ÉRTEKEZÉSEK
A TERMÉSZETTUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.

XII. KÖTET. III. SZÁM. 1882.

ÉRTEKEZÉSEK

A MYO-MECHANIKA KÖRÉBŐL.

JENDRÁSSIK JENŐ
R. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1881. nov. hó 14-én.)

Ára 50 kr.

BUDAPEST, 1882.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az Akadémia épületében.)

ÉRTEKEZÉSEK
a természettudományok köréből.

Első kötet. 1867—1870.

Második kötet. 1870—1871.

Harmadik kötet. 1872.

Negyedik kötet. 1873.

Ötödik kötet. 1874.

Hatodik kötet. 1875.

I. Emlékbeszéd gr. Lázár Kálmán felett. Xántus. 10 kr. — II. Dorner József emléke. Kalchbrenner. 12 kr. — III. Emlékbeszéd Török János l. t. felett. Érkövy. 12 kr. — IV. A suly- és a hő állitólagos összefüggéséről- Schuller. 10 kr. — V. Vizsgálatok a kolozsvári m. k. tud. egyetem vegytan. intézetéből. Dr. Fleischer. 20 kr. — VI. A knyahinai meteorkő mennyilegel vegyelemzése. Dr. Than. 10 kr. — VII. A szinérzésről indirect látás mellett. Dr. Klug. 30 kr. — VIII. Egy felszinti Hypogaeus. Hazslinszky. 10 kr. — IX. A margitszigeti hévforrás vegyi elemzése. Than. 10 kr. — X. Öt közlemény a m. k. Egyet. vegytani intézetéből. Előterjeszti Than. 20 kr. — XI. A kőzetek tanulmányozásának módszerei stb. Dr. Koch 30 kr. — XII. Nyolcz közlemény a m. k. egyetem vegytani intézetéből. Előterjeszti Than. 30 kr.

Hetedik kötet. 1876.

I. Vizsgálatok a kolozsvári m. k. tud. egyetem vegytani intézetéből. Közl Dr. Fleischer. 20 kr. — II. Báró Prónay Gábor emléke. Haberern. 12 kr. — III. A légnyomás változásainak pontos meghatározásáról. Schuller 10 kr. — IV. Négy közlemény a m. kir. orvosi tanintézetből. Bemutatja Dr. Thanhoffer. 50 kr. — V. Pólya József emléke. Dr. Török. 10 kr. — VI. Tanulmányok a talaj absorbtiója fölött. Dr. Pillitz. 20 kr. — VII. A szőlő öbölye. Hazslinszky. 10 kr. — VIII. Az agy féltekéinek és a kis agynak müködéséről. Balogh. 40 kr.— IX. Krystálytani vizsgálatok a betléri wolnynon. 3 képtáblával Szécskay. 30 kr. — X. Az agy befolyásáról a szívmozgásokra. Balogh 10 kr — XI. Két isomér Monobromitronaphthalinról. Dr. Fabinyi. 10 kr. — XII Kubinyi Ferencz és Ágoston életrajzuk. Nendtvich. 10 kr. — XIII. Jelenté Görögországba tett geologiai utazásairól. Dr. Szabó. 10 kr. — XIV. A felsőbányai trachit wolframitja. 1 táblával. Dr. Krenner. 10 kr. — XV. Vizsgálatok a kolozsvári m. k. tud. egyetem vegytanintézetéből. 6) A cyansav vegyületek szöveti alkatáról. Dr. Fleischer. 10 kr. — XVI. A villanyosság kiegyenlődése a szikrában és a szigetelők oldalinfluentiája. Kont. 10 kr.

Nyolczadik kötet. 1877.

I. Az isogonok rendhagyó menetéről Magyarország erdélyi részeiben. Schenzl. 40 kr. — II. A hortobágyi keserűviz elemzése. Dr. Schvarczer. 10 kr. — III. Adatok a járulékos gyökerek fejlődéséhez. Schuch. 10 kr. — IV. Vizsgálatok a fulminátok (dursavvegyek) vegyalkata felett. Dr. Steiner. 20 kr. — V. Az emberi vese Malpighi-féle lobrai. Lenhossék József. 20 kr. — VI. Adalékok a kárpátok földtani ismeretéhez. Hantken Miksa. 10 kr. — VII. Tanulmányok az aldehydek vegyűleteiről phenolokkal. (Első értekezés.) Dihydroxyphenyl-aethan és vegyűletei. Dr. Fabinyi Rudolf. 10 kr. — VIII. Magyarhoni Anglesitek. Székfoglaló értekezés Dr. Krenner József Sándortól. (9 táblával.) 20 kr. — IX. A vas chemiai alkata és keménysége közötti vonatkozások. Kerpely Antaltól. Két táblával és több rajzzal a szöveg között. 20 kr. — X. Ásvány- és kőzettani közlemények Erdélyből. Dr. Koch Antal lev. tagtól. 20 kr. — XI. Emlékbeszéd Dr. Entz Ferencz a m. tud. akadémia levelező tagja fölött. Galgóczy Károly, lev. tagtól. 10 kr. — XII.

ÉRTEKEZÉSEK
A TERMÉSZETTUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

Értekezések
a myo-mechanika köréből.

Jendrássik Jenö r. tagtól.

(Előadta a III. osztály ülésén, 1881. november hó 14-én.)

ELŐSZÓ.

Bármennyire jelentékeny az izomphysiologiának évről-évre termékenyen gyarapodó irodalmában az izom-physikájára vonatkozó dolgozatoknak száma, és ezek sorában azoké is, melyek értékes adatokat szolgáltatnak az izom elméleti mechanikája számára, időelőtti volna mégis a szándék, mely most már az izom elméleti mechanikájának kidolgozását oly összefoglaló vázlatban tűzné ki magának feladatúl, mely az izomösszehúzódás folyamatának törvényeit, valamint ez utóbbiaknak rendszeres összefüggését úgy kinemetikai, valamint kinetikai irányban magában foglalná. Mert a számos, többé-kevesbbé alapos előmunkálat daczára, sem az izomphysiologiának ide vonatkozó területe nincsen még mindazon irányadó alapviszonyokra nézve és annyira átkutatva, mint azt olyféle vállalat akár csak az első biztos tájékozásra megkivánná; sem pedig az, mi eddig napvilágot nyert, nincsen még tartalmának értékére nézve úgy megállapítva, hogy annak ellenőrző utánvizsgálása már fölöslegessé vált volna; annál kevesbbé, minthogy magok a vezérelvek, úgy a vizsgálatnál követendő irányra és módszerre, valamint a nyert eredmények felfogására és megitélésére vonatkozólag, ez időszerint még ingadozók, sőt sokban egymásnak épen ellenmondók.

Ily körülmények közt a vizsgálatnak feladata még továbbra is csak előmunkálatokra szorítkozva és arra utalva marad, hogy azok által vagy még át nem kutatott területeken új ösvényeket nyisson meg, vagy, hogy új módszereket és eszközöket szerezzen meg a vizsgálat számára, vagy, hogy önmagokban tisztázott elvek szerint az eddig kiaknázottat átszemelgesse és birálgassa, különválasztva azt, a mi helyesnek bizonyúl, a tévestől és tarthatlantól; vagy végre, hogy a biztosított tények természetes összekapcsolása által adjon az azokban foglalt természettörvényeknek kifejezést, valamint fokozatosan kibővítve ez utóbbiak érvényességének határait, segítse elő a belátást azoknak rendszeres összefüggésébe és kölcsönös befolyásába és mindez által szerezze meg és biztosítsa az izom elméleti mechanikája számára a szükséges alapot.

E kijelölt irányban ugyanazon czél előmozdítására törekvő előmunkálatok képezik a következő értekezéseknek tartalmát, melyeknek sorrendjét azon összefüggés fogja megszabni, melynél fogva az előbb következő rész az utána következőnek biztos alapúl szolgálhat.

I.

A rugalmasság hatásáról a nyujtás alatt, mint a myo-mechanikába bevezető előtanulmány.

(Öt ábrával.)

1. §.
Bevezetés.

Midőn a vizsgálatok sorrendjében, melyek útján az izom által összehúzódásakor kifejtett mechanikai hatásának törvényeibe kinematikai, valamint kinetikai irányban magunknak belátást törekszünk szerezni, legelőbb is a nyújtás által keltett rugalmasságot veszszük tárgyalás alá, úgy minket arra az a körülmény indít, melynél fogva ama törvényeknek tüzetes ismerete teljesen nélkülözhetlen az épen kijelölt irányban az izomra vonatkozólag teendő vizsgálatainknál, úgy tekintettel az esetleges különös kérdésnek tárgyára, valamint a megfelelő vizsgálati módszerre.

A dolog természetében feküdt, hogy *Weber* az izomösszehúzódásra vonatkozó vizsgálatainál, melyekkel e téren a pontos vizsgálatnak új pályát nyitott, figyelmét a rugalmasság huzó hatásának törvényeire fordítva, mintegy az azok által szolgáltatott paradigma alapján igyekezett az izomösszehúzódásnak hatását megfejteni és azokban vélte a fölfedezett tények számára is a megfelelő kifejezést megadva. Azóta ugyan ezen elméletsokféle megtámadásnak és kifogásolásnak volt kitéve, sokféleképen értelmezve és félreértve is, de ha ellenfeleinek száma még ma sem kisebbűlt, úgy az még mindig számos védőre is akad, kiknek tekintélye a tudományos búvárlat körében kétségkivül semmivel sem kisebb, mint az ellenfeleké.

A nagy különbséget az ez elmélet feletti itéletben azonban, úgy vélem, inkább az okozta, a mit attól követelnek és abban benfoglaltnak tekintenek, semmint az, mit az valóban tartalmaz. Mindazáltal csak később, miután már a szükséges alapot megszereztük, lesz alkalmunk nekünk is behatóan birálat alá venni, mennyiben fejezi ki *Weber* elmélete az izomösszehúzódás folyamatát minden viszonya szerint teljesen és megfelelőleg vagy mennyiben nem?

De legyen az bár foglalatjára nézve nem eléggé teljes és más egyéb tekintetben is méltán kifogás alá vehető, úgy mégis ez elmélet az, mely sok más közül leginkább van hivatva arra, hogy komoly megvitatásra érdemesittessék, mire nézve kétségben nem lehetünk, mihelyt egyfelől mi is azt, úgy mint *Fick A.* az izommunkáról irt jeles értekezésében,*) olyannak tekintjük, mint a mely nem kiván az izomösszehúzódás belső mivoltának és az annál működő erőknek fejtegetésébe bocsátkozni, hanem csak a tényeket akarja szabatos fogalomban kifejezni, és mihelyt másfelől mi is, úgy mint Fick, azt a közösséget az izom összehúzódása és a rugalmassági hatás közt elismerjük, mint azt elismerni kénytelenek vagyunk, hogy úgy ott, mint itt molekuláris erők folytán bizonyos alakváltozás közbenjárása mellett, a felületi részecskéken eszközölt mozgásba az azokkal összefüggesztett tömegek is bevonatnak. Mert ha a rugalmassági tulajdonságoktól el is tekintünk, melyekkel az izom többféle szövetek által képezett szerkezeténél fogva bír és melyek összehúzódásának idő és tér szerinti lefolyására, valamint a külsőleg kifejtett erő hatására is kétségen kivül befolyást gyakorolnak; úgy mégis már azon körülmény, hogy úgy, mint minden külső hatásra képesített rugalmas testnél, szintúgy az izomnál is, a tulajdon alakváltozás útján más testre átruházható mozgás nem egyéb, mint ama mozgásoknak megfelelő eredménye, melyekbe az illető elemi részecskék bizonyos törvények szerint működő erők által hozatnak, azon kérdést tűzi elénk, mennyiben lehet egyfelől az izom részéről, másfelől valamely rugalmas test részéről átruházható mozgásnak egész

*) A. Fick. Untersuchungen über Muskelarbeit. Basel, 1867. 15. és köv. l,

jellemében összeegyezést vagy különbséget feltalálni, minek megfelelőleg csak azután lesz lehetséges az itt és ott működő erőknek és törvényeiknek azonosságára vagy különbségére következtetést vonni.

Ily összehasonlító tanulmány, egyfelől az izomnak csak külső hatásában nyilvánúló összehúzódását, másfelől a rugalmas testek által kifejtett hasonló húzó hatást illetőleg annál hasznosabbnak igérkezik, minthogy az utóbbinak, mint egyszerübb folyamatnak, pontosan meghatározható szabályszerüsége nekünk vezérfonal gyanánt szolgálhat, az izomnál előjövő másik bonyolodottabb s azért az elemzésnek nehezebben alávethető folyamatnak tanulmányozásánál.

De a rugalmasság húzóhatásának beható tanulmányozása még más szempontból is hasznosnak igérkezik. Mert úgy mint amaz és az azt megállapító törvény, szintúgy az összehúzódó izom által kifejtett húzó hatás és az ennek alapját képező, bizonyos szabályt követő folyamat is csak oly módon tanulmányozható, hogy az izmot, illetőleg a rugalmas testet az általok mozgásba hozandó tömeggel kötjük össze, képezze ez utóbbit akár csak a mozgás följegyzésére szolgáló eszköz egymagában is.

Hogy azonban az ily felkötött tömegnek mozgásából biztos következtetést vonhassunk azon mozgás folyamatára vonatkozólag, mely amazt létrehozza, szükséges, hogy tüzetesen ismerjük, mikép viseltetik maga a nehézségnek alávetett tömeg, midőn arra egyidejüleg még más erők is behatnak; mert a mozgás, melyet ama tömeg végbe visz, valamennyi együttműködő erő által eredményeztetett. Már pedig a mozgatott tömegnek különféle erők egyidejű behatása alatti magatartását oly körülmények közt fogjuk mindenek előtt biztosan és pontosan meghatározhatni, melyekben az összeműködő erők magok egyszerűbbek és már különben ismert és kipróbált törvények szerint hatnak, mint épen a rugalmassági húzó erők. Ha így egyszer ismerjük a visszahatást, melyet valamely tömeg súlyánál fogva az olyféle erők által megindított mozgásra gyakorol, képesítve leszünk azon tömegnek befolyását az eredményes mozgásra ott is kellően számba venni és így a hatás azon részét is meghatározni, melylyel ahhoz még a nehézségen kivül közreműködő többi erő a maga részéről járúl, hol épen ezen, még ismeretlen erők meghatározandók.

A súlyos tömegekre gyakorolt rugalmassági húzó hatásnak alapos előtanúlmányozása azért nagy fontossággal bír methodologiai tekintetben is, minden, a myographia útján eszközölt vizsgálatnál, a mennyiben minden ilyféle vizsgálatnál az izom összehúzódását és ennek lefolyását egyedül csak a jelző emeltyűt képező, többé-kevésbbé súlyos tömegnek mozgásán ismerjük fel, és a mennyiben épen e miatt csak úgy leszünk képesek a myogrammot helyesen értelmezni, ha kellően számba veszszük a hatást, melyet a jelző emeltyű egymagában vagy még más teher mellett, súlyánál fogva a mozgásra gyakorol.

Reménylem, hogy e körülmények eléggé indokolják szándékomat, mely arra vezetett, hogy az izom physiologiájának szánt értekezéseim sorában, külön értekezésben és mint véltem, a physiologiai szükségnek megfelelő részletezéssel, oly tárgyat vegyek taglalás alá, mely ugyan inkább a tudomány más köréhez tartozónak tekinthető, mely új tények fölfedezését sem igéri, mely mindazáltal mégis megengedi a törvények levezetésénél oly utakat követni, melyeken a törvényes viszonyok közti összefüggés, valamint az azok kijelölésére használt kifejezések értelme világosabban mint máskép kimutatható; minek folytán azoknak alkalmazása azután az élettani tünemények körében is annál biztosabbá válik.

2. §.

A nyújtás által keltett rugalmasságnak erő- és erély-mértéke.

Szokás, erőhatásokat, mint nyomást, húzást, stb. súlyok nagyságában kifejezni, mert képzeljük és úgy is találjuk, hogy a súlyok is képesek ugyanazon erőhatásokat kifejteni. E kifejezés azonban, jóllehet, hogy mi arra tények által lettünk vezetve és azt ezeknek megfelelőnek találjuk is, magában még meg nem érthető, sem nem alkalmas közvetlenűl arra, hogy nekünk az erőviszonyokba belátást szerezzen és minket arra képesítsen, hogy azokról saját értelmünket kielégítő módon magunknak számot adjunk.

Az erő fogalmához csak levezetés útján juthatunk el; foglalatja az által nincsen még meghatározva, hogy erővel az okot jelezzük, mely a mozgásnak nagyságát és irányát megváltoztatja; ily körülirással e fogalom még arra sem alkalmas, hogy a testvilági tünemények magyarázatában kiindulási pontúl szolgálhasson. Mi az erőnek fogalmát, úgy vonatkozással annak egymástól bizonyos távolságban álló testektől való függvényszerű származására, valamint vonatkozással annak a gyorsulásban, melyet bizonyos irányban előidéz, kifejezett nagyságára, egyedül csak a testvilági térviszonyokból és az ezekben bekövetkező változásokból bírjuk magunknak összeállítani. Az, mit érzékeinkkel közvetlenűl felismerhetünk, csak azon változásokra terjed ki, miket a testvilági testek részint együtt, egymásközti elhelyezésökre nézve (Dislocatio), részint egyenkint egymagokban alakjokra nézve (Configuratio) felmutatnak és azon munkára, mely e változások folytán általok teljesíttetik, mely részint olyféle, minőt saját testünk bizonyos részeivel mi is végrehajtani képesek vagyunk, részint olyan, melyet csak a tudomány fáradalmasabb útján voltunk képesek mint végzett munkát felismerni. E mellett azonban találjuk azt is, hogy a munkateljesítés mindig kölcsönös, vagy úgy, hogy munka munkát eredményez közvetlenűl, vagy egyelőre csak munkaképességet hagy maga után vissza máshol.

Csak ez észlelt munkálkodás és munkaképesség késztet és képesít minket arra, hogy magunknak erőfogalmat alkossunk, és segít minket, azt sokkal kevesbbé erőszakolt módon elérni, mint különben képesek volnánk.

És valóban, tapasztaljuk is, hogy a mióta minket a folytonosan észlelhető kölcsönös munkafelváltás az erély állandóságának törvényéhez elvezetett és ez elismert átalános érvényességénél fogva a különféle természeti tüneményekre vonatkozó erőfogalmak levezetésénél alapúl szolgál, azóta belátásunk a tünemények viszonyaiba tisztúlt, haladásunk a természet megismerésében tetemesen növekedett. Szintúgy e körülményben vélem az okát annak is találni, hogy miért a physikának és mechanikának épen azon részei, melyek még azon átalános elv fölfedezése előtti időszakban lettek kidolgozva, melyek azonban az azon elv által szolgáltatott alap mellőzésével, még ma is nagyobbára a megszokott régi modorban tárgyaltatnak, tiszta, könnyen felfogható belátást a megfejtendő erőviszonyokba többnyire sokkal kisebb fokban nyújtanak, mint sok más oly része azon tudományoknak, mely csak jóval később vétetett fel a vizsgálat körébe.

De miután már az emberi ismeret azon, a tudománynak olyannyira előnyére vált sarkalatos törvényt, tiszta belátással felfogta — mintegy utóhatásképen azon sorrend folytán, melyben a még elégséges tárgyi alap nélkül is azonnal a primum movens-t kereső emberi ész az a prioristice alkotott erőfogalomból az erély állandóságának törvényéig fölemelkedett, — zavarta még azután is a fogalmakat azon körülmény, hogy két különböző fogalomra, melyeket már Newton, mintegy előre sejtve a csak később teljes átalánosságában érvényesnek felismert elvet, mint causa mathematicá-t és causa physicá-t egymástól megkülönböztetendőket felállitott, folyton tovább ugyanazon, csak melléknév által megkülönböztetett főnév, mint eleven erő (lebendige Kraft) és feszerő (Spannkraft) alkalmaztatott. Mert ez folyton alkalmat szolgáltatott arra, hogy ez utóbbi fogalmak tartalmuk lényegére nézve azonosoknak tartassanak magával az erőfogalommal.

Ezen, a fogalmak lényegét nem eléggé megkülönböztető elnevezés maga pedig nyilván annak a következménye, hogy az e fogalmak közt fennálló szoros viszonynál fogva, azok kölcsönösen egymásból levezethetők; a tudomány pedig fejlődési folyamában valóban az erőfogalmat használta fel mint kiinduló pontot az általa követett levezetésnél, melynél az átmenet az egyik fogalom köréből a másiknak körébe nem ismertetett fel ideje korán elég élesen, mint ez a mechanikában még ma is némely, a régi időből átvett levezetéseknél kimutatható, melyeknél egyes — a levezetés foklejtőjén egymás után következő — tételek mint még közvetlenül az erő fogalma alá tartozók tekintetnek, noha azok tulajdonképen már a másik fogalomnak köréből valók.

Most már azonban, követve a *Rankine, Thomson* és *Tait* által adott példát, a két különböző fogalom számára átalában két különböző elnevezés is használtatik, meghagyatván a régibb fogalom számára a régibb elnevezés, míg az, mi az újabb fogalom szerint munkát teljesít és munkaképes, erélynek neveztetett el.

És valamint ez elnevezésben, szintúgy kell mathematikai kifejezéseikben is e fogalmakat élesen egymástól különválasztani. De hogy mennyire elégtelenül fejezi ki az erőnek, mint azon oknak, mely a mozgás jellemét sebességének nagyságára és irányára nézve megváltoztatja, inkább a priori felállitott, semmint egy átalánosabb fogalomból levezetett fogalmát, az erre használt $p = mg$ kifejezés, melyben p az erőt, m a tömeget, g pedig átalában a gyorsúlást jelenti, az eléggé kitűnik abból, hogy ily erő az egymásra beható testek, illetőleg testrészecskéknek anyagi minőségén kivül, még azoknak helyviszonyaitól is függő; e függvényes viszony azonban ama kifejezésben alig van befoglalva; ellenben, mint tovább látni fogjuk, az tisztán ki van fejezve az erélyből levezetett kifejezésben, mely csak maga teszi az erőfogalmat a neki tulajdonképen megfelelő jelentősége szerint valóban megérthetővé.

Szintúgy nem segít minket az erőnek mint a mozgás okának fogalmához az előbbi kifejezés akkor sem, midőn azt valamely bizonyos súlynak kijelölésére használjuk, épen úgy nem, mint maga a súly sem; mert a föld ellenében helyezett súly tényleg még nem elégséges, hogy már ez által mozgást hozzon létre, hanem szükséges, hogy mint a másik föltételező tényező legyen még a szabad tér is megadva. Minthogy azonban a statikai állapotban mozgás, helyváltozás nem áll be, úgy könnyen figyelmen kivül hagyjuk a térben elfoglalt helyzetet, és úgy tekintjük a más erő ellenébe állított súlyt, mint a mely már magában ellenerőképen azon állapotot fentartja. Mindazáltal már az emeltyűre vonatkozó törvények felállításánál kénytelenek vagyunk a statikai állapotra vonatkozólag is az úgynevezett statikai momentumban, a súlyon kivül még a térviszonyokat is számba venni. És mint az elméleti mechanika tanítja, csak a virtualis sebesség, illetőleg mozgás elvére alapított virtualis momentum segítségével lehet a statikai állapotot levezetni. De a mint egy későbbi helyen látni fogjuk, maga ez utóbbi momentum az erély fogalmának közvetlen folyománya, mely csak azon fogalom által nyeri világosan megérthető jelentőségét.

Látjuk tehát, hogy úgy a szabadon hatását kifejtő erő, valamint a más erő által egyensúlyban tartott erő nyilvánulásaiban kötve van a térviszonyokhoz és épen azért kell, hogy már eredetileg az erő fogalmában benfoglalva legyen, mint nélkülözhetlen feltétel a tér is, s épen úgy kell, hogy az erőfogalomnak teljesen megfelelő kifejezés is az utóbbi feltételt tartalmazza.

De az erőnek ily kifejezését, mint látni fogjuk, egyedül csak az erély kifejezéséből lehet levezetni.

Az erőfogalomra vonatkozólag ilyetén levezetett kifejezések a testek rugalmasságának tárgyalását is lényegesen felvilágosítják, és oly balfogalmak, minők más tanmód mellett könnyen felmerülnek, vagy legalább távol nem tartatnak, könnyen elháríthatók.

Sőt épen a rugalmassági tünemények elemzésénél lehet az erő és erély közötti viszonyt kiválóan világosan felismerni.

A rugalmasság, mint a testeknek azon tulajdonsága, melynél fogva azok térfogatukban és alakjokban erőszakosan elszenvedett változások után tömecseiknek eredeti egyensúlyát visszanyerik, erély, mert képes munkát teljesíteni és mint olyan csak erélylyel mérhető; az abból származó erő pedig oly erő által mérhető, mely képes a testnek előbbi molecular-állapotának visszanyerésére irányúló törekvését egyensúlyban tartani. De a midőn itt megint két ellenkező erőhatásnak statikája körül forog a kérdés, úgy a rugalmassági erőnek, az úgynevezett feszélynek mérésére és kifejezésére ismét azon súlynak nagysága szokott szolgálni, mely megakadályozza azt, hogy a test feszélyállapotából eredeti állapotába visszatérjen.

Ámde e súlynak nagysága semmiképen nem felel meg azon súly nagyságának, mely, mialatt a maga helyét bizonyos módon megváltoztatja, képes a rugalmas testnek alakját, térfogatát bizonyos módon és mértékben megváltoztatni. Épen azért nem szolgálhat az előbbi súly egyszersmind arra is, hogy azon potentialis erélyt fejezze ki, melyet a rugalmas test az általa elszenvedett alak és térfogati változása közben és annak következtében bizonyos mértékben elnyert.

Szükséges azért, hogy az előre bocsátott észrevételek után, a rugalmasságnak tanúlmányozását azzal kezdjük meg, hogy fölkeressük mindenek előtt a megfelelő kifejezéseket a rugalmas feszélyben lévő testnek erejére és erélyére vonatkozólag.

Tekintettel azonban arra, hogy a myologia köréből származó szükségünk csak a rugalmasság által gyakorolt húzó hatásra terjed ki, azért vizsgálatunk határait szűkebbre szabva, csak az épen említett hatás irányában fennálló alakváltozásra szorítkozhatunk; tehát a megnyújtás által keltett rugalmasságra, még pedig legelső sorban nem szerves testeknél, melyek közűl egyszersmind olyant választunk ki tanulmányunk tárgyaúl, mely szabályosan hasábos alakkal és más méretet felülhaladó hosszúsággal bír; alkalmas taneszközképen szolgálhat különösen még egy tekercsszerűen összehajtott huzal is.

A nyújtás, mit ilyen test egyik végénél felakasztva, másik végén súlylyal megterhelve, elszenved, a tapasztalásnak megfelelőleg, kifejezhető ekképen:

$$D = \frac{l}{eq} P;$$

mely képletben D a nyújtást, P a terhelő súlyt, l az illető test hosszát, q átmetszetét, e pedig a rugalmassági együtthatót jelenti.

Ez egyenlet azon egyszerű tényt fejezi ki, hogy a rugalmas test meghosszabbítása legalább bizonyos határig egyenes arányban a terhelő súlylyal növekszik.

Ámde a huzalnak ugyanazon, a megterhelés alatt változatlanúl megmaradó, meghosszabbítását kétféleképen eszközölhetjük. Vagy úgy t. i., hogy a még meg nem terhelt huzalt azonnal a teljes P súlylyal terheljük meg, vagy pedig, hogy megfelelő készűlék segítségével a súlyt o-tól fogva folytonosan P értékig növeljük. *)

Mindkét esetben a fonalnak meghosszabbítása azon munkának az eredménye, melyet a súly, mialatt a D meghosz-

*) E czélra szolgáló igen elmés készüléket már Marey irt le a »Du mouvement dans les fonctions de la vie.« Paris, 1868. 297 és köv. l. — czimü munkájában, mely készülék feljegyzi a rugalmas fonalnak előhaladó meghosszabbodását, mialatt arra a folytonosan odaömlő higany mint növekedő teher behat. Ekképen kimutatható is volt, hogy míg nemszerves testeknél a nyújtást jelző vonal egyenes vonalnak felel meg, addig az szervestesteknél görbe alakkal bir.

Hasonló nyujtási kisérleteknél könnyü, de mégis elég szilárd, kétkarú emeltyűt használtam, melynek egyik karja megfelelő távolságban forgóspontjától a bizonyos nagyságú terhet viseli, egyszersmind ugyanszabbítással egyenlő magasságban alábbsülyedt, saját potentialis erélykészletének fogyasztása mellett, a huzalon teljesített. De daczára annak, hogy e munka és az annak megfelelő erély, melyet a P súlynak megfelelő statikai egyensúly határáig megnyújtott huzal nyert, mindkét esetben egyenlő, úgy mégis a terhelő súlyok részéről elhasznált erélymennyiségek a két esetben igen különbözők. Mert míg azon erélymennyiség a mindjárt kezdetben teljes nagyságában alkalmazott súly esetében PD-nek felel meg, addig a másik esetben, midőn a terhelő súly o-tól fogva a teljes P nagyságáig folytonosan növeltetik, igen különbözők a szakaszok, melyek magasságában a részletsúlyok alábbszállottak; minek folytán az ezek által elhasznált erélyrészletek, mint $p_{,}h_{,} + p_{,,}h_{,,} +$ stb. összege is többé nem fogja az előbbi mennyiségnek PD nagyságát elérni. Miből következik, hogy a nyújtó súly részéről elhasznált erélynek ez utóbbi értéke nagyobb, mint azon erélyé, mely a nyújtásnál teljesítendő munkához közvetlenül szükséges és kellett azért, hogy ez esetben az elhasznált erélytöbbletnek megfelelőleg, a huzalnak meghosszabbításán kivül molecularis vagy más alakban még munka teljesíttetett legyen, mely a folytonosan növekedő teher esetében elmarad.

Azon mellékmunkának alakjával és meghatározásával, mely a mindjárt kezdettől fogva teljes nagyságban alkalmazott tehernél teljesittetik, később fogunk foglalkozni; itt legelébb azon erélyről szólunk, mely a súly részéről a nyújtáskor végzendő munkához megkivántatik.

A fennidézett képletből fel nem ismerjük sem a nyújtáskor beálló erélycserét és az akkor jelenlevő erőviszonyokat, sem pedig annak okát, hogy miután a súly bizonyos mélységig alább

azon helyen horoggal is van ellátva, melylyel az a lecsüngő rugalmas fonal vagy tekercs végébe beakasztható, a másik hengerded rúd által képezett emeltyükar mint vezeték szolgál a kerületén körülárkolt csiga számára, mely a tulsó oldali súlylyal egyenlő súlylyal van ellátva, úgy hogy ez utóbbi mint ellensúly a csigának nagyobb kissebb távolsága szerint a forgásponttól a terhelő súlyt részben vagy teljesen is egyensúlyban tarthatja. Ekképen az egyensúlynak csigáját lassan tovább tolva, lehet a fonalnak súlyát nulla-tól fogva teljes értékéig vagy megforditva, folytonosan változtatni, mialatt az egyik vagy másik emeltyükarhoz erősitett jelző hegy a fonál hosszának változatait az előtte forgó hengeren feljegyzi.

sülyedve és a huzalt megnyújtva, azt a statikai határig meghosszabbította, és pedig a bizonyos nagyságig folytonosan növekedő teher esetében a nélkül, hogy még más valami mellékmunkát teljesített volna, miért nem sülyed az még alább és erélyét még tovább fogyasztva, miért nem hosszabbítja meg a huzalt még azon határon is túl?

Hogy e viszonyról magunknak számot adhassunk, szükséges, hogy az előbbi képletet átirjuk; P szerint azt megoldva, egyszersmind $\left(\frac{eq}{l}\right)$ helyett A-t írva, ezt kapjuk:

1) ..... $P = AD.$

Ez egyenes vonalnak megfelelő egyenletet, minthogy ugyanazon huzalnál A változatlan marad, tértani képletben is kifejezhetjük, ha úgy, mint az 1. ábra mutatja a P súlyokat a vízszintes metszési tengelyen, a nyújtáskori meghosszabbodást a függélyesen leszálló rendezők tengelyén följegyezzük, e tengelyek keresztpontját úgy a súlyokra mint a nyujtásokra vonatkozólag nulla-pontúl véve, és ez utóbbi ponttól kiindúlva, *os* egyenes vonalat vezetünk, mely a rendezők tengelyével α szöget képez; ha ez utóbbinak trigonometriai érintője A-val egyenlő értékű, akkor *os* egyenes a feszély vonalának felel meg.

Az előbbi egyenlet pedig azt jelenti, hogy a D nyújtással egyenes arányban növekszik az ahhoz szükségelt súly is.

Minthogy a növekedő nyujtással a rugalmas huzalnak potentialis erélye is bizonyos, csak még ezután meghatározandó viszony szerint nő, azért azon E_{pz} erélynövedéket, melyet a D hoszszal már megnyújtott huzal nyerne, ha P súly a nyújtásnál elért d egyensúly pontjától tovább a dD végtelen kis szakaszszal még alább sülyedne, kifejezhetjük ekképen:

$$E_{pz} = PdD = ADdD,$$

mi már azért is helyes, mert a végtelen kis szakasz alatt a lesülyedő súly részéről munkára elhasznált erély is egyenlő PdD-vel.

Az előbbi egyenletből, mely az erély külzelékének felel meg, egészlés által kapjuk a következőt:

2) .... $E_p = \Sigma E_{pz} = {}^1/_2 AD^2,$

mint összegét mindazon erélynövedékeknek, miket a huzal nyert, mialatt az a terhelő súlynak folytonos, P-ig érő megnagyobbítása mellett, o-tól egészen D-ig terjedő hosszúságban megnyujtatott. Azon összegnek felel tehát meg a megnyujtott huzalnak erélye e határon.

A 2) alatti egyenletből következik:

$$3) \ldots\ldots \frac{dE_p}{dD} = \frac{d\Sigma(E_{pz})}{dD} = AD = P,$$

miből már azt tudjuk meg, hogy az előbbi egyenletekben P-vel jelölt érték nem egyéb, mint a huzal által elnyert erélynek a nyujtás iránya szerint levezetett külzeléki hányadosa, mely mint határérték azon, a *rugalmassági feszélynek mértékét* képező súlyt jelöli meg, mely mélyebb lesülyedése által a huzalt már tovább meg nem hosszabbíthatja, mert a meghoszszabbítás odáig elért határán túl a még tovább megnyújtott huzalnak legkisebb erélynövedéke fölülmulja azon erélyrészletet, melyet az egyidejüleg a nyujtással egyenlő hosszú útszakaszszal alább szálló súly saját erélykészletéből a huzalra átruházni képes volna.

Ha az utolsó egyenletben D-t a hosszegységgel egyenlőnek veszszük, támad:

$$\frac{dE_p}{dD} = A = P',,$$

mi által azon súlynak határértékét kapjuk, mely a huzal meghosszabbodását azon hosszegységen tul tovább növelni nem képes.

Miután pedig $A = e\frac{q}{l}$, azért ha még q helyett is az átmetszeti egységet (egy négyszögmillimétert) és szintugy l helyett a hosszegységet (egy métert) veszszük, akkor lesz:

$$4) \ldots\ldots \frac{dE_p}{dD} = e = p$$

a határérték, mely mint *rugalmassági együttható* azon súlynak felel meg, mely a hossz- és harántmetszeti egységekkel egyenlő méretű huzalt a hosszegységnek megfelelő meghosszabbításon, tehát annak kétszeres hosszán túl még tovább megnyújtani nem képes.

E súly az, mely képes levén a kijelölt méretegységeknek megfelelő, rugalmasan megfeszűlt huzalt összevonulási törekvésénél egyensúlyban tartani, mint az illető anyag hossz-irány szerinti *rugalmasságának erőmértéke* használtatik.

A 3) alatti egyenlet folytán a 2) alatti egyenletet még így is irhatjuk:

5) .... $E_p = \Sigma E_{pz} = {}^1/_2 PD$;

miből kitetszik, hogy azon potentialis erély előállitására, melylyel a D-vel meghosszabbított huzal bír, már fele azon erélynek elégséges, melyet a D-vel egyenlő hosszú szakaszszal alább sülyedő statikai határsúly (P) e közben elszenvedne, vagy más szóval, hogy a megnyújtott huzalban előállított potentialis erély egyenlő az azon nyujtáshoz, mint statikai határsúly tartozó súly felének szorzatával azon D hoszszal, melynek megfelelőleg az általa eszközölt nyujtásnál maga a súly sülyedt volna. Azon erélyveszteségi többlet pedig, melyet a statikai határsúly elszenvedne, ha az mindjárt kezdettől fogva egész nagyságában a nyújtást eszközölte volna és mely többlet ez esetben mint mellékmunka molecularis mozgásképen vagy más alakban lépne fel, szintoly nagy, mint a huzal megnyujtására valóban fordított erélyrészlet.

Ha végre az 5) alatti egyenletben P helyébe a harántmetszeti- és hossz-egységekre vonatkozólag a 4) alatti egyenletben levezetett p határsúlyt teszszük és $D = 1$-nek veszszük, akkor lesz:

$$E_p = {}^1/_2 p,$$

következőleg

$$E_p = {}^1/_2 p = {}^1/_2 e,$$

miből kitetszik, hogy a *rugalmassági együttható még azon határsúlynak is megfelel, melynek fele a hosszegységgel szorozva, az egész potentialis erélyt adja, melyet a hosszegységnek és a harántátmetszeti egységnek megfelelő huzal az eredeti hosszát megkétszeresítő nyujtás által nyerne.*

E szerint tehát úgy mint az erőt, kifejezhetjük *megfelelő mértékben a rugalmassági erélyt* is az által, hogy a különben rugalmassági együtthatóképen vett súlynak felét egy méter esési magassággal szorozzuk; ekképen kifejezzük például az ólom rugalmasságát erőmértékben 1727 kilogrammal, ugyanazon rugalmasságot erélymértékben pedig kifejezhetjük 863.5 kilogramm-méterrel.

Az erő és erély közt valamely megnyújtott rugalmas testben fennálló és eddig analytikailag fejtegetett viszonyokat tértani kép által is felmutathatjuk.

Ha az 1. ábrán *os* egyenes megfelel a nyujtási vonalnak, vonatkozólag bizonyos testre, példáúl egy tekercsrugóra, mely felső végén felakasztva, alsó végével meg nem nyújtott állapotban *o*-ig leér, $op = dm = P$ a súlyt jelenti, mely a $D = od$-ig megnyújtott tekercset egyensúlyban tartja, akkor *opmd* négyszög megfelel azon erélyveszteségnek, melyet a *O*-tól *d*-ig lesülyedő súly elszenved; míg az $od = D$-vel meghosszabbodott tekercs erélye, az 5) alatti egyenlet értelmében $E_p = {}^1/_2 PD$, csak *odm* háromszögnek, mint az előbbi felület felének felel meg, úgy hogy a másik *opm* háromszög azon veszteségi többletet tűnteti fel, melyet a súly erélyében elszenvedne, ha *o*-tól fogva azonnal egész nagyságában a tekercsre behatna.

Ha már most az így megnyújtott tekercs a végtelen kis $dd_,$ hosszúságban, tehát megfelelőleg a nyujtás (dD) külzelékének még tovább nyújtatnék, akkor erélynövedéke mint $(E_{pz} = dE_p)$ erélykülzelék megfelelne a végtelen keskeny $dmm_,d_,$ felületrésznek. Minthogy azonban P súly, ha $dd_, = dD$ szakaszszal alább szállana, csak $dmn_,d_,$ felületnek megfelelő erélyt képes kölcsönözni, belátható, hogy ez a súly a *d*-ig megnyújtott tekercsen csüngve, nem lesz képes az utóbbit azon határpontnál tovább megnyújtani; és viszont szintúgy belátható, hogy a tekercsen csüngő súly mindaddig nem fog megszűnni azt meghosszabbítani, a meddig saját erélyének külzeléke, példáúl az, mely $dmn_{,,}d_{,,}$ felületnek felel meg, nagyobb, mint a tekercsnek ugyanazon helymagasságra vonatkozó, $dmm_{,,}d_{,,}$ felületnek megfelelő erély külzeléke. A statikai határpontnak tehát azon helyen kell állania, hol a két egymás ellenében ható erélykülzelék egymással egyenlő, vagy mint a 2) és 3) alatti egyenletek követelik, ott, hol:

$$PdD = ADdD,$$

és tehát

$$P = AD.$$

Miután pedig a 3) alatti egyenlet szerint egyszersmind

$$P = \frac{dE_p}{dD},$$

azért a P súly, melyet mint erőmértéket valamely adott rugalmassági feszély kijelölésére használunk, nem egyéb, mint azon potentialis erélynek a nyujtás hosszára vonatkozólag levezetett külzeléti hányadosa, melylyel a rugalmas test épen egy bizonyos megnyújtásakor el van látva; és minthogy ezen erély, valamint ennek külzeléke is a nyujtás kiterjedésében változik, azért a külzeléki hányadosnak értéke szerint a mértéksúlynak is változnia kell. *Ezen súly e szerint az erélynövedék és nyujtásnövedék közti viszonyt jelenti, mely a nyujtásnak épen bizonyos fokánál fennáll.* De e viszonyt nem is lehet már úgy, mint az erélynövedéket

$$E_{pz} = dE_p = PdD = ADdD$$

felületképen kijelölni, hanem kénytelenek vagyunk azt trigonometriai úton egy absolute semmi szélességgel nem biró, mathematikai vonalnak hosszával, mint

$$P = AD = tg\alpha.D$$

kifejezni.

De hogy a súly mikép kapja azon bizonyos jelentőséget, az a következő §-ban előadandó fejtegetésekből még világosabban ki fog tünni.

3. §.

Az előbbi §-ban felismert viszonyoknak átalánosítása és azoknak további következményei.

A munka, melyet a h magasságról lesülyedő P súly végezni képes, mint a tapasztalás tanítja, földi magasságok határain belül egyenes arányban áll az esés térhosszával; következőleg az ezen munkának megfelelő potentialis erély E_p szintén egyenes arányban áll h magassággal, tehát átalánosan

6) .... $E_p = Ph,$

következőleg még

7) .... $\frac{dE_p}{dh} = P.$

Miből kitűnik, hogy itten a P súlynak az a jelentősége, hogy az *saját erélyének*, melylyel helyzeténél fogva bir, az esés terére vonatkoztatott külzeléki hányadosa, vagyis azon viszony mely szerint az erély hatásának irányában eső végtelen kis helyváltozathoz képest maga az erély összeségében végtelen kis változást elszenved. E viszony egyszersmind kifejezi azt, mit különben az illető test *nehézségi erejének* nevezünk, és a mit ez utóbbi elnevezés alatt értenünk kell. Minthogy pedig a 6) alatti egyenlet folytán a külzelék és így ezzel a külzeléki hányados is, mint a h-nak esetleges értékétől független, meg nem változik, azért a P súlynak értéke azon egész magasságnak határain belül, melyen a potentialis erély a hely magasságával egyszerűen egyenes arányban áll, szintén állandó marad.

Ha az előbbi kifejezést m-mel osztva, azt a tömeg egységére vonatkoztatjuk, lesz:

$$\frac{dE_p}{mdh} = \frac{d(Ph)}{mdh} = \frac{P}{m} = g,$$

mely kifejezés, a tapasztalás tanusága szerint, megfelel a nehézségnek tulajdonított gyorsulásnak.

Minthogy mi azonban a helymagasságot az erélynek megfelelő Ph kifejezésében, felszálló irány szerint mérjük, az esési térnek dh külzelékét ellenben ellenkező irány szerint veszszük, és még minthogy az erély ellenkező irányban növekszik, mint a melyben az tényleg kifelé hatást gyakorol, azért, ha tevőleges jelűnek veszszük a h-t a Ph-ban, akkor nemleges jellel kell annak dh külzelékét ama kifejezésekben ellátnunk, minek folytán a gyorsulásra vonatkozó kifejezés lesz:

$$-\frac{dE_p}{mdh} = -\frac{d(Ph)}{mdh} = \frac{P}{m} = g$$

vagy

$$8a) \ldots . \frac{dE_p}{mdh} = \frac{d(Ph)}{mdh} = -\frac{P}{m} = -g.$$

E *gyorsulás,* mely nekünk mint a *nehézségi erőnek mértéke* szolgál, az előbbi egyenletek értelmében nem egyéb, mint azon erélynek az esési tér szerint levezetett külzeléki hányadosa, melylyel a súly helyzeténél fogva *tömegének egységében* bír. Levezetése szerint e gyorsulás, a már kiemelt körülmény folytán, ugyanazon geographiai szélességi fok alatt az esési tér földi kiterjedésében változatlan és képezi azon hatásnak mértékét, melyet a tömegegységnek a nehézségből származó potentialis erélye kifejteni képes.

E szerint úgy a gyorsúlásnak e kifejezése, valamint az ebből a nehézségi erő számára levezethető kifejezés:

$$8b) \ldots \frac{dE_p}{dh} = \frac{d(Ph)}{dh} = -P = -mg,$$

melyről már tudjuk, hogy az is, mint külzeléki hányados, szintén csak bizonyos viszonyt fejez ki, levezetésök értelmében mindketten tulajdonképen az erélyre vonatkoznak, és pedig az előbbi a testtömeg egységére eső erély részletre $\frac{Ph}{m}$, az utóbbi pedig az egész testnek Ph erélyére, és épen az általuk kifejezett viszonyban, mely az erélykülzeléke és az esési tér külzeléke közt fennáll, szolgáltatják az erély hatályosságának mértékét, az esési tér minden egyes pontjára nézve. Miből egyszersmind következik, hogy nem az erő az, mely csak két különböző tényező közt fennálló viszonyt fejez ki és ez által azokra vonatkozólag mértéket szolgáltathat, hanem tulajdonképen *az erély az, mi azon oknak tekintendő, mely megfelelőleg az esési térnek egymásután következő pontjain kifejthető hatályosságának, a mozgást megfelelő nagyságban és irányban létrehozza.* És a mozgás okának e kifejezésében már valóban be van foglalva, mint a mozgást együtt feltételező tényező, a tér is.

A 8b) alatti egyenlet útján eljutunk tovább az erélynövedéknek újabb kifejezéséhez:

$$dE_p = d(Ph) = -Pdh = -mgdh,$$

mely szerint az erély külzeléke is, minthogy az h-nak esetleges értékétől független, m pedig, valamint g állandók, az esési tér egész kiterjedésében szintén állandó.

Az előbbi egyenleteket egészelve, és figyelembe véve, hogy dh-nak egészletét a nehéz test felől a föld felé számítjuk, kapjuk a 6) alattival egyező egyenletet:

$$E_p = Ph = mgh,$$

melyből előbb kiindultunk.

Hogy ha a 3) alatti egyenletben, mely nekünk a rugalmassági feszélynek mértékét adta, P helyébe mg-t teszünk, akkor

$$\frac{dE_p}{dD} = AD = P = mg$$

egyenlet által kifejezve kapjuk a nehézségi erő mértékében az egyensúly pontján jelenlevő rugalmassági feszélynek erejét.

Az ezen erőnek megfelelő gyorsulás:

$$\frac{dE_p}{mdh} = \frac{AD}{m} = \frac{P}{m} = g$$

vagy m-t $\frac{P}{g}$ által helyettesítve

$$\frac{dE_p}{PdD} g = \frac{AD}{P} g = g,$$

miből kitetszik, hogy e gyorsulás, minden, a terhelő súly által egyensúlyozott nyújtásnál a nehézségi gyorsulással egyenlő és tehát úgy mint ez szintén állandó.

De ha a D' értékű nyújtásnál jelenlévő E'_p erélynek megfelelő erő az előbbi terhelő súlynak meghagyása mellett nincsen teljesen egyensúlyozva, akkor a megfeszűlt rugónak most φ-vel jelölt gyorsúlása lesz

$$\frac{dE'_p}{PdD'} g = -\frac{AD'}{P} g = -\varphi$$

vagy

$$9a) \ldots \frac{dE'_p}{mdD'} = -\frac{AD'}{m} = -\varphi,$$

hol φ megint nemleges jellel ellátandó, tekintettel arra, hogy a rugó gyorsúlása ellenkező irányban hat, mint a melyben növekedő nyújtásnál annak erélye növekszik, a dD' azért ellenkező előjelt kiván, mint a nyújtás.

A teher által nem egyensúlyozott feszélynek ereje végre

$$9b) \ldots \frac{dE'_p}{dD'} = -AD' = -m\varphi.$$

Ekképen a gyorsúlás és az erő számára a 9a) és 9b) alatti egyenletekben, vonatkozólag a rugalmasságra, analog kifejezéseket nyertünk, mint előbb a 8a) és 8b) alatti egyenletekben, vonatkozólag a nehézségre. De míg ez utóbbiaknak állandó érték felel meg, addig amazoknak értéke változik egyenes arányban a nyújtással.

E két példa után már, melyekben a potentialis erély a térnek mint az egymásra beható testek közti (r) távolságnak függvénye, átalában minden más esetben is, melyben az erély szintoly függvénynek felel meg, kifejezhetjük a gyorsúlást ekképen:

10a) ..... $\frac{d(E_p)}{mdr} = -\varphi,$

az erőt pedig:

10b) ..... $\frac{d(E_p)}{dr} = -m\varphi$

által, hol dr az illető testek közti r távolságra vonatkozik, melynek függvénye az erély.

Az utóbbi egyenletből egészelés folytán támad a következő:

$$E_p = -\int m\varphi dr$$

és minthogy átalában úgy E_p, valamint utána φ is r-nek függvénye, írhatjuk ez egyenletet még átalánosabban így:

$$F(r) = -\int f(r)dr,$$

mely kifejezés, mint ismeretes, az *erőfüggvénynek* egyenlete, mely magának az $f(r)$ erőnek a meghatározásához vezet, minthogy áll:

$$\frac{dF(r)}{dr} = -f(r).$$

S ez úton jutottunk el mi is, a nyújtás által előállított potentialis erélyből kiindúlva, a rugalmassági fészélynek megfelelő erőnek kifejezéséhez, melyet a 9b) alatti egyenletből:

$$\frac{dE_p}{dD'} = -AD' = -m\varphi,$$

mint $f(r)$ függvényt ismertünk fel; míg a 8b) alatti egyenlet:

$$\frac{dE_p}{dh} = -P = -mg$$

a nehézségi erőt a földi távolok határain belől a távolságtól függetlennek mutatta.

E különbség azonban nem lényeges, hanem csak másodlagos, és sem az egyik, sem a másik esetben ez erőknek sajátlagos viszonyai nem ellenkeznek a csillagászati észlelések alapján, Newton által a nehézségre vonatkozólag megállapított azon átalános törvénynyel, mely szerint a nehézségi erő oly központi erő, melynek intensitása valamely, a földön kívül álló nehéz pont irányában megfordított viszonyban áll a közte és a föld középpontja közt lévő távolságnak négyzetével; mert e törvény földi távolokra nézve is érvényesen fennáll, jóllehet mérsékelt magasságokra nézve az észlelés oly eredményekhez vezet, melyek szerint a föld által valamennyi nehéz testnek pontjaira gyakorolt erő épen oly állandó nagyságára, mint irányára nézve. Mert nyilvánvaló, hogy azon különbség, miszerint a nehézségi erő ott mint $f(r)=\varepsilon \frac{mm_{,}}{r^2}$ mutatkozik, itt ellenben mint r-től független, csak onnan ered, hogy míg ott az egymásra beható óriás tömegű égi testek közti távolság oly rengeteg messzeségben egymástól álló határok közt változik és nekünk épen ez által lehetségessé teszi az azzal járó változást is a nehézségi erőnek intenzitásában észrevenni és azt számitásunk alapjáúl felhasználni, addig a nehézségi erőnek változása a föld és az annyiszor kisebb tömegű földi testek közti távolságnak változásainál, megfelelőleg az előbbi esethez képest fölötte szük határok közé szorított esési magasságnak, oly eskély, hogy az felismerő képességünk határain kivül esik; minek következtében ama képességünk korlátoltsága mellett az esési magasságra szorítkozó távolság is, mint változatlanul megmaradó érték, azon függetlenül változó tényezők sorából teljesen kimarad, melyektől a nehézségi erőnek intensitása függ.

És épen úgy, mint központi erő és mint $\varepsilon \frac{mm_{,}}{r^2}$-nek megfelelő függvény hat az azon erélyviszonyokból származó erő is, melyek az összetartásban, a tapadásban, a halmazállapotokban, a rugalmasságban nyilvánúlnak, habár a rugalmassági feszélynek megfelelő erő a súlylyal biró pontok közti távolságnak függvényeképen, mint előbb láttuk, a távolsággal egyenes arányban állónak mutatkozik.

Ez arányosság ugyanis e pontok közt fennálló $\varepsilon \frac{mm_{,}}{r^2}$szerü kölcsönös hatásviszonynyal szintén összeegyeztethető, mihelyt tekintetbe veszszük azt, hogy a rugalmasságnak, valamint átalában a halmazállapotok értelmezésénél is kénytelenek vagyunk, a kölcsönösen egymásra beható elemi testrészecskék közt vonzó hatáson kivül még eltaszító hatást is fölvenni, mely ugyan szintén a távolságnak függvénye, de ennek a másodiknál magasabb hatványával áll megfordított viszonyban.

Habár sem ez arányt, sem az eltaszító erőnek jellegét és származását tüzetesebben nem ismerjük, nevezetesen azt sem dönthetjük el, vajjon nincsen-e az a melegnek megfelelő kinetikai erélyén kivül még valamely más ok által is föltételezve, ugy szabad lesz mégis a két egymással ellentétes erőtől származó Q eredményes erőre nézve szerzendő első tájékozás céljából, az eltaszító erőt a távolság harmadik hatványával megfordított viszonyban állónak tekinteni. Ha ezután a vonzásnak mértékegységét α-val, az eltaszításnak mértékegységét pedig ϱ-val jelöljük, akkor az eredményes erőt kifejezhetjük ekképen:

$$Q = mm_{,} \left\{ \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\varrho}{r^3} \right\},$$

hol $m_{,}$ és $m_{,}$ az egymásra beható tömecsek tömegét, r pedig azoknak egymástól való távolságát jelenti. Ha most egységül azon távolságot veszszük, melynél a két kapocs közé foglalt együtthatónak értéke leszáll 0-ra, melynél tehát $\alpha = \varrho$ és maga az eredményes Q is 0-val egyenlő, következőleg a test belső egyensúlyban van, akkor az előbbi kifejezés átváltozik a következőre:

$$Q = mm_{,}\alpha \left\{ \frac{1}{(1 \pm h)^2} - \frac{1}{(1 \pm h)^3} \right\},$$

vagyis

$$Q = mm_{,}\alpha \frac{\pm h}{(1 \pm h)^3},$$

hol h előjele szerint azon növedéket, illetőleg kisebbületet jelenti, melyet az egységűl vett távolság elszenvedett, úgy, hogy az eredményes erőnek teljes kifejezése $+h$-nál vonzó hatásnak, $-h$-nál ellenben eltaszító hatásnak felel meg, mely $-h = 1$-nél végtelen nagy lesz, míg $\pm h = 0$-nál, tehát $Q = 0$-nál az előbb említett belső egyensúly van jelen.

Kifejezhetjük azonban h-nak értékét még az egységűl választott távolságnak részeiben is, ekképen:

$$h = \frac{n}{N},$$

hol tekintettel arra, hogy az elemi részecskék közti távolságnak változása úgy a nyújtásnál, valamint az összenyomásnál legalább a rugalmasság határain belül szilárd testeknél, melyekre épen kérdésünk első sorban vonatkozik, csak fölötte csekély, n változó is mindenesetre szintén csak igen kicsiny, ellenben az értékében nem változó N igen nagy számot jelent. Ilyetén helyettesítés mellett az előbbi kifejezés átváltozik erre:

$$Q = \pm mm_{,}\alpha N^2 \left\{ \frac{1}{(N \pm n)^3} \right\} n.$$

E kifejezés már közvetlenűl mutatja, hogy a rugalmasságnak fölötte szűk határain belül úgy az összenyomásnál, valamint a megnyújtásnál, Q-nak értéke egyenes arányban áll n-nel; tehát a növekedő távolsággal nő, a kisebbedő távolsággal megkisebbűl, minthogy azon határok közt a kapcsok közzé foglalt törtnek értéke azon kifejezésben állandónak tekinthető. Mire nézve nem nehéz bizonyítékot is szerezni az által, hogy azon törtben n és N helyébe oly számokat iktatunk, minők megfelelnek a valóságnak, például vonatkozólag a kinyújtott aczélhuzalra, mely a legtágasabb rugalmassági határokkal bír és 1 négyszög mm.-nyi keresztmetmetszetnél, minden méter után 2 mm.-nyi meghosszabbodást elszenvedhet, melyre vonatkozólag tehát $N = 1000$ és $n = 2$ tehető. Ez esetben

$$\frac{1}{(N+n)^3}$$

törtnek értéke megváltozik, úgy, hogy míg az:

a belső egyensúlynál megfelel 0,00000000100-nak,

az leszáll a rugalmassági határon . 0,00000000099-re.

Azon eltérés e szerint, melyet a törtnek eme határszámok szerint változó értéke az eredményes erő és az elemi részecskéknek távolsága közti egyszerű arányviszonyban a rugalmas testek nyújtásánál okoz, oly csekély, hogy azt a kikerülhetlen észlelési hibák jóval felülmúlják, miért is kénytelenek vagyunk azt számításunk köréből kihagyni.

Látjuk tehát, hogy azon egyszerű arányosság, melyet a nyújtás nagysága és a rugalmassági feszélynek ereje közt észlelünk, semmiképen nem áll ellentétben a központi erőképen ható és a távolsággal $\left(\frac{1}{r^2}\right)$-nek megfelelő függvényes viszonyban álló nehézségi erő törvényével, melynek a nehéz testek elemi részecskéi egymás közt is szükségképen épen úgy mint az égi testek, alá vannak vetve. Csak figyelembe kell vennünk azt is, hogy a rugalmassági húzó hatásoknál közvetlenűl nem azon vonzó hatással van dolgunk, hanem oly erővel, mely annak és a vele egyidejűleg jelenlévő eltaszító hatásnak eredményese, és a melyre vonatkozólag az elemi részecskék közti távolságot nem számítjuk az absolut nulla-ponttól, hanem azon ponttól fogva, melyen a két ellentétes erőhatás egymást épen egyensúlyozza és a melynél a rugalmas test belső egyensúlyban van. A kiinduló pont e szerint, melytől a távolságot ez eredményes erő hatásaira vonatkozólag számítjuk, nem is állandóan ugyanaz, hanem még változatlanúl maradó vonzás mellett is változik, mihelyt bármi okból az eltaszító hatás nagyságában változást szenved.

Vonatkozólag a tekercsrugókra, a mennyiben ezek épen a rugalmassági húzóhatás tanulmányozásánál kiválóan alkalmas kisérleti tárgyúl szolgálnak, megjegyzendő azonban még, hogy ezeknél tulajdonképen a rugalmassági feszély nem nyújtás, hanem csavarodás által van föltételezve, minthogy a tekercsnek meghosszabbodását nem magának a huzalnak meghosszabbodása, hanem az egyes tekerődések egymástól való elhajlítása okozza; minek folytán maga a huzal is egész hosszában bizonyos csekély fokú csavarodást szenved el. Minthogy azonban ezen, a nyújtásnál támadó feszélynek megfelelőleg, a csavarás által föltételezett feszély, a tapasztalás tanúsága szerint, egyenes arányban áll a csavarodásnak megfelelő szögelhajlással és tulajdonképen az elemi részecskéknek olyféle elmozdítása által van föltételezve, melynél megint azoknak egymástóli távolsága, habár ferde irányban, a huzal hosszához, megnagyobbodik, azért a nyújtás által közvetlenűl eszközölt meghosszabbodásra vonatkozó előbbi észrevételeink érvényesek maradnak a tekercsrugóra nézve is.

Miután a rugalmassági feszélynél jelenlévő potentialis erély, valamint valamely fölemelt nehéz testnek potentialis erélye, mint a távolság függvénye $f(r)$, ép oly erőfüggvény, mint azon központi erőkhöz tartozó potentialis erély, melyek megfordított viszonyban állanak a kiindulási pontjaik közti távolságnak négyzetével, ennélfogva az összrendezők tengelyei szerint elbontott erőcomponensek számára szolgáló kifejezések is, mint:

$$11) \ldots \left\{ \begin{aligned} X &= -\frac{\delta F(r)}{\delta x} \\ Y &= -\frac{\delta F(r)}{\delta y} \\ Z &= -\frac{\delta F(r)}{\delta z} \end{aligned} \right.$$

érvényesek maradnak a rugalmas testek nyújtásánál, valamint a nehézségnél is. De, hogy ha ez utóbbi esetekben a z tengelyt párhuzamosan az erő irányával helyezzük, akkor lesz

$$X = o \text{ és } Y = o,$$

Z pedig lesz a rugalmas testek nyújtásánál:

$$Z = -\frac{\delta F(r)}{\delta z} = -\frac{\delta E'_p}{dD'} = AD' = m\varphi,$$

a nehézségnél:

$$Z = -\frac{\delta F(r)}{\delta z} = -\frac{\delta E_p}{\delta h} = mg = P.$$

Ez utóbbi kifejezés az, mely mint *a nehézség által kifejezett mérték,* másféle erélyből származó erők nagyságának meghatározására is szolgál, és mely azon tulajdonságánál fogva, hogy az minden, egyenlő geographiai szélességi fok alatt álló helyen, a földi magasság egész kiterjedésében állandóan ugyanaz marad, arra teljesen alkalmas is.

De e kifejezés, a mint már előbb láttuk, nem jelent egyebet, mint az erélynek az esési tér szerint levezetett külzeléki hányadosát, vonatkozólag a nehézségnek alávetett bizonyos testre, mely ez értelemben *súly*-nak neveztetik, és mely, midőn másféle erőhatásokat egyensúlyban tart, megint csak az illető erélynek a tér szerint levezetett azon bizonyos külzeléki hányadosát jelenti, mely annak erőhatása irányában és a súly által fentartott egyensúly helyén megfelel.

Mindezekből látjuk, hogy az erőfogalom semmi egyebet nem foglal magában és nem fejez ki, mint a viszonyt az erély külzeléke és a térnek azon irány szerint vett külzeléke közt, melyben bizonyos erély hat. Ezen, a Newton-féle causa mathematicanak megfelelő viszony bármely más ily analog viszonynak mértékében kifejezhető, de nem szabad, hogy az e viszonynak megjelölésére alkalmazott szó: *erő* alatt olyasvalamit képzeljünk, mi egyéni önállósággal bír és valósággal azon causa phisicanak szerepét viselné, mely tulajdonképen az erélyben fekszik, de a melynek lényege előttünk mindig rejtve marad. Habár azonban ez által nyomasztó öntudattal érezzük is meg felismerő képességünknek szűk és áthághatlan korlátait, úgy mégis másfelől, ha folyton emlékezetünkbe bevésve tartjuk azon, egyedűl helyes erőfogalmat, akkor többé nem vagyunk kitéve azon tévútra vezető balfogalmaknak, melyekre az a priori alkotott erőfogalom oly gyakran alkalmat ad, midőn az mint a mozgás valóságos okának kifejezése tekintetik és épen azért az elméleti mechanicának levezetéseinél is többnyire mint kiindúló pont szolgál.

A gyorsúlásnak 10a) alatti kifejezése:

$$\frac{dE_p}{mdr} = -\varphi$$

az ismeretes két viszony folytán, u. m.

$$v = \frac{dr}{dt} \text{ és } \varphi = \frac{dv}{dt}$$

hol v a sebességet és t az időt jelenti, adja a következőt:

$$\frac{dE_p}{mdr} = -\frac{dv}{dt},$$

s így ezt is:

$$\frac{dE_p}{m} = -\frac{dr}{dt}dv = -vdv,$$

miből következik:

$$E_p = -m\int vdv = -{}^1/_2\, mv^2 + C,$$

hol C az egészleti állandót jelenti. Ha már most E_{po}-val jelöljük a mozgás kiindulási helyén jelen volt potentialis erélyt, v_o-val az ottani sebességet, E_p-vel pedig a mozgás későbbi helyén még jelenlevő potentialis erélyt és v-vel az itteni sebességet, úgy akkor kapjuk a következő egyenleteket:

12) . . . . $E_{po} - E_p = {}^1/_2 mv^2 - {}^1/_2 mv_o{}^2 = E_k - E_{ko}$;

hol E_{ko} és E_k a kezdeti és a későbbi helyzetbeli kinetikai erélyt jelenti, mely kifejezést eleven erő helyett ezután is mindig használni fogunk.

A gyorsulásnak 10a) alatti kifejezése útján eljutunk még a következő kifejezéshez is:

$$dE_p = -m\varphi dr,$$

melyben $m\varphi$ az erőt jelenti; ha tehát ezt P-vel jelöljük, akkor szintén áll:

$$dE_p = -Pdr,$$

mely egyenletnek mindkét oldalát $cos\mu$-vel szorozva, kapjuk utána ezt:

$$cos\mu dE_p = -Pcos\mu dr.$$

A jobboldalon álló kifejezést, mint az út irányába eső erőrészletnek szorzatát, a végtelen kis dr úthoszszal, az elméleti mechanika — mint tudva van — *elemi munkának* nevezi, *mely* — mint e levezetés épen mutatja — *nem jelent egyebet, mint az erély külzelékének az út hosszába eső részletét.*

Az összrendezők tengelyei szerint szétbontva, kifejezhetjük az elemi munkát még így is:

$$Pcos\mu dr = X_t dx + Y_t dy + Z_t dz,$$

s ha az erő és a mozgás iránya közti μ szög, azon irányok öszszeesésekor, elenyészik, akkor még áll

$$Pdr = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Helyettesítve itt az erőcomponenseket a 11) alatti kifejezéseikkel, kapjuk a következő egyenletet:

$$13)\ Xdx + Ydy + Zdz = -\left\{\frac{\delta F(r)}{\delta x}dx + \frac{\delta F(r)}{\delta y}dy + \frac{\delta F(r)}{\delta z}dz\right\}$$

s minthogy maga az $F(r)$ egyedül csak az x, y, z összrendezőknek függvénye, ennélfogva a jobboldali kapcsok közt álló kifejezés megfelel $F(r)$ teljes külzelékének; következőleg áll szintén

$$13a)\ \int\left[Xdx + Ydy + Zdz\right] = -\int dF(r) = -F(r) + C,$$

hol C megint az egészleti állandót jelenti. Ha tehát vonatkozólag a kezdeti helyzetre $F(r_o)$-t, a véghelyzetre $F(r)$-t alkalmazunk, úgy akkor az egyik helytől a másik helyig tartott mozgás alatt valamennyi erő által teljesített munka lesz:

$$14) \ldots\ldots L = F(r_o) - F(r) = E_{po} - E_p;$$

e szerint tehát azon munka megfelel a potentialis erély azalatti kisebbedésének.

De a 12) és 14) alatti egyenletekből következik még az is, hogy

14a) .... $E_{po} - E_p = L = E_k - E_{ko}$,

azaz, hogy a kinetikai erélynek növekedése, a rendszer bármely mozgásánál, egyenlő az erők által ez alatt teljesített munkával.

Minthogy áll:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \left[X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} \right] dt$$

azért a 13) és 13a) alatti egyenletek folytán áll szintén még:

$$L = \int_{to}^{t} \left[X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} \right] dt = - \int_{to}^{t} \frac{dF(r)}{dt} dt,$$

következőleg megint:

$$L = F(r_o) - F(r) = E_k - E_{ko};$$

miből látható, hogy a rendszerben bármely $(t - t_o)$ időköz alatt fellépő kinetikai erélynövedék egyenlő az erők által ugyanazon időközben teljesített munkával.

Minthogy:

$$F(r_o) - F(r) = E_{po} - E_p$$

kifejezésnek értéke egyedűl csak a kezdeti és végi helyzet összrendezőitől függ, úgy megfelelőleg a 14a) alatti egyenletnek, a rendszernek kinetikai erélynövedéke az egyik helyzetből a másik helyzetbe való átmenetele alatt, valamint egyátalában az ez alatt teljesített munka is szintén egyedül csak e helyzeteknek összrendezőitől függő, bárminő volt légyen a közbeeső átmenet úgy útjára, valamint idejére nézve.

A 12) alatti egyenletből következik

$$E_{po} + E_{ko} = E_p + E_k$$

is, és minthogy e kifejezés az időtől független és a mozgás bármely határai mellett érvényes, ennélfogva a potentialis és kinetikai erélynek összege a mozgás alatt nem változik meg és a mozgás végén épen oly nagy, mint annak kezdeténél volt; miből tovább az is következik, hogy ha kezdetben $E_{ko} = 0$, a mozgás végén pedig $E_p = 0$, akkor

$$E_{po} = E_k,$$

azaz, hogy akkor a mozgás véghelyén jelenlévő kinetikai erély egyenlő a kezdetben jelen volt potentialis erélylyel.

Az eddigi átalános fejtegetések folytán megszereztük az alapot azon munkának elemzésére, melyet a megnyújtott rugalmas test húzó hatása által teljesíteni képes.

4. §.
A nyújtásból származó rugalmassági húzó hatás által teljesíthető munka.

Minden nehéz test leesése közben valamely magaslatról, ez utóbbitól függő veszteséget szenved potentialis erélyében, de e veszteségnek megfelelő munkát is teljesít ez alatt. E munka a test szabad esésénél azon sebesség előállításában áll, melylyel az önmagát felruházza és a mely által kinetikai erélyét megszerzi, más esetben pedig az útközben ellenszegűlő akadályok legyőzésében áll. Ez utóbbiak nagyságától függ akkor, hogy vajjon és mennyi kinetikai erélyt bír a test még a maga számára is megtartani, és tehát, hogy minő sebességgel bír megérkezésekor pályájának végén.

Ha ily test mint terhelő súly valamely felakasztott, de még semmiképen meg nem nyújtott tekercsrugónak lecsüngő végébe beakasztatik és szabadon bocsáttatik, úgy, hogy az erre teljes hatását gyakorolhatja, akkor ezt megnyújtva, ezen fog saját potentialis erélyének vesztesége mellett munkát teljesíteni, a rugó pedig nyújtásával arányban potentialis erélyt fog nyerni.

Ámde tudjuk már, hogy a potentialis erély, melyet a rugó azon statikai határig nyer, melyen feszélye a terhelő súlylyal egyensúlyban áll, csak felével ($^1/_2PD$) azon (PD) potentialis erélynek egyenlő, melyet az e határig lesülyedő súly maga elveszített, hogy tehát elvesztett potentialis erélyének egyenlő másik felét, mint kinetikai erélyt, a súly még magának megtartotta.

Ennek folytán, mint már előbb következtettük, azon határon a súly még további munkára képesített, mely abban áll, hogy sülyedését folytatva, a rugót még az egyensúly határán túl megnyújtja. Mert jóllehet, hogy erre a súly kinetikai erély nélkül nem volna képesítve, a mennyiben azon határon túl a rugó feszélyének megfelelő külzeléki hányados: $\frac{dE_{pr}}{dD}$ már nagyobb, mint $P = \frac{dE_{ps}}{dD}$, (E_{pr} alatt a rugónak, E_{ps} alatt a súlynak potentialis erélyét értve); vagy más szóval, mert azon statikai határon túl a rugó erélyének külzeléke nagyobb, mint a nyújtásnak ugyanazon (dD) külzelékére vonatkoztatott erélynek külzeléke, melyet ez alatt maga a terhelő súly elveszteni képes; úgy mégis képes a súly most kinetikai erélyénél fogva és mialatt folytatott lesülyedése közben potentialis erélyében újabb veszteséget szenved, a rugót azon határig megnyújtani, a meddig az a rugónak folytonosan növekedő ellenállása folytán mindez erély részleteit el nem vesztette. De miután ez utóbbi határponton a terhelő súly kinetikai erélylyel többé nem bír, maga pedig szintén kisebb, mint azon súly, mely a rugó feszélyének egyensúlyozására, a nyújtásnak ama magasabb fokán szükségeltetnék, azért ott a nyújtó súlynak munkálkodása is megszűnik és most ellenkezőleg, a túlsúlyban levő rugóra fog a sor következni, hogy az eddig megszerzett potentialis erélyénél fogva maga emelve a terhelő súlyt, ezen munkát teljesítsen. Könnyen belátható pedig, hogy ez emelés szintén nem fog csak a terhelő súlynak megfelelő statikai határpontig, hanem ezen túl még tovább kiterjedni. Mert mint előbb a rugónak feszélye csak az által növekedhetett, hogy a még tovább sülyedő súly az e közben elvesztett potentialis erélyén kivül a statikai határpontig összegyűjtött, kinetikai erélyét is a rugónak fokozódó kifeszítésére felhasználta; szintúgy képes lesz most a kifeszűlt rugóból túlmértékben felszabadúló erély nemcsak fölemelni a súlyt az annak megfelelő statikai határpontig, hanem még kinetikai erélylyel is ellátni, melynél fogva, valamint azon erély segítségével, melyet a még feszélylyel biró rugó saját erélykészletéből a súlyra átruház, ez tovább még akkor is emelkedhetik, midőn már az utóbbi erélyjárulék egymagában nem volna képes a súlynak emelését tovább eszközölni.

Ekkép az azonnal teljes súlylyal megterhelt tekercsrugó a megnyújtásának egyensúlyhatárán át le- és felszálló lengésekbe fog tétetni.

E lengéseknek minden viszonya szerinti elemzésével kell, hogy most tüzetesen foglalkozzunk.

a) A lengés tágassága.

Azon esetből indulunk ki, hogy a $P_{\prime\prime}$ súlylyal megterhelt tekercsrugó, mint a 2-dik ábra mutatja, O-tól $d_{\prime\prime}$-ig, mint az azon súlynak megfelelő statikai határpontig, megnyújtatott és ennek folytán a $\frac{1}{2}P_{\prime\prime}D_{\prime\prime}$-nek megfelelő potentialis erélyt nyerte volna. Ha most teljes nyugalomnál a súlynak egy része eltávolíttatik, akkor a rugó a maradék P súlylyal fel fog szökni, tegyük fel, $d_{\prime}$ pontig, úgy, hogy most a rugónak nyújtása megfelel $D_{\prime}$-nek, potentialis erélye pedig $\frac{1}{2}P_{\prime}D_{\prime}$-nek. A rugó részéről elvesztett erély által tehát P súly $d_{\prime\prime}$-től $d_{\prime}$-ig lett emelve, minek következtében potentialis erélye $P(D_{\prime\prime}-D_{\prime})$-vel növekedett. Következőleg áll:

a) . . . $\frac{1}{2}P_{\prime\prime}D_{\prime\prime} - \frac{1}{2}P_{\prime}D_{\prime} = P(D_{\prime\prime} - D_{\prime})$;

de minthogy a 3) alatti egyenlet folytán

$$\frac{P_{\prime}}{P_{\prime\prime}} = \frac{AD_{\prime}}{AD_{\prime\prime}}$$

tehát

$$P_{\prime} = P_{\prime\prime}\frac{D_{\prime}}{D_{\prime\prime}},$$

azért ez utóbbi kifejezést használva $P_{\prime}$ helyett az a) alatti egyenletben, ez átváltozik a következőre:

$$\frac{1}{2}\left[P_{\prime\prime}D_{\prime\prime} - P_{\prime\prime}\frac{D_{\prime}^2}{D_{\prime\prime}}\right] = P(D_{\prime\prime} - D_{\prime}),$$

minek folytán lesz:

$$\frac{1}{2}\frac{P_{\prime\prime}}{D_{\prime\prime}}(D_{\prime\prime} + D_{\prime}) = P;$$

ha még a lengésnek teljes hosszát $D_{\prime\prime} - D_{\prime} = a$-val jelöljük, úgy akkor ez utóbbinak kifejezéseképen az utóbbi egyenletből ezt nyerjük:

15) . . . . $a = 2\frac{D_{\prime\prime}}{P_{\prime\prime}}(P_{\prime\prime} - P)$,

és minthogy $P_{\prime\prime} = AD_{\prime\prime}$, áll még:

15a) . . . . $a = \frac{2(P_{\prime\prime} - P)}{A}$.

vagy, mert $P = AD$, és $P_{\prime\prime} - AD_{\prime\prime}$

15b) .... $a = 2(D_{\prime\prime} - D)$,

és miután előbbi jelzésünk szerint $a = D_{\prime\prime} - D_{\prime}$, következik, hogy

$$D = \frac{D_{\prime\prime} + D_{\prime}}{2}.$$

Minthogy pedig D azon statikai nyújtásnak hosszát jelenti, melyet a rugón visszamaradt P terhelő súly egyensúlyozni képes és a mely, az utolsó egyenlet szerint, ama hosszak középértékének felel meg, melyeket a nyújtás a lengési szakasznak határpontjain épen elér, kitetszik ebből, hogy e határpontok két oldalt a P súly által feltételezett nyújtásnak egyensúlypontjától egyenlő távolságban állanak, következőleg, hogy $^1/_2 a$ a lengés tágasságának (amplitudo) felel meg, mely azon egyensúly határpontjának két oldalán egyenlőn nagy.

A 15a) és 15b) alatti egyenletekből következik még az is, hogy a lengés tágassága egyenes arányban áll a túlnyújtással, melyet a tekercsrugó a visszamaradt terhelő súlynak megfelelő egyensúlyponton túl szenvedett; továbbá, hogy a lengés tágassága egyenlő kezdeti nyújtás mellett annál nagyobb, minél kisebb az állandóan terhelő súly; ellenben hogy az megfordított arányban áll A együtthatóval és tehát az ebben befoglalt rugalmassági együtthatóval.

Térjünk most még azon esetre is át, melyben a még meg nem nyújtott rugó azonnal a maradandó P súlylyal terheltetik meg; úgy ez esetben a súly, mialatt a neki megfelelő statikai határpontig a rugót megnyújtja, egyszersmind $^1/_2 PD$-vel egyenlő kinetikai erélyt nyer és mialatt ennek folytán r szakaszszal még lejebb sülyed, ezen úgy ama kinetikai erélyt, valamint azon felül még saját erélykészletéből Pr-nek megfelelő erélyrészletet is el fogja veszteni; a rugónak potentialis erélye ellenben ugyanazon r szakasz alatt $^1/_2 PD$-től fel fog emelkedni $^1/_2 P_r(D + r)$ értékig, P_r alatt értve itt azon terhelő súlyt, mely $(D + r)$ hosszuságu statikai nyújtás egyensúlyozására szükségeltetnék.

Ennek folytán áll:

$$^1/_2 PD + Pr = {}^1/_2 P_r(D + r) - {}^1/_2 PD,$$

és minthogy

$$P_r = \frac{P}{D}(D + r),$$

úgy áll szintén

$$PD + Pr = {}^1/_2\frac{P}{D}(D + r)^2,$$

miből következik, hogy

$$D = r.$$

A túlnyújtás tehát, melyet a rugó a terhelő súlynak megfelelő nyújtásnak statikai határpontjától fogva, a lengésnek alsó határáig elszenved, épen oly nagy, mint ama statikai nyújtás maga. A lengés teljes hossza O-tól a nyújtás $2D$-vel egyenlő hoszszáig ér; a lengés középpontja összeesik a terhelő súly egyensúly-pontjával, r tehát megfelel a lengés tágasságának.

Végre, ha a súlylyal meg nem terhelt tekercsrugó azonnal $D_{\prime\prime}$ hosszuságig megnyujtatik és azután magára hagyatnék, akkor a 15a) alatti egyenlet értelmében, ha abban, eltekintve a rugónak saját súlyától, $P = O$-vel vétetik, a lengés teljes hossza fog lenni:

$$a = 2\frac{P_{\prime\prime}}{A},$$

de miután $P_{\prime\prime} = AD_{\prime\prime}$, áll még

$$a = 2D_{\prime\prime}$$

következőleg

$$D_{\prime\prime} = {}^1/_2 a.$$

A kezdeti nyújtás tehát megfelel akkor a lengés tágasságának és a lengési körnek közepe összeesik a meg nem nyújtott rugó végének nyugalmi pontjával. Ez eset azonban csak az olyképen tekert rugónál lehetséges, mely nyugalmi helyzetének mindkét oldala felé, a lengést egyenlően megengedi és a melynél a rugalmassági együttható úgy vonatkozólag a nyújtásra, mint az összenyomásra teljesen egyenlő. Ugyane feltétel fennáll valamely kifeszített egyenes huzalra nézve is.

De e feltétel még azon esetre nézve is fennáll, melyben a megterhelt tekercsrugónak $(D_{\prime\prime} - D)$ túlnyujtása nagyobb, mint a megmaradó teher által követelt D statikai nyújtás, hol tehát a súly a rugó visszaszökésekor a nyújtás O pontján túl fölemeltetnék. Mert ha azon rugalmassági együtthatók egyenlőtlenek lennének, jelesen pedig ha az összenyomásra vonatkozó együttható nagyobb lenne, mint a nyújtásra vonatkozó, akkor a lengésnek az egyensúlyozott helyzet fölött álló szakasza szükségképen rövidebb lenne, mint a másik, ama határ alá eső szakasza.

b) Az erélyek felváltogatása lengésközben.

Vizsgáljuk most ama veszteséget, melyet a P súlylyal megterhelt és azon fölül még $D_{\prime\prime}$ összes értékig túlfeszített tekercsrugó potentialis erélyében elszenved, mialatt szabadon bocsátva, legelőbb a lengésnek alsó $d_{\prime\prime}$ határától d-ig mint a tekercsnek megfelelő egyensúly határáig emelkedik, úgy hogy nyújtásának hossza $D_{\prime\prime}$-tól D-re leszáll; azután pedig d-től tovább $d_{\prime}$-ig mint a lengésnek felső határáig felszállva, nyújtásának hossza is még tovább D-től $D_{\prime}$-ig kisebbedik.

Az a-val jelölt teljes lengési útköznek alsó felére eső potentialis erélybeli veszteségét, melyet V_a-val jelölünk, kifejezhetjük, ha tekintetbe veszszük azt, hogy:

$$D_{\prime\prime} = D_{\prime} + a = D_{\prime} + {}^1/_2 a + {}^1/_2 a,$$

tehát hogy

$$D_{\prime\prime} - {}^1/_2 a = D_{\prime} + {}^1/_2 a,$$

és ha a rugó által a lengés alsó határán bírt potentialis erélyt ${}^1/_2 P_{\prime\prime} D_{\prime\prime}$-vel, ugyanannak erélyét a-nak középpontján pedig ${}^1/_2 P(D_{\prime\prime} - {}^1/_2 a)$-val jelöljük, ekképen:

$$V_a = {}^1/_2 P_{\prime\prime} D - {}^1/_2 P(D - {}^1/_2 a),$$

vagy az a számára a 15) alatti egyenletben levezetett kifejezést használva,

$$V_a = {}^1/_2 \left[P_{\prime\prime} D_{\prime\prime} - P \left\{ D_{\prime\prime} - \frac{D_{\prime\prime}}{P_{\prime\prime}} (P_{\prime\prime} - P) \right\} \right];$$

miből következik, hogy

$$V_a = {}^1/_2 \frac{D_{\prime\prime}}{P_{\prime\prime}} (P_{\prime\prime}{}^2 - P^2);$$

minthogy pedig

$$\frac{D_{\prime\prime}}{P_{\prime\prime}} = \frac{1}{A}, \quad P_{\prime\prime} = A D_{\prime\prime}, \quad P = A D,$$

lesz ennélfogva:

16) ... $V_a = \frac{P_{\prime\prime}^2 - P^2}{2A} = \frac{A(D_{\prime\prime}^2 - D^2)}{2}$.

Ha a rugónak e veszteségéből levonjuk azon növedéket, melyet a rugó által $(D_{\prime\prime} - D)$ magasságban emelt P súly potentialis erélyében nyert, úgy akkor a rugónak eredeti potentialis erélyéből fenmaradt maradék, mint a kinetikai erélyre átváltozott K_a részlet fog lenni:

$$K_a = \frac{A(D^2_{\prime\prime} - D^2)}{2} - P(D_{\prime\prime} - D)$$

vagy P helyébe AD-t téve:

16a) .... $K_a = {}^1/_2 A(D_{\prime\prime} - D)^2$.

A rugónak további V_f erélyveszteségét, mialatt az lengését folytatva, az egyensúlynak megfelelő d ponttól a lengésnek felső $d_{\prime}$ határáig felszáll, kifejezhetjük ekképen:

16b) .... $V_f = {}^1/_2 PD - {}^1/_2 P_o D_{\prime\prime}$

${}^1/_2 PD$ alatt a rugónak potentialis erélyét az egyensúly magaslatán, ${}^1/_2 P_o D_{\prime}$ alatt pedig annak erélyét — a lengés felső határán, értve.

Hogy most a két V_a és V_f veszteséget összehasonlíthassuk, szükséges, hogy az utóbbi egyenletben a következő helyettesítéseket alkalmazzuk, u. m.

$$D = \frac{D_{\prime\prime}}{P_{\prime\prime}} P = \frac{P}{A},$$

$$D_{\prime} = D_{\prime\prime} - a = D_{\prime\prime} - 2\frac{D_{\prime\prime}}{P_{\prime\prime}}(P_{\prime\prime} - P),$$

$$P_o = \frac{P_{\prime\prime}}{D_{\prime\prime}} D_{\prime} = 2P - P_{\prime\prime},$$

minek folytán lesz:

16c) ..... $V_f = \frac{(3P - P_{\prime\prime})(P_{\prime\prime} - P)}{2A}$

vagy egyszerűbben, ha a 16b) alatti egyenletben P helyett AD-t, és P_o helyett $AD_{\prime}$-t alkalmazunk:

16d) ..... $V_f = \frac{A(D^2 - D_{\prime}^2)}{2}$

Legelébb is a rugó potentialis erélyének e veszteségét összehasonlitva a munkával, melyet az teljesített, midőn P súlyt d-től $d_{,}$-ig fölemelte, kapjuk a kettő közti külömbözet számára a 16b) alatti egyenlet folytán a következő kifejezést:

$$P(D-D_{,})-{}^{1}/_{2}(PD-P_{o}D_{,}),$$

mely az előbbi helyettesítések alkalmazása mellett, a következőre változik át:

$$\frac{(P_{''}-P)^2}{2A} \text{ vagy } {}^{1}/_{2}A(D_{''}-D)^2.$$

E kifejezés teljesen azonos lévén azon kinetikai erélynek 16a) alatti kifejezésével, melylyel a terhével visszaszökő tekercs rugó az egyensúly magaslatán bír, kitetszik abból, hogy ama kinetikai erély a rugó potentialis erélyének még további kisebbedésével együtt a kijelölt munka teljesítésére épen elégséges.

Ha most még összehasonlítjuk a rugó által a lengés alsó szakaszában elszenvedett V_{a} erélyveszteséget, a felső szakaszban elszenvedett V_{f} veszteségével, úgy a megfelelő két értéket egymásból levonva, maradékképen kapunk:

$$V_{a}-V_{f}=\frac{P_{''}^2-P^2}{2A}-\frac{(3P-P_{''})\,(P_{''}-P)}{2A}$$

$$=\frac{(P_{''}-P)^2}{A}=A(D_{''}-D)^2,$$

mely, mint a K_{a}-nak 16a) alatti kifejezése mutatja, megfelel az egyensúly határpontján jelenlévő kinetikai erély kettősen vett értékének.

Hogy végre különös esetképen az egyensúly magaslatán jelenlevő K_{a} kinetikai erély egyenlő lehessen azon V_{f} erélyveszteségnek, melyet a rugó lengésének felső szakaszaiban elszenved, hogy tehát álljon:

$$\frac{(P_{''}-P)^2}{2A}=\frac{(3P-P_{''})\,(P_{''}-P)}{2A},$$

arra szükséges, hogy legyen:

$$2P=P_{''} \text{ vagy } 2D=D_{''},$$

azaz szükséges, hogy a rugónak meghosszabbítása túlnyújtáskor egyenlő legyen azon meghosszabbítás kétszeres értékével, mely mint statikai nyújtás, az állandóan megterhelő súlynak megfelel.

Az itten fejtegetett erélyviszonyoknak tanulságos képét szolgáltatja a 3-dik ábra.

oD egyenes mint a rendezők tengelye, a nyújtásra vonatkozik, mely *o*-tól lefelé tevőleges, attól fölfelé nemleges értelemben veendő; *op* pedig mint metszéki tengely a *o*-tól fogva növekedő, nevezetesen a P'', P és P'-vel jelölt súlyok számára szolgál; *os* egyenes végre a nyújtásnak vonalát képviseli, midőn a nyújtás együtthatója $A = \text{tang. } \alpha$-val. Földteszszük, hogy a meg nem nyújtott állapotban *o*-ig leérő tekercs-rugó P súlylyal megterhelve, *od*-ig megnyúlt, ezután pedig e nyújtással egyenlő hosszúságban még tovább $d_{,,}$-ig megnyujtatott, a meddig akkor is meghosszabbodnék, ha *o* helyzetében azonnal a teljes P súlylyal megterheltetnék. Magára hagyatva, ezen rugó súlyával együtt lengésbe fog átmenni, melynek tágassága egyfelől $d_{,,}$-től d-ig, másfelől d-től o-ig fog kiterjedni. A munka, melyet a rugó $d_{,,}$-től o-ig terjedő felszökésekor az általa emelt súlyon teljesít, megfelel $oPPd_{,,}$ négyszögnek; míg ugyanannak összes potentialis erélye, mely a lengés alsó $d_{,,}$ határán $od_{,,}s$ háromszögnek felel meg, a lengés középpontján d-nél már odG háromszög terjedelmére leszáll, a lengés felső határpontján, o-nál pedig elenyészik. A rugó által elszenvedett V_{u} erélyveszteség a lengés alsó szakaszában megfelel tehát $d_{,,}dGs$ területnek, a lengés felső szakaszában pedig V_{f} veszteség doG háromszög területének. A kettő közti $V_{u} - V_{f}$ különbség egyenlő $dd_{,,}PG$ négyszögnek területével, mely megint megfelel a súly emelésére a lengés alsó szakaszában szükségelt erélynek. Az e szakaszban a munkára el nem használt GPs háromszögnek megfelelő részlet a rúgónak eredeti potentialis erélyéből nem egyéb, mint a lengés közepéig létrejött kinetikai erély. melynek kétszeres értéke $V_{u} - V_{f}$ különbséggel egyenlő, Végre még az itt fenforgó különös esetben a létrejött kinetikai erélynek megfelelő GPs terület egyenlő egyszersmind a lengés felső szakaszára eső V_{f} erélyveszteséggel.

Ez utóbbi viszonynak kivételével, valamennyi többi erélyviszony, a mint az ábra is mutatja, akkor is ugyanaz marad midőn valamely más, mint például P'' vagy P' súlynak behatása alatt a megfelelő statikai nyújtásnak határai ϑ-be, illetőleg δ-be, a lengésnek határai pedig $\vartheta_{,,}$-be, illetőleg $\delta_{,,}$-be áthelyeződnek, mi mellett mindazon esetben, melyben a túlnyújtás nagyobb, mint a megmaradt terhelő súlynak megfelelő statikai nyújtás, a lengésnek felső határa is már o fölött áll, minek folytán a lengés e szakaszán a megelőző nyújtást részben összenyomás váltja fel, mint például azon az ábrán kijelölt esetben, midőn P'' terhelő súly mellett és a lengésnek akkor ϑ-ben fekvő középpontja mellett, a túlnyújtás $\vartheta_{,,}$ helyett, ennél tovább $d_{,,}$-ig ér, minek következtében a lengésnek felső határa $\vartheta_{,}$-nél állana.

Végre még kitűnik az ábrából az is, hogy a lengés közepéig létrejött K_a kinetikai erélynek területe és a rugó által a lengés felső szakaszában elszenvedett V_f potentialis erélyveszteségnek területe együttvéve egyenlő az ugyane szakasz alatt a súlynak emelésében teljesített munkának területével.

c) A sebességnek legnagyobb értéke lengésközben.

Ismervén azon kinetikai erélynek értékét, melylyel a terhelő súlylyal lengő tekercsrugó épen akkor bír, midőn fel- vagy leszállva a lengés középpontján, mely, mint tudjuk, a nyújtásnak statikai határával összeesik, áthalad, képesek vagyunk az e helyen jelenlévő sebességet is meghatározni. A 16a) alatti egyenlet szerint ugyanis azon kinetikai erély kifejezhető ekképen:

$$ {}^1/_2 A(D_{,,} - D)^2 = {}^1/_2 m v_m^2, $$

értve itt v_m alatt a legnagyobb sebességet, m alatt pedig a terhelő P súlynak tömegét, melybe a rugónak saját tömege is befoglalandó, de a melytől egyelőre eltekintünk.

Az előbbi egyenletből származik

$$ v_m = (D_{,,} - D) \sqrt{g \frac{A}{P}}, $$

vagy mert $D_{,,} - D = {}^1/_2 a = r$, áll még:

$$ 17) \ldots\ldots v_m = r \sqrt{g \frac{A}{P}}, $$

értve r alatt a lengésnek tágasságát — (amplitudo) —, g alatt a nehézségi gyorsulást, A alatt pedig a már előbb is $\left(\frac{eq}{l}\right)$ helyett használt együtthatót.

E szerint tehát a legnagyobb sebesség, melylyel az állandóan megterhelt és annak utána még túlnyújtott tekercsrugó lengésének középpontján áthalad, egyenes arányban áll a túlnyújtás hosszával és A együtthatónak második gyökével, ellenben megfordított arányban az állandó tehernek második gyökével.

Azon esetben pedig, melyben a lengés az által idéztetett elő, hogy a még meg nem nyújtott tekercsrugó azonnal a teljes súlylyal lett megterhelve, mely esetben, mint tudjuk, $D_{,,} = 2D$, tehát $D_{,,} - D = D$; akkor a 17) alatti egyenlet, D-nek $\frac{P}{A}$ általi helyettesítése után átváltozik a következőre:

$$17a) \ldots\ldots V_m = \sqrt{g\frac{P}{A}},$$

mely szerint tehát a sebesség maximuma a P súlynak második gyökével egyenes, az A együtthatónak szintén ily gyökével pedig megfordított arányban áll.

d) A megterhelt tekercsrugók vagy rugalmas huzalok lengésének időbeli lefolyása.

Jóllehet a lengés átalános törvényeire vonatkozó alapegyenletek érvényesek a súlyokkal megterhelt tekercsrugónak, a rugalmas huzalok, átalában hasábos alakkal biró rugalmas testeknek itten taglalás alatt álló lengéseire nézve is, s azért ez esetekre vonatkozólag külön levezetést nem szükségelnének, mégsem akarjuk itten azoknak, az eddigi alapon könnyen eszközölhető levezetését mellőzni, azért, mert e levezetés folytán olyféle viszonyoknak kifejezéséhez is eljutunk, melyek részint a myo-graphiumoknál használt jelző emeltyűkre is kiterjednek és már ezért az izomélettan körében nagy jelentőséggel birnak, részint pedig analog, de mint alkalmunk lesz egy későbbi értekezésben kimutatni, még sem azonos módon az egyszerű izomrángásnál is előfordúlnak és azért annál is inkább teljes földerítést igényelnek, minthogy már akárhányszor lett az izomnak rángáskor való összehúzódása a megfeszűlt rugónak visszaszökésével párhuzamosítva, s épen azért fontos, hogy e nézetnek jogosúltsága biztos alapon vétessék birálat alá.

A lengések időbeli lefolyásának taglalásánál megint azon esetből indulunk ki, hogy a P-vel terhelt és ennek megfelelőleg D hoszszal megnyújtott tekercsrugó, e nyugalmi helyzetéből még tovább, $D_{\prime\prime}$-vel egyenlő összes meghosszabbodásig megnyújtatott. Az ily helyzetben magára hagyott rugó két különböző erélyből származó erőknek kölcsönös behatása alatt áll, melyek közűl a rugó tulajdon feszélyének megfelelő erő a rugót lengésének felső, $D_{\prime}$ nyújtással összekapcsolt, határa felé hajtja, míg a másik, a rugó saját és terhének súlyából származó nehézségi erő a rugót lefelé húzza.

Minthogy $P = AD$ kifejezés, külzeléki hányadosképen, mint tudjuk, azon a pillanatos gyorsúlást előidéző erőt jelenti, mely az épen fennálló nyújtással egyenes arányban áll, azért $D_{\prime\prime}$ nyújtásnál a gyorsító erő $AD_{\prime\prime}$-nek fog megfelelni, és ha a terhelő súlynak tömegét, (melybe a rugónak saját tömege is befoglalandó, de a melytől itt is egyelőre eltekintünk, a rugót mintegy súlytalannak véve) $\frac{P}{g}$-vel jelöljük, g alatt a szabad esésnél jelentkező nehézségi gyorsúlást értve; úgy akkor azon $g_{\prime}$ gyorsúlást, melyet a $D_{\prime\prime}$ nyújtással összekapcsolt rugalmas feszélynek megfelelő erő létrehoz, ekképen fejezhetjük ki:

$$g_{\prime} = g\frac{AD_{\prime\prime}}{P}.$$

Ha azon irányt, melyben e gyorsúlás hat, tevőleges értelemben veszszük, következőleg az ellenkező irányban ható nehézségi erőnek gyorsúlását nemleges jellel látjuk el; úgy a két ellentétes erő utáni eredményes gyorsúlást így fejezhetjük ki:

$$\varphi = g\frac{AD_{\prime\prime}}{P} - g = g\left[\frac{AD_{\prime\prime} - P}{P}\right],$$

s ha még a számlálóban P-t AD által helyettesítjük, értve D

alatt megint a terhelő súlynak megfelelő statikai nyújtást, akkor lesz:

$$\varphi = A\frac{g}{P}(D_{\prime\prime} - D)$$

és megrövidítéssel $\left(A\frac{g}{P}\right)$ helyett Q-t, $(D_{\prime\prime} - D)$ helyett h-t használva, lesz:

$$\varphi = Qh.$$

E gyorsúlás felszálló lengésnél, a statikai nyújtásnak határa alatti szakaszban, hol $D_{\prime\prime} > D$, tevőleges előjelt kíván meg, az azon határ feletti szakaszban ellenben, hol $D_{\prime} < D$, nemleges jelt; lehágó lengésnél pedig e jelek is ellenkező sorrendben megváltoznak.

Megfelelőleg e viszonyoknak

$$\varphi = \frac{dv}{dt} \text{ és } v = \frac{dh}{dt}$$

lévén:

$$vdv = \varphi dh,$$

hol v a sebességet, h pedig a lengés közepétől számított pillanatbeli távolságot jelenti, áll még:

$$vdv = -Qhdh,$$

hol a nemleges előjel azért alkalmazandó, mert v növekszik, midőn a lengés közepétől számított h kisebbedik.

Egészelvén az utolsó egyenletet, kapjuk ezt:

$$v^2 = -Qh^2 + C,$$

és minthogy a lengés határain, melyeknek távolságát az egyensúly helyétől r-el jelöljük, $v = o$, következőleg

$$o = -Qr^2 + C,$$

azért a két egyenletből az egészleti állandót kiküszöbölvén, kapjuk a sebességnek ez egyenletét:

$$v^2 = Q\,(r^2 - h^2).$$

Ha most az egyensúly helyéből, a lengés határainak ettől való r távolságával mint sugárral félkört irunk meg, melynek nullapontját a lengés alsó határpontjára helyezzük, úgy a h távolságnak a lengés alatti változásait kifejezhetjük ekképen:

19) . . . . $h = r cos\beta,$

β-vel jelölve a lengés alsó határától mint nullaponttól számított szögivet.

Minek folytán áll aztán

$$v^2 = Qr^2 (1 - cos^2\beta)$$

vagy

20) . . . . . $v = \sqrt{Q} . r sin\beta;$

miből megint következik, hogy a lengés középpontján, hol $h = o$, β pedig $= \frac{\pi}{2}$, a sebesség maximuma:

20a) . . . . $v_m = r\sqrt{Q} = r\sqrt{A\frac{g}{P}},$

egyezőleg a fennebbi 17) alatti kifejezéssel.

Abból, hogy: $v = -\frac{dh}{dt}$, tehát $vdt = -dh$, következik még, ha v helyett a 20) alatti kifejezést, dh helyett pedig a 19) alatti kifejezésnek β szerinti külzelékét alkalmazzuk:

$$\sqrt{Q} r sin\beta dt = r sin\beta d\beta;$$

tehát

$$\sqrt{Q} dt = d\beta;$$

egészelés után pedig lesz:

$$t\sqrt{Q} + C = \beta,$$

s minthogy ha $t = o$, akkor szintén $\beta = o$, tehát $C = o$, áll még

$$t\sqrt{Q} = \beta.$$

De miután a β szögívet az egységnek megfelelő sugárral megirt körívre is vonatkoztathatjuk, és szintúgy az arithmetikai arányban növekedő t időt is a T_f fél lengési időnek megfelelő félkörnek ívrészleteképen tekinthetjük, áll azért:

$$\beta : \pi = t : T_f.$$

Ennélfogva akkor lesz $\beta = \pi$, midőn $t = T_f$ és így lesz a teljes felszálló lengésnek időtartama:

$$T_f = \frac{\pi}{\sqrt{Q}}.$$

S minthogy e szerint $\frac{\pi}{T_f} = \sqrt{Q}$, Q pedig megfelel $A\frac{g}{P}$-nak, vagy mert $P = AD$, megfelel $\frac{g}{D}$-nek is, következik, hogy:

$$\alpha) \ldots \beta = \pi\frac{t}{T_f} = t\sqrt{Q} = t\sqrt{A\frac{g}{P}} = t\sqrt{\frac{g}{D}}.$$

E viszonyok folytán a következő ujabb kifejezéseket nyerjük és pedig:
a *h távolság* számára, melyben lengése közben a megterhelt végpont a lengés közepétől áll:

$$21) \ldots\ldots h = r\cos\left(\pi\frac{t}{T_f}\right);$$

ugyanazon pontnak a lengés alsó határától számított *emelkedése* számára:

$$21a) \ldots H = r\left[1 - \cos\left(\pi\frac{t}{T_f}\right)\right];$$

a *sebesség* számára, melylyel lengés közben azon pont bír, a 20) alatti kifejezés helyett a következő:

$$22) \ldots v = r\sqrt{A\frac{g}{P}}.\,Sin\left(\pi\frac{t}{T_f}\right) = r\sqrt{\frac{g}{D}}.\,Sin\left(\pi\frac{t}{T_f}\right);$$

vagy

$$22a) \ldots\ldots v = r\frac{\pi}{T_f}\,Sin\left(\pi\frac{t}{T_f}\right);$$

a lengés közepén levő *legnagyobb sebesség* számára pedig:

$$22b) \ldots v_m = r\sqrt{A\frac{g}{P}} = r\sqrt{\frac{g}{D}} = r\frac{\pi}{T_f};$$

végre a fel- vagy leszálló lengésnek *időtartamára :*

$$23 \ldots . \quad T_f = \frac{\pi}{\sqrt{Q}} = \frac{\pi}{\sqrt{A\frac{g}{P}}} = \pi\sqrt{\frac{P}{gA}},$$

vagy

$$23a) \ldots . \quad T_f = \pi\frac{r}{v_m},$$

vagy még :

$$23b) \ldots \quad T_f = \pi\sqrt{\frac{\delta}{g}},$$

mely utóbbi kifejezés teljesen megfelel az ingalengés törvényének, ha abban az egyszerü ingának hossza l mint D-vel egyenlő vétetik. *)

Végre még minde kifejezésekben r helyettesíthető $(D_{,,}-D)$ által is.

A megterhelt és azután még túlnyújtott tekercs-rúgónak vagy valamely rugalmas huzalnak lengési időtartama tehát, a 23) alatti egyenlet értelmében, egyenes arányban áll a terhelő súlynak második gyökével, vagy a 23b) alatti egyenlet szerint a terhelő súlynak megfelelő statikai nyujtásnak második gyökével; ellenben teljesen független a lengés tágasságától. Épen azért a lengés időtartama ugyanaz marad azon esetben is, ha a lengés az által idéztetett elő, hogy a még meg nem terhelt, tehát meg sem nyujtott huzal vagy tekercs-rugó azonnal a teljes P súlylyal megterheltetett volna.

Kitetszik ez a következőből. Az azonnal, a teljes súlylyal eszközölt megterhelésnél ugyanis a 17a) alatti egyenlet szerint a lengés felső határától lesülyedő súlynak legnagyobb sebessége

$$v_m = r\sqrt{g\frac{P}{A}},$$

áll tehát még

$$\frac{\pi r}{v_m} = \frac{\pi}{\sqrt{g\frac{P}{A}}} = T_f$$

---

*) A T_f számára szolgáló kifejezések azonban bizonyos kiigazitást szükségelnek, melyről a 6. §-ban fogunk szólani.

megfelelőleg a 22b) alatti egyenletnek; minthogy pedig az azonnali teljes megterhelés esetében a statikai nyújtás határáig terjedő D esési magasság jelentőségére nézve r-rel azonos, azzal pedig egyenes arányban változik v_m is, azért az utolsó egyenlet folytán T_f is megmarad változatlanúl.

Ezen, a megterhelt tekercsrugók és rugalmas huzalok lengésére vonatkozó fejtegetések folytán megszereztük ugyan mindazon viszonyokra vonatkozó kifejezéseket is, melyek a későbbi myologiai vizsgálatoknál szintén tekintetbe veendők lesznek, a mennyiben nekünk ottan biztos alapúl fognak szolgálni; mindazáltal nem lesz fölösleges, ha mi a lengés törvényeinek még más egyéb viszonyait is taglalás alá veszszük, részint, hogy azoknak átalános érvényességét kimutassuk, részint pedig, hogy a lengés időtartamára vonatkozólag előbb levezetett kifejezésnek értelmét tüzetesebben megállapitsuk.

5. §.

A megterhelt tekercsrugók és rugalmas huzalok lengésének időtartamára vonatkozólag előbb levezetett kifejezéseknek érvényessége, a meg nem terhelt rugalmas rudak hosszanti lengésére nézve is.

A megterhelt tekercsrugók és rugalmas huzalok lengésére vonatkozó törvények levezetésénél egyedül csak a terhelő súlyt vettük tekintetbe, számba nem véve a lengést előidéző rugalmas testnek saját súlyát, azt mintegy súlytalannak tekintve. Feladatunk azért most az, hogy számba vegyük a lengést eszközlő rugalmas testnek saját súlyát, ugy azon esetre nézve, ha azon kivül még más egyéb teher is van jelen, valamint midőn ilyen nincsen jelen, és ekképen az előbb levezetett kifejezéseknek átalános érvényességét próba alá vegyük.

E fejtegetéseket megkezdjük vonatkozólag rendes hengeralakkal biró rúdra, mely egyik végénél megrögzíttetvén, hosszanti — longitudinális — lengésekbe tétetett. Ily rúdnak hossza feleljen meg a hosszegységnek, harántátmetszete legyen q, fajsúlya legyen s. Egyelőre azonban még itt is eltekintünk a rúdnak tulajdon súlyától, és csak felteszszük, hogy az oly rúddal van megterhelve, mely hosszára, átmetszetére és fajsúlyára nézve az előbbivel teljesen egyenlő.

Ez esetben a 23) alatti egyenlet szerint, ha abban A-t $e\frac{q}{l}$ által helyettesítjük és tekintetbe veszszük, hogy most $l = 1$, áll:

$$\text{a)} \ldots \; T_f = \pi \sqrt{\frac{qs}{geq}} = \pi \sqrt{\frac{s}{ge}}$$

és minthogy a térfogat egységében (1 méter hosszúságnál és 1 négyszög millimeter átmetszetnél) a tömeg $m = \frac{s}{g}$, g alatt a szabad esésnek megfelelő gyorsulást értve, azért áll még:

$$\text{b)} \ldots\ldots \; T_{f\prime} = \pi \sqrt{\frac{m}{e}};$$

minthogy továbbá

$$P = \frac{eq}{l} D,$$

következőleg

$$eq = \frac{Pl}{D},$$

azért a fenforgó esetben, ha a hosszegységnek megfelelő rúdnak súlyát mint $p = qs$ veszszük, az általa a felső rúdon előidézett nyujtásnak hosszát δ-vel jelöljük, lesz egyszersmind

$$eq = \frac{qs}{\delta}$$

következőleg

$$e = \frac{s}{\delta}.$$

Ha ez utóbbi kifejezést e helyett alkalmazzuk az a) alatti egyenletben, akkor vonatkozólag a hosszegységnek megfelelő hosszú rúdra, mely teljes hasonmása által megterhelve, δ-vel meghosszabbodik, kapjuk ez egyenletet:

$$\text{c)} \ldots \; T_{f\prime} = \pi \sqrt{\frac{\delta}{g}}.$$

A 23b) alatti egyenlet szerint pedig, vonatkozólag l hosszú rúdra vagy huzalra, melynek átmetszete q és mely P súlylyal megterhelve, D-vel meghosszabbodik, áll

$$T_f = \pi \sqrt{\frac{D}{g}};$$

Feltéve tehát, hogy a súlyképen alkalmazott rúdnak hossza is l, és a súlya $P = lp$, azaz l-szer nagyobb, mint azon rúdnak p súlya, melynek hossza megfelel az egységnek, átmetszete q-nek és mely a tulajdon súlyával egyenlő súly alatt a δ nyújtást szenvedi el, akkor áll:

$$\text{d)} \ldots \quad \frac{T_{f\prime}}{T_f} = \frac{\pi \sqrt{\frac{\delta}{g}}}{\pi \sqrt{\frac{D}{g}}} = \sqrt{\frac{\delta}{D}};$$

minthogy pedig

$$P = lp = e\frac{q}{l}D,$$

következőleg ha $l = 1$,

$$p = eq\delta;$$

áll még

$$D = l^2\delta;$$

e kifejezést a d) alatti egyenletben D-nek helyébe téve, lesz végre:

$$\frac{T_{f\prime}}{T_f} = \frac{1}{l}.$$

E szerint tehát a megterhelt hasábos alaku rugalmas test (huzal, rúd) lengésének időtartama egyszerü arányban áll, annak hosszával; minthogy pedig a lengések időtartamának ily aránya, a tapasztalás tanusága szerint, tényleg fennáll bármely hoszszal biró, megnem terhelt rudaknak hosszanti lengéseinél is, akkor pedig a rúdnak tömege mindig egyenes arányban áll annak hosszával, ennélfogva azon eredményt, melyhez idegen súlylyal eszközölt megterhelést téve fel és a lengésben levő testnek tulajdon súlyától eltekintve, jutottunk, most már kiterjeszthetjük ez utóbbi súlyra is, melyet épen úgy mint az idegen súlyt, a lengést eszközlő test rugalmas feszélyénél fogva mozgat. És a b) alaki egyenlet átalánossabb jelzéssel irva:

$$e) \ldots\ldots T_f = \pi \sqrt{\frac{m}{e}}$$

a rúd vagy valamely más hasonló hasábos alakú testnek tulajdon tömege által képezett teherre nézve is érvényes; miért is az m e kifejezésben meg nem terhelt rúdnál, ennek tömegét jelenti, más valamely megterhelt rúdnál vagy huzalnál pedig mindkét rendbeli tömeget.

Szintúgy érvényes a c) alatt $T_{h,}$ számára azon felvétel mellett levezetett kifejezés, hogy a rúd vagy huzal a saját, de számba nem vett súlyával egyenlő súlylyal van megterhelve, akkor is, ha a különben meg nem terhelt rúdnál egyedül csak ennek tulajdon súlya veendő számba. Míg a 23) és az ebből tovább levezetett 23b) alatti kifejezés a tulajdon és a terhelő külön súlynak összegére vonatkozik.

Az e) alatti kifejezés átalánosságánál fogva érvényes lévén a lengésben levő rúdnak bármely méreteinél, tehát akkor is, midőn ennek hossza és átmetszete a mértékegységeknek felel meg, s midőn azért m a térfogati egységben foglalt tömeget, tehát egyszersmind az állomány d tömörségét jelenti; ennek folytán a féllengés időtartama még igy is kifejezhető:

$$\alpha) \ldots\ldots T_f = \pi \sqrt{\frac{d}{e}},$$

miből következik, hogy azon időtartam egyenes arányban áll a tömörség második gyökével.

6. §.

A megterhelt vagy meg nem terhelt hasábos testeknek eddig taglalt lengései és ugyanazoknak előhaladó hosszanti lengései közt fennálló viszonyok.

A megterhelt tekercsrugónak vagy rugalmas huzalnak eddig taglalt lengései, mint láttuk, megfelelnek az egyik végével megrögzített rugalmas rúd hosszanti lengéseinek; mindkét rendbeli lengések pedig megfelelnek egyszersmind átalában a *helytálló lengéseknek.* Miután ilyféle lengések *előhaladó* lengésekből is visszaverődés folytán kifejlődhetnek, azért az e lengések közt fennálló ilyféle viszonynál fogva lehetséges az előhaladó lengéseknek törvényeit is a helytálló lengések törvényeiből levezetni.

Az előhaladó lengéseknek időtartama szükségképen egyenlő lévén azon helytálló lengéseknek időtartamával, melyekből amazok kifejlődtek; a lengéseknek ilyféle átváltozása az egyik vagy mindkét végével megrögzített rúdon pedig, az ismert viszonynál fogva, mely szerint

$$T_f = \frac{L}{c},$$

— értve T_f alatt a féllengésnek időtartamát, L alatt az előhaladó hullámnak félhosszát, c alatt a tovaterjedésnek sebességét, — egyedül csak úgy lehetséges, ha egyfelől a rúdnak hossza és másfelől a hullám hossza és tehát a lengésnek időtartama egymás közt épen bizonyos viszonynak felelnek meg; azért ez utóbbi viszony alapján lehetséges úgy a tovaterjedési sebesség számára megfelelő kifejezést levezetni, valamint a lengés időtartamára vonatkozólag előbb levezetett kifejezéseknek értelmét tüzetesebben megállapítani.

Taglaljuk legelőbb is a rúd hossza és a hullám hossza, illetőleg a lengés időtartama közti viszonyt *vonatkozólag a tovaterjedésnek sebességére.*

Tekintetbe véve azt, hogy a hullámnak visszaverődése a rúdnak rögzített végénél akképen történik, hogy a visszaverődött hullám az előhaladó hullámhoz képest egy fél hullámnak megfelelő késedelmet szenved el; továbbá, hogy helytálló hullámok előhaladó hullámokból csak úgy fejlődhetnek ki, ha a két rendbeli hullám a teljes lengés időtartamának mindenik negyedében váltogatva, egyező és ellenkező irányú lengésekkel összetalálkozik; könnyen belátható, hogy egyik végével megrögzített rúdon helytálló hullámok csak úgy képződhetnek, ha a rúdnak hossza $l = {}^1/_2 L$, vagy pedig $l = L$; az első esetben a rúdnak szabad vége lengéseit mindig a legtágasabb határok közt fogja tenni, épen úgy, mint a tekercsrugónak vagy rugalmas huzalnak megterhelt vége; ez esetben tehát áll:

f) ..... $T_f = \frac{L}{c} = \frac{2l}{c}$;

a második esetben, ha mindkét végével van a rúd vagy huzal megrögzítve, akkor a legtágasabb lengés a két rögzített vég közé közbül esik, s ez esetben áll:

g) ..... $T_f = \frac{L}{c} = \frac{l}{c}$.

Szemmel tartva az e két utóbbi egyenletsorban kifejezett viszonyokat, már lehetséges is a féllengés időtartamára vonatkozó c) és 23) alatti átalános kifejezésekből oly kifejezést levezetni, mely annak megfelelő esetleges értékét meghatározza, valamint még a tovaterjedés sebességére vonatkozó kifejezést is.

A c) alatti kifejezés

$$T_{f1} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{\delta}}},$$

az előbbi §-ban kiegészített értelmében érvényes olyan meg nem terhelt, egyik végével megrögzített rúdra nézve is, melynek hoszsza megfelel a hosszegységnek és mely tulajdon súlyával egyenlő súlylyal megterhelve, δ-vel meghosszabbodna.

Ámde tekintetbe veendő egyfelől, hogy minden egyes, a helytálló hullámba befoglalt pont és így az ebből keletkezett előhaladó hullámnak minden egyes pontja is szükségképen a lengésnek ugyanazon időtartamával bir, mint maga az egész rúd; másfelől pedig, hogy az előbbi kifejezésben előfordúló Ludolf-féle π szám mint kerületi viszonyszám az egységnek megfelelő sugárral megírt félkörnek kerületét jelenti, ugyanazon kifejezés tehát π szerint feloldva:

$$T_{f1}\sqrt{\frac{g}{\delta}} = \pi,$$

a fennebbi f) és g) alatti egyenletek értelmében π azon félkörkerülettel egyenlő útszakaszt is jelenti, melyet a $\sqrt{\frac{g}{\delta}}$ sebességgel tovahaladó hullám T_{f1} idő alatt bejárna; ezeknek folytán azt kell következtetnünk, hogy miután a rúdnak hossza befolyást a tovaterjedés sebességére semmiképen nem gyakorolhat, a T_{f1} idő az, mely azon kifejezésben, mint a bejárandó út hosszával arányban álló tényező van feltüntetve.

Ha már most ez útnak hosszúsága, mint épen a hosszegységgel egyenlő rúdnál, az egységnek felel meg, úgy az akkor szükségelt T_{fh2} idő az T_{f1} időhöz fog állani mint

$$\frac{T_{fh2}\sqrt{\frac{g}{\delta}}}{T_{f1}\sqrt{\frac{g}{\delta}}} = \frac{1}{\pi};$$

és lesz ennélfogva

$$T_{fh2} = \frac{1}{\pi}\, T_{f1} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{\delta}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{\delta}}}.$$

Minthogy pedig a mindkét végével megrögzített rúdnál, ez utóbbinak hossza a helytálló hullám teljes hosszával egyenlő, azért lesz:

$$\text{h)} \ldots\; T_{fh2}\sqrt{\frac{g}{\delta}} = 1 = L = T_f c;$$

ha ellenben a rúd csak egyik végével van megrögzítve, midőn a helytálló hullám hossza a rúdnak kettős hosszával egyenlő, akkor áll:

$$\text{i)} \ldots\; T_{fh1}\sqrt{\frac{g}{\delta}} = 2T_{fh2}\sqrt{\frac{g}{\delta}} = 2 = L = T_f\, c;$$

s e szerint

$$\frac{T_{fh2}}{T_{fh1}} = {}^1/_2.$$

A h) és i) alatti egyenletekből már világosan kitetszik, hogy a gyökjel alatti érték nem jelent egyebet, mint a *tovaterjedésnek c sebességét*, és pedig azon viszonynak gyöke által kifejezve, mely a szabad esésnél jelenlévő nehézségi gyorsúlás és a meghosszabbodás közt fennáll, melyet az 1 méter hosszú rúd saját súlyával egyenlő megterhelés alatt elszenvedne.

A tovaterjedésnek sebessége azonban még másképen is kifejezhető. Lévén ugyanis a hosszegység esetében

$$p = eq\delta,$$

áll:

$$\sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{g\frac{eq}{p}} = c,$$

ennek folytán tehát a tovaterjedési sebesség egyenlő még azon viszonynyal szorzott gyorsúlásnak gyökével, mely a rugalmassági együtthatónak megfelelő és az átmetszettel szorzott súly közt egyfelől és az egységnek megfelelő hosszúságú rúdnak tulajdon súlya közt másfelől fennáll.

Minthogy végre

$$\frac{p}{g} = m = m_1 q$$

m_1 alatt értve a térfogati egységben foglalt tömeget; c-nek előbbi kifejezése még így is irható:

$$c = \sqrt{\frac{e}{m_1}},$$

s minthogy m_1 a d tömörségnek is megfelel, kifejezhetjük c-t a szokott alakban ekképen:

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Illetőleg pedig a *féllengés időtartamának,* vonatkozólag a hosszegységnek megfelelő rúdra c) alatt levezetett *átalános kifejezését,* az előadott viszonyokból már szintén kitetszik, hogy azon kifejezés tulajdonképen csak azon időtartamot határozza meg, mely a hosszegységnek megfelelő sugárral megirt félkör kerületének mint a bejárandó útnak hossza és a tovaterjedésnek épen meghatározott sebessége közt fennálló viszonynak megfelelne; hogy azonban a valóságos időtartam csak a hosszegység és π közti viszonynak tekintetbe vétele mellett határozható meg. S ugyanez áll a féllengés időtartamának azon kifejezésére nézve is, melyet még előbb vonatkozólag bármely hosszuságú, átmetszetű és bármint megterhelt tekercsrugóra, huzalra vagy rúdra 23) alatt levezettünk, mely szerint

$$T_f = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{D}}} = \frac{\pi}{\sqrt{g\frac{A}{P}}} = \frac{\pi}{\sqrt{g\frac{eq}{npl}}},$$

hol P a hosszegységnek megfelelő rúd p súlyának n-szeres értékét jelenti. Itt is a lengésnek valóságos időtartamát csak úgy határozhatjuk meg, ha számba veszszük, hogy

$$\frac{T_{fh2}}{T_f} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{geq}{npl}}}}{\frac{\pi}{\sqrt{\frac{geq}{npl}}}} = \frac{1}{\pi};$$

mely viszonyból azután következik, hogy a mindkét végével megrögzített rúdnál:

$$T_{fh2} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{geq}{npl}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{geq}{npl}}},$$

és minthogy a meg nem terhelt rúdnál n az épen annyiszoros súlyt jelenti, mint l a hosszúságnak hányszorosát, tehát mert $n = l$, azért áll még e kifejezés is:

$$\text{k)} \ldots\ldots T_{fh2} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi l}{\sqrt{\frac{geq}{p}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{geq}{p}}} = \frac{L}{c}.\text{*)}$$

*) A k) alatti kifejezést ekképen átirva:

$$T_{fh2} = \frac{\pi l}{\pi\sqrt{\frac{geq}{p}}} = \frac{\pi L}{\pi\sqrt{\frac{geq}{p}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2}{L^2}.\frac{geq}{p}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2}{L^2}.\frac{g}{\delta}}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2}{L^2}.\frac{e}{d}}} = \frac{\pi}{\sqrt{K}},$$

A csak *egyik* végével rögzített rúdnál ellenben a féllengés időtartama lesz:

$$1) \ldots . \quad T_{fh1} = 2T_{fh2} = \frac{2l}{\sqrt{\frac{geq}{p}}} = \frac{L}{c}.$$

Hogy a felső végével megrögzített, alsó végénél pedig P_1 súlylyal megterhelt *tekercsrugónak* féllengési idejét is megfelelőleg kifejezzük, szükséges, hogy előbb az l) alatti egyenletet, tekintettel a k) alatti egyenletre, ekképen átirjuk:

$$T_{fh1} = 2T_{fh2} = \frac{2\pi}{\pi\sqrt{\frac{geq}{npl}}},$$

hol p a lengő test hosszegységének tulajdon súlyát jelenti.

Minthogy a tekercsrugó nyújtásánál, mint a 3. §-ban már megjegyeztük, maga a tekercsbe összehajtott huzal inkább csavarodást, semmint nyújtást szenved el, ennélfogva a befolyás is, melyet a tekervény tágassága és a föltekert huzalnak vastagsága a rugónak nyújtásánál gyakorol, különböző a hasábos alakú egyenes irányú test egyszerű átmetszetének befolyásától. Itt azonban, hol csak a lengés időtartamának kifejezését keressük, nem szükséges, hogy ama bonyolódottabb függvényes viszonyt tüzetesen meghatározzuk, hanem elégséges, ha mi a tekercsrugóra vonatkozólag a fennebbi kifejezésben foglalt eq szorzatot egyszerűbben ε tényező által helyettesítjük, melybe azonban ama még határozatlanúl hagyott függvényt is benfoglaltnak képzeljük.

A tekercsrugónál továbbá annak tulajdonsúlyán kivül még az idegen tehernek súlya is tekintetbe veendő. Minthogy azonban ez utóbbi súly, mint az 5. §-ban kimutattuk, a lengő testnek (legyen az rúd, huzal vagy tekercs) egész hosszában elterjedő mozgató erők irányában, melyek valamennyien együtt az összes súly mozgatásában részt vesznek, épen e

---

eljutunk e kifejezéshez

$$K = \frac{\pi^2}{L^2}\,\frac{e}{d},$$

mely mint az egységnek megfelelő távolságban jelenlevő gyorsulásnak kifejezése, a tovaterjedő hullám sebességének levezetésénél szokott alapúl vétetni. Hiányzik azonban e kifejezésünkben az állandó együttható a, — (melylyel a számláló azon esetben szorzandó, midőn a tömecsek egyenes összekötésük irányára ferdén mozdúlnak ki helyeikből), azért, mert az itt szóban álló hosszanti lengéseknél ama két irány összeeső és tehát az állandó is megfelel az egységnek. (L. A. Wüllner. Lehrbuch d. Experimental-Physik. Leipzig. 1862. I. H. 386. és köv. l.)

körülménynél fogva, épen úgy viseltetik, mint a lengő testnek tulajdon súlya, ennélfogva mindkét súlyt, a tulajdont, valamint a teherét, akképen egybefoglalhatjuk, hogy p-vel a hosszegységnek megfelelő tulajdonsúlyt, np-vel az egész tulajdonsúlyt, $P_{\prime}$ tehersúlyt pedig $\left(n\frac{P_{\prime}}{n}\right)$-vel jegyezzük és az összes súlyt irjuk: $n\left(\frac{P_{\prime}}{n}+p\right)=np_{\prime}=P$; akkor e helyettesítések mellett átváltozik a fennebbi egyenlet, vonatkozólag a tekercsrugó féllengésének T_{fs} időtartamára, ekképen:

$$21)\ldots\ T_{fs}=\frac{2\pi}{\pi\sqrt{\frac{g\varepsilon}{n\left(\frac{P_{\prime}}{n}+p\right)l}}}=\frac{2\pi}{\pi\sqrt{\frac{g\varepsilon}{np_{\prime}l}}},$$

s minthogy itt is $n=l$, lesz még

$$31)\ldots\ T_{fs}=\frac{2l}{\sqrt{\frac{g\varepsilon}{p_{\prime}}}}.$$

Ha pedig a 21) alatti első kifejezésben $\left(\frac{\varepsilon}{l}\right)$-t A együttható által helyettesítjük, úgy lesz:

$$41)\ldots\ T_{fs}=\frac{2\pi}{\pi\sqrt{\frac{gA}{P_{\prime}+np}}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{gA}{P}}},$$

hol P az összes súlyt jelenti.

Ezek folytán a 41) alatti T_{fs}-nek és a 23) alatti T_f-nek kifejezései közt következő viszony áll fenn:

$$\frac{T_{fs}}{T_f}=\frac{2}{\pi},$$

következőleg áll még:

$$51)\ldots\ T_{fs}=\frac{2}{\pi}T_f.$$

Ha a *mindkét* végével megrögzített rúd vagy huzal *n′ számú szakaszokra beosztva* teszi meg lengéseit, akkor áll:

$$\mathrm{m})\ldots\ T_{fhn}=\frac{1}{n'}T_{fh2}=\frac{l/n'}{\sqrt{\frac{geq}{p}}};$$

a viszony pedig ez utóbbi lengések időtartama és ugyanazon, de csak *egyik* végével rögzített és egy egészképen lengő rúd lengéseinek T_{fh1} időtartama közt, megfelel

$$\frac{T_{fhn}}{T_{fh1}} = \frac{1}{2n}.$$

Ha a csak *egyik* végével rögzített rúd, úgy mint valamely tekercsrugó még idegen súlylyal is meg van terhelve, akkor e teher, az előbbi §-nek kimutatása szerint, épen úgy hat, mintha a lengést eszközlő testnek tulajdon súlya növekedett volna; ennélfogva ez esetben az 1) alatti kifejezés csak annyiban változik meg, hogy p más értékű p_1 által helyettesíttetik. Következőleg a viszony a meg nem terhelt rúd lengésének T_{fh1} időtartama és a megterhelt rúd lengésének T'_{fh1} időtartama közt megfelel akkor

$$\frac{T_{fh1}}{T'_{fh1}} = \sqrt{\frac{p}{p_1}}\text{-nek};$$

minthogy pedig a lengés időtartama egyenes arányban a növekedett súlynak második gyökével növekszik, míg a rúdnak, tehát az előhaladó hullám útjának, hoszsza megmarad változatlanúl, következik, hogy a teher nagyobbításakor a tovaterjedő hullám sebessége kisebbedik.

Kérdés támad itt azonban arra nézve, vajjon azon függvényes viszony, mely az egyik végével megrögzített rúdnál vagy huzalnál egyfelől a terjedési sebesség és lengés időtartama és másfelől a teher közt fennáll, érvényes-e azon hosszanti lengésekre nézve is, miket a mindkét végével rögzített rúd vagy huzal egészben véve vagy szakaszokra beosztva tesz?

A befolyást illetőleg, melyet a teher a lengésnek időtartamára gyakorol, egyfelől megjegyzendő, hogy a teher szerint változik ugyan a rúdnak, illetőleg huzalnak feszélye, mindazáltal a lengés időtartamának kifejezésében a gyökjel alatt foglalt eq érték e miatt változást nem szenved; de másfelől a huzalnak tulajdon súlyára, valamint a lengésben álló osztályainak hosszára nézve, melyeket ugyanazon kifejezés még magában foglal, két esetet kell megkülönböztetni, a szerint, a mint azon feszélyváltozás mellett a rögzített pontoknak egymástóli távolsága változatlanúl marad, avagy szintén megváltozik. *)

Az első esetben a lengésben álló osztályoknak hossza változatlanúl marad, ellenben a feszélylyel növekedő (D) nyújtás folytán kisebbedik a változatlan távolságban megmaradó rögzített pontok közt lengésbe hozott tulajdon huzalsúly, még pedig megfelelőleg e viszonynak:

$$(l + D) : l = np : P_x,$$

P_x alatt a lengésben résztvevő tulajdon súlyt értve; ennek folytán az m) alatti kifejezés erre változik át:

$$\text{n)} \ldots T_{fhn1} = \frac{\pi}{\pi\sqrt{\dfrac{geq}{\dfrac{l}{l+D}\cdot\dfrac{npl}{n'^2}}}} = \frac{l/n'}{\sqrt{\dfrac{geq}{\dfrac{l}{l+D}p}}},$$

miután egy előbbi megjegyzés értelmében itt is $n = l$.

A második esetben ellenben, melyben az erősebb megfeszítés folytán a rögzített pontok közti távolság megnagyobbodik, a lengő osztályoknak hossza a D nyújtásnak megfelelőleg szintén növekszik, mialatt a lengésbe hozott tulajdon súly változatlan marad. Ennek folytán most l, valamint az ezzel egyenlő n helyébe $l + D$ alkalmazandó; és minthogy a tulajdon súly most nem l, hanem $l + D$ hosszra oszlik el, azért a hosszegységre vonatkozó előbbi p súly most $p,$ súly által helyettesítendő, vagy mert

$$(l + D)p, = lp,$$

$p,$ súly $\left(\frac{l}{l+D}p\right)$-vel is kifejezhető. Ez esetben tehát a féllengés időtartama fog lenni:

*) Így ha az egyik végével megrögzített húrszerű huzal megterhelve szabadon lecsüng, a súlylyal növekedő nyújtással arányban nagyobbodik a rögzített és a megterhelt vég közti távolság is; de ha a huzalnak a terhelt vége előtti szakasza csigán át van vezetve, akkor a huzalnak a csiga és rögzített vége közti, lengésre képesített szakasza hosszúságában nem változik meg, a tehernek változtatásakor sem.

$$\text{na)}\ T_{fhn\mathrm{II}} = \frac{\pi}{\pi\sqrt{\dfrac{geq}{\dfrac{(l+D)\,p,(l+D)}{n'^2}}}} = \frac{\dfrac{l+D}{n,}}{\sqrt{\dfrac{geq}{p'}}} = \frac{\dfrac{l+D}{n'}}{\sqrt{\dfrac{geq}{\dfrac{l}{l+D}p}}}.$$

A viszony pedig az e két esetbeli lengési időtartam közt meg fog felelni ennek:

$$\frac{T_{fhn\mathrm{I}}}{T_{fhn\mathrm{II}}} = \frac{l}{l+D}.$$

E szerint a külömbség a két esetbeli lengési időtartam közt, valamint az időtartamnak megváltozása a megváltozott kifeszítés folytán, annál kisebb lesz, minél kisebb a kifeszített huzalnak nyujtékonysága és az ennek megfelelőleg elszenvedett megnyújtása. Ezzel egyezőleg a tapasztalás tanusítja is, hogy a két végével megrögzített és hosszanti lengésbe tett huzalhúrnak hangmagassága kifeszítésének változásakor csak igen keveset változik. *)

A változó kifeszítés folytán változik végre a hullám tovaterjedésének sebessége is, úgy azonban, hogy az megfelelőleg az n) és na) alatti egyenleteknek, mindkét esetben egyenlő, t. i.:

$$c_1 = \sqrt{\frac{geq}{\dfrac{l}{l+D}p}},$$

következőleg az eredeti feszélynek megfelelő c sebesség az az utóbbi sebességhez áll, mint

$$\frac{c}{c_1} = \sqrt{\frac{l}{l+D}}.$$

*) A mint az m), n) és na) alatti egyenletekből kitetszik, az egyik esetben áll:

$$\frac{T_{fhn}}{T_{fhn\mathrm{I}}} = \sqrt{\frac{l+D}{l}},$$

a másik esetben pedig

$$\frac{T_{fhn}}{T_{fhn\mathrm{II}}} = \sqrt{\frac{l}{l+D}}.$$

A növekedő kifeszítés mellett tehát, megfelelőleg az azzal járó nyújtásnak, növekszik a sebesség is.

Az eddig taglalt hosszanti lengések az azoknak megfelelő helytálló hullámokkal, visszaverődés folytán akkor is képződhetnek, midőn a tekercsrugónak vagy rugalmas huzalnak csak egyik vége van megrögzítve, míg a meg nem rögzített másik vége csak megfelelőleg van megterhelve, tehát midőn azon a terhelő súly elég nagy arra, hogy az az előhaladó hullám irányában mint visszaverő hely szolgálhasson. A tekercsrugó akkor a megrögzített vég és a megterhelt vég közt egész hoszszában csomópontok által különválasztott szakaszokra beosztva, oly lengéseket fog tenni, mintha mindkét végén volna megrögzítve, midőn egyszersmind a megterhelt vége vagy — legalább ideiglenesen — nyugalomban marad, vagy a súlylyal együtt oly lengéseket tesz, mintha az ama másik rendbeli lengésekbe nem is tétetett volna, hanem még most is mint egyik végével megrögzített rúd viselné magát. Ily esetben tehát a két rendbeli hullám egymásra rakodik fel; a viszony azok közt azonban az eddigi taglalások után, további fejtegetést már nem szükségel.

Miután a harántirány szerinti lengések a myologia körében egyelőre legalább kérdésbe még nem jőnek, azok tárgyalását vizsgálataink itteni köréből is kizárhatjuk és berekesztjük a nyujtás által nem szerves testeknél keltett rugalmasság hatásának tárgyalását.

Ellenben, épen tekintettel az izomnak szerves tulajdonságaira, feladatunknak tartjuk ezen, az izomnak mechanikai működésére irányított vizsgálatainknál, az eddig használt alapon a szervestestek nyujtásából származó rugalmassági hatásokat annyiban legalább elemzés alá venni, a mennyiben meghatározandó, vajjon ezen rugalmassági hatások törvényeire nézve van-e külömbség a két rendbeli testek közt, illetőleg miben áll az?

7. §.

Az erélyviszonyok rugalmas szerves testeknél a nyujtás alatt.

A mennyiben átnedvesült szerves testeknél a rugalmas nyujtásnak törvénye *Weber, Wertheim, Heidenhain, Volkmann,* észleletei szerint, — melyekkel azonban *Wundt*-nak leletei részben ellenmondásban állanak — a nem szerves testeknek törvényétől eltér és a helyett, hogy az egyenes vonal egyenletének felelne meg, mely szerint a meghosszabbodás a nyujtó súlylyal egyenes arányban növekszik, inkább oly lefolyást követ, mely a menteléknek — (hyperbolá-nak) — felel meg, azért még ez utóbbi vonal egyenletének alapján is taglalás alá veszszük a rugalmassági erélyviszonyokat, hogy lássuk, vajjon és mennyiben szolgáltatnak e viszonyok támpontokat az izomélettan számára is.

1. Erő- és erélymérték és erélyfelváltás.

A mentelék egyenletében:

$$D^2 = fP + gP^2,$$

D alatt a nyújtást, P alatt a nyújtó súlyt értve, mint tudva van, az egyik együttható: $f = \frac{2b^2}{a}$, a másik pedig $g = \frac{b^2}{a^2}$, ha a-val a menteléknek valóságos, b-vel pedig annak képzelt tengelyét jelöljük.

Ez értékeket az előbbi egyenletben helyettesítve, és azt P szerint feloldva, kapjuk a következőt:

$$a) \ldots P = \frac{a}{b}\left[-b \pm \sqrt{b^2 + D^2}\right] *)$$

Ebből nyerjük azon potentialis E_p erélynek egyenletét, mely a P súlylyal megterhelt szabályos, hosszudad hasábos alakkal bíró szerves testnek megfelel; állván:

$$E_p = \int PdD = \int \frac{a}{b}\left[-b + \sqrt{b^2 + D^2}\right] dD$$

*) Tekintettel az értelemre, melyet itten ez egyenletnek tulajdonítunk, a gyökjel alatt álló értéknek két előjele közűl csak az egyik bír jelentőséggel és ilyennek a tevőleges jelt választjuk.

$$\text{b)} \ldots = -aD + \frac{aD}{2b}\sqrt{b^2 + D^2} + \frac{ab}{2}\log.\frac{D + \sqrt{b^2 + D^2}}{b}$$

Ezen, a keresett egészletnek megfelelő kifejezéshez legkönnyebben akképen jutunk el, hogy a menteléknek csúcspontjától (4. ábra) párhuzamosan ennek függélyesen álló második tengelyével egyenes vonalat vezetünk lefelé, mely mint rendező tengely, a (D) nyujtásokra szolgál; a vízszintesen fekvő első menteléki tengelyt pedig mint metszéki tengelyt a megirt mentelék csúcspontjától számított súlyok számára használjuk. Az összrendező tengelyek O pontja tehát a mentelék csúcspontjába esik. A keresett egészlet akkor azon négyszög felületének felel meg, melynek oldalait P és D összrendezők képezik, levonatván abból a menteléknek ugyanazon P és D határokig kiterjedő felülete. Minek folytán áll:

$$E_p = PD - \frac{bx\sqrt{x^2 - a^2}}{2a} + \frac{ab}{2}\log.\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a};$$

s minthogy a mentelék központjától számított $x = a + P$, úgy ez utóbbi értéket x helyébe állítva, átváltozik az előbbi egyenlet a következőre:

$$E_p = PD - \frac{b(a + P)\sqrt{P^2 + 2aP}}{2a} + \frac{ab}{2}\log.\frac{(a + P) + \sqrt{P^2 + 2aP}}{a},$$

ha most még P-t az a) alatti egyenletben kifejezett értékével cseréljük fel, úgy akkor lesz:

$$E_p = -aD + \frac{aD}{2b}\sqrt{b^2 + D^2} + \frac{ab}{2}\log.\frac{D + \sqrt{b^2 + D^2}}{b},$$

vagy ha a és b helyett megfelelő $\frac{f}{2g}$ és $\frac{f}{2\sqrt{g}}$ értékeiket alkalmazzuk, úgy lesz:

$$\text{c)}\ E_p = \frac{1}{2g}\left[-fD + \frac{D}{2}\sqrt{f^2 + 4gD^2} + \frac{f^2}{4\sqrt{g}}\log.\frac{2D\sqrt{g} + \sqrt{f^2 + 4gD^2}}{f}\right].$$

A súly P_1, mely mint a $\frac{dE_p}{dD}$ külzeléki hányadosnak megfelelő határérték, a hosszegységgel egyenlő meghosszabbítást eszközölné, az a) alatti egyenlet folytán lesz:

$$P_1 = \frac{a}{b}\left[-b + \sqrt{b^2 + 1}\right],$$

vagy ha a és b értékét f és g által fejezzük ki, lesz:

$$P_1 = \frac{-f + \sqrt{f^2 + 4g}}{2g};$$

mely érték, ha f és g együtthatókat ismerjük, azon P súly által is kifejezhető, mely képes D nyújtást eszközölni; állván:

$$P_1 = P \frac{-f + \sqrt{f^2 + 4g}}{-f + \sqrt{f^2 + 4gD^2}} = A.$$

Lehet továbbá, épen úgy, mint előbb a nem szerves testekre, a szerves testekre vonatkozólag is a rugalmassági együtthatót súlymértékben azon súly által kifejezni, mely mint a $\frac{dE_p}{dD}$ külzeléki hányadosnak megfelelő határérték, a hossz- és harántátmetszeti egységeknek megfelelő méretű megnyújtott testen, a hosszegységgel egyenlő meghosszabbítást eszközölné; mert irván:

$$A = e\frac{q}{l} = P_1,$$

következik, hogy

$$e = \frac{l}{q} A = \frac{l}{q} P_1 = \frac{l}{q} P \frac{-f + \sqrt{f^2 + 4g}}{-f + \sqrt{f^2 + 4gD^2}} = p.$$

Ha az egyik együttható $f = o$, akkor lesz:

$$e = \frac{l}{q} A = \frac{l}{q} \frac{P}{D} = p,$$

mely kifejezés megint megfelel a nem szerves testek rugalmassági együtthatójának.

Épen azért az utolsóelőtti egyenletsorban álló kifejezést is úgy tekinthetjük, mint a mely egyaránt *a szerves és nem szerves testek rugalmassági együtthatóját súlymértékben* kifejezi.

Végre még kifejezhetjük itt is a rugalmassági feszélynek megfelelő *erélyt* azon erélyveszteség mértékében, melyet az előbbi rugalmassági együttható súlymértékének megfelelő, a rugalmas testet azonnal a nyugalmi helyzetétől fogva megterhelő súlynak elszenvednie kellene, mialatt az a hosszegységnek megfelelő nyújtás melletti kezdeti helyéből a statikai nyujtás határáig lesülyed.

Áll ugyanis, E_{ps}-el jelölve a statikai határig megnyújtott testnek potentialis erélyét, P-vel a megnyújtó súlyt, D-vel a nyújtásnak hosszát, az a) és b) alatti egyenletek folytán, ha ezekben a és b helyébe, azoknak f és g által megfelelőleg kifejezett értékeit teszszük:

$$\text{d)}\ \frac{E_{ps}}{PD} = \frac{\frac{1}{2g}\left[-fD+\frac{D}{2}\sqrt{f^2+4gD^2}+\frac{f^2}{4\sqrt{g}}\log.\frac{2D\sqrt{g}+\sqrt{f^2+4gD^2}}{f}\right]}{\frac{-fD+D\sqrt{f^2+4gD^2}}{2g}},$$

miből következik, ha $D = 1$ vétetik, P pedig az előbb p-vel jelölt rugalmassági súly mérték által helyetesittetik, hogy

$$\text{e)}\ldots\ E_{ps} = p\,\frac{-f+\frac{\sqrt{f^2+4g}}{2}+\frac{f^2}{4\sqrt{g}}\log.\frac{2\sqrt{g}+\sqrt{f^2+4g}}{f}}{-f+\sqrt{f^2+4g}}.$$

Ha megint $f = o$ volna, akkor lesz

$$E_{ps} = {}^1/_2 p,$$

tehát egyenlő a nem szerves testek rugalmasságának erélymértékével. Ennélfogva az e) *alatti kifejezést mint a rugalmasság erélymértékének átalános kifejezését* tekinthetjük, úgy vonatkozólag a szerves, mint nem szerves testekre; az utóbbiaknál mint különös esetben azonban az egyik együttható $f = o$.

Hogy már az e) alatti egyenletben is a törtnek számlálója kisebb, mint a nevező, s hogy tehát a megnyújtott szerves testnek, azon egyenlet jobb oldalában kifejezett potentialis erélye kisebb, mint a hosszegységgel alább szállott p súlynak erélyvesztesége, sőt még a nem szerves testeknek megfelelő ${}^1/_2 p$ értéknél is kisebb, az abból kitetszik, hogy a törtnek számlálója azon felületnek felel meg, mely a nyújtások számára szolgáló rendező tengely és a nyujtás alatti feszélyt jelző mentelékes görbe közt befoglaltan D és p határokig ér, és mely a 4-dik ábra szerint, ha $D = od$, $p = oa$, akkor egyenlő *obd* felülettel; a törtnek nevezője ellenben az ugyanazon D és p határhosszak által képezett négyszög felületével egyenlő, az az a 4-dik ábra szerint az előbbi értékek mellett megfelel *oabd* négyszögnek.

A külömbség tehát a d) alatti egyenlet törtjének nevezője és számlálója közt:

$$\frac{1}{2g}\left[\frac{D\sqrt{f^2+4gD^2}}{2}-\frac{f^2}{4\sqrt{g}}\log.\frac{2D\sqrt{g}+\sqrt{f^2+4gD^2}}{f}\right]$$

megfelel magának a P és D határok közé zárt mentelék (4. ábrán) oab felületének; minthogy pedig ez utóbbi nagyobb, mint az ugyanazon határokkal egyenlő oldalok által képezett négyszögnek félfelülete, következik, hogy ama törtnek értéke kisebb mint $^1/_2$.

Az E_{ps} potentialis erély, melylyel a hossz- és harántátmetszeti egységeknek megfelelő méretü, szerves anyagból álló fonal a hosszegységig terjedő megnyujtásakor birna, kisebb még e szerint mint a $^1/_2p$-vel egyenlő fele azon erélyveszteségnek, melyet a nyújtást nemszerves testen eszközló súly, a hosszegységnek megfelelő sülyedése alatt elszenvedne.

Ennek folytán a megfelelő súlylyal megterhelt szerves test épen úgy, mint a nem szerves, nem csak a súlynak megfelelő statikai határig, hanem még azon túl fog megnyujtatni, mert az általa odáig megszerzett potentialis erély kisebb, mint a súlynak erélyvesztesége, melynek többletét azért a súly saját sebességének kinetikai erélyére átváltoztatta. Minthogy azonban a statikai határon túl a megnyújtott testnek potentialis erélye gyorsabban növekszik, mint a súly által még tovább elszenvedett erélyveszteség, úgy, hogy ez utóbbi csak a kinetikai erélykészlet által megfelelőleg kiegészitve, képes a nyújtott testnek mindinkább növekedő potentialis erélyét fedezni, azért végre is minden kinetikai erély teljesen el fog fogyni. E határponton pedig a terhelő súly már nem lévén képes a túlnyujtott test erélyhatásának ellenállani, azért most ez utóbbinak behatása alatt a súly fog újból emelkedni s így fog tehát a rugalmas test terhelő súlyával együtt lengésbe tétetni.

E lengéseket fogjuk most a nem szerves testeknek már ismert lengéseivel összehasonlítva, taglalni, hogy a netalán köztök egyre másra nézve fennálló külömbséget meghatározzuk.

Legyen e vizsgálatnak legelső tárgya

2. A lengés tágassága.

A nemszerves testekre vonatkozólag láttuk előbb, hogy a lengésnek határai úgy a megfelelő megterhelés mellett, valamint a nélkül is, átalában akkor, ha a rugalmassági együttható a nyújtásra és az összenyomásra nézve egyenlő, úgy a statikai nyujtásnak megfelelő határ felett, valamint ez alatt egyenlő távolságban állanak, hogy tehát azon határpont összeesik a lengési tér középével.

Hogy most szerves testekre vonatkozólag a helyviszonyokat meghatározhassuk, egy felől a statikai nyujtás határa és másfelől azon két szélső határ közt, melyekhez lengése közben a terhelő súly eljut, feltéve, hogy az olyan, hogy felszálló lengéskor azon ponton túl nem halad, melyet a még meg nem nyújtott rugalmas testnek megterhelendő alsó vége elfoglal, tájékozásunkra a 4-ik ábrát használjuk.

Felteszszük, hogy a rugalmas szerves fonal, mely alsó végével o-ig leér, e P súlylyal megterheltetett, minek folytán az a D-vel egyenlő statikai nyujtásnak d-be eső határán túl $d_{,,}$-ig, mint a lengésnek alsó határáig, összesen $D_{,,}$ hosszúságban megnyujtatott. Mint metszéki tengelyt a súlyok számára op vonalat, mint rendező tengelyt a nyújtások számára pedig oD vonalat használván, az obe mentelékes feszély vonalnak csúcspontját o-ba helyezvén, $obecd_{,,}do$ felület megfelel akkor a $d_{,,}$-ig, $D_{,,}$ hosszuságban megnyújtott fonal $E_{p,,}$ potentialis erélyének; $obdo$ felület pedig megfelel E_{pf} potentiális erélyének, melylyel ugyanazon fonal a $P = oa$ súlynak megfelelő d-ig érő és D-vel egyenlő statikai nyújtás mellett bir. A potentialis erélyveszteséget, melyet a terhelő súly o-tól d-ig D hosszuságban lesülyedve, elszenved, PD-vel, azon veszteséget pedig, melyet az $d_{,,}$ig, az $od_{,,} = D_{,,}$-val egyenlő összes hosszaságban elszenved, $PD_{,,}$-val jelölvén, és tekintetbe vevén, hogy a kölcsönös erélyfelváltás a terhelő súly és az általa kifeszített rugalmas test közt csak egyenlő érték szerint történhet, áll ez egyenlet:

$$\text{f)} \ldots \quad PD - E_{pf} = E_{p,,} - E_{pf} - P(D_{,,} - D),$$

következőleg még:

$$E_{pa} = PD_a, \text{ tehát } P = \frac{E_{pa}}{D_a}$$

s ha ez utóbbi egyenletben E_{pa}-t a b) alatti kifejezése által, melyben azonban D helyett D_a-t irunk, helyettesítjük, lesz akkor:

$$P = -a + \frac{a}{2b}\sqrt{b^2 + D_a^2} + \frac{ab}{2D_a} \log. \frac{D_a + \sqrt{b^2 + D_a^2}}{b};$$

és miután az a) alatti egyenlet szerint még áll:

$$P = -a + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + D^2},$$

úgy e két utóbbi egyenletet összekapcsolván és D szerint feloldván, kapjuk e kifejezést:

$$\text{g)}.\ D = \sqrt{\left[\frac{\sqrt{b^2 + D_a^2}}{2} + \frac{b^2}{2D_a} \log. \frac{D_a + \sqrt{b^2 + D_a^2}}{b}\right]^2 - b^2}.$$

Hogy most elhatározhassuk, vajjon a statikai nyújtásnak megfelelő d határpont a lengés o és $d_{,,}$ határpontjai közt lévő távolságnak közepére esik-e vagy nem? vizsgálnunk kell, hogy

$$D_a \mathrel{\substack{>\\=\\<}} 2D$$

esetek közűl melyik áll?

E czélból D helyett a g) alatti kifejezést alkalmazva, néhány áthelyezés után a következő kifejezést kapjuk:

$$\sqrt{4 + \frac{D_a^2}{b^2}} - \sqrt{1 + \frac{D_a^2}{b^2}} \mathrel{\substack{>\\=\\<}} \frac{b}{D_a} \log. \left[\frac{D_a}{b} + \sqrt{1 + \frac{D_a^2}{b^2}}\right],$$

melyet $\left(\frac{D_a}{b}\right)$-t rövidítés okáért m által helyettesítve, még így is irhatunk:

$$\sqrt{4 + m^2} - \sqrt{1 + m^2} \mathrel{\substack{>\\=\\<}} \frac{1}{m} \log. \left[m + \sqrt{1 + m^2}\right].$$

vagy

$$e^{m\left[\sqrt{4+m^2}-\sqrt{1+m^2}\right]} \gtreqless m+\sqrt{1+m^2}.$$

A viszony, melyben e kifejezésnek két oldala nagyságára nézve áll, csak az által határozható meg, hogy a baloldali kitevőleges értéket sorba fejtjük és aztán mindkét oldalon m helyébe tetszés szerinti számértékeket próbaképen teszünk; ilyen eljárás mellett azt találjuk, hogy m-nek o-tól fogva emelkedő értékeivel a bal oldalnak értéke a jobb oldaléhoz képest mindinkább visszamarad, ez által azt bizonyitva, hogy $D_{,,}$ mint a lengés két határa közti távolság kisebb $2D$-nél, vagyis, mint a statikai nyujtás határa felett álló lengési útszakasznak kétszeres értéke, *hogy* tehát *szerves testeknél azon statikai határ már nem esik össze a lengés egész útjának közepével*, mint az egyébiránt már az ábrából is kitetszik. Az f) alatti egyenlet értelmében ugyanis a lengésnek alsó határa akkor lesz elérve, mikor bce felület mint a rugalmas testnek azon erélynövedéke, mely a d-től $d_{,,}$-ig lesülyedő nyujtó súlynak erélyveszteségében fedezetét nem találja, egyenlő lesz oab felülettel, mely megfelel a o-tól d-ig lesülyedő súly által szerzett kinetikai erélynek, mely utóbbi által fedeztetik épen a túlfeszitett rugalmas testnek különben fedezet nélkül maradandó erélytöbblete. Könnyen felismerhető pedig azon ábrán, hogy bce felületnek bc függélyes magassága annál inkább vissza fog maradni a különben azon felülettel egyenlő oab felületnek ab függélyes magasságához képest, minél alantabb áll a statikai nyujtásnak d-be eső határpontja és ezzel együtt a lengésnek alsó határpontja $d_{,,}$ is.

3. A lengés sebességei.

A lengési sebesség számára szolgálandó átalános kifejezésnek levezetésénél azon felvételből indulunk ki, hogy a P súlylyal megterhelt rugalmas, szerves test az azon súly által feltételezett statikai nyujtásnak határán túl megnyujtatott s azután szabadon bocsáttatott. Akkor az súlyával együtt két ellentétes erőnek, ugy mint egyfelől az azt fölfelé hajtó rugalmassági feszélynek, másfelől pedig a nehézségnek hatása alatt áll. Az előbbinek kifejezését szolgáltatja nekünk a rugalmas test által megnyujtott állapotában birt erélynek külzeléki hányadosa, mely az a) alatti egyenlet folytán, — (ha az összes nyujtást $D_a = D + h$-képen veszszük, értve h alatt a D-vel jelölt statikai nyújtásnak határán túl eső szakaszt, melyet azon határtól lefelé tevőleges értelemben számítunk) — mint a D_a nyujtásnak alsó határától fölfelé ható g_a gyorsúlásnak e kifejezéséhez vezet:

$$g_a = g\,\frac{-a + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (D+h)^2}}{P}$$

s ha ebből még a nehézségi gyorsúlást levonjuk, akkor lesz a kettő utáni eredményes φ_a gyorsulás:

$$\varphi_a = g\left[\frac{-a + \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (D+h)^2} - P}{P}\right],$$

helyettesíttetvén a számlálóban P-t az a) alatti kifejezése által, lesz:

$$\varphi_a = g\left[\frac{-a + \frac{a}{b}\sqrt{b^2+(D+h)^2} - \left(-a + \frac{a}{b}\sqrt{b^2+D^2}\right)}{P}\right]$$

vagy

$$\varphi_a = \frac{g}{P}\cdot\frac{a}{b}\left[\sqrt{b^2+(D+h)^2} - \sqrt{b^2+D^2}\right].$$

Állván továbbá ez egyenlet:

$$vdv = \varphi dh,$$

ha ebben φ helyébe φ_a-nak előbbi kifejezését teszszük, de abban rövidség okáért Q-t használva $\left(\frac{g}{P}\,\frac{a}{b}\right)$ helyett, akkor lesz:

$$vdv = -Q\left[\sqrt{b^2 + (D+h)^2} - \sqrt{b^2+D^2}\right]dh,$$

hol a nemleges előjel azért alkalmazandó, mert h-nak kisebbültével a sebesség növekszik.

Az utóbbi egyenletet $h = o$ és $h = r$ határok közt egészelvén, r alatt a statikai határ és a lengésnek alsó határa közti távolságot értve, úgy, hogy $D_a = D + r$, kifejezhetjük akkor a lengés alsó szakaszára vonatkozó v sebességet ekképen:

$$\text{h)} \dots \; v^2 = Q \Bigg[D_a \sqrt{b^2 + D_a^2} - (D + h)\sqrt{b^2 + (D + h)^2}$$

$$- 2(r - h)\sqrt{b^2 + D^2} - b^2 \log. \frac{(D + h) + \sqrt{b^2 + (D + h)^2}}{D_a + \sqrt{b^2 + D_a^2}} \Bigg];$$

minthogy pedig

$$r - h = D_a - D - h,$$

és a g) alatti egyenlet folytán egyszersmind áll:

$$2D\sqrt{b^2 + D^2} = D_a\sqrt{b^2 + D_a^2} + b^2 \log. \frac{D_a + \sqrt{b^2 + D_a^2}}{b},$$

úgy ez értékeket $\left[2(r - h)\sqrt{b^2 + D^2}\right]$ helyett a h) alatti egyenletben alkalmazván, a lengés sebességét ekképen fejezhetjük ki:

$$v^2 = Q \Bigg[(D + h) \left\{ 2\sqrt{b^2 + D^2} - \sqrt{b^2 + (D + h)^2} \right\}$$

$$- b^2 \log. \frac{(D + h) + \sqrt{b^2 + (D + h)^2}}{b} \Bigg],$$

mely kifejezés már érvényes nemcsak a lengésnek alsó, $(D + r)$-től D-ig érő szakaszára, hanem annak felső, D-től o-ig terjedő szakaszára is, ha ez utóbbira vonatkozólag h nemleges jellel vétetik.

Az utolsó egyenletből következik, hogy a statikai nyújtás határán a sebességnek legnagyobb értéke:

$$\text{i)} \dots \; v_{max}^2 = Q \left[D\sqrt{b^2 + D^2} - b^2 \log. \frac{D + \sqrt{b^2 + D^2}}{b} \right].$$

Ha pedig a sebességi maximumnak kifejezését közvetlenül a h) alatti egyenletből vezetjük le, akkor az:

$$v^2_{max} = Q \left[D_a \left[\sqrt{b^2 + D_a^2} - \sqrt{b^2 + D^2} \right] - (D_a - D) \sqrt{b^2 + D^2} - b^2 \log. \frac{D + \sqrt{b^2 + D^2}}{D_a + \sqrt{b^2 + D_a^2}} \right],$$

és ha még a menteléknek féltengelyeit megfelelőleg f és g_1, *) mint a mentelékes feszélyvonalnak együtthatói által fejezzük ki, tehát tévén:

$$a = \frac{f}{2g_1} \text{ és } b = \frac{f}{2\sqrt{g_1}}$$

következőleg még:

$$Q = \frac{g}{P} \frac{a}{b} = \frac{g}{P\sqrt{g_1}},$$

akkor a sebesség maximuma kifejezhető még igy is:

$$v^2_{max} = \frac{g}{2Pg_1} \left[D_a \left[\sqrt{f + 4g_1 D_a^2} - \sqrt{f^2 + 4g_1 D^2} \right] - (D_a - D) \sqrt{f^2 + 4g_1 D^2} - \frac{f^2}{2\sqrt{g_1}} \log. \frac{2\sqrt{g_1} D + \sqrt{f^2 + 4g_1 D^2}}{2\sqrt{g_1} D_a + \sqrt{f^2 + 4g_1 D_a}} \right].$$

És ez a sebesség maximumának átalános kifejezése, úgy szerves mint nemszerves, rugalmas, hasábos alakkal biró testekre vonatkozólag. Mert ha az egyik együttható $f = o$, akkor

$$v^2_{max} = \frac{g}{P\sqrt{g_1}} (D_a - D)^2 = \frac{g}{P\sqrt{g_1}} r^2.$$

De minthogy

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{g_1}} = \text{cotang. } \beta = \text{tang. } \alpha,$$

*) Megkülönböztetésül a nehézségi gyorsúlást jelentő g-től, g_1-vel jelöljük itt a második együtthatót.

ha β a mentelék asymtotáinak szögét, α tehát az ez utóbbit kiegészitő szöget jelenti; és minthogy más felől a nemszerves testek nyujtására vonatkozó egyenletünkben használt A együttható nem egyéb, mint azon szögnek trigonometriai tangense, melyet a terhelő súly nagyságával arányban oldalra eltérő egyenes feszélyvonal, a nyújtás számára rendezőtengelyképen szolgáló merőleges vonallal képez, azért áll még:

$$\frac{1}{\sqrt{g_1}} = \text{tang.}\alpha = A,$$

azaz a szerves testeknek nyújtására vonatkozó második g_1 együtthatójából kivont második gyöknek viszonylagos értéke egyenlő a nemszerves testek nyújtására vonatkozó $A = \frac{eq}{l}$ együtthatóval. Következőleg áll:

$$v = r\sqrt{\frac{g}{P\sqrt{g_1}}} = r\sqrt{\frac{gA}{P}}\;.$$

4. A lengés időtartama.

Hátra volna még, hogy a nyújtás által megfeszült szerves testek lengésének időtartamát, az átalános egyenletek alapján, u. m.:

$$vdv = -\varphi dh,$$

következőleg

$$dt = \frac{dv}{\varphi} = -\frac{dh}{v},$$

kifejezzük. Az ez esetre vonatkozólag az előbbi egyenletekből levezethető külzeléki egyenlet:

$$dt = -\frac{dh}{\sqrt{Q(D+h)\left[2\sqrt{b^2+D^2} - \sqrt{b^2+(D+h)^2} - b^2\log.\frac{(D+h)+\sqrt{b^2+(D+h)^2}}{b}\right.}}$$

azonban alakjánál fogva nem engedi meg az egészlést. Tudván mégis azt, hogy a lengésnek határain úgy fenn mint lenn a lengési sebesség nulla; az egyensúlyhatáron pedig a sebesség maximuma i) egyenlet szerint ugyanaz úgy a le- mint a felszálló lengésnél; s miután másfelől úgy találtuk, hogy a lengésnek határai fölül és alul szerves rugalmas testeknél nem állanak az egyensúly határpontjától egyenlő távol, hanem az alsó lengési szakasz rövidebb, mint a felső; következőleg úgy a sebességnek, valamint gyorsúlásnak h szerinti külzeléki hányadosa a lengés alsó szakaszában nagyobb, mint a felsőben; úgy mindezekből következtethetjük, hogy megfordítva, a lengésnek időtartama nagyobb a felső szakaszban, mint az alsóban. Tovább azonban ez időviszonyokat nem taglalhatjuk. De ebben annál könynyebben meg is nyugodhatunk, miután a szerves testek rugalmasságára vonatkozó kifejezések fölötte bonyolodott alakjok miatt egyátalában alig engedik meg, hogy azokat ilyféle testekre vonatkozó feladatok megoldására alkalmazzuk. — E testeknél még a megközelítő megoldással is be kell érnünk, már tekintettel azon körülményre is, hogy azoknál a rugalmassági együtthatók a nedvességnek folyton változó foka és nyilván még egyéb okok miatt értékökben szintén folyton változnak. De láttuk, hogy ha a két együttható közűl az egyiket mellőzzük, felvévén, hogy $f = o$, akkor valamennyi többi kifejezés is egyenlővé válik a nem szerves testekre vonatkozó azonnemü kifejezéssel; épen azért használhatjuk ez utóbbiakat arra is, hogy azok segitségével a szerves testek rugalmasságára vonatkozó feladatokat elég kielégítő megközelítéssel megoldjuk.

A feladatok azonban, melyek minket az eddigi taglalásokra késztettek, nem ily természetüek, hanem inkább oly sarkalatos kérdésekre vonatkoznak, melyek részint az izommechanikának, részint az ennek átkutatására irányuló methodikának köréből valók, de a melyeknek megoldásánál mégis a fejtegetéseink által nyert eredményeknek kell majd biztos, mert mindenkor a mathematikai ellenőrzésnek alávethető, alapképen szolgálniok.

Épen azért mielőtt még vizsgálataink e részét befejeznénk, tekintettel az ezen értekezések során az izommechanika köréből felmerülendő kérdésekre, a rugalmas lengés görbéjének egyenletét még egyszer veszszük methodologiai szempontból elemzés alá, hogy kimutassuk, mikép lehet ily görbe alapján azon erély- és erő-viszonyokat meghatározni, melyek a görbének épen általok feltételezett sajátlagos jellegében általunk is értelmezhető módon kifejezve vannak.

8. §.

A rugalmas nyujtott test által, lengésekor irt görbének elemzése.

Az elméleti izommechanika azon feladatot tüzi elénk, hogy meghatározzuk az erélyt, melyet az izom összehuzódásakor kifejt, valamint a törvényeket, melyeknek az abból származó erők összeségökben, valamint lehetőleg conponenseikre is szétbontva, tér- és időbeli viszonyaik és hatásképességök nagysága szerint alá vetve vannak. Csak miután a mechanikának e feladatait megoldottuk, kerülhet a sor azon kérdésre is, hogy amaz erők minő phisikai jelleggel birnak.

E mechanikai kérdések megoldására azonban nem szolgáltat kezünkhöz az izom semmi más segédeszközt, mint a myogrammot, melyet megfelelőleg megterhelve, a myograph jelző-emeltyüje által megir. Kérdés támad azért, vajjon e segédeszköz elégséges-e már olyféle feladatnak a megoldására és hogyan és mennyiben alkalmazható az arra csak kisérletképen is?

Míg az e kérdésre adandó választ az izomra vonatkozólag egy későbbi értekezésre magunknak fentartjuk, addig alkalmas példán már itt meg akarjuk mutatni, hogy mikép lehet megfelelő eljárás mellett, ugyanazon álláspontból kiindulva, az előbb jelzett mechanikai kérdéseket megoldani.

Alkalmas példát pedig erre szolgáltat a tekercsrugó, melynek törvényeivel a lényeges viszonyokra nézve már megismerkedtünk.

Nem tekinthetjük ugyan a tekercsrugónak hatásmódját egyszerüen analognak az izom hatásmódjával, rángásakor, sőt nem fogjuk elmulasztani ez értekezések sorában megfelelő helyen majd részletesen mindazt felsorolni, mire nézve e két testnek hatásmódja egymástól különbözik. Itt azonban csak a körül forog a dolog, hogy megmutassuk, miszerint azon görbe, melyet a megfeszült tekercsrugó felszökésekor megír, már elégséges arra, hogy a rugó által ekkor kifejtett erély és az ennek megfelelő erők valamennyi eddig taglalt viszonyokra nézve, meghatároztassanak, mihelyt a lengés görbéjének egyenlete ismeretes. Mert elemezve ez utóbbit, eljutunk megfordított sorrendben mindazon tényezőknek kifejezéseihez, melyek előbb az ugyanazon görbére vonatkozó egyenletnek levezetésénél lépcsőkképen szolgáltak.

Felteszszük tehát, hogy a felső végénél felakasztott és alsó végén ismert P súlylyal megfelelőleg megterhelt tekercsrugó, az e súly által feltételezett statikai nyújtás határán túl odáig megnyujtatott, a honnan, mint a lengés alsó határától, szabadon bocsáttatásakor a lengés felső határáig felszökik, mialatt az, megfelelő készülék segitségével, a megterhelt alsó végének lengését tér- és időbeli lefolyása szerint feltüntető görbét megirja.

A görbének alakját az 5-dik ábra tünteti fel, melynél felvétetik, hogy o mint a statikai nyujtásnak megfelelő pont egyszersmind a tekercsrugó megterhelt végének lengési középpontja; $d_{,,}$ mint a túlnyujtásnak határpontja egyszersmind a lengésnek alsó határpontja, melynek magasságában fekszik a teljes lengésnek időtartamára $d_{,,}$-tól mint o-tól 16-ig terjedő metszéki tengely; az ezen egyenlő időszakok szerint felállított függélyes rendezők által a rugó végének egymás után következő H emelkedései megmérhetők. A görbe csúcspontjának magassága megfelel a $d_{,}$ által kijelölt felső lengési határpontnak, a hozzá tartozó rendező tehát mutatja az emelkedés maximumát.

Az itt ábrázolt alaknak megfelel a 4. §-ban 21 a) alatt levezetett egyenlet:

$$a) \ldots . \; H = r \left[1 - \cos \left(\pi \frac{t}{T_f} \right) \right],$$

melyben H a rugó megterhelt végének a lengés alsó határpontjától kiinduló emelkedését; r mint a lengés határpontjainak távolsága az egyensúly helyétől a lengés tágasságát; T_f az időt, mely az egyik határpontnak odahagyásától fogva a másikának eléréseig eltelik, végre t azon időt jelenti, mely az alsó határponttól megindúlt lengés kezdete óta eltelt.

Viszont tehát, ha ilyen, a rugó által följegyzett görbén az összetartozó H és t értékek, meg T-nek az értéke megméretnének, meghatározható lenne r és így magának a görbének egyenlete is.

Ez egyenletből pedig következőképen lehet a rugót hajtó erőket, valamint hatásaiknak törvényeit meghatározni.

Ha azon egyenletnek a független változó t szerinti első külzeléki hányadosát veszszük, kapjuk a *lengés sebességének* kifejezését:

$$b) \ldots v = \frac{dH}{dt} = \frac{\pi}{T_f} r \sin\left(\pi \frac{t}{T_f}\right),$$

mely szerint e sebesség

$$t = o\text{-nál és } t = T_f\text{-nél}$$

$$v = o,$$

$$t = {}^1/_2 T_f\text{-nél pedig}$$

maximumát éri el, mint

$$v_{max} = \frac{\pi}{T_f} r.$$

Ugyanazon egyenletnek második külzeléki hányadosa adja a *gyorsulást*, mint

$$c) \ldots \varphi = \frac{d^2H}{dt} = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{\pi}{T_f}\right)^2 r \cos\left(\pi \frac{t}{T_f}\right),$$

mely $t = {}^1/_2 T_f$-nél

$$\varphi = o,$$

$$t = o\text{-nál pedig}$$

mint

$$d) \ldots\ldots \varphi_{max} = \left(\frac{\pi}{T_f}\right)^2 r$$

tevőleges, tehát fölfelé irányuló maximumát,

$$t = T_f\text{-nél pedig}$$

mint

$$\varphi_{max} = -\left(\frac{\pi}{T_f}\right)^2 r$$

nemleges, tehát lefelé irányúló maximumát éri el.

Ha a d) alatti egyenletet r független változó után különzeljük, támad:

$$\frac{d\varphi_m}{dr} = \left(\frac{\pi}{T_f}\right)^2 = \text{const.},$$

miből látjuk, hogy a gyorsúlás növedéke független a lengés tágasságától, következőleg, hogy az a lengés egész alsó szakaszában meg nem változik, és ugyanaz marad a felsőben is, melyen azonban nemleges jelű lesz.

Irván továbbá:

$$\text{e)} \ldots\ldots\ldots \left(\frac{\pi}{T_f}\right)^2 = Q$$

és

$$r\cos\left(\pi\frac{t}{T_f}\right) = h = (D_{,,} - D)$$

hol D a terhelő súlynak megfelelő statikai nyújtást, $D_{,,}$ pedig a lengés alsó határáig érő nyújtást jelenti, melyet a P súlylyal megterhelt, illetőleg még tovább megnyújtott rugó elszenved φ még így is kifejezhető:

$$\varphi = Qh = Q(D_{,,} - D).$$

De azonkivül φ még egyenlő $m = \frac{P}{g}$ tömeg által osztott P_x erővel is, mely azon tömegre hat; minek folytán áll:

$$\text{f)} \ldots . \varphi = Q(D_{,,} - D) = g\frac{P_x}{P}.$$

E szerint tehát P_x erő egyenes viszonyban áll $(D_{,,} - D)$ külömbséggel, s így A együtthatóval ekképen kifejezhető:

$$\text{g)} \ldots . P_x = A(D_{,,} - D).$$

Ez utóbbi kifejezést P_x helyett az f) alatti egyenletbe állítván, kapjuk a következőt:

$$Q(D_{,,} - D) = \frac{g}{P}A(D_{,,} - D),$$

miből következik, hogy

$$Q = \frac{g}{P}A,$$

és tekintettel az e) alatti egyenletre, hogy

$$\text{h)} \ldots Q = \frac{g}{P} A = \left(\frac{\pi}{T_f}\right)^2,$$

mely utóbbi egyenlet szerint a lengés alsó határpontjától a görbe csúcspontjáig terjedő emelkedésnek *időtartama*

$$\text{i)} \ldots T_f = \frac{\pi}{\sqrt{A\frac{g}{P}}}. {}^{*)}$$

A h) alatti egyenlet folytán átváltozik a *lengés sebességének* fennebbi b) alatti kifejezése erre:

$$\text{j)} \ldots v = \sqrt{A\frac{g}{P}}\; r.\, sin\left(\pi\frac{t}{T_f}\right),$$

a *gyorsúlásnak* c) alatti kifejezése pedig erre:

$$\text{k)} \ldots \varphi = A\frac{g}{P}\, r\, cos\left(\pi\frac{t}{T_f}\right) = A\frac{g}{P}(D_{,,} - D).$$

Felvéve, hogy a g) alatti egyenletben $D = o$, akkor

$$P_s = AD_{,,,}$$

tehát átalánosan

$$P = AD,$$

s minthogy e szerint

$$A = \frac{P}{D},$$

következik, hogy A együttható a terhelő P súly és az általa eszközölt D nyujtás közti viszonyt jelenti.

A P számára épen nyert kifejezés folytán a k) alatti egyenletet még igy is irhatjuk:

---

*) A 6. §-ban kifejtett okoknál fogva azonban a megterhelt tekercsrugó féllengésének időtartama az ottan a 41) és 51) alatt levezetett egyenletek folytán

$$T_{fr} = \frac{2}{\pi} T_f = \frac{2}{\sqrt{A\frac{g}{P}}},$$

hol $A = \frac{\varepsilon}{l}$, P pedig a rugónak összes súlyát jelenti.

$$\varphi = g\frac{AD_{,,}}{P} - g\frac{AD}{P} = g\frac{AD_{,,}}{P} - g;$$

miből látjuk, hogy φ azon eredményes gyorsúlás, mely a $\frac{P}{g}$ tömegre beható $AD_{,,}$ erőnek gyorsúlásától és az azzal ellentétes g nehézségi gyorsúlástól származik.

Végre még kifejezhetjük a *potentialis erélyt* is, melylyel a tekercsrugó akár valamely terhelő súly által, akár más módon eszközölt nyujtásakor bír.

A 3 §-ban levezetett 12) alatti átalános egyenlet szerint ugyanis áll:

$$E_{po} - E_p = {}^1/_2 mv^2 - {}^1/_2 mv_o^2,$$

és minthogy itt a kezdeti sebesség $v_o = o$, áll még:

$$E_{po} - E_p = {}^1/_2 mv^2.$$

Helyettesítvén itten m-t $\frac{P}{g}$ által, v-t pedig a j) alatti kifejezése által, lesz:

$$E_{po} - E_p = {}^1/_2 Ar^2 \sin^2\left(\pi\frac{t}{T_f}\right);$$

ha tehát $t = {}^1/_2 T_f$, akkor

$$E_{po} - E_p = {}^1/_2 Ar^2,$$

és minthogy $r = D_{,,} - D$,

lesz még

$$E_{po} - E_p = {}^1/_2 A(D_{,,} - D)^2,$$

és ha $D = O$, lesz $E_p = O$, minek folytán áll:

$$E_{po} = {}^1/_2 AD^2$$

és tehát átalában minden nyújtásnál:

$$E_p = {}^1/_2 AD^2 = {}^1/_2 PD;$$

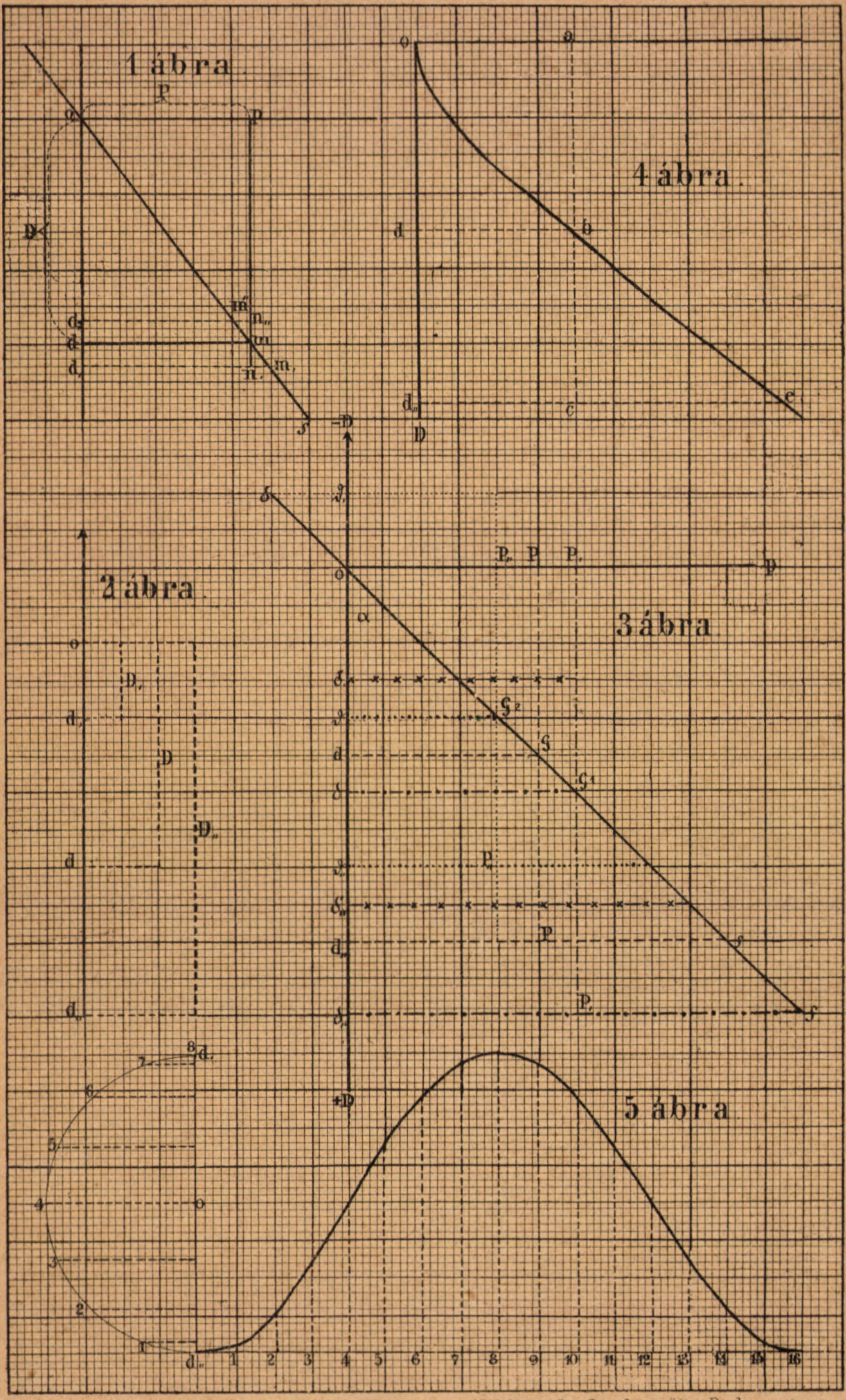
miből még végre következik, hogy:

$$\frac{dE_p}{dD} = AD = P,$$

mi által a nyujtás alatti feszély, mint az erélynek hatása irányába eső tér szerint levezetett külzeléki hányadosa, tehát az azon erélyre vonatkozó *erő* is ki van fejezve.

Igy tehát a lengést feltüntető görbének egyenletéből kiindulva, a rugalmassági hajtó erőknek törvényeit kifejező tételek összefüggő lánczsorán át visszajutunk azon kifejezéshez, mely előbbi fejtegetéseinknél mint kiinduló pont szolgált.

Hogy mennyiben lehetséges elvileg hasonló eljárás utján a myogramm görbéjéből, ha annak egyenlete adva volna, az izom által összehuzódásakor kifejtett erélyt és az abból származó hajtóerőket szintén meghatározni: az egy későbbi értekezésnek fogja tárgyát képezni.



Ny. Pataki J. udv. műint. Budapesten.

Hőmennyiség-mérések. Schuller Alajos és dr. Wartha Vincze tanároktól. Egy táblával. 20 kr. — XIII. Folyékony cyánsó vas-nagyolvasztóból. Közli Kerpely Antal l. tag. 10 kr. — XIV. Dolgozatok a k. m. tud. egyetem élettani intézetéből. Közli Jendrássik Jenő l. tag. 50 kr. — XV. Lázas bántalmak egyik okbeli tényezőjéről. Székfoglaló értekezés. Balogh Kálmántól. 20 kr. — XVI. Szibériai és délamerikai gombák (Fungi e Sibiria et America Australi.) Kalchbrenner Károly r. tagtól. Négy táblával. 60 kr.

Kilenczedik kötet. 1878—1879.

I. Adatok a dentinfogak finomabb szerkezetének ismeretéhez. Teschler György reáliskolai tanártól Körmöczbányán. 7 táblán rajzolt 28 ábrával. 60 kr. — II. A ditroi syenittömzs kőzettani és hegyszerkezeti viszonyairól. Koch. 1 tábla rajzzal. 30 kr. — III. A gyuladásról. Thanhoffer. 3 tábla rajzzal. 40 kr. — IV. Néhány gázkeverék szinképi vizsgálata. Lengyel. 1 tábla rajzzal. 10 kr. — V. Uj adatok Magyarhon kryptogam virányához az 1878. évből. Hazslinszky 10 kr. — VI. Agyszöveti vizsgálatok. Laufenauer. 2 tábla rajzzal. 10 kr. — VII. Emlékbeszéd Balla K. felett. Galgóczy. 10 kr. — VIII. Az érvesréről Thanhoffer. 64 fametszvény és 1 tábla. 50 kr. — IX. Urvölgyit egy uj rézásvány. Szabó. 1 tábla rajzzal. 10 kr. — X. A Pinguicula alpina mint rovarevő növény. Klein Gyulától. 2 tábla rajzzal. 20 kr. — XI. Az aczél megkülönböztető jelei. (Inditott tömecsü állapot, meleg törő próba.)Kerpely Antaltól. 30 kr. — XII. Hébert és Munier Chalmas közleményei a magyarországi ó harmadkori képződményekről. Hantken Miksától. Két tábla rajzzal. 20 kr. — XIII. Fouqué munkája Santorin vulkáni szigetről, megismerteti és jegyzetekkel kiséri dr. Szabó József. 20 kr. — XIV. Emlékbeszéd néhai dr. Kovács-Sebestyén Endre lev. tag fölött. Dr. Rózsay Józseftől. 10 kr. — XV. Floristicai adatok, különös tekintettel a Roripákra. Borbás Vinczétől. 40 kr. — XVI. A hazai epilobiumok ismeretéhez. Borbás Vinczétől. 20 kr. — XVII. A szaruhártya szalagszerü elhomályosodásáról. (Bundförmige Hornhauttrübung.) Rajzzal egy táblán. Dr. Goldzieher Vilmostól. 10 kr. — XVIII vizsgálatok az agy corticalis látómezőjéről. Dr. Laufenauer Károlytól 20 kr. — XIX. Ujabb adatok a tengeri moszatok krystalloidjairól. Klein Gyulától. Egy táblával. 30 kr. — XX. A magas hőmérsék és karbolsavgőz hatása szerves testekre. Than Károlytól. 10 kr. — XXI. Az alsó-kékedi gyógyforrás chemiai elemzése. Stollár Gyulától. A felső-rákosi savanyúviz, valamint a székely-udvarhelyi hideg sós fürdő chemiai elemzése. Dr. Solymosi Lajostól 20 kr. — XXII. A felső-ruszbachi ásványviz vegyelemzése. Scherfel W. Auréltól. 10 kr. — XXIII. A gránát és Cordierit (Ditroit) szereplése a magyarországi Trachytokban Dr. Szabó Józseftől. 30 kr — XXIV. Megemlékezés Bernard Claude fölött. Balogh Kálmántól. 20 kr. — XXV. Regnault H. Victor emlékezete. Dr. Than Károlytól. 10 kr.

Tizedik kötet. 1880.

I. Közlemények a m. k. egyetem vegytani intézetéből. I. Adatok a carbonylsulfid phisikai sajátságaihoz. Dr. Ilosvay Lajostól. — A budapesti világitó gáz chemiai analysise. — Ugyanattól. — Egy földpát mennyiségi analysise. Loczka Józseftől. — II. Gróf Vass Samu emlékezete. Deák Farkastól. — III. A magyarországi dunaszigetek földirati csoportosulása s képződésök tényezői. Dr. Ortvay Tivadartól. Egy melléklettel. — IV. Adatok a Martin-aczél tulajdonságainak ismertetéséhez. Kerpely Antaltól. — V. A viz-elvonó testek behatásáról a kámforsavra és amidjaira. Balló Mátyástól. — VI. A vadgesztenye gyökereinek ismertetéséhez. Klein Gyulától és Szabó Ferencztől. Egy táblával. — VII. Az utóvilágitásról Geissler-féle csövekben. Dr. Lengyel Bélától. — VIII. A rank-herleini és szejkei ásványvizek chemiai elemzése. Dr. Lengyel Bélától. — IX. A városligeti artézi kút hévforrásának vegyi elemzése. Than Károlytól. — X. Adatok a Mecsekhegység és dombvidéke Jurakorbeli lerakodásának ismertetéséhez. I. Stratigraphiai rész. Böckh Jánostól. —XI. Myelin és idegvelő. (Szövettani tanulmány.) Petrik Ottótól. 16 rajzzal. — XII. Közlemények a m. k. egyetem vegytani intézetéből. I. A durranó lég sűrűségének meghatároása. Kalecsinszky Sándortól. — II. A nitrosylsav néhány sójáról. Dr. Csulak Lajostól. — XIII. A magyar tengerpart szivacsfaunája. I. közlemény. Dr. Dezső Bélától. — XIV. A bábolnai meleg »Mátyás-forrás« és a szovátai »Fekete-tó« hideg sósforrás chemiai elemzése. Dr. Hankó Vilmostól. — XV. Közlemények a kolozsvári egyetem élet- és kórvegytani intézetéből. Dr. Ossikovszky Józseftől. I. Adalék a hyrosin és a skatol vegyi szerkezetéhez. II. Arsenkéneg mint méreg s annak szerepe törvényszéki kérdésekben. III. A tellurnak előállitása a nagyági aranytellur érczekből és a nyers tellurból. — XVI. Az ágyéki és gerinczagyi dúczok többszörösségéről. Dr. Davida Leótól. Egy táblával. — XVII. Uj vagy kevesbbé ismert szömörcsögfélék. (Phalloidei novi vel minus cogniti.) Kalchbrenner Károlytól. Három táblával. — XVIII. Az associált szemmozgások idegmechanismusáról. Dr. Hőgyes Endrétől. I. közlemény. 2 kőnyomatú és 3 egyszerű nyomatú táblával. (Bevezetés. I. rész. A fej- és testmozgásokat kisérő associált szemmozgások tüneményei emlősöknél és az embereknél.)

Tizenegyedik kötet. 1881.

I. Az associált szemmozgások idegmechanismusáról. 2 fametszettel. (Második közlemény. II. rész. Az idegrendszer egyes részeinek befolyásáról az önkénytelen associált szemmozgásokra.) Dr. Hőgyes Endrétől. — II. A Frusca-gora aquitaniai flórája. 4 táblával. Dr. Staub Móricztól. — III. A pinguicula és utricularia sejtmagjaiban előforduló krystalloidokról (Egy táblával.) Klein Gyulától. — IV. Vegyerélytani vizsgálatok. (II. értekezés.) Dr. Than Károlytól. Egy tábla kőrajzzal. — V. Ujabb tanulmányok a kámforcsoport köréből. Balló Mátyástól. — VI. A homorodi vasas savanyúvíz-források chemiai elemzése. Dr. Solymosi Lajostól. — VII. A solymosi hideg savanyú ásványviz chemiai elemzése. Dr. Hankó Vilmostól. — VIII. Önműködő higanylégszivattyú. Schuller Alajostól. Egy rajzzal. — IX. Adatok a Mecsekhegység és dombvidéke jurakorbeli lerakodásainak ismeretéhez. (II. Palaeontologiai rész.) Böckh Jánostól. 10 tábla rajzzal. — X. A carludovica és a canna gummijárataiból. Szabó Ferencztől. Egy táblával. — XI. Budapest főváros ivóvizei egészségi szempontból s néhány ásványviz elemzése. Balló Mátyástól. — XII. Emlékbeszéd William Stephen Atkinson külső tag felett. Dr. Duka Tivadartól. — XIII. Adatok a harántcsíkú izmok szerkezete- és idegvégződéséhez. (Székfoglaló értekezés.) — Thanhoffer Lajostól. Egy 4-es rétű tábla rajzzal. — XIV. A mohai (fehérmegyei) Ágnes-forrás vegyelemzése. Dr. Lengyel Bélától. — XV. Egy ujabb szerkezetű, vízszivattyúval combinált higany-légszivattyúról. Dr. Lengyel Bélától. Egy tábla rajzzal. — XVI. Az elzöldült szarkaláb mint morphologiai utmutató. Borbás Vinczétől. Egy tábla rajzzal. — XVII. A viznek képződési melegéről. Schuller Alajostól. — XVIII. Békésvármegye flórája. Dr. Borbás Vinczétől. — XIX. Rendhagyó köggombák. Hazslinszky Frigyestől. Rajzokkal. — XX. Dolgozatok a k. m. tud. egyetem élettani intézetéből. Közli Jendrássik Jenő. (I. Adatok a szűrődés tanához. Regéczy Nagy Imre tr. tanársegédtől. II. A gyomor hámsajtjeiről. Ballagi János tr. élettani gyakornoktól. III. Adatok a zsírfelszivódáshoz a gyomorban. Mátrai Gábor orvostanhallgatótól. IV. A zsírok átszivárgásáról, nevezetesen az epe befolyása alatt. Hutyra Ferencz orvostanhallgatótól. (Rajzokkal.) — XXI.
XXII. A tudományok haladásának befolyása a selmeczvidéki bányamivelésre. Péch Antaltól. — XXIII. Vegyerélytani vizsgálatok. A calorimetrikus mérések adatainak összehasonlitásáról. Than Károlytól. — XXIV. Közlemények a m. kir. egyetem vegytani laboratoriumából. Bemutatta Than Károly. (I. A borkősav száraz lepárlási terményeiről. Liebermann Leótól. II. Adatok a Carbonylsulfid physikai sajátságaihoz s tiszta Carbonylsulfid előállitása. 2-ik közlemény. Ilosvay Lajostól.) — XXV. Közlemények az állatorvosi tanintézet vegytani laboratoriumából. Liebermann Leótól. (I. A kénessav kimutatása a borban és más folyadékban. II. Egy készülék könnyen olvadó fémek és öntvények olvadási pontjának meghatározására.) Egy rajzzal. — XXVI. A hydrogen hyperoxyd képződése égés közben. II. Válasz a viz képződési melegének ügyében. Schuller Alajostól.

Budapest, 1882. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.