tanulmányok

191/1986

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

Magyar Tudományos Akadémia
Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete

FUNKCIONÁLIS FÜGGŐSÉGGEL KAPCSOLATOS NÉHÁNY KOMBINATORIKAI JELLEGÜ VIZSGÁLAT A RELÁCIÓS ADATMODELLBEN

VU DUC THI

Tanulmányok 191/1986

Felelős kiadó:

KEVICZKY LÁSZLÓ

E dolgozat eredetileg a szerző kandidátusi disszertációja.

Témavezető:

DEMETROVICS JÁNOS

ISBN 963 311 220 6

ISSN 0324-2951

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS 3

1. ALAPFOGALMAK 11
1.1 Logikai függőségek 13
1.2 Minimális kulcsok és antikulcsok 25
1.3 Speciális minimális kulcsok rendszerei 31

2. LOGIKAI FÜGGŐSÉGEK ÉS IRREDUNDÁNS RELÁCIÓK 35
2.1 Axiómatizálások 40
2.2 Funkcionális függőségek és irredundáns relációk 46
2.3 Duális függőségek és irredundáns relációk 76
2.4 Erős függőségek és irredundáns relációk 87

3. MINIMÁLIS KULCSOK ÉS ANTIKULCSOK 106
3.1 Minimális kulcsot megtaláló algoritmusok 109
3.2 Algoritmusok a minimális kulcsok és antikulcsok
teljes halmazainak keresésére 127

4. SPECIÁLIS MINIMÁLIS KULCSOK RENDSZEREI 143
4.1 A telitett Sperner-rendszerekkel kapcsolatos
minimális kulcsok rendszerei 144
4.2 A k-elemü minimális kulcsok rendszerei 152

IRODALOM

BEVEZETÉS

Az adatbáziskezelő rendszerek elméleti hátteréként szolgáló adatmodellek fő tipusai a relációs, a hierarchikus és a hálós adatmodellek. A relációs adatmodell megjelenését E.F. Codd alapvető cikkétől [23] szokás számitani. Ebben a cikkben a szerző a reláció fogalmát definiálta. A Codd-féle reláció egy mátrix, amelynek sorai az adatrekordok, és oszlopai az attributumok. A Codd-féle reláció felhasználói szempontból nézve homogén file, a relációs adatmodell pedig véges sok reláció időben változó halmaza. Ebben az adatmodellben az adattárolást mátrix alakban valósitjuk meg.

Egyszerüsége és matematikai eszközökkel való vizsgálhatósága miatt a relációs adatmodell az adatbázismodellek komoly elméleti alapjává vált.

Az adatbázismodellben az adatok között általában sok összefüggés van. A relációs adatmodellben az adatok közötti összefüggések egyik fontos tipusa a funkcionális függőség. [23]-ban E.F. Codd, majd ezt követően számos cikk vizsgálta a funkcionális függőségek gyakorlati jelentőségét.

W.W. Armstrong alapvető cikkeiben ([5],[6]) a

szerző elsőként vizsgálta a funkcionális függőségek matematikai strukturáját.

R. Fagin [46] a propozicionális logika (propositional logic) és a funkcionális függőségek közötti kapcsolatot tanulmányozta. A későbbi vizsgálatokban az adatfüggőség számos tipusa jelentik meg. Például többértékü függőségek (multivalued dependencies) [29],[47], [78] (R. Fagin ezek segitségével definiálta a negyedik normálformát); egyesitési függőségek (join dependencies) [48],[60]; beágyazott többértékü függőségek (embedded multivalued dependencies) [29],[47],[63].

A relációs adatmodell elméletének egyik fontos iránya a funkcionális függőségek általánositása. További példák általánositott függőségekre: tranzitiv függőségek [58], amelyek általánositják a funkcionális és többértékü függőségeket; implikációs függőségek [52]; algebrai függőségek [77]; általános funkcionális függőségek [64].

Magyar szerzők [35],[37],[40] és [26] vezették be és vizsgálták a duális, erős és gyenge függőségeket, amelyek szintén a funkcionális függőségek általánositásai.

[40] alapján a funkcionális, duális, erős és gyenge

függőségeket logikai függőségeknek nevezzük.

[35]-ben a szerző rámutat a duális, az erős és a gyenge függőségek gyakorlati jelentőségére: duális és gyenge függőségek segitségével gyorsithatjuk a relációs adatmodellek információszolgáltatását, ha a felhasználó nem ismer minden, a kivánt információ nyeréséhez általában szükséges attributumértéket, vagy ha a tulajdonságok egy halmazáról csak részleges információkra van szüksége.

Az erős függőségek segitségével a nagy relációkat kisebbekre vághatjuk szét, tehát a tárolás helyigénye csökken.

Általában a relációs adatmodellben az adatfüggőség axiomatizálását azért valósitjuk meg, hogy vizsgálhassuk a konkrét relációktól független adatfüggőség általános tulajdonságait.

[5]-ben W.W. Armstrong axiomatizálta elsőként a funkcionális függőségek családját. [16]-ban csökkentik a W.W. Armstrong által bevezetett axiómák számát [11]-ben C. Beeri, R. Fagin és J. Howard a többértékü függőség axiomatizálását adták.

E.F. Codd alapvető cikke [23] óta számos dolgozat foglalkozik a funkcionális függőségekkel kapcsolatos kombinatorikai problémákkal.

[35]-ben a szerző uj axiómarendszereket vezetett be. Ezek az axiómarendszerek a funkcionális, duális, erős és gyenge függőségek családjainak kombinatorikai strukturáját emelik ki.

[22]-ben a szerzők a lezárási operációk (lásd 1.14 Definició) kombinatorikai jellemzőit vizsgálták.

A funkcionális függőségek adott családjában a maximális elemek számára adtak becslést [17]-ben.

Ismeretes ([5],[35]), hogy a funkcionális függőségek adott F családjához létezik olyan reláció, amely reprezentálja az F családot. Fontos probléma az adott F családot reprezentáló minimális relációk vizsgálata, azaz meghatározni a funkcionális függőségek adott családját reprezentáló relációk közül azt, amelyiknél a sorok száma a legkisebb.

Jelölje S(F) az F családot reprezentáló minimális reláció sorainak számát, és legyen

$S(n)=\max\{S(F):F$ az Ω feletti funcionális függőségek családja, $/\Omega/=n\}$.

A [38]-ban a szerzők bebizonyitották, hogy

$$\frac{1}{n^2}\binom{n}{[n/2]} \leq S(n) \leq (1+O(\frac{1}{\sqrt{n}}))\binom{n}{[n/2]}$$

Az E.F. Codd által bevezetett minimális kulcs az egyik fontos fogalom a relációs adatmodell elméletében. Az antikulcsok (lásd 1.17 Definicióban) lényeges szerepet játszanak a funkcionális függőségekre vonatkozó extremális problémák vizsgálatában és az olyan konkrét relációk konstrukciójában, amelyek a minimális kulcsok rendszereit reprezentálják.

[33] bebizonyitja a minimális kulcsok rendszerei és a Sperner-rendszerek közötti ekvivalenciát.

A funkcionális függőségek családjaihoz hasonlóan vizsgálták a Sperner-rendszereket reprezentáló minimális relációkkal kapcsolatos kombinatorikai problémákat is.

Jelölje s(K) a K Sperner-rendszert reprezentáló minimális reláció sorainak számát, és legyen

$s(n)=\max\{s(K)\colon K \text{ az } \Omega \text{ feletti Sperner-rendszer, } /\Omega/=n\}$.

Bebizonyitották, hogy

$$\frac{1}{n^2}\binom{n}{[n/2]} \leq s(n) \leq \binom{n}{[n/2]}+1 \quad ([35]).$$

Az adott Sperner-rendszert reprezentáló minimális reláció konstrukciója általános esetben nehéz. A minimális relációkat ezért speciális Sperner-rendszerekben vizsgálták, becsülték a minimális relációk

sorainak számát [41],[44].

Tudjuk ([5],[35]), hogy adott K Sperner-rendszerhez létezik olyan H lezárási operáció, hogy $K=K_H$ (1.9 Tétel), ahol K_H a H lezárási operáció összes minimális kulcsainak rendszere (1.16 Definició). Vizsgálták az olyan speciális K Sperner-rendszereket, amelyekre pontosan egy olyan H lezárási operáció létezik, hogy $K=K_H$ [22], [42].

A relációs adatbázisokban felhasználható egyéb eredményeket találhatunk [3]-ban,[4]-ben,[18]-ban és [19]-ben. [20]-ban a relációs adatbázisban történő információ méréséről olvashatunk. Ezekkel az eredményekkel nem foglalkozunk.

A disszertációban néhány olyan kombinatorikai problémát vizsgálunk, amelyek funkcionális függőségekre és ezek általános függőségeire (duális és erős függőségek) vonatkoznak.

Az 1. fejezetben előkészületként bevezetjük a legszükségesebb fogalmakat és bizonyitás nélkül közöljük azokat az eredményeket, amelyekre a további fejezetekben támaszkodunk.

A 2. fejezetben logikai függőségekkel foglalkozunk. Bevezetjük a funkcionális, a duális és az erős függőségek uj axiómáit. Szükséges és elégséges

feltételeket adunk arra, hogy egy reláció egy Sperner rendszert, ill. funkcionális, duális, erős függőségek egy családját reprezentáljon. Adott R relációhoz az R irredundáns relációit előállitjuk. Megbecsüljük a minimális, irredundáns relációk sorainak számát.

A 3. fejezetben a minimális kulcsok és antikulcsok halmazaival foglalkozunk (ezek lényegében Sperner-rendszerek).

Konstruálunk néhány kombinatorikai algoritmust és becsüljük időbonyolultságukat. Ezek egyike adott minimális kulcsok rendszeréből meghatározza az antikulcsok teljes halmazát, a többiek adott antikulcsok halmazából egy minimális kulcsot, vagy minimális kulcsok teljes rendszerét találják meg.

Igazoljuk, hogy létezik olyan polinomidejü algoritmus, amely adott relációhoz eldönti, hogy tetszőleges attributum tartozik-e valamely minimális kulcshoz.

E fejezetben a következőt bizonyitjuk be: az a probléma, hogy adott antikulcsok halmazához létezik-e egy olyan kulcs, amelynek nagysága nem nagyobb, mint egy adott természetes szám, NP-teljes.

A 4. fejezetben minimális kulcsok speciális rendszereivel foglalkozunk (ezek speciális Sperner-rendszerek). Részletesebben a minimális kulcsok olyan rendszereit vizsgáljuk, amelyek azokra a K Sperner-rendszerekre vonatkoznak, amikor pontosan egy olyan H

lezárási operáció létezik, hogy $K=K_H$.

A minimális kulcsok többi speciális rendszerei a k-elemü halmazainak Sperner-rendszereire vonatkoznak.

Befejezésül ezen a helyen szeretnék köszönetet mondani aspiránsvezetőmnek, Dr.Demetrovics Jánosnak munkám során nyujtott segitségéért.

1. FEJEZET

Alapfogalmak

A relációs adatmodell az adatkezelés egyik legigéretesebb eszköze, amely alkalmas az adatbázisok logikai szerkezetének leirására.

E fejezetben azokat a relációs adatmodellel kapcsolatos legszükségesebb definiciókat és az irodalomban már közölt szükséges eredményeket ismertetjük, (bizonyitás nélkül), amelyeket a további fejezetekben használunk. Nevezetesen főként E.F. Codd [23], W.W. Armstrong [5], Demetrovics János és Katona Gyula ([33],[35] és [44]) cikkeire támaszkodunk. Pontosabban a relációs adatmodell kombinatorikai jellegü problémáira vonatkozó szükséges eredményeket Demetrovics János és Katona Gyula cikkei alapján, az axiómarendszereket pedig W.W. Armstrong cikke alapján tárgyaljuk. Alapvető definició a következő:

1.1 Definició. Legyen Ω egy nem üres véges halmaz. Ω elemeit attributumoknak nevezzük. Minden a Ω-ra legyen D_a egy tetszőleges nem üres halmaz. D_a az a attributum értékkészlete, elemeit az a attributum

értékeinek nevezzük.

Ekkor a $\underset{a\in\Omega}{\times} D_a$ Descartes-szorzat tetszőleges véges R részhalmazát Ω feletti relációnak nevezzük. Egy Ω feletti R reláció tehát $h:\Omega \to \bigcup_{a\in\Omega} D_a$ kiválasztási függvényekből áll. Nyilvánvaló, hogy

$$\forall a(a\in\Omega \Rightarrow h(a)\in D_a).$$

Ha $R=\{h_1,h_2,\ldots,h_m\}$ egy $\Omega=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ feletti reláció, akkor az R relációt a következő kétdimenziós táblázatként ábrázoljuk.

Ω:	a_1	...	...	a_n
h_1	$h_1(a_1)$	...	...	$h_1(a_n)$
h_2	$h_2(a_1)$	...	...	$h_2(a_n)$
.	.	. . .	...	.
.	.			.
.	.			.
h_m	$h_m(a_1)$	...	...	$h_m(a_n)$

R elemeit R sorainak, vagy rekordoknak nevezzük.

Egy relációban nem engedjük meg, hogy két sor azonos

legyen. Azaz minden i,j-re ($i \neq j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$) $h_i \neq h_j$. Jelöljük /R/-rel és /Ω/-val az R és Ω elemeinek számát.

1.1 Logikai függőségek

1.2 Definició [23] Legyen Ω nem üres véges halmaz és $R = \{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az Ω-n. Legyen továbbá A és B Ω részhalmazai. Azt mondjuk, hogy B funkcionálisan függ A-tól R-ben. (Jelölje ezt $A \overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}} B$), ha

$$(\forall h_i,h_j \in R)\ ((\forall a \in A)\ (h_i(a)=h_j(a)) \rightarrow (\forall b \in B)\ (h_i(b)=h_j(b))).$$

Világos, hogy ha B funkcionálisan függ A-tól, akkor az A-beli attributumokhoz tartozó értékek az R bármely sorának B-beli attributumokhoz tartozó értékeit meghatározzák.

A funkcionális függőséghez hasonló módon [26] és [35] definiálták a duális, az erős és a gyenge függőségeket, amelyek alkalmasak a relációs adatmodell alkalmazásakor az adatok közötti összefüggések hatékony leirására.

1.3. Definició. ([26],[35]) Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$

egy reláció az Ω felett. Legyenek továbbá A és B részhalmazai Ω-nak. Ekkor azt mondjuk, hogy B <u>duálisan</u> függ A-tól R-ben (Jelölje $A \overset{d}{\underset{R}{\rightarrow}} B$), ha

$$(\forall h_i, h_j \in R)\ ((\exists a \in A)(h_i(a)=h(a)) \rightarrow (\exists b \in B)(h_i(b)=h_j(b)));$$

B <u>erősen</u> függ A-tól R-ben (Jelölje $A \overset{s}{\underset{R}{\rightarrow}} B$), ha

$$(\forall h_i, h_j \in R)((\exists a \in A)(h_i(a)=h_j(a)) \rightarrow (\forall b \in B)(h_i(b)=h_j(b)));$$

B <u>gyengén</u> függ A-tól R-ben (jelölje $A \overset{w}{\underset{R}{\rightarrow}} B$), ha

$$(\forall h_i, h_j \in R)((\forall a \in A)(h_i(a)=h_j(a)) \rightarrow (\exists b \in B)(h_i(b)=h_j(b))).$$

[35] szerint a funkcionális, a duális, az erős és a gyenge függőségeket logikai függőségeknek nevezzük.

Látható, hogy a funkcionális függőség definíciójából a kvantorok változtatásával a duális, az erős és a gyenge függőségeket kapjuk. Ezek a funkcionális függőség általánositásai.

Tetszőleges R Ω feletti relációra legyenek

$$F_R = \{(A,B) : A,B \subseteq \Omega \text{ és } A \overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}} B\};$$

$$D_R = \{(A,B) : A,B \subseteq \Omega \text{ és } A \overset{d}{\underset{R}{\rightarrow}} B\};$$

$$S_R = \{(A,B) : A,B \subseteq \Omega \text{ és } A \overset{s}{\underset{R}{\rightarrow}} B\};$$

$$W_R = \{(A,B) : A,B \subseteq \Omega \text{ és } A \overset{w}{\underset{R}{\rightarrow}} B\}.$$

Az F_R(D_R,S_R és W_R) halmazt az R funkcionális (duális, erős és gyenge) függőségei teljes családjának nevezzük.

W.W. Armstrong [5] azért vezetette be a funkcionális függőségek axiómarendszerét, hogy vizsgálni tudja azokat az általános tulajdonságokat, amelyek nem függenek konkrét relációktól. Vagyis ezek a tulajdonságok minden relációban teljesülnek.

[26]-ban Czédli axiómatizálta a duális és erős függőségek családjait.

Ezek az axiómarendszerek a következők ([5],[26]):

1.4. Definició. ([5],[26]) Legyen adva az Ω nem üres véges halmaz, $P(\Omega)$ az Ω halmaz hatványhalmaza és $Y \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$. Ekkor azt mondjuk, hogy Y kielégiti az F-axiómarendszert, ha tetszőleges $A,B,C,D \subseteq \Omega$-ra teljesülnek a következő feltételek

(F1) $(A,A) \in Y$;

(F2) $(A,B) \in Y$, $(B,C) \in Y \rightarrow (A,C) \in Y$;

(F3) $(A,B) \in Y$, $A \subseteq C$, $D \subseteq B \rightarrow (C,D) \in Y$;

(F4) $(A,B) \in Y$, $(C,D) \in Y \rightarrow (A \cup C, B \cup D) \in Y$.

Y kielégiti a D-axiómarendszert, ha tetszőleges $A,B,C,D \subseteq \Omega$-ra teljesülnek az alábbi feltételek

(D1) $(A,A) \in Y$;

(D2) $(A,B) \in Y,\ (B,C) \in Y \rightarrow (A,C) \in Y$;

(D3) $(A,B) \in Y,\ C \subseteq A, B \subseteq D \rightarrow (C,D) \in Y$;

(D4) $(A,B) \in Y,\ (C,D) \in Y \rightarrow (A \cup C, B \cup D) \in Y$;

(D5) $(A,\emptyset) \in Y \rightarrow A = \emptyset$.

Y kielégiti az S-axiómarendszert, ha tetszőleges $A,B,C,D \subseteq \Omega$-ra és $a \in \Omega$-ra a következő feltételek teljesülnek.

(S1) $(\{a\},\{a\}) \in Y$;

(S2) $(A,B) \in Y,\ (B,C) \in Y,\ B \neq \emptyset \rightarrow (A,C) \in Y$;

(S3) $(A,B) \in Y,\ C \subseteq A,\ D \subseteq B \rightarrow (C,D) \in Y$;

(S4) $(A,B) \in Y,\ (C,D) \in Y \rightarrow (A \cup C, B \cap D) \in Y$;

(S5) $(A,B) \in Y,\ (C,D) \in Y \rightarrow (A \cap C, B \cup D) \in Y$.

1.5 Definició. Legyen $Y \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$. Ekkor azt mondjuk, hogy Y f-család (d-család, s-család) az Ω felett, ha Y kielégiti az F-axiómarendszert (a D-axiómarendszert, az S-axiómarendszert).

W.W. Armstrong [5] definiálta az f-család maximális jobboldalainak halmazát, amely az f-családot meghatározza.

1.6 Definició. [5] Legyen Ω nem üres halmaz, $P(\Omega)$ az

Ω hatvány halmaza és $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ egy f-család az Ω felett. Legyen továbbá $(A,B) \in F$. Ekkor azt mondjuk, hogy (A,B) maximális függősége az F-nek, ha tetszőleges A',B' halmazokra $(A' \subseteq A, B \subseteq B')$ $(A',B') \in F \rightarrow A'=A$ és $B'=B$.

Jelölje $M(F)$ az F család maximális függőségeinek halmazát. Egy B halmaz $(B \subseteq \Omega)$ az F család maximális jobboldala, ha van olyan A halmaz $(A \subseteq \Omega)$, amelyre $(A,B) \in M(F)$.

A továbbiakban jelölje $I(F)$ az F család maximális jobboldalainak halmazát.

1.7 Definició. Legyen $I \subseteq P(\Omega)$ a metszetre nézve zárt (azaz $A,B \in I \rightarrow A \cap B \in I$). Legyen továbbá $M \subseteq P(\Omega)$.

Jelölje M^+ az $\{ \bigcap_{i=1}^{r} M_i : M_i \in M,\ 1 \leq r \leq |M| \}$ halmazt. Ekkor azt mondjuk, hogy M generálja az I-t, ha $M^+=I$ teljesül. Az ilyen M halmazrendszert az I metszet-generátorának nevezzük.

1.8 Definició. ([5],[35]) Legyen Ω nem üres véges halmaz, $P(\Omega)$ az Ω hatvány halmaza. Legyen továbbá $I \subseteq P(\Omega)$. Azt mondjuk, hogy I metszetfélháló az Ω felett ha $\Omega \in I$ és I a metszetre nézve zárt.

1.1 Tétel[5]. Legyen Ω nem üres véges halmaz. Legyen továbbá F egy f-család az Ω felett. Ekkor I(F) egy metszetfélháló az Ω felett. Forditva, ha I metszetfélháló, akkor pontosan egy olyan F f-család van, amelyre I=I(F):

$$F= \{(A,B): C\in I: A\subseteq C \rightarrow B\subseteq C\}.$$

Könnyen látható, hogy az Ω feletti f-családok és a metszetfélhálók között létesitett megfeleltetés kölcsönösen egyértelmü.

Az 1.1 Tétel alapján W.W. Armstrong bebizonyitotta az alábbi tételt

1.2 Tétel. (Armstrong Tétel)[5]. Legyen R egy Ω feletti reláció. Ekkor F_R egy f-család az Ω felett. Forditva, ha F egy Ω feletti f-család, akkor létezik olyan R reláció, melyre $F=F_R$.

1.1 Megjegyzés. Könnyen látható, hogy egy F f-családhoz általában sok olyan reláció van, amelyre $F=F_R$.

[26]-ban Czédli bevezette a d-család maximális baloldalainak halmazát.

1.9 Definició. ([26]) Legyen D egy d-család az Ω felett és $(A,B)\in D$. Ekkor azt mondjuk, hogy (A,B) maximális baloldal-függősége a D-nek, ha minden A' halmazra $(A\subseteq A')$ $(A',B)\in D \rightarrow A'=A$.

Jelöljük M(D)-vel a D maximális baloldal-függőségeinek halmazát, Azt mondjuk, hogy A maximális baloldala a D-nek, ha van olyan B halmaz, hogy $(A,B)\in M(D)$.

A továbbiakban jelölje G(D) a D maximális baloldalainak halmazát.

1.10 Definició. ([26]) Legyen $I\subseteq P(\Omega)$. Azt mondjuk, hogy I egy d-félháló az Ω felett, ha $\emptyset,\Omega\in I$ és I metszetre nézve zárt.

1.3 Tétel [26]. Legyen D egy d-család az Ω felett. Ekkor G(D) egy d-félháló az Ω felett. Forditva, tetszőleges G d-félhálóhoz létezik pontosan egy olyan D d-család, hogy G=G(D):

$$D=\{(A,B): C\in G: B\subseteq C \rightarrow A\subseteq C\}.$$

Az 1.3 Tétel alapján belátható, hogy a d-családok és az Ω feletti d-félhálók között létesitett megfeleltetés kölcsönösen egyértelmü.

1.4 Tétel ([26],[35]). Legyen R egy nem üres reláció az Ω felett. Ekkor D_R egy d-család. Forditva, ha D egy Ω feletti d-család, akkor van olyan R nem üres reláció, hogy $D=D_R$.

1.5 Tétel ([26],[35]). Legyen R egy Ω feletti reláció. Ekkor S_R egy s-család az Ω felett. Forditva, ha S egy s-család az Ω felett, akkor létezik olyan R reláció, amelyre $S=S_R$.

Látható, hogy egy D d-családhoz (egy S s-családhoz) általában sok olyan R reláció van, amelyre $D=D_R$ ($S=S_R$).

Az alábbi tétel [35] rámutat az f-családok és a d-családok között fennálló dualitásra.

1.6 Tétel [35]. Legyen $F\subseteq P(\Omega)xP(\Omega)$ olyan halmazrendszer, hogy $(A,B)\in F$, $B\neq\emptyset$ esetén $A\neq\emptyset$.

Ekkor F pontosan akkor f-család az Ω felett, ha a $D=\{(B,A): (A,B)\in F\}$ halmazrendszer d-család az Ω felett.

1.2 Megjegyzés. Legyen F egy f-család az Ω felett. Legyen $F'=F\setminus\{(\emptyset,B)\in F: B\neq\emptyset\}$. Beláthatjuk, hogy F' is f-család az Ω felett.

Legyen $D(F)=\{(B,A): (A,B)\in F'\}$. Ekkor az 1.6 Tétel szerint D(F) egy d-család az Ω felett.

Legyen R egy Ω feletti reláció. Legyenek

$F'_R=F_R\setminus\{(\emptyset,B)\in F_R: B\neq\emptyset\}$ és $D(F_R)=\{(B,A): (A,B)\in F'_R\}$

Általában $D_R \neq D(F_R)$. A 2. fejezetben egy szükséges és elégséges feltételt adunk a $D_R = D(F_R)$ egyenlőség teljesülésére.

[35]-ben vezették be a reláció egyenlőséghalmazának fogalmát. Ez a fogalom fontos szerepet játszik a logikai függőségek kombinatorikai jellegü problémáinak vizsgálatában.

1.11 Definició. ([35]) Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az Ω felett, továbbá $E_{ij} = \{a \in \Omega : h_i(a) = h_j(a)\}$ $(1 \leqq i < j \leqq m)$. Az E_{ij} halmazt a h_i és h_j sorok egyenlőséghalmazának, a $\{E_{ij} : 1 \leqq i < j \leqq m\}$ halmazt az R egyenlőséghalmazának nevezzük.

A továbbiakban jelöljök ε_R-rel az R egyenlőséghalmazát.

Azt mondjuk, hogy $\{A,B,C : A,B,C \subseteq \Omega\}$ Δ-rendszer, ha $A \cap B = B \cap C = A \cap C$ teljesül.

Az egyenlőséghalmazokra és a Δ-rendszerekre támaszkodva [35] négy uj axiómát vezetett be, amelyek a funkcionális, a duális, az erős és a gyenge függőségek családjait axiómatizálták. [35]-ben bebizonyitotta, hogy az a három uj axióma, amely a funkcionális, a duális és az erős függőségek családjaira vonatkozik, ekvivalens a megfelelő F-, D- és S-axióma-

rendszerekkel, továbbá azt is belátta, hogy ezek az uj axiómák jellemzik a funkcionális, a duális, az erős és a gyenge függőségek családjait.

A 2. fejezetben a reláció egyenlőséghalmazai alapján három szükséges és elégséges feltételt adunk meg a következőkre: 1. arra, hogy $K=K_R$, ahol K adott Sperner-rendszer és K_R egy adott R reláció minimális kulcsainak rendszere (lásd 1.15 Definició).

2. arra, hogy $F=F_R$, ahol F adott f-család és F_R egy R reláció funkcionális függőségeinek teljes családja.

3. arra, hogy $S=S_R$, ahol S adott s-család és S_R egy adott R reláció erős függőségeinek teljes családja.

Ezek a feltételek alapján olyan hatékony algoritmusokat konstruálunk, amelyek megtalálják az irredundáns relációkat.

Bebizonyitották ([7],[35],[40]), hogy az Ω feletti M halmazrendszerhez pontosan egy olyan N halmazrendszer létezik, amely az M^+ minimális számosságu generátora.

1.7 Tétel([7],[35],[40]). Legyen Ω nem üres véges halmaz, $P(\Omega)$ az Ω hatvány halmaza. Legyen továbbá $M \subseteq P(\Omega)$.

Legyen $N=\{A\in M:(\forall B,C\in M)\ (A=B\cap C \to A=B \text{ vagy } A=C)\}$.
Ekkor N generálja M^+-t, és ha N' is generálja M^+-t, akkor $N\subseteq N'$ teljesül, ahol $M^+\{\bigcap_{i=1}^{r} M_i : M_i\in M,\ 1\leq r\leq |M|\}$.

Az N halmazt az M^+ minimális számosságu generátorának nevezzük.

1.3 Megjegyzés. [53]-ban Kleitman rámutatott, hogy N elemeinek száma nem nagyobb, mint $(1+O(\frac{1}{\sqrt{n}}))\binom{n}{[n/2]}$, ahol $|\Omega|=n$.

A minimális számosságu generátorok fontos szerepet játszanak a minimális, irredundáns relációkra vonatkozó kombinatorikai problémákban.

1.12 Definició. Legyen F egy f-család (D egy d-család S egy s-család) és R egy reláció az Ω felett. Azt mondjuk, hogy R reprezentálja az F f-családot (a D-családot, az S-családot), ha $F=F_R$ ($D=D_R$, $S=S_R$).

Tudjuk (W.W. Armstrong [5]), hogy F f-családhoz több olyan R reláció létezhet, amely reprezentálja az F-et. Tehát fontos probléma egy adott F f-családot reprezentáló relációk minimalizálása, vagyis, hogy egy adott F f-családhoz kiválasszuk azt az R relációt,

amely sorainak száma minimális és reprezentálja az F családot.

1.13 Definició. [35] Legyen F egy f-család az $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ felett. Legyen $S(F)=\min\{m:F=F_R, |R|=m,$ R az Ω feletti reláció$\}$. Azaz S(F) az F családot reprezentáló minimális reláció sorainak száma.

Legyen $S(n)=\max\{S(F):F$ az Ω feletti f-család$\}$.

[43]-ban találjuk meg a következő eredményt.

1.8 Tétel [43] Legyen $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ nem üres véges halmaz. Ekkor

$$\frac{1}{n^2}\binom{n}{[n/2]} \leq S(n) \leq (1+O(\frac{1}{\sqrt{n}}))\binom{n}{[n/2]}.$$

Az 1.4 és 1.5 Tételek alapján belátható, hogy egy D d-családhoz (egy S s-családhoz) sok olyan reláció létezhet, amely reprezentálja a D családot (az S családot). A 2. fejezetben az adott f-, d- és s-családokat reprezentáló minimális, irredundáns relációkat vizsgáljuk.

1.2 Minimális kulcsok és antikulcsok

Több szerző mutat rá a minimális kulcsok gyakorlati jelentőségére. Sok cikk vizsgálta a minimális kulcsokra és az antikulcsokra vonatkozó kombinatorikai problémákat [35],[42],[44].

E.F. Codd [23] és W.W. Armstrong [5] nyomán definiáljuk a lezárási operációt:

1.14 Definició. Legyen Ω nem üres véges halmaz és $P(\Omega)$ Ω hatvány halmaza.
A $H:P(\Omega) \to P(\Omega)$ függvényt lezárási operációnak nevezzük, ha bármely A,B esetén $(A,B \in P(\Omega))$

(i) $A \subseteq H(A)$ (extenziv),

(ii) $B \subseteq A \to H(B) \subseteq H(A)$ (monoton),

(iii) $H(H(A))=H(A)$ (idempotens).

Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az Ω felett. A Ω-ra jelölje $H_R(A)$ Ω azon elemeit, amelyeken R bármely két A-n megegyező sora egyenlő. Világos, hogy H_R lezárási operáció.

Azt mondjuk, hogy az R reláció reprezentálja a H lezárási operációt, ha $H=H_R$.

Minden $A(A \subseteq \Omega)$-ra legyen $Q_R(A)=\{a \in \Omega : A \overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}} \{a\}\}$.

Ekkor könnyü belátni, hogy $H_R=Q_R$.

Ismeretes ([5],[35]), hogy tetszőleges H lezárási operációhoz létezik olyan R reláció, amelyre $H=H_R$.

1.4 Megjegyzés ([5],[44]). Ha F egy f-család az Ω felett, akkor minden A halmazra $(A \subseteq \Omega)$ legyen $H_F(A)=\{b \in \Omega : (A,\{b\}) \in F\}$. Ekkor H_F lezárási operáció az Ω felett. Forditva, ha H egy lezárási operáció az Ω felett, akkor pontosan egy olyan F f-család van, amelyre $H=H_F$:

$$F=\{(A,B) : B \subseteq H(A)\}.$$

Belátható, hogy az Ω feletti f-családok és lezárási operációk között létesitett megfeleltetés kölcsönösen egyértelmü.

Nyilvánvaló, hogy ha R egy Ω feletti reláció, akkor $H_R=H_{F_R}$, ahol F_R az R reláció funkcionális függőségeinek teljes családja.

1.15 Definició. Legyen $F \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$ egy f-család és R egy reláció az Ω felett. Ekkor azt mondjuk, hogy az A halmaz $(A \subseteq \Omega)$ kulcsa az R relációnak (az F

családnak), ha $A \overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}} \Omega$ $((A,\Omega)\in F)$ teljesül. Az A halmaz minimális kulcsa az R relációnak (az F családnak), ha A kulcsa az R relációnak (az F családnak), és minden $A'(A'\subseteq A)$ halmazra $A' \overset{f}{\underset{R}{\longrightarrow}} \Omega \rightarrow A'=A$ $((A',\Omega)\in F \rightarrow A'=A)$.

A továbbiakban jelöljük K_R-rel (K(F)-val) az R reláció (az F f-család) minimális kulcsainak rendszerét.

Belátható, hogy ha az A halmaz az R reláció kulcsa, akkor R minden sorát már A-beli attributumokon felvett értékek is meghatározzák.

1.16 Definició. Legyen H egy Ω feletti lezárási operáció. Ekkor azt mondjuk, hogy az A halmaz $(A\subseteq\Omega)$ a H kulcsa, ha $H(A)=\Omega$. Egy A kulcsot a H lezárási operáció minimális kulcsának nevezzük, ha nincs olyan B kulcsa H-nak, amelyre $B\subsetneq A$ teljesülne.

A továbbiakban a H lezárási operáció összes minimális kulcsainak rendszerét K_H-val jelöljük.

Világos, hogy ha F egy f-család az Ω felett, akkor $K(F)=K_{H_F}$, ahol H_F az 1.4 Megjegyzés szerint F-ből származtatható lezárási operáció. Nyilvánvaló, hogy $K_R=K_{H_R}$.

Belátható, hogy K_R, K_H, $K(F)$ Sperner-rendszerek az Ω felett, azaz $A,B \in K_R \rightarrow B \not\subseteq A$.

Világos, hogy $K_R, K_H, K(F) \neq \emptyset$.

1.17 Definició. Legyen K egy Ω feletti Sperner-rendszer. K antikulcsainak halmazát, amelyet K^{-1}-el jelölünk, a következőképpen definiáljuk:

$$K^{-1} = \{A \subsetneq \Omega : (B \in K \rightarrow B \not\subseteq A) \text{ és } (A \subsetneq C) \rightarrow (\exists B \in K)\ (B \subseteq C)\}.$$

Könnyen belátható, hogy K antikulcsai a maximális, K elemeit nem tartalmazó részei Ω-nak, és nyilván K^{-1} is Sperner rendszer az Ω felett.

1.9 Tétel ([5],[35]). Ha K nem üres ($K \neq \{\Omega\}$) Sperner-rendszer az Ω felett, akkor létezik olyan $H(H')$ lezárási operáció, amelyre $K = K_H$ ($K = K_{H'}^{-1}$).

Az 1.9 Tétel alapján látható, hogy K akkor és csak akkor lehet valamely lezárási operáció minimális kulcsainak rendszere, ha nem üres Sperner-rendszer.

A későbbi fejezetekben majd látni fogjuk, hogy az 1.9 Tétel a minimális kulcsokkal kapcsolatos kombinatorikai problémákra vonatkozik.

A továbbiakban magyar matematikusok által bebizonyitott kombinatorikai jellegü állitásokat mondunk ki minimális kulcsokra és antikulcsokra. ([35], [44]).

1.10 Tétel [35] Legyen H egy lezárási operáció az Ω felett.

Ekkor $|K_H| \leq \binom{n}{[n/2]}$, ahol $|\Omega|=n$.

Az 1.9 és 1.10 Tételek alapján belátható, hogy ha Ω n-elemü halmaz, akkor az Ω feletti tetszőleges lezárási operáció minimális kulcsainak száma legfeljebb $\binom{n}{[n/2]}$.

1.11 Tétel [35]. Legyen K egy nem üres Sperner-rendszer. Legyen továbbá $K^{-1}=\{A_1,\ldots,A_k\}$. Legyenek az R reláció sorai $(h_o,h_1,\ldots,h_k)$ a következők: $h_o(a)=0$, ha $a\in\Omega$, és

$$h_i(a)=\begin{cases} 0 & \text{ha } a\in A_i \\ i & \text{ha } a\in\Omega\setminus A_i. \end{cases} \qquad (1\leq i\leq k)$$

Ekkor $K=K_R$.

1.5 Megjegyzés. Legyen $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Ekkor az 1.11 Tétel alapján előállithatunk egy olyan R relációt,

amelyre $|K_R| = \binom{n}{[n/2]}$.

1.6 Megjegyzés. Belátható, hogy az 1.11 Tételben a K Sperner-rendszerből nem konstruálható meg az R, mert a K-ból még nem tudjuk előállitani a K^{-1} antikulcsok halmazát. A továbbiakban (a 3. fejezetben) egy olyan algoritmust ismertetünk, amely egy adott K Sperner-rendszerből megtalálja K antikulcsainak halmazát.

1.18 Definició. Legyen $K \subseteq P(\Omega)$ egy Sperner-rendszer és R egy reláció az Ω felett. Ekkor azt mondjuk, hogy R reprezentálja a K halmazrendszert, ha $K_R = K$.

1.12 Tétel [44]. Legyen $R = \{h_1, \ldots, h_m\}$ egy reláció és K Sperner-rendszer az Ω felett. Ekkor ha R reprezentálja a K-t, akkor $\binom{m}{2} \geq |K^{-1}|$ teljesül.

1.19 Definició. ([35]) Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett. Legyen $s(K) = \min\{m: K = K_R, |R| = m$ és R reláció az Ω felett$\}$.

Legyen $s(n) = \max\{s(K): K$ az Ω feletti Sperner-rendszer, $|\Omega| = n\}$.

1.13 Tétel [44]. Legyen K egy nem üres Sperner-rendszer. Ekkor $\binom{s(k)}{2} \geq |K^{-1}| \geq s(K)-1$.

1.14 Tétel [35]. Legyen $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ekkor $\frac{1}{n^2}\binom{n}{[n/2]} \leq s(n) \leq \binom{n}{[n/2]}+1$

Látható, hogy egy adott K Sperner-rendszerhez több olyan F f-család (R reláció) van, amelyre $K=K(F)$ $(K=K_R)$. Másrészt az 1.13 Tétel szerint amikor kiválasztjuk a K Sperner-rendszert reprezentáló relációk közül azt, amely sorainak száma legkisebb, akkor a K antikulcsainak halmazára támaszkodhatunk.

1.3 Speciális minimális kulcsok rendszerei

Tudjuk ([5],[35]), hogy az adott K nem üres Sperner-rendszerhez általában több olyan H lezárási operáció van, amelyre $K=K_H$. Természetesen merül fel az a kérdés, hogy milyen K Sperner-rendszerhez határozza meg a $K=K_H$ egyenlőség egyértelmüen a H lezárási operációt. [42]-ben a szerzők rámutattak arra, hogy a telitett Sperner-rendszerek ezt kielégitik.

1.20 Definició. Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett. Ekkor azt mondjuk, hogy K telitett Sperner rendszer, ha tetszőleges $B \in P(\Omega) \setminus K$ esetén $K \cup \{B\}$ nem Sperner-rendszer.

1.15 Tétel [42]. Ha K egy telitett Sperner-rendszer, akkor a $K=K_H$ egyenlőség egyértelmüen meghatározza a H lezárási operációt.

A 4. fejezetben néhány más tipusu Sperner-rendszert vezetünk be, ezek telitett Sperner-rendszerekre vonatkoznak.

Belátható, hogy adott K Sperner-rendszerhez mindig van több olyan R reláció, amely reprezentálja a K Sperner-rendszert.

Érdekes azonban megkeresni azt a K Sperner-rendszert reprezentáló relációt, amely sorainak száma legkisebb (minimális reláció) és az irredundáns relációkat, amelyek reprezentálják a K-t.

A 3. fejezetben konstruálunk egy algoritmust, amely megtalálja a K Sperner-rendszert reprezentáló irredundáns relációkat.

Az általános esetekben a minimális relációk konstrukciója túl nehéz. [44]-ben vizsgálták a minimális relációkat néhány speciális esetben.

Jelölje L_k^n az n-elemü halmaz összes k-elemü halmazainak rendszerét.

Nyilvánvaló, hogy L_k^n Sperner-rendszer.

1.16 Tétel [44] Legyen $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Ekkor

$$s(L_1^n) = 2,$$

$$s(L_2^n) = \left[\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right],$$

$$n \leq s(L_3^n) \leq n+8,$$

$$s(L_{n-1}^n) = n,$$

$$s(L_n^n) = n+1.$$

1.17 Tétel [44]. Legyen $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$, L_k^n az Ω összes k-elemü halmazainak rendszere és $2\leq k\leq n$. Ekkor

$$\sqrt{2\left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}}\cdot n^{(k-1)/2} < s(L_k^n) < 2^{3k/2}\cdot n^{(k-1)/2}$$

Az 1.17 Tétel az $s(L_k^n)$ értéket csak kis k mellett becsüli jól. Nagy $s(L_k^n)$ $(1\leq k\leq n)$ esetén a következő tétel érvényes:

1.18 Tétel [44]. Legyen $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$, L_k^n az Ω összes k-elemü halmazainak rendszere, legyen továbbá

$$F_k(n) = \max\{s(K) : K \subseteq L_k^n, \ |\Omega| = n\}.$$

Ekkor

$$F_k(n) \geq \sqrt{2} \binom{2k-2}{k-1}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{n}{2k-2}\right].$$

Könnyen látható, hogy az 1.18 Tételből $F_1(n) = 2$ és $F_2(n) > 2^{\frac{n}{4}}$ következik.

2. FEJEZET

Logikai függőségek és irredundáns relációk

Ebben a fejezetben a logikai függőségek három tipusával foglalkozunk. Ezek a funkcionális, a duális és az erős függőségek.

A konkrét relációktól független általános tulajdonságok vizsgálatának céljából [5],[26] és [35] axiómarendszereket vezetett be a logikai függőségek családjaira.

A 2.1 részben axiómatizáljuk a funkcionális, a duális, és az erős függőségek családjait, és megmutatjuk, hogy az uj axiómák (az A-, B-, C-axiómák) ekvivalensek az 1.4 Definicióban adott axiómarendszerekkel (2.1 Tétel). Az uj axiómák közül különösen a C-axiómát használjuk a 2.4 részben az erős függőségek kombinatorikai vizsgálatában.

W.W. Armstrong és mások bebizonyitották, hogy adott F f- (D d-, S s-) családhoz, illetve a K nem üres Sperner-rendszerhez létezik olyan R reláció, hogy $F_R=F(D_R=D, S_R=S, K_R=K)$. Általában több ilyen reláció van.

Természetesen merül fel az a kérdés, miként

lehet eldönteni, hogy $K_R=K$, $F_R=F$, $D_R=D$, $S_R=S$?

Négy szükséges és elégséges feltételét adjuk annak, hogy $K_R=K$, $F_R=F$, $D_R=D$, $S_R=S$ (a 2.2, 2.5, 2.7 és 2.11 Tételek).

Érdekes vizsgálni azokat a minimális, irredundáns relációkat (lásd 2.1 Definiciót), amelyek az adott f-, d-, s-családokat, illetve Sperner-rendszereket reprezentálják.

Egy másik kérdés, hogy adott R relációt rövidithetünk-e ugy, hogy a röviditett reláció megtartja a $K_R(F_R,D_R,S_R)$ strukturáját (azaz ha R' röviditett reláció, akkor $K_{R'}=K_R$ ($F_{R'}=F_R$, $D_{R'}=D_R$, $S_{R'}=S_R$)) és hogyan találhatjuk meg az irredundáns relációkat? A következő definiciót azért vezetjük be, hogy pontosabban fogalmazzuk meg az előbbi kérdést.

2.1 Definició. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az Ω felett. Azt mondjuk, hogy R k-(f-,d-,s-) irredundáns reláció, ha minden R' relációra ($R'\subsetneq R$) $K_{R'}\neq K_R$ ($F_{R'}\neq F_R$; $D_{R'}\neq D_R$; $S_{R'}\neq S_R$) teljesül (azaz ha töröljuk R egy tetszőleges sorát, akkor a K_R (F_R,D_R,S_R) strukturája elvész).

E fejezetben megadunk négy algoritmust (a 2.2,

2.3, 2.4 és 2.5 algoritmusok), amelyek megtalálják az R k-, f-, d-, s- irredundáns relációit. Pontosabban adott R relációhoz a 2.2 (2.3, 2.4, 2.5) algoritmus segitségével találjuk meg azt a k- (f-, d-, s-) irredundáns R' relációt, amelyre $R' \subseteq R$ és

$$K_{R'} = K\ (F_{R'}=F_R\ ;\ D_{R'}=D_R\ ;\ S_{R'}=S_R).$$

Bebizonyitjuk, hogy ezeknek az algoritmusoknak az időbonyolultsága polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától (a 2.3 Tétel, a 2.6, 2.13, 2.17, 2.25 Következmények). A következő kérdés: két adott, R_1, R_2 relációhoz hogyan dönthetjük el, hogy minimális kulcsainak rendszerei (R_1, R_2 funkcionális duális, erős függőségeinek családjai) azonosak-e egymással?
Definiáljuk az alábbi fogalmat.

2.2 Definició. Legyen R_1, R_2 két reláció az Ω felett. Azt mondjuk, hogy R_1 k- (f-,d-,s-) ekvivalens R_2-vel, ha $K_{R_1}=K_{R_2}$ ($F_{R_1}=F_{R_2}$, $D_{R_1}=D_{R_2}$, $S_{R_1}=S_{R_2}$).

Megadunk négy szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy

$K_{R_1}=K_{R_2}$ ($F_{R_1}=F_{R_2}$, $D_{R_1}=D_{R_2}$, $S_{R_1}=S_{R_2}$) legyen.

Megadunk olyan algoritmusokat, amelyek eldöntik, hogy adott tetszőleges R_1, R_2 relációhoz R_1 k- (f-,d-,s-) ekvivalens - e R_2-vel, és megmutatjuk, hogy ezeknek az algoritmusoknak az időbonyolultsága is polinomiálisan függ az R_1, R_2 sorainak és oszlopainak számától.

Hasonlóképpen egy algoritmust adunk annak eldöntésére, hogy adott K Sperner-rendszer és R reláció esetén az R reprezentálja-e a K Sperner-rendszert. Becsüljük az f-, d-, s-családokat és Sperner-rendszereket reprezentáló minimális, irredundáns relációk sorainak számát (a 2.4, 2.6, 2.8, 2.13 Tételek, a 2.19, 2.27 Következmények, és a 2.3, 2.13, 2.14, 2.15 Megjegyzések).

Megmutatjuk, hogy egy tetszőleges s-családot reprezentáló minimális reláció sorainak száma legfeljebb $|\Omega|+1$.

E fejezetben vizsgáljuk a D_R-ek és a $D(F_R)$-ek (lásd 1.2 Megjegyzést) közötti kapcsolatot. Általában egy relációban $D_R \neq D(F_R)$. Adunk egy szükséges és elégséges feltételt arra, hogy $D_R = D(F_R)$ teljesüljön és ennek segitségével egy algoritmust, amely eldönti, hogy $D_R = D(F_R)$ igaz-e (a 2.9 Tétel, a 2.20 Következmény).

Ennek az algoritmusnak az időbonyolultsága polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától. Ebben a fejezetben adott D d-, S s-családhoz két egyszerü konkrét relációt adunk meg. Egyik reprezentálja a D családot, másik reprezentálja az S családot (2.18 Következmény, 2.12 Tétel).

A 2.4 részben definiáljuk az erős operációt (2.7 Definició), melyet az erős függőségek kombinatorikai tulajdonságainak vizsgálatában fogunk használni.

Egy algoritmust adunk, amely egy adott E erős operációhoz meghatározza az E-t reprezentáló R relációt (a 2.8 Definició és a 2.23 Következmény).

[5]-ben és [35]-ben bebizonyitották, hogy az Ω feletti f-családok,a lezárási operációk, a metszetfélhálók, és a metszetmentes rendszerek (Lásd 2.10 Megjegyzést) között létesitett megfeleltetések kölcsönösen egyértelmüek, és a metszetmentes rendszerek meghatározzák az f-családokat, a lezárási operációkat és a metszet-félhálókat.

[26]-ban bebizonyitották, hogy az Ω feletti d-családok, és a d-félhálók között létesitett megfeleltetés kölcsönösen egyértelmü és a d-félhálók meghatározzák a d-családokat.

Definiáljuk az s-félhálót (a 2.10 Definició) és

az s-rendszert (a 2.12 Definició). Az erős operáció, az s-félháló, az s-rendszer fogalmak felhasználásával bebizonyitjuk, hogy az Ω felett s-családok, az erős operációk, az s-félhálók, és az s-rendszerek között létesitett megfeleltetések kölcsönösen egyértelmüek (a 2.10, 2.14 Tételek, a 2.28 Következmény és a 2.23 Megjegyzés), az s-rendszerek osztálya az Ω feletti metszetmentes rendszerosztály valódi része, és az s-rendszerek meghatározzák az s-családokat, az erős operációkat, és az s-félhálókat (a 2.25 Megjegyzés).

2.1 Axiómatizálások

Ebben a részben a funkcionális, duális, erős függőségek családjainak uj axiómáit ismertetjük, és bebizonyitjuk, hogy ezek ekvivalensek a [5], [26], [35] dolgozatokban megadottakkal (Lásd 1.4 Definiciót).

2.3 Definició. Legyen adott Ω nem üres véges halmaz, és legyen $P(\Omega)$ az Ω hatvány halmaza. Legyen továbbá $Y \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$. Ekkor azt mondjuk, hogy Y kielégiti az A-axiómát, ha tetszőleges A halmazhoz $(A \subseteq \Omega)$ létezik

olyan X halmaz ($X \subsetneq \Omega$), amelyre

(A1) $A \subsetneq X$, és ha $B \subsetneq X$, akkor $(A,B) \in Y$;

(A2) ha $(C,D) \in Y$, $C \subsetneq X$, akkor $D \subsetneq X$.

Y kielégiti a B-axiómát, ha tetszőleges B halmazhoz ($B \subsetneq \Omega$) van olyan X halmaz ($X \subsetneq \Omega$), hogy

(B1) $B \subsetneq X$, és ha $A \subsetneq X$, akkor $(A,B) \in Y$;

(B2) ha (C,D) Y, $C \not\subseteq X$, akkor $D \not\subseteq X$.

Y kielégiti a C-axiómát, ha létezik olyan $\{X_i : i=1,\dots,\ell; \bigcup_{i=1}^{\ell} X_i = \Omega\}$ halmazrendszer, amelyre

(C1) tetszőleges B halmazra $(\emptyset,B) \in Y$;

(C2) tetszőleges $A (A \neq \emptyset)$ halmazra ha $B \subsetneq \overset{\frown}{\bigcup_{X_i \cap A \neq \emptyset}} X_i$, akkor $(A,B) \in Y$;

(C3) ha $(C,D) \in Y$, $C \cap X_i \neq \emptyset$, akkor $D \subsetneq X_i$.

Az A-, B-, C-axiómák alapján a továbbiakban vizsgáljuk a funkcionális, a duális, és az erős függőségek tulajdonságait. Ezért először bebizonyitjuk, hogy ezek az axiómák ekvivalensek a megfelelő F-, D-, S-axiómarendszerekkel.

2.1 Tétel. Legyen $Y \subsetneq P(\Omega) \times P(\Omega)$. Ekkor az Y halmazrendszer pontosan akkor elégiti ki az A-(B-,C-) axiómát, ha az Y halmazrendszer kielégiti az F- (D-,S-) axiómarendszert.

Bizonyitás.

(a) Tegyük fel, hogy Y kielégiti az A-axiómát. Megmutatjuk, hogy ekkor Y-ra teljesül az F-axiómarendszer. Világos, hogy (A1)-ből az (F1) axióma következik.

Ha $(A,B\}\in Y$, $(B,C)\in Y$, akkor (A1) és (A2) miatt létezik olyan X, amelyre $C\subsetneq X$. Tehát $(A,C)\in Y$.

Ha $(A,B)\in Y$, $A\subsetneq A'$, $B'\subsetneq B$, akkor az A-axióma szerint A'-ra van olyan X $(X\subsetneq\Omega)$, amelyre X kielégiti (A1)-et és (A2)-t. Tehát $A\subsetneq A'\subsetneq X$, és $B'\subsetneq B\subsetneq X$ teljesülnek. (A1) miatt $(A',B')\in Y$.

Ha $(A,B)\in Y$, $(C,D)\in Y$, akkor (A1) miatt létezik olyan X halmaz, hogy $(A\cup C)\subsetneq X$, és $\forall Z\subsetneq X \rightarrow (A\cup C,Z)\in Y$. Világos, hogy $(A,B)\in Y$ és $A\subsetneq X$ miatt $B\subsetneq X$ teljesül. Mivel $C\subsetneq X$, és $(C,D)\in Y$, $D\subsetneq X$ teljesül.

Tehát $B\cup D\subsetneq X$. (A1) miatt $(A\cup C, B\cup D)\in Y$ teljesül.

Forditva tegyük fel, hogy az Y halmazrendszerre az F-axiómarendszer teljesül, és $A\subsetneq\Omega$. Ekkor jelölje X az $\{a\in\Omega:(A,\{a\})\in Y\}$ halmazt. Világos, hogy X kielégiti (A1)-et.

Ha $(C,D)\in Y$ és $C\subsetneq X$, de $D\not\subseteq X$, akkor az (F2) és (F3) axiómákból $(X,X\cup D)\in Y$ következik. Tehát $(A,X\cup D)\in Y$. Ez ellentmond az X definiciójának, vagyis X kielégiti

(A2)-t.

(b) Legyen $Z=\{(B,A):(A,B)\in Y\}$. Az f-családok és a d-családok közötti dualitás (az 1.6 Tétel) miatt csak azt kell bebizonyitani, hogy Z akkor és csak akkor elégiti ki az A-axiómát, ha Y kielégiti a B-axiómát.

A B halmazra ($B\subsetneq\Omega$) konstruáljuk meg a B-axiómabeli X halmazt, amely hasonló az A-axiómabeli X halmazzal. Világos, hogy ilyen X kielégiti (B1)-et és (B2)-t.

Forditva, könnyen belátható, hogy ha az Y halmazrendszerre teljesül a B-axióma, akkor a Z halmazrendszerre az A-axióma teljesül.

(c) Az S-axiómarendszer és a C-axióma közötti ekvivalencia bizonyitása nehezebb, mint a két előző rész bizonyitása.

Először tegyük fel, hogy az Y halmazrendszerre teljesül a C-axióma. Mutassuk meg, hogy ekkor Y kielégiti az S-axiómarendszert. Világos, hogy $\bigcup_{i=1}^{l} X_i=\Omega$ miatt tetszőleges $A(A\neq\emptyset)$ halmazra $\overbrace{\quad}^{X_i\cap A\neq\emptyset} X_i$ létezik. (C1) és (C2) miatt nyilvánvaló, hogy tetszőleges $A,B\subsetneq\Omega$ esetén $(\emptyset,B)\in Y$ és $(A,\emptyset)\in Y$.
Nyilvánvaló, hogy $a=\overbrace{\quad}^{X_i\cap\{a\}\neq\emptyset} X_i$, tehát $(\{a\},\{a\})\in Y$.

Ha $(A,B)\in Y$, $(B,C)\in Y$ és $B\neq\emptyset$, akkor ha $A=\emptyset$, nyilván $(A,C)\in Y$. Ha $A\neq\emptyset$, akkor (C3) miatt $B\subsetneq \overset{\frown}{\underset{X_i\cap A\neq\emptyset}{}} X_i$ teljesül. $B\neq\emptyset$ és (C3) alapján $C\subsetneq \overset{\frown}{\underset{X_i\cap B\neq\emptyset}{}} X_i$ következik. Világos, hogy $\overset{\frown}{\underset{X_i\cap B\neq\emptyset}{}} X_i \subsetneq \overset{\frown}{\underset{X_i\cap A\neq\emptyset}{}} X_i$. Tehát (C1) miatt $(A,C)\in Y$ teljesül. Ha $(A,B)\in Y$, $C\subseteq A$, $D\subseteq B$, akkor a (C2) és (C3) miatt $D\subsetneq \overset{\frown}{\underset{X_i\cap C\neq\emptyset}{}} X_i$ teljesül. Tehát $(C,D)\in Y$. $(A,B)\in Y$, $(C,D)\in Y$ esetén ha $A=\emptyset$ vagy $C=\emptyset$, akkor világos, hogy $(A\cup C, B\cap D)\in Y$. Ha $A\neq\emptyset$ és $C\neq\emptyset$, akkor a (C3) miatt $B\subsetneq \overset{\frown}{\underset{X_i\cap A\neq\emptyset}{}} X_i$ és $D\subsetneq \overset{\frown}{\underset{X_i\cap C\neq\emptyset}{}} X_i$. Tehát $B\cap D\subsetneq \overset{\frown}{\underset{X_i\cap(A\cup C)\neq\emptyset}{}} X_i$ érvényes.

A (C2)-ből $(A\cup C, B\cap D)\in Y$ következik. Hasonló módon beláthatjuk, hogy ha $(A,B)\in Y, (C,D)\in Y$, akkor $(A\cap C, B\cup D)\in Y$. Most tegyük fel, hogy Y kielégiti az S-axiómarendszert. Mutassuk meg, hogy Y halmazrendszerre teljesül a C-axióma. (S1),(S3) és (S5) miatt mindegyik a-ra ($a\in\Omega$) előállithatjuk az X_i halmazt ($X_i\subsetneq\Omega$) ugy, hogy $(\{a\},X_i)\in Y$, és minden X'-ra ha $X_i\subsetneq X'$, akkor $(\{a\},X')\notin Y$. Azaz X_i olyan maximális számosságu halmaz, amelyre $(\{a\},X_i)\in Y$. Világos, hogy $a\in X_i$, és n ilyen X_i van, ahol $|\Omega|=n$. Nyilvánvaló, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} X_i=\Omega$. Jelölje X az $\{X_i : i=1,\ldots,n\}$ halmazrendszert. Könnyen belátható, hogy tetszőleges

B ($B \subsetneqq \Omega$) halmazra $(\emptyset,B)\in Y$.

Tegyük fel, hogy $A=\{a_1,\ldots,a_k : a_j\in\Omega,\ j=1,\ldots,k\}$ itt $k\geqq 1$. (Azaz $A\neq\emptyset$) és B_1 olyan halmaz, hogy $(A,B_1)\in Y$, $\forall B_2$: $B_1 \subsetneqq B_2 \rightarrow (A,B_2)\notin Y$. Az X definiciója szerint mindegyik a_j-re ($a_j\in A$) létezik $X_{i_j}\in X$, amelyre $(\{a_j\}, X_{i_j})\in Y$.

(S4)-ből $(A, \bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}) = (\bigcup_{j=1}^{k} a_j, \bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j})\in Y$ következik.

B_1 definiciója szerint $\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j} \subsetneqq B_1$ teljesül. Másrészt, $(A,B_1)\in Y$, és az (S3) miatt minden j-re ($j=1,\ldots,k$) $(\{a_j\},B_1)\in Y$. Tehát $B_1 \subsetneqq \bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}$, azaz $B_1 = \bigcap_{i=1}^{k} X_{i_j}$.

Nyilvánvaló, hogy $\bigcap_{X_i\cap A\neq\emptyset} X_i \subsetneqq \bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}$. Vagyis minden B ($B \subsetneqq \bigcap_{X_i\cap A\neq\emptyset} X_i$) halmazra $B\subsetneqq B_1$. Tehát $(A,B)\in Y$ teljesül.

Most tegyük fel, hogy egyrészt $(C,D)\in Y$, $C\cap X_i\neq\emptyset$ és $a_1\in C\cap X_i$, másrészt, hogy az a olyan attributum, melyre $(\{a\}, X_i)\in Y$, és minden X' halmazra $X_i\subsetneqq X' \rightarrow (\{a\},X')\notin Y$. (S3) és $a_1\in X_i$ miatt $(\{a\},\{a_1\})\in Y$. Mivel $a_1\in C$, igy (S3)-ból $(\{a_1\}, D)\in Y$ következik. Tehát, $a_1\neq\emptyset$, és (S2) miatt azt kapjuk, hogy $(\{a\},D)\in Y$. X_i definiciója szerint $D\subsetneqq X_i$. Azaz Y-ra teljesül a C-axióma. Ezzel a 2.1 Tételt bebizonyitottuk.

2.1 Megjegyzés. A fenti bizonyitásban látható, hogy ha $A=\{a_j: j=1,\ldots,k;\ a_j\in\Omega;\ k\geqq 1\}$, akkor $\bigcap_{X_i\cap A\neq\emptyset} X_i = \bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}$

((C3) miatt).

Az 1.2, 1.4, 1.5 és 2.1 Tételekből közvetlenül következik az alábbi

2.1 Következmény. Legyen $P(\Omega)$ az Ω nem üres véges halmaz hatványhalmaza, és $Y \subseteq P(\Omega) \times P(\Omega)$. Legyen továbbá R egy reláció az Ω felett. Ekkor $F_R(D_R, S_R)$ kielégiti az A-(B-,C-) aciómát. Forditva, ha Y halmazrendszer kielégiti az A-(B-,C-) axiómát, akkor létezik olyan R reláció az Ω felett, amelyre $F_R = Y(D_R = Y, S_R = Y)$.

A továbbiakban amikor az erős függőségek családjainak kombinatorikai jellemzőit vizsgáljuk, akkor mindig használjuk a C-axiómát.

2.2 Funkcionális függőségek és irredundáns relációk

Ebben a részben a funkcionális függőségek családjait (azaz f-családokat), a lezárási operációkat, és a minimális kulcsok rendszereit (ezek lényegében

nem üres Sperner-rendszerek) vizsgáljuk.

A reláció egyenlőséghalmaza alapján (lásd az 1.11 Definiciót) bevezetjük a következő definiciót.

2.4 Definició. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az Ω felett. Minden i,j-re $(1\leqq i\neq j\leqq m)$ legyen $E_{ij}=\{a\in\Omega: h_i(a)=h_j(a)\}$. Jelölje ξ_R az összes E_{ij}-k halmazát. Legyen továbbá

$M_R=\{A\in P(\Omega) : \exists E_{ij}\in\xi_R: E_{ij}=A$ és $\bar{\exists} E_{st}\in\xi_R: A\subsetneq E_{st}, 1\leqq i<j=m, 1\leqq s\neq t\leqq m\}$.

Az M_R halmazrendszert az R maximális rendszerének nevezzük.

2.2 Megjegyzés. A reláció definiciója szerint minden i,j-re $(1\leqq i\neq j\leqq m)$ $\Omega\neq E_{ij}$. Valóban lehet, hogy van több E_{ij}, melyek egyenlőek egymással. Világos, hogy adott R relációhoz pontosan egy M_R maximális rendszer létezik.

A reláció maximális rendszerének fogalma alapján kapható az alábbi tétel, amely egy szükséges és elégséges feltétel arra vonatkozólag, hogy egy reláció reprezentálja a nem üres Sperner-rendszert.

2.2 Tétel. Legyen K nem üres Sperner-rendszer és R egy reláció az Ω felett. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az R reláció reprezentálja K-t az, hogy $K^{-1}=M_R$, ahol K^{-1} K antikulcsainak halmaza és M_R az R maximális rendszere.

Bizonyitás. Mivel K és K^{-1} halmazok egyértelmüen meghatározzák egymást (K nem üres Sperner-rendszer), $K=K_R$ akkor és csak akkor teljesül, ha $K^{-1}=K_R^{-1}$. Ezért azt kell bebizonyitani, hogy $K_R^{-1}=M_R$.

Nyilvánvaló, hogy F_R f-család. Először tegyük fel, hogy A az R antikulcsa. Világos, hogy $A\neq\Omega$. Ha van olyan B halmaz ($B\subsetneq\Omega$), amelyre $A\subsetneq B$ és $A \overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}} B$, akkor az antikulcs definiciója szerint $B \overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}} \Omega$. Tehát $A \overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}} \Omega$ teljesül. Ez ellentmond annak, hogy minden C-re ($C\in K_R$) $C\not\subseteq A$. Vagyis $A\in I(F_R)$, ahol $I(F_R)$ az F_R család maximális jobboldalainak halmaza (lásd az 1.6 Definiciót). Ha létezik olyan B' halmaz, hogy $B'\in I(F_R)\setminus\Omega$ és $A\subsetneq B'$, akkor B az R kulcsa. Ez ellentmond annak, hogy $B'\neq\Omega$. Tehát $A\in I(F_R)\setminus\Omega$, és $\bar{\exists}B':B'\in I(F_R)\setminus\Omega$ és $A\subsetneq B'$. Nyilvánvaló, hogy $\Omega\notin M_R$. Belátható, hogy minden i,j-re ($1\leq i\neq j\leq m$) $E_{ij}\in I(F_R)$,

ha feltételezzük, hogy $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$. Tehát $M_R \subseteq I(F_R)$. Ha D olyan halmaz, amelyre $\forall A_i \in M_R$: $D \not\subseteq A_i$, akkor a funkcionális függőség definiciója szerint $D \overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}} \Omega$. Azaz D egy kulcsa az R-nek. Tehát M_R az $I(F_R)$ maximális elemeinek halmaza. Vagyis $M_R \subseteq I(F_R) \setminus \Omega$ és minden B halmazra $(B \in I(F_R) \setminus \Omega)$ létezik olyan $A_i (A_i \in M_R)$ halmaz, hogy $B \subseteq A_i$ teljesül. Tehát, a fenti részbizonyitás szerint $A \in M_R$.

Forditva, tegyük fel, hogy $A \in M_R$. A reláció és M_R rendszer definiciói szerint $A \overset{f}{\underset{R}{\not\rightarrow}} \Omega$. Azaz minden B halmazra $(B \in K_R)$ $B \not\subseteq A$. Másrészt, mivel A az M_R eleme belátható, hogy ha $A \subseteq D$, akkor $D \overset{f}{\underset{R}{\rightarrow}} \Omega$. Tehát az antikulcs definiciója szerint $A \in K_R^{-1}$. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

A 2.2 Tételből nyilván adódik az alábbi

2.2 Következmény. Legyen R egy reláció az Ω felett. $K_R^{-1}=M_R$ teljesül, ahol K_R^{-1} R antikulcsainak halmaza és M_R R maximális rendszere.

A 2.2 Tételből és a 2.2 triviális Következményből nyilván adódik a

2.3 Következmény. Legyen R_1, R_2 két reláció az Ω

felett. Ekkor R_1 és R_2 akkor és csak akkor k-ekvivalens egymással, ha $M_{R_1} = M_{R_2}$ teljesül, ahol M_{R_1} (M_{R_2}) az R_1(R_2) maximális rendszere.

2.3 Megjegyzés. Legyen K nem üres Sperner-rendszer és $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az Ω felett. Ekkor M_R definiciója szerint azt kapjuk, hogy $|M_R| \leq |\varepsilon_R|$, ahol $\varepsilon_R=\{E_{ij}: 1\leq i\neq j\leq m$, E_{ij} az R-beli h_i és h_j sorok egyenlőséghalmaza$\}$.
Nyilvánvaló, hogy $|\varepsilon_R| = \binom{m}{2}$.
Ha az R reláció reprezentálja a K-t, akkor a 2.2 Tétel miatt $|K^{-1}| \leq \binom{m}{2}$ teljesül. [44]-ben (lásd 1.12 Tételt) ezt más módszerrel bebizonyitották

A 3. fejezetben (lásd 3.1 Algoritmust) konstruálunk egy algoritmust, amely egy adott nem üres K Sperner-rendszerhez megtalálja K antikulcsainak halmazát. Másrészt, egy tetszőleges R relációból előállithatjuk az M_R maximális rendszert. Ezért a 2.2 Tétel és a 2.3 Következmény segitségével megmutatjuk, hogy létezik két olyan algoritmus, amelyek közül az egyik meghatározza, hogy egy R reláció reprezentálja-e a K Sperner-rendszert, a másik pedig ellenőrzi, hogy

két tetszőleges relációk k-ekvivalens-e egymással.

2.4 Megjegyzés. Az algoritmusok időbonyolultságának becslése céljából az algoritmusokat ALGOL-nyelven adjuk meg (lásd részletesen [2]-ben). Mivel szemléletesen szeretnénk megfogalmazni a bonyolult algoritmusokat, ezért ezeknek az algoritmusoknak a blokk-sémáját is megadjuk. Másrészt feltételezzük, hogy két attributum összehasonlítása elemi operáció. Tegyük fel, hogy ha $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ (azaz $|\Omega|=n$) és $A\subseteq\Omega$, akkor A az attributumok rendezett listája. Tehát Ω két részhalmazának a Boole operációja $O(n)$ elemi operációt igényel.

2.5 Megjegyzés. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ felett. Ekkor könnyen belátható, hogy az R relációból előállithatjuk az $\varepsilon_R=\{E_{ij}: 1\leq i\neq j\leq m,\ E_{ij}h_i$ és h_j sorok egyenlőséghalmaza$\}$ halmazrendszert.
Világos, hogy ez az előállitás $O(n.m^2)$ elemi operációt igényel. Megadunk egy könnyü algoritmust, amely az ε_R-hez meghatározza az M_R maximális rendszert.

2.1 Algoritmus.

INPUT: $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ az $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ feletti reláció és

$E[1:\frac{m(m-1)}{2}]$ az ε_R elemeinek tömbje

OUTPUT: M az R maximális rendszere

```
Procedure MAX(E,M):
M ← Ø; J ← 1 ;
while J≦ m(m-1)/2 do
   begin i ← 1; while i≦ m(m-1)/2 do
                if E[j]⊊E[i] then goto
                     T1 else i ← i+1;
          if E[J]∉M then M ← M∪E[J];
T1:       J → J+1
   end
```

Világos, hogy a maximális rendszer definiciója szerint a 2.1 Algoritmus megtalálja R maximális rendszerét. Könnyen belátható, hogy a 2.1 Algoritmus időbonyolultsága $O(n.m^4)$.

A 3. fejezetben a 3.4 Algoritmus adott K Sperner-rendszerhez meghatározza K antikulcsainak halmazát, a legrosszabb esetben a 3.4 Algoritmus időbonyolultsága exponenciálisan függ az $|\Omega|$-tól. Tehát a 2.2 Tétel és a 2.1 Algoritmus alapján nyilvánvaló a

2.4 Következmény. Legyen K nem üres Sperner-rendszer és R egy reláció az Ω felett. Ekkor a következő algoritmus meghatározza, hogy az R reláció reprezentálja-e a K Sperner-rendszert.

1. lépés. K-hoz a 3.4 Algoritmus megtalálja a K^{-1}-t
2. lépés. R-ből előállitjuk az ε_R-t, és az ε_R egyenlőséghalmazhoz a 2.1 Algoritmus megtalálja az M_R maximális rendszert.
3. lépés. A 2.2 Tétel szerint meghatározzuk, hogy $K^{-1}=M_R$ teljesül-e.

Világos, hogy ennek az algoritmusnak az időbonyolultsága

max {a 2.1 Algoritmus időbonyolultsága, a 3.4 Algoritmus időbonyolultsága}.

2.5 Következmény. Legyen $R_1=\{h_1,\ldots,h_{m_1}\}$, $R_2=\{f_1,\ldots,f_{m_2}\}$ két reláció az $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ felett. Ekkor létezik egy olyan algoritmus, amely meghatározza, hogy R_1 és R_2 k-ekvivalens-e egymással (azaz $K_{R_1}=K_{R_2}$ igaz-e), és ennek időbonyolultsága polinomiálisan függ R_1 és R_2 sorainak és oszlopainak számától.

Bizonyitás. A 2.1 Algoritmus szerint kaphatjuk M_{R_1}-t és M_{R_2}-t, ahol M_{R_1} (M_{R_2}) R_1(R_2) maximális rendszere.

A 2.3 Következmény miatt elegendő azt ellenőriznünk, hogy $M_{R_1}=M_{R_2}$ igaz-e.

2.6 Megjegyzés. A 3. fejezetben a 3.5 Algoritmus szerint R_1-ből és R_2-ből előállithatjuk K_{R_1}-t és K_{R_2}-t. Utána nyilván meghatározhatjuk, hogy R_1 és R_2 k-ekvivalens-e egymással. Ez a módszer azonban bonyolultabb, mint a maximális rendszereket megtaláló módszer.

Most a 2.2 Tétel alapján megkonstruáljuk azt az algoritmust, amely egy adott R relációhoz megtalálja azt az R' relációt, amelyre $R' \subseteq R$, R' és R k-ekvivalens egymással, és R' egy k-irredundáns reláció az Ω felett.

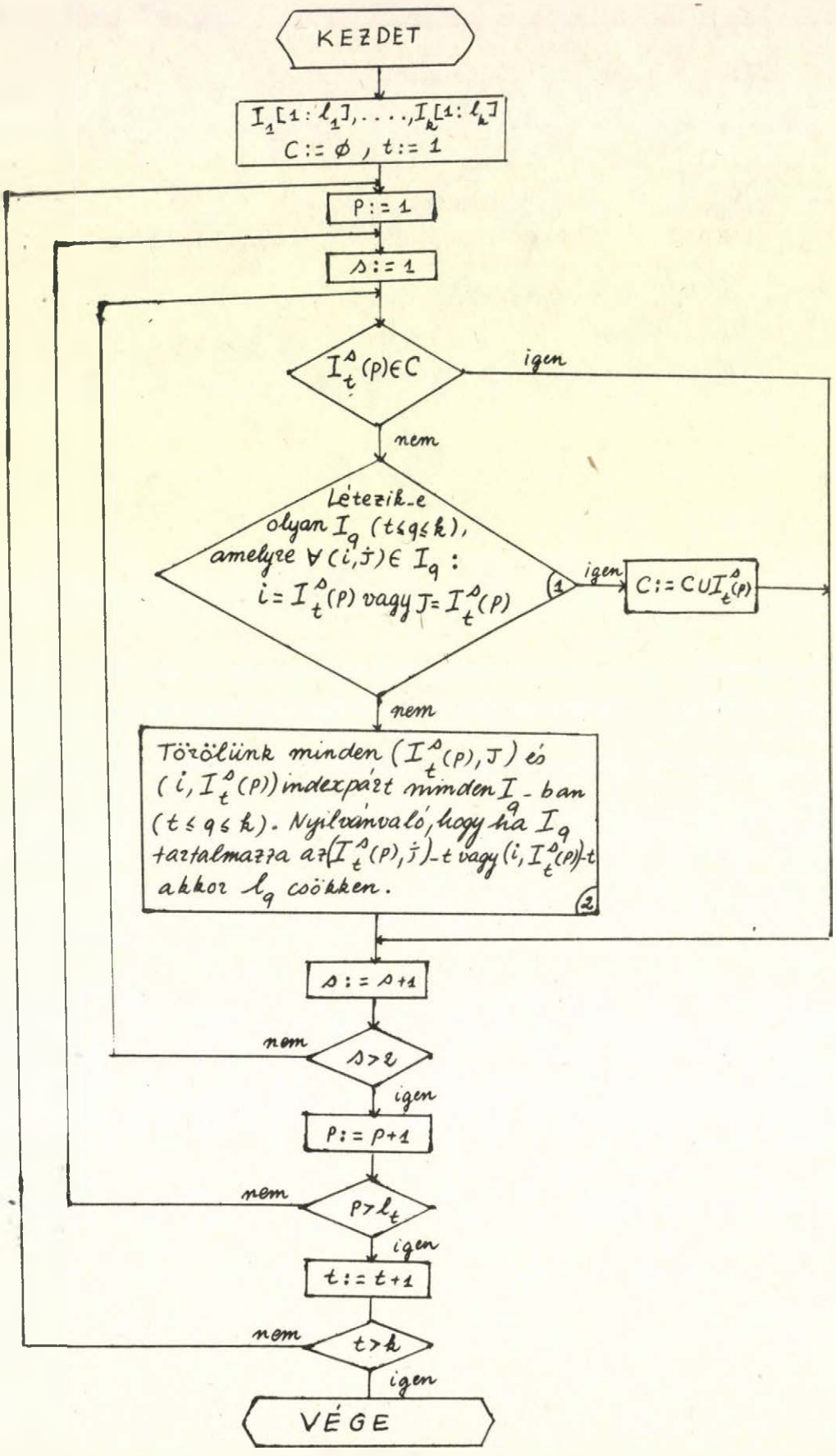
Először bebizonyitjuk az alábbi tételt.

2.3 Tétel. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ felett. Legyen továbbá
$\varepsilon_R=\{E_{ij} : 1\leq i\neq j\leq m\}$ R egyenlőséghalmaza és
$M_R=\{A_1,\ldots,A_k\}\neq\{\emptyset\}$ R maximális rendszere.

Legyen $I_t=\{(i,j):E_{ij}=A_t\}$, ahol $t=1,\ldots,k$ (azaz I_t összes olyan (i,j) indexpárok halmaza, amelyre $E_{ij}=A_t$). Jelöljük ℓ_t-vel az I_t elemeinek

számát. Jelölje $I_t^1(P)$ és $I_t^2(P)$ az I_t p-ik párjának első és második indexét, ahol t=1,...,k és $1 \leq p \leq l_t$.

Ezután tekintsük az alábbi blokkséma által meghatározott R' relációt.


KEZDET
$I_1[1:l_1],\ldots,I_k[1:l_k]$
$C := \emptyset$, $t := 1$
$p := 1$
$s := 1$
$I_t^s(p) \in C$
igen
nem
Létezik-e olyan I_q $(t \le q \le k)$, amelyre $\forall (i,j) \in I_q$: $i = I_t^s(p)$ vagy $j = I_t^s(p)$
1
igen
$C := C \cup I_t^s(p)$
nem
Töröljünk minden $(I_t^s(p), j)$ és $(i, I_t^s(p))$ indexpárt minden I_q-ban $(t \le q \le k)$. Nyilvánvaló, hogy ha I_q tartalmazza az $(I_t^s(p), j)$-t vagy $(i, I_t^s(p))$-t akkor l_q csökken.
2
$s := s+1$
nem
$s > 2$
igen
$p := p+1$
nem
$p > l_t$
igen
$t := t+1$
nem
$t > k$
igen
VÉGE

Ekkor $R'=\{h_i : i\in C\}$ olyan k-irredundáns reláció, hogy $R'\subsetneq R$ és $K_{R'} = K_R$, azaz R' és R k-ekvivalens egymással.

Bizonyitás. Világos, hogy $R'\subsetneq R$.

A blokkséma szerint I_q-ban $(t\leq q\leq k)$ töröljük az $(I_t^s(P),J)$ és $(i,I_t^s(P))$ indexpárokat, ha nem létezik olyan I_h indexpárok halmaza, amelyre minden (i,j) indexpárra $((i,j)\in I_h$ és $t\leq h\leq k)$ $i=I_t^s(P)$ vagy $J=I_t^s(P)$. Tehát mindegyik t-re $(t=1,\ldots,k)$ az I_t-ben van olyan (i,J) indexpár, hogy $i,j\in C$. Azaz minden I_t-re $(t=1,\ldots,k)$ $I_t\neq\emptyset$. Vagyis az M_R halmazrendszer R' maximális rendszere. Tehát a 2.3 Következmény miatt R' és R k-ekvivalensek egymással.

Másrészt, tegyük fel, hogy $R''\subsetneq R'$, itt $h_s\in R'\setminus R''$. Ekkor a blokk-séma szerint létezik olyan I_q $(1\leq q\leq k)$, hogy minden (i,j) indexpárra $((i,j)\in I_q$ és $h_i,h_j\in R')$ i=s, vagy j=s teljesül. Jelöljük $M_{R''}$-el az R'' maximális rendszerét. Ekkor $M''\subsetneq M$, mert $A_q\notin M''$. Tehát a 2.3 Következmény szerint $K_{R''}\neq K_R$,. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

A 2.3 Tétel alapján konstruálunk egy algoritmust, hogy pontosan becsülhessük a k-irredundáns reláció

megtalálásának időbonyolultságát.

Megjegyezzük, hogy csak vizsgáljuk az $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$-t, ahol $m\geqslant 2$. A többi reláció esetén triviális.

2.2 Algoritmus.

INPUT: $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ az $\Omega=\{1,\ldots,n\}$ feletti reláció.

OUTPUT: R' reláció, amelyre $R'\subseteq R$, $K_{R'}=K_R$ és R' k-irredundáns.

1. lépés. R-ből konstruáljuk az $\varepsilon_R=\{E_{ij}: 1\leq i\neq j\leq m$, E_{ij} a h_i és h_j sorok egyenlőséghalmaza$\}$ halmazt. Ha $\varepsilon_R=\{\emptyset\}$, akkor válasszunk ki egy tetszőleges (i,j) indexpárt és $R'=\{h_i,h_j\}$ olyan k-irredundáns reláció, amelyre $K_{R'}=K_R$. Forditva:

2. lépés. Az $\mathcal{E}_R$-ből a 2.1 Algoritmus szerint konstruáljuk az M_R maximális rendszert.

3. lépés. Tételezzük fel, hogy $M_R=\{A_1,\ldots,A_k\}$ és $I_s=\{(i,j): E_{ij}=A_s\}$, ahol $s=1,\ldots,k$. Jelölje l_s az I_s elemeinek számát, ekkor I_s $2l_s$ indexet tartalmaz. Tehát van $2\sum_{s=1}^{k} l_s$ indexünk.

ADATSTRUKTURA.

$I[1: 2\sum_{s=1}^{k} l_s]$ az indexek tömbje.

L[1:k+1] olyan tömb, amelyre L[1]=1, és mindegyik s-re (s=1,...,k) $L[s+1]=2l_s$.

A,B,C,E munkaváltozók.

```
                    Procedure IRRE(I,L):
     C ←∅;
CIKLUS1: for q ← 1 until k do
              for q1 ← L[q] step2 until L[q+1] do
                  begin E ← q1;
                   for q2 ← E until E+1 do
                    begin if I[q2]∈C then goto T1;
CIKLUS2:             for p ← q until k do
                      begin A ← 1;for q3 ← L[p]step 2 until L[p+1]do
                       if I[q3]≠0∧I[q3+1]≠0∧I[q2]≠I[q3]∧I[q2]≠I[q3+1]
                                          then A ← 0;
                          if A=1 then begin C ←C∪I[q2]; goto T1 end
UTOLSO2:              end;
CIKLUS3:                 begin B ← q; for q4 ← L[B] step 2 until L[k+1]do
                          if I[q2]=I[q4] ∨I[q2]=I[q4+1] then begin
                                  I[q4] ← 0; I[q4+1]← 0 end
UTOLSO3:                 end;
     T1:                 empty
                        end
UTOLSO1:            end;
                return C
```

Nyilvánvaló, hogy az indexek pozitiv egész számok, és ha i index, akkor $1 \leq i \leq m$. Két index összehasonlitása elemi

operáció (hasonlóan két attribútum összehasonlításához). Belátható, hogy $2 \sum_{s=1}^{k} l_s \leq m(m-1)$.

Az IRRE-ben használjuk az A munkaváltozót. A=1 azt jelenti, hogy létezik olyan I_p indexpárok halmaza, amelyre minden (i,j) indexpárra ($(i,j) \in I_p$) $i=I[q_2]$ vagy $j=I[q_2]$. Ha ilyen I_q nem létezik, akkor a CIKLUS3 müködik, tehát IRRE feltölti az (i,j) indexpárokat nullával, ahol $i=I[q_2]$ vagy $j=I[q_2]$. Világos, hogy amikor CIKLUS3 müködik, akkor a CIKLUS3-UTOLSO3-ban az algoritmus legfeljebb $O(m^2)$ elemi operációt igényel. Könnyen belátható, hogy ha $I[q_2] \notin C$, akkor CIKLUS2 müködik, és a CIKLUS2-UTOLSO2-ben az algoritmus legfeljebb $O(m^2)$ elemi operációt igényel. Nyilvánvaló, hogy az $I[q_2]$-k száma legfeljebb $m(m-1)$. Tehát a legrosszabb esetben az IRRE-ben az algoritmus időbonyolultsága legfeljebb $O(m^4)$. Az 1. lépésben az algoritmus $O(n.m^2)$ elemi operációt igényel. A 2. lépésben az algoritmus $O(n.m^4)$ elemi operációt igényel.

Tehát, a 2.2 Algoritmus időbonyolultsága $O(n.m^4)$. A 2.3 Tételből nyilván adódik az alábbi

2.6 Következmény. Legyen R egy reláció az Ω felett. Ekkor a 2.2 Algoritmus egy olyan k-irredundáns R relációt határoz meg, amelyre $R' \subseteq R$, $K_{R'}=K_R$ és időbonyolultsága

polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától.

2.1 Példa. Legyen $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ és $R=\{h_1,\ldots,h_9\}$ az Ω feletti reláció a következőképpen

Attributumok:	1	2	3	4	5	6	7
	1	o	o	2	2	2	2
	2	o	o	3	3	o	o
	3	3	3	2	1	o	1
	1	1	2	4	3	3	1
R =	4	2	4	1	o	1	3
	5	2	4	5	4	4	5
	6	4	5	5	5	5	4
	6	5	1	6	6	6	6
	7	6	1	7	7	7	7

Könnyen belátható, hogy $E_{12}=E_{56}=\{2,3\}$, $E_{13}=E_{67}=\{4\}$, $E_{14}=E_{78}=\{1\}$, $E_{23}=\{6\}$, $E_{24}=\{5\}$, $E_{34}=\{7\}$ és $E_{89}=\{3\}$. A többi E_{ij} üres. Tehát $M_R=\{\{1\},\{2,3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$. Legyenek $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2,3\}$, $A_3=\{4\}$, $A_4=\{5\}$, $A_5=\{6\}$ és $A_6=\{7\}$. Világos, hogy a 2.2 Algoritmus szerint $I_1=\{(1,4),(7,8)\}$, $I_2=\{(1,2),(5,6)\}$, $I_3=\{(1,3),(6,7)\}$, $I_4=\{(2,4)\}$, $I_5=\{(2,3)\}$ és $I_6=\{(3,4)\}$. Belátható, hogy a 2.2 Algoritmus 3. lépése szerint $C=\{1,2,3,4\}$.

Azaz

$$R' = \begin{matrix} 1 & o & o & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & o & o & 3 & 3 & o & o \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & o & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{matrix}$$

2.7 Megjegyzés. Beláthatjuk, hogy a 2.2 Algoritmus függ I_p $(p=1,\ldots,k)$ elemeinek sorrendjétől. Azaz ha I_p elemeinek sorrendje változik, akkor R egy uj k-irredundáns relációját kapjuk. Az alábbi tétel a k-irredundáns reláció sorainak számát becsüli.

2.4 Tétel. Legyen K egy nem üres Sperner-rendszer és R egy reláció az Ω felett. Ekkor ha R k-irredundáns reláció és reprezentálja a K-t, akkor $\sqrt{2|K^{-1}|} \leq |R| \leq 2|K^{-1}|$.

Bizonyitás. Mivel R reprezentálja K-t, $|K^{-1}| \leq \binom{|R|}{2}$ teljesül. Az alsó korlátot innen kaphatjuk. A felső korlát megadásához feltételezzük, hogy $K^{-1} = \{A_1,\ldots,A_k\}$. A 2.2 Tétel miatt $K^{-1}=M_R$, ahol M_R R maximális rendszere. Tegyük fel, hogy $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$. Ekkor legyenek $I_t=\{(i,j):E_{ij}=A_t\}$, ahol $t=1,\ldots,k$ és E_{ij} a h_i és h_j sorok egyenlőséghalmaza $(1 \leq i \neq j \leq m)$. Most konstruálunk egy, az M_R és az $\{1,\ldots,m\}$ halmaz közötti megfeleltetést. Mivel R k-irredundáns, tetszőleges q indexre

$(1 \leq q \leq m)$ létezik olyan I_t indexpárok halmaza, hogy $\forall (i,j) \in I_t$: $i=q$ vagy $j=q$. Válasszunk ki egy ilyen I_t-t. Legyen ez I_{t_q}, ahol $1 \leq t_q \leq k$. Könnyen belátható, hogy ha $q \neq p$ $(1 \leq q \leq m,\ 1 \leq p \leq m)$, akkor létezik olyan I_{t_p}, amelyre $t_p \neq t_q$ $(1 \leq t_p \leq k,\ 1 \leq t_q \leq k)$, vagy létezik pontosan egy olyan I_{t_p}, amelyre $t_p = t_q$. Ekkor világos, hogy I_{t_q} csak az (p,q) indexpárt (ha $p<q$), vagy a (q,p) indexpárt (ha $q<p$) tartalmazza. Belátható, hogy ebben az esetben nem létezik olyan s index $(s \neq q,\ s \neq p)$, amelyre $t_s = t_q = t_p$. Tehát láthatjuk, hogy R sorainak száma legfeljebb $2|K^{-1}|$. Ezzel felső korlátot is megadtuk és a tételt bebizonyitottuk.

2.8 Megjegyzés. Legyen K nem üres Sperner-rendszer és $K^{-1}=\{A_1,\ldots,A_k\}$. Legyen $R=\{h_1,h_2,\ldots,h_{2k-1}h_k\}$ a következő:

mindegyik i-re $(i=1,\ldots,k)$ $h_{2i-1}(a)=2i-1$ $(\forall a \in \Omega)$,

$$h_{2i}(a) = \begin{cases} 2i-1 & \text{ha } a \in A_i, \\ 2i & \text{ha } a \in \Omega \setminus A_i. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy R reprezentálja a K-t és a 2.4 Tétel szerint R k-irredundáns maximális számosságu reláció.

Most megvizsgálunk néhány az f-családokra vonatkozó kombinatorikai problémát. Tudjuk, ([7],[35],[40]), hogy ha $M \subseteq P(\Omega)$ és $N = \{A \in M: (\forall B,C \in M)(A=B \cap C \rightarrow A=B$ vagy $A=C)\}$, akkor N az egyedüli olyan halmazrendszer, amely M^+ minimális számosságu generátora (lásd 1.7 Tételt), ahol $M^+ = \{ \bigcap_{i=1}^{r} M_i : M_i \in M$ és $1 \leq r \leq |M| \}$

2.9 Megjegyzés. Legyen M_1 és M_2 két, a metszetre nézve zárt halmazrendszer. Ekkor belátható, hogy $M_1 = M_2$ akkor és csak akkor teljesül, ha $N_1 = N_2$, ahol $N_1 (N_2)$ az $M_1 (M_2)$ minimális számosságu generátora.

2.10 Megjegyzés. Legyen $N \subseteq P(\Omega)$. Azt mondjuk, hogy N egy metszetmentes rendszer az Ω felett, ha N kielégiti az alábbi feltételeket:

(1) $\Omega \in N$

(2) ha $A=B \cap C$ $(A,B,C \in N)$, akkor $A=B$ vagy $A=C$ teljesül.

[35]-ben és[40]-ben bebizonyitották, hogy ha I egy Ω feletti metszetfélháló, akkor N metszetmentes rendszerhez pontosan egy olyan metszetfélháló létezik, amelynek minimális számosságu generátora éppen N. Azaz a metszetfélhálók és metszetmentes rendszerek között létesitett megfeleltetés egy-egyértelmü.

Tudjuk ([5],[44]), hogy ha F egy f-család az Ω felett, akkor minden A halmazra $(A\in P(\Omega))$ $H_F(A)=\{b\in\Omega:(A,\{b\})\in F\}$ egy Ω feletti lezárási operáció. Forditva, ha H egy lezárási operáció az Ω felett, akkor pontosan egy olyan F f-család van, amelyre $H=H_F$.

Az alábbi tétel egy szükséges és elégséges feltétel arra, hogy egy reláció reprezentálja az f-családot.

2.5 Tétel. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció, F egy f-család az Ω felett. Ekkor az R reláció pontosan akkor reprezentálja az F f-családot, ha minden A halmazra $(A\in P(\Omega))$

$$H_F(A)=\begin{cases}\overset{\frown}{A\subsetneq E_{ij}}\ E_{ij} & \text{ha } \exists E_{ij}\in\varepsilon_R: A\subsetneq E_{ij},\\ \Omega & \text{különben.}\end{cases}$$

Itt ε_R R egyenlőséghalmaza.

Bizonyitás. Először bebizonyitjuk, hogy egy tetszőleges R relációban minden A-ra $(A\in P(\Omega))$

$$H_{F_R}(A)=\begin{cases}\overset{\frown}{A\subsetneq E_{ij}}\ E_{ij}, & \text{ha } \exists E_{ij}\in\varepsilon_R: A\subsetneq E_{ij},\\ \Omega & \text{különben.}\end{cases}$$

Ha A egy olyan halmaz, amelyre nem létezik olyan E_{ij} halmaz $(E_{ij}\in\varepsilon_R)$, hogy $A\subsetneq E_{ij}$, akkor $\forall h_i,h_j\in R$-re $\exists a\in A: h_i(a)\neq h_j(a)$. Vagyis a funkcionális függőség definiciója szerint $A \overset{f}{\underset{R}{\to}} \Omega$. Tehát H_{F_R} definiciója alapján $H_{F_R}(A)=\Omega$. A $\emptyset$-ra nyilvánvaló, hogy $H_{F_R}(\emptyset)=\bigcap_{E_{ij}\in\varepsilon_R} E_{ij}$. teljesül.

Ha $A\neq\emptyset$, és létezik olyan E_{ij} halmaz $(E_{ij}\in\varepsilon_R)$, amelyre $A\subsetneq E_{ij}$, akkor legyen $V=\{E_{ij}: A\subsetneq E_{ij}, E_{ij}\in\varepsilon_R\}$ és $B=\bigcap_{E_{ij}\in V} E_{ij}$. Világos, hogy $A\subsetneq B$ teljesül.
Ha $V=\varepsilon_R$ akkor, nyilván $(A,B)\in F_R$.
Ha $V\neq\varepsilon_R$ teljesül, akkor könnyen beláthatjuk, hogy minden E_{ij}-re $(E_{ij}\in V)$ $(\forall a\in A)(h_i(a)=h_j(a)) \to (\forall b\in B)(h_i(b)=h_j(b)$ és minden E_{ij}-re $(E_{ij}\notin V)$ $\exists a\in A: h_i(a)\neq h_j(a)$. Tehát, $(A,B)\in F_R$ teljesül. Belátható, hogy a H_{F_R} definiciója szerint $B\subseteq H_{F_R}(A)$ teljesül. Mivel R egy Ω feletti reláció, azt kapjuk, hogy $B\subsetneq\Omega$. Mivel az F_R egy f-család az Ω felett, F_R kielégiti az A-axiómát (lásd 2.1 Tételt). Ezért $(B,H_{F_R}(A))\in F_R$ teljesül.

Tételezzük fel, hogy c tetszőleges olyan attribútum, amelyre $c\notin B$. Azaz $c\notin \bigcap_{E_{ij}\in V} E_{ij}$.
Ekkor létezik olyan E_{ij} $(E_{ij}\in V)$, amelyre $c\notin E_{ij}$. Vagyis $\exists h_i h_j\in R$: $\forall b\in B$-re $h_i(b)=h_j(b)$ teljesül, de $h_i(c)\neq h_j(c)$.

Világos, hogy a funkcionális függőség definiciója szerint $(B \cup \{c\})$ nem függ funkcionálisan a B-től. Ezért minden c-re $(c \notin B)$ $(B, B \cup \{c\}) \notin F_R$. A H_{F_R} definiciója szerint $H_{F_R}(A) = B = \bigcap_{E_{ij} \in V} E_{ij}$. Az 1.4 Megjegyzés szerint $F = F_R$ pontosan akkor teljesül, ha $H_F = H_{F_R}$. Ezért azt kapjuk, hogy $F = F_R$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden A-ra $(A \in P(\Omega))$

$$H_F(A) = \begin{cases} \bigcap_{A \subseteq E_{ij}} E_{ij}, & \text{ha } \exists E_{ij} \in \varepsilon_R : A \subseteq E_{ij}, \\ \Omega \text{ különben.} \end{cases}$$

Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

A 2.5 Tételből adódik az alábbi

2.7 Következmény. Legyen $R = \{h_1, \ldots, h_m\}$ egy reláció, és F f-család az Ω felett. Legyenek ε_R az R egyenlőséghalmaza, I(F) az F család maximális jobboldalainak halmaza (lásd 1.6 Definiciót), és $T = \{B \in P(\Omega) : \exists E_{ij} \in \varepsilon_R : E_{ij} = B\}$. Ekkor R pontosan akkor reprezentálja F-t, ha $I(F) = T^+ \cup \{\Omega\}$ teljesül.

Bizonyitás. Az I(F) és H_F definiciói szerint $I(F) = \{H_F(A) : A \in P(\Omega)\}$. 2.5 Tétel szerint $I(F_R) \subseteq T^+ \cup \{\Omega\}$. Másrészt, könnyen látható, hogy minden E_{ij}-re $(E_{ij} \in \varepsilon_R)$ $E_{ij} \in I(F_R)$ és $E_{ij} \neq \Omega$.

Ezért $I(F_R)=T^+\cup\{\Omega\}$. Az 1.1 Tétel szerint R pontosan akkor reprezentálja az F családot, ha $I(F)=I(F_R)$. Ezzel a következményt bebizonyitottuk.

A 2.5 Tételből, a 2.7 Következményből és a 2.9 Megjegyzésből nyilván adódik az alábbi:

2.8 Következmény. Legyen R egy reláció, és F egy f-család az Ω felett. Legyen továbbá ε_R az R egyenlőséghalmaz és $T=\{B\in P(\Omega):\exists E_{ij}\in\varepsilon_R:E_{ij}=B\}$. Ekkor az R reláció akkor és csak akkor reprezentálja az f-t, ha $N_1=N_2\cup\{\Omega\}$ teljesül, ahol $N_1(N_2)$ az $I(F)$ (T^+) minimális számosságu generátora.

A 2.5 Tételből a 2.8 Következményből adódik az alábbi:

2.9 Következmény. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy Ω feletti reláció,

$\varepsilon_R=\{E_{ij}: 1\leq i\neq j\leq m,\ E_{ij}\ h_i$ és h_j sorok egyenlőséghalmaza$\}$

és

$T=\{B\in P(\Omega):\exists E_{ij}\in\varepsilon_R:E_{ij}=B\}$. Ekkor $N_1\cup\{\Omega\}=N_2$,

ahol $N_1(N_2)$ a $T^+(I(F_R))$ minimális számosságu generátora.

2.11 Megjegyzés. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ az $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ feletti reláció, és legyen $\varepsilon_R=\{E_{ij}:1\leq i\neq j\leq m, E_{ij}$ a h_i és h_j sorok egyenlőséghalmaza$\}$.

Világos, hogy $|\varepsilon_R| = \frac{m(m-1)}{2}$.

ε_R-ből konstruáljuk $T=\{B: \exists E_{ij}=B\}$-t. Nyilvánvaló, hogy ez a konstrukció $O(n.m^2)$ elemi operációt igényel. Könnyen belátható, hogy $|T| \leq \frac{m(m-1)}{2}$. Tételezzük fel, hogy $T=\{B_1,\ldots,B_k\}$. Ekkor a T-ből konstruálható $T_1=\{B_i \cap B_j : 1 \leq i \neq j \leq k\}$. Nyilvánvaló, hogy $|T_1| = \frac{k(k-1)}{2}$. A T_1-ből konstruálhatjuk az $N=\{A \in T: \bar{\exists} B_i \cap B_j : A=B_i \cap B_j, A \neq B_i$ és $A \neq B_j, 1 \leq i \neq j \leq k\}$ halmazt. Igazolható, hogy ez a konstrukció $O(n.m^6)$ elemi operációt igényel. Vagyis az ε_R-ből létezik olyan T^+ minimális számosságu generátorát megtaláló algoritmus, amelynek időbonyolultsága $O(n.m^6)$.

A 2.5 Tételből és a 2.9 Következményből nyilván adódik:

<u>2.10 Következmény</u>. Legyen $R_1=\{h_1,\ldots,h_{m_1}\}$, $R_2=\{f_1,\ldots,f_{m_2}\}$ két reláció az $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ felett. Legyen továbbá $T_1 = \{A \in P(\Omega) : \exists E^1_{ij}: E^1_{ij}=A, E^1_{ij}$ a h_i és h_j sorok egyenlőséghalmaza $1 \leq i \neq j \leq m_1\}$, és
$T_2=\{B \in P(\Omega) : \exists E^2_{ij}: E^2_{ij}=B$, E^2_{ij} a f_i és f_j sorok egyenlőséghalmaza, $1 \leq i \neq j \leq m_2\}$.
Ebben az esetben R_1 és R_2 akkor és csak akkor, f-ekvivalensek egymással (azaz $F_{R_1}=F_{R_2}$), ha $N_1=N_2$ teljesül, ahol

$N_1(N_2)$ a $T_1^+(T_2^+)$ minimális számosságu generátora.

A 2.11 Megjegyzés szerint az R_1 és R_2 relációkhoz előállithatjuk az N_1 és N_2 halmazrendszereket. Utána a 2.10 Következmény miatt eldöntjük, hogy $N_1=N_2$ teljesül-e. Tehát nyilvánvaló az alábbi:

2.11 Következmény. Legyen R_1,R_2 két reláció az Ω felett. Ekkor létezik olyan algoritmus, amely meghatározza, hogy R_1 és R_2 f-ekvivalensek-e egymással, és ennek az algoritmusnak az időbonyolultsága polinomiálisan függ az R_1, R_2 sorainak és oszlopainak számától.

Természetes, hogy általában több olyan algoritmus van, amely eldönti, hogy két tetszőleges reláció f-ekvivalens-e. Itt bemutatunk egy ilyen algoritmust.

2.12 Megjegyzés. Legyen H az Ω feletti tetszőleges lezárási operáció. Legyen $Z(H)=\{A:H(A)=A\}$. $Z(H)$ elemeit zárt halmazoknak nevezzük. Könnyen látható, hogy ha $A_i \in Z(H)$ $(i=1,\ldots,m)$, akkor $H(\bigcap_{i=1}^{m} A_i)=\bigcap_{i=1}^{m} H(A_i)$. Nyilván $\Omega \in Z(H)$. Tehát $Z(H)$ egy metszet-félháló. Forditva, [22]-ben bebizonyitották, hogy tetszőleges Z metszet-félhálóhoz pontosan egy olyan H lezárási operáció létezik, hogy $Z= Z(H)$. Vagyis az Ω feletti lezárási operációk és metszet félhálók között létesitett megfeleltetés

kölcsönösen egy-egyértelmü.

2.12 Következmény. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció és H egy lezárási operáció az Ω felett. Legyen továbbá $T=\{A\in P(\Omega): \exists E_{ij}:E_{ij}=A\}$. Ekkor R akkor és csak akkor reprezentálja H-t, ha $N_1\cup\{\Omega\}=N_2$ teljesül, ahol $N_2(N_2)$ a $T^+(Z(H))$ minimális számosságu generátora.

Bizonyitás. Nyilvánvaló, hogy R akkor és csak akkor reprezentálja a H-t, ha $H=H_{F_R}$ teljesül (lásd 1.4 Megjegyzést), ahol $H_{F_R}(A)=\{b\in\Omega: (A,\{b\})\in F_R\}$. Világos, hogy $Z(H_{F_R})=I(F_R)$. Tehát a 2.5 Tétel, a 2.8 Következmény és a 2.12 Megjegyzés szerint a következményt bebizonyitottuk.

2.13 Megjegyzés. A 2.2 és 2.5 Tételből könnyen belátható, hogy ha R(F) egy reláció (egy f-család) az Ω felett, akkor

$$K_R^{-1}\subsetneq N_1-\{\Omega\}\,(K(F)^{-1}\subsetneq N_2\setminus\{\Omega\})$$

teljesül, ahol $K_R^{-1}(K(F)^{-1})$ az R(F) antikulcsainak halmaza, és $N_1(N_2)$ az $I(F_R)$ $(I(F))$ minimális számosságu generátora. Vagyis ebből következik

$$|K_R^{-1}|\leq|N_1|-1\ (|K(F)^{-1}|\leq|N_2|-1).$$

Az alábbiakban megadunk egy olyan algoritmust, amely tetszőleges adott R relációhoz meghatároz egy olyan f-irredundáns R' relációt, amelyre, $R' \subsetneq R$ és $F_{R'} = F_R$. Megjegyezzük, hogy csak vizsgáljuk az R relációkat, amelyekre $|R| \geq 2$. A többi reláció esetén triviális.

2.3 Algoritmus

INPUT: $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ az Ω feletti reláció.

OUTPUT: R' reláció, amelyre $R' \subsetneq R$, $F_{R'}=F_R$ és R' f-irredundáns.

1. Lépés. Megkonstruáljuk az R reláció ε_R egyenlőséghalmazát. Ha $\varepsilon_R=\{\emptyset\}$, akkor válasszunk ki egy tetszőleges (i,j) indexpárt. Ekkor világos, hogy $R'=\{h_i,h_j\}$ olyan f-irredundáns reláció, amelyre $F_{R'}=F_R$. Ha $\varepsilon_R \neq \{\emptyset\}$, akkor:

2. Lépés. ε_R-ből megkonstruáljuk az $N=\{A\in T:(\forall B,C\in T)$ $(A=B\cap C \rightarrow A=B$ vagy $A=C)\}$ halmazrendszert, ahol $T=\{B\in P(\Omega): \exists E_{ij}\in\mathcal{E}_R: E_{ij}=B;\ 1\leq i\neq j\leq m\}$.

3. Lépés. Tegyük fel, hogy $N=\{A_1,\ldots,A_k\}$. Legyen $I_s=\{(i,j):E_{ij}=A_s\}$ $(s=1,\ldots,k)$. Hajtsuk végre a Procedure IRRE-t. Azaz megvalósitjuk a 2.3 Tétel blokksémáját.

Könnyen látható, hogy a 3. Lépésben az algoritmus $O(m^4)$ elemi operációt igényel (lásd Procedure IRRE-ben). A 2.11 Megjegyzés miatt az 1. és a 2. Lépésben az algoritmus időbonyolultsága polinomiálisan függ az R sorainak és oszlopainak számától. Másrészt, a 2.5 Tétel és a 2.10 Következmény szerint $F_{R'}=F_R$ teljesül. Belátható, hogy Procedure IRRE R minden redundáns sorait törli. Tehát nyilvánvaló az alábbi

2.13 Következmény. Legyen R egy reláció az Ω felett. Ekkor a 2.3 Algoritmus egy olyan f-irredundáns R' relációt határoz meg, amelyre $R' \subseteq R$, R' f-ekvivalens R-rel, és időbonyolultsága polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától.

A 2.2 Algoritmushoz hasonlóan a 2.3 Algoritmus is függ I_s elemeinek sorrendjétől (s=1,...,k).

2.2 Példa. Ismét a 2.1 példát válasszuk.
Ekkor belátható, hogy T={{1},{2,3},{3},{4},{5},{6},{7} és $\emptyset$}. Tehát N={{1},{2,3},{3},{4},{5},{6},{7}} a T^+ minimális számosságu generátora. Legyen $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2,3\}$, $A_3=\{3\}$, $A_4=\{4\}$, $A_5=\{5\}$, $A_6=\{6\}$és $A_7=\{7\}$. Ekkor $I_1=\{(1,4),(7,8)\}$ $I_2=\{(1,2),(5,6)\}$, $I_3=\{(8,9)\}$,

$I_4=\{(1,3),(6,7)\}$, $I_5=\{(2,4)\}$, $I_6=\{(2,3)\}$ és $I_7=\{(3,4)\}$.

Könnyen látható, hogy $C=\{1,2,3,4,8,9\}$. Tehát

$$R'=\begin{array}{ccccccc} 1 & o & o & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & o & o & 3 & 3 & o & o \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 6 & 1 & 1 & 7 & 7 & 7 \end{array}$$

2.14 Megjegyzés. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció és F egy f-család az Ω felett. Legyen továbbá

$\varepsilon_R=\{E_{ij}: 1\leq i\neq j\leq m,\ E_{ij}$ a h_i és h_j sorok egyenlőséghalmaza$\}$

$T=\{A\in P(\Omega): \exists E_{ij}\in\varepsilon_R: E_{ij}=A\}$ és N_1 a T^+ minimális számosságu generátora. Belátható, hogy $|N_1|\leq|\varepsilon_R|$. Nyilván $|\varepsilon_R|=\binom{m}{2}$. Ha R reprezentálja az F f-családot, akkor a 2.5 Tétel a 2.8 Következmény szerint $|N_1'|=|N|$ teljesül, ahol

$N=\{A\in I(F): A\neq\Omega, (\forall B,C\in I(F))\ (A=B\cap C \rightarrow A=B$ vagy $A=C)\}$.

Tehát $|N|\leq\binom{m}{2}$.

Hasonló módon állitjuk, hogy ha R reprezentálja a H lezárási operációt, akkor $|N_2|\leq\binom{m}{2}$, ahol

$N_2=\{A\in Z(H): A\neq\Omega, (\forall B,C\in Z(H))(A=B\cap C \rightarrow A=B$ vagy $A=C)\}$.

2.15 Megjegyzés. Legyen F egy f-család és H lezárási operáció az Ω felett. Legyen továbbá $S(F)=\min\{m: F=F_R, |R|=m,$ R az Ω feletti reláció$\}$, és

$S(H)=\min\{m: H=H_R, |R|=m, R$ az Ω feletti reláció$\}$.

A [43]-ban bebizonyitották, hogy $S(F) \leq |N|+1$ és $S(H) \leq |N_2|+1$. Tehát a 2.14 Megjegyzés szerint $\sqrt{2|N|} \leq S(F) \leq |N|+1$, $\sqrt{2|N_2|} \leq S(H) \leq |N_2|+1$.

A 2.4 Tétel bizonyitásához hasonlóan adódik a következő:

2.6 Tétel. Legyen F egy f-család, R egy reláció az Ω felett és

$N=\{A \in I(F) : A \neq \Omega, (\forall B,C \in I(F))\ (A=B \cap C \rightarrow A=B \text{ vagy } A=C)\}$.

Ekkor ha R olyan f-irredundáns reláció, amely reprezentálja az F f-családot, akkor $\sqrt{2|N|} \leq |R| \leq 2|N|$.

Ez hasonló a lezárási operációra vonatkozó tételhez.

2.16 Megjegyzés. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az Ω felett.

Legyen $\varepsilon_R=\{E_{ij}: 1 \leq i \neq j \leq m,\ E_{ij}$ a h_i és h_j sorok egyenlőséghalmaza$\}$ és $T=\{A \in P(\Omega) : \exists E_{ij} \in \varepsilon_R : E_{ij}=A\}$.

Nyilvánvaló, hogy T az ε_R különböző elemeinek halmaza. A halmaz hagyományos értelmében ε_R azonos T-vel. Mivel szemléletesen szeretnénk megfogalmazni néhány tételt, következményt, megjegyzést, és algoritmust, az ilyen T-et ezekben az esetekben használjuk. Belátható, hogy a 2.3 Algoritmusban a T halmazokat meg kell konstruálnunk.

2.3 Duális függőségek és irredundáns relációk

Ebben a részben a duális függőségek családjait és a d-irredundáns relációkat vizsgáljuk.

Mielőtt egy szükséges és elégséges feltételét adnánk annak, hogy egy reláció reprezentálja a d-családot, definiáljuk a tetszőleges relációhoz tartozó egyenlőtlenséghalmazt.

2.5 Definició. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az Ω felett és minden i,j-re $(1\leq i\neq j\leq m)$ legyen $N_{ij}=\{a\in\Omega: h_i(a)\neq h_j(a)\}$ Az N_{ij} halmazt a h_i és h_j sorok egyenlőtlenséghalmazának az $\{N_{ij}: 1\leq i\neq j\leq m\}$ halmazrendszert az R egyenlőtlenséghalmazának nevezzük.

A továbbiakban jelölje β_R R egyenlőtlenséghalmazát. Előfordulhat, hogy $\Omega\in\beta_R$, és létezhez néhány N_{ij}, amelyek azonosak egymással. Belátható, hogy a reláció definiciója szerint $\emptyset\notin\beta_R$. A továbbiakban az egyenlőtlenséghalmazokat használjuk a reláció duális függőségeinek családjaival kapcsolatos kombinatorikai problémákra.

2.7 Tétel. Legyen egy d-család, és R egy reláció az felett. Legyen továbbá β_R az R egyenlőtlenséghalmaza, és $V=\{C\in P(\Omega): \exists N_{ij}\in\beta_R: N_{ij}=C\}$.

Ekkor az R reláció akkor és csak akkor reprezentálja a D d-családot, ha $G(D)=(V\cup\{\Omega\})^{+}\cup\{\emptyset\}$ teljesül, ahol G(D) a D család maximális baloldalainak halmaza (lásd 1.9 Definiciót).

Bizonyitás. Az 1.3 Tétel szerint az R reláció akkor és csak akkor reprezentálja a D d-családot, ha $G(D)=G(D_R)$ teljesül. Tehát bebizonyitandó, hogy $G(D_R)=(V\cup\{\Omega\})^{+}\cup\{\emptyset\}$. Világos, hogy $G(D_R)$ egy d-félháló az Ω felett (lásd 1.10 Definicióban). Tehát $G(D_R)$ tartalmazza az Ω-t és az $\emptyset$-t. Nyilvánvaló, hogy $\emptyset\notin V$, és $\Omega\in(V\cup\{\Omega\})^{+}$. Most tegyük fel, hogy $N_{ij}\neq\Omega$. Ekkor minden a attributumra $(a\in\Omega\setminus N_{ij})$ $h_i(a)=h_j(a)$ teljesül. Másrészt, minden b attributumra $(b\in N_{ij})$ $h_i(b)\neq h_j(b)$ igaz. Tehát $\{a\}\cup N_{ij} \overset{d}{\nrightarrow}_R N_{ij}$ (azaz N_{ij} nem duálisan függ $\{a\}\cup N_{ij}$-től). Ezért $N_{ij}\in G(D_R)$ teljesül.

Vagyis $(V\cup\{\Omega\})^{+}\cup\{\emptyset\}\subseteq G(D_R)$.

Forditva, tegyük fel, hogy $A\in G(D_R)\setminus\{\emptyset,\Omega\}$. Ekkor ha feltételezzük, hogy minden $h_i,h_j\in R$-re létezik olyan a attributum $(a\in A)$, hogy $h_i(a)=h_j(a)$, akkor $\Omega \overset{d}{\rightarrow}_R A$ teljesül. Ez ellentmond az A definiciójának. Tehát létezik olyan (i,j) indexpár, amelyre $A\subseteq N_{ij}$. Azaz van olyan $C\in V$, hogy $A\subseteq C$. Legyen $Q=\{C\in V: A\subseteq C\}$. Nyilvánvaló, hogy ha van olyan

N_{ij}, amelyre $A=N_{ij}$, akkor $A\in V$. Most tegyük fel, hogy $A \subsetneq \bigcap_{C\in Q} C$. Ekkor minden N_{ij}-re $(\exists C\in Q: N_{ij}=C)$ (ha ilyen N_{ij} létezik) van olyan a attributum $(a\in A)$ $h_i(a)=h_j(a)$. Ezért $\bigcap_{C\in Q} C \xrightarrow[R]{d} A$ teljesül. Ez ellentmond annak, hogy $A\in G(D_R)\setminus\{\emptyset,\Omega\}$. Tehát $\bigcap_{C\in Q} C=A$. Vagyis $A\in V^+$ teljesül. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

A fenti tételből, és a 2.9 Megjegyzésből adódik a

2.14 Következmény. Legyen R egy reláció, és D egy d-család az Ω felett. Legyen továbbá β_R az R egyenlőtlenséghalmaza $V=\{C\in P(\Omega): \exists N_{ij}\in\beta_R: N_{ij}=C\}$, $N_1=\{C\in V: C\neq\Omega, (\forall A,B\in V)(C=A\cap B \rightarrow A=C$ vagy $B=C)\}$, és

$N_2=\{X\in G(D): X\neq\Omega, X\neq\emptyset, (\forall Y,Z\in G(D))\ (X=Y\cap Z \rightarrow X=Y$ vagy $X=Z)\}$.

Ebben az esetben R akkor és csak akkor reprezentálja a D családot, ha $N_1=N_2$ teljesül.

Belátható, hogy $N_1(N_2)$ V^+ az Ω-t $(G(D)$ Ω-t és $\emptyset$-t) nem tartalmazó minimális számosságu generátora.

2.17 Megjegyzés. Vizsgáljuk az $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ relációt, amelyre $m\geq 2$. A többi reláció esetén a bizonyitás triviális.

Belátható a 2.7 Tétel bizonyitásából, hogy $G(D_R)=(V\cup\{\Omega\})^+\cup\{\emptyset\}$.

Az 1.3 Tételből, a 2.14 Következményből és a 2.9

Megjegyzésből adódik a

2.15 Következmény. Legyen R_1, R_2 két reláció az Ω felett. Legyen továbbá β_{R_1} (β_{R_2}) az R_1(R_2) egyenlőtlenséghalmaza,

$V_1=\{A\in P(\Omega): \exists N_{ij}\in\beta_{R_1}: N_{ij}=A\}$, $V_2=\{B\in P(\Omega): \exists N_{ij}\in\beta_{R_2}: N_{ij}=B\}$

$N_1=\{A\in V_1: A\neq\Omega, (\forall A_1, A_2\in V_1)(A=A_1\cap A_2 \rightarrow A=A_1$ vagy $A=A_2)\}$, és

$N_2=\{B\in V_2: B\neq\Omega, (\forall B_1, B_2\in V_2)(B=B_1\cap B_2 \rightarrow B=B_1$ vagy $B=B_2)\}$.

Ekkor R_1 akkor és csak akkor d-ekvivalens R_2-vel ha $N_1=N_2$ teljesül.

2.18 Megjegyzés. A 2.1 Megjegyzéshez hasonlóan célszerüségi okokból használjuk a $V=\{C\in P(\Omega): N_{ij}\in\beta_R: N_{ij}=C\}$ halmazt néhány eredményben. Világos, hogy a halmaz hagyományos értelmében β_R azonos V-vel.

2.19 Megjegyzés. Legyen $R_1=\{h_1,\ldots,h_{m_1}\}$, és $R_2=\{f_1,\ldots,f_{m_2}\}$ két reláció az Ω felett. Az R_1, R_2 relációkból konstruálhatjuk a β_{R_1} és β_{R_2} halmazrendszereket. Világos, hogy

$$|\beta_{R_1}| = \frac{m_1(m_1-1)}{2} \quad \text{és} \quad |\beta_{R_2}| = \frac{m_2(m_2-1)}{2} .$$

A 2.11 Megjegyzéshez hasonló módon konstruálhatjuk a V_1 és V_2 halmazrendszereket. Utána előállithatjuk az

olyan N_1', N_2' halmazrendszereket, amelyekre $N_1'(N_2')$ a $V_1^+(V_2^+)$ minimális számosságu generátora. Nyilvánvaló, hogy $N_1 = N_1' \setminus \{\Omega\}$ és $N_2 = N_2' \setminus \{\Omega\}$ (lásd 2.15 Következményt). Ekkor a 2.15 Következmény szerint meghatározhatjuk, hogy R_1 d-ekvivalens-e R_2-vel.

2.16 Következmény. Legyen R_1, R_2 két reláció az felett. Ekkor létezik olyan algoritmus (időbonyolultsága polinomiálisan függ az R_1, R_2 sorainak és oszlopainak számától), amely eldönti, hogy R_1, R_2 d-ekvivalens-e egymással.

Tudjuk, hogy az adott R relációhoz általában több olyan R' reláció van, melyre R' d-ekvivalens R-rel.

Megadunk egy olyan algoritmust, amely egy előre adott tetszőleges R relációhoz megtalál egy olyan R' relációt, amely R-rel d-ekvivalens, d-irredundáns.

A 2.2 Algoritmushoz hasonlóan konstruáljuk az alábbit.

2.4 Algoritmus.

INPUT: $R = \{h_1, \ldots, h_m\}$ egy reláció az Ω felett.

OUTPUT: R' reláció, hogy $R' \subseteq R$, $D_{R'} = D_R$ és R' d-irredundáns.

1. Lépés. az R-ből előállitjuk a β_R egyenlőtlenség-

halmazt. Ha $\forall N_{ij} \in \beta_R : N_{ij} = \Omega$ (azaz nem létezik olyan N_{ij} amelyre $N_{ij} \neq \Omega$), akkor válasszunk ki egy tetszőleges (i,j) indexpárt. Ekkor belátható, hogy $R' = \{h_i, h_j\}$ olyan d-irredundáns reláció, amelyre $D_R = D_{R'}$.
Tegyük fel, hogy létezik olyan $N_{ij} \in \beta_R$, hogy $N_{ij} \neq \Omega$.

2. Lépés. β_R-ből hozzuk létre a $V = \{A \in P(\Omega) : \exists N_{ij} \in \beta_R : N_{ij} = A\}$ halmazt, majd az $N = \{A \in V : A \neq \Omega$, $(\forall B, C \in V)$ $(A = B \cap C \rightarrow A = B$ vagy $A = C)\}$ halmazt.

3. Lépés. Tételezzük fel, hogy $N = \{A_1, \ldots, A_k\}$.

Legyen $I_s = \{(i,j) : N_{ij} = A_s\}$ $(s = 1, \ldots, k)$, és hajtsuk végre az IRRE algoritmust (vagyis a 2.3 Tétel blokksémáját).
Belátható, hogy $R' = \{h_i : i \in C\}$ ahol C a 2.3 Tétel blokksémájában levő C halmaz d-irredundáns reláció, és $R' \subsetneq R$, $D_{R'} = D_R$.

A 2.3 Tételből az IRRE algoritmusból, és a 2.15 Következményből adódik a

2.17 Következmény. Legyen R egy reláció az Ω felett. Ekkor a 2.4 Algoritmus meghatároz egy olyan R' relációt, amelyre $R' \subsetneq R$, $D_{R'} = D_R$ és R' d-irredundáns. Időbonyolultsága polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától.

Világos, hogy a 2.2 Algoritmushoz hasonlóan a 2.4 Algoritmus is függ I_s elemeinek sorrendjétől.

2.3 Példa. Legyen $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ és $R=\{h_1,\ldots,h_6\}$ egy reláció az Ω felett:

Attributumok:	1	2	3	4	5	6
	0	1	0	2	1	0
	0	2	1	3	1	2
R=	1	1	0	1	2	3
	1	1	2	2	2	3
	1	4	4	1	2	3
	1	4	4	1	1	2

Nyilván $N_{12}=N_{45}=N_{46}=\{2,3,4\}$, $N_{13}=\{1,4,5,6\}$, $N_{14}=\{1,3,5,6\}$, $N_{16}=N_{26}=\{1,2,3,4\}$, $N_{34}=\{3,4\}$, $N_{36}=\{2,3,5,6\}$, $N_{35}=\{2,3\}$ és $N_{56}=\{5,6\}$. A többiek egyenlők Ω-val.

A 2.4 Algoritmus szerint

$V=\{\{2,3,4\},\{1,4,5,6\},\{1,3,5,6\},\{1,2,3,4\},\{3,4\},\{2,3,5,6\},\{2,3\},\{5,6\},\Omega\}$. és

$N=\{\{2,3,4\},\{1,4,5,6\},\{1,3,5,6\},\{1,2,3,4\},\{3,4\},\{2,3,5,6\}\}$.

Legyen $I_1=\{(1,2),(4,5),(4,6)\}$, $I_2=\{(1,3)\}$, $I_3=\{(1,4)\}$, $I_4=\{(1,6),(2,6)\}$, $I_5=\{(3,4)\}$, és $I_6=\{(3,6\}$.

A 2.4 Algoritmus 3. Lépése miatt azt kapjuk, hogy $R'=\{h_1,h_3,h_4,h_6\}$. Azaz

$$R' = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

[26]-ban és [35]-ben bebizonyitották, hogy tetszőleges adott D d-családhoz létezik olyan R reláció, hogy $D_R=D$, azonban nem mutattak példát ilyen relációra. Itt a 2.7 Tétel alapján bevezetünk egy egyszerü szemléletes konkrét relációt, amely reprezentálja a D d-családot.

2.18 Következmény. Legyen D egy d-család az Ω felett. Legyen továbbá G(D) a D maximális baloldalainak halmaza, és $N=\{A\in G(D): A\neq\emptyset, A\neq\Omega, (\forall B,C\in G(D))(A=B\cap C \rightarrow A=B$ vagy $A=C)\}$. Ekkor ha $|N|=0$, akkor legyen $R=\{h_1,h_2\}$, ahol $\forall a\in\Omega: h_1(a)=0$, és $h_2(a)=1$. Forditva, (azaz $|N|\neq 0$) tételezzük fel, hogy $N=\{A_1,\ldots,A_k\}$, legyen $R=\{h_1,h_2,\ldots,h_{2k-1},h_{2k}\}$ ahol mindegyik i-re $(i=1,\ldots,k)$:

$$\forall a\in\Omega: h_{2i-1}(a)=2i-1,$$

$$h_{2i}(a) = \begin{cases} 2i-1 & \text{ha } a\in\Omega\setminus A_i, \\ 2i & \text{ha } a\in A_i. \end{cases}$$

Állitjuk, hogy R reprezentálja a D családot (azaz $D_R=D$).

Bizonyitás. Világos, hogy R konstrukciója szerint $R \neq \emptyset$. Belátható, hogy ha $|N|=0$ teljesül (azaz $G(D)=\{\Omega,\emptyset\}$), akkor a 2.7 Tétel miatt $D_R=D$.

Ha $|N|\neq 0$, akkor láthatjuk, hogy $N \dot{\cup} \{\Omega\}$ egyenlő a $\{N_{ij}: 1 \leq i \neq j \leq 2k$, N_{ij} a h_i, h_j sorok egyenlőtlenséghalmaza$\}$ halmazzal. A 2.7 Tétel szerint $D_R=D$ teljesül. Ezzel a következményt bebizonyitottuk.

Most néhány a d-családokkal kapcsolatos extremális problémát vizsgálunk, amelyek a minimális, irredundáns relációkra vonatkoznak.

2.6 Definició. Legyen D egy d-család az Ω felett. Legyen $T(D) = \min\{m: D_R=D, |R|=m$, R az Ω feletti reláció$\}$ Azaz T(D) a D családot reprezentáló minimális reláció sorainak száma.

2.8 Tétel. Legyen D egy d-család az Ω felett, és R egy D-t reprezentáló, d-irredundáns reláció. Legyen $N=\{A \in G(D): A \neq \emptyset, A \neq \Omega, (\forall B,C \in G(D))\ (A=B \cap C \rightarrow A=B$ vagy $A=C)\}$. Azaz N a $G(D)\Omega$-t, $\emptyset$-t nem tartalmazó minimális számosságu generátora. Ekkor ha $|N|=0$(azaz $G(D)=\{\emptyset,\Omega\}$), akkor $T(D)=|R|=2$. Ha $|N| \geq 1$, akkor $\sqrt{2|N|} < T(D) \leq |R| \leq 2|N|$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy ha $|N| \leq 1$, akkor a D-t reprezentáló, d-irredundáns reláció minimális is.

Bizonyitás. Legyen R ($R=\{h_1,\dots,h_m\}$ tetszőleges reláció, amely reprezentálja a D családot, β_R az R egyenlőtlenséghalmaza, $V=\{C\in P(\Omega):\exists N_{ij}\in\beta_R: N_{ij}=C\}$, és

$N_1=\{C\in V:\ C\neq\Omega,(\forall B,A\in V)(C=A\wedge B \to C=A \text{ vagy } C=B)\}$.

Nyilván $|\beta_R|=\binom{m}{2}$, $|N_1|\leq|V|\leq\binom{m}{2}$.

A 2.4 Tételhez hasonlóan a 2.4 Algoritmus szerint bizonyitható, hogy ha R a D-t reprezentáló, d-irredundáns reláció, akkor $|R|\leq 2|N_1|$, ahol $|N_1|\geq 1$.

Az N_1-re ($|N_1|=0$) könnyen belátható, hogy $|R|=2$. Mivel a 2.14 Következmény szerint $|N_1|=|N|$, azt kapjuk, hogy $\sqrt{2|N|}<T(D)\leq|R|\leq 2|N|$.

Nyilvánvaló, hogy ha $G(D)=\{\emptyset,\Omega\}$, akkor $T(D)=2$, és ebben az esetben a D-t reprezentáló, d-irredundáns reláció minimális is. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

2.19 Következmény. Legyen $T(n)=\max\{T(D):D \text{ az } \Omega \text{ feletti d-család}, |\Omega|=n\}$.

Ekkor $\sqrt{2\binom{n}{[n/2]}}\leq T(n)\leq 2\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\binom{n}{[n/2]}$. (1)

Bizonyitás. Legyen K olyan Sperner-rendszer, amelyre $|K|=\binom{n}{[n/2]}$, ahol $|\Omega|=n$. Nyilvánvaló, hogy $K^+\cup\{\emptyset,\Omega\}$ d-félháló. Az 1.3 Tétel szerint van D olyan d-család, amelyre $G(D)=K^+\cup\{\emptyset,\Omega\}$.

A 2.8 Tételből, és Kleitman eredményéből [53](1) következik. ∎

Tudjuk ([35]), hogy ha R egy Ω feletti reláció, $F'_R=F_R\setminus\{(\emptyset,A)\in F_R:A\neq\emptyset\}$, és $D(F_R)=\{(A,B):(B,A)\in F'_R\}$, akkor $F'_R(D(F_R))$ egy f-(d-) család (ld. 1.2 Megjegyzést).

2.20 Megjegyzés. Legyen $R=\{h_1,\dots,h_m\}$ egy Ω feletti

reláció. Ha $F'_R \neq F_R$ (azaz $\{(\emptyset,A)\in F_R : A\neq\emptyset\}\neq\emptyset$) akkor legyen $R'=R\cup\{h_{m+1}\}$, ahol minden a-ra ($a\in\Omega$), és i-re ($1\leq i\leq m$): $h_{m+1}(a)\neq h_i(a)$.

Látható, hogy $F_{R'}=F'_R$ és $D_R=D_{R'}$.

Általában beláthatjuk, hogy $D_R\neq D(F_R)$. Azaz egy relációban több d-család van.

Most egy szükséges és elégséges feltételét adjuk annak, hogy $D_R=D(F_R)$ legyen.

2.9 Tétel. Legyen R egy reláció az Ω felett.

Legyen $T=\{A\in P(\Omega): \exists E_{ij}\in \varepsilon_R : E_{ij}=A, \varepsilon_R$ az R egyenlőséghalmaza$\}$ továbbá

$V=\{Z\in P(\Omega): \exists N_{ij}\in \beta_R : N_{ij}=Z, \beta_R$ az R egyenlőtlenséghalmaza$\}$.

Legyen

$N_1=\{A\in T: A\neq\emptyset, (\forall B,C\in T)(A=B\cap C \rightarrow A=B$ vagy $A=C)\}$ és

$N_2=\{Z\in V: Z\neq\Omega, (\forall X,Y\in V)(Z=X\cap Y \rightarrow Z=X$ vagy $Z=Y)\}$.

Azaz N_1 (N_2) az $\emptyset$-t (Ω-t) nem tartalmazó $T(V)$ minimális számosságu generátora.

Ekkor $D_R=D(F_R)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $N_1=N_2$.

Bizonyitás. Belátható, hogy a $D(F_R)$ definiciója szerint $I(F'_R)=G(D(F_R))$ és $\emptyset\in I(F'_R)$. Az 1.3 Tétel szerint $D_R=D(F_R)$ akkor és csak akkor, ha $G(D_R)=G(D(F_R))$

teljesül. Az N_1,N_2 konstrukciói és a reláció definicója szerint $\emptyset,\Omega\notin N_1$ és $\emptyset,\Omega\notin N_2$. A 2.7 Tétel miatt $G(D_R)=N_2^+\cup\{\emptyset,\Omega\}$. A 2.8 Tétel és $I(F_R)\cup\{\emptyset\}=I(F_R')$ alapján azt kapjuk, hogy $N_1^+\cup\{\emptyset,\Omega\}=I(F_R')$. Tehát $N_1^+=N_2^+$ akkor és csak akkor, ha $G(D(F_R))=G(D_R)$. A 2.9 Megjegyzés szerint $G(D(F_R))=G(D_R)$ akkor és csak akkor igaz, ha $N_1=N_2$ teljesül. Ezzel a Tételt bebizonyitottuk.

Könnyen belátható, hogy a 2.11 és a 2.19 Megjegyzések alapján előállitjuk az N_1,N_2 halmazrendszereket. Utána a 2.9 Tétel szerint meghatározzuk, hogy $N_1=N_2$ igaz-e. Igy nyilvánvaló az alábbi:

2.20 Következmény. Legyen R egy Ω feletti reláció. Ekkor létezik olyan algoritmus (időbonyolultsága polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától), amely eldönti, hogy $D_R=D(F_R)$ igaz-e.

2.4 Erős függőségek és irredundáns relációk

Ebben a részben az erős függőségek családjaival és a minimális , s-irredundáns relációkkal foglalkozunk, az erős operációt és az s-félhálót

definiáljuk. Az erős operációk és s-félhálók alapján vizsgáljuk az erős függőségek családjaival kapcsolatos kombinatorikai problémákat.

2.7 Definició. Legyen Ω nem üres véges halmaz, $P(\Omega)$ az Ω hatvány halmaza. Az $E: P(\Omega) \to P(\Omega)$ függvényt erős operációnak nevezzük, ha $a,b \in \Omega$, és $A \in P(\Omega)$-ra

(i) $E(\emptyset)=\Omega, a \in E(\{a\})$,

(ii) $b \in E(\{a\}) \to E(\{b\}) \subseteq E(\{a\})$,

(iii) $E(A)= \bigcap_{a \in A} E(\{a\})$.

2.10 Tétel. Legyen S egy s-család az Ω felett. Ekkor $E_S(A)=\{a \in \Omega: (A,\{a\}) \in S\}$ egy erős operáció. Forditva, ha E erős operáció, akkor pontosan egy olyan s-család létezik, melyre $E=E_S$, ahol $S=\{(A,B):A,B \in P(\Omega):B \subseteq E(A)\}$.

Bizonyitás. Először tegyük fel, hogy S egy s-család az Ω felett. Nyilvánvaló, hogy $E_S(\emptyset)=\Omega$ és $\forall a \in \Omega: a \in E_S(\{a\})$. A 2.1 Tétel szerint S kielégiti a C-axiómát. Azaz, ha $(C,D) \in S$ és $C \cap X_i \neq \emptyset$, akkor $D \subseteq X_i$ (lásd 2.3 Definiciót). Belátható, hogy a 2.1 Tételben mindegyik a attributumhoz $E_S(\{a\}) \in \{X_i: i=1,\ldots,n; |\Omega|=n\}$ (lásd 2.1 Tétel bizonyitását). Tehát ha $(\{b\}, E_S(\{b\})) \in S$ és $b \in E_S(\{a\})$

(azaz $b \cap E_S(\{a\}) \neq \emptyset$), akkor $E_S(\{b\}) \subsetneq E_S(\{a\})$.

A C-axióma (3) pontja szerint azt kapjuk, hogy

$(A, E_S(A)) \in S$, $\forall a \in A$: $A \cap E_S(\{a\}) \neq \emptyset \rightarrow E_S(A) \subsetneq E_S(\{a\})$.

Azaz $E_S(A) \subseteq \bigcap_{a \in A} E_S(\{a\})$. Másrészt, az S-axiómarendszer (S5) pontja szerint azt kapjuk, hogy

$\forall a \in A$: $(\{a\}, E_S(\{a\})) \in S \rightarrow (A = \bigcup_{a \in A} a, \bigcap_{a \in A} E_S(\{a\})) \in S$.

Vagyis $\bigcap_{a \in A} E_S(\{a\}) \subsetneq E_S(A)$ teljesül. Tehát $E_S(A) = \bigcap_{a \in A} E_S(\{a\})$ teljesül. Megjegyezzük, hogy $A \in P(\Omega)$ esetén előfordulhat, hogy $E_S(A) = \emptyset$.

Forditva, tegyük fel, hogy E egy erős operáció az Ω felett, és $S = \{(A,B) : B \subseteq E(A)\}$. Ekkor bebizonyitandó, hogy S egy s-család. A 2.1 Tétel szerint bebizonyitjuk, hogy S kielégiti a C-axiómát. Legyen $E = \{E(\{a\}) : a \in \Omega, |\Omega| = n\}$. Előfordulhat, hogy $a \neq b$ $(a,b \in \Omega)$, de $E(\{a\}) = E(\{b\})$. Nyilvánvaló, hogy $\bigcup_{a \in \Omega} E(\{a\}) = \Omega$. Az S definiciója szerint $\bigcap_{E(\{a\}) \cap A \neq \emptyset} E(\{a\}) \subseteq E(A)$ miatt azt kapjuk, hogy $B \subsetneq \bigcap_{E(\{a\}) \cap A \neq \emptyset} E(\{a\}) \rightarrow (A,B) \in S$. Másrészt, ha $(C,D) \in S$ és $C \cap E(\{a\}) \neq \emptyset$, akkor tegyük fel, hogy $b \in C \cap E(\{a\})$. Az erős operáció definiciójának (ii) pontja szerint $b \in E(\{a\}) \rightarrow E(\{b\}) \subsetneq E(\{a\})$. Mivel $D \subseteq E(C) = \bigcap_{d \in C} E(\{d\})$, $b \in C$, és $\bigcap_{d \in C} E(\{d\}) \subsetneq E(\{b\})$, igy $D \subseteq E(\{a\})$. Világos, hogy minden A halmazra $(A \subseteq \Omega)$ $(\emptyset, A)$ és $(A, \emptyset) \in S$.

Tehát S kielégiti a C-axiómát. Belátható, hogy $E=E_S$. Tegyük fel, hogy létezik olyan más S' d-család, hogy $E=E_{S'}$. Az S és E definiciói szerint azt kapjuk, hogy $S' \subseteq S$. Ha $(A,B) \in S$, akkor $B \subseteq E(A)=E_{S'}(A)$. Az E_S, és s-család definiciói szerint $(A,B) \in S'$. Azaz $S'=S$ teljesül. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

2.21 Megjegyzés. Világos, hogy ha E_1, E_2 két erős operáció az Ω felett $(E_1 \neq E_2)$, akkor $S_1 \neq S_2$, ahol i=1,2-re.

$S_i=\{(A,B):A,B \subseteq \Omega : B \subseteq E_i(A)\}$, vagyis az s-családok és az erős operációk között létesitett megfeleltetés egy-egyértelmü.

Tudjuk ([26],[35]), hogy adott S s-családhoz létezik olyan reláció, amely reprezentálja az S-családot. Általában több ilyen reláció van. A 2.10 Tétel, és a 2.21 Megjegyzés alapján most megadunk egy szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy reláció reprezentálja az s-családot. Itt ismét rámutatunk arra, hogy a reláció egyenlőséghalmaza fontos szerepet játszik az erős függőségekre vonatkozó kombinatorikai problémákban.

2.11 Tétel. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció, S egy s-család az Ω felett. Ebben az esetben R akkor és

csak akkor reprezentálja az S-t (azaz $S_R=S$), ha mindegyik a attributumra ($a\in\Omega$):

$$E_S(\{a\}) = \begin{cases} \bigcap_{a\in E_{ij}} E_{ij}, & \text{ha létezik } E_{ij}, \text{ amelyre} \\ & a\in E_{ij}, \\ \Omega & \text{különben} \end{cases}$$

Itt E_{ij} a h_i és h_j sorok egyenlőséghalmaza ($1\leq i\neq j\leq m$).

Bizonyitás. A 2.10 Tétel, és a 2.21 Megjegyzés szerint $S_R=S$ akkor és csak akkor, ha $E_{S_R}=E_S$. Először bebizonyitjuk, hogy $E_{S_R}(\{a\}) = \bigcap_{a\in E_{ij}} E_{ij}$ ha $\exists E_{ij}: a\in E_{ij}$ és különben $E_{S_R}(\{a\})=\Omega$.

Világos, hogy $E_{S_R}(\{a\})=\{b\in\Omega:\{a\} \overset{s}{\underset{R}{\to}} \{b\}\}$, és $a\in E_{S_R}(\{a\})$.

Az erős függőség definiciója szerint bármely $a\in\Omega$ esetén $\{a\} \overset{s}{\underset{R}{\to}} B$ akkor és csak akkor, ha $\{a\} \overset{f}{\underset{R}{\to}} B$, ahol $a\neq\emptyset$.

Legyen $T=\{E_{ij}: a\in E_{ij}, E_{ij}$ a h_i és h_j sorok egyenlőséghalmaza$\}$.

Ha $T=\emptyset$, akkor nyilván $\{a\} \overset{f}{\underset{R}{\to}} \Omega$, azaz $E_{S_R}(\{a\})=\Omega$.

Ha $T\neq\emptyset$, akkor legyen $A= \bigcap_{a\in E_{ij}} E_{ij}$. Ekkor ha $T=\varepsilon_R$ teljesül, ahol ε_R az R egyenlőséghalmaza, akkor nyilván $\{a\} \overset{f}{\underset{R}{\to}} A$.

Ha létezik olyan E_{ij} halmaz, amelyre $E_{ij}\notin T$, akkor $h_i(a)\neq h_j(a)$. Tehát ekkor is azt kapjuk, hogy $\{a\} \overset{f}{\underset{R}{\to}} A$.

Jelöljük A'-val az olyan halmazt, amely kielégiti az alábbi feltételeket

(i) $\{a\} \overset{f}{\not\to}_R A'$,

(ii) $A' \subsetneq A'' \rightarrow \{a\} \overset{f}{\underset{R}{\longrightarrow}} A''$

Belátható, hogy $A'=A$. Az E_{S_R} definiciója szerint azt kapjuk, hogy $E_{S_R}(\{a\}) = \bigcap_{a \in E_{ij}} E_{ij}$. Azaz ha $S_R=S$ teljesül, akkor

$$E_S(\{a\}) = \begin{cases} \bigcap_{a \in E_{ij}} E_{ij} \text{ feltéve, hogy } \exists E_{ij}: a \in E_{ij}, \\ \Omega \quad \text{különben} \end{cases} \tag{1}$$

Forditva tegyük fel, E_S kielégiti (1)-t. Ekkor a fenti bizonyitás szerint minden a-ra $(a \in \Omega)$ $E_S(\{a\})=E_{S_R}(\{a\})$. Belátható, hogy az E erős operáció definiciója szerint az $\{E(\{a\}): a \in \Omega\}$ halmazrendszer meghatározza az $\{E(A): A \in \mathfrak{P}(\Omega)\}$ halmazrendszert. A 2.10 Tétel alapján és mivel E_S és E_{S_R} erős operációk, azt kapjuk, hogy $\forall A \subseteq \Omega$: $E_S(A)=E_{S_R}(A)$. Vagyis $S_R=S$ teljesül. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

2.8 Definició. Legyen E egy erős operáció és R egy reláció az Ω felett. Azt mondjuk, hogy R reprezentálja az E erős operációt, ha $E=E_{S_R}$ teljesül.

A 2.11 Tételből nyilvánvalók az alábbiak:

2.21 Következmény. Legyen E egy erős operáció, R egy

reláció az Ω felett. Ekkor R akkor és csak akkor reprezentálja az E-t, ha minden a-ra ($a \in \Omega$)

$$E(\{a\}) = \begin{cases} \bigcap_{a \in E_{ij}} E_{ij} & \text{ha } \exists E_{ij} : a \in E_{ij}, \\ \Omega & \text{különben} \end{cases}$$

2.22 Következmény. Legyen $R_1 = \{h_1, \ldots, h_{m_1}\}$, $R_2 = \{f_1, \ldots, f_{m_2}\}$ két reláció Ω felett. Az R_1 akkor és csak akkor s-ekvivalens R_2-vel ha minden a attributumra,

$\exists E_{ij} \in \varepsilon_{R_1} : a \in E_{ij}$ esetén $\exists E_{st} \in \varepsilon_{R_2} : a \in E_{st}$ és

$$\bigcap_{a \in E_{ij}} E_{ij} = \bigcap_{a \in E_{st}} E_{st} \qquad (2)$$

$E_{ij} \in \varepsilon_{R_1} \quad E_{st} \in \varepsilon_{R_2}$

Itt ε_{R_1} (ε_{R_2}) az R_1(R_2) egyenlőséghalmaza, és $(1 \leq i \neq j \leq m_1, 1 \leq s \neq t \leq m_2)$.

Megjegyezzük, hogy (2) helyett használható az alábbi állitás: ha $\exists E_{st} \in \varepsilon_{R_2} : a \in E_{st}$, akkor $\exists E_{ij} \in \varepsilon_{R_1} : a \in E_{ij}$ és

$$\bigcap_{a \in E_{ij}} E_{ij} = \bigcap_{a \in E_{st}} E_{st}.$$

$E_{ij} \in \varepsilon_{R_1} \quad E_{st} \in \varepsilon_{R_2}$

Világos, hogy tetszőleges adott relációból előállithatjuk az egyenlőséghalmazokat.

Igy az alábbi következmények nyilvánvalóak:

2.23 Következmény. Legyen R egy reláció, és E egy

erős operáció az Ω felett. Ekkor létezik olyan algoritmus (időbonyolultsága polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától), amely eldönti, hogy R reprezentálja-e az E erős operációt.

2.24 Következmény. Legyen R_1, R_2 két reláció az Ω felett. Ekkor létezik olyan algoritmus (időbonyolultsága polinomiálisan függ R_1, R_2 sorainak és oszlopainak számától), amely meghatározza, hogy R_1 s-ekvivalens-e R_2-vel.

Az adott R relációhoz általában több R-el ekvivalens reláció van. A fenti eredmények alapján konstruálhatunk egy algoritmust, amely meghatározza az olyan s-irredundáns R' relációt, amelyre $R' \subseteq R$, és $S_{R'} = S_R$.

2.5 Algoritmus.

INPUT: $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az Ω felett.

OUTPUT: R' olyan s-irredundáns reláció, amely $R' \subseteq R$, $S_{R'} = S_R$.

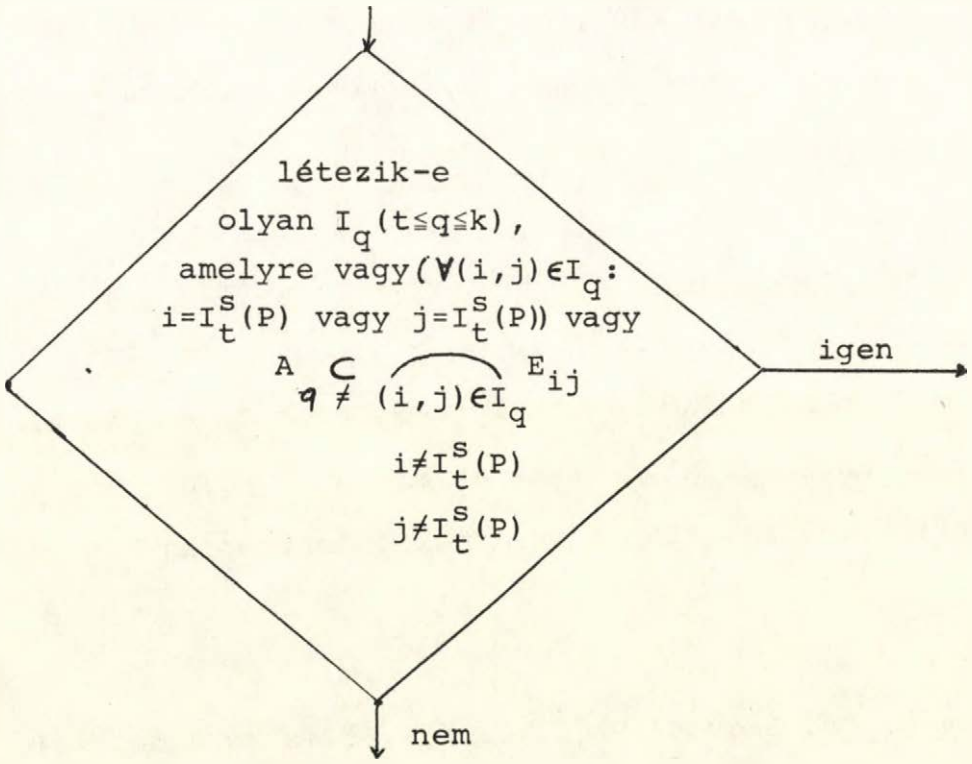
1. Lépés. Az R-ből előállitjuk az $\varepsilon_R = \{E_{ij} : 1 \leq i \neq j \leq m\}$ halmazt.

Ha nem létezik olyan E_{ij}, amelyre $E_{ij} \neq \emptyset$, akkor kiválasztunk tetszőleges h_i, h_j sorpárt. Ekkor nyilván $R' = \{h_i, h_j\}$ s-irredundáns és $S_{R'} = S_R$.

Forditva tételezzük fel, hogy $a_{n_1},\ldots,a_{n_k}$ olyan attributumok ($1\leq n_t\leq n$, $t=1,\ldots,k$) amelyekre létezik olyan E_{ij}, hogy $a_{n_t}\in E_{ij}$.

2. Lépés. Legyen $I_t=\{(i,j): a_{n_t}\in E_{ij}\}$ és $A_t=\bigcap_{a_{n_t}\in E_{ij}} E_{ij}$ ($1\leq i\neq j\leq m$, $t=1,\ldots,k$). Nyilván $k\leq n$. Jelölje ℓ_t az I_t elemeinek számát. Jelöljük $I_t^1(P)$-vel és $I_t^2(P)$-vel az I_t-beli p-idk pár első és második indexeit, ahol $t=1,\ldots,k$ és $1\leq p\leq \ell_t$.

Az egyszerüség kedvéért nem irjuk le az egész blokk-sémát, hanem csak helyettesitjük a 2.3 Tétel blokk-sémájában levő (1)-blokkot a következővel:



Ebben az uj blokkban meghatározzuk, hogy létezik-e olyan I_q $(t \leq q \leq k)$, amelyre vagy$(\forall (i,j) \in I_q$: $i = I_t^s(P)$ vagy $j = I_t^s(P))$vagy ha töröljük az összes (i,j) indexpárt ($(i,j) \in I_q$, $i = I_s^s(p)$ vagy $j = I_t^s(p)$), akkor az összes többi (i,j) indexpárra (azaz $(i,j) \in I_q$, $i \neq I_t^s(p)$ és $j \neq I_t^s(p)$) $\cap E_{ij} \supsetneq A_q$ teljesül.

Mivel a Procedure IRRE-hez hasonlóan leirhatjuk a 2. Lépést a blokk-séma alapján, mellőzzük ennek leirását. Belátható, hogy a 2. Lépésben a 2.5 Algoritmus időbonyolultsága polinomiálisan függ az R sorainak és oszlopainak számától (megjegyezzük, hogy a Procedure IRRE-ben a 2.2 Algoritmus időbonyolultsága csak polinomiálisan függ az R sorainak számától).

A 2.11 Tételből és a 2.22 Következményből adódik az alábbi:

2.25 Következmény. Legyen R egy Ω feletti reláció. Ekkor a 2.5 Algoritmus meghatároz egy olyan R' s-irredundáns relációt, amelyre $R' \subseteq R$ és R' s-ekvivalens R-el. Ennek az algoritmusnak az időbonyolultsága is polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától.

2.4 Példa. Legyen $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ és az Ω feletti

$R=\{h_1,\ldots,h_7\}$ reláció a következőképpen definiálva:

Attributumok	1	2	3	4	5	6
	1	o	o	2	2	2
	2	o	o	3	3	o
	3	3	3	2	1	o
R=	1	1	2	4	3	3
	4	2	4	1	o	1
	5	2	4	5	4	4
	6	4	5	5	5	5

Ekkor $E_{12}=E_{56}=\{2,3\}$, $E_{13}=E_{67}=\{4\}$, $E_{14}=\{1\}$, $E_{23}=\{6\}$ és $E_{24}=\{5\}$.

Legyen $I_1=\{(1,4)\}$, $I_2=\{(1,2),(5,6)\}$, $I_3=\{(1,2),(5,6)\}$, $I_4=\{(1,3),(6,7)\}$, $I_5=\{(2,4)\}$, és $I_6=\{(2,3)\}$.

Tehát $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2,3\}$, $A_3=\{2,3\}$, $A_4=\{4\}$, $A_5=\{5\}$ és $A_6=\{6\}$.

A 2.5 Algoritmus szerint kapjuk az $R'=\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$ relációt. Azaz

$R'=$						
	1	o	o	2	2	2
	2	o	o	3	3	o
	3	3	3	2	1	o
	1	1	3	4	3	3

2.22Megjegyzés. Belátható, hogy a 2.5 Algoritmus 2. lépésében előfordulhat, hogy van olyan A_i,A_j, amelyekre $i\neq j$ $(1\leq i\leq k,\ 1\leq j\leq k)$, de $A_i=A_j$. Ekkor a 2. lépésben

csak egy ilyen A_i-t választunk ki. Azaz I_t száma csökkenhet. A 2.2 Algoritmushoz hasonlóan a 2.5 Algoritmus is függ I_t elemeinek sorrendjétől (t=1,...,k). Tudjuk, hogy ha E egy erős operáció az Ω felett, akkor minden A,B-re ($A,B\in P(\Omega)$) $E(A\cup B)=E(A)\cap E(B)$. Azaz $\{E(A):A\in P(\Omega)\}$ halmazrendszer a metszésre nézve zárt. Könnyen látható, hogy $\{E(\{a\}):a\in\Omega\}$ halmazrendszer generálja az $\{E(A): A\subseteq\Omega\}$ halmazrendszert. Előfordulhat, hogy $a\neq b$ ($a,b\in\Omega$), de $E(\{a\})=E(\{b\})$.

A [26]-ban és [35]-ben bebizonyitották, hogy adott S s-családhoz van olyan R reláció, amelyre $S_R=S$, azonban nem mutattak példát ilyen relációra. Itt konkrétan megmutatunk egy, az S-t reprezentáló egyszerü szemléletes relációt a 2.11 Tétel segitségével.

2.12 Tétel. Legyen S egy s-család az $\Omega=\{a_1,...,a_n\}$ felett.

Legyen $T=\{A\in P(\Omega):\exists a_i\ (1\leq i\leq n):\ E_S(\{a_i\})=A\}$ (azaz T az $\{E_S(\{a_i\})\ i=1,...,n;\ a_i\in\Omega\}$ különböző elemeinek halmaza).

Legyen $N=\{A\in T:\ A\neq\Omega,(\forall B,C\in T)(A=B\cap C \rightarrow A=B \text{ vagy } A=C)\}$.

Ha $N=\emptyset$, akkor legyen $R=\{h_1,h_2\}$, ahol $\forall a\in\Omega: h_1(a)=0$ és $h_2(a)=1$. Forditva legyen $N=\{A_1,...,A_k\}$ (nyilván $k\leq n$).

Ekkor $R=\{h_o,h_1,...,h_k\}$ a következőképpen adható meg:

minden attributumra $(a\in\Omega): h_o(a)=0$.

mindegyik i-re $(i=1,\ldots,k)$

$$h_i(a)=\begin{cases} 0 & \text{ha } a\in A_i, \\ i & \text{különben.}\end{cases}$$

Állitjuk, hogy R reprezentálja az S-t (azaz $S_R=S$).

Bizonyitás. A 2.11 Tétel szerint bizonyitandó, hogy mindegyik a-ra $(a\in\Omega)$

$$E_S(\{a\})=\begin{cases} \bigcap_{a\in E_{ij}} E_{ij}, & \text{ha } \exists E_{ij}: a\in E_{ij}, \\ \Omega, & \text{különben.}\end{cases} \tag{3}$$

Itt $0\leq i\neq j\leq k$

Világos, hogy ha $N=\emptyset$, akkor 2.11 Tétel miatt $S_R=S$.

Belátható, hogy R konstrukciója szerint $E_S(\{a\})=\Omega$ akkor és csak akkor teljesül, ha nem létezik E_{ij}, hogy $a\in E_{ij}$. Ha $E_S(\{a_{n_t}\})=A_t$ $(1\leq n_t\leq n,\ 1\leq t\leq k)$ teljesül, akkor az erős operáció definiciójának (ii) pontja miatt $\forall A_\ell: a_{n_t}\in A_\ell \rightarrow E_S(\{a_{n_t}\})=A_t\subseteq A_\ell$ $(1\leq\ell\leq k)$. Tehát

$$E_S(\{a_{n_t}\})=\bigcap_{a_{n_t}\in E_{ij}} E_{ij}=E_{ot}=A_t.$$

Ha $E_S(\{a_{n_t}\})=A_{s_1}\cap\ldots\cap A_{s_t}$ $(1\leq n_t\leq n,\ 1\leq s_j\leq k,\ j=1,\ldots,t)$ akkor az erős operáció definiciójának (ii) pontja szerint $\forall A_\ell$-ra $(a_{n_t}\in A_\ell)$ $E(\{a_{n_t}\})\subseteq A_\ell$ $(1\leq\ell\leq k)$. Ezért

$$E_S(\{a_{n_t}\})=\bigcap_{a_{n_t}\in E_{ij}} E_{ij}=\bigcap_{q=1}^{t} E_{os_q}.$$

Belátható, hogy minden a-ra($a\in\Omega$, $E_S(\{a\})=E_S(\{a_{n_t}\})$)

$E_S(\{a\})=\bigcap_{a\in E_{ij}} E_{ij}=E_{ot}$, vagy $E_S(\{a\})=\bigcap_{a\in E_{ij}} E_{ij}=\bigcap_{q=1}^{t} E_{os_q}$.

Vagyis E_S kielégiti (3)-t. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

A 2.12 Tételből adódik a:

2.26 Következmény. Legyen E egy erős operáció az Ω felett. Ekkor létezik olyan algoritmus (időbonyolultsága polinomiálisan függ Ω elemeinek számától), amely meghatároz egy E erős operációt reprezentáló relációt.

2.9 Definició. Legyen S egy s-család az Ω felett. Legyen $Q(S)=\min\{m: S_R=S, |R|=m, R$ az Ω feletti reláció$\}$, vagyis Q(S) az S s-családot reprezentáló minimális reláció sorainak száma.

2.13 Tétel. Legyen S egy s-család az Ω felett.

Legyen $T=\{E_S(\{a\}) : a\in\Omega\}$, és

$N=\{A\in T: A\neq\Omega, (\forall B,C\in T)(A=B\cap C \rightarrow A=B$ vagy $A=C)\}$.

(azaz N az $\{E_S(\{a\}):a\in\Omega\}^+$ Ω-t nem tartalmazó minimális számosságu generátora. Ekkor

Ha $|N|=0$ (azaz $T=\{\Omega\}$), akkor $Q(S)=2$.

Ha $|N|\geq 1$, akkor $\sqrt{2\log_2|N|}<Q(S)\leq|N|+1\leq|\Omega|+1$.

Bizonyitás. A 2.11 Tétel szerint, ha R reprezentálja az S családot, akkor

$$E_S(\{a\}) = \begin{cases} \bigcap_{a \in E_{ij}} E_{ij} & \text{ha } \exists E_{ij} : a \in E_{ij}, \\ \Omega & \text{különben.} \end{cases}$$

Itt E_{ij} a h_i és h_j sorok egyenlőséghalmaza, $R=\{h_1,\dots,h_m\}$. Belátható, hogy $T=\{\Omega\}$, akkor minden E_{ij} -re $E_{ij}=\emptyset$. Tehát $Q(S)=2$. Nyilván $|N| \leq |\Omega|$. Az erős operáció definiciója szerint N halmazrendszer meghatározza az $\{E_S(\{a\}) : a \in \Omega\}$ halmazt. Könnyen látható, hogy $\forall A_i, A_j \in N$ $(A_i \neq A_j)$-re $\{(i,j): 1 \leq i \neq j \leq m, |R|=m, A_i \subseteq E_{ij}\} \neq \{(i,j): 1 \leq i \neq j \leq m, |R|=m, A_j \subseteq E_{ij}\}$. Ezért $|N| \leq 2^{\binom{m}{2}}$ teljesül. Azaz $\sqrt{2\log_2|N|} < m$. Másrészt a 2.12 Tétel szerint $Q(S) \leq |N|+1$. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

Könnyen belátható, hogy ha S egy $\Omega=\{a_1,\dots,a_n\}$ feletti olyan s-család, amelyre $\forall a_i \in \Omega$-ra $E_S(\{a_i\})=\{a_i\}$, akkor $N=\{\{a_i\}: i=1,\dots,n\}$ és $\sqrt{2\log_2 n} < Q(S) \leq n+1$. Ezért a 2.13 Tételből adódik az alábbi:

2.27 Következmény. Legyen Ω nem üres véges halmaz. Legyen

$$Q(n)=\max\{Q(S): S \text{ az } \Omega \text{ feletti s-család, } |\Omega|=n\}.$$

Ekkor $\sqrt{2\log_2 n} < Q(n) \leq n+1$.

Világos, hogy tetszőleges E erős operációhoz a $\{E(A): A \in P(\Omega)\}$ halmazrendszer egy metszet-félháló az Ω felett (lásd 1.8 Definiciót). Könnyen belátható, hogy

létezik olyan I metszet-félháló, amelyre nem létezik olyan E erős operáció, melyre $I=\{E(A):A\in P(\Omega)\}$. Azaz $\{E(A):A\in P(\Omega)\}$ valódi speciális metszet-félháló az Ω felett. Most definiáljuk az s-félháló fogalmát, és ennek segitségével vizsgáljuk a $\{E(A):A\in P(\Omega)\}$ halmazrendszereket.

2.10 Definició. Legyen Ω nem üres véges halmaz, és $P(\Omega)$ az Ω hatvány halmaza. Legyen továbbá $I\subseteq P(\Omega)$. Azt mondjuk, hogy I egy s-félháló az Ω felett, ha I a metszésre nézve zárt, $\Omega\in I$, és $N=\{A\in I:A\neq\Omega,(\forall B,C\in I)(A=B\cap C\rightarrow A=B \text{ vagy } A=C)\}$ (azaz N az I Ω-t nem tartalmazó minimális számosságu generátora) kielégiti az alábbi feltételt: (1) minden $A\in N$-ra $(\exists a\ A)((A_i\in N \text{ és } A\not\subset A_i)\rightarrow a\notin A_i)$. Nyilván $|N|\leq|\Omega|$.

2.14 Tétel. Legyen E egy erős operáció az Ω felett. Legyen továbbá $I_E=\{E(A):A\in P(\Omega)\}$ és $N_E=\{A\in I_E:A\neq\Omega,(\forall B,C\in I_E)(A=B\cap C\rightarrow A=B \text{ vagy } A=C)\}$. Ekkor I_E egy s-félháló az Ω felett. Forditva, ha I egy Ω feletti s-félháló, akkor pontosan egy olyan E erős operáció létezik, amelyre $I=\{E(A):A\in P(\Omega)\}$, ahol mindegyik a attributumra:

$$E(\{a\}) = \begin{cases} \bigcap A_i & \text{ha } \exists A_i\in N:\ a\in A_i, \\ a\in A_i & \\ A_i\in N & \\ \Omega \quad \text{különben} & \end{cases} \qquad (2)$$

Itt $N=\{A_i\in I:\ A_i\neq\Omega,\ (\forall B,C\in I)(A_i=B\cap C\rightarrow A_i=B \text{ vagy } A_i=C)\}$.

Bizonyitás. Nyilvánvaló, hogy I_E a metszésre nézve zárt, és $\Omega\in I_E$. Tegyük fel, hogy $A\in N_E$, és hogy nem létezik olyan a attributum, amelyre $E(\{a\})=A$. Ekkor $A=E(B)$ $(|B|\geq 2)$ esetén

$A = \bigcap_{b_i \in B} E(\{b_i\})$ teljesül. Ez ellentmond az N_E definiójának. Ezért $\exists a \in \Omega: E(\{a\}) = A$. Nyilván $a \in A$. Mivel $A, B \in N_E \rightarrow A \neq B$ és az erős operáció definiciójának (ii) pontja szerint N_E kielégiti az (1) feltételt. Vagyis I_E egy s-félháló.

Forditva; tegyük fel, hogy I egy s-félháló. Ekkor legyen $E(\emptyset) = \Omega$ és E kielégiti a (2)-t. Mutassuk meg, hogy E erős operáció az Ω felett. Az s-félháló definiciója szerint minden $A \in N$ esetén $E(\{a\}) = A$, ha létezik olyan a attributum, amelyre $a \in A$ és $\forall A_i \in N: A \not\subset A_i \rightarrow a \notin A_i$. A többi A halmazra ($A \in N$) a fenti állitás triviális. Tehát $\forall A \in N: \exists a \in \Omega: E(\{a\}) = A$. A (2) szerint nyilvánvaló, hogy $a \in E(\{a\})$, és ha létezik olyan $A_i \in N$, hogy $a \in A_i$, akkor $E(\{a\}) \in N^+$. Ha $b \in E(\{a\})$ teljesül ($b \in \Omega$), akkor

$$E(\{b\}) = \bigcap_{\substack{b \in A_i \\ A_i \in N}} A_i \subsetneq \bigcap_{\substack{a \in A_i \\ A_i \in N}} A_i = E(\{a\}).$$

Az $\{E(\{a\}): a \in \Omega\}$ meghatározza az $\{E(A): A \in P(\Omega)\}$, mert $E(A) = \bigcap_{a \in A} E(\{a\})$. Ezért E egy erős operáció, továbbá $I = \{E(A): A \in P(\Omega)\}$. Tegyük fel, hogy van olyan E' erős operáció, hogy $I = I_{E'}$. Ekkor minden a-ra $(a \in \Omega) \exists b \in \Omega: E(\{a\}) = E'(\{b\})$. Világos, hogy $a \in E'(\{b\})$. Tehát $E'(\{a\}) \subseteq E(\{a\})$. Másrészt van olyan c attributum, amelyre $E'(\{a\}) = E(\{c\})$. Belátható, hogy $E(\{a\}) \subseteq E'(\{a\})$, mert $a \in E(\{c\})$. Vagyis $E = E'$ teljesül. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

A tétel alapján állithatjuk, hogy az Ω feletti erős operációk és az s-félhálók között létesitett megfeleltetés egy-egyértelmü.

2.11 Definició. Legyen S egy s-család az Ω felett. Legyen továbbá $(A,B)\in S$. Ekkor azt mondjuk, hogy (A,B) maximális függősége az S-nek, ha $\forall B'(B\subsetneq B')$-ra $(A,B')\in S \rightarrow B'=B$.

Jelölje $M(S)$ az S összes maximális függőségeinek halmazát. Egy B halmaz $(B\subseteq\Omega)$ az S család maximális eleme, ha van olyan A halmaz, hogy $(A,B)\in M(S)$. Jelölje $\mathcal{U}(S)$ S összes maximális elemeinek halmazát.

Az alábbi következmény szerint az Ω feletti s-családok és az s-félhálók között megfeleltetés egy-egyértelmü.

2.28 Következmény. Legyen S egy s-család az Ω felett. Ekkor $\mathcal{U}(S)$ Ω feletti s-félháló.

Forditva ha I egy Ω feletti s-félháló, akkor pontosan egy olyan S s-család létezik, melyre $I=\mathcal{U}(S)$, ahol

$$S=\{(A,B):A,B\in P(\Omega):\ B\subsetneq A_i,\ A\cap A_i\neq\emptyset,\ A_i\in I\}$$

Mivel a 2.10 és a 2.14 Tételekből valamint a 2.21 Megjegyzésből adódik a fenti következmény, ezért a bizonyitását mellőzzük.

2.12 Definició. Legyen $J\subseteq P(\Omega)$. Ekkor azt mondjuk, hogy J egy Ω feletti s-rendszer, ha J kielégiti az alábbi feltételeket:

(1) $\Omega\in J$,

(2) $(\forall A,B,C\in J)(A=B\cap C \rightarrow A=B$ vagy $A=C)$,

(3) minden $A\in J\setminus\Omega$-ra $(\exists a\in A)((A_i\in J$ és $A\not\subseteq A_i) \rightarrow a\notin A_i)$.

2.23 Megjegyzés. Belátható, hogy ha I egy Ω feletti s-félháló, akkor az I minimális számosságu generátora egy s-rendszer. Fordtiva, a 2.9 Megjegyzés szerint tetszőleges $\mathcal{J}$ s-rendszerhez pontosan egy olyan s-félháló létezik, amelynek minimális számosságu generátora **éppen J.**

Vagyis az Ω feletti s-rendszerek és s-félhálók között létesitett megfeleltetés kölcsönösen egyértelmü.

Az s-félháló definiciója alapján könnyen láthatjuk, hogy ha $\mathcal{J}$ egy s-rendszer az Ω felett, akkor $|\mathcal{J}| \leq |\Omega|+1$.

2.24 Megjegyzés. Az s-rendszer definiciója szerint belátható, hogy létezik olyan algoritmus, amely adott $\mathcal{J}(\mathcal{J} \subseteq P(\Omega))$ halmazrendszerhez eldönti, hogy $\mathcal{J}$ s-rendszer, vagy nem. Ennek az algoritmusnak az időbonyolultsága polinomiálisan függ Ω elemeinek számától.

2.25 Megjegyzés. Könnyen beláthatjuk, hogy az s-rendszerek osztálya az Ω feletti metszetmentes rendszerosztály valódi része, és az s-rendszerek a 2.14 Tétel a 2.28 Következmény és a 2.23 Megjegyzés alapján meghatározzák az s-családokat, az erős operációkat és az s-félhálókat.

3. FEJEZET

Minimális kulcsok és antikulcsok

Az E.F. Codd által bevezetett minimális kulcs a relációs adatmodell elméletének egyik fontos fogalma (lásd 1.15 és 1.16 Definiciókat). E.F. Codd alapvető cikke [23] óta számos dolgozat foglalkozik minimális kulcsokkal és mutatnak rá a minimális kulcsok gyakorlati jelentőségére.

Ismeretes, hogy a minimális kulcsok rendszere és az antikulcsok halmaza (lásd 1.17 Definiciót) Sperner-rendszer.

Az antikulcsok fontos szerepet játszanak a minimális kulcsokkal kapcsolatos kombinatorikai problémák vizsgálatában és az olyan relációk konstrukciójában, amelyek az adott Sperner-rendszert reprezentálják.

Számos esetben amikor nem határozzuk meg az adott Sperner-rendszert reprezentáló minimális reláció sorainak számát, akkor az antikulcsok halmazát használjuk ezek becslésére.

Ebben a fejezetben a minimális kulcsok és antikulcsok közötti kapcsolatokat vizsgáljuk (lényegében ezek a Sperner-rendszerek közötti kapcsolatok).

Ebben a fejezetben a következő fő eredmények találhatók.

Antikulcsok adott halmazából konstruálunk három algoritmust (a 3.1, 3.3 és 3.5 Algoritmusok). Az első két algoritmus (a 3.1, 3.3 Algoritmusok) egy minimális kulcsot talál meg, a harmadik algoritmus minden minimális kulcsot megtalál.

Konstruálunk egy algoritmust (a 3.4 Algoritmus), amely minden antikulcsot megtalál az adott minimális kulcsok rendszeréből. Tehát az adott K Sperner-rendszerből konstruálhatjuk K antikulcsainak halmazát és K minimális kulcsainak rendszerét (azaz konstruálhatjuk olyan Q halmazrendszert, amelyre $Q^{-1}=K$).

Könnyen látható ezeknek az algoritmusoknak néhány közvetlen alkalmazása: Konstruálhatjuk az adott Sperner-rendszert reprezentáló relációkat; az adott reláció, relációs séma, lezárási operáció minimális kulcsainak teljes halmazát konstruáljuk; ha K_R adott R reláció összes minimális kulcsainak rendszere, akkor előállithatjuk olyan relációs sémát, amely összes minimális kulcsainak rendszere éppen K_R.

Becsüljük ezeket az algoritmusokat. A minimális kulcsok és antikulcsok teljes halmazait megtaláló két algoritmus időbonyolultsága exponenciálisan függ az attributumok számától (legrosszabb esetben). Megmutatjuk, hogy ez a két algoritmus hatékony, ha adott minimális kulcsok vagy antikulcsok száma kevés.

Igazoljuk, hogy sok esetben ennek a két algoritmusnak időbonyolultsága polinomiálisan függ a minimális kulcsok, antikulcsok és attribútumok számától.

E fejezetben két szükséges és elégséges feltételét adjuk annak, hogy egy adott halmaz minimális kulcs legyen (a 3.1, 3.4 Tételek). Tudjuk ([55]), hogy C. Lucchesi és S.L. Osborn bebizonyitották, hogy az a probléma, hogy adott relációs sémához és adott a attribútumhoz dönti el, hogy a attribútum tartozik-e valamely minimális kulcshoz, NP-teljes.

Igazoljuk, hogy ha K egy Sperner-**rendszer az Ω felett és K^{-1}** a K antikulcsainak halmaza, akkor $\bigcup_{A\in K} A=\Omega \setminus \bigcap_{B\in K^{-1}} B$ igaz. (a 3.5 Tétel).

Ezzel és a 2. fejezet eredményeinek felhasználásával konstruálhatunk egy olyan algoritmust, amely adott R relációhoz eldönti, hogy tetszőleges a attribútum tartozik-e valamely minimális kulcshoz és legrosszabb esetben időbonyolultsága polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától. Megmutatjuk, hogy az a probléma, hogy adott antikulcsok halmazához van-e egy olyan kulcs, amelynek nagysága nem nagyobb, mint egy adott természetes szám, NP-teljes (a 3.8 Tétel).

Egy eredményt adunk, amely lezárási operációk és Sperner-rendszerek közötti kapcsolatra vonatkozik (a 3.9 Tétel).

Lezárási operációk segitségével vizsgáljuk az antikulcsok és minimális kulcsok közötti kapcsolatokat és ha egy Sperner-rendszer a minimális kulcsok halmazának (az antikulcsok halmazának) szerepét játssza, feltételezzük, hogy ez a Sperner rendszer nem üres (nem tartalmazza az Ω-t, ahol Ω nem üres véges attributumok halmaza).

3.1 Minimális kulcsot megtaláló algoritmusok

3.1 Definició. Legyen H az Ω feletti lezárási operáció. Legyen továbbá $Z(H)=\{A:H(A)=A\}$. $Z(H)$ elemeit zárt halmazoknak nevezzük.

Legyen $\mathcal{M}_H=\{A\subsetneq\Omega: H(A)=A \text{ és } \overline{\exists} B\in Z(H)\setminus\{\Omega\}: A\subsetneq B\}$.

Az $\mathcal{M}_H$ halmazrendszert H maximális zárt halmazainak a rendszerének nevezzük.

3.1 Lemma. Legyen H egy lezárási operáció az Ω felett, és K_H H minimális kulcsainak rendszere. Ekkor $K_H^{-1}=\mathcal{M}_H$.

A fenti lemma bizonyitását a 2.2 Tételhez hasonló módon végezhetjük, ezért a bizonyitást mellőzzük.

Egy szükséges és elégséges feltételét adjuk annak, hogy egy tetszőleges halmaz minimális kulcs legyen.

3.1 Tétel. Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett, $K^{-1}=\{B_1,\ldots,B_m\}$ K antikulcsainak halmaza és $A\subseteq\Omega$. Ekkor $A\in K$ (azaz A minimális kulcs) akkor és csak akkor, ha $A\not\subseteq B_i$

($\forall i$: $1 \leqq i \leqq m$) és bármely D-hez ($D \subsetneq A$) van olyan $B_i \in K^{-1}$, amelyre $D \subsetneq B_i$.

Bizonyitás. a) Tegyük fel először, hogy $A \not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1 \leqq i \leqq m$) és bármely D-hez ($D \subsetneq A$) létezik olyan $B_i \in K^{-1}$, hogy $D \subseteq B_i$. Belátható, hogy ha van olyan B_i ($B_i \in K^{-1}$), amelyre $B_i \subsetneq A$, akkor A egy kulcs. Ha $K^{-1} \cup \{A\}$ egy Sperner rendszer az Ω felett, akkor az 1.9 Tétel szerint van olyan H lezárási operáció, amelyre $K = K_H$. Igy, ha $H(A) \neq \Omega$, akkor a 3.1 Lemma szerint létezik olyan B_i ($B_i \in K^{-1}$), hogy $H(A) \subseteq B_i$. Ezért $A \subseteq B_i$, ami ellentmondás, mert $A \not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1 \leqq i \leqq m$). Vagyis A egy kulcs (azaz létezik olyan C($C \in K$), amelyre $C \subsetneq A$). Belátható, hogy (a minimális kulcs definiciója szerint) A minimális kulcs.

b) Forditva, tegyük fel, hogy A minimális kulcs (azaz $A \in K$). Világos, hogy $A \not\subseteq B_i$ ($\forall i$: $1 \leqq i \leqq m$). Bármely D halmazhoz ($D \subsetneq A$) tegyük fel indirekt, hogy $D \not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1 \leqq i \leqq m$), akkor a) szerint D egy kulcs. Ez ellentmond annak, hogy A minimális kulcs. Ezért létezik olyan B_i ($1 \leqq i \leqq m$), amelyre $D \subseteq B_i$. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

Legyen $K = \{B_1, \ldots, B_k\}$ egy Sperner-rendszer az Ω felett. Legyen továbbá $B \in K$ és $a \in \Omega \setminus B$, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, és $G = \{B_j \in K: a \notin B_j\}$. Legyen $T_0 = B \cup \{a\}$.

$$T_{q+1} = \begin{cases} T_q \setminus \{b_{q+1}\} \text{ ha } \forall B_i \in K \setminus G: T_q \setminus \{b_{q+1}\} \not\subseteq B_i, \\ T_q \quad \text{különben.} \end{cases}$$

3.2 Tétel. Ha K az antikulcsok halmaza, akkor $T_0,\ldots,T_m$ kulcsok és T_m egy minimális kulcs (azaz $T_m \in Q$, ahol $Q^{-1}=K$)

Bizonyitás. Az 1.9 Tétel szerint létezik olyan H lezárási operáció, hogy $K=K_H^{-1}$. m szerint indukcióval bizonyitjuk a tételt. Nyilvánvaló, hogy T_0 kulcs. Ha T_q kulcs és $T_{q+1}=T_q$, akkor T_{q+1} is kulcs. Ha $T_{q+1}=T_q \setminus \{b_{q+1}\}$ és $H(T_{q+1}) \neq \Omega$, akkor a 3.1 Lemma szerint létezik olyan B_j halmaz ($B_j \in K$), amelyre $H(T_{q+1}) \subseteq B_j$. Ezért $T_{q+1} \subseteq B_j$ teljesül. Ez ellentmond annak, hogy $\forall B_j \in K: T_{q+1} \not\subseteq B_j$. Azaz T_{q+1} egy kulcs.

Másrészt tegyük fel, hogy A valódi részhalmaza T_m-nek. Ha $a \notin A$, akkor világos, hogy $H(A) \neq \Omega$. Ha $a \in A$, akkor van olyan $b_q \in B$, amelyre $b_q \in T_m \setminus A$ $(1 \leq q)$. A T_q konstrukciója szerint létezik olyan B_j halmaz ($B_j \in K \setminus G$), amelyre $T_{q-1} \setminus \{b_q\} \subseteq B_j$. Vagyis $A \subseteq T_m \setminus \{b_q\} \subseteq T_{q-1} \setminus \{b_q\} \subseteq B_j$ ($T_m \subseteq T_q$ miatt $(\forall q: 0 \leq q \leq m-1)$). Tehát $H(A) \neq \Omega$. Azaz T_m egy minimális kulcs. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

3.1 Megjegyzés. Legyen $K=\{B_1,\ldots,B_\ell\}$ egy Sperner-rendszer az Ω felett, $B=\{b_1,\ldots,b_m\}$ egy kulcs. Jelöljön Q egy olyan halmazrendszert, amelyre $Q^{-1}=K$ és legyen $\mathcal{L}(Q)=\{A \subseteq \Omega: \exists B \in K: B \subseteq A\}$. Világos, hogy $B \in \mathcal{L}(Q)$.

Legyen $T_0=B$ és

$$T_{q+1} = \begin{cases} T_q \setminus \{b_{q+1}\} \text{ ha } \forall B_i \in K: T_q \setminus \{b_{q+1}\} \not\subseteq B_i, \\ T_q \quad \text{különben.} \end{cases}$$

A 3.2 Tételhez hasonló módon bebizonyithatjuk, hogy ha K egy antikulcsok halmaza, akkor $T_0,\ldots,T_m$ kulcsok

és T_m minimális kulcs. A 3.2 Tétel és a 3.1 Megjegyzés alapján konstruáljuk az alábbi algoritmust.

3.1 Algoritmus.

INPUT :{K= $B_1,\ldots,B_m$} egy Sperner-rendszer az $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ felett és B egy kulcs (azaz $B\in\mathcal{L}(Q)$, ahol $Q^{-1}=K$).

OUTPUT: T egy minimális kulcs (azaz $T\in Q$).

ADATSTRUKTURA:

- K[1:m]a K elemeinek tömbje.
- B az attributumok halmaza, amely kulcs.
- T_1 Boole változó, T munkaváltozó.

```
        Procedure MINKEY 1 (K,B):
  T ← B;
  for each b∈B do
        begin T1 ← true;
            for i ← 1 until m do
              if T\{b}⊆K[i] then T1 ← false;
              if T1 then T ← T\{b}
        end
  return T
```

Világos, hogy a 3.1 Algoritmus $O(n^2.m)$ elemi operációt igényel. Nyilvánvaló az alábbi:

3.1 Következmény. A 3.1 Algoritmus egy minimális kulcsot határoz meg és időbonyolultsága $O(n^2.m)$, ha K az antikulcsok halmazának szerepét játssza.

3.2 Definició. Legyen Ω nem üres véges halmaz, és $P(\Omega)$ az Ω hatvány halmaza. Legyen továbbá $G \subsetneq P(\Omega)$ és $\{\emptyset\} \notin G$.

Legyen $MIN(G)=A$, ahol $A \in G$ és $|A|=\min\{|A_i| : A_i \in G\}$. Ha $A \subsetneq \Omega$ és $A \neq \emptyset$, akkor $\vartheta(A)=a$, ahol a az A eleme. Azaz MIN(G) G olyan elemét jelenti, amelynek nagysága minimális és $\vartheta(A)$ pedig A tetszőleges eleme.

3.2 Megjegyzés. Legyen $K=\{B_1,\ldots,B_m\}$ egy Sperner-rendszer az Ω felett és B egy kulcs (azaz $B \in \mathcal{L}(Q)$, ahol $Q^{-1}=K$). Legyen $G_1=\{B \cap \bar{B}_1,\ldots,B \cap \bar{B}_m\}$. Nyilvánvaló, hogy a 3.1 Tétel szerint $B \cap \bar{B}_i \neq \emptyset$ $(\forall i: 1 \leq i \leq m)$. Előfordulhat, hogy van olyan i,j $(i \neq j)$, amelyre $B \cap \bar{B}_i = B \cap \bar{B}_j$. Tehát legyen $G_1=\{B \cap \bar{B}_1,\ldots,B \cap \bar{B}_m\}=\{B \cap \bar{B}_{i_1},\ldots,B \cap \bar{B}_{i_k} : k \leq m,\ B \cap \bar{B}_{i_s} \neq B \cap \bar{B}_{i_t}$ $(s \neq t),\ 1 \leq i_j \leq m,\ 1 \leq j \leq k\}$.

Legyen $B_j^4 = B \cap \bar{B}_{i_j}$ és $\tau_1=k$. Azaz $G_1=\{B_1^1,\ldots,B_{\tau_1}^1\}$. Ekkor $i \geq 1$-re legyen $F_{i+1}=\{B_j^i \in G_i : \vartheta(MIN(G_i)) \notin B_j^i\}$ és $G_{i+1}=\{B_j^i \setminus MIN(G_i) : B_j^i \in F_{i+1}\}=\{B_1^{i+1},\ldots,B_{\tau_{i+1}}^{i+1}\}$.

Látható, hogy $|\Omega|$ végessége miatt van olyan P természetes szám, amelyre $G_P \neq \emptyset$ és $F_{p+1}=\emptyset$. Világos, hogy $p \leq \min(n,m)$, ahol $|\Omega|=n$, és $\vartheta(MIN(G_i)) \neq \vartheta(MIN(G_j))$, ahol $i \neq j$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p$. Nyilvánvaló, hogy ha $F_{i+1} \neq \emptyset$ állna fenn, akkor $|MIN(G_i)| \leq |B_j^i|$ miatt $B_j^i \setminus MIN(G_i) \neq \emptyset$ lenne.

Azaz $G_{i+1}\neq\emptyset$.

3.3 Tétel. $A=\bigcup_{i=1}^{p}\{\mathcal{V}(MIN(G_i))\}$ egy minimális kulcs. Azaz $A\in Q$, ahol $Q^{-1}=K$.

Bizonyitás. G_i definiciója szerint minden B_j^1-re $(1\leq j\leq k)$ létezik olyan F_ℓ halmazrendszer $(2\leq\ell\leq p+1)$ és olyan $B_q^{\ell-1}$ halmaz , amelyekre $B_q^{\ell-1}\in G_{\ell-1}\setminus F_\ell$ és $B_q^{\ell-1}\subsetneq B_J^1$, ahol $1\leq q\leq r_{\ell-1}$. Ezért $\mathcal{V}(MIN(G_{\ell-1}))\in B_J^1$ teljesül. Vagyis $A\cap(B\cap\bar{B}_{i_J})\neq\emptyset$. Tehát azt kapjuk, hogy $A\not\subseteq B_j$ $(\forall j:1\leq j\leq m)$. Tegyük fel, hogy D az A valódi részhalmaza. Könnyen beláthatjuk, hogy ha $A=\{a\}$ $(a\in\Omega)$, akkor $A\in Q$. Azaz A minimális kulcs. Ha létezik olyan $\mathcal{V}(MIN(G_i))$ $(1\leq i\leq p)$, amelyre $\mathcal{V}(MIN(G_i))\in A\setminus D$, akkor van olyan $B\cap\bar{B}_j$, amelyre $1\leq j\leq m$ és $MIN(G_i)\subsetneq B\cap\bar{B}_j$. G_i definiciója szerint és $A\subseteq B$ miatt azt kapjuk, hogy $A\setminus\mathcal{V}(MIN(G_i))\subsetneq B_j$. Belátható, hogy $D\subseteq A\setminus\mathcal{V}(MIN(G_i))$ teljesül. Tehát $D\subseteq B_j$. A 3.1 Tétel szerint $A\in Q$. Vagyis A minimális kulcs. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

3.3 Megjegyzés. Legyen $K=\{B_1,\ldots,B_m\}$ egy Sperner-rendszer az Ω felett. Világos, hogy tetszőleges B_i halmazhoz $(B_i\in K)$ $B_i\cup\{a\}(a\notin B_i)$ kulcs. Azaz $B_i\cup\{a\}\in\mathcal{L}(Q)$, ahol $Q^{-1}=K$. Célszerü a $\mathcal{V}(MIN(G_1))=a$ és $G_2=\{B_i\cap\bar{B}_j:a\in B_j$ és $B_j\in K$, $i\neq j\}$ választás.

Először egy olyan algoritmust adunk, amely a nem negativ egész számok halmazának egy minimális elemét megtalálja.

3.2 Algoritmus

INPUT: K nem negativ egész számok halmaza, mely tartalmaz legalább egy pozitiv egész számot.
P K elemeinek száma
Tegyük fel, hogy K={K[1],...,K[P]}.

OUTPUT: i, ahol $1 \leq i \leq P$, amelyre $K[i]=\min\{K[j]:K[j]\neq 0\}$

- K[1:m] K elemeinek tömbje, van olyan K[j], amelyre $K[j]\neq 0$ és $1 \leq j \leq p$, ahol p K elemeinek száma.
- M tartalmazza p-t, nyilván $p \leq m$.
- A,B munkaváltozók.

```
    Procedure MIN(K,M):
  for i ← 1 until M do if K[i]≠0 then begin A←K[i], B ← i;
goto T1 end;
T1:  for i ← 1 until M do if K[i]≠0∧K[i]< A then begin
A ← K[i]; B ← i end;
return B
```

A 3.3 Tétel alapján konstruálunk egy algoritmust, amely megtalálja a minimális kulcsot.

3.3 Algoritmus.

INPUT: $K = \{B_1,\ldots,B_m\}$ egy Sperner-rendszer az $\Omega=\{1,\ldots,n\}$ felett. B egy kulcs. Azaz $B\in\mathcal{L}(Q)$, ahol $Q^{-1}=K$. Megjegyezzük, hogy az egyszerüség kedvéért - ez nem érinti az általánositást - feltételezzük, hogy attributumok természetes számok.

OUTPUT: $T\in Q$.

ADATSTRUKTURA

- K[1:m] K elemeinek tömbje.
- B az attributumok halmaza, amely kulcs.
- M[1:m], C[1:m] munkatömbök.
- T,D,D1,D2,N,N1,N2 munkaváltozók.

```
                Procedure MINKEY2(K,B):
KEZDET: for i ← 1 until m do begin C[i]← 0; M[i]← B∩(Ω\K[i])
        end;
        for i ← 1 until m do
            for each j∈M[i] do C[i] ← C[i]+1; T ← ∅; D ← m;
CIKLUS: while D≠0 do
          begin D1 ← D; D2 ← MIN(C,D1); N ← M(D2);
           select ELEMENT from N; T←T∪ELEMENT; D ← 0;
           for i ← 1 until D1 do if ELEMENT ∉ M[i] then
               begin D←D+1; M(D) ←  M[i]\N; N1 ← M[i]∩N;
                                    N2 ← |N1|;
                     C(D) ← C[i]-N2
               end
           end;
         return T
```

Könnyen beláthatjuk, hogy a 3.3 Algoritmus hatékony, ha ELEMENT sok M[i] közös eleme (azaz sok B_j^i tartalmazza a ϑ(MIN(G_i))-t).
KEZDET-blokkban az algoritmus O(n.m) elemi operációt igényel. Világos, hogy a MIN-algoritmus O(m) elemi operációt igényel. Belátható, hogy CIKLUS-blokkban az algoritmus $O(n \sum_{i=1}^{\ell} \ell_i)$ elemi operációt igényel, ahol ℓ a CIKLUS ismétlő száma, ℓ_i a D_1 értéke a CIKLUS i-es ismétlésében. Nyilván $\ell \leq n$, és $\ell_i \leq m$ ($\forall i$). Könnyü belátni, hogy a legrosszabb esetben az algoritmus $O(n^2.m)$ elemi operációt igényel. A 3.3 Tétel szerint az algoritmus egy minimális kulcsot talál meg.

3.2 Következmény. Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett. Ha K az antikulcsok halmazának szerepét játssza, akkor a 3.3 Algoritmus egy minimális kulcsot határoz meg és időbonyolultsága $O(n^2.m)$, itt $|\Omega|=n$, $|K|=m$.

3.4 Megjegyzés. Legyen $K=\{B_1,\ldots,B_m\}$ egy Sperner-rendszer az $\Omega=\{1,\ldots,n\}$ felett. Az n.m számot K méretének nevezzük. [68]-ben a 3.3 Tétel alapján, az adatstruktura segitségével megkonstruáltuk azt az algoritmust, amely az adott antikulcsok halmazából egy minimális kulcsot állit elő, és időbonyolultsága O(n.m), ahol $|\Omega|=n$, K az

antikulcsok halmaza, és $|K|=m$. Azaz időbonyolultsága arányos K méretével.

3.5 Megjegyzés. Legyen R egy reláció az Ω felett. Legyen M_R R maximális rendszere. A 2.2 Tétel miatt $M_R=K_R^{-1}$ igaz. A 2.5 Megjegyzés szerint R-ből előállithatjuk M_R-t. Ennek az előállitásnak az időbonyolultsága polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától. Ezért a 3.1, és a 3.2 Algoritmusok segitségével az adott R relációhoz megtalálhatjuk a minimális kulcsokat.

3.2 Lemma. Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett, $K^{-1}=\{B_1,\ldots,B_m\}$ K antikulcsainak halmaza. Ekkor ha $A\in K$, $|A|\geq 2$ (azaz A egy minimális kulcs) akkor léteznek olyan B_i,B_j halmazok ($B_i,B_j\in K^{-1}$) és a attributum, amelyekre $A\subseteq B_i\cup\{a\}$ (nyilván $a\in A$) és $a\in B_j$.

Bizonyitás. Ha $|A|\geq 2$, akkor az 1.9 Tétel szerint létezik olyan H lezárási operáció, hogy $K=K_H$. Tételezzük fel, hogy D olyan halmaz, amelyre $D\subsetneq A$ és $A\setminus D=a$ ($a\in\Omega$). A 3.1 Lemma szerint és $A\in K$ miatt (azaz $H(D)\neq\Omega$) azt kapjuk, hogy létezik olyan B_i halmaz ($B_i\in K^{-1}$), amelyre $H(D)\subseteq B_i$. Ezért $A\subseteq B_i\cup\{a\}$. Mivel $|A|\geq 2$ azt kapjuk, hogy $A\subseteq \bigcup_{B_t\in K^{-1}} B_t$. Tehát van olyan $B_j\in K^{-1}$, amelyre $a\in B_j$. Ezzel a lemmát bebizonyitottuk.

3.3 Definició. Legyen Ω nem üres véges halmaz, $P(\Omega)$ az Ω hatvány halmaza. Legyen továbbá $\mathcal{V}=\{A_1,\ldots,A_m : A_i \in P(\Omega), A_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq m\}$ egy halmazrendszer az Ω felett, $|A_i|=r_i$ $(\forall i: 1 \leq i \leq m)$. A $\mathcal{V}$ alábbi rendezését elsődlegesnek nevezzük.

$$A_1=\{a_1^1,\ldots,a_{r_1}^1\},\ldots,A_i=\{a_1^i,\ldots,a_{r_i}^i\},\ldots,A_m=\{a_1^m,\ldots,a_{r_m}^m\}$$

ahol az $a_1^1,\ldots,a_1^i,\ldots,a_1^m$-t válasszuk ki a következőképpen: a_1^1-re.

1) Válasszuk ki A_1-nek a első elemét. Ha létezik olyan A_i halmaz $(1 \leq i \leq m)$, amelyre $A_i=\{a\}$, akkor legyen $a_1^1=a$. Ha nem létezik ilyen A_i, akkor csillaggal jelöljünk minden olyan a attributumot, amelyek előfordulnak A_i-kban $(1 \leq i \leq m)$ és térjünk át a 2. lépésre.

2) Válasszuk ki A_1-nek a következő elemét. Ha létezik olyan A_i halmaz $(1 \leq i \leq m)$, amelyre a az A_i egyetlen olyan eleme, amelyet nem csillagoztunk meg, akkor legyen $a_1^1=a$. Ha nem létezik ilyen A_i, akkor csillaggal jelöljünk minden olyan a attributumot, amelyek előfordulnak A_i-kban $(1 \leq i \leq m)$. A 2. lépést mindaddig ismételjük, amig nem válasszuk ki az a_1^1-t. **$p=2,\ldots,m$-re:**

3) Ha létezik olyan a_1^q attributum, amelyre $q<p$ és $a_1^q \in A_p$, akkor legyen $a_1^p=a_1^q$. Ha nem létezik ilyen a_1^q, akkor térjünk át a 4. lépésre.

4) Válasszunk ki A_p-nek olyan a első elemét, amely még nincs megcsillagozva. Ha létezik olyan A_i halmaz ($p \leqq i \leqq m$) amelyre a az A_i egyetlen olyan eleme, amelyet nem csillagoztunk meg, akkor legyen $a_1^p = a$. Ha nem létezik ilyen A_i, akkor csillaggal jelöljünk minden olyan a attributumot, amelyek előfordulnak A_i-kban ($p \leqq i \leqq m$). A 4. lépést mindaddig ismételjük, amig nem válasszuk ki az a_1^p-t.

5) A 3. lépést ismételjük mindaddig, amig nem kiválasszuk az a_1^m-t.

3.1 Példa. Legyen $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ és $A_1 = \{1,2,5\}$, $A_2 = \{1,3,6\}$ és $A_3 = \{4,5,6\}$. Ekkor

$\{1^*,2,5\}$, $\{1^*,3,6\}$, $\{4,5,6\}$;

$\{1^*,2^*,5\}$, $\{1^*,3,6\}$, $\{4,5,6\}$;

Mivel 5 az A_1 egyetlen olyan eleme, amelyet nem csillagoztunk meg, legyen $a_1^1 = 5$.

$\{5,1^*,2^*\}$; $\{1^*,3^*,6\}$, $\{4,5,6\}$;

Legyen $a_1^2 = 6$, mert 6 az A_2 egyetlen olyan eleme, amely még nincs megcsillagozva. Világos, hogy $5 \in A_3$. Tehát legyen $a_1^3 = 5$. Azaz $A_1 = \{5,1^*,2^*\}$, $A_2 = \{6,1^*,3^*\}$, $A_3 = \{5,4,6\}$ egy elsődleges rendezése az $\{A_1,A_2,A_3\}$ halmazrendszernek.

3.6 Megjegyzés. Világos, hogy az elsődleges rendezés konstrukciójában csak konstruáljuk az a_1^p elemét A_p-nek

($\forall p=1,\ldots,m$). Belátható, hogy ϑ-nak általában több elsődleges rendezése van és az elsődleges rendezés konstrukciója függ A_p-k sorrendjétől és A_p $(p=1,\ldots,m)$ elemeinek sorrendjétől. Azaz ha A_p-k sorrendje vagy A_p $(1\leqq p\leqq m)$ elemeinek sorrendje változik, akkor ϑ egy uj elsődleges rendezését kaphatjuk.

Az elsődleges rendezés alapján egy szükséges és elégséges feltételét adjuk annak, hogy egy adott halmaz minimális kulcs legyen.

3.4 Tétel. Legyen $K=\{B_1,\ldots,B_m\}$ egy Sperner-rendszer az Ω felett, és Q olyan halmazrendszer, amelyre $Q^{-1}=K$. Ekkor

(1) $a\in\Omega$ és $\{a\}\in Q$ (azaz $\{a\}$ minimális kulcs) akkor és csak akkor, ha $a\notin \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ $(B_i\in K)$.

(2) $|A|\geqq 2$ és $A\in Q$ (azaz A minimális kulcs) pontosan akkor ha létezik olyan a attributum és olyan

$\{B_{\pi_o}\cap \bar{B}_{\pi_i}=\{a_1^{\pi_i},\ldots,a_{r_{\pi_i}}^{\pi_i}\}$, $1\leqq i\leqq k$, $k\geqq 1\}$ elsődleges rendezés,

amelyek kielégitik az alábbi feltételeket:

(i) $(\pi_o,\pi_1,\ldots,\pi_k)$ az $1,\ldots,m$ indexek részhalmaza;

(ii) $a\in B_{\pi_i}$ $(\forall i=1,\ldots,k)$ és $a\notin B_j$ $(\forall j: 1\leqq j\leqq m, J\notin\{\pi_1,\ldots,\pi_k\})$;

(iii) $A=\bigcup_{i=1}^{k}\{a_1^{\pi_i}\}\cup\{a\}$.

Bizonyitás. (1) nyilvánvaló.

(2) bizonyitásához (a) először tegyük fel, hogy a olyan attributum és $\{B_{\pi_o}\cap \bar{B}_{\pi_i}=\{a_1^{\pi_i},\ldots,a_{r_{\pi_i}}^{\pi_i}\}$, $1\leqq i\leqq k$, $k\geqq 1\}$

egy olyan elsődleges rendezése a $\{B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i} : 1 \leq i \leq k\}$ halmazrendszernek, amelyekre $(\pi_o, \pi_1, \ldots, \pi_k)$ az $1, \ldots, m$ indexek részhalmaza, $a \notin B_j$ $(\forall j: 1 \leq j \leq m, j \notin \{\pi_1, \ldots, \pi_k\})$ (azaz $a \notin B_{\pi_o}$) és $a \in B_{\pi_i}$ $(\forall i = 1, \ldots, k)$. Mutassuk meg, hogy $A = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_1^{\pi_i}\} \cup \{a\}$ egy eleme Q-nak. Könnyen beláthatjuk, hogy $A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}) \neq \emptyset$ $(\forall i = 1, \ldots, k)$. Tehát $A \nsubseteq B_{\pi_i}$ igaz $(\forall i = 1, \ldots, k)$. Mivel $a \notin B_j$ $(\forall j \notin \{\pi_1, \ldots, \pi_k\})$ teljesül azt kapjuk, hogy $A \nsubseteq B_j$ $(B_j \in K \setminus \{B_{\pi_1}, \ldots, B_{\pi_k}\})$. Ezért $A \nsubseteq B_i$ igaz $(\forall i = 1, \ldots, m)$. Világos, hogy $\bigcup_{i=1}^{k} \{a_1^{\pi_i}\} \subsetneq B_{\pi_o}$. Az elsődleges rendezés definíciója szerint mindegyik π_i-hez $(1 \leq i \leq k)$ létezik olyan π_j amelyre $A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_j}) = \{a_1^{\pi_i}\}$ $(1 \leq j \leq k)$. Tételezzük fel, hogy D A valódi részhalmaza. Ha $a \in A \setminus D$, akkor $D \subsetneq B_{\pi_o}$. Ha $a_1^{\pi_i} \in A \setminus D$ és $a \in D$, ahol $1 \leq i \leq k$, akkor van olyan π_j, amelyre $A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_j}) = \{a_1^{\pi_i}\}$. Mivel $a \in D$ és $\bigcup_{i=1}^{k} \{a_1^{\pi_i}\} \subsetneq B_{\pi_o}$ azt kapjuk, hogy $D \subsetneq B_{\pi_j}$. A 3.1 Tétel szerint $A \in Q$. Azaz A egy minimális kulcs.

(b) Forditva tegyük fel, hogy $A \in Q$ és $|A| \geq 2$. A 3.2 Lemma miatt léteznek olyan B_s, B_t $(B_s, B_t \in K)$, amelyekre $A \subsetneq B_t \cup \{a\}$, és $a \in B_s$, ahol $a \notin B_t$, $a \in A$. Legyen $\pi_o = t$ és $\{B_j \in K : a \in B_j\} = \{B_{\pi_1}, \ldots, B_{\pi_k}\}$. Világos, hogy $k \geq 1$. Mivel K egy Sperner-rendszer azt kapjuk, hogy $B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i} \neq \emptyset$ $(\forall i = 1, \ldots, k)$. $A \in Q$ miatt és a 3.1 Tétel szerint mindegyik b attributumhoz $(b \in A \setminus \{a\})$ létezik olyan π_i, amelyre $A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}) = \{b\}$.

Nyilvánvaló, hogy minden i-re $(1 \leq i \leq k)$ $A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}) \neq O$. Ezért feltehetjük, hogy minden i-re $((B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}) \cap A \neq \emptyset)$ $B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i} = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}\}$ és $A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}) = \{a_{i_j}, a_{i_{j+1}}, \ldots, a_{i_{q-1}}, a_{i_q}\}$, ahol $1 < j$.

Vagyis A elemei a $B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}$ utolsó helyein fordulnak elő. Másrészt, rendezhetjük a $\{B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i} : 1 \leq i \leq k,\ k \geq 1\}$ halmazrendszert ugy,hogy az olyan $B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}$-k, amelyekre $A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}) = \{b\}$, ahol $b \in A \setminus \{a\}$, a $\{B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i} : 1 \leq i \leq k,\ k \geq 1\}$ halmazrendszer első helyein állnak. Ezért feltehetjük, hogy ha $A \setminus \{a\} = \{b_1, \ldots, b_p\}$, akkor $A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}) = \{b_i\}$ $(\forall i = 1, \ldots, p)$. Előfordulhat, hogy $t \neq s$, de $A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_t}) = A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_s}) = \{b\}$, ahol $1 \leq t \leq k$, $1 \leq s \leq k$ és $b \in A \setminus \{a\}$. Ezért létezhet olyan π_j, amelyre $p < j \leq k$ és $A \cap (B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_j}) = \{b\}$, ahol $b \in A \setminus \{a\}$. Utána konstruáljuk a $\{B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i} : 1 \leq i \leq k\}$ elsődleges rendezését. Megjegyezzük, hogy az elsődleges rendezés konstrukciójában az $a_1^{\pi_i}$ kiválasztásakor $(\forall i = 1, \ldots, k)$ válasszuk ki a $B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}$ elemeit balról jobbra. Nyilvánvaló, hogy $(\pi_o, \pi_1, \ldots, \pi_k)$ az $1, \ldots, m$ indexek részhalmaza és $a \notin B_j$ $(\forall j : 1 \leq j \leq m$ és $j \notin \{\pi_1, \ldots, \pi_k\})$. Legyen $C = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_1^{\pi_i}\} \cup \{a\}$. Nyilvánvaló, hogy $a \in A$. Belátható, hogy az elsődleges rendezés definiciója miatt és a $\{B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i} : 1 \leq i \leq k,\ k \geq 1\}$ halmazrendszer konstrukciója szerint $a_1^{\pi_i} \in A$ $(\forall i = 1, \ldots, k)$. Ezért $C \subseteq A$ igaz. Másrészt, (a) bizonyitása szerint $C \in Q$ igaz. Tehát $A = C$ teljesül. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

Legyen $a_1^{\pi_o} = a$, **ekkor az antikulcsokon keresztül minimális kulcs reprezentációja:** $A = \bigcup_{i=0}^{k} \{a_1^{\pi_i}\}$, ahol $k \geq 0$.

Könnyen belátható, hogy a 3.4 Tétel segitségével adhatunk egy algoritmust, amely az adott antikulcsok halmazából egy minimális kulcsot megtalál.Ez egyszerü, ezért ezt mellőzzük.

3.7 Megjegyzés. Legyen Ω nem üres véges halmaz. Tetszőleges $X,Y\subseteq\Omega$-ra az (X,Y) párt (jelölje ezt $X \to Y$) az Ω feletti funkcionális függőségnek nevezzük. Azt mondjuk, hogy $X \to Y$ igaz R relációban, ahol $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$, ha $X \overset{f}{\underset{R}{\to}} Y$.

Az $S=<\Omega,P>$ párt, ahol $P=\{X_i \to Y_i : X_i,Y_i\subseteq\Omega,\ 1\leq i\leq k\}$, az Ω feletti relációs **sémának nevezzük.**

Jelölje P^* az összes olyan funkcionális függőségek halmazát, amelyek P-ból deriválhatók F-axiómarendszerben levő (F1),(F2),(F3),(F4) szabályok alkalmazásával.
Azt mondjuk, hogy X kulcsa S-nek ha $(X \to \Omega)\in P^*$, és X minimális kulcsa S-nek ha X kulcs és $\nexists X'\subsetneq X:(X' \to \Omega)\in P^*$

[55]-ben C. Lucchessi és S.L. Osborn bebizonyitották, hogy két alábbi probléma NP-teljes.
(1) Adott relációs sémához van-e egy olyan kulcs, amelynek nagysága nem nagyobb, mint egy adott természetes szám.
(2) Adott relációs sémához és adott a attributumhoz dönti el, hogy a attributum tartozik-e valamely minimális kulcshoz.

[8]-ban C. Beeri és mások igazolták, hogy ha helyettesitjük a relációs sémát relációval, akkor (1) probléma is NP-teljes. Vagyis az a probléma, hogy adott relációhoz van-e egy olyan kulcs, amelynek nagysága nem nagyobb mint egy adott természetes szám, NP-teljes.

A 3.4 Tétel alapján bebizonyitjuk, hogy ha

helyettesitjük a relációs sémát relációval, akkor létezik olyan algoritmus, amely adott relációhoz dönti el, hogy tetszőleges a attributum tartozik-e valamely minimális kulcshoz és legrosszabb esetben időbonyolultsága polinomiálisan függ a reláció sorainak és oszlopainak számától.

Először bebizonyitjuk az alábbi tételt.

3.5 Tétel. Legyen $K=\{A_1,\ldots,A_k\}$ egy Sperner-rendszer az Ω felett, és $K^{-1}=\{B_1,\ldots,B_m\}$ K antikulcsainak halmaza. Ekkor

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega \setminus \bigcap_{i=1}^{m} B_i .$$

Bizonyitás. Először tegyük fel, hogy $c \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ $(A_i \in K)$. Tehát létezik olyan $A_p (A_p \in K)$, amelyre $c \in A_p$. A 3.4 Tétel miatt ha $|A_p| = 1$, akkor $c \notin \bigcup_{i=1}^{m} B_i (B_i \in K^{-1})$. Azaz $c \notin \bigcap_{i=1}^{m} B_i$ $(B_i \in K^{-1})$. Ha $|A_p| \geq 2$, akkor a 3.4 Tétel szerint létezik olyan a attributum és olyan $\{B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i} = \{a_1^{\pi_i},\ldots,a_{r_{\pi_i}}^{\pi_i}\}$, $1 \leq i \leq k$, $k \geq 1\}$ elsődleges rendezés, amelyekre $(\pi_o,\pi_1,\ldots,\pi_k)$ az $1,\ldots,$ indexek részhalmaza, $a \in B_{\pi_i}$ $(\forall i=1,\ldots,k)$, $a \notin B_j$ $(\forall j: 1 \leq j \leq m,\ j \notin \{\pi_1,\ldots,\pi_k\})$ és $A_p = \bigcup_{i=1}^{k} \{a_1^{\pi_i}\} \cup \{a\}$. Ekkor ha $c=a$, akkor $c \notin B_{\pi_o}$. Azaz $c \notin \bigcap_{i=1}^{m} B_i$. Ha $c=a_1^{\pi_i}$ $(1 \leq i \leq k)$, akkor mivel $a_1^{\pi_i} \in B_{\pi_o} \cap \bar{B}_{\pi_i}$ igaz azt kapjuk, hogy $c \notin B_{\pi_i}$. Vagyis $c \notin \bigcap_{i=1}^{m} B_i$. Tehát $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subseteq \Omega \setminus \bigcap_{i=1}^{m} B_i$ igaz.

Forditva, tegyük fel, hogy $c \notin \bigcap_{i=1}^{m} B_i$. Ezért van olyan $B_i \in K^{-1}$, amelyre $c \notin B_i$. Világos, hogy $B_i \cup \{c\}$-hez létezik $A_j \in K$, hogy $A_j \subseteq B_i \cup \{c\}$. Nyilván $c \in A_j$. Ezért $c \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Ezzel

a tételt bebizonyitottuk.

3.8 Megjegyzés. Legyen $R=\{h_1,\ldots,h_m\}$ egy reláció az $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ felett. Legyen M_R az R maximális rendszere. Világos, hogy $|M_R|\leq\binom{m}{2}$. A 2.2 Tétel miatt $M_R=K_R^{-1}$ teljesül. A 2.5 Megjegyzés szerint R-ből előállitjuk M_R-t.Ennek az előállitásnak az időbonyolultsága polinomiálsan függ R soarainak és oszlopainak számától. Tételezzük fel, hogy $M_R=\{B_1,\ldots,B_k\}$. Ekkor konstruáljuk $\Omega\setminus\bigcap_{i=1}^{k}B_i$ halmazt. A 3.5 Tétel miatt azt kapjuk, hogy $\bigcup_{A\in K_R}A=\Omega\setminus\bigcap_{i=1}^{k}B_i$. Nyilvánvaló, hogy $\Omega\setminus\bigcap_{i=1}^{k}B_i$ halmaz előállitásának időbonyolultsága polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától. A 3.5 Tételből és a 3.8 Megjegyzésből nyilván adódik az alábbi:

3.3 Következmény. Legyen R egy reláció az Ω felett és K_R R minimális kulcsainak rendszere. Azt mondjuk, hogy a attributum elsődleges,ha létezik olyan $A(A\in K_R)$, amelyre $a\in A$ igaz. Ekkor létezik olyan algoritmus, amely eldönti, hogy tetszőleges a attributum elsődleges vagy nem. Ennek az algoritmusnak az időbonyolultsága polinomiálisan függ R sorainak és oszlopainak számától.

3.2 Algoritmusok a minimális kulcsok és antikulcsok teljes halmazainak keresésére.

Legyen adva $K=\{B_1,\ldots,B_m\}$ az Ω nem üres véges halmaz feletti Sperner rendszer. Meg akarjuk konstruálni K^{-1}-et. q-ra indukcióval konstruáljuk K_q-t(q=1,...,m) ugy, hogy $K_q=\{B_1,\ldots,B_q\}^{-1}$.

1. Lépés. K_1 konstruálása: $K_1=\{\Omega\setminus a: a\in B_1\}=B_1^{-1}$.

q+1 lépés. K_{q+1} konstruálása: Indukciós feltevésünk szerint $K_q=\{B_1,\ldots,B_q\}^{-1}$-t már megcsináltuk. Legyenek $X_1,\ldots,X_p$ azon elemei K_q-nak, amelyek B_{q+1}-et tartalmazzák. Igy $K_q=\{X_1,\ldots,X_p\}\cup\{A\in K_q: B_{q+1}\not\subseteq A\}$. Jelölje F_q a $\{A\in K_q: B_{q+1}\not\subseteq A\}$-t. i=1,...,p-re az 1-es lépést használva konstruáljuk $\{B_{q+1}\}$ antikulcsait X_i-n,azaz az X_i-nek B_{q+1}-et nem tartalmazó maximális részhalmazait.
Jelöljük ezeket $A_1^i,\ldots,A_{r_i}^i$ -vel (i=1,...,p). Legyen
$K_{q+1}= F_q\cup\{A_j^i: A_j^i\not\subseteq A$, ha $A\in F_q$, $1\leq j\leq r_i$, $1\leq i\leq p\}$.

3.6 Tétel. Mindegyik q-ra ($1\leq q\leq m$) $K_q=\{B_1,\ldots,B_q\}^{-1}$.
Azaz $K_m=K^{-1}$.

Bizonyitás. Az indukciós feltevést használva bebizonyitjuk, hogy $K_{q+1}=\{B_1,\ldots,B_{q+1}\}^{-1}$. Két dolgot kell belátnunk.

a) egyrészt, hogy ha $A \in K_{q+1}$, akkor A maximális, B_j-k (j=1,...,q+1) egyikét sem tartalmazó része Ω-nak.

b) másrészt, hogy minden olyan $A \subseteq \Omega$, amely maximális B_j-k (j=1,...,q+1) egyikét sem tartalmazza, eleme K_{q+1}-nek.

a) bizonyitása: Legyen $A \in K_{q+1}$. Ha $A \in F_q$, akkor A maximális $B_1,...,B_q$ egyikét sem tartalmazza és $B_{q+1} \not\subseteq A$, tehát A maximális, $B_1,...,B_{q+1}$ egyikét sem tartalmazó része Ω-nek.

Legyen $A \in K_{q+1} \setminus F_q$. Ekkor K_{q+1} konstrukciója szerint $A=A_j^i$ valamely $1 \leq i \leq p$-re és $1 \leq j \leq r_i$-re. A konstruálásból belátható, hogy $B_\ell \not\subseteq A_j^i$ ($\ell=1,...,q+1$).

A_j^i antikulcsa $\{B_{q+1}\}$-nek X_i-re nézve, tehát $A_j^i = X_i \setminus \{b\}$ valamely $b \in B_{q+1}$-re és világos, hogy $B_{q+1} \subseteq A_j^i \cup \{b\}$.

Ha $a \in \Omega \setminus X_i$, akkor indukciós feltevésünk szerint $A_j^i \cup \{a,b\} = X_i \cup \{a\}$-hoz létezik olyan B_ℓ ($1 \leq \ell \leq q$), amelyre $B_\ell \subseteq A_j^i \cup \{a,b\}$.

$X_i \in K_q$ miatt X_i nem tartalmazza $B_1,...,B_q$-et. Tehát $a \in B_\ell$.

Ha $(B_\ell \setminus \{a\}) \subseteq A_j^i$, akkor nyilvánvaló, hogy $B_\ell \subseteq A_j^i \cup \{a\}$. Igy minden olyan B_ℓ-re ($1 \leq \ell \leq q$), amelyre $B_\ell \subseteq X_i \cup \{a\}$ és A_j^i nem tartalmazza B_ℓ-et, $b \in B_\ell$. Tehát $(B_\ell \setminus \{a,b\}) \subseteq A_j^i$. Azaz létezik olyan $A_1 \in F_q$, hogy $A_j^i \subseteq A_1$. Ez ellentmond annak, hogy $A \in K_{q+1} \setminus F_q$. Azaz létezik olyan B_ℓ ($1 \leq \ell \leq q$), hogy $B \subseteq A_j^i \cup \{a\}$.

b) bizonyitása: Legyen A egy maximális B_j-k (j=1,...,q+1) egyikét sem tartalmazó része Ω-nak. Az indukciós feltevések szerint létezik olyan $Y \in K_q$, hogy $A \subseteq Y$.

1. Eset. Ha $B_{q+1} \not\subseteq Y$, akkor Y nem tartalmazza $B_1,...,B_{q+1}$-et.

A maximális B_j-k (j=1,...,q+1) egyikét sem tartalmazó része Ω-nak. Tehát A=Y. $B_{q+1} \not\subseteq Y$ miatt $A \in F_q$, azaz $A \in K_{q+1}$.

2. Eset. Ha $B_{q+1} \subseteq Y$, akkor $Y=X_i$ valamely $1 \leq i \leq p$-re és $A \subseteq A_j^i$ valamely $1 \leq j \leq r_i$-re. Ha létezik olyan $A_1 \in F_q$, hogy $A_j^i \subsetneq A_1$, akkor $A \subsetneq A_1$. Világos, hogy A_1 nem tartalmazza $B_1,\ldots,B_{q+1}$-et, ami ellentmond A definiciójának. Azaz $A_j^i \in K_{q+1}$ és világos, hogy A_j^i nem tartalmazza $B_1,\ldots,B_{q+1}$-et. Az A definiciója szerint $A=A_j^i$. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

Belátható, hogy a 3.6 Tétel alapján K^{-1} meghatározása nem függ a $\{B_1,\ldots,B_m\}$ sorozat sorrendjétől, mert K^{-1} és K halmazok egyértelmüen meghatározzák egymást.

A 3.6 Tétel szerint konstruáljuk az alábbi algoritmust:

3.4 Algoritmus. Az összes antikulcs megkeresésére

INPUT: $K=\{B_1,\ldots,B_m\}$ az Ω felett Sperner rendszer

OUTPUT: M, ahol $M=K^{-1}$

ADATSTRUKTURA:

-K[1:m] K elemeinek tömbje

-M[1:p] az a tömb,amely tartalmazza K^{-1} elemeit, ahol $p=([n/2]),|\Omega|=n$.

-N[1:p] az a tömb, amely tartalmazza az A_j^i-ket.

-A1,D1,D2,D3,D4 munkaváltozók.

```
Procedure ANTIKEYS(K,M):
    M[1] ←Ω; D1 ← 1;
```

```
CIKLUS: for i ← 1 until m do
   T1: begin D2 ← 0; D3 ← 0; for j ← 1 until D1 do
        begin if K[i]⊆M[j] then for each q∈K[i] do
         begin D2 ← D2+1;N(D2) ← M[j]\{a}; goto UTOLSO end;
         D3 ← D3+1;M(D3) ← M[j];
UTOLSO1: empty
     T2: end; D4 ← D3;
     T3: if D3=0 then begin D4←D2 for q←1 until D2 do M[q]←N[q],
                                          goto UTOLSO3 end;
     T4: for q←1 until D2 do begin A1←1; for p←1 until D3 do
                        if N[q]⊆M[p] then begin A1←0;
                                    goto UTOLSO2 end;
UTOLSO2:                if A1=1 then begin D4←D4+1;M(D4)←N[q]end
                        end;
UTOLSO3: D1 ← D4
        end
```

Nyilvánvaló, hogy m a CIKLUS ismétlő száma. Jelölje K_0 az Ω-t. Legyen $K_q=F_q \cup \{X_1,\ldots,X_p\}$, ahol $B_{q+1} \subseteq X_i$ $(i=1,\ldots,p)$ és $F_q=\{A \in K_q : B_{q+1} \not\subseteq A\}$. Legyen $\{X_i \setminus a : a \in B_{q+1}\}=\{A_1^i,\ldots,A_{s_i}^i\}$, ahol $1 \leq i \leq p$. Könnyen beláthatjuk, hogy a CIKLUS q+1-es ismétléséhez a T1-T2 blokkban az N tömb tartalmazza A_j^i-kat $(1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq s_i)$ és az M tömb tartalmazza F_q-t. Mivel K és K^{-1} halmazok egyértelmüen meghatározzák egymást, $\{X_1,\ldots,X_p\} \neq \emptyset$ (azaz $N \neq \emptyset$). A T3 blokkban ha $F_q=\emptyset$, akkor

az M tömb tartalmazza az N tömböt (azaz M tartalmazza K_{q+1}-t). A T5-UTOLSO3 blokkban ha $F_q \neq \emptyset$, akkor az algoritmus az M tömbbe illeszti azokat az A_j^i-ket, amelyekre $A_j^i \notin A$ ($\forall A \in F_q$). Világos, hogy a 3.5 Tétel szerint az algoritmus minden antikulcsot megtalál.

Legyen $r_q=p$ és jelölje ℓ_q K_q elemeinek számát. Ekkor a CIKLUS q+1-edik ismétlésében az algoritmus $O(n^2 r_q t_q)$ elemi operációt igényel a legrosszabb esetben, ahol

$$t_q = \begin{cases} 1 & \text{ha } \ell_q = r_q, \\ \ell_q - r_q & \text{ha } \ell_q > r_q. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy a CIKLUS első ismétlésében az algoritmus csak O(n) elemi operációt igényel. Tehát az algoritmus a legrosszabb esetben $O(n^2 \sum_{q=o}^{m-1} r_q t_q)$ elemi operációt igényel.

3.4 Következmény. A 3.4 Algoritmus a minimális kulcsok adott rendszeréhez meghatározza az antikulcsok teljes halmazát és időbonyolultsága $O(n^2 \sum_{q=o}^{m-1} r_q t_q)$.

Belátható, hogy $\ell_m = |K^{-1}|$. Ezért az olyan esetekben, amelyekre $\ell_q \leq \ell_m$ teljesül minden q-re ($1 \leq q \leq m-1$) (azaz K_q elemeinek száma nem nagyobb, mint $|K^{-1}|$) az algoritmus időbonyolultsága legfeljebb $O(|\Omega|^2 . |K^{-1}|^2 . |K|)$. Vagyis ezekben az esetekben időbonyolultsága polinomiálisan függ az attributumok, a minimális kulcsok és az antikulcsok számától.

Érdekes, hogy sok esetben ha K kevés minimális kulcsot tartalmaz, akkor az algoritmus nagyon hatékony. Ekkor időbonyolultsága polinomiálisan függ $|\Omega|$-tól.

Most becsüljük a 3.4 Algoritmus olyan időbonyolultságát, amely csak $|\Omega|$-tól függ. A 4.4 Megjegyzés szerint belátható, hogy az Ω tetszőleges attributumainak halmazából előállithatunk egy olyan K Sperner-rendszert (input), amelynek elemeinek száma arányos $|\Omega|$-val, de K^{-1} elemeinek száma (output) exponenciálisan függ az $|\Omega|$-tól. Ebben az esetben könnyü belátni, hogy a 3.4 Algoritmus időbonyolultsága exponenciálisan függ az attributumok számától. Azaz létezik olyan k szám, hogy $k>3^{\frac{1}{4}}$, időgonyolultsága $O(k^n)$.

3.5 Következmény. A 3.4 Algoritmus időbonyolultsága exponenciálisan függ Ω elemeinek számától.

A 3.4 Algoritmus segitségével konkrétan konstruáljuk az adott Sperner-rendszert reprezentáló relációkat.

Az alábbi példa megmutatja ezt.

3.2 Példa. Legyen $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, és $K=\{(1,2),(2,3,4),(2,4,5),(4,6)\}$ Ekkor a 3.5 Algoritmus szerint

$K_1=\{(1,3,4,5,6),(2,3,4,5,6)\}$, $K_2=\{(1,\ 3,4,5,6),(2,3,5,6),(2,4,5,6)\}$.

$K_3=\{(1,3,4,5,6),(2,3,5,6),(2,4,6)\}$, $K_4=\{(2,3,5,6),(1,3,4,5),(1,3,5,6),(2,4)\}$.

Tehát $K^{-1}=K_4$. Az 1.11 Tétel szerint konstruáljuk az alábbi relációt.

Attributumok:	1	2	3	4	5	6
	o	o	o	o	o	o
	1	o	o	1	o	o
R=	o	2	o	o	o	2
	o	3	o	3	o	o
	4	o	4	o	4	4

Ekkor R reprezentálja a K-t (lásd 1.11 Tétel). Most konstruáljuk azt az algoritmust, amely az antikulcsok adott halmazához minden minimális kulcsot megtalál.Először az alábbi tételt bizonyitjuk be.

3.7 Tétel. Legyen adva egy Q Sperner-rendszer az Ω felett, és $Q^{-1}=\{B_1,\ldots,B_m\}$ Q antikulcsainak halmaza, $T\subseteq Q$. Ekkor $T\subseteq Q$ és $T\neq\emptyset$ pontosan akkor, ha létezik olyan B halmaz ($B\subseteq\Omega$), amelyre $B\in T^{-1}$ és $B\not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1\leq i\leq m$).

Bizonyitás. Először tegyük fel, hogy $T\subseteq Q$ és $T\neq\emptyset$. Ekkor van olyan A halmaz, amelyre $A\in Q\setminus T$. Mivel Q egy Sperner-rendszer az Ω felett és $T\neq\emptyset$, azt kapjuk, hogy $T\cup\{A\}$ is Sperner-rendszer. Jelölje B az olyan legnagyobb halmazt, amelyre $A\subseteq B$ és $T\cup\{B\}$ Sperner-rendszer. Nyilvánvaló, hogy B mindig létezik és könnyü belátni, hogy az antikulcsok halmazának definiciója szerint $B\in T^{-1}$. Másrészt, ugyancsak az antikulcsok halmazának definiciója alapján ha $A\in Q$, akkor $A\not\subseteq B_i$ minden i-re ($1\leq i\leq m$). Tehát $A\subseteq B$ miatt $B\not\subseteq B_i$ ($\forall i: 1\leq i\leq m$).

Megforditva tegyük fel, hogy létezik olyan B halmaz, amelyre $B \in T^{-1}$ és $B \not\subseteq B_i$ $(\forall i: 1 \leq i \leq m)$. Ekkor T^{-1} létezése miatt $T \neq \emptyset$. Az antikulcsok halmazának definiciója szerint minden C halmazra $(C \in T)$ B nem tartalmazza C-t. Belátható, hogy ha létezik olyan B_i halmaz $(B_i \in Q^{-1})$, hogy $B_i \subsetneq B$, akkor az antikulcsok halmazának definiciója szerint B egy kulcs (azaz $B \in \mathcal{L}(Q)$, lásd 3.2 Megjegyzést). Ha $Q^{-1} \cup \{B\}$ egy Sperner-rendszer, akkor az 1.9 Tétel szerint létezik olyan H lezárási operáció, amelyre $Q = K_H$. Ekkor ha $H(B) \neq \Omega$, akkor a 3.1 Lemma szerint van olyan B_i halmaz $(B_i \in Q^{-1})$, hogy $H(B) \subseteq B_i$. Ezért $B \subseteq B_i$ teljesül. Ez ellentmond annak, hogy $B \not\subseteq B_i$ $(\forall i: 1 \leq i \leq m)$. Tehát $H(B) = \Omega$ teljesül. Azaz B egy kulcs. Ezért létezik A halmaz ugy, hogy $A \subseteq B$ és $A \in Q \setminus T$. Vagyis $T \subsetneq Q$. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

Legyen adva $K = \{B_1, \ldots, B_m\}$ egy Sperner-rendszer az felett. Q-t konstruálhatjuk: $(Q^{-1} = K)$ indukcióval a következőképpen.

1. Lépés. Egy algoritmust adunk meg, mely a K-ból Q-nak egy elemét megtalálja, és konstruáljuk az A_1 minimális kulcsot (azaz $A_1 \in Q$). Legyen $K_1 = \{A_1\}$.

i+1 Lépés. Ha van olyan $B \in K_i^{-1}$, amelyre $B \not\subseteq B_j$ $(\forall j: 1 \leq j \leq m)$, akkor egy olyan algoritmus segitségével, amely K-ból megtalál egy minimális kulcsot, konstruálunk egy olyan A_{i+1} minimális kulcsot, amely $A_{i+1} \subseteq B$. Utána legyen $K_{i+1} = K_i \cup \{A_{i+1}\}$.

Ha ilyen B nincs, legyen $Q=K_i$.

A 3.7 Tétel alapján az alábbi következmény nyilvánvaló:

3.6 Következmény. Van olyan p természetes szám, amelyre $K_p=Q$.

A 3.7 Tétel és a 3.6 Következmény alapján megadjuk az alábbi algoritmust.

3.5 Algoritmus. Az összes minimális kulcs megtalálására

INPUT: $K=\{B_1,\ldots,B_m\}$ egy Sperner-rendszer az Ω felett .

OUTPUT: M, ahol $M^{-1}=K$ (azaz M minimális kulcsok rendszere).

ADTASTRUKTURA:

- K[1:m] K elemeinek tömbje.
- M[1:p] az a tömb, amely tartalmazza a minimális kulcsok rendszerét, ahol $p=\binom{n}{[n/2]}$, $|\Omega|=n$.
- N[1:p], L[1:p] munkatömbök.
- A1,D1,D2,D3,D4,D5,D6,B,KEY munkaváltozók.
- MINKEY2-algoritmus egy minimális kulcs megtalálására

```
                Procedure MINKEYS(K,M):
KEZDET: D5 ← 1; select ELEMENT from (Ω\K[1]); B ← K[1]∪ELEMENT;
        M[1] ← MINKEY2(K,B), KEY ← M[1]; L[1] ← Ω; D1←1; D2←0;
                                                    D3←0;
CIKLUS1: for i ← 1 until D1 do
          begin if KEY⊆L[i] then for each q∈KEY do
           begin D2 ← D2+1; N(D2) ← L[i]\{q}, goto UTOLSO1 end;
           D3 ← D3+1; L(D3) ← L[i];
```

```
UTOLSO1:    empty
            end; D4 ← D3;
            if D3=0 then begin D4 ← D2; for q ← 1 until D2
                              do L[q] ← N[q]; goto UTOLSO3
                              end;
            for q ← 1 until D2 do
            begin A1 ← 1; for q ← 1 until D3 do
            if N[q]⊊L[p] then begin A1 ← 0; goto UTOLSO2 end;
UTOLSO2:    if A1=1 then begin D4 ← D4+1; L[D4]← N[q] end
            end;
UTOLSO3:  D1← D4;
          D6 ← D1;
CIKLUS2: for i ← 1 until l do
             for p ← 1 until m do
              if L[i]≠ K[p] then
                begin KEY ← MINKEY2 (K,L[i]); D5 ← D5+1;
                 M(D5) ← KEY; D1 ← D6; goto CIKLUS1
                end
```

$K_{i+1}=K_i \cup \{A_{i+1}\}$ miatt és a 3.6 Tétel szerint a K_i^{-1}-ből és A_{i+1}-ből előállitjuk a K_{i+1}^{-1}-et. Könnyen beláthatjuk, hogy D5 tartalmazza a minimális kulcsok számát. A KEZDET blokkban M[1] az első minimális kulcs. A CIKLUS-UTOLSO3 blokkban a 3.5 Algoritmushoz hasonlóan az algoritmus a K_{i+1}^{-1}-et($\forall i \geq 0$) találja meg.

A CIKLUS2 blokkban az algoritmus meghatározza, hogy létezik-e olyan B halmaz ($B \in K_{i+1}^{-1}$), amelyre $B \notin B_j$ minden j-re ($1 \leq j \leq m$), ahol B=L[i]. Ha nincs ilyen B, akkor a 3.6 Tétel és a 3.6 Következmény szerint legyen $Q=K_p$ (azaz $K_p^{-1}=K$).

Beláthatjuk, hogy ha $B \in K_{i+1}^{-1}$ ($0 \leq i \leq p-1$) és van olyan j index, amelyre $1 \leq j \leq m$ és $B \neq B_j$, akkor $B \notin B_\ell$ minden ℓ-re ($1 \leq \ell \leq m$). A 3.7 Tétel és a 3.6 Következmény alapján a 3.5 Algoritmus megtalálja a minimális kulcsok teljes rendszerét az antikulcsok adott halmazából.

A 3.4 Algoritmushoz hasonló bizonyitással belátható, hogy ha k jelöli a minimális kulcsok számát (azaz k a CIKLUS1-UTOLSO3 blokk ismétlő száma), akkor CIKLUS1-UTOLSO3 blokkban az algoritmus $O(n^2 \sum_{q=o}^{k-1} r_q t_q)$ elemi operácót, a CIKLUS2 blokkban $O(n.m \sum_{q=1}^{k} \ell_q)$ elemi operációt igényel a legrosszabb esetben, ahol ℓ_q a K_q elemeinek száma,

$$t_q = \begin{cases} 1 & \text{ha } \ell_q = r_q \\ \ell_q - r_q & \text{ha } \ell_q > r_q \end{cases}$$ (Lásd 3.4 Algoritmust).

Nyilvánvaló, hogy $\ell_k=m$. Tehát triviális az alábbi.

3.7 Következmény. A 3.5 Algoritmus az antikulcsok adott halmazából meghatározza a minimális kulcsok teljes rendszerét és időbonyolultsága $O(n \sum_{q=1}^{k-1} (m\ell_q + nr_q t_q) + m^2 + n))$.
Belátható, hogy a 3.5 Algoritmus hatékony, ha a minimális kulcsok száma kevés.

Az olyan esetekben, amelyekre $\ell_q \leq m$ $(\forall q: 1 \leq q \leq k-1)$ (azaz K_q^{-1} elemeinek száma legfeljebb m), belátható, hogy az algoritmus időbonyolultsága legfeljebb $O(n^2.m^2.k)$.

A 3.6, 3.7 Tételek és a 3.6 Következmény alapján, és mivel a 3.4 Algoritmus időbonyolultsága exponenciálisan függ az $|\Omega|$-tól, adódik az alábbi:

3.8 Következmény. A 3.5 Algoritmus időbonyolultsága exponenciálisan függ Ω elemeinek számától.

3.9 Megjegyzés. Legyen R egy reláció az Ω felett, és M_R az R maximális rendszere.
A 2.5 Megjegyzés szerint R-ből előállithatjuk M_R-t. A 2.2 Tétel miatt $M_R = K_R^{-1}$. Utána a 3.5 Algoritmus segitségével M_R-ből megtaláljuk R összes minimális kulcsainak rendszerét. Tételezzük fel, hogy $K_R = \{A_1, \ldots, A_k\}$. Konstruáljuk az $S = \langle \Omega, P \rangle$ relációs sémát, ahol $P = \{A_i \rightarrow \Omega \ : 1 \leq i \leq k\}$. [8] szerint azt tudjuk, hogy S összes minimális kulcsainak rendszere éppen K_R.

3.10 Megjegyzés. Legyen $S = \langle \Omega, P \rangle$ egy relációs séma az felett (Lásd 3.7 Megjegyzést). Jelölje K_S S összes minimális kulcsainak rendszerét. Nyilvánvaló, hogy K_S Sperner-rendszer az Ω felett.
Jelöljük P^*-gal az összes olyan funkcionális függőségek halmazát, amelyek $\underline{p}$-ből deriválhatók F-axiómarendszerben

levő (F1),(F2),(F3),(F4) szabályok alkalmazásával. Legyen $A^*=\{a\in\Omega:(A\to\{a\})\in P^*\}$ minden $A\subseteq\Omega$-ra.

Tudjuk, ([10]), hogy létezik olyan algoritmus, amely A-ból ($A\subseteq\Omega$) talál meg A^*-t és időbonyolultsága lineáris.

Legyen $T_S=\{A\subsetneq\Omega:A^*=A$ és $\exists B\subsetneq\Omega:B^*\neq\Omega, A^*\subsetneq B^*\}$.

Belátható, hogy a 2.2 Tételhez hasonló bizonyitással azt kapjuk, hogy $K_S^{-1}=T_S$. Ha H lezárási operáció az Ω felett, akkor a 3.1 Lemma szerint $K_H^{-1}=\mathcal{M}_H$, ahol $\mathcal{M}_H$ H maximális zárt halmazainak a rendszere. Világos, hogy adott S relációs sémából és adott H lezárási operációból konstruálhatjuk T_S-t és $\mathcal{M}_H$-t. A 3.5 Algoritmus segitségével T_S-ből és $\mathcal{M}_H$-ból megtaláljuk K_S-t és K_H-t.

Legyen $G=\langle V,E\rangle$ irányitatlan véges gráf, ahol V a szögpontok, E az élek halmaza és $V\neq\emptyset$.

[2] szerint G éllefogásának egy $S\subseteq V$ részhalmazát nevezzük, ha bármely éle G-nek illeszkedik S valamely szögpontjához.

Éllefogás probléma

Input: $G=\langle V,E\rangle$ irányitatlan gráf, $k\leq|V|$.

Kérdés: van-e $S\subseteq V$ éllefogás, amelyre $|S|\leq k$.

Tudjuk, ([2]), hogy az éllefogás probléma NP-teljes.

Megfogalmazzuk az alábbi problémát:

Antikulcs probléma.

Input: $K=\{B_1,\ldots,B_m\}$ egy Sperner-rendszer az $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ felett, és $k\leq n$.

Kérdés: van-e $A \subseteq \Omega$, $|A| \leq k$, amelyre $A \not\subseteq B_i$ $(\forall i=1,\ldots,m)$.
Belátható, hogy a fenti kérdés azt jelenti, hogy ha K az antikulcsok halmaza, akkor van-e legfeljebb k-elemü kulcs.

3.8 Tétel. Az antikulcs-probléma NP-teljes.

Bizonyitás. Először lássuk be, hogy az antikulcs-probléma NP-beli. Tekintsük a következő könnyü algoritmust. Nemdeterminisztikusan kiválasszuk Ω-nak olyan A részhalmazát, amelyre $|A| \leq k$. Mindegyik B_i-re $(i=1,\ldots,m)$ ellenőrizzük, hogy $A \not\subseteq B_i$ igaz-e.
Világos, hogy ez az algoritmus polinomidejü nemdeterminisztikus
Most megmutatjuk, hogy az éllefogás-probléma polinom időben visszavezethető az antikulcs problémára.
Legyen $G = \langle V,E \rangle$ irányitatlan gráf, $k \leq |V|$, $\Omega = V$ és
$K = \{\Omega \setminus \{a_i,a_j\} : (a_i,a_j) \in E\}$.
Ha $A \subseteq \Omega$, $|A| \leq k$ és $A \not\subseteq B$ minden $B \in K$-ra akkor K definiciója szerint $A \cap \{a_i,a_j\} \neq \emptyset$ $(\forall (a_i,a_j) \in E)$. Ezért A a G éllefogása.
Forditva, ha $S \subseteq V$ éllefogás, akkor K és S definiciói szerint $S \not\subseteq B$ minden B-re $(B \in K)$. Tehát az (Ω,K,k) antikulcs-problémára igenlő a válasz akkor és csak akkor, ha a $(G=\langle V,E \rangle,k)$ éllefogás problémára igenlő a válasz. A visszavezetés nyilván polinomidejü. Az antikulcs-probléma tehát legalább olyan nehéz, mint az éllefogás-probléma, ez utóbbi NP-teljes, igy az antikulcs-probléma NP-nehéz.
De láttuk, hogy NP-beli, tehát NP-teljes. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

3.11 Megjegyzés. A 3.8 Tétel és az 1.11 Tétel alapján könnyen bebizonyitjuk, hogy az a probléma, hogy adott relációhoz van-e egy olyan kulcs, amelynek nagysága nem nagyobb, mint egy adott természetes szám, NP-teljes.
[8]-ban bebizonyitották ezt a problémát más módszerrel.

3.12 Megjegyzés. [22]-ben bevezették az attributumhalmazon értelmezett lezárási operációk halmaza feletti kétváltozós relációt a következőképpen:
Legyen P az Ω feletti összes lezárási operációk halmaza.
$H,H' \in P$-re jelölje $H \leqq H'$, ha minden $A \subseteq \Omega$-ra $H'(A) \subseteq H(A)$ (1).
Belátható, hogy (1) reláció parciális rendezési és (1)-re P egy parciális rendezett halmaz.
Ha $H \leqq H'$ és $H' \neq H'$, akkor jelölje $H < H'$.
[22] bebizonyitotta, hogy $H \leqq H'$ pontosan akkor igaz, ha $Z(H) \subseteq Z(H')$, ahol H,H' két lezárási operáció az Ω felett és $Z(H) = \{A \subseteq \Omega : H(A) = A\}$.

3.9 Tétel. Legyen K egy Sperner rendszer az Ω felett, és K^{-1} a K antikulcsainak halmaza. Minden $A \subseteq \Omega$-ra.

$$H(A) = \begin{cases} \bigcap_{\substack{A \subseteq B \\ B \in K^{-1}}} B & \text{ha } \exists B \in K^{-1} : A \subseteq B, \\ \Omega & \text{különben.} \end{cases}$$

Állitjuk, hogy H olyan lezárási operáció, amelyre $K_H=K$ és ha H' tetszőleges olyan lezárási operáció, hogy $K_{H'}=K$, akkor $H\leqq H'$.

Bizonyitás. Nyilvánvaló, hogy H egy lezárási operáció az felett. Világos, hogy minden $B\in K^{-1}$-re $H(B)=B$. Vagyis $B\in Z(H)$. Másrészt, mivel K^{-1} egy Sperner-rendszer az Ω felett, $\mathcal{M}_H=K^{-1}$ igaz. A 3.1 Lemma miatt $K_H^{-1}=\mathcal{M}_H=K^{-1}$. Tehát $K_H=K$, mert K és K^{-1} halmazok egyértelmüen meghatározzák egymást. Tegyük fel, hogy H' egy olyan lezárási operáció, amelyre $K_{H'}=K$. Belátható, hogy $Z(H)=(K^{-1})^+$ (lásd 1.7 Definiciót). A 3.1 Lemma miatt $\mathcal{M}_{H'}=K_{H'}^{-1}=K^{-1}$. Ezért $\mathcal{M}_{H'}=\mathcal{M}_H=K^{-1}$ igaz. Vagyis $Z(H)\subsetneq Z(H')$. A 3.12 Megjegyzés szerint $H\leqq H'$.

Belátható, hogy H egyetlen olyan lezárási operáció, melyre $K_H=K$ és minden H' lezárási operációra ($K_{H'}=K, H'\neq H$) $H<H'$ igaz. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

A 3.9 Tétel alapján nyilvánvaló az alábbi:

3.9 Következmény. Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett, és K^{-1} a K antikulcsainak halmaza. Jelölje $\bigvee a\{H:H$ az Ω feletti olyan lezárási operáció, amelyre $K_H=K\}$ halmazt. Nyilvánvaló, hogy (1) relációra $\bigvee$ parciális rendezett halmaz. Minden $A\subseteq\Omega$-ra

$$H_1(A)=\begin{cases}\bigcap_{A\subsetneq B} B & \text{ha } \exists B\in K^{-1}: A\subsetneq B,\\ B\in K^{-1} & \\ \Omega \text{ különben.} & \end{cases}$$

Ekkor H_1 olyan lezárási operáció, amely $\bigvee$ parciális rendezett halmaz egyetlen minimális eleme.

4. FEJEZET

Speciális minimális kulcsok rendszerei

A fejezet fő célja néhány speciális minimális kulcs rendszereivel kapcsolatos vizsgálatok ismertetése.

Számos dolgozat foglalkozik a speciális minimális kulcsok rendszereire vonatkozó kombinatorikai problémákkal. Tudjuk, ([5],[35]) hogy adott nem üres K Sperner rendszerhez létezik olyan H lezárási operáció, hogy $K=K_H$. Általában több ilyen lezárási operáció van.
Természetes kérdés, hogy milyen K Sperner-rendszerre létezik pontosan egy olyan H lezárási operáció, hogy $K=K_H$.

[42]-ben bebizonyitották, hogy a telitett Sperner-rendszerek (lásd 1.20 Definiciót) kielégitik ezt a követelményt.

Ebben a fejezetben bevezetünk néhány speciális Sperner-rendszert, amelyek telitett Sperner-rendszerekre vonatkoznak. Ezek u.n. beágyazott, tartalmazó, egyesitett és valódi egyesitett Sperner-rendszerek (a 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 Definiciók). Megmutatjuk, hogy az alábbiak ekvivalensek egymással.

(1) K telitett,

(2) K^{-1} beágyazott,

(3) Q tartalmazó,

ahol Q olyan Sperner rendszer, amelyre $Q^{-1}=K$ (a 4.1, 4.2

Tételek). Egy szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy tetszőleges Sperner-rendszer egyesitett (a 4.3 Tétel) legyen. Bebizonyitjuk, hogy létezik olyan K Sperner rendszer, amelyre K telitett (beágyazott, tartalmazó, egyesitett), de K^{-1} vagy Q nem telitett (beágyazott, tartalmazó, egyesitett) (a 4.5 Tétel). Egy eredményt (a 4.6 Tétel) ismertetünk, amely becsüli a nagy s(K)-kat (lásd 1.19 Definiciót és 1.18 Tételt).

A 3. fejezethez hasonló jelen fejezetben ha egy Sperner rendszer a minimális kulcsok rendszerének (az antikulcsok halmazának) szerepét játssza, akkor feltételezzük, hogy ez a Sperner-rendszer nem üres (nem tartalmazza Ω-t)

4.1 A telitett Sperner-rendszerekkel kapcsolatos minimális kulcsok rendszerei

Tudjuk (a 1.20 Definició), hogy egy K Sperner-rendszer telitett, ha tetszőleges B halmazra ($B \notin K$) $K \cup \{B\}$ nem Sperner rendszer. Bevezetjük az alábbi fogalmat.

4.1 Definició. Legyen adva egy K Sperner-rendszer az Ω felett. Azt mondjuk, hogy K beágyazott, ha tetszőleges A halmazra ($A \in K$) , van olyan B halmaz ($B \in Q$), amelyre $A \subset B$, ahol $Q^{-1}=K$.

4.1 Megjegyzés. Mivel K és K^{-1} halmazok egyértelmüen meghatározzák egymást, ezért egy K Sperner rendszerhez pontosan egy olyan Q Sperner rendszer létezik, hogy $Q^{-1}=K$.

Az alábbi példa megmutatja, hogy létezik olyan K telitett Sperner-rendszer, hogy K^{-1} nem telitett.

4.1 Példa. Legyen $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ és $N=\{(1,2), (3,4), (5,6)\}$. Belátható, hogy $N^{-1}=\{(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),$ $(2,3,5), (2,3,6), (2,4,5), (2,4,6)\}$.

Legyen $K= N \cup N^{-1}$. Nyilvánvaló, hogy K telitett Sperner-rendszer.

A 3.4 Algoritmus segitségével belátható, hogy

$K^{-1} =\{(1,3),(1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5),$
$(2,6), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)\}$.

Világos, hogy $K^{-1} \cup \{1,2\}$ egy Sperner-rendszer az Ω felett. Tehát K^{-1} nem telitett. Ennek ellenére igaz a következő:

4.1 Tétel. Legyen adva egy K Sperner rendszer az Ω felett. K pontosan akkor telitett, ha K^{-1} beágyazott.

Bizonyitás. Tegyük fel, hogy K egy telitett Sperner-rendszer. Ekkor beláthatjuk, hogy K^{-1} definiciója és K telitettsége szerint K^{-1} beágyazott. Forditva tegyük fel, hogy K^{-1} egy beágyazott Sperner-rendszer, de K nem telitett. Ekkor létezik olyan A ($A \subsetneq \Omega$), amelyre $K \cup \{A\}$ egy Sperner-rendszer az Ω felett. Mivel K nem telitett, tetszőleges C-re ($C \in K$) azt kapjuk, hogy $C \subsetneq \Omega$. Azaz $\Omega \notin K$. Tehát konstruálhatunk egy olyan B halmazt, amelyre $A \subsetneq B$ és $K \cup \{B\}$ egy Sperner-rendszer az Ω felett, és tetszőleges B' halmazra ($B \subsetneq B'$) létezik olyan $C \in K$, hogy $C \subseteq B'$. Belátható, hogy $B \in K^{-1}$. Ez ellentmond annak, hogy K^{-1} beágyazott Sperner-rendszer. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

Igy bevezethetjük a beágyazott Sperner-rendszert azért, hogy vizsgálni tudjuk a telitett Sperner-rendszerek antikulcsainak halmazait. Definiáljuk az alábbi Sperner-rendszerek minimális kulcsainak rendszereit, ha a telitett Sperner-rendszerek az antikulcsok halmazainak szerepét játsszák.

4.2 Definició. Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett.

Azt mondjuk, hogy K tartalmazó Sperner-rendszer, ha tetszőleges A halmazhoz ($A \in K$) létezik olyan B halmaz ($B \in K^{-1}$), amelyre $B \subsetneq A$.

4.2 Tétel. Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett. K akkor és csak akkor tartalmazó, ha K^{-1} telitett.

Bizonyitás. Először tegyük fel, hogy K egy tartalmazó Sperner-rendszer, de K^{-1} nem telitett. K^{-1} definiciója szerint létezik olyan B halmaz ($B \in (K^{-1})^{-1}$), amelyre $K^{-1} \cup \{B\}$ egy Sperner-rendszer. Az 1.9 Tétel szerint K-hoz van olyan H lezárási operáció, amelyre $K_H = K$. Ha $H(B) \subsetneq \Omega$, akkor a 3.1 Lemma szerint van olyan $A \in K^{-1}$, amelyre $H(B) \subseteq A$, mert az antikulcsok halmaza maximális zárt halmazok rendszere. Ez ellentmond annak, hogy $K^{-1} \cup \{B\}$ egy Sperner rendszer. Tehát B egy kulcsa H-nak (azaz $H(B) = \Omega$). Egy minimális kulcsot megtaláló algoritmus segitségével (például 3.1 Algoritmus) előállithatunk olyan B' halmazt ($B' \subseteq B$), amelyre $B' \in K$. Világos, hogy $K^{-1} \cup \{B'\}$ egy Sperner-rendszer. Ez ellentmond annak, hogy K egy tartalmazó Sperner-rendszer. Azaz K^{-1} telitett. Forditva, tegyük fel, hogy K^{-1} telitett. Könnyen beláthatjuk, hogy az antikulcsok halmaza és a teltiett Sperner-rendszer definiciói szerint K tartalmazó. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.
A 4.1, 4.2 Tételekből nyilván adódik az alábbi

4.1 Következmény. Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett. Legyen továbbá Q olyan Sperner-rendszer, amelyre $Q^{-1}=K$. Ekkor a következők ekvivalensek egymással:

(1) K telitett,

(2) K^{-1} beágyazott,

(3) Q tartalmazó.

Belátható, hogy tetszőleges K Sperner-rendszerhez $K \cup K^{-1}$ vagy Sperner-rendszer, vagy nem. De ha $K \cup K^{-1}$ egy Sperner rendszer, akkor $K \cup K^{-1}$ telitett.

4.3 Definició. Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett. Azt mondjuk, hogy K egyesitett, ha $K \cup K^{-1}$ Sperner-rendszer. Azaz ha K egyesitett, akkor $K \cup K^{-1}$ telitett.
Világos, hogy a 4.1 Példában lévő N halmazrendszer egyesitett. Egy szükséges és elégséges feltételét adjuk annak, hogy tetszőleges Sperner rendszer egyesitett legyen.

4.3 Tétel. Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett. Ekkor K pontosan akkor egyesitett, ha tetszőleges A halmazra $(A \in K)$ létezik olyan B halmaz $(B \in (K^{-1})^{-1})$, amelyre $A \subseteq B$, ahol $(K^{-1})^{-1}$ K^{-1} antikulcsainak halmaza.

Bizonyitás. Először, tegyük fel, hogy K egyesitett és $A \in K$. Az 1.9 Tétel szerint van olyan H lezárási operáció az Ω felett, amelyre $K_H=K^{-1}$. Ha $H(A)=\Omega$ teljesül, akkor a H lezárási operáció definiciója szerint van olyan C halmaz

$(C \in K^{-1})$, amelyre $C \subsetneq A$. Ez ellentmond annak, hogy K egy egyesitett Sperner-rendszer. Tehát $H(A) \subsetneq \Omega$. A 3.1 Lemma szerint az antikulcsok halmaza a maximális zárt halmazok rendszere. Ezért H(A)-hoz létezik olyan B halmaz $(B \in (K^{-1})^{-1})$, amelyre $A \subseteq H(A) \subsetneq B$.

Forditva tegyük fel, hogy tetszőleges A halmazra $(A \in K)$ van olyan B halmaz $(B \in (K^{-1})^{-1})$, amelyre $A \subsetneq B$.
Legyen $T=\{B \in (K^{-1})^{-1} : \exists A \in K : A \subsetneq B\}$. Belátható, hogy tetszőleges P Sperner-rendszerhez ha $D \in P$, akkor vagy $P^{-1} \cup \{D\}$ egy Sperner-rendszer, vagy létezik olyan C halmaz $(C \in P^{-1})$, amelyre $C \subsetneq D$. Világos, hogy $A \subsetneq B$ miatt és K^{-1} definiciója szerint tetszőleges S halmazhoz $(S \in K^{-1})$ $T \cup \{S\}$ egy Sperner-rendszer. Ezért $K \cup \{S\}$ is egy Sperner-rendszer. Azaz $K \cup K^{-1}$ egy Sperner-rendszer. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.
Világos, hogy ha K egy egyesitett Sperner-rendszer, akkor K^{-1} és $(K^{-1})^{-1}$, K nem telitett Sperner-rendszerek.

4.2 Példa. Legyen $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ és $K=\{(1,2,3),(2,3,4)\}$.
A 3.4 Algoritmus segitségével azt kapjuk, hogy
$K^{-1}=\{(1,2,4,5),(1,3,4,5),(2,3,4)\}$ és
$(K^{-1})^{-1}=\{(1,2,3,5),(1,4,5),(1,4,3),(3,4,5),(1,2,4),(2,4,5)\}$.
Világos, hogy K egy egyesitett Sperner-rendszer, de K^{-1} nem egyesitett, mert $(1,4,5) \in (K^{-1})^{-1}$ és $(1,2,4,5) \in K^{-1}$ (azaz $K^{-1} \cup (K^{-1})^{-1}$ nem Sperner-rendszer az Ω felett.)

4.4 Definició. Legyenek K_1, K_2 két Sperner-rendszer az Ω felett. Azt mondjuk, hogy a $K=K_1 \cup K_2$ valódi telitett Sperner-rendszer, ha K telitett Sperner-rendszer, és ha $A \in K_1$, akkor $A \notin K_2$ (azaz $K_1 \cap K_2 = \emptyset$).

4.2 Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy ha K_1, K_2 Sperner-rendszerek, akkor $K_1 \cup K_2$ vagy Sperner-rendszer, vagy nem. Világos, hogy ha $K_1 \cup K_2$ Sperner-rendszer, akkor $K_1 \cup K_2$ vagy telitett vagy nem. Ha $K_1 \cup K_2$ telitett, akkor előfordulhat, hogy $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ vagy $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Ez utóbbi a valódi telitett Sperner-rendszer.

Világos, hogy ha K egy egyesitett Sperner-rendszer, akkor $K \cup K^{-1}$ valódi telitett.

4.4 Tétel. Legyen adva egy K sperner-rendszer az Ω felett. Ekkor $K \cup (K^{-1})^{-1}$ nem valódi telitett Sperner rendszer.

Bizonyitás. Nyilvánvaló, hogy K^{-1} egy Sperner-rendszer. Először vizsgáljuk az első esetet: K^{-1} telitett. Ekkor a 4.2 Tétel szerint legyen $T_1 = \{B \in K^{-1} : \exists A \in K : B \subsetneq A\}$, a 4.1 Tétel szerint pedig legyen $T_2 = \{B \in K^{-1} : \exists C \in (K^{-1})^{-1} : C \subsetneq B\}$. Könnyen belátható, hogy $T_1 \neq \emptyset$ és $T_2 \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Ekkor K^{-1} definiciója szerint van olyan $C_1 (C_1 \in (K^{-1})^{-1}$, amelyre $T_2 \cup \{C_1\}$ egy Sperner-rendszer. Ez ellentmond annak, hogy K^{-1} telitett. Tehát $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$. Azaz $K \cup (K^{-1})^{-1}$ nem Sperner-rendszer az Ω felett. Vagyis $K \cup (K^{-1})^{-1}$ nem valódi telitett Sperner-rendszer.

Most vizsgáljuk a második esetet: K^{-1} nemt telitett. Ekkor a 4.2 Tételhez hasonlóan létezik olyan A ($A \in K$) és C halmaz ($C \in (K^{-1})^{-1}$), amelyre $A \subseteq C$. Tehát $K \cup (K^{-1})^{-1}$ nem valódi telitett Sperner-rendszer. Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

Belátható, hgoy $K \cup (K^{-1})^{-1}$ nem valódi telitett Sperner-rendszer, de adunk olyan példákat, amelyek megmutatják, hogy $K \cup (K^{-1})^{-1}$telitett Sperner-rendszer. Ekkor $K \cap (K^{-1})^{-1} \neq \emptyset$.

4.5 Tétel. Létezik olyan K Sperner-rendszer, amelyre

(1) vagy K telitett, de K^{-1} nem telitett,

(2) vagy K telitett, de Q nem telitett,

(3) vagy K beágyazott, de K^{-1} nem beágyazott,

(4) vagy K beágyazott, de Q nem beágyazott,

(5) vagy K tartalmazó, de K^{-1} nemtartalmazó,

(6) vagy K tartalmazó, de Q nem tartalmazó,

(7) vagy K egyesitett, de K^{-1} nem egyesitett,

(8) vagy K egyesitett, de Q nem egyesitett,

ahol $Q^{-1}=K$.

Bizonyitás. A 4.1 Példa szerint kapjuk (1)-et. A 4.1 Tétel miatt ebben a példában $(K^{-1})^{-1}$ nem beágyazott, tehát igaz (3). A 4.2 Példa miatt kapjuk a (7)-t. A 4.1 Példában a 4.2 Tétel szerint Q tartalmazó, ahol $Q^{-1}=K$. Tegyük fel, hogy ha K tartalmazó, akkor K^{-1} is tartalmazó. Ekkor a 4.1 példában levő K Sperner-rendszer tartalmazó, mert Q tartalmazó. Ezért a 4.2 Tétel szerint K^{-1} telitett. Ez ellentmond

a 4.1 Példának. Tehát igaz (5). (2)-re érvényes az alábbi bizonyitás:

Legyen K egy Sperner-rendszer az Ω felett. Jelölje $K^1=K$ és K^n az olyan Sperner-rendszert, amelynek antikulcsainak halmaza K^{n-1} $(n\geq 2)$. Világos, hogy az Ω feletti Sperner rendszerek száma véges (legfeljebb $2^{2^{|\Omega|}}$). Másrészt, K és K^{-1} halmazok egyértelmüen meghatározzák egymást és $K\cap K^{-1}=\emptyset$. Ezért létezik olyan m természetes szám $(2\leq m\leq 2^{2^{|\Omega|}})$, amelyre $K^m=K$ és $K^{m-1}=K^{-1}$. Most tegyük fel, hogy ha K telitett, akkor Q $(Q^{-1}=K)$ is telitett. Ekkor nyilvánvaló, hogy $\forall p:K^p$ $(2\leq p\leq m)$ is telitett. Azaz K^{-1} telitett. Ez ellentmond annak, hogy a 4.1 példában lévő K^{-1} nem telitett. Tehát létezik olyan K Sperner-rendszer, amelyre K telitett, de Q nem telitett. A fenti bizonyitáshoz hasonló módon igaz (4), (6) és (8). Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

4.3 Megjegyzés. Legyen adva egy K Sperner-rendszer az Ω felett. A 3.4 Algoritmus segitségével ellenőrizhetjük, hogy K telitett-e, tartalmazó-e vagy egyesitett-e.

4.2 A k-elemü minimális kulcsok rendszerei

Számos dolgozat [41], [44] becsüli az adott Sperner-rendszert reprezentáló minimális relációk sorainak számát speciális esetekben. Jelölje L_k^n az Ω n-elemü halmaz összes

k-elemü halmazainak rendszerét.

Az 1.9 Definició szerint legyen $s(K)=\min\{m:K=K_R, |R|=m, R$ az Ω feletti reláció$\}$. Azaz $s(K)$ a K-t reprezentáló minimális reláció sorainak száma. Legyen $F_k(n)=\max\{s(K):K\subseteq L_k^n, |\Omega|=n\}$ (Lásd 1.18 Tételt). [44]-ben vizsgálták az $s(L_k^n)$-kat. Ebben a részben a nagy $s(K)$-kat becsüljük. Nyilván $F_1^{(n)}=2$.

4.5 Definició. Legyen N a természetes számok halmaza. Definiáljuk $f_{2k-1} : N \to N$ függvényt igy:

$$f_{2k-1}^{(n)} = \begin{cases} \binom{2k-1}{k-1}^{\frac{n}{2k-1}} & \text{ha } n\equiv 0 \pmod{(2k-1)}, \\ \binom{2k-1}{k-1}^{[\frac{n}{2k-1}]-1} \times \binom{2k-1+p}{k-1} & \text{ha } n\equiv p \pmod{(2k-1)} \text{ és } 1\leq p\leq k-1, \\ \binom{2k-1}{k-1}^{[\frac{n}{2k-1}]} \times \binom{p}{k-1} & \text{ha } n\equiv p \pmod{(2k-1)} \text{ és } k\leq p\leq 2k-2; \end{cases}$$

és $f_{2k-2} : N \to N$ függvényt a következőképpen

$$f_{2k-2}^{(n)} = \begin{cases} \binom{2k-2}{k-1}^{\frac{n}{2k-2}} & \text{ha } n\equiv 0 \pmod{(2k-2)}, \\ \binom{2k-2}{k-1}^{[\frac{n}{2k-2}]-1} \times \binom{2k-2+p}{k-1} & \text{ha } n\equiv p \pmod{(2k-2)} \text{ és } 1\leq p\leq k-1, \\ \binom{2k-2}{k-1}^{[\frac{n}{2k-2}]} \times \binom{p}{k-1} & \text{ha } n\equiv p \pmod{(2k-2)} \text{ és } k\leq p\leq 2k-3. \end{cases}$$

Világos, hogy $2k-1$ és $2k-2\leq n$.

Legyen $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ és $\Omega=\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_m\cup W$ az Ω particiója,

ahol $m=[\frac{n}{2k-1}]$ és $|\Omega_i|=2k-1$ $(1\leq i\leq m)$. Legyenek

$K=\{B:|B|=k,\ B\subseteq\Omega_i,$ valamely $i\}$ ha $|W|=0$,

$K=\{B:|B|=k,\ B\subseteq\Omega_i$ (valamely i: $1\leq i\leq m-1$), vagy $B\subseteq\Omega_m\cup W\}$ ha $1\leq|W|\leq k-1$,

$K=\{B:|B|=k,\ B\subseteq\Omega_i$ (valamely i: $1\leq i\leq m$), vagy $B\subseteq W\}$ ha $k\leq|W|\leq 2k-2$.

Könnyen belátható, hogy K egy Sperner-rendszer az Ω felett

és $K^{-1}=\{A:|A\cap\Omega_i|=k-1,\ \forall i\}$ ha $|W|=0$,

$K^{-1}=\{A:|A\cap\Omega_i|=k-1 (\forall i:1\leq i\leq m-1)$ és $|A\cap(\Omega_m\cup W)|=k-1\}$ ha $1\leq|W|\leq k-1$,

$K^{-1}=\{A:|A\cap\Omega_i|=k-1 (\forall i:1\leq i\leq m)$ és $|A\cap W|=k-1\}$ ha $k\leq|W|\leq 2k-2$.

Világos, hogy $f^{(n)}_{2k-1}=|K^{-1}|$.

Analóg módon legyen $\Omega=\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_m\cup W$ az Ω particiója, ahol

$m=[\frac{n}{2k-2}]$ és $|\Omega_i|=2k-2$ $(\forall i:1\leq i\leq m)$.

Legyenek $K=\{B:|B|=k,\ B\subseteq\Omega_i,$ valamely $i\}$ ha $|W|=0$,

$K=\{B:|B|=k,\ B\subseteq\Omega_i$ (valamely i:$1\leq i\leq m-1$) vagy $B\subseteq\Omega_m\cup W\}$ ha $1\leq|W|\leq k-1$,

$K=\{B:|B|=k,\ B\subseteq\Omega_i$ (valamely i:$1\leq i\leq m$) vagy $B\subseteq W\}$ ha $k\leq|W|\leq 2k-3$.

Könnyen belátható, hogy $f^{(n)}_{2k-2}=|K^{-1}|$ és nyilvánvaló, hogy

$$\binom{s(K)}{2}\geq f^{(n)}_{2k-2}\geq\binom{2k-2}{k-1}^{[\frac{n}{2k-2}]}$$

Az 1.13 Tétel miatt és az $F_k(n)$ definiciója szerint azt kapjuk, hogy

$$F^{(n)}_k\geq\sqrt{2f_{2k-2}(n)}\geq\sqrt{2}\binom{2k-2}{k-1}^{\frac{1}{2}[\frac{n}{2k-2}]}$$

Most finomabban becsüljük $F_k(n)$-t.

Nyilvánvaló, hogy mindig konstruálhatunk ilyen K Sperner-rendszereket.

4.6 Tétel. Legyen $\Omega=\{a_1,\dots,a_n\}$. Ekkor Ha $n\equiv 0(\mathrm{mod}(2k-2)(2k-1))$, akkor $f_{2k-1}(n)>f_{2k-2}(n)$. Ha fixáljuk k-t, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{2k-1}(n)}{f_{2k-2}(n)}=\infty.$$

Bizonyitás. Ha k=2, akkor könnyen belátható, hogy $\forall n: f_3(n)\geq f_2(n)$, ha n=6 vagy $n\geq 8$, akkor $f_3(n)>f_2(n)$.

Legyen $E=\dfrac{\binom{2k-1}{k-1}^{\frac{n}{2k-1}}}{\binom{2k-2}{k-1}^{\frac{n}{2k-2}}}=\dfrac{\left(\frac{2k-1}{k}\right)^{\frac{n}{2k-1}}}{\binom{2k-2}{k-1}^{\frac{n}{(2k-2)(2k-1)}}}$

Tudjuk, hogy $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, itt $0<\theta_n<1$.

Igy

$$E\geq\frac{\left(\frac{2k-1}{k}\right)^{\frac{n}{2k-1}}}{\left(\frac{e^{\frac{\theta_n}{12(2k-2)}}}{\sqrt{\pi(k-1)}}\right)^{\frac{n}{(2k-2)(2k-1)}}\cdot 2^{\frac{n}{2k-1}}\left(\frac{e^{\frac{1}{24(k-1)}}}{\sqrt{\pi(k-1)}}\right)^{\frac{n}{(2k-2)(2k-1)}}}\geq\frac{\left(1-\frac{1}{2k}\right)^{\frac{n}{2k-1}}}{\dots}=F$$

$$\ln F=\frac{n}{2k-1}\left(\ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k-2}\left(\frac{1}{2}\ln(\pi(k-1))-\frac{1}{24(k-1)}\right)\right)=T$$

$\left|\ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right|\leq\frac{1}{2k-1}$ miatt

$$T\geq\frac{n}{2k-1}\left(\frac{1}{2k-2}\left(\frac{1}{2}\left(\ln(\pi(k-1))-\frac{1}{24(k-1)}\right)\right)-\frac{1}{2k-1}\right)$$

Belátható, hogy ha $k=3$, akkor $\frac{1}{2k-2}\left(\frac{1}{2}\ln(\pi(k-1)) - \frac{1}{24(k-1)}\right) - \frac{1}{2k-1} > 0$ és $k \geq 4$, ekkor $\frac{1}{2}\ln(\pi(k-1)) - \frac{1}{24(k-1)} > 1$. Tehát

$\frac{1}{2k-2}\left(\frac{1}{2}\ln(\pi(k-1)) - \frac{1}{24(k-1)}\right) - \frac{1}{2k-1} > 0$. Azaz ha $n \equiv 0 \pmod{(2k-2)(2k-1)}$, akkor $f_{2k-1}(n) > f_{2k-2}(n)$.

Most legyen n tetszőleges természetes szám, k rögzitett.

Ekkor létezik olyan M szám, amelyre $0 < M$ és

$$\frac{\binom{2k-1+p}{k-1}}{\binom{2k-1}{k-1}^{1+\frac{p}{2k-1}}} < M, \quad \frac{\binom{p}{k-1}}{\binom{2k-1}{k-1}^{\frac{p}{2k-1}}} < M, \quad \frac{\binom{2k-2+p}{k-1}}{\binom{2k-2}{k-1}^{1+\frac{p}{2k-2}}} < M \text{ és } \frac{\binom{p}{k-1}}{\binom{2k-2}{k-1}^{\frac{p}{2k-2}}} < M.$$

Látható, hogy $\ln F_n \to \infty$ miatt $E \to \infty$ $(n \to \infty)$. Azaz

$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{2k-1}}{f_{2k-2}} = \infty$ (könnyen belátható, hogy ez $k=2$-re is igaz.)

Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

A 4.6 Tétel és 1.13 Tétel szerint nyilván igaz az alábbi:

<u>4.2 Következmény</u>. Legyen $\Omega=\{a_1,\ldots,a_n\}$ és L_k^n az Ω összes k-elemü halmazainak rendszere.

Legyen továbbá $F_k(n) = \max\{ s(K) : K \subseteq L_k^n, |\Omega| = n\}$.

Ekkor $F_k(n) \geq \sqrt{2\, f_{2k-1}(n)}$.

4.4 Megjegyzés. A 4.6 Tételben legyen k=2. Ekkor azt kapjuk, hogy $n-1 \leq |K| \leq n+1$ és $f_3(n) > 3^{\frac{n}{4}}$, ahol $|\Omega| = n$. Azaz $|K^{-1}| > 3^{\frac{n}{4}}$. Tehát mindig konstruálhatunk olyan példát, amelyben K elemeinek száma (a minimális kulcsok száma) legfeljebb n+2, de K^{-1} elemeinek száma exponenciálisan függ $|\Omega|$-tól.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Aho, A.V. Beeri, C., Ullman, J.D., The theory of joins in relational datab[illegible]s. ACM Trans. Database Syst. 4,3 (1979) pp. 297-314.

2. Aho, A.V., Hofcroft, J.E., Ullman, J.D.,: The design and analysis of computer algorithms. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

3. Arató, M., Benczur, A.: Dynamic placement of records and the classical occupancy problems. Comp. and Math. with Appls. 7(1981) pp. 173-185.

4. Arató, M., Benczur, A.: A general treatment of rearrangement problems in a linear storage. Performance Evaluation. 2(1982) pp. 108-117.

5. Armstrong, W.W.: Dependency structures of data base relationships. Information Processing 74, North-Holland Publ. Co.(1974) pp. 580-583.

6. Armstrong, W.W.: On the generation of dependency structures of relational databases. Publication 272, Université de Montreal (1977).

7. Armstrong, W.W., Delobel, C., Decompositions and functional dependencies in relations. ACM Trans. Database Syst. 5,4(1980) pp. 404-430.

8. Beeri, C., Dowd, M., Fagin, R., Statman, R.: On the structure of Armstrong relations for functional dependencies. J. ACM vol. 31, No. 1 (1984) pp 30-46.

9. Beeri, C.: On the membership problem for functional and multivalued dependencies in relational databases. ACM Trans. Database Syst. 5,3(1980) pp 241-259.

10. Beeri, C., Bernstein, P.A.: Computational problems related to the design of normal form relational schemas. ACM Trans. Database Syst. 4,1(1979) pp 30-59.

11. Beeri, C., Fagin, R., Howard, J.H.: A complete axiomation for functional and multivalued dependencies in database relations. Proc. ACM SIGMOD. Int. Comp. on Manage. of Data, Toronto, Canada(1977) pp 47-61.

12. Beeri, C., Honeyman, P.: Preserving functional dependencies. SIAM J. Comput. ,3 (1981) pp. 647-656.

13. Beeri, C., Mendelson, A.O., Sagiv, Y., Ullman, J.D.: Equivalence of relational database schemes. SIAM J. Comp. 10,2(1981) pp 352-370.

14. Beeri, C., Vardi, M.Y.: Formal systems for tuple and equality generating dependencies. SIAM J. Comput. 13,1(1984) pp. 76-98.

15. Beeri, C., Vardi, M.Y.: A proof procedure for data dependencies. J. ACM 31,4(1984) pp. 741.

16. Békéssy, A., Demetrovics, J.: Contribution to the theory of data base relations. Discrete Mathematics 27(1979) pp. 1-10.

17. Békéssy, A., Demetrovics, J., Hannák, L., Frankl, P., Katona, Gy.: On the number of maximal dependencies in data base relation of fixed order. Discrete Math. 30(1980) pp. 83-88.

18. Benczur, A.: Problems in modelling of data base performance. Perspectives in Developing Computer Technics. Moscow. URSS. 1983. pp. 85-98.

19. Benczur, A., Stahl, J.: Egy nagyméretü adatrendszer karbantartásának vizsgálata. Alkalm. Mat. Lapok.10(1984) pp. 1-13.

20. Benczur, A.: Az információ mérése relációs adatbázisokban. Alkalmazott Mat. Lapok(Megjelenés alatt)

21. Bernstein, P.A.: Synthesizing third normal form relations from functional dependencies. ACM Trans. Database Syst. 1,4(1976) pp. 277-298.

22. Burosch, G., Demetrovics, J., Katona, Gy.: The poset of closures. ORDER (megjelenés alatt)

23. Codd, E.F.: A relational model of data for large shared data banks. Communication of the ACM 13,6(1970)377-384.

24. Codd, E.F.: Recent investigations in relational data base systems. Information Processing 74. North-Holland Publ. Co. (1974) pp. 1017-1021.

25. Codd, E.F.: Extending the Data base relational model to capture more meaning. ACM Trans. Database Syst. 4,4 (1979) pp. 397-434.

26. Czédli, G.: Függőségek relációs adatbázis modellben. Alkalmazott Matematikai Lapok 6(1980) pp. 131-143.

27. Delobel, C., Casey, R.G.: Decomposition of a database and the theory of Boolean switching functions. IBM J. Res. and Develop. 17(1972) pp. 374-386.

28. Delobel, C., Casey, R.G.: Comment on "Decomposition of a database and the theory of Boolean switching functions" IBM J. Res.and Develop. 21,5 (1977) pp.484-485.

29. Delobel, C.: Normalization and hierarchical dependencies in the relational data model. ACM Trans. Database Syst. 3,3(1978) pp. 201-222.

30. Demetrovics, J.: Homogén file kulcsairól. Alkalmazott Matematikai Lapok 3(1977) pp.185-191.

31. Demetrovics, J.: Relációs adatbázis modell. MTA SZTAKI Közlemények, Budapest 20(1978) pp. 21-33.

32. Demetrovics, J.: On the number of candidate keys. Informations Processing Letters 7,6(1978) pp. 266-269.

33. Demetrovics, J.: On the equivalence of candidate keys with Sperner-systems. Acta Cybernetica 4,3(1979) pp. 247-252.

34. Demetrovics, J.: Candidate keys and antichains. SIAM J. Alg. Disc. Math. 1.1 (1980) pp 92.

35. Demetrovics, J.: Relációs adatmodell logikai és strukturális vizsgálata. MTA SZTAKI Tanulmányok, Budapest, 114(1980) pp 1-97.

36. Demetrovics, J., Gyepesi, Gy.: Általános függések és lekérdezéssel kapcsolatos algoritmusok relációs adatmodellben. MTA SZTAKI Tanulmányok, Budapest, 118(1981) pp. 1-55.

37. Demetrovics, J., Gyepesi, Gy.: Relációs adatmodell funkcionális függőségeinek általánositása. Alkalmazott Matematikai Lapok 6(1980) pp. 313-322.

38. Demetrovics, J., Gyepesi, Gy.: On the functional dependency and some generalizations of it. Acta Cybernetica, 5,3(1981) pp. 295-305.

39. Demetrovics, J., Thi, V.D.: Some results about functional dependencies.

40. Demetrovics, J., Gyepesi, Gy.: Logical dependencies in relational database. MTA SZTAKI Tanulmányok, Budapest, 113(1980) pp. 59-78.

41. Demetrovics, J., Katona, G.O.H.: Extremal combinatorial problems in relational data base.

42. Demetrovics, J., Füredi, Z., Katona, Gy.: A függőségek és az individumok száma közötti kapcsolat összesitett adatrendszerek esetén. Alkalmazott Matematikai Lapok 9(1983) pp 13-21.

43. Demetrovics, J., Gyepesi, Gy.: A note on minimal matrix reprezentation of closure operations. Combinatorica 3,2(1983) pp 177-179.

44. Demetrovics, J., Füredi, Z., Katona, G.O.H.: Minimal matrix reprezentation of closure operations.

45. Demetrovics, J., Gyepesi Gy.: Some generalized type functional dependencies formalized as equality set on matrices. Discrete Applied Math. 6(1983), North-Holland Publ. Co.

46. Fagin, R.: Functional dependencies in a relational database and propositional logic. IBM J. Res. and develop. 21,6(1977)5 34-544.

47. Fagin, R.: Multivalued dependencies and a new normal form for relational databases. ACM Trans. Database Syst. 2,3(1977) pp 262-278.

48. Fagin, R.: Normal forms and relational database operators. Proc. ACM SIGMOD Int, Symp. Manag. Data (1979) pp. 153-160.

49. Fagin, R.: Horn clauses and Database dependencies J. ACM 29,4 (1982) pp. 952-985.

50. Fagin, R.: A normal form for relational databases that is based on domains and keys. ACM Trans. Database Syst. 6,3(1981)pp. 387-415.

51. Fagin, R.: Armstrong databases. Proceeding 7th IBM Symp. Math. Found. of Comput. Scien., Japan (1982).

52. Ginsburg, S., Zaiddan, S.M.: Properties of functional dependency families. J. ACM 29,3(1982) pp 678-698.

53. Kleitman, D.J.: Extremal properties of collections of subsets containing no two sets and their union. J. Combinatorial Theory (A) 20(1976) pp. 390-392.

54. Lien, Y.E.: On the equivalence of database models. J.ACM 29,2(1982) pp 333-362.

55. Lucchesi, C., Osborn, S.L.: Candidate keys for relations. J. Comput. and Syst. Sciences 17(1978) pp. 270-279.

56. Maier, D.: Minimum covers in the relational database model. J. ACM 27,4(1980) pp. 664-674.

57. Maier, D., Mendelzon, A.O., Sadri, F.. Ullman, F.D.: A dequacy of decompositions of relational databases. J. Comput. Syst. Sciences 21(1980) pp. 368-379.

58. Paradaens, J.: Transitive dependencies in a database scheme. Techn. Rep. R387, MBLE, Brussels, Belgium (1979).

59. Rissanen, J.: Independent Components of relations. ACM Trans. Database Syst. 2,4(1974) pp 317-325.

60. Rissanen, J.: Relations with functional a join dependencies and their representation by independent components. Unpublished manuscript, IBM, San Jose, Calif.(1978).

61. Sadri, F., Ullman, J.D.: The theory of functional and template dependencies. Theoret. Comput. Science 17(1982) pp. 317-331.

62. Sagin, Y., Walecka, S.F.: Subset dependencies and a completeness result for a subclass of embedded multi-valued dependencies. J.ACM 29,1(1982) pp. 103-117.

63. Tanaka, K., Kambayashi, Y., Yajima, S.: Properties of embedded multivalued dependencies in relational databases. J. IECE Japan E 62,8(1979).

64. Thalheim, B.: Зависимости в реляционных структурах данных. Acta Cybernetica 7,1(1985) pp. 115-125.

65. Ullman, J.D.: Principles of database systems. Computer Science Press, Second edition(1982).

66. Vu Duc Thi: Remarks on closure operations.
MTA SZTAKI Közlemények, Budapest 30(1984) pp. 73-87.

67. Vu Duc Thi: Some special Sperner-systems.
MTA SZTAKI Közlemények, Budapest 32 (1985) pp. 163-174.

68. Vu Duc Thi: Algorithms for finding minimal keys and antikeys of relational database. MTA SZTAKI Közlemények 33(1985) pp. 113-143.

69. Vu Duc Thi: Minimal keys and antikeys.
Acta Cybernetica Tom. 7, Fac 2, (1986) pp. 261-271.

70. Vu Duc Thi: Remarks on dual dependencies.
MTA SZTAKI Közlemények, Budapest, 34(1986) pp 91-104.

71. Vu Duc Thi: On strong operations.
MTA SZTAKI Közlemények, 34(1986) pp 113-122.

72. Vu Duc Thi: Relációs adatmodell antikulcsairól.
Alkalmazott Matematikai Lapok (mejelenés alatt).

73. Vu Duc Thi: On the connection between minimal keys and relations, Proc. of the conference of socialist states on Computer Science (KNVVT), Budapest May (1986)

74. Vu Duc Thi: Logical dependencies and irredundant relations. J. of Comput, Art. Intell. Czechoslovak (megjelenés alatt).

75. Vu Duc Thi: Strong dependencies and s-semilattices.
Acta Cybernetica (Megjelenés alatt)

76. Vu Duc Thi: Some results about prime attributes.
MTA SZTAKI Közlemények, 35 (1986).

77. Yannakakis, M., Paradimitriou, C.: Algebraic dependencies.
J.Comput. Syst. Sciences 25(1982) pp. 2-41.

78. Zaniolo, C.: Analysis and design of relational schemata for database systems. Doctoral dissertation, UCLA (1976).

1986-BAN EDDIG MEGJELENTEK:

179/1986 Terlaky Tamás: Egy véges criss-cross módszer és alkalmazásai

180/1986 K.N. Čimev: Separable sets of arguments of functions

181/1986 Renner Gábor: Kör approximációja a számitógépes geometriai tervezésben

182/1986 Proceedings of the Joint Bulgarian-Hungarian Workshop on "Mathematical Cybernetics and Data Processing" Scientific Station of Sofia University, Giulecica /Bulgaria/, May 6-10, 1985 /Editors: J. Denev, B. Uhrin/ Vol I

183/1986 Proceedings of the Joint Bulgarian-Hungarian Workshop on "Mathematical Cybernetics and Data Processing" Scientific Station of Sofia University, Giulečica /Bulgaria/, May 6-10, 1985 /Editors: J. Denev, B. Uhrin/ Vol II

184/1986 HO THUAN: Contribution to the theory of relational databases

185/1986 Proceedings of the 4th International Meeting of Young Computer Scientists IMICS'86 /Smolenice, 1986/ /Editors: J. Demetrovics, J. Kelemen/

186/1986 PUBLIKÁCIÓK - PUBLICATIONS 1985 Szerkesztette: Petróczy Judit

187/1986 Proceedings of the Winter School on Conceptual modelling /Visegrád, 27-30 January, 1986/ /Editors: E. Knuth, A. Márkus/

188/1986 Lengyel Tamás: A cluster analizis néhány kombinatorikai és valószinüségszámigási problémája

189/1986 Bernus Péter: Gyártórendszerek funkcionális analizise

190/1986 Hernádi Ágnes: A tipus fogalma és szerepe a modellezésben. Absztrakt adattipusok alkalmazásának uj elveiről

Készült az Országos Széchényi Könyvtár
Sokszorosító üzemében, Budapest
320 példányban, 21 A/5 ív terjedelemben
Felelős vezető: Rosta Lajosné
Munkaszám: 87 001