal valamely pontjában végződő egyenes, a mely kisebb k-nál, és épen úgy az l és l' vonalok akármelyikének bármely pontja vagy a másikba esik, vagy pedig van olyan e pontból kiinduló és a másik vonal valamely pontjában végződő egyenes, a mely kisebb k-nál.

5. Ebből végre az F és f alakzatok *párhuzamosságának* általá-

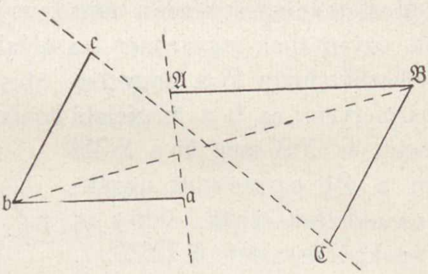
nos fogalma ered, ha az F és f alakzatok bármelyikének, például F-nek valamely 𝔓 pontjából húzunk az F-ben fekvő akármilyen és akárhány olyan egyszerű vonalat, a melyeknek 𝔓-n kívül semmijük sem közös, és f bizonyos 𝔭 pontjából kiinduló, olyan velük egyenlő helyzetűeket találhatunk, a melyek ugyanabban a sorrendben következnek egymásra, és a melyeknek 𝔭-n kívül semmijük sem közös. Vagy pedig rövidebben, ha az F és f bármelyikébe eső bármely egyszerű vonalhoz a másik alakzatban van egy vele egyenlő helyzetű: akkor azt mondjuk, hogy F és f *párhuzamosak.*

A legtágabb értelemben az f valamely folytonos részéről is mondjuk, hogy *párhuzamos* F-fel, ha f és F párhuzamosak. Az F és f párhuzamos voltát így jelöljük: $F \parallel f$.

Vajjon azonban az az egyenes, a mely a másikat legelőször nem metszi



6*a*. ábra.



6*b*. ábra.

(67. o.), ezzel párhuzamos-e, vagy pedig vajjon van-e egyáltalában egyenessel párhuzamos egyenes, EUKLIDES XI. axiómájának eldöntésétől függ, a miről később lesz szó.

Megjegyzendő azonban, hogy másféle párhuzamosságot is különböztethetünk meg. Ha ugyanis az egyenlő helyzetűek értelmezésében bármely nagy betűnek, ℌ-nak és kis betűnek, 𝔥-nak megfelelőleg a ℌ𝔍 egyenes és az evvel egyenlően folyó az emlitett síknak két különböző felébe esnek: akkor az 𝔄𝔅ℭ𝔇 ... és 𝔞𝔟𝔠𝔡 ... vonalakról azt mondjuk, hogy *fordítva egyenlő helyzetüek*, és ebből erednek a *fordítva párhuzamosak*, míg az előbbiek *tulajdonképenieknek* nevezhetők. Ezek után az *egyenlő helyzetűeknek* és *párhuzamosoknak* fogalma általánosabban kiterjeszthető, ha egyenlő helyzetűeknek nevezzük az olyan alakzatokat, a melyekben minden ℌ𝔍 és 𝔥𝔦 vagy egyidőben az említett síknak ugyanabban a felében, vagy pedig egyidőben két különböző felében fekszenek.

Az 5. ábra igen egyszerű példát mutat, a melyből ez a fogalom az 𝔄𝔅ℭ𝔇... síkbeli vonalra nézve ered, és ép úgy a 6. ábra a fordított párhuzamosság példáját mutatja. Egyszersmind világos, hogy vannak olyan párhuzamos alakzatok is, a melyek egymást metszik.

9. §.

[Sík idom. Geometriai szerkesztés.]

Ezek után, minthogy azok a vizsgálatok, melyek az értelmet visszatartották attól, hogy a síkba szálljon le, maguk mutatnak reá, hogy behatóbb megértésükre még több segédeszköz szükséges, az értelem ezeket az egyszerűbbek közt keresve, a síkba száll le, hol:

1. Látja, hogy a végtelen mezőn a pontnak végtelen sok útja nyílik, és szembetűnik, hogy az egyenesen kívül más egyszerű, még önmagába visszatérő vonalak is vannak. Ha az ilyen bármely egyszerű felületben van, *idomnak* nevezzük. Az ilyen a síkban is lehet különféle fajtájú görbe (ide tartozik a kör is, mint a mozgás második szemléletes fajánál a síkra szorított út), vagy lehet tisztán egyenesekből összetéve és vegyes. Ha három egyenesből van összetéve, *háromszögnek*, ha négy egyenesből áll, *négyszögnek* és épen úgy, ha n egyenesből van összetéve, *n-oldalú egyenesvonalú sík idomnak* nevezzük. Ha az ilyennek oldalai egyenlők, *egyenlőoldalúnak*, ha szögei egyenlők, *egyenlőszögűnek*, ha mind oldalai, mind szögei egyenlők, *szabályosnak* nevezzük. Az ilyen fajta négyoldalú idomot *négyzetnek*, ha pedig többoldalú, annyi oldalú *szabályos sokszögnek* nevezzük, mint a hány oldala van.

2. De ha valóban igaz, hogy bármely két pont között egyenes húzható, mely teljesen egy és ugyanabban a síkban fekszik, és hogy a síknak bármely pontja körül bármely radiussal kör húzható, mely teljesen benne van a síkban, mely dolgokat egyébként alább még be kell bizonyítanunk: akkor önként az a kérdés támad, vajjon az előbbiekben felsoroltak valóban megvannak-e, és vajjon bizonyos számmal levő egyenes és kör segítségével bebizonyítható-e, hogy megvannak?

Arról, a mit egyenesek és körök bizonyos számával meg lehet határozni, azt mondjuk, hogy *geometriailag szerkeszthető.*

Ha valamit *geometriai szerkesztéssel elő lehet állítani,* mint azt ú. n. *problémában* ki szoktuk jelenteni, ez úgy értendő, hogy megtörténhetik véges számmal levő olyan művelettel, melyek mindegyike abban áll, hogy vagy egyenest húzunk, vagy pedig kört írunk le, a minek bizony, akár egyenest húzunk, akár pedig kört írunk le, mozgás íze van, még magánál EUKLIDESnél is, a ki, habár nem egy példáját nyújtja a geometriai szerkesztésnek, azt sehol sem értelmezi (épen úgy, a mint azok, kik valamely élő nyelven jól beszélnek, a grammatika szabályairól hallgatnak). De annál inkább kötelessége a commentatornak, hogy mindjárt a második propositióval kapcsolatban (hol a $\mathfrak{p}$ pont és az r egyenes helyzetükre nézve meg vannak adva, és ugyanabban a síkban a $\mathfrak{p}$-ből kiinduló és r-rel egyenlő egyenes határozandó meg) a geometriai szerkesztés fogalmát megmagyarázza, azért, hogy Euklides géniusát felfoghassuk. Erre 7-et [t. i. 7 műveletet] vesz igénybe. A dolog úgy történik, hogy minden mozdulatlan marad, és bármily könnyen lehetne is (a mozgásnak a síkra szorított első szemléletes származtatása segítségével) r-nek r-t a síkban magával ragadó végpontját $\mathfrak{p}$-ig elmozdítani, mégis van valami nagyon szép a geometriai szerkesztés eszméjének abban a következetes kivitelében, melyet Euklides magának kitűzött.

Azonban az említett véges számba beleérthető a mozgásnak említett első kivitele is. Ha tehát egyeneseket tételezünk fel, a melyekről majd később bebizonyítjuk, hogy két tetszés szerinti pont között mindig előállíthatók, és valami azon a réven származik, hogy véges számban olyan műveleteket végezünk, melyek mindegyike a mozgásnak vagy első, vagy pedig második szemléleti kivitele, az utat és az eredményt a síkra szorítva, és több műveletet ezekhez nem kapcsolunk hozzá, azaz miközben M-et mozgatjuk, benne semmi mást nem mozgatunk: akkor azt mondjuk róla, hogy azt *geometriailag megszerkesztjük;* még pedig a szó *szűkebb értelmében.* Ha azonban nem szorítkozunk a síkra, és megengedjük a mozgás harmadik kivitelét is: akkor az eljárást *tágabb értelemben vett geometriai szerkesztésnek* nevezzük.

3. Habár az igazságoknak egyenlő a becsük (a mint a természetben is a Nap, a Földnek nappala, és a Holdnak fényben szegényebb gömbje a kietlen éjszakában ugyanavval a végtelen bölcseséggel ragyognak), mégis az a *geometria,* a melyet *eleminek* nevezünk, még pedig *tágabb értelemben* azokkal, a mik a tágabb értelemben vett geometriai szerkesztéssel állíthatók elő, és *szűkebb értelemben* azokkal, a mik a szűkebb értelemben vett geometriai szerkesztéssel állíthatók elő, körülhatárolható, ha azokat [a feladatokat], a melyek csak hozzákapcsolt műveletek segítségével oldhatók meg, az ú. n. *felsőbb geometria* körébe utaljuk, a mint azt majd alább több példán bemutatjuk.

10. §.

[A síkidomok tulajdonságai.]

Miután a minden irányban végtelen térből a síknak köröskörül végtelen, nyilt mezejébe leszálltunk, ugyanitt vizsgáljuk meg az alakzatok tulajdonságait; még pedig először azokéit, melyek pontjainak összessége, azután azokéit, a melyek pontjainak nem ugyan összessége, de bármely pontja a szó szorosabb értelmében megszerkeszthető, és végül azokéit, melyeknek bármely pontja az előbbi alakzatok segítségével megszerkeszthető. Először is tehát egyenesek és körök minden lehetséges kapcsolatát veszszük szemügyre, a mint azt a fa alább mutatja [114. o.]. Végre az arithmetika alkalmazásával az adott mennyiségekből keressük az ismeretleneket, a hova a *sík trigonometriája* is tartozik, a mely arra tanít bennünket, hogy miképen lehet bármely olyanokból, melyek az egyenesvonalú háromszöget meghatározzák, az ugyanazon háromszög által meghatározott mennyiségeket számítás útján kipuhatolni.

Előadjuk (valamely következő §-ban) a *gömbi trigonometriát* is. Azokat a háromszögeket ugyanis, a melyeket a gömb felületében három a középponton átmenő sík állapit meg, a kellő helyen szintén számítással fogjuk meghatározni. Ha pedig feltételezzük, hogy Euklides XI. axiómája fennáll: akkor, ha a gömb középpontját a végtelenbe toljuk el, a sík mintegy geometriai határa a gömb felületének (a minek értelme könnyen állapitható meg). Az ellenkező esetben azonban ez a geometriai határ más egyenletes, köröskörül végtelen felület, a melyről az Appendixben be van bizonyítva, hogy benne Euklides XI. axiómája az egész Euklides-féle sík geometriával együtt érvényes; a gömbi trigonometriáról azonban ugyanott ki van mutatva, hogy Euklides XI. axiómájától függetlenül, feltétlenül igaz.

11. §.

[Visszatérés a térbe.]

Most már visszatérünk a megmérhetetlen térbe, a honnan a síkba leszálltunk, hogy ott valamennyi a síkban létrejött alakzatnak a felállítandó fa szerint [114. o.] megalkotandó mindennemű kapcsolatait megvizsgáljuk, és megszerkeszszük azokat, a melyek a szó tágabb értelmében vett szerkesztéssel megszerkeszthetők, és az arithmetika alkalmazásával a reájuk vonatkozó számításokat elvégezzük.

12. §.

[A pont meghatározása a síkban és a térben.]

Végül a műveletek fent említett összekapcsolása következik, a mi a fának [114. o.] megadja a koronáját. Ezen a módon a tér valamennyi pontját vagy ezeknek bármely összességét a tér egy tetszés szerint választott bizonyos szilárd pontjára vonatkoztatjuk.

Például szolgáljanak a következők:

1. Mozgassuk az A egyenest egyik tetszés szerinti $\mathfrak{a}$ pontja körül a P síkban mindig tovább úgy, hogy A-nak $\mathfrak{b}$ pontja az $\mathfrak{ab}$ radiussal leírt kört [annyiszor] fussa be, a hányszor csak tetszik, és nevezzük a $\mathfrak{b}$ pont útjának hosszúságát általánosságban u-nak. E közben azonban mozgassuk ugyanabban a mozgatott A egyenesben a $\mathfrak{c}$ pontot A bizonyos pontjából kiindulva bizonyos törvény szerint úgy, hogy ha t. i. $\mathfrak{c}$ útját A-ban y-nak nevezzük: akkor $y = f(u)$ legyen. A kérdés már most az, hogy adott $f(u)$-ra nézve mi a $\mathfrak{c}$ útja a síkban?

2. Épen úgy mozgassuk a $\mathfrak{pa}$ egyenest a saját meghosszabbításában úgy, hogy a $\mathfrak{p}$ középpont körül a $\mathfrak{pa}$ radiussal leírt kört, mely síkját nem változtatja, magával ragadja; e közben pedig a kör valamely pontját magában a kör kerületében bizonyos törvény szerint mozgassuk úgy, hogy útja mindig $= F(x)$ legyen, hol x a $\mathfrak{p}$ pont útját jelenti az említett egyenesben. Ha pl. $F(x) = x$: akkor, ha a mozgatott pont $\mathfrak{b}$, cyclois írható le.

3. Épen úgy mozgatható $\mathfrak{p}$, a C kör középpontja, valamely kör kerületében, magával ragadva a síkját állandóan megtartó C kört, mely e közben középpontja körül bizonyos törvény szerint, mozog, és ekkor meg volna határozandó a C kör bizonyos pontjának útja. Sőt e közben még bizonyos törvény szerint mozgatható volna az a kör is, a melynek kerületében $\mathfrak{p}$ van.

4. Vagy pedig, ha a P síkot bizonyos a P-be eső A egyenes körül mindig tovább mozgatjuk, és annak az útnak a hosszúságát, melyet P bizonyos tetszés szerinti $\mathfrak{p}$ pontja leír, általánosságban u-val jelöljük, e közben pedig A-nak $\mathfrak{b}$ pontját, mely a P síkban az A-ra merőlegesen álló B egyenest magával ragadja, A-ban bizonyos törvény szerint mozgatjuk, és $\mathfrak{b}$-nek távolságát A-nak bizonyos $\mathfrak{a}$ pontjától (mely minden $\mathfrak{b}$-re nézve ugyanaz) általánosságban x-szel jelöljük, és e közben még a B-nek $\mathfrak{c}$ pontját bizonyos törvény szerint B-ben mozgatjuk, a $\mathfrak{cb}$ egyenest (bárhová is jusson $\mathfrak{c}$) általánosságban y-nak jelölve: akkor, ha

$$x = a(u) \quad \text{és} \quad y = b(x),$$

azt kérdezzük, hogy mi a $\mathfrak{c}$ útja a térben?

Világos, hogy u, x, y segítségével a tér minden p pontja meghatározható. Ha ugyanis p-ből merőlegest bocsátunk A-ra, ez y lesz, a mely vagy $\mathfrak{a}$-ban, vagy pedig az $\mathfrak{a}$-ból kiinduló egyik vagy másik oldalon találja [az A egyenest], és ha a P síkot A körül addig forgatjuk, míg p-t el nem éri, az alatt $\mathfrak{p}$ bizonyos u utat írhat le.

5. Hasonlóképen, ha a mozdulatlan P síkban fekvő A egyenesnek bizonyos $\mathfrak{a}$ pontja szilárd, és A bizonyos $\mathfrak{b}$ pontjában az ugyanabban a P síkban fekvő B merőlegesen áll A-ra, továbbá B bizonyos $\mathfrak{c}$ pontjában C merőleges a P síkra, és ha az alatt, míg a $\mathfrak{b}$ pontot tovább mozgatjuk A-ban, magával ragadva a P síkba eső B-t, mely merőleges A-ra, a $\mathfrak{c}$ pont bizonyos törvény szerint mozog B-ben, magával ragadva a C egyenest, mely mindig merőleges a P síkra, és e közben ugyanabban a C-ben is a $\mathfrak{d}$ pont bizonyos törvény szerint mozog: az a kérdés támad, hogy ha a mozgás (de nem az erők) ilyen összetételének törvényei meg vannak adva, hogy mi $\mathfrak{d}$-nek útja a térben?

Ha pl. $\mathfrak{ab}$ általánosságban x, $\mathfrak{bc}$ általánosságban y és $\mathfrak{cd}$ általánosságban z, továbbá x-et, y-t, z-t mindig összetartozó koordinátáknak tekintjük: akkor

$$y = \alpha(x) \quad \text{és} \quad z = \beta(y)$$

legyen. Világos, hogy a tér bármely p pontja x, y és z által meg van határozva. Ugyanis a p-ből P-re bocsátott merőleges vehető z-nek, és az a merőleges, melyet abból a pontból, a melyben az előbb említett merőleges P-t találta, A-ra bocsátunk, y-nak, az az egyenes pedig, a mely innen egészen az $\mathfrak{a}$-ig terjed, x-nek vehető. Ezenkívül x, valamint y és z is, majd pozitivoknak, majd pedig negativoknak vehetők; x t. i. $\mathfrak{a}$-tól kezdve, az A egyenesnek egyik felében pozitivnak, másik felében pedig negativnak, épen úgy az y ordináták A-tól kezdve, a P síknak egyik felében pozitivoknak, másik felében pedig negativoknak, és a P síkra merőleges z ordináták, P-től kezdve a térnek egyik oldalán pozitivoknak, másik oldalán pedig negativoknak vehetők. Ugyanis az első kötetben [itt a 42. oldalon] mondottakból folynak azok a megállapodások, a melyek alapján valamely egyenesben (vonatkozással egy benne felvett bizonyos szilárd pontra és bizonyos a nyerendő eredményt illető C feltételre nézve) pozitiv és negativ egyeneseket különböztetünk meg. Így az A egyenesre merőlegesek közül némelyek pozitivok, némelyek pedig negativok, ha mindegyik az A-ra merőleges egyenesre nézve annak ott említett vége helyett azt az A-val párhuzamosat veszszük, a melyet rajta keresztül a P-ben húzhatunk, és ebbe helyezzük el az előbbire következő [merőlegesnek] kezdetét, és eredményül az A-ra merőleges utolsó egyenes végének A-tól való távolságát fogadjuk el. Épen úgy a P-re merőleges egyenesek közül némelyek pozitivok, némelyek pedig negativok, ha mindegyiknek végén át a P-vel párhuzamos felületet fektetjük (69.—70. old.), a melyben azután az előbbire következő egyenes kezdődik, és eredményül a P-re merőleges utolsó egyenes végének P-től való távolságát fogadjuk el.

6. Lehetséges az is, hogy az A egyenesben mozgó $\mathfrak{b}$ pont valamely az A-ra merőleges Q síkot ragad magával úgy, hogy e közben a Q-ban a következő mozgás megy végbe. Legyen s a Q síknak metszése bizonyos olyan szilárd P síkkal, a mely az A egyenest tartalmazza, és mozgassunk a Q-ban levő és s-re merőleges bizonyos egyenesekben levő bizonyos pontokat úgy, hogy minden az x által, t. i. az A egyenesben mozgó $\mathfrak{b}$ pontnak A-nak szilárd $\mathfrak{a}$ pontjától való távolsága által bizonyos törvény szerint meg legyen határozva. Ha pedig ez a törvény meg van adva, kérdezhetjük, hogy milyen azoknak a helyeknek az összessége, a melyeket az említett merőlegesekben mozgó pontok a mozgás kezdetétől fogva az idő minden rész nélküli pontjában elfoglalnak. Világos, hogy ezen a módon nemcsak vonal, hanem felület is jön létre, mely mint a mozgó Q síknak vele való metszéseinek összessége fogható fel.

Lehetne még több mozgást is különféle módon összetenni és a vizsgálat mezejét kiterjeszteni.

13. §.

[Vonalak és felületek nagysága.]

Megjegyzendő azonban, hogy minden alakzatot, bármilyen vonal vagy felület is kerüljön elénkbe, ha azt arithmetikai módszerrel akarjuk megvizsgálni, a következő módon respectiv, még pedig az idő alakjára visszavezetett mennyiségbe (38.—39. o.) kell átalakítanunk.

Bármely olyan egyszerű L vonal helyett, melynek semmi része sem egyenes, veendő az r egyenes, ha l-nek nevezünk egyenesekből összetett minden olyan egyszerű vonalat, melynek végpontjai L végpontjaiba és mindazok a pontjai, a melyekben szöge van, L-be esnek, minden l pedig $<r$, de bármely ω-nak megfelelőleg van olyan l, hogy $r-l<\omega$.

Hasonlóképen bármely olyan egyszerű S felület helyett, melynek semmi része sem sík, bizonyos derékszögű négyszög veendő, a mely oly módon határértéke olyan egyenes vonalakkal határolt síkdarabokból, pl. háromszögekből összetett egyszerű felületnek, a melynek minden szögcsúcsa S-ben van, hogy az ilyen felületnek más, ennél nagyobb határértéke ne legyen.

Ezen a módon minden vonalat az egyenes alakjára, épen úgy minden felületet azonos magasságú derékszögű négyszögek alakjára (40.—41. o.) vezetve vissza, azokat arithmetikai úton hasonlíthatjuk össze egymással.

14. §.

[Az egyenes és sík származtatása a gömbből.]

Az egyenest és alaptulajdonságait a síkkal együtt axiomatice szokás feltételezni; kérdés azonban, vajjon ezeket [a feltevéseket] axiómáknak fogadhatjuk-e el? Úgy látszhatnék, mintha az idő fogalma a térre átvíve, az egyenest hozta volna létre; de hogy az annyira eltérő dolognak képletes átvitelét mégis a külső tapasztalás támogatta, mutatják az olyan értelmezések, mint a milyen az, a melyet Plato a fényről kölcsönzött, a ki *egyenesnek* nevezi az olyan vonalat, melynek első pontja a többieket eltakarja, valamint az, mely olyan pontról van kölcsönözve, a mely bizonyos helyről a legrövidebb idő alatt és a legkisebb erőfeszítéssel valamely másikat törekszik elérni. De mi sem vezet inkább az egyenesre, mint mindannak a gondolata, a mi nyugalomban marad olyan mozgó testből, a melynek két pontja nyugalomban van.

Ha valamit nem fogadhatunk el axiómának: akkor annak abban, a miből levezethető, implicite benne kell lennie. Az egyenest és síkot tehát akár a szokásos módon feltételezni, akár pedig a következő módon levezetni, mindenkinek jogában és szabadságában áll.

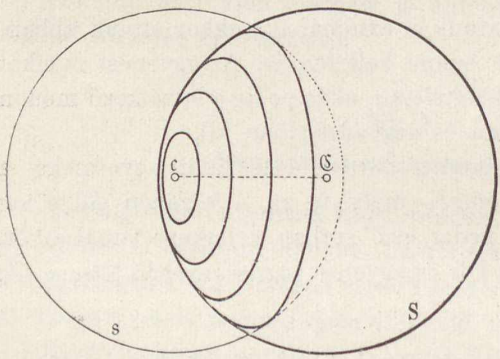
A minden irányban végtelen térnek elsőszülött gyermeke a *pont*, azután következik a *gömb*, mely ú. sz. a közepén áll e két szélsőségnek. A gömb révén pedig első sorban keletkező vonal a *kör*, azután az *egyenes* és végre a kör és egyenes segítségével jő létre a *sík*.

[I. A tér olyan alkotó részének forgatása, melynek két pontja nyugalomban marad; az A gyűrűk.]

1. Az egyenletes, egyszerű, önmagába visszatérő vonal számára, a melyről majd kitűnik, hogy kör, már meg van vetve az alap (55. o.); az egyenes előállítására a következő alapból indulunk ki. Ha a térnek M alkotó részét két pontja körül forgatjuk (55. o.): akkor ez az M ugyanazon két pont körül mindenünnen egyenlően mozdítható el, és tekintettel bármely pontjának útjára, csak egyetlen módon forgatható körül.

2. Ha tehát az 𝔞, 𝔟 pontok nyugalomban maradnak: akkor majd M-nek mindazok a pontjai, a melyek (az 55. o. szerint) 𝔞 ⋆ 𝔟 körül mozgathatók, mindannyian egyidőben is mozognak 𝔞 ⋆ 𝔟 körül, mihelyt közülük bármelyiket mozgatunk; még pedig mindegyikük egészen visszatértéig ugyanazon az úton mozog tovább, a melyet akkor futna be, ha egymagában mozogna.

Ezért M egyetlen pontja sem kezdheti meg az 𝔞 ⋆ 𝔟 körüli mozgását, bármely 𝔭 helyről induljon is ki, több mint két úton; még pedig egyen, a melyen 𝔭-ből elindul, és egy másikon, a melyen oda visszatér. Induljon ki ugyanis ugyanabból a pontból három ág, α, β, γ, a melyek mindegyikében valamely a 𝔭-ből kiinduló pont mozoghatna, ha 𝔞 ⋆ 𝔟 nyugalomban marad, és mozogjon a 𝔭-ből kiinduló pont az egyik esetben úgy, hogy útját az α ágban megkezdi és β-n át tér vissza. Ekkor a γ ágat nem futhatja be; mert útját α-ban megkezdve, vagy β-n át visszatérve, ugyanaz a pont nem írhatja le egyszersmind azt a vonalat is, a melylyel a γ ág a 𝔭-ben kezdődik. De előbb sem írhatta le γ-t; mert akkor a tovább mozgatott pont már előbb tért volna vissza. Gondoljuk már most az egész idomot úgy elhelyezve, hogy az a pont, a mely előbb 𝔭-ben volt, az előbbeni egyszerű, önmagába visszatérő vonalon kívül, γ-ba essék, míg ugyanakkor 𝔞 az 𝔞-ba és 𝔟 a 𝔟-be essék: akkor (1. szerint) világos, hogy 𝔞 ⋆ 𝔟 körül ugyanaz a mozgás menne végbe [mint előbb], de ugyanaz a pont (1. ellenére) az előbbenitől különböző gyűrűt írna le.



7. ábra.

3. Legyen már mostan (a 7. ábrában) S a ℭ középpont körül leírt gömb a 𝔠 ponttal, felületét pedig nevezzük S'-nek, és s legyen a 𝔠 pont körül leírt gömb a ℭ ponttal, és ennek felületét nevezzük s'-nek. Könnyen belátható, hogy sem az egész s gömb nem lehet az S-en belül, sem pedig az egész S az s-en belül; mert, ha pl. az egész S az s-en belül volna, a s' felületbe eső ℭ középpontja tőle elkülönítve maradna, és nem volna körülzárva. Így tehát van s' nek valamije, a mi S-en kívül van, és S'-nek is valamije, a mi s-en kívül van; ezért pedig S'-nek és s'-nek szükségképen valamijük közös. Olyan pontnak ugyanis, mely az s-nek bármely az S-en kívül fekvő részébe eső

pontjából kiindulva, egészen $\mathfrak{C}$-ig jut, okvetetlenül S'-en át kell haladnia (55. o.).

Épen úgy, ha valamely pont S'-nek valamely az s-en kívül eső pontjából kiindulva, magában a S'-ben egészen $\mathfrak{c}$-ig jut: akkor ez a pont a nélkül, hogy s'-en áthaladna, az s gömbön kívül fekvő helyről ennek középpontjába csak úgy juthatna, ha az S'-be eső $\mathfrak{c}$ nem volna megszakítás nélkül körülzárva.

Így tehát s' köröskörül $\mathfrak{c}$ körül kilép S'-ből; még pedig, a mint az világos, köröskörül egyenletes származással, úgy hogy majd, ha az S gömböt $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül mozgatjuk. (az 55. o. szerint) a kilépés helyének bármely $\mathfrak{p}$ pontja egyszerű, önmagába visszatérő, egyenletes vonalat írhat le.

Ugyanez nyilvánvaló minden az ugyanazon $\mathfrak{c}$ középpont körül leírt olyan gömbről, mely az előbbinek belsejébe esik, és ha elképzelünk valamennyi ilyen belső gömböt egészen a közös $\mathfrak{c}$ középpontig: akkor majd S'-ben egészen a $\mathfrak{c}$-ig mindig beljebb eső gyűrűk következnek egymásra. Az ilyen egyenletes, egyszerű, önmagukba visszatérő vonalakat, a melyekről még nincsen kimutatva, hogy körök, *gyűrűknek* nevezzük, és általános jelük legyen A.

Sőt ugyanaz világos minden ugyanazon $\mathfrak{c}$ középpont körül valamely az S' felületen belül fekvő $\mathfrak{i}$ ponttal leírt gömbre nézve. Ekkor ugyanis az egész S' felület nem eshetik az új gömb belsejébe; mert ekkor a S'-en belül fekvő $\mathfrak{i}$ pont nem lehetne az új gömb felületének pontja. Ebből azután minden egyéb önként következik.

4. Ezekből azután világos, hogy valamely pontról elképzelhetjük, hogy valamely tetszés szerinti A-nak bármely $\mathfrak{d}$ pontjából kiindulva, ugyanazon az A gyűrűn belül a S' felületben úgy mozgatható [valamely l vonalon] egészen $\mathfrak{c}$-ig, hogy mindig a $\mathfrak{c}$ középpont körül leírt valamelyik belsőbb gömbnek felületébe jusson, de egyikben sem foglaljon el egynél több helyet; továbbá, hogy ha a gömböt $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül úgy mozgatjuk, hogy gyűrűk iratnak le, az említett l vonal, S'-ben $\mathfrak{c}$ körül mindaddig tovább mozog, míg helyére vissza nem tér. Ugyanis az említett pontnak minden helyen, a hol valamely a $\mathfrak{c}$ körül leírt gömb, még pedig akár maga s, akár pedig valamely belső gömb S'-ből kilép, az előbbiek szerint egy a $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül elterjedő gyűrű felel meg, és így tehát minden egyidejűleg mozoghat, míg $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ nyugalomban marad.

5. Minthogy a gömb felülete köröskörül egyenletesen származik, ebből következik, hogy S'-nek bármely $\mathfrak{f}$ pontjából olyan l' vonal indul ki, a mely az előbbi l-lel egyenlő, és hogy l' a S'-ben $\mathfrak{f}$ körül

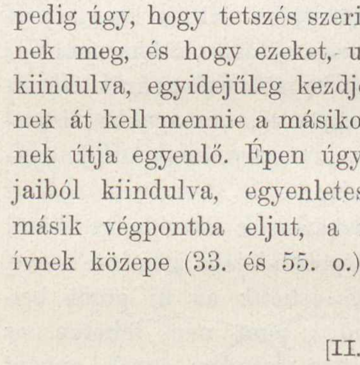
addig mozgatható, míg eredeti helyére vissza nem tér, mi közben konczentrikus, az előbbiekkel egyenlő gyűrűket ír le.

Sőt, minthogy azok, a miket az S és s gömbökről bebizonyítottunk, bármely más gömbre nézve is érvényesek, azért minden gömb felületében van olyan vonal, a mely e felületben annak bármely pontja körül addig mozgatható, míg vissza nem tér, mi közben mindenünnen egyenletesen konczentrikus gyűrűket ír le.

6. Hogy az ilyen gyűrűnek, a mely — mint mondtuk — egyszerű, önmagába visszatérő vonal, fele részei vannak, a melyeknek két közös pontjuk van, valamint minden folytonos részének is van két fele része, a melyeknek egy közös pontjuk van, a következőképen tűnik ki. Gondoljuk, hogy a gyűrű valamely pontjából kiindulva, két pontot tovább mozgatunk mindaddig, míg eredeti helyükre vissza nem térnek; még pedig úgy, hogy tetszés szerinti egyenlő időkben egyenlő utakat tegyenek meg, és hogy ezeket, ugyanabból a pontból ellenkező irányban kiindulva, egyidejűleg kezdjék meg: akkor a kettő közül mindegyiknek át kell mennie a másikon, és a hol ez megtörténik, mind a kettőnek útja egyenlő. Épen úgy, ha két pontot valamely ívnek végpontjaiból kiindulva, egyenletesen mozgatunk, mindegyikük, mielőtt a másik végpontba eljut, a másik ponttal találkozik, és ott van az ívnek közepe (33. és 55. o.).

[II. Az L vonalok.]

7. Vegyük már most föl 4. szerint (a 7. ábrában) a $\mathfrak{c}$ pontot körül övező első A gyűrűben (8. ábra) a tetszés szerinti $\mathfrak{f}$ pontot középpontul, és mozgassuk az előbbeni $l = \mathfrak{fc}$ vonalat, melynek egyik végpontja $\mathfrak{c}$-ben, a másik pedig $\mathfrak{f}$-ban van, $\mathfrak{f}$ körül S'-ben, míg [eredeti helyére] vissza nem tér. Nyilvánvaló, hogy az l-ben levő bármely pont útjának egyik része a gyűrűre vonatkozólag S'-nek egyik oldalába, másik része pedig annak másik oldalába esik. Arra ugyanis, hogy a tetszés szerinti $\mathfrak{o}$ pont leírta gyűrű a $\mathfrak{f}$ középpontot körülzárja, szükséges, hogy annak valamely $\mathfrak{p}$ pontja kívül essék S'-nek azon a szeletén, a melyben $\mathfrak{c}$ van, és így az innen egészen $\mathfrak{o}$-ig terjedő útnak A-n át kell mennie; még pedig legalább két pontban, a melyek $\mathfrak{f}$-tól kétfelé ter-



8. ábra.

jedő egyenlő íveknek végpontjai. Nem lehetséges ugyanis, hogy az említett gyűrűnek az A gyűrűvel csupán csak egyetlen közös pontja legyen; mert akkor ettől a ponttól egészen $\mathfrak{f}$-ig vagy egyszerű vonal volna, vagy pedig nem, és egyik esetben sem lehetne az említett gyűrű egyszerű önmagába visszatérő vonal. Így tehát ennek a gyűrűnek a $\mathfrak{f}$-hoz legközelebb eső átmenetei A-n keresztül csakugyan az a kettő, melyet fent említettünk.

Vegyük fel továbbá (6. szerint) bármely oly ívek felező pontjait, melyek A-nak nem-$\mathfrak{c}$ oldalára, azaz arra az oldalára esnek, a melyben nincsen $\mathfrak{c}$, azután történjék ugyanaz [mint előbb], miután a középpontot a gyűrűnek (melyet a $\mathfrak{f}$ középpont körül a $\mathfrak{fc}$ vonalnak végpontja S'-ben írt le) abba az ívébe helyeztük, mely A-nak a $\mathfrak{f}$-hoz legközelebb eső két pontjából kiindulva, S'-nek a nem-$\mathfrak{c}$ oldalába esik, és ezt folytassuk vég nélkül. Akkor ugyanis mindig ugyanaz az eset ismétlődik, eltekintve attól, hogy a középpontot az első A gyűrűben bárhol választhattuk, míg azután minden újabb A-ban a legszélsőbb ívnek felező pontját kell középpontul felvennünk, és ezt vég nélkül ismételnünk.

Az így nyert valamennyi felező pont összessége kontinuum, sőt, a mint az majd tüstént kitűnik, egyszerű vonal. Ez a vonal pedig az első gyűrűre, ennek mind a két felére nézve egyenletesen helyezkedik el; továbbá ugyanannak a gyűrűnek minden pontjából köröskörül egyenlő származással és mindkét felől egyenletesen meghatározva, épen olyan vonal emelkedik. Ebből kitűnik az is, hogy ha az első gyűrű bármely két pontjából kiemelkedő ilyen vonalak egymást metszik: akkor az egymást metsző szárak a mindkét felől való egyenlő származásuknál fogva egyenlők. Világos továbbá az is, hogy ismét az egyenlő származás miatt minden új A segítségével előállított rész a következő A segítségével előállított részszel egyenlő.

Hogy pedig a pontoknak említett összessége kontinuum, körülbelül a következő módon tűnik ki. Vegyük fel annak a számtalan pontnak α összességét, melyek bármely A révén, ha a középpontot ebbe helyezzük el, egészen valamely k ívig bezárólag származnak, és azután ama hasonlóképen számtalan pontnak β összességét, melyek egészen az utolsó ívig keletkeznek. A β pontjai a k után folytonosan egymásra következő ívekbe esnek, a melyek egyidőben k nélkül nem gondolhatók el, valamint az előbbieknek összessége sem, a melyek α-t alkotják. Így tehát β is tartalmaz egy a k ívbe eső pontot, a mely, miután az egyetlen ilyen, α-ban és β-ban közös.

De azon felül még valamely pont bármely felső A ívnek felező pontjából valamennyi konczentrikus felső íven át, azaz az előbbeni A felett eső íveken át mozgatható egészen a középpontig; még pedig úgy, hogy amaz ívek mindegyikének valamely tetszés szerint megadott pontján menjen át. A szemlélet mutatja, hogy ez a legegyszerűbben a felező pontokon át történhetik.

De az [az összesség] egyszerű vonal is; mert egyetlen ívnek felező pontjából sem indulhat ki még egy harmadik ág is. Ennek ugyanis vagy a megelőző, vagy pedig a következő íveken kellene átmennie, a melyek mindegyikében csak egyetlen olyan pont van, a mely mind a két ágban közös.

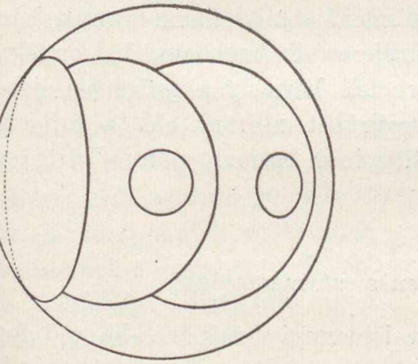
8. Legyen L a neve az ilyen vonaloknak, melyek az első gyűrű minden pontjából annak mind a két felére nézve egyenletesen ki emelkednek és mindig tovább is mind a két felére nézve egyenletesek, és a melyek valamennyien köröskörül egyenlő származásuknál fogva egyenlően vannak meghatározva.

Vagy van két olyan L, a melynek van közös pontja, vagy pedig egyáltalában nincsen olyan kettő, a melynek közös pontja van. Az utóbbi nem lehetséges; mert akkor S'-nek az az alkotó része, mely valamely A felett egészen az új A-nak felső ívéig terjed, sőt az egész A számtalanszor ismétlődnék magában az S'-ben, és így S' nem volna véges mennyiség (47. o.). Erről azonban majd alább többet szólunk.

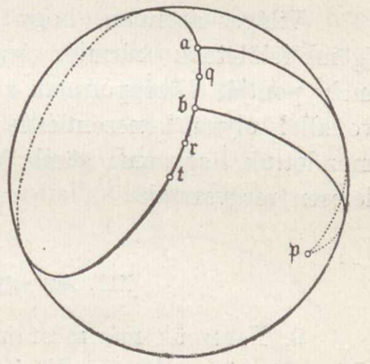
Akkor ugyanis, ha a S' gömböt (a 77.—78. o. szerint) c ⋆ ℭ körül mozgatjuk, együtt mozog vele az egész L is, és ennek pontjai egymásra következő gyűrűket írnak le. Hogy az L vonal valamely később származott pontjának gyűrűje is hátrább fekszik, abból tűnik ki, hogy ha valamely gyűrűtől kezdve a következők egy darabig visszahúzódnának, a leírt származtatás szerint ez vagy mindjárt valamely középpontnak megfelelő A gyűrű után, vagy pedig valamely az A felett származott ív felező pontja után történnék. Az első nem történhetik; mert akkor a mindkét felől való egyenlő származásnál fogva L-nek valamely pontja a megelőző A-n belül és nem azon kívül feküdnék. De az utóbbi sem történhetik; mert akkor az előbb említett középpontból leírt külső gömb felületének valamelyik belsőével valamije közös volna.

Ennek alapján még egyszerűbben látható be, hogy a gömb felülete nem volna véges mennyiség, ha nem volnának olyan L vonalok, a melyek egymást metszik. Lehet ugyanis a S'-ben levő bármely A középpontjából olyan az A belsejébe eső gyűrűt leírni, a melynek (a 9. ábra szerint) sem az azt megelőzővel, sem a következővel semmije sem közös. Minthogy ennek az egyenlő származásnál fogva mindig tovább is volna helye, az említett gyűrű számtalanszor ismétlődnék.

Ha tehát a gömb felülete véges mennyiség, szükségképen van két olyan *L* vonal, a mely egymást metszi. De ha van ilyen kettő: akkor majd valamennyi ugyanabban a pontban metszi egymást. Ha ugyanis (a 10. ábrában) ab az első gyűrűnek az az íve, a melynek végpontjaiból kiemelkedő *L* vonalok [p-ben] egymással találkoznak: akkor az ab ív q felező pontjában emelt *L* vonal szintén átmegy p-n. Legyen ugyanis bq = br, úgy hogy ab = qr, továbbá br = rt, úgy hogy bt = ba (felteszszük, hogy ab kisebb az első gyűrű felénél, mert, ha ab e gyűrűnek fele volna, a dolog hasonlóképen könnyen belátható): akkor az r-ből és q-ból kiemelkedő *L* vonalok,



9. ábra.



10. ábra.

valamint a b-ből és t-ből kiemelkedők egymással találkoznak, és egyenlő származásuknál fogva páronként egyenlők. Ezért aztán a t-ből kiinduló *L* vonalnak szükségképen p-re kell esnie, és arra, hogy az r-ből és q-ból kiinduló *L* vonalok egymással találkozhassanak, szükséges, hogy vagy az előbbi, vagy pedig az utóbbi átmenjen a bp-n, vagy pedig az előbbinek a pt-n, vagy pedig a q-ban emelt *L* vonalnak az ap-n kell átmennie. E lehetőségek bármelyike megvalósul, ha az átmenet pontja p; de p és t között, vagy pedig p és a között az átlépés nem történhetik meg. Ha ugyanis például az r-ben emelt *L* a p és t között lépne át: akkor az átmenetnek ugyanaz a pontja egyszersmind bp pontja is volna; ha pedig az r-ben emelt *L* a bp-n b és p között menne át, ugyanaz a pont a q-ban emelt vonalnak is volna pontja, és így az r-ben és q-ban emelt *L* vonalok egészen találkozásuk pontjáig kisebbek volnának bp-nél. Szükséges tehát, hogy ugyanabban a p-ben találkozzanak.

Ebből következtethető, hogy ha az íveket vég nélkül felezzük és köröskörül körülrakjuk: akkor az első gyűrűnek egymáshoz bármely megadhatónál közelebb fekvő pontjaiból kiemelkedő valamennyi L vonal egymást ugyanabban a $\mathfrak{p}$-ben metszi.

Innen van az, hogy ha a gömböt $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül mozgatjuk, és az első gyűrű valamely pontja egyidőben a felező pontokban emelt L vonalok egész alakzatával tovább mozog, ez alatt nem lesz olyan időtartam, mely alatt a $\mathfrak{p}$ pont utat írna le; mert bármely időpontot is gondoljunk, a mely a mozgás kezdete óta beállott, a gyűrűben mozgó pont már megelőzőleg számtalan olyan ponton ment át, a melyekre nézve az L vonalakból álló alakzat $\mathfrak{p}$-ben volt.

Így tehát az S gömb $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül úgy mozgatható, hogy $\mathfrak{p}$ nyugalomban marad. Ha tehát S-et $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül mozgatjuk (a 77.—78. o. szerint) $\mathfrak{p}$-nek nyugalomban kell maradnia.

Világos azonban, hogy minden, a mit elmondottunk, bármely [gömb]felületnek bármely gyűrűjére alkalmazható, ha ennek bármely pontját középpontnak véve fel, bármely a gyűrű belsejébe eső vonallal olyan konczentrikus gyűrűket állítunk elő, a milyenekről mondottuk, hogy ama gömb felületének bármely pontja körül egyenletesen megvannak.

[III. Az egyenes származtatása.]

9. Nevezzük már mostan valamennyi s'-nek az S-be eső fentebb (78.—79. o.) említett szeleteit általánosságban s''-nek, és gondoljuk minden s''-ben azt a pontot, a melyben az illető s''-ben az S' és s' közös gyűrűje segítségével előállitott L vonalok találkoznak: akkor ezeknek a pontoknak összessége $\mathfrak{c}$-vel és $\mathfrak{C}$-vel együtt egyszerű vonalat alkot, a mi úgy látható be, mint fent (a 81.—82. oldalon). De világos az is, hogy ha az S gömbfelületet $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül mozgatjuk, minden s''-nek minden pontja mozog, kivéve az említett benne levő pontot (55. o.), és ezért, ha az S gömböt a $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül mozgatjuk, valamennyi s'' mozogni fog (77.—78. o.), de az egész említett vonal nyugalomban marad.

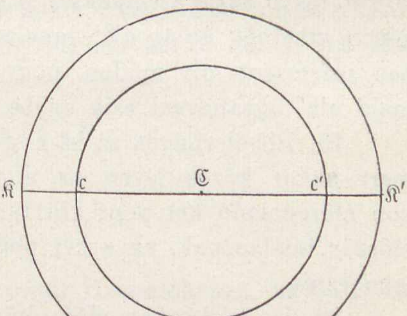
10. Ámde, midőn S-et $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül mozgattuk, S-ben a kilépés utolsó gyűrűje segítségével előbb megszerkesztett $\mathfrak{p}$ pont is nyugalomban maradt, és így, ha ezt a $\mathfrak{p}$-t középpontnak választva, ugyanazokat végezzük, a miket a másik oldalon a $\mathfrak{c}$ középpontnak megfelelőleg végeztünk, akkor olyan $\mathfrak{c}\mathfrak{C}\mathfrak{p}$ vonal származik, mely nyugalomban marad, ha a gömböt $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül mozgatjuk.

Sőt, ha e vonal bármely más két pontját veszszük szemügyre, az S gömbnek jellemzett mozgása úgy megy végbe, hogy azok nyugalomban maradnak. Így tehát bármely két ilyen pont körül a mozgás ugyanaz marad (77.—78. o.).

De az S gömbnek egyetlen olyan pontja sem maradhat nyugalomban, mely az említett vonalon kívül fekszik; mert az ilyen vagy a $\mathfrak{c}$-ből és $\mathfrak{p}$-ből származott legszélsőbb szeleteken belül fekszik, vagy pedig ezek között, és ilyen köröskörül egyenletesen meghatározott pontnak (az 55. o. szerint) gyűrű felel meg. Ha azonban [a pont] valamely olyan mozgásának, mely két pont körül megy végbe, gyűrű felel meg: akkor ugyanazon két pont körül mozogva, (a 77.—78. o. szerint) mindig ugyanazt a gyűrűt írja le.

11. Világos továbbá, hogy a tér bármely két pontja közt van ilyen vonal. Vegyük fel ugyanis az egyiket középpontúl és állítsuk elő azt a gömböt, mely a másikat tartalmazza, és alkalmazzuk az S és s gömbökről mondottakat. Ebből kitűnik egyszersmind az is, hogy bármely ilyen vonal, mely a tér valamely véges alkotó részének valamely pontjából kiindul, belőle ki is lép; mert abból a pontból olyan gömb állítható elő, mely azt az egész alkotó részt magában foglalja.

12. Kérdés már most az, vajjon ilyen fajta vonalok, melyek tetszőleges nem egyenlő gömbök középpontjaiból származtattak, akkor, midőn a középpontok egybeesnek, egybeeshetnek-e egészen a kisebb gömb felületéig? Bizonyára igen. Hozzuk ugyanis a kisebb [gömböt] a másikba úgy, hogy középpontja a nagyobbnak $\mathfrak{C}$ középpontjára (11. ábra) essék, és legyen a nagyobb gömbben, ha ezt $\mathfrak{K} \star \mathfrak{K}'$ körül mozgatjuk, $\mathfrak{K}\mathfrak{C}\mathfrak{K}'$ az a vonal, a mely nyugalomban marad, és ez a kisebb gömb felületén $\mathfrak{c} \star \mathfrak{c}'$-ben hatoljon át. Ha már mostan a nagyobb gömböt $\mathfrak{K} \star \mathfrak{C}$ körül mozgatjuk: akkor majd a $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'$ vonalon kívül mindene mozog, és ez a mozgás úgy megy végbe, hogy $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{C}$ nyugalomban marad. Ekkor tehát a belső gömb is mozog $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül, és így (a 77.—78. o. szerint) $\mathfrak{c}$ és $\mathfrak{C}$ között ugyanaz marad nyugalomban, a mi előbb.



11. ábra.

13. Így tehát minden ilyen vonal bármely gömbből kiindulva, más nagyobb [gömb] felé mindkét oldalon folytatható; ámde egyetlen gömb felülete sem foglalhatja magában.

14. Ha továbbá bármely ilyenfajta vonal végpontjai $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ és valamely mását $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, és lehetséges, hogy egyidőben $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{a}'$-ra és $\mathfrak{b}$ a

𝔟'-re essék: akkor, midőn a végpontok egybeesnek, a vonalak maguk is fedik egymást.

Hozzuk ugyanis az 𝔞𝔟 vonalat azzal a gömbbel együtt, a melyben származott, akár beléesik 𝔞 vagy 𝔟 ennek középpontjába, akár pedig nem, ℭ-hez, úgy hogy 𝔞 a ℭ-re essék; írjunk le továbbá ℭ körül olyan gömböt, mely az átvitt gömböt magába zárja, és ugyanazon 𝔞 középpont körül írjuk le a 𝔟 pont gömbjét. Nyilvánvaló, hogy az az említett fajtájú vonal, mely a ℭ körül leírt abban a gömbben származott, mely a másik kettőt bezárja — e vonal neve legyen λ — a 𝔟 pontnak ugyanazon ℭ pont körül leírt gömbjének felületén valamely 𝔣 pontban megy át. Mozgassuk most már λ-t a nagyobb gömbbel együtt ℭ körül mindaddig, míg 𝔣 a 𝔟-be esik, és azután mozgassuk ugyanazt a nagyobb gömböt úgy, hogy a 𝔟, 𝔞 pontok nyugalomban maradjanak: akkor vele együtt a körülzárt átvitt gömb is majd úgy mozog, hogy ama 𝔟, 𝔞 nyugalomban maradnak, és hogy 𝔟 és 𝔞 között ugyanaz a vonal marad nyugalomban, mely nyugalomban maradna akkor, ha csupán csak az átvitt gömböt mozgatnók úgy, hogy ugyanazok a pontok nyugalomban maradjanak. Így tehát az átvitt 𝔞𝔟 vonal egybeesik a nagyobb gömbnek 𝔞 és 𝔟 között fekvő azzal a vonalával, a mely nyugalomban marad. Hasonlóképen vihetnők át az 𝔞'𝔟' vonalat azzal a gömbbel együtt, a melyben származott oly módon, hogy 𝔞' a ℭ-re essék; tehát világos, hogy majd 𝔞'𝔟' ugyanavval esik egybe, a mivel 𝔞𝔟 esett egybe.

15. Ebből világos az is, hogy az ilyen vonal nem térhet vissza; mert akkor közös lévén az a pont, a melyből a különböző utakon előrehaladó két pont kiindul, valamint az is, a melyben azok először találkoznak, az e két pont között fekvő két ágnak egybe kellene esnie.

16. De (a 14.-ben előforduló) előbbi vonalok folytatásai is, t. i. az átvitt gömb középpontjából való folytatás és a ℭ középpontból való folytatás egybeesnek. Ha ugyanis az elsőnek valamely 𝔭 pontja a ℭ-ből származó és mindkét felé a végtelenbe folytatott vonalon kívül esnék, legyen 𝔭' a 𝔭 pont a ℭ körül leírt gömbjének közös pontja a későbbi vonallal. Írjunk le már mostan olyan gömböt, mely ezt a gömböt is, meg az átvittet is körülzárja. Ha ezt az utóbbi gömböt úgy mozgatjuk, hogy 𝔞, 𝔟 nyugalomban maradjon: akkor 𝔭' is nyugalomban maradna, míg 𝔭 mozogna. Ez pedig nem lehetséges, ha 𝔭 az első meghosszabbitásba esik; mert akkor 𝔭-nek is nyugalomban kell maradnia, ha 𝔞, 𝔟 nyugalomban marad.

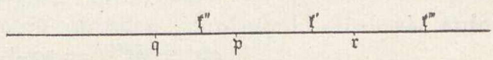
17. Egy szóval *a leírt vonal* (az 56. o. szerint) *egyenes;* mert bármely két pontja legyen annak a (mindkét felé a végtelenbe foly-

tatott) vonalnak $\mathfrak{q}$ és $\mathfrak{r}$ (12. és 13. ábra), az magában foglalja a térnek minden ezekre nézve egyetlen pontját. Valóban az említett vonalnak minden pontja $\mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$-re nézve egyetlen, de a térnek semmi más pontja nem lehet ugyanerre a $\mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$-re nézve egyetlen.

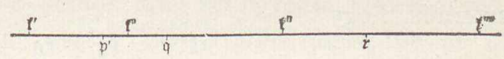
Legyen ugyanis $\mathfrak{p}$ az említett vonalnak bármely pontja: akkor nincsen olyan a $\mathfrak{p}$-től különböző $\mathfrak{f}$ pont, hogy

$$\mathfrak{q} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{q} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{f}.$$

A $\mathfrak{f}$ mindenesetre vagy abba a vonalba esnék, vagy pedig azon kívül; de ezeknek az eshetőségeknek egyike sem állhat be. Ha ugyanis $\mathfrak{f}$ magába a vonalba esnék, vagy a $\mathfrak{q}$ és $\mathfrak{r}$ egyikével eshetnék egybe, vagy a kettő közé esnék, vagy pedig azokon kívül, és épen ilyen helyzeteket foglalhatna el $\mathfrak{p}$ is.



12. ábra.



13. ábra.

Ha $\mathfrak{p}$ az $\mathfrak{r}$-re (vagy $\mathfrak{q}$-ra) esik, akkor világos, hogy nincsen olyan $\mathfrak{f}$, mely $\mathfrak{p}$-től (vagy $\mathfrak{q}$-tól) különböző, úgy hogy csak a többi esetet kell megvizsgálnunk.

Essék először $\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{q}$ és $\mathfrak{r}$ közé; akkor $\mathfrak{f}$ vagy szintén $\mathfrak{q}$ és $\mathfrak{r}$ közé $\mathfrak{f}'$-ra, vagy $\mathfrak{f}''$-ra eshetnék, vagy pedig ezeken kívül, pl. $\mathfrak{f}'''$-ra. Ha $\mathfrak{f}$ a $\mathfrak{f}'$-ra esnék: akkor arra, hogy

$$\mathfrak{q} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{q} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{f}'$$

lehessen, szükséges volna, hogy

$$\mathfrak{q}\mathfrak{f}' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$$

(azaz a rész az egészszel egyenlő) legyen. Hasonlóképen, ha $\mathfrak{f}$ a $\mathfrak{f}''$-ra esnék,

$$\mathfrak{q}\mathfrak{f}'' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$$

volna. Ha pedig $\mathfrak{f}$ a $\mathfrak{f}'''$-ra esnék,

$$\mathfrak{q}\mathfrak{f}''' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$$

volna (azaz ismét a rész az egészszel volna egyenlő). A mondottak szerint ugyanis minden ilyen vonal minden pontjában egyenletesen kezdődve, egyenletesen folytatódik is.

Ha azonban $\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{q}\mathfrak{r}$-en kívül, pl. $\mathfrak{p}'$-re esnék (13. ábra): akkor $\mathfrak{f}$-nak, a mely nyilvánvalóan a $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ egyikével sem eshetik egybe, vagy $\mathfrak{f}'$-ra, vagy $\mathfrak{f}''$-ra, vagy $\mathfrak{f}'''$-ra, vagy pedig $\mathfrak{f}''''$-ra kellene esnie. $\mathfrak{f}'$-ra nem eshetik, mert akkor

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p}' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{t}'$$

volna; sem $\mathfrak{t}''$-ra, mert akkor

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p}' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{t}'',$$

volna; sem pedig $\mathfrak{t}'''$-ra, mert akkor szükséges volna, hogy

$$\mathfrak{r}\mathfrak{t}''' \doteq \mathfrak{r}\mathfrak{p}'$$

(azaz a rész az egészszel egyenlő) legyen. De a $\mathfrak{t}''''$-ra sem eshetik, mert akkor

$$\mathfrak{r}\mathfrak{t}'''' \doteq \mathfrak{r}\mathfrak{p}' = \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{q}\mathfrak{p}'$$

volna, és

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p}' \doteq \mathfrak{q}\mathfrak{t}'''' = \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\mathfrak{t}''''',$$

ha pedig ezt a $\mathfrak{q}\mathfrak{p}'$ helyébe az előbbi egyenlőségbe behelyettesítjük, nyernők, hogy

$$\mathfrak{r}\mathfrak{t}'''' = \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\mathfrak{t}''''.$$

De a szóban levő vonalon kívül sincsen olyan $\mathfrak{t}$, a melyre nézve

$$\mathfrak{q} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{p} \doteqdot \mathfrak{q} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{t}.$$

Írjunk le ugyanis annak a gömbnek a középpontjából, a melyben az említett vonal származása kezdődött, olyan gömböt, a mely a $\mathfrak{t}$ pontot körülzárja: akkor, ha ezt a gömböt úgy mozgatjuk, hogy $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ nyugalomban maradjanak, (a 85. o. szerint) majd $\mathfrak{t}$ is mozog. Ha azonban, a mikor $\mathfrak{q}$ a $\mathfrak{q}$-ra és $\mathfrak{r}$ az $\mathfrak{r}$-re esik, $\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{t}$-ra esnék: akkor $\mathfrak{p}$, mely előbb nyugalomban volt (a 77.—78. oldalokon mondottak ellenére) $\mathfrak{t}$-val együtt mozogna.

De a térnek semilyen az emlitett vonalon kívül eső $\mathfrak{t}$ pontja sem lehet $\mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$-re nézve egyetlen; mert, ha az épen említett gömböt $\mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$ körül mozgatjuk, majd az a pont is mozog és más épen ilyen helyzetű pontokba jut.

Az épen említett vonal tehát összessége mindazoknak a pontoknak, a melyek bármely kettejükre nézve egyetlenek.

Ha nem volna egyenes, hanem egyenesekből vagy másféle vonalakból állana: akkor könnyen belátható, hogy nem foglalhatna magában minden pontot, mely bármely két pontjára nézve egyetlen.

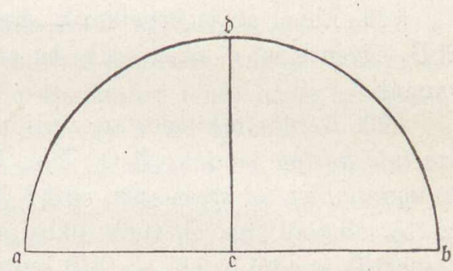
18. *Az egyenes mennyiség is.* Vegyük fel ugyanis tetszés szerinti folytonos részeit, helyezzük az egyiknek egyik végpontját a másiknak egyik végpontjába, és e pont körül írjuk le azokat a gömböket, melyek a másik végpontokat tartalmazzák: akkor, hacsak a kettő nem azonos, a belső gömb felületétől határolt két olyan rész származik, a melyeknek végpontjai, és így ők maguk is egybeeshetnek.

19. *Az egyenes önmagában tovább mozgatható.* A mondottak szerint ugyanis bármely $\mathfrak{p}$ pontjából kiindulva, egyenletesen folytatható a végtelenbe.

[IV. A sík származása.]

20. Most már a következő módon a *sík* is könnyen állítható elő. Nyilvánvaló, hogy bármely pont, a melyet két pont körül addig mozgatunk tovább, míg eredeti helyére vissza nem tér, a köröskörül egyenlő származásnál fogva olyan egyszerű önmagába visszatérő vonalat ír le, a mely úgy, mint az egyenes és a gömb felülete, mennyiség, és szintén minden pontjából előre és hátra egyenletesen van meg határozva.

Vegyünk fel egy tetszés szerinti ilyen gyűrűt (14. ábra); legyen az (a 80. o. szerint) az $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ pontok által két egyenlő részre osztva, a felét, $\mathfrak{adb}$-t pedig a $\mathfrak{d}$ pont oszsza két egyenlő részre, és az $\mathfrak{ab}$ egyenes felező pontja legyen $\mathfrak{c}$: akkor a mindkét felől való egyenlő származásnál fogva a $\mathfrak{cd}$ és a $\mathfrak{ca}$ egyenesekből összetett alakzat egyenlő a $\mathfrak{cd}$ és a $\mathfrak{cb}$ egyenesekből összetett alakzattal, és így (a 65. o. szerint) a $\mathfrak{dc}$ egyenes $\mathfrak{c}$-ben merőlegesen áll az $\mathfrak{ab}$ egyenesre, és a $\mathfrak{cd}$ egyenesnek minden pontja a mindkét felé végtelen $\mathfrak{ab}$ egyenesen kívül esik. Írjunk le a $\mathfrak{c}$ pont körül olyan gömböt, a mely az egész idomot körülzárja, és mozgassuk azt $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$, avagy a mindkét felé végtelen $\mathfrak{ab}$ egyenes körül: akkor majd a $\mathfrak{cd}$ egyenesnek minden pontja olyan gyűrűt ír le, a mely a mindkét felől való egyenlő származásánál fogva mind a két felszínével [vagyis visszájával is] önmagát fedheti (a mi az előbb említett gyűrűkről eddig még nem bizonyos). Képzeljük már mostan, hogy a $\mathfrak{cd}$ egyenes minden helyen, a melyet útja közben elfoglal, a $\mathfrak{d}$-n túl a végtelenbe folytatódik: akkor mindezeknek az egyeneseknek az összessége olyan köröskörül végtelen és köröskörül és mindkét felől egyenlő módon származó felület, a mely $\mathfrak{c}$ körül önmagában mozgatható, mind a két felszínével önmagát fedheti és a teret két egyenlő oldalra osztja fel.



14. ábra.

Ez a felület pedig *sík*. Legyen ugyanis $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két tetszés szerinti pontja: akkor minden olyan $\mathfrak{C}$ pont, a mely $\mathfrak{A} \star \mathfrak{B}$-re nézve egyetlen, a mindkét felé a végtelenbe meghosszabbított $\mathfrak{AB}$ egyenesbe esik. Az $\mathfrak{AB}$ egyenes pedig szükségképen a szóban levő felületbe esik; mert gondoljuk, hogy ennek származtatásánál a $\mathfrak{d}$ felé a végtelenbe folytatott $\mathfrak{cd}$ egyenes az épen említett gyűrű mentén $\mathfrak{A}$-tól $\mathfrak{B}$ felé egészen $\mathfrak{B}$-ig mozog: akkor, ha [az a felület] $\mathfrak{AB}$-n nem megy át, mindig ennek vagy az egyik, vagy a másik oldalára esnék. De a kettő közül egyik sem lehetséges; mert mihelyt bekövetkeznék az egyik, be kellene következnie a másiknak is. Ugyanaz a meghosszabbított $\mathfrak{AB}$-ről is nyilvánvaló; mert, ha a $\mathfrak{c}$ középpont körül olyan gömböt írunk le, melynek radiusa nagyobb bármelyik a $\mathfrak{c}$-től az $\mathfrak{AB}$ felé húzott egyenesnél: akkor majd a mindkét felé végtelen $\mathfrak{AB}$ egyenes, valamint a $\mathfrak{d}$ felé végtelen $\mathfrak{cd}$ [egyenes] is kilép ebből a gömbből, a miből már a többi következik. Rövidebben azt is mondhatnók, hogy ha valamely egyenes, mely a felületnek egyik pontjától annak valamely más pontjáig terjed, az egyik oldalra esnék, a másik oldalon is volna [ilyen egyenes], és így két pont között két egyenes terjedne el.

22. Ebből az is következik, hogy még a mindkét felé végtelen $\mathfrak{AB}$ egyenes is a síkba esik, ha az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ pontok abban benne vannak.

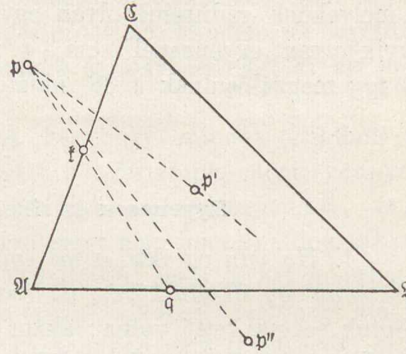
23. Kérdés már mostan, vajjon *van-e olyan sík, mely tetszés szerinti három ponton, $\mathfrak{A}$-n, $\mathfrak{B}$-n, $\mathfrak{C}$-n megy át, még ha ezek nem is ugyanabba az egyenesbe esők?* Mindenesetre igen; mert $\mathfrak{A} \star \mathfrak{B}$ (a 15. ábrából) az említett síkba átvihető, ha $\mathfrak{A}$-t $\mathfrak{c}$-re (14. ábra) helyezzük és $\mathfrak{c}$-től $\mathfrak{b}$ felé az $\mathfrak{AB}$ egyenessel egyenlő egyenest veszünk fel. Ha már mostan $\mathfrak{C}$ nem esnék abba a síkba, írjuk le a $\mathfrak{c}$ középpontból a $\mathfrak{C}$ ponton átmenő gömböt, és legyen pl.

$$\mathfrak{cC} = \mathfrak{cb} = \mathfrak{ca}.$$

Nyilvánvaló, hogy a sík a $\mathfrak{cC}$ radiussal a $\mathfrak{c}$ középpont körül leírt gömböt egy felső és egy alsó félgömbre osztja fel, és ha a gömböt $\mathfrak{ab}$ körül mozgatjuk, $\mathfrak{a}$-tól és $\mathfrak{b}$-től eltekintve, a gömb felületének minden pontja egy felső és egy alsó félgyűrűt ír le. Így tehát ott, hol a $\mathfrak{C}$ pont átmegy, teljesedik az, a mit követeltünk.

24. Sőt ugyanazon a három $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ponton át, mely nincsen ugyanabban az egyenesben, más sík nem is fektethető. Ha ugyanis az előbbeniekben $\mathfrak{A}$-t $\mathfrak{c}$-be, $\mathfrak{B}$-t $\mathfrak{b}$-be helyezvén, $\mathfrak{C}$ az ugyanott keletkezett síkba esik, fektessünk $\mathfrak{A} \star \mathfrak{B} \star \mathfrak{C}$-n át valamely más síkot (akár pedig ugyanannak a síknak valamely más részét): akkor egyiknek sem lehet olyan $\mathfrak{p}$ pontja (15. ábra), mely a másikon kívül esnék. Ugyanis az $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$ és $\mathfrak{AC}$ egyenesek, melyeknek végpontjai mind a két síkba esnek, maguk is teljesen beleesnek mind a két síkba.

Legyen már most 𝔭 az egyikben: akkor vagy az 𝔄ℭ-ből, ℭ𝔅-ből és az 𝔄𝔅 egyenesnek 𝔄-tól balra és 𝔅-től jobbra eső folytatásaiból összetett vonal felett, vagy pedig ez alá esik. Ha felette esik: akkor a 𝔭𝔮 egyenes átmegy az említett összetett vonalon. Ha az 𝔄𝔅 egyenes két meghosszabbításának egyikén menne át: akkor mind az átmenet pontja, mind 𝔮, tehát 𝔭 is a végtelen 𝔄𝔅 egyenesbe esnék. Ha pedig 𝔄ℭ-n vagy ℭ𝔅-n menne át és ez 𝔣-ban történnék: akkor a 𝔣𝔮 egyenes mind a két síkban közös volna, és folytatása is, mely a 𝔭 pontot tartalmazza, mind a két síkba esnék. Ha azonban a pont az összetett vonal alá, 𝔭'-re, vagy 𝔭''-re esnék: akkor annak az egyenesnek, mely ezek bármelyikétől egészen a már mind a két síkban közös 𝔭-ig terjed, az említett összetett vonalon keresztül az egyik oldalról a másikra kellene átmennie; tehát ismét két pont, és így az azokon átmenő egyenes is közös a két síkban.



15. ábra.

25. Világos az is, hogy 𝔡𝔠-nek (14. ábra) a 𝔠-n túl való folytatása az első ízben (89. o.) származott síkba esik, és ezt a síkot a mindkét felől való egyenlő származása miatt két egyenlő részre osztja. Minthogy azonban a P síknak bármely egyenese egyidejűleg a P síkkal úgy fektethető 𝔠𝔡-re, hogy P az első ízben származott síkkal egybeessék, azért bármely síkot bármely benne fekvő egyenes úgy osztja két részre, hogy ezek mindannyian egymás között és az előbbiekkel is egyenlők. Sőt, minthogy a síknak minden pontja úgy vihető át az említett 𝔠-be, hogy a síkok egybeessenek, az is világos, hogy mindazok a körök egyenlők, melyeknek radiusai egyenlők, valamint az is, hogy valamely a síkban mozgó pont úgy ragadhatja magával a síkot, hogy az ugyanabban a síkban mozogjon tovább.

26. Épen úgy, ha kört húzunk, kitűnik, hogy két egyenes alkotta szög-alakzatok egybevágók, ha a csúcsaikból egyenlő rádiussal leírt azok az ívek, melyek száraik közé esnek, egyenlők, valamint az is, hogy valamennyi derékszögű alakzat egyenlő; továbbá, hogy ugyanabban a síkban, ugyanabból a pontból az egyenesnek csak egyetlen merőlegese lehetséges, és hogy az egyenesnek egyik oldalán a 𝔠 pont körül fekvő szögek összege $= 2R$, valamint megfordítva, hogy két olyan egyenes, a melyben 𝔠 közös, egy egyenesbe esik, ha az egyik oldalon a szögek összege $= 2R$, hol R alatt derékszög értendő.

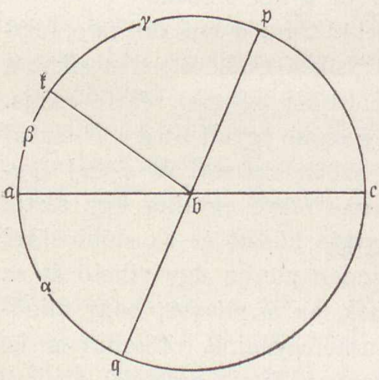
27. Világos az is, hogy *a sík mennyiség*; mert ha ennek bármely két alkotó részét veszszük fel, és mindegyiknek valamely belső pontját az említett c-be hozzuk, úgy hogy azok az alkotó részek az első ízben származott síkba essenek: akkor majd egybeesnek azok a körök, a melyeknek rádiusául olyan egyenest választunk, mely nem kisebb egyik olyan egyenesnél sem, a mely a c ponttól a határig terjed, és így megvalósulnak a 38. oldalon mondottak.

15. §.

[Egyenesek és síkok közti kapcsolatok.]

1. *Ha van valami, a mi egy egyenesben és egy másik egyenesben vagy egy síkban közös, az csakis pont lehet;* mert ha a közös pontok száma kettő volna: akkor az egyenes a végtelenbe meghoszszabbított másikba és hasonlóképen a síkba esnék.

2. *Síknak síkkal,* ha mind a kettőt végtelennek veszszük fel *vagy semmije sem közös, vagy a kettőnek közös végtelen egyenese van, és akár egyenes, akár pedig sík az, mely egyenest vagy síkot metsz, az az egyik oldalról a másikra megy át.* Messe ugyanis az ab egyenes (16. ábra) a bq egyenest: akkor, ha nem menne át az abq meghatározta sík másik oldalára, szükségképen [ugyanazon az oldalon] valahová bf-ba esnék. A qp-vel ugyanis b-n kívül nincsen közös pontja; mert különben teljesen esnék vele egybe. Így tehát abf egyenes volna és β is, $\alpha+\beta+\gamma$ is fele volna a bf radiussal leírt kör kerületének.



16. ábra.

Ezért ab valamely síkon szintén átmegy, ha evvel a b pontja (de semmi egyebe sem) közös. Ha ugyanis a síknak ugyanazon az oldalán maradna, nyilvánvalóan a b-ben metszett síknak bármely q pontjára nézve az előbbi eset állana elő.

Így tehát, ha a b pont két síknak, P-nek és p-nek közös pontja, húzzuk az ab egyenest p-nek bármely olyan a pontjából, mely nem egyszersmind pontja P-nek is: akkor majd az az előbbeniek szerint átmegy P-n. Írjunk le azután a p síkban a b középpont körül a ba radiussal félkört: akkor majd ez is átmegy P-n, és az az egyenes, mely az átmenet e pontján és a b ponton megy át, P-be is, meg

p-be is esik, és e kettőnek azon kívül közös pontja nem lehet; mert különben a kettő egybeesnék. Világos egyszersmind az is, hogy a p sík is a másik oldalra megy át.

3. *Az egyenesre bármely pontjában merőleges állítható* (a mi a 14. ábrából és a 89. oldalon mondottakból tűnik ki); épen úgy *a síkra is bármely pontjában merőleges állítható.* Minden sík ugyanis, ha annak bármely pontját c-be viszszük át, egybeeshetik az ott első ízben származott síkkal.

Habár csak alább bizonyítjuk be, hogy minden pontból az egyenesre is és a síkra is merőlegest bocsáthatunk, mégis könnyen belátható, hogy ugyanabból a pontból ugyanarra az egyenesre, vagy ugyanarra a síkra két különböző merőlegest nem bocsáthatunk. Ekkor ugyanis ez a két egyenes azzal az egyenessel, mely a két merőleges talppontjait összeköti, olyan háromszöget alkotna, melynek alapja mellett mind a két szög derékszög. Ez azonban nem lehetséges; mert ha két olyan egyenes, mely ugyanabban a síkban ugyanarra az egyenesre [merőlegesen áll], az egyik oldalon találkoznék, a mindkét felől való egyenlő származásnál fogva ugyanaz a másik oldalon is történnék. Így tehát a két egyenes, mert két közös pontjuk van, egybeesnék.

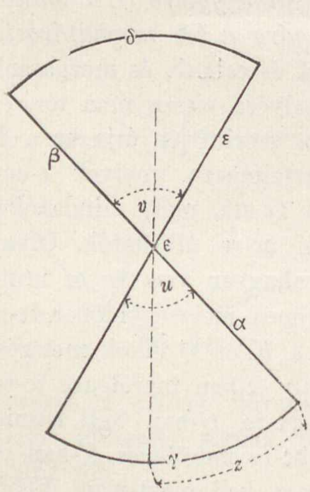
4. Mindazonáltal, *ha valamely egyenes a síknak két egyenesére,* bc-*re és* fc-*re merőleges* (17.* ábra): *akkor mindegyikre* [*t. i. mindegyik a* c-*n átmenő egyenesre*], *és így magára a* fcb *meghatározta* P *síkra is merőleges.* Legyen ugyanis cp⊥cf és cq⊥cb, és mozgassuk fcp-t fc körül mindig tovább, míg eredeti helyére vissza nem tér, és épen úgy bcq-t bc körül: akkor (a 89. o. szerint) cp útja az a K sík, mely mindazokat a merőlegeseket tartalmazza, melyek c-ben fc-re állíthatók, és épen úgy cq útja az a Q sík, mely mindazokat a merőlegeseket tartalmazza, melyek c-ben bc-re állíthatók. Olyan egyenes, mely c-ben merőleges a P síkra csakugyan van, és ez mind fc-re, mind bc-re merőleges. Ámde olyan egyenes, mely egyidőben fc-re és bc-re merőleges, csak egyetlen van, t. i. a K és Q síkok metszésvonala. Az olyan egyenesnek ugyanis, mely c-ben merőleges fc-re, K-ban, és olyannak, mely c-ben merőleges bc-re, Q-ban kell lennie, és így annak, a mely mind fc-re, mind bc-re merőleges K-ban is, meg Q-ban is, tehát mind a kettőben közösen kell meglennie. Ebből következik, hogy az az egyenes, mely fc-re és bc-re egyidőben merőleges, magára P-re merőleges.

5. *Egyszersmind minden olyan p sík is, a melybe beleesik*

* [A 17., 18., 20., 21. ábrák a mellékelt táblán találhatók.]

valamely a P-re merőleges egyenes, merőleges P-re. A két sík alkotta szög ugyanis a következő módon állítható elő. Legyen $\mathfrak{dc}$, $\mathfrak{fe}$ (18.* ábra) két egyenlő egyenes, mely ugyanabban a P síkban merőlegesen áll $\mathfrak{ab}$-re; legyen továbbá $\mathfrak{ac} = \mathfrak{bc}$, és mozgassuk a síknak felső felét $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül mindig tovább, míg eredeti helyére vissza nem tér: akkor majd a $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ pontok a teljesen egyenlő származás miatt egyidejüleg egyenlő radiussal leírt köröknek egyenlő íveit írják le. Épen úgy, ha $\mathfrak{gh} \llcorner \mathfrak{gb}$ és felveszszük, hogy $\mathfrak{pg} = \mathfrak{eq}$: akkor — ha az idomot $\mathfrak{p} \star \mathfrak{q}$ körül mozgatjuk — a $\mathfrak{h}$ és $\mathfrak{f}$ pontoknak egyidejüleg leírt útjai az egyenlő származás miatt egyenlők lesznek. Ámde $\mathfrak{f}$ azonos módon mozog, akár $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$, akár pedig $\mathfrak{p} \star \mathfrak{q}$ marad nyugalomban; mert ezek valamennyien egyidőben tartoznak nyugalomban maradni. Ebből következik, hogy majd valamennyi egyenlő merőlegesnek végpontjai egyidejüleg egyenlő íveket írnak le. Ámde az ilyen út (a 65. o. szerint) a síkok alkotta szögnek mértéke, és ha épen negyedkör: akkor (a 66. o. szerint) a sík merőleges P-re. Ebből világos, hogy két sík alkotta szögnek mértéke egyenlő annak a szögnek a mértékével, melyet a metszésvonaluk bármely pontjában állított merőlegesek alkotnak.

6. Ha két egyenes, vagy két sík közül mindegyik a másiknak másik oldalára megy át, keletkezik *a két egyenes alkotta, ill. a két sík alkotta szögnek a csúcsszöge.* Hogy ezek egyenesek esetében egyenlők, pl. a következő módon is látható be. Legyenek ezek a csúcsszögek u és v (19. ábra). Ha nem volnának egyenlők, az egyik, pl. $u >$ volna a másiknál, v-nél, és így, ha β-t $\mathfrak{c}$ körül addig mozgatjuk, míg végpontja a δ ívet írja le, az α és β radiusokat egyenlőknek véve fel, $\gamma > \delta$ lesz. Legyen $z = \delta$: akkor, ha α-t (ugyanabban a síkban) addig mozgatjuk $\mathfrak{c}$ körül, míg a $z = \delta$ ívet írja le, az egyenlő származás miatt z is $<$ lesz annál az ívnél, a melyet az alatt β végpontja ír le. Nyilvánvaló azonban, hogy ez az ív az egyenesnek a β és ε egyeneseknek másik oldalára való átlépése miatt $<$ δ-nál. Ebből azután az következnék, hogy z, a mely $= \delta$-val, kisebb olyan ívnél, a mely kisebb δ-nál.



19. ábra.

* [A 17., 18., 20., 21. ábrák a mellékelt táblán találhatók.]

Hasonlóképen dönthető el a dolog, ha $v > u$ volna, és épen úgy a másik pár csúcsszögre nézve is.

Ha meghosszabbítjuk azokat az egyeneseket, melyek azt a szöget alkotják, a mely nagyságát tekintve egyenlő a két sík alkotta szöggel: akkor világossá válik, hogy a síkok alkotta csúcsszögek is egyenlők.

7. Nyilvánvaló, hogy a gömb középpontján át fektetett síknak metszése a gömbbel olyan kör, melynek radiusa a gömb radiusával egyenlő (89. o.); az ilyent *legnagyobb körnek* nevezzük. Bármely a c középponton átfektetett két sík pedig, egymást egy a középpontból kiinduló egyenesben metszi, melynek a gömb felületébe eső p pontja közös pontja azoknak a legnagyobb köröknek, a melyeket a középpontból a két síkban leírhatunk, és világos, hogy ugyanaz az egyenes (a mely a két síknak metszésvonala) meghosszabbítva, ugyanazoknak a köröknek másik közös pontját is szolgáltatja.

8. Két legnagyobb kör alkotta szöget respectiv mennyiséggé teszi az az ív, mely az e köröket tartalmazó két sík alkotta szöget kifejezi. Ha tehát a rajzlap felett fekvő p pontból kiindulva (20.* ábra), mind a két legnagyobb körben negyedköröket veszünk fel, pa-t az egyikben és pb-t a másikban: akkor a legnagyobb körnek ab íve fejezi ki az azok alkotta szöget; mert pc a pca és pcb síkok metszése és pa, pb negyedkörök lévén, a pca, pcb szögek derékszögek.

9. Ebből azután következik az is, hogy *azoknak a legnagyobb köröknek ívei, melyek az* ab *ívre merőlegesek, a negyedkörök végpontjában*, annak a *körnek ú. n. pólusában találkoznak*, melynek íve ab. A pc ugyanis egyidőben merőleges ac-re és bc-re, és ezért az egész abc síkra is merőleges. Így tehát (a 93.—94. o. szerint) mind az acp, mind a bcp sík merőleges az abc síkra, és ezért mind a két negyedkör az ab ívvel derékszöget alkot. Ebből következik, hogy az a-ból és b ből kiinduló azok az ívek, a melyek ab-re merőlegesek, p-ben találkoznak. Ámde, ha az egész idomot pc körül mozgatjuk, kitűnik, hogy a-val bármely ívet irathatunk le, és hogy az ab ívnek bármely pontjából csak egyetlen az ab-re merőleges kör ered.

10. *Ha a P és Q síkok egymást az* ab *egyenesben derékszög alatt metszik: akkor P-nek bármely* p *pontjából az* ab*-re bocsátott merőleges egyszersmind merőleges Q-ra, és* ab*-nek bármely pontjában a Q-ra emelt merőleges P-be esik.* Legyen ugyanis pb ⊥ ab, és húzzuk meg a Q síkban az ab-re merőleges bf-t: akkor a pbf szög derékszög, mert $P \perp Q$. Így tehát pb a Q síknak két egyenesére,

* [A 17., 18., 20., 21. ábrák a mellékelt táblán találhatók.]

t. i. $\mathfrak{ab}$-re és $\mathfrak{bf}$-ra merőleges, és ebből következik, hogy Q-ra is merőleges.

Bármely az $\mathfrak{a}$-ban a Q síkra emelt merőleges beleesik a P síkba. Ha ugyanis kívüle esnék; akkor ugyanabban az $\mathfrak{a}$ pontban két a Q-ra merőleges egyenest emelhetnénk; mert az előbbi szerint az a P-be eső egyenes, mely $\mathfrak{a}$-ban merőlegesen áll $\mathfrak{ab}$-re, merőleges egyszersmind Q-ra is.

11. Általában, *ha két sík, P és p egymást metszi, és mind a kettő merőleges a Q síkra: akkor az előbbieknek metszésvonala merőleges Q-ra.* Ha ugyanis $P \perp Q$ és egyszersmind $p \perp Q$, továbbá a P és Q síkok metszésvonala A és a p és Q síkoké a: akkor majd a Q-ba eső A és a metszik egymást. Ha ugyanis nem metszenék egymást, könnyen belátható, hogy akkor az A-n és a-n átmenő síkok, a melyek Q-ra merőlegesek, szintén nem metszhetnék egymást. Legyen az A és a egyenesek metszéspontja $\mathfrak{a}$: akkor az $\mathfrak{a}$-ban a Q-ra emelt merőleges az előbbeniek szerint mind P-be, mind $\mathfrak{p}$-be, és így a P és p síkoknak egyetlen metszésvonalára esik, a mely az $\mathfrak{a}$-t tartalmazza.

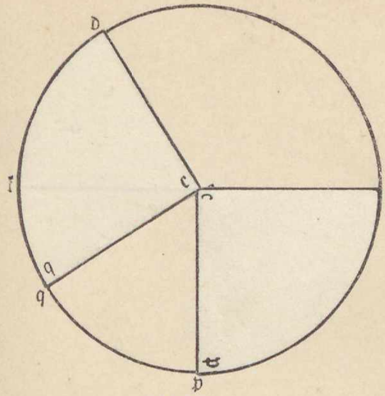
12. A mi azt a szöget illeti, a melyet az $\mathfrak{ac}$ egyenes a P síkkal alkot, írjunk le ebben a $\mathfrak{c}$ középpont körül a $\mathfrak{bc}$ radiussal kört, és tételezzük fel (a mit később majd bebizonyítunk), hogy az átfogó nagyobb a befogónál, és hogy ha ugyanabból a tetszés szerinti kívül fekvő pontból a kör kerületéhez folyton növekedő egyeneseket húzunk, a középponti szög nagyobbodik: akkor könnyen belátható, hogy az $\mathfrak{acb}$ szög minimum, hacsak nem $\mathfrak{ac} \perp P$ (65. old.). Legyen ugyanis $\mathfrak{b}$ az a pont, a melyben az $\mathfrak{a}$-ból P-re bocsátott merőleges ezt metszi: akkor a $\mathfrak{bc}$ befogó kisebb az $\mathfrak{ac}$ átfogónál. Most már a $\mathfrak{bc}$ radiussal kört írván le P-ben, bármely $\mathfrak{dca}$ szög $>$ $\mathfrak{bca}$ szögnél. Vegyük fel ugyanis $\mathfrak{a}$-t a $\mathfrak{dbc}$ sík felett: akkor az egyenesvonalú $\mathfrak{abd}$ háromszögben a $\mathfrak{b}$ mellett fekvő szög derékszög, mert $\mathfrak{ab} \perp P$, és így az $\mathfrak{ad}$ átfogó $>\mathfrak{ab}$-nél. Vegyünk fel már mostan két ilyen háromszöget, t. i. $\mathfrak{abc}$-t és $\mathfrak{adc}$-t, és helyezzük $\mathfrak{c}$-t $\mathfrak{c}$-re és $\mathfrak{a}$-t $\mathfrak{a}$-ra és forgassuk mind a két háromszöget a P síkba, úgy hogy a $\mathfrak{ca}$ egyenesnek ugyanarra az oldalára essenek (21.* ábra): akkor feltevéseinkből következik, hogy az $\mathfrak{acb}$ szög $<$ az $\mathfrak{acd}$ szögnél.

16. §.

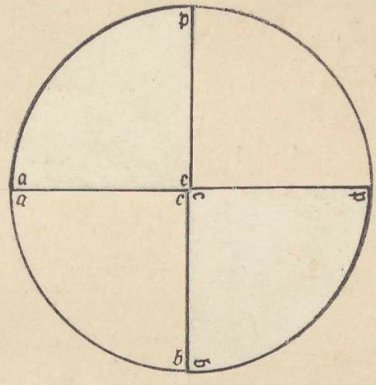
[A párhuzamosak axiómája.]

De szólanunk kell még olyan síkokról és egyenesekről is a melyek a végtelenig megnyújtva sem metszik egymást (57. o.). Ha

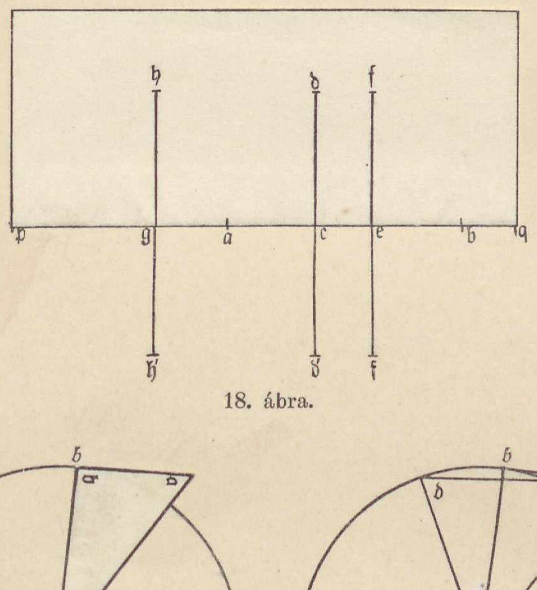
* [A 17., 18., 20., 21. ábrák a mellékelt táblán találhatók.]



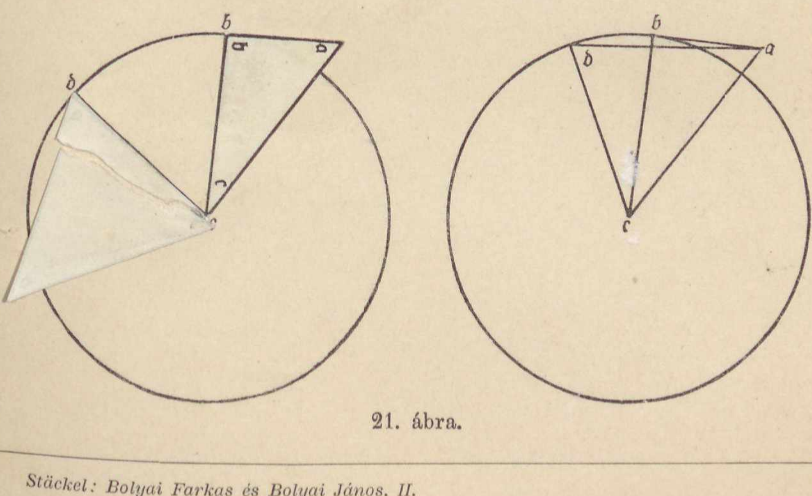
17. ábra.



20. ábra.

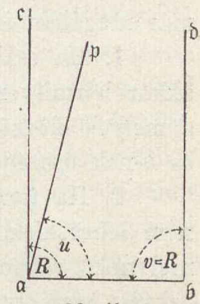


18. ábra.



21. ábra.

(a 22. ábrában) az akár ugyanabban a síkban fekvő, akár pedig különböző síkokban fekvő ac és bd egyenesek az ab egyenesre merőlegesek, akkor (a 93. o. szerint) nincsen közös pontjuk. Hasonlóképen, ha cabd-t ab körül visszatértéig mozgatjuk, az ac és bd egyenesek leirta síkoknak sincsen, még ha azokat végteleneknek is fogjuk fel, semmi közös pontjuk; mert különben valamely ac és valamely bd egyenes, ha ezeket meghosszabbítjuk, metszenék egymást.



22. ábra.

Ha ezt a két síkot valamely harmadik metszi: akkor azok az egyenesek, a melyben ez az előbbieket metszi, nyilvánvalóan ugyanabba a harmadik síkba esnek, de még sem metszik egymást; mert különben az a pont, a melyben egymást metszenék, az előbbi két sík közös pontja volna.

I. Kérdés azonban az, vajjon az a ponton átmenő síkok közül az előbbeni első az egyedüli-e, mely az utóbbit, t. i. az épen említett bd egyenes útját nem metszi? Ez a kérdés azonban visszavezethető arra, vajjon az a-n átmenő egyenesek közül ugyanabban a síkban az $\overline{ac}$ egyenes az egyedüli-e, a mely a $\overline{bd}$ egyenest nem metszi?

Majd kitűnik, hogy vagy bármely esetben egyetlen ilyen egyenes és egyetlen ilyen sík van, vagy pedig minden egyes esetben számtalan.

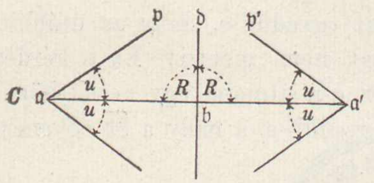
II. Mozgassuk az $a\tilde{b}$ egyenest (mely a bd egyenessel a v szöget alkotja, ez pedig legyen pl. $= R$, hol R a derékszöget jelenti) a körül (22. ábra) egy negyedkörön át egészen ac-ig: akkor majd $a\tilde{b}$ egy darabig mind a negyedkört, mind a $b\tilde{d}$ egyenest, még pedig mindig távolabb metszi, ac-be érve azonban [bd-t] nem metszi. Így tehát (a 34. o. szerint) a negyedkörnek szükségképen olyan utolsó p pontja van, hogy az a-ból [feléje] húzott egyenes olyan természetű, hogy minden más az a-ból kiinduló beljebb fekvő [egyenes] a $b\tilde{d}$ egyenest metszi, de ő maga már nem metszi. Ennek ugyanis a bd egyenes valamely pontjában kellene történnie; a bd egyenes azonban a metsző egyenesen áthaladva, ennek [másik] felső oldalára menne át, és így még számtalan olyan pontja volna, a melyben az a körül tovább forgatott egyenes metszhetné. Az $a\tilde{p}$ egyenes tehát nem volna az utolsó azok között az egyenesek között, a melyeken belül eső minden egyenes a $b\tilde{d}$ egyenest metszi. Így tehát $a\tilde{p}$ az első nem metsző egyenes. Kérdés már mostan, hogy mily nagy az u szög, azaz a bp ív?

Euklides tizenegyedik axiómájának értelme a következő: Ha valamely *akármilyen nagy* ab *egyenesnek* ugyanazon az oldalán, annak *végpontjai* mellé rakjuk át az $\mathfrak{ac}$ és $\mathfrak{bd}$ egyeneseket, *akármennyivel is legyen az u és v belső szögek összege kisebb* két derékszögnél, és bárhogyan legyen is az *elosztva* [u és v között]: akkor az $\mathfrak{ac}$ és $\mathfrak{bd}$ egyenesek metszik egymást.

Ez tartalmazza a következő három tételt, melyek bármelyike már magában is teljesen elegendő a másik kettőnek bebizonyítására.

1. Ha csak egyetlen $\mathfrak{ab}$-nek megfelelőleg is u nem kisebb R-nél: akkor bármilyen nagy is legyen $\mathfrak{ab}$, valamennyi olyan egyenesre nézve, a melyek először nem metszik egymást, a két belső szögnek, u-nak és v-nek összege $= 2R$.

2. Ha fennáll, hogy az említett u és v belső szögek összege nem lehet kisebb bármely megadhatónál, ha mindjárt az az egyenes, melynek végpontjainál annak ugyanazon az oldalán reá vannak rakva, bármely megadhatónál nagyobbá is válnék: akkor bizonyos az is, hogy minden egyes esetben $u + v = 2R$. Ha ugyanis, bármilyen kicsiny is az u szög (23. ábra), $\mathfrak{pa}$-t oly távolra vihetnők, hogy az $\mathfrak{a}$-ból kiinduló egyenesek közül az u szög alatt hajló az első, mely $\mathfrak{bd}$-t nem metszi: akkor, ha $\mathfrak{bd}$-n túl az $\mathfrak{ab}$-vel egyenlő $\mathfrak{a'b}$ távolságra szintén megszerkesztjük az u szöget, (a mint könnyen belátható) az $\mathfrak{a}$-ból és $\mathfrak{a'}$-ból kiinduló, egymást először nem metsző egyeneseknek mind a két szöge $= u$ és a belső szögek összege $2u$, a mi $\rightharpoonup 0$. Így tehát (a mint az majd kitűnik) vagy mindig mindegyik $u = R$, vagy pedig $u \rightharpoonup 0$, ha $\mathfrak{ab} \rightharpoonup \infty$.



23. ábra.

3. Ha fennáll, hogy ha bizonyos egyenes végpontjaiból kiinduló és ehhez bizonyos u és v szögek alatt hajló egyenesek egymást metszik, az ugyanazon egyenes végpontjaiból kiinduló és ehhez az $u+z$ és $v-z$ szögek alatt hajló egyenesek is metszik egymást (a mikor t. i. a belső szögeknek ugyanaz az összege tetszőleges más módon van elosztva): akkor könnyen kimutatható a többieknek érvényessége is.

Alig érthető, hogy olyan nagy geometer ilyen axiómát állíthatott fel. Igaz ugyan, hogy a régi kéziratokban az a postulatumok közé van sorolva. Tagadhatatlan, hogy EUKLIDES egész geometriája egyetlen tételnek tekinthető, a melyet így mondhatunk ki: *Avval, hogy A-t állítjuk, állítjuk G-t, A* alatt értve a XI. axiómát és G alatt a geometriát. De épen annak, a mit állítani kellett, egyenlő joggal az ellenkezőjét is lehetett volna állítani, minthogy ugyanis, valamennyi többi axióma egyenlően áll fenn avval együtt, hogy u (a 22. ábrában) derékszög, és avval együtt is, hogy a derékszögnél kisebb, sőt, hogy akármennyi, R-től bezárólag egészen 0-ig kizárólag. Így tehát a szerint, a mint u-t R-rel egyenlőnek, vagy pedig R-nél kisebbnek tételezzük fel, két rendszer származik, mely mind a kettő igaz; még pedig az egyik, ha feltételezzük, hogy $u = R$, a másik pedig, ha feltételezzük, hogy $u < R$; természetesen ellenkezők az eredmények azokra nézve, a melyek az említett u nagyságától függnek. Sőt, ahhoz képest, a mint bizonyos $\mathfrak{ab}$ egyenesnek megfelelőleg az R-nél kisebb u nagyságát választjuk, számtalan rendszert nyerünk, a mely mégis bizonyos tekintetben megegyezik egymással, és mely valamennyi benne van az általános rendszerben, a mely az $u < R$ feltevésen alapszik. Így pl. az egymást először nem metsző egyenesekre nézve (23. ábra) mindegyikben a belső szögek összege $\rightharpoonup 0$, ha a távolság $\rightharpoonup \infty$; épen úgy az egyenes vonalú háromszög szögeinek összege $\rightharpoonup 0$, ha mindegyik oldala $\rightharpoonup \infty$ stb.

Ha tehát mind a két rendszert kifejtjük, habár a többi axióma segítségével nem dönthető el, hogy a valóságban melyik érvényesül, mégis geometriára teszünk szert olyan értelemben, hogy nem csak az említett rendszerek mindegyike feltevései alapján igaz, hanem feltétlenül igaz az is, hogy a kettő közül az egyik a valóságban érvényesül avval a megszorítással, hogy abban az esetben, ha fennállana, hogy a valóságnak az a rendszer felel meg, a melyre nézve $u < R$: akkor azoknak értékei, a melyek épen a derékszögnél kisebb u meghatározott értékétől függnek, annyiban határozatlanok maradnak.

Másképen áll a dolog, ha ezt a tárgyat nem a priori, hanem a gyakorlat szempontjából tekintjük, és (a 22. ábrában) megadván $\mathfrak{ab}$-t, az $\mathfrak{ac}$ egyenes szögét, míg még metszi $\mathfrak{bd}$-t, a posteriori megmérjük. Akkor ugyanis legalább a posteriori válik bizonyossá, hogy olyan nagyságú egyenesekre nézve, a milyenekkel mi próbát tehetünk, u nem sokat különbözik a derékszögtől. De hogyan alakul a dolog akkor, ha $\mathfrak{ab}$ egészen a Siriusig, vagy még tovább is terjedne? Bármint legyen is, az idő, mely öröktől fogva ikertestvére a térnek, ennek segítségére jön, és minthogy az égi testek mozgása megegyezik azokkal a számításokkal, a melyek az $u = R$ feltevésre támaszkodnak, arra tanít bennünket, hogy a gyakorlatban méréseink egész tartományán belül ebben a feltevésben bizton megnyugodhatunk.

III. Valamennyi olyan rendszert, a mely, ha a többi axiómákon kívül semmi egyebet nem tételezünk fel, reánk nézve subjective lehetséges, azaz, a melyek között csak egyetlen van olyan, mely absolute igaz, de hogy melyik az, azt eldönteni nem tudjuk, *az Appendix szerzője* [Bolyai János], ki különös elmeéllel fog hozzá e dologhoz, általános anfoglal tössze és olyan geometriát épített fel, mely minden esetben absolute igaz; habár e kötet függelékében a nagy tömegből csak a legszükségesebbeket mutatta be, és a rövidség kedvéért sokat elhagyott, mint a milyen például a tetraeder általános megoldása és több más elegáns vizsgálat.

Az említett Appendix megtanít arra, hogy bármely adott ab egyenesnek megfelelőleg geometriai úton miképen szerkeszthető meg az u szög (22. ábra); u értékét illetőleg azonban, habár konkrét esetben mintegy szemünk előtt áll, azon kivül, hogy nem 0 és nem $> R$, a priori semmit sem dönthetünk el.

Ugyanott továbbá ki vannak emelve a tér tudományába tartozó azok a dolgok, a melyek u említett értékétől nem függnek, azaz a melyek egyaránt érvényesek, akár $u = R$, akár pedig bármilyen más az értéke 0 és R között, és a gömbi trigonometriáról és némely más dologról ki van mutatva, hogy ezek sorába tartozik.

Azok a dolgok pedig, a melyek u-nak említett értékétől feltétlenül függnek, u-nak olyan meghatározott függvényeivel fejeztetnek ki, a melyek u bármely értékére nézve, azaz bármi is legyen u értéke a valóságban, ha ezt a kifejezésbe u helyébe behelyettesítjük, a kivánt mennyiséget szolgáltatják. Ha például bizonyos $x = f(u)$ térbeli mennyiség feltétlenül u értékétől függ, és $f(u)$ olyan kifejezés, a mely csupán u-t és adott mennyiségeket foglal magában, képzeljük, hogy az abszczissza 0-tól R-ig nő, felvéve u-nak (a 0 kizárásával egészen R-ig terjedő) minden gondolható értékét, továbbá minden abszczissza végpontjában mint ordinátát emeljük az u értékének megfelelő $f(u)$-t; ha pedig $u = R$, az ordináta avval az értékkel legyen egyenlő, a melyet az a kifejezés $u = R$-re nézve felvesz.

Minthogy azonban az egész térben u-tól függő mennyiségeknek ilyen kifejezései a többi axiómákkal egyenlő módon egyeztethetők meg, bármelyikét is helyettesitsük bennük az u említett számtalan értékének; ezért ebből következik, hogy azok az axiómák nem szabhatják meg u értékét.

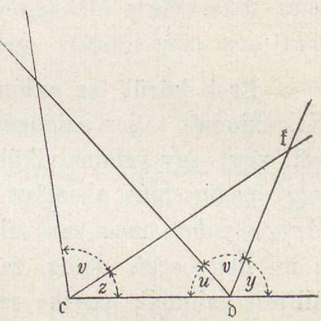
IV. Mindamellett az a kérdés támad, vajjon nincsen-e olyan új axióma, a melynek alapján u meg volna határozható? Hajdani erre vonatkozó kisérleteimet röviden előadom, hogy legalább más ne pazaroljon reá fáradságot.

Felosztottam azokat az axiómákat, a melyek alapján Euklides tizenegyedik axiómája bebizonyítható, és így a párhuzamosak euklidikus elmélete megállapítható, *a helyzet, a quantitás, az eltérés és a hasonlóság* axiómáira.

I. A helyzet axiómái.

1. Bármennyire is növekedjék valamely egyenes, a belső szögek összege, melyeket vele két olyan egyenes alkot, a mely tőle ugyanannak a síknak ugyanarra az oldalára esik, folytonosan fogyva, nem válhatik kisebbé bármely megadhatónál, hacsak az a két egyenes nem metszi egymást.

2. Ha (a 24. ábrában) z nem foglalja magában y-t: akkor $z+v$ sem foglalja magában $y+v$-t. Ez Euklides axiómájának harmadik része; ugyanis [a szögeknek] ugyanaz az összege ugyanannak az egyenesnek végpontjainál különböző módon van elosztva.



24. ábra.

3. Ha C (23. ábra) a t idő vége előtt az egész térnek valamely megadható, esetleg végtelen alkotó részét öleli fel (a melybe azonban nem esik belé az egyenesnek egyetlen olyan pontja sem, mely a-n túl jobbra van), és a t idő végével C maga az egész térbe megy át: akkor a térből az, a mi C-n kívül megvan, a t idő vége előtt sohasem foglalhat magában olyant, a mi absolute egyenlő azzal a C-vel, a mi ugyanakkor van. Úgy látszik, mintha ezen a módon két minden irányban végtelen tér keletkeznék, a melyekből ama félegyenesen kívül semmi más pont nincsen kizárva, hacsak nem Euklides XI. axiómája érvényes (a mint majd alább látjuk).

II. A quantitativ axiómák.

1. Ha A-nak vannak teljesen egyenlő fele részei: akkor nem lehet számtalan egymástól teljesen elválasztott olyan fele része, a mely az előbbiekkel teljesen egyenlő.

2. Semmi A-nak nincsen számtalan olyan teljesen elválasztott része, a mely mindegyike teljesen egyenlő A-val.

3. Nincsen olyan A, hogy (midőn $n \rightharpoondown \infty$) $\frac{A}{n}$ magában foglalhatná magát az A-t (úgy a hogy van) csak is $\frac{A}{n}$ hiányával.

III. Az eltérés axiómája.

Ha két egyszerű, egyenletes, mindkét felé végtelen, a síkban egymást metsző vonal nyílása (azaz a metszéspontjuknál levő szög) a

t idő vége előtt mind a két oldalon ugyane vonalak alkotta valamely állandó szögnél nagyobb marad: akkor a t-t a végén határoló oszthatatlan időpontban az egyik nem ugorhatta át a másikat.

IV. A hasonlóság axiómái.

Egyetlen gömb sem különbözik más tulajdonságban bármely más gömbtől, mint nagyságában és helyében.

Vagy ugyanazt mondhatjuk *a tér bármely két pontjáról.*

Ezek közül [az axiómák közül] bármelyiket is tételezzük fel, a XI. axiómát teljes szigorúsággal be lehet bizonyítani. Vagy ezek egyikét, vagy egy valamelyikükkel egyenlő értékűt kell alapul felvennünk, vagy pedig más abszolut geometria nincsen, mint az, a mely az *Appendixben* meg van állapítva. Ez minden esetben feltétlenül igaz, a mi nagybecsű dolog és még jobban megbecsülendő; mert a felállított axiómák egyike sem olyan egyszerű, mint a geometria többi axiómái. Ha tehát a felállítottaknak egyikét sem soroljuk az axiómák közé, akkor is lesz geometriánk; csakhogy u értéke mindig határozatlan marad. Az igazság tiszta forrása az örökkévalóságban van, és a sírok éjszakáján át csalogat bennünket a világosságra; mert halandó ajakkal nem szabad belőle szürcsölnünk.

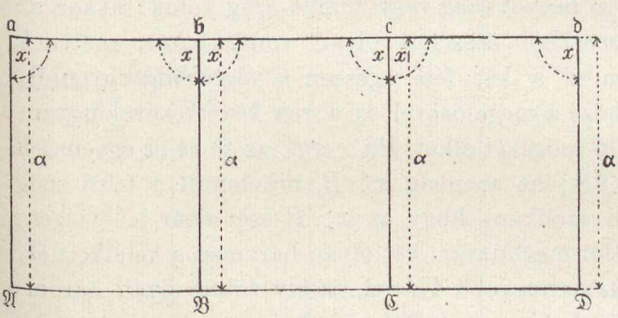
Mindamellett szükséges, hogy a geometriában valamely quantitativ axiómát vegyünk fel, t. i. olyant, mely elrejtve megvan azok között az axiómák között, a melyek az egésznek a részhez való viszonyát fejezik ki. Ez pedig a következő:

A térnek bármely minden oldalról határolt alkotó része meg felülete is, ha egyáltalában mennyiség, véges mennyiség. Ebből következik, hogy *a megfelelő respectiv mennyiségek is végesek.*

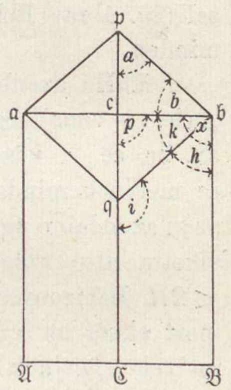
Látni, hogy ez mintegy utat nyit a quantitativ axiómák valamelyikének bevezetésére. De bármint is legyen az, legyen szabad röviden bemutatnunk, hogy az említett [axiómák] mindegyike segítségével, kevés tőle független alaptételt tételezve fel, hogyan lehet bebizonyítani, hogy $u = R$.

a) Az I. 2. axiómából ez könnyen a következő módon foly. Ha ugyanis (a 24. ábrában) $u+v<2R$: akkor, ha ezeket a szögeket a $\mathfrak{d}$ pontnál egymás mellé rakjuk, nevezzük a maradékot y-nak. Ha már mostan az y szög szárának valamely tetszés szerinti $\mathfrak{f}$ pontjából egyenest húzunk $\mathfrak{c}$-ig, nevezzük azt a szöget, melyet $\mathfrak{fc}$ a $\mathfrak{cd}$-vel alkot, z-nek, és rakjuk fel $\mathfrak{c}$-nél, z felett a v szöget. Szembetűnő, hogy z nem foglalja magában y-t, és így (az axióma szerint) $z+v$ sem foglalhatja magában $y+v$-t. Ebből következik, hogy metszés jő létre, ha a belső szögek u és $v+z$, és még inkább történik az, ha $v+z$ helyébe a kisebb v szöget teszszük.

b) A mi a többieket illeti, vizsgáljuk (a 25. ábrában) az $\mathfrak{AB}$-re ugyanabban a síkban merőlegesen álló $\mathfrak{Aa}$ egyenes végpontjának útját. Vegyük fel $\mathfrak{a}$-tól kezdve, ettől akár jobbra, akár pedig balra ennek az útnak, a melyet L-nek akarunk nevezni, egymásra következő egymás közt egyenlő $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$ stb. részeit, és húzzuk az $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$ stb. egyeneseket. Nyilvánvaló, hogy akkor egyenlő származása miatt valamennyi x szög egyenlő. De, minthogy semmiképen sem bizo-



25. ábra.



26. ábra.

nyos, hogy az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$,... pontok ugyanabban az egyenesben vannak, az a kérdés merül fel, vajjon x derékszög, tompa szög, vagy hegyes szög-e?

1. Ha x derékszög volna: akkor L-nek az a pontja, mely $\mathfrak{AB}$ (26. ábra) $\mathfrak{C}$ felező pontjának megfelelőleg származik, szintén az $\mathfrak{ab}$ egyenesnek $\mathfrak{c}$ felező pontjába esnék. A $\mathfrak{C}$ és $\mathfrak{c}$ felező pontokat összekötő egyenes ugyanis a mindkét felől való egyenlő származás miatt $\mathfrak{C}$, valamint $\mathfrak{c}$ mellett is mind a két felé egyenlő szögeket, tehát derékszögeket alkot. Ha már mostan az L vonalnak az a pontja, a mely a $\mathfrak{C}$-ben emelt és az α-val egyenlő merőlegeshez tartozik, $\mathfrak{p}$-be vagy $\mathfrak{q}$-ba esnék: akkor az első esetben volna $a=b+k+h$, és így $a>R$; mert $x=k+h=R$ volt. De ugyanannak az a-nak R-nél kisebbnek is kellene lennie; mert az R-rel egyenlő p külső szög nagyobb az a belső szögnél, a mint majd azt a maga helyén függetlenül bebizonyítjuk. A második esetben azonban lenne $i=h$, és így $i<R$, noha a külső szög $i>p=R$. Ebből azután az is következik, hogy $\mathfrak{a}\mathfrak{A}=\mathfrak{Cc}$.

Hasonlóképen az $\mathfrak{ac}$ egyenesnek felező pontjába esnék az L vonalnak az a pontja, mely az $\mathfrak{AC}$ egyenes felező pontjának megfelel, és világos, hogy ez, ha mindegyik felerészt újból felezünk, vég nélkül így folytatódik. Ekkor azonban az L vonalnak semmi olyan az $\mathfrak{a}$-ban kezdődő folytonos része nem lehet, a mely az $\mathfrak{ab}$ egyenes felett vagy alatt van. Ugyanis $\mathfrak{Aa}$ és valamely olyan egyenes között, melyet az említett, az $\mathfrak{a}$-ban kezdődő vonalnak (melynek $\mathfrak{a}$-t kivéve, minden pontja az $\mathfrak{ab}$ egyenesen kívül van) bármely pontjából merőlegesen bocsátunk $\mathfrak{AB}$-re, ugyanannak a vonalnak számtalan olyan pontja volna, a mely az említett felezés révén származva, az $\mathfrak{ab}$ egyenesben van. Ily módon tehát az L vonal azonos volna az $\mathfrak{abcd}\ldots$ egyenessel (25. ábra). Ebből majd az alábbiak segítségével könnyen kiderül minden.

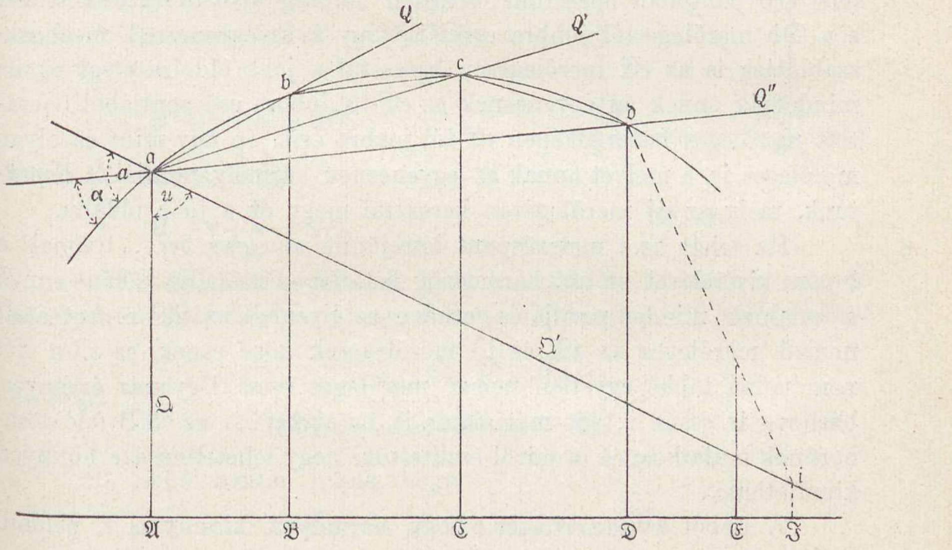
2. Ha azonban x hegyes szög vagy tompa szög volna: akkor az $\mathfrak{abcd}\ldots$ vonal egyenesekből összetett olyan vonal lenne, melynek $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}\ldots$ közei mind a két felé egészen a végtelenig egyenlők, és melynek minden köze a megelőzővel és a reá következővel ugyanazon az oldalon egyenlő szögeket alkot. Ha $x<R$, az $\mathfrak{ab}$ és $\mathfrak{bc}$ egyenesek alkotta alsó szög $<2R$; ha azonban $x>R$, mindenütt a felső szög $<2R$. Bebizonyítható azonban, hogy az $x>R$ eset nem lehetséges; mert akkor az $\mathfrak{aB}$ átlót meghúzván, két olyan háromszög keletkeznék, melyek szögeinek összege nagyobb $4R$-nél, és így volna olyan háromszög is, a mely szögeinek összege $>2R$ (minthogy az, a mi nagyobb 4-nél, nem osztható két részre úgy, hogy egyikük sem >2). Hogy ez azonban nem lehetséges, az többféle módon függetlenül bizonyítható be. Elég azonban, ha most azt az $\mathfrak{abcd}\ldots$ vonalat úgy vesszük fel, hogy minden szöge a $2R$-nél kisebb; ezt a vonalat nevezzük λ-nak.

3. Világos, hogy a λ vonalnak nincsen egyetlen olyan köze sem — példa gyanánt szolgáljon $\mathfrak{cd}$ — mely a jobb oldal felé meghosszabbítva, metszené λ-nak azt a részét, mely $\overline{\mathfrak{AB}}$-nek a $\mathfrak{C}$ ponttól balra eső pontjaiban emelt merőlegesek révén keletkezett, vagy pedig valamelyiket a tovább balra eső merőlegesek közül. Az említett merőlegesek ugyanis valamennyien mindennel együtt, a mi közöttük van, a síknak arra az oldalára esnek, a mely $\mathfrak{Cc}$-től balra van, és így, hogy a szóban levő metszés létrejöhessen, a $\overline{\mathfrak{cd}}$ egyenesnek $\mathfrak{c}$-n kívül még másutt is át kellene mennie a $\overline{\mathfrak{Cc}}$ egyenesen. Ekkor azonban $\mathfrak{cd}$ reáesnék $\overline{\mathfrak{cC}}$-re.

4. Így tehát egyetlen olyan $\overline{\mathfrak{Cc}}$-nek, melyet λ valamely szögének csúcsából, $\mathfrak{c}$-ből $\overline{\mathfrak{AB}}$-re merőlegesen bocsátunk, és a mely bizonyára magát a szöget felezi, $\mathfrak{c}$-n kívül λ-val (vagy L-lel) semmi közös pontja nincsen. Ha ugyanis λ-nak még egy $\mathfrak{p}$ pontja közös volna $\overline{\mathfrak{Cc}}$-vel, ez a $\mathfrak{p}$ az $\overline{\mathfrak{AB}}$-nek valamely $\mathfrak{C}$-től különböző pontjá-

ban emelt merőlegesbe esnék, és ha $\mathfrak{p}$ egyszersmind $\mathfrak{Cc}$-be is esnék, két ugyanarra az egyenesre emelt merőleges találkoznék egymással.

5. Nevezzük (a 27. ábrában) az $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ad}$ stb. egyeneseket, melyeket ugyanabból az $\mathfrak{a}$ pontból egészen a λ vonal közeinek végpontjaiig húzunk, Q, Q', Q'', . . .-nak, általános nevük pedig legyen Q; legyen továbbá $\mathfrak{Q}$ a λ vonal annak a szögének felezője, mely $\mathfrak{a}$ mellett fekszik, és így az $\mathfrak{a}$-n átmenő az az egyenes, mely merőleges $\widetilde{\mathfrak{AB}}$-re; az $\mathfrak{abc}$ szög $= \mathfrak{bcd} = \mathfrak{cde}$ stb. Kérdés már mostan, hogy tekintettel valamely Q-ra merre esik a λ vonalnak következő köze? Először is mindjárt $\mathfrak{bc}$ az $\mathfrak{ab}$ alá esik, mert (a 104. o. szerint) a szöget



27. ábra.

[t. i. $\mathfrak{abc}$-t] két derékszögnél kisebbnek vettük fel; $\mathfrak{cd}$ továbbá Q' alá esik; mert különben vagy Q'-ba, vagy pedig a Q'-n fölül kellene esnie. A Q'-ba nem eshetik; mert ez vagy a $\mathfrak{c}$-n belül, vagy pedig a $\mathfrak{c}$-n túl, például $\mathfrak{k}$-ban történnék. Az utóbbi esetben azonban a $\mathfrak{bck}$ szög nagyobb volna $2R$-nél, a másikban pedig (ellenkezésben a 104. oldalon mondottakkal) $\widetilde{\mathfrak{cd}}$ metszené λ-nak előbb származott részét. Ugyanaz történnék, hogy ha $\mathfrak{cd}$ a Q'-n fölül esnék, minthogy ennek $\mathfrak{cb}$ és Q' között kellene megtörténnie; mert ha a $\mathfrak{cb}$-n kívül esnék, a [$\mathfrak{bcd}$] szög nagyobb volna $2R$-nél.

Ha ugyanezt a bebizonyítást mindig tovább alkalmazzuk, kitűnik, hogy minden következő köz alája esik annak az egyenesnek, melyet $\mathfrak{a}$-ból kezdőpontja felé húzunk.

6. Ha tehát Q-t $\mathfrak{a}$ körül $\mathfrak{bcdc}$. . . mentén mozgatjuk, míg $\mathfrak{Aa}$-ba

jut, akkor valóban a λ vonalnak mindig távolabb és távolabb eső pontjába ér; még pedig egy darabig metszi λ-t, míg ellenben 𝔄𝔞-t (a 104. o. szerint) [𝔞𝔟-n kívül] λ-nak semmi [más] köze nem metszi. Így tehát úgy, mint fentebb (97. o.), van bizonyos olyan $\mathfrak{Q}'$ egyenes, mely a λ vonalat először nem metszi, de a melyen belül bármely Q — ha még olyan kicsiny z szöget is alkot $\mathfrak{Q}'$-val — a λ vonalat metszi.

Ekkor azonban nem történhetik meg, hogy a λ vonalnak valamely köze (pl. 𝔠𝔡), ha azt jobbra bármennyire is meghosszabbítjuk, a $\mathfrak{Q}'$ egyenest valahol (pl. 𝔦-ben) messe. A merőleges ugyanis, melyet valamely bármeddig meghosszabbított köznek valamely távolabb (jobb felé) eső pontjából bocsátunk, szintén mindig távolabbra esik; mert 𝔢 a 𝔇𝔡 merőlegestől jobbra esik. Ép úgy a 𝔡𝔢 egyenesnek meghoszszabbítása is az 𝔢𝔈 merőlegesen keresztül a jobb oldalra megy át, és mindegyik ennek az egyenesnek az 𝔢𝔈-től jobbra eső pontjából bocsátott merőleges hasonlóképen 𝔢𝔈-től jobbra esik, ép úgy mint az olyan merőleges is, a melyet annak az egyenesnek bármely pontjából bocsátunk, mely az új merőlegesen keresztül megy át a jobb oldalra.

Ha tehát az 𝔦 metszéspont létrejönne, az egész 𝔡𝔢𝔣... [vonal] a 𝔡 pont kivételével az 𝔞𝔡𝔦 háromszög belsejébe esnék. Így tehát [annak a vonalnak] minden pontja és minden az ilyenből az 𝔄𝔍-re bocsátott nemző merőleges az 𝔞𝔄 és 𝔦𝔍 merőlegesek közé esnék, és 𝔦𝔍-n túl nem volna többé egyetlen nemző merőleges sem. Ugyanaz érvényes, bárhova is essék 𝔦; sőt még akkor is, ha 𝔞𝔟𝔠𝔡𝔢𝔣... az 𝔄𝔅 felé domborúnak mutatkoznék (a miről említettük, hogy lehetetlensége könnyen kimutatható).

7. Ebből azután világos, hogy bármilyen kicsiny is z, például ha $z < \frac{q}{n}$, hol n valamely tetszés szerinti nagy egész számot jelent, a z szög szárai közbefoglalják valamely állandó q szög szárait még akkor is, ha ezeket a végtelenbe meghosszabbítjuk. Ha tehát q-t a csúcsából kiindulva n egyenlő részre osztjuk: akkor mindegyik ilyen n-edrésznek szárai is közbefoglalnak egy-egy q-t a végtelenbe meghosszabbított száraival együtt, és mindezek a q szögek teljesen el lesznek egymástól választva, ha mindegyik $\frac{q}{n}$-ben úgy veszszük fel a $z < \frac{q}{n}$-t, hogy z-nek a q szög csúcsából kiinduló szárai a $\frac{q}{n}$ szögnek szárai közé essenek.

E szerint az ajánlott (II. 2) axiómával nem egyeztethető meg, hogy az u szög nagyobb vagy kisebb R-nél. Így tehát u derékszög.

8. Ha tehát (a 25. ábrából kivett 28. ábrában) 𝔞𝔄 = 𝔟𝔅 és az 𝔄, 𝔞, 𝔅, 𝔟 mellett fekvő szögek derékszögek: akkor az $\alpha+\gamma$ és $\alpha'+\gamma'$,

valamint a β, β' szögek (melyeket *váltó szögeknek* nevezünk) egyenlők ép úgy, a mint egyenlő valamely *külső szög*, például β'' a *szemben fekvő belső szöggel*, β'-val; továbbá, ha bármely $\mathfrak{a}\mathfrak{B}$ egyenes metszi $\widetilde{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$-t és $\widetilde{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$-t, a belső szögek összege egyenlő két derékszöggel. Ugyanis az $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{b}\mathfrak{B}\mathfrak{a}$ derékszögű háromszögek (a mint majd az a későbbiekből ettől függetlenül kitűnik) egyenlők; mert átfogójuk közös és az $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ befogó egyenlő a $\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ befogóval. Ezért

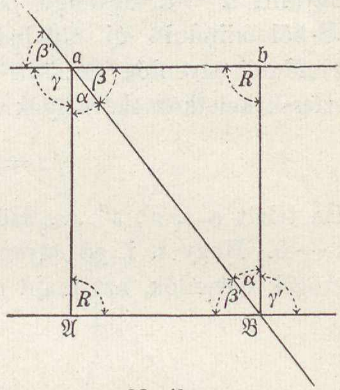
$$\alpha = \alpha' \quad \text{és} \quad \beta = \beta',$$

és minthogy $\beta = \beta''$-vel, t. i. csúcsszögével, egyszersmind $\beta'' = \beta'$. Minthogy továbbá

$$\beta'' + \gamma + \alpha = 2R,$$

ebből következik, hogy

$$\beta' + \gamma + \alpha = 2R.$$



28. ábra.

9. Ebből ismét következik, hogy ha bármely háromszög csúcsán át olyan vonalat származtatunk, mint az előbbeniben (29. ábra): akkor

$$\gamma = \gamma' \quad \text{és} \quad \beta = \beta',$$

és ezért

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' = 2R.$$

10. Ebből azután folyik, hogy

$$\delta + \gamma = \beta + \alpha + \gamma = 2R,$$

és így

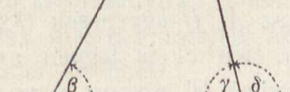
$$\delta = \alpha + \beta,$$

azaz, hogy ha bármely háromszögben valamely oldalt meghosszabbítunk, a külső szög egyenlő a két szemben fekvő belső szög összegével.

11. Ebből már mostan könnyen következtethető, hogy akkor, a mikor a belső szögek összege $< 2R$ (30. ábra), az egyenesek metszik egymást. Ha ugyanis

$$u + p + \omega + q = 2R$$

és $\widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{b}}$ az első egyenes, mely $\widetilde{\mathfrak{A}\mathfrak{a}}$-t nem metszi: akkor, ha $\widetilde{\mathfrak{A}\mathfrak{a}}$-nak valamely tetszés szerinti $\mathfrak{a}$



29. ábra.

30. ábra.

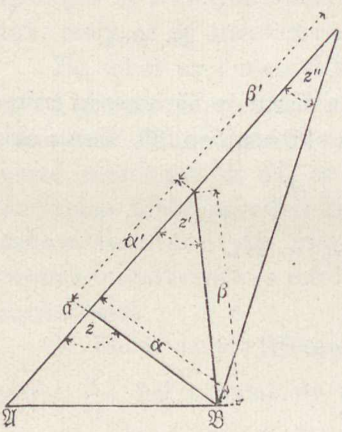
pontjából egyenest húzunk $\mathfrak{B}$-ig, (9. szerint) az $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{B}$ háromszögnek $\mathfrak{a}$-nál fekvő szöge egyenlő

$$2R-u-p=u+p+\omega+q-u-p=\omega+q$$

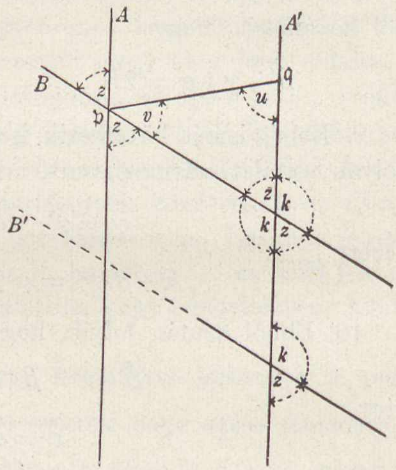
-val, és így mindig $>q$. Hogy ez helytelen, világos (a 31. ábrából). Ha ugyanis $\alpha'=\alpha$, ép úgy $\beta'=\beta$ és így tovább folytatva, minden a $\mathfrak{B}$-ből kiinduló új oldalnak megfelelőleg egy ennek végpontjából kiinduló egyenlőt veszünk fel $\mathfrak{A}\tilde{\mathfrak{a}}$-ban: akkor egyenlőszárú háromszögek keletkeznek, melyek vég nélkül következnek egymásra. Ezekben

$$z=2z', \quad z'=2z'', \ldots$$

Ha tehát a $z, z', z'', \ldots$ szögeket általánosan z-nek nevezzük: akkor $z \to 0$. Hogy t. i. az egyenlőszárú háromszög alapja mellett fekvő szögek egyenlők, azt majd alább ettől függetlenül bizonyítjuk be.



31. ábra.



32. ábra.

12. Nyilvánvaló, hogy az előbb előállított L (a 70. oldalon adott értelmezés szerint) párhuzamos $\mathfrak{AB}$-vel, és ha az említett axiómát bevezetjük, világos, hogy az $\overline{\mathfrak{ab}}$ egyenes nem metszi az $\overline{\mathfrak{AB}}$ egyenest, de minden az $\mathfrak{a}$-n átmenő más egyenes metszi az $\overline{\mathfrak{AB}}$ egyenest, mihelyt az egyik oldalon a belső szögek összege $<2R$, és ugyanazon a módon nyilvánvaló, hogy bármely ponton át bármely egyeneshez fektethető párhuzamos, még pedig csak egyetlen.

13. Ha tehát az A, B egyenesek (32. ábra) egymást a $\mathfrak{p}$ pontban metszik: akkor, bárhol is legyen az A-val párhuzamos A', B a A'-t is metszi. Vegyünk fel ugyanis olyan egyenest, mely $\mathfrak{p}$-t összeköti A' valamely tetszés szerinti $\mathfrak{q}$ pontjával: akkor

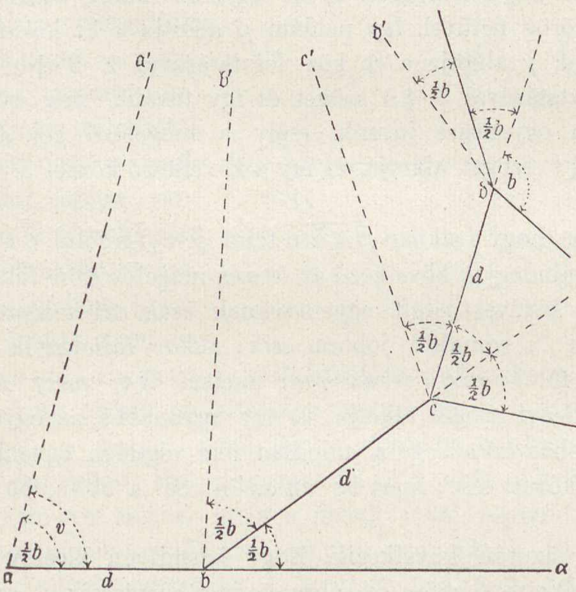
$$z+v+u=2R,$$

és így

$$v+u<2R.$$

Ha tehát B-t $\mathfrak{p}$-n túl és A'-t $\mathfrak{q}$-n túl meghosszabbítjuk: akkor találkoznak egymással.

14. Hasonlóképen világos, hogy ha önmagával párhuzamosan bárhová is (pl. B'-be) toljuk el B-t: akkor a A' és B' egyenesek is metszik egymást, és az első metszés alkalmával létrejött z és k szögek egyenlők a második metszés alkalmával létrejött z és k szögekkel.



33. ábra.

15. A fent mondottakból azonban az is következik, hogy, hacsak nem $u=R$ (97. o.), valamely még oly kicsiny v szögnek a végtelenbe meghosszabbított szárai közé helyezhető bármely a négy derékszögnél akármennyivel is kisebb szög a végtelenbe meghosszabbított száraival együtt.

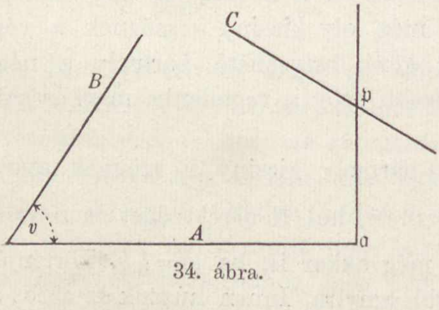
Ugyanis (az 106. o. szerint) bármely kicsiny v szögnek szárai közé bizonyos $b=\dfrac{R}{n}$ szög helyezhető, hol R derékszöget és n valamely egész számot jelent; sőt még akkor is, ha $v=\frac{1}{2}b$. Történjék ez a $v=\frac{1}{2}b$ szög csúcsától d távolságnyira. Innen húzzuk az $\mathfrak{abcd}\ldots$ polygonalis vonalat (33. ábra), melynek minden köze $=d$ és minden szöge (értve a két derékszögnél kisebbet)

$$=2R-\tfrac{1}{2}b.$$

Legyen α az $\mathfrak{ab}$ köz folytatása, mely $\mathfrak{bc}$-vel $\frac{1}{2}b$ nagyságú szöget alkot, és húzzuk $\mathfrak{b}$-ből a $\mathfrak{bb}'$ egyenest, $\mathfrak{c}$-ből a $\mathfrak{cc}'$ egyenest, $\mathfrak{d}$-ből a $\mathfrak{dd}'$ egyenest stb., melyek mindegyike a $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$,... pontokban kezdődő közökkel egy-egy $\frac{1}{2}b$ nagyságú szöget alkot, úgy hogy mindegyik ilyen $\frac{1}{2}b$ nagyságú szög szárai közé a d távolságra az $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b=b$ szög legyen helyezve. Ha továbbá azt az egyenest, mely valamely köz kezdőpontjából kiindulva, ettől a köztől jobbra esik és vele bizonyos p szöget alkot, valamely görög betűvel jelöljük: akkor jelöljük az ugyanannak a köznek végpontjából kiinduló egyenest, mely a köz folytatásával a p-vel egyenlő külső szöget alkotja, a következő görög betűvel. Így például β alkotja a $\mathfrak{bc}$ köz folytatásával az $\frac{1}{2}b$ szöget, γ alkotja a $\mathfrak{cd}$ köz folytatásával a $2\cdot\frac{1}{2}b$ szöget, δ a $\mathfrak{de}$ köz folytatásával $3\cdot\frac{1}{2}b$ szöget és így tovább, míg görög betűvel jelölt olyan egyenesre jutunk, mely a megelőző köz folytatásával a $(4n-1)\cdot\frac{1}{2}b$ szöget alkotja, és így a következő közzel a $4n\cdot\frac{1}{2}b=2R$ szöget.

Világos, hogy a sikban $\tilde{\beta}$ a $\tilde{\alpha}$-n fölül, $\tilde{\gamma}$ a $\tilde{\beta}$-n fölül, $\tilde{\delta}$ a $\tilde{\gamma}$-n fölül és így tovább mindegyik következő az összes megelőzőkön fölül esik; sőt, ha a görög betűvel jelölt egyeneseknek csak azt a részét tekintjük, mely a $\mathfrak{bcde}$... vonaltól jobbra esik: akkor mindegyik valamennyi megelőzőn fölül esik, és az sem metszi $\tilde{\alpha}$-t, mely a következő közzel a $2R$-nyi szöget alkotja, és így ugyanabba az egyenesbe esik, mint az. Tehát ez az egész, mindkét felé végtelen egyenes a $v=\frac{1}{2}b$ szög szárai között lesz; mert $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{b}}'$ az $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{a}}'$-n, $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{c}}'$ a $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{b}}'$-n, $\mathfrak{dd}'$ a $\mathfrak{cc}'$-n stb. belül esik.

Ebből azután következik, hogy bármilyen kicsiny is az A, B egyenesek alkotta v szög (34. ábra) ennek bármelyik A szárára olyan merőleges állítható, a mely bármennyire meghosszabbítva, a bármennyire meghosszabbított másik B szárt nem metszi. Legyen ugyanis C olyan egyenes, mely az előbbiek szerint, még ha mindkét felé is végtelen, a v szögnek az ezen az oldalon a végtelenbe meghosszabbított szárai között marad, és bocsássuk C-nek bármely $\mathfrak{p}$ pontjából $\mathfrak{pq}$-t merőlegesen A-ra: akkor majd ez ugyanarra az oldalra esik, a melyre C esik; mert, ha a másik oldalra esnék, olyan háromszög keletkeznék, melynek egyik szöge derékszög, egy másik szöge pedig tompa szög, t. i. a v hegyes szög-

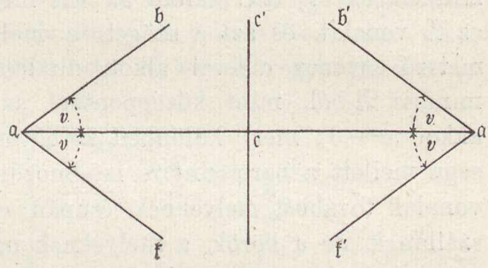


34. ábra.

nek a mellékszöge. A $\mathfrak{pq}$-nak folytatása pedig átmegy C-nek másik oldalára, mely hasonlóképen egészen foglaltatik a v szög szárai között.

Ebből azután következik, hogy (a 35. ábrában) a $2v$ szög szárai közé (a mely $\rightsquigarrow 0$, ha $v \rightsquigarrow 0$) nemcsak az egész $\overline{\mathfrak{cc}'}$ merőleges helyezhető, hanem, ha $\mathfrak{a}'\mathfrak{c} = \mathfrak{ac}$, a $4R—2v$-vel egyenlő $\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'\mathfrak{f}$ szög is a végtelenbe meghosszabbított száraival együtt.

Ha tehát $\mathfrak{ba}$-t $\mathfrak{a}$ körül $\mathfrak{ac}$ felé mozgatjuk, míg $\mathfrak{ac}$-be, ér és mielőtt $\mathfrak{ab}$ az $\mathfrak{ac}$-t eléri, mindig úgy vesszük föl $\mathfrak{a}'$-t, és olyan szög alatt, a milyent $\mathfrak{ab}$ az $\mathfrak{ac}$-vel alkot, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$-t, hogy $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ és $\mathfrak{ab}$ egymást ne messék: akkor vizsgáljuk mindig azt a teret, a mely, ha az egész idomot $\mathfrak{aa}'$ körül forgatjuk, $\mathfrak{ab}$ útjától balra esik és azt, a mely az $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ útjától jobbra van. Ilyen módon a térnek bármely olyan s alkotó része, a melynek (legalább is az $\mathfrak{a}$ ponton kívül) semmije sem közös az $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{a}}'$ egyenessel, nyilvánvalóan valamely a bal oldalon származott olyan térben foglaltatik, a melyre nézve v kisebb minden olyan szögnél, a melyet $\mathfrak{a}$-ból s-nek bármely pontja felé húzott egyenes $\mathfrak{aa}'$-val alkot. Ha már mostan $\mathfrak{a}'$-t elég távolra eltoljuk: akkor az olyan v-re nézve, mely a másik v-vel egyenlő, előáll egy másik s is, a melynek az előbbivel semmije sem közös. Ebből világos, hogy miképen alkalmazható az (I. 3. alatt) felállított axióma. Mindazonáltal nem származik két tér; mert, midőn $\mathfrak{ab}$ az $\mathfrak{ac}$-be ér, létrejön ugyan az egész tér, de a $\mathfrak{a}'$ [pont] a végtelenben eltünvén, az időnek utolsó oszthatatlan pontjában sehol sem található többé. Megelőzőleg ugyan minden pont benne foglaltatik a bal oldali térben, de a vége előtt az egész sohasem.



35. ábra.

16. Ép úgy könnyen bizonyítható be a következő:

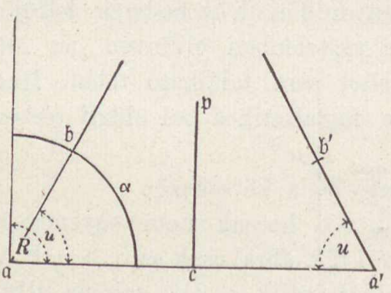
1. Az egyenletes L vonal (103. o.), hacsak nem egyenes, az $\mathfrak{abcd}$... vonalon kívül terjed el és evvel (27. ábra) csak az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... pontjai közösek, és ebből nyilvánvalóvá válik a III. axióma alkalmazása. Valóban azok közül a szögek közül, a melyeket a Q-knak alsó folytatásai L-lel kívülről alkotnak, az alsó közeledik az α határhoz, a felső pedig a $2R'—\alpha$ határhoz (hol R' jelenti azt a szöget, a melyet az $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ egyenesnek folytatása alkot L-lel), és mind a kettő mindig nagyobb marad α-nál. Az alsó folytonosan növekedik, a felső

pedig folytonosan fogy, és szembetünő, hogy a szögek minden Q-nak mind a két folytatása mellett egyenlők.

2. Ha 𝔄𝔅-t 𝔄 körül felfelé mozgatjuk: akkor ott azonnal metszi az L vonalat, ép úgy, mint minden olyan egyenes is, mely 𝔞 és 𝔄 között az 𝔞𝔄-ra merőleges. Az ilyen pedig mindjárt 𝔄 után mind a jobb oldalon, mind a bal oldalon metszi magát az L-t, mind a két oldalon egyenlő szögek alatt, melyek az említett a határtól kezdve fogynak, és egy ideig valamely adott állandónál mindig nagyobbak maradnak.

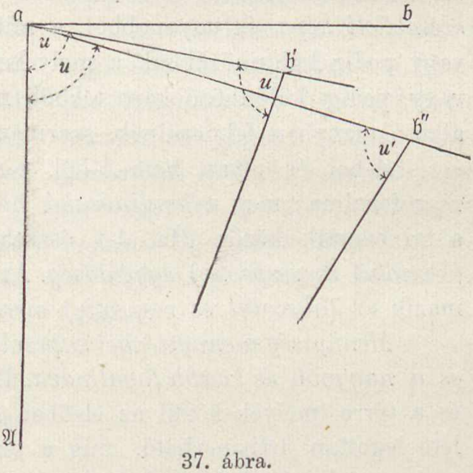
3. Ha 𝔞 megmarad a helyén és 𝔄 az 𝔞𝔄-ban mindig tovább lefelé egészen a végtelenbe távozik az 𝔄𝔅 merőlegessel együtt, ha továbbá minden egyes 𝔄𝔅 felett az 𝔞𝔄 merőleges segítségével előállítjuk az L vonalat, és azt a szöget, a melyet az L vonalat először nem metsző egyenes 𝔞𝔄-val alkot, általánosságban u-nak nevezzük, és minden 𝔄-ból, mint középpontból az 𝔞𝔄 radiussal kört írunk le: akkor $u \to 0$; mert különben az egyenes a szögnek bizonyos nagysága mellett a bármennyire is elmozdított merőlegest metszené. Az L vonalak továbbá, melyeknek csupán csak 𝔞 a közös pontjuk, alább szállanak, de a körök, a melyeknek ugyanaz az 𝔞 az egyetlen közös pontjuk, folytonosan emelkednek és ugyanahhoz a bizonyos geometriai határhoz közelednek. Hogy ilyen létezik, valamint az a forgási felület is, mely e vonalnak 𝔞𝔄 körül való forgása révén keletkezik, és hogy ez a két alakzat egyenletes, az bizonyos; még pedig, ha Euklides XI. axiómája igaz, az említett vonal *egyenes* és a felület *sík*. Minden esetben azonban mind a vonal, mind a felület *a térben egyértelműen* van meghatározva.

Az említett vonalat valamely pont folytonos mozgásával a következő módon írhatja le. Legyen (a 36. ábrában) eleinte $u = R$, és mozgassuk 𝔞𝔟-t 𝔞 körül egészen 𝔞𝔠-ig. A mint 𝔟 az α ívben valamely utat ír le, ennek ott valamely 𝔠 [pont] felel meg oly módon, hogy az ebben emelt merőleges az első [merőleges], a mely nem metszi az 𝔞𝔟 egyenest; és hogy ha 𝔠𝔞′ = 𝔠𝔞, akkor 𝔞′𝔟′ is az az egyenes, a mely először nem metszi 𝔞𝔟-t. A mint a 𝔟 pont az α ívben tovább mozog, a 𝔠 pont is, 𝔞-tól kezdve, mindig tovább mozog; mert α minden belsőbb pontjának megfelelőleg van egy 𝔠, még pedig egy mindig távolabbra eső. De 𝔞-tól kezdve egyik 𝔠-n túl sincsen olyan pont, a melynek nem felelne meg α-nak bizonyos pontja; még



36. ábra.

pedig mennél távolabbra esik az a pont, az α-nak annál beljebb eső pontja felel meg neki. Ha ugyanis $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ az az egyenes, a mely $\widetilde{\mathfrak{cp}}$-t először nem metszi: akkor majd minden beljebb húzott egyenes metszi $\widetilde{\mathfrak{cp}}$-t, és így annak a merőlegesnek, melyet ez nem metsz, távolabbra kell esnie. Ha pedig volna olyan $\mathfrak{c}$, a melynek nem felel meg α-nak valamely még beljebb eső pontja: akkor az $\mathfrak{a}$-ban állított merőleges volna az első egyenes, a mely a $\widetilde{\mathfrak{cp}}$-t nem metszi, és ekkor az $\mathfrak{ac}$ egyenesre vonatkozólag igaz volna EUKLIDES XI. axiómája, és azután valamennyi többi [egyenesre] nézve is könnyen be volna bizonyítható. Így tehát $\mathfrak{c}$-t $\mathfrak{a}$-tól kezdve úgy mozdíthatjuk el tovább, hogy, midőn $\mathfrak{ab}$ az $\mathfrak{a}$ körül mozog, és így $\mathfrak{b}$ az α-ban mozog mindaddig, míg u (mely eleinte $= R$ volt) a 0-sal nem válik egyenlővé, $\mathfrak{cp}$ mindig olyan legyen, hogy $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ az első egyenes, a mely azt nem metszi. Ha ugyanezeket $\mathfrak{a}'$-ra alkalmazzuk, akkor $\mathfrak{a}'$-t úgy mozdíthatjuk el $\mathfrak{a}$-ból, hogy az $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ és $\widetilde{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}$ közül mindegyik legyen az az egyenes, a mely a másikat először nem metszi.



37. ábra.

Ha már mostan $\widetilde{\mathfrak{ab}}$-t (37. ábra) mindig ugyanabban a síkban $\mathfrak{a}$ körül mozgatjuk $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ felé, míg u (mely eleinte $= R$ volt) a 0-sal nem válik egyenlővé, és e közben $\widetilde{\mathfrak{ab}}$-ben a $\mathfrak{b}'$ pont mindig úgy mozog tovább, hogy a mozgó $\widetilde{\mathfrak{ab}}$-ben mindig az u-nak megfelelő, előbb jellemzett helyet foglalja el: akkor az az út, a melyet $\mathfrak{b}'$ ezen összetett mozgása alkalmával leír, a *szóban levő vonal.*

A többi pedig, a mi ezen felül van, önként következik, valamint az is, hogy mi döntené el a dolgot, ha valamelyiket a többi felállított axióma közül vennők fel alapul; de nem érdemes ebből többet felhozni, mert az Appendixben, mely megérdemli, hogy a tiszta igazság minden híve elolvassa, az egész kérdés magasabb szempontból, a dolog mélyébe ható bepillantással van tárgyalva.

V.

Az arithmetika és a geometria fái,

melyeknek gyökerei össze vannak nőve és koronái összeérnek.

A külső és belső képzetekről absztrakczió útján jutunk mindannak végső helyeihez, a mi a külső világban megvan és a mi a külső és belső világban történik. Ezek a TÉR és az IDŐ, a melyeket részint külön-külön, részint pedig együttesen szoktunk vizsgálni. Ha t. i. a külső világban valamely testet abból a helyből, a melyet elfoglalni látszik, egészen eltávolítunk, és kérdezzük, hogy mi az, a mi hátramarad és a mi ezen túl van, származik *a tiszta tér szemléleti képe*, és ugyanabból, a mit különböző helyeken észlelünk, vagy pedig különbözőkből, a melyeket ugyanazon a helyen észlelünk, vagy pedig különböző képzetekből, melyek ugyanabban a képzeteket alkotó alanyban felmerülnek, származik *az idő szemléleti képe.*

A-ból és olyan nem-A-ból, a mely A-ból való, származik a *rész* fogalma; meg a *kontinuumé*, ha a részeknek van olyasvalamijük, a mi bennük közös. Ha A-t összehasonlítjuk B-vel, származik az *(abszolut és respectiv) egyenlőség*. Az egyenlőségből és a részből származik az *(abszolut és respectiv) mennyiség*.

Mennyiség mennyiséggel kapcsolatban reávezet *a homogeneitásra és a nagyobb és kisebb fogalmára*. Ha innen visszatekintünk az időre és a térre (melyek közül az elsőben a nagyobb mennyiségnek többlete legottan felismerhető, míg a térben ez gyakran másképen van), *az a gondolatunk támad, hogy minden mennyiséget az idő egyszerű alakjára vezessünk vissza.*

És ilyen, t. i. az IDŐ *alakjára viszszavezetett mennyiség* az ARITHMETIKÁNAK TÁRGYA.

Ezeket előrebocsátva, a *tiszta* TÉR a GEOMETRIÁNAK TÁRGYA, a melyben, ha szükséges, az arithmetikában levezetett igazságokat alkalmazzuk, úgy hogy mind a két testvér-fa, melyeknek gyökerei össze vannak nőve, egyik a másiknak segítséget nyújtva, a Tér és Idő örökkévaló házasságának fényes pályái között az ég rengeteg magasságában koronájával összeérjen.

I. *A mennyiség a minőséggel kapcsolatban* (t. i. *bizonyos meghatározás mellett*) létrehozza a pozitivot és a negativot (majd pedig a képzetest is).

II. Ha a P és Q mennyiségek bizonyos meghatározással vannak megadva: akkor *abból az eredményből, melyet bizonyos feltétel mellett nyerünk*, származik az S *összeg*. Ha pedig S-ből és P-ből ennek *társát* keressük, keletkezik *P-nek S-től való különbsége.*

III. Ha S-nek S'-től való *különbsége*, továbbá S'-nek S''-től való különbsége és így tovább rendre *ugyanaz:* akkor származik az S, S', S'', S'''... *arithmetikai sor.*

És ha az ilyen fajtájú U sor 0-sal kezdődik és bármely tagjának a következőtől való különbsége $= u$: akkor ebből ered a *szám* u-ra nézve. És ha valamely ilyen fajtájú V sor szintén 0-sal kezdődik és bármely tagjának a következőtől való különbsége $= v$, és V-nek 0-át egyidőben gondoljuk U-nak 0-ával, és akár U-nak, akár pedig V-nek minden következő tagját egyidőben gondoljuk avval, a mely a másik sorban következik: akkor ebből az egyidőben gondolt tagoknak azonos *számbeli elnevezése* ered, U-ban *u-ra nézve*, V-ben pedig v-re nézve.

IV. Ebből különböző *kérdések* erednek. Egyebek közt pl. az, vajjon B szám-e A-ra nézve? Ha nem

I. *A tiszta térből* először is származnak *a felület, a vonal, a pont, az alakzat és a metszés.*

II. *Ha visszatérünk a külső világba* és ugyanazt a testet különböző helyeken figyeljük meg: akkor reájövünk *a kongruenczia axiómájára és a geometriai mozgathatónak szerkesztésére*, valamint *a geometriai mozgásra* (a mely eszmei, de nem konkrét egyesítése a térnek és az időnek).

III. *Visszatérés a tiszta térbe a geometriai mozgathatóval. Mozgás nyugalomban levő nélkül (a mozgás első faja); mozgás nyugalomban levővel; nyugalomban levő egyetlen ponttal (a mozgás második faja); nyugalomban levő két ponttal (a mozgás harmadik faja).*

IV. A térnek elsőszülött gyermeke a *pont*, azután következik a gömb, mely mintegy közepe a [szám], vajjon van-e olyan u, a melyre nézve mind A, mind B szám? És ha van ilyen, akkor mi A-nak és mi B-nek számbeli neve? Ebből származik B-nek A-val való *mérése*, a mikor A-t *mértéknek* és B-t *mértnek* nevezzük. És itt származik az *inkommenzurabilitás* fogalma is (mely mostanig még csak subjective lehetséges), és ebből, ha u-t egyre kisebbedőnek gondoljuk, a *határérték* fogalma. Ha pedig olyan a-ra és b-re akadunk, hogy arra a kérdésre: milyen mértje b az a-nak, a válasz ugyanaz mint arra, hogy milyen mértje B az A-nak, ebből származik a *proporczió* fogalma. Ha azután A-ra vonatkozólag nem csak B-t, hanem C-t is mérjük, származik a *tört*, és innen csak egy lépés, hogy valamennyi homogén mennyiséget ugyanarra az A-ra vonatkozólag mérjük, a mely A-t *egységnek* nevezünk. A mi ennél kisebb, azt *valódi törtnek* mondjuk és a mi A-ra nézve szám, azt *egésznek* nevezzük.

V. Visszatérve IV.-re, ha ott az egység A, és a-ból meg B-ből b-t keressük: akkor azt mondjuk, hogy a-t *szorozzuk* B-vel, és b-t *az A egységre nézve az a és B tényezők szorzatának* nevezzük.

Ha b-t szorzatnak veszszük, és az a és B tényezők egyikéből a tényező-társát kell meghatároznunk: akkor azt mondjuk, hogy b-t *osztjuk* avval [a tényezővel], melynek társát keressük, és ezt [a társát] *hányadosnak nevezzük.*

két szélsőségnek (a kiterjedés nélkülinek és a minden irányban végtelennek). A mozgás harmadik faja révén a gömb gyermeke a *kör*, és alkalmazva a mozgás többi faját, ezekből származik az *egyenes* és az egyenesből és a körből a *sík*.

V. *Húzzunk ugyanabból a* $\mathfrak{p}$ *pontból valamely F* [*alakzat*] *minden pontjához egyeneseket.*

1. Ha valamennyit [t. i. valamennyi egyenest] *ugyanavval* (akár 1-gyel, akár valami mással, de nem a 0-sal) *szorozzuk:* akkor *a végpontok összessége* reávezet a *hasonlóságra* és a *homológokra*, továbbá az *ellenkezően egyenlőkre* és a *geometriai egyenlőség* általános fogalmára.

2. *Maguknak* az említett egye-

És a szerint, a mint (IV-ben) az egységet $\vdash\!\!+\!\!\dashv$-nak vagy $\vdash\!\!-\!\!\dashv$-nak veszszük fel, származnak *a valósok* $+1$*-re nézve és a valósok* -1*-re nézve.*

VI. Ha megesik, hogy *a tényezők egyenlők,* akkor a szorzásból és az osztásból származnak *az (elemi) hatvány, gyök, logaritmus.*

Továbbá az (úgy mint I.-ben) *bizonyos meghatározással ellátott mennyiség,* valós voltával a -1-re vonatkozó szorzásra támaszkodva, létrehozza *a képzetest* és a szorzásnak bővebb értelemben vett fogalmát.

Sőt az (elemi) hatvány és logaritmus a kéttagúnak [hatványra való] felemelése révén olyan sorokra vezet, melyekből a *hatvány* [*és*] *logaritmus* magasabb fogalma

neseknek *összessége* pedig (általános értelemben vett) *gúla* és a $\mathfrak{p}$-nél csúcsos alakzat a *szögnek* általános fogalmát szolgáltatja.

3. Azután származik a *folyó* alakzat, melynél *a szög ki van zárva,* és az ilyen, ha *az egyenes és a sík ki van belőle zárva, görbe,* melyhez *az egyenest és a síkot hozzávéve,* reájövünk az *érintő* és a *merőlegesség* általános fogalmára.

4. Ha (V.-ben) $\mathfrak{p}$-t a végtelenbe eltoljuk, származik a *0-szög,* vagy *az első nem-metszés; az említett egyenesek összessége* pedig, ha azokat végeseknek és egyenlőknek veszszük fel, (általános és azután még általánosabb) *hasábba* megy át. Ha pedig F egyenes és az említett egyenlő egyeneseket a síkban egyenlő szög alatt veszszük fel, ebből származik a *párhuzamosságnak* általános fogalma.

VI. *Egyszerű geometriai mozgás,* azaz olyan, hogy bármely időben a (III.-ban említett) három mozgás-fajnak csak egyike, még pedig bizonyos, ha nem is [szükségképen] ugyanavval a számmal ismételten fordul elő. Az egyenes és a sík IV. alapján itt már feltételeztetnek.

Ha a mozgás két első fajával és azonkívül mindig bizonyos számú egyenest hozzávéve, *leszállunk a síkba* (és mindent erre korlátozunk), a *sík geometriájára* jutunk. Itt először (a terület mellőzésével) a *vonalakról,* ezeknek (vagy hiányzó, vagy valamilyen ered, úgy hogy a képzetes is felemelkedik a kitevőbe.

VII. Mindezekből, a melyek úgy szólván óczeánná folynak össze, bármely műveleteknek alávetett bármely mennyiségeknek bármely módon történő összetétele révén származik az ú. n. FÜGGVÉNY fogalma, melylyel kapcsolatban (úgy mint IV.-ben) különböző kérdések erednek, a melyekből *az arithmetika fájának* KORONÁJA serken. T. i.

számban meglevő) *metszéseiről*, azután pedig a *területről* folyik a tárgyalás. A planimetria *a szó szoros értelmében vett geometriai szerkesztésnek* mezeje.

Ha a mozgás harmadik faját is megengedjük és nem szorítkozva a síkra, a tér egészébe térünk vissza, a *testek geometriáját* nyerjük, a melyben *a szó bővebb értelmében vett geometriai szerkesztés* szerepel.

Megjegyzendő azonban, hogy az említett egyszerű mozgásnál minden mozgás-faj elkülönítve megy végbe, és nincsen más törvénynyel korlátozva, mint csak avval, hogy a mozgatható adott helyről adott helyre jusson. Így tehát a két első mozgás-faj, ha ezeket a síkra szorítjuk, a következőre vezethető vissza. Először *az* $\mathfrak{ab}$ *egyenest magával ragadó* $\mathfrak{a}$ *pontnak mozgására, mely addig* tart, *míg* $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{p}$-*be nem jut*; másodszor *az* $\mathfrak{ab}$ *egyenesnek a síkban* $\mathfrak{a}$ *körül végbemenő mozgására, mely addig* tart, *míg* $\mathfrak{ab}$ *bizonyos adott olyan egyenesbe nem jut, melynek egyik végpontja* $\mathfrak{a}$.

VII. AZ ÖSSZETETT GEOMETRIAI MOZGÁS, azaz olyan, a melyben ugyanabban az időben (az említett három egyszerű közül) több faj van összekapcsolva, és a törvény is meg van adva, a mely szerint a mozgás tartama alatt az egyes mozgásfajoknak megfelelő egyidejű utak kölcsönösen egymástól függnek. Ebből serken *a geometria fájának* KORONÁJA. Az

𝔄) Kérdezhetjük: *a függvényre vonatkozó bizonyos feltételnek (vagy tulajdonságnak) megfelelőleg* bizonyos a függvényt meghatározó dolgok *melyek, milyen nagyok, milyen természetűek.*

egymással összekapcsolt mozgásfajok:

𝔄) *Vagy véges számúak,* még pedig:

1. Vagy csak kettő van; pl. ha az $\mathfrak{ab}$ egyenest a P síkban $\mathfrak{a}$ körül mozgatjuk, és e közben a $\mathfrak{p}$ pontot $\widetilde{\mathfrak{ab}}$-ben úgy mozgatjuk, hogy útja $y = f(u)$ (hol u a $\mathfrak{b}$ pont útját jelenti), és keresendő a $\mathfrak{p}$ pont útja.

Vagy pedig, ha $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ nyugalomban marad, és az $\widetilde{\mathfrak{ab}}$-ben mozgatott $\mathfrak{p}$ az $\mathfrak{ab}$-re merőleges B-t magával ragadja, mi közben B-ben a $\mathfrak{p}'$ pontot úgy mozgatjuk, hogy útja $y = F(x)$ (hol x a $\mathfrak{p}$ pont útját jelenti), és keresendő a $\mathfrak{p}'$ pont útja. Ezen a módon olyan alakzatok is keletkeznek, melyek, ha egészükben nem is szerkeszthetők, mégis olyanok, hogy minden pontjuk (t. i. bármely megadott x-nek megfelelőleg a hozzá tartozó y szorosabb értelemben) megszerkeszthető.

2. Vagy pedig három [mozgásfaj] van egymással összekapcsolva. Pl. ha a $\mathfrak{p}$ pont a P sík $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ egyenesében az x utat írja le, és magával ragadja a p síkot, mely az $\mathfrak{ab}$-re merőleges B egyenesből merőleges P-re, és közben a B-ben mozgatott $\mathfrak{p}'$ a p síknak azt a C egyenesét ragadja magával, mely $\mathfrak{p}'$-ben merőleges B-re, és a $\mathfrak{p}''$ pont C-ben a z utat írja le: akkor, ha a $\mathfrak{p}'$ pont útja B-ben $y = a(x)$, továbbá $z = b(y)$, kérdezzük, hogy mi a $\mathfrak{p}''$ pont útja a térben.

Vagy pedig mozgassuk a P

$\mathfrak{B}$) *A függvényt meghatározó bizonyos dolgokra vonatkozó bizonyos feltételnek* (tulajdonságnak) megfelelőleg kérdezhetjük, hogy milyen a függvény természete és mik az értékei (sőt egyszersmind bizonyos a függvényre vonatkozó feltétel is állítható fel).

Így például $\mathfrak{A}$)-ból. Ha a feltétel az, hogy a függvény értéke 0 legyen, a feladat lehet az, hogy keresendők *a változók értékei* (a mi nem más, mint *az egyenlet* feladata), vagy pedig az együtthatók értékei. A feltétel lehet az is, hogy a függvény értéke *maximum*, vagy *minimum* legyen, és ennek megfelelőleg határozandó meg a változó.

Így más feltételek is lehetségesek; sőt a változók helyébe a függvények bizonyos faja léphet (mint az ú. n. *variáczió-számításban*).

A feltétel az is lehet, hogy bizonyos mennyiségek, melyeknek faját majd x-szel jelöljük, semmi más műveletnek ne legyenek alávetve, mint annak, hogy bizonyos

síkot a benne levő szilárd A egyenes körül, és nevezzük az utat, melyet bizonyos pontja leír, u-nak, e közben A-ban írja le $\mathfrak{p}$, mely magával ragadja a P síkban az A-ra merőleges B egyenest, az x utat és egyidejűleg $\mathfrak{p}'$ írja le B-ben az y utat; legyen $x = k(u)$, $y = h(x)$, és kérdezzük, hogy mi a $\mathfrak{p}'$ pont útja.

Ily módon több (meghatározott számú) mozgás-faj is kapcsolható össze egymással.

$\mathfrak{B}$) Vagy pedig *számtalan*, ilyen mozgás-fajt kapcsolunk össze. Pl., ha az A egyenes a P síkban van és a B egyenes merőleges A-ra, a Q sík pedig a P síkot B-ben és az A egyenest $\mathfrak{b}$-ben metszi, mozgassuk $\mathfrak{b}$-t, mely a Q síkot magával ragadja, A-ban, mi közben bizonyos a $\mathfrak{b}$ pont útjától függő törvény szerint bizonyos pontok (esetleg, a mint azt a törvény megszabja, számtalan pont is), melyeket általánosságban $\mathfrak{p}$-nek nevezünk, mozogjanak Q-ban, a B-re emelt merőlegesekben: akkor kérdezzük, hogy mi az összessége a $\mathfrak{p}$-knek minden rész nélküli időpontban egészen a mozgás végéig.

törvény szerint rendeztessenek, és ekkor az így származó csoportok kerestetnek. *(Ez a kombinatorikus analizis).*

A 𝔅)-ben is különfélék lehetnek a feltételek. Pl. az, hogy a változó helyébe csakis egész számú érték helyettesíttessék; sőt az is, hogy a függvény bizonyos tulajdonsággal rendelkezzék (mint a *számelméletben*). Ekkor vagy azokat a dolgokat kereshetjük, a melyek a függvényt meghatározzák, vagy pedig a függvény minőségét vagy értékét.

Abból, hogy x helyébe $x+i$-t teszszük, származik a *Taylor-féle probléma.*

Ha pedig x helyébe az $m\dot{x}$-et teszszük (hol $\dot{x}$ az $\frac{x}{n}$-t jelöli), továbbá m helyébe az 1-től kezdve az egész számokat helyettesítjük és rendbe állítjuk a függvénynek így származó értékeit: akkor keletkeznek *sorozatok* (a melyekben x, sőt n is vagy az 1-et, vagy pedig más valamit jelenthet). Az x bizonyos értékeire nézve (pl. ha $x = 1$) vagy n is állandó és m helyébe 1-től kezdve, valamennyi számot helyettesítünk, még az n-en felül levőket is, vagy pedig n (habár ez mindig véges és meghatározott, mégis, miután valamely sorozatot előállítottunk, új értéket vesz fel) $\frown \infty$, és ekkor m helyébe mindig az 1-től egészen n-ig terjedő számok helyettesítendők.

Ha az utóbbi esetben bármely tagot a következővel hasonlítunk össze, származik *a növekmények sorozata*, és ha ugyanannak az x-nek két függvénye, F és f közül az egyiknek, F-nek az értéke ismeretes, és a két függvényből levezetett növekmények sorozatainak általános tagjai T és t aequipollensek (azaz $\frac{t}{T} \rightharpoondown 1$, ha $n \rightharpoondown \infty$): akkor ebből nyerhető a másik függvénynek, f-nek az értéke. Arra, hogy t-t (a legegyszerűbb alakban) meghatározhassuk, a *differencziál-számítás* tanít, arra pedig, hogy t-ből meghatározhassuk az f függvényt, az *integrál-számítás* tanít.

𝔈) Végre az előbbiek közül bármely feltételnek megfelelőleg tetszés szerintieket tehetünk össze, és bizonyos feltétel mellett kereshetjük az eredményt, vagy pedig az eredménynek megfelelőleg azokat a dolgokat, a melyek azt létrehozták. És ha az ugyanazon idő alatt megtett n-szeres útnak megfelelőleg alkotjuk az n-szeres ok fogalmát, származik *a tiszta Mechanika.*

BOLYAI FARKAS

RÖVIDEN VÁZOLT KISÉRLET (1851)

Röviden vázolt kisérlet, mely oda irányul, hogy:

I. Az *arithmetikát* czélszerűen megalkotott fogalmak alapján, képzelt és végtelen kicsiny mennyiségektől megtisztítva, szemléletesen és logikai szigorúsággal lehessen tárgyalni.

II. A *geometriában* az egyenes vonalnak, a síknak, a szögnek egyáltalában, a szög nélküli formáknak, a görbéknek, az egyenlőség különböző fajainak és más efféléknek fogalmát nemcsak élesen meg lehessen határozni, hanem a térben való létezésüket is bebizonyítani: és minthogy erre a kérdésre, vajjon *két egyenes, melyet valamely harmadik metsz, metszi-e egymást vagy sem, ha a belső szögek összege nem* $=2R$? e földön senki sem válaszolhat a nélkül, hogy axiómát fel nem állítana (a mint Euklides állította fel a XI.-et), az ettől független geometriát elkülöníteni, és egyet az *igenlő*, egy másikat a *tagadó* válaszra támaszkodva felépíteni oly módon, hogy ennek az utóbbinak képletei egy intésre az előbbiben is érvényesekké váljanak.

Egy 1829-ben Maros-Vásárhelyt megjelent latin és ugyanott kinyomtatott magyar munka nyomán.

Maros-Vásárhelyt 1851.

KURZER GRUNDRISS EINES VERSUCHS

I. Die *Arithmetik*, durch zvekmässig construirte Begriffe, von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen.

II. In der *Geometrie*, die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen, und der Krummen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. d. gl. nicht nur scharf zu bestimmen; sondern auch ihr Seyn im Raume zu beweisen: und da die Frage, *ob zwey von der dritten geschnittene Geraden, wenn die summe der inneren Winkel nicht* $\doteq 2R$, *sich schneiden oder nicht?* niemand auf der Erde ohne ein Axiom (wie *Euclid* das XI) aufzustellen, beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern; und eine auf die *Ja*- Anwort, andere auf das *Nein* so zu bauen, dass die Formeln der letzten, auf einen Wink auch in der ersten gültig seyen.

Nach einem lateinischen Werke von 1829. M. Vásárhely, und eben daselbst gedruckten ungrischen.

MAROS VÁSÁRHELY 1851.

[Az arithmetika alapjai.]

NEWTON mondja: {Alkalmasabb szó hiányában *szorzásnak* szoktuk nevezni, ha olyan új mennyiséget keresünk, mely a szorzóval ugyanabban a tetszés szerinti arányban áll, a melyben a szorzó áll az egységgel. A szorzást nemcsak absztrakt mennyiségekre alkalmazzuk, hanem konkrét mennyiségekre is, mint a milyenek a vonalak, a felületek, a súlyok, a helyváltozás stb., a mennyiben azok valamely saját nemükbeli ismert mennyiségre, mint egységre vonatkoztatva, számok arányait kifejezni és azok helyét pótolni képesek. Ha ily módon az A mennyiség a 12 lábnyi vonallal megszorzandó, egységül a két lábnyi vonalat véve fel, e szorzás eredménye $6A$; mert $6A$ abban az arányban áll A-val, mint a 12 lábnyi vonal a két lábnyi egységgel.

És ha ily módon bármely két vonalat kell egymással szoroznunk, az eredmény vonal, a melyet a geometria az egység megállapítása után a szokásos módon szolgáltat...

Szokássá vált, hogy felületnek vonal más vonalhoz derékszög alatt végbemenő mozgása révén való származását, vagy leírását ama vonalak szorzásának nevezik; habár az akárhogyan is megszorzott vonal nem válhatik felületté. Sőt a felületnek ez a származtatása vonalból egészen más, mint szorzás, és csak azt akarják azzal kifejezni, hogy a két vonal szorzata ugyanabban az arányban áll a hosszúságegységhez, mint az említett felület a felületegységhez, ha ilyennek azt a négyzetet veszszük fel, melynek oldala a hosszúság egysége... Ugyanez alkalmazható három vonal szorzatára is...}*

I. Bármennyire világosak és határozottak a nagy férfinak e szavai, mindazonáltal a tudományban sokan oly szókat fogadtak el útmutatóul, melyek értelmüket a köznyelvből hozták magukkal; a szabad alkotásra való előjogukat szűkkörű fogalmaknak hozták áldozatul; és nehogy kénytelenek legyenek mondani *vonal-szor vonal*, és

* [A { } zárójelben álló bekezdések NEWTON Arithmetica universalis, London 1707, 14. oldalán álló azon helyének fordítása, melyet BOLYAI latinul idéz.]

hogy az osztás mindig csak oszszon, mert a csőcselék 2-szer, 3-szor vesz, és kettőbe, háromba oszt, nem riadtak vissza semmiféle mesterkedéstől és még az olyan különös szemfényvesztéstől sem, a mely a lehetetlennel párosuló lehetetlennel valóságost szület, a mi még nagyobb csoda, mint valamit a semmiből teremteni.

A mathematikának az ilyen csodákat szégyelnie kellene; mindennek, a mit tárgyal, valóságosan szemléletesnek kell lennie, és a műveleteket úgy kell megalkotnia, hogy mindezek a csodák természetes úton menjenek végbe. Csoda az volna, ha ilyen alapokon nyugvó pillérek, részben lehetetlen darabokból összeállítva, részben a mindent felölelő fogalmak egyesítő ereje nélkül, habár a végtelen kicsinyeknek minden rendjével feldíszítve, az ég magasságáig emelkedő templomot tartanák, a mely az övéinek menedéket nyújt a külső viharok ellen, a zivataroknak nem egy villámát levezeti, és az örökkévalóság vándorának, ki az igazság ősforrása és a mindent egygyé teremtő szeretet felé vezető úton halad, a Földet csakhamar elmaradó sáros foltnak mutatja.

II. NEWTON szavai szerint a homogén mennyiségek minden fajának megfelelőleg egy-egy egységet kell fölvennünk, a miből egyéb különféle előny is ered; holott különben némely fonákság származik. *Pl.*

1. Ha valamely a vonalnak B szorzója csakis absztrakt (*pl.* 2 harmad): akkor a szorzat vonal, úgy mint a szorzandó. Mi is hát a másik tényező? csupán csak mutató? vagy minek a 2 harmada? Egészen abstracte a 2 : 3-nak sincsen általános értelme; mert a 2 akkor valamennyi kettőből el van vonva, és róla csak az állítható, a mi mindegyiküket megilleti. De 2 pont nem osztható a 3-mal.

Ha szó van az általánosról, tulajdonképen mindig valamelyiket a benne foglaltak közül kellene gondolnunk, habár bármelyiküket gondolhatjuk. Nem a szóról beszélünk, hanem azokról, a miket vele megnevezünk.

2. E szerint nem volna lehetséges, hogy $B=a$, ha a vonal, és ebből következnék, hogy aa képtelenség, habár sokan azt mondják, hogy $a+a^2+a^3$-nak azért nincsen értelme, mert a vonal, a^2 felület és a^3 test. Mi már azután a^4; hiszen a térnek nincsen 4 dimenziója? és a szorzásnak mely fogalma szerint lehet valamely megszorzott vonal egyéb mint vonal?

3. Ha a szorzó csak absztrakt, akkor annál inkább különböző [az eset] a szerint, a mint az osztásnál a szorzó, vagy pedig a szorzandó a keresendő.

4. Minthogy sokan osztóul is csak absztrakt számot vesznek

fel, és azt állítják, hogy csupán csak a konkrétek [t. i. konkrét számok] lehetnek negativok, negativ osztó nem volna lehetséges.

5. A többi majd a következőkben derül ki, minthogy nem tiltható meg mindaddig [új] fogalmakat alkotnunk, míg a czélhoz vezető könnyebb és jobban szemléltető eljáráshoz nem jutunk.

1. §.

Az első művelet az *elvétel* abból, a mi valahol van, és ha gondolatban valami hijján mindent elveszünk belőle, és azután ezt is: akkor azt mondjuk, hogy nem marad semmi, és ezt 0-sal jelöljük.

2. §.

Azután következik az A B-hez való *hozzáadásának* művelete. Ennek eredményét $A+B$-vel jelölhetjük. Ki van mutatva, hogy ha A vagy B 0: akkor $A+B$ a másik. E szerint $0+0=0$.

3. §.

Most már következik az u szerint való *számlálás* művelete. Ha ugyanis először a 0-t gondoljuk, és mindig hozzáadjuk u-t: akkor a következő sorozat keletkezik: 0, u, $u+u$, $u+u+u, \ldots$, a melynek minden tagját az u-ra nézve *számnak* nevezzük, és mindegyiket külön jelöljük. Pl. így: $0u$, $1u$, $2u$, $3u, \ldots$, a hol az u előtt álló jelek a megkülönböztető számneveket jelentik.

A 2. §-ból következik, hogy ha $u=0$, akkor a 0 bármely nevű szám lehet az $u=0$-ra nézve; ha azonban u nem 0, akkor a 0 az ilyen u-ra nézve csak a 0 névvel megjelölt szám lehet. Ez majd a szorzás és osztás esetében világosan vezet a keresetthez.

4. §.

Ha már mostan A és B mind a kettő az említett sorozatnak tagja, pl. $A=3u$, $B=2u$ (hol a 2 és 3 közül mindegyik minden számnévnek képviselője): akkor azt mondjuk, hogy A a B-nek *három kettede* és B az A-nak *két harmada*; ha pedig ezt keressük, azt mondjuk, hogy A-t és B-t kölcsönösen *megmérjük* [egymással]; a műveletet pedig *mérésnek* nevezzük. Ha A-ról azt mondjuk, hogy B-nek három kettede, akkor B a *mérték* és A a *mért*, ha pedig B-ről mondjuk, hogy A-nak két harmada, akkor A a *mérték* és B a *mért*.

5. §.

Egy mérés után kettő következik, és ha a számok sorozatában u helyébe v-t téve, $a = 3v$ és $b = 2v$, azt mondhatjuk, hogy A a B-vel és a a b-vel [mérve] *egyenlőmértéküek* (vagyis *egyenlőmértéküségben* állanak), vagy pedig, hogy A *annyiszorosa* a B-nek mint a a b-nek (hol az *annyiszor* szó nem veendő szó szerint).

Megjegyzés. A mennyiségnek a minőséggel való összekapcsolása után azonban a *proporcziónak* e fogalma bővülni fog. Már itten is általánosabb a következő: ha n, m számneveket jelentenek, és minden $A = nu$-nak és $a = nv$-nek megfelelőleg $B = mu$ és $b = mv$, vagy pedig $B = mu + (\omega < u)$ és $b = mv + (\lambda < v)$: akkor A, B, a, b *proporczióban* állanak.

6. §.

Két mérés után több következik, és hogy az ugyanahhoz a nemhez tartozó mennyiségeket könnyebben összehasonlíthassuk, és a mértéket ne kelljen mindig megemlítenünk, az a gondolat támad, hogy *minden nemnek megfelelőleg bizonyos mértéket állapítsunk meg*, és akkor, ha a mértéket nem nevezzük meg, *pl.* 2 harmad alatt annak (az egységnek, unitas) 2 harmadát értsük. És ezt kiterjesztjük a számnevekre is, úgy hogy, ha U az egység, 2 jelentse a $2U$-t. Így *pl.*, ha a vonal egysége $2'$ volna: akkor (ha vonalról van szó) 2 harmad jelentse a $2 \cdot 8''$-et és 2 jelentse a $4'$-at.

7. §.

És így már mostan kétféle mérés származik: még pedig a *főmérés*, ha valamit a maga egységével mérünk, és a *relativ* [*mérés*], ha a mértéket megnevezzük.

8. §.

A főmérésből és a relativ mérésből származik a *szorzás* és az *osztás* fogalma, egy sorban előállítva, hol azonban az említett szók nem veendők szó szerinti értelmükben.

Ha ugyanis 3 és 2 bármely számnevek helyett állanak, és $1 = 3u$, $B = 2u$, $a = 3v$, $b = 2v$, hol az 1 mindegyik nemnek az egységét jelenti: akkor azt mondjuk, hogy a a B-vel megszorozva b-t adja *szorzatul*, és röviden azt mondjuk, hogy B-szer a az b, a mi azonban úgy értendő, hogy b vonatkozással a-ra *egyenlő mértékű*

B-vel (hol B-nél, minthogy a mérték nincsen megnevezve, az egység veendő annak). Ez *a főméréssel egyenlő relativ mérés.*

9. §.

Ha azonban b-ből és az a és B tényezők egyikéből meghatározandó a másik, ezt a műveletet *osztásnak* nevezzük. Szembe ötlik, hogy itt 2 eset lehetséges. Az előbbi példában t. i. az egyik esetben a 2 harmadot, a másikban a relativ mértéket keressük. Arra a kérdésre: b hányszorta a? vagy b hányszorosa a-nak? válaszol az első eset, és arra a kérdésre: mi az, a minek b a 2 harmada, vagy mi az, a mi a b-t 2 harmadszor tartalmazza? válaszol a második [eset]. Az utóbbi *a részekre való osztás,* habár a közönséges felfogás a kétharmad részre való osztástól is idegenkedik. Az első [eset] annyiszorosát szolgáltatja az egységnek, a hányszorosa b az a-nak.

Pl. a $\frac{2C}{3}$ törtnél a második eset, az $A : B = a : b$ proporcziónál pedig az első eset forog fenn.

A válaszhoz is különböző módon jutunk. Ha erre a kérdésre kell válaszolnunk: hányszorosa $\frac{2C}{3}$ a $\frac{4C}{5}$-nek? akkor mind a két C-t áthúzzuk, és [az eredmény] $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}$; ha azonban azt kérdezzük: mi az, a mit $\frac{2C}{3}$ $\frac{4}{5}$-ször tartalmaz? akkor C-nek meg kell maradnia, és [az eredmény] $\frac{5 \cdot 2 \cdot C}{3 \cdot 4}$.

10. §.

Akár vonal, akár súly, akár időtartam, akár bármi más legyen a-nak szorzója, hacsak mindig a maga egységének ugyanannyiszorosa (pl. 2 harmada), a szorzat is mindig ugyanaz lesz, t. i. a-nak 2 harmada. Épen úgy áll a dolog az osztás első esetében. Ha ekkor elosztjuk b-t a-val, a hányados lehet mindaz, a mi a maga egységének 2 harmada, a mennyiben a vele megszorozva, b-t adja eredményül; de eltekintve a nemtől, ebben az esetben csak az jönn tekintetbe, hogy hányszorosa a maga egységének. A második esetben azonban, ha b vonal, a csak vonal lehet.

A mi a tényezők felcserélését illeti, mindegyik esetben a szorzandó egységének ugyanannyiszorosa az eredmény.

Alább (28. §), hol a heterogének is egyenes vonalakkal vannak ábrázolva, mindezek szemléletesebbekké válnak.

A mennyiségnek a minőséggel való mindjárt következő összekapcsolása után a szorzás és osztás (valamint az 5. §-ban előforduló proporczió) fogalma is bővül.

11. §.

Ha Q és q ilyen minőségek, és annak föltétele, hogy mi legyen a teendő és mi veendő eredménynek, ha valamelyiket a Q-val ellátott G és a q-val ellátott g mennyiségek közül a másikhoz hozzácsatoljuk, olyan természetű, hogy az eredmény 0 legyen, ha $G = g$, midőn pedig $G > g$, az eredmény a Q minőséggel ellátva az legyen G-ből, a minek nem volna szabad meglennie, hogy az eredmény 0 legyen (ha a kisebbiket vennők elsőnek): akkor azt mondjuk, hogy a Q-val ellátott G és a q-val ellátott g (az említett föltétel mellett) *ellenkező mennyiségek*. Az egyiket *pozitivnak*, a másikat *negativnak* nevezzük, és ha $G = g$, akkor a Q-val ellátott G-ről azt mondjuk, hogy a q-val ellátott g-nek *ellenkezője*.

A pozitivnak jele legyen $+$ és a negativé $-$; $+a$ ugyanazt jelentse mint a, $-a$ pedig jelentse az ellenkezőjét annak, a mit a jelent. Ebből következik, hogy $-a$ $+$ is lehet.

Példák. G és g legyenek valamely az egyenesben az $\mathfrak{a}$ pontból elmozdított pontnak útjai, és Q, q legyenek a mozgás irányai (jobbra és balra); az eredmény legyen a végpontnak távolsága $\mathfrak{a}$-tól. Az egyenes helyzete lehet egészen tetszés szerinti. És ép úgy kérdezhetjük, hogy mi a [pont] távolság[a] valamely egyenestől vagy síktól.

Ilyenek az adósság es a vagyon is, és az ugyanabban az egyenesben valamely pontra egymás ellenében ható erők stb.

Sőt minden mennyiség, mely minden más minőséget nélkülöz, és csak azzal van felruházva, hogy belőle egy másik mennyiség a lehetőség szerint levonandó, $+$-nak, és a levonandó $-$-nak tekinthető. A föltétel azt követelheti, hogy miután annyit, a mennyi csak lehetséges, levontunk, eredményül veendő vagy az, a mi az előbbiből megmarad, vagy az, a mi megmarad az utóbbiból, mint olyan, a mit már nem vonhattunk le.

A 2 ugyanazt jelentse, mint a $+2$, és a $2:3$ az egységnek pozitiv 2 harmadát, ellenben a -2 jelentsen 2 negativ egységet, és a $-(2:3)$ jelentse az egységnek negativ 2 harmadát.

Megjegyzés. 1. Ha *Péternek* 4 forintja van erszényében és 8 forint az adóssága, *Pálnak* pedig 12 frtja [erszényében] és 2 frt adóssága: akkor arra, hogy semmijük se legyen, Péter adósságából 4 frtnak nem volna szabad meglennie és Pál erszényéből 10 frtnak kellene hiányoznia. Ámde Pálnak pozitivuma nem törli Péternek negativumát, hacsak nincsen föltételezve, hogy mind a kettőnek vagyona ugyanarra a czélra egyesítendő.

2. Azt a föltételt, mely az ellenkezőknek a geometriában való igen előnyös alkalmazását igazolja, szintén meg kell állapítanunk.

Az E síkban tartsunk szem előtt valamely X egyenest és ebben valamely $\mathfrak{a}$ pontot; továbbá mozogjon X-ben $\mathfrak{a}$-ból kiindulva, egy pont balra és egy másik jobbra, és az elsőnek útjait nevezzük x-nek, a másikéit x'-nek. Legyen már most valamely x vagy x' megadva. Ennek a végéből kiindulva, ismét mozogjon két pont abban az egyenesben, a mely E-ben X-re merőlegesen áll; az előre megtett út legyen y, a hátra felé megtett y'. Továbbá legyen megadva valamely y vagy y', és ennek a végéből kiindulva ismét mozogjon két pont abban az egyenesben, a mely E-re merőlegesen áll; a fel felé megtett út legyen z, a le felé megtett pedig z'.

x és x' közül az egyiket $\vdash\!+\!\dashv$-nak veszszük, a másikat $\vdash\!-\!\dashv$-nak, y-t és z-t $\vdash\!+\!\dashv$-nak, és y'-t és z'-t $\vdash\!-\!\dashv$-nak.

A mi x-et és x'-et illeti, legyen x a $\vdash\!+\!\dashv$. Arra, hogy abban az esetben, ha (eltekintve a helyzettől) $x = x'$, ezek együtt a 0-t adják eredményül, a föltétel a következő lehet, a mely arra az esetre is szolgál, ha x nem $= x'$-szel. Gondoljuk, hogy a két pontnak említett mozgását egyetlen pont végzi oly módon, hogy először $\mathfrak{a}$-ból kiindulva az egyik utat írja le, és azután ennek végéből kiindulva a másikat vissza felé: akkor a végpontnak távolsága 0 lesz, ha mind a két út egyenlő; ez pedig a fentebbi eset, a melyre a következő eljárással visszavezethető a másik is.

Ha x, y, z valamelyikét oly föltétel mellett csatoljuk x', y', z' valamelyikéhez, hogy a kettőnek mozgását egyetlen, az X-ben végbemenő [mozgás] képviselje, még pedig úgy, hogy a mozgás $\mathfrak{a}$-ban kezdődjék és x-et, y-t, z-t balra irányuló, x'-et, y'-t, z'-t jobbra irányuló [mozgás] írja le: akkor az eredmény itt is a végpontnak $\mathfrak{a}$-tól való távolsága legyen.

A [kör] kerületet is az egyik pontjára vonatkozólag az egyik oldalról $\vdash\!+\!\dashv$-nak, a másikról $\vdash\!-\!\dashv$-nak veszszük. Ha két pont úgy, mint előbb az elsőből kiindul és mindig előre halad: akkor a kettőnek mozgása itt is egy pontéra vezethető vissza; sőt lehet úgy, mint előbb, az első pontot $\mathfrak{a}$-ban és az utakat X-ben gondolni.

12. §.

Ha a-t, b-t, ... egyenesekkel ábrázoljuk, és a-t egyik végpontjával $\mathfrak{a}$-ba és ettől, ha $\vdash\!+\!\dashv$, az X-ben bal felé, ha pedig $\vdash\!-\!\dashv$, jobb felé helyezzük el, és a-nak végétől b-t ha ⊢+⊣, az X-ben bal felé, ha pedig ⊢—⊣, jobb felé helyezzük el stb.: akkor az utolsó végpontnak a-tól való távolságát a, b,... *összegének* nevezzük. És be van bizonyítva, hogy *az összeadandók minden sorrendben ugyanazt eredményezik*, tehát akkor is, ha előbb valamennyi ⊢+⊣-ot és azután valamennyi negativot veszszük. Ugyanaz van bebizonyítva a szorzásnál a tényezők minden sorrendjéről, bármekkora is legyen azok száma.

. Ha már mostan $A+B=S$, az a gondolatunk támad, hogy S-ből és A-ból meghatározzuk azt, a mivel [az utóbbi] S-t mint összeget hozza létre. Ezt a műveletet *kivonásnak* nevezik. Világos, hogy az, a mit keresünk, $B=S-A$; mert $A+S-A=S$. Ebből az a szabály következik, hogy a *kivonandó ellenkezőjét, tehát a kivonandót megváltoztatott jellel kell S-hez, az úgy nevezett kisebbítendőhöz hozzáadnunk.*

13. §.

Minthogy az egység is akár ⊢+⊣-nak, akár ⊢—⊣-nak vehető, származnak olyan mennyiségek, a melyek ⊢+⊣1-gyel és olyan mennyiségek, a melyek ⊢—⊣1-gyel vannak felruházva. Mind a kettő egyaránt valóságos és az utóbbiak azok, a melyeket *képzeteseknek* neveznek.

És most már kialakul a fogalmaknak az 5. és 10. §-ban jelzett bővítése. Ha ugyanis valamely mennyiséget valamely másikkal megmérünk: akkor (hogy a megmértet tekintettel a mértékre közelebbről meghatározzuk) 3 kérdésre nyert válaszokból alakitjuk a *mérés képét.* Az I-et, II-t, III-at egymás alá írjuk. I után írjuk, hogy a megmért (eltekintve a hozzákapcsolt minőségtől) hányszorosa a mértéknek; II után ezt írjuk: *igen* vagy *nem* a szerint, a mint mind a kettő ⊢+⊣ vagy ⊢—⊣, vagy pedig nem ilyen (t. i. az egyik ⊢+⊣ és a másik ⊢—⊣), és III után az *igent* írjuk, ha mind a kettő pozitiv, vagy mind a kettő negativ egységgel van felruházva, a *nemet* pedig, ha az egyik pozitiv egységgel, a másik pedig negativ egységgel van felruházva.

E szerint tehát *egyenlőmértékűség* akkor forog fenn, ha a két mérés képe egyenlő. Ebből következik, hogy a szorzás is megköveteli *a relativ mérés képének a mérés főképével* (azaz a főmérés mérési képével) *való egyenlőséget*. Ezután mindjárt következik az osztás meghatározása.

Megjegyzés. 1. Hogy a tényezők felcserélése után is (*pl.* ha mind a kettő egyenes) a szorzat mindig ugyanaz maradjon, megállapitjuk, hogy *a két mérés képe, mely különben egyenlő, abban az egyetlen esetben annyiban ne legyen egyenlő,* hogy, midőn a szorzó negativ egységgel és a relativ mérték (t. i. a szorzó) pozitiv egységgel van felruházva, a relativ mérés képében a II után *igent* írjunk, ha a mérés főképében a II után *nem* áll és *nemet*, ha ott *igen* áll. Ugyanarra az eredményre jutunk, ha a II után írandó válaszra nézve ebben az esetben $+1$-et gondolunk -1 helyett.

2. Mennyiségeket $+1$-gyel nevezzünk röviden *valósaknak*, azokat -1-gyel *képzeteseknek*, és mind a kettőt *tisztáknak*. Valamennyien ugyanis valóságosak, de a mondott értelemben megmaradhatnak a használt szók.

3. Alább (26. §) a mérés képének szabályát adjuk arra az esetre, ha *vegyesekkel* van dolgunk.

14. §.

Az egység pedig minden nemnek megfelelőleg tetszés szerint határozható meg; *például* minden vonalnak megfelelőleg bizonyos E egyenes vehető annak, és ez a nélkül, hogy külön megemlítenők, ne változtassék meg. Sőt minden a főméréstől függő művelet vezetője gyanánt, még a vele egyenlőkkel sem cserélve fel, mint egyedüli maradhat meg, még pedig úgy, hogy minden vonalnak főmérésére, ha valós, pozitiv, ha pedig képzetes, negativ minőséggel szolgáljon. Ő maga mind a két esetben valósnak gondolandó; t. i. mind ennek a $+E$-nek, mind ennek a $-E$-nek, ha főmérésüket követelnők, az első szolgáljon mértékül.

15. §.

Ha már mostan két mérésben először mind a négy tiszta mennyiség, és a valósat $\cdot$-tal, a képzetest pedig $\star$-gal jelöljük, akkor a következő négy sor keletkezik (mely valamennyi esetet tartalmaz); még pedig a 2 első a $+$-ra és a $-$-ra nézve, és a 2 utolsó a valósra és a képzetesre nézve. Minden sor tartalmaz 4 esetet, melyek mindegyike 4 jelből áll. A 2 első az első mérésre és a 2 utóbbi a második mérésre, az első a mértékre, a második a mértre tartozik. Könnyen belátható, hogy valamennyi eset benne van.

$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\star$	$\star$	$\cdot$	$\star$	$\cdot$	$\star$	$\cdot$	$\star$	$\star$	$\cdot$
$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\cdot$	$\cdot$	$\star$	$\cdot$	$\star$	$\cdot$	$\star$	$\cdot$	$\cdot$	$\star$

Látható, hogy minden egyes esetben a szerint, hogy a középső jelek egyenlők vagy egyenlőtlenek, a külsők is egyenlők vagy egyenlőtlenek. A 3 első sor a szorzást illeti (és egyszersmind az osztást is); a 2 első vonatkozással az egységre, a harmadik vonatkozással a valós jellegre. Az első jel mindenütt az egységre, a második a szorzóra, a harmadik a szorzandóra és a negyedik a szorzatra vonatkozik.

1. A harmadik sorból nyilvánvaló, hogy ha a tényezők valósak, vagy mind a kettő képzetes: akkor a szorzat valós; mert különben a III után következő válaszok egymástól különböznének. Ugyanabból az okból világos, hogy ha a negyedik az osztandóhoz és a középsők egyike az osztóhoz tartozik, hogy *valós valóssal osztva és képzetes képzetessel osztva valósat ad eredményül, és hogy különben a hányados képzetes.*

2. A felső sorból látható, hogy ha az egység $\vdash\!+\!\dashv$: akkor a szorzat $\vdash\!+\!\dashv$, ha mind a két tényező egyidőben $\vdash\!+\!\dashv$, vagy egyidőben $\vdash\!-\!\dashv$; különben pedig a szorzat $\vdash\!-\!\dashv$.

3. A második sor mutatja, hogy ha az egység $\vdash\!-\!\dashv$: akkor a szorzat $\vdash\!-\!\dashv$, ha mind a két tényező egyidőben $\vdash\!+\!\dashv$, vagy mind a kettő $\vdash\!-\!\dashv$; különben pedig a szorzat $\vdash\!+\!\dashv$.

4. A harmadik sor első esetében a második jel a szorzóra vonatkozik, és minthogy ez valós, az egység $\vdash\!+\!\dashv$. Ugyanaz érvényes a következő esetben is. A negyedik esetben, az egység negativ, és ekkor valós képzetessel osztva képzetest ad eredményül, még pedig negativot, ha mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$. A harmadik esetet, tekintettel a II után irandó válaszra (13. §, megjegyzés) a $+1$-re vezetjük vissza.

16. §.

Ebből a $+$ és $-$-ra vonatkozó jelszabály szemléletesen következtethető. Először csak a legfelsőbb sort tekintsük, a másodikra nézve a dolog ugyanazon a módon mutatható ki.

Legyen először a és b vagy mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$, vagy mind a kettő $\vdash\!-\!\dashv$: akkor $-a$ és $-b$ is vagy mind a kettő $\vdash\!-\!\dashv$, vagy mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$, tehát $+a \cdot +b$, valamint $a \cdot b = +ab$, és $-ab$ $\vdash\!-\!\dashv$ volna. De $+a \cdot (-b) = -ab$; mert a és $-b$ ekkor nem mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$, és nem is mind a kettő $\vdash\!-\!\dashv$, szorzatuk tehát $\vdash\!-\!\dashv$ és $+ab$ $\vdash\!+\!\dashv$ volna.

Ha azonban $+a$ és $+b$ nem mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$ vagy $\vdash\!-\!\dashv$: akkor $-a$ és $-b$ sem ilyenek. Ebből következik, hogy $ab = +ab$ ekkor $\vdash\!-\!\dashv$, valamint $-a \cdot (-b)$ is ilyen, és $-ab$ $\vdash\!+\!\dashv$ volna. Ugyanis ekkor $-a$ és $+b$ vagy mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$, vagy mind a kettő $\vdash\!-\!\dashv$, a miből következik, hogy $-ab$-nek [$\vdash\!+\!\dashv$-nak] kell lennie; $+ab$ pedig $\vdash\!+\!\dashv$ helyett $\vdash\!-\!\dashv$ volna.

Ép úgy $\mapsto$ egység esetében következtethető, hogy egyenlő jelek —-t és egyenlőtlenek +-t adnak.

Ugyanaz a törvény érvényes az osztásra nézve is. Az osztandó ugyanis lehet + vagy —, és hasonlóképen az osztó is; tehát könnyen áttekinthető négy eset merül fel. Ha *például* az egység $\vdash\!\dashv$, az osztandó +, az osztó —: akkor a hányadosnak —-nak kell lennie, hogy az osztóval megszorozva + -t adhasson szorzatul.

Egy csillagocska a mennyiség előtt, fenn a bal oldalon, jelentse azt, hogy az —1-gyel van felruházva. *Példák* a következők: $+6:+{}^{*}2=-{}^{*}3$, $+6:-{}^{*}2=+{}^{*}3$, $-6:+{}^{*}2=+{}^{*}3$, $-6:-{}^{*}2=-{}^{*}3$. Képzetes osztandóra vonatkozik a két középső eset a harmadik sorban (15. §), a hol a 2 első esetben +1 van az elején, és ezekhez hozzájárul a harmadik vonatkozással a +1-re vagy a —1-re (a mint az a 15. § végén el van mondva).

17. §.

Az egységet illetőleg, figyelemre méltó az is, hogy ha valamit, mint k-ra nézve *respectiv mennyiséget* z-nek nevezünk, szükséges, hogy a z egysége a k egysége legyen. Ha pedig y-t, mint k-nak az $x=1$-hez tartozó értékére nézve respectiv mennyiséget z-nek nevezzük: akkor z egysége az az y legyen, melynek értéke $x=1$-re nézve k-nak az egysége.

Példák az elsőre vonatkozólag: Minden görbe vonal respectiv mennyiség tekintettel arra az egyenesre, mely az egymásután elhelyezett húrok összegének határértéke, a mint minden görbe felület ilyen, tekintettel az egymásután elhelyezett háromszögek összegének határértékére stb.

A másodikra vonatkozólag a sebesség egysége az [a sebesség], a melylyel az út egysége az idő egysége alatt íratik le. Ép úgy a sűrűség egysége az [a sürűség], mely mellett a térfogat egysége a tömeg egységét tartalmazza.

Sőt minden felület respectiv mennyiségnek tekinthető tekintettel olyan derékszögű négyszög hosszúságára, a melynek magassága az egyenes egysége, és minden test tekintettel olyan parallelepipedon hosszúságára, a melynek alapja az egyenes egységének négyzete.

18. §.

Hogy azonban a számokban megadott mennyiségekkel elbánhassunk, az a feladat származik, hogy a számokat jelöljük. Ha lőtlenek. A 3 első sor a szorzást illeti (és egyszersmind az osztást is); a 2 első vonatkozással az egységre, a harmadik vonatkozással a valós jellegre. Az első jel mindenütt az egységre, a második a szorzóra, a harmadik a szorzandóra és a negyedik a szorzatra vonatkozik.

1. A harmadik sorból nyilvanvaló, hogy ha a tényezők valósak, vagy mind a kettő képzetes: akkor a szorzat valós; mert különben a III után következő válaszok egymástól különböznének. Ugyanabból az okból világos, hogy ha a negyedik az osztandóhoz és a középsők egyike az osztóhoz tartozik, hogy *valós valóssal osztva és képzetes képzetessel osztva valósat ad eredményül, és hogy különben a hányados képzetes.*

2. A felső sorból látható, hogy ha az egység $\vdash\!+\!\dashv$: akkor a szorzat $\vdash\!+\!\dashv$, ha mind a két tényező egyidőben $\vdash\!+\!\dashv$, vagy egyidőben $\vdash\!-\!\dashv$; különben pedig a szorzat $\vdash\!-\!\dashv$.

3. A második sor mutatja, hogy ha az egység $\vdash\!-\!\dashv$: akkor a szorzat $\vdash\!-\!\dashv$, ha mind a két tényező egyidőben $\vdash\!+\!\dashv$, vagy mind a kettő $\vdash\!-\!\dashv$; különben pedig a szorzat $\vdash\!+\!\dashv$.

4. A harmadik sor első esetében a második jel a szorzóra vonatkozik, és minthogy ez valós, az egység $\vdash\!+\!\dashv$. Ugyanaz érvényes a következő esetben is. A negyedik esetben, az egység negativ, és ekkor valós képzetessel osztva képzetest ad eredményül, még pedig negativot, ha mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$. A harmadik esetet, tekintettel a II után irandó válaszra (13. §, megjegyzés) a $+1$-re vezetjük vissza.

16. §.

Ebből a $+$ és $-$-ra vonatkozó jelszabály szemléletesen következtethető. Először csak a legfelsőbb sort tekintsük, a másodikra nézve a dolog ugyanazon a módon mutatható ki.

Legyen először a és b vagy mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$, vagy mind a kettő $\vdash\!-\!\dashv$: akkor $-a$ és $-b$ is vagy mind a kettő $\vdash\!-\!\dashv$, vagy mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$, tehát $+a\cdot+b$, valamint $a\cdot b=+ab$, és $-ab$ $\vdash\!-\!\dashv$ volna. De $+a\cdot(-b)=-ab$; mert a és $-b$ ekkor nem mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$, és nem is mind a kettő $\vdash\!-\!\dashv$, szorzatuk tehát $\vdash\!-\!\dashv$ és $+ab$ $\vdash\!+\!\dashv$ volna.

Ha azonban $+a$ és $+b$ nem mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$ vagy $\vdash\!-\!\dashv$: akkor $-a$ és $-b$ sem ilyenek. Ebből következik, hogy $ab=+ab$ ekkor $\vdash\!-\!\dashv$, valamint $-a\cdot(-b)$ is ilyen, és $-ab$ $\vdash\!+\!\dashv$ volna. Ugyanis ekkor $-a$ és $+b$ vagy mind a kettő $\vdash\!+\!\dashv$, vagy mind a kettő $\vdash\!-\!\dashv$, a miből következik, hogy $-ab$-nek [$\vdash\!+\!\dashv$-nak] kell lennie; $+ab$ pedig $\vdash\!+\!\dashv$ helyett $\vdash\!-\!\dashv$ volna.

Ép úgy ⟝ egység esetében következtethető, hogy egyenlő jelek —-t és egyenlőtlenek +-t adnak.

Ugyanaz a törvény érvényes az osztásra nézve is. Az osztandó ugyanis lehet + vagy —, és hasonlóképen az osztó is; tehát könnyen áttekinthető négy eset merül fel. Ha *például* az egység ⟝, az osztandó +, az osztó —: akkor a hányadosnak —-nak kell lennie, hogy az osztóval megszorozva +-t adhasson szorzatul.

Egy csillagocska a mennyiség előtt, fenn a bal oldalon, jelentse azt, hogy az —1-gyel van felruházva. *Példák* a következők: $+6 : +{}^{*}2 = -{}^{*}3$, $+6 : -{}^{*}2 = +{}^{*}3$, $-6 : +{}^{*}2 = +{}^{*}3$, $-6 : -{}^{*}2 = -{}^{*}3$. Képzetes osztandóra vonatkozik a két középső eset a harmadik sorban (15. §), a hol a 2 első esetben +1 van az elején, és ezekhez hozzájárul a harmadik vonatkozással a +1-re vagy a —1-re (a mint az a 15. § végén el van mondva).

17. §.

Az egységet illetőleg, figyelemre méltó az is, hogy ha valamit, mint k-ra nézve *respectiv mennyiséget* z-nek nevezünk, szükséges, hogy a z egysége a k egysége legyen. Ha pedig y-t, mint k-nak az $x=1$-hez tartozó értékére nézve respectiv mennyiséget z-nek nevezzük: akkor z egysége az az y legyen, melynek értéke $x=1$-re nézve k-nak az egysége.

Példák az elsőre vonatkozólag: Minden görbe vonal respectiv mennyiség tekintettel arra az egyenesre, mely az egymásután elhelyezett húrok összegének határértéke, a mint minden görbe felület ilyen, tekintettel az egymásután elhelyezett háromszögek összegének határértékére stb.

A másodikra vonatkozólag a sebesség egysége az [a sebesség], a melylyel az út egysége az idő egysége alatt íratik le. Ép úgy a sűrűség egysége az [a sürűség], mely mellett a térfogat egysége a tömeg egységét tartalmazza.

Sőt minden felület respectiv mennyiségnek tekinthető tekintettel olyan derékszögű négyszög hosszúságára, a melynek magassága az egyenes egysége, és minden test tekintettel olyan parallelepipedon hosszúságára, a melynek alapja az egyenes egységének négyzete.

18. §.

Hogy azonban a számokban megadott mennyiségekkel elbánhassunk, az a feladat származik, hogy a számokat jelöljük. Ha a 0-tól kezdve egészen egy bizonyosig mindegyiknek külön jelt tulajdonítunk, és így a 0-sal és az utolsóval együtt n jelre teszünk szert: az Indiából származó szerencsés gondolat, hogy mindegyik egy helylyel balra n-szer annyit jelentsen, ezt [t. i. a számok megjelölését] olyan módon tudta megvalósítani, melyet még ARCHIMEDES sem ismert.

19. §.

E szerint legyen	... 1	1	1	1,	1	1	1 ...
és alatta	... 3	2	1	0	-1	-2	-3 ...

Az alsó sorozatban az 1 azt a helyet mutatja, hol a felső sorozatban az 1 jel értéke bal felé legelőször változik. Innen balra következik a 2-dik, 3-dik hely, és egy gondolatra a két sorozatot bal felé és jobb felé a végtelenbe terjeszthetjük ki, és az alsónak tagjait a felettük álló felsők helymutatóinak tekinthetjük.

Továbbá az a gondolat támad, hogy n helyébe bármely tetszés szerinti a mennyiséget tegyünk. Minthogy könnyen észreveszszük, hogy, midőn P és Q [annak] a felső sorozatnak tagjai, a melyben az a érték az 1 felett áll, és *például* p, a mely P alatt áll, 2-szer olyan nagy mint q, a mely Q alatt áll, akkor $P = QQ$: az a kérdés támad, hogy valamely tag helymutatója hányszorta olyan nagy, mint valamely másiké? Ha *például* P helymutatója c-szer oly nagy, mint a Q-é: akkor (a-ra nézve) a P-t Q^c-vel és a Q-t $\sqrt[c]{P}$-vel jelöljük. P mintegy a *c-szeres hely számú* Q és Q a c-edrésznyi hely számú P. Nyilvánvaló, hogy ha q a Q alatt és p a P alatt áll, és q nem 0: akkor $c = p : q$; mert $(p : q)\, q = p$. Hasonlóképen, ha p nem 0, $Q = P^{\frac{q}{p}}$. Ebből következik, ha a p és q közül egyik sem 0, hogy $c = p : q$ és $\sqrt[c]{P} = P^{\frac{1}{c}}$.

Pl. ha $p{=}2$ és $q{=}-5$: akkor P-nek helymutatója $(-2 : 5)$-ször olyan nagy, mint a Q-é, és Q helymutatója $(-5 : 2)$-szer olyan nagy, mint $p{=}2$; mert $-5{=}(-5 : 2) \cdot 2$. Tehát [Q] épen az, a mit $\sqrt[-2:5]{P}$-vel jelöltünk. Ha $P{=}a^p$: akkor $P^0{=}1$; mert az 1 helymutatója, t. i. $0{=}0 \cdot p$. Tehát $\sqrt[0]{1} = P$, a mi, minthogy P bármit jelenthet, végtelen sok értékű. Így $a = a^1$, mert $1 \cdot 1 = 1$; $P = a^p$, $Q = a^q$ és $P = Q^{\frac{p}{q}}$, továbbá $a^2 = aa$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2} \cdots$

Alább, hol a sorozat feje állandóvá válik, e fogalom még bővül.

20. §.

Most már könnyen bebizonyítható:

1. Ha P és Q az előbbi felső sorozatnak tagjai és p a P alatt és q a Q alatt áll: akkor a PQ a $p+q$ felett áll. Könnyű ugyanis 4 esetet áttekinteni. Legyen először $p = 2$-vel, azután -2-vel és q először 3-mal, azután -3-mal.

2. Ha $u = v^q$, akkor $u^s = v^{qs}$. Ugyanis itt is könnyű 4 esetet áttekinteni. Legyen először $q = 2$-vel, azután -2-vel és s először 3-mal, azután -3-mal. Ha *például* $q = 2$ és $s = -3$: akkor

$$u^s = (v^2)^{-3} = 1 : (v^2)^3 = 1 : v^{2 \cdot 3} = v^{-2 \cdot 3}.$$

3. Ha a sorozat fejéül olyan v^q-ot választunk, hogy $v^s = a$: akkor majd s a Q alatt áll. Ugyanis $(v^q)^s = v^{qs} = (v^s)^q = a^q = Q$. Álljon R az r felett: akkor $R = (v^q)^r = v^{qr}$, és egyszersmind $R = Q^{\frac{r}{s}}$, míg az a sorozatában $P = Q^{\frac{p}{q}}$ volt.

Legyen már most v a fej: akkor majd a $v^{qs} = Q$ alatt qs, a $v^{qr} = R$ alatt qr és a $v^{ps} = (v^s)^p = a^p = P$ alatt ps áll. Ebből következik, hogy $P = Q^{\frac{p}{q}} = Q^{\frac{ps}{qs}}$ és $R = Q^{\frac{r}{s}} = Q^{\frac{rq}{qs}}$. Így tehát a kitevők egyenlő nevezőre hozhatók.

Az 1. pont alapján is belátható, hogy PR alatt $ps+qr$ áll, a miből következik, hogy $PR = Q^{\frac{ps+qr}{qs}} = Q^{\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)}$.

Ebből azután következik, hogy $u^k : u^h = u^{k-h}$; mert $u^h \cdot u^{k-h} = u^{h+k-h} = u^k$.

4. $(P = Q^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = Q^{\frac{pr}{qs}}$. Ez ugyanis az előbbi sorozatnak az a tagja, a mely pr felett áll; ennek pr helymutatója tehát $(pr : ps) = (r : s)$-szer olyan nagy, mint a P-nek ps helymutatója, és egyszersmind $(pr : qs)$-szer olyan nagy, mint a Q-nak qs helymutatója. Így tehát $P^c = Q^{\frac{pc}{q}}$.

Ebből (a 19. § szerint) származik: $\sqrt[c]{P} = P^{\frac{1}{c}} = Q^{\frac{p}{qc}}$.

5. Legyen a $+$ és valós (és a szemlélhetőség végett egyenessel ábrázolva), és x jelentsen bármely $+$ vagy $-$ egyenest. Be van bizonyítva, hogy a^x (még akkor is, ha x az egységgel inkommenzurabilis) meghatározott egyenes, melynek aztán x az a alapra vonatkozó logaritmusa.

Hogy azonban a logaritmusoknak megfelelő mennyiségeket könnyebben összehasonlíthassuk, és feleslegessé váljék az alapot mindig megnevezni (a hogyan fentebb az egység származott), bizonyos alapot szilárdan határozunk meg, és ez közönségesen a 10. Be van bizonyítva, hogy minden $\dashv\!\!\vdash$ G egyenesnek megfelelőleg van olyan x, hogy $10^x = G$, és ha x $\dashv\!\!\vdash$ és növekedik, hogy akkor növekedik 10^x is. E szerint az előbbi számolási előnyök (3, 4) alkalmazhatókká válnak; mert vannak olyan táblázatok, a melyekben az egymásnak megfelelő logaritmusok és számok feltalálhatók.

Sőt $B^z = P$-ből meghatározható z; mert $\log(B^z)$, azaz $z \log B = \log P$; tehát $z = (\log P) : \log B$. Legyen ugyanis $B = 10^b$ és $P = 10^p$: akkor (4 szerint) $B^z = 10^{bz}$, a miből következik, hogy $bz = z \log B = p = \log P$.

Például a [tőke], ha c százalékra van kikölcsönözve, és a kamatokat hozzácsatoljuk, az n-dik év végéig $s = ap^n$-re növekedik, hol $p = (100 + c) : 100$. Ebből $\log s = n \log p + \log a$ származik, és s értéke redukálható a jelenre. Ha azonban minden év végén $k \pm q$-t elveszünk belőle, hol k az a-nak évi kamatját és $+q$ valamely pozitivot jelent, és az R maradékot az n-dik év végén keressük: akkor $R = a \pm (100q : c)(1 - p^n)$; hogy pedig $+q$-ra nézve $R = 0$ legyen, szükséges, hogy

$$a = (100q : c)(p^n - 1) \quad \text{és} \quad n = [\log(k+q) - \log q] : \log p$$

legyen.

21. §.

Ugyanaz az út vezet *a hatvány és a logaritmusok magasabb fogalmához.*

Tegyük a 19. §-ban a vessző előtti 1 helyébe r-t és n helyébe s-t, továbbá az alsó sorozatban a 0 helyébe h-t és az 1 helyébe $d : \mu$-t, a hol μ pozitiv számot jelent, a mely oly nagynak vehető, a mint csak tetszik, d, r, s, h közül pedig mindegyik bármely tetszés szerintit jelenthet. A bal oldali kart helyezzük jobbra és a jobb oldalit balra, és nevezzük r-t meg az alatta álló h-t *középső tagoknak*, rs^μ-t pedig *főtagnak*, melyeket abban az esetben, ha $r = 1$ és $h = 0$, *normálisoknak* mondunk.

Itt is az alsó tagok helymutatói lehetnek a felsőknek, és ha a felsők közül két tag K és I, továbbá K alatt áll $h+k$, I alatt pedig $h+i$: akkor a K helymutatója $(h+k):(h+i)$-szerte nagyobb, mint a I-é.

A és B legyen már mostan két pár sorozat, a melyben mind a kettőben a középső tagok normálisak. A-ban s és d legyenek pozitivok és valósak, és a főtag legyen e; akkor majd valamennyi tag $\dashv\!\!\vdash$ és valós lesz.

B-ben d legyen tisztán képzetes és $= {}^\star q$-val, és a főtag legyen

$= {}^{\star}1$-gyel. Be van bizonyítva, hogy van olyan pozitiv t, a melyre nézve $t^{\mu} = {}^{\star}1$, és hogy ha a μ a ∞-be is nő, mind a két főtag állandó marad.

Az is be van bizonyítva, hogy minden megadott g-nek megfelelőleg van A-nak olyan N-je és B-nek olyan M-je (mint a felső sorozatnak tagja), hogy $NM = g$. Minden tagra nézve mind A-ban, mind B-ben az alatta álló a helymutató, úgy hogy a 20. § egészen az 5. pontig mind a kettőre nézve érvényes.

Ha N-nek helymutatója $nd : \mu$ és M-nek helymutatója $m^{\star}q : \mu$, továbbá [B-t úgy megváltoztatjuk, hogy] a fentebbi általános sorozatpárból B-ben középső tagoknak N-t az alatta álló $nd : \mu$-vel veszszük: akkor NM jut M-nek helyére, és alatta $(nd + m^{\star}q) : \mu$ lesz a helymutató. Hogy azonban az $(NM)^2$-et előállíthassuk, szükséges volna, hogy A-ból az N^2-et az alatta álló $2nd : \mu$-vel vegyük B középső tagjainak, úgy hogy ezután a $2nd : \mu + 2m^{\star}q : \mu$ felett a felső sorozatban $N^2 \cdot M^2$ áll.

Hogy azonban a változó középső tagot elkerüljük, A-ban és B-ben meghagyjuk a normálisokat, és hozzáadjuk N-nek A-ból való helymutatóját M-nek B-ből való helymutatójához. A d-t is 1-nek veszszük, és minthogy 1 az e alatt áll, ezt veszszük alapnak, és N, M, NM úgy állanak elő, hogy ezt az e-t az $n : \mu$-re, $m^{\star}q : \mu$-re, $(n + m^{\star}q) : \mu$-re emeljük fel; mert például NM helymutatója $(n + m^{\star}q) : \mu$-szer 1.

Két oka van annak, hogy a q-t képzetesnek veszszük.

1. Ha a két helymutató össze volna számlálható, és *például* az egyik 2 a másik pedig ${}^{\star}3$ volna [22. §], és a 3-mat tennők a ${}^{\star}3$ helyébe: akkor e^5 más valami volna, mint $e^{2+{}^{\star}3}$.

2. Be van bizonyítva olyan tulajdonságú q létezése, hogy abban az esetben, ha azt képzetesnek veszszük, mindegyik helymutatóból meghatározható a felső tag. Ha ezután ugyanazt a módot alkalmazzuk A-ra, evvel meghatározzuk e-t is.

22. §.

Ha ebben az értelemben k a K-nak helymutatója, akkor K-t $♀k$-val jelölhetjük, és minthogy be van bizonyítva, hogy $♀k \cdot ♀h = ♀(k+h)$, ezért $♀{}^{\star}q = {}^{\star}1$, $♀2{}^{\star}q = -1$, $♀3{}^{\star}q = -{}^{\star}1$, $♀4{}^{\star}q = 1 = ♀\hat{\nu}{}^{\star}\alpha$, ha $\alpha = 4q$ és a $\hat{\nu}$ bármely egész számot jelent, akár $+$-ot, akár $-$-ot, sőt a 0 sincsen kizárva. Így tehát $♀(k\hat{\nu}{}^{\star}\alpha) = ♀k$ és egyszersmind $♀\dfrac{[(k+\hat{\nu}{}^{\star}\alpha)]^n}{n} = ♀k$. Következésképen egyszersmind

$$\sqrt[m]{1} = \text{♀} \frac{\hat{\nu}\,{}^\star\alpha}{m},$$

a hol ki van mutatva, hogy, ha $\hat{\nu}$ helyébe a $0, 1, \ldots, (m-1)$ számokat helyettesítjük, akkor m különböző érték származik, minden más szám pedig csak olyant szolgáltat, a mely már ezek között megvan.

Erre vonatkozólag megjegyzendő, hogy mindezek a következő könnyen bebizonyítható tételből származtathatók le:

$$\left(\cos\frac{q}{m} + {}^\star\sin\frac{q}{m}\right)^m = \cos q + {}^\star\sin q = {}^\star 1,$$

hol q az 1 radiussal leírt kör negyedét jelenti.

Ezt föltételezve ott olyan általános elmélet van előadva, mely a hatvány, a gyök és a logaritmus általános fogalmait nyújtja.

23. §.

Ugyanott azonban még egy másik, tisztán arithmetikai módszer is fordul elő. A binomiális tételnek (először csakis $\dotplus$ egész kitevőkre szorítkozó) bebizonyítása után be van bizonyítva, hogy, ha n a ∞-be nő, az $\left(1+\frac{v}{n}\right)^n$-nek határértéke

$$= 1 + v + \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^3}{1.2\cdot 3}\cdots,$$

a melynek jelölésére $\mathfrak{h}\,v$ szolgál; és ha továbbá azoknak a tagoknak összegét, melyeknek helyszáma páratlan, $☾v$-vel és azokét, melyeknek helyszáma páros, $☽v$-vel jelöljük: akkor minden egyes esetben

$$(☾v)^2 - (☽v)^2 = 1\,;$$

ha pedig $v = {}^\star u$: akkor $☾v = \cos u$ és $☽v = {}^\star\sin u$.

Továbbá ugyanott tiszta arithmetikai módszerrel be van bizonyítva, hogy van olyan q, a melyre nézve $\mathfrak{h}\,{}^\star q = {}^\star 1$.

Azután be van bizonyítva, hogy $\mathfrak{h}\,v \cdot \mathfrak{h}\,k = \mathfrak{h}\,(v+k)$; tehát $[\mathfrak{h}\,(v:m)]^m = \mathfrak{h}\,v$, $(\mathfrak{h}\,v)^k = \mathfrak{h}\,vk$, és e szerint $(\mathfrak{h}\,1)^k = \mathfrak{h}\,k$.

Ebből következik (21. §), hogy $e = \mathfrak{h}\,1 = (\mathfrak{h}\,(1:\mu))^\mu$, és hogy minden, a mit a ♀ jelről mondtunk, érvényes a $\mathfrak{h}$ jelre nézve is. *Például* a $\mathfrak{h}\,(\hat{\nu}\,{}^\star\alpha : m)$ tartalmazza $\sqrt[m]{1}$-nek valamennyi értékét, a mint $\mathfrak{h}\,\frac{(2\,{}^\star q + \hat{\nu}\,{}^\star\alpha)}{m}$ a -1-nek és $\mathfrak{h}\,\frac{{}^\star q + \hat{\nu}\,{}^\star\alpha}{m}$ a ${}^\star 1$-nek valamennyi m-dik gyökét szolgáltatja.

24. §.

Ezután következik *a hatványnak és a logaritmusnak értelmezése* a következő különböző egyenlőségi jelek segítségével.

$z \mathrel{(\!=} j$ jelentse, hogy z-nek minden értéke j-nek valamelyik értékével egyenlő. Ugyanazt jelentse $j \mathrel{=\!)} z$.

$z \mathrel{(\!=\!)} j$ jelentse, hogy z és j mindegyikének minden értéke a másiknak valamely értékével egyenlő.

$z \vDash j$, valamint $j \Dashv z$ jelentse, hogy z-nek valamelyik értéke j-nek valamelyik értékével egyenlő.

$z = j$ jelentse, hogy mindegyik kifejezés, a mely az egyenlőségben egyenlő, egyenlőt is jelent.

Pl. $\star 1 \mathrel{(\!=} \sqrt{-1}$, de $\star 1$ nem $\mathrel{(\!=\!)} \sqrt{-1}$; $\sqrt{-1} + \sqrt{-1} =$, de nem $\mathrel{(\!=\!)} 2\sqrt{-1}$, minthogy az egyenlőség utóbbi tagjában mindegyik kifejezésnek minden értéke vehető. Olyan ez, mint a zenében a feloldás jele.

Minthogy pedig ♀ $v = \mathfrak{h}\, v$ volt, legyen ez egyenlő V-vel. A v-t e V *természetes logaritmusának* nevezzük, jelekben pedig: $v \mathrel{(\!=} \mathfrak{lg}\, V$. Ha pedig a c, C, a mindegyikének egyetlen értéke van, és $c\, \mathfrak{lg}\, a \vDash \mathfrak{lg}\, C$: akkor a következő elnevezéseket és jelöléseket használjuk: $C \mathrel{(\!=} a^c$, és $a \mathrel{(\!=} \sqrt[c]{C}$, és $c \mathrel{(\!=} \log C$ vonatkozással a-ra. Ha $a = \mathfrak{h}\, 1$, akkor az a természetes rendszer alapszáma, e.

Ha pedig $a = \mathfrak{h}\, b$ és $C \mathrel{(\!=} a^c$: akkor $C = \mathfrak{h}\, bc$, és $1 : b$-t, a mivel meg kell szoroznunk $\mathfrak{lg}\, C$-t, hogy az a alapra vonatkozó $\log C$-t nyerjük, az a alaphoz tartozó rendszer *modulusának* nevezzük. Így tehát $\mathfrak{h}\,(1 : \sigma)$ szolgáltatja az a alapot, ha σ a modulust jelenti.

Megjegyzés. A $\vDash$ jel azért nyer itt alkalmazást, mert $c\, \mathfrak{lg}\, a$ nem $\mathrel{(\!=} \mathfrak{lg}\, C$, sem pedig $\mathfrak{lg}\, a \mathrel{(\!=} \mathfrak{lg}\, C : c$. Ugyanis (ha k az egyik $\mathfrak{lg}\, a$-t jelenti) az elsőre nézve

$$ck + c\hat{\nu}\,{\star}\alpha \mathrel{(\!=} ck + \hat{r}\,{\star}\alpha$$

volna; ha azonban $c = 2 : 3$ és $\hat{\nu} = 5$, szükséges volna, hogy $2 \cdot 5 : 3$ egész szám legyen. A másodikra nézve

$$k + \hat{\nu}\,{\star}\alpha \mathrel{(\!=} k + \hat{r}\,{\star}\alpha : c$$

volna, következésképen $\hat{\nu} c \mathrel{(\!=} \hat{r}$ volna; tehát $2 \cdot 5 : 3$-nak egész számnak kellene lennie.

Ép úgy $\left(\sqrt[k]{h}\right)^c$ is csak $\vDash \sqrt[k]{h^c}$, és $A^m = B^n$-ből még $A \vDash B^{\frac{n}{m}}$ sem következik. Az elsőre nézve legyen *pl.* $k = 3 : 2$, $c = 1 : 2$ és $h = 1$. Az első kifejezésnek 6 és a másodiknak 7 értéke van, és csak három amazok közül egyenlő hárommal ezek közül. A másodikra nézve $1^2=(-1)^2$, de $1^{\frac{2}{2}}$ nem -1. Ha azonban n, m relativ törzsszámok, akkor $A \models B^{\frac{n}{m}}$.

$a^b a^c$ is általánosságban csak $\Rightarrow a^{b+c}$. A műben ezek és hasonló esetek a ♀ jel segítségével vannak átvizsgálva és példákkal megvilágítva.

25. §.

Minthogy továbbá be van bizonyítva, hogy minden mennyiség

$$y \cos u + y\,{}^\star\!\sin u$$

segítségével kifejezhető, hol y és u valósak és u valamely pont útját az 1 radiussal leírt körben jelenti, ugyanott nemcsak a mennyiség, hanem hatványai (akár valós, akár képzetes, akár vegyes a kitevőjük), valamint minden logaritmusa is elő van állítva.

Van ugyanis két párhuzamos abszczissza-vonal, és mind a kettőben az x abszczisszák egyenlők; még pedig mindegyikben bizonyos $\mathfrak{a}$ ponttól kezdve jobb felé $\vdash\!\!+\!\!\dashv$-ok, bal felé pedig $\vdash\!\!-\!\!\dashv$-ok. Az y ordináták is mind a kettőben az egyenlő x-eknek $\mathfrak{p}$ végeiben egyenlők. Mindegyik x abszczisszának $\mathfrak{p}$ végében legyen egy arra merőleges kör, melynek radiusa 1, és az x-re annak $\mathfrak{p}$ végében merőlegesen álló átmérőnek felső végéből kiindulva, mozogjon egy pont mindig tovább, először is a tábla mögé irányulva. Útja legyen u és végpontja mindenkor legyen $\mathfrak{p}'$, és $\mathfrak{h}\,x$ legyen az y. A felső abszczissza-vonalon rakjuk $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$-re $\mathfrak{p}$-től kezdve ($\mathfrak{p}'$ irányában) $y \cos u$-t, az alsón pedig $y\,{}^\star\!\sin u$-t; akkor könnyen bebizonyítható, hogy az első a 8 alakot, a második a ∞ alakot szolgáltatja, a melyek mindig hasonlók, a jobb oldal felé a végtelenbe nőnek, a bal oldal felé pedig minden határon túl fogynak. Az első, a valós, itt a megkülönböztetés végett feketével, a második (a tisztán képzetes) vörössel van jelezve.

E szerint bármely $Q = y \cos u + y\,{}^\star\!\sin u$ mennyiségnek megfelel bizonyos $\mathfrak{p}$ és bizonyos u, tehát [bizonyos] $y \cos u$ a schéma felső részében és $y\,{}^\star\!\sin u$ az alsóban. Minden log nat Q benne foglaltatik az $\mathfrak{a}\mathfrak{p} + {}^\star u + \hat{\nu}\,{}^\star\alpha$ alakban.

26. §.

A fent (a 13. §-ban) említett *szabályok, melyek a vegyesek mérés képeire vonatkoznak*, a következők.

1. Hogy valamely tiszta képzetes ${}^\star d$-vel összefűzött valós c *főmérésének mérés képét* nyerjük, mindegyik a maga egységével mé-

rendő meg; azonban I, II, III után a bal oldalon a c, a jobb oldalon pedig a $^\star d$ mérés képe irandó.

2. Ha $c+{}^\star d$-t valamely tiszta [mennyiséggel] mérjük, először megmérendő az, a melyre nézve a $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv$ vagy $\longmapsto$ egység ugyanaz, mint a mértékre nézve, és a mérésnek ez a képe irandó balra, a másik pedig jobbra.

3. Ha azonban a mérték vegyes, *pl.* $a+{}^\star b$, hol a és b valósak, és K megmérendő $a+{}^\star b$-vel, K mindig egyenlővé tehető $P+Q$-val, a hol mind P, mind Q vegyes mennyiség, és ha P az a-val és a Q a $^\star b$-vel megmérve, egyenlő mérés képeket szolgáltatnak: akkor ez legyen K mérés képe, ha azt $a+{}^\star b$-vel mérjük. T. i. K legyen $c+{}^\star d =$ $= P+Q$, hol c és d valósak. Akkor $P = ax - a\,{}^\star y$ és $Q = {}^\star bx - by$; továbbá

$$x = \frac{d}{b} + \frac{abc-a^2d}{a^2b-b^3} \quad \text{és} \quad y = \frac{bc-ad}{a^2-b^2}.$$

Arra azonban, hogy $P : {}^\star a = Q : {}^\star b$ legyen, szükséges volna, hogy $P = ax + {}^\star ay$ és

$$x = \frac{d}{b} + \frac{abc-a^2d}{a^2b+b^3}, \quad y = \frac{ad-bc}{a^2+b^2},$$

legyen.

Az előbbeni ugyanis arra szükséges, hogy a mérés képek egyenlők legyenek, a mi nem azonos a hányadosok egyenlőségével, a mint az könnyen kimutatható. Ezt azonban, valamint azt a módot is, a mely szerint a P, Q, x, y meghatározhatók, a rövidség kedvéért mellőzzük. Az utóbbi esetben

$$K = P+Q = a\,(x+{}^\star y) + {}^\star b\,(x+{}^\star y) = (a+{}^\star b)\,(x+{}^\star y);$$

mert K-nak mérés képe $(a+{}^\star b)$-re nézve (a 13. § jegyzetében említett törvényszerű kivétellel) egyenlő $x+{}^\star y$ főméréseével.

27. §.

Végül be van bizonyítva, hogy akárhány tagból is álljanak a tényezők, ugyanarra az eredményre jutunk, ha a szorzandó minden tagját megszorozzuk a szorzó minden tagjával, és ezeket a részletszorzatokat összeadjuk, mint akkor, ha a szorzandó $a+{}^\star b$ összegét megszorozzuk a szorzó $x+{}^\star y$ összegével, a hol mindegyik 0 is lehet.

Természetes, hogy be van bizonyítva az is, hogy a tényezők, akármennyi is legyen azok száma, és akárhogyan is vannak alkotva, bármely sorrendben ugyanazt a szorzatot szolgáltatják.

28. §.

Bármely, még *heterogén mennyiségek* is, *az egység segítségével* egyidejűleg *ábrázolhatók a táblán*; mindegyik ugyanis oly képviselővel, mely E-nek (14. § az egyenes egységének) annyiszorosa, mint a képviselt a maga neme egységének. Továbbá mindegyik képviselő az összeadás és kivonás esetében pozitiv vagy negativ minőséggel, és a főmérés esetében $+1$-gyel vagy -1-gyel legyen felruházva.

Itt két alapvető kérdés [származik].

1. Mi az eredmény, ha bizonyos minőségekkel felruházott mennyiségeket bizonyos műveleteknek vetünk alá?

2. Milyen és mily minőségekkel felruházott mennyiségeket milyen műveleteknek kell alávetnünk, hogy bizonyos eredményre jussunk?

Ha ekkor a keresett mennyiség *például* mint az E egységnek kétharmada adódik ki: akkor az a maga neme egységének kétharmada.

Megjegyzés. 1. Az elmondottaknak azonban nem az az értelme, hogy a műveleteket a képviselő egyeneseken geometriailag hajtsuk végre. Ez csak oly módja a megjelenítésnek, mely a heterogéneknek a táblán való közönséges ábrázolását igazolja és teljes világításba helyezi. Ezek a képviselők ugyanis a maguk egységével megmérve, számokkal is fejezhetők ki.

2. A geometria egyenest egyeneshez hozzátehet ugyan és elveheti az egyiket a másikból; $a \cdot b$-t, $a : b$-t, $\sqrt{a}$-t, a^c-t is, ha $c = n : 2^m$, pontosan állíthatja elő, még ha a vagy b, vagy pedig mind a kettő az egységgel inkommenzurabilisek is, de m, n egész $\vdash\!\!\dashv$ számok.

Sőt, ha a mennyiségek nincsenek is vonalakkal megadva, [a geometria] azokat, ha az egységet felosztjuk és bizonyos számú részt veszünk, vonalakkal fejezheti ki, és ép úgy megfordítva valamely egyenest megmérhet az egységgel. Abban az esetben is, melyben az eredményt nem szolgáltatja pontosan, megközelíti vég nélkül.

Az arithmetikának azonban egy örökkévalóságra van szüksége, *például* a $\sqrt{2}$-hez; sőt nem fejezheti be minden a vonalnak megszorzását egy olyannal sem, mely az egységgel inkommenzurabilis. Meg sem mozdulhat, ha nem megmérve adjuk elébe a mennyiségeket, a mint egység nélkül a geometria sem mehet semmire az olyan műveletekben, a melyek a főméréstől függnek.

3. A két kérdés közül az elsőre a következők tartoznak: Mi az eredmény, ha $^\star a$-t $^\star b$-vel megszorozzuk és mi, ha megszorozzuk $-{}^\star b$-vel? Az első esetben az eredmény $-ab$, a másodikban ab (a hol a és b közül mindegyik akár $\vdash\!\!\dashv$, akár $\vdash\!\dashv$ lehet). Mi az eredmény,

ha $^\star a$-t $^\star b$-vel, mi, ha $-{}^\star b$-vel, mi, ha b-vel elosztjuk, és mi, ha a-t $^\star b$-vel, és mi, ha $-{}^\star b$-vel elosztjuk?

A második kérdésre tartozik: Mivel kell megszoroznunk $c+{}^\star d$-t, hogy $a+{}^\star b$ adódjék ki? Könnyen belátható, hogy általában az sem egyedül x, sem egyedül $^\star y$, hanem $x+{}^\star y$, még pedig:

$$(ac+bd+{}^\star bc-{}^\star ad):(c^2+d^2).$$

Mi az, a mi az ellenkezőjével megszorozva a 16-ot adja? Ez $^\star 4$, valamint $-{}^\star 4$ is. Van-e olyan $^\star x$, hogy $({}^\star x)^2 = 4$? Ez lehetetlen.

Egy rőf ára 3 forint, mi az ára 2 rőfnek? A -1-gyel felruházott 2 szorzó $^\star 6$ forintot adna eredményül, a mi ugyan épen annyi, mintha $+1$-gyel volna felruházva; de ha még egy szorzást végzünk $^\star 1$-gyel, az eredmény -6 volna, mert $^\star 6 \cdot {}^\star 1 = -6$. A legegyszerűbb utat kell választanunk, és csak ott kell a -1-et megadnunk, a hol ez szükséges, és ha a művelet eredménye megköveteli. Különösen azok, a melyeket össze kell számlálnunk, ugyanazzal az egységgel legyenek felruházva.

29. §.

Az $A+B=S$, $a \cdot B = b$, $C \Leftarrow a^c$ mindegyikében 3 tárgy fordul elő. Ámde 3 tárgynak 3 ambója van; ebből pedig az a kérdés származik, hogy minden ambóhoz határozzuk meg a harmadikat.

A műveletek ismétlése révén (a mihez még bizonyos föltétel is járulhat hozzá) származnak a *sorok* és a sorok sorai.

Mindezekből származik az, a mit *függvénynek* neveznek. Ez olyan kifejezés, a melyben egy vagy több változó bizonyos meghatározás szerint állandókkal van összefűzve.

Az egészet egy fa mint jelkép ábrázolja, melynek törzse — a magyarban az egyenlőségi jelek (24. §) alapján előadott, az axiómákat is bemutató rövid logika közvetítésével a — mélyből magasra nőve, a függvények elméletével virágként diszített koronába terjeszkedik ki, és azt a magasztos gyümölcsöt hozza, mely a halandó szemet arra képesíti, hogy a végtelen természet törvényeit elolvasni megtanulhassa.

30. §.

A függvénynyel kapcsolatban a következő alapvető kérdések származnak.

1. Mi a függvény értéke, ha a benne meglevő változók mindegyikének bizonyos értéket tulajdonítunk?

2. Milyen értéket kell a változónak tulajdonítanunk, hogy a függvény értéke bizonyos feltételnek megfeleljen? *pl.* hogy *maximumot* vagy *minimumot* vegyen fel, vagy hogy értéke 0 legyen? (az utóbbi az egyenlet feladata), vagy hogy mi legyen v, hogy $\mathfrak{h}\, v = K$ legyen?

3. Milyen legyen a függvény, hogy bizonyos feltételeknek megfelelhessen?

4. Mi a függvénynek I növekménye a változó bizonyos i növekményének megfelelőleg? *pl.* ha x átmegy $x+i$-be. Ide nemcsak a *binomium* tartozik (*pl.* ha $F=x^h$, akkor $(x+i)^h$-nak megfelelőleg lesz x^h+I), hanem TAYLOR tétele is.

5. I-nek i-vel való összehasonlítása révén az a kérdés támad, hogy mi lesz $I:i$-ből, ha i kisebbé válik, mint bármely megadott [mennyiség]? Vajjon határértéke nem bizonyos függvény-e? És azután, hogyan lehet erről az első függvényre visszatérni?

6. Ha pedig ezt a határ-függvénynyel és mindig tovább ismételjük, az a gondolat támad, vajjon nem lehetséges-e, hogy visszafelé az első függvényhez jussunk, azaz ezt azok által kifejezzük? Erre szolgál MACLAURIN sora, melynek bebizonyítása LAGRANGE-tól származik, a ki meghatározta azokat a határokat, a melyek közé a sor kiegészítése esik, ha azt valahol meg akarjuk szakítani. Ez a magyarban szemléletesen van bemutatva.

7. Ha már mostan két függvénynek, F-nek és F'-nek növekményei I és I', ha mind a kettőben a változó növekménye i; az a kérdés támad, vajjon nem következtethetünk-e I és I' arányából F és F' arányára? *például* akkor, mikor $I:I'$ határértéke 1, ha i minden megadhatónál kisebbé válik. Ebből ered a következő §. Már ARCHIMEDES, kit NEWTON *Princeps Mathematicorum*-nak nevezett, az $I:i$ és $I':i$ határértékek egyenlőségéből következtetett az F és F' egyenlőségére.

A jelölések legyenek a következők:

1. $Q \frown b$ jelentse, hogy ha b véges állandó mennyiség, vagy a 0-sal egyenlő, akkor minden a b-hez és Q-hoz hozzáadható ω-nak megfelelőleg, a mely nem 0, van olyan Q, hogy $Q-b<\omega$; ha pedig $b=\infty$, akkor $Q \frown \infty$ azt jelentse, hogy Q nagyobbá válhatik bármely megadottnál. A b-ről azt mondjuk, hogy a Q *limese*.

2. $a<c$ azonban jelentse, hogy a (eltekintve a $\vdash\!+\!\dashv$, $\vdash\!-\!\dashv$, $+1$, -1-től) egyenlő a c-nek valamely részével; $a \lhd d$ pedig azt jelentse, hogy ha mind a kettőt valamely abszczissza-vonalra, annak 0 pontjától kezdve reárakva gondoljuk, még pedig azt, a mi $\vdash\!+\!\dashv$ a jobb oldalon és a mi $\vdash\!-\!\dashv$ a bal oldalon: akkor a végpontja balra esik d végpontjától. E szerint $-3 \lhd 0$, $0 \lhd 1$, de nem $0<1$.

1. *Megjegyzés.* A 29. §-ban megemlített logikában bebizonyí-

tott következő tétel a *limes* bebizonyítására szükséges és némely más esetben is hasznos.

Ha valamely folytonos $\mathfrak{ab}$ idő $\mathfrak{a}$ pontja után minden pontban van A, de $\mathfrak{b}$ után valamely pontban nincsen A: akkor annak az időnek, a melynek vége előtt egészen $\mathfrak{a}$-ig mindig van A, szükségképen bizonyos $\mathfrak{p}$ végpontja van, úgy hogy, ha a $\mathfrak{k}$ időpont $\mathfrak{p}$ után van, $\mathfrak{k}$-tól $\mathfrak{a}$-ig nincsen mindig A. A $\mathfrak{p}$ pontban pedig vagy az utolsó A van, vagy az első *nem-*A; még pedig olyan *nem-*A, a melyre egy darabig mindig *nem-*A következik abban az esetben, ha $\mathfrak{p}$ után (egy bizonyosig) nem minden $\mathfrak{p}'$ olyan, hogy $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{p}'$ között A is és *nem-*A is van.

[2.]* *Megjegyzés.* Ha minden változó a határához közeledik, az eredmény határértékének ezekre a határokra nézve ugyanazt a nevet adjuk. E szerint $1:0=\infty$.

31. §.

Most az előbbi § 5. és 7. pontja alapján következnek *a differencziálszámolás első alapjai.*

I. Még ha egyidejüleg több változó is szerepel, azt a változót, *például* x-et, melynek bizonyos γ értékét valamely $+$ egész számmal, n-nel elosztottnak gondoljuk, *főváltozónak* nevezzük, és $\gamma:n$-t $\dot{x}$-szel jelöljük.

II. Bármely olyan változónak, *például* y-nak, mely x-szel egyidejüleg szerepel, az az értéke értendő, melyet annak az x-nek a végén vesz fel, és $\dot{y}$ jelentse $y-y'$-t; y' alatt értve y-nak azt az értékét, melyet $x-\dot{x}$-nek megfelelőleg vesz fel, hol az x-nek végéből egy $\dot{x}$-et elvettünk.

III. Valamely zárójelbe foglalt betű (vagy jel) utána álló egy vagy több változóval jelentsen valamely e változókat tartalmazó függvényt. *Pl.* $(A)x$ jelenthet valamely az x-től függő kifejezést, a mely azonban maga is, mint olyan, mely x-szel együtt változik, u-nak nevezhető. Így tehát (II. szerint) $\dot{u}=(A)x-(A)(x-\dot{x})=u-(A)(x-\dot{x})$, a miből következik, hogy $u-\dot{u}=(A)(x-\dot{x})$. Az $\dot{u}$ jelölésére szolgáljon $a(x)$ is, és ugyanez a jelölés legyen érvényes más betűk esetében is. $(a)x$-et nevezzük $(A)x$ *igazi differencziáljának*; a későbbi czélra a vele egyenlőérvényű *differencziálról* alább lesz szó.

IV. Az $(A)x$-ből, ha x helyébe először $n\dot{x}=\gamma$-t helyettesítjük, azután $(n-1)\dot{x}$-et, továbbá $(n-2)\dot{x}$-et s így tovább, végre $(p-1)\dot{x}=\beta$-t (hol p valamely $+$ egész számot jelent), a következő

* E megjegyzés az eredetinek errata-i között a 87. oldalon be van toldva.

sorozat keletkezik:

$$(A)n\dot{x},\ (A)(n-1)\dot{x}, \ldots, (A)p\dot{x},\ (A)(p-1)\dot{x}.$$

Nyilvánvaló, hogy $(A)p\dot{x}-(A)(p-1)\dot{x}$ az $(A)(p-1)\dot{x}=(A)\beta$-nak az a növekménye, mely a p-dik $\dot{x}$-nek megfelel. Így tehát a p-dik, $p+1$-dik, ..., n-dik $\dot{x}$-nek megfelelő növekményeket (jobbról balra menve) a következő sorozat szolgáltatja:

$$(A)n\dot{x}-(A)(n-1)\dot{x},\ (A)(n-1)\dot{x}-(A)(n-2)\dot{x},$$
$$(A)(n-2)\dot{x}-(A)(n-3)\dot{x}, \ldots, (A)p\dot{x}-(A)(p-1)\dot{x}.$$

Ennek általános tagja $(A)m\dot{x}-(A)(m-1)\dot{x}$, a mely a_m-mel jelölhető, hol m minden egész számot jelenthet p-től egészen n-ig (bezárólag). Ha azonban n *például* 3-szorta nagyobbá válik, p és a tagok száma is 3-szorta nagyobb lesz.

Az is világos, hogy e sorozat [tagjainak] összege, mert a közbeeső tagok egymást megsemmisítik, $(A)n\dot{x}-(A)(p-1)\dot{x}$, vagyis $(A)\gamma-(A)\beta$, a mi az $(A)\beta$-nak az a növekménye, mely a $\gamma-\beta$-nak felel meg. Ez itt (A)-val jelölhető.

V. Ha $n \frown \infty$, minden sorozatban a tagok száma véges és minden sorozatnak van utolsó tagja, de utolsó sorozat akkor nincsen.

Vannak olyan függvények, melyeknél a $\gamma-\beta$-nak megfelelő növekmény független n-től és olyanok, a melyeknél az n-től függ. Szolgáljon erre *például* valamely $\triangle \mathfrak{abc}$; $\mathfrak{ab}$ legyen az alapja és $\mathfrak{bc} \perp \mathfrak{ab}$; legyen $\mathfrak{a}$ az abszczisszák kezdőpontja és $\mathfrak{ab}=\gamma$, $n=7$ és $p=3$, úgy hogy $\beta=2\dot{x}$, $\gamma=7\dot{x}$.

Jelentse $(A)x$ annak a háromszögnek a területét, melynek alapja x és magassága az ordináta az x végében: akkor a p-dik $\dot{x}$-nek megfelelő növekmény az ugyanannak az $\dot{x}$-nek elejéhez és végéhez tartozó ordináták között elterjedő *trapez* stb., és a $\gamma-\beta$-nak megfelelő növekmény az a trapez, a mely $\gamma-\beta$-n a γ és β végéhez tartozó ordináták között áll. Ez változatlan marad, bárhogyan is növekedjék n.

Gondoljunk már mostan a γ-hoz tartozó ordináta felső végéből az alaphoz párhuzamost húzva egészen a legközelebbi ordinátáig: akkor olyan derékszögű négyszög keletkezik, melynek alapja $\dot{x}$ és magassága az $\dot{x}$ végéhez tartozó ordináta. Ha minden $\dot{x}$-nél így járva el, ezt egészen $\mathfrak{a}$-ig folytatjuk, és ezeknek a derékszögű négyszögeknek összegét $(V)x$-szel jelöljük: akkor e függvény nyilván függ n-től. Ép úgy van az akkor is, ha minden ordináta végéből a párhuzamost a legközelebbi ordinátáig előre a $\mathfrak{b}$ felé húzzuk. Ezeknek a derékszögű négyszögeknek összege legyen $(U)x$. Az is világos, hogy mind (V), mind (U) az n-től függ.

VI. Ha $z : z' =$ vagy $\leftharpoonup 1$, azt mondjuk, hogy z és z' *egyenlőérvényűek.* Ennek jelölésére (a czímlapon említett munkákban) szolgál: $z \stackrel{\circ}{=} z'$. Ott különösen a későbbiekben sok olyan dolog van bebizonyítva, a mi a differencziáloknak egyenlőérvényűekbe való szándékos átalakítására vonatkozik.

Ha tetszés szerinti nagy N-re nézve $z - z' < (z' : N)$: akkor $z : z' \leftharpoonup 1$; mert ha z'-vel osztunk, származik $(z : z') - 1 < (1 : N')$.

Ha $z : z' \leftharpoonup 1$, z és z' vagy mind a kettő $+$, vagy pedig mind a kettő $-$; mert különben $z : z'$ negativ és (a 148. o. ellenére) $(z : z') - 1 > 1$ volna.

Ha $(c)x : \dot{v} =$ vagy $\leftharpoonup u$, $\dot{v}u : (c)x =$ vagy $\leftharpoonup 1$, és ha u az n-től független függvény, azt mondjuk, hogy $\dot{v}u$ annak a $(C)x$-nek *differencziálja,* a melynek *igazi differencziálja* $(c)x$. Az előbbinél az *igazi* szót elhagyjuk.

VII. Ha z az $(A)x$ differencziálja, és $z' = (a)x$: akkor, ha $z' = z + qz$, a $q \leftharpoonup 0$. Ekkor ugyanis $z : (a)x$ (ha nem $= 1$) $\leftharpoonup 1$, a miből következik (q-t végesnek tételezve fel) hogy $-q < (1+q) : N$ (ha $N \leftharpoonup \infty$); mert $(z : z') - 1 < (1 : N)$, és így $z - (z+qz) < (z+qz) : N$.

Ha már mostan t a $(B)x$ differencziálja és $t' = (b)x$: akkor hasonlóképen $t' = t + q't$, hol $q' \leftharpoonup 0$.

E szerint, ha $z : t \leftharpoonup 1$, egyszersmind $(a)x : (b)x \leftharpoonup 1$; mert itt is $t = z + q''z$, hol $q'' \leftharpoonup 0$. Így tehát

$$(z' - t') : t' \;\big(\text{azaz } (z' : t') - 1\big) =$$
$$= \frac{z + zq - (z + zq'' + zq' + q'q''z)}{z + q''z + q'z + q'q''z} = \frac{q - (q' + q'' + q'q'')}{1 + q' + q'' + q'q''},$$

a mi $\leftharpoonup 0$; mert csak a számláló $\leftharpoonup 0$.

Ha tehát $(A)x$ és $(B)x$ differencziáljai egyenlőérvényűek (még ha különböző változók szerint is alkottuk volna azokat), $(a)x$ és $(b)x$ is egyenlőérvényűek.

VIII. Ha $(a)x : (b)x \leftharpoonup 1$, egyszersmind $a_m : b_m \leftharpoonup 1$; mert a_m, b_m az $(a)x$, $(b)x$-ben benne foglaltatnak (IV). Ha pedig $a_m : b_m \leftharpoonup 1$, még pedig mindegyik ugyanarra az n-re nézve, tehát $a_m - b_m = f_m b_m \varrho$ (hol f_m $+$ vagy $-$ valódi tört és $\varrho = 1 : N$): akkor $(A) = (B)$ (IV).

Ha ugyanis m helyébe [minden egész számot] n-től egészen p-ig helyettesítünk, a következő 3 függőleges sor keletkezik:

$$a_n - b_n = f_n b_n \varrho,$$
$$a_{n-1} - b_{n-1} = f_{n-1} b_{n-1} \varrho,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_p - b_p = f_p b_p \varrho,$$

a hol a két első oszlop összege $(A)-(B)$, és a harmadiké

$$<[(B)\varrho=(B):N],$$

a mely $\frown 0$, mert $N\frown\infty$. Mindegyik tagba $k\dot{x}$ is helyettesíthető, hol $k=(B):(\gamma-\beta)$. E szerint valamennyi $\dot{x}$, a mely benne van $\gamma-\beta$-ban, együttesen úgy szólván egy derékszögű négyszöget alkot, melynek alapja $\gamma-\beta$ és magassága k. Ez, ha n növekedik is, állandó marad; mert, ha n háromszorta nagyobbá válik, akkor az $\dot{x}$ háromszorta kisebb lesz, de három tag ugyanazzal a magassággal esik reá. Ez is a ϱ tényezővel együtt kisebbé válik minden megadhatónál. E szerint nincsen olyan g mennyiség, a melyre nézve $(A)-(B)>g$. Így tehát $(A)=(B)$, a mint egyenlő két olyan egyenes, a melynek különbsége nem nagyobb valamely megadható mennyiségnél.

Ha tehát az $(A)x$ és $(B)x$ differencziáljai egyenlőérvényűek: akkor $(A)=(B)$.

Hogy valamely megadott N-re nézve valamennyi a β-tól γ-ig terjedő tagnak megfelelőleg n ugyanaz lehet, a következő módon tűnik ki. β-tól γ-ig minden pontban az elegendő nagy n ordinátának gondolható, és azután az n nagyobbnak vehető, mint azok mindegyike.

IX. Ha $(A)=(B)$, azaz $(A)\gamma-(A)\beta=(B)\gamma-(B)\beta$: akkor

$$(A)\gamma=(B)\gamma-(B)\beta+(A)\beta,$$

a mi így is írható: $(A)x=(B)x+\text{const.}$; mert $(A)\beta-(B)\beta$ állandó.

Ez az állandó [nem egyéb, mint] $\alpha-(B)h$, ha található olyan h, a melyre nézve $(A)h=\alpha$ és az, a mit mondtunk, h-tól egészen β-ig érvényes. Ekkor ugyanis

$$(A)\beta-(A)h=(B)\beta-(B)h;$$

tehát

$$(A)\beta=\alpha+(B)\beta-(B)h,$$

a miből következik, hogy

$$(A)\gamma=(B)\gamma+\alpha-(B)h.$$

Ugyanaz érvényes akkor is, ha h vége távolabbra esik, mint a β-é.

X. Ha az, a mit mondtunk, érvényes: akkor γ tetszés szerinti nagynak választható, és az említett egyenlőséget az sem csorbítja, ha a $\gamma-\beta$ olyan részének megfelelőleg, a mely $\frown 0$, a növekmény is $\frown 0$.

XI. Ha az $(A)x$-ről mondottak $(K)x$-re nézve is érvényesek: akkor egyszersmind

$$(K)\gamma=(B)\gamma-(B)\beta+(K)\beta,$$

és miután $(A)\beta$-t vagy $K(\beta)$-t (B)-hez hozzáadtuk, azt mondhatjuk, hogy ez $(B)x$ differencziáljának *integrálja* $(A)x$-re vagy $(K)x$-re nézve. Az integrál jele $\int$, mely a differencziál elé van írva.

Ezek az integrálok természetesen csak egy állandóban különböznek egymástól; mert $(A)\beta-(K)\beta$ állandó. Azonban megfordítva is az olyan függvényeknek, a melyek csak egy állandóban különböznek egymástól, a differencziáljai egyenlők; mert *pl.*

$$a+x^2-[a+(x-\dot{x})^2]=x^2-(x-\dot{x})^2.$$

XII. Fent (VI-ban) $\dot{v}u$-t $(C)x$ *differencziáljának* neveztük. Ennek közönséges jele $d(C)x$, és u-t *differencziálhányadosnak* nevezzük, a mely (ép úgy mint a differencziál) a v változó szerint van alkotva. A differencziálhányados differencziálhányadosát második és a p-dik differencziálhányados differencziálhányadosát $p+1$-dik differencziálhányadosnak nevezzük, Lagrange szerint pedig első, második,..., p-dik, $p+1$-dik függvénynek, t. i. a *főfüggvényből* (vagy *ősfüggvényből*) derivált függvénynek, mely előbbit ő *fonction primitive*-nek nevez. Az x-nek valamely függvényét fx-szel, a deriváltakat $f'x$, $f''x$, $f'''x$,...-vel, vagy pedig, ha $fx=y$, y', y'', y''',...-val jelöli. Közönségesen a p-dik derivált jelölésére szolgál

$$\frac{d^pX}{dx^p},$$

hol X az x-nek valamely függvényét jelenti.

A mint valamennyi fentebbi jelölés csak annak a végczélnak megfelelőleg van választva, hogy az elmélet könnyebbé, szabatosabbá és szemléletesebbé váljék, legyen itt is megengedve (részben, hogy a betűket és vonásokat más czélra megtakaríthassuk, részben pedig, hogy a többszörös meghatározás könnyebben legyen elvégezhető), a differencziált a d helyett $\eth$-vel és a deriváltat $\mathfrak{d}$-vel jelöljük. ${}^{z}\eth X$ jelentse X-nek differencziálját z szerint és ${}^{z}\mathfrak{d}^{p}X$ az X-nek z szerint vett p-dik deriváltját. Ha egyszer ki van mondva, hogy *például* az x szerint veendők, akkor ezt már nem kell külön hozzáírnunk, úgy hogy azután $\eth X$, $\mathfrak{d}X$ az x szerint vett differencziált és első deriváltat jelentik.

Az integrál jele a derivált elébe is tehető. $\int u$ jelentheti azt a függvényt, melynek x szerint vett első deriváltja u és ${}^{x}\int^{m}u$ azt, a melynek m-dik deriváltja u.

XIII. Ha $(v)x>(a)x>(u)x$ (és vagy mind a három $+$, vagy pedig valamennyi negativ) és $(v)x:(u)x \simeq 1$: akkor egyszersmind $(v)x:(a)x \simeq 1$ és $(u)x:(a)x \simeq 1$. Ekkor ugyanis minden nagy N-nek megfelelőleg van olyan n, hogy

$$[(v)x:(u)x]-1<(1:N);$$

tehát

$$(v)x-(u)x<(u)x:N.$$

Ámde

$$(v)x-(a)x<(v)x-(u)x,$$

és $(a)x>(u)x$, a miből következik, hogy

$$(v)x-(a)x<(a)x:N.$$

Így tehát

$$[(v)x:(a)x]-1<(1:N).$$

Hasonlóképen

$$(a)x-(u)x<(a)x:N,$$

a miből, ha $(a)x$-szel osztunk, következik, hogy

$$1-[(u)x:(a)x]<1:N,$$

úgy hogy

$$[(u)x:(a)x]-1<1:N \quad (148. \text{ o.}).$$

XIV. Hogy a differencziált találjuk, olyan az n-től független u függvényt kell keresnünk, hogy, ha δ a függvénynek, *például* X-nek igazi differencziálját jelenti, és ennek differencziálja *például* x szerint határozandó meg, $\delta:\dot{x}=$ vagy $\sim u$ (VI) legyen. Ebben gyakran a megelőző XIII van segítségünkre. Hogy visszafelé a differencziálról (vagy deriváltról) az integrálra (ősfüggvényre) következtessünk, ennek útját tovább egyengetni, a két évszázad óriásai a jövőre hagyták. A mit eddig találtak, az az *integrál-táblákban* van összeállítva.

XV. Hogy a magasabb differencziálokat miképen kell alkotnunk, a következő példából tűnik ki. Be van bizonyítva, hogy, ha m nem 0,

$$d(x^m)=mx^{m-1}dx.$$

Differencziáljuk most már ezt úgy, hogy dx-et állandónak tekintjük: akkor ezt nyerjük: $(m-1)mx^{m-2}dx^2$, a mit $dd(x^m)$-vel, vagy d^2x^m-vel jelölünk. Ha itt szintúgy dx^2-et állandónak veszszük, $dddx^m$, vagy

$$d^3x^m=(m-2)(m-1)mx^{m-3}dx^3$$

stb. Ezeket a magasabb differencziálokat *magasabbrendű végtelen kicsinyeknek* nevezik. Eltekintve azonban attól, hogy az egyszerű tisztaság az agyrémeknek e mesterkélt előállítási módjától távol áll, ez még minden szükség nélkül megnehezíti a jelölést is. *Például* a Taylor-féle sor, a mely azt fejezi ki, a mi X-ből válik, ha x helyébe $x+i$-t teszszük, a következő lesz:

$$X+\frac{idX}{dx}+\frac{i^2d^2X}{2dx^2}+\frac{i^3d^3X}{2\cdot3\cdot dx^3}\cdots,$$

a mi a következő módon írható:

$$X+i\partial X+\frac{i^2\partial^2 X}{2}+\frac{i^3\partial^3 X}{2\cdot 3}\cdots,$$

vagy pedig LAGRANGE szerint így:

$$fx+if'x+\frac{i^2f''x}{2}+\frac{i^3f'''x}{2\cdot 3}\cdots,$$

vagy:

$$y+iy'+\frac{i^2y''}{2}+\frac{i^3y'''}{2\cdot 3}\cdots$$

(hol $fx=X=y$).

Ily módon a

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx-dxddy}$$

görbületi sugár egyszerűbben így jelölhető:

$$\frac{(1+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{-\partial^2 y},$$

a mi ismét

$$=-\frac{N^3}{y^3\partial^2 y},$$

ha N a normálist jelenti, a mely

$$=y\sqrt{1+\partial y^2}.$$

Sőt LAGRANGE mindent első differencziálok nélkül tárgyal, és még az $\int$ jelt sem használja, habár mind a kettő használható ott, hol könnyítést nyújt és a tárgyalást szemléletessé teszi. A magasabb differencziálok azonban bonyodalmassá teszik az egyszerű elméletet, elhomályosítják a világosságot, megnehezítik a jelölést, és ezzel szemben nem nyújtanak semmi előnyt, úgy hogy az ész parancsolja, hogy a tisztább belátás kedvéért megtisztítsuk a mezőt e minden rendű ∞ kicsinyeknek egész légiójától.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy dx^2 ugyanazt jelenti mint $(dx)^2$, a mi megkülönböztetendő $d(x^2)$-től, és ép úgy a ∂y^2 sem jelenti a $\partial(y^2)$-et, hanem a $(\partial y)^2$-et; tehát a $f'x^2$ is ugyanaz mint $(f'x)^2$.

Az is világos, hogy $\dot{x}={}^x\mathrm{d}x$ és hogy ${}^x\partial x=1$ még akkor is, ha x nem a főváltozó, hanem csak ezzel együtt változik. Legyen *például* t, az idő, a főváltozó és $(D)\,t$ jelentse a v sebességet a t [idő] végén: akkor $(D)\,mt-(D)\,(m-1)\,t=\dot{v}$ és $\dot{v}:\dot{v}=1$.

XVI. Nem volt tervünk, hogy (a czímlapon idézett) könyveket leírjuk; ezért egyebek közt a geometriára, a mechanikára és a variácziószámitásra való alkalmazásoknak itt el kell maradniok. Mindazonáltal szükségesnek tartjuk, hogy az elméletet néhány könnyű példával megvilágítsuk.

1. Legyen a síkban az abszczissza x, a reá merőleges ordináta y, és legyen x a főváltozó. Az a terület, mely x, a két végéhez tartozó y-ok és az y-ok végei alkotta vonal között elterjed, legyen $(A)x$. XIII-ból vegyük $v(x)$-et és $(u)x$-et: akkor könnyen belátható, hogy $(a)x$ a kettő közé esik, és hogy $(v)x:(u)x \to 1$. Ennélfogva alkalmazható (VII), és azt találjuk, hogy $\mathfrak{d}(A)x = \dot{x}y$ és $\partial(A)x = y$. Fejezzük ki tehát y-t [x-szel] és határozzuk meg azt a $(B)x$-et, a melynek deriváltja ugyanaz az y. Legyen *például* $y = 1:(1+x)$, mint az asymptotára vonatkoztatott egyenlőoldalú hyperbola esetében: akkor $(B)x = \log \operatorname{nat}(1+x)$: mert be van bizonyítva, hogy

$$\mathfrak{d} \log \operatorname{nat} z = \dot{z} : z.$$

E szerint $(A)\gamma-(A)\beta = (B)\gamma-(B)\beta$, úgy hogy $\beta = 0$ esetében $(A)\gamma = \log \operatorname{nat}(1+\gamma)$; mert $\log \operatorname{nat}(1+0) = 0$.

2. Ha a $(H)x$ valamely az előbbinek forgatása révén származó testnek térfogatát jelenti: akkor az előbbi módon találjuk, hogy $\mathfrak{d}(H)x = \dot{x}y^2\pi$, azaz olyan henger, melynek magassága $\dot{x}$ és alapja olyan kör, melynek radiusa y. Így tehát $\partial(H)x = y^2\pi$. E szerint az előbbeni esetben $y^2\pi = (1+x)^{-2}\pi$, és mind $-\pi(1+x)^{-1}$, mind $\pi x(1+x)^{-1}$ olyan $(I)x$ függvény, melynek deriváltja $(1+x)^{-2}\pi$. E kettő természetesen csak egy állandóban különbözik egymástól.

Így tehát

$$(H)\gamma-(H)\beta = \frac{\pi\gamma}{1+\gamma} - \frac{\pi\beta}{1+\beta},$$

úgy hogy, ha $\beta = 0$,

$$(H)\gamma = \frac{\pi\gamma}{1+\gamma}.$$

Ugyanerre jutunk, ha az $(I)x$ másik értékéből indulunk ki; mert ekkor

$$(H)\gamma = \frac{-\pi}{1+\gamma} + \frac{\pi}{1} = \frac{\pi\gamma}{1+\gamma}.$$

Ha $x \to \infty$, az előbbeni terület $\to \infty$, ez a test pedig $\to \pi$.

3. Legyen r a Föld félátmérője, $\mathfrak{c}$ a középpontja, és $\mathfrak{a}$ valamely pont az r meghosszabbításában. Nevezzük $\mathfrak{ac}$-t a-nak; s legyen valamely pontnak útja, mely a t idő alatt $\mathfrak{a}$-ból $\mathfrak{c}$ felé esik, s és t végén legyen a sebesség v és a gyorsító erő w. A főváltozó legyen t, és jelöljük $a-s$-et x-szel.

Minthogy a nehézségi erő fordítva arányos a távolság négyzetével,

$$w = r^2 g' : (a-s)^2,$$

ha a föld felszínén $w = g'$. Ha ugyanis az időegység $1''$, a sebesség azoknak a lábaknak a száma, melyeket valamely pont csupán csak a megelőző ok következtében $1''$ alatt leírna, w pedig az a sebesség, melyet valamely egy másodperczig egyenletesen ható erő annak végén létesítene. Így tehát $g' = 2g$, ha az eső test a föld felszínén $1''$ alatt a g utat írja le.

Mind $v^2 : 2$, mind $r^2 g' : (a-s)$ a t-től függő kifejezés. Az előbbi legyen tehát $(G)t$, az utóbbi pedig $(S)t$.

Be van bizonyítva, hogy $v\dot{v} \overset{\circ}{=} w\dot{s}$, hol $v\dot{v}$ a $v^2 : 2$-nek differencziálja és

$$w\dot{s} = \frac{r^2 g' \dot{s}}{(a-s)^2}$$

$\dfrac{r^2 g'}{a-s}$ differencziálja. Ennélfogva $(G) = (S)$ (152. o.), és így

$$(G)\gamma - (G)\beta = (S)\gamma - (S)\beta.$$

Ha ugyanis a γ idő végén az út, $s = \sigma$: akkor, ha $\beta = 0$,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{r^2 g'}{a-s} - \frac{r^2 g'}{a}$$

és

$$v^2 = 2r^2 g' \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{a}\right),$$

hol x' az x-nek értéke a γ idő végén.

Tehát

$$v = r\sqrt{2g'\left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{a}\right)}$$

és ha $x' = r$,

$$v = r\sqrt{2g'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

a mi $\sim \sqrt{2rg'}$, ha $a \sim \infty$, és épen ez az r magasságnak megfelelő sebesség.

Ebből világos, hogy, ha valamely világtest radiusa r', és felszínén a nehézségi erő g'', a legkisebb sebesség, melylyel felszínéről valamely golyót a radius irányában ki kell lőnünk, hogy (minden akadálytól eltekintve) soha vissza ne térjen, a r' magasságnak megfelelő [$\sqrt{2r'g''}$ sebesség]; ekkor ugyanis a ∞-ből leesőnek végsebessége épen a kezdősebesség.

A geometria alapjai

(a mennyi röviden és ábrák nélkül lehetséges).

32. §.

LOBATSCHEVSZKY MIKLÓS, orosz császári valóságos államtanácsos és a kázáni egyetemen a mathematika rendes tanára, egy 1840-ben Berlinben nyomtatott jeles munkájában ezeket mondja: «Homályosság az első fogalmakban, a mód, a hogyan a mennyiségek mérését elképzelik, és a párhuzamosak fontos hézaga főleg azok, a miért a geometria addig, a míg az analizisbe át nem megy, mostanig egy lépést sem haladhatott előre abból az állapotból, a melyben EUKLIDESről reánk maradt».

Habár más munkája nem jutott ide, ez magában már bizonyítéka rendkívüli szellemének. Főtárgya a párhuzamosak elmélete. A geometria többi alapjaiból nem áll benne más, mint 1. hogy az egyenes olyan vonal, mely nem változtatja helyét, ha 2 mozdulatlan pontja közös valamely forgó felülettel; 2. hogy két felület egyenlő, ha egyenlő részek összeillesztése vagy elválasztása révén származik. Valószínűleg a kázáni egyetem tudós irataiban még többet törleszt abból, a mivel évezredeket vádol.

Itt is 1832-ben a latinnak első kötete végén megjelent egy *Appendix*, a mely az előbbire annyira hasonlít, hogy évezredek után mind a kettőnek (hiszen egyik sem látta a másikat) az igazságnak ugyanaz az ősképe jelent meg.

De némely dologban különböznek is egymástól; részben némileg az útban és teljesen a jelölésekben, a melyek közül csak az e betű mind a kettőben közös. Ezt az itteni határozottan mint *a természetes logaritmusok alapszámát* használja, sőt menetében reávezettetve elfogadta; amaz pedig bármely az 1-nél nagyobb mennyiséget ért rajta avval a hozzátétellel, hogy a *Neper-féle alapszám* is lehet.

Az itteniből még akkor küldtek ki néhányat Bécsbe, Berlinbe, Göttingába... Göttingából a mathematikus-óriás, a ki magas tornyokból egyforma [éles] szemmel lát a a csillagoktól egészen a legmélyebb mélységig, azt írta, hogy meglepte, midőn befejezve látta azt, a mibe ő maga kezdett bele, hogy iratai közt örökségül hagyja.

A czímlapra írt nagy kérdést illetőleg sok van olyan, a mi a kis távolságokhoz hozzászokott érzékeinkkel ellenkezik. Hogy a $\triangle$

szögeinek összege $\to 0$, ha az oldalok $\to \infty$, és hogy az előbbi csak akkor $\to 2R$, ha az utóbbi $\to 0$; hogy nincsen derékszögű négyszög és négyzet, habár vannak a körbe írt egyenlő oldalú idomok; hogy nincsen teljes hasonlóság.

Ama munka ezt *imaginárius geometriának* nevezi, az itteninek a czíme pedig: *A tér abszolut igaz tudománya*; t. i. a *tagadó válaszra* épült geometria alatt csak annyit ért, hogy nem bizonyos, vajjon a válasz *igenlő*, és minden esetnek megfelelőleg olyan képleteket állít fel, hogy az értékek bizonyos i egyenestől függnek, mely a *tagadó* válasz esetében bizonyos állandó ugyan, de a priori nem dönthető el, vajjon egy lábnyi-e vagy pedig Syrius-távolságnyi. De mennél nagyobb volna, annál közelebb esnének az értékek azokhoz, a melyek az *igenlő* válasz esetében a megfelelők. Így tehát az itteninek a képleteibe a tagadó válasz esetében i helyébe annak tényleges értékét, a melyet akkor felvesz, az igenlő válasz esetében $i \to \infty$-t kell helyettesítenünk, hogy az igazi értéket nyerjük.

A geometriának az a része, a mely az *igenlő* vagy *tagadó* választól, tehát az itteni i nagyságától független, a többitől elkülönítve a következőket tartalmazza: A háromszögek egyenlőségét; hogy egyenlő oldalokkal egyenlő szögek fekszenek szemben, és hogy a nagyobb oldallal nagyobb szög fekszik szemben és viszont; a szögek nagyságát egy pont körül, a melyeknek összege az egyenesen $2R$ és viszont; hogy e szerint a csúcsszögek egyenlők; hogy a $\triangle$ külső szöge nagyobb, mint mindegyik szemben fekvő belső; merőleges állítását és ejtését; hogy egy pontból egy egyenesre csak egyetlen ilyen lehetséges és hogy az egyszersmind a legrövidebb egyenes; egyenes és szög felezését; $\triangle$-höz vagy szöghöz vele egyenlőnek szerkesztését; hogy az egyenesnek a körrel egy vagy két közös pontja van, több pedig nincsen; [a kör] középpontjának három pontjából való előállítását; a kört metsző több egyenesre vonatkozókat; a polygonok lehetőségét, de csak a 4, 8, 16,... oldalúnak szerkesztését; hogy körnek körrel egy vagy két pontja közös, több [ilyen] pedig nincsen.

Elmarad azonban a hasonlóság, az egyenes felosztása három részre, hogy bármely $\triangle$ körül kört írjunk le, a polygon szögének abszolut nagysága, szóval mindaz, a mi összefügg avval, hogy a $\triangle$ szögeinek összege két derékszöggel egyenlő; mert be van bizonyítva, hogy, ha a válasz nem *igenlő*, a szögek összege különféle és 0 és $2R$ között határozatlan marad, és csak $2R$-nél nem lehet nagyobb.

A gömb felületén szintén sok a független geometriába tartozik; mert ott, minthogy (ez a felület is ép úgy, mint a sík) minden pontja körül önmagában forgatható, sok az analógia. A vonalzót bizonyos módon berendezett mozgatható kör képviseli, melynek radiusa egyenlő a gömb felületeével. Ha csak pusztán a körzőre szorítkoznánk, végtelen sok műveletet kellene végeznünk. Egyebek közt ide tartoznak: a gömbi háromszögek; ezeknek egyenlősége; hogy egyenlő oldalokkal szemben egyenlő szögek fekszenek és viszont és más efféle; a szög felezése; merőleges állítása és ejtése; egyenlő $\triangle$-ek és szögek szerkesztése; a kör leírása; érintések előállítása; a 4, 8, 16,... oldalú polygonok szerkesztése; sőt a gömb felületében a három ponton átmenő kör középpontját is megtalálhatjuk, a mi a síkban az *igenlő* válasz nélkül megoldhatatlan feladat. Ha bármely olyan három pont, mely nincsen ugyanabban az egyenesben, mindig egy gömb felületébe eshetnék, evvel be volna bizonyítva EUKLIDES XI. axiómája.

Mind a két mű bebizonyítja azt is, hogy a gömbi trigonometria az *igenlő* vagy *tagadó* választól független. Az itteni még a *gömb felszínét is ettől függetlenül számítja ki;* tehát ez is ide tartozik. A *tagadó* válasz esetére pedig az itteni mű megmutatja a *kör négyszögítését* is.

Mind a kettő olyan képleteket vezet le, melyek a $\triangle$ oldalainak és szögeinek egymástól való függését fejezik ki; külső alakjaik különbözők ugyan, de a valóságban megegyeznek egymással.

Mind a kettő, habár különböző úton egyeztette meg egymással a két trigonometria képleteit. Az itteni áll a latinnak második kötetében a 380.* oldalon (1833.), a hol a következtetés közvetetlenül az egyenes vonalú trigonometria képletei alapján megtörtént és az igenlő válasz esetére PYTHAGORAS tétele is le van vezetve.

Mind a kettő olyan felületet állít elő, a melyben a válasz *igenlő* és az euklidikus geometria érvényes. Vajjon azonban ez a síkkal azonos-e, eldöntetlen marad; a gömbnek határa ez, ha radiusa $\sim \infty$, és az a vonal, a mely benne az egyenest helyettesíti, a kör határa, ha radiusa $\sim \infty$. A kázáni iratban e felület neve *orisphaera* és e vonalé *oricyklus,* az itteni pedig a felületet F-nek és a vonalat L-nek nevezi.

Abban is megegyeznek, hogy csak a posteriori végzett mérésekkel volna eldönthető, vajjon az *igenlő* válaszra épült geometria, a mennyire mérésünk ér, nem mutat-e érzékeinkkel észlelhető hibát. A latin I. kötetének 489. oldalán is a következő áll: «*Az idő, mely öröktől fogva ikertestvére a térnek, ennek segítségére jön; és minthogy az égi testek mozgása megegyezik azokkal a számításokkal, melyek a XI. axiómára támaszkodnak, a gyakorlatban méréseink*

* [L. a 232.—235. o.]

egész tartományán belül ebben a feltevésben bizton megnyugodhatunk».*

Ennyit előrebocsátottunk; később (a mennyire itt lehetséges) még többet mondunk el ezekről.

A kérdés mégis az, vajjon nem található-e valami elfogadható axióma? A latinnak első kötetében több ilyen van felsorolva, melyek mindegyike elegendő, ha [alapul] felveszszük. Közülük egyik a következő: Ha a térnek valamely T része olyan természetű, hogy n-szer egymás mellé helyezve a köröskörül végtelen teret kitölti: akkor ugyanabból a részből nem rakható össze n köröskörül végtelen tér. Habár n bármilyen nagy számot is jelenthet; axiómának egyik sem elég egyszerű. T lehet a térnek az a része, mely két ugyanabból az egyenesből kiinduló, az egyik oldalon ∞ és tetszés szerinti kicsiny szöget alkotó sík között van.

Azonban, ha az *igenlő* válasz bizonyos is volna, a minden esetben érvényes általános geometria a tudomány szempontjából mégis érdekes maradna.

33. §.

Ezeket előrebocsátva, a sorrend a következő [lesz]:

I. A tér szemlélése után néhány fogalom és az egyenes és sík származtatása, és ebből eredő fogalmak.

II. A sík a vizsgálódó szemnek tisztább kilátású mezőt nyit. Ebben először az egyszerű és azután a kettőből összetett mozgás jő tekintetbe.

III. [A sík] kielégítő vizsgálata után [a szem] a megszerzett kincscsel felemelkedik vissza a végtelen térbe.

34. §.

A tér fogalma úgy származik, hogy eltekintünk minden földtől és naptól. Az egész külső világ helye — szent éjszaka, a melyben számtalan lámpa a láthatatlan felé világít — és végtelen mező, mely a belső szemnek megnyilik.

A szemlélet [a teret] köröskörül végtelennek, örökkévalónak, folytonosnak, homogénnek, változhatatlannak mutatja, úgy hogy semmi része más változást nem szenvedhet, mint azt, hogy majd egyik, majd másik mozgathatónak helyéül szolgálhat.

* [A Tentamenből vett latin idézet itt magyarra van lefordítva. L. e rész 99. oldalát.]

35. §.

Általánosságban a az A részének mondható, ha A magában foglalja a-t és ezenkívül még mást is foglal magában. Az olyan *részt* pedig, mely elvontan tárgya lehet ugyan a gondolkodásnak, de nem gondolható el oly módon elválasztva, hogy egészen meg ne maradjon, *elválaszthatatlannak* nevezzük. Ilyen *pl.* egy vonalból való pont vagy pontok, egy felületből való vonal stb.

Alkotó részeknek akkor nevezzük mind a-t, mind b-t, ha a kettőnek összessége maga A, és a-nak és b-nek vagy semmi közös részük nincsen, vagy pedig a mijök közös, mind a kettőnek elválaszthatatlanja.

Az olyan részt, mely bizonyos számmal ismételten egymás után helyezve, A-t teljesen kitölti, *kitöltő résznek* nevezhetjük.

36. §.

Ha valamiről azt mondjuk, hogy $\alpha, \beta, \ldots$ -ból áll, akkor $\alpha, \beta, \ldots$-n kívül ne tartalmazzon semmi mást, és mindegyik az $\alpha, \beta, \ldots$ közül legyen alkotó része.

37. §.

Ha minden egyes alkotó résznek, a melyekből A áll, valamije közös [egy másikkal], azt mondjuk, hogy A *folytonos*.

38. §.

Ha valamiről, *pl.* α-ról azt mondjuk, hogy *egyenlő* β-val, és az egyenlőséget nem határozzuk meg közelebbről, ez azt jelenti, hogy α eltekintve a helyétől (helyzetétől), nem különböztethető meg β-tól.

39. §.

Ha Q az $A, B, \ldots$-ből áll és q ugyanannyi részből, $a, b, \ldots$-ből; továbbá az egyenlő nevű betűk egyenlőket jelentenek: akkor Q-ról és q-ról azt mondjuk, hogy *részenként [tartalmukra vonatkozólag] egyenlők.* Ugyanezt az elnevezést megtartjuk, ha mind a kettő részeinek egyenlő száma a ∞-be nő és az, a mi Q-ból és q-ból fennmarad, ~ 0. A latinban ennek jelölésére szolgál $Q \doteq q$.

40. §.

Ugyanott A-ról az van mondva, hogy *mennyiség,* ha vagy nincsenek alkotó részei, vagy pedig [csak] olyan alkotó részei vannak, hogy mindenik vagy maga, vagy pedig valamely alkotó része, a másikkal vagy ennek valamely alkotó részével egyenlő. Ilyen *pl.* a tér, az idő, az egyenes, a kör, a csavarvonal, a sík, a gömb felülete, a henger felülete, a tér pontja, az idő pontja, a 0. Az idő pontja, habár neki semmi mozgás sem felel meg, az, a mi a leghevesebb mozgásokat (a festő tábláján) megörökíti. Az is lehetséges, hogy valamely idő minden pontjában, mely annak bizonyos pontját megelőzi és követi valami megvan, de abban az egyetlen pontban nincsen meg.

A 17. §-ból kitűnik, hogy olyan dolgok is, a melyek ebben az értelemben nem mennyiségek, a mennyiségre visszavezetve, *respectiv mennyiségekké* válnak.

41. §.

A szemlélet azt mutatja:

1. Hogy a térnek minden folytonos alkotó része két olyan részből áll, a melyekben valamely folytonos, mind a kettőtől elválaszthatatlan c a közös.

2. Hogy ez a c hasonlóképen két olyan részből áll, a melyekben ismét valamely folytonos, mind a kettőtől elválaszthatatlan d a közös.

3. Hogy ennek a d-nek alkotó részei között ismét olyan van, a mely maga is folytonos, de az, a mije a többivel közös, két alkotó rész nélküli [dolog], a melyeket *pontoknak* nevezünk, és semmi egyéb más.

c-t is, valamint minden alkotó részét, sőt mindazt, a mi ilyen részekből áll, *felületnek,* hasonlóképen d-t, valamint minden alkotó részét és mindazt, a mi ilyen részekből áll, *vonalnak* nevezzük. A pont tulajdonképen *térbeli pont,* és a szemlélet azt mutatja, hogy ilyenek a térben mindenütt vannak, és hogy mindannyian egyenlők.

Megjegyzések. 1. Egy minél finomabban meghegyezett irón és ennek nyoma szintén reávezet az ideális pontra és vonalra.

2. Valamely térbeli kontinuum akkor vonal, ha minden pontjában a pontnak véges számú útja nyílik; ha azonban minden pontjában a pontnak végtelen sok útja nyílik, és e mellett nem tartalmazza a térnek semmi alkotó részét: akkor felület.

3. A *vonalat egyszerűnek* nevezzük, ha egyik pontjában sem

nyílik a pontnak több mint két útja, és *idomnak* nevezzük, ha valamely pont oly módon írhatja le, hogy csakis az első helyére tér vissza. Ilyenek *pl.*: $\triangle$, 0,...

42. §.

Minthogy azonban a tér változhatatlan, azért egyetlen $\triangle$ sem fektethető valamely másikra a nélkül, hogy geometriailag megszerkesztenők a következőt. Egy visszapillantás az elvont térből a külső világba arra a kérdésre vezet, vajjon azok a különböző helyek, melyeket ugyanaz a test különböző időkben elfoglalt, egyenlők-e? Minthogy pedig a szemlélet szerint a válasz erre igenlő, megalkotjuk a *geometriai mozgathatót,* a melyben a testből nincsen meg semmi egyéb, mint a mozgathatóság és az, hogy ugyanabban az időben különböző helyeken nem lehet.

Ebből pedig származik a *kongruenczia axiómája,* t. i. hogy ha valamely ilyen mozgatható először A-val és azután B-vel esik egybe: akkor A egyenlő B-vel.

43. §.

Ha $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$,... pontok, akkor $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \ldots$ jelentse azokat változatlan helyzetükben, és $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \cdots \doteq \mathfrak{a}' \star \mathfrak{b}' \cdots$ jelentse azt, hogy abban a mozgathatóban, a melybe először $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$,... estek, azután $\mathfrak{a}'$ eshetik oda, a hol $\mathfrak{a}$ volt, és $\mathfrak{b}'$ oda, a hol $\mathfrak{b}$ volt, és így tovább, ha még több is van.

Ha pedig nincsen olyan a $\mathfrak{c}$-től különböző $\mathfrak{d}$ pont, hogy

$$\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \doteq \mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{d},$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{c}$ az $\mathfrak{ab}$-*re nézve egyetlen.*

44. §.

Gömbfelületnek ($\mathfrak{c}$-ből $\mathfrak{b}$-vel) nevezzük azoknak a $\mathfrak{p}$ pontoknak összességét, melyek bármelyike olyan természetű, hogy meghatározott $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ pontokra nézve általában $\mathfrak{c} \star \mathfrak{p} \doteq \mathfrak{c} \star \mathfrak{b}$. A szemlélet azt mutatja, hogy ez mindenütt egyenletes, folytonos, és elválaszthatatlanja a térnek, a melyet két alkotó részre oszt fel, a melyek közül az egyiket bezárja, a másik pedig kívüle marad köröskörül a végtelenig. És kívülről egyetlen pont sem juthat a belsőbe (vagy belülről kifelé) a nélkül, hogy rajta át nem menne. Az utóbbi bizonyos tekintetben mindazokra az esetekre terjeszthető ki, a melyekben az innenről és túlról van szó.

A bezárt [térrész] a felülettel együtt a *gömb; gömbfelület* alatt csak azt értjük, a mit az imént mondtunk.

45. §.

Ha A-nak minden két $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ pontja olyan természetű, hogy a térnek minden pontja, mely $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-re nézve egyetlen, benne van A-ban: akkor A, ha vonal, *egyenes*, ha felület, *sík*, ha pedig test, akkor, a tér (még pedig mindegyik egészében a végtelenig).

Megjegyzések. 1. Valamely $\mathfrak{ab}$ vonal (röviden) *egyenes*, ha $\mathfrak{a}$-tól $\mathfrak{b}$-ig nincsen vele egyenlő, a mely tőle különbözik.

2. *Irány*, az *idem per idem*. A legrövidebb út logikátlan. Az, hogy a kisebb b-nél, azt jelenti, hogy $a = b$-nek valamely alkotó részével. Hogyan lehet azonban valamely vonalról azt mondani, hogy kisebb valamely másiknál, ha nincsen olyan alkotó része, mely a másiknak valamely alkotó részével egyenlő? Sőt a hüvelyknyi átmérőjű körről is csak mint respectiv mennyiségről (17. §) állítható, hogy kisebb a Syrius-távolságnál.

3. *Síknak* nevezzük azoknak a $\mathfrak{p}$ pontoknak összességét, melyek mindegyike olyan természetű, hogy bizonyos két $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ pontra nézve (melyek [mindig] ugyanazok maradnak) $\mathfrak{a} \star \mathfrak{p} \doteq \mathfrak{b} \star \mathfrak{p}$; két sík metszését pedig egyenesnek nevezzük.

4. A következő §-ban ezeket más módon fogjuk előállítani, a mint a latinban történt; főleg azért, hogy nélkülözhessük azt [a feltevést], hogy a gömb véges mennyiség.

46. §.

Az egyenes és a sík előállítására axiomatice a következőket tételezzük fel, mely dolgok közül a legtöbbet egyebütt is hallgatólag feltételezni szoktak.

1. Egyenlő meghatározások alapján egyenlők származnak. Ez mind a geometriának, mind az arithmetikának egyik alapfeltevése.

2. Bármely pont bármely másikhoz haladhat mindavval együtt, a mibe beléesik.

3. Bármely $\mathfrak{c}$ pontnak és bármely térbeli határolt C-nek megfelelőleg van a $\mathfrak{c}$ középpontból olyan gömb, a mely C-t bezárja.

4. Ha az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ pontok a mozgathatóba esnek: akkor $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ az $\mathfrak{a}$ körül számtalan módon mozgatható (egészen visszatértéig is).

5. Ha a mozgathatónak $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ pontjai közül $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{a}'$-ba, $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b}'$-be és $\mathfrak{d}$ a $\mathfrak{d}'$-be esik és $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{d}$-t oly helyzetbe hozzuk, hogy $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}'$-be

és $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{a}'$-ba essék: akkor, ha $\mathfrak{d}$ az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül mozgatható volt, $\mathfrak{d}'$ is mozgatható a $\mathfrak{b}' \star \mathfrak{a}'$ körül.

6. Ha $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{d}$-t $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül mozgatjuk: akkor $\mathfrak{d}$-nek minden helyről két útja nyílik és nem több, t. i. egy előre és egy hátra felé, és mind a kettő egyenlő módon.

7. Ha a $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, ... pontok mindegyike mozgatható $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül: akkor összességük is mozgatható $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül és mindegyikük úgy viselkedik, mint a hogyan viselkednék, ha egyedül mozogna $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül.

8. Ha a $\mathfrak{c}$ és $\mathfrak{C}$ középpontokból leírt s és S gömbfelületeknek olyan g-jük közös, a mely köröskörül folytonos: akkor ez vonatkozással a $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$-re egyenletesen van meghatározva, úgy hogy $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül egészen visszatértéig oly módon mozgatható, hogy mindig önmagában marad.

9. Valamely az $\mathfrak{a}$ pontból elmozdított pont nem juthat valamely más $\mathfrak{b}$ pontba a nélkül, hogy előbb nem haladna egy darabig az $\mathfrak{a}$ középpont gömbfelületein keresztül a belsőkből mindig tovább a külsőkbe.

47. §.

A $\mathfrak{c}$ és $\mathfrak{C}$ középpontokból páronként állítsunk elő egyenlő s és S gömbfelületeket; még pedig először $\mathfrak{c}$-ből $\mathfrak{C}$-vel és $\mathfrak{C}$-ből $\mathfrak{c}$-vel, azután pedig mindig tovább terjeszkedve a végtelenig.

Ezen (s és S) párok mindegyikének okvetetlenül olyan valamije közös, a mi köröskörül folytonos. S-ből ugyanis valaminek kívül kell lennie s-en; mert különben S nek gömbje egészen beléesnék s gömbjébe, és így mint rész nem lehetne egyenlő az egészszel (és a másik gömb is mint rész beléesnék ebbe), úgy hogy a két gömbnek egybe kellene esnie, a minek lehetetlenségét azonnal kimutatjuk. Azonban S-ből valaminek s-en belül is kell lennie; mert különben S gömbje egészen s-en kívül esnék, habár $\mathfrak{c}$, a mely az első esetben S-ben, a többi esetekben pedig S-en belül van, mindig belül van s-en.

E szerint S-nek van valamely $\mathfrak{p}$ pontja s-en kívül és valamely $\mathfrak{p}'$ pontja ezen belül. Tehát minthogy S-ben valamely pont $\mathfrak{p}$-ből haladhat $\mathfrak{p}'$-ig, annak s-en át kell haladnia (44. §), a miből következik, hogy S-nek és s-nek, van valamijük, a mi közös. Ez a közös azonban nem lehet csak egyetlen pont vagy valami szakadozott; mert így S-ben $\mathfrak{p}$ eljuthatna $\mathfrak{p}'$-be, a nélkül, hogy s-en áthaladna. Ebből következik, hogy az [a közös] köröskörül folytonos, és hogy mint a $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$-re nézve egyenletesen meghatározottnak $\mathfrak{C} \star \mathfrak{c}$ körül gyűrűje van (46. §).

Hogy két egyenlő gömbfelületnek nincsenek különböző középpontjaik, a következő módon tűnik ki. Ha valamely s gömbfelületnek m középpontja valamely más m' pontba jut: akkor az s gömbfelület nem esik egybe első helyével. Legyen ugyanis σ a gömb m-ből a m'-mel. Ha s egybeesik első helyével, ismét az első eset áll elő és úgy, a mint m a m'-be jutott, innen egy új, m'-ből leírt σ segítségével juthat m''-be, és az első eset mindig visszatér. Az m pont azonban a tér bármely pontjába mehet, a mi nem történhetik másképen, mint ilyen σ-k segítségével. E szerint az s gömbfelület nem hagyhatná el helyét, és a térben csak egyetlen gömbfelület volna, a mely egyenlő s-sel, t. i. ő maga.

48. §.

Tekintsük először az első [gömbfelület-] párt, midőn $\mathfrak{c}$ az S-ben van, és a közös gyűrű szeletében, t. i. abban a szeletében, a melyben $\mathfrak{c}$ van, S-ben $\mathfrak{c}$-ből kiindulva haladjon valamely pont egészen a gyűrűig, és ennek az útnak minden pontjával gondoljunk a $\mathfrak{c}$-ből egy-egy gömbfelületet. Ezek majd $\mathfrak{c}$-től kezdve egészen a gyűrűig terjednek, és az, a mit előbb elmondottunk, érvényes mindegyikre nézve; mert $\mathfrak{c}$ benne marad S-ben, és S-ből mindaz, a mi előbb kívül volt s-en, kívül van a belsőkön [t. i. a $\mathfrak{c}$ körül leírt gömbfelületeken] is. E szerint az út minden pontjának van egy-egy gyűrűje és az egész, vonal mozoghat S-ben $\mathfrak{c}$ körül mindaddig, míg vissza nem tér (46. §, 7.).

Ha tehát S-ben valamely pontot $\mathfrak{c}$-ből elmozdítunk, útjában olyan $\mathfrak{p}$ pontra kell akadnunk, hogy a $\mathfrak{cp}$ út egyszerű vonal legyen, és $\mathfrak{c}$-től kezdve a pont mindig külsőbb gyűrűkbe jusson; mert annak, hogy az utat ugyanabban a gömbfelületben tegye meg, vagy belsőkbe térjen vissza, valahol először kellene megtörténnie. Ez a $\mathfrak{cp}$ [vonal] tehát $\mathfrak{c}$-től $\mathfrak{p}$-ig az S-ben mindig tágabb gyűrűket fog alkotni.

49. §.

Ha $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C} \star \mathfrak{f} \doteq \mathfrak{c} \star \mathfrak{C} \star \mathfrak{f}'$ (hol a betűk pontokat jelentenek): akkor (ha $\mathfrak{f}$ és $\mathfrak{f}'$ különbözők) $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C} \star \mathfrak{f}$ úgy mozgatható $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül eredeti helyére való visszatértéig, hogy közben $\mathfrak{f}'$-n menjen át.

Legyenek ugyanis S és s 2 gömbfelület $\mathfrak{C}$-ből és $\mathfrak{c}$ ből, mind a kettő $\mathfrak{f}$-val: akkor $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ mind a kettőben közös. A két gömb vagy egyenlő egymással, vagy pedig az egyik a kisebbik. Ha egyenlők: akkor S-nek van valamije, a mi az s-en kívül van; legyen az a $\mathfrak{d}$ pont.

Állítsunk elő $\mathfrak{c}$-ből olyan σ gömbfelületet, mely s és a $\mathfrak{d}$-nek $\mathfrak{c}$-ből való gömbfelülete között van. Ez a σ körülzárja s-t, és így S-nek és s-nek $\mathfrak{k}$ és $\mathfrak{k}'$ pontjait is; tehát S-nek $\mathfrak{d}$ pontja σ-n kívül, $\mathfrak{k}$ pontja pedig σ-n belül van. E szerint S és σ gyűrűt alkotnak S-ben (47. §), és (az egyenlő meghatározás következtében) $\mathfrak{k}$-nak és $\mathfrak{k}'$-nak a gyűrű ugyanazon az oldalán kell feküdniök.

Ha S és s nem egyenlők, legyen s a kisebbik, és $\mathfrak{c}$-ből állítsunk elő olyan σ' gömbfelületet, a mely S-sel egyenlő: akkor (úgy mint előbb) $\mathfrak{k}$ a σ'-n belül lesz, és S és σ' gyűrűt alkotnak.

Mindegyik esetben nevezzük a gyűrűt R-nek, azt a szeletet pedig, a hol $\mathfrak{k}$ és $\mathfrak{k}'$ vannak, z-nek és $\mathfrak{P}$ legyen R-nek valamely pontja. R-nek (a 48. § szerint) van olyan $\mathfrak{g}$ pontja, hogy a gyűrű egyik $\mathfrak{P}\mathfrak{g}$ részében $\mathfrak{P}$-től kezdve minden továbbra eső pont mindig tágabb és tágabb gyűrűt ír le S-ben, és ezek [a gyűrűk] mindannyian körülzárják a $\mathfrak{P}$ pontot. Vegyük fel a $\mathfrak{g}$-t a $\mathfrak{P}$-ből leírt olyan belső gömbfelületben, a mely z-nek valamely belső pontján megy át. Legyen a gyűrűben $\mathfrak{P}$-nek másik oldalán $\mathfrak{P}\mathfrak{g}' = \mathfrak{P}\mathfrak{g}$, és $\mathfrak{P}\mathfrak{g}$ minden a gyűrűben levő pontjához gondoljuk a megfelelőt $\mathfrak{P}\mathfrak{g}'$-ben. Minden $\mathfrak{g}$ pont gyűrűjéből egy rész z-be esik, a mint $\mathfrak{g}$ a z-n át $\mathfrak{g}'$-be megy, és $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{g}'$ közé eső semmi más ponton nem mehet át; mert különben valamely külső gömbfelületnek valamije közös volna valamely belsővel. Ugyanez érvényes $\mathfrak{P}\mathfrak{g}$ többi pontjaira nézve is.

Minden a z-be eső gyűrűrészt felezzünk. Haladjon ugyanis valamely pont $\mathfrak{g}$-ből $\mathfrak{g}'$ felé és valamely másik $\mathfrak{g}'$-ből $\mathfrak{g}$ felé, még pedig mind a kettő egyenlő módon: akkor ott, a hol találkoznak, van a felező pont. E felező pontok összessége egyszerű vonal; mert minden ívbe csak egy pontja esik, és valamely a felező pontokon áthaladó pont mindig külsőbb gömbfelületekbe lép.

Ez a vonal mind a két oldalon egyenletesen meghatározva áll a gyűrűn, és a gyűrű minden pontjában egyenlő módon állítható oly formán, hogy valamely az R-ben haladó pont S-ben magával viheti. Neve legyen λ.

A mozgatott λ-nak minden $\mathfrak{p}$ pontja vagy megmarad a helyén, vagy pedig a $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$-re nézve köröskörül egyenletesen van meghatározva, és e szerint gyűrűt alkot. λ-nak R-ben levő $\mathfrak{P}$ kezdetétől egy darabig λ-nak nem minden pontja maradhat nyugalomban; mert akkor λ-nak olyan $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{p}'$ pontjai volnának, a melyek körül az ezektől az R-ig terjedő rész köröskörül forgatva (t. i. $\mathfrak{p}\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{p}$ körül és $\mathfrak{p}'\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{p}'$ körül) a z szeletet írná le, a miből következnék, hogy $\mathfrak{p}\mathfrak{P} = \mathfrak{p}'\mathfrak{P}$ (azaz a rész [=] az egészszel).

E szerint R-től kezdve egy darabig mindig vannak gyűrűk

(168. o.). Ha pedig $\mathfrak{f}$-nak nincsen gyűrűje, alkalmazható reá a 30. § megjegyzése. Szükséges ugyanis, hogy valamely pontnak az S-ben $\mathfrak{P}$-től $\mathfrak{f}$-ig terjedő útjában olyan utolsó pont legyen, a mely előtt egészen $\mathfrak{P}$-ig mindig van gyűrű, és itten vagy az *utolsó gyűrű* van, vagy *legelőször nincsen gyűrű*.

Nem az utolsó; mert akkor ismét szelettel volna dolgunk, és az előbbenit alkalmazhatnók. Így tehát annak a pontnak nincsen gyűrűje, és az előbbi gyűrűk összessége egészen R-ig nem egyéb, mint a z szelet. Az a pont vagy $\mathfrak{f}$, vagy pedig valamely másik. $\mathfrak{f}$ nem lehet; mert $\mathfrak{f}$-n kívül $\mathfrak{f}'$ is benne van a z-ben, a melynek e szerint van gyűrűje, és így a kettőnek egyenlő meghatározása következtében szükséges volna, hogy $\mathfrak{f}$-nak is legyen gyűrűje. Így tehát más pont az, és mind $\mathfrak{f}$-nak, mind $\mathfrak{f}'$-nak van gyűrűje. E két gyűrűnek azonban azonosnak kell lennie; mert ha $\mathfrak{f}$ gyűrűje tágabb volna mint a $\mathfrak{f}'$-é, az utóbbinak is tágabbnak kellene lennie mint az előbbinek.

Ebből következik, hogy $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C} \star \mathfrak{f}$ úgy mozgatható $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül eredeti helyére való visszatértéig, hogy közben $\mathfrak{f}'$-n menjen át.

50. §.

Állítsunk már most elő (úgy mint a 47. §-ban) $\mathfrak{c}$-ből és $\mathfrak{C}$-ből páronként egyenlő gömbfelületeket; még pedig először $\mathfrak{c}$-ből $\mathfrak{C}$-vel és $\mathfrak{C}$-ből $\mathfrak{c}$-vel, és azután mindig tovább egészen a végtelenig.

Legyen először is az első gyűrű valamelyik $\mathfrak{a}$ pontjától számítva $\mathfrak{b}$-ben felezve, t. i. az által, hogy két az $\mathfrak{a}$-ból kiinduló a két oldal felé egyenlően mozgatott pont egymással itt találkozik. Ezek mindegyike ugyanis $\mathfrak{a}$ és a másik között van (168. o.). Hasonlóképen legyen $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{q}$ a két felerésznek a felező pontja.

Valamely $\mathfrak{f}$ pont pedig haladjon $\mathfrak{a}$-ból minden külső, a mindig tovább egymásra következő gömbfelület-párok alkotta gyűrűkön keresztül, és mindegyikre nézve kérdezzük azt, vajjon ez a pont egyetlen-e az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-re nézve? Ott, hol a válasz *tagadó*, $\mathfrak{f}$ az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül mozoghat (49. §). Ámde egyszersmind $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \doteq \mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{C}$; e szerint mind $\mathfrak{c}$, mind $\mathfrak{C}$ mozgatható $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül, és a mikor $\mathfrak{c}$ a $\mathfrak{C}$-be jut, $\mathfrak{C}$ ott lesz, a hol $\mathfrak{c}$ volt. Gondoljuk már most $\mathfrak{c}$ és $\mathfrak{C}$ e helyzetének megfelelőleg az előbbi schémát. Akkor a $\mathfrak{c}$ gömbfelülete a $\mathfrak{C}$-ébe esik és ezé az előbbiébe, és mindegyik gömbfelület-pár közös gyűrűje a régi marad. $\mathfrak{f}$ is ugyanabba a gyűrűbe esik, mint előbb; legyen, a hova esik, $\mathfrak{f}'$. Ez a $\mathfrak{f}'$ nem lehet azonos $\mathfrak{f}$-val; mert ekkor ez nem írna le gyűrűt $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül, és a válasz nem lett volna *tagadó*.

Legyen a $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$ ív felező pontja $\mathfrak{m}$, és ugyanazt a gyűrűt $\mathfrak{m}$-től számítva felezze $\mathfrak{i}$, és két felét $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$. Két pont $\mathfrak{m}$-ből kiindulva mozogjon egyenletesen $\mathfrak{m}\mathfrak{q}'\mathfrak{i}$-ben és $\mathfrak{m}\mathfrak{p}'\mathfrak{i}$-ben, és az egyenlő utak végpontjai legyenek x és x'. Ekkor $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star x \doteq \mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star x'$, valamint $\mathfrak{i} \star \mathfrak{m} \star x \doteq \mathfrak{i} \star \mathfrak{m} \star x'$. Így tehát, hogy ha $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{m}$ nyugalomban maradnak, az x mozoghat körülöttük.

Ha már mostan $\mathfrak{k}$ valamennyi gömbfelület-pár valamennyi gyűrűjén át a végtelenbe halad, és mindegyikben a fent $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-vel együtt nyugalomban maradó $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ pontokat és az egyik oldalon a $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}', \ldots$ pontokat, a másik oldalon pedig a $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}', \ldots$ pontokat és alant az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-vel együtt nyugalomban maradó $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}', \ldots$ pontokat elképzeljük: akkor valamennyi gyűrű összessége úgy mozoghat, hogy $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}', \ldots$ nyugalomban maradnak (46. §). Nevezzük ezt az utat I-nek.

A gyűrűk összessége folytonos; mert bármely kettő között számtalan sok gömbfelület van, a melyek belsőktől egészen odáig terjednek. Az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}', \ldots$ összesség egyszerű vonal; mert az épen elmondott itt is érvényes, és mert minden $\mathfrak{p}'\mathfrak{m}\mathfrak{q}'$ ívben csak egy pontja van, benne egyetlen pontnak sem nyílik harmadik útja. Épen olyan $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}', \ldots$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}', \ldots$ és a $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}' \ldots$ összesség, úgy hogy a gyűrűk összességét úgy szólván egy kereszt 4 egyenlő részre osztja.

51. §.

Bármely 2 pont, $\mathfrak{f}$ és $\mathfrak{g}$ között van olyan vonal, mint a milyen $\mathfrak{a}\mathfrak{m}\mathfrak{m}' \ldots$ Helyezzük ugyanis az $\mathfrak{f}$-ből $\mathfrak{g}$-vel való gömbfelületet az előbbeni schémába úgy, hogy $\mathfrak{f}$ az $\mathfrak{a}$-ba essék, és $\mathfrak{f}$-ből állítsunk elő olyan gömbfelületet, mely az odahelyezettet körülzárja. Az a pont, a melyet ez a párjával együtt az $\mathfrak{a}\mathfrak{m} \ldots$ vonal számára szolgáltat, kívül fekszik az előbbin, és így ez a vonal keresztülmegy az odahelyezett gömbön. Történjék ez $\mathfrak{r}$-ben, és $\mathfrak{g}$ mozogjon $\mathfrak{a}$ körül egészen $\mathfrak{r}$-ig.

52. §.

Minthogy $\mathfrak{a}\mathfrak{m} \ldots$ minden pontja egyetlen az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-re nézve, azért ugyanannak minden $\mathfrak{d}$-je is egyetlen bármely két $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$-re nézve. A nyugvó $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül végbemenő mozgás közben ugyanis egyidejűleg nyugalomban maradt $\mathfrak{m}' \star \mathfrak{m}$, és e szerint, ha $\mathfrak{d}$ az $\mathfrak{m} \star \mathfrak{m}'$ körül mozgatható volna, akkor $\mathfrak{m} \star \mathfrak{m}'$ körül mozoghatna is, és nem is mozoghatna.

53. §.

Ha már mostan az $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ vonalat fordítva helyezzük el oly módon, hogy $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{m}'$-be essék: akkor előbbi helyzetét fedi. Ha ugyanis $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$

valamely $\mathfrak{d}$ pontja $\mathfrak{mm}'$-en kívül, $\mathfrak{d}'$-be esnék: akkor $\mathfrak{m}' \star \mathfrak{m} \star \mathfrak{d}'$ mozgatható volna $\mathfrak{m} \star \mathfrak{m}'$ körül, és így (a 46. §, 5. szerint) $\mathfrak{m} \star \mathfrak{m}' \star \mathfrak{d}$ is mozgatható volna $\mathfrak{m} \star \mathfrak{m}'$ körül. A $\mathfrak{paq}$, $\mathfrak{p}'\mathfrak{mq}'$,... félgyűrűk minden egyes pontja ugyanis, és így összességük is mozgatható $\mathfrak{amm}'$... körül mindaddig, míg vissza nem tér; az előbbi $\mathfrak{mm}'$ vonal pedig beléesik ebbe az útba. Haladjon most már valamely pont a megfordított vonalban az előbbi $\mathfrak{m}$-től az előbbi $\mathfrak{m}'$-ig: akkor mihelyt e pont az előbbi $\mathfrak{mm}'$-ből kilépne, mozgatható pontba esnék.

54. §.

E szerint tehát ez a vonal $\mathfrak{m}$-től $\mathfrak{m}'$-ig és $\mathfrak{m}'$-től $\mathfrak{m}$-ig egyenlő alkotású; ha tehát két végéből kiindulva, két pont egyenlő módon halad egymással szembe, a felező pontban találkozik egymással. Minthogy $\mathfrak{m}$-ből elképzelhető egy gömbfelület $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-vel (t. i. ha $\mathfrak{a}$-t mint középpontot $\mathfrak{m}$-be helyezzük), legyen $\mathfrak{m}'$ az [a pont], hol a vonal a gömbfelületen átmegy. Az $\mathfrak{mm}'$ már mostan úgy legyen elhelyezve, hogy $\mathfrak{m}$ az $\mathfrak{a}$-ba és $\mathfrak{m}'$ a $\mathfrak{b}$-be essék, és a felező pontja legyen $\mathfrak{M}$.

Tartsuk meg azonban az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ első elnevezéseket és mozgassuk az $\mathfrak{Mam}$... vonalat az $\mathfrak{apq}$ gyűrű mentén (vagyis $\mathfrak{c} \star \mathfrak{C}$ körül) mindaddig, míg vissza nem tér: akkor a gyűrűk I összessége zárt; nevezzük az egészet P-nek. Ez mind a két oldalon, $\mathfrak{c}$ és $\mathfrak{C}$ felé egyenlő felszint mutat, és a teret 2 részre osztja, a melyek mindegyikében minden a P-n kívül fekvő pontnak a másikban egy egyenlő helyzetű felel meg.

55. §.

A P minden az ...$\mathfrak{bMa}$...-n kívül fekvő pontjának megvan a párja, a mely mint az egyik oldalban fekvő a másik oldalban fekvőnek megfelel. E szerint az egész P a ...$\mathfrak{bMa}$... körül egészen visszatéréséig mozgatható. Nincsen is a térnek olyan $\mathfrak{d}$ pontja, a mely nem esnék belé ebbe az útba. Legyen ugyanis az első P-nek egyik oldalából való: akkor a másik oldalon van egy vele egyenlő helyzetű, úgy hogy $\mathfrak{d}$ a $\mathfrak{b} \star \mathfrak{a}$ körül mozgatható, és a leirt gyűrű P mozgásakor átmegy $\mathfrak{d}$-n.

56. §.

A ...$\mathfrak{bMa}$... vonal *egyenes*, és P *sík*. A térnek ugyanis minden olyan pontját tartalmazzák, mely bármely bennük fekvő kettőre nézve egyetlen. [45. §.]

I. Legyenek ugyanis $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ annak a vonalnak pontjai: akkor $\overset{\frown}{\mathfrak{fg}}$

minden pontja $\mathfrak{f} \star \mathfrak{g}$-re nézve egyetlen, $\overline{\mathfrak{fg}}$-n kívül pedig nincsen olyan pont, mely $\mathfrak{f} \star \mathfrak{g}$-re nézve egyetlen. Ha ugyanis valamely ilyen a P-n kívül esnék, a másik oldalon volna még egy vele egyenlő helyzetű; ha pedig P-be esnék, minden az $\overline{\mathfrak{fg}}$-n kívül fekvő pont $\mathfrak{f} \star \mathfrak{g}$ körül mozgatható (52. §).

Megjegyzés. Ha $\mathfrak{ab}$ egyenes, akkor $\overline{\mathfrak{ab}}$ ugyanazt [az egyenest] jelentse, ha mind a két oldalon a végtelenbe terjed, $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}$ pedig szintén ugyanezt [az egyenest], ha az az $\mathfrak{a}$-ból indul ki, és azon az oldalon, a hol $\mathfrak{b}$ van, végtelen.

II. A P sík. Legyen ugyanis $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két tetszés szerinti pontja: akkor (az előbbeni szerint) minden pont, a mely $\mathfrak{A} \star \mathfrak{B}$-re nézve egyetlen, $\overline{\mathfrak{AB}}$-be esik, és az $\overline{\mathfrak{AB}}$ egyenes egyetlen pontja sem esik P-n kívül.

57. §.

Az $\mathfrak{Mam}$... egyenes az $\mathfrak{M}$ középpont bármely gömbfelületéből kilép. Állítsunk elő ugyanis $\mathfrak{C}$-ből olyan gömbfelületet, a mely az előbbit bezárja: akkor ez párjával együtt az $\mathfrak{M}\bar{\mathfrak{a}}$ vonalnak olyan pontját szolgáltatja, mely az első gömbfelületen kívül esik.

58. §.

Bármely egyenesek fedik egymást, ha $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ végeik egybeesnek. Essék ugyanis $\mathfrak{f}$ az $\mathfrak{M}$-be és $\mathfrak{g}$ valamelyik $\mathfrak{m}$-be. Ha valamelyik pont $\overline{\mathfrak{Mm}}$-en kívül esnék, a fenti eset állana elő. De a vonalban távolabbra sem eshetik, mint $\mathfrak{m}$; mert akkor a rész egyenlő volna az egészszel.

Ha tehát valamely pont a végtelen egyenesben tovább halad, ebben egy egyenest magával ragadhat; mert bármely pontból két egyenlő távolságú végpont között az egyenesek egybevágók.

59. §.

Bármely három $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{K}$ ponton átmegy egy sík, és csakis egy, ha a 3 pont nincsen ugyanabban az egyenesben.

Azokat egyenesekkel kötve össze, fektessük $\mathfrak{A}$-t $\mathfrak{M}$-be és $\mathfrak{B}$-t valamelyik $\mathfrak{m}$-be, és ha $\mathfrak{K}$ nem esik P-be, forogjon P az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül, míg eléri a $\mathfrak{K}$ pontot.

Húzzuk már mostan az $\mathfrak{AB}$ egyenes valamely $\mathfrak{v}$ belső pontjából a $\mathfrak{vK}$ egyenest, és $\mathfrak{vK}$-nak valamely $\mathfrak{w}$ belső pontjából mozogjon $\mathfrak{w}\bar{\mathfrak{v}}$ köröskörül az [$\mathfrak{ABK}$] háromszög mentén: akkor a mozgatott vonalnak minden pontja P-ben van, de P-nek is minden pontja ebbe az útba esik. Az ilyen pont ugyanis vagy a háromszögön kívül, vagy pedig azon belül van. A kívülről való egyenes a △ kerületén megy át; ha [az a pont] pedig belül van, akkor a $\mathfrak{w}$-ből kiinduló és rajta átmenő egyenes átmegy a kerületen.

60. §.

P bármely pontja körül bármely *G* egyenessel kör írható le, és ennek kerülete (avval együtt, a mit körülzár) önmagában mozgatható. Az előbbi △ ugyanis úgy helyezhető *P*-be, hogy $\mathfrak{w}$ az adott pontba essék. Valamennyi egyenes, mely az előbbeniben $\mathfrak{w}$-ből indult ki, legyen egyenlő *G*-vel: akkor végpontjaik összessége a kör kerülete. Jusson ugyanis $\mathfrak{vw}$, ha azt $\mathfrak{w}$ körül köröskörül mozgatjuk, az előbbi egyenesek mindegyikébe: akkor, ha az előbbenit ismételjük, az eredmény mindig ugyanaz lesz.

Így tehát *P* is minden pontja körül önmagában mozgatható, és ha *P*-ben valamely pont halad, a kört *P*-ben magával viheti.

Megjegyzés. (Az euklidikus rendszerben) csak még a gömbfelület olyan, hogy minden pontja körül önmagában mozgatható; de az antieuklidikus rendszerben még számtalan ilyen [felület] van. Egyetlen pontja körül önmagában mozgatható a kúp, a paraboloid és más efféle. Önmagukban, a nélkül, hogy valamijök nyugalomban maradna, elmozdíthatók az egyenes, a csavarvonal, a kör és más azok mintájára alakulók. Sőt úgy, hogy egészen önmagában maradjon (a nélkül, hogy valamije nyugalomban maradna) mozgatható az útja bármi tetszés szerintinek [t. i. alakzatnak], a melyet valamely külső tengely körül addig mozgattunk, míg eredeti helyére vissza nem tért.

61. §.

Az egyenes és a sík előállítása után a következő fogalmak alakítására kerül a sor.

Két síkról, és épen úgy egyenesről és síkról, és ugyanabban a síkban levő két egyenesről is azt mondjuk, hogy *párhuzamosak,* ha a végtelenbe kiterjesztve nem metszik egymást.

Az euklidikus rendszerben valamely ponton csak egyetlen olyan egyenes megy át, mely valamely egyenessel párhuzamos; különben számtalan van ilyen. Ha t. i. az $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ egyenest $\mathfrak{a}$ körül a $\mathfrak{bd}$ egyenesen addig mozgatjuk tovább, míg ezt először elhagyja, és ekkor $\widetilde{\mathfrak{ab}}'$-nek nevezzük, ezt $\mathfrak{ab}' \parallel\!| \mathfrak{bd}$-vel jelöljük. Ez az euklidikus rendszerben akkor történik, ha a belső szögek összege $= 2R$, és itt a $\parallel\!|$ jel helyébe a $\parallel$ jel lép.

62. §.

Mindazoknak az egyenlő egyeneseknek összességét, melyek ugyanavval a 𝔟𝔡 egyeneshez |||-ak, és melyek kezdőpontjainak összessége valamely F alakzat, *prizmatikusnak* nevezzük. E szerint az ilyen függ F-től és a |||-tól vagy ||-től. Ha F egyenes, akkor a || esetében parallelogramm származik, és henger akkor, ha F kör. Ha a ||| esetében az egyeneseket a végtelenbe meghosszabbítjuk, akkor végtelen közel jutnak egymáshoz a nélkül, hogy egymást elérnék; épen úgy, mint az örökkévalóságban valamennyi én közeledik egymáshoz, és a mindenek énjéhez.

Megjegyzés. Ha P, Q síkok, és $P \| Q$, és az először a P-be eső p-t (mely vonal vagy sík) tetszés szerint mozgatjuk mindaddig, míg Q-ba nem esik, csak [azt kötve ki], hogy mindig tovább is olyan a P-vel párhuzamos síkba essék, a melyben előbb még nem volt: akkor útja p-től és a mozgástól függ. Ha p egyenes, és kezdőpontja valamely a P-re merőleges egyenesben halad, végpontja pedig csavarvonalat ír le: akkor önmagában mozgatható felület keletkezik. Hasonlóképen lehet a végpont egyszersmind a P-vel párhuzamos olyan körnek középpontja, melynek radiusa kisebb az előbbi p-nél. Ha p vonal: akkor azok [a felületek], melyek egyenlő p-k révén P-től Q-ig származnak, csak bizonyos esetekben $\doteqdot$-k, de mindig ilyenek, ha p felület.

63. §.

Egymást metsző egyenesek révén származik a *piramidális, a szögös alakzat, a szög nélküli alakzat, a görbe,..., a megfordított egyenlőség, az általános geometriai egyenlőség,* és a || esetében *a hasonlóság.*

Az ugyanabból a pontból kiinduló egyenlő egyenesek összessége a *gömb*, és ha azok ugyanabban a síkban vannak, a *kör.* Azoknak az egyeneseknek összességét, a melyek valamely pontból kiindulva, valamely F alakzat minden pontjáig terjednek, *piramidálisnak* nevezzük. Ha F kör, és a pont annak síkján kívül van, kúp származik; ha pedig F egyenes, és a pont a síkban (F-en kívül) van, [a származó alakzat] △. Vannak tehát *felületszerű* és *testszerű piramidálisok.*

64. §.

Ha b olyan egyszerű vonal, mely alkotó része B-nek, ha B vonal, ha pedig B felület, alkotó része B és valamely végtelen sík metszésének, és 𝔭 olyan pont a b vonal végei között, K pedig olyan kúp, hogy a $\mathfrak{p}$ pont a K kúp csúcsába és b, eltekintve $\mathfrak{p}$-től, egészen a kúp belsejébe esik: akkor azt mondjuk, hogy B a $\mathfrak{p}$-ben *szöget* alkot, és bármely felületről is mondjuk, hogy az L vonal mentén szöget alkot, ha L minden pontjában szöge van.

Megjegyzés. Két egyenes *szöge* respectiv mennyiség (17. §) tekintettel arra, hogy a szárai között elterjedő ív hányadrésze az egész kerületnek, bármi is legyen a radius. Ha *negyedrésze,* akkor *derékszögnek* nevezzük. Azt mondjuk akkor, hogy az egyik szár, α *merőleges* a másikra, β-ra, és ezt így jelöljük: $\alpha \perp \beta$. Azt mondjuk továbbá, hogy a $\mathfrak{C}\mathfrak{M}$ egyenes $\perp$ P-re (54. §); mert $\mathfrak{C}\mathfrak{M} \perp$ a P síknak minden az $\mathfrak{M}$-en átmenő egyenesére. Ha pedig $\mathfrak{S}$ valamely a P-n kívül levő pont ugyanazon az oldalon, a melyen $\mathfrak{C}$ van: akkor azt a szöget, a mely a $\mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{S}$ szöget derékszöggé egészíti ki, veszszük a $\mathfrak{S}\mathfrak{M}$ egyenes és a P alkotta szög nagyságának. Ha pedig a P és Q síkokban az $\mathfrak{M}$ pont közös: akkor, ha $\mathfrak{M}\mathfrak{K} \perp Q$, a $\mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ szöget veszszük a P, Q síkok alkotta szög nagyságának, és ez egyszersmind $=$ avval a szöggel is, melyet az $\mathfrak{M}$-ből a P-ben és Q-ban azoknak metszésére merőlegesen húzott egyenesek alkotnak.

Valamely egyenes és a sík alkotta szögnek vehetnők az $\mathfrak{M}$-ből való gömbfelületen a vonaltól a síkig terjedő legrövidebb utat is, mely t. i. olyan, hogy (ugyanazon radius mellett) nála rövidebb [ilyen] út nincsen.

65. §.

Ha valamely alakzatnak egyetlen pontjában sincsen szöge: akkor *szög nélküli; görbének* pedig nevezzük a szög nélküli alakzatot akkor, ha semmi alkotó része sem egyenes vagy sík. Ívvel egyesített egyenes lehet ugyan szög nélküli, de nem görbe.

66. §.

Ha a szög nélküli A és B alakzatokban olyan k (pont vagy egyszerű vonal) a közös, hogy k minden pontjából [kiindulólag] van olyan a alkotó része A-nak és olyan b alkotó része B-nek, hogy a és b összessége folytonos és szög nélküli: akkor azt mondjuk, hogy A és B *érintik egymást k-ban.*

67. §.

Ha A olyan sík, mely a B alakzatot a $\mathfrak{p}$ pontban érinti, és valamely $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ egyenes $\perp$ A: akkor a $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$-ról mondjuk, hogy *merőleges*

B-re is. Sőt, ha valamely v vonal valamely C felületbe esik, és v minden pontjában merőleges állítható C-re: akkor e merőlegesek összességéről is mondjuk, hogy $\llcorner$ C-re.

68. §.

Ugyanabból a pontból kiinduló egyenesek kapcsolatban a szorzással. Ha a Q bizonyos pontokat, bizonyos alakzatokat, vagy bármit jelent a térben (akár valamely naprendszer helyét is), és ha minden egyenest, a mely ugyanabból a $\mathfrak{p}$ kezdőpontból kiindulva Q-ban végződik, [általánosan] x-nek, végpontját pedig $\mathfrak{q}$-nak, és x-et az állandó a mennyiséggel megszorozva y-nak nevezzük, és minden x-re a hozzá tartozó $y = ax$-et a $\mathfrak{p}$-től kezdve a $\mathfrak{p}\tilde{\mathfrak{q}}$-ra reárakjuk: akkor az y-oknak valamennyi a $\mathfrak{p}$-től különböző végpontjainak összességéről azt mondjuk, hogy *hasonló* Q-*val.* Ha azonban minden y-t x-nek másik oldalán veszszük fel: akkor azt [az összességet] *fordítva hasonlónak* nevezhetjük. Bizonyos y-oknak a $\mathfrak{p}$-től különböző végpontjainak összességéről és a nekik megfelelő $\mathfrak{q}$-knak összességéről azt mondjuk, hogy *homologok.*

Megjegyzések. 1. Ha Q $\triangle$: akkor, ha a nem $= 1$, valamennyi a homolog oldalokkal szemben fekvő szög általában csak Euklides axiómájának feltevése mellett egyenlő.

2. Ha valamennyi y-t a másik oldalon veszszük fel, még akkor is, ha $a = 1$, nem egybevágó alakzatok keletkezhetnek. Ha *pl.* Q a jobb kéz, amaz a bal kéz lesz, a melyre a jobb kézre illő kesztyű csak úgy húzható reá, ha megfordítjuk.

3. Könnyen kimutatható, hogy valami [a Q-val] egyenlő úgy létesíthető, hogy a Q minden pontjából valamely síkra bocsátott merőlegeseket a másik oldalon [önmagukkal] egyenlően meghosszabbítjuk. Ilyen az, mint a kép a sík tükörben.

4. Ez már mostan *fordított egyenlőség*, és *geometriailag egyenlőnek* nevezhető A és B akkor, ha az a mozgatható, mely A-val egybeesett, vagy magával B-vel, vagy legalább az említett képével eshetik egybe.

5. Ilyen módon a parallelepipedont átlósíkjai két egyenlő háromoldalú hasábra osztják fel, a melyek azonban csak bizonyos esetekben lehetnek egybevágók. $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{c}$ ugyanis legyen parallelogramm és $\mathfrak{f}$ az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ átlóinak metszéspontja; a párhuzamos élek pedig legyenek $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$. Az $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{A}\mathfrak{c}\mathfrak{B}$ háromszögek hasábjai csak akkor fedik egymást, ha a $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ sík merőleges az alap síkjára, és vagy $\wedge \mathfrak{C}'\mathfrak{C}\mathfrak{f} = R$, vagy $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}$. Hiszen, ha $\triangle\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{c}$

és $\triangle\mathfrak{ABC}$ alsó felszínét feketének, a másikat pedig fehérnek gondoljuk: akkor abban az esetben, ha $\mathfrak{AC}$ nem $= \mathfrak{CB}$, még ezek a háromszögek is csak úgy fedhetik egymást, ha különböző színek esnek egymásra. Ha azonban azok [az oldalak] egyenlők: akkor $\triangle\mathfrak{ABC}$ az $\mathfrak{AB}$ körül mozgatva, a fekete színnel is eshetik a másiknak fekete színére. Az első és mindegyik esetben $\mathfrak{ABC}$, miután azt $\mathfrak{f}$ körül addig mozgattuk, míg egyik pontja félkört írt le, fekete színű felszínével eshetik a másiknak fehér színű felszínére.

Ha most $\mathfrak{C}'\mathfrak{C} \perp \mathfrak{C}\mathfrak{c}$: akkor majd a mozgatott háromszög hasábja a másiknak helyére jut.

Ha azonban $\wedge\mathfrak{C}'\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ *pl.* $< R$, és $\mathfrak{AC} = \mathfrak{CB}$: akkor $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}$ a $\mathfrak{c}\mathfrak{C}$ meghosszabbításával a $\wedge\mathfrak{C}'\mathfrak{C}\mathfrak{c}$-vel egyenlő szöget alkot. E szerint, a mikor $\triangle\mathfrak{AB}\mathfrak{c}$, miután azt az $\mathfrak{AB}$ körül mozgattuk, fekete felszínével $\triangle\mathfrak{ABC}$ fekete színére esik, a magával vitt, most alulra került hasábnak $\mathfrak{c}$-ből kiinduló éle $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}$-nek meghosszabbításába esik, és így az alsó hasáb bele lesz tolható a felsőbe.

A többi eset lehetetlensége hasonló módon bizonyítható be; mindazonáltal az egyiknek kifordított burka egybevágó a másiknak burkával. Némely esetben a kifordítás is elővigyázatot igényel: koczkára gúla úgy tehető reá, hogy a csúcs alul kerüljön.

Szükséges, hogy minden szögnek csúcsszöge feleljen meg. Így a gömbön valamely $\mathfrak{ABC}$ gömbháromszögből származik egy másik [$\triangle$], $\mathfrak{abc}$, ha $\mathfrak{p}$-nek (68. §) a középpontot veszszük, $a = 1$, és az y-okat a túlsó oldalon veszszük fel. Ámde, ha $\triangle\mathfrak{ABC}$ nem egyenlőszárú, sohasem fedhetik egymást.

Két nem egyenlőszárú gömbháromszög, $\mathfrak{ABC}$, $\mathfrak{abc}$ (melyeknek egyenlő nevű oldalait egyenlőknek gondoljuk) egyáltalában csak akkor fedheti egymást, ha $\mathfrak{AC}$ és $\mathfrak{ac}$ ugyanabban a C legnagyobb körben fekszenek, és $\mathfrak{A}$ a C-ben úgy mozgatható $\mathfrak{C}$ felé, hogy az $\mathfrak{AC}$ ívet maga előtt tolva és $\triangle\mathfrak{ABC}$-t a gömbön magával ragadva, az alatt, míg $\mathfrak{A}$ az $\mathfrak{a}$-ba jut, ne menjen át $\mathfrak{c}$-n, ha mind a két háromszög ugyanazon félgömbön van; abban az esetben pedig, ha különböző félgömbökben vannak, előbb még $\mathfrak{c}$-n menjen át.

Szép gondolatot tartalmaz azonban a fent dicsért *kázáni irat* [annak megvalósítására], hogy részenként födjék egymást. Kört irat le, mely a csúcsokon megy át, és e kör gömbi középpontjából a háromszög csúcsaiig terjedő ívek segítségével előállított három egyenlőszárú háromszög födheti a másik háromszögben a megfelelőket. Ez természetesen csak akkor érvényes, ha a középpont a háromszög belsejébe esik; valószínű azonban, hogy az éles elméjű szerző az általános eset vizsgálatát az olvasóra bízta.

Ha $\mathfrak{AC}$ a szemünk előtt és $\mathfrak{B}$ fent, $\mathfrak{A}$ balra és $\mathfrak{C}$ jobbra fekszik, és $\mathfrak{AB} < \mathfrak{BC}$, az az ív pedig, mely a gömbfelületben alul eső $\mathfrak{K}$ középponttól a $\mathfrak{B}$ csúcsig terjed, az $\mathfrak{AC}$ ívet $\mathfrak{D}$-ben metszi: akkor $\wedge \mathfrak{BDC}$ tompa szög, és a $\triangle [\mathfrak{BDC}]$-ben nincsen két egyenlő oldal, $\mathfrak{BC} > \mathfrak{BD}$, $\mathfrak{BC} > \mathfrak{DC}$; $\mathfrak{DC} > \mathfrak{BD}$. Ezen az alapon a származott három egyenlőszárú $\triangle$ ellenére a részenkénti fedés a fent mondottak szerint nem sikerül.

Ámde minden egyes esetben a részenkénti fedés a következő módon sikerül: Felezzük $\triangle \mathfrak{abc}$ két szögét, $\mathfrak{a}$-t, $\mathfrak{b}$-t, és a $\mathfrak{k}$ pontból, a melyben a két felező ív egymást metszi, bocsássunk mind a három oldalra merőleges íveket, még pedig $\mathfrak{kd}$-t $\mathfrak{ab}$-re, $\mathfrak{kf}$-et $\mathfrak{bc}$-re és $\mathfrak{kg}$-t $\mathfrak{ac}$-re, és húzzunk egyszersmind ívet $\mathfrak{k}$-tól $\mathfrak{c}$-ig. Ezen a módon hat háromszög keletkezik, $\triangle \mathfrak{bdk} = \mathfrak{bfk}$, $\triangle \mathfrak{adk} = \mathfrak{agk}$, úgy hogy a három merőleges ív egymással egyenlő, a miből egyszersmind következik, hogy $\triangle \mathfrak{cfk} = \mathfrak{cgk}$; mert a $\mathfrak{kc}$ oldal közös, a szögek $\mathfrak{f}$-nél és $\mathfrak{g}$-nél derékszögek és az $\mathfrak{fk}$ és $\mathfrak{gk}$ merőlegesek egyenlők. Így tehát a $\mathfrak{c}$ szög is felezve van. E szerint e hat háromszög egyikében sincsen a külső oldalok mellett fekvő szögek között olyan, mely nagyobb a derékszögnél, és így csak az a kérdés marad fenn, hogy a $\mathfrak{k}$ közös csúcsnál fekvő hat szög milyen. A $\triangle \mathfrak{abc}$ bármelyik szögét felező ív a hozzá legközelebb eső merőlegesekkel egyenlő szögeket alkot; ha tehát mindegyik szögnek megfelelőleg ez a két merőleges a $\mathfrak{k}$ csúcsnál a $2R$-nél kisebb szöget alkot, akkor a hat háromszög szögei közül egyik sem nagyobb R-nél. Így tehát, minthogy a húrok alkotta szögek kisebbek, mindegyik háromszögnek megfelelőleg a húrok alkotta háromszög hegyesszögű, és ezért a bármelyik körül leírt körnek középpontja a pirámison belül, és így a gömbfelületen a $\triangle$-ön belül esik. E szerint 18 egyenlőszárú $\triangle$ keletkezik, a melyek a másikban, a $\triangle \mathfrak{ABC}$-ben megfelelőleg keletkezetteket elfedhetik.

Abban az esetben azonban, ha *pl.* $\mathfrak{kf}$ a $\mathfrak{kg}$-vel $\mathfrak{c}$ felé domború szöget alkot, ugyanaz nem lehetséges a többi kettő egyikénél sem, és ekkor $\mathfrak{fc}$ és $\mathfrak{gc}$ mindegyike nagyobb a negyedkörnél. Ha $\mathfrak{c}$-t polusnak veszszük, $\mathfrak{k}$ a $\mathfrak{c}$ körül leírt legnagyobb kör megállapította alsó félgömbfelületbe esik, és $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ legyenek azok a pontok, a melyekben az a legnagyobb kör a $\mathfrak{ca}$ és $\mathfrak{cb}$ íveket metszi, az a pont pedig, a melyben ezt a kört a $\mathfrak{ck}$ ív metszi, legyen $\mathfrak{p}$. Ezen a módon négy derékszögű háromszög keletkezik: $\mathfrak{kgm}$, $\mathfrak{mpk}$, $\mathfrak{kfn}$, $\mathfrak{npk}$, a melyek mindegyikének minden oldala kisebb a negyedkörnél. Ugyanis $\mathfrak{kf}$, $\mathfrak{kg}$, $\mathfrak{pm}$, $\mathfrak{pn}$, $\mathfrak{pk}$ és $\mathfrak{mp}$, $\mathfrak{fn}$ kisebbek, és minthogy $\mathfrak{km}$, $\mathfrak{kn}$ átfogók,

$$\cos \mathfrak{km} = \cos \mathfrak{kg} \,.\, \cos \mathfrak{gm},$$

tehát $\mathfrak{km}$ és hasonlóképen $\mathfrak{kn}$ is kisebb a negyedkörnél. Így tehát ezekben a háromszögekben nem fordul elő a domború szög esete, úgy hogy a fent mondottak a felső háromszögekre is érvényesek. Hogy $\mathfrak{kg}$ kisebb a negyedkörnél, abból tűnik ki, hogy ha a $\mathfrak{c}$-nél levő félszögnek a másik polusnál, a $\mathfrak{c}'$-nél megfelelőt α-nak nevezzük: akkor

$$1 : \sin\alpha = \sin \mathfrak{c}'\mathfrak{k} : \sin \mathfrak{gk},$$

és így

$$\sin \mathfrak{gk} = \sin\alpha \sin \mathfrak{c}'\mathfrak{k},$$

a mi <1.

A mi a nagyságot illeti, az $\mathfrak{ABC}$ és $\mathfrak{abc}$ háromszögek egyike sem lehet nagyobb a másiknál; mert különben az utóbbinak is nagyobbnak kellene lennie az előbbinél. A mi pedig a fedést illeti, bármely gömbi alakzatok tetszés szerinti kicsiny egyenlőszárú háromszögekre bonthatók fel, és ha az, a mi mind a kettőből fennmarad, ~ 0, akkor végszerütlenül részenként $\equiv$-k. Ugyanez alkalmazható testekre és respectiv mennyiségekre is.

69. §.

Minthogy a sík, mely a végtelen teret két egyenlő részre osztja fel, tiszta kilátást nyújt, a vizsgálódó szem egy darabig ide bocsátkozik le, hogy azután ismét visszatérjen.

A síkban először az *egyszerű*, azután az *összetett mozgás* jő tekintetbe. Az elsővel akkor van dolgunk, ha valamely pontnak minden mozgása előbb fejeződik be, mielőtt valamely másiknak a mozgása kezdődnék; a másodikkal pedig akkor, ha valamely pont mozgása közben valamely olyan alakzatban, melyet az magával ragad, valamely másik pontot is mozgatunk. Mindent ugyanis a pont mozgásával intézhetünk el. A síkban t. i. valamely pontot egyenesben, vagy pedig másképen valamely pont körül mozgathatunk, abban annak bármely pontjához juthat el, és mindent, a mibe beléesik, magával ragadhat. Összetett [a mozgás] akkor, ha az alatt, míg valamely pont az x utat írja le, az avval ragadott merőlegesben valamely másik pont az y utat írja le, hol y az x-nek függvénye, és az y-ok végpontjainak összessége különféle lehet. Ezeknek magyarázatára a következő szolgáljon.

I. Ha az $(\alpha)x-(\beta)y=0$ egyetlen olyan tagot sem tartalmaz, mely nem tartozik az ax^py^q képlet alá (hol a állandót, 0-t vagy más számot, p és q mindegyike pedig 0-t vagy valamely $+$ egész számot jelent), és legalább egy tagban, melynek állandó tényezője nem 0, $p+q=m$: akkor arról a vonalról, melyet az y-ok végpontjai szolgáltatnak, azt mondjuk, hogy *m-edrendű*. Így az egyenes *elsőrendű*, a kör *másodrendű* vonal. Valamennyi kúpszelet is 2-odrendű vonal, és minden 2-odrendű vonal kúpszelet.

II. Ha két függvény, y és Y ugyanazokra az x-ekre nézve az l és L vonalakat szolgáltatják, és ha $x = \alpha$, minden k-ra nézve (mely valamely $+$ egész számot jelent 1-től h-ig bezárólag)

$$\partial^k Y = \partial^k y, \quad \text{de} \quad \partial^{h+1} Y \quad \text{nem} \quad = \partial^{h+1} y:$$

akkor azt mondjuk, hogy az L és l vonaloknak *érintése* az $x = \alpha$-hoz tartozó ordináta végpontjában *h-adfokú.*

Be van bizonyítva, hogy az egyenes érintése [általában] csak elsőfokú lehet, a köré azonban másodfokú is (de magasabb fokú nem), és ekkor radiusáról mondjuk, hogy az érintési pontban a görbe *görbületi sugara.* Ha az egyenes érintő, akkor közte és az érintett között egyenest nem húzhatunk; hasonlóképen az említett kör és az érintett görbe között nincsen kör.

III. Ha valamely egyenesnek és görbének semmije sem közös és mindazonáltal köztük egyetlen egyenest sem hosszabbíthatunk meg a végtelenig: akkor amazt *asymptotának* nevezzük. Két görbe is asymptotikus módon közeledhetik egymáshoz, ha az ugyanazoknak az abszczisszáknak megfelelő ordináták különbsége $\to 0$.

IV. Valamely v görbe valamennyi pontjához tartozó görbületi sugarak végpontjainak V összessége *v-nek evolutája,* és V a *v-nek evolvense.*

V. Ha mind az érintő egyenest, mind az erre (az érintési pontban) merőleges görbületi sugarat az abszczissza-vonalig meghosszabbítjuk, akkor az érintési ponttól egészen az abszczissza-vonalig az elsőt *tangensnek,* a másodikat pedig *normálisnak* nevezzük; továbbá az abszczissza-vonalat az érintővel való metszésétől kezdve az ordinátáig *subtangensnek,* s-nek, és a normálissal való metszéspontjától kezdve [az ordinátáig] *subnormálisnak* nevezzük.

VI. Ha y' a merőleges az $x \pm \dot{x}$ abszczissza végétől egészen az érintőig: akkor

$$s : y = (s \pm \dot{x}) : y'.$$

Be van bizonyítva az is, hogy

$$s = y : \partial y,$$

és így

$$y' = y \pm \dot{x} \partial y.$$

Minthogy azonban

$$s : y = 1 : \operatorname{tang} v,$$

a hol v az érintő és s alkotta szöget jelenti,

$$\operatorname{tang} v = \partial y.$$

Ez nemcsak az érintő helyzetét mutatja a görbe minden pontjában, hanem a Taylor-féle sor segítségével a görbe menetét is. Ha ugyanis $y=(F)x$, akkor

$$(F)(x\pm\dot{x})=y\pm\dot{x}\mathfrak{d}y+\dot{x}^2\mathfrak{d}^2y:2\ldots;$$

be van pedig bizonyítva, hogy $\dot{x}$ olyan kicsinynek vehető, hogy minden tag nagyobbá váljék valamennyi utána következőnek összegénél. Ez alól csak egyes pontok mutatnak kivételt, a melyekben a vonalnak valami különös tulajdonsága van. Ha már mostan a $\mathfrak{d}^k y$-t rövidség kedvéért $\mathfrak{d}^k$-val jelöljük, és m valamely az 1 és n között levő egész számot jelent, n pedig páros szám: akkor, ha x értéke olyan, hogy nincsen olyan $\mathfrak{d}^m$, a mely nem 0, és $\mathfrak{d}^n$ $\vdash\!\!+\!\!\dashv$ és nem 0, a vonal az abszczissza-vonalról nézve domború, homorú pedig akkor, ha $[\mathfrak{d}^n]$ $\vdash\!\!-\!\!\dashv$. Láttuk ugyanis, hogy

$$y'=y\pm\dot{x}\mathfrak{d}y,$$

és így, ha a sornak többi része $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, akkor a görbe az érintő felett vonul el, és alatta, ha $\vdash\!\!-\!\!\dashv$. Ha már mostan *pl.* $n=2$ és $\mathfrak{d}^2$ $\vdash\!\!+\!\!\dashv$: akkor akár $\dot{x}$-re, akár $-\dot{x}$-re nézve [a sor többi része] ép olyan; mert $(-x)^2=x^2$. Így tehát mind a két oldalon $\vdash\!\!+\!\!\dashv$-ot nyerünk, ha $\mathfrak{d}^2$ $\vdash\!\!+\!\!\dashv$, és $\vdash\!\!-\!\!\dashv$-ot, ha $\mathfrak{d}^2$ $\vdash\!\!-\!\!\dashv$, ha t. i. y értéke mind a két oldalon valós, különben pedig csak azon az oldalon, a melyen az értéke ilyen.

Az érintő azonban a $\mathfrak{d}$-tól függ; mert

$$\operatorname{tang} v=\mathfrak{d}y.$$

Ha $\mathfrak{d}=1$, akkor $v=R:2$; ha $\mathfrak{d}=\infty$, akkor $v=R$; ha $\mathfrak{d}=0$, akkor az érintő $\parallel$.

A *maximum* vagy *minimum* x-nek olyan értékét követeli, a melyre nézve $\mathfrak{d}$, ha nem ∞, egyenlő 0-sal (habár a $\mathfrak{d}=0$-ból még nem lehet következtetni maximumra vagy minimumra). Ugyanis [ebben az esetben]

$$(F)(x+\omega)-(F)x, \quad \text{valamint} \quad (F)(x-\omega)-(F)x$$

úgy származik $(\omega^2:2)\mathfrak{d}^2(F)x$-ből, hogy olyan mennyiséget csatolunk hozzá, mely nála kisebbé válik, ha $\omega\rightharpoondown 0$. Maximum vagy minimum akkor is állhat be, ha $\mathfrak{d}=\infty$. Az ezekhez tartozó x értéket az első esetben a $\mathfrak{d}=0$-ból, a második esetben pedig az $1:\mathfrak{d}=0$-ból határozzuk meg. A $\mathfrak{d}=1:0$-ból ugyanis származik $1:\mathfrak{d}=0$. Vajjon azonban erre az α értékre nézve maximum vagy minimum áll-e be, azt igen kicsiny ω-val próbáljuk ki; t. i. úgy, hogy y-ba α helyébe $\alpha\pm\omega$-t helyettesítjük.

Legyen már most $x = p$-re nézve $y = q$, és $\mathfrak{p}$ legyen q-nak végpontja. Ha a ∂-nak csak egyetlen értéke és a görbének két olyan $\mathfrak{p}$-ből eredő ága van, mely mind a kettő az abszczissza-vonalról nézve domború, vagy mind a kettő homorú, vagy pedig az egyik domború, a másik homorú és mind a kettő q-nak ugyanarra az oldalára esik: akkor azt mondjuk, hogy az alakzatnak $\mathfrak{p}$-nél *csúcsa* van. Ha azonban az utóbbi esetben az egyik ág q-nak egyik oldalára, a másik pedig annak másik oldalára esik, akkor *inflexióról* beszélünk, és $\mathfrak{p}$-t *fordulópontnak* nevezzük. Mindezekben az esetekben $x = p$-re nézve $\mathfrak{p}$-ben mind a két ágnak az érintője ugyanaz. A *csúcsnak* két faja van a szerint, a mint mindegyik [ág] a másik felé a domború oldalát fordítja, vagy pedig ezt csak az egyik teszi, és az utóbbi esetet kivéve, mindegyiknek két esete van a szerint, a mint az abszczissza-vonalról nézve domborúak vagy homorúak.

Inflexió nem lehetséges, ha a fentebbi ∂^n nem 0, mert különben mind a két oldalon domborúság vagy mind a két oldalon homorúság mutatkoznék. Ámde *csúcs* sincsen, ha $\partial^n = 0$.

Annak eldöntésére pedig vajjon az egyik ág-e vagy a másik a domború vagy a homorú, (VI szerint) ∂^2-be egyszer $p+\dot{x}$-et és a másik ágnak megfelelőleg $p-\dot{x}$-et helyettesítünk. Lehetséges, hogy az egyik oldalon képzetest és a másikon két értéket nyerünk.

Ha a ∂-nak $x = p$-re nézve különböző értékei vannak: akkor $\mathfrak{p}$ a különböző érintőkkel ellátott ágakra nézve *többszörös pont.*

Van olyan függvény is, mely x bizonyos értékére nézve csak elszigetelt pontot szolgáltat.

Mindezeket *singularis pontoknak* nevezzük.

Megjegyzendő, hogy ha *pl.* $y = \sqrt{x}$ (a mi azt a parabolát szolgáltatja, melynek parameterje $= 1$) és az a kérdés döntendő el, vajjon a felső ág domború-e vagy homorú: akkor itt y $\vdash\!\!\!\!+\!\!\!\!\dashv$, és ezért szükséges, hogy

$$\partial^2 = -(1:4)\,x^{\frac{-3}{2}}$$

-ben a gyök az x^{-3}-ból pozitivnak vétessék, és az alsó ágnál

$$\partial^2 = (1:4)\,x^{\frac{-3}{2}}$$

-ben $\vdash\!\dashv$ nak. Így tehát mind a kettő $\vdash\!\dashv$ és mind a kettő tekintettel az abszczissza-vonalra homorú. Ha $x = 0$, akkor $\partial^2 = \infty$, a mi sem domborút, sem homorút nem szolgáltat. Ha x értéke $-\dot{x}$, ∂^2 képzetes, ha pedig $\dot{x}$ [$\vdash\!\!\!\!+\!\!\!\!\dashv$] akkor valós.

Példák:

$$y = b+x^{\frac{3}{2}}, \quad y = b+x^{\frac{2}{3}}, \quad y = b-x^{\frac{2}{3}}, \quad y = x^2+x^{\frac{5}{2}}$$

$x=0$-ra nézve több faját szolgáltatják a csúcsnak. A három első szolgáltatja az első fajt, a negyedik a második fajt. Az elsőnek és negyediknek megfelelőleg $\mathfrak{d}=0$, a másodiknak és harmadiknak megfelelőleg ∞, és így az előbbieknél az érintő párhuzamos, az utóbbiaknál pedig merőleges. A három első esetben $\mathfrak{d}^2=\infty$, a negyedikben pedig $=2$, ha $x=0$, és a két ág az utolsó esetben a q ordinátának ugyanarra az oldalára esik, a másik oldalon pedig képzetest nyerünk.

A negyedik esetben x-nek bizonyos értékére nézve $\mathfrak{d}^2=0$, és itt fordulópont van.

A második esetben minimum és a harmadikban maximum áll elő a $\mathfrak{d}=\infty$-ből; ámde a $\mathfrak{d}=0$-ból $y=b+x^2$-nek (a mely parabolát szolgáltat, az abszczissza-vonalat [ugyanis] az előbbire merőlegesnek vettük föl) a b minimuma származik.

$y=\sqrt{x^3-x^2}$ az $x=0$-ra nézve elszigetelt pontot szolgáltat.

$y=\sqrt{x^2-x^4}$* az $x=0$-ra nézve többszörös pontot szolgáltat és egy ∞-alakú vonalat.

Az összetett mozgás sokféle lehet. Az előbbiben *például* y az abszczissza-vonallal szöget alkothat, a mely állandó vagy változó lehet. Mozgatható valamely vonal egyik vége, a c körül a cp $=1$ radiussal leírt körön is, és ama vonalban egy pont. Ha ennek útját y-nak és a mozgatott vonalnak a körrel közös pontjának útját u-nak nevezzük: akkor y bizonyos módon függhet u-tól. Ha *pl.* $y=au$, akkor az *Archimedes-féle spirálist*, ha $y=a^u$, *Bernoulli Jakab spirálisát* nyerjük, ki, miután fölfedezte, hogy ez a vonal egyenlő evolutájával, meghagyta, hogy azt a «*Haec eadem mutata resurget*» felirással sírkövére véssék. Ilyen koordinátákkal, melyeket *poláris koordinátáknak* nevezünk, más görbék is kifejezhetők.

70. §.

Most már az előbbeni §-ban kijelölt úton tovább haladva, a síkban először az egyszerű mozgás vizsgálatára kerül a sor, még pedig először csupán a *vonalakra*, azután pedig a *területre*.

A vonalak kezdődnek az egyenesekkel, és azután a körök csatlakoznak hozzájuk. Először is két egyenes, azután több. Először az ugyanabból a pontból kiindulók. Ilyen kettő szöget alkot (negyed, nagyobb, kisebb). Egy harmadikkal $\triangle$-et alkotnak. Ha több van, a merőlegestől kezdve nőnek, és a $\wedge \dot{-} 0$. Vajjon azonban a harmadikkal metszettek metszik-e egymást vagy sem? ez a kérdés az, a mely

* [Az eredetiben a $\sqrt{}$ hiányzik.]

a czímlapon szerepel és a melyről alább még egyet-mást elmondunk. Annak bebizonyítása, hogy a háromszögek egyenlőségének általában csak négyféle feltétele van. Az oldalok és szögek egymástól való függése, a mihez mindjárt a hasonlóság után röviden és könnyűséggel a kiegészítésre vonatkozó főtételek járulhatnak hozzá. Mindezeket mostan az euklidikus rendszerben értjük.

Négy egyenes. Vagy egyetlen pár sem $\parallel$, vagy csak egy pár, vagy pedig több. Ha csak egy ilyen pár van, abból származik a háromszögek hasonlósága. Ennek ötféle feltétele van, melyek mindegyike elegendő. *Szorzás, osztás, négyzetgyökvonás* egyenesekkel, továbbá $c^2 = a^2 + b^2$, hol a, b a befogók és c az átfogó.

Egyenes és kör. A legkisebb metszés, a legnagyobb metszés. Ugyanabból a belső, külső vagy kerületi pontból kiinduló több egyenes kapcsolatban a körrel. Kerületi szögek. A sokszögek származása, szerkesztésük, a mely a *GAUSS-féle elmélettel* kiegészíthető.

Kör kapcsolatban körrel. A legkisebb metszés, a legnagyobb metszés.

Több egymást érintő kör. Szög nélküli alakzatok; itt egyeneseket is hozzávéve.

Ezek után következik a geometriailag szerkesztetteknek *területe.* Először is a derékszögű négyszögről, melynek alapja b, magassága a, be van bizonyítva, hogy az a és b vonalok szorzata olyan egyenes, mely annyiszorosa az egyenes egységének, a hányszorosa a derékszögű négyszög annak a négyzetnek, a melynek oldala amaz egység. Továbbá be van bizonyítva, hogy valamennyi egyenlő magasságú [és egyenlő alapú] parallelogramm egymással $\equiv$; még pedig végszerűen egyenlő (39. §). Hasonlóképen ilyenek mindazok a háromszögek, melyeknek alapjaik és magasságaik egyenlők. Az egyenlő részek megszerkesztve kerülnek bemutatásra.

Be van bizonyítva továbbá, hogy ha a, A, b, B egyenesek és az $A \cdot a$ egyenes egyenlő a $B \cdot b$ egyenessel: akkor, ha $\wedge Aa = \wedge bB$, az A, a-ból alkotott parallelogramm $\equiv$ (még pedig végszerűen egyenlő) a B, b-ből alkotott parallelogrammal. Itt is a megfelelő részek megszerkesztetnek, és ugyanazon szabály szerint szerkesztetnek meg azok a részek, a melyekből az átfogó négyzete összerakható a befogók négyzeteiből. Ugyanazon a módon történik minden területnek átalakítása olyan derékszögű négyszögbe, a melynek magassága az egyenes egysége (17. §).

Végül következik a *kör területe* és egyszersmind hossza is.

Ezek után következik az *összetett mozgás* a síkban. Először is olyan vonalok, melyeknek minden pontja geometriai úton megszerkeszthető, de valamennyi sohasem.

Tulajdonságaik, területük és hosszúságuk.

71. §.

Végre a síkból visszatérünk a térbe. Itten először a síkra kerül a sor egy és azután több egyenessel együtt, azután pedig több síkra, szintén egy és több egyenessel együtt.

Itt is először az *egyszerű mozgás* lehet a vizsgálat tárgya: t. i. a mozgás *egy pont körül* és azután a mozgás két pont körül. Az első eset alá tartozik, ha valamely végtelen egyenest egyik pontja körül valamely L vonalon mozgatunk, és ide számítható az az eset, ha ama pont távolsága $\dot{-}\!\!-\infty$, a mikor a vonalon mozgó valamennyi egyenes $\|$. Az első eljárásból származik a *piramidális*, a mikor, ha L kör, kúp származik, a második szolgáltatja a *prizmát*.

Két pont körül. Ha két egyenes egymást metszi, és az egyik a másiknak két pontja (tehát a másik körül) forog: akkor sík származik, ha a metszés szöge R; máskülönben két a csúcsaikkal összeillesztett kúp. Ha a mozgatott [egyenes] $\|$, henger származik, és ha félkör, akkor *gömbfelület*, mely úgy mint a sík a kutató szemnek külön mezőt tár fel; mert (az euklidikus rendszerben) az egyedüli [felület], melynek a síkkal az a közös tulajdonsága van, hogy minden pontja körül önmagában mozgatható. Ide tartozik a gömbbe beléirt testeknek mindenféle fajtája.

A két pont körüli mozgás révén különfélék származnak. *Pl.* a paraboloid, az ellipszoid stb.

Ezek térfogata és felszíne is tárgyaltatik.

Végre tárgyalásra kerülnek azok az alakzatok, a melyek a származottaknak és a síknak, valamint a származottaknak egymás között való összetétele révén keletkeznek.

A térfogat annak az egyenlőségnek alapján, melyet a 39. §-ban $\doteq$-vel jelöltünk, még pedig mindenütt (a hol csak lehetséges és tudtuk) a végszerűvel bizonyíttatik be. A parallelepipedonoknál ez lehetséges volt, de a háromoldalú pirámisnál csak a végszerűtlen egyenlőség van kimutatva. Az a két háromoldalú hasáb, a melyre a parallelepipedon oszlik, azokban az esetekben, ha nem egybevágó, szintén részenként rakható össze.

A térfogatszámítás a parallelepipedonokéval kezdődik, mint a síkban [a területszámítás] a parallelogrammokéval. Be van bizonyítva, hogy, ha a hosszúság, szélesség, magasság A, a, α, akkor az az egyenes, mely mint e három egyenes szorzata áll elő, annyiszorosa az egyenes egységének, a hányszorosa a parallelepipedon annak a koczkának, a melynek vonalas oldala az egyenes egysége. Ha pedig B, b, β is egyenesek, és az $A \,.\, a \,.\, \alpha$, $B \,.\, b \,.\, \beta$ szorzatok egyenlő egyenesek, akkor az A, a, α-ból alkotott parallelepipedon végszerűen $=$ a B, b, β-ból alkotott parallelepipedonnal, ha szögleteik egyenlők, pl. derékszögűek.

Ily módon történik minden testnek is visszavezetése egyenesre (mint előbb a területeké), t. i. olyan parallelepipedon hosszúságára, melynek alapja az egység négyzete...

A parallelepipedonról lehet következtetni minden hasábra, a mint a háromoldalú gúláról minden más gúlára. A háromoldalú piramisból parallelepipedon összerakása a latinban oly módon történik, hogy a hátramaradó rész $\rightharpoondown 0$.

71. [*a*] §.

Azok után, a miket az egyszerű mozgás hoz létre, következik az összetett [mozgás]. Az első esetben valamely pont a mozgatott egyenesben bizonyos törvény szerint haladhat tovább, és megvizsgálandó annak útja, akár bizonyos pont körül, akár pedig első helyzetével párhuzamosan mozog az egyenes. A második esetben is, a mikor a mozgás két pont körül megy végbe, e mozgás mint egyenletes vagy más valami módon lehet meghatározva, és lefolyása közben a mozgatottban valamely pont bizonyos törvény szerint mozgatható (*pl.* az átmérője körül mozgatott körben); vagy pedig a fentebbi sík (69. §) mozgatható az ordinátában mozgatott ponttal együtt az abszczisszavonal körül. Az is lehetséges, hogy a pont mozgó rendszert visz magával; és vég nélkül különféle mozgások tehetők össze.

Ámde a pontot a térben általánosságban a következő módon határozzuk meg: Az E síkban két végtelen egyenes, X és Y derékszög alatt messe egymást $\mathfrak{a}$-ban, és $\mathfrak{a}$-ban a Z egyenes álljon merőlegesen E-re. Z és X síkját jelöljük X'-szel és Z és Y síkját Y'-nal: akkor mind X', mind Y' merőleges E-re. Ezeket, valamint Z-t is gondoljuk végteleneknek. A teret nyolcz egyenlő részre osztják fel. Világos, hogy minden pontot meghatároznak az E, X', Y'-tól való távolságai, ha e három sík mindegyikétől az egyik oldalon a távolságot $\vdash\!\!\!+\!\!\dashv$-oknak és a másikon $\vdash\!\!-\!\!\dashv$-oknak veszszük. Ugyanaz érvényes más pontra nézve is, tehát az egyenes két végére és minden alakzat minden pontjára nézve is.

Pythagoras tételével is könnyen bebizonyítható, hogy ha $\mathfrak{p}$ valamely pont, és x, y, z-t a fentebbi (133. o.) értelmében veszszük: akkor

$$\mathfrak{ap}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

t. i. az egyenes négyzete egyenlő az X, Y, Z egyenesekben előállított vetületei négyzeteinek összegével. Ugyanaz érvényes a $\mathfrak{pq}$ egyenesre nézve is, hol $\mathfrak{a}$ helyébe valamely más $\mathfrak{q}$ pontot tettünk.

Ha t. i. B egyenes vagy sík, az A minden pontjából e B-re bocsátott merőlegesek végpontjainak összessége A-nak vetülete B-ben.

Világos, hogy a $\mathfrak{p}'$ pont, a melyben a $\mathfrak{p}$-ből az E-re bocsátott merőleges ezt találja, annak vízszintes vetülete, ha E-t vízszintesnek vesszük; és ha ezenkívül meg van adva z, a $\mathfrak{p}$-nek függőleges magassága is, evvel $\mathfrak{p}$ helyzete meg van határozva. Ha $\mathfrak{p}$ vetülete Y'-ban a $\mathfrak{P}$ pont, és a $\mathfrak{P}$-ből Y-ra bocsátott merőleges ezt $\mathfrak{P}'$-ben metszi: akkor $\mathfrak{P}\mathfrak{P}' = z$. Ha tehát Y'-t Y körül forgatjuk, míg E-be jut: akkor $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{P}'\tilde{\mathfrak{p}}'$-re fog esni. Ezt a helyet jelöljük $\mathfrak{p}''$-vel. Hasonlóképen szolgáltassa valamely $\mathfrak{q}$ pont a $\mathfrak{q}''$ pontot E-ben: akkor a $\mathfrak{pq}$ egyenest az E síkban $\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'$ és $\mathfrak{p}''\mathfrak{q}''$ ábrázolják. T. i. a $\mathfrak{p}''$-ből és $\mathfrak{q}''$-ból az Y egyenesre bocsátott merőlegesek a $\mathfrak{pq}$ egyenes végpontjainak függőleges magasságai. Ez kezdete az *ábrázoló geometriának,* a mely arra tanít, hogy miként lehet bármely a térben meghatározott testet a síkban úgy ábrázolni, hogy ügyes megkülönböztető jelek segítségével a rajzból elő legyen állítható.

72. §.

Végül még a fentebbi igérethez képest az ott mondottakat kiegészítjük, a mennyire ezt e műnek korlátozott terve megengedi, és ábrák nélkül lehetséges,.

Mind a két [mű] a gömbfelület-határban két pontot, $\mathfrak{a}$-t és $\mathfrak{b}$-t és ennek két tengelyét, $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{c}}$-t és $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{d}}$-t veszi fel, és bebizonyítja, hogy ha α a körvonal-határ íve $\mathfrak{a}$-tól $\mathfrak{b}$-ig, és $\mathfrak{a}$-tól és $\mathfrak{b}$-től egyenlő távolságra a tengelyeket egyenközű ilyen ívekkel kötjük össze, és bizonyos 1 távolságra az ívet β-nak, bizonyos x távolságra pedig γ-nak nevezzük: akkor

$$\alpha : \gamma = (\alpha : \beta)^x.$$

Itt lép fel a két mű egyetlen közös jelölése. T. i. a kázáni ezt a γ-t e^{-x}-vel fejezi ki, hozzácsatolva azt a megjegyzést, hogy e értéke közömbös, csak nagyobb legyen 1-nél, úgy hogy a Neper-féle alapszám is lehet.

Az itteni mű határozottan a természetes logaritmusok alapszámára, e-re jut. T. i. az $\alpha : \gamma$ hányados az x távolságnak megfelelőleg X-szel, az y távolságnak megfelelőleg Y-nal, az i távolságnak megfelelőleg I-vel stb. van jelölve. Ha tehát

$$\alpha : \beta = \delta :$$

akkor

$$X = \delta^x, \quad Y = \delta^y, \quad I = \delta^i,$$

úgy hogy

$$Y = I^{\frac{y}{i}};$$

mert

$$I = \delta^i,$$

és így

$$I^{\frac{y}{i}} = \delta^y = Y.$$

Ezek után az itteni műben be van bizonyítva, hogy minden egyenesvonalú háromszögben a szögek sinusai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemben fekvő oldalokkal, mint radiusokkal leírt körök kerületei. Erre azután következik annak bebizonyítása, hogy minden gömbháromszögben a szögek sinusai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemben fekvő oldalok sinusai.

Ezután bebizonyítja az itteni mű, hogy

$$Y = \cot (u : 2),$$

hol u azt a szöget jelenti, melyet az y egyenesel, ennek [az egyenesnek] kezdeténél az e pont körül az y másik végpontjában reá merőlegesen állított egyenes mentén mozgatott egyenes akkor alkot, mikor azt [az y-ra merőleges egyenest] először elhagyja.

Ebből következik (ha azt a szöget, a mely u-t derékszögre egészíti ki, z-nek nevezzük), hogy

$$\operatorname{tang} z = (Y - Y^{-1}) : 2.$$

Ugyanis

$$Y = \cot (u : 2) = \operatorname{tang} (z + u'),$$

(hol $u' = u : 2$); ez pedig egyenlő a következővel:

$$\frac{\sin z \cos u' + \cos z \sin u'}{\cos z \cos u' - \sin z \sin u'} = \frac{\operatorname{tang} z + \operatorname{tang} u'}{1 - \operatorname{tang} z \cdot \operatorname{tang} u'},$$

és minthogy ez egyenlő Y-nal,

$$Y - Y \operatorname{tang} z \cdot \operatorname{tang} u' = \operatorname{tang} z + \operatorname{tang} u';$$

minthogy pedig

$$\operatorname{tang} u' = 1 : \cot u' = 1 : Y,$$

azért

$$Y - \operatorname{tang} z = \operatorname{tang} z + (1 : Y).$$

E szerint tehát

$$\operatorname{tang} z(1+1) = Y - Y^{-1} = (I^{\frac{2y}{i}} - 1) : I^{\frac{y}{i}}.$$

Ezek után ott be van bizonyítva, hogy $r : \operatorname{tang} z$ állandó mennyiség, a mely i-vel van jelölve, hol y azt a merőlegest jelenti, melyet a körvonal-határ r ívének egyik végpontjából arra a tengelyre bocsátottunk, a mely az r másik végpontjából indul ki, tehát a $2r$ ívhez tartozó húrnak felét. Ha tehát az a hányados, melyet nyerünk, ha a $2r$ ívet a $2y$ húrjával elosztjuk, $\rightharpoondown 1$, ha $y \rightharpoondown 0$: akkor

$$y : \operatorname{tang} z \rightharpoondown i.$$

Ha tehát ebbe $\operatorname{tang} z$ értékét behelyettesítjük és i-vel osztunk ($2y : i = k$-t is helyettesítve), azt nyerjük, hogy

$$k \frac{I^{\frac{y}{i}}}{I^k - 1} \rightharpoondown 1.$$

Ha $l = \log \operatorname{nat} I$, akkor $I^k - 1 = kl + \omega$, (hol

$$\omega = \frac{k^2 l^2}{2} + \frac{k^3 l^3}{3} \cdots$$

van helyettesítve), és így azt nyerjük, hogy

$$\frac{I^{\frac{y}{i}}}{l + \omega : k} \rightharpoondown 1.$$

Ha tehát $y \rightharpoondown 0$ és egyszersmind $\omega : k \rightharpoondown 0$: akkor $I^{\frac{y}{i}} \rightharpoondown 1$ és egyszersmind $l + \omega : k \rightharpoondown l$. Ezek szerint $1 : \log \operatorname{nat} I$ is és 1 is, mind a kettő határértéke az

$$I^{\frac{y}{i}} : (l + \omega : k)$$

-nak; tehát $\dfrac{1}{\log \operatorname{nat} I} = 1$, és így $I = e$.

Minthogy a gömbfelület-határban (hol az euklidikus geometria érvényes) az r radiussal leírt kör kerülete $2\pi r$, és ugyanazt az y radius is írja le, tehát e kerület $= 2\pi i \operatorname{tang} z$; mert $r = i \operatorname{tang} z$. Ha tehát $\operatorname{tang} z$ értékét behelyettesítjük, azt nyerjük, hogy az y radiussal leírt kör kerülete

$$\pi i (Y - Y^{-1}) = \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{\frac{-y}{i}}).$$

Ebből minden szükséges képlet le van vezetve. Itt csak azt az egyet jegyezzük meg, hogy miután be volt bizonyítva, hogy az egyenesvonalú háromszögben a szögek sinusai úgy aránylanak egymáshoz, mint az oldalokkal, mint radiusokkal leírt körök kerületei, ezért, ha a, b oldalok és α, β a szemben fekvő szögek,

$$\sin\alpha : \sin\beta = \pi i\,(A - A^{-1}) : \pi i\,(B - B^{-1}) =$$

$$= (e^{\frac{a}{i}} - e^{\frac{-a}{i}}) : (e^{\frac{b}{i}} - e^{\frac{-b}{i}}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}) : \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}}) =$$

$$= \sin(a\sqrt{-1}) : \sin(b\sqrt{-1}),$$

ha az

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{\frac{p}{i}} - e^{-\frac{p}{i}})$$

-et (p minden értékére nézve) $\sin p\,[\sqrt{-1}]$-nek nevezzük.

Így tehát mind a két trigonométriában a szögek sinusainak aránya ugyanaz volna, mint a szemben fekvő oldalok sinusainak aránya; csakhogy a gömbfelületben az oldalokat valósaknak, a síkban pedig képzeteseknek veszszük, mintha a sík (az itteni mű szerint) képzetes gömbfelület volna.

Az utolsó proporczióhoz az e-nek említett levezetése nem volt elkerülhetetlenül szükséges. Ha ugyanis azt írjuk, hogy

$$r : \operatorname{tang} z = q,$$

akkor az r-hez tartozó kerület, $\pi q\,(Y - Y^{-1}) =$ az y-hoz tartozó kerülettel, a miből ugyanaz a proporczió következik, ha i azt a távolságot jelenti, a melyre nézve $I = e$.

Ha a XI. axióma nem igaz: akkor van bizonyos i, a melyet a képletekbe kell tenni. A XI. axióma igaz volta esetében a képletekbe i-—∞-t kell tennünk, a mi abból következik, hogy a fentebbi hányados (187. o.) mindig 1; mert ebben az esetben a gömbfelülethatár a sík és a tengelyek euklidikus módon ||-ak. E szerint szükséges, hogy a kitevő 0, tehát az i a kitevő nevezőjében ∞ legyen.

Hogy erről a műről még többet beszéljünk, azt a szükséges rövidség nem engedi meg.

A kitünő kázáni mű azt mondja, hogy képletei akkor, ha a $\triangle$ oldalai igen kicsinyek, a közönséges geometria képleteibe mennek át, és a végén azt teszi hozzá, hogy figyelemreméltó, hogy a sík trigonometriába tartozó egyenletei a gömb trigonometriájának egyenleteibe mennek át, ha az a, b, c oldalokat $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$-gyel helyettesítjük.

Mindazonáltal megegyezik mind a kettő, bármennyire különbözőknek is látszanak. A fenti Y a kázániban e^y-nal, az u pedig $\Pi(y)$-nal van jelölve. E szerint ebben az egyik főképlet

$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(p),$$

hol a az átfogót és B a p befogóval szemben fekvő szöget jelenti. Az itteni mű szerint

$$1 : \sin B = (A - A^{-1}) : (P - P^{-1}),$$

a mi egyenlő [jelentésű] a

$$\operatorname{tang} \Pi(p) : \operatorname{tang} \Pi(a)$$

-val. Legyen ugyanis $\Pi(k)$ röviden (k)-val jelölve és $(k) : 2$ k'-val: akkor

$$\operatorname{tang}(k) = \operatorname{tang} 2k',$$

és A, P értékeit helyettesítve, azt találjuk, hogy

$$\operatorname{tang} 2p' : \operatorname{tang} 2a' = (\cot a' - \operatorname{tang} a') : (\cot p' - \operatorname{tang} p').$$

A külső tagok szorzata ugyanis egyenlő a belsők szorzatával. T. i.

$$\left(\frac{\cos a'}{\sin a'} - \frac{\sin a'}{\cos a'}\right) : \left(\frac{\cos p'}{\sin p'} - \frac{\sin p'}{\cos p'}\right) =$$
$$= \frac{2 \sin p' \cos p'}{\cos^2 p' - \sin^2 p'} : \frac{2 \sin a' \cos a'}{\cos^2 a' - \sin^2 a'},$$

a proporczió két első tagja pedig így írható:

$$\frac{\cos^2 a' - \sin^2 a'}{\sin a' \cos a'}, \quad \frac{\cos^2 p' - \sin^2 p'}{\sin p' \cos p'}.$$

E szerint a külső tagok szorzata 2, valamint a belsőké is annyi.

Befejezés. Az országúttól való eltérés nem volt szándékos, a végtelen mélység feletti mágnestűé volt. A helyreigazítás ép oly szivesen látott lesz, a mint azt híven követni az egyedül az igazságra tisztán törekvőnek szabadságában állott.

MÁSODIK SZAKASZ

BOLYAI JÁNOS

1. APPENDIX (1832)
2. ÉRTEKEZÉS A KÉPZETES MENNYISÉGEKRŐL (1837)
3. A TÉR TUDOMÁNYA (1855)

APPENDIX.

SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens:

a veritate aut falsitate Axiomatis XI *Euclidei* (*a priori haud unquam decidenda*) *independentem*; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.

Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

A Tér Tudománya

függetlenül a hírhedt XI. Euklides-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) igaz vagy nem igaz voltától: annak nem igaz volta esetére a kör geometriai quadraturájával.*

Irta:

bolyai Bolyai János

cs. k. másodosztályú mérnöktestületi kapitány.

A rövidítés czéljából használt jelek magyarázata.

$\overline{ab}$ jelentse *valamennyi* olyan pontnak összességét, mely *ugyanabban* az egyenesben fekszik, mint az a, b pontok.

$a\bar{b}$ « az a-ban felezett $\overline{ab}$-nek azt a felét, mely a b pontot tartalmazza.

$\overline{abc}$ « *valamennyi* pontnak összességét, mely ugyanabban a síkban fekszik, mint (a nem *ugyanabban* az egyenesben fekvő) a, b, c pontok.

$ab\bar{c}$ « az ab-vel felezett $\overline{abc}$-nek azt a felét, a melyben c van.

abc « a két darab közül a *kisebbet*, melyre a $b\bar{a}$, $b\bar{c}$ egyenesek együttesen felosztják $\overline{abc}$-t; vagyis azt a szöget, a melynek szárai $b\bar{a}$, $b\bar{c}$.

$abcd$ « (ha d az abc-n belül van és $\overline{ba}$, $\overline{cd}$ egymást nem metszik) abc-nek azt a részét, mely a $b\bar{a}$, bc, $c\bar{d}$ között van; $bacd$ pedig $\overline{abc}$-nek az $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ között levő részét.

$\llcorner$ « a merőleges helyzetet.

$\wedge$ jelentsen szöget.

R « derékszöget.

$ab \triangleq cd$ jelentse, hogy $cab = acd$.

$\equiv$ « a kongruencziát.**

$x \frown a$ « hogy x az a határ felé tart.

$\bigcirc r$ « az r radiussal leírt kör kerületét.

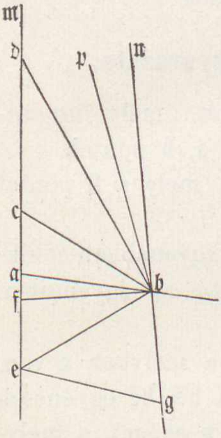
$\odot r$ « az r radiussal leírt kör területét.

* [Ez a «*Tér Tudománya*» az Appendix egy német átdolgozásának fordítása, a melyet 1832-ben Bolyai János maga készített. Az első 31 paragrafus néhány helytől eltekintve, hű áttétele a latin szöveg megfelelő paragrafusainak. Ámde a 32. és 33. paragrafusok lényegesen térnek el az Appendix-től, és a 34—43. paragrafusok, melyek önálló fejezetet alkotnak, elmaradtak belőle. Ebből az okból a kiadó a «*Tér Tudományá*»-hoz hozzácsatolta az *Appendix* 32—43. paragrafusainak fordítását.]

** Legyen szabad evvel a jellel, melylyel Gauss, a nagy geometer a *számok* kongruencziáját jelölte, a *geometriai egyenlőséget* is kifejezni, minthogy ebből félreértés nem támadhat.

1. §.

Ha az (ugyanabban a síkban fekvő) $\overline{\mathfrak{am}}$, $\overline{\mathfrak{bn}}$ egyenesek (1. ábra) egymást nem metszik, de minden (az $\mathfrak{abn}$-ben levő) $\overline{\mathfrak{bp}}$ az $\overline{\mathfrak{am}}$-et metszi: akkor ennek jelölésére szolgáljon



1. ábra.

$$\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{am}.^{*}$$

Hogy minden (az $\overline{\mathfrak{am}}$-en kívül levő) $\mathfrak{b}$ pontból egy és csak is *egy* ilyen $\overline{\mathfrak{bn}}$ *van* {és hogy $\mathfrak{bam}+\mathfrak{abn}$ nem $>2R$}, az világos: mert, ha $\overline{\mathfrak{bc}}$-t a $\mathfrak{b}$ körül addig forgatjuk, míg

$$\mathfrak{bam}+\mathfrak{abc}=2R$$

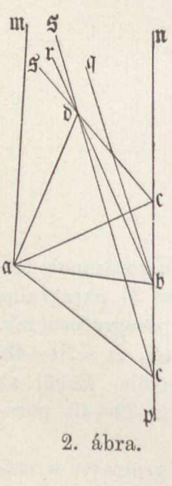
lesz, szükséges, hogy valamikor $\overline{\mathfrak{bc}}$ az $\overline{\mathfrak{am}}$-et *legelőször* ne messe, és ekkor $\mathfrak{bc} \,|||\, \mathfrak{am}$.

Ugyancsak nyilvánvaló az is, hogy $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{em}$, bárhol is legyen $\mathfrak{e}$ az $\widetilde{\mathfrak{ma}}$-ban.

Ha továbbá $\mathfrak{c}$ az $\overline{\mathfrak{am}}$-ben $\mathfrak{a}$-tól a végtelenbe távozik, és e közben mindig $\mathfrak{cd}=\mathfrak{cb}$: akkor egyszersmind mindenkor

$$\mathfrak{cdb}=(\mathfrak{cbd}<\mathfrak{nbc}).$$

Ámde $\mathfrak{nbc} \rightsquigarrow 0$. Ezért egyszersmind $\mathfrak{adb} \rightsquigarrow 0$.



2. ábra.

2. §.

Ha $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{am}$ (2. ábra): *akkor egyszersmind* $\mathfrak{cn} \,|||\, \mathfrak{am}$.

Legyen ugyanis $\mathfrak{d}$ bárhol az $\mathfrak{macn}$-ben. Ha $\mathfrak{c}$ a $\overline{\mathfrak{bn}}$-ben van: akkor $\overline{\mathfrak{bd}}$ metszi $\overline{\mathfrak{am}}$-et, minthogy $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{am}$. E szerint $\overline{\mathfrak{cd}}$ is metszi $\overline{\mathfrak{am}}$-et. Ha pedig $\mathfrak{c}$ a $\overline{\mathfrak{bp}}$-ben van, legyen $\mathfrak{bq} \,|||\, \mathfrak{cd}$. Ekkor $\overline{\mathfrak{bq}}$ az $\mathfrak{abn}$-be esik és metszi $\overline{\mathfrak{am}}$-et, a miért ezt $\overline{\mathfrak{cd}}$ is metszi.

Mind a két esetben tehát minden (az $\mathfrak{acn}$-be eső) $\overline{\mathfrak{cd}}$ metszi $\overline{\mathfrak{am}}$-et a nélkül, hogy $\overline{\mathfrak{cn}}$ az $\overline{\mathfrak{am}}$-et metszené. E szerint tehát mindig $\mathfrak{cn} \,|||\, \mathfrak{am}$.

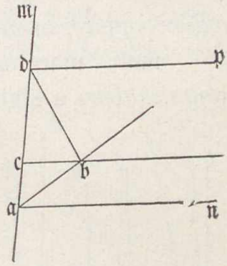
* [Ez így olvasandó: $\mathfrak{bn}$ asymptotikus $\mathfrak{am}$-hez.]

[3. §.]

{*Ha mind* $\mathfrak{br}$, *mind* $\mathfrak{cs} \parallel \mathfrak{am}$ (2. ábra), *és* $\mathfrak{c}$ *nincsen* $\widetilde{\mathfrak{br}}$*-ben: akkor* $\widetilde{\mathfrak{br}}$, $\widetilde{\mathfrak{cs}}$ *nem metszik egymást.* Ha ugyanis $\mathfrak{d}$ a $\widetilde{\mathfrak{br}}$ és $\widetilde{\mathfrak{cs}}$ közös pontja volna: akkor (a 2. § szerint) $\mathfrak{dr}$ és $\mathfrak{ds}$ egyidejűleg volnának $\parallel$-ak $\mathfrak{am}$-hez és (az 1. § szerint) $\mathfrak{ds}$-nek $\widetilde{\mathfrak{dr}}$-re és $\mathfrak{c}$-nek (a feltevés ellenére) $\widetilde{\mathfrak{br}}$-be kellene esnie.}*

4. §.

Ha $\mathfrak{man} > \mathfrak{mab}$ (3. ábra): *akkor* $\mathfrak{ab}$ *minden* $\mathfrak{b}$ *pontjának megfelelőleg van* $\widetilde{\mathfrak{am}}$*-ben olyan* $\mathfrak{c}$ *pont, hogy* $\mathfrak{bcm} = \mathfrak{nam}$.



3. ábra.

Van ugyanis (az 1. § szerint) olyan $\mathfrak{bdm}$, mely $> \mathfrak{nam}$; ezért van olyan az $\mathfrak{man}$-nel egyenlő $\mathfrak{mdp}$, hogy $\mathfrak{b}$ az $\mathfrak{nadp}$-be esik. Ha már mostan $\mathfrak{nam}$-et $\mathfrak{am}$ mentén eltoljuk addig, míg $\widetilde{\mathfrak{an}}$ a $\widetilde{\mathfrak{dp}}$-be jut: akkor közben $\widetilde{\mathfrak{an}}$-nek valamikor át kell mennie $\mathfrak{b}$-n, és így szükséges, hogy valamelyik $\mathfrak{bcm}$ = legyen $\mathfrak{nam}$-mel.

5. §.

Ha $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$ (1. ábra): *akkor van* $\widetilde{\mathfrak{am}}$*-ben olyan* $\mathfrak{f}$ *pont, a melyre nézve* $\mathfrak{fm} \triangleq \mathfrak{bn}$.**

Van ugyanis az 1. § szerint olyan $\mathfrak{bcm}$, mely $> \mathfrak{cbn}$; és ha $\mathfrak{ce} = \mathfrak{cb}$, tehát $\mathfrak{ec} \triangleq \mathfrak{cb}$: akkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{bem} < \mathfrak{ebn}$. Ha már mostan $\mathfrak{p}$ befutja $\mathfrak{ec}$-t, és e közben $\mathfrak{bpm}$-et mindig u-nak, $\mathfrak{pbn}$-t pedig v-nek nevezzük: akkor nyilvánvaló, hogy *eleinte* $u <$ a neki megfelelő v-nél, *utoljára* pedig $u >$ mint a hozzá tartozó v. Ámde u *folytonosan* növekedik $\mathfrak{bem}$-től kezdve egészen $\mathfrak{bcm}$-ig; mert (a 4. § szerint) nagyságra nézve $\mathfrak{bem}$ és $\mathfrak{bcm}$ között *nincsen* olyan szög, melylyel u nem válnék egyszer egyenlővé. Hasonlóképen v $\mathfrak{ebn}$-től kezdve egészen $\mathfrak{cbn}$-ig *folytonosan* fogy. Így tehát van $\mathfrak{ec}$-ben olyan $\mathfrak{f}$, a melyre nézve $\mathfrak{bfm} = \mathfrak{fbn}$.

6. §.

Ha $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$ [1. ábra] *és* $\mathfrak{e}$ *bárhol van* $\widetilde{\mathfrak{ma}}$*-ban, meg* $\mathfrak{g}$ *bárhol* $\mathfrak{nb}$*-ben: akkor* $\mathfrak{gn} \parallel \mathfrak{em}$ *és* $\mathfrak{em} \parallel \mathfrak{gn}$.

* [Az *Appendix* 3. §-a a német fogalmazásban hiányzik. Helyébe a latinnak magyar fordítását tettük.]

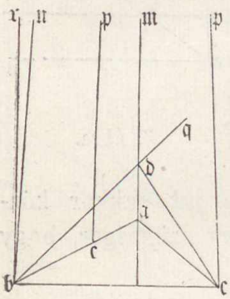
** [Ez így olvasandó: $\mathfrak{fm}$ egyenlő magasságú $\mathfrak{bn}$-nel.]

Az 1. § szerint ugyanis bn $|||$ em, és ebből (a 2. § szerint) következik, hogy gn $|||$ em. Ha továbbá fm ≏ bn (5. §): akkor mfbn ≡ nbfm, és így (mert bn $|||$ fm) egyszersmind fm $|||$ bn és (az előbbiek szerint) em $|||$ gn.

7. §.

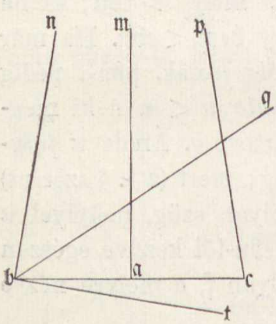
Ha mind bn (4. ábra), *mind* cp $|||$ am, *és* c *a* $b\bar{n}$*-en kívül van: akkor egyszersmind* bn $|||$ cp.

mab, mac ugyanis vagy *szöget* alkotnak, vagy bn, am, cp *ugyanabban* a síkban fekszenek. Az *első* esetben cbn-ben és abn-ben csak $b\bar{n}$ közös, $a\bar{m}$-ben és $b\bar{n}$-ben pedig, és így nbc-ben és $a\bar{m}$-ben is, semmi közös nincsen. Ámde bármely a cba és cbn között levő cbd nyilván metszi abn-t, és így (minthogy bn $|||$ am) $a\bar{m}$-et is. Ha tehát bcd a bc körül addig forog, míg $a\bar{m}$-et *először* nem metszi: akkor végül $bc\bar{n}$-re kell esnie. Hasonló okból esik bcd a $bc\bar{p}$-re is, a miért bn a bcp-ben is van. Ha továbbá br $|||$ cp: akkor (minthogy am is $|||$ cp) hasonló okból br a bam-be esik; de (mert br $|||$ cp) bcp-be is. E szerint $b\bar{r}$ egyidejűleg benne van mab-ben és pcb-ben, és azonos $b\bar{n}$-nel; így tehát bn $|||$ cp. Az is világos, hogy ha cp $|||$ am, és b a $\overline{cam}$-en *kívül* van: akkor bam, bcp metszésvonala, t. i. bn mind am-hez, mind cp-hez $|||$.



4. ábra.

A *második* esetben legyen bn, am, cp síkján kívül (7. ábra a 202. oldalon) fs $|||$ am: akkor (az első eset szerint) fs $|||$ bn és fs $|||$ cp; ezért (*ugyanazon* eset szerint) bn is $|||$ cp.*



5. ábra.

8. §.

Ha bn $|||$ *és* ≏ cp (5. ábra), *vagy rövidebben* bn $|||$ ≏ cp, *és az* (nbcp-*ben levő*) am *a* bc-*t merőlegesen felezi: akkor* bn $|||$ am.

Ha ugyanis $b\bar{n}$ metszené $a\bar{m}$-et: akkor (minthogy mabn ≡ macp) szükségképen $c\bar{p}$ is ugyanabban a pontban metszené $a\bar{m}$-et, a mely pont tehát közös pontja volna $b\bar{n}$, $c\bar{p}$-nek is,

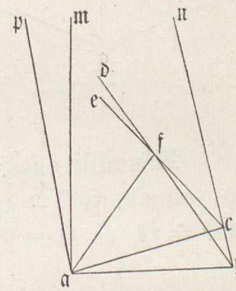
* [A latin fogalmazásban először a *második* és csak azután az *első* eset kerül tárgyalásra; az Appendix *erratái* között azt a megjegyzést találjuk, hogy a bebizonyítás rövidebben és elegánsabban alakul, ha a sorrendet megfordítjuk. Ezt a cserét itt keresztülvitte BOLYAI JÁNOS.]

jóllehet $\mathfrak{bn} \parallel\!| \mathfrak{cp}$. E szerint $\overline{\mathfrak{bn}}$, $\overline{\mathfrak{am}}$ nem metszik egymást. Bármely (a $\mathfrak{cbm}$-ben levő) $\overline{\mathfrak{bq}}$ pedig metszi $\overline{\mathfrak{cp}}$-t; mert $\mathfrak{bn} \parallel\!| \mathfrak{cp}$. Ezért $\overline{\mathfrak{bq}}$ metszi $\overline{\mathfrak{am}}$-et is. Így tehát $\mathfrak{bn} \parallel\!| \mathfrak{am}$.

9. §.

Ha $\mathfrak{bn} \parallel\!| \mathfrak{am}$, $\mathfrak{map} \perp \mathfrak{mab}$ (6. ábra), *és az a szög, melyet* ($\mathfrak{mabn}$-*nek ugyanazon az oldalán, a melyen* $\mathfrak{map}$ *van*) $\mathfrak{nbd}$ *alkot* $\mathfrak{nba}$-*val* $< R$: *akkor* $\mathfrak{map}$ *metszi* $\mathfrak{nbd}$-*t*.

Legyen ugyanis



6. ábra.

$$\mathfrak{ba} \perp \mathfrak{am}, \quad \mathfrak{ac} \perp \mathfrak{bn},$$

és

$$\mathfrak{ce} \perp \mathfrak{bn} \text{ (}\mathfrak{nb\bar{d}}\text{-ben)}:$$

akkor (a feltevésnél fogva) $\mathfrak{ace} < R$, és a $\mathfrak{ce}$-re merőleges $\mathfrak{af}$ beléesik $\mathfrak{ace}$-be. Legyen az $\mathfrak{a}$ pontot közösen tartalmazó $\mathfrak{ab\tilde{f}}$ és $\mathfrak{am\tilde{p}}$ síkok metszése $\overline{\mathfrak{ap}}$: akkor

$$\mathfrak{bap} = \mathfrak{bam} = R;$$

mert $\mathfrak{bam} \perp \mathfrak{map}$. Ha tehát $\mathfrak{ab\tilde{f}}$-et $\mathfrak{ab}$ körül beléforgatjuk $\mathfrak{ab\tilde{m}}$-be: akkor majd $\overline{\mathfrak{ap}}$ reáesik $\overline{\mathfrak{am}}$-re, és mert

$$\mathfrak{ac} \perp \mathfrak{bn} \quad \text{és} \quad \mathfrak{af} < \mathfrak{ac},$$

nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{af}$ mindig $\overline{\mathfrak{bn}}$-en *innen* esik, és így $\mathfrak{bf}$ az $\mathfrak{abn}$-be. *Ebben* a helyzetben tehát $\overline{\mathfrak{bf}}$ metszi $\overline{\mathfrak{ap}}$-t (minthogy $\mathfrak{bn} \parallel\!| \mathfrak{am}$); így tehát $\overline{\mathfrak{ap}}$ és $\overline{\mathfrak{bf}}$ az *eredeti* helyzetben is metszik egymást. E metszéspont az $\mathfrak{ma\tilde{p}}$, $\mathfrak{nb\tilde{d}}$-ben is közös, úgy hogy $\mathfrak{ma\tilde{p}}$, $\mathfrak{nb\tilde{d}}$ is metszik egymást.

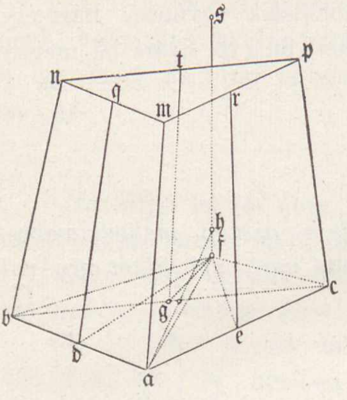
Ezen az alapon könnyen kimutatható, hogy $\mathfrak{ma\tilde{p}}$ és $\mathfrak{nb\tilde{d}}$ általában metszik egymást, mihelyt a két belső szög összege, melyeket $\mathfrak{mabn}$-nel alkotnak, $< 2R$.

10. §.

Ha mind $\mathfrak{bn}$, *mind* $\mathfrak{cp} \parallel\!| \simeq \mathfrak{am}$ (7. ábra a 202. oldalon): *akkor egyszersmind* $\mathfrak{bn} \parallel\!| \simeq \mathfrak{cp}$.

Ugyanis $\mathfrak{mab}$, $\mathfrak{mac}$ vagy *szöget* alkotnak, vagy pedig ugyanabba a síkba esnek.

Első eset. Ha $\widetilde{\mathfrak{qdf}}$ merőlegesen felezi $\mathfrak{ab}$-t: akkor $\mathfrak{dq} \perp \mathfrak{ab}$, tehát $\mathfrak{dq} \parallel\!| \mathfrak{am}$ (8. §). Hasonlóképen, ha $\widetilde{\mathfrak{ers}}$ merőlegesen felezi $\mathfrak{ac}$-t: akkor $\mathfrak{er} \parallel\!| \mathfrak{am}$. E szerint $\mathfrak{dq} \parallel\!| \mathfrak{er}$ (7. §). Ebből (a 9. § alapján) következik, hogy $\widetilde{\mathfrak{qdf}}$, $\widetilde{\mathfrak{ers}}$ egymást metszik. Az $\widetilde{\mathfrak{fs}}$ metszésvonal $\parallel\!| \mathfrak{qd}$ (7. §),



7. ábra.

és mert $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{dq}$, egyszersmind

$$\mathfrak{fs} \,|||\, \mathfrak{bn}.$$

Továbbá $\overline{\mathfrak{fs}}$ bármely pontjára nézve

$$\mathfrak{fb} = \mathfrak{fa} = \mathfrak{fc},$$

a miért $\overline{\mathfrak{fs}}$ a $\mathfrak{bc}$-t merőlegesen felező $\overline{\mathfrak{tgf}}$-be esik. Ámde, minthogy $\mathfrak{fs} \,|||\, \mathfrak{bn}$, egyszersmind

$$\mathfrak{gt} \,|||\, \mathfrak{bn}$$

(7. §). Hasonlóképen $\mathfrak{gt} \,|||\, \mathfrak{cp}$. Ámde $\mathfrak{gt}$ merőlegesen felezi $\mathfrak{bc}$-t. Ebből következik, hogy $\mathfrak{tgbn} \equiv \mathfrak{tgcp}$ (1. §), és hogy

$$\mathfrak{bn} \,|||\, \bumpeq \mathfrak{cp}.$$

Második eset. Legyen azon a síkon *kívül*, a melyben $\mathfrak{ba}$, $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{cp}$ vannak, $\mathfrak{fs} \,|||\, \bumpeq \mathfrak{am}$: akkor (az első eset szerint) mind $\mathfrak{bn}$, mind $\mathfrak{cp} \,|||\, \bumpeq \mathfrak{fs}$, és *épen ezért* $\mathfrak{bn} \,|||\, \bumpeq \mathfrak{cp}$.

11. §.

Az $\mathfrak{a}$-nak és mindazoknak a $\mathfrak{b}$ pontoknak összességét, a melyekre nézve *egyidejűleg* lehet $\mathfrak{bn} \,|||\, \bumpeq \mathfrak{am}$, nevezzük F-nek; F és valamely az $\mathfrak{am}$-et tartalmazó sík metszését pedig nevezzük L-nek. Később majd megmutatjuk, hogy F felület, L pedig vonal.

Minden olyan egyenesben, a mely $|||\, \mathfrak{am}$, F-nek *egy és csak egy* pontja van (5. §), és nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{am}$ az L-t két egybevágó részre osztja fel. Ezért $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$-et az *$L$ tengelyének*, ezt pedig az $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$ *(tengely) L-jének* nevezzük (a szóban levő síkban). Ha L-t az $\mathfrak{am}$ körül forgatjuk, nyilván olyan F-et ír le, a melynek egyik *tengelye* $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$, és azt [az F-et] magát az $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$ F-jének nevezzük.

12. §.

Ha $\mathfrak{bn} \,|||\, \bumpeq \mathfrak{am}$: akkor az $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$ L-je és a $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{n}}$ L-je egybeesnek.

Ha ugyanis $\mathfrak{c}$ bárhol van a $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{n}}$ L-jében és $\mathfrak{cp} \,|||\, \bumpeq \mathfrak{bn}$ (a mi a 11. § szerint lehetséges): akkor, minthogy $\mathfrak{bn}$ is $|||\, \bumpeq \mathfrak{am}$, [azért] $\mathfrak{cp} \,|||\, \bumpeq \mathfrak{am}$ (10. §), és így $\mathfrak{c}$ benne van az $\mathfrak{am}$ L-jében is. Ha pedig $\mathfrak{c}$ bárhol van az $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$ L-jében és $\mathfrak{cp} \,|||\, \bumpeq \mathfrak{am}$: akkor $\mathfrak{cp}$ is $|||\, \bumpeq \mathfrak{bn}$ (10. §), és így $\mathfrak{c}$ benne van a $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{n}}$ L-jében is (11. §). Így tehát az $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$ L-je és a $\mathfrak{b}\tilde{\mathfrak{n}}$ L-je teljesen egybeesnek; minden $\mathfrak{bn}$ (mely $|||\, \bumpeq \mathfrak{am}$) az $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{m}}$ L-jének is tengelye, és ugyanannak az L-nek valamennyi tengelye $\bumpeq$.

Ugyanaz hasonló módon mutatható ki F-ről is.

13. §.

Ha $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{am}$, $\mathfrak{cp} \,|||\, \mathfrak{dq}$ (8. ábra) *és* $\mathfrak{bam} + \mathfrak{abn} = 2R$*: akkor egyszersmind* $\mathfrak{dcp} + \mathfrak{cdq} = 2R$.

Legyen ugyanis $\mathfrak{ea} = \mathfrak{eb}$ és $\mathfrak{efm} = \mathfrak{dcp}$ (a mi a 4. § szerint lehetséges): akkor, minthogy

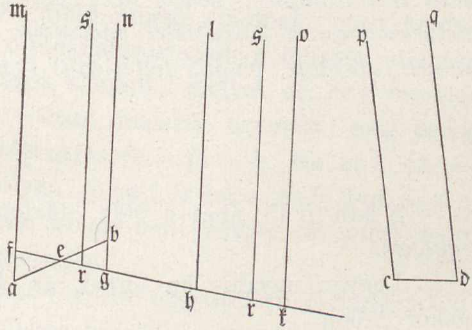
$$\mathfrak{bam} + \mathfrak{abn} = 2R = \mathfrak{abn} + \mathfrak{abg},$$

azért

$$\mathfrak{ebg} = \mathfrak{eaf};$$

ha tehát egyszersmind $\mathfrak{bg} = \mathfrak{af}$: akkor

$$\triangle\, \mathfrak{ebg} = \triangle\, \mathfrak{eaf}, \quad \mathfrak{beg} = \mathfrak{aef},$$



8. ábra.

és $\mathfrak{g}$ beléesik $\overline{\mathfrak{fe}}$-be. Továbbá $\mathfrak{gn}$ is $|||\, \mathfrak{fm}$ (6. §); ha tehát $\mathfrak{mfrs} \equiv \mathfrak{pcdq}$: akkor $\mathfrak{rs} \,|||\, \mathfrak{gn}$ (7. §), és $\mathfrak{r}$ vagy $\mathfrak{fg}$-n *belül* esik, vagy pedig azon *kívül* (hacsak $\mathfrak{cd}$ nem egyenlő $\mathfrak{fg}$-vel, a mely esetben a tétel már világos).

I. Az *első* esetben $\mathfrak{frs}$ nem $> (2R - \mathfrak{rfm} = \mathfrak{fgn})$, mert $\mathfrak{rs} \,|||\, \mathfrak{fm}$; minthogy pedig $\mathfrak{rs}$ is $|||\, \mathfrak{gn}$, $\mathfrak{frs}$ nem is $< \mathfrak{fgn}$. Így tehát $\mathfrak{frs} = \mathfrak{fgn}$, és

$$\mathfrak{rfm} + \mathfrak{frs} = \mathfrak{gfm} + \mathfrak{fgn} = 2R.$$

E szerint tehát egyszersmind $\mathfrak{dcp} + \mathfrak{cdq} = 2R$.

II. Ha azonban $\mathfrak{r}$ az $\mathfrak{fg}$-n kívül esik: akkor $\mathfrak{ngr} = \mathfrak{mfr}$; továbbá legyen $\mathfrak{mfgn} \equiv \mathfrak{nghl} \equiv \mathfrak{lhko}$ stb. mindaddig, míg nem $\mathfrak{fk} =$, vagy legelőször $> \mathfrak{fr}$. Itt $\mathfrak{ko} \,|||\, \mathfrak{hl} \,|||\, \mathfrak{fm}$ (7. §). Ha $\mathfrak{k}$ az $\mathfrak{r}$-re esik; akkor $\mathfrak{ko}$ reáesik $\mathfrak{rs}$-re (1. §), és ezért

$$\mathfrak{rfm} + \mathfrak{frs} = \mathfrak{kfm} + \mathfrak{fko} = \mathfrak{kfm} + \mathfrak{fgn} = 2R;$$

ha azonban $\mathfrak{r}$ a $\mathfrak{hk}$-n belül esik: akkor (I. szerint)

$$\mathfrak{rhl} + \mathfrak{hrs} = 2R = \mathfrak{rfm} + \mathfrak{frs} = \mathfrak{dcp} + \mathfrak{cdq}.$$

14. §.

Ha $\mathfrak{bn} \,|||\, \mathfrak{am}$, $\mathfrak{cp} \,|||\, \mathfrak{dq}$ *és* $\mathfrak{bam} + \mathfrak{abn} < 2R$*: akkor egyszersmind* $\mathfrak{dcp} + \mathfrak{cdq} < 2R$.

Ha ugyanis $\mathfrak{dcp} + \mathfrak{cdq}$ nem volna $< 2R$, (az 1. § szerint) $\mathfrak{dcp} + \mathfrak{cdq} = 2R$ volna, és ekkor (a 13 § szerint) szükséges volna, hogy a feltevés ellenére $\mathfrak{bam} + \mathfrak{abn} = 2R$ legyen.

15. §.

Jól megfontolva a 13. és 14. § eredményeit, nevezzük a geometriának azt a rendszerét, mely EUKLIDES *XI. axiómája igaz voltának feltevésén épül fel, Σ-nak, az ellenkező feltevésre támaszkodó tértudományt pedig nevezzük S-nek. Mindazok a tételek, a melyeknél az a hozzátétel hiányzik, hogy Σ-ban vagy S-ben érvényesek, absolute, vagyis feltétlenül igazaknak tekintendők.*

16. §.

Σ-ban L (5. ábra a 200. oldalon) *a saját tengelyére merőleges egyenes.*

Legyen ugyanis $\mathfrak{bn}$ ennek az L-nek valamely más tengelye: akkor Σ-ban

$$\mathfrak{bam} + \mathfrak{abn} = 2\mathfrak{bam} = 2R$$

(13. és 15. §); tehát $\mathfrak{bam} = R$. Ha pedig $\mathfrak{c}$ bárhol is van $\overset{\frown}{\mathfrak{ab}}$-ben és $\mathfrak{cp} \parallel\!| \mathfrak{am}$: akkor (a 13. § szerint) $\mathfrak{cp} \triangleq \mathfrak{am}$, úgy hogy $\mathfrak{c}$ benne van az $\mathfrak{am}$ L-jében (11. §).

S-ben azonban L-nek vagy F-nek 3 pontja, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *sohasem fekszik ugyanabban az egyenesben.*

Ha ugyanis a három tengelyük $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{bn}$, $\mathfrak{cp}$ *ugyanabban* a síkban fekszik: akkor az egyik közülük, pl. $\mathfrak{am}$ a másik kettő közé esik, és ekkor a (14. § szerint) mind $\mathfrak{bam}$, mind $\mathfrak{cam} < R$.

17. §.

Az L vonal és az F felület.

Ha ugyanis $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{bn}$ valamely F-nek két tengelye: akkor F, ha azt $\mathfrak{bn}$ vagy $\mathfrak{am}$ körül forgatjuk, (a 11. § szerint) *teljesen önmagában* marad. Ámde a $\mathfrak{bn}$ körül való forgatás közben F minden pontja egy-egy kör kerületét írja le; és minden ilyen körkerületből, ha azt $\mathfrak{am}$ körül forgatjuk, felület származik, a miért is F *egyenletes felület*, a mely t. i. ha $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ annak bármely pontjai, mindig úgy helyezhető önmagára, hogy $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$-re essék. És ebből tekintettel a 11. és 12. §-ra következik, hogy L egyenletes vonal.*

* [Az Appendix *erratái* között erre vonatkozólag a következő megjegyzést találjuk: «Nem szükséges a bebizonyítást S-re szorítani, mert az könnyen úgy adható elő, hogy föltétlenül (azaz S-re és Σ-ra nézve egyaránt) érvényes legyen.»]

18. §.

S-ben minden olyan sík, mely F-nek valamely 𝔞 *pontján* (7. ábra a 202. oldalon) *megy át, és az* 𝔞𝔪 *tengelyre ferdén áll, F-et egy kör kerületében metszi.*

Legyen ugyanis 𝔟, 𝔠 e metszés további két pontja és 𝔟𝔫, 𝔠𝔭 legyenek tengelyek: akkor 𝔞𝔪𝔟𝔫, 𝔞𝔪𝔠𝔭 szöget alkotnak; mert különben (a 16. § szerint) az 𝔞, 𝔟, 𝔠 meghatározta sík a feltevés ellenére tartalmazná 𝔞𝔪-et. E szerint azok a síkok, melyek 𝔞𝔟, 𝔞𝔠-t merőlegesen felezik, (úgy mint a 10. §-ban) metszik egymást; még pedig az adott *F* valamely 𝔣𝔰 tengelyében, és 𝔣𝔟 = 𝔣𝔞 = 𝔣𝔠. Ha 𝔞𝔥 ∟ 𝔣𝔰, és 𝔣𝔞𝔥 az 𝔣𝔰 körül forog: akkor 𝔞 olyan ○ 𝔥𝔞-t ír le, a mely 𝔟-n és 𝔠-n is megy át, és *egyidejűleg F*-ben és $\overline{𝔞𝔟𝔠}$-ben fekszik, a miért nem egyéb, mint *F*-nek és $\overline{𝔞𝔟𝔠}$-nek metszése.

Nyilvánvaló, hogy az *F*-ben 𝔣 körül forgatott 𝔣𝔞 *L*-darabnak 𝔞 végpontja is ugyanazt a körkerületet írja le.

19. §.

S-ben az olyan 𝔟𝔱 (5. ábra a 200. oldalon) *mely valamely L-nek* 𝔟𝔫 *tengelyére (az L síkjában) merőleges, az L-nek érintője.*

L-nek ugyanis 𝔟-n kívül nincsen pontja $\overline{𝔟𝔱}$-ben (14. §). Ha azonban 𝔟𝔮 a 𝔱𝔟𝔫-be esik: akkor a 𝔟𝔮-n át a 𝔱𝔟𝔫-re merőlegesen fektetett sík és a $\overline{𝔟𝔫}$ *F*-je (a 18. § szerint) köralakú metszésének középpontja nyilván 𝔟𝔮-ba esik; és ha 𝔟𝔮 az átmérője: akkor $\overline{𝔟𝔮}$ a $\overline{𝔟𝔫}$ *L*-jét nyilván 𝔮-ban metszi.

20. §.

F-nek bármely két pontja meghatároz egy L-t (11. és 18. §), és minthogy a 16. és 19. § szerint *L* merőleges mindegyik tengelyére, azért *F-ben minden L-vonalú szög egyenlő avval a szöggel, melyet a szárain át az F-re merőlegesen fektetett (tengely-)síkok alkotnak.*

21. §.

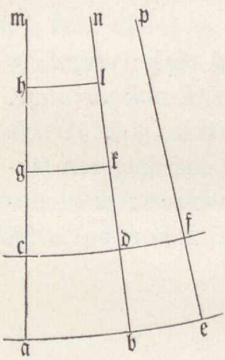
Ugyanabban az F-ben két L-vonal, $\overline{𝔞𝔭}$, $\overline{𝔟𝔡}$ (6. ábra a 201. oldalon), *melyek ugyanavval a harmadik L-vonallal,* 𝔞𝔟*-vel olyan belső szögeket alkotnak, melyeknek összege* $< 2R$, *metszi egymást.* (Itt $\overline{𝔞𝔭}$ jelenti az *F*-ben az 𝔞, 𝔭-n átmenő *L*-vonalat, $\overline{𝔞𝔭}$ pedig annak 𝔞-ban kezdődő azt a felét, mely 𝔭-t tartalmazza.)

Ha ugyanis $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{bn}$ F-nek tengelyei: akkor $\mathfrak{am\bar{p}}$, $\mathfrak{bn\bar{d}}$ metszik egymást (9. §); továbbá (a 7. és 11. § szerint) F metszi ugyanazoknak a síkoknak metszését. Tehát $\mathfrak{a\bar{p}}$, $\mathfrak{b\bar{d}}$ is metszik egymást.

Ebből világos, hogy *ha az egyenesek helyébe L vonalak lépnek*: akkor F-ben Euklides XI. axiómája, és evvel együtt a sík egész geometriája és trigonometriája *feltétlenűl* érvényes; vagyis, hogy F-ben egy a XI. axiómára épülő, a közönségessel teljesen analóg [tér]-tudománynak van helye. Következésképen valamennyi trigonometriai függvényt itt a közönséges értelemben használunk; így pl. (a sin. totust itt mindig = 1-nek véve) $\sin\frac{1}{3}R = \frac{1}{2}$, továbbá F-ben annak a körnek kerülete, melynek L-alakú radiusa $= r$, $= 2\pi r$ és ép úgy $\odot r$ (F-ben) $= \pi r^2$ stb., a hol π a $\frac{1}{2}\bigcirc$ 1-et (F-ben), vagyis az ismeretes 3·1415926 . . . számot jelenti.

22. §.

Ha $\mathfrak{ab}$ (9. ábra) *az* $\mathfrak{a\overline{m}}$ *L-je,* $\mathfrak{c}$ *benne van* $\mathfrak{a\overline{m}}$*-ben, és az* $\mathfrak{a\overline{m}}$ *és az L-alakú* $\mathfrak{a\bar{b}}$ *vonal alkotta* $\mathfrak{cab}$ *szöget először* $\mathfrak{a\bar{b}}$ *mentén, azután pedig* $\mathfrak{b\bar{a}}$ *mentén a végtelenbe toljuk el: akkor* $\mathfrak{c}$*-nek* $\mathfrak{cd}$ *útja a* $\mathfrak{c\overline{m}}$ *L-je.*



9. ábra.

Ha ugyanis $\mathfrak{d}$ ennek az útnak bármely pontja, $\mathfrak{dn} \parallel\!| \mathfrak{cm}$ és $\mathfrak{b}$ az $\mathfrak{a\overline{m}}$ L-jének $\widetilde{\mathfrak{dn}}$-ben levő pontja: akkor $\mathfrak{bn} \triangleq \mathfrak{am}$, és $\mathfrak{ac} = \mathfrak{bd}$, tehát $\mathfrak{dn} \triangleq \mathfrak{cm}$, úgy hogy $\mathfrak{d}$ benne van a $\mathfrak{c\overline{m}}$ L-jében. Ha pedig $\mathfrak{d}$ a $\mathfrak{c\overline{m}}$ L-jének bármely pontja, továbbá $\mathfrak{dn} \parallel\!| \mathfrak{cm}$ és $\mathfrak{b}$ az $\mathfrak{a\overline{m}}$ L-jének $\widetilde{\mathfrak{dn}}$-be eső pontja: akkor $\mathfrak{am} \triangleq \mathfrak{bn}$ és $\mathfrak{cm} \triangleq \mathfrak{dn}$, és így nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{bd} = \mathfrak{ac}$, meg hogy $\mathfrak{d}$ a $\mathfrak{c}$-nek fent jellemzett útjába esik, és hogy ez az út a $\mathfrak{c\overline{m}}$ L-jével egybeesik. Az ilyen L-vonalok tehát nyilvánvalóan *mindenütt egyenlő távolságra vannak egymástól*, vagyis *párhuzamosak*, a mit úgy jelölünk, hogy közéjük a $\|$* jelt teszszük.

23. §.

Ha a $\mathfrak{cdf}$ L-vonal (9. ábra) $\| \mathfrak{abe}$ (22. §), továbbá $\mathfrak{ab} = \mathfrak{be}$, és $\mathfrak{am}$, $\mathfrak{bn}$, $\mathfrak{ep}$ tengelyek: akkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{cd} = \mathfrak{df}$. Ha pedig $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$ az $\mathfrak{am}$ L-jének bármely három pontja: akkor nyilvánvaló, hogy fennáll az

$$\mathfrak{ab} : \mathfrak{cd} = \mathfrak{ae} : \mathfrak{cf}$$

* [Így olvasandó: *párhuzamos.*]

proporczió. Így tehát az $\mathfrak{ab} : \mathfrak{cd}$ hányados az $\mathfrak{ab}$-től teljesen *független* és már az $\mathfrak{ac}$ által *tökéletesen meghatározott* érték. A következőkben majd az ilyen hányadost, ha a hozzá tartozó $\mathfrak{ac}$ hosszúságot valamely kis betűvel, pl. x-szel jelöljük, a rövidség és egyszerűség kedvéért mindig az ugyanilyen nevű nagy betűvel, X-szel fejezzük ki.

24. §.

Bármely két hosszúságot is jelentsenek x, y (9. ábra a 206. oldalon), *mindig* $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (23. §).

Az x, y közül ugyanis az egyik vagy többszöröse a másiknak, vagy nem az.

Ha pl. $y = nx$: akkor legyen $x = \mathfrak{ac} = \mathfrak{cg} = \mathfrak{gh}$ s így tovább mindaddig, míg nem $\mathfrak{ah} = y$; legyen továbbá $\mathfrak{cd} \parallel \mathfrak{gk} \parallel \mathfrak{hl}$: akkor (a 23. § szerint)

$$X = \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{cd}} = \frac{\mathfrak{cd}}{\mathfrak{gk}} = \frac{\mathfrak{gk}}{\mathfrak{hl}},$$

úgy hogy

$$\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{hl}} = \left(\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{cd}}\right)^n,$$

vagyis

$$Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}.$$

Ha azonban x, y az i-nek többszörösei; még pedig

$$x = mi, \quad y = ni:$$

akkor (az előbbi szerint)

$$X = I^m, \quad Y = I^n,$$

és így

$$Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}.$$

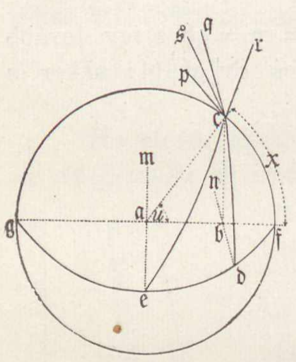
Abban az esetben, ha x, y inkommenzurabilisek, a tétel már most szintén könnyen bizonyítható be, a mit azonban a rövidség kedvéért mellőzünk.

Egyébként könnyen belátható, hogy, ha $q = y - x$: akkor $Q = Y : X$, valamint az is, hogy Σ-ban *minden* x hosszúsághoz tartozó $X = 1$, míg S-ben *mindig* $X > 1$, és hogy az utóbbi esetben bármely két L-darabnak, $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{abe}$-nek megfelelőleg van olyan $\mathfrak{cdf} \parallel \mathfrak{abe}$, a melyre nézve $\mathfrak{cdf} = \mathfrak{ab}$, a miért $\mathfrak{ambn} \equiv \mathfrak{amep}$, annak ellenére, hogy $\mathfrak{amep} : \mathfrak{ambn} = \mathfrak{abe} : \mathfrak{ab}$, úgy hogy tehát $\mathfrak{amep}$ az $\mathfrak{ambn}$-nek tetszés szerinti többszöröse lehet. Ez olyan körülmény, a mely magában véve mindenesetre elég különös, a nélkül azonban, hogy belőle S megengedhetetlen voltára következtetni lehetne.

25. §.

Minden egyenesvonalú háromszögben (10. ábra) *ama körök kerületei, melyeket az oldalokkal mint radiusokkal leírunk, úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemben fekvő szögek sinusai.*

Legyen ugyanis abc $= R$, am $\perp$ bac, és legyenek bn, cp ||| am: akkor cab $\perp$ ambn, tehát (minthogy cb $\perp$ ba) cb $\perp$ ambn, és így cpbn $\perp$ ambn. Messe a $\overline{\text{cp}}$ F-je $\overline{\text{bn}}$, $\overline{\text{am}}$-et d, illetőleg e-ben, és a cpbn, cpam, bnam sávokat a cd, ce, de L-darabokban: akkor (a 20. § szerint) cde = az ndc, nde síkok alkotta szöggel, tehát $= R$, és épen úgy ced = cab.



10. ábra.

Ámde (a 21. § szerint) az L-vonalú ced háromszögben

$$\text{ec} : \text{cd} = 1 : \sin \text{dec} = 1 : \sin \text{cab}.$$

A 21. § szerint még

$$\text{ec} : \text{dc} = \bigcirc\, \text{ec} : \bigcirc\, \text{dc} \quad (F\text{-ben})$$
$$= \bigcirc\, \text{ac} : \bigcirc\, \text{bc} \quad (18.\ \S).$$

E szerint egyszersmind

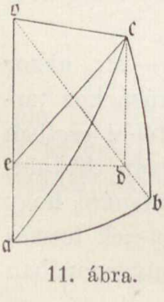
$$\bigcirc\, \text{ac} : \bigcirc\, \text{bc} = 1 : \sin \text{cab}.$$

Minthogy így a felállított tétel derékszögű háromszögre nézve be van bizonyítva, az oly módon, hogy bármely háromszöget 2 derékszögűre bontunk fel, könnyen általánosan is igazolható.

26. §.

Bármely gömbháromszögben (11. ábra) *az oldalok sinusai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemben fekvő szögek sinusai.*

Legyen ugyanis abc $= R$, és ced legyen merőleges a gömbnek oa átmérőjére: akkor ced $\perp$ aob, és (minthogy boc is $\perp$ boa) cd $\perp$ ob. A ceo, cdo háromszögekben azonban (a 25. § szerint)



11. ábra.

$$\bigcirc\, \text{ec} : \bigcirc\, \text{oc} : \bigcirc\, \text{dc} = \sin \text{coe} : 1 : \sin \text{cod} =$$
$$= \sin \text{ac} : 1 : \sin \text{bc}.$$

Ámde (a 25. § szerint) egyszersmind

$$\bigcirc\, \text{ec} : \bigcirc\, \text{dc} = \sin \text{cde} : \sin \text{ced}.$$

Ezért

$$\sin \mathfrak{ac} : \sin \mathfrak{bc} = \sin \mathfrak{cde} : \sin \mathfrak{ced}.$$

Ámde $\mathfrak{cde} = R = \mathfrak{cba}$, és $\mathfrak{ced} = \mathfrak{cab}$. Ebből következik, hogy

$$\sin \mathfrak{ac} : \sin \mathfrak{bc} = 1 : \sin \mathfrak{a}.$$

Ebből a tételből — mint ismeretes — levezethető a gömb egész trigonometriája, *a mely e szerint a XI. axiómától független alapot nyert.*

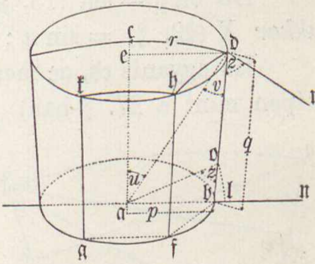
27. §.

Ha $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bd}$ (12. ábra) *merőlegesek* $\mathfrak{ab}$*-re, és* $\mathfrak{cab}$*-t* $\overline{\mathfrak{ab}}$ *mentén eltoljuk: akkor* $\mathfrak{c}$*-nek útja (melynek neve itt* $\mathfrak{cd}$ *legyen) úgy aránylik* $\mathfrak{ab}$-hez, mint $\sin u : \sin v$.

Legyen ugyanis $\mathfrak{de} \perp \mathfrak{ca}$: akkor az $\mathfrak{ade}$, $\mathfrak{adb}$ háromszögekben (a 25. § szerint)

$$\bigcirc\,\mathfrak{ed} : \bigcirc\,\mathfrak{ad} : \bigcirc\,\mathfrak{ab} = \sin u : 1 : \sin v.$$

Ha $\mathfrak{bacd}$ az $\mathfrak{ac}$ körül forog, $\mathfrak{b}$ egy $\bigcirc\,\mathfrak{ab}$-t, $\mathfrak{d}$ egy $\bigcirc\,\mathfrak{ed}$-t ír le, és az említett $\mathfrak{cd}$ útját jelöljük itt $\odot\,\mathfrak{cd}$-vel.



12. ábra.

Ha továbbá $\odot\,\mathfrak{ab}$-be bármilyen (egyenes vonalú) $\mathfrak{bfg}\ldots$ sokszöget írunk be: akkor, ha annak valamennyi $\mathfrak{bf}$, $\mathfrak{fg}, \ldots$ oldalán át olyan síkokat fektetünk, melyek $\odot\,\mathfrak{ab}$-re merőlegesek, $\odot\,\mathfrak{cd}$-ben is egy ugyanannyi oldalú sokszögű idom keletkezik, és (úgy, mint a 23. §-ban) kiadódik, hogy

$$\mathfrak{cd} : \mathfrak{ab} = \mathfrak{dh} : \mathfrak{bf} = \mathfrak{hk} : \mathfrak{fg} \text{ stb.},$$

és így

$$\mathfrak{dh} + \mathfrak{hk} + \text{stb.} : \mathfrak{bf} + \mathfrak{fg} + \text{stb.} = \mathfrak{cd} : \mathfrak{ab}.$$

Ha a $\mathfrak{bf}$, $\mathfrak{fg}, \ldots$ oldalok mindegyike az eltűnés felé tart: akkor nyilvánvaló, hogy

$$\mathfrak{bf} + \mathfrak{fg} + \text{stb.} \sim \bigcirc\,\mathfrak{ab}$$

és

$$\mathfrak{dh} + \mathfrak{hk} + \text{stb.} \sim \bigcirc\,\mathfrak{ed}.$$

E szerint egyszersmind

$$\bigcirc\,\mathfrak{ed} : \bigcirc\,\mathfrak{ab} = \mathfrak{cd} : \mathfrak{ab}.$$

Ámde

$$\bigcirc\,\mathfrak{ed} : \bigcirc\,\mathfrak{ab} = \sin u : \sin v$$

volt. Ebből következik, hogy

$$\mathfrak{cd} : \mathfrak{ab} = \sin u : \sin v.$$

Ha $\mathfrak{ac}$ a $\mathfrak{bd}$-től a végtelenbe távozik: akkor

$$\mathfrak{cd} : \mathfrak{ab},$$

és így

$$\sin u : \sin v$$

is *állandó* marad. Ámde (az 1. § szerint) $u \to R$, és ha $\mathfrak{dm} \parallel\!\mid \mathfrak{bn}$: akkor $v \to z$. Ebből következik, hogy

$$\mathfrak{cd} : \mathfrak{ab} = 1 : \sin z.$$

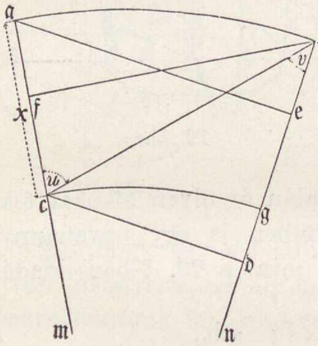
Az említett $\mathfrak{cd}$ utat így jelöljük: $\mathfrak{cd} \parallel \mathfrak{ab}$.

28. §.

Ha $\mathfrak{bn} \parallel\!\mid \triangleq \mathfrak{am}$ (13. ábra), *meg* $\mathfrak{c}$ *az* $\overline{\mathfrak{am}}$-*ben van és* $\mathfrak{ac} = x$: *akkor* X (23. §) $= \sin u : \sin v$.

Ha ugyanis $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{ae}$ merőlegesek $\mathfrak{bn}$-re, és $\mathfrak{bf} \perp \mathfrak{am}$: akkor (hasonlóképen mint a 27. §-ban)

$$\bigcirc\,\mathfrak{bf} : \bigcirc\,\mathfrak{cd} = \sin u : \sin v.$$



13. ábra.

Ámde nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{bf} = \mathfrak{ae}$, a miért

$$\bigcirc\,\mathfrak{ea} : \bigcirc\,\mathfrak{dc} = \sin u : \sin v.$$

Az $\mathfrak{am}$ és $\mathfrak{cm}$ F-felületeiben azonban (melyek az $\mathfrak{ambn}$ sávot $\mathfrak{ab}$-ben és $\mathfrak{cg}$-ben metszik) a 21. § szerint

$$\bigcirc\,\mathfrak{ea} : \bigcirc\,\mathfrak{dc} = \mathfrak{ab} : \mathfrak{cg} = X.$$

Ezért egyszersmind

$$X = \sin u : \sin v.$$

29. §.

Ha $\mathfrak{bam} = R$ (14. ábra), $\mathfrak{ab} = y$, *és* $\mathfrak{bn} \parallel\!\mid \mathfrak{am}$: *akkor* S-*ben*

$$Y = \cot \tfrac{1}{2} u.$$

Ha ugyanis $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}$, és $\mathfrak{cp} \parallel\!\mid \mathfrak{am}$ (tehát $\mathfrak{bn} \parallel\!\mid \triangleq \mathfrak{cp}$), továbbá $\mathfrak{pcd} = \mathfrak{qcd}$: akkor (a 19. § szerint) van olyan a $\mathfrak{cd}$-re merőleges $\mathfrak{ds}$, hogy $\mathfrak{ds} \parallel\!\mid \mathfrak{cp}$, és így (az 1. § szerint) $\mathfrak{dt} \parallel\!\mid \mathfrak{cq}$. Ha továbbá $\mathfrak{be} \perp \mathfrak{ds}$: akkor minthogy (a 7. § szerint) $\mathfrak{ds} \parallel\!\mid \mathfrak{bn}$, egyszersmind (a 6. § szerint) $\mathfrak{bn} \parallel\!\mid \mathfrak{es}$, és (minthogy $\mathfrak{dt} \parallel\!\mid \mathfrak{cq}$) $\mathfrak{bq} \parallel\!\mid \mathfrak{et}$, úgy hogy (az 1. § szerint) $\mathfrak{ebn} = \mathfrak{ebq}$.

Ha most elképzeljük a $\mathfrak{bn}$ L-jének $\mathfrak{bcf}$ darabját és az $\mathfrak{ft}$, $\mathfrak{dt}$, $\mathfrak{cq}$

és $\mathfrak{et}$ L vonalainak $\mathfrak{fg}$, $\mathfrak{dh}$, $\mathfrak{ck}$ és $\mathfrak{el}$ darabjait: akkor (a 22. § szerint) nyilvánvaló, hogy

$$\mathfrak{hg}=\mathfrak{df}=\mathfrak{dk}=\mathfrak{hc},$$

a miből következik, hogy

$$\mathfrak{cg}=2\mathfrak{ch}=2v.$$

Nyilvánvaló, hogy épen úgy

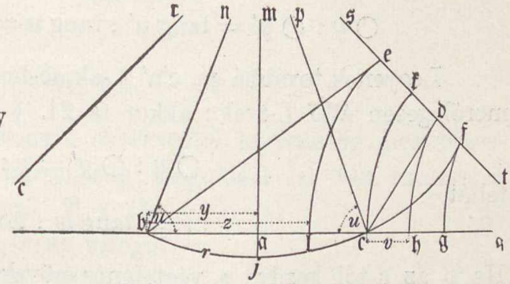
$$\mathfrak{bg}=2\mathfrak{bl}=2z.$$

Ámde

$$\mathfrak{bc}=\mathfrak{bg}-\mathfrak{cg},$$

a miért

$$y=z-v,$$



14. ábra.

a miből (a 24. § szerint) következik, hogy

$$Y=Z:V.$$

Végre (a 28. § szerint)

$$Z=1:\sin\tfrac{1}{2}u$$

és

$$V=1:\sin(R-\tfrac{1}{2}u),$$

úgy hogy

$$Y=\cot\tfrac{1}{2}u.$$

30. §.

A 25. § alapján könnyen belátható, hogy *S-ben a sík trigonometria* problémájának megoldására szükséges volna, hogy olyan kifejezéssel rendelkezzünk, mely a kör kerületét a radiussal fejezi ki. Ezt az L rektifikáczíójával akarjuk megvalósítani.

Legyenek $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{cm}$, $\mathfrak{c'm'}$ (15. ábra) $\perp$-ek $\mathfrak{a\bar{c}}$-re és $\mathfrak{b}$ legyen bárhol az $\mathfrak{ab}$-ben: akkor (a 25. § szerint)

$$\sin u:\sin v=\bigcirc p:\bigcirc y,$$

és

$$\sin u':\sin v'=\bigcirc p:\bigcirc y',$$

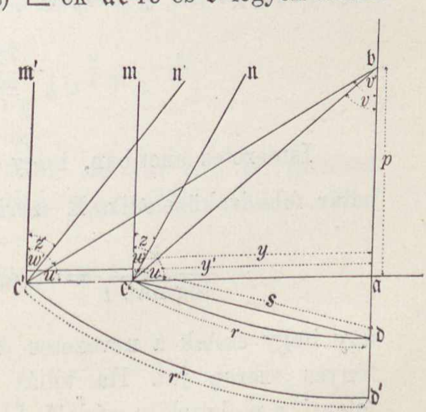
úgy hogy

$$\frac{\sin u}{\sin v}\bigcirc y=\frac{\sin u'}{\sin v'}\bigcirc y'.$$

Ámde (a 27. § szerint)

$$\sin v:\sin v'=\cos u:\cos u',$$

úgy hogy



15. ábra.

$$\frac{\sin u}{\cos u} \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\cos u'} \bigcirc y',$$

vagy pedig

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = \operatorname{tang} u' : \operatorname{tang} u = \operatorname{tang} w : \operatorname{tang} w'.$$

Legyenek továbbá $\mathfrak{cn}$, $\mathfrak{c'n'}$ $|||$-ak $\mathfrak{ab}$-hez és $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{c'd'}$ legyenek az $\widetilde{\mathfrak{ab}}$-re merőlegesen álló L-ívek: akkor (a 21. § szerint) egyszersmind

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = r : r';$$

tehát

$$r : r' = \operatorname{tang} w : \operatorname{tang} w'.$$

Ha p az $\mathfrak{a}$-tól kezdve a végtelenig növekedik: akkor $w \rightharpoondown z$, $w' \rightharpoondown z'$, és így tehát egyszersmind

$$r : r' = \operatorname{tang} z : \operatorname{tang} z'.$$

Az *r-től független* $r : \operatorname{tang} z$ *állandót* nevezzük i-nek. Ha $y \rightharpoondown 0$: akkor

$$\left(\frac{r}{y} = \frac{i \operatorname{tang} z}{y}\right) \rightharpoondown 1,$$

és így

$$\frac{y}{\operatorname{tang} z} \rightharpoondown i.$$

Ámde a 29. §-ból következik, hogy

$$\operatorname{tang} z = \tfrac{1}{2}(Y - Y^{-1});$$

tehát

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \rightharpoondown i,$$

vagy pedig (a 24. § szerint)

$$\frac{2y I^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \rightharpoondown i.$$

Ismeretes azonban, hogy ez a kifejezés (ha $y \rightharpoondown 0$) az $\frac{i}{\log \operatorname{nat.} I}$ határ felé is közeledik. E szerint tehát

$$\frac{i}{\log \operatorname{nat.} I} = i \quad \text{és} \quad I = e = 2{\cdot}7182818\ldots,$$

úgy hogy ennek a nevezetes számnak itt is épen olyan fontos mint fényes szerep jut. Ha tehát mostantól fogva i azt a hosszúságot jelenti, a melynek megfelelő $I = e$: akkor $r = i \operatorname{tang} z$. Ámde (a 21. § szerint) volt $\bigcirc y = 2\pi r$, és így

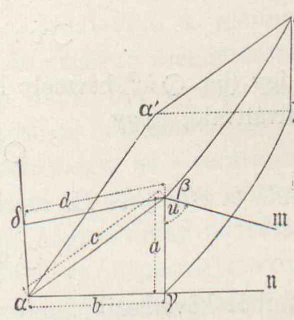
$$\bigcirc\, y = 2\pi i \,\mathrm{tang}\, z = \pi i\,(Y - Y^{-1}) =$$

$$= \pi i\left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right) = \frac{\pi y}{\log\,\mathrm{nat.}\, Y}\,(Y - Y^{-1})$$

(a 24. § szerint).

31. §.

S-ben minden egyenesvonalú *derékszögű* háromszög megoldásához (a mivel *valamennyi* háromszög megoldása el van intézve) a következő 3 egyenlet elegendő. T. i. (ha a, b (16. ábra) a befogókat, c az átfogót és α, β a befogókkal szemben fekvő szögeket jelentik) olyan egyenlet, mely vonatkozást állapít meg: 1) a, c, α között; 2) a, α, β között; 3) a, b, c között. Ezekből az egyenletekből ugyanis a kétség kívül még hiányzó és a háromszög teljes megoldásához szükséges három egyenlet kiküszöbölés útján állítható elő.



16. ábra.

I. A 25. és 30. §-ból következik, hogy

$$1 : \sin\alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = \left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right) : \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right),$$

a mi az a, c, α között fennálló egyenlet.

II. A 27. § szerint (ha $\beta\mathrm{m} \parallel\!| \gamma\mathrm{n}$)

$$\cos\alpha : \sin\beta = 1 : \sin u,$$

a 29. § szerint pedig

$$1 : \sin u = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}).$$

Ezért

$$\cos\alpha : \sin\beta = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right),$$

a mi az a, α, β között fennálló egyenlet.

III. Ha $\alpha\alpha' \llcorner \beta\alpha\gamma$, és $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ $\|$-ak $\alpha\alpha'$-val (27. §), továbbá $\beta'\alpha'\gamma' \llcorner \alpha\alpha'$: akkor nyilvánvaló, hogy (úgy, mint a 27. §-ban)

$$\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u} = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}),$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \tfrac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

és

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \tfrac{1}{2}(C + C^{-1}),$$

úgy hogy

$$\tfrac{1}{2}(C+C^{-1})=\tfrac{1}{2}(A+A^{-1})\tfrac{1}{2}(B+B^{-1}),$$

vagy pedig

$$e^{\frac{c}{i}}+e^{-\frac{c}{i}}=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}}+e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}}+e^{-\frac{b}{i}}\right),$$

a mi az a, b, c között fennálló egyenlet.

{Ha $\gamma\alpha\delta=R$, és $\beta\delta \mathrel{\llcorner} \alpha\delta$: akkor

$$\bigcirc c : \bigcirc a = 1 : \sin\alpha,$$

és

$$\bigcirc c : \bigcirc (d=\beta\delta) = 1 : \cos\alpha,$$

és így (ha $\bigcirc x^2$ bármely x-re nézve a $\bigcirc x \cdot \bigcirc x$ szorzatot jelenti) nyilvánvaló, hogy

$$\bigcirc a^2+\bigcirc d^2=\bigcirc c^2.$$

Ámde (a 27. § és II. szerint)

$$\bigcirc d=\bigcirc b\cdot\tfrac{1}{2}(A+A^{-1}),$$

a miből következik, hogy

$$\left(e^{\frac{c}{i}}-e^{-\frac{c}{i}}\right)^2=\tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{a}{i}}+e^{-\frac{a}{i}}\right)^2\left(e^{\frac{b}{i}}-e^{-\frac{b}{i}}\right)^2+\left(e^{\frac{a}{i}}-e^{-\frac{a}{i}}\right)^2.$$

Ez más, ugyancsak az a, b, c között fennálló egyenlet (melynek *jobb* oldala könnyen *szimmetrikus* vagy *invariabilis* alakra hozható).}

Végre abból, hogy

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}=\tfrac{1}{2}(A+A^{-1}),$$

és

$$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=\tfrac{1}{2}(B+B^{-1}),$$

(tekintettel III-ra) azonnal kitűnik, hogy

$$\cot\alpha\cot\beta=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{c}{i}}+e^{-\frac{c}{i}}\right),$$

a mi a c, α, β között fennálló egyenlet.

32. §.

Az előbbi §-ban sikerült megoldanunk azt a feladatot, mely S-ben a sík trigonometriájának tárgya. Evvel azonban egy *absolute* igaz (és nemcsak a Σ vagy S valóságának határozott hypothesisére támaszkodó) sík trigonometriára nézve közvetetlenül még nem nyertünk semmit.

Kimutatható azonban (a priori is, de a legkönnyebben közvetetlenül a posteriori), hogy *a határértéke minden az i-t tartalmazó és így azon a feltevésen alapuló kifejezésnek, hogy van i, i-nek a végtelenbe való növekedésével pontosan megadja az épen kifejezendő mennyiséget Σ esetére, tehát arra az esetre, mikor a feltevés az, hogy i egyáltalában nincsen.* E mellett azonban semmi esetre sem szabad azt hinnünk, hogy valóban magát a geometria rendszerét lehetne változtatni és pl. (S valóságának feltevése esetében) i-t *tetszés* szerint lehetne nagyobbítani vagy kisebbíteni, vagy pedig egészen eltünőnek venni. Ez magában véve annyira lehetetlen, a mennyire a tér természete merőben változhatatlan és önmagában meghatározott. Ugyanis (absolute vagy feltétlenül szólva) vagy van i, vagy pedig nincsen ilyen, és az első esetben annak nagysága önmagában teljesen meghatározott és örökké változhatatlan. Minthogy az i természetét illetőleg mindeddig semmit sem tudunk, sőt a szerzőnek sikerült (teljes geometriai szigorúsággal) megmutatni, hogy a dolog természete szerint a legélesebb elmének sem lehet soha ilyen megismerésre szert tennie; mindenesetre meg van engedve, hogy *egymásután* tetszés szerinti különböző feltevéseket vegyünk fel alapul, és így különböző *hypothetikus* rendszereket mutassunk be.

Feltéve azonban, hogy minden ilyen fajta kifejezésben, mely az i-t tartalmazza, ez a betű S esetében azt az önmagában meghatározott hosszúságot jelenti, a melynek megfelelőleg $I = e$, Σ esetében pedig mindig a fent említett határérték veendő: akkor nyilvánvaló, hogy valamennyi az S igaz voltának feltevéséből eredő kifejezés (ebben az értelemben) *feltétlenül* érvényes, habár mindig ismeretlennek kell maradnia, vajjon tulajdonképen Σ-e, vagy pedig S a fennálló.

Így pl. a 30. §-ban előforduló kifejezésből (még pedig akár differencziálás segítségével, akár a nélkül) könnyen ered az ismeretes $\bigcirc x = 2\pi x$ érték; I-ből (31. §), a kellő eljárást alkalmazva, következik, hogy $1 : \sin\alpha = c : a$; II-ből pedig, hogy $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta} = 1$, tehát $\alpha + \beta = R$; a III-ban előforduló egyenletről végre az első megtekintésre világos, hogy azonosságba megy át (úgy, hogy Σ esetében szintén érvényes, habár erre nézve új igazságot nem állapit meg, vagyis nem tüntet fel); ámde olyan módon is lehet vele elbánni, hogy Pythagoras tételét, azaz a $c^2 = a^2 + b^2$ egyenletet szolgáltassa. Ezek nyilván a sík trigonometriájának ismeretes alapegyenletei Σ-ban.

33. §.

Most már röviden el akarjuk mondani, hogy ez az elmélet mit nyújt, és eredményének mi a lényege.

I. Az, vajjon a valóságban Σ avagy S áll-e fenn, itt (és — a mint a szerző be tudja bizonyítani — mindig) teljesen és merőben eldöntetlen marad.

II. Van már mostan absolute igaz (azaz minden feltevéstől mentes) *sík trigonometriánk*, a melyben azonban (I. szerint) az i mennyiség és az, vajjon ilyen egyáltalában van-e, egészen határozatlan marad, míg ettől az egy ismeretlentől eltekintve, minden egyéb meg van határozva. A *gömbi* trigonometria pedig a 26. §-ban absolut igazolását nyerte, úgy hogy a közönséges, ismeretes gömbi trigonometria a XI. axiómától nem is függ és feltétlenül igaz.

III. E két trigonometria segítségével és néhány (a nyomtatvány 32. §-ában előadott) segédtétel alkalmazásával a geometria és mechanika mindazon feladatait, a melyeknek az ú. n. analizis mostani fejlettségében ura, (a most már semmi további magyarázatra nem szoruló értelemben) immár *egyenesen* a XI. axióma segítsége nélkül oldhatjuk meg (a melyre eddig minden mint fő- és alappillérre támaszkodott), és az egész geometria mostantól fogva az emlitett értelemben az újabbaknak (a kellő korlátok közt méltán dicsért) analitikai módszerével tárgyalható.

Ha ehhez még hozzájárul annak lehetetlenségének bebizonyítása, hogy valaha Σ és S között dönthessünk (a mi a szerzőnek szintén sikerült): akkor ezzel a XI. axióma lényegének egészen a mélyére hatoltunk és a párhuzamosak bonyolúlt materiáján teljesen kersztül hatoltunk, a teljes napfogyatkozás pedig, mely a jelen óráig (az igazság után szomjazó lelkek felett) oly szerencsétlenül uralkodott, a tudomány iránti kedvet lelohasztotta és annyi ember idejét és erejét elrabolta, örökre eltünt. És a szerzőben *él* az a (teljesen tisztúlt) meggyőződés (a melyet minden értelmes olvasónál is feltételez), hogy e tárgy tisztázásával a tudomány igazi gyarapításának, az ész művelésének, és így az emberi sors lendítésének egyik *legfontosabb* és *legfényesebb* lépése megtörtént.

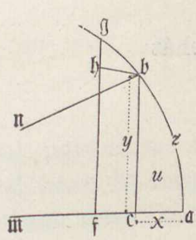
Ráadásul az igazság barátai bizonyára szívesen fogadják, hogy S esetére (a nyomtatvány 34—43. §-ában) megvan a kör geometriai quadraturája, azaz, hogy vonalzóval és körzővel meg van szerkesztve olyan kör, mely területére nézve bizonyos egyenesvonalú idommal egyenlő, úgy hogy *vagy* a hirhedt XI. axióma valóban igaz, *vagy* pedig *a kör világhírű quadraturája* van megvalósítva a nélkül azonban, hogy valaha megtudhatnók, hogy a kettő közül valóban melyik áll fenn. Különben már abból, hogy a szerző még ezt a magában is mindenesetre felette csodálatos (habár nyilvánvalóan semmiképen sem a tulajdonképen közönségesen keresett [quadraturával] megegyező) quadraturát, ennek az egész elméletnek *lényegére* nézve, csak teljesen jelentéktelen *megjegyzésnek* tekinti, az egésznek annál magasabb értéke és tovább czélzó irányzata sejthető.

Végül itt csak még azt jegyezzük meg, hogy (a 34. § szerint) valóban képesek vagyunk bármely $\mathfrak{d}$ pontból (12. ábra a 209. oldalon) valamely adott $\mathfrak{an}$ egyeneshez geometriai úton olyan $\mathfrak{dm}$-et húzni, hogy $\mathfrak{dm} \parallel\!| \mathfrak{an}$ legyen, habár soha egyetlen elme sem lesz képes az $\mathfrak{adm}$ szögről logikai következtetéssel a priori többet kideríteni, mint azt, hogy >0 és nem $>2R$—$\mathfrak{d}$an.

32.* §.

Hátra van még annak rövid bemutatása, hogy S-ben a *problémák* miképen oldhatók meg, és miután ez (könnyebb példák alapján) megtörtént, végül világosan ki kell fejtenünk, hogy ez az elmélet mit nyújt.

I. Legyen $\overset{\frown}{\mathfrak{ab}}$ (17. ábra) valamely vonal a síkban, melynek (derékszögű koordinátákra vonatkozó) egyenlete $y=f(x)$, és jelöljük z-nek valamely tetszés szerinti növekményét dz-vel, x, y meg az u terület ugyanannak a dz-nek megfelelő növekményeit pedig rendre dx-, dy-, du-val; legyen továbbá $\mathfrak{bh} \parallel \mathfrak{cf}$, (a 31. és 27. § szerint) fejezzük ki $\frac{\mathfrak{bh}}{dx}$-et y-nal, és határozzuk meg $\frac{dy}{dx}$ *határértékét*, ha dx a 0 határértékhez közeledik (a mit az ilyen határértékek meghatározásánál mindig hallgatólag feltételezünk): akkor ezekből ismeretessé válik $\frac{dy}{\mathfrak{bh}}$ határértéke, és evvel együtt tang $\mathfrak{hbg}$ is, pedig ezzel (minthogy $\mathfrak{hbc}$ nyilván sem nem $>$, sem nem $<R$, és így $=R$) $\mathfrak{b}$-ben a $\mathfrak{bg}$ *érintője* meg van határozva y által.



17. ábra.

II. Bebizonyítható, hogy

$$\frac{dz^2}{dy^2+\mathfrak{bh}^2} \sim 1.$$

* [Itt következik az Appendix 32—43. §-ainak magyar fordítása.]

Ebből kiszámítható $\frac{dz}{dx}$ *határértéke*, a melyből azután z (x által kifejezve) integrálás útján nyerhető.

S-ben levezethetjük valamely *konkrét módon* megadott vonal egyenletét is, pl. az L-ét.

Ha t. i. $\mathfrak{a}\widetilde{\mathfrak{m}}$ az L tengelye: akkor bármely az $\mathfrak{a}\widetilde{\mathfrak{m}}$-ből emelkedő $\mathfrak{c}\mathfrak{b}$ metszi L-t (mert a 19. § szerint $\mathfrak{a}\widetilde{\mathfrak{m}}$ kivételével minden az $\mathfrak{a}$-ból kiinduló egyenes [még egy pontban] metszi L-t). Ámde akkor (ha $\mathfrak{b}\widetilde{\mathfrak{n}}$ tengely)

$$X = 1 : \sin \mathfrak{cbn} \qquad (28.\ \S),$$

és

$$Y = \cot \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{cbn} \qquad (29.\ \S),$$

és ebből következik, hogy

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1},$$

vagyis

$$e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1}$$

a keresett egyenlet. E szerint

$$\frac{dy}{dx} \sim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

ámde

$$\frac{\mathfrak{bh}}{dx} = 1 : \sin \mathfrak{cbn} = X;$$

tehát

$$\frac{dy}{\mathfrak{bh}} \sim (X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$1 + \frac{dy^2}{\mathfrak{bh}^2} \sim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{\mathfrak{bh}^2} \sim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{\mathfrak{bh}} \sim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

és

$$\frac{dz}{dx} \sim X^2(X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

a miből integrálás utján kiadódik, hogy

$$z = i(X^2-1)^{\frac{1}{2}} = i \cot \mathfrak{cbn}$$

(úgy mint a 30. §-ban).

III. Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{du}{dx} \sim \frac{\mathfrak{hfcbh}}{dx},$$

a mit (minthogy csakis y-tól függ) előbb y-nal kell kifejeznünk; ebből integrálás segítségével nyerjük u-t.

Ha (a 12. ábrában a 209. oldalon) $\mathfrak{ab} = p$, $\mathfrak{ac} = q$, $\mathfrak{cd} = r$ és $\mathfrak{cabdc} = s$; akkor (úgy mint II-ben) megmutathatjuk, hogy

$$\frac{ds}{dq} \sim r,$$

és ez

$$= \tfrac{1}{2} p \left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}\right),$$

a miből integrálás útján származik, hogy

$$s = \tfrac{1}{2} pi \left(e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}\right).$$

Ugyanezt integrálás nélkül is lehet levezetni.

Ha pl. a kör egyenletét (a 31. § III. alapján), az egyenesét (a 31. § II. alapján) és valamely kúpszeletét (az előbbiek alapján) állítjuk elő: akkor az e vonalok határolta területek is kiszámíthatók.

Nyilvánvaló, hogy az a t görbe felület, mely $\parallel$ a p sík idommal (és ettől q távolságnyira van), úgy aránylik p-hez, mint a homolog vonaldarabok második hatványai, vagyis mint

$$\tfrac{1}{4} \left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}\right)^2 : 1.$$

Könnyen belátható továbbá, hogy a térfogatnak ugyanazzal az eljárással történő kiszámítása két integrálást igényel (mert itt maga a differencziál is csak integrálás segítségével határozható meg). Mindenekelőtt keressük azt a térfogatot, melyet p és t, valamint a p és t határait összekötő és p-re merőleges egyenesek összessége határol. Azt találjuk (akár integrálás segítségével, akár pedig a nélkül), hogy ez a térfogat

$$= \tfrac{1}{8} pi \left(e^{\frac{2q}{i}} - e^{-\frac{2q}{i}}\right) + \tfrac{1}{2} pq.$$

Meghatározhatjuk még S-ben testek felületét valamint bármiféle vonal *görbületét*, *evolutáját*, *evolvensét* stb.-jét. A mi a görbületet illeti, ez S-ben vagy az L-ével megegyező, vagy valamely kör sugarával, vagy pedig valamely egyenessel $\parallel$ görbének attól az egyenestől való *távolságával* van meghatározva. Az előbbiek alapján ugyanis könnyen kimutatható, hogy a síkban az L-en, a körön és az egyenessel ||-okon kívül más egyenletes vonal nincsen.

IV. A körre nézve (úgy mint III-ban) azt nyerjük, hogy

$$\frac{d \odot x}{dx} \backsim \bigcirc x,$$

a miből (a 30. § szerint) integrálás segítségével kiadódik, hogy

$$\odot x = \pi i^2 \left(e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{-\frac{x}{i}}\right).$$

V. A 9. ábrában (a 206. oldalon) az (L-alakú $\mathfrak{ab} = r$, az ezzel || $\mathfrak{cd} = y$ és az $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bd} = x$ egyenesek határolta) $\mathfrak{cabdc} = u$ területre nézve

$$\frac{du}{dx} \backsim y,$$

hol (a 24. § szerint)

$$y = re^{-\frac{x}{i}},$$

és innen (integrálás segítségével) azt nyerjük, hogy

$$u = ri\left(1 - e^{-\frac{x}{i}}\right).$$

Ha x a végtelenbe növekedik: akkor S-ben $e^{-\frac{x}{i}} \backsim 0$, és így

$$u \backsim ri.$$

A következőkben az $\mathfrak{mabn}$ *nagysága* alatt ezt a határértéket értjük.

Ha p az F-nek valamely idomát jelenti, akkor hasonló módon azt találjuk, hogy az a térfogat, a melyet p és a p határszéléből kiinduló tengelyek összessége határol, $\frac{1}{2} pi$-vel egyenlő.

VI. Ha a z gömbsüveg középpontjában a szög $2u$ (10. ábra a 208. oldalon), a legnagyobb kör kerülete p és az (u szögnek megfelelő) $\mathfrak{fc}$ ív $= x$: akkor (a 25. § szerint)

$$1 : \sin u = p : \bigcirc \mathfrak{bc},$$

és ebből következik, hogy

$$\bigcirc \mathfrak{bc} = p \sin u.$$

Ezen kívül még

$$x = \frac{pu}{2\pi}, \quad \text{és} \quad dx = \frac{pdu}{2\pi}.$$

Továbbá

$$\frac{dz}{dx} \backsim \bigcirc \mathfrak{bc},$$

és így

$$\frac{dz}{du} \sim \frac{p^2}{2\pi} \sin u,$$

a miből (integrálással) azt nyerjük, hogy

$$z = \frac{\sin \text{vers. } u}{2\pi} p^2.$$

Képzeljük azt az F-et, a mely (a gömbsüveg $\mathfrak{f}$ középpontján átmenő) p-t tartalmazza; az $\mathfrak{af}$, $\mathfrak{ac}$-n át fektetett $\overline{\mathfrak{fem}}$, $\overline{\mathfrak{cem}}$ síkok legyenek merőlegesek F-re, és messék ezt $\mathfrak{feg}$-ben, ill. $\mathfrak{ce}$-ben, és vegyük tekintetbe még (a $\mathfrak{c}$-ből $\mathfrak{feg}$-re merőlegesen bocsátott) L-alakú $\mathfrak{cd}$-t és az L-alakú $\mathfrak{cf}$-et is. Akkor (a 20. § szerint) azt találjuk, hogy

$$\mathfrak{cef} = u$$

és (a 21. § szerint), hogy

$$\frac{\mathfrak{fd}}{p} = \frac{\sin \text{vers. } u}{2\pi},$$

és így

$$z = \mathfrak{fd} \cdot p.$$

Ámde (a 21. § szerint)

$$p = \pi \cdot \mathfrak{fdg},$$

és ezért

$$z = \pi \cdot \mathfrak{fd} \cdot \mathfrak{fdg}.$$

De (a 21. § szerint)

$$\mathfrak{fd} \cdot \mathfrak{fdg} = \mathfrak{fc} \cdot \mathfrak{fc},$$

a miből következik, hogy

$$z = \pi \cdot \mathfrak{fc} \cdot \mathfrak{fc} = \odot\, \mathfrak{fc} \text{ az } F\text{-ben.}$$

Legyen már most (a 14. ábrában a 211. oldalon) $\mathfrak{bj} = \mathfrak{cj} = r$: akkor (a 30. § szerint)

$$2r = i(Y - Y^{-1}),$$

és így (a 21. § szerint)

$$\odot\, 2r \; (F\text{-ben}) = \pi i^2 (Y - Y^{-1})^2.$$

Ámde (IV. szerint) egyszersmind

$$\odot\, 2y = \pi i^2 (Y^2 - 2 + Y^{-2});$$

tehát $\odot\, 2r$ (F-ben) $= \odot 2y$, és ezért *a z gömbsüveg felszíne egyenlő olyan körrel, a melynek sugara az* $\mathfrak{fc}$ *húrral egyenlő.*

Ebből következik, hogy az egész gömb felszíne

$$=\odot \mathfrak{fg}=\mathfrak{fdg}\cdot p=\frac{p^2}{\pi},$$

és hogy gömbök felszínei úgy aránylanak egymáshoz, mint legnagyobb köreik kerületeinek második hatványai.

VII. Hasonló módon találjuk, hogy S-ben az x radiussal leírt gömb térfogata

$$=\tfrac{1}{2}\pi i^3(X^2-X^{-2})-2\pi i^2 x;$$

az a felület pedig, a mely a $\mathfrak{cd}$ vonalnak az $\mathfrak{ab}$ körül való forgatása révén származik,

$$=\tfrac{1}{2}\pi i p(Q^2-Q^{-2}),$$

és a $\mathfrak{cabdc}$ leírta térfogat

$$=\tfrac{1}{4}\pi i^2 p(Q-Q^{-1})^2.$$

Hogy miképen lehet azonban mindazt, a mit a IV. ponttól kezdve eddig tárgyaltunk, integrálás nélkül levezetni, azt a rövidség kedvéért mellőzzük.

Be lehet bizonyítani, hogy *az a határérték, melyhez minden egyes az i-t tartalmazó* (és így *i létezésének hypothesisére* támaszkodó) *kifejezés akkor közeledik, ha i a végtelenbe növekedik, pontosan az épen kifejezendő mennyiséget szolgáltatja Σ esetére* (tehát, midőn a feltevés az, hogy *i egyáltalában nincsen*), *hacsak az egyenletek nem mennek át azonosságokba.* Semmi esetre sem szabad azonban azt hinnünk, hogy *megváltoztathatjuk magát a rendszert* (a mely *meghatározását* egészen *önmagában és önmagától nyeri*); csupán csak a *hypothesist* változtathatjuk, a mi *újra és újra* megtörténhetik, mindaddig, míg ellenmondásra nem jutunk. *Feltéve* tehát, hogy valamely *ilyen* kifejezésben az i betű abban az esetben, ha S valóban fennáll, *azt az* egyetlen mennyiséget jelenti, melynek megfelelőleg $I=e$, ha pedig *Σ a valóságban fennálló rendszer*, az *említett határértéket gondoljuk* a kifejezés helyébe téve: akkor nyilvánvaló, hogy valamennyi az *S feltételezett igaz voltából* származó kifejezés (ebben az értelemben) *feltétlenül érvényes, ámbár teljességgel ismeretlen, vajjon fennáll-e Σ, vagy sem.*

Így pl. a 30. §-ban nyert kifejezésből (*akár* differencziálás segítségével, *akár a nélkül* is) a Σ esetére könnyen nyerhető az ismeretes

$$\bigcirc x=2\pi x$$

érték; I-ből (31. §), a kellő eljárást alkalmazva, azt nyerjük, hogy

$$1:\sin\alpha=c:a,$$

II-ből pedig, hogy

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = 1, \quad \text{és így} \quad \alpha+\beta = R.$$

A III. *első* egyenlete azonosságba megy át, és így *érvényes* Σ-ban, habár itt semmit sem lehet belőle meghatározni; a második egyenletből azonban foly, hogy

$$c^2 = a^2+b^2.$$

Ezek a sík trigonometriájának ismeretes alapegyenletei Σ-ban.

Azt találjuk továbbá, hogy Σ-ban (a 32. §) III. pontjában jellemzett felszín és térfogat, mind a kettő

$$= pq;$$

IV-ből pedig, hogy

$$\odot x = \pi x^2;$$

VII-ből, hogy az x radiussal leírt gömb térfogata

$$= \tfrac{4}{3}\pi x^3$$

stb.

A (VI.) végén kimondott tételek is nyilván *feltétlenül érvényesek.*

33. §.

Hátra van még (a mit már a 32. §-ban megigértünk), hogy ennek az elméletnek lényegét kifejtsük.

I. Eldöntetlen marad, vajjon Σ-e vagy pedig egy bizonyos S felel meg a valóságnak.

II. Mindaz, a mit a XI. axióma helytelenségének feltevéséből levezetünk, (mindig a 32. § értelmében véve) *feltétlenül* érvényes, és *ebben az értelemben semmiféle hypothesisre nem támaszkodik.* Van e szerint *olyan a priori sík trigonometria,* a melyben *csupán* az *igaz* rendszer ismeretlen, és ezért csakis a kifejezések *absolut* nagysága marad ismeretlen, míg nyilván az egész rendszer *egyetlen* ismeretes eset alapján állandósítva volna. Ellenben a gömb trigonometriája a 26. §-ban feltétlen érvényességgel nyerte megalapítását. (F-ben a Σ sík geometriájával teljesen analog geometria áll fenn.)

III. Ha *bizonyos volna, hogy Σ áll fenn:* akkor e tekintetben már semmi sem maradna ismeretlen. Ha azonban *bizonyos volna, hogy Σ nem áll fenn:* akkor (31. §) (pl.), ha az x, y oldalok és az azoktól bezárt egyenes vonalú szög *konkrét módon meg vannak adva,* nyilván lehetetlen volna pusztán ebből a háromszöget absolute megoldani, azaz a priori a többi szögeket és *a harmadik oldal arányát* a két megadotthoz meghatározni; hacsak X, Y nem határoztatnának meg, a mire szükséges volna, hogy *konkrét módon* bizonyos a felett rendelkezzünk, a melynek A-ját ismerjük; akkor pedig i volna *a természetes hosszegység* (a mint e a természetes logarithmusok alapszáma). Hogy ezt az i-t, ha létezése bizonyos, miképen lehet legalább a gyakorlat czéljainak megfelelőleg lehetőleg pontosan megszerkeszteni, azt majd megmutatjuk.

IV. Nyilvánvaló, hogy az egész geometriát az I. és II-ben kifejtett értelemben az újabbaknak (a kellő korlátok közt nagyon is dicséretes) analitikai módszerével tárgyalhatjuk.

Végül kellemes lesz a szives olvasónak, ha arra az esetre, hogy nem Σ, hanem S áll fenn, olyan egyenesvonalú idomot szerkesztünk, a mely a körrel egyenlő.

34. §.

A $\mathfrak{d}$*-ből* (12. ábra a 209. oldalon) *a* $\mathfrak{dm} \parallel\!| \mathfrak{an}$ *a következő módon szerkeszthető meg.*

Legyen $\mathfrak{d}$-ből

$$\mathfrak{db} \perp \mathfrak{an};$$

emeljük az $\overset{\frown}{\mathfrak{ab}}$ egyenes valamely tetszés szerinti $\mathfrak{a}$ pontjában $\mathfrak{ac}$-t merőlegesen $\mathfrak{an}$-re (a $\mathfrak{dba}$-ban), és bocsássuk $\mathfrak{de}$-t merőlegesen $\mathfrak{ac}$-re: akkor, ha feltételezzük, hogy $\mathfrak{dm} \parallel\!| \mathfrak{bn}$, (a 27. § szerint).

$$\bigcirc\,\mathfrak{ed} : \bigcirc\,\mathfrak{ab} = 1 : \sin z.$$

Ámde $\sin z$ nem > 1, és így $\mathfrak{ab}$ sem $> \mathfrak{de}$. Ha tehát a $\mathfrak{de}$-vel egyenlő radiussal $\mathfrak{a}$-ból a $\mathfrak{bac}$-ben negyedkört írunk le, ennek $\overset{\frown}{\mathfrak{bd}}$-vel $\mathfrak{b}$, vagy pedig valamely $\mathfrak{o}$ lesz a közös pontja. Az első esetben nyilvánvaló, hogy $z = R$; a másodikban pedig (a 25. § szerint)

$$(\bigcirc\,\mathfrak{ao} = \bigcirc\,\mathfrak{ed}) : \bigcirc\,\mathfrak{ab} = 1 : \sin \mathfrak{aob},$$

úgy hogy

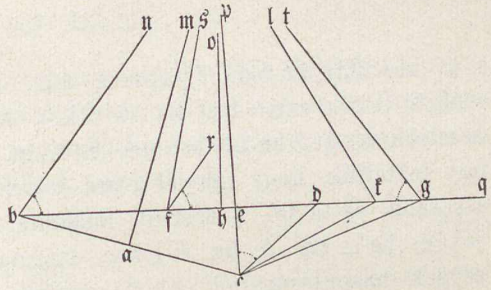
$$z = \mathfrak{aob}.$$

Ha tehát z-t egyenlővé teszszük $\mathfrak{aob}$-vel: akkor $\mathfrak{dm} \parallel\!| \mathfrak{bn}$.

35. §.

Ha S áll fenn, akkor olyan egyenes, mely valamely hegyes $\wedge$ *egyik szárára* $\perp$, *másik szárához pedig* $\parallel\!|$, *a következő módon húzható.*

Legyen $\mathfrak{am} \perp \mathfrak{bc}$ (18. ábra) és (a 19. § szerint) vegyük fel $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}$-t oly kicsinynek, hogy, midőn a $\mathfrak{bn} ||| \mathfrak{am}$-et (a 34. § szerint) előállítjuk, $\mathfrak{abn} >$ legyen az adott szögnél. Húzzuk meg továbbá (a 34. § szerint) a $\mathfrak{cp} ||| \mathfrak{am}$-et, és legyen $\mathfrak{nbq}$, $\mathfrak{pcd}$ mind a kettő egyenlő az adott szöggel: akkor $\mathfrak{b}\widetilde{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{c}\widetilde{\mathfrak{d}}$ metszik egymást. Messe ugyanis $\mathfrak{b}\widetilde{\mathfrak{q}}$ (a mely *szerkesztésénél fogva* $\mathfrak{nbc}$-n belül esik) $\mathfrak{c}\widetilde{\mathfrak{p}}$-t $\mathfrak{e}$-ben: akkor (minthogy $\mathfrak{bn} \hat{=} \mathfrak{cp}$) $\mathfrak{ebc} < \mathfrak{ecb}$, és így $\mathfrak{ec} < \mathfrak{eb}$. Legyen



18. ábra.

$$\mathfrak{ef} = \mathfrak{ec},\ \mathfrak{efr} = \mathfrak{ecd} \text{ és } \mathfrak{fs} ||| \mathfrak{ep}:$$

akkor $\mathfrak{fs}$ a $\mathfrak{bfr}$-en belül esik. Ugyanis $\mathfrak{bn} ||| \mathfrak{cp}$, tehát egyszersmind $\mathfrak{bn} ||| \mathfrak{ep}$ és $\mathfrak{bn} ||| \mathfrak{fs}$; ebből (a 14. § szerint) következik, hogy

$$\mathfrak{fbn} + \mathfrak{bfs} < 2R = \mathfrak{fbn} + \mathfrak{bfr},$$

és így, hogy $\mathfrak{bfs} < \mathfrak{bfr}$. Ezért $\mathfrak{f}\widetilde{\mathfrak{r}}$ metszi $\mathfrak{e}\widetilde{\mathfrak{p}}$-t, a miért $\mathfrak{c}\widetilde{\mathfrak{d}}$ is bizonyos $\mathfrak{d}$ pontban metszi $\mathfrak{e}\widetilde{\mathfrak{q}}$-t.

Legyen már mostan $\mathfrak{dg} = \mathfrak{dc}$ és $\mathfrak{dgt} = \mathfrak{dcp} = \mathfrak{gbn}$: akkor (minthogy $\mathfrak{cd} \hat{=} \mathfrak{gd}$)

$$\mathfrak{bn} \hat{=} \mathfrak{gt} \hat{=} \mathfrak{cp}.$$

Ha a $\mathfrak{bn}$ L-jének a $\mathfrak{b}\widetilde{\mathfrak{q}}$-ba eső pontja $\mathfrak{k}$ (19. §), és $\mathfrak{kl}$ a tengelye: akkor

$$\mathfrak{bn} \hat{=} \mathfrak{kl},$$

és így

$$\mathfrak{bkl} = \mathfrak{bgt} = \mathfrak{dcp};$$

de

$$\mathfrak{kl} \text{ egyszersmind } \hat{=} \mathfrak{cp};$$

nyilvánvaló tehát, hogy $\mathfrak{k}$ a $\mathfrak{g}$-vel egybeesik, és hogy $\mathfrak{gt} ||| \mathfrak{bn}$. Ha tehát $\mathfrak{ho}$ a $\mathfrak{bg}$-t merőlegesen felezi, evvel megszerkesztettük a $\mathfrak{ho} ||| \mathfrak{bn}$-t.

36. §.

Legyenek adva a $\mathfrak{c}\widetilde{\mathfrak{p}}$ egyenes (10. ábra a 208. oldalon) és az $\overline{\mathfrak{mab}}$ sík, és legyen $\mathfrak{cb} \perp \overline{\mathfrak{mab}}$, (a $\overline{\mathfrak{bcp}}$-ben fekvő) $\mathfrak{bn} \perp \mathfrak{bc}$ és (a 34. § szerint) $\mathfrak{cq} ||| \mathfrak{bn}$: akkor (ha $\mathfrak{c}\widetilde{\mathfrak{p}}$ a $\mathfrak{bcq}$-n belül esik) megtalálhatjuk majd a $\mathfrak{c}\widetilde{\mathfrak{p}}$ *metszését* (a $\overline{\mathfrak{cbn}}$-ben fekvő) $\mathfrak{b}\widetilde{\mathfrak{n}}$-*nel*, és így tehát $\overline{\mathfrak{mab}}$-*vel* is. Ha pedig adva van két sík, $\overline{\mathfrak{pcq}}$, $\overline{\mathfrak{mab}}$, és $\mathfrak{cb} \perp \overline{\mathfrak{mab}}$, $\mathfrak{cr} \perp \overline{\mathfrak{pcq}}$, továbbá ($\overline{\mathfrak{bcr}}$-ben) $\mathfrak{bn} \perp \mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cs} \perp \mathfrak{cr}$: akkor $\mathfrak{bn}$-nek az $\overline{\mathfrak{mab}}$-be és $\mathfrak{cs}$-nek a $\overline{\mathfrak{pcq}}$-ba kell esnie, és ha $\widetilde{\mathfrak{bn}}$ és $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{s}}$ metszéspontját (ha ilyen egyáltalában van) megtaláltuk, világos, hogy az az egyenes, melyet $\mathfrak{pcq}$-ban abból a metszéspontból merőlegesen bocsátunk $\mathfrak{c}\tilde{\mathfrak{s}}$-re, az $\widetilde{\mathfrak{mab}}$, $\widetilde{\mathfrak{pcq}}$ *metszése.*

37. §.

Az $\widetilde{\mathfrak{am}} \parallel\!| \mathfrak{bn}$*-ben* (7. ábra a 202. oldalon) *olyan* $\mathfrak{a}$ *található, a melyre nézve* $\mathfrak{am} \triangleq \mathfrak{bn}$, ha (a 34. § szerint) $\widetilde{\mathfrak{nbm}}$-en kívül megszerkesztjük a $\mathfrak{gt} \parallel\!| \mathfrak{bn}$-t, továbbá $\mathfrak{bg} \perp \mathfrak{gt}$, $\mathfrak{gc} = \mathfrak{gb}$, $\mathfrak{cp} \parallel\!| \mathfrak{gt}$, $\mathfrak{tg}\tilde{\mathfrak{d}}$-t pedig úgy fektetjük, hogy $\mathfrak{tg}\tilde{\mathfrak{b}}$-vel a $\mathfrak{pc}\tilde{\mathfrak{a}}$ és $\mathfrak{pc}\tilde{\mathfrak{b}}$ alkotta szöggel egyenlő szöget alkosson, és (a 36. § szerint) meghatározzuk $\mathfrak{tg}\tilde{\mathfrak{d}}$, $\mathfrak{nb}\tilde{\mathfrak{a}}$-nak $\widetilde{\mathfrak{dq}}$ metszését, és $\mathfrak{ba} \perp \mathfrak{dq}$. A $\mathfrak{bn}$ F-jében származó L-vonalak alkotta háromszögek hasonlóságából (21. §) nyilván következik, hogy $\mathfrak{db} = \mathfrak{da}$ és $\mathfrak{am} \triangleq \mathfrak{bn}$.

Ezekből könnyen kitünik, hogy (a *csupán csak végpontjaikkal* megadott L-vonalokhoz) megtalálható a proporczió negyedik és középső *tagja*, és hogy minden geometriai szerkesztés, a mely Σ-ban a síkban elvégezhető, F-ben ugyanazon a módon *a XI. axióma nélkül* végezhető el. Így pl. $4R$ geometriailag bizonyos számú egyenlő részre osztható, ha ugyanazt a részekre való osztást Σ-ban el lehet végezni.

38. §.

Ha (a 37. § szerint) megszerkesztjük pl. az $\mathfrak{nbq} = \frac{1}{3}R$-t (14. ábra a 211. oldalon), és S-ben (a 35. § szerint) meghúzzuk a $\widetilde{\mathfrak{bq}}$-ra merőleges $\mathfrak{am} \parallel\!| \mathfrak{bn}$-t, és (a 37. § szerint) meghatározzuk a $\mathfrak{jm} \triangleq \mathfrak{bn}$-t: akkor, ha $\mathfrak{ja} = x$, (a 28. § szerint)

$$X = 1 : \sin \tfrac{1}{3} R = 2$$

és evvel *geometriai úton* meg van szerkesztve az x.

Kiszámíthatjuk az $\mathfrak{nbq}$-t oly módon, hogy $\mathfrak{ja}$ bármely adott mennyiségnél kevesebbet különbözzék i-től, minthogy erre csak az szükséges, hogy $\sin \mathfrak{nbq} = \dfrac{1}{e}$ legyen.

39. §.

Ha (valamely síkban a 27. § értelmében) $\mathfrak{pq}$ (19. ábra) és $\mathfrak{st} \parallel$-ak az $\mathfrak{mn}$ egyenessel, és $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{cd}$ merőlegesek $\mathfrak{mn}$-re és egyenlők: akkor nyilvánvaló, hogy

$$\triangle\, \mathfrak{dec} \equiv \triangle\, \mathfrak{bea},$$

tehát az (esetleg vegyes vonalok alkotta) $\mathfrak{ecp}$, $\mathfrak{eat}$ $\wedge$-ek is egybevágók, és

$$\mathfrak{ec} = \mathfrak{ea}.$$

Ha továbbá $\mathfrak{cf} = \mathfrak{ag}$: akkor

$$\triangle\, \mathfrak{acf} \equiv \triangle\, \mathfrak{cag},$$

és mindegyikük fele az $\mathfrak{fagc}$ *négyszögnek.* Ha $\mathfrak{fagc}$, $\mathfrak{hagk}$ két ilyen a $\mathfrak{pq}$ és $\mathfrak{st}$ között levő négyszög az $\mathfrak{ag}$ felett: akkor (úgy mint EUKLIDES-nél) nyilvánvaló, hogy ezek [a négyszögek], valamint az ugyanazon az $\mathfrak{ag}$-n álló $\mathfrak{agc}$ és $\mathfrak{agh}$ háromszögek, melyeknek csúcsa $\overline{\mathfrak{pq}}$-ban van, egyenlők. Továbbá

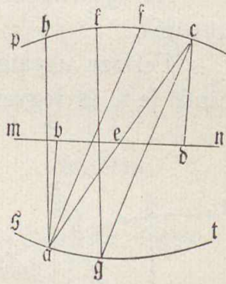
$$\mathfrak{acf} = \mathfrak{cag}, \quad \mathfrak{gcq} = \mathfrak{cga},$$

és (a 32. § szerint)

$$\mathfrak{acf} + \mathfrak{acg} + \mathfrak{gcq} = 2R,$$

úgy hogy

$$\mathfrak{cag} + \mathfrak{acg} + \mathfrak{cga} = 2R.$$



19. ábra.

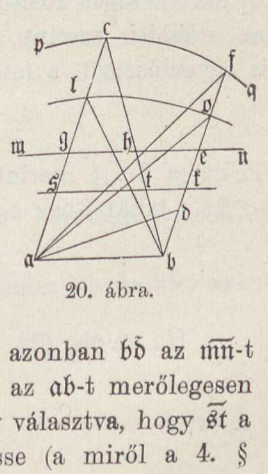
Így tehát minden ilyen $\mathfrak{acg}$ háromszögben a $3\wedge$-nek összege $= 2R$.

Akár már most reáesik az $\mathfrak{ag}$ *egyenes* az ($\mathfrak{mn}$-nel $\parallel$) $\mathfrak{ag}$-re, akár nem; *maguknak az egyenesvonalú* $\mathfrak{agc}$, $\mathfrak{agh}$ *háromszögeknek, valamint szögeik összegének egyenlősége* nyilvánvaló.

40. §.

Az egyenlő $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{abd}$ (20. ábra) *háromszögekben (ezentúl mindig egyenesvonalúakat értve), a melyek egy oldalukban megegyeznek, a szögek összege is egyenlő.*

Felezze ugyanis $\mathfrak{mn}$ mind $\mathfrak{ac}$-t, mind $\mathfrak{bc}$-t, és legyen (a $\mathfrak{c}$-n átmenő) $\mathfrak{pq} \parallel \mathfrak{mn}$: akkor $\mathfrak{d}$ a $\overline{\mathfrak{pq}}$-ba esik. Ha ugyanis $\mathfrak{bd}$ az $\overline{\mathfrak{mn}}$-t az $\mathfrak{e}$ pontban, tehát (a 39. § szerint) $\overline{\mathfrak{pq}}$-t az $\mathfrak{ef} = \mathfrak{eb}$ távolságban metszené: akkor



20. ábra.

$$\triangle\, \mathfrak{abc} = \triangle\, \mathfrak{abf}$$

lenne, a miből

$$\triangle\, \mathfrak{abd} = \triangle\, \mathfrak{abf}$$

következnék, úgy hogy $\mathfrak{d}$ az $\mathfrak{f}$-fel egybeesnék. Ha azonban $\mathfrak{bd}$ az $\overline{\mathfrak{mn}}$-t nem metszené, legyen $\mathfrak{c}$ az a pont, a melyben az $\mathfrak{ab}$-t merőlegesen felező egyenes $\overline{\mathfrak{pq}}$-t metszi, és legyen $\mathfrak{gs} = \mathfrak{ht}$ úgy választva, hogy $\overline{\mathfrak{st}}$ a *meghosszabbított* $\mathfrak{bd}$-t valamely $\mathfrak{k}$ pontban messe (a miről a 4. §

módjára kimutatható, hogy lehetséges); legyen továbbá $\mathfrak{sl} = \mathfrak{sa}$, $\mathfrak{lo} \parallel \mathfrak{st}$ és $\mathfrak{o}$ a $\overset{\frown}{\mathfrak{bt}}$ és $\overset{\frown}{\mathfrak{lo}}$ metszéspontja: akkor (a 39. § szerint)

$$\triangle \mathfrak{abl} = \triangle \mathfrak{abo}$$

lenne, és így (a feltevés ellenére)

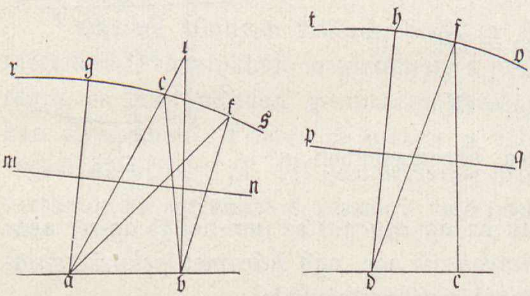
$$\triangle \mathfrak{abc} > \triangle \mathfrak{abd}$$

volna.

41. §.

Az egyenlő $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{def}$ *háromszögek* (21. ábra) *szögeinek összegei egyenlők.*

Felezze ugyanis $\mathfrak{mn}$ mind $\mathfrak{ac}$-t, mind $\mathfrak{bc}$-t, ép úgy $\mathfrak{pq}$ mind $\mathfrak{df}$-et, mind $\mathfrak{fe}$-t, és legyen $\mathfrak{rs} \parallel \mathfrak{mn}$, meg $\mathfrak{to} \parallel \mathfrak{pq}$: akkor az $\mathfrak{rs}$-re $\llcorner\, \mathfrak{ag}$ vagy egyenlő a $\mathfrak{to}$-ra $\llcorner\, \mathfrak{dh}$-val, vagy pedig egyikük, pl. $\mathfrak{dh}$ a nagyobbik. Mindegyik esetben az $\mathfrak{a}$ középpontból leírt $\bigcirc\, \mathfrak{df}$-nek bizonyos $\mathfrak{k}$ pontja közös $\mathfrak{gs}$-sel, és (a 39. § szerint)



21. ábra.

$$\triangle \mathfrak{abk} = \triangle \mathfrak{abc} = \triangle \mathfrak{def}.$$

Ámde (a 40. § szerint) $\triangle \mathfrak{akb}$ *egyenlőszögű* a $\mathfrak{dfe}$ háromszöggel, és (a 39. § szerint) az $\mathfrak{abc}$ háromszöggel. E szerint tehát az $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{def}$ háromszögek is egyenlőszögűek.

S-ben e tétel *meg is fordítható.* Legyenek ugyanis az $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{def}$ háromszögek kölcsönösen egyenlőszögűek, és $\triangle \mathfrak{bal} = \triangle \mathfrak{def}$: akkor (az előbbiek szerint) az egyik a másikkal, és így $\triangle \mathfrak{abc}$ a $\triangle \mathfrak{abl}$-lel is egyenlőszögű, a miből nyilvánvaló, hogy

$$\mathfrak{bcl} + \mathfrak{blc} + \mathfrak{cbl} = 2R.$$

Pedig (a 31. § szerint) S-ben bármely háromszög szögeinek összege $< 2R$; tehát $\mathfrak{l}$-nek $\mathfrak{c}$-vel egybe kell esnie.

42. §.

Ha $\triangle \mathfrak{abc}$ (22. ábra) *szögeinek összegét*

$$u,$$

$\triangle \mathfrak{def}$-*ét pedig*

$$v$$

egészíti ki 2R-re: akkor

$$\triangle\,\mathfrak{abc} : \triangle\,\mathfrak{def} = u : v.$$

Ha ugyanis az $\mathfrak{acg}$, $\mathfrak{gch}$, $\mathfrak{hcb}$, $\mathfrak{dfk}$, $\mathfrak{kfe}$ háromszögek mindegyike $= p$, és

$$\triangle\,\mathfrak{abc} = mp, \quad \triangle\,\mathfrak{def} = np,$$

továbbá s bármely a p-vel egyenlő háromszög szögeinek összege: akkor nyilvánvaló, hogy

$$2R - u = ms - (m-1)\,2R = 2R - m(2R - s),$$

és

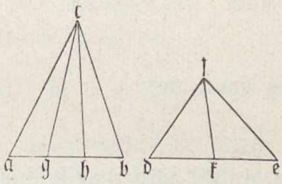
$$u = m\,(2R - s);$$

hasonlóképen

$$v = n\,(2R - s).$$

Így tehát

$$\triangle\,\mathfrak{abc} : \triangle\,\mathfrak{def} = m : n = u : v.$$



22. ábra.

Könnyen belátható, hogy ez kiterjeszthető arra az esetre is, mikor az $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{def}$ háromszögek inkommenzurabilisek.

Ugyanazon a módon bebizonyítható, hogy a gömb felületén levő háromszögek úgy aránylanak egymáshoz, mint az *excessusok*, melyekkel szögeik összegei felülmúlják $2R$-t. Ha valamely gömbháromszög két szöge derékszög, akkor a harmadik z az említett excessus; ez a háromszög pedig (ha p a legnagyobb kör kerületét jelenti), nyilván

$$= \frac{z}{2\pi}\,\frac{p^2}{2\pi} \quad (32.\ \S,\ \text{VI.}),$$

a miből következik, hogy minden háromszög, a melyben a szögek excessusa $= z$,

$$= \frac{zp^2}{4\pi^2}.$$

43. §.

Fejezzük ki most már az egyenesvonalú háromszög *területét* S-ben a szögek összegével.

Ha $\mathfrak{ab}$ (15. ábra a 211. oldalon) a végtelenbe növekedik; akkor (a 42. § szerint)

$$\triangle\,\mathfrak{abc} : (R - u - v)$$

állandó. De (a 32. § V. pontja szerint)

$$\triangle\,\mathfrak{abc} \simeq \mathfrak{bacn}$$

és (az 1. § szerint)

$$R - u - v \frown z;$$

tehát

$$\mathfrak{bacn} : z = \triangle\, \mathfrak{abc} : (R-u-v) = \mathfrak{bac'n'} : z'.$$

Továbbá (a 30. § szerint) nyilvánvaló, hogy

$$\mathfrak{bdcn} : \mathfrak{bd'c'n'} = r : r' = \operatorname{tang} z : \operatorname{tang} z'.$$

Ha azonban $y' \frown 0$: akkor

$$\frac{\mathfrak{bd'c'n'}}{\mathfrak{bac'n'}} \frown 1,$$

és épen úgy

$$\frac{\operatorname{tang} z'}{z'} \frown 1,$$

a miből következik, hogy

$$\mathfrak{bdcn} : \mathfrak{bacn} = \operatorname{tang} z : z.$$

De (a 32. §-ban) azt találtuk, hogy

$$\mathfrak{bdcn} = ri = i^2 \operatorname{tang} z,$$

ennélfogva

$$\mathfrak{bacn} = zi^2.$$

Ha tehát ezentúl minden olyan háromszöget, a melyben a szögek összegét z egészíti ki $2R$-re, röviden $\triangle$-gel jelölünk: akkor e szerint

$$\triangle = zi^2.$$

Ha (a 14. ábrában a 211. oldalon)

$$\mathfrak{or} \parallel\!| \mathfrak{am} \quad \text{és} \quad \mathfrak{ro} \parallel\!| \mathfrak{ab}:$$

akkor az előbbiből könnyen következtethető, hogy az $\widetilde{\mathfrak{or}}$, $\widetilde{\mathfrak{st}}$, $\widetilde{\mathfrak{bc}}$ befoglalta *terület* (a mely nyilván a határ nélkül növekedő egyenesvonalú háromszögek területének, vagyis $\triangle$-nek abszolut határértéke, midőn $z \frown 2R$)

$$= \pi i^2 = \odot\, i \text{ az } F\text{-ben}.$$

Ha ezt a határértéket $\square$-tel jelöljük: akkor továbbá (a 30. § szerint)

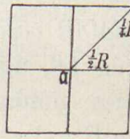
$$\pi r^2 = \operatorname{tang} z^2\, \square = \odot\, r \; F\text{-ben (21. §)}$$
$$= \odot\, s \text{ (32. §, VI.)},$$

a hol s a $\mathfrak{dc}$ húrt jelenti (15. ábra a 211. oldalon). Ha már mostan a síkban a kör megadott s radiusát (vagy az F-ben a kör L-alakú radiusát) merőlegesen felezve, (a 34. § szerint) megszerkesztjük a $\mathfrak{db} \parallel\!| \triangleq \mathfrak{cn}$-t, c-ből ca-t merőlegesen bocsátjuk bb-re és ca-ra a cm merőlegest állítjuk: akkor megkapjuk z-t, a miből, ha egységül valamely tetszés szerinti L-alakú radiust választunk, (a 37. § szerint) tang z^2 *geometriai úton határozható meg két egyenlő görbületű egyenletes vonal segítségével* (melyek, ha csupán csak végpontjaik ismeretesek, és tengelyeik meg vannak szerkesztve, nyilván úgy mérhetők egymással, mint egyenesek, és e tekintetben az egyenesekkel egyenlőértékűeknek tekinthetők).

Továbbá (23. ábra) olyan négyszöget, pl. szabályosat, mely egyenlő □-tel, a következő módon szerkeszthetünk. Legyen

$$\text{abc} = R, \quad \text{bac} = \tfrac{1}{2} R, \quad \text{acb} = \tfrac{1}{4} R \quad \text{és} \quad \text{bc} = x:$$

akkor X (a 31. § II. pontja szerint) tisztán négyzetgyökök segítségével fejezhető ki és (a 37. § szerint) meg is szerkeszthető, és ha X már megvan, (a 38., vagy pedig a 29. és 35. § szerint) maga x is meghatározható. A △ abc nyolczszorosa pedig nyilván egyenlő □-tel, és így *evvel, segítségül véve egy egyenesvonalú idomot és egy és ugyanahhoz a nemhez tartozó egyenletes görbéket (a melyek az egymással való összehasonlítás tekintetében egyenesekkel egyenlőértékűek), elvégeztük az s radiussal leírt síkbeli körnek geometriai quadraturáját; F-ben pedig ugyanazon a módon a kör complanatióját, és vagy igaz* Euklides *XI. axiómája, vagy pedig a kör geometriai quadraturája lehetséges*, habár mindeddig eldöntetlen maradt, hogy ezek közül melyik áll fenn a valóságban.



23. ábra.

Valahányszor tang z^2 *akár* egész szám, *akár* olyan raczionális tört, a melynek (legegyszerűbb alakjában) nevezője valamely 2^m+1 alakú törzsszám (a melyekhez a $2 = 2^0 + 1$ is tartozik), *vagy* pedig akárhány ily alakú törzsszám szorzata, a melyben azonban (a 2 kivételével, mely akárhányszor szerepelhet [mint tényezője] tényezőképen mindegyik csakis *egyszer* fordulhat elő (és csupán csakis a z-nek ilyen értékei mellett) a híres Gaussnak a sokszögekre vonatkozó elmélete alapján (a mely korunknak, sőt minden kornak egyik legdicsőbb felfedezése) megszerkeszthető olyan egyenesvonalú idom, a mely egyenlő tang z^2 □ = ⊙ s-sel. Arra ugyanis, hogy □-et *oszthassuk* (minthogy a 42. § tétele tetszés szerinti sokszögekre kiterjeszthető) nyilván szükséges, hogy $2R$-t *oszthassuk*, a mi (a mint az bebizonyítható) geometriai úton csakis az említett feltétel mellett végezhető el. Ámde minden egyes ilyen esetben az előbbiek könnyen vezetnek czélhoz. Sőt, ha n a Gauss-féle alak alá tartozik, akkor bármely egyenesvonalú idom geometriai úton n-oldalú szabályos sokszögbe alakítható át.

Végül (hogy a tárgyat teljesen kimerítsük) be kellene bizonyítanunk, hogy (valamilyen feltevés nélkül) lehetetlen eldönteni, vajjon Σ-e, vagy pedig valamely S (még pedig melyik) felel meg a valóságnak. Ezt azonban valamely kedvezőbb alkalomra tartjuk fenn.

Bolyai Farkas Toldaléka az Appendixhez.*

Végül legyen szabad valamit, *a mi az Appendix szerzőjének tulajdona, mint betetőzést* ide csatolni; de bocsásson meg, ha egyhez-máshoz nem az ő elmeélével fognék hozzá.

A dolog röviden a következőben áll: *a gömbi trigonometria képletei*, melyek az említett Appendixben EUKLIDES XI. axiómájától függetlenül vannak bebizonyítva, *a sík trigonometria képleteivel megegyeznek, ha* (a mindjárt kifejtendő módon) *a gömbi háromszög oldalait valósoknak, az egyenes vonalúét pedig képzeteseknek veszszük fel*, úgy hogy, a mi a trigonometria képleteit illeti, a sík képzetes gömbnek tekinthető, ha valósnak azt veszszük fel, a melyben $\sin R = 1$.

Arra az esetre, hogy EUKLIDES axiómája nem igaz, (az Appendix 30. §-ában) be van bizonyítva, hogy van bizonyos i, a melyre nézve az, a mi ugyanott I-nek van nevezve, $= e$-vel (a természetes logaritmusok alapszámával), és erre az esetre a sík trigonometria képletei is be vannak bizonyítva (u. o. 31. §); még pedig úgy, hogy (az ugyanottani 32. § VII. pontja után következő szerint) e képletek az említett axióma igaz volta esetében is érvényesek, ha t. i. felteszszük, hogy $i \rightharpoondown \infty$, és az értékek határértékeit veszszük; az euklidikus rendszer kétség kívül mintegy határa a nem-euklidikus rendszernek (ha $i \rightharpoondown \infty$). Arra az esetre, hogy van i, vegyük fel az egységet i-vel egyenlőnek, és a *sinus és cosinus* fogalmakat terjeszszük ki képzetes ívekre is, úgy hogy akár valós, akár pedig képzetes ívet jelent p, nevezzük

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{p\sqrt{-1}} + e^{-p\sqrt{-1}}\right)$$

-et p cosinusának és

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}\right)$$

-et p sinusának.

* [*Tentamen,* ed. prima, T. II, Maros Vásárhelyini 1833, 380—383. old., ed. secunda, T. II. Budapestini, 395—398. old.]

Ebből valós q-ra nézve

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^q - e^{-q}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}\right) = \\ = \sin\left(-q\sqrt{-1}\right) = -\sin q\sqrt{-1}$$

származik.

Épen úgy

$$\tfrac{1}{2}\left(e^q + e^{-q}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} + e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}\right) = \\ = \cos\left(-q\sqrt{-1}\right) = \cos q\sqrt{-1};$$

ha t. i. a képzetes körben is a negativ ív sinusa a vele egyébként egyenlő pozitiv ív sinusával egyenlő, csakhogy negativ és (az egyébként egyenlő) pozitiv és negativ ív cosinusa egy és ugyanaz.

Az említett Appendix 25. §-ában absolute, azaz az említett axiómától függetlenül be van bizonyítva, hogy minden egyenesvonalú háromszögben *a szögek sinusai úgy aránylanak egymáshoz, mint azoknak a köröknek kerületei, melyeknek radiusai a szemben fekvő oldalokkal egyenlők*; be van bizonyítva továbbá, hogy abban az esetben, ha van i, az y radiussal leírt kör kerülete

$$= \pi i\left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right),$$

a mi, ha $i = 1$,

$$\pi\left(e^y - e^{-y}\right)$$

-ba megy át.

Így tehát (az ugyanottani 31. § szerint) az egyenes vonalú háromszögre vonatkozólag, melynek befogói a és b, átfogója c és az a, b, c oldalokkal szemben fekvő szögei α, β, π (ha $i = 1$)

I-ben

$$1 : \sin\alpha = \pi\left(e^c - e^{-c}\right) : \pi\left(e^a - e^{-a}\right),$$

és így

$$1 : \sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^c - e^{-c}\right) : \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^a - e^{-a}\right).$$

Ebből pedig következik, hogy

$$1 : \sin\alpha = -\sin c\sqrt{-1} : -\sin a\sqrt{-1}.$$

Így tehát

$$1 : \sin\alpha = \sin c\sqrt{-1} : \sin a\sqrt{-1}.$$

II-ben

$$\cos\alpha : \sin\beta = \cos\alpha\sqrt{-1} : 1.$$

III-ban

$$\cos c\sqrt{-1} = \cos a\sqrt{-1}\cos b\sqrt{-1}.$$

Ezek a képletek, valamint a sík trigonometriájának belőlük származó valamennyi képlete, teljesen megegyeznek a gömb trigonometriájának képleteivel; csakhogy, ha pl. a derékszögű gömbháromszög befogói, az ezekkel szemben fekvő szögei és átfogója is ugyanazokat a neveket kapják, az egyenesvonalú háromszög oldalait $\sqrt{-1}$-gyel kell osztanunk, hogy a gömbháromszögre vonatkozó képletek keletkezzenek.

I-ből t. i.

$$1 : \sin\alpha = \sin c : \sin a,$$

II-ből

$$1 : \cos a = \sin\beta : \cos\alpha,$$

III-ból

$$\cos c = \cos a \cos b$$

származik.

Minthogy a többit mellőzni lehet és tapasztaltam, hogy (az Appendix 32. §-ának VII. pontja után következőkben) a levezetés elhagyása az olvasót bántja és gátolja, épen a dologra tartozó lesz, ha megmutatom, hogy miképen következik pl.

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right)$$

-ből, hogy

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(azaz Pythagoras tétele az euklidikus rendszerben); valószínű, hogy ezt a szerző is így vezette le, és a többi is mind hasonló módon következik.

Ha t. i. e-nek hatványait sorokkal fejezzük ki,

$$e^{\frac{k}{i}} = 1 + \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} + \frac{k^3}{2.\,3i^3} + \frac{k^4}{2.\,3.\,4i^4} + \cdots;$$

$$e^{-\frac{k}{i}} = 1 - \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} - \frac{k^3}{2.\,3i^3} + \frac{k^4}{2.\,3.\,4i^4} - \cdots;$$

tehát

$$e^{\frac{k}{i}} + e^{-\frac{k}{i}} = 2 + \frac{k^2}{i^2} + \frac{k^4}{3.\,4i^4} + \cdots$$

$$= 2 + \frac{k^2+u}{i^2}$$

(ha valamennyi a $\frac{k^2}{i^2}$ után következő tag összegét $\frac{u}{i^2}$-nek nevezzük); még pedig $u \rightharpoonup 0$, ha $i \rightharpoonup \infty$. Ha ugyanis valamennyi tagot, a mely $\frac{k^2}{i^2}$ után következik, i^2-tel megszorzunk: akkor az első tag $\frac{k^4}{3.\,4i^2}$ lesz, és mindegyik exponens [azaz mindegyik tagnak és a megelőzőnek hányadosa] kisebb lesz mint $\frac{k^2}{i^2}$; az összeg pedig, ha az exponens mindig ez maradna,

$$\frac{k^4}{3.\,4i^2} : \left(1 - \frac{k^2}{i^2}\right) = \frac{k^4}{3.\,4\,(i^2-k^2)}$$

volna, a mi nyilvánvalóan $\frown 0$, ha $i \frown \infty$.

E szerint

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a+b}{i}} + e^{-\frac{a+b}{i}} + e^{\frac{a-b}{i}} + e^{-\frac{a-b}{i}}\right)$$

-ből következik, hogy

$$2 + \frac{c^2+\omega}{i^2} = 1 + \frac{(a+b)^2+v}{2i^2} + 1 + \frac{(a-b)^2+\lambda}{2i^2}$$

(hol ω, v, λ az u mintájára vannak képezve).

Ebből pedig következik, hogy

$$c^2 = \tfrac{1}{2}\,(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2+v+\lambda-2\omega),$$

a mi

$$\frown a^2 + b^2.$$

Megjegyzés. Annak a gömbnek a radiusa, a melyre nézve a sinus totus $1 = i$, nem egyéb mint az $i = 1$-gyel egyenlő L-alakú vonalnak az az y ordinátája, mely az egyik végponton átmenő tengelyre a másik végpontból merőlegesen van bocsátva. *Abban a felületben ugyanis, melynek neve F,* (az Appendix 21. §-a szerint) *az egész euklidikus geometria érvényes, ha az egyenesek helyébe L-vonalak lépnek*, és ha az L-alakú radius egyenlő 1-gyel, mely F-ben a sinus totus, akkor ugyanannak a körnek a radiusa a síkban az említett y. Ez könnyen alkalmazható a képzetes gömbre, a melyre (az antieuklidikus rendszerben) a síkot visszavezetjük.

BOLYAI JÁNOS

ÉRTEKEZÉS
A KÉPZETES MENNYISÉGEKRŐL
(1837)

Csak az érett gyümölcsöt szabad leszedni.

Válasz a híres lipcsei Jablonowski-féle tudós társulattól 1837-ben kitűzött kérdésre, a mely annak a kételynek megvizsgálását czélozza, vajjon a közönségesen képzeteseknek tartott mennyiségek, ha a geometriában előfordulnak, szerkeszthetők-e, és milyen feltételek mellett, vagy pedig nem szerkeszthetők.

1. §.

Minthogy a jelen kérdés csakis a geometerek által használt képzeteseknek *szerkesztésére* vonatkozik, többet adunk, mint a mennyit kívánnak,

1. ha (nemcsak a képzetes, hanem) *minden nemű* olyan mennyiségeknek a természetére mutatunk reá, a melyek a számolásban előfordulnak, és a szemlélődés tárgyai lehetnek, vagyis inkább (a legnagyobb rövidséggel) arra a *módra,* a mely szerint a mennyiségek a számolási műveleteknek alávethetők (e tárgy teljes kifejtését, a melyet itt sem nem követelnek, sem pedig a szükséges rövidség miatt nem nyújthatunk, a tudomány teljes rendszerének tartva fenn);

2. ha értelmezzük, hogy mit kell legalább ez alkalommal a mennyiségek *szerkesztése* alatt érteni;

3. ha végül eldöntjük, vajjon a képzetesek szerkeszthetők-e vagy sem?

2. §.

Valamely mennyiség *önmagában* nem valós és pozitiv, és a dolgok létének {*azt tekintve, hogy bármi hogyan, vagy mily mértékben van meg, vagy nincsen meg*}* sincsenek különböző fokozatai vagy módosulásai; de az egyenlőket mindenesetre megkülönbözteti a *hely*, az *idő*, vagy *bármely más feltételek* (a melyeknek igen könynyen tömérdek sokasága gondolható ki); sőt különbséget tesz az is, a mint egy és ugyanazt a dolgot *különböző szempontokból* tekintjük,

* [Toldások, melyeket Bolyai János valószínűleg csak 1850 után iktatott közbe, { } zárójelekkel vannak feltüntetve.]

vagy különböző *dolgokra* vonatkoztatjuk (akár egyenlő *neveket kap* ezeket a dolgokat illetőleg, akár nem). Így pl. a közönséges felfogás szerint $\sec(x + 2\pi)$ (hol a π az egységnyi radiussal leírt *negyedkört* jelenti, a mi ugyan nem szokásos) azonos egyenes a $\sec x$-szel, mely, ha $\sec x$-nek tekintjük, mégis mindenesetre úgy különböztethető meg önmagától, mint $\sec(x+2\pi)$-től, hogy, a mikor az ívnek végpontja a secansba beléesik, a secanst egészen találóan pl. pozitivnak mondjuk, az ellenkező esetben pedig negativnak tekintjük. *Az egyenlők különböző tulajdonságokkal lehetnek felruházva.* {*És hasonlóképen lehetséges, hogy ugyanaz a személy vonatkozással különböző személyekre egyidőben és egyszerre apa és fiú.*} Végül pedig nyilvánvaló, hogy az a és P, a és Q, a és R stb. komplexusok mindannyian különbözők, hacsak a P, Q, R,... különbözőket jelentenek.

3. §.

Hogy ezt a tárgyat teljes általánossággal felöleljük (és az eddig oly homályos anyagot, a mennyire csak kivánatos, világossággal áraszszuk el), legyen az 1 bizonyos (véges) mennyiség, pl. valamely időtartam; a, b, c,... legyenek bármilyen evvel az 1-gyel homogén mennyiségek, és felvéve a következő négy jelt:

┼, ─, ╋, ─•─

(egyedül csak azért nem többet vagy kevesebbet, mert majd eléggé kitűnik, hogy e vizsgálat czélja épen 4-et igényel), a melyek *vagy* a tárgyalt mennyiségektől különböző dolgoknak jelei is lehetnek, *vagy* minden további jelentés nélkül substantialis dolgoknak tekinthetők. Jelentsen a

┼ 1, ─ 1, ╋ 1, ─•─ 1

jelek közül mindegyik valamely bármilyen nemű bizonyos tetszés szerinti mennyiséget, pl. időtartamot, egyenest, csavarvonal darabját stb., úgy hogy mind a négy mennyiség *különnemű* is lehessen; jelentse továbbá, ha e vizsgálatban akármelyik a P, Q, R, S betűk közül a ┼, ─, ╋, ─•─ jelek valamelyikét képviseli, Pa az $a \cdot P1$-et, vagyis az a-nak és a $P1$-nek szorzatát (a hol P 1-nek jelentése már ismeretes), azaz az 1, $P1$, a-nak 4. geometriai arányosát, megjegyezve azt, hogy ugyanaz az a mennyiség, ha különböző jelekkel van ellátva, (a 2. § szerint) valami módon egymástól teljesen megkülönböztetett mennyiségekre vonatkozik.

Vegyünk fel azonkívül valamely másnemű, teljesen substantiális dolgot, pl. 0-t; mert a *semmi pusztán negativ* fogalom, és ha a dolgot közelebbről tekintjük, könnyen belátható, hogy képtelen dolog, ha a *semmit* megjelöljük és műveleteknek vetjük alá. Nem állítható az sem, hogy pl. $a+0$ *azért* egyenlő a-val, mert ebben az esetben magához az a-hoz semmit sem kell hozzáadnunk; ugyanabból az okból ugyanis szükségképen ép úgy kellene állítanunk, hogy $\frac{a}{0}=a$. Az ilyen pontosabb vizsgálat legott mutatja, hogy a zérus (0) tárgyalásának metafizikája is eddig teljesen hamis alapra támaszkodott.

Egyébként a $P0$ jelölje a 0-t, és (ha különben a megszokott elnevezéseket fenn akarjuk tartani) mondhatjuk, hogy

$\vdash\!+\!\dashv a$ a *pozitivnak vett a*, vagyis pozitiv,

$\vdash\!-\!\dashv a$ a *negativ a*,

és a kéı-két:

$$\vdash\!+\!\dashv a,\ \vdash\!-\!\dashv a;\ \vdash\!\dot{+}\!\dashv a,\ \vdash\!\dot{-}\!\dashv a;\ \vdash\!+\!\dashv,\ \vdash\!-\!\dashv;\ \vdash\!\dot{+}\!\dashv,\ \vdash\!\dot{-}\!\dashv$$

jel közül mindegyikről mondhatjuk, hogy a másiknak *ellenkezője*; továbbá

a $\vdash\!+\!\dashv a$-t és a $\vdash\!-\!\dashv a$-t *valósaknak*,

a $\vdash\!\dot{+}\!\dashv a$-t és a $\vdash\!\dot{-}\!\dashv a$-t *képzeteseknek*

nevezhetjük (és valóban képzetesek, mihelyt a fent megállapitott fogalmak szerint a $\vdash\!\dot{+}\!\dashv$ vagy $\vdash\!\dot{-}\!\dashv$ jellel ellátottakat úgy tekintjük, mintha valósak volnának, a mint hasonló ellenmondás vagy lehetetlenség lép fel, ha (a már a pozitivtól jól megkülönböztetett) negativot egyidőben pozitivnak akarjuk venni; mert minden csak az, a mi). Végül a valósoknak $\vdash\!+\!\dashv$ és $\vdash\!-\!\dashv$ jeleit egyrészt, és a képzeteseknek $\vdash\!\dot{+}\!\dashv$ és $\vdash\!\dot{-}\!\dashv$ jeleit másrészt, egymás között *homogéneknek* nevezzük, egy valós és egy képzetes jelet pedig *heterogénnek*. {A $\vdash\!\dot{+}\!\dashv a$ (valamint a $\vdash\!\dot{-}\!\dashv a$) a $\vdash\!+\!\dashv a$ (ill. $\vdash\!-\!\dashv a$) *mellékmennyiségének (mellékállásának)* is nevezhető.}

4. §.

Jelentse $PaPb$, t. i. a Pa, Pb jelek komplexusa, az a-ból és a b-ből álló, ugyanavval a (közös) P jellel ellátott mennyiséget, vagy, a mi ugyanaz, a Pa-ból és a Pb-ből összetett mennyiséget. Ha azonban Q a P-nek ellenkezője (3. §), jelentse $PaQb$ vagy $QbPa$, ha a és b nem egyenlők, azt, a mennyivel az a és b közül a nagyobbik felülmúlja a kisebbet, a nagyobbnak jelével véve; ha pedig $a=b$, jelentse a 0-sal jelölt dolgot. Ha pedig P és Q heterogének (3. §), $PaQb$ ne jelentsen egyebet, mint a Pa, Qb mennyiségek komplexusát. Ezek a megállapodások érvényesek mindaddig, míg a, b közül egyik sem 0; ha azonban az egyik 0, akkor jelentse $PaQb$ a másikat az elébe tett jellel, t. i. $PaQ0=Pa$, $P0Qb=Qb$ legyen.

Minthogy a *mennyiség* elnevezést a heterogénekből álló komplexusokra csak kevésbbé találóan lehet alkalmazni, azért annak megnevezésére, a mit az ilyen kifejezés jelöl, a melyben a P és Q heterogének, kényelmesen és alkalmasan az *állás* (Stand) szót használhatjuk, mely elnevezés számtalan esetben használatos (pl. a hőmérő állása stb.), és melyet a tudomány bővebb értelemben befogadott. Lehet pedig [az állás] *vegyes,* ha *sem a, sem b* nem $= 0$, és *tiszta,* ha *vagy a, vagy b* (sőt mind a kettő) $= 0$, a mely megkülönböztetés mindenesetre elég gyakran hasznosnak mutatkozik. Ezen a módon könnyen juthatunk az *összeg* általános fogalmához.

5. §.

Vegyünk fel az eddigieken *kívül* 4 más jelt:

$$+,\ -,\ \dot{+},\ \dot{-}$$

és jelölje a $+P$ magát a P-t, a $-P$ a P-nek ellenkezőjét; továbbá legyen

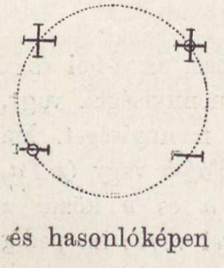
$$\dot{+}\ \vdash\!+\!\dashv\ = \vdash\!\dot{+}\!\dashv,\quad \dot{+}\ \vdash\!\dot{+}\!\dashv\ = \vdash\!-\!\dashv,\quad \dot{+}\ \vdash\!-\!\dashv\ = \vdash\!\dot{-}\!\dashv,\quad \dot{+}\ \vdash\!\dot{-}\!\dashv\ = \vdash\!+\!\dashv;$$
$$\dot{-}\ \vdash\!+\!\dashv\ = \vdash\!\dot{-}\!\dashv,\quad \dot{+}\ \vdash\!\dot{-}\!\dashv\ = \vdash\!-\!\dashv,\quad \dot{-}\ \vdash\!-\!\dashv\ = \vdash\!\dot{+}\!\dashv,\quad \dot{-}\ \vdash\!\dot{+}\!\dashv\ = \vdash\!+\!\dashv,$$

mely szabályokat a következő egyetlenből levezetni, nem lesz háládatlan dolog.

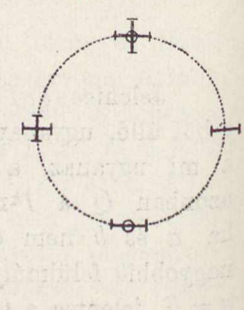
Állítsuk fel a következő sorozatot:

$$\vdash\!+\!\dashv,\ \vdash\!\dot{+}\!\dashv,\ \vdash\!-\!\dashv,\ \vdash\!\dot{-}\!\dashv,$$

és ismételjük azt meg akárhányszor, vagy (a mi még egyszerűbb) helyezzük azt a 4 jelt valamely körre úgy, hogy az utolsóra, azaz a $\vdash\!\dot{-}\!\dashv$-ra az első, azaz a $\vdash\!+\!\dashv$ következzék, pl. ezen a módon:



vagy pedig ezen a módon:



és hasonlóképen rendezzük el a

$$+,\ \dot{+},\ -,\ \dot{-}$$

jeleket, és azután állapítsuk meg a törvényt, a melynek értelmében, ha P az m-dik tag az első körön, $\mathfrak{P}$ pedig az n-dik e körök bármelyikén (vagy pedig az önmagukban visszatérő sorokban) (hol $\vdash\!+\!\dashv$-szal és $+$-szal kezdjük, azaz ezeknek az egy mutatót tulajdonítjuk), $\mathfrak{P}P$ jelentse az előbbi sornak $m+n-1$-dik tagját, vagyis azt, melynek mutatója az 1, m, n-nek 4. arithmetikai arányosa. Ezen a módon (valamennyi eseten átmenve) könnyen mindjárt 16 tételt nyerünk, ha $\mathfrak{P}$ a $+$, $\dot{+}$, $-$, $\dot{-}$ jelek egyikét, és ugyanannyit, ha $\mathfrak{P}$ a $\boxplus$, $\dot{\boxplus}$, $\boxminus$, $\dot{\boxminus}$ jelek egyikét jelenti. A rövidség kedvéért ezek közül csak az utóbbi 16-ot, még pedig összevont alakban csatoljuk ide, t. i.:

$$\boxplus\boxplus = \boxminus\boxminus = \dot{\boxplus}\dot{\boxminus} = \dot{\boxminus}\dot{\boxplus} = \boxplus;$$
$$\boxplus\boxminus = \boxminus\boxplus = \dot{\boxplus}\dot{\boxplus} = \dot{\boxminus}\dot{\boxminus} = \boxminus;$$
$$\boxplus\dot{\boxplus} = \dot{\boxplus}\boxplus = \boxminus\dot{\boxminus} = \dot{\boxminus}\boxminus = \dot{\boxplus};$$
$$\boxminus\dot{\boxplus} = \dot{\boxplus}\boxminus = \boxplus\dot{\boxminus} = \dot{\boxminus}\boxplus = \dot{\boxminus}.$$

Végül pedig $\mathfrak{P}(Pa)$ vagy a $\mathfrak{P}Pa$ jelentse $(\mathfrak{P}P)a$-t.

6. §.

Ha továbbá $1'$ valamely tetszés szerinti mennyiséget jelent (mely magával az 1-gyel akár homogén, akár nem), a' pedig jelenti az $a \cdot 1'$-et: akkor értelmezzük valamennyi Pa'-t (azaz Pa'-t P-nek mind a négy értékére nézve) általában hasonló módon, a mint a 3. §-ban a Pa-t értelmeztük. Ezt megállapítva,

$$(Pa'Qb')(RcSd)$$

jelentse a

$$PRa' \cdot c \; PSa' \cdot d \; QRb' \cdot c \; QSb' \cdot d$$

összeget (4. §), azaz, ha a c, d mindegyike (a saját $1'$ egységére vonatkoztatott) a', b' mindegyikével meg van szorozva és mindegyik részletszorzatnak jele az 5. § szerint a tényezők jeleiből van meghatározva, mindezeknek az összegét nevezzük a $Pa'Qb'$ és az $RcSd$ *szorzatának*. Ha pl. a, b homogéneket és c, d szintén homogéneket jelentenek, azt találjuk, hogy

$$\left(\frac{ac+bd}{cc+dd} \dot{+} \frac{bc-ad}{cc+dd}\right)(c \dot{+} d) = a \dot{+} b.$$

7. §.

Mindenestre a legegyszerűbb (habár a 3. § szerint ez nem szükséges), ha valamennyi $\boxplus a$-t stb.-t magával a-val *homogénnek* és *egyenlőnek* veszszük, és a hely által különböztetjük meg őket. Ha pl. az időben négy pontot, $\mathfrak{a}$-t, $\mathfrak{b}$-t, $\mathfrak{c}$-t, $\mathfrak{d}$-t veszünk fel, és a-val bármely időtartamot jelölünk, akkor a $\boxplus a$ stb. az a-val egyenlő, az 𝔞-ban, ill. 𝔟-ben, 𝔠-ben, 𝔡-ben kezdődő időtartamokat jelenthetnek. De minden *hátrány nélkül* megengedhető, hogy $\dashv\!\!\vdash a$*-t stb.-t ne mennyiségeknek tekintsük, hanem egyedül az a és az elébe tett jelek komplexusának,* a mely jelek csak azért vezettettek be, hogy reámutassanak azokra a *módokra,* a melyek szerint a mennyiségekkel a számolásban *el kell bánni.*

8. §.

Hasznos lesz az is, ha ez alkalommal a logaritmusnak közönségesen *hibás* felfogását helyreigazítjuk, és a többi vele rokon fogalmakat az egyedüli helyes módon megállapítjuk.

Ha $\psi(x)$ határértékét jelenti az (ismert alakú)

$$1+\frac{x}{1}+\frac{xx}{1\cdot 2}+\frac{xxx}{1\cdot 2\cdot 3}\ \text{stb.}$$

sornak, a mely (mint az bebizonyítható) x-nek minden állására nézve összetartó: akkor x-et nevezem a $\psi(x)$ *logaritmusának,* $\psi(x)$-et pedig az *x-nek, mint logaritmusnak megfelelő állást,* vagy röviden az *x logaritmusa állásának,* és ezt a vonatkozást a következővel jelölöm:

$$x = \mathrm{l}\psi(x).$$

Továbbá a^b alatt értem $\psi(b\mathrm{l}a)$-t, és e kifejezés minden értékét nevezem az *a b-kitevőjű* hatványának, a-t pedig minden a^b *b kitevőjű gyökének.*

De a logaritmusnak általános értelmezése, a mely (mint a híres Lagrange-nál, sőt minden előttem ismeretes írónál) az *alapszámra* támaszkodik, kevésbbé helyes. Ha ugyanis b-ről azt mondjuk, hogy *c-nek az a alapra vonatkozó logaritmusa:* akkor mihelyt $a^b = c$, könnyen belátható, hogy ha Lc a lc-nek bármely értéke és La a la-nak bármely értéke,

$$\frac{\mathrm{L}c + 4m\pi}{\mathrm{L}a + 4n\pi},^{*}$$

hol m és n tetszés szerinti egész számokat jelentenek, szintén c-nek az a alapra vonatkozó logaritmusa; mert ha

$$a^b = \psi(b\mathrm{l}a)$$

-ban a

$$\mathrm{l}a = \mathrm{L}a + 4n\pi$$

* π-vel (az azonnal előadandó értelmezések szerint) a legkisebb ívet jelöljük azok közül, melyeknek sinusa $= 1$.

értékét helyettesítjük, c bizonyára az a^b értékeinek egyike lesz. Ámde bármennyire helyes is az a feladat, hogy kijelöljük b-nek mindazon értékeit, a melyekre nézve a^b az adott c-vel egyenlő, mégis a logaritmusnak általános fogalma a következő valamivel szabatosabb módon értelmezendő; hacsak (hogy más alkalmatlanságot ne említsek) nem akarunk a negativ és képzetes számoknak is valós logaritmusokat tulajdonítani. (Különben ugyanis, minthogy

$$16^{\frac{1}{4}} = +2,\ -2,\ \dotplus 2,\ \dot{-}2,$$

bizonyára e 4 mennyiség mindegyikének a 16 alapra vonatkozólag $\frac{1}{4}$ a logaritmusa lenne.) Nevezzük q-t a $\psi(pq)$ logaritmusának az $\frac{1}{p}$ *modulusra nézve* (lehetne mondani a p modulusra nézve; ez azonban nem lényeges). Ezen a módon az 1 modulusra nézve a logaritmus ugyanaz, vagyis egybeesik avval, a mit fent (egyszerűen) logaritmusnak neveztünk.

Ép úgy nevezem a (mindig összetartó)

$$1 - \frac{xx}{1\cdot 2} + \frac{xxxx}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \text{ stb.}$$

és

$$x - \frac{xxx}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{xxxxx}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \text{ stb.}$$

sorok határértékét az x *cosinusának* ill. *sinusának*, x-et pedig *arcusnak* stb. (a mely vonatkozás *szintén* általánosabban fogalmazható).

9. §.

Minthogy itt bővebb fejtegetésnek nincsen helye, már most térünk át a mennyiségek tudományának a geometriára való alkalmazásaira, a melyek közül a következő mind fontosságánál, mind kiváló eleganicziájánál fogva annál is inkább érdemli meg az első helyet, mert már a geometriának (de nem a közönségesnek) küszöbén találkozunk vele.

Az {1832-ben Maros-Vásárhelyt megjelent} «*Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria introducendi*» czímű könyv I. kötetének függelékében előadatnak a sík trigonometriájának képletei arra az esetre, ha helytelen volna az a tétel, a melyet Euklides (valamennyi éles elméjű geometer itélete szerint) helytelenül a XI. axióma alakjában állított fel (minthogy később a tér tudománya az említett axiómától függetlenül állapíttatott meg).

Minden nehézség nélkül ugyanazokból a képletekből következik, hogy

$$\sin \dotplus \frac{a}{i} = \sin \alpha \sin \dotplus \frac{c}{i},$$

$$\cos \dotplus \frac{c}{i} = \cos \dotplus \frac{a}{i} \cos \dotplus \frac{b}{i},$$

hol a, b, c a befogókat és az átfogót, α az a befogóval szembenfekvő szöget és i bizonyos ott értelmezett (a mostani feltevés mellett önmagában és önmaga által meghatározott) egyenest jelent. Már ebből a *két* egyenletből foly a sík trigonometriájának valamennyi többi egyenlete.

A ki ezeket az egyenleteket figyelmesen szemléli, belátja, hogy a derékszögű sík háromszög, és így tehát az egész sík, valamint a tőle egyenlő távolságú felületek (melyeket már sok évvel ez előtt, mikor erre az elméletre jutottam, *hypersphaerikusoknak* neveztem) a számítással egészen hasonló módon tárgyalhatók, mint a gömb felülete; még pedig úgy, hogy ha azt az r mennyiséget, a melylyel bármely mindenütt egyenletes felületben levő derékszögű háromszög oldalait osztanunk kell, hogy a

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r}$$

egyenlőség fennálljon, pl. ama felület *parameterének* nevezzük: akkor a sphærikus felületek parameterei *valósak,* a síktól egyenlő távolságú felületek parameterei *képzetesek* (azaz valóban létező mennyiségek a $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv$, $\vdash\!\!\cdot\!\!\dashv$ jellel ellátva), a sík parametere $\vdash\!\!\cdot\!\!\dashv i$ (és hasonlóképen $\vdash\!\!\!+\!\!\!\dashv i$).

Ámde ezt a dolgot másképen is lehet felfogni. Lehet ugyanis a síkot {t. i. *kevésbbé természetes, alkalmas, helyes, egyszerű és elegáns módon*} az i parameterhez tartozónak is tekinteni, és magukat az egyeneseket, a melyek a síkban a legnagyobb körök íveinek helyébe lépnek, az i parameterre nézve mint *képzetes íveket* felfogni. Ezen a módon azonban (a mint azt be lehet bizonyítani) magánál az i-nél *kisebb* parametereknek semmi olyan egyenletes felület nem felel meg, a melyben az ívek az épen kifejtett czélra képzeteseknek vehetők.

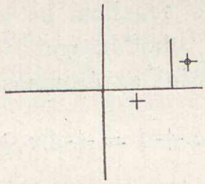
E fontos tárgyra (azaz az Euklides XI. axiómájától független, abszolut geometriára) vonatkozó igen elegáns vizsgálatoknak tömérdek sokaságából többet itt felhozni nem szabad. {*Igaz, hogy én épen ezekben a vizsgálatokban, mikor e tárgygyal majdnem egy negyed századdal ezelőtt foglalkoztam, reájutottam a képzeteseknek igaz elméletére és ezt bővítettem, meg próbára tettem.*}

10. §.

A mi a mennyiségeknek a geometriában való szerkesztését illeti, az (az *előbbiekben kifejtett* jelen értelemben) általában és egyszerűen önkényünktől függ, úgy hogy igen könnyen számtalan mód gondolható ki, a melyek szerint pl. az

$$y = fx$$

egyenlet (hol f függvényt jelent), mely általánosságban bármilyen állásokat foglal magában, vagyis a neki megfelelő geometriai hely megszerkeszthető. {*Pl. a legegyszerűbb mód a következő:*}



E dologra vonatkozólag csak azt jegyzem meg, hogy D'Alembert okoskodásának, a melylyel *be* akarja *bizonyítani,* hogy az egyenletek közönséges szerkesztésénél (az ordináták és abszczisszák) pozitiv és negativ értékeit a koordináta-tengelyek ellenkező oldalaira kell reá raknunk, semmi súlya nincsen és helytelen, minthogy e dologban, már annak természete szerint, semmiféle kötelező megállapításnak nincsen helye.

11. §.

Ha az itt kifejtett dolgokat helyesen megfontoljuk, nem marad fenn semmi kétség:

1-ször, hogy csak is olyan *dolgok, és így* csak is olyan mennyiségek lehetnek a {*józan*} kutatás tárgyai, a melyek *valóban megvannak* (pl. ha anyagiak, a testi vagy külső világ részei, vagy legalább elgondolhatók és *lehetségesek*);

2-szor, hogy önként következik és bizonyos, hogy valamennyi a geometriában {*és bárhol másutt*} fellépő mennyiség szemléletileg előállítható {*vagyis*} szerkeszthető.

Megjegyzés. Feltéve, a mint az meg van engedve, hogy $\dotplus 1 = 1$, akkor *ebből folyólag* $\dotplus 1 \dotplus 1$, valamint $\dot{-} 1 \dot{-} 1 = -1$, vagyis mind a $\dotplus 1$, mind a $\dot{-} 1$ a $\sqrt{-1}$-nek egy-egy értéke, és *ha különben* az értelmezéseket úgy alkotjuk, a mint az fentebb történt, a $\dotplus 1$, $\dot{-} 1$ szolgáltatják a $\sqrt{-1}$-nek valamennyi értékét. *Semmi sem akadályoz ugyanis abban, hogy azt is feltételezzük, hogy*

$$f1 \cdot f1 = f'1 \cdot f'1 = f''1 \cdot f''1 \text{ stb.} = -1;$$

ámde más értelmezéseket alkotni, mint az épen fentebb előadottakat nemcsak {*felesleges volna — mert a már 4 elfogadottal valamennyi többinek minden neme kifejezhető, és azonkívül ez a 4 elegendő arra, hogy mindennemű mennyiségeket kifejezhessünk — és*} haszontalan, hanem ez által károsodnék és elveszne a tudomány ragyogó elegancziája is. Ez összehasonlítható egyszersmind a híres GAUSS-nak *Demonstr. nova* etc. 1799 cz. értekezésének 18.[1] oldalával.

Végül megjegyzem, hogy a 9. §-ban idézett könyvben a képzetesek elméletének tárgyalásába néhány más hibán kívül még a következő is becsúszott. A II. kötet 362.[2] oldalán és az I. kötet LVI.[3] oldalán a proporczió fogalma, ha különben a proporcziónak közönséges legismeretesebb tulajdonságait fenn akarjuk tartani, helytelenül van kifejezve. E szerint az értelmezés szerint, a mi jelölésünket használva, volna

$$\pm 1 : \dotplus 1 = \dotplus 1 : \pm 1,$$

és ha ennek valamennyi tagját valamely $a \dotplus b$ vegyes állással (4. §) megszoroznók, származnék belőle az

$$(a \dotplus b) : (-b \dotplus a) = (-b \dotplus a) : (a \dotplus b)$$

proporczió, a mely azonban ugyanannak a szerzőnek szabályai szerint nem proporczió. Ez a kettő pedig ellenkezik egymással. {*Hogy az utóbbi nem proporczió, kitűnik abból, hogy ha* $b \rightharpoonup 0$, *akkor*

$$\rightharpoonup (a : \dotplus a = \dotplus a : a),^{4}$$

a mi épen nem proporczió.}

A képzetesekre vonatkozó fogalmakat, melyeket a híres GAUSS a Gött. Gel. Anz. [1831] 632.—638. oldalain kifejtett[5] (nem sértve a kitünő férfit megillető tiszteletet), szintén nem tarthatom kielégítőknek. Ugyanis:

1. habár teljesen lehetetlen a nagyobbat a kisebből, és a 0-ból elvenni olyant, a mi belőle hiányzik, és szembetünő, hogy ha *a mennyiségeknek semmi más nemét mint a pozitivokat és a negativokat nem engedjük meg*: akkor azok a mennyiségek, a melyeknek négyzete negativ, (ha nem akarjuk, hogy fogalmuk félreismerhetetlen ellenmondást tartalmazzon) nem lehetségesek; mégis a fent felette biztosan megállapított

[1] [C. F. GAUSS, Werke, 3. k. 14. old.]
[2] [BOLYAI F., Tentamen ed. secunda, T. I. Budapestini, 1897. 528. old.]
[3] [BOLYAI F., Tentamen ed. secunda, T. I. Budapestini, 1897. 540. old.]
[4] [A $\rightharpoonup x$ jelölés azt jelenti: közeledik az x határérték felé.]
[5] [C. F. GAUSS Werke, 2. k. 174—178. old.]

fogalmakból kitűnik, hogy pl. embereknek negativ és képzetes száma, mint valóban meglevő megadható; a 634. oldalon* elmondott tehát a dolog igazi metafizikájával nem egyeztethető meg.

2. Hogy *vonatkozások* alatt ott mi értendő, azt szemléltetően megmutatni nem lehet. Mégis azonban úgy látszik, hogy az egész vizsgálatnak teljes kerekdedséggel és világossággal kifejtett (legalább ezen a módon világosabbá váló) értelme a következő: Ha a síkot egyenlő négyzetekre osztjuk fel, sőt általánosabban minden felosztás nélkül, ha valamely pont egyenesben mozog, útját *pozitivnak* (azaz *direktnek*), vagy *negativnak* (azaz *inverznek*) nevezzük a szerint, a mint a mozgás előre vagy hátrafelé megy végbe; ha ellenben az elsőre merőleges egyenesbe tér ki (a honnan azután ismét az előbbi irányban, eredeti útjától mindig egyenlő távolságban mozoghat), az utat *képzetesnek* (azaz *laterálisnak*) veszszük, és ennek is ismét két faja van. Hogy miképen vannak a negativ vonatkozások (a mint az ott ki van fejezve) *már magában* a pozitivok által *meghatározva*, másképen nem látható be.

Egyébként ez ellen a kifejtés ellen is a következő ellenvetéseim vannak:

1. a *jobb, bal, fenn, lenn* stb. fogalmai nincsenek meghatározva, és mint *relativ*, a geometriába nem tartozó fogalmak itt elkerülendők és *elkerülhetők*.

2. Nem érthető, hogy miképen $\{$*és mily értelemben*$\}$ jutunk arra a következtetésre, hogy $+i$ (valamint $-i$ is) *a* $+1$*-nek és* -1*-nek geometriai középarányosa*, különösen mert a *proporczió* fogalma megelőzőleg nincsen általánosan értelmezve, és azért is, mert a négyzetek helyett *rombusok* vehetők fel.

3. Ez a tárgyalás támaszkodik a XI. axiómának kétséges *igaz voltára* és a térnek az arithmetikában elkerülendő szemléletére. Az első bajon még könnyen lehetne segíteni oly módon, hogy a sík helyébe (rövid kifejezéssel élve) a végtelen radiussal leírt gömböt teszszük, melyet *paraspharikus felületnek* lehetne nevezni.

4. Alig helyeselhető (még ha a kisebb jelentőségű helyeket mellőzöm is) ez a mondat: hogy a mennyiségek *más* nemeit a mennyiségek tudományába *nem szabad* befogadni. Fent ugyanis elég világosan ki van mutatva, hogy (tetszés szerint) a mennyiségeknek *akárhány nemét* vezethetjük be; csakhogy ez *nem szükséges*.

5. Végre a dolognak ilyen felfogása felette *szűkkörű* és speciális.

* [C. F. Gauss Werke, 2. k. 175. old.]

BOLYAI JÁNOS

A TÉR TUDOMÁNYA (1855)

A Tér Tudománya vagy Geometria

független a hirhedt 11. Euklides-féle axiómának véges eszes lények által — a mint az itt ki van mutatva — a priori sohasem el nem dönthető, és így csak az Istennek tudatos és magának a Mindenttudónak is csak a közvetetlen szemlélet útján nyilvánvalóvá vált igaz vagy nem igaz voltától; a melyben a sík felületek és egyenes vonalak geometriai származtatása be van mutatva, és az említett alaptétel nem igaz voltának esetére a kör geometriai quadraturája el van végezve. Függelékkel, mely tartalmazza a közönségesen, habár helytelenül úgy nevezett képzetes, avagy lehetetlen (?) mennyiségeknek teljesen világos fogalmát és szerkesztését, valamint a körfüggvényeknek épen ilyen, minden térszemlélettől független alapvonalait.

Írta

Bolyai Bolyai János

a cs. k. osztrák mérnök-testület nyugalmazott 2. osztályú kapitánya

MAROS-VÁSÁRHELYT

Első rész: Alapvetés.

1. §.

Pontnak csak minden *rész nélküli* vagy *egyszerű*, azaz olyan *helyet* nevezünk, a mely *csupán önmagát tartalmazza,* vagyis a mely csak maga van meg önmagában.

2. §.

Létezik egy pont és egy másik pont.

3. §.

Hogy az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ dolgokban *közös*, azt csak $\mathfrak{A}$-nak minden olyan részéről mondjuk, a mely egyszersmind $\mathfrak{B}$-nek is része.

4. §.

$\mathfrak{A} \star \mathfrak{B}$ csak $\mathfrak{A}$-t és $\mathfrak{B}$-t, vagyis az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ dolgok összességét, *egyesületét* jelentse, ha $\mathfrak{A}$ *kívül* van $\mathfrak{B}$-n; $\mathfrak{A} \star \mathfrak{B} \star \mathfrak{C}$ pedig jelentse $\mathfrak{A} \star \mathfrak{B}$-t és $\mathfrak{C}$-t.

5. §.

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ azt jelentse, hogy az $\mathfrak{A}$ dolog épen olyan mint $\mathfrak{B}$, vagyis *egyenlő* $\mathfrak{B}$-vel.

6. §.

$\mathfrak{A} \star \mathfrak{B} \star \mathfrak{C} \ldots \equiv \mathfrak{A}' \star \mathfrak{B}' \star \mathfrak{C}' \ldots$ azt jelentse, hogy $\mathfrak{A} \star \mathfrak{B} \star \mathfrak{C} \ldots$ oly módon $\equiv \mathfrak{A}' \star \mathfrak{B}' \star \mathfrak{C}' \ldots$-vel, hogy e mellett $\mathfrak{A}$ megfeleljen a $\mathfrak{A}'$-nak, $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}'$-nek, $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{C}'$-nek stb.

7. §.

Hogy $\mathfrak{A}$-nak $\mathfrak{B}$-re nézve, vagy $\mathfrak{B}$-hez képest olyan *helyzete* van, vagy pedig úgy *helyezkedik* el, mint $\mathfrak{A}'$ a $\mathfrak{B}'$-re nézve, csak azt jelentse, hogy $\mathfrak{A} \star \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}' \star \mathfrak{B}'$.

8. §.

$\mathfrak{A} \vDash \mathfrak{B}$ azt jelentse, hogy $\mathfrak{A}$ *azonos* $\mathfrak{B}$-vel.

9. §.

$\bigcirc\, \mathfrak{abc}$ jelölje a $\mathfrak{c}$-n átmenő, vagy $\mathfrak{c}$-ből való *gyűrűt* $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül, t. i. valamennyi olyan pontnak egyesületét, a melyek közül mindegyik $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-re nézve olyan helyzetben van, mint $\mathfrak{c}$, vagyis a melyek közül való bármelyik $\mathfrak{d}$-re nézve $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$.

10. §.

$\mathfrak{aabb}$ jelentse az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ pontokon átmenő *egyenest*, t. i. $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-t és mindazokat a pontokat, a melyek mindegyikének az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-re vonatkozó helyzete *egyedül* [csak] az övé, vagy a melyek közül mindegyik egyedül van $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-re nézve abban a helyzetben, a melyben [épen] van, azaz jelentse mindazokat a $\mathfrak{c}$ pontokat, a melyek olyanok, hogy mihelyt $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$, egyszersmind $\mathfrak{d} \vDash \mathfrak{c}$, vagyis a melyekre nézve $\bigcirc\, \mathfrak{abc}$ pusztán a $\mathfrak{c}$ pont.

11. §.

Ha $\mathfrak{a}$ valamely pont, és $\mathfrak{b}$ egy másik [pont], akkor $\mathfrak{aabb}$-n kívül létezik egy $\mathfrak{c}$ pont és minden ilyen pontnak $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül való $\bigcirc\, \mathfrak{abc}$ gyűrűje *egyszerű, egyenletes, zárt* vonal.

12. §.

Ha $\mathfrak{c}$ az $\mathfrak{aabb}$-n kívül van, minden $\mathfrak{d}$ pontnak egyedül magának van meg a helyzete $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve, vagyis $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$ *és* csakis $\mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{d}$: ámde minden $\mathfrak{d}$ pontnak megfelelőleg egy és csak egy, tehát $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{d}$ meghatározta $\mathfrak{e}$ pont van, mely $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve $\mathfrak{d}$-vel *szimmetrikus* helyzetben van vagy $\mathfrak{d}$-vel *szemben áll*, vagy pedig olyan, hogy $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{e}$ az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{d}$-nek *megfordítottja*, vagy a mely $\mathfrak{d}$-nek *képe* $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve vagy $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-ben; $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{e} \div \mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{d}$ azt jelentse, hogy $\mathfrak{e}$ a $\mathfrak{d}$-nek képe $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve.

Minden $\mathfrak{d}$ pontnak képe $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve nyilván benne van $\bigcirc\, \mathfrak{abd}$-ben, valamint $\bigcirc\, \mathfrak{acd}$-ben, $\bigcirc\, \mathfrak{bcd}$-ben, tehát e gyűrűknek közös pontja, ha $\mathfrak{d}$ az $\mathfrak{aabb}$-n, $\mathfrak{aacc}$-n, $\mathfrak{bbcc}$-n kívül van. Ha azonban $\mathfrak{d}$ amaz egyenesek egyikében benne van: akkor $\mathfrak{d}$ *önmagának* képe $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve.

13. §.

Ha $\mathfrak{c}$ az $\mathfrak{aabb}$-n kívül van, az $\mathfrak{abbc}$ *sík* csak $\mathfrak{a}\star\mathfrak{b}\star\mathfrak{c}$-t és mindazokat a pontokat jelentse, melyek mindegyike önmagának képe $\mathfrak{a}\star\mathfrak{b}\star\mathfrak{c}$-re nézve, vagyis a melyeknek képe önmagukban van benne, vagy pedig mindazokat a pontokat, a melyek olyanok, hogy, a midőn $\mathfrak{a}\star\mathfrak{b}\star\mathfrak{c}\star\mathfrak{e} \div \mathfrak{a}\star\mathfrak{b}\star\mathfrak{c}\star\mathfrak{d}$, szükségképen $\mathfrak{e} \mathrel{|\!=\!|} \mathfrak{d}$.

14. §.

Az $\mathfrak{abbc}$-n kívül létezik egy olyan $\mathfrak{d}$ pont, melynek képe $\mathfrak{a}\star\mathfrak{b}\star\mathfrak{c}$-re nézve tőle magától különböző. Ha ugyanis $\mathfrak{f}$ a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-nek egy másik az $\mathfrak{abbc}$-be eső pontja: akkor $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-nek minden a $\mathfrak{c}$-től, valamint az $\mathfrak{f}$-től különböző pontja kívül van az $\mathfrak{abbc}$-n.

15. §.

Ha $\mathfrak{d}$ az $\mathfrak{abbc}$-n kívül van, és $\mathfrak{e}$ a $\mathfrak{d}$-nek képe $\mathfrak{a}\star\mathfrak{b}\star\mathfrak{c}$-re nézve: akkor $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ közül legfeljebb egy van $\mathfrak{ddee}$-ben.

16. §.

Ha $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ az $\mathfrak{abbc}$-nek pontjai, és $\mathfrak{h}$ valamely pont az $\mathfrak{abbc}$-n kívül, melynek képe $\mathfrak{a}\star\mathfrak{b}\star\mathfrak{c}$-re nézve $\mathfrak{i}$: akkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{f}\star\mathfrak{g}\star\mathfrak{i} \equiv \mathfrak{f}\star\mathfrak{g}\star\mathfrak{h}$; tehát minthogy itt $\mathfrak{i}$ a $\mathfrak{h}$-tól különböző, hogy $\mathfrak{h}$ az $\mathfrak{ffgg}$-n kívül van.

E szerint az $\mathfrak{ffgg}$ *egyenes, mely átmegy valamely* $\mathfrak{abbc}$ *sík* $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ *pontjain, teljesen benne fekszik az előbbi*, és így minden az $\mathfrak{f}\star\mathfrak{g}$-n átfektetett síkban; és minthogy minden az $\mathfrak{ffgg}$-n kívül levő $\mathfrak{k}$ pont az $\mathfrak{f}\star\mathfrak{g}$-n átmenő síkok közül csupán csak az egyetlen $\mathfrak{fggk}$-ban van benne, *azért* $\mathfrak{ffgg}$ *tartalmazza mindazt, a mi közös az* $\mathfrak{f}\star\mathfrak{g}$-*n átmenő síkokban, vagyis* [$\mathfrak{ffgg}$] e síkoknak *metszése*. Ha pedig valamely egyenes átmegy valamely sík egyik pontján és egy olyan ponton, mely azon [a síkon] kívül fekszik, akkor evvel a síkkal csak azt az első pontot bírja közösen.

17. §.

Ha $\mathfrak{c}$ az $\mathfrak{aabb}$-n kívül van és $\mathfrak{d}$ a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-ben, de $\mathfrak{abbc}$-n kívül: akkor $\bigcirc\,\mathfrak{cabd}$ jelölje a két darab közül, melyre $\mathfrak{c}\star\mathfrak{d}$ a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-t felosztja, azt, a mely nem tartalmazza $\mathfrak{d}$ képét $\mathfrak{a}\star\mathfrak{b}\star\mathfrak{c}$-re nézve.

18. §.

A $\mathfrak{c}$ pontot akkor nevezzük a $\bigcirc\,\mathfrak{dabe}$ gyűrűív közepének, ha $\mathfrak{e}$ a $\mathfrak{d}$ képe $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve.

19. §.

Ha $\mathfrak{d}$ benne van $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-ben és $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{e} \div \mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{d}$, [azaz] $\mathfrak{e}$ a $\mathfrak{d}$ képe $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve: akkor

$$\bigcirc\,\mathfrak{cabe} \star \mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{e} \equiv \bigcirc\,\mathfrak{dabc} \star \mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{d} \star \mathfrak{c},$$

vagy rövidebben $\bigcirc\,\mathfrak{cabe} \equiv \bigcirc\,\mathfrak{dabc}$, vagy még rövidebben $\mathfrak{ce} \equiv \mathfrak{dc}$.

Ha ugyanis, a mikor $\mathfrak{cf} \equiv \mathfrak{dc}$, $\mathfrak{f}$ a $\mathfrak{ce}$-be esnék az $\mathfrak{e}$-n belül: akkor, ha $\mathfrak{cg} \equiv \mathfrak{ec}$, (a szimmetria miatt) nyilván szükséges volna, hogy $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{cd}$-be essék a $\mathfrak{d}$-n belül (még pedig úgy, hogy $\mathfrak{f}$-nek képe legyen $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve) és ekkor $\mathfrak{fc} < \mathfrak{ec}$ volna, tehát, minthogy $\mathfrak{cg} \equiv \mathfrak{ec}$, egyszersmind $\mathfrak{fc} < \mathfrak{cg}$, és e szerint még inkább $\mathfrak{fc} < \mathfrak{cd}$, a mi a $\mathfrak{cf} \equiv \mathfrak{cd}$ feltevésnek ellentmond, úgy hogy a $\mathfrak{dc} < \mathfrak{ce}$ feltevés nem állhat fenn. Hasonló módon kimutatható, hogy az sem lehetséges, hogy $\mathfrak{dc} > \mathfrak{ce}$. E szerint szükségképen $\mathfrak{ce} \equiv \mathfrak{dc}$.

20. §.

Minden $\mathfrak{pq}$ gyűrűívnek egy és csakis egy közepe van. Van ugyanis $\mathfrak{pq}$-ban olyan $\mathfrak{o}$ pont, a melyre nézve $\mathfrak{oq} \equiv \mathfrak{po}$. Minthogy azonban $\mathfrak{p}$-nek $\mathfrak{r}$ képe az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{o}$-ra nézve $\bigcirc\,\mathfrak{abo}$-ba úgy kell beléesnie, hogy $\mathfrak{or} \equiv \mathfrak{po}$ legyen, azért szükséges, hogy $\mathfrak{r} \models \mathfrak{q}$ legyen és e szerint $\mathfrak{o}$ a $\mathfrak{pq}$ közepébe essék.

21. §.

Ha $\mathfrak{d}$ bárhol van az $\mathfrak{abbc}$-n kívül, és $\mathfrak{e}$ a $\mathfrak{d}$ képe $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve, akkor mind a $\bigcirc\,\mathfrak{dabe}$ közepe, $\mathfrak{f}$, mind a $\bigcirc\,\mathfrak{abd}$-ből fennmaradó darabé, $\mathfrak{g}$, benne van $\mathfrak{abbc}$-ben.

22. §.

Ha $\mathfrak{c}$ az $\mathfrak{aabb}$-n kívül van, $\mathfrak{d}$ pedig benne van $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-ben, $\mathfrak{e}$ a $\mathfrak{d}$ képe $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-re nézve, $\mathfrak{f}$ a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$ másik pontja, mely $\mathfrak{abbc}$-be esik: akkor $\mathfrak{c} \star \mathfrak{f}$ a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-t két olyan részre osztja fel, mely $\equiv$, ha az egyikből a $\mathfrak{c} \star \mathfrak{f}$-et megfelelőnek tekintjük a másikból való $\mathfrak{f} \star \mathfrak{c}$-nek. Ha már mostan $\mathfrak{g}$ e darabok egyikének, $\mathfrak{h}$ a másiknak közepe, és $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ rendre a $\mathfrak{cg}$, $\mathfrak{ch}$, $\mathfrak{gf}$, $\mathfrak{hf}$ közepei, akkor nyilvánvaló, hogy

$\mathfrak{k} \star \mathfrak{i} \star \mathfrak{l} \equiv \mathfrak{k} \star \mathfrak{m} \star \mathfrak{l}$; $\mathfrak{i}$ tehát a $\mathfrak{kkll}$-en kívül van, és így $\mathfrak{l}$ az $\mathfrak{iikk}$-n és hasonló módon $\mathfrak{m}$ az $\mathfrak{iikk}$-n kivül van.

23. §.

Tantétel. Ha $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ három tetszés szerinti pont $\mathfrak{abbc}$-ben, a melyek közül $\mathfrak{h}$ az $\mathfrak{ffgg}$-n kívül van: akkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{abbc}$-nek minden $\mathfrak{p}$ pontja benne van $\mathfrak{fggh}$-ban is, és $\mathfrak{fggh}$ minden $\mathfrak{p}$ pontja benne van $\mathfrak{abbc}$-ben is, azaz hogy $\mathfrak{fggh} \vDash \mathfrak{abbc}$. *Az a sík ugyanis, a mely* [*az* $\mathfrak{abc}$-*ben fölvett*] *bármely három nem ugyanabban az egyenesben levő ponton átmegy, azonos az utóbbival, vagyis három ilyen ponton átmenő sík csak egy van.* Ha pedig valamely sík valamely $\mathfrak{abbc}$ sík két pontján, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$-n és egy olyan ponton megy át, mely azon [a síkon] kívül fekszik, akkor az előbbiben és az utóbbiban csak az $\mathfrak{ffgg}$ egyenes közös, vagyis *valamennyi ugyanazon a két ponton átmenő síknak metszése ugyanannak a két pontnak az egyenese.*

Megjegyzés. Már itten lehet megmutatni, hogy *valamely* $\bigcirc\mathfrak{abc}$-*nek nincsen olyan három pontja,* $\mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$, *mely ugyanabban az egyenesben van,* kivéve, ha mind $\bigcirc\,\mathfrak{pabq}$, mind $\bigcirc\,\mathfrak{pabr}$ a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$ nek páratlan számú részekre való felosztása révén származó bizonyos számú hányadrészével egyenlő (a mely esetben a tétel itt még nem világos). Ennek bebizonyítása elegáns és tanulságos volta miatt megérdemli, hogy itten előadjuk, és habár némileg hosszadalmas is, mégis figyelmet érdemel.

I. Ha a három pont, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ valamely párja $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-t felezi, a tétel helyessége úgy tünik ki, mint fent.

II. Ha nem áll be az I. eset, de $\bigcirc\,\mathfrak{pabq}$, $\bigcirc\,\mathfrak{pabr}$, $\bigcirc\,\mathfrak{qabr}$ közül valamelyik kettő nem egyenlő: akkor $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ közül bármelyik kettőhöz, pl. $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$-hoz olyan negyedik $\mathfrak{s}$ pontot találhatunk, a mely abban az esetben, ha $\mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$ ugyanabban a $\mathfrak{ppqq}$ egyenesben vannak, szükségképen szintén ebbe az egyenesbe esik. Ha [ugyanis] $\mathfrak{c}$ e három ív egyikének, pl. $\bigcirc\,\mathfrak{pabq}$-nak közepe és $\mathfrak{s}$ a harmadik pontnak, $\mathfrak{r}$-nek képe $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-ben: akkor, ha $\mathfrak{r}$ a $\mathfrak{ppqq}$-ban volna, (a szimmetria miatt) szükséges volna, hogy $\mathfrak{s}$ is a $\mathfrak{ppqq}$-val $\vDash \mathfrak{qqpp}$-be, és e szerint, minthogy két ponton, $\mathfrak{p} \star \mathfrak{q}$-n csak egyetlen abszolut egyenes megy át, mind a négy pont, $\mathfrak{s} \star \mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$, ugyanabba a $\mathfrak{ppqq}$ egyenesbe essék. Még pedig három *új* pontot nyerünk: mert, minthogy $\bigcirc\mathfrak{sabp} \equiv \bigcirc\mathfrak{qabr}$, arra, hogy egyszersmind $\bigcirc\,\mathfrak{sabr} \equiv \bigcirc\,\mathfrak{qabp}$ legyen, szükséges volna, hogy $\bigcirc\,\mathfrak{sabp} + \bigcirc\,\mathfrak{pabq} \equiv \bigcirc\,\mathfrak{qabr} + \bigcirc\,\mathfrak{rbas}$ legyen, és így $\mathfrak{p} \star \mathfrak{r}$ a feltevés ellenére felezné $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-t.

Ezen a módon a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$ pontjaiból álló (szükségképen ugyanabban az egyenesben levő) minden így nyert rendszernek bármely három pontja vagy még valamely új pontot szolgáltat, vagy ez valamikor megszünik. Az első esetben nincsen $\bigcirc\mathfrak{abc}$-nek olyan íve, a melynek pontjai közül nem volnának olyanok, a melyek a fenti pontrendszerbe esnek. A $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$ *bármely* három $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ pontja közül ugyanis *mindegyik*, pl. $\mathfrak{r}$, a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-ben nyilván a másik kettő *között* van, minthogy $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-ben $\mathfrak{p}$-ből $\mathfrak{r}$-en át juthatunk $\mathfrak{q}$-ba. A $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ közül mindegyik csak akkor közepe a másik kettőn átmenő egyik ívnek, ha az egyik $\bigcirc\,\mathfrak{pabq}$-t $\mathfrak{r}$ és az egyik $\bigcirc\,\mathfrak{rabq}$-t $\mathfrak{p}$ (és e szerint az egyik $\bigcirc\,\mathfrak{rabp}$-t $\mathfrak{q}$) felezi, úgy hogy $\mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$ a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-t három egyenlő részre osztja fel, vagyis $\mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{r} \equiv \mathfrak{q} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{p} \equiv \mathfrak{r} \star \mathfrak{p} \star \mathfrak{q}$. Mihelyt már most a $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ közül valamelyik — legyen az $\mathfrak{r}$ — a másik kettő által elválasztott ívek egyikében van: akkor a két ív közül, a melyre $\mathfrak{r}$ azt az ívet (a melyben épen van) felosztja az egyik — mondjuk, hogy $\bigcirc\mathfrak{qabr}$ — a kisebbik. Vegyük már most fel ugyanabban a $\bigcirc\,\mathfrak{pabq}$-ban $\mathfrak{p}$-től kezdve az egymáshoz csatlakozó és az említett $\bigcirc\,\mathfrak{rabq}$-val egyenlő $\mathfrak{pabv} \equiv \bigcirc\,\mathfrak{vabt} \equiv \bigcirc\,\mathfrak{tabu}$ stb. íveket mindaddig, míg vagy az egyik ilyen ív $\mathfrak{r}$-ben végződik, vagy pedig $\bigcirc\,\mathfrak{pabr}$-ből olyan maradék marad fenn, mely $<\bigcirc\,\mathfrak{rabq}$-nál. Minthogy (az említett kivételtől eltekintve) ez bármely három pontra nézve elvégezhető, világos, hogy ha a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$ így nyert pontjainak száma a ∞-be nő, akkor nemcsak $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-nek egymáshoz ∞ közel eső pontjait nyerjük, hanem $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-nek minden darabjában is találunk pontokat.

Ha már mostan $\mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$ ugyanabban az egyenesben volnának: akkor valamennyi így nyert pontnak is ugyanabba az egyenesbe kellene esnie. De akkor $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$ egyetlen $\mathfrak{p}'$ pontja sem eshetnék azon [az egyenesen] kívül; mert nyilvánvaló, hogy különben $\bigcirc\mathfrak{abc}$-nek valamely darabja is $\mathfrak{ppqq}$-n kívül esnék, minthogy $\mathfrak{p}'$-től $\mathfrak{ppqq}$-ig nem vezet olyan út, melynek, $\mathfrak{p}'$-től eltekintve, minden pontja $\mathfrak{ppqq}$-ban volna. Ámde a fenti szerint a jelen esetben $\bigcirc\mathfrak{abc}$-nek minden darabja számtalan olyan pontot tartalmaz, a mely $\mathfrak{ppqq}$-ban van. Ez a kettő nem fér össze egymással. E szerint $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-nek *egészen* benne kellene lennie $\mathfrak{ppqq}$-ban, a mi (a 22. § szerint) nem lehetséges. Így tehát a feltevés sem állhat fenn, azaz $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-nek három olyan pontja, a melyből a fenti mód szerint $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-nek számtalan pontja nyerhető, soha sincsen ugyanabban az egyenesben.

Ha azonban ezen a módon $\mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$-hez $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-nek csak határolt számú pontja nyerhető: akkor az utoljára származottaknak $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-t csupa egyenlő részre kell felosztaniok. Addig ugyanis, míg e pontok közül egy is van olyan, a mely t. i. a $\bigcirc\,\mathfrak{abc}$-ben nincsen két szomszédja között a középen, nyilvánvaló, hogy mindig [még] egy új pont származik. Nyilván csakis abban az esetben nem található új [pont], ha a már meglevők *egyenletes, zárt* rendszert alkotnak.

Itt már mostan csak két eset lehetséges: az ilyen darab vagy hányadrésze $\frac{1}{2}$ ○ 𝔞𝔟𝔠-nek, vagy csak ○ 𝔞𝔟𝔠-nek (t. i. vagy $2n$-edrésze, vagy pedig $(2n+1)$-edrésze ○ 𝔞𝔟𝔠-nek). Az első esetben világos, hogy 𝔭 ⋆ 𝔮 ⋆ 𝔯 nincsen 𝔭𝔭𝔮𝔮-ban. Az egyetlen még hátralevő esetben ellenben, midőn t. i. a ○ 𝔞𝔟𝔠 *páratlan* számmal levő részre van felosztva, a tétel ezen a módon nem bizonyítható be. Annyi azonban bizonyos, hogy ha ilyenféle osztópontok ugyanabban az egyenesben feküdnének, olyan legnagyobb, határolt számnak kellene léteznie, a melyre nézve minden ilyen pontrendszer előáll.

24. §.

Alaptétel. Ha 𝔄, 𝔅 tetszés szerinti két hely és ℭ ≡ 𝔄: akkor van legalább egy olyan 𝔇 hely, a melyre nézve ℭ ⋆ 𝔇 ≡ 𝔄 ⋆ 𝔅.

25. §.

Ha 𝔣 az 𝔞𝔟𝔟𝔠-nek valamely tetszés szerinti 𝔞-tól különböző pontja: akkor van olyan 𝔦 pont, hogy 𝔣 ⋆ 𝔦 ≡ 𝔞 ⋆ 𝔟 és 𝔞𝔟𝔟𝔠-ben a ○ 𝔣𝔞𝔦-nek legalább egy olyan 𝔤 pontja, a melyre nézve 𝔣 ⋆ 𝔤 ≡ 𝔞 ⋆ 𝔟; azután van olyan 𝔨 pont, a melyre nézve 𝔣 ⋆ 𝔤 ⋆ 𝔨 ≡ 𝔞 ⋆ 𝔟 ⋆ 𝔠, és végre van 𝔞𝔟𝔟𝔠-ben ○ 𝔣𝔤𝔨-nak két olyan 𝔥 pontja, hogy 𝔣 ⋆ 𝔤 ⋆ 𝔥 ≡ 𝔞 ⋆ 𝔟 ⋆ 𝔠, 𝔣𝔤𝔤𝔥 ≡ és ⊨ 𝔞𝔟𝔟𝔠, és így 𝔞𝔟𝔟𝔠 ⋆ 𝔣 ≡ 𝔞𝔟𝔟𝔠 ⋆ 𝔞.

Minden abszolut síknak tehát bármely két pontjához képest egyenlő helyzete van; vagyis pontjai közül bármely kettőt egyenlő módon tartalmaz.

26. §.

Ha 𝔡 az 𝔞𝔟𝔟𝔠-n kívül van, és 𝔢 a 𝔡 képe 𝔞 ⋆ 𝔟 ⋆ 𝔠-ben: akkor valamint önmagában világos, hogy, midőn 𝔞, 𝔟, 𝔠 közül az egyik *benne* van 𝔡𝔡𝔢𝔢-ben, a másik kettő 𝔡𝔡𝔢𝔢-n kívül van, úgy (a 16. §-ból) világos, hogy 𝔡𝔡𝔢𝔢-nek legfeljebb egy pontja van az 𝔞𝔟𝔟𝔠-ben. E szerint vannak 𝔞𝔟𝔟𝔠-nek olyan pontjai, melyek 𝔡𝔡𝔢𝔢-n kívül vannak. Az 𝔞𝔟𝔟𝔠 bármely 𝔣 pontjának 𝔡 ⋆ 𝔢 körül való gyűrűje nyilván egészen benne fekszik 𝔞𝔟𝔟𝔠-ben.

Ha 𝔪 bárhol van 𝔞𝔟𝔟𝔠 ⋆ 𝔡𝔡𝔢𝔢-n kívül és 𝔫 az 𝔪-nek képe 𝔞 ⋆ 𝔟 ⋆ 𝔠-ben: akkor 𝔪 ⋆ 𝔫-re vonatkozólag hasonló érvényes, mint a mit előbb 𝔡 ⋆ 𝔢-re vonatkozólag mondtunk, és minden gyűrű, mely 𝔪 ⋆ 𝔫-hez képest olyan helyzetben van, mint ○𝔡𝔢𝔣 [az 𝔢 ⋆ 𝔣-hez képest], egészen benne van $\mathfrak{abbc}$-ben. Vagyis, ha valamely mathematikai tárgy, mely $\mathfrak{abbc}$-t betölti, olyan tengely körül forog, mint a milyen $\mathfrak{b} \star \mathfrak{e}$ vagy $\mathfrak{m} \star \mathfrak{n}$: akkor annak minden pontja egy egészen az $\mathfrak{abbc}$-ben fekvő gyűrűt ír le.

Itt $\mathfrak{mmnn}$-nek semilyen az $\mathfrak{abbc}$-n kívül levő pontja nem lehet $\mathfrak{bbee}$-ben; mert különben (a szimmetria miatt) ilyen pontnak, melynek közösnek kellene lennie, a képe is közös volna $\mathfrak{mmnn}$, $\mathfrak{bbee}$-ben, ezeknek az egyeneseknek két pontjuk volna közös, és nem volna lehetséges, hogy az egyiknek, $\mathfrak{mmnn}$-nek valamely $\mathfrak{m}$ pontja a másikon, $\mathfrak{bbee}$-n kívül legyen, a mely eset itt fennforog. Hogy azonban $\mathfrak{abbc}$-nek valamely pontja nem közös $\mathfrak{bbee}$, $\mathfrak{mmnn}$-ben, az itt [még] nincsen eldöntve.

27. §.

Alaptétel. Minden abszolut sík egyszerű, folytonos, egyenletes felület.

Minden abszolut sík a teret két darabra osztja fel; azaz két olyan darab származik, a melyben csak az a sík a közös, és a melyeknek legalább egyikébe beléesik a térnek bármelyik pontja.

28. §.

Ha elképzeljük ○ $\mathfrak{abc}$ és $\mathfrak{abbc}$ második metszéspontját, $\mathfrak{f}$-et, továbbá $\mathfrak{m}$ és $\mathfrak{n}$ közepeit a ○ $\mathfrak{abc}$ ama két felének, a melyre ezt $\mathfrak{c} \star \mathfrak{f}$ felosztja: akkor $\mathfrak{aabb}$-nek minden $\mathfrak{m} \star \mathfrak{n}$ körüli gyűrűben, mely $\mathfrak{abbc}$-ben fekszik, két és csakis két pontja van, és így felismerjük egy olyan egyszerű, kezdet és vég nélkül tovább folyó vonal létét, a mely $\mathfrak{abbc}$-ben fekszik. Ha $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ e vonal két tetszés szerinti pontja: akkor ○ $\mathfrak{pq}$-nak* és $\mathfrak{abbc}$-nek van olyan közös $\mathfrak{L}$ vonala, mely egyszerű és vég nélkül tovább folyó. Ha $\mathfrak{r}$ bárhol van $\mathfrak{L}$-ben: akkor van olyan a $\mathfrak{p} \star \mathfrak{r}$-ben határolt, a $\mathfrak{pq}$ egyenessel (azaz a $\mathfrak{p} \star \mathfrak{q}$-ban határolt egyenessel) oly módon egyenlő egyenes (mely $\mathfrak{abbc}$-be esik), hogy $\mathfrak{p} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{pr} \equiv \mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{pq}$, valamint $\mathfrak{abbc}$ minden $\mathfrak{s}$ pontjának megfelelőleg olyan $\mathfrak{t}$ pont, a melyre nézve $\mathfrak{p} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{t} \equiv \mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{s}$, és továbbá $\mathfrak{abbc}$-*ben* egy, sőt két olyan $\mathfrak{u}$ pont, a melyre nézve $\mathfrak{p} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{u} \equiv \mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{s}$. Végül $\mathfrak{abbc}$ minden $\mathfrak{v}$ pontjának megfelelőleg is van olyan $\mathfrak{w}$ pont, a melyre nézve $\mathfrak{p} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{u} \star \mathfrak{w} \equiv \mathfrak{p} \star \mathfrak{q} \star \mathfrak{s} \star \mathfrak{v}$. Minden ilyen $\mathfrak{w}$ pont benne van $\mathfrak{abbc}$-ben is, és megfordítva $\mathfrak{abbc}$ minden $\mathfrak{w}$ pontjának megfelelőleg van olyan meghatározott, magába az $\mathfrak{abbc}$-be eső $\mathfrak{v}$ pont, a melyre nézve

* [A ○ $\mathfrak{pq}$ *kerekség* értelmezése a 31. §-ban fordul elő.]

p ⋆ q ⋆ s ⋆ v ≡ p ⋆ r ⋆ t ⋆ w. E szerint abbc-nek p ⋆ r ⋆ t, p ⋆ q ⋆ s-hez képest egyenlő a helyzete és az aabb egyenes olyan egyszerű, kezdet és vég nélkül tovább folyó vonalnak mutatkozik, mely az abbc síkot két részre osztja fel. E szerint bármely két pont is legyen a ⋆ b, van olyan egyszerű vonal, a mely rajtuk oly módon átmegy, hogy ugyanarra a két pontra nézve csak egyetlen ilyen [vonal] van.

29. §.

Bármely két abszolut sík tekintettel bármely pontjukra nézve ≡ ; még pedig úgy, hogy az egyik valamely tetszés szerinti pontjának a másiknak tetszés szerinti pontja felelhet meg. ppqq az abbc-t egy pontban döfi át, és minden abszolut sík olyan egyenletes felület, a melynek bármely pontja körül egy anyagi abszolut sík foroghat.

30. §.

Ha f ⋆ h ≡ a ⋆ b, de h az ffgg-n kívül van: akkor legyen r a ppqq és aabb metszéspontja, abbc ⋆ a ⋆ r ≡ abbc, stb., fggh ⋆ f ⋆ k ≡ abbc ⋆ r ⋆ p és l legyen k-nak képe f ⋆ g ⋆ h-ban. Itt ○klh-nak két pontja, m, n van ffgg-ben, és e mellett f ⋆ m ⋆ ffmm ≡ a ⋆ b ⋆ aabb ≡ f ⋆ n ⋆ ffnn. Bármely abszolut egyenes tehát mindegyik pontjára nézve olyan helyzetben van, mint a milyenben van minden aabb egyenes bármely a pontjára nézve. Vagyis *bármely két abszolut egyenes e szerint* ≡, *sőt tetszés szerinti saját pontjaikra nézve* ≡*-k; és minden abszolut egyenes olyan egyenletes vonal, melyet mindegyik pontja felez (azaz két* ≡ *részre oszt fel).* Vagyis csak egyféle abszolut egyenes van. Ugyanaz érvényes a pontra, a térre, valamint alakját tekintve az abszolut síkra nézve.

31. §.

○ ab jelölje *azt a gömbfelületet (kerekséget), melynek közepe* a, *és a mely* b-*n megy át,* vagy röviden az ab gömbfelületet, azaz *mindazokat* a pontokat, melyek a-hoz úgy helyezkednek el, mint b; t. i. a melyek közül bármelyik c-re nézve a ⋆ c ≡ a ⋆ b, vagy pedig *mindazokat* a pontokat, melyek a-tól a ⋆ b távolságnyira vannak.

32. §.

Ha c az aabb-n kívül, és így b az aacc-n kívül van: akkor *először* ○ acb, *azután* pedig minden gyűrű, mely a ⋆ b-hez (vagy általánosságban $\mathfrak{a} \star \mathfrak{f}$-hez, hol $\mathfrak{f}$ az $\mathfrak{a}$ kivételével valamely tetszés szerinti pontot jelent) olyan vonatkozásban van, mint ○ $\mathfrak{acb}$, e szerint egészen benne fekszik a ◐ $\mathfrak{ab}$-ben. Ha már mostan először valamely $\mathfrak{b}$ anyagi pontot $\mathfrak{a} \star \mathfrak{c}$ körül, azután a származott ○ $\mathfrak{acb}$ gyűrűt úgy gondolva, mintha anyaggal volna tele, $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül képzeljük forgatva: akkor olyan út keletkezik, hogy az $\mathfrak{a}$ körül tetszés szerinti módon forgatott $\mathfrak{b}$-nek minden lehetséges útja vagy egészen, vagy pedig valamely kezdő darabja *beléesik* ○ $\mathfrak{acb}$-nek $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül való $\mathfrak{A}$ útjába. Ha ugyanis az $\mathfrak{a}$ körül forgatott $\mathfrak{b}$-nek volna olyan $\mathfrak{W}$ útja, a mely egészen az $\mathfrak{A}$-n kívül esik: akkor $\mathfrak{A}$, ha azt $\mathfrak{a}$ körül úgy forgatjuk, hogy $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{W}$-nek más pontjába jusson, egy egészen a ◐ $\mathfrak{ab}$-be eső teret írna le, és így ◐ $\mathfrak{ab}$ egy teret tartalmazna. Ámde a ◐ $\mathfrak{ab}$ egyenletes. Ha $\mathfrak{b}$ akárhogyan is mozogna $\mathfrak{a}$-ig, a mozgatott $\mathfrak{b}$ egy ideig a ◐ $\mathfrak{ab}$-ben maradna. Folytonosan az alatt nem maradhatna ◐ $\mathfrak{ab}$-ben; valamikor csak el kellene hagynia a ◐ $\mathfrak{ab}$-t; mert $\mathfrak{a}$ nyilván a ◐ $\mathfrak{ab}$-n kívül van. Ha $\mathfrak{b}$, midőn *utóljára* a ◐ $\mathfrak{ab}$-ben van, $\mathfrak{f}$-ben volna: akkor tartalmazna ◐ $\mathfrak{ab}$ olyan $\mathfrak{f}$ pontot, a melytől $\mathfrak{a}$-ig olyan vonal terjedne, mely egészen kívül esik a ◐ $\mathfrak{ab}$-n, úgy hogy ennek az $\mathfrak{f}$ pontnak a 31. § ellenére nyilván más helyzete volna a ◐ $\mathfrak{b}$-ben, mint $\mathfrak{b}$-nek. E szerint $\mathfrak{b}$ sohasem lehet *utoljára* a ◐ $\mathfrak{ab}$-ben. Hasonló lehetetlenségre vezet az a feltevés, hogy $\mathfrak{b}$-nek van egy *első* helye a ◐ $\mathfrak{ab}$-n kívül. Az a feltevés, hogy a ◐ $\mathfrak{ab}$ teret tartalmaz, e szerint nem engedhető meg, és így minden *gömbfelület egyszerű, egyenletes felület, mely a teret két darabra osztja fel.* A két darab közül azt, a mely az $\mathfrak{a}$ pontot tartalmazza, a $\mathfrak{b}$-n átmenő $\mathfrak{a}$ *körüli gömbnek nevezzük*, vagy röviden az $\mathfrak{ab}$ gömbnek, melyet ⊙ $\mathfrak{ab}$-vel jelölünk.

33. §.

Ha (az előbbi §-ban előforduló) $\mathfrak{f}$ az $\mathfrak{aabb}$-ben van: akkor ◐ $\mathfrak{ab}$ egyesülete mindazoknak a félgyűrűknek, melyek $\mathfrak{b} \star \mathfrak{a} \star \mathfrak{f}$-hez olyan helyzetben vannak, mint a ○ $\mathfrak{bacf}$ félgyűrűk [17. §]; ◐ $\mathfrak{ab}$-nek pedig minden a $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}$-től különböző pontja $\mathfrak{aabb}$-n kívül van.

34. §.

Tantétel. Minden $\mathfrak{a}$ *körüli* ◐ $\mathfrak{ax}$*-ben, vagyis* $\mathfrak{a}$*-tól bármely* $\mathfrak{a} \star \mathfrak{x}$ *távolságra* [*minden abszolut síknak*] $\mathfrak{abbc}$*-nek van egy pontja.* Ha ugyanis maga az $\mathfrak{x}$ van $\mathfrak{abbc}$-ben: akkor a tétel magától világos. Ha pedig $\mathfrak{x}$ az $\mathfrak{abbc}$-n kívül van: akkor ○ $\mathfrak{abx}$-nek 2 olyan $\mathfrak{y}$ pontja van $\mathfrak{abbc}$-ben, a melyre nézve $\mathfrak{a} \star \mathfrak{y} \equiv \mathfrak{a} \star \mathfrak{x}$. Ha továbbá $\mathfrak{z}$ az $\mathfrak{abbc}$-ben az

$\mathfrak{aa}\mathfrak{y}\mathfrak{y}$-on kívül van, és felteszszük, hogy $\bigcirc\,\mathfrak{azy}$ az $\mathfrak{y}\star\mathfrak{g}$-ben felezve van, azután elképzeljük, hogy felezve vannak az $\mathfrak{a}\star\mathfrak{y}$ körül futó gyűrűnek azok az ívei, melyek a $\bigcirc\,\mathfrak{ayz}$ egyik felének minden az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{y}$-tól különböző pontjától ugyane pontnak az $\mathfrak{abbc}$-ben levő képéig terjednek; világosabban, hogy ha $\mathfrak{h}$ bárhol is van a $\bigcirc\,\mathfrak{ayz}$ egyik felében, $\mathfrak{k}$ pedig a $\mathfrak{h}$-nak a $\bigcirc\,\mathfrak{ayz}$ másik felébe eső képe $\mathfrak{a}\star\mathfrak{b}\star\mathfrak{c}$-re nézve, a két $\bigcirc\,\mathfrak{hayk}$ ív mindegyike felezve van és hasonlóképen minden más ív, mely [az $\mathfrak{ayz}$] egyik pont[já]tól annak képéig ér: akkor nyilvánvaló, hogy mindezek a közepek egy *egyszerű* vonalat alkotnak (mely abban az esetben, hogy ha $\mathfrak{fg}$ az $\mathfrak{aa}\mathfrak{y}\mathfrak{y}$-ban van, már bizonyára zárt is).

. . . .

35. §.

Tantétel. Minden $\bigcirc\,\mathfrak{ax}$*-ben, melynek közepe valamely tetszés szerinti* $\mathfrak{a}$, *minden* $\mathfrak{aabb}$ *abszolut egyenesnek van egy pontja.* Ha már maga az $\mathfrak{x}$ van $\mathfrak{aabb}$-ben, a tétel magától világos. És ha $\mathfrak{x}$ az $\mathfrak{aabb}$-n kívül van, akkor

. . . .

A nehézség itt ugyanaz! A legegyszerűbb, ha *az abszolut egyenes folytonosságát* veszszük fel alaptételnek.

. . . .

36. §.

A $\mathfrak{de}$ egyenesnek $\mathfrak{o}$ közepe (21. §) szintén $\mathfrak{abbc}$-ben van. $\mathfrak{odd}$* minden pontjának képe $\mathfrak{oee}$-be esik.

Ha a 27. § alaptételéből és a 34. §-nak ezen felépülő tételéből indulunk ki, akkor $\mathfrak{abbc}$ minden $\mathfrak{p}$ pontjának megfelelőleg van két olyan $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ pont, a melyre nézve $\mathfrak{p}\star\mathfrak{abbc}\star\mathfrak{k}\star\mathfrak{l}\equiv\mathfrak{o}\star\mathfrak{abbc}\star\mathfrak{d}\star\mathfrak{e}$, a $\bigcirc\,\mathfrak{klq}\vDash\bigcirc\,\mathfrak{pkq}\vDash\bigcirc\,\mathfrak{plq}$ egészen $\mathfrak{abbc}$-ben van és épen a $\bigcirc\,\mathfrak{pq}$-nak metszése $\mathfrak{abbc}$-vel. A $\mathfrak{p}$-ből kiinduló minden határolatlan egyenesben ugyanis [a 35. § szerint] $\bigcirc\,\mathfrak{pq}$-nak egy és csakis egy pontja van.

Miután megmutattuk, hogy mind $\bigcirc\,\mathfrak{ab}$-nek, mind ennek valamely az $\mathfrak{a}$-n átmenő síkkal való metszésének minden az $\mathfrak{a}$-ból kiinduló egyenesben legfeljebb csak egy pontja van, alaptételnek azt is vehetjük fel, hogy $\mathfrak{abbc}$-ben az $\mathfrak{abbc}$-nek valamennyi a $\mathfrak{p}$-től egyenlő távolságra levő

* [Az $\mathfrak{odd}$ jelenti: «az $\mathfrak{o}$-val felezett $\mathfrak{oodd}$-nek azt a felét, mely a $\mathfrak{d}$ pontot tartalmazza»; l. a 279. oldalon.]

pontja egyszerű, zárt, az $\mathfrak{abbc}$ síkot két részre osztó vonal[at alkot]. Nevezzük ezt az $\mathfrak{abbc}$-ben levő $\mathfrak{a}$-n átmenő $\mathfrak{p}$ körüli *körvonalnak* és jelölésére csupán ○ ... szolgáljon.

37. §.

Az $\mathfrak{abbc}$ síknak ama két darabja közül, melyre azt a ○ felosztja, csakis azt, a melyben $\mathfrak{p}$ van, nevezzük a $\mathfrak{qppr}$-ben levő $\mathfrak{q}$-n átmenő $\mathfrak{p}$ körüli ⊙ *körnek*; csak a $\mathfrak{p}$ pont *közepe* ennek a körnek, valamint ugyanannak a gyűrűnek; csakis minden olyan $\mathfrak{pr}$ egyenes, a mely a $\mathfrak{p}$ középtől a körgyűrű bármely $\mathfrak{r}$ pontjáig terjed ugyanannak a körnek, valamint körgyűrűnek *sugara* (Strahl); * minden sugárnak a kör közepén túl való meghosszabbítása a kerületet még egy pontban találja abból az okból is, mert minden útnak, tehát annak is, mely $\mathfrak{r}$-től $\mathfrak{i}$-ig terjed, (ha $\mathfrak{qi} \equiv \mathfrak{rq} \equiv \mathfrak{qr}$) ama két darab közül, melyre $\mathfrak{i} \star \mathfrak{r}$ a kerületet felosztja, az $\mathfrak{iq} \star \mathfrak{qr}$-től különbözőnek $\mathfrak{qqp}$ **-n kell átmennie; valamint azért is, hogy bármely két egyenes $\equiv$, ha ennek bebizonyítása már előre történt meg. Csak olyan egyenest nevezünk *átmérőnek*, mely $\mathfrak{abbc}$-ben a kör közepén megy át és mind a két oldalon a kerületig ér. A kerület minden darabját *ívnek*, minden a kerület két pontja között elterjedő egyenest az ív *húrjának*, végre a két darab mindegyikét, melyre két tetszés szerinti, nem ugyanabba az egyenesbe eső sugár a ⊙-t felosztja, a ⊙ *czikkének* nevezzük.

38. §.

Mostantól kezdve tiszta képet alkothatunk magunknak a ◎$\mathfrak{ab}$-ről is. Minden valamely gömb közepén átmenő síknak metszete ugyanis kör, a melyet bármely átmérője felez, és az egyik félkör ugyanezen átmérő körül forgatva valamint az a két félkör [a mely a síkban van] magát ⊙ $\mathfrak{ab}$-t szolgáltatja. Valamennyi hozzájuk tartozó valamint a két félkerület stb. szolgáltatja ◎ $\mathfrak{ab}$-t.

Minthogy valamely ◎ bármely két pontja a középtől egyenlő távolságra van, azért *minden* ⊙*-nek, és így minden* ⊙*-nek is bármely két sugara,* $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ab}$ $\equiv$, *valamint bármely két átmérője is.*

. . . . , ...

* Nem látom be, hogy ezt a rövidebb nevet miért nem fogadták el már régen [a *félátmérő* helyett]; hiszen ugyanennek a fogalomnak neve latinul *radius*, francziául *rayon*, olaszul [*raggio*] stb., a mely szók mindegyike a német Strahl-nak [magyar sugárnak] felel meg.

** [A $\mathfrak{qqp}$ jel jelenti: «csak a $\mathfrak{q}$-ban felezett $\mathfrak{qqpp}$-nek másik felét, a melyben $\mathfrak{p}$ nincsen»; l. a 279. old.]

39. §.

Valamely 𝔟𝔟𝔢𝔢 egyenesről, valamint valamely 𝔟𝔢𝔢𝔣 síkról [mely mind a kettő] 𝔅-vel [legyen jelölve], csak akkor mondjuk, hogy bizonyos saját (azaz 𝔅-ben levő) 𝔟 pontból *merőleges* (⊾) valamely 𝔞𝔟𝔟𝔠 [vagy] 𝔄 síkra, ha a határ nélkül meghosszabbított előbbi 𝔅 tartalmazza 𝔟 pontjának képét is, vagy pedig akkor, ha 𝔟 benne van 𝔄-ban is, tartalmazza valamely az 𝔄-n kívül eső pontjának 𝔄-ra tekintettel való képét. Vagyis: csak akkor, ha valamely egyenes [vagy] valamely sík két valamely síkra nézve szemben fekvő pontot tartalmaz, mind arról az egyenesről, mind pedig arról a síkról mondjuk, hogy az utóbbi síkra merőleges; még pedig abból az említett két pontból, valamint az előbbinek bármely pontjából. Rövidebben: ha 𝔟 az 𝔞𝔟𝔟𝔠-n kívül van, és 𝔢 a 𝔟-nek képe (𝔟 ∸ 𝔢) 𝔞 ⋆ 𝔟 ⋆ 𝔠-ben: akkor azt mondjuk, hogy a 𝔟𝔟𝔢𝔢 egyenes, valamint bármely tetszőleges, a 𝔟 ⋆ 𝔢-t tartalmazó sík és ilyennek minden darabja merőleges 𝔞𝔟𝔟𝔠-re.

40. §.

Valamely 𝔄 vagy 𝔠𝔠𝔟𝔟 egyenesről csak akkor mondjuk, hogy valamely 𝔠 pontból ⊾ valamely 𝔅 vagy 𝔞𝔞𝔟𝔟 egyenesre, mely 𝔞𝔞𝔟𝔟 egyenesen a 𝔠 pont kívül van, ha 𝔠𝔠𝔟𝔟 a ○ 𝔞𝔟𝔠 és 𝔞𝔟𝔟𝔠 második metszéspontját is tartalmazza; abban az esetben pedig, ha 𝔠 benne van 𝔞𝔞𝔟𝔟-ben, ha 𝔠𝔠𝔟𝔟 valamely másik 𝔟 pontjának 𝔞 ⋆ 𝔟 körüli ○-ének második metszéspontját tartalmazza. *Derékszögnek pedig* csakis annak a négy ∧-nek mindegyikét nevezzük, melyet ilyen egymásra ⊾ egyenesek alkotnak; és csakis minden ilyen szög jelölésére szolgáljon *R*.

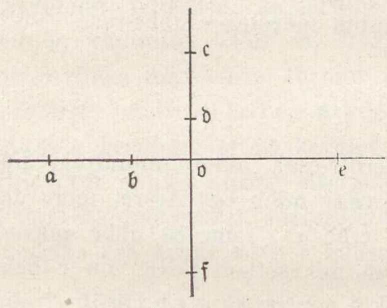
41. §.

Először. Valamely sík és egy kívüle fekvő pont által meg van határozva a kép stb. Ha valamely pont valamely egyenesen kívül van: akkor e pontnak az egyenes körül tekergő ○-e meghatároz egy az egyenesre ⊾ síkot. Minden valamely határtalan síkon kívül levő pontból egy, de csakis egy reá ⊾ [egyenes] lehetséges; minden ebben a határtalannak gondolt egyenesben fekvő ponton pedig egy, de csakis egy reá ⊾ sík, minden valamely határtalan egyenesen kívül levő ponton pedig egyetlen arra az egyenesre ⊾ [egyenes], valamint ⊾ sík megy át.

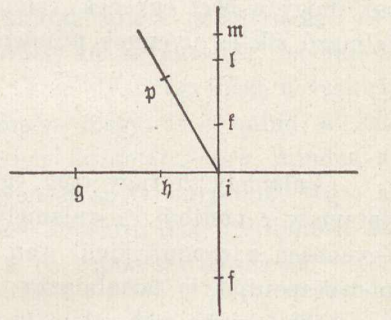
Másodszor. Az olyan egyenes, mely valamely síkra vagy egyenesre ⊾-en van bocsátva valamely olyan pontból, mely kívül van egy ugyanarra a síkra (egyenesre) határtalan $\perp$- [egyenes]en, ezt az utóbbi $\perp$-t nem találja. Ha ugyanis $\mathfrak{cd} \perp \mathfrak{A}$, $\mathfrak{f}$ a $\mathfrak{ccdd}$-n kívül van és $\mathfrak{fg} \perp \mathfrak{A}$: akkor $\mathfrak{ccdd}$, $\mathfrak{ffgg}$-ben semmi közös nincsen; ellenkezőleg az előbbinek ellenére ugyanabból a pontból két különböző $\perp$ volna bocsátható $\mathfrak{A}$-ra.

Harmadszor. Ha az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ két hely közül, melyek mindegyike külön-külön vagy egyenes, vagy pedig sík, az egyik, az $\mathfrak{A}$ $\perp$ a másikra: akkor ez is $\perp$ amazra. Ha ugyanis 1) valamely $\mathfrak{A}$ egyenes $\perp$ valamely $\mathfrak{B}$ egyenesre: akkor a tétel kiadódik a [40.] §-ból. Ha 2) stb.

Megjegyzés. Ilyen természetűek a $\perp$-ekre vonatkozó pontos értelmezések és a róluk szóló tan; és habár ezek valamivel hosszadalmasabbak a közönségeseknél, a dolog lényegét tekintve, nyilván mégis sokkal egyszerűbbek, mondhatni az ősforrásból eredők. Sok



1. ábra.



2. ábra.

olyan dolog, a melyet különben csak nehézkesen szoktak bebizonyítani, itt majdnem közvetetlenül világos, míg sok olyan dolog, a melyre különben egyáltalában nem szoktak tekintettel lenni, itt a legnagyobb gondossággal van kifejtve.

42. §.

Ha $\mathfrak{cd} \perp \mathfrak{ab}$ (1. ábra), akkor, ha $\mathfrak{oe} = \mathfrak{oa}$, $\mathfrak{of} = \mathfrak{oc}$, nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{aoc} \equiv \mathfrak{eoc} \equiv \mathfrak{eof} \equiv \mathfrak{aof}$; tehát egyszersmind $\mathfrak{aoc} \equiv \mathfrak{eof}$, $\mathfrak{eoc} \equiv \mathfrak{aof}$.

43. §.

Valamennyi derék-$\wedge \equiv$. Ha ugyanis $\mathfrak{cd} \perp \mathfrak{ab}$ stb., valamint $\mathfrak{kl} \perp \mathfrak{gh}$ (2. ábra): akkor, ha $\mathfrak{i}$ a $\mathfrak{kkll}$ és $\mathfrak{gghh}$ metszéspontja és az $\mathfrak{igg}$-ből (vagy $\mathfrak{ihh}$-ból) való $\mathfrak{ig} \equiv \mathfrak{oa}$, $\mathfrak{ih} \equiv \mathfrak{ob}$, $\mathfrak{gh} \star \mathfrak{ip} \equiv \mathfrak{ab} \star \mathfrak{oc}$ és $\mathfrak{p}$ (a $\mathfrak{ghhk}$-ban) $\mathfrak{gh}$-nak $\mathfrak{k}$-oldalán van: $\mathfrak{gim} = \mathfrak{him}$, $\mathfrak{gip} = \mathfrak{hip}$. Tehát minden $\mathfrak{ih}$-ra nézve, ha a hgkk-ból* való hir = gip, ip nyilván mindig ikk-ba esik, aoc ≡ (gip ≡) gik.

Minden *R* derék-∧ *megfordítva* is ≡, azaz coa ≡ aoc (1. ábra). Ha ugyanis az ooa-ból való oe = oc, akkor oe ⋆ oocc ≡ oc ⋆ ooaa, és így . . .

44. §.

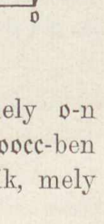
Minden valamely síkra ∟ egyenes ∟ a síknak minden olyan egyenesére, mely (a síkkal való) metszéspontját tartalmazza; vagyis minden egyenessel, melyet a síkban a metszéspontból húzunk, egy-egy *R*-t (≡ ∟ villa) alkot.

45. §.

Hogy van is minden valamely sík*ban* levő ponton át egy ∟ egyenes és minden kívüle fekvő ponton *át* egy és csak egy ∟ egyenes, az már a síknak *egyenletességéből* következik. Hasonlóképen, minthogy minden egyenes egyenletes, minden benne levő ponton át egy ∟ sík és minden síkban, mely azt [az egyenest] tartalmazza, egy ∟ lehetséges.

46. §.

Hogy azonban valamely egyenes minden pontján át minden síkban, mely azt [az egyenest] tartalmazza, *csupán egy* reá ∟, valamely egyenes minden pontján át *csupán egy* reá ∟ sík, valamely sík minden pontján át *csupán egy* reá ∟ egyenes, végre valamely sík minden egyenesén át *csupán egy* az előbbire ∟ sík megy át, a következőképen tünik ki.



3. ábra.

I. Minthogy a [43.] § szerint valamennyi derék-∧ ≡, azért ha aoob-ben mind ob (3. ábra), mind oc ∟ oa-ra (azaz aoc ≡ aob),, nyilvánvaló, hogy oc ⊨ ob. (Ez az első [eset] volt.)

II. Minthogy oa minden olyan az o-ból kiinduló ob egyenessel, a mely bármely az oa-ra ∟ síkban van, *R*-t alkot és olyan sík, mely o-n átmenve oa-ra ∟, az aoob-t oobb-ben és ugyanazt az aoob-t oocc-ben metszi, azért (I. szerint) oocc az oobb-be esik és a második sík, mely oa-ra ∟, ⊨ az elsővel.

* [Az abcc jel jelenti: «az aabb-ben felezett abbc-nek csak azt a felét, mely a c pontot tartalmazza.» L. a 279. oldalt.]

III. Ha mind $\mathfrak{oc}$, mind $\mathfrak{ob}$ ugyanarra a síkra $\perp$: akkor van olyan sík, mely mind $\mathfrak{ob}$-t, mind $\mathfrak{oc}$-t tartalmazza. Ha ez az *alap*-síkot $\mathfrak{ooaa}$-ban metszi: akkor $\mathfrak{coa} \equiv R \equiv \mathfrak{boa}$, úgy hogy $\mathfrak{oc} \mathrel{|\!\!\equiv\!\!|} \mathfrak{ob}$.

IV. A negyedik [állítás] tüstént a [39.] § értelmezéséből és III-ból következik, minthogy csupán *egyetlen* olyan sík van, mely az alapsík egy egyenesét és a III. szerint egyetlen reá $\perp$ egyenest tartalmazza.

Ha az $\mathfrak{E}$ sík az $\mathfrak{ooaa}$ egyenesnek valamely $\mathfrak{o}$ pontján megy át és valamely $\mathfrak{ob} \perp \mathfrak{oa}$, továbbá $\mathfrak{aoob}$ az $\mathfrak{E}$-t $\mathfrak{oocc}$-ben metszi: akkor, mert $\mathfrak{aob} \equiv \mathfrak{aoc}$, $\mathfrak{ob}$ esik $\mathfrak{oc}$-be, és így $\mathfrak{E}$-be.

47. §.

Valamennyi olyan egyenes, mely valamely egyenes ugyanazon a pontján megy át és arra $\perp$, egy és ugyanabban a síkban van és alkotja az azon a ponton átmenő arra az egyenesre $\perp$ síkot. *E szerint (valamely síkban) a síknak csakis valamely pontjából kiinduló egyenesei azok, melyek $\perp$-ek arra az egyenesre, a mely abban a pontban ugyanarra a síkra $\perp$-en áll.*

Második rész: Szerkesztéstan.

Különböző olyan alapvető helyek előállítására vonatkozó feladatok, a melyekről eddig csak homályos képük volt az embereknek és létezésüket csak sejtették, a nélkül, hogy azt bebizonyították és még kevésbbé, hogy e helyeket a priori valóban megtalálhatták volna.

1. §.

I. *Adva van két pont,* $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ *és még egy másik,* $\mathfrak{c}$; *eldöntendő, vajjon az utóbbi [pont], a* $\mathfrak{c}$, *benne van-e az előbbiek meghatározta* $\mathfrak{aabb}$ *egyenesben vagy pedig kivüle.*

II. *Adva van három pont,* $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$ *és valamely* $\mathfrak{d}$ *pont; kipuhatolandó, vajjon* $\mathfrak{d}$ *benne van-e valamely az* $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$*-t tartalmazó síkban vagy sem.*

Megjegyzés. Ennek eldöntése nélkül, még ha képesek is volnánk $\mathfrak{ab}$-t tetszésünk szerint meghosszabbítani, *ez által* még sem tudhatnók meg soha, hogy abban az esetben, mikor $\mathfrak{c}$ az $\mathfrak{aabb}$-n kívül van, vajjon nem csupán a még túlságosan csekély meghosszabbítás oka-e annak, hogy $\mathfrak{c}$-t még nem értük el.

III. *Adva van két pont,* $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$; *keresendő olyan pont, mely az* $\mathfrak{aabb}$ *egyenesen kívül van.*

Megoldás. Keressük $\bigcirc$ $\mathfrak{ab}$-nek valamely a $\mathfrak{b}$-től különböző $\mathfrak{c}$ pontját, és abban az esetben, ha $\mathfrak{c}$ az $\mathfrak{aabb}$-ben van (a mi arról ismerhető fel, hogy $\mathfrak{c}$ bármely az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ körül történő forgás közben nyugalomban marad), valamely harmadik pontját, $\mathfrak{d}$-t. Ekkor $\mathfrak{a} \star \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$, és $\mathfrak{d}$ mindig kívül lesz az $\mathfrak{aabb}$-n.

2. §.

Adva van három egy síkot meghatározó pont $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$; *meghatározandó olyan pont, mely azon a síkon kívül van.*

Megoldás. Írjuk le $\bigcirc$ $\mathfrak{abc}$-t, vegyük fel $\bigcirc$ $\mathfrak{abc}$-nek egy a $\mathfrak{c}$-től különböző $\mathfrak{d}$ pontját és abban az esetben, ha ez $\mathfrak{abbc}$-ben volna (a mi arról ismerhető fel, hogy ○ abd-nek és abbc-nek csak [még] c a közös pontja), vegyük fel ○ abc-nek valamely harmadik pontját. Ez az abbc-n kívül van.

3. §.

Adva van ○abc-nek olyan d *pontja, mely* abbc-*n kívül van; meghatározandó annak képe* a ⋆ b ⋆ c-*ben.*

Megoldás. Írjuk le ○ acd-t vagy ○ bcd-t: akkor ezek mindegyikének metszése ○abc-vel szolgáltatja a keresett pontot (képet).

4. §.

Adva van két pont, a, b; *meghatározandó az egyik, — mondjuk* a *körül — az a gömbfelület, a mely a másikon, a* b-*n megy át.*

Megoldás. Keressünk olyan c pontot, mely aabb-n kívül van, írjuk le ○ acb-t és forgassuk ezt a ⋆ b körül: akkor nyerjük a ◎ ab egy *szeletét*, vagyis egy *gömbi kört.* Ha ezt a szeletet a *és* a saját határpontja körül forgatjuk: akkor egy új gömbi kört nyerünk, melynek gömbi sugara kétszerese az előbbiének. Ha ezt így folytatjuk, valamikor az egész gömböt nyerjük; még pedig, ha c véletlenül az a-ból az aabb-re ⌊-en bocsátott síkban van, úgy hogy ○acb a ◎ab egyik főgyűrűje: akkor a ○acb-nek a ⋆ b körül való forgatása révén mindjárt ◎ab-t nyerjük; különben pedig csak akkor, mikor a gömbi sugár $=$-vé vált a ◎ főgyűrűjének $\frac{1}{4}$-ével vagy pedig ennél $>$-bá.

5. §.

Olyan kör irandó le, mely három adott a ⋆ b ⋆ c *pontot tartalmaz.*

Megoldás. Ha mind a három pont ugyanabban az egyenesben van, keressünk valamely az utóbbiban levő pontot. Legyen tehát a ⋆ b ⋆ c olyan, hogy síkot határoz meg. Képzeljünk olyan d pontot, mely abbc-n kívül van, legyen e a d-nek képe a ⋆ b ⋆ c-ben, f a ○abc valamely tetszés szerinti új pontja (mely mindig abbc ⋆ ddee-n kívül essék); keressük f-nek g képét a ⋆ b ⋆ c-ben, írjuk le ○ dec-t vagy ○ deb-t (minthogy ekkor c, valamint f is, mindig ddee-n kívül esnek, a azonban nem), és forgassuk ezt az f ⋆ g körül: akkor vagy *kör*, vagy pedig *korona* származik a szerint, a mint ffgg a ○dec-t találja vagy nem találja; mert a ○dec két fele, a melyre azt fecg ⊨ fddg = feeg felosztja, az első esetben kört, a második esetben pedig koronát létesít. Ha azt, a mi épen most származott, ismét d ⋆ e körül forgatjuk: akkor abban az esetben, mikor ffgg a ⊙dec-t nem találja, azonnal új kört nyerünk; ha azonban ffgg a ⊙dec-t a belsejében, a h-ban metszi, h távolságnyira ddee-től (vagy, a mi ugyanaz a ddee és abbc metszéspontjától, röviden a de-nek i közepétől): akkor, ha a ○dec sugara $= a$, a ○dec-nek ffgg-től legtávolabb eső pontja $b+a$, legközelebb eső pontja pedig $a-b$ távolságra van, és így, ha azt, a mi előbb az f ⋆ g körül származott, d ⋆ e körül forgatjuk, az ezen a módon származó legbelsőbb gyűrűnek sugara $=$ $a-2b$-vel, a legkülsőbbé pedig $= 2b+a$-val. Ha minden már találtnak forgatását d ⋆ e, f ⋆ g körül váltakozva folytatjuk, akkor világos, hogy mindaddig, mig h, i, mind a kettő a lyukban van, a nyerendő korona lyukának sugara minden egyes forgatás alkalmával b-vel fogy, míg a külsőnek sugara b-vel növekedik. Ha mb a b-nek az a-ban foglalt többszörösei közül a legnagyobb olyan, mely nem mulja fölül a-t: akkor az $(m+1)$-dik forgatás után nyerjük a kört.

A fentebbiekből kitűnik az is, [hogy ha] először c-t a d ⋆ e körül és azután mindent, a mit d ⋆ e vagy f ⋆ g körül nyertünk, a másik körül forgatunk, ezt a műveletet mindaddig folytathatjuk, míg abbcnek minden adott a, b, c pontját elérjük.

6. §.

Keressünk olyan egyenest, mely két adott pontot tartalmaz, vagyis két adott a, b *ponton át húzzunk egy egyenest.*

Megoldás. Keressünk különböző síkokban fekvő két olyan kört, a melyek mindegyike a két adott a, b pontot tartalmazza: akkor metszésük olyan egyenes, mely a ⋆ b-t tartalmazza.

Keressünk ugyanis olyan a b-től különböző pontot, mely a-tól a ⋆ b távolságnyira van, és abban az esetben, ha az [a pont] aabb-ben van, olyan harmadik c pontot, a melyre nézve a ⋆ c ≡ a ⋆ b: akkor mindenesetre találunk olyan c pontot, a mely aabb-n kívül van (úgy hogy a ⋆ b ⋆ c síkot határoz meg). Keressük a ○abc-nek egy másik pontját, és abban az esetben, ha ez abbc-ben van, a ○abc-nek egy harmadik d pontját: akkor mindenesetre találjuk az említett gyűrűknek [abc-nek és acd-nek] egy második e metszéspontját. Keressük ○abc-nek még egy az abbc-n kívül levő f pontját, és ennek g képét a ⋆ b ⋆ c-ben (○abc és ○acf második közös pontját); forgassuk (minthogy itt b, c a ddee-n kívül vannak) ○dec-t (vagy ○deb-t), a ○dec útját f ⋆ g körül és azután minden már nyert utat váltakozva f ⋆ g vagy d ⋆ e körül mindaddig, míg olyan kört nem nyerünk, mely az a ⋆ b ⋆ c-t tartalmazza.

Hasonló eljárással keressünk olyan kört, a mely $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-t és ○$\mathfrak{abc}$-nek valamely a $\mathfrak{c}$-től különböző pontját tartalmazza. E két kör metszése azután olyan egyenes, mely $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$-n megy át.

7. §.

Minden adott [pontról] valóban eldönthető, vajjon benne vagy kívüle van-e valamely adott pontnak két adott pont körüli ○-jében, két pont egyenesében, valamely pontnak bizonyos közép körüli gömbfelületében, három pont síkjában vagy sem.,

A ○ vagy valamely ◐ esetében ez magától dől el, mihelyt azt a ○-t vagy ◐-et valóban keressük; az $\mathfrak{aabb}$ egyenes esetében azonban (minthogy ezt egészében nem nyerhetjük sohasem, és így tehát a szemlélettel közvetetlenül a posteriori sem dönthetjük el, vajjon $\mathfrak{c}$ *benne* van $\mathfrak{aabb}$-ben vagy pedig *kívüle)* úgy [döntünk], hogy $\mathfrak{ab}$-t pl. $\mathfrak{b}$-n túl meghosszabbítjuk és $\mathfrak{bc}$-t keressük, a mikor majd nyilvánvalóvá válik, vajjon $\mathfrak{bc}$, és így $\mathfrak{c}$ benne van-e $\mathfrak{aabb}$-ben vagy kívüle. Az $\mathfrak{abbc}$ esetében pedig állítsunk elő olyan kört, mely $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-n és olyant, mely $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{d}$-n megy át, mi által majd a dolog szintén elválik.

8. §.

Adva van három pont; eldöntendő, vajjon ugyanabban az egyenesben fekszenek-e vagy sem.

9. §.

Adva van négy pont; eldöntendő, vajjon ugyanabban a síkban fekszenek-e vagy sem.

10. §.

Adva van két pont, $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$; *meghúzandó a* $\mathfrak{c}$ *ponton át (mely akár* ⊨ *az* $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$ *egyikével, akár pedig mindegyiküktől különböző) az* $\mathfrak{ab}$*-re* ⊥ *[egyenes] (még pedig abban az esetben, ha* $\mathfrak{c}$ *az* $\mathfrak{aabb}$*-ben van, az* $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b}$*-n átmenő abban a síkban, a mely valamely az* $\mathfrak{aabb}$*-n kívül fekvő adott pontot tartalmaz).*

[*Megoldás.*] Ha $\mathfrak{c}$ az $\mathfrak{aabb}$-n kívül esik, irjuk le ○$\mathfrak{abc}$-t, állítsunk elő egy az $\mathfrak{a} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c}$-n átmenő ⊙-t és bővítsük ezt, míg a ○$\mathfrak{abc}$-t másodszor metszi. Így nyerjük a keresett $\mathfrak{ab}$-re ⊥-nek két pontját, és azután magából a ⊥-ből olyan hosszú darabot találhatunk, a milyent csak kívánunk.

Ha azonban $\mathfrak{c}$ *benne* van az $\mathfrak{aabb}$-ben: akkor vegyünk fel $\mathfrak{aabb}$-

ben, túl a 𝔠-n valamely a 𝔠-től különböző tetszés szerinti 𝔡 pontot, és keresve ◎ 𝔠𝔡-t, [találjuk] 𝔢-t, a ◎ 𝔠𝔡 és 𝔞𝔞𝔟𝔟 másik metszéspontját. Állítsunk már most elő 𝔡 körül olyan ◎-et, melynek sugara tetszés szerinti, de 𝔡𝔢-nél >, legczélszerűbben azonban azt, mely magán 𝔢-n megy át. Keressünk 𝔢 körül egy tetszés szerinti vonalat 𝔡-től egészen az 𝔢𝔢𝔡-n belül levő 𝔣-ig, hol 𝔢𝔣 = 𝔢𝔡: akkor amaz metszi ◎ 𝔡𝔢-t. A metszéspont [legyen] 𝔭. Állítsuk elő 𝔞𝔟𝔟𝔣-et, akkor nyerjük ennek 𝔄 metszését ◎ 𝔡𝔢-vel. Keressük ○ 𝔞𝔟𝔭-t: akkor ennek [a gyűrűnek] 𝔄-val való metszéspontjainak mindegyike (𝔠 mellett) egy második pontja az 𝔞𝔟𝔟𝔤-ben a 𝔠-ből az 𝔞𝔟-re bocsátott annak a ∟-nek, melyet keresünk.

E feladat megoldása azonban elegánsabban alakul és a kivitelben a leginkább megbízhatóvá válik az által, hogy ◎ 𝔡𝔢-nek 𝔞𝔟𝔟𝔤-vel való metszését is meghatározzuk és azután ○○-t. A 𝔡-től 𝔣-ig terjedő előbbi 𝔢 körüli vonal esetében a vonal bármely távolságban a két ◎-nek ○-metszésétől a ⊙ 𝔡𝔢-n belül tetszés szerint közel juthatna a ◎-hez, és ez könnyen durva hibára szolgáltathatna okot.

Annak [a síknak], mely 𝔠-ből ∟ 𝔞𝔟-re, egy ○-jét már akkor nyerjük, ha 𝔠-t 𝔞𝔟 körül forgatjuk; ezután pedig ezt a síkot bármely pontja körül tetszésünk szerint bővíthetjük. Ha pedig ha 𝔠 az 𝔞𝔞𝔟𝔟-ben van, az ottani két ◎ metszése hasonlóképen szolgáltatja a 𝔠-ből az 𝔞𝔟-re ∟ síknak egy ○-ét.

Más megoldás. A 𝔠-ből az 𝔞𝔟-re ∟-t *a nélkül* is találhatjuk, hogy 𝔞𝔞𝔟𝔟-t a 𝔠-n túl meghosszabbítanók, ha 𝔢-t önkényesen veszszük fel az 𝔞𝔞𝔟𝔟-n kívül, meghúzzuk az 𝔞𝔟-re ∟ 𝔢𝔡-t, 𝔠 körül a 𝔡 ⋆ 𝔢-vel = távolságban, 𝔡 körül a 𝔠 ⋆ 𝔢-vel = távolságban egy-egy ◎-et állítunk elő. E kettőnek ○-metszése nyilván abban a síkban van, mely 𝔠-ből ∟ 𝔞𝔟-re, a hol stb.

11. §.

Adva van három olyan 𝔞 ⋆ 𝔟 ⋆ 𝔠 *pont, mely síkot határoz meg: előállítandó az adott* 𝔡 *pontból az* 𝔞𝔟𝔟𝔠 *síkra* ∟ *[egyenes].*

[*Megoldás.*] Ha az 𝔞, 𝔟, 𝔠 két párjának mindegyike körül, pl. mind az 𝔞 ⋆ 𝔟, mind az 𝔞 ⋆ 𝔠 körül a ○𝔞𝔟𝔡-t, valamint a ○𝔞𝔠𝔡-t írjuk le és e ○-ök másik metszéspontját keressük, evvel megvan a 𝔡 képe 𝔞 ⋆ 𝔟 ⋆ 𝔠-re nézve (a nélkül, hogy 𝔞𝔟𝔟𝔠-ből valamit is előállítottunk volna). Ezután az 𝔞𝔟𝔟𝔠-re ∟ 𝔡𝔡𝔢𝔢-ből tetszés szerinti hosszú darabot kereshetünk.

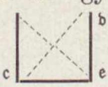
Ugyanazt az 𝔢 pontot szolgáltatják ○𝔞𝔟𝔡, ○𝔟𝔠𝔡, valamint ○𝔞𝔠𝔡, ○𝔟𝔠𝔡 is; röviden az 𝔞, 𝔟, 𝔠 egy tetszés szerinti párja körüli 𝔡-n átmenő ○, a két másik pár egyike körüli 𝔡○-rel. A 𝔡 ⋆ 𝔢 mind a 3 ○-ben közös, sőt e ○-ök bármely kettejében is *csupán* 𝔡 ⋆ 𝔢 a közös. E szerint a valóságos kivitelnél az eljárás valamely pontatlanságára következtethetünk, ha a két másik ○-pár egyike az 𝔢 számára a már találttól különböző pontot szolgáltat. Ámbár megfordítva nem következik, hogy akkor, midőn a ○-ök minden párja ugyanazt a pontot szolgáltatja, ez valóban a kellő helyen van. Lehetséges ugyanis, hogy a 3 ○ mindegyikénél hibát követtünk el.

Egyébként ezen a módon a feladat megoldása két ○ segítségével történik, de nincsen az így, ha először az 𝔞𝔟𝔟𝔠-ben egy határolt 𝔣𝔤 egyenest húzunk, erre a 𝔡𝔥 ∟-t bocsátjuk 𝔡-ből, és ha maga a 𝔡𝔥 nem ∟ 𝔞𝔟𝔟𝔠-re — a mi arról ismerhető fel, hogy az igenlő esetben 𝔞𝔟𝔟𝔠 valamely tetszés szerinti pontjának 𝔡𝔥 körüli köre egészen benne van 𝔞𝔟𝔟𝔠-ben, ellenkezőleg pedig csak két pontja van 𝔞𝔟𝔟𝔠-ben — 𝔡𝔥-nak 𝔥 talppontjából 𝔞𝔟𝔟𝔠-ben a 𝔨𝔩 merőlegest bocsátjuk, végre 𝔡-ből 𝔨𝔩-re merőlegest bocsátunk; vagy pedig, ha 𝔡-től az 𝔞𝔟𝔟𝔠 túlsó oldalán valamely 𝔢 pontot, 𝔞𝔟𝔟𝔠-ben pedig a 𝔡-től 𝔡𝔢 távolságnyira levő három pontot, 𝔣, 𝔤, 𝔥-t veszszük fel és azután [olyan pontot] keresünk, mely 𝔣, 𝔤, 𝔥-tól egyenlő, nagyságát tekintve a $\frac{1}{2}$𝔣𝔤, $\frac{1}{2}$𝔣𝔥, $\frac{1}{2}$𝔤𝔥 mindegyikét elérő távolságra van, a melyet, ha az egyiknek — mondjuk 𝔣-nek — megfelelőleg az előbbi feltétel szerint a 𝔨 pontot úgy veszszük fel, hogy 𝔣𝔨 $>\frac{1}{2}$𝔣𝔤 és $>\frac{1}{2}$𝔣𝔥 legyen (a mit úgy érünk el, ha 𝔣𝔨-t mindjárt nem kisebbnek, hanem az 𝔣𝔤, 𝔣𝔥-val legalább is egyenlőnek veszszük fel), a másik két pont, 𝔤, 𝔥 legalább egyikének megfelelőleg még keresnünk kell, ha az 𝔣𝔤, 𝔤𝔥, 𝔥𝔣 közül legalább kettő nem =. Ha ugyanis ebben az esetben (hogy a szerkesztést lehetőleg egyszerűsítsük) az 𝔣𝔤, 𝔤𝔥, 𝔥𝔣 legnagyobbikának — mondjuk 𝔣𝔤-nek — megfelelőleg a 𝔨 pontot a másik végpontban, magában 𝔤-ben veszszük fel, minek következtében ugyan, minthogy 𝔤𝔣=𝔣𝔤, evvel mindjárt 𝔤-nek megfelelőleg van egy tőle 𝔣𝔤 távolságnyira levő pontunk, mégsem kerülhető el egy a 𝔥-tól ugyanolyan távolságra levő pontnak szerkesztése; hacsak a szerkesztéstanba nem vezetjük be és követeljük, hogy ilyen pont közvetetlenül az 𝔣 ⋆ 𝔤-nek 𝔣-nek 𝔥-ba való helyezése mellett történő puszta *átvitele* útján adódjék ki, a mi szintén megengedhető ugyan, de nem a *Tentamen* erőszakos elve szerint, a mely az átvittnek útját a síkra szorítja (a mit annál [az eljárásnál] követel, mely ott *szűkebb értelemben vett geometriai szerkesztésnek* van nevezve). Egyáltalában egész rendszere nem a szükségképeni és ilyen gyenge alapok és ingadozó nézetek mellett nem is lehet ilyen.

Az 𝔣, 𝔤, 𝔥 körül leírt három egyenlő ○-nek vagy egy, vagy két a 𝔡-ből bocsátott ∟-hez tartozó metszése van. Az utóbbi esetben legalább az egyik mindig különböző 𝔡-től; az első esetben az egyetlen [metszés]-pont abbc-*be* esik, tehát szintén különböző d-től. Az említett merőlegest tehát d és ez a pont mindig meghatározzák.

Vagy pedig ha egyelőre abbc-nek valamely e pontjában az abbc-re ⊥-t emeljük, ha pedig d nincsen már eeff-ben e, f, d-n át a deef síkot fektetjük, ennek abbc-vel való metszését keressük és végre d-ből eg-re a merőlegest bocsátjuk: akkor ez ⊥ abbc-re is. Ezen a módon számtalan [szerkesztés állapitható meg]. Ámde milyen hosszadalmasak és nehézkesek ezek ahhoz az egyszerűhöz képest, a melyben pusztán már két ○ segítségével érjük el azt, a mit itt az első szerkesztésnél csak két ○-rel *és* két ◎-tel, a másodiknál három ◎-tel és d körüli három tetszés szerinti vonallal érünk el stb.

12. §.

Valamely c ponton át, mely *benne* van valamely síkban, erre a síkra a ⊥-t vagy három olyan ◎ segítségével húzzuk, melyeknek közepei a síkban c-től = távolságra vannak, vagy úgy, hogy c-n át egy tetszés szerinti az abbg-ben levő cd-re a merőleges síkot állítjuk elő és ebben arra az egyenesre, melyben abbg-t metszi, a ⊥-t húzzuk vagy pedig  szerint. Szóval: olyan pontból, mely valamely egyenesen kívül fekszik, mind az erre az egyenesre ⊥ [egyenes]-t, mind a ⊥ síkot, valamint valamely síkra valamely kívüle fekvő pontból a ⊥-t a [10. és 11.] §-ok szerint felette egyszerű módon határozhatjuk meg. Valamely egyenesnek egyik pontján át pedig az erre az egyenesre ⊥ síkot, valamint valamely adott síkban, mely ezt az egyenest tartalmazza, a reá ⊥ [egyenes]-t, továbbá valamely sík egyik pontján át az arra ⊥-t felette egyszerű módon nyerjük, ha valamely azon az egyenesen kívül levő d ponton át a reá ⊥ de-t állítjuk elő, és miután ennek amaz egyenessel való e metszését találtuk, c körül ed-vel, e körül pedig cd-vel ◎-eket állítunk elő, a melyeknek közös ○-e szükségképen tartalmazza azt a c-n átmenő síkot, mely ab-re ⊥, és így azt meghatározza. Ugyanannak a ○-nek az abbg-vel való két metszéspontja pedig benne van a c-n átmenő abban az egyenesben, mely ⊥ ab-re, és így tehát ezt meghatározza.

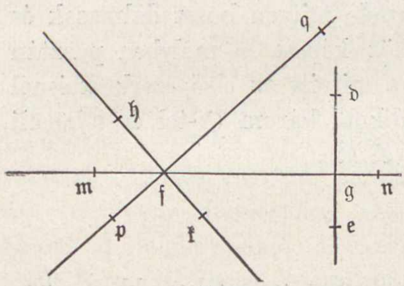
Valamely síkban levő c ponton át, erre a síkra a ⊥-t szintén úgy húzzuk meg...

13. §.

Feladat. Adva van három olyan a, b, c *pont, mely síkot határoz meg: két adott* d ⋆ e *ponton át az* abbc-*re* ⊥ *sík vezetendő.*

Vezessük át $\mathfrak{d}$-n (vagy $\mathfrak{e}$-n) az $\mathfrak{abbc}$-re $\llcorner$ $\mathfrak{df}$-et: akkor, ha $\mathfrak{e}$ a $\mathfrak{ddff}$-en kívül van, csakis $\mathfrak{deef}$ mutatja a követelt tulajdonságot [hogy t. i.] $\llcorner$ $\mathfrak{abbc}$-re. Ha azonban $\mathfrak{e}$ *benne* van $\mathfrak{ddff}$-ben: akkor minden olyan sík, mely $\mathfrak{df}$-et tartalmazza, $\llcorner$ $\mathfrak{abbc}$-re.

Mihelyt rendelkezésünkre áll valamely $\mathfrak{A}$[-nak nevezett] (síkra vagy $\mathfrak{mn}$ egyenesre) $\llcorner$ [$\mathfrak{de}$], az $\mathfrak{A}$-nak minden pontjában nyerjük az $\mathfrak{A}$-ra merőlegest, ha abban az esetben, midőn $\mathfrak{de}$ (4. ábra) az $\mathfrak{A}$-t $\mathfrak{g}$-ben találja, a $\mathfrak{g} \star \mathfrak{mn} \star \mathfrak{de}$-t $\mathfrak{f} \star \mathfrak{pq} \star \mathfrak{hk}$-ba viszszük át ($\mathfrak{f}$-ben alkalmazzuk) és ezután a $\mathfrak{pq} \star \mathfrak{hk}$-t oly módon forgatjuk $\mathfrak{f}$ körül, hogy $\mathfrak{fq}$ az $\mathfrak{fgg}$-re essék (a mit ugyanavval a joggal követelhetünk, mint az átvitelt, és a mi Euklidesnél is, habár csak a bebizonyításokban általánosan fel van tételezve). Ekkor $\mathfrak{hk}$ $\llcorner$-sé válik $\mathfrak{mn}$-re, és még csak az szükséges, hogy azt $\mathfrak{mn}$ körül az $\mathfrak{mdde}$-be forgassuk belé, ha $\mathfrak{h}$ így netalán az $\mathfrak{mdde}$-n kívül kerülne.



4. ábra.

Az $\mathfrak{fq}$-nak $\mathfrak{f}$ körül történő beforgatása $\mathfrak{fgg}$-be egyenlő értelmű avval, hogy feltételezzük, hogy a ⊙ $\mathfrak{fq}$-ban, ha ezt $\mathfrak{fhh}$ az $\mathfrak{r}$-ben, $\mathfrak{fgg}$ az $\mathfrak{s}$-ben találja, $\mathfrak{q} \star \mathfrak{r} \star \mathfrak{s}$-nek megfelelőleg olyan $\mathfrak{t}$ pont van, a melyre nézve $\mathfrak{s} \star \mathfrak{t} \equiv \mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$, a mi pedig a ⊙$\mathfrak{fq}$-nak olyan $\mathfrak{s}$ körüli ⊙-tel való metszése révén adódik ki, mely valamely tetszés szerinti az $\mathfrak{s}$-től $\mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$ távolságnyira eső ponton megy át. Ezért ugyanavval a joggal azt tételezhetjük fel, hogy az $\mathfrak{mdde}$ síkban is van olyan $\mathfrak{sft}$, mely $\equiv \mathfrak{qfh}$-val, a mi pedig ismét ugyanaz, mintha feltételeznők, hogy az $\mathfrak{s}$-en átmenő ○ $\mathfrak{fq}$-ban közvetetlenül meghatározhatjuk azt a $\mathfrak{t}$ pontot, melyre nézve $\mathfrak{s} \star \mathfrak{t} \equiv \mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$; ez azonban az $\mathfrak{r}$-en átmenő ○ $\mathfrak{fq}$-nak az $\mathfrak{mdde}$-ben levő, $\mathfrak{s}$ körüli $\mathfrak{q} \star \mathfrak{r}$ sugarú körrel való metszése révén is kiadódik. De ez az egész szerkesztés sokkal bonyolódottabb, mint a [11.] §-ban előadott, és így, habár érdekes, az *alkalmazásra* még sem ajánlható. Ugyanaz áll a többi olyan feladatokról, a melyek az egymásra $\llcorner$ helyekre vonatkoznak.

Megjegyzés. Fontos megjegyezni azt is, hogy miután két tovább folyó hely metszésének létezését felismertük, nehogy az időt szétforgácsoljuk, mihelyt az egyiket megnyújtottuk, mindjárt nyújtsuk meg a másikat is, hogy lássuk, vajjon az előállított darabok nem metszik-e már egymást?

Harmadik rész. [Szögek, sokszögek.]

Néhány a rövidítés és a könnyebb áttekinthetőség céljából használandó jel magyarázata.

aabb jelentse (a mint az már [az első rész 10.] §-ában említve volt) csakis mindazokat a pontokat, melyek ugyanabban az egyenesben vannak, mint a ⋆ b; vagyis az a ⋆ b-n átmenő azt az egyenest, mely minden más ilyent tartalmaz.

abb jelentse az a-ban felezett aabb-nek csak azt a felét, a mely a b pontot tartalmazza.

aab jelentse az a-ban felezett aabb-nek csak a másik felét, a melyben b nincsen.

ab csak azt jelentse, a mi abb, baa-ban közös; t. i. az a-tól b-ig terjedő egyenest.

abbc (a mint hasonlóképen [az első rész 13.] §-ában már említve volt) csak mindazokat a pontokat jelentse, a melyek *ugyanabban* a síkban vannak, mint a (nem *ugyanabban* az egyenesben feltételezett) a ⋆ b ⋆ c pontok; vagyis az a ⋆ b ⋆ c-n átmenő azt a síkot, mely minden más ilyent tartalmaz.

abcc az aabb-ben felezett abbc-nek csak azt a felét jelentse, mely a c pontot tartalmazza.

∧abc, feltételezve, hogy c az aabb-n kívül van, a két darab közül, melyre bcc az abcc-t felosztja, csak azt jelentse, a melynek határán baa van, vagyis a ba, bc alkotta sík vagy egyenes vonalú *szöget*, a melyre nézve baa, acc-t *száraknak* és b-t *csúcsnak* nevezzük. Lehetne azonban

abc alatt csakis baa ⋆ bcc-t érteni, a mit *villának* nevezhetnénk. (Ha d bárhol van baa-ban: akkor dbe csak akkor ⊨ abc-vel, ha e benne van bcc-ben.)

abcd, ha d az abc-n belül van, csak azt jelentse, a mi a cba, bcd ∧-ekben közös.

abcd, ha d az abc-n kívül van, csak azt jelentse, a mi abcc, dcbb-ben közös. Ha cdd az abc-ben fekszik: akkor abcd a bcaa-nak a ba, cd között levő darabja, bacd pedig, ha még dcc is a dab-ben fekszik, az abbc, abcc, cdbb-nek a bbaa, ccdd között foglalt darabja. Ha azonban bbaa, ccdd egymást az o pontban metszik: akkor (bárhol is történjék a metszés) nyilvánvaló, hogy bacd ⊨ boc; abcd pedig csak akkor ⊨ obco ⊨ △ obc, ha o a baa (bcaa-ban) van.

ab ≏ cd, ha d [oly módon] van acbb-ben, hogy cab = acd, vagyis hogy a, c az aabb, ccdd-ben *egyenlő magasan* állanak. (Csak akkor mondjuk, hogy a *olyan magasan* van az aabb-ben, mint c a ccdd-ben, ha d az acbb-ben van és cab = acd.)

1. §.

Ha c az aabb-n kívül van: akkor acc-ből csak a van aabb-ben, acc pedig egészen benne fekszik abcc-ben és ezt két olyan darabra osztja fel, melyeket (sík) *szögeknek* nevezünk, és a melyek közül az egyik bac. Továbbá bc mind abcc-ben, mind acbb-ben van, tehát ebben a két félsíkban közös. A ca-nak aee meghosszabbítása ugyanis vagy abbc-nek az aabb-nél kezdődő c-telen oldalába esik (t. i. abba, a melyben c nincsen). Ekkor, ha a b a ba-nak meghosszabbításában van, abcc ⊨ bac ⋆ cab és acbb ⊨ bac ⋆ bae-ben amúgy is csak bac a közös. Ha pedig ca meghosszabbítása abcc-be esnék: akkor az vagy úgy, mint aff a cab-be, vagy pedig úgy, mint agg a cab-be esnék. Az utóbbi esetben ugyan gab ⋆ bac volna az, a mi az abcc ⊨ bac ⋆ cag ⋆ gab és acbb ⊨ gab ⋆ abb ⋆ bac-ben közös, és így bc csakis a-n keresztül mehetne át gab-be; ennél fogva bc egyidőben esnék baa, caa-ba, a mi a feltevés szerint nem lehetséges. A második esetben fab ⋆ bac volna a közös, de bc-nek ugyanabból az okból baf-be kellene esnie; ekkor azonban nyilván a c pontot nem tartalmazhatná, a mi ellenmondás. A ca-nak meghosszabbítása sem cab-be, sem pedig cab-be nem eshetik; mert ott az első esetben cb-t, itt pedig cb-t még egyszer kellene metszenie, a mi itten nem történhetik meg. Vagy pedig ca-nak meghosszabbítása, mert bc-t még egyszer nem metszheti, bac-n kívül fekszik. Ha most e valamely tetszés szerinti pontja: akkor be-nek bca-ba kell esnie, a mi nem történnék meg, ha e a cab-ben volna; mert ekkor be-nek acc-t metszenie kellene.

E szerint már ezen a módon egyszerűen és elegánsan következtethető, hogy *minden* ∧bac *minden* caa *szárának az* a *csúcson túl való meghosszabbítása a második meghosszabbított* aabb *szárnak másik oldalára esik,* vagy *hogy ha két abszolut egyenesnek,* bbaa *és* ccaa-*nak valamije közös (a mi csak pont, pl.* a *lehet): akkor minden* bbaa *egyenesnek (*a*-ban kezdődő) egyik fele, pl.* abb, *a másik egyenesnek egyik oldalán, másik fele annak másik oldalán fekszik,* szóval *a két egyenes egymást metszi.*

2. §.

A ∧ jel csak szöget jelentsen. A ∧bac *szárainak* nevei csak abb, acc, csúcsáé csak a.

Azok a körívek, melyeket egyenlő szögekben a csúcsok körül egyenlő sugárral az egyik szártól a másikig leírunk, az egyenlő származás miatt nyilván egyenlők. És viszont azok az egyenesek, melyeket egyenlő ívek végpontjaitól az azokhoz tartozó ⊙-közepek felé irányulnak, (ugyanabból az okból) egyenlő ∧-eket zárnak be. E szerint nyilvánvaló, hogy bármely 2 ∧ úgy hasonlítható össze egymással, mint ugyanannak vagy egyenlő egyenletes vonalak darabjai, vagyis minden ∧ *mennyiségnek* tekinthető, ha rajta a sík egy darabját értjük. Ha azonban csak baa ⋆ bcc-t nevezzük ∧-nek: akkor a ∧ csak annyiban mennyiség, hogy a fentebbi módon a hozzája tartozó egyenlő sugarú köríveket hasonlíthatjuk össze.

3. §.

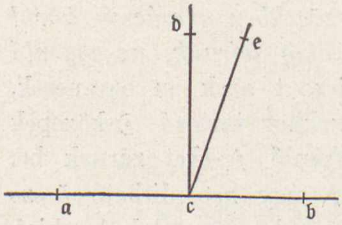
△abc vagy abca jelentse az abc *háromszöget,* t. i. bac-nek a bc által elválasztott darabjai közül azt, a melyben a van. Csakis ab, ac, bc a △abc *oldalai,* csak bac, abc, acb annak *szögei* és csak a, b, c a *csúcsai. Minden háromszögnek minden szöge tehát mind magát a △-et, mind pedig a harmadik (t. i. az illető ∧ csúcsán kívül fekvő) oldalt tartalmazza; vagyis minden szögének mindegyik szára a másik szár megállapította félsíkok közül abba a félsíkba esik, a mely a harmadik oldalt tartalmazza.* Rövidebben kifejezve: *Minden háromszögnek bármely két oldala a harmadik oldalnak ugyanazon az oldalán fekszik.*

4. §.

Minden szög a legegyszerűbben oly módon *nyeri meghatározását* hogy ívei egyikének viszonyát a hozzátartozó egész gyűrűhöz vagy közvetetlenül a ∧ viszonyát az egész síkhoz megadjuk. A félsík, negyedsík és általában bármely n számra nézve a sík $\frac{1}{2^n}$-ed része (ha az osztást a fenti értelemben veszszük) a szám fogalmának belevonása nélkül, helyek tiszta szemlélete alapján értelmezhető. Ezért a ∧-eket, mint *mennyiségeket* a derék-∧-ekre, mint az összehasonlítás mértékére vonatkoztathatjuk, azaz úgy értelmezhetjük azokat, hogy megadjuk viszonyukat R-hez (hol R-t helynek tekintjük).

5. §.

Ha (az 5. ábrában) ab valamely tetszés szerinti c pontjából kiinduló cd az abdd-n belül van és ce a bcd-n belül: akkor abdd természetesen nem más, mint



5. ábra.

$$\mathfrak{acd} \star \mathfrak{dcb} \vDash \mathfrak{ace} \star \mathfrak{exb} \vDash \mathfrak{acd} \star \mathfrak{dce} \star \mathfrak{ecb},$$

és nyilvánvaló, hogy egyszersmind

$$\mathfrak{abdd} = \mathfrak{acd} \star \mathfrak{dcb} = \mathfrak{acd} \star (\mathfrak{dce} \star \mathfrak{ecb}) =$$
$$= \mathfrak{ace} \star \mathfrak{ecb} = (\mathfrak{acd} \star \mathfrak{dce}) \star \mathfrak{ecb},$$

úgy hogy kétség kívül $\mathfrak{acd} \star \mathfrak{dcb} = \mathfrak{ace} \star \mathfrak{ecb}$. Vajjon azonban $\mathfrak{dcb} = \mathfrak{acb}$, és így egyszersmind $\mathfrak{ace} \star \mathfrak{ecb} = 2R$, azt előbb be kell bizonyítanunk; csak ez adja meg a bebizonyításnak meggyőző erejét. E nélkül nem fejez ki egyebet, mint azt, hogy mind $\mathfrak{ce}$, mind $\mathfrak{cd}$ ugyanazt az $\mathfrak{abdd}$-t osztja ketté, a mit pedig *feltételeztünk*, és így tehát kérdésnek nem lehet tárgya.

6. §.

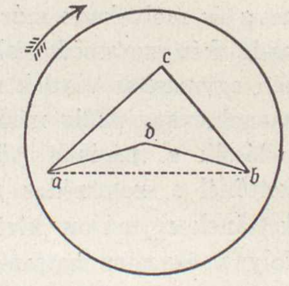
Ha A, B közül mindegyik egy-egy tetszés szerinti folytonos mennyiséget jelent, és az A, B mindegyike olyan elválaszthatatlan részének, a mely az illető mennyiséget két egyenlő fajú mennyiségre bontja szét, a másiknak egy bizonyos ilyen része felel meg; és ha e mellett az A bármely egyenlő darabjainak a B egyenlő darabjai felelnek meg, és viszont: akkor, ha ilyenkor az A a darabjának a B b darabja felel meg, [azt mondjuk, hogy]. *A, B, a, b arányosak.*

Ha ugyanis A-ból a lehetőleg legnagyobb számmal veszünk el az a-val egyenlő egymás mellé sorakozó részeket: akkor evvel vagy kimerül A, vagy pedig fennmarad olyan maradék, a mely $< a$, és az első esetben nyilvánvaló, hogy egyidőben B is (ugyanannyi a b-vel egyenlő darabbal) kimerül. Röviden, ha egyidejűleg A-t a-val, B-t b-vel mérjük: akkor nyilvánvalóan egyidőben mind A-ból, mind B-ből vagy fennmarad maradék, vagy pedig nem, a miből az állítás helyessége következik.

E szerint bármely két szög úgy aránylik egymáshoz, mint azoknak egyenlő sugárral leírt ívei.

7. §.

Csakis minden olyan idomot, melyet egyenesek vagy *oldalok* határolnak, nevezünk *sokszögnek (polygonnak)*; még pedig ha n valamely tetszés szerinti, a 2-t felülmúló [egész] számot jelent, n szögnek, ha *n oldala* (és e szerint ugyanannyi csúcsa) van. A sokszög oldalainak csakis ezeket az egyeneseket nevezzük, melyek azt határolják; *szögének* pedig csakis két egymáshoz csatlakozó oldala alkotta olyan szöget nevezünk, a melyből egy kimetszett rész a sokszögbe esik *belé*. Különben, ha t. i. semmi az említett szögből kimetszett rész sem esik belé egészen a sokszögbe, azt nem a sokszög szögének, hanem *a sík maradékának* nevezzük (a melyet megkülönböztetésül *beugró* ∧-nek is lehetne nevezni). Így pl. ha ð (6. ábra) a caƀ-n belül van: akkor acð, cað, cƀð a sokszög szögei; de nem ilyen az aðƀ, hanem a sík maradéka az (melyet vonatkozással erre a négyszögre a *belső* ∧aðƀ-nek is lehetne nevezni).



6. ábra.

Rendes, szabályos vagy *tökéletes* (helyesebben *egyenletes, szimmetrikus)* a sokszög csak akkor, ha egyenlő oldalú és egyenlő szögű.

8. §.

A sokszög teljes jelölésére elegendő, ha megnevezzük valamennyi egymásra következő *csúcsát,* hacsak e mellett az először említett csúcsot utoljára újból említjük. Így pl. ðacƀð csak az aðca ⋆ ƀðcƀ-t jelenti.

Hogy melyek ekkor az összetartozó szögek, a szomszédosra való átmenetelnél is ismerjük fel; hogy azonban melyek a *belső* szögek, azt úgy döntjük el, hogy megvizsgáljuk, vajjon a kerület többi része (a mely a szóban levő szögön fekvő két oldalon felül fennmarad), vagyis az út a sokszög kerületén az egyik oldalnak, ða-nak a végpontjától a másiknak [ðƀ-nek] ƀ végpontjáig minden a ð-ből kiinduló határtalan [ðpp] egyenest, melyet aðƀ-ben vagy minden ilyen egyenest, melyet a sík maradékában húzunk, oly módon metsz, hogy ennél a kerületen végbemenő előrehaladásnál ðaa-tól kezdve ðƀƀ-ig az említett egyenesek közül egyik se legyen az *utolsó,* hanem, hogy ha ðpp időnként vissza is tér ðaa felé, *mégis újból előre forogjon, míg végre a* ○*-ön levő* ⤞ *irányában magába a* ðƀƀ *nem esik.*

E megszorítás nélkül bizonyos helytől kezdve ðpp egészen visszatérhetne, és a *másik oldalon* újból ugyanaddig a helyig juthatna, úgy hogy az aðƀƀ-ben minden a ð-ből húzott egyenes a kerületet metszhetné.

Mozgás nélkül így: Ha a, ƀ, c,... az egymásra következő csúcsok, aƀ, ƀc, cð,... az oldalok, melyek közül a másodiktól, ƀc-től kezdve, mindegyiknek kezdőpontja a megelőzőnek végpontjára esik: akkor a ƀac, cað, ðac,... ∧-ek közül (melyek mindegyikének csúcsa az $\mathfrak{a}$ és melyeknek szárai $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$; ill. $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ad}$; $\mathfrak{ae}$ s í. t. az utolsóig, $\mathfrak{az}$-ig) két szomszédosnak vagy csak egy száruk közös, melynek mentén egymáshoz csatlakoznak, azaz a melynek ellenkező oldalain fekszenek, vagy pedig némely ilyen szomszédok közül az egyik teljesen beléesik a másikba (sőt ⊨-k is lehetnek, a mi azonban *minden* kettőnél e szomszédos $\wedge$-ek közül nem történhetik meg; valamelyik kettőnek egymáson kívül kell esnie, mert különben a vonal tovább folyna és nem határolna sokszöget). Mind $\mathfrak{bac}$-t, mind $\mathfrak{cad}$-t már mostan az első esetben *előre*, $\mathfrak{ab}$-től $\mathfrak{ac}$ felé, az $\mathfrak{ab}$-től $\mathfrak{ac}$ felé tartó $\wedge$-irányban menőnek, röviden pozitivnak ⊣⊢ mondjuk, hol a ⊣⊢ csak relativ fogalmat jelent; ellenkező esetben azt mondjuk, hogy $\mathfrak{cad}$ *vissza felé*, $\mathfrak{ac}$-től $\mathfrak{ab}$ felé [negativ] ⊢⊣.

A szerint, a mint itten $\mathfrak{bac}$, $\mathfrak{cad}$, $\mathfrak{dae}$, $\mathfrak{eaf}$, $\mathfrak{fag}$,... közül bármelyik egészen vagy csak részben beléesik abba a $\wedge$-be, melyet a megelőző $\wedge$-nek második szára $\mathfrak{ab}$-vel alkot, az $\mathfrak{ab}$ és az utolsó szög második szárával — mondjuk $\mathfrak{az}$-tel — határolt...

9. §.

Tantétel. *Minden* [$\mathfrak{B}$] $\mathfrak{abcdef}$... [$\mathfrak{p}$]$\mathfrak{a}$ *sokszög csupa* $\triangle$*-re oszt-ható fel.* Húzzunk ugyanis $\mathfrak{B}$ valamelyik tetszés szerinti $\mathfrak{a}$ csúcsából egy tetszés szerinti egyenest és hosszabbítsuk meg mindaddig, míg a kerületet metszi. Ha minden egyenes, mely $\mathfrak{a}$-tól az $\mathfrak{L}$ kerület minden pontjáig terjed, $\mathfrak{B}$-ba esik: akkor húzzunk $\mathfrak{a}$-tól a többi csúcsok mindegyikéig egy-egy egyenest. Nyilvánvaló, hogy ily módon $\mathfrak{B}$-t $n-2$ $\triangle$-re osztjuk fel. Ha azonban van olyan egyenes, mely $\mathfrak{a}$-tól az $\mathfrak{L}$ valamely $\mathfrak{m}$ pontjáig terjed, de nem egészen esik belé $\mathfrak{B}$-ba, és azután az előbbinek $\mathfrak{n}$ metszéspontjától kezdve, a kerületnek tetszés szerinti oldalán azon egészen $\mathfrak{m}$-ig haladunk tovább: akkor (minthogy a teljesen a $\mathfrak{B}$-ba eső egyenesek között nincsen utolsó, mert $\mathfrak{am}$-nek minden a $\mathfrak{B}$-n kívül eső darabjának határpontjaitól kezdve $\mathfrak{L}$-nak nyilván vannak még olyan darabjai, a melyeknek pontjaihoz az $\mathfrak{a}$-ból húzott egyenesek hasonló természetűek) olyan első egészen a $\mathfrak{B}$-ba eső egyenes van, mely $\mathfrak{a}$-tól $\mathfrak{L}$-nak valamely pontjáig terjed. Ennek az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}$ mindegyikétől különböző csúcsot kell tartalmaznia. Minden sokszög minden csúcsából tehát lehet olyan egyenest húzni, mely *egészen* beléesik $\mathfrak{B}$-ba, és egy másik csúcsig terjed. Az ilyen egyenest a sokszög *átlójának* nevezzük.

Minden átló meghúzásával $\mathfrak{B}$ két olyan sokszögre esik szét, melyek mindegyikében az oldalok száma legalább egygyel kevesebb. Ezek mindegyike, valamint az esetleg még származók mindegyike mindaddig, míg nem háromszög, két olyan sokszögre bontható fel, melyekben az oldalok száma még kisebb. Nyilvánvaló, hogy ez az eljárás mindaddig folytatható, míg utoljára $\mathfrak{B}$ csupa $\triangle$-re bomlik fel.

Hasonló kérdések merülnek fel a polyederekre vonatkozólag is: Euler, Legendre.

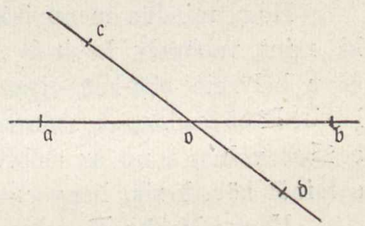
10. §.

Ha (a 7. ábrában) $\mathfrak{o}$ az $\mathfrak{ab}$-ben van, $\mathfrak{ob} \equiv \mathfrak{oa}$, $\mathfrak{c}$ az $\mathfrak{aabb}$-n kívül van és a két félsík közül, a melyre $\mathfrak{aabb}$ az $\mathfrak{abbc}$-t felosztja, az $\mathfrak{abcc}$-től különbözőben $\mathfrak{bod} \equiv \mathfrak{aoc}$ (tehát egyszersmind $\mathfrak{od} \equiv \mathfrak{oc}$), végre $\mathfrak{e}$ a $\mathfrak{cd} \models \mathfrak{bc}$ és $\mathfrak{aabb}$ metszéspontja: akkor $\mathfrak{e}$ egyszersmind a $\mathfrak{bc}$ és $\mathfrak{bbaa}$ metszéspontja és (a megegyező származásnál fogva)

$$\mathfrak{a} \star \mathfrak{o} \star \mathfrak{b} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{d} \star \mathfrak{e} \equiv \mathfrak{b} \star \mathfrak{o} \star \mathfrak{a} \star \mathfrak{d} \star \mathfrak{c} \star \mathfrak{e}, \quad \mathfrak{ae} \equiv \mathfrak{be},$$

úgy hogy $\mathfrak{e} \models \mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}$ a $\mathfrak{cd}$-be esik, vagyis $\mathfrak{oc} \star \mathfrak{od}$ egyenest alkot, vagy $\mathfrak{od}$ a $\mathfrak{co}$-nak meghosszabbítása, vagy $\mathfrak{coo}$ átmegy a $\mathfrak{d}$ ponton, mely tekintettel $\mathfrak{c}$-re $\mathfrak{aabb}$-nek túlsó oldalán van.

Ha tehát valamely tetszés szerinti $\wedge$ szárait a csúcsán túl meghosszabbítjuk, a meghosszabbítások mindegyike nemcsak (mint azt a 3. §-ban bebizonyítottuk) a másik szárnak másik oldalán van, hanem maguk ezek a meghosszabbítások az úgy nevezett *csúcsszöget* alkotják, mely az előbbivel egyenlő.

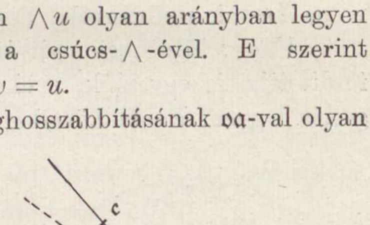


7. ábra.

Vagy: Ha a 3. § tételét feltételezzük: akkor azért, mert egyenlő $\wedge$-eknek nyilván csúcs-$\wedge$-eik is egyenlők, a 6. § szerint szükséges, hogy minden $\wedge u$ olyan arányban legyen v csúcsszögével, mint bármely $\wedge$ a csúcs-$\wedge$-ével. E szerint $u : v = v : u$, a miből következik, hogy $v = u$.

Vagy: Nyilvánvaló, hogy a $\mathfrak{do}$ meghosszabbításának $\mathfrak{oa}$-val olyan $\wedge$-et kell alkotnia, mely $=$ avval, melyet $\mathfrak{co}$ meghosszabbítása $\mathfrak{ob}$-vel alkot. Ha már most az előbbi az $\mathfrak{occ}$-n kívül esnék: akkor az utóbbinak (a 3. § ellenére) $\mathfrak{ddoo}$-nak ugyanarra az oldalára kellene esnie, a melyre $\mathfrak{a}$ esik, úgy hogy stb.

Vagy: Ha u, v egyenlőtlenek volnának, akkor egyikük — mondjuk v — a nagyobb volna. Legyen (a 8. ábrában)



8. ábra.

(a v-ből való) $\mathfrak{bod} = \mathfrak{aoc}$; akkor $\mathfrak{do}$ meghosszabbítása $\mathfrak{abcc}$-be, valamint $\mathfrak{ocaa}$-ba, tehát $\mathfrak{oac}$-be esik, a miért azután kellene, hogy $\mathfrak{aof} = v$ legyen. Így már most $v = \mathfrak{aof} < (\mathfrak{aoc} = \mathfrak{bod})$ volna, azaz az egész $<$ mint a része, a mi (véges) mennyiségek esetében nem lehetséges.

Vagy: Minthogy nyilván

$$\mathfrak{aoc} : \mathfrak{aoc} + \mathfrak{cob} = \mathfrak{boe} : \mathfrak{boe} + \mathfrak{coa}$$

és $\mathfrak{aoc} + \mathfrak{cob} = \mathfrak{boe} + \mathfrak{eoa}$, azért $\mathfrak{aoc} = \mathfrak{boe}$.

Vagy: Minthogy $\mathfrak{aoc} + \mathfrak{cob} = \mathfrak{eob} + \mathfrak{boc}$ és $\mathfrak{doc} = \mathfrak{cob}$, azért $\mathfrak{eob} = \mathfrak{aoc}$.

Vagy: Minthogy nyilván $\mathfrak{aoc} + \mathfrak{cob} = \mathfrak{cob} + \mathfrak{boe}$, ebből következik, hogy $\mathfrak{boe} = \mathfrak{aoc}$.

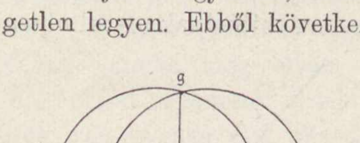
11. §.

Tantétel. *Minden olyan* $\mathfrak{ab}$ *egyenesnek, mely mind a két oldalon határolt, valamint minden gyűrűívnek és minden mennyiségnek van egy* $\mathfrak{o}$ *közepe (a melyre nézve t. i.* $\mathfrak{ao} \equiv \mathfrak{ob}$*), és mindegyik ilyen önmagával fordítva is* $\equiv$*; még pedig* $\mathfrak{ab} \star \mathfrak{o} \equiv \mathfrak{ba} \star \mathfrak{o}$*, úgy hogy* $\mathfrak{oa} \equiv \mathfrak{ob}$.

Hogy minden mennyiségnek van közepe, hasonlóan mutatható ki, mint valamely határolt időtartamról. Ha már mostan $\mathfrak{ao} \equiv \mathfrak{ob}$, és $\mathfrak{c}$ helyzete $\mathfrak{obb}$-ben olyan, hogy (az $\mathfrak{obb}$-ből való) $\mathfrak{oc} \equiv \mathfrak{oa}$: akkor, ha $\mathfrak{oc} \gtrless \mathfrak{ao}$ volna, (a származás egyenlősége miatt) $\mathfrak{oa} \gtrless \mathfrak{co}$, $\mathfrak{co} \lessgtr \mathfrak{oa}$, $\mathfrak{oc} \lessgtr \mathfrak{ao}$ volna, a mi az előbbinek ellentmond. E szerint $\mathfrak{oc} \equiv \mathfrak{ao} \equiv \mathfrak{ob}$, a miből következik, hogy $\mathfrak{c} \models\!\!\dashv \mathfrak{b}$, $\mathfrak{ob} \equiv \mathfrak{oa}$, $\mathfrak{ab} \star \mathfrak{o} \equiv \mathfrak{ba} \star \mathfrak{o}$.

Vagy: Ha $\mathfrak{ba} \gtrless$ volna $\mathfrak{ab}$-nél, pl. ($\mathfrak{ab}$-nek) egyik az $\mathfrak{a}$-ban kezdődő $\mathfrak{ac}$ darabja volna $\equiv$ $\mathfrak{ba}$-val: akkor ha (a $\mathfrak{ca}$-ból való) $\mathfrak{cd}$ is $\equiv$ volna $\mathfrak{ba}$-val, nyilvánvaló, hogy (az $\mathfrak{ab}$-ből való) $\mathfrak{bc} \equiv \mathfrak{ab}$.

Vagy: Minthogy nyilvánvaló, hogy egyenlő egyeneseknek megfordítottjai is egyenlők, szükséges, hogy az $\mathfrak{ab} : \mathfrak{ba}$ arány $\mathfrak{ab}$-től független legyen. Ebből következik, hogy $\mathfrak{ab} : \mathfrak{ba} = \mathfrak{ba} : \mathfrak{ab}$ és így $\mathfrak{ba} = \mathfrak{ab}$.



9. ábra.

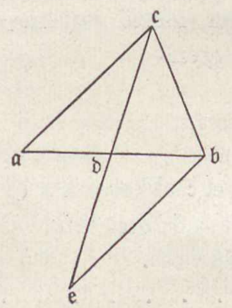
Vagy: Húzzunk valamely tetszés szerinti $\mathfrak{aggb}$ síkban $\mathfrak{a}$ körül (9. ábra) olyan $\bigcirc$-t, mely átmegy az $\mathfrak{abb}$-nek valamely tetszés szerinti olyan $\mathfrak{c}$ pontján, mely távolabb van $\mathfrak{a}$-tól, mint $\mathfrak{b}$, és hasonló módon egy $\bigcirc$-t $\mathfrak{b}$ körül, hol $\mathfrak{bd} = \mathfrak{ac}$ (és $\mathfrak{d}$ az $\mathfrak{acc}$-ben van). Ha $\mathfrak{e}$ a $\bigcirc\mathfrak{bd}$-nek a $\mathfrak{baa}$-ba eső másik metszéspontja $\mathfrak{aabb}$-vel és $\mathfrak{f}$ a $\bigcirc\mathfrak{ac}$-é: akkor, minthogy $\mathfrak{be} = \mathfrak{af}$, mind $\mathfrak{b}$, mind $\mathfrak{e}$ a $\odot\mathfrak{ac}$-be esik. Minthogy azonban $\mathfrak{d}$ a $\odot\mathfrak{ac}$-n kívül van, szükséges, hogy a két kerületnek legalább egy közös pontja legyen. Ekkor azután $\mathfrak{ga} \equiv \mathfrak{gb}$, és így $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, mind a kettő pontjai ugyanannak az $\mathfrak{aggb}$-ben a $\mathfrak{g}$ körül leírt gyűrűnek, mely átmegy $\mathfrak{a}$-n. Ámde e gyűrű $\mathfrak{ab}$ ívének van egy $\mathfrak{h}$ közepe, és nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{hga} \equiv \mathfrak{hgb}$. Azonban $\mathfrak{ghh}$-nak a $\triangle\mathfrak{agb}$ ($\vDash \mathfrak{gabg}$) kerületét a $\mathfrak{g}$-n kívül legalább még egy pontban kell találnia. A $\mathfrak{ga}$-t és $\mathfrak{gb}$-t már nem találhatja, mert mind a kettővel már van egy közös pontja, a $\mathfrak{g}$, és így $\mathfrak{ghh}$ valahol — mondjuk $\mathfrak{i}$-ben — keresztülmegy az $\mathfrak{ab}$-n. Most már $\mathfrak{ga} \equiv \mathfrak{gb}$, $\mathfrak{gi} \equiv$ önmagával, és így

$$\triangle\mathfrak{iga} \equiv \triangle\mathfrak{igb},\ \mathfrak{ia} \equiv \mathfrak{ib},\ \mathfrak{gia} \equiv \mathfrak{gib},\ \mathfrak{ai} \equiv \mathfrak{ib},\ \mathfrak{i} \vDash \mathfrak{o}.$$

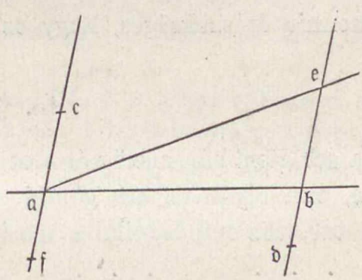
12. §.

[**Tantétel.**] *Minden háromszögben* $2 \wedge$ *összege* $< 2R$.

Bebizonyítás. Legyen $\mathfrak{d}$ (10. ábra) $\mathfrak{ab}$-nek közepe, $\mathfrak{e}$ legyen $\mathfrak{cd}$-nek meghosszabbításában $\mathfrak{aabb}$-nek azon az oldalán, a hol nincsen $\mathfrak{c}$, tehát



10. ábra.



11. ábra.

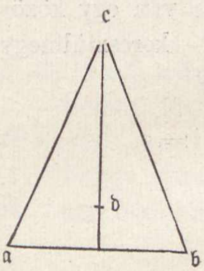
$\mathfrak{bde} \equiv \mathfrak{adc}$ (és legyen még $\mathfrak{de} \equiv \mathfrak{dc}$): akkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{ce}$ ($\vDash \mathfrak{ec}$) az $\mathfrak{aabb}$-t magában a $\mathfrak{d}$-ben metszi, és hogy $\mathfrak{dc} \star \mathfrak{de}$ egyenes, $\mathfrak{db}$ pedig [$\mathfrak{de}$-vel] az $\mathfrak{adc}$-vel egyenlő $\mathfrak{bde}$ szöget alkotja.

Továbbá $\mathfrak{bac} + \mathfrak{abc} = \mathfrak{abe} + \mathfrak{abc} \leqq 2R$ (mert a 3. § szerint $\mathfrak{dbe} + \mathfrak{dbc} < 2R$, azaz $\mathfrak{cbe}$-vel egyenlő, minthogy t. i. $\mathfrak{ce}$ *beléesik* az $\mathfrak{ebd} + \mathfrak{dbc}$-be). E szerint egyszersmind $\mathfrak{bac} + \mathfrak{abc} < 2R$.

Más bebizonyítás. Ha $\mathfrak{bac}$, $\mathfrak{abd}$ (11. ábra), melyek tekintettel az $\mathfrak{aabb}$-re a sík különböző tájékaiban vannak, $=$-k (a hol $\mathfrak{bac}$, $\mathfrak{abd}$-t *váltószögeknek* lehetne nevezni): akkor nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{dbac} \equiv \mathfrak{cabd}$. Ha már mostan $\mathfrak{bbd}$ az $\mathfrak{acc}$-t metszené: akkor $\mathfrak{aac}$, $\mathfrak{bdd}$ is metszenék egymást, és így $\mathfrak{aacc}$, $\mathfrak{bbdd}$-nek két közös pontja volna a nélkül, hogy $\vDash$-ok volnának, a mi lehetetlen. Így tehát $\mathfrak{aacc}$ és $\mathfrak{bbdd}$ nem metszik egymást és $\mathfrak{bbdd}$ az $\mathfrak{acbb}$-ben fekszik.

13. §.

Ha e (a 11. ábrában) bárhol van bbd-n belül: akkor a 12. § szerint ae a bac belsejébe esik (mert mind az acee, mind az abee belsejébe kell esnie), és így abe + bae < abe + bac. E szerint egyszersmind abe + bae < $2R$. Vagy pedig ha abe △ és bac az abe abd mellékszögének váltószöge: akkor acc az abe-ben, ae pedig a bac-n belül fekszik.



12. ábra.

14. §.

Tantétel. *Bármely △abc-ben egyenlő ab, cb oldalakkal egyenlő ∧-ek és viszont egyenlő ∧-ekkel egyenlő oldalok fekszenek szemben.*

Bebizonyítás. I. Ha ca = cb (12. ábra): akkor acb-nek van egy cd felező egyenese, és így a szimmetriából kitűnik, hogy abc = bac.

II. Ha abc = bac: akkor az ab-t ∟-en felező egyenesnek c-n kell átmennie és szükséges, hogy ca = cb legyen.

15. §.

Ha acb gömbháromszög és a ca oldal = cb: akkor, ha a ◎ középpontja o, van olyan az acb gömbi szöget felező occd sík, a melyre nézve a cab, cba mindegyike a másiknak képe stb.

. . . .

Jegyzetek a második részhez.

A következő idézetekben e könyv első részét I-gyel, második részét pedig II-vel jelöljük.

5. o. *A párhuzamosak elméletét* v. ö. a Gauss 1804 nov. 25-ikén kelt levelében foglalt bírálattal. I, 43—44. o.

5. o. *A párhuzamosak elmélete,* 3. és 4. megjegyzés. Olyan egyenesek jelölésére, melyek mind a két oldalon vagy egyik oldalon határ nélkül meghosszabbítottaknak gondolandók, Farkas a *Tentamen*ben az itt használt nehézkes $\mathfrak{ab}\infty$, $\mathfrak{abb}'\infty$ jelek helyett az $\overset{\frown}{\mathfrak{ab}}$, $\widetilde{\mathfrak{ab}}$ jeleket vezette be. János az *Appendix*ben az utóbbi jelölést használta, de az 1855. évbeli *Tértudományában* (v. ö. II, 279. oldalával) az $\mathfrak{aabb}$ és $\mathfrak{abb}$ jelöléseket alkalmazta.

7. o. *A párhuzamosak elmélete,* VII. §. A bebizonyítás nem kielégítő, mert gondolható, hogy nincsen ilyen első belépés pontja, $\mathfrak{c}$, hanem hogy $\mathfrak{m}$ sűrűsödési helye az $\mathfrak{L}$ és az egyenes metszéspontjainak. Ezt a hiányt megszüntette Farkas a Toldalék XII. §-ának 2. pontjában II, 17. o., hol megmutatja, hogy $\mathfrak{L}$-nek valamely egyenessel több mint két közös pontja nem lehet (Kürschák József közlése).

9. o. 13—11. s. al. Ez *az eltérés axiómája,* v. ö. II, 101—102. és I, 49. oldalaival.

16. o. *A párhuzamosak elméletének toldaléka.* Hogy ez a toldalék a Gausshoz intézett 1808 deczember 7-ikén kelt levélhez volt mellékelve, az I, 45. oldalához tartozó jegyzetben ki van mutatva.

21. o. *A párhuzamosak elméletének toldaléka,* XX. §. Farkas a dolgot úgy adja elő, mintha abban az időpontban, a melyben Q az $\mathfrak{L}$ vonalat elhagyja, a két vonalnak egymást érintenie kellene. Ámde Q az $\mathfrak{L}$-től úgy is pattanhat el, hogy Q és $\mathfrak{L}$ metszéspontja a végtelenbe távozik. Valóban, a nem-euklidikus geometriában ilyen módon történik az elpattanás. A λ határérték, melyhez az x szög tetszés szerint közel jut, de a melyet nem ér el soha, egyenlő egy derékszöggel, kisebbítve avval a parallelszöggel, mely az $\mathfrak{L}$ vonal és az $\mathfrak{AB}$ egyenes egymástól való állandó távolságának (1. ábra) megfelel. (Kürschák József közlése.)

23. o. *Részletek a Tentamenből.* A fordítás alapjául az *Editio secunda* szolgált, a melyben az *Errata*kban később hozott számos javítást figyelembe vették és még egyéb hibákat is helyesbítettek.

32. o. *Előleges megjegyzés* A. A Maros-Vásárhelyt 1843-ban megjelent *Arithmetika eleje* czímű művében Farkas az időnek következő magyarázatát adta: «Az id[ő] szakadatlan és végetlen, mind az elmult, mind a' jövendő felé: de csak részetlen 's mind más-más pontja van; és mindenik eljőn, mind nem jőn el; 's akármely id[ő]pont előtt nincs utolsó, sem utána első; 's ha $\mathfrak{b}$ id[ő]pont $\mathfrak{a}$ előtt, 's $\mathfrak{c}$ id[ő]pont $\mathfrak{b}$ előtt van, $\mathfrak{c}$ id[ő]pont $\mathfrak{a}$ előtti.» A *folytonos* (continuum) szó *Az arithmetika általános vázlatának* 4. §-ában van megmagyarázva, II, 38. o.; v. ö. egyszersmind I, 35. oldalával.

34. o. *Előleges megjegyzés* Ezt v. ö. I, 34. oldalával.

35—38. o. *Az Arithmetika általános vázlata,* 2–4. §. V. ö. I, 35—36. oldalaival.

36. o. 9. s. al.—37. o. 20. s. E bebizonyításra vonatkozik az *Editio secunda,* I, 618. oldalán álló következő megjegyzés: «A bebizonyítás nem kielégítő és a következő módon egészítendő ki. P a T egésznek alkotó része; tehát az alkotó rész értelmezése szerint mindazok összességének, a mik az egészben a P-n kívül megvannak — nevezzük azt R-nek — vagy semmi része sem, vagy pedig csak elválaszthatatlan része közös P-vel; e szerint A (t. i. az, a mi P-ben és R-ben közös) magának a P-nek elválaszthatatlan része.»

50. o. 14. s. Az *egyenlet* szó itt csillagászati értelmében veendő, tehát kiegyenlítést jelent (Réthy Mór közlése).

49—56. o. *A geometria általános vázlata,* 1—5. §. V. ö. I, 38—39. oldalaival.

66. o. 18—17. s. al. Ezek a fogalmak tárgyaltatnak a Conspectus arithmeticæ generalis 37. §-ának IV. pontjában, *Tentamen,* T. I. 254. o., *Editio secunda* 287. o.

76. o. *A geometria általános vázlata,* 13. §. V. ö. az *Appendix* 30. §-ához tartozó jegyzettel, II, 292—293. o.

77—92. o. *A geometria általános vázlata,* 14. §. V. ö. I, 39. oldalával.

96—113. o. *A geometria általános vázlata,* 16. §. V. ö. I, 45—49. oldalaival.

100. o. 4. s. A tetraeder megoldására vonatkozólag l. I, 105—115. o.

158—161. o. *Röviden vázolt kisérlet,* 32. §. V. ö. I, 131—136. oldalaival.

160. o. 10—12. s. Erre az axiómára vonatkozólag l. I, 48—49. oldalait és a hozzátartozó jegyzetet.

190. o. 6—1. s. al. V. ö. II, 232—235. és I, 105 155—156. oldalaival.

197—235. o. Az *Appendix* keletkezésére és jelentőségére vonatkozókat l. I, 73—81, 137—158. oldalain, János további az abszolut geometriára tartozó vizsgálataira vonatkozókat pedig I, 98—120, 180—183. oldalain.

197. o. *Appendix,* 1. vonal alatti jegyzet. A *Lebensgeschichte Johann*

Bolyais cz. értekezésében (a 140. oldalon) Schmidt elbeszéli: «Bolyai János hátrahagyott iratai között megvan az *Appendix* két ívre terjedő, sok helyen átírt és kijavított német kézirata; papirosa hasonlít a [Bolyai Farkas] 1823. évbeli leveleéhez, vagy ennél még régibb.» Téves azonban Schmidtnek az a hite, hogy ez a *Raumlehre* az abszolut geometriának az *Appendix*et több évvel megelőző tervezete. Ezt már az a körülmény is mutatja, hogy czímlapján János kapitánynak mondja magát, mely rangot csak az 1832. év márczius hó 14-ikén ért el. Hogy továbbá annak az iratnak fogalmazása idejében az Appendix már ki volt nyomtatva, kitünik a 216. o. 38. sorában álló helyből, mely úgy hangzik «a nyomtatvány 34—43. §-aiban». Valóban az Appendix első 33. §-ának német fogalmazványa az 1832. esztendőből való. Másolatát János ahhoz a folyamodványhoz mellékelte, melyet ugyanannak az évnek augusztus 8-ikán János főherczeghez intézett; v. ö. ezekkel I, 71. oldalát és a hozzátartozó jegyzetet.

Az *Appendix* első 33. §-ának az említett folyamodványhoz mellékelt német fogalmazványát, mely csak kevés helyen és csekélységekben tér el a hagyatékban meglevő kézirattól, 1909-ben Szabó Péter találta a bécsi cs. és k. hadi levéltárban; jelenleg pedig a Magyar Tudományos Akadémia birtokában van. Ez szolgált alapjául a szövegben közölt fordításnak.

199. o. Az *Appendix* 6. §-ára vonatkozik a következő följegyzés, melyet János az 1855 körüli időben leírt:

«Az a tétel, hogy ha $\mathfrak{bn} \parallel\!| \mathfrak{am}$, akkor $\mathfrak{am}$ is $\parallel\!| \mathfrak{bn}$ a következő módon bizonyítható be elegánsabban és rövidebben és mindjárt az 1. § után következhetik. Ha az $\mathfrak{a}$-ból kiinduló $\mathfrak{ac}$ tetszés szerint a $\mathfrak{bam}$-en belül fekszik, akkor van olyan az $\mathfrak{acc}$-n fekvő és $\mathfrak{b}$-ből kiinduló $\mathfrak{bd}$, hogy $\mathfrak{adb} < \mathfrak{dam}$, a miből következik, hogy $\mathfrak{bdb}$ az $\mathfrak{amm}$-et *nem metszi*, és így $\mathfrak{bd}$ *nem* fekszik az $\mathfrak{abn}$-en belül. Nyilvánvaló, hogy már most $\mathfrak{ad}$, és így $\mathfrak{acc}$ a $\mathfrak{bnn}$-t metszi, akár $\mathfrak{bd}$ a $\mathfrak{bnn}$-be, akár $\mathfrak{abn}$-en kívül esik. Nyilvánvaló az is, hogy $\mathfrak{amm}$ az $\mathfrak{abn}$-be esik. Ha tehát valamely egyenes, $\mathfrak{bn}$, asymptotikus valamely másikhoz, $\mathfrak{am}$-hez: akkor ez is $\parallel\!|$ amazhoz.»

207. o. Az Appendix 24. §-ának végére vonatkozik Jánosnak következő megjegyzése:

«... ez azonban nem lehet nagyon feltünő, ha visszaemlékezünk arra, hogy

$$\cdots + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

azonos

$$\cdots + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$$

-vel, habár az alsó sor mindegyik tagja négyszer akkora, mint a felsőé. Ép úgy

$$8 + 16 + 32 + 64 + \cdots$$

csak darabja az

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

-nek és mégis a felsőnek minden tagja nyolczszor akkora mint az alsóé.»

208—209. o. Az *Appendix* 26. §-ára vonatkozólag megjegyezte János: «Más bebizonyítás. A gömbháromszögben előforduló 6 szög közül háromnak a $4R$-hez való arányai által a háromszög nyilván önmagában van meghatározva és e mellett X nem is kerül belé. Ebből következik, hogy a háromszögben [bármely négy darab között] fennálló kapcsolat is független az X-től és minthogy [az oldalaknak és $4R$-nek] ez a 3 aránya ugyanazon szögek mellett megmarad, bárhogyan is választjuk egymásután az X-et, jogunk van azt következtetni, hogy a gömbháromszögben az X-re vonatkozó bármely feltevés mellett levezetett kapcsolat föltétlenül is érvényes. Ámde, ha $X=1$,

$$\sin \mathfrak{ac} : \sin \mathfrak{bc} = 1 : \sin \mathfrak{a},$$

és így stb.»

Ezzel összehasonlítandó Jánosnak e könyv első részében a 148. o. 10—17. soraiban kinyomtatott, Lobatschefskij I. M. *Geometrische Untersuchungen*jének 35. §-ára vonatkozó megjegyzése.

Más helyen megemlíti János, hogy a 26. §-ban hiba van, melyet bizonyára senki sem vett észre; ott ugyanis $\sin \mathfrak{ac}$-ről, $\sin \mathfrak{bc}$-ről van szó, holott az illető az 1 radiussal leírt ívek sinusai értendők, így tehát vagy annak kellene ott állania, hogy $\mathfrak{oa} = 1$, vagy pedig hogy az $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bc}$ ívek $\mathfrak{oa}$-val elosztandók; v. ezt ö. I, 143. o 22—26. soraival.

212 o. *Appendix* 30. §. Az L-nek János által végrehajtott rektifikácziója lényegében azon az állításon alapszik (14. s.), hogy

$$\frac{y}{r} \overset{\frown}{-} 1,$$

ha $y \overset{\frown}{-} = 0$. Ez azt jelenti, hogy az L vonal esetében a húr ($2y$) és a hozzátartozó ív ($2r$) hányadosa az 1 határértékhez közeledik, ha a húr a 0 felé fogy. Ha erre nézve nem akarunk a szemléletre hivatkozni, tehát új axiómát bevezetni, akkor a 30. § bebizonyítása kiegészítésre szorul (Schur közleménye). E czélra mindenekelőtt a görbe vonal hosszúságának azt az értelmezést használhatnók fel, melyet a Tentamen nyújt. Ez így hangzik (Conspectus arithmeticæ generalis, 37. §, IV, 1. pont, T. I, 255 o., Editio secunda 288 o.): «Ha egyenest görbe vonallal hasonlítunk össze, a görbe vonal hosszúsága alatt értjük azt a határértéket, a mely felé (azoknak) a húroknak összege közeledik (melyek a görbének egyik végpontjától a másikig úgy következnek egymásra, hogy az utolsó húr végének kivételével, mindegyiknek vége a másiknak kezdete legyen), ha mindegyik húr $\overset{\frown}{-} = 0$... Be kell tehát bizonyítanunk, hogy van ilyen határérték és hogy ez az egyetlen, bárhogyan is közelednek az egyes húrok a 0-hoz» Ezután (a 37. §, IV, 7. pontjában, 260—262 o, Editio secunda 292—295 o.) meg van mutatva, hogy az euklidikus geometria esetében bizonyos a görbe vonalra vonatkozó föltevések mellett miként lehet a követelt bebizonyítást elvégezni, és így a görbének hosszúságát megállapitani. E szerint tehát ezt a bebizonyítást az abszolut geometriába kellene átvinnünk és megmutatnunk, hogy az L

vonal ezeknek a föltevéseknek megfelel, t. i. hogy minden pontjában érintője van és hogy a vizsgált pontok között görbületének értelme nem változik.

Figyelemre méltó, hogy János már korán foglalkozott a rektifikáczió kérdésével. «Hogy itt véges határérték van» — mondja egyik előrehaladt korabeli följegyzésében — «már 30 évvel ezelőtt bizonyítottam be, mikor Lagrangenál Archimedes alaptételét találtam, ez pedig engem sehogyan sem elégített ki... Archimedes alaptétele, melynek elfogadásától Lagrange sem idegenkedett, hogy t. i. a [görbe vonal végpontjaiban húzott] két érintőnek összege nagyobb a [két végpont között elterjedő] görbe vonalnál, egyáltalában nem világos és mindaddig nem ér semmit, míg határozottan és világosan nem adjuk értelmét annak, hogy mi a görbe vonalnak hosszúsága. Ha pedig ezt előre bocsátjuk, akkor Archimedes tétele sehogyan sem sorolható az alaptételek közé, hanem *tantétel*, a *bebizonyításra* szoruló tétel. A *legelső*, a kitől a görbe vonal hosszúságának, valamint görbe vonal által határolt felület és görbe felületek által határolt térrészek nagyságának helyes magyarázatát hallottam a *Tentamen* szerzője volt, ki a 255, 256 oldalakon mondja...»

Azt a tételt, hogy a húr és az ív hányadosa a zérus felé közeledő húr esetében az 1 határértékhez közeledik, Poisson próbálta bebizonyítani *Méchanique*, 2. éd., Paris 1833 cz. művének 24—25. oldalain; bebizonyítása azonban nem kielégítő.

Van annak egyszerű módja, hogy az L rektifikácziójánál fellépő minden nehézséget elkerüljünk. A derékszögű háromszög oldalai és szögei között fennálló kapcsolat levezetésére, mely a 31. §-ban következik, ugyanis nem szükséges, hogy a sinus-tételt (31. §, I) *közvetetlenül* a 25. §-ból vezessük le, hanem lehozhatjuk elimináczió útján a II és III egyenletekből, a melyeknek levezetésénél nincsen szükségünk a kör kerületének ismeretére.

213—214. o. *Appendix* 31. §. Egy czédulán a János előrehaladott korából eredő következő följegyzést találjuk: «Vajjon nem volna-e lehetséges a sík trigonometriáját csupán a síkra szorítkozva levezetni a nélkül, hogy a többi térbe kilépnénk?» Egy másik czédulára írt följegyzésében azt állítja, hogy ilyen levezetést talált: «A tér a belsejében nagyon is sok olyan kincset rejt, a melyet a felszinen haladó nem lát meg sohasem. Így származott az én felette fontos *Appendix*em; bár később magam is feltaláltam annak módját, hogy a Δ-et pusztán a síkban vagy általánosan valamely egyenletes felületben vizsgálva, kihozzam a Δ-tant.» Vajjon János ezt valóban megtette-e, azt ne feszegessük. A sík trigonometriájának levezetésénél Lobatschefskij is térbeli vizsgálatokra támaszkodik; Gauss hagyatékából ellenben előkerült egy az 1840 és 1846 közti időből származó följegyzés, a melyben abból a követelésből kiindulva, hogy a síkban a végtelen kicsinyben az euklidikus geometria érvényes, az abszolut geometriára integráczió útján történik következtetés (Werke, Bd. VIII, 255—265 o.).

Még 1900 előtt, tehát mielőtt GAUSSnak említett följegyzése nyilvánosságra került, hasonló módon jártak el FLYE ST. MARIE (1831) és DE LA VALLÉE POUSSIN (1895); l. *Encyklopädie der math. Wissenschaften*, Bd. III, Teil 1, 44 o. Az abszolut trigonometriának olyan levezetését, a melynél nem kell a síkból kilépnünk. LIEBMANN szolgáltatta, Leipziger Berichte, 1907, 187—210. o.

231. o. 1. s. al.—232. o. 2. s. János állítása kiegészítésre szorul, ha valamely idomnak egy másikba való geometriai átalakítása alatt olyan szerkesztést akarunk érteni, a mely csupán egyenesek és cyclusok, azaz körök, továbbá paracyklusok és hypercyclusok segítségével vihető keresztül. Ha az adott m-szög szögeinek összegét s-sel jelöljük, akkor területe

$$[(m-2)\pi - s]\, i^2;$$

ha továbbá α jelenti azt a szöget, melyet valamely szabályos n-szög két oldala alkot, akkor ennek területe

$$[(n-2)\pi - n\alpha]\, i^2.$$

Annak feltétele, hogy e kettőnek területe egyenlő, a következő:

$$\alpha = \pi + \frac{s - m\pi}{n},$$

tehát lehetségesnek kell lennie, hogy $s - m\pi$-t geometriai úton tudjuk n egyenlő részre felosztani. Erre általánosságban nem elegendő, ha n a GAUSS-féle alakot mutatja, mert ekkor a $\frac{\pi}{n}$ szög és egyúttal ennek m-szerese megszerkeszthető ugyan geometriai úton, de hátramarad még az $\frac{s}{n}$ szög szerkesztése. Ha s tetszés szerinti, akkor erre szükséges, hogy n a 2-nek hatványa legyen; ekkor pedig a GAUSS-féle alak alá esik. Ha azonban n nem hatványa a 2-nek, az $\frac{s}{n}$ szögnek és épenséggel az s szögnek geometriai úton szerkeszthetőnek, tehát

$$s = \frac{h_1\pi}{n_1}$$

-nek kell lennie, hol h_1 és n_1 viszonylagos törzsszámok és n_1 a GAUSS-féle alak alá tartozik. Ekkor

$$\frac{s}{n} = \frac{h_1\pi}{nn_1} = \frac{h\pi}{\nu n_1},$$

hol szükséges, hogy a h és ν egész számok viszonylagos törzsszámok legyenek és a νn_1 szám a GAUSS-féle alak alá tartozzék (RÉTHY Mór 1903. évbeli közlése; l. RÉTHY Mór, *BOLYAI János «Ujj, más világának» ismertetése*, Mathematikai és Physikai Lapok 12 k. (1903), 319—320. o.).

239—249. o. *Értekezés a képzetes mennyiségekről.* V. ö. I, 121—130. oldalaival.

245—246. o. *Értekezés a képzetes mennyiségekről,* 9. §. V. ö. I, 100—105. oldalaival.

253—288. o. *A tér tudománya 1855-ből.* V. ö. I, 176—181. oldalaival.

259. o. 15—19. s. *A tér tudománya, Alapvetés,* 23. §, *Megjegyzés.* Az eredeti szöveg a következő:

«Es läßt sich schon hier zeigen, *daß keine drei Punkte* p ∗ q ∗ r *eines* ◯ abc *in einer Geraden seien,* ausgenommen wenn ◯ pabq sowohl als ◯ pabr einer gewissen Anzahl Tels von $\frac{1}{2}$ ◯ abc gleich ist . . .

A fordító Kürschák József tanácsára tekintettel a § utolsó bekezdésében kimondott eredményre ettől a szövegtől eltér.

6.– Ftl.