tanulmányok

183/86

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

Computer and Automation Institute Hungarian Academy of Sciences
Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete

PROCEEDINGS OF THE JOINT BULGARIAN-HUNGARIAN WORKSHOP ON "MATHEMATICAL CYBERNETICS AND DATA PROCESSING"

Scientific Station of Sofia University, Giulečica
(Bulgaria), May 6-10, 1985

V O L I

Studies 182/1986
Tanulmányok 182/1986

A kiadásért felelős:

Dr. KEVICZKY LÁSZLÓ

Editors:
Szerkesztők:

J. DENEV,
B. UHRIN

Főosztályvezető:

DEMETROVICS JÁNOS

ISBN 963 311 211 7
ISSN 0324-2951

F O R E W O R D

The second Bulgarian-Hungarian Joint Workshop entitled *"Mathematical Cybernetics and Data Processing"* was held at the Scientific Station of Sofia University *"Giulečica"* between May 6-10, 1985. About 30 researchers from the following institutions attended the workshop:

- Centre of Mathematics and Mechanics of the Bulgarian Academy of Sciences, Division of Foundations of Cybernetics & Control Theory, Laboratory of Mathematical Linguistics;
- Computer and Automation Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Division of Computer Science;
- Blagoevgrad Pedagogical Institute, Blagoevgrad;
- Central Institute of Computer Technics, Sofia.

Although the workshop lasted a few days only and the number of participants was not too large, an intensive work went on.
The themes involved were from the field indicated by the title of the workshop.
The papers presented at the workshop can be classified into four main subfields as follows:

- mathematical cybernetics;
- mathematical linguistics;
- computer and software architecture;
- data bases.

The present proceedings contains papers presented at the workshop. Because of the great number of papers, we divided the proceedings into two volumes, the first containing papers from the field of math. cybernetics and math. linguistics and the second one from those of comp. and software architecture and data bases.
The beautiful surroundings of the station *"Giulečica"* (the Rila mountains) and an excellent weather contributed substantially to the success of the workshop. The same can be said about the station itself.
We thank everybody who took part in the organisation of this pleasent and succesful meeting.

The organizing committee

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вторая рабочая конференция "МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА И ОБРАБОТКА ДАННЫХ" состоялась в Научной станции Софийского университета "Гюлечица" с 6 по 10 мая 1985 г. В работе конференции участвовало свыше 30 научных работников из

- Единого центра математики и механики Болгарской Академии наук: сектор "Основы кибернетики и теории управления" и лаборатория "Математическая лингвистика" - организаторы конференции;
- Исследовательский институт вычислительной техники и автоматизации Венгерской Академии наук;
- Высший педагогический институт, Благоевград;
- Центральный институт вычислительной техники, София;

Хотя время конференции было ограничено, а число участников не очень большое, была проведена весьма интенсивная работа, результатом которой является настоящий сборник докладов конференции.

Тематика работы следовала направлению сотрудничества между Институтом математики БАН и ИИВТА ВАН по теме "Математическая кибернетика и обработка данных", в рамках которой проводилась эта встреча. Работы можно объединить в следующие группы:

- математическая кибернетика;
- математическая лингвистика;
- компьютерные и софтверные архитектуры;
- базы данных.

Этот сборник содержит в себе статьи прочитанные на конференции. Число статей было так велико, что сборник надо было разделить на два тома. Первый том содержит статьи принадлежащие к мат. кибернетике и мат. лингвистике, а второй - принадлежащие к компьютерной и софтверной архитектуре и базам данных.

Великолепная картина Рилских и Пиринских гор и прекрасная погода принесла весьма ощутимый вклад в успех конференции, которая заключилась не только в богатой программе, но и в установлении и поддержке дружественных контактов, которые происходили везде на заседаниях, во время прогулок и товарищеских встречах.

Внимательная забота персонала Научной станции обеспечила все условия и можно сказать даже комфорт для проведения работы встречи.

Благодаря коллегам из Благоевграда была получена возможность устроить экскурсию в один из самых красивых уголков Болгарии - горы Пирин.

Оргкомитет

CONTENT СОДЕРЖАНИЕ

VOL I

MATHEMATICAL CYBERNETICS Page

MATHEMATICAL LINGUISTICS

MATHEMATICAL CYBERNETICS

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 11-20

STRONGLY ESSENTIAL VARIABLES AND SEPARABLE SETS OF ARGUMENTS OF FUNCTION

K.N. ČIMEV

Pedagogical Institute - Blagoevgrad
Bulgaria

This paper treats properties of functions with regard to their separable sets of arguments and under definite conditions for the set of the strongly essential variables.

Terminology and symbols of [1 - 7] have been used.

A variable x_i, $1 \leq i \leq n$, is called essential for the function $f(x_1, \ldots, x_n)$ if there exist values c_k for x_k $(k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ such that $f(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ takes on at least two distinct values (see [1]).

The set of all essential variables of f will be denoted by R_f.

Let $R \subseteq R_f$. A variable $x_i \in R$ is said to be strongly essential for f with respect to R if there exist values c_i for x_i such that

$$f(x_i = c_i) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

depends on each variable belonging to R (except x_i).

A variable of f which is strongly essential with respect to R_f is called strongly essential for f .

The set of all strongly essential variables of f will be denoted by R_f^* .

Functions obtainable from f by replacing some variables of f by constants are called subfunctions of f . A subfunction g of f is proper, if $g \neq f$; then we write $g \prec f$.

If f is a function and the set $R \subseteq R_f$, $(R \neq \emptyset)$, then R is called separable for f, if $R = R_f$, or $R \neq R_f$ and for the variables from $R_f \setminus R$ there exist values such that after they are replaced by them we get a subfunction from f which depehds essentially on all variables from R .

We shall mark with S_f the set of all separable sets of arguments of the function f.

If $f(x_1, \ldots, x_n)$ is a function and

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\} \in S_f ,$$

then we shall say in addition that m-tuple $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ is separable for f .

A pair of (distinct) variables (x_i, x_j) is separable for f, if the set $\{x_i, x_j\}$ is separable for f.

By an order of the variable x_i for the function $f(x_1, \dots, x_n)$ with respect to the separable m-tuples $(2 \leqq m \leqq n)$ we shall understand the number of m-elemental sets which are separable for f and contain x_i.

A variables x_i is said to be of order r for f, if there exist exactly r separable pairs for f having x_i as a member.

We shall call the hypergraph with vertices the essential variables of the function $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ and with edges the set of separable m-tuples for f a hypergraph of f with respect to the separable m-tuples.

In case of $m = 2$ we shall speak of a graph of a function.

Let f be a function for which

$$|R_f \setminus R_f^*| \neq 0,$$

and

$$R^* = M_1 \cup M_2, \quad M_1 \neq \emptyset, \quad M_2 \neq \emptyset.$$

Under these conditions the following four theorems are valid.

Theorem 1. If the subgraph of f with vertices the elements of M_1 is full $(|M_1| \geqq 2)$ and $M_2 \in S_f$, then for each $x_i \in M_1$ and for each $x_j \in R_f \setminus R_f^*$,

$$\{x_i, x_j\} \in S_f .$$

This theorem can be proved on the basis of theorem 2 from [4] and theorem 5 from [6].

Theorem 2. If for each $i = 1, 2$ the subgraph of f with vertices the elements of M_i is full and $M_1, M_2 \in S_f$, then for each variable $x_i \in R_f \setminus R_f^*$ and for each variable $x_j \in R_f \setminus \{x_i\}$ the set $\{x_i, x_j\} \in S_f$.

Theorem 2 can be proved on the basis of theorem 2 from [4], theorem 5 from [6] and theorem I from this paper.

Corollary I. Under the conditions of theorem 2, if $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, then the number of separable pairs of the function $f(x_1, \dots, x_n)$ will be equal to $C_n^2 - |M_1|\,|M_2| + k$, where k is the number of separable pairs which form between the elements of M_1 and the elements of M_2.

Corollary 2. If the function $f(x_1, \dots, x_n)$ from order $n \geqq 4$ has exactly three strongly essential variables between which exactly $k\ (1 \leqq k \leqq 3)$ separable pairs form, then the number of separable pairs of f is equal to $C_n^2 + k - 3$.

Corollary 3. Let the function $f(x_1, \dots, x_n)$ from order $n \geqq 5$ have exactly four strongly essential variables.

a) If the subgraph of f with vertices the strongly essential variables of f is from the type fig, I, 2, 3, 4, 5, 6, then the number of separable pairs of f is equal to $C_n^2 - 4, C_n^2 - 3, C_n^2 - 2, C_n^2 - 1, C_n^2, C_n^2 - 2$ correspondingly;

b) If three of the strongly essential variables form a separable set and the subgraph of f with vertices the elements of R_f^* is from the type fig. 7, then the number of the separable pairs of f is equal to $C_n^2 - 3$.

fig.I

fig. 2

fig.3

fig.4

fig.5

fig.6

fig.7

Corollary 4. Under the conditions of theorem 2, if $M_1 \cap M_2 = \phi$

and no separable pairs form between the elements of M_1 and M_2 then every one of the sets M_1, M_2 is C-strongly essential for f.

Theorem 3. If $M_1, M_2 \in S_f$, then for each choice of variables $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$ from $R_f \setminus R_f^*$ and for each choice of their values $c_{i_1}, \dots, c_{i_p}$, if the function $f(x_{i_1} = c_{i_1}, \dots, x_{i_p} = c_{i_p})$ depends essentially on all variables from $M_1 (M_2)$, then it depends essentially on all variables from $(R_f \setminus R_f^*) \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$ and it does not depend essentially on at least one variable from $M_2 (M_1)$.

This theorem can be proved by using theorem 2 from [4].

Many corollaries follow from theorem 3, e. g.

Corollary I. Let $f(x_1, \dots, x_n)$ be a function from order $n \geq 5$ for which the only strongly essential variables are x_1, x_2, x_3 and between them only the separable pair (x_1, x_2) forms. In this case for each variable x_i, $4 \leq i \leq n$, and for each value c_i for which $f_1 = f(x_i = c_i)$ depends essentially on x_3., the function f_1 does not depend essentially on at least one of the variables x_1, x_2 and depends essentially on each one of the variables x_j, $4 \leq j \leq n$, $j \neq i$.

Corollary 2. Let $f(x_1, \dots, x_n)$ be a function from order $n \geq 6$, for which the only strongly essential variables are x_1, x_2, x_3, x_4 and only two separable pairs (x_1, x_2) and (x_3, x_4) form between them. In this case for each variable x_i, $5 \leq i \leq n$ and for each value c_i for which $f_1 = f(x_i = c_i)$ depends essentially on x_3 and x_4, the function f_1 does not depend essentially on at least one of the variables x_1, x_2 and depends essentially on each one of the variables x_j, $5 \leq j \leq n$, $j \neq i$.

Theorem 4. If $M_1, M_2 \in S_f$, then for each set R $(R \subseteq R_f \setminus R_f^*)$ the sets $R \cup M_1$ and $R \cup M_2$ are separable for f.

This theorem can be proved on the basis of theorem I from [7].

Corollary I. Under the conditions of theorem 4 if $|M_1| = 1$ or $|M_2| = 1$, then for the function f each unempty subset of the set $R_f \setminus (M_1 \cup M_2)$ is separable.

Theorem 5. Let f be a function for which $|R_f| \geq 4$ and

$$R_f^* = M_1 \cup M_2, \quad M_1, M_2 \in S_f, \quad M_1 \neq \phi, \quad M_2 \neq \phi.$$

If g is a subfunction of f and $M_i \in S_g$, $1 \leq i \leq 2$, then for each set R $(R \subseteq R_f \setminus R_g^*)$ the set $M_i \cup R \in S_f$.

The theorem can be proved by using theorem I from [7], theorem 5 from [6] and theorem 2 from [4].

Corollary I. Under the conditions of theorem 5 for each subfunction g of f for which the set M_1 (M_2) is separable and g does not depend essentially on variables from M_2 (M_1), each set of variables containing all the variables from M_1 (M_2) is separable.

References

1. Яблонский, С.В. Функциональные построения в к-значной логике. Труды мат. и-та им. В.А.Стеклова, т.51,1958, 5-142.
2. Чимев, К.Н. Отделими множества от аргументи на функциите. Благоевград, 1982.
3. Чимев, К.Н. Функции и графи. Благоевград, 1983.
4. Čimev, K.N. On some properties of functions. Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, I98I, 97 - II0.
5. Деметрович, Я., Дь. Дьепеши. Генерирование функциональных зависимостей и их представление с помощью реляции. MTA SzTAKI Közlemények 24 (I980), 7 - I8.
6. Чимев, К.Н. О выделимых множеств аргументов функций. Sz TAKI Közlemények 24 (I980), I9 - 26.
7. Чимев, К. Н. О некоторых инвариантных свойствах функции. MTA Sz TAKI Közlemények 25 (I982), 35 - 48.

СИЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И ВЫДЕЛИМЫЕ МНОЖЕСТВА АРГУМЕНТОВ ФУНКЦИЙ

К. Н. Чимев

В П И – Благоевград

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются вопросы, связанные с сильно существенными переменными и выделимыми множествами аргументов функций.

Используется терминология из [1 – 7]. Пусть R_f – множество всех существенных переменных функции f ; R_f^* – множество всех сильно существенных переменных функции f ; S_f – множество всех выделимых множеств аргументов функции f .

Пусть f – функция, для которой

$$|R_f \setminus R_f^*| \neq 0$$

и

$$R_f^* = M_1 \cup M_2 \ , \quad M_1 \neq \emptyset, \quad M_2 \neq \emptyset.$$

При этих условиях доказаны теоремы 1, 2, 3, 4.

Теорема 1. Если подграф функции f с вершинами элементы множества M_1 полны $(|M_1| \geq 2)$ и $M_2 \in S_f$, тогда для каждого $x_i \in M_1$ и для каждого $x_j \in R_f \setminus R_f^*$ множество $\{x_i, x_j\}$ выделимо для f .

Теорема 2. Если для каждого $i = 1, 2$ подграф функции f с вершинами элементы множество M_i полны и $M_1, M_2 \in S_f$, тогда для каждого $x_i \in R_f \setminus R_f^*$ и для каждого $x_j \in R_f \setminus \{x_i\}$

множество $\{x_i, x_j\}$ выделимо для f .

Теорема 3. Если $M_1, M_2 \in S_f$, тогда для каждого выбора переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$ из множества $R_f \setminus R_f^*$ и для каждого значения $c_{i_1}, \dots, c_{i_p}$ для них, если функция $f(x_{i_1} = c_{i_1}, \dots, x_{i_p} = c_{i_p})$ зависит существенно от всех переменных от M_1 (M_2) , тогда она зависит существенно от всех переменных от $(R_f \setminus R_f^*) \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$ и не зависит существенно, хотя бы от одной из переменных от M_2 (M_1) .

Теорема 4. Если $M_1, M_2 \in S_f$, тогда для каждого множества R $(R \subseteq R_f \setminus R_f^*)$ для f выделимы множества $M_1 \cup R$ и $M_2 \cup R$.

Теорема 5. Пусть f функция, для которой $|R_f| \geq 4$ и

$$R_f^* = M_1 \cup M_2, \quad M_1, M_2 \in S_f, \quad M_1 \neq \emptyset, \quad M_2 \neq \emptyset.$$

Если g подфункция функции f и $M_i \in S_g$, $1 \leq i \leq 2$, тогда для каждого множества R $(R \subseteq R \setminus R_g^*)$ для g выделимое множество $R \cup M_i$.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 21-30

ПОДФУНКЦИИ ФУНКЦИЙ С ТРЕМЯ СИЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

К.Н.Чимев - И.Д.Гюдженов
Высший педагогический институт - Благоевград

В работе рассматривается свойства некоторых классов подфункций функций с тремя сильно существенными переменными, относящиеся к выделимым множествам аргументов.

Используется терминология из [1 - 5].

Если f функция, то множество ее существенных аргументов будем обозначат R_f .

Переменная $x_i \in R_f$ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(n \geq 2)$, $|R_f| = n$ называется сильно существенной для f , если существует значение c_i для x_i такое, что функция $f(x_i = c_i)$ зависит существенно от $n-1$ переменных.

Множество $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\} \subseteq R_f$ называется выделимым для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если существуют $n-m$ констант, таких что, при замене ими переменных из множества $R_f \setminus \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\}$ функция f существенно зависит от x_{i_1} , x_{i_2} , ..., x_{i_m}.

Лемма 1. Если для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ порядка $n \geq 4$ единственными сильно существенными переменными являются x_1 , x_2 , x_3 и между ними образуется только одна выделимая пара (x_2, x_3) , то не существует переменная x_i , $4 \leq i \leq n$, такая, что для любого значения c_i переменной x_i функция $f(x_i = c_i)$ зависела бы существенно от x_2 и x_3 и не существует переменная x_j , $4 \leq j \leq n$, такая, что для любого значения c_j переменной x_j функция $f(x_j = c_j)$

зависела бы существенно от x_1.

Доказательство. При данных условиях, если допустить противное, придем к выводу, что существует такая подфункция g функции f $(g \neq f)$, что $\{x_1, x_2, x_3\} \subseteq R_g$, что не является возможным.

Теорема 1. Пусть для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ порядка $n \geq 4$ единственными сильно существенными переменными являются x_1, x_2, x_3 и между ними образуется только одна выделимая для f пара (x_2, x_3).

В таком случае:

а/. Для любой подфункции функции f, которая существенно зависит от x_1 и не зависит существенно ни от x_2, ни от x_3 выделимо любое множество существенных переменных;

б/. Для любой подфункции функции f, которая не зависит существенно от x_1 и для которой пара (x_2, x_3) является выделимой для f, выделимо любое множество из двух существенных переменных и любое множество существенных переменных, содержащее хоть бы одну из переменных x_2, x_3.

Доказательство. а/. Пусть g -произвольная подфункция функции f не зависящая существенно ни от x_2, ни от x_3, но зависящая существенно от x_1. Пусть

$$g(x_1, x_4, \ldots, x_m) = f(x_2 = c_2, x_3 = c_3, x_{m+1} = c_{m+1}, \ldots, x_n = c_n)$$

где c_2, c_3, c_{m+1}, ..., c_n -некоторые значения аргументов x_2, x_3, x_{m+1}, ..., x_n.

Если $R_g = \{x_1\}$, то утверждение а/ верно. Поэтому рассмотрим случай, когда $|R_g| \geq 2$. Без ограничения общности, можно принять что $R_g = \{x_1, x_4, \ldots, x_m\}$, $4 \leq m \leq n$.

Для любого $i = 1, 4, 5, \ldots, m$ будем иметь $\{x_i\} \in S_g$.

Докажем, что для любого $i=4,5,\ldots,m$ множество $\{x_1,x_i\}\in S_g$. Например, докажем, что $\{x_1,x_4\}\in S_g$. Допустим противное. Тогда для любого значения C_4 для x_4 функция $g(x_4=C_4)$, а значит и функция $f(x_4=C_4)$ будет зависеть существенно от x_1, что противоречит лемме.

Докажем, что любое множество R существенных переменных для f, которое содержит x_1, выделимо для g.

Для случая $1\leqq|R|\leq 2$ это уже доказано. Допустим, что это верно для $|R|=k$, $k\geqq 2$. Докажем, что это верно и для $|R|=k+1$.

Пусть R^* -некоторое произвольное множество для которого:

$R^*\subseteq R_g$, $|R^*|=k+1$, $x_1\in R^*$.

Пусть $R^*=\{x_1,x_4,\ldots,x_{k+2},x_{k+3}\}$, $k+3\leqq m$.

Если $k+3=m$, то ясно что $R^*\in S_g$. Рассмотрим случай, когда $k+3\leq m-1$. Допустим, что $R^*\notin S_g$. Но по индуктивному предложению $R^*\setminus\{x_{k+3}\}\in S_g$. Таким оброзом, для любого значения C_{k+3} переменной x_{k+3} функция $g(x_{k+3}=C_{k+3})$, а следовательно и функция $f(x_{k+3}=C_{k+3})$ будет зависеть существенно от x_1, что не является возможным.

Мы доказали, что $R^*\in S_g$. Таким оброзом мы доказали рассматриваемое утверждение.

Докажем верность утверждение а/ для любого множества существенных переменных R, которое не содержит x_1.

При $|R|=1$ утверждение верно. Докажем его верность при $|R|=2$. Например, пусть $R=\{x_4,x_5\}\subseteq R_g$. Докажем, что $R\in S_g$. Пойдем от противного, т.е. допустим, что $R\notin S_g$. Но как уже доказали $\{x_1,x_4\}\in S_g$ и $\{x_1,x_5\}\in S_g$.

Следовательно, для любого значения C_5 переменной x_5

имеем $\{x_1, x_4\} \in S_{g(x_5=c_5)}$. Вот почему для любого значения c_5 переменной x_5 функция $f(x_5=c_5)$ должна существенно зависеть от x_1, что невозможно.

Допустим, что утверждение а/ верно для любого множества R существенных переменных всякой подфункции g функции f $(x_1 \in R_g;\ x_2, x_3 \notin R_g)$, при котором $|R| = k$ и $x_1 \notin R$. Докажем его верность для любого множества R^* существенных переменных любой подфункции g функции $f(x_1 \in R_g;\ x_2, x_3 \notin R_g)$, для которого $|R^*| = k+1$ и $x_1 \notin R^*$.

Для рассматриваемой подфункции g функции f допустим, что $R^* = \{x_4, x_5, \dots, x_{k+4}\}$, $k+4 \leq m$. Допустим, что $R^* \notin S_g$. Пусть

$$g_1 = \begin{cases} g, & \text{для } k+4 = m \\ g(x_{k+5} = c_{k+5}, \dots, x_m = c_m), & \text{для } k \leq m-5. \end{cases}$$

При этом $c_{k+5}, c_{k+6}, \dots, c_m$ такие значения x_{k+5}, x_{k+6}, $x_{k+7}, \dots, x_m$, что

$$\{x_1, x_4, \dots, x_{k+4}\} \in S_{g(x_{k+5}=c_{k+5}, \dots, x_m=c_m)}.$$

Выбор таких значений x_{k+5}, $x_{k+6}, \dots, x_m$ возможен согласно уже доказанному случаю. Следовательно $|R_{g_1}| = k+2$.

Поскольку мы предположили, что $R^* \notin S_g$, то $R^* \notin S_{g_1}$. Но g_1 является подфункцией f, которая зависит существенно от x_1 и не зависит существенно от x_2 и x_3. От индуктивного предложения следует, что $\{x_4, \dots, x_{k+3}\} \in S_{g_1}$. Тогда для любого значения c_{k+4} переменной x_{k+4} функция $g_1(x_{k+4}=c_{k+4})$, а следовател,но и $f(x_{k+4}=c_{k+4})$ будеть зависеть существенно от x_1, что не является возможным.

Этим утверждение а/ доказано.

б/. Рассмотрим случай, когда

$$g(x_2, x_3, x_4, \dots, x_m) = f(c_1, x_2, \dots, x_m, c_{m+1}, \dots, c_n)$$

и при этом $R_g = \{x_2, \dots, x_m\}$ и $\{x_2, x_3\} \in S_g$.

Естественно, для любого $i = 2, \dots, m$ будем иметь $\{x_i\} \in S_g$.

б$_1$/. Докажем, что для любого множества $R \subseteq R_g$, $|R| = 2$ имеем $R \in S_g$.

Докажем сначала, что для любого $i = 1,2$ и для любого $j = 4, 5, \dots, m$ множество $\{x_i, x_j\} \in S_g$.

Докажем, к примеру, что $\{x_2, x_4\} \in S_g$. Допустим, что $\{x_2, x_4\} \notin S_g$. Но $\{x_2, x_3\} \in S_g$. Следовательно для любого значения c_4 переменной x_4 функция $g(x_4 = c_4)$, а следовательно и $f(x_4 = c_4)$ будет зависеть существенно от x_2 и x_3, что невозможно.

Так как $\{x_2, x_3\} \in S_g$, то остается доказать, что для функции g выделима любая пара типа $\{x_i, x_j\}$, где $i, j \in \{4, \dots, m\}$.

Докажем например, что $\{x_4, x_5\} \in S_g$. Допустим противное. Но как уже доказали $\{x_2, x_4\} \in S_g$ и $\{x_3, x_4\} \in S_g$. Следовательно для любого значения c_5 переменной x_5 функция $g(x_5 = c_5)$, а значит и функция $f(x_5 = c_5)$ будет зависеть существенно от x_2 и x_3, что невозможно.

б$_2$/. Докажем, что для любого множества R существенных переменных функции g, которое содержит x_2 и x_3, выделимо для g.

Утверждение верно для $|R| = 2$, так как в этом случае $R = \{x_2, x_3\}$. Допустим, что оно верно для любого R существенных переменных функции g, которое содержит x_2 и x_3, и для которого $|R| = k \geq 2$. Докажем его истинность в случае $|R| = k+1$.

Пусть $R=\{x_2,x_3,x_4,\dots,x_{k+2}\}$, $k+2\leqq m$. Допустим, что $R\notin S_g$, Но от индуктивного предложения следует, что $R\setminus\{x_{k+2}\}\in S_g$. Вот почему, для любого значения c_{k+2} переменной x_{k+2} функция $g(x_{k+2}=c_{k+2})$, а значит и функция $f(x_{k+2}=c_{k+2})$ будет зависеть существенно от x_2 и x_3 , что невозможно.

б$_3$/. Докажем, что для функции g выделимо любое множество существенных переменных, которое содержит точно одну из переменных x_2 и x_3 .

Докажем истинность утверждения, например для множествь, которые содержит x_3 и не содержит x_2 .

Пусть $R\subseteq R_g$, $x_3\in R$, $x_2\notin R$. Для случая, когда $1\leqq|R|\leqq 2$ истинность утверждения была доказана. Рассмотрим случай, при котором $|R|\geqq 3$. Допустим, например, что $R=\{x_3,x_4,\dots,x_k\}$, $5\leqq k\leqq m$. Согласно случаю б$_2$/ множество $R\cup\{x_2\}\in S_g$. Тогда пусть

$$g_1(x_2,x_3,\dots,x_m)=\begin{cases} g, & \text{если } k=m;\\ g(x_{k+1}=c_{k+1},\dots,x_m=c_m), & \text{если } k\leqq m-1.\end{cases}$$

При этом c_{k+1}, $c_{k+2},\dots,c_m$ есть такие значения x_{k+1}, $x_{k+2},\dots,x_m$, что функция g_1 порядка $k-1$.

Докажем, что $R\in S_g$. Допустим противное. Тогда $R\notin S_{g_1}$. Пусть R' максимальное выделимое для g_1 ,подмножество R , которое содержит x_3 . Так как $R\notin S_{g_1}$, следует, что $R\setminus R'\neq\emptyset$. Пусть x_i $(4\leqq i\leqq n)$ какая-либо переменная множества $R\setminus R'$. Тогда при любом значении c_i переменной x_i функция $g_1(x_i=c_i)$, а следоватльно и функция $f(x_i=c_i)$ должна существенно зависеть от x_2 и x_3 , что невозможно.

Этим утверждением рассматриваемый случай доказан.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого значения c_1 переменной x_1 функция $f(x_1 = c_1)$ порядка $n-1$ и для этой функции выделимо любое множество из двух существенных переменных и любое множество существенных переменных, которое содержит хотя бы одну переменную x_2 и x_3.

Следствие 2. Для любых значениях c_2 и c_3 переменных x_2 и x_3 функция $f(x_2 = c_2, x_3 = c_3)$ порядка $n-2$ и для нее выделимо любое множество существенных переменных.

Лемма 2. Если для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ порядка $n \geq 4$ единственными сильно существенными переменными являются x_1, x_2, x_3 и между ними образуются только две выделимые пары (x_1, x_2) и (x_2, x_3), то не существует переменная x_i, $4 \leqq i \leqq n$, такая что при любого значения c_i переменной x_i функция $f(x_i = c_i)$ существенно зависит от x_1.

Теорема 2. Пусть для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ порядка $n \geq 4$ единственными сильно существенными переменными являются x_1, x_2, x_3 и между ними образуются точно две выделимые для f пары (x_1, x_2) и (x_2, x_3). При этих условиях верны следующие утверждения:

а/. Для любой подфункции функции f, которая существенно зависит от x_1 (x_3) и не зависит существенно от x_2 и x_3 (соответственно x_1 и x_2) выделимо любое множество существенных переменных;

б/ Для любой подфункции функции f, для которой выделима пара (x_1, x_2) (соответственно (x_2, x_3)) выделимо любое множество существенных переменных;

в/. Для любой подфункции функции f , которая зависит существенно от x_1 и x_2, как $(x_1,x_2) \notin S_g$ (от x_2 и x_3 как $(x_2,x_3) \notin S_g$) и которая не зависит существенно от x_3 (x_1) выделимо любое множество существенных переменных, которое не содержит x_2 ;

г/. Для любой подфункции функции f , которая существенно зависит от x_1 и x_3 и не зависит существенно от x_2 выделимо любое множество существенных переменных, которое не содержит хотя бы одну из пореметых x_1 , x_3 .

Следствие 1. Пусть для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ порядка $n \geq 4$ единственными сильно существенными переменными являются x_1 , x_2 , x_3 и между ними образуютсяточно две выделимые пары (x_1, x_2) и (x_2, x_3) . В таком случае для любого значения c_1 переменной x_1 , и для любого значения c_3 переменной x_3 для функций $f(x_1=c_1)$ и $f(x_3=c_3)$ выделимы все множества существенных переменных.

Лемма 3. Если для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ порядка $n \geq 4$ единственными сильно существенными переменными являются x_1 , x_2 , x_3 и подграф функции f с вершинами x_1 , x_2 , x_3 полон, то не существует переменная x_i , $4 \leq i \leq n$ такая что для любого значения c_i переменной x_i функция $f(x_i=c_i)$ существенно зависит от x_1 (x_2, x_3).

Теорема 3. Пусть для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ порядка $n \geq 4$ единственными сильно существенными переменными являются x_1 , x_2, x_3 и подграф функции f с вершинами x_1 , x_2 , x_3 полон, тогда:

а/. Для любой подфункции функции f , которая существенно зависит точно от одной из переменных x_1 , x_2 , x_3 выделимо любое множество существенных переменных;

б/. Для любой подфункции g функции f, которая существенно зависит точно от двух из переменных x_1, x_2, x_3, например x_1, x_2 и $(x_1,x_2)\in S_g$ выделимо любое множество существенных переменных;

в/. Для любой подфункции g функции f, которая существенно зависит точно от двух из переменных x_1, x_2, x_3, например, x_1, x_2 и $(x_1,x_2)\notin S_g$ выделимо любое множество существенных переменных, которое содержит не более одной из переменных x_1, x_2.

Доказательство теоремы 2 и теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский С.В., Функциональные построения в k-значной логике. Труды математического института им.В.А.Стеклова, т. 51, 1958, 5-142.
2. Чимев К.Н., Отделими множества от аргументи на функциите. Благоевград, 1983, 207 с.
3. Чимев К.Н., Функции и графи. Благоевград, 1983, 195 с.
4. Чимев К.Н., Об одном классе функций. Rostokor Mathematscen Kolloquim, 1982, 19, 9-17.
5. Чимев К.Н., И.Д. Гюдженов, Функции с три силно съществени променливи. Годишник на ВТУЗ, Приложна математика (в печати).
6. Чимев К.Н., Силно съществени и с-силно съществени променливи. Годишник на ВПИ - Благоевград, Математика. Т.1, кн.1, 1984 г.

THE SUBFUNCTIONS OF FUNCTIONS WITH THREE STRONGLY ESSENTIAL VARIABLES

K. N. Čimev, I. D. Gjudjenov

Abstract

The paper deals with the properties of some classes of subfunctions of functions with three strongly essential variables with respect to separable sets of arguments.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 31-35

О C-СИЛЬНО СУЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ P_k

И.Д.Гюдженов

Высший педагогический институт – Благоевград

Понятие C-сильно существенная переменная введено Чимевым К.Н. [2]. В ряде своих работ он исследует функций, которые имеют C-сильно существенные переменные. Найдены некоторые необходимые и достаточные условия, чтобы одна функция имела C-сильно существенную переменную.

В настоящей работе показано, что для "почти всех" функций k-значной логики каждая переменная C-сильно существена.

Определение 1. Переменная $x_i \in R_f$ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(n \geq 2)$, $|R_f| = n$ называется сильно существенной для f, если существует значение c_i для x_i такое, что функция $f(x_i = c_i)$ зависит существенно от $n-1$ переменных.

R_f обозночено множество всех существенных переменных функции f.

Определение 2. Переменная $x_i \in R_f$ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(n \geq 2)$, $|R_f| = n$ называется C-сильно существенной для f, если для каждого значения c_i для x_i, функция $f(x_i = c_i)$ зависит существенно от $n-1$ переменных.

Непосредственно из определение 2 вытекают следущие несколько вопросов.

1. Существует ли функция, для которой ни одна ее переменная

не была бы C -сильно существенной для нее? Ответ на этот вопрос - положителен. Например для функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n \;, \quad f \in P_2$$

ни одна из переменных x_1, x_2, ..., x_n не является C -сильно существенной для f.

2. Существует ли функция, для которой каждая ее переменная - C -сильно существенная? Ответ и на этот вопрос - положителен. Например, для функции $f = x_1 + x_2 + \dots + x_n \pmod{k}$, $f \in P_k$ каждая из переменных x_1, x_2, ..., x_n является C -сильно существенной для f.

Интерес представляет вопрос об определения числа функций из P_k, для которых каждая переменная - C -сильно существенная.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geqq 2$. Без ограничения общности рассматривания примем, что x_1 не является C -сильно существенной переменной для f.

Используя соответствующий аналог разложения Шенона для функций P_k, даем f в виде

$$f = \max_{\sigma_1} \{ \min [I_{\sigma_1}(x_1), f(\sigma_1, x_2, \dots, x_n)] \} ,$$

где

$$I_i(x) = \begin{cases} k-1 & \text{для } x = i \\ 0 & \text{для } x \neq i \end{cases} .$$

Из определение 2 и представление f в выше указанном виде, следует, что переменная x_1 не будет C -сильно существенной переменной для функций f, тогда и только тогда, когда хоть одна из функций $f(\sigma_1, x_2, \dots, x_n)$ не зависит существенно от всех своих переменных.

Если $P_{k,1}^{cc}(X^n)$ множество от всех функций P_k, для которых хоть одна переменная не является C -сильно существенной, то каждая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_{k,1}^{cc}(X^n)$ будет определяться от k -торки функций, в которой участвует хоть одна функция, не зависящая от всех своих переменных.

Ясно, что

$$|P_{k,1}^{cc}(X^n)| \leq k\, n(n-1)\left(k^{k^{n-1}}\right)^{k-1} \cdot k^{k^{n-2}} =$$

$$= k\, n(n-1)\, k^{(k-1)k^{n-1}} \cdot k^{k^{n-2}} = n(n-1)\, k^{k^n - k^{n-1} + k^{n-2} + 1} =$$

$$= k^{k^n - k^{n-1} + k^{n-2} + 1 + \log_k n + \log_k (n-1)}$$

Откуда для $\dfrac{|P_{k,1}^{cc}(X^n)|}{k^{k^n}}$ есть

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|P_{k,1}^{cc}(X^n)|}{k^{k^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{k^{k^{n-1} - k^{n-2} - \log_k n - \log_k (n-1) - 1}} = 0.$$

И так доказали следующая

Теорема 1. Для "почти всех" функций P_k каждая переменная C -сильно существенная.

Имея в виду, что каждая переменная, которая C -сильно существенная для данной функции, она сильно существенная и для нее, то из теоремы 1 следует верность следующего

Следствие 1. У "почти всех" функций P_k каждая переменная является сильно существенной.

Следствие 1 может рассматриваться и как следствие теоремы 2 из [3] .

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский С.В., Функциональные построения в k -значной логике. Труды математического института им. В.А.Стеклова, т.51, 1958, 5-142.
2. Чимев К.Н., Отделими множества от аргументи на функциите. Благоевград, 1983, 207 с.
3. Денев Й.Д., И.Д.Гюдженов, О выделимых подмножествах аргументов функции из P_k . MTA SzTAKI TANULMANYOK I47, I983, 47-50.

ON THE C-STRONGLY ESSENTIAL VARIABLES OF FUNCTIONS FROM P_k

I.D.Gjudjenov

Abstract

The variable $x_i \in R_f$ of the functhion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 2)$, $|R_f| = n$ is called C-strongly essential for f, if for each value c_i of x_i , the function $f(x_i = c_i)$ depends strongly on $n-1$ variables.

It is proved that for almost all functions from P_k each variable is C-stnongly essential.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 37-42

ON THE DOMINANT SETS OF VARIABLES FOR THE FUNCTIONS

K.N. ČIMEV, Sl.Vl. SHTRAKOV

Pedagogical Institute - Blagoevgrad
Bulgaria

In this paper we investigate some properties of the dominant sets and separable pairs of variables for the functions.

Definition I. [I] A set M, $M \subseteq R_f$, $M \neq \emptyset$ is called separable for the function f if there is a subfunction f_1 of f such that $M = R_{f_1}$.

Definition 2. A pair $\{x_\alpha, x_\beta\}$ is called separable for f if $\{x_\alpha, x_\beta\}$ is a separable set for f.

The set of all separable sets for f will be denoted by S_f.

If x_α is a essential variable [I] then the pair $\{x_\alpha, x_\alpha\}$ is separable.

Definition 3. A set M, $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\} \subseteq R_f$ is called weakly dominant over N, $N \subseteq R_f$, $N \neq \emptyset$ for the function f if there exists a collection $(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m})$ such that

$$N \cap R_{f(x_{i_1} = c_{i_1}, x_{i_2} = c_{i_2}, \dots, x_{i_m} = c_{i_m})} = \emptyset .$$

If the set M is minimal with respect to this property then M is called dominant over N for f.

Lemma I. If M is a weakly dominant set over N for the function f then there is at least one subset M_1 of M which is a dominant set over N for f.

<u>Theorem 2.</u> Let M be a weakly dominant set over N, $N \subseteq R_f$, $N \neq \emptyset$ for f. For every natural number p, such that

$$1 \leqq p \leqq |R_f| - |M|$$

and for every p variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$ in $R_f \setminus M$ if $N \cap R_{f_1} \neq \emptyset$ then $M \cap R_{f_1} \neq \emptyset$ where $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_p}$ are p arbitrary and fixed constants and

$$f_1 = f(x_{i_1} = c_{i_1}, x_{i_2} = c_{i_2}, \ldots, x_{i_p} = c_{i_p}) .$$

<u>Proof.</u> If $N \subseteq M$ then the theorem is trivial.

Let $N \setminus M \neq \emptyset$ and

$$N \setminus \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}\} \neq \emptyset .$$

Now we may suppose without lost of generality that

$$N = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\} \quad , \quad M = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}\} \quad \text{and}$$

$x_1 \in R_{f_1}$. If we suppose that

$$M \cap R_{f_1} = \emptyset$$

then for every m - constants $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_m}$ for the variables in M the function

$$f_2 = f_1(x_{j_1} = c_{j_1}, x_{j_2} = c_{j_2}, \ldots, x_{j_m} = c_{j_m})$$

will be depend on x_1 and $x_1 \in R_{f_3}$ where

$$f_3 = f(x_{j_1} = c_{j_1}, x_{j_2} = c_{j_2}, \ldots, x_{j_m} = c_{j_m}) .$$

This contradicts to the condition that M is a weakly dominant set over N for f.

The theorem is proved.

<u>Corollary I.</u> If M is a weakly dominant set over N for

f, ($N \subseteq R_f$) then for every x_i, $x_i \in N$ there exists at least one variable x_j, $x_j \in M$ such that $\{x_i, x_j\} \in S_f$.

Proof. By $N \subseteq R_f$ it follows that $x_i \in R_f$ and there are the constants $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_t}$ for the variables in $R_f \setminus (M \cup \{x_i\})$ such that $x_i \in R_{f_1}$, where

$$f_1 = f(x_{i_1} = c_{i_1}, x_{i_2} = c_{i_2}, \ldots, x_{i_t} = c_{i_t}).$$

By Theorem 2 it follows that

$$M \cap R_{f_1} \neq \emptyset.$$

Obviously $M_1 = R_{f_1} \setminus \{x_i\}$ is a weakly dominant set over $\{x_i\}$ for f_1. By Lemma I there is a set M_2, $M_2 \subseteq M_1$ which is a dominant set over $\{x_i\}$ for f_1.

Now, we may suppose without lost of generality that

$$M_2 = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_s}\}.$$

Let $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_s}$ be s constants for the variables in M_2 such that

$$\{x_i\} \cap R_{f_2} = \emptyset$$

where

$$f_2 = f_1(x_{k_1} = c_{k_1}, x_{k_2} = c_{k_2}, \ldots, x_{k_s} = c_{k_s}).$$

But $x_i \in R_{f_3}$, where

$$f_3 = f_1(x_{k_1} = c_{k_1}, x_{k_2} = c_{k_2}, x_{k_3} = c_{k_3}, \ldots, x_{k_{s-1}} = c_{k_{s-1}}).$$

Obviously $\{x_{k_s}\}$ is a weakly dominant set over $\{x_i\}$ for f_3 and by Theorem 2 $\{x_i, x_{k_s}\} \in S_{f_3}$. So, f_3 is a subfunction of f and $\{x_i, x_{k_s}\} \in S_f$.

The corollary is proved.

Corollary 2. If M is a dominant set over N for f then for every variable $x_i, x_i \in M$ there exists at least one variable $x_j, x_j \in N$ such that

$$\{x_i, x_j\} \in S_f .$$

Corollary 3. If M is a dominant set over $\{x_i\}$ for f then for every variable $x_j, x_j \in M$ the pair $\{x_i, x_j\}$ is separable for the function f .

Theorem 3. If $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$ is a dominant set over $N = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_s}\} \neq \emptyset$ for f and

$$N \cap R_{f_1} = \emptyset$$

where

$$f_1 = f(x_{i_1} = c'_{i_1}, x_{i_2} = c'_{i_2}, \dots, x_{i_m} = c'_{i_m})$$

then for every M_1, $M_1 = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_t}\} \subsetneqq M$ is hold

$$M \setminus M_1 \subseteq R_{f_2}$$

and

$$N \cap R_{f_2} \neq \emptyset$$

where

$$f_2 = f(x_{k_1} = c'_{k_1}, x_{k_2} = c'_{k_2}, \dots, x_{k_t} = c'_{k_t}) .$$

Proof. By $M_1 \subsetneqq M$ it follows that

$$N \cap R_{f_2} \neq \emptyset .$$

Let $x_{i_1} \in M \setminus M_1$ and $x_{i_1} \notin R_{f_2}$ .Now we form the following function

$$f_3 = \begin{cases} f_2 & \text{if} \quad M \setminus M_1 = \{x_{i_1}\} \\ f(x_{i_2} = c'_{i_2}, x_{i_3} = c'_{i_3}, \ldots, x_{i_m} = c'_{i_m}) & \text{if} \quad M \setminus M_1 \neq \{x_{i_1}\}. \end{cases}$$

By minimality of M and $M \setminus \{x_{i_1}\} \subsetneqq M$ we obtain

$$N \cap R_{f_3} \neq \emptyset.$$

By our supposition that $x_{i_1} \notin R_{f_2}$ it follows $N \cap R_{f_3} = \emptyset$, because

$$f_3 = f(x_{i_1} = c'_{i_1}, x_{i_2} = c'_{i_2}, \ldots, x_{i_m} = c'_{i_m}).$$

It is a contradiction.

The theorem is proved.

REFERENCE

I. K.N.Čimev, Separable sets of arguments of the functions.(in Bulgarian),Blagoevgrad,I983.

2. K.N.Čimev, Functions and graphs.(in Bulgarian),Blagoevgrad, I983.

3. K.N.Čimev, On some properties of functions.Colloq.Math.Soc. J.Bolyai,v.28,(I98I),97-II0.

4. K.N.Čimev,Sl.Vl.Shtrakov, On the dominant sets and separable pairs of essential variables for the functions Ann.des Ecoles Techniques,Math.,I985.(in Bulgarian),(in print).

О ДОМИНИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ ПЕРЕМЕН ФУНКЦИИ

К.Н. Чимев, Сл.Вл. Щраков

Висший Педагогический Институт - Благоевград
БОЛГАРИЯ

Р е з ю м е

В работе вводятся и исследуются слабо доминирующие множества перемен функции в связи с выделимыми парами перемен.

Доказано, что если $M, M \subseteqq R_f$ доминирует над N для f, то для любой переменной $x_i, x_i \in M$ существует $x_j, x_j \in N$, так что пара $\{x_i, x_j\}$ - выделимая для f и для любой переменой x_α, $x_\alpha \in N$ существует $x_\beta, x_\beta \in M$, так что пара $\{x_\alpha, x_\beta\}$ - выделимая для f.

В теореме 3 описываются некоторые свойства доминирующих множеств.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 43-50

ON THE ANULATOR SETS OF VARIABLES FOR THE FUNCTIONS

SL. VL. SHTRAKOV

Pedagogical Institute - Blagoevgrad
Bulgaria

In this paper we investigate some properties of the anulator sets of variables and some equivalances, which are generated by these sets.

Definition I. [I] A set M, $M \subseteq R_f$, $M \neq \emptyset$ is called separable for the function f if there is a subfunction f_1 of f such that $M = R_{f_1}$.

The set of all separable sets for f will be denoted by S_f.

Definition 2. [2] A set $N = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}\}$ is called anulator of the set M, $M \subseteq R_f$, $M \neq \emptyset$ for f if for every s constants $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_s}$ for the variables in N, $M \notin R_{f_1}$

where

$$f_1 = f(x_{i_1} = c_{i_1}, x_{i_2} = c_{i_2}, \ldots, x_{i_s} = c_{i_s})$$

and N is a minimal set with respect to this property.

Obviously when $N \cap M \neq \emptyset$, N is an anulator set of M for f if and only if $N \subseteq M$ and $|N| = 1$.

When N is an anulator set of M for f and $N \cap M \neq \emptyset$ then N is a trivial anulator of M and we do not observe these anulator sets.

Theorem I. [I,2] If $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$ is a separable set for f and $M \subsetneqq R_f = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ then there is at least one variable x_t, $x_t \in R_f \setminus M$ such that

$$M \cup \{x_t\} \in S_f .$$

Corollary. If M is a separable set for f and $M \subsetneqq R_f$ then for every natural number p, $0 \leqq p \leqq n-m$ there are at least p variables $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p}$ such that

$R = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p}\} \subseteqq R_f \setminus M$ and $M \cup R \in S_f$.

Lemma 2. [2] For every s sets $P_1, P_2, \dots, P_s$ there are t members $x_1, x_2, \dots, x_t$ such that

i) for every i, $i \in \{1,2,\dots,s\}$ thete exists j_i, $1 \leqq j_i \leqq t$ such that $x_{j_i} \in P_i$;

ii) for every j, $j \in \{1,2,\dots,t\}$ there exists i_j, $1 \leqq i_j \leqq s$ such that $\{x_j\} = P_{i_j} \cap \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$.

Definition 3. [2] A system $x_1, x_2, \dots, x_t$ is said to be C-system for the sets $P_1, P_2, \dots, P_t$ if it satisfies the conditions in Lemma 2 and it is minimal with respect to these conditions.

Definition 4. [2] A number $\nu_{M,f}$ is called index of inseparability of the set M, $M \subseteqq R_f$ if there is a C-system

$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}$ of the all nontrivial anulator sets $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_s$ of M such that $t = \nu_{M,f}$.

Theorem 3. [2] If $M \subsetneqq R_f$ then for every natural number p, $\nu_{M,f} \leqq p \leqq |R_f| - |M|$ there exist at least p variables $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}$ in $R_f \setminus M$ such that $M \cup \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}\} \in S_f$.

Now, let P_k^n be the algebra of k-valued logic i.e. consists of all functions $f: K^n \longrightarrow K$ where

$K = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ and $n = 1, 2, 3, \ldots$

Definition 5. Two functions f and g are equivalent ($f \cong g$) if there is a one-to-one map φ of R_f in R_g such that for every M, $M \subseteqq R_f$ the set $\mathcal{N}$ is an anulator of M for f if and only if $\varphi\mathcal{N}$ is an anulator set of φM for g.

Obviously $\cong$ is an equivalence and let G be the group of all permutations of the algebra P_k^n which preserve the relation $\cong$.

Let $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ be the set of all variables for the functions in P_k^n and $S_{\mathcal{X}}$ be the group of all permutations of the set $\mathcal{X}$.

If $\sigma \in S_{\mathcal{X}}$ then σ generates a permutation τ_σ of the algebra P_k^n as follows

$$\tau_\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\sigma x_1, \sigma x_2, \ldots, \sigma x_n), \; f \in P_k^n.$$

Let G_1 be the set of all permutations τ_σ, $\sigma \in S_{\mathcal{X}}$.

Obviously G_1 is a group.

Let S_K be the group of all permutations of the set K. If $\sigma \in S_K$ then σ generates a permutation τ_σ of the algebra P_K^n as follows

$$\tau_\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad , f \in P_K^n .$$

The set of all permutations τ_σ when $\sigma \in S_K$ will be denoted by G_2. Obviously G_2 is a group.

Theorem 4. The group G_1 is a subgroup of G.

Proof. Let σ be a permutation of $\mathcal{X}$ which generates the permutation τ_σ of P_K^n, f be an arbitrary function in P_K^n and

$$g = \tau_\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\sigma x_1, \sigma x_2, \ldots, \sigma x_n) .$$

Now, let $N = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_s}\}$ be an anulator set of $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\}$ for f. Then for every s constants $\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \ldots, \gamma_{j_s}$

$$M \cap R_{f_1} \neq M$$

where

$$f_1 = f(x_{j_1} = \gamma_{j_1}, x_{j_2} = \gamma_{j_2}, \ldots, x_{j_s} = \gamma_{j_s}) .$$

Let

$$g_1 = g(\sigma x_{j_1} = \gamma_{j_1}, \sigma x_{j_2} = \gamma_{j_2}, \ldots, \sigma x_{j_s} = \gamma_{j_s})$$

and $x_{i_t} \notin R_{f_1}$. Now, it is easely to prove that $\sigma x_{i_t} \notin R_{g_1}$, $t \leq m$ because σ is a permutation of $\mathcal{X}$.

It follows

If we suppose that there is a subset σN_1 of σN, $\sigma N_1 \subsetneqq \sigma N$ which is an anulator set of σM for g then N is not an anulator set of M for f because G_1 is a group. This is a contradiction.

The theorem is proved.

Theorem 5. The group G_2 is a subgroup of G .

Proof. Let σ be a permutation of K which generates the permutation τ_σ of P_K^n and

$$g = \sigma f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Now, let $N = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_s}\}$ be an arbitrary anulator set of $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$ for f .Then for every s constants $\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \dots, \gamma_{j_s}$

$$M \cap R_{f_1} \neq M,$$

where

$$f_1 = f(x_{j_1} = \gamma_{j_1}, x_{j_2} = \gamma_{j_2}, \dots, x_{j_s} = \gamma_{j_s}).$$

Let $x_{i_t} \notin R_{f_1}$, $t \leq m$ .Now we form the following function

$$g_1 = g(x_{j_1} = \gamma_{j_1}, x_{j_2} = \gamma_{j_2}, \dots, x_{j_s} = \gamma_{j_s}).$$

It follows

$$f_1 = f_1(x_{i_t} = c_{i_t})$$

for every constant c_{i_t} . By $g_1 = \tau_\sigma f_1$ it follows that

$$x_{i_t} \notin R_{g_1}.$$

If we suppose that there is a subset N_1 , $N_1 \subsetneqq N$ of N

which is an anulator set of M for g then N is not an anulator set of M for f .It is a contradiction.

The theorem is proved.

Definition 6. [3] A transformation ζ_{ab} in P_K^n is called a linear transformation if there are two natural numbers a and b such that

$$(\forall f \in P_K^n)\ \zeta_{ab} f = \underbrace{f + f + \dots + f}_{a \text{ times}} + b \ (mod\ K).$$

Definition 7. [3] A transformation θ_c in P_K^n is called a power transformation if there is a natural number c such that

$$(\forall f \in P_K^n)\ \theta_c f = \underbrace{f \cdot f \cdot \ldots \cdot f}_{c \text{ times}} \ (mod\ K)$$

Definition 8. [3] A transformation σ_d in P_K^n is called an exponential transformation if there is a number d, $d \in K$ such that

$$(\forall f \in P_K^n)\ \sigma_d f = \underbrace{d . d . \ldots . d}_{f \text{ times}} \ (mod\ K)$$

Corollary I. In P_K^n the group of the all selfdual and selfcomplement transformations is a subgroup of G .

Corollary 2. In P_K^n the group G_ℓ of the all linear transformations is a subgroup of G .

Corollary 3. In P_K^n the group of the all power transformations is a subgroup of G .

Corollary 4. In P_K^n the set Σ [3] of the exponential transformations is a subset of G .

<u>Corollary 5.</u> The group G_{exp} which is generated by the set Σ of the all exponential transformations is a subgroup of G in P_k^n .

REFERENCE

I. K.N.Čimev, Separable set of arguments of the functions.(in Bulgarian),Blagoevgrad,1983.

2. Sl.Vl.Shtrakov, Anulator sets of variables for the functions. (in Bulgarian),Year-book of HPI,Blagoevgrad,v.I,(I),1984,9I-97.

3.Sl.Vl.Shtrakov, On some transformations in the k-valued logic. Math.and Educ.in Math.,XIV - th Spr.conf.of Union of Bulg.Math.,1985,305-309.

4. K.N.Čimev, Functions and graphs.(in Bulgarian),Blagoevgrad, 1983.

5. M.Hall, The theory of groups. New York,1959.

ОБ АНУЛИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ ПЕРЕМЕН ФУНКЦИИ

Сл. Вл. Щраков
Висший Педагогический Институт - Благоевград
БОЛГАРИЯ

Р е з ю м е

В работе исследуются некоторые свойства анулирующих множеств. Вводится эквивалентност $\cong$ в алгебре к-значной логики P_k^n следующим образом: Функции f и g эквивалентные $(f \cong g)$ если существует взаимно- однозначное и обратимое соответствие R_f на R_g, которое сохраняет свойство анулируемость множеств перемен функции в P_k^n.

С G_1 обозначается группа всех трансформаций алгебры P_k^n которые индуцируются группой S_X всех пермутаций множества перемен $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ для функций P_k^n. С G_2 обозначается группа всех трансформаций алгебры P_k^n которые индуцируются группой S_K всех пермутаций множества $K = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Доказывается, что G_1 и G_2 сохраняют реляция $\cong$ в P_k^n.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 51-76

MUTUALLY DOMINANT SETS OF VARIABLES FOR THE FUNCTIONS

Sl.Vl. SHTRAKOV

Pedagogical Institute - Blagoevgrad
Bulgaria

ABSTRACT

The dominant set over a set M for the function f, considered here is the set of variables $N=\{x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_s}\}$ if there are S - constants $c_{i_1},c_{i_2},\dots,c_{i_s}$ such that function

$$f_1=f(x_{i_1}=c_{i_1},x_{i_2}=c_{i_2},\dots,x_{i_s}=c_{i_s})$$

does not depend on each of variables which belong to M and N is minimal with respect to this property.Two sets N_1 and N_2 are called mutually dominant for f if N_1 is a dominant set over N_2 and N_2 is a dominant set over N_1 for f .The paper is a systematc study of the mutually dominant sets, giving primary attention to their connection with the separable and c-separable sets of variables which are studied by K.Cimev and the author. These notions play a important role for some investigations of the synthesis schemes in theoretical cybernetics.It is proved, among other results, that if $\{x_i\}$ and $\{x_j\}$ are mutually dominant for f then for every x_k, $\{x_i,x_k\}$ is separable for f if and only if $\{x_j,x_k\}$ is separable; that if N_1 and N_2 are mutually dominant for f then there aren't any two sets N and M, such that M dominates over N for f and $N_1\cup N_2\subseteq M$.

I. INTRODUCTION

In the past 20 - 30 years the theory of the separable sets of variables has been created by Ju. Breitbart (1967), K.N.Cimev (1967, 1983), O.B.Lupanov (1962), N.A.Solov'ev (1963) and some other authors. This theory is important for the synthesis schemes and investigation of the functional dependencies in some algebras of functions [see Cimev (1983) and Lupanov (1962)].

The author uses as a foundation the results of these mathematicians and introduces the c-separable sets, dominant and mutually dominant sets of variables for the functions [see Shtrakov (1985)].

In this paper are investigated these sets of variables and there are some results which show their connection with the notions in theory of the separable sets of variables.

2. DEFINITIONS AND NOTATION

For A any nonvoid set, A^n denotes the set of all n-tuples of elements in A. Members of A^n are written as $\overline{C_n}=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. For $n>0$ an n-ary function on A is a function $f: A^n \longrightarrow A$. A function f on a set A is said to depend on its i-th variable x_i if there exist $a, b, c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, c_{i+2}, \ldots, C_n \in A$ for which

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, c_{i+2}, \ldots, c_n) \neq f(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, c_{i+2}, \ldots, c_n).$$

If f depends on x_i then x_i is called an essential variable for the function f. The set of all essential variables for f is denoted by R_f.

For $M=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\}$ any arbitrary set of essential variables for f,

$$f(\overline{C_m}) = f(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$$

denotes the function

$$f(x_{i_1}=c_{i_1}, x_{i_2}=c_{i_2}, \ldots, x_{i_m}=c_{i_m}),$$

where $\overline{C_m}=(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m})$. The functions $f(\overline{C_m})$ for every $M \subseteq R_f$ and for every $\overline{C_m} \in A^m$ are called subfunctions of f.

The set $M=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\}$ is called separable for f if there exists an $n-m$-tuple $\overline{C_{n-m}}=(c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_{n-m}}) \in A^{n-m}$ for the variables in $R_f \setminus M=\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-m}}\}$ such that $M=R_{f(\overline{C_{n-m}})}$. The set of all separable sets for f is denoted by S_f.

Definition 2.I. A set $M=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\}$ is called c-separable for f if for every $n-m$-tuple $\overline{C_{n-m}}=(c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_{n-m}}) \in A^{n-m}$ for the variables in $R_f \setminus M=\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-m}}\}$ is hold true $M=R_{f(\overline{C_{n-m}})}$. The set of all c-separable sets for f will be denoted by S_f^*.

Definition 2.2. A set $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\} \subseteq R_f$ is called dominant over N , $N \subseteq R_f$ if there exists an m-tuple $\bar{c}_m = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m}) \in A^m$ such that $N \cap R_f(\bar{c}_m) = \emptyset$ and M is a minimal set with respect to this property. The set of all dominant sets over N for f will be denoted by $L_{N,f}$ and

$$D_{N,f} = \bigcup_{P \in L_{N,f}} P \quad , \quad Q_{N,f} = \bigcap_{P \in L_{N,f}} P .$$

Definition 2.3. Two sets N_1 and N_2 are called mutually dominant for f if $N_1 \in L_{N_2,f}$ and $N_2 \in L_{N_1,f}$. The variables x_i and x_j are mutually dominant for f if $\{x_i\}$ and $\{x_j\}$ are mutually sets for f .

If N and M are two sets of essential variables for f, then

$$L^M_{N,f} = \{ P \mid P \in L_{N,f} \ \& \ P \cap (M \cup N) = \emptyset \}.$$

3. SOME AUXILIARY RESULTS

In tis section we show some lemmas and theorems which will be used for resept of our fundamental results in the next sections. Some of these lemmas and theorems are proved by author [see Shtrakov (1985)].

Lemma 3.1. [4] If $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\} \subseteq R_f$ and there is an m-tuple $\overline{C_m} = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m}) \in A^m$ for the variables in M such that $\mathcal{N} \cap R_{f_1} = \emptyset$ where $f_1 = f(\overline{C_m})$, then there is at least one subset M_1 of M which is dominant over $\mathcal{N}$ for f.

Lemma 3.2. [4] For every x_i, $x_i \in R_f$ the set $\{x_i\}$ belongs to $L_{\{x_i\},f}$.

Theorem 3.3. If $M_1 = \{x_i, x_{p_2}, \ldots, x_{p_m}\} \in L_{\mathcal{N},f}$, $M_2 = \{x_j, x_{k_2}, \ldots, x_{k_z}\} \in L_{\{x_i\},f}$ and $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ then there is at least one variable x_t, $x_t \neq x_i$ such that

$$x_t \in D_{\mathcal{N},f} \cap D_{\{x_i\},f}.$$

Proof. By Lemma 3.2

$$\{x_i\} \subseteq D_{\mathcal{N},f} \cap D_{\{x_i\},f}.$$

By Lemma 3.1 there is a subset M_3 of $(M_2 \cup M_1) \setminus \{x_i\}$ which is dominant over $\mathcal{N}$ for f and $x_j \in M_3$.

Certainly, let $\overline{C'_m} = (c'_i, c'_{p_2}, \ldots, c'_{p_m})$ and $\overline{C'_z} = (c'_j, c'_{k_2}, \ldots, c'_{k_z})$ be two tuples for the variables in M_1 and M_2 such that $\mathcal{N} \cap R_{f_1} = \emptyset$ and $x_i \notin R_{f_2}$, where $f_1 = f(\overline{C'_m})$ and $f_2 = f(\overline{C'_z})$.

Then $f_3 = f_3(x_i = c'_i)$, where $\overline{C'_{m+z-1}} = (c'_{p_2}, c'_{p_3}, \ldots, c'_{p_m}, c'_j, c'_{k_2}, \ldots, c'_{k_z})$ and $f_3 = f(\overline{C_{m+z-1}})$. Hence $\mathcal{N} \cap R_{f_3} = \emptyset$.

Now, if we suppose that $M_2 \cap M_3 = \emptyset$ then $M_1 \notin L_{\mathcal{N},f}$, which is a contradiction. Consequently

$$\emptyset \neq M_2 \cap M_3 \subseteqq (D_{\mathcal{N},f} \cap D_{\{x_i\},f}) \setminus \{x_i\}.$$

The theorem is proved.

COROLLARY 1. If $x_i \in D_{\mathcal{N},f}$ and $\{x_j\} \in L_{\{x_i\},f}$ then $x_j \in D_{\mathcal{N},f}$.

COROLLARY 2. If $x_i \in M$, $M \in L_{\mathcal{N},f}$, $x_j \notin M$ and $\{x_j\} \in L_{\{x_i\},f}$ then there is a subset R of $(M \cup \{x_j\}) \setminus \{x_i\}$ for which $x_j \in R$ and $R \in L_{\mathcal{N},f}$.

THEOREM 3.4. If $\mathcal{N} \subseteqq R_f$ then $Q_{\mathcal{N},f} \subseteqq \mathcal{N}$ and

$$(x_i \in Q_{\mathcal{N},f}) \iff (x_i \in \mathcal{N} \ \& \ \{x_i\} \in S_f^*).$$

PROOF. If $\mathcal{N} = \emptyset$ then the theorem is trivial.

Now, let $\emptyset \neq \mathcal{N} = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$, $Q_{\mathcal{N},f} = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\ell}\}$ and $R_f = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \geqq s$, $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ and $j = 1, 2, \dots, \ell$. Suppose $Q_{\mathcal{N},f} \nsubseteqq \mathcal{N}$ and let $x_{i_1} \notin \mathcal{N}$ .Let

$$R = Q_{\mathcal{N},f} \cup \{x_{i_{\ell+1}}, x_{i_{\ell+2}}, \dots, x_{i_z}\}$$

be a dominant set over $\mathcal{N}$ for f and $\overline{C_z} = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_z})$ be an z-tuple for the variables in R such that $\mathcal{N} \cap R_{f(\overline{C_z})} = \emptyset$.

We denote by f_1 the function

$f_1 = f(\overline{C_{z-1}}) = f(c_{i_2}, c_{i_3}, \dots, c_{i_z})$. Then

$$\mathcal{N} \cap R_{f_1} \neq \emptyset$$

and let

$$\mathcal{N} \cap R_{f_1} = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}, \quad t \leqq s.$$

Now, for an arbitrary t-tuple $\overline{C_t} = (c_1, c_2, \dots, c_t)$

$$\mathcal{N} \cap R_{f_2} = \emptyset .$$

where $f_2 = f(\overline{C_t})$ i.e.

$$\mathcal{N} \cap R_{f_3} = \emptyset,$$

where $f_3 = f(\overline{C_{t+z-1}})$ and $\overline{C_{t+z-1}} = (c_1, c_2, \dots, c_t, c_{i_2}, c_{i_3}, \dots, c_{i_z})$.

By Lemma 3.I there is a set M, $M \subseteq R_f$ such that $M \in L_{\mathcal{N},f}$ and $M \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_t, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_z}\}$. But $x_{i_1} \notin M$ and $x_{i_1} \in Q_{\mathcal{N},f}$. This is a contradiction. Hence $Q_{\mathcal{N},f} \subseteq \mathcal{N}$.

Now, suppose without lost of generality that

$$Q_{\mathcal{N},f} = \{x_1, x_2, \dots, x_l\} , \quad l \leq s .$$

If $\{x_i\} \notin S_f^*$ for some i, $i \leq l$ then there is an $n-1$ -tuple $\overline{C'_{n-1}} = (c'_1, c'_2, \dots, c'_{i-1}, c'_{i+1}, \dots, c'_n)$, such that $x_i \notin R_{f(\overline{C'_{n-1}})}$. Consequently

$$\mathcal{N} \cap R_{f(\overline{C'_{n-1}})} = \emptyset.$$

By Lemma 3.I it follows that $x_i \notin Q_{\mathcal{N},f}$ .This is a contradiction. Hence $\{x_i\} \in S_f^*$.

Now, let $x_i \in \mathcal{N}$, $i \leq l$ and $\{x_i\} \in S_f^*$ .If $x_i \notin Q_{\mathcal{N},f}$ then there is a set $M_1 = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}\} \subseteq R_f$ such that $M_1 \in L_{\mathcal{N},f}$ and $x_i \notin M_1$. Let $\overline{C_m} = (c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_m})$ be an m -tuple for the variables in M , such that

$\mathcal{N} \cap R_{f_4} = \emptyset$ where $f_4 = f(\overline{C_m})$. By $x_i \in \mathcal{N}$ it follows $x_i \notin R_{f_4}$ .This is a contradiction. The proof of the theorem is complete.

4. MUTUALLY DOMINANT SETS OF VARIABLES FOR THE FUNCTIONS

For given two mutually dominant sets $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$ for f, what are the dominant sets over $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$ for f ?

To obtain a complete answer of this question appears to be difficult.Now, we obtain some particular results of this problem.

THEOREM 4.I. If $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$ are mutually dominant sets for f, then

$$L^{\mathcal{N}_2}_{\mathcal{N}_1,f} = L^{\mathcal{N}_1}_{\mathcal{N}_2,f}.$$

PROOF. Let $\mathcal{N}_1 = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}\}$ and $\mathcal{N}_2 = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_z}\}$. Now, let $M = \{x_{K_1}, x_{K_2}, \dots, x_{K_p}\}$ be a set in $L^{\mathcal{N}_2}_{\mathcal{N}_1,f}$ and $\overline{c_s} = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_s})$, $\overline{c_z} = (c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_z})$ and $\overline{c_p} = (c_{K_1}, c_{K_2}, \dots, c_{K_p})$ be s, z and p-tuples such that

$$\mathcal{N}_2 \cap R_{f_1} = \emptyset,$$

$$\text{(I)} \qquad \mathcal{N}_1 \cap R_{f_2} = \emptyset$$

and

$$\mathcal{N}_1 \cap R_{f_3} = \emptyset$$

where $f_1 = f(\overline{c_s})$, $f_2 = f(\overline{c_z})$ and $f_3 = f(\overline{c_p})$.

These equations and $M \cap \mathcal{N}_1 = \emptyset$ implay

$$\mathcal{N}_2 \cap R_{f_3} = \emptyset.$$

By Lemma 3.I there exists a set M_1, $M_1 \subseteq M$ for which $M_1 \in L_{\mathcal{N}_2,f}$ .Suppose without lost of generality that

$$M_1 = \{x_{K_1}, x_{K_2}, \dots, x_{K_t}\} \quad, t \leq p \quad .$$

Now, by $M_1 \in L_{\mathcal{N}_2,f}$ it follows that there exists an t-tuple $\overline{c'_t} = (c'_{K_1}, c'_{K_2}, \dots, c'_{K_t}) \in A^t$ such that

(2) $\mathcal{N}_2 \cap R_{f_4} = \emptyset$

where $f_4 = f(\overline{c_t'})$.

Now, $M \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$ implies $M_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$ .By (I) and (2) it follows

(3) $\mathcal{N}_1 \cap R_{f_4} = \emptyset$.

If $t < p$ then by (3) it follows that $M \notin L_{\mathcal{N}_1, f}$ .This is a contradiction.Hence $t = p$, $M_1 = M$ and $M \in L^{\mathcal{N}_1}_{\mathcal{N}_2, f}$ i.e.

$$L^{\mathcal{N}_2}_{\mathcal{N}_1, f} \subseteq L^{\mathcal{N}_1}_{\mathcal{N}_2, f} .$$

It may be established in the same way, that

$$L^{\mathcal{N}_1}_{\mathcal{N}_2, f} \subseteq L^{\mathcal{N}_2}_{\mathcal{N}_1, f} .$$

The theorem is complete proved.

COROLLARY I. If $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$ are mutually dominant sets for the function f and $M = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}\} \in L^{\mathcal{N}_2}_{\mathcal{N}_1, f}$ then for every m-tuple $\overline{C_m} = (c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_m}) \in A^m$ for the variables in M is hold true

$$(\mathcal{N}_1 \cap R_{f_1} = \emptyset) \Leftrightarrow (\mathcal{N}_2 \cap R_{f_1} = \emptyset)$$

where $f_1 = f(\overline{C_m})$.

COROLLARY 2. If x_i and x_j are two mutually dominant variables for f then

$$D_{\{x_i\}, f} = D_{\{x_j\}, f} .$$

PROOF. If $x_i = x_j$ then the theorem is trivial.

Let $x_i \neq x_j$ .Lemma 3.2 implies that if $M \in L_{\{x_i\}, f}$ then $x_i \notin M$ or $M = \{x_i\}$ .By $\{x_j\} \in L_{\{x_i\}, f}$ if $M \in L_{\{x_i\}, f}$ then $x_j \notin M$ or $M = \{x_j\}$ .It follows

$$L_{\{x_i\},f} = L_{\{x_i\},f}^{\{x_j\}} \cup \{\{x_i\},\{x_j\}\}.$$

In the same way it is easily to prove that

$$L_{\{x_j\},f} = L_{\{x_j\},f}^{\{x_i\}} \cup \{\{x_i\},\{x_j\}\}.$$

Now, by Theorem 4.I it follows

$$L_{\{x_i\},f}^{\{x_j\}} = L_{\{x_j\},f}^{\{x_i\}}.$$

Thus

$L_{\{x_i\},f} = L_{\{x_j\},f}$ and $D_{\{x_i\},f} = D_{\{x_j\},f}$ .The corollary is proved.

THEOREM 4.2. If $N_1, N_1 \neq \emptyset$ and N_2 are two mutually dominant sets for f and $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ then there aren't any two sets M and N for which $N \in L_{M,f}$ and $N_1 \cup N_2 \subseteq N$.

PROOF. Suppose that the theorem is false.Let $M = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $N_1 = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}\}$, $N_2 = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_t}\}$ and $N = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_t}, x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_z}\}$ be sets of variables for which

$N_1 \in L_{N_2,f}$; $N_2 \in L_{N_1,f}$; $N \in L_{M,f}$ and $N_1 \cup N_2 \subseteq N$ .Now, let $\overline{C_{s+t+z}} = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_s}, c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_t}, c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_z}) \in A^{s+t+z}$, $\overline{C_s'} = (c'_{i_1}, c'_{i_2}, \dots, c'_{i_s}) \in A^s$ and $\overline{C_t'} = (c'_{j_1}, c'_{j_2}, \dots, c'_{j_t}) \in A^t$ be three tuples for the variables in N , N_1 and N_2 such that

$$M \cap R_{f_1} = \emptyset,$$

$$N_2 \cap R_{f_2} = \emptyset$$

and

$$N_1 \cap R_{f_3} = \emptyset$$

where $f_1 = f(\overline{C_{s+t+\tau}})$, $f_2 = f(\overline{C_s'})$ and $f_3 = f(\overline{C_t''})$. Now, let

$f_4 = f_2(\overline{C_\tau})$, where $\overline{C_\tau} = (c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_\tau}) \in A^\tau$ and

$f_5 = f(\overline{C_\tau})$, where $\overline{C_\tau} = (c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_\tau})$.

Obviously

$$N_2 \cap R_{f_4} = \emptyset .$$

Then for every t-tuple $\overline{C_t''} = (c_{j_1}'', c_{j_2}'', \ldots, c_{j_t}'') \in A^t$ for the variables in N_2 is true $f_4 = f_4(\overline{C_t''})$. Consequently

$f_4 = f_4(\overline{C_t'})$.

But $N_1 \cap R_{f_3} = \emptyset$ and $N_1 \cap R_{f_6} = \emptyset$, where $f_6 = f_5(\overline{C_t'})$.

Then $f_4 = f_5(\overline{C_t'})$ and by $N_2 \cap R_{f_2} = \emptyset$ it follows $f_5 = f_4$.

Thus $f_5 = f(\overline{C_{t+\tau}})$, where $\overline{C_{t+\tau}} = (c_{j_1}', c_{j_2}', \ldots, c_{j_t}', c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_\tau}) \in A^{t+\tau}$.

Hence $f_5 = f(\overline{C_{s+t+\tau}}) = f_1$. This implies

$$N_1 \cap R_{f_5} = N_2 \cap R_{f_5} = \emptyset$$

and

$$M \cap R_{f_5} = \emptyset .$$

By Lemma 3.I it follows that there is a subset M_1 of $N \setminus (N_1 \cup N_2)$ which is dominant over M for f.

Now, by $M_1 \subsetneq N$ we obtain $N \notin L_{M,f}$. This is a contradiction. The proof of the theorem is complete.

COROLLARY. If x_i and x_j are two mutually dominant variables for f then for every two sets M and N is hold true

$$\left(\{x_i\} \cup M \in L_{N,f}\right) \Leftrightarrow \left(\{x_j\} \cup M \in L_{N,f}\right).$$

PROOF. Let $M = \{x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_S}\}$. Theorem 4.2 implies that

$$x_j \notin M \cup \{x_i\}$$

By Corollary 2 of Theorem 3.3 it follows that there is a subset M_1 of $\{x_j\} \cup M$ which is dominant over N for f. Suppose without lost of generality that

$$M_1 = \{x_j, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_t}\}, \ t \leqq s.$$

If $t = s$ then the corollary is proved.

Now, let $t < s$. So, Corollary 2 of Theorem 3.3 implies, that there is a subset M_2 of $\{x_i\} \cup M$ which is a dominant set over $\mathcal{N}$ for f.

But $M_1 \subsetneqq M$ and $\{x_i\} \cup M$ isn't a dominant set over $\mathcal{N}$ for f. A contradiction. Hence $t = s$. The proof of the corollary is complete.

THEOREM 4.3. Let $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_p$ be sets of essential variables of the function f for which

$$\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j = \emptyset, \ i \neq j \quad \text{for} \quad i, j = 1, 2, \dots, p,$$

$$\mathcal{N}_i \in L_{\mathcal{N}_{i+1}, f} \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \dots, p-1$$

and

$$\mathcal{N}_p \in L_{\mathcal{N}_1, f}.$$

Then for every two numbers r and s ($r, s \leqq p$), the sets $\mathcal{N}_r$ and $\mathcal{N}_s$ are mutually dominant for f.

PROOF. By symmetry it suffices to prove the theorem when $r < s$. Let $r < s$ and

$$\mathcal{N}_K = \{x_{K_1}, x_{K_2}, \dots, x_{K m_K}\} \qquad \text{for} \quad K = 1, 2, \dots, p.$$

It follows that for every K, $K \leqq p$ there is an m_K-tuple $\overline{c_{m_K}} = (c_{K_1}, c_{K_2}, \dots, c_{K_{m_K}}) \in A^{m_K}$ such that

$$(4) \quad \mathcal{N}_{K+1} \cap R_{f_K} = \emptyset$$

and

$$(5) \quad \mathcal{N}_1 \cap R_{f_p} = \emptyset,$$

where $f_K = f(\overline{c_{m_K}})$ for $K = 1, 2, \dots, p$.

By (4) it follows that $f_z = f_z(\overline{c_{m_{z+1}}})$. Hence

$$(6) \quad N_{z+1} \cap R_{f_z} = \emptyset$$

and

$$N_{z+2} \cap R_{f_z} = \emptyset .$$

Assume that there is l , $z+l < p$ for which

$$N_{z+l} \cap R_{f_z} = \emptyset .$$

Then by $f_z = f_z(\overline{c_{m_{z+l}}})$ the following equation

$$N_{z+l+1} \cap R_{f_z} = \emptyset$$

is true. Consequently, for every l , $z+l \leq p$ is true

$$N_{z+l} \cap R_{f_z} = \emptyset .$$

Hence

$$N_s \cap R_{f_z} = \emptyset .$$

In the same way by (5) we obtain

$$(7) \quad N_z \cap R_{f_s} = \emptyset .$$

Suppose that there is a subset $N_z' = \{x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_{t_z}}\} \subsetneqq N_z$ of N_z such that

$$N_s \cap R_{f_z'} = \emptyset$$

where $f_z' = f(\overline{c'_{t_z}})$ for some t_z-tuple $\overline{c_{t_z}} = (c'_{\tau_1}, c'_{\tau_2}, \ldots, c'_{\tau_{t_z}})$ in A^{t_z}, for the variables in N_z'. Then by (5) and (7) it follows

$$N_{z+1} \cap R_{f_z'} = \emptyset .$$

Consequently $N_z \notin L_{N_{z+1}, f}$. A contradiction. So $N_z' = N_z$. The proof of the theorem is complete.

PROPOSITION 4.4. Let $N_i \subseteq R_f$, $i = 1, 2, \ldots, p$ and

$$N_i \cap N_j = \emptyset , \ i \neq j \quad \text{for} \quad i, j = 1, 2, \ldots, p,$$

$$N_i \in L_{N_{i+1}, f} \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, p-1$$

and

$$\mathcal{N}_p \in L_{\mathcal{N}_1, f} .$$

If for every i , $i = 1, 2, \ldots, p$ the sets $\mathcal{N}_i$ consist of mutually dominant variables for f then the set $\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{N}_i$ consists of mutually dominant variables for f .

PROOF. By Theorem 4.2 it follows

$$|\mathcal{N}_i| = 1 \qquad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Now, $\mathcal{N}_i \in L_{\mathcal{N}_{i+1}, f}$ for $i = 1, 2, \ldots, p-1$ and $\mathcal{N}_p \in L_{\mathcal{N}_1, f}$ implay that the set $\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{N}_i$ consists of mutually dominant variables for the function f .The proposition is proved.

5. MUTUALLY DOMINANT AND SEPARABLE SETS OF VARIABLES FOR THE FUNCTIONS

In this section will describe some connections of the mutually dominant sets with the separable and C-separable sets of variables for the functions.

THEOREM 5.I. If x_i and x_j are mutually dominant variables for the function f then for every essential variable x_k, $k \neq i,j$ for f

$$\{x_i, x_k\} \in S_f \Leftrightarrow \{x_j, x_k\} \in S_f.$$

PROOF. If $x_i = x_j$ the theorem is trivial.

Now, let $x_i \neq x_j$ and $\{x_i, x_k\}$ be a separable pair for f i.e. $\{x_i, x_k\} \in S_f$.

First, we observe the case when $x_k \in D_{\{x_i\},f}$ .Then by the corollary of Theorem 4.I $x_k \in D_{\{x_j\},f}$ .By Theorem 7[4] it follows

$$\{x_j, x_k\} \in S_f.$$

So, in this case the theorem is proved.

Let $x_k \notin D_{\{x_i\},f}$ .Hence $x_k \notin D_{\{x_j\},f}$ .By Theorem 9 [4] it follows that for every p_t+1 - tuple $\overline{C_{p_t+1}} = (c_{p_1}, c_{p_2}, \ldots, c_{p_t}, c_k) \in A^{p_t+1}$ for the variables in

$$R_f \setminus D_{\{x_j\},f} = \{x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_t}, x_k\}$$

is hold true

$$x_j \in R_{f_1}$$

where $f_1 = f(\overline{C_{p_t+1}})$. Let

$$D_{\{x_j\},f} = \{x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_s}, x_i, x_j\}.$$

Since $\{x_k, x_i\} \in S_f$ there exists an $r+s+1$ -tuple

$\overline{c'_{r+s+1}} = (c'_{q_1}, c'_{q_2}, \ldots, c'_{q_s}, c'_j, c'_{p_1}, \ldots, c'_{p_r}) \in A^{r+s+1}$ for the variables in $R_f \setminus \{x_k, x_i\}$ such that

$$\{x_k, x_i\} \subseteq R_{f_2}$$

where

(8) $\quad f_2 = f\,(\overline{c'_{r+s+1}})$

Now, let c'_i be a constant such that

(9) $\quad x_k \in R_{f_3}$

where $\quad f_3 = f_2\,(x_i = c'_i)$.

Suppose $x_j \notin R_{f_4}$ where $f_4 = f\,(\overline{c''_{r+s+1}})$ and $\overline{c''_{r+s+1}} = (c'_{q_1}, c'_{q_2}, \ldots, c'_{q_s}, c'_i, c'_{p_1}, \ldots, c'_{p_r}) \in A^{r+s+1}$. By (8) and (9) it follows that for every constant α_j for the variable x_j is hold true

$$x_k \in R_{f_5}$$

where $\quad f_5 = f_4\,(x_j = \alpha_j)$. Let c''_j be such constant for x_j that

$$x_i \notin R_{f_6}$$

where $\quad f_6 = f\,(x_j = c''_j)$. This constant exists, since x_i and x_j are mutually dominant variables for f.

Consequently, for every constant α_i is true

$$x_k \in R_{f_7(x_i = \alpha_i)},$$

where $\quad f_7 = f\,(\overline{c'_{r+s}})$ and $\overline{c'_{r+s}} = (c'_{q_1}, c'_{q_2}, \ldots, c'_{q_s}, c'_{p_1}, \ldots, c'_{p_r}) \in A^{r+s}$.
By $\quad x_j \notin R_{f_4}$ and

$$f_2 = f_7\,(x_j = c'_j) = f_7\,(x_j = c''_j) = f_7\,(x_i = c'_i)$$

it follows

$$\{x_i, x_j\} \cap R_{f_3} = \emptyset.$$

This equation contradicts with $\{x_i, x_k\} \in S_f$ .Hence $\{x_j, x_k\} \subseteq R_{f_2}$ i.e.

$$\{x_j, x_k\} \in S_f.$$

By symmetry we obtain that if $\{x_j, x_k\} \in S_f$ then $\{x_i, x_k\} \in S_f$. The theorem is proved.

COROLLARY. If x_i and x_j are mutually dominant variables for f and $x_k \in D_{\{x_i\}, f}$ or $x_i \in D_{\{x_k\}, f}$ then

$$\{x_j, x_k\} \in S_f$$

The proof follows by Theorem 5.I and Theorem 7[4].

If we replace in the condition of Theorem 5.I the variables x_i and x_j with the sets $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$ then the theorem isn't true.This may be observed by the following example

EXAMPLE 5.2. Let

$$f = x_6 (x_1 + x_2)(x_3 x_4 + x_5 \bar{x}_4) \pmod 2.$$

Now, let $\mathcal{N}_1 = \{x_3, x_5\}$, $\mathcal{N}_2 = \{x_1, x_2\}$ and $x_k = x_6$. Obviously $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$ are mutually dominant sets for f and $\mathcal{N}_2 \cup \{x_k\} \in S_f$, but $\mathcal{N}_1 \cup \{x_k\} \notin S_f$.

The theorem isn't true and if we replace in its condition the variable x_k with the set $\mathcal{N}$ .This fact may be observed by following example

EXAMPLE 5.3. Let

$$f = x_3 (x_1 x_4^0 + x_2 x_4^1) \pmod 3,$$

where

$$x_4^j = \begin{cases} 1 & \text{if } x_4 = j \\ 0 & \text{if } x_4 \neq j \end{cases}, \qquad j = 0, 1, 2.$$

Obviously x_3 and x_4 are mutually dominant variables for f and $\{x_4\} \cup \{x_1, x_2\} \in S_f$, but $\{x_3\} \cup \{x_1, x_2\} \notin S_f$.

THEOREM 5.4. If x_i and x_j are mutually dominant variables for the function f then for every subfunction g of f, for which $x_i \in R_g$ or $x_j \in R_g$ the variables x_i and x_j are mutually dominant for g.

PROOF. Let

$\overline{C_s} = (c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_s}) \in A^S$ be an S-tuple for which $g = f(\overline{C_s})$.

If $x_i \notin R_g$ then for every constant α_i is hold true

$$g = g(x_i = \alpha_i)$$

Let c_i' be a constant for x_i such that

$$x_j \notin R_{f'}$$

where $f' = f(x_i = c_i')$. Hence $x_j \notin R_g$. By analogy it follows that if $x_j \notin R_g$ then $x_i \notin R_g$.

Now, let $\{x_i, x_j\} \subseteqq R_g$ and c_i' and c_j' be two constants for x_i and x_j such that

$x_j \notin R_{f(x_i = c_i')}$

and

$x_i \notin R_{f(x_j = c_j')}$. We form the following functions

$f_1 = g(x_i = c_i')$,

$f_2 = f(x_j = c_j')$

and

$f_3 = g(x_j = c_j')$.

Then $f_3 = f_1(x_j = c_j')$ and for every constant α_i for x_i is hold true

$$f_3 = f_2(\overline{C_s}) = f_3(x_i = \alpha_i) = f_1$$

But $x_j \notin R_{f_3}$ and $x_j \notin R_{f_1}$ i.e. $\{x_i\} \in L_{\{x_j\}, g}$.

By analogy it follows $\{x_j\}\in L_{\{x_i\},f}$ .The proof of the theorem is complete.

COROLLARY. If x_i and x_j are mutually dominant variables for the function f then for every subfunction g of f

$$x_i \in R_g \Leftrightarrow x_j \in R_g .$$

THEOREM 5.5. If the variables in the set $M=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$, $\emptyset \neq M \subseteq R_f$ are mutually dominant for f then M is a separable set for f .

PROOF. Suppose that the theorem isn't true. Then for every $n-m$ -tuple $\overline{C_{n-m}}=(c_{m+1},c_{m+2},\dots,c_n)\in A^{n-m}$ for the variables in $R_f\setminus M$ is hold true

$$M \nsubseteq R_{f_1}$$

where $f_1=f(\overline{C_{n-m}})$. Suppose without lost of generality that $x_1\notin R_{f_1}$ .By Theorem 5.4 for every i ($i=2,3,\dots,m$) there is a constant $c_1^{(i)}$ such that

$$x_i \notin R_{f_2^{(i)}}$$

where

$$f_2^{(i)}=f_1(x_1=c_1^{(i)}).$$

By $x_1\notin R_{f_1}$ it follows

$$f_1 = f_2^{(i)} \quad , \quad (i=2,3,\dots,m).$$

Consequently

$$M\cap R_{f_1}=\emptyset .$$

By arbitrarily of the choice of $\overline{C_{n-m}}$ it follows that

$$M\cap R_f=\emptyset .$$

This is a contradiction. The theorem is proved.

A set M of essential variables for f is called minimal C-separable for f if M is a C-separable set for f and for every M_1, $M_1 \subsetneqq M$ which is C-separable for f it follows $M_1 = \emptyset$.

THEOREM 5.6. If $M = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ is a C-separable set for f and the variables of M are mutually dominant for f then M is a minimal C-separable for f .

PROOF. Suppose that the theorem isn't true.

Now, assume without lost of generality that $N = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$, $K < m$ is a C-separable for f .

For every i, $i \leqq m$ the variables x_i and x_{K+1} are mutually dominant for f and Theorem 4.I implies that there is a constant c'_{K+1} for x_{K+1} such that

$$N \cap R_{f_1} = \emptyset$$

where $f_1 = f\ (x_{K+1} = c'_{K+1})$. Hence

$$N \notin S^*_f .$$

This contradicts with our supposition. The theorem is proved.

COROLLARY I. If M is a C-separable set for f which consists of mutually dominant variables then for every subfunction g of f for which $M \subseteqq R_g$, the set M is a minimal C-separable for g .

COROLLARY 2. Let $N_i \subseteqq R_f$ $(i = 1, 2, \dots, p)$,

$N_i \in L_{N_{i+1}, f}$ $(i = 1, 2, \dots, p-1)$ and $N_p \in L_{N_1, f}$.

If for every i $(i = 1, 2, \dots, p)$ the set N_i consists of mutually dominant variables for f and $\bigcup_{i=1}^{p} N_i$ is a C-separable set for f then $\bigcup_{i=1}^{p} N_i$ is minimal C-separable for f.

REMARK. There exists a function f and a set M which is a minimal C -separable for f, but the variables in M aren't mutually dominant for f. This may be observe by following example.

EXAMPLE 5.7. Let

$$f = x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 (x_2 + x_3) \ (mod\ 2\ ).$$

Obviously $M = \{x_2, x_3\}$ is a minimal C -separable for f, but the variables x_2 and x_3 aren't mutually dominant for f.

THEOREM 5.8. If $M, M \subseteq R_f$ is a C -separable set for f and the variables in M are mutually dominant for f then for every N, $\emptyset \neq N \subseteq M$ is hold true

$$D_{N,f} \subseteq M.$$

PROOF. Let $P \in L_{N,f}$. If

$$P \cap M = \emptyset$$

then $M \notin S_f^*$. Consequently

$$P \cap M \neq \emptyset$$

If

$$P \setminus M \neq \emptyset$$

then by Proposition 4.4 it follows that for every $x_i, x_i \in P \cap M$ is true

$$\{x_i\} \in L_{N,f}$$

i.e. $P \notin L_{N,f}$. Consequently

$$P \setminus M = \emptyset$$

i.e. $P \subseteq M$. The proof of the theorem is complete.

THEOREM 5.9. If $S_f^* = \{\emptyset, R_f\}$ then for every $\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \subsetneqq R_f$ is hold true

$$\mathcal{N} \subseteqq D_{R_f \setminus \mathcal{N}, f}$$

PROOF. If

$$x_k \in \mathcal{N} \setminus (D_{R_f \setminus \mathcal{N}, f})$$

then

$$x_k \in R_f \setminus (D_{R_f \setminus \mathcal{N}, f}).$$

Now, Theorem 9 [4] implies

$$D_{R_f \setminus \mathcal{N}, f} \in S_f^*$$

and this contradicts with $S_f^* = \{\emptyset, R_f\}$ .Consequently

$$\mathcal{N} \subseteqq D_{R_f \setminus \mathcal{N}, f}.$$

The theorem is proved.

THEOREM 5.10. If $S_f^* = \{\emptyset, R_f\}$ then every two essential variables of f are mutually dominant for f .

PROOF. Introduce on R_f the following relation

$$x_i \cong x_j \overset{def}{\iff} x_i \text{ and } x_j \text{ are mutually dominant for } f.$$

Theorem 4.3 implies that $\cong$ is an equivalance on R_f .Now, let

$$R_f / \cong \; = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_t\}$$

be the factor set which is generated by $\cong$ on R_f . Then for every i, j $(i, j = 1, 2, \ldots, t)$ if $i \neq j$ then

$$\mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}_j = \emptyset.$$

Theorem 5.8 and Theorem 4.I imply that for every i $(i \leqq t)$ there is a set $\mathcal{N}_i'$ such that

$$\emptyset \neq \mathcal{N}_i' \subseteqq \mathcal{N}_i$$

and

$$\mathcal{N}_i' \in \mathsf{L}_{\{x_{K_i}\}, f}$$

where x_{K_i} is an essential variable of f for which $x_{K_i} \notin \mathcal{N}_i$ and $x_{K_i} \in \mathcal{N}_{i+1}$ when $i < t$ and $x_{K_i} \in \mathcal{N}_1$ when $i = t$.

Since the variables in $\mathcal{N}_{i+1}$ are mutually dominant for f and by Theorem 4.I

$$\mathcal{N}_i' \in \mathsf{L}_{\mathcal{N}_{i+1}, f}.$$

Therefore, for every i $(i < t)$ there are x_{K_i} and $\mathcal{N}_i'$ such that

$$x_{K_i} \in \mathcal{N}_{i+1} \quad , \quad \mathcal{N}_i' \subseteqq \mathcal{N}_i \quad \text{and}$$

$$\mathcal{N}_i' \in \mathsf{L}_{\{x_{K_i}\}, f}$$

So, we obtain

$$\emptyset \neq \mathcal{N}_\tau' \in \mathsf{L}_{\mathcal{N}_{\tau+1}', f} \qquad (\tau = 1, 2, \dots, t-1) \text{ and}$$

$$\emptyset \neq \mathcal{N}_t' \in \mathsf{L}_{\mathcal{N}_1', f}.$$

By Theorem 4.I the set $\bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{N}_i'$ consists of mutually dominant variables for f .

Consequently $\bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{N}_i'$ is a subset of only one set among $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_t$, but

$$\bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{N}_i' \cap \mathcal{N}_j \neq \emptyset$$

for every j $(j = 1, 2, \dots, t)$. This contradiction shows that

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \dots = \mathcal{N}_t = R_f .$$

The theorem is proved.

THEOREM 5.10. If $M = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\} \subseteq R_f$ and $\mathcal{N} = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_s}\} \subseteq R_f$ are two mutually dominant sets for the function f then

$$Q_{M,f} = Q_{\mathcal{N},f} .$$

PROOF. By Theorem 3.4

$$Q_{M,f} \subseteq M \quad \text{and} \quad Q_{\mathcal{N},f} \subseteq \mathcal{N} .$$

Let x_{i_p} be an arbitrary variable which belongs to $Q_{M,f}$. The set $\mathcal{N}$ is a dominant set over M for f and there is an S-tuple $\overline{C_S} = (c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_s}) \in A^S$ for the variables in $\mathcal{N}$ such that

$$x_{i_p} \notin R_{f_1}$$

where $f_1 = f(\overline{C_S})$.

Again, by Theorem 3.4 it follows

$$\{x_{i_p}\} \in S_f^*$$

Consequently $x_{i_p} \in \mathcal{N}$ and again by Theorem 3.4

$$x_{i_p} \in Q_{\mathcal{N},f} .$$

Now, by analogy it follows that if $x_{j_k} \in Q_{\mathcal{N},f}$ $(k \leqq s)$ then

$$x_{j_k} \in Q_{M,f}$$

The theorem is proved.

COROLLARY I. If M and N are mutually dominant sets for the function f and $M \cap N = \emptyset$ then

$$Q_{M,f} = Q_{N,f} = \emptyset.$$

COROLLARY 2. If x_i and x_j are two mutually dominant variables for f then

$$Q_{\{x_i\},f} = Q_{\{x_j\},f} = \emptyset.$$

ACKNOWLEDGEMENT

The author wishes to thank K.N.Čimev for his kind, encouragement and suggestions.

REFERENCES

[I] K.N.Čimev, Dependence of the functions of P_k on their arguments (in Bulgarian), Godišnik Visš. Tehn. Učeb. Zaved. Mat., 4:3 (1967), 5-I3.

[2] K.N.Čimev, Separable sets of arguments for the functions, (in Bulgarian), Blagoevgrad, I983.

[3] K.N.Čimev, Functions and graphs (in Bulgarian), Blagoevgrad, (I983).

[4] Sl.Shtrakov, On the C-separable and dominant sets of variables for the functions, MTA SZTAKI Közlemenyek 32/I985, I55-I6I.

[5] Ju.Ja.Breitbart, Essential variables of Boolean functions (in Russian), Dokl.Akad.Nauk SSSR,172 (1967),9-10.

[6] O.B.Lupanov, On a class of schemes consisting of functional elements (in Russian), Problemy Kibernet.,7(1962),61-114.

[7] N.A.Solov'ev, On the question of essential dependence of Boolean functions (in Russian), Problemy Kibernet.,9(1963), 333-335.

Взаимно доминантные множества переменных для функций

С.В. Штраков

Р е з ю м е

В статье систематически изучаются взаимно-доминантные множества, прежде всего их связь с сепарабельными и с-сепарабельными множествами переменных. Эти понятия и их изучение играют важную роль в исследовании синтезиса схем в теоретической кибернетике.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 77-88

STRUCTURAL PROPERTIES OF THE GRAPHS OF SOME TYPES OF FUNCTIONS

M. ASLANSKI

Pedagogical Institute - Blagoevgrad
Bulgaria

The paper considers the structural properties of the graphs of the functions $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ of order n, possessing m variables $3 \leqq m \leqq n-1$, such that the subgraph of f, having these variables as vertices, has the form of an elementary closed chain.

The terminology found [I - 30] is employed here.

Considering functions from k-valued logic x_i^{α}, will mean the function

$$x_i^{\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{for } x_i = \alpha \\ 0, & \text{for } x_i \neq \alpha \end{cases}$$

without repeating this in every particular case. By $T^*_{n,m,1}$, $3 \leqq m \leqq n-1$ denote the set of functions of order n, for which m variables exist, such that the subgraph of f with these variables as vertices, has the form of an elementary closed chain.

It can be shown that for every $n \geqq 4$ and for every

$m (3 \leqq m \leqq n-1)$, the set $T^{*}_{n,m,1}$ is not empty.

EXAMPLE I. Consider the function from the four-valued logic, as follows:

$$f = (x_1 x_2^0 + x_2^1 x_3) x_6^0 + (x_3 x_4^0 + x_4^1 x_5) x_6^1 + x_1 x_5 x_6^2 +$$
$$+ x_7 x_8 x_9 x_{10} x_6^3 \pmod 4$$

It has a graph of the type shown on Fig.I. Its subgraph with vertices x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 has the form of an elementary closed chain. Besides, $|R_f| = 10$. Therefore, $f \in T^{*}_{10,5,1}$

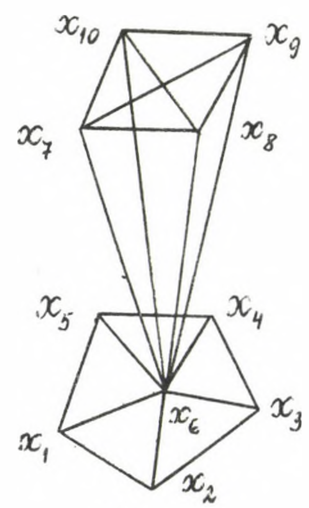

Fig. I

For the functions from $T^{*}_{n,m,1}$, in case $m \geqq 5$, the following theorem holds:

THEOREM I. If for the function $f(x_1,\dots,x_n)$ of order $n \geqq 6$, its subgraph with vertices $x_1,\dots,x_m$ $(m \geqq 5)$ has the form of an elementary closed chain, then each of the variables x_i, $i=1,\dots,m$ forms a separable pair for f with at least one of the variables x_j, $j \in \{m+1,\dots,n\}$

Proof. Under the given conditions for the function $f(x_1,\dots,x_n)$, assume that

$$\{x_1 x_2\},\{x_2,x_3\},\dots,\{x_{m-1},x_m\},\{x_m,x_1\} \in S_f$$

Without loss of generality, it will be proved that x_1 " forms a separable pair for f with at least one of the variables x_j, $j \in \{m+1,\dots,n\}$.

Assume the contrary. Then x_1 should be of second order for f, and

$\{x_1,x_2\},\{x_1,x_m\} \in S_f$, but $\{x_2,x_m\} \notin S_f$.

UNder the given conditions, separable pairs for f will not be formed between the elements of $\{x_2\}$ and $\{x_m\}$, as well as between the elements of $\{x_1\}$ and $\{x_3,\dots,x_{m-1},x_{m+1},\dots,x_4\}$ Theorem 3 from [7] implies that which contradicts the condition imposed beforehand. $\{x_2,x_4\} \in S_f$

COROLLARY I. A function $f(x_1,\dots,x_n)$ of order $n \geqq 6$ belongs to $T^*_{n,m,1}$ if and only if there is a graph of the typeshown on Fig.2 (Theorem I from [30]).

Is it possible to strengthen Theorem I, meaning, whether for every function $f(x_1,\dots,x_n) \in T^*_{n,m,1}$, $5 \leqq m \leqq n-2$, provided its subgraph with vertices $x_1,\dots,x_m$ has the form of an elementary closed chain, each one of the variables x_i, $i=1,\dots,m$ forms separable pairs for f with at least two of the variables $x_{m+1},\dots,x_n$?

The answer is negative. For the function $f \in T^*_{10,5,1}$ from Example I, the subgraph with vertices $x_1,\dots,x_5$ has the form of an elementary closed chain. Besides, none of the variables x_i, $i=1,\dots,5$ forms separable pairs for f with more than one of the variables $x_6,\dots,x_{10}$.

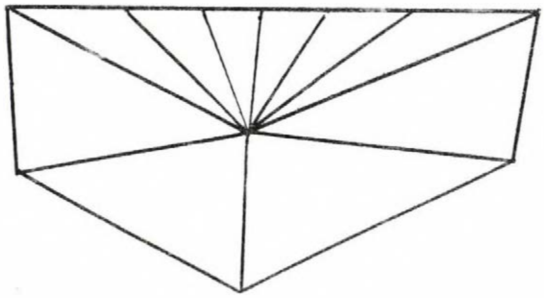

Fig. 2

The requirement $m \geqq 5$ in the condition of Theorem I is quite essential. For $m = 4$ the statement of Theorem I is false.

EXAMPLE 2. Consider the function from the algebra of the logic, as follows:

$$f = \bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 \overline{x_3 x_4} + x_2 x_5 + x_3 x_4 x_5 \ (mod\ 2)$$

For this function the unique separable two-element sets are

$$\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_5\}, \{x_5, x_3\}, \{x_3, x_1\}, \{x_1, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_3, x_4\}.$$

It has a graph of the type shown on Fig. 3.

The subgraph of f with vertices x_1, x_2, x_5, x_3 has the form of an elementary closed chain. Moreover x_2, does not form a separable pair with x_4.

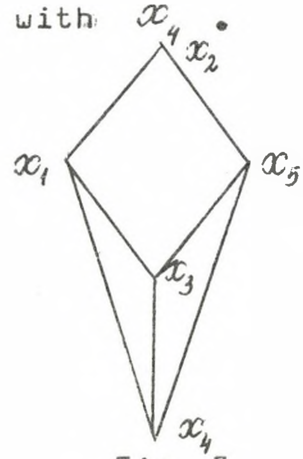

Fig. 3

For $m = 4$ the following theorem holds.

THEOREM 2. If $f(x_1, \ldots, x_n)$ is a function of order $n \geqq 5$

and its subgraph with vertices x_1, x_2, x_3, x_4 has the form of an elementary closed chain, then at least three of these variables form separable pairs for f with variables from the set $\{x_5, \dots, x_n\}$.

Proof. Under the given conditions we will show that if someone of the variables x_1, x_2, x_3, x_4 does not form separable pairs for f with variables from the set

$$\mathcal{M} = \{x_5, \dots, x_n\}$$

then each of the remaining three variables forms separable pairs for f with at least one variable from $\mathcal{M}$.

Assume that x_1 does not form separable pairs for f with variables from $\mathcal{M}$. Then between the elements of $\{x_2\}$ and $\{x_4\}$ as well as between the elements of x_1, and $\{x_3\} \cup \mathcal{M}$ separable pairs for f will not be formed.

In view of Theorem 3 from [7], the variables x_2 and x_4 will form separable pairs for f with each of the variables belonging to the set $\mathcal{M} \cup \{x_3\}$. Theorem 5 from [19] implies that x_3 forms a separable pair for f with at least one of the variables from the set $\mathcal{M}$.

Theorem 2 cannot be strengthened in the sense of each one of the variables x_i, $i=1,2,3,4$ forming a separable pair for f with at least one of the variables $x_5, \dots, x_n$. This is seen form the examples supplied in [26].

G_{22} will denote the corresponding class of function, defined in [24].

The following theorem holds.

THEOREM 3. Every function $f(x_1, \dots, x_n)$ of order $n \geqq 5$, belonging to the set G_{22}, belongs to the set $T^*_{n,4,1}$.

It can be shown that

$$T^*_{n,4,1} \setminus G_{22} \neq \emptyset$$

EXAMPLE 3. The function from the algebra of the logic

$$f = x_1(x_2x_3 + \overline{x}_3x_4) + \overline{x}_1(x_4x_5 + \overline{x}_5x_2)\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

has a graph of the type shown on Fig. 4. Its subgraph with vertices x_2, x_3, x_4, x_5 has the form of an elementary closed chain. It belongs to the set $T^*_{5,4,1} \setminus G_{22}$

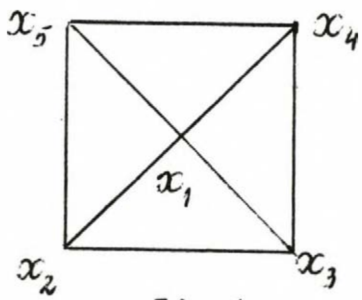

Fig 4

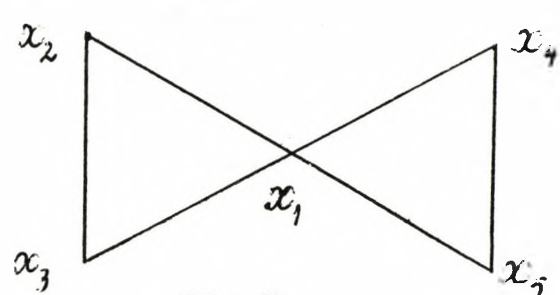

Fig 5

The assumption of Theorem I does not hold for $m=3$ either.

EXAMPLE 4. Consider the function from the algebra of the logic

$$f = x_1 x_2 x_3 + \overline{x}_1 x_4 x_5 \pmod 2$$

with graph of the type shown on Fig. 5.

The subgraph of f with vertices x_1, x_2, x_3 has the form of an elementary closed chain. Moreover,

$$\{x_2, x_4\} \notin S_f \quad \text{and} \quad \{x_2, x_5\} \notin S_f$$

For $m=3$, the assumption analogous to the one in Theorem 2 does not hold either. Indeed, pose the question whether for every function $f(x_1, x_2, \ldots, x_4)$ of order $n \geqq 4$, whose subgraph with vertices x_1, x_2, x_3 has the form of an elementary closed chain, at least two of these variables form separable pairs for f with variables from the set $\{x_4, \ldots, x_n\}$.

The above example shows that the answer of the question posed is negative.

R E F E R E N C E S

1. Яблонский, С.В. Функциональные построения в к-значной логике. Труды математического института им. В.А. Стеклова, т. 51, 1956, 5-142.
2. Яблонский, С.В., Гаврилов, Г.П., В. Б. Кудравцев. Функции алгебры логики и классы Поста, Москва, 1966.
3. Schwartz, R. E. Existence and uniquense properties of boolean functions. SIAM Jurnal on applied matematics, 1970, 18, 2, 454-461.
4. Тоом, А. Л. О сложности реализации двоичных функций, имеющих мало "подфункции". Пробл. кибернетики, вып. 18, 1967, 83-90.
5. Чимев, К.Н. Върху някои свойства на функциите. Год. на ВТУЗ. Математика, т. VII, кн.1, 1971, 23-32.
6. Чимев, К.Н. Върху инвариантността на отделимите двойки на функциите. Год. на ВТУЗ. Математика, т.VIII, кн.1, 1972, 129-136.
7. Чимев, К.Н. Върху подфункциите и силно съществените променливи на функциите. Год. на ВТУЗ. Математика, т.IX, кн.4, 1973, 43-55.
8. Чимев, К.Н. Върху отделимите двойки на функциите. Год. на ВТУЗ, Математика, т.VII, кн.3, 1971, 7-12.
9. Лупанов, О.Б. Об одном классе схем из функциональных элементов. Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 7. 1962, 61-119.
10. Соловьев, Н.А. К вопроссу о существенной зависимости функции алгебры логики. Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 9, 1963, 333-335.
11. Брейтбарт, Ю.Я. О существенных переменных функции алгебры логики, РАН, СССР, 1967, т.182, № 1, 9-10.

12. Salomaa, A. On essential variables of functions, especially in the algebra of logic. Annales academiae sientiarum fennical, ser. A, 339 /1963/ I-II.

13. Чимев, К.Н. Върху силно съществените променливи на функциите от P_k. Год. на ВТУЗ. Математика, т. V, кн.2, 1968/69, 155-162.

14. Чимев, К.Н. Върху зависимостта на функциите от P_k от аргументите им. Год. на ВТУЗ. Математика, т. IV, кн. 3, 1967, 5-13.

15. Чимев, К.Н. Върху отделимите подмножества и силно съществените променливи на функциите. Год. на ВТУЗ. Приложна математика, т. X, кн. 4, 1974, 7-13.

16. Чимев, К.Н. О выделимых множествах аргументов функции. Мат. Sz TAKİ Közlemenyek, 24, 1980, 19-27.

17. Tchimev, K.N. On some properties of functions. Abstracts of lectures of the colloquium on finite algebra and multiple-valued logic Szeged, 1979, 38-40.

18. Чимев, К.Н. Върху отделимите подмножества от аргументи на функциите. Год. на ВТУЗ. Приложна математика, т.XIII кн. 2, 1980, 191-198.

19. Чимев, К.Н. Върху структурните свойства на функциите по отношение на отделимите им двойки. Год. на ВТУЗ. Математика, т.IV, кн. 1, 1973, 37-50.

20. Чимев, К.Н. Върху представимостта на някои класи функции от многозначната логика. Год. на ВТУЗ. Приложна математика, т.XII, кн.2, 1976, 129-142.

21. Чимев, К.Н., Ю.А. Николова. Върху някои класи функции с определени структурни свойства. Год. на ВУЗ. Приложна математика, т.XIII, кн. 1, 1977, 127-136.

22. Чимев, К.Н. Отделими двойки на функциите на шест аргумента. Год. на ВУЗ. Приложна математика, т.XIV, кн. 2, 1976,143-156.
23. Чимев, К.Н. Върху структурните свойства на функциите от един клас. Год. на ВУЗ. Приложна математика, т.XIV, кн.1, 1978, 113-124.
24. Чимев, К.Н. Върху някои класи функции. Год. на ВУЗ. Приложна математика, т. XIV, кн.1, 1978, 103-112.
25. Cimev, K.N. On some properties of functions, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai Finite algebra and multiple-valued logic, Szeged, 1979, 97-110.
26. Чимев, К.Н. Отделими двойки и силно съществени променливи на функции на три, четири и пет аргумента. Год. на ВТУЗ, Мат. т.VIII, кн.3, 1972, 31-39.
27. Чимев, К.Н. Об одном классе функции. Rostock. Math. Kolloquium 19, 1982, 9-17.
28. Чимев, К.Н. О выделимых множеств аргументов некоторых функции. Abstracts of lectures of the 7-th Conference on operating systems Visegrad, 1982, 12-14.
29. Чимев, К.Н. Подфункции и отделими множества от аргументи на функциите. Мат. и мат. образование, С., БАН, 1982, 105-122.
30. Чимев, К.Н. Върху структурните свойства на някои класи функции. Год. на ВУЗ. Приложна математика, т.XII, кн.1, 1977, 137-150.

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ГРАФОВ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ФУНКЦИЙ

М. Аслански

Висший педагогический институт - Благоевград

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются структурные свойства графов функций $f(x_1,\dots,x_n)$ порядка n, имеющих такие m переменных $3 \leqq m \leqq n-1$ что подграф f с вершинами $x_1, x_2, \dots, x_m$ имеет вид элементарной замкнутой цепи.

В работе используется терминология [1 - 30].

Рассматривая функции к-значной логики далее под x_i^{α} подразумеваем функцию

$$x_i^{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{для } x_i = \alpha \\ 0 & \text{для } x_i \neq \alpha \end{cases}$$

Обозначим через $T^*_{n,m,1}$ $3 \leqq m \leqq n-1$ множество функций порядка n, для которого существуют такие m переменных, что подграф функции f с вершинами этими переменными имеет вид элементарной замкнутой цепи.

Можно показать, что для любого $n \geqq 4$ и для любого $m\ (3 \leqq m \leqq n-1)$ множество $T^*_{n,m,1}$ не пустое.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 89-96

ПСЕВДОКОМБИНАТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И РЕКУРСИВНОСТЬ В НИХ

Р. Луканова
Институт математики с ВЦ , БАН

В статье рассматривается понятие псевдокомбинаторного пространства, являющееся обобщением понятия комбинаторного пространства. В книге Д.Скордева [2] излагается одно алгебраическое обобщение теории рекурсивных функций, при котором роль функций играют элементы некоторых квазиупорядоченных полугрупп. Алгебраические системы, удовлетворяющие сформулированным условиям, названы комбинаторными пространствами. Здесь заменим одно из условий, входящих в определении понятия комбинаторного пространства, на другое и получим определение так называемых псевдокомбинаторных пространств. Ряд свойств комбинаторных пространств остаются верными и для псевдокомбинаторных, а остальные будут верными при дополнительных условиях. Особенно важно то, что для псевдокомбинаторных пространств остаются в силе такие существенные результаты теории рекурсии, как теоремы о нормальной форме, первая и вторая теорема о рекурсии и теорема об универсальной функции. Доказательства этих утверждений можно найти в работе [3]. Это обобщение позволяет приложение теории к изучению вычислительных процессов, для которых возможно безрезультатное заканчивание работы или к изучению мер сложности вычисления, для которых операция сложения некоммутативна.

<u>Квазиупорядоченной полугруппой</u> будем называть любое множество $\mathcal{F}$, рассматриваемое вместе с некоторым бинарным отношением $\leq$ на $\mathcal{F}$ и некоторой бинарной операцией в $\mathcal{F}$, записываемой как умножение, удовлетворяющие следующим ус-

ловиям, где переменные φ, ψ, θ и χ пробегают $\mathcal{F}$:

а/ $\forall\varphi(\varphi\leq\varphi)$;

б/ $\forall\varphi\forall\psi\forall\theta(\varphi\leq\psi\,\&\,\psi\leq\theta\rightarrow\varphi\leq\theta)$;

в/ $\forall\varphi\forall\psi\forall\theta\forall\chi(\varphi\leq\theta\,\&\,\psi\leq\chi\rightarrow\varphi\psi\leq\theta\chi)$;

г/ $\forall\varphi\forall\psi\forall\theta((\varphi\psi)\theta\leq\varphi(\psi\theta)\,\&\,\varphi(\psi\theta)\leq(\varphi\psi)\theta)$.

Квазиупорядоченную полугруппу $\mathcal{F}$ будем называть частично упорядоченной, если условие $\varphi\leq\psi\,\&\,\psi\leq\varphi$ может иметь место только в случае, когда элементы φ и ψ тождественны между собой.

Пусть $\mathcal{F}$ - квазиупорядоченная полугруппа. Если ее элементы φ и ψ удовлетворяют условию $\varphi\leq\psi\,\&\,\psi\leq\varphi$, то мы будем говорить,что φ равно ψ и будем писать $\varphi=\psi$. Тогда условие г/ может быть записано в виде: $\forall\varphi\forall\psi\forall\theta((\varphi\psi)\theta=\varphi(\psi\theta))$. Введенное выше отношение равенства может быть слабее отношения тождественности /полного совпадения/.

Пусть $\mathcal{C}$ - подмножество квазиупорядоченной полугруппы $\mathcal{F}$ /не обязательно насыщенное относительно равенства/. Будем говорить, что $\mathcal{C}$ является достаточным справа подмножеством полугруппы $\mathcal{F}$ тогда, когда выполняется следующее условие: для любых φ и ψ из $\mathcal{F}$, если $\varphi x\leq\psi x$ для любого x из $\mathcal{C}$, то $\varphi\leq\psi$.

Имеет место следующее свойство: пусть $\mathcal{C}$ - достаточное справа подмножество квазиупорядоченной полугруппы $\mathcal{F}$ и пусть φ и ψ - элементы $\mathcal{F}$. Если $\varphi x=\psi x$ для любого x из $\mathcal{C}$, то $\varphi=\psi$.

Псевдокомбинаторным пространством называется любая упорядоченная 9-ка $\langle\mathcal{F},I,\mathcal{C},\Pi,L,R,\Sigma,T,F\rangle$, где $\mathcal{F}$ - квазиупорядоченная полугруппа с единицей I, $\mathcal{C}$ - достаточное справа подмножество этой полугруппы, Π - бинарная операция в $\mathcal{F}$, L и R - элементы полугруппы $\mathcal{F}$, Σ - тернарная операция в $\mathcal{F}$, T и F - элементы множества $\mathcal{C}$ и следующие условия выполняются для всех x и y из $\mathcal{C}$ и всех φ, ψ, θ и χ из $\mathcal{F}$:

/1/ $\Pi(x,y)\in\mathcal{C}$;

/2/ $L\Pi(x,y)=x$;

/3/ $R\Pi(x,y)=y$;

/4/ $\Pi(\varphi,\psi)x = \Pi(\varphi x,\psi x)$;
/5/ $\Pi(x,I)\theta = \Pi(x,\theta)$;
/6/ $\Pi(I,\psi x)\theta = \Pi(\theta,\psi x)$;
/7/ $\Sigma(T,\varphi,\psi) = \varphi$;
/8/ $\Sigma(F,\varphi,\psi) = \psi$;
/9/ $\theta\Sigma(\chi,\varphi,\psi) = \Sigma(\chi,\theta\varphi,\theta\psi)$;
/10/ $\Sigma(\chi,\varphi,\psi)x = \Sigma(\chi x,\varphi x,\psi x)$;
/11/ $\Sigma(I,\varphi x,\psi x)\theta = \Sigma(\theta,\varphi x,\psi x)$;
/12/ $\varphi\leq\theta \,\&\, \psi\leq\chi \to \Sigma(I,\varphi,\psi)\leq\Sigma(I,\theta,\chi)$;

Условие /5/ для комбинаторных пространств имеет вид:
$$\Pi(\varphi x,I)\theta = \Pi(\varphi x,\theta).$$

Интуитивно, элементы множества $\mathcal{F}$, их умножение и отношение $\leq$ на $\mathcal{F}$, соответственно, выполняют роль функции, композиции и отношения включения. Элементы множества $\mathcal{C}$ выполняют роль постоянных всюду определенных функций. Операция Π связана с образованием упорядоченных пар из функциональных значений, а Σ - с определением путем разбора случаев. L и R выполняют роль функций, перерабатывающих упорядоченные пары $\langle s,t\rangle$ соответственно в s и t, а T и F - булевые константы "истина" и "ложь". Каждое комбинаторное пространство является псевдокомбинаторным пространством. Рассмотрим примеры псевдокомбинаторных пространств, не являющиеся комбинаторными.

Пусть M - некоторое бесконечное множество, $\mathcal{J}$ - инъективное отображение множества M^2 в M, a и b - различные элементы множества M.

Пример 1. Предположим, что дана полугруппа K. Пусть полугрупповая операция обозначается через $\oplus$ и имеется такой элемент $\theta\in K$, что $k\oplus\theta=k$ и $\theta\oplus k=k$ для всех $k\in K$. Пусть еще сложение в K некоммутативно. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех подмножеств декартового произведения $M\times K\times M$, причем соотношение $\varphi\leq\psi$ имеет место тогда и только тогда, когда φ содержится в ψ. Пусть для любых φ, ψ из $\mathcal{F}$:
$$\varphi\psi = \{\langle p,k,r\rangle : \exists q\,\exists i\,\exists j(\langle p,i,q\rangle\in\psi \,\&\, \langle q,j,r\rangle\in\varphi \,\&\, i\oplus j = k)\}.$$
Пусть $I = \{\langle p,\theta,p\rangle : p\in M\}$,
$\mathcal{C} = \{M\times\{\theta\}\times\{c\} : c\in M\}$,

$T = M \times \{\theta\} \times \{a\}$, $F = M \times \{\theta\} \times \{b\}$.

Пусть для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$:

$$\Pi(\varphi,\psi) = \{\langle p,\kappa,s\rangle : \exists q \exists r \exists i \exists j (\langle p,i,q\rangle \in \varphi \,\&\, \langle p,j,r\rangle \in \psi \,\&\, \mathcal{I}(q,r) = s \,\&\, i \oplus j = \kappa)\}.$$

Пусть L, R и D - такие элементы множества $\mathcal{F}$, что для любых $p,q,r,s \in M$ и любого $\kappa \in K$ выполняются условия:

$$\langle \mathcal{I}(q,r),\kappa,s\rangle \in L \longleftrightarrow \kappa = \theta \,\&\, s = q;$$
$$\langle \mathcal{I}(q,r),\kappa,s\rangle \in R \longleftrightarrow \kappa = \theta \,\&\, s = r;$$
$$\langle p,\kappa,q\rangle \in D \longrightarrow q = a \vee q = b;$$
$$\langle a,\kappa,q\rangle \in D \longleftrightarrow \kappa = \theta \,\&\, q = a;$$
$$\langle b,\kappa,q\rangle \in D \longleftrightarrow \kappa = \theta \,\&\, q = b;$$

Пусть для любых $\varphi,\psi,\chi \in \mathcal{F}$:

$$\Sigma(\chi,\varphi,\psi) = \{\langle p,\kappa,q\rangle : \exists i \exists j [((\langle p,i,a\rangle \in D\chi \,\&\, \langle p,j,q\rangle \in \varphi) \vee (\langle p,i,b\rangle \in D\chi \,\&\, \langle p,j,q\rangle \in \psi)) \,\&\, i \oplus j = \kappa]\}.$$

При этих предположениях 9-ка $\langle \mathcal{F}, I, \mathcal{C}, \Pi, L, R, \Sigma, T, F\rangle$ является псевдокомбинаторным пространством и не является комбинаторным пространством.

Пример 2. Пусть дан некоторый алгоритм, перерабатывающий элементы множества M в элементы множества M , который не обязательно всегда заканчивает работу и не обязательно всегда выдает результат при окончании работы. Для описания этого алгоритма возьмем некоторый элемент $u \notin M$ и рассмотрим частичное отображение φ множества $M \cup \{u\}$ в себя, определенное следующим образом: пусть $p \in M$, тогда $\varphi(p) = q$, если алгоритм при применении его к элементу p дает результат q, и $\varphi(p) = u$, если работа заканчивается нерезультативно, кроме того уславливаемся, что $\varphi(u) = u$. Пусть $\mathcal{F}$ - множество всех частичных отображений φ множества $M \cup \{u\}$ в себя, для которых справедливо равенство $\varphi(u) = u$, причем это множество рассматривается вместе с обычной операцией композиции частичных отображений и обычным упорядочением при помощи отношения включения. Пусть I - тождественное отображение множества $M \cup \{u\}$ в себя. Пусть $\mathcal{C}$ состоит из тех элементов множества $\mathcal{F}$, которые во всех точках множества M принимают одно и то же значение, принадлежащее множеству M. Если $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, то через $\Pi(\varphi,\psi)$ обозначим элемент σ множества $\mathcal{F}$, определяемый условием, что для любых $p,s \in M \cup \{u\}$ верна эквивалентность: $\sigma(p)=s \longleftrightarrow \exists_{q \in M} q \exists_{r \in M} r \; (\varphi(p)=q \;\&\; \psi(p)=r \;\&\; J(q,r)=s) \vee$

$$(\varphi(p)=u \;\&\; s=u) \vee \exists_{q \in M} q \, (\varphi(p)=q \;\&\; \psi(p)=u \;\&\; s=u).$$

Пусть L и R - такие элементы множества $\mathcal{F}$, что $L(J(q,r))=q$, $R(J(q,r))=r$ для любых $q,r \in M$. Пусть D - такой элемент множества $\mathcal{F}$ с областью значений $\{a,b,u\}$, что $D(a)=a$, $D(b)=b$. Если $\varphi,\psi,\chi \in \mathcal{F}$, то через $\Sigma(\chi,\varphi,\psi)$ обозначим элемент σ множества $\mathcal{F}$, определяемый условием, что для любых $p,q \in M \cup \{u\}$ верна эквивалентность:

$$\sigma(p)=q \longleftrightarrow (D\chi(p)=a) \;\&\; \varphi(p)=q) \vee (D\chi(p)=b \;\&\; \psi(p)=q) \vee$$
$$(D\chi(p)=u \;\&\; q=u).$$

Пусть T и F - такие элементы множества $\mathcal{F}$, что $T(p)=a$ и $F(p)=b$ для любого $p \in M$.

При этих предположениях 9-ка $\langle \mathcal{F}, I, \mathcal{C}, \Pi, L, R, \Sigma, T, F \rangle$ является псевдокомбинаторным пространством и не является комбинаторным пространством.

Также как в книге [2] понятия итерации и квазиитерации вводятся как наименьшие неподвижные точки подходящих монотонно возрастающих отображений множества $\mathcal{F}$ в себя. Элемент являющийся итерацией элемента σ, управляемой элементом χ, будет также и квазиитерацией элемента σ, управляемой элементом χ.

Если данный элемент является квазиитерацией элемента σ, управляемой элементом χ, то он является наименьшим решением неравенства $\Gamma_{\sigma,\chi}(\theta) \leq \theta$ и наименьшей неподвижной точкой отображения $\Gamma_{\sigma,\chi}$ множества $\mathcal{F}$ в себя, определенного при помощи равенства $\Gamma_{\sigma,\chi}(\theta) \equiv \Sigma(\chi, I, \theta\sigma)$. Этот элемент обозначается через $[\sigma,\chi]$. Псевдокомбинаторное пространство $\mathcal{S}$ называется <u>итеративным /квазиитеративным/</u>, если итерация /квазиитерация/ элемента σ, управляемая элементом χ, существует для любых σ и χ из $\mathcal{F}$.

Пусть дано квазиитеративное псевдокомбинаторное пространство $\mathcal{S} = \langle \mathcal{F}, I, \mathcal{C}, \Pi, L, R, \Sigma, T, F \rangle$ Пусть $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

Если $\varphi \in \mathcal{F}$, то элемент φ называется <u>рекурсивным относительно $\mathcal{B}$</u> тогда и только тогда, когда существует такая конечная последовательность $\rho_0, \rho_1, \dots \rho_m$ из элементов множества $\mathcal{F}$, что $\rho_m = \varphi$ и для любого натурального числа j, не превосходящего m, выполняется условие:

$$(\rho_j \in \{L, R, T, F\} \cup \mathcal{B}) \vee \underset{k<j}{\exists k} \underset{\ell<j}{\exists \ell} (\rho_j = \rho_k \rho_\ell \vee \rho_j = \Pi(\rho_k, \rho_\ell) \vee \rho_j = [\rho_k, \rho_\ell]).$$

Отображение Γ множества $\mathcal{F}$ в себя называется <u>рекурсивным относительно $\mathcal{B}$</u> если для каждого θ из $\mathcal{F}$ элемент $\Gamma(\theta)$ - рекурсивен относительно $\mathcal{B} \cup \{\theta\}$.

Элемент φ множества $\mathcal{F}$ называется <u>квазиполиномиальным относительно $\mathcal{B}$</u> тогда и только тогда, когда существует такая конечная последовательность $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m$ из элементов множества $\mathcal{F}$, что $\rho_m = \varphi$ и для любого натурального числа j, не превосходящего m, выполняется условие:

$$(\rho_j \in \{I, L, R, T, F\} \cup \mathcal{B}) \vee \underset{i<j}{\exists i} \underset{k<j}{\exists k} \underset{\ell<j}{\exists \ell} (\rho_j = \rho_k \rho_\ell \vee \rho_j = \Pi(\rho_k, \rho_\ell) \vee \rho_j = \Sigma(\rho_i, \rho_k, \rho_\ell)).$$

<u>Совершенным элементом</u> называется любой элемент ζ множества $\mathcal{F}$, удовлетворяющий условию, что для любого x из $\mathcal{C}$ произведение ζx равно некоторому элементу множества $\mathcal{C}$. Очевидно, что элемент I является совершенным. Все элементы множества $\mathcal{C}$ - совершенные.

<u>Сильная теорема о нормальной форме.</u> Пусть $\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \chi, \mu, \varkappa$ и ρ -элементы множества $\mathcal{F}$, удовлетворяющие следующим условиям:

а/ элементы ζ_1, ζ_2, μ и $\varkappa$ - квазиполиномиальные относительно $\mathcal{B}$,

б/ элементы α и ζ_1 - совершенные, а элемент ζ_2 удовлетворяет равенству $\Pi(I,I)\zeta_2 = \Pi(\zeta_2, \zeta_2)$;

в/ $\chi\alpha = \chi\zeta_1 = F$, $\chi\zeta_2 = T$, $\mu\alpha = F$, $\mu\zeta_1 = T$,
$\varkappa\alpha = \varkappa\zeta_1 = I$, $\rho\zeta_2 = I$.

При этих предположениях, для любого элемента φ множества $\mathcal{F}$, который рекурсивен относительно $\mathcal{B}$, можно найти такой элемент β, квазиполиномиальный относительно $\mathcal{B}$, что $\varphi = \rho[\beta, \chi]\alpha$.

<u>Сильная теорема о нормальной форме для отображений.</u> Пусть $\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \chi, \mu, \varkappa$ и ρ - элементы множества $\mathcal{F}$, удовлетворяющие следующим условиям:

а/ элементы $\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \mu$ и $\varkappa$ - квазиполиномиальные относительно $\emptyset$,

б/ элементы α и ζ_1 - совершенные, а элемент ζ_2 удовлетворяет равенству $\Pi(I,I)\zeta_2 = \Pi(\zeta_2,\zeta_2)$,

в/ $\chi\alpha = \chi\zeta_1 = F,\ \chi\zeta_2 = T,$
$\mu\alpha = F,\ \mu\zeta_1 = T,$
$\varkappa\alpha = \varkappa\zeta_1 = I,\ \rho\zeta_2 = I.$

При этих предположениях для любого рекурсивного относительно $\mathcal{B}$ отображения Γ множества $\mathcal{F}$ в себя можно найти элемент β, квазиполиномиальный относительно $\mathcal{B}$, и такие элементы τ, δ и ν - квазиполиномиальные относительно $\emptyset$, что для всех θ из $\mathcal{F}$ справедливо равенство:

$$\Gamma(\theta) = \rho[\Sigma(\tau,\beta,\delta\Pi(I,\theta\nu)),\chi]\alpha.$$

<u>Первая теорема о рекурсии.</u> Пусть $\mathcal{S}$ - невырожденное итеративное псевдокомбинаторное пространство. Пусть $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{F}$, а Γ - отображение множества $\mathcal{F}$ в себя, рекурсивное относительно $\mathcal{B}$. Тогда существует такой элемент φ множества $\mathcal{F}$, рекурсивный относительно $\mathcal{B}$, что $\Gamma(\varphi)=\varphi$ и $\varphi\leq\psi$ для любого ψ из $\mathcal{F}$, удовлетворяющего неравенству $\Gamma(\psi)\leq\psi$.

Наконец отметим, что для псевдокомбинаторных пространств остаются в силе и аналоги теоремы об универсальной функции и второй теоремы о рекурсии.

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] Skordev, D./1976 a/. Recursion theory on iterative combinatory spaces. Bull. Acad. Polon. Sci.,Ser. Sci. Math. Astr. Phys., <u>24</u> , 23-31.

[2] Скордев, Д.Г./1980/. Комбинаторные пространства и рекурсивность в них. София, БАН.

[3] Луканова, Р.П./1978/. Псевдокомбинаторни пространства и рекурсивност в тях./ Дипломная работа, Соф. унив., Фак. мат. и мех., София/.

[4] Мальцев, А.И./1965/. Алгоритмы и рекурсивные функции. Москва, Наука.

PSEUDOCOMBINATORY SPACES AND RECURSIVNESS IN THEM

R. Lukanova

Abstract

In the article the pseudocombinatory space notion is examined, which represents a generalization of the combinatory space notion. Some very important results of the recursion theory as the normal form theorems and the first and second recursion theorems still apply in the pseudocombinatory spaces.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 97-110

ZERO DIVISORS IN QUATERNION ALGEBRAS

L. RÓNYAI

Comp. and Autom. Inst. Hung. Acad. Sci.
Hungary

1. Introduction

In this paper we continue our work [2], [7] on algorithmic problems related to finite dimensional associative algebras. Our aim here is to contribute to the solution of the following problem.

Problem 1. Given is an associative algebra A over the rationals. Decide if A contains zero divisors, i.e. elements $x,y \in A$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ such that $xy=0$.

A related stronger question is the following one.

Problem 2. Given is an associative algebra A over the rationals. Find a pair of zero divisors in A if A contains zero divisors.

Remark. An algebra can be given by a collection of structure constants. If A is an algebra and $a_1,\dots,a_n$ is a linear basis of A then the multiplication can be specified by giving the elements $a_i a_j$. These elements can be represented as

$$a_i a_j = \sum_k \gamma_{ijk} a_k \quad , \quad \gamma_{ijk} \in \mathbb{Q}$$

The coefficients γ_{ijk} are called structure constants. Our input to the above problems is a collection of structure constants. For more details see Rónyai [7].

Apart from its importance from an algebraic point of view, problem 2. is closely related, in fact, in a sense equivalent, to a linear algebraic problem to be explained next.

Let Q denote the field of rational numbers and let $M_n(Q)$ denote the algebra of n by n matrices over Q. If $X \in M_n(Q)$, then X acts as a linear transformation on V_n, the space of n by 1 column vectors, in the wellknown way. A subspace $U \leq V_n$ is an invariant subspace of X if $Xu \in U$ for every $u \in U$. Every $X \in M_n(Q)$ has at least two invariant subspaces, namely (O) and V_n. These are called trivial subspaces of V_n.

Problem 3. Let $X_1, \ldots, X_k \in M_n(Q)$. Find a nontrivial subspace U of V_n, such that U is an invariant subspace of X_i for $1 \leq i \leq k$.

Problems 2 and 3 are equivalent in the sense that a polynomial time algorithm for one of them would imply a polynomial time algorithm for the other /see Rónyai [7], sec 5.2./.

In Friedl-Rónyai [2] a polynomial time algorithm is given to find zero divisors in an algebra which is not simple. In the light of this result, problem 2 is reduced to the following problem.

Problem 2'. Given a simple associative algebra A over the rationals, find a pair of zero divisors in A if

A contains zero divisors.

The structure of simple associative algebras over Q is well understood. They are of form $M_n(F)$ where F is a (not necessarily commutative) field containing Q in its centre (see for example Herstein [3]). It is immediate, that $M_n(F)$ has zero divisors iff $n>1$.

We remark that the corresponding problem for finite fields is studied in Rónyai [7] and a polynomial time Las Vegas algorithm is presented for that case. The rational case, i.e. problem 2'. seems to be much more difficult. The aim of this paper to discuss the first nontrivial case of the problem, when A is a simple non commutative algebra and $\dim_Q A=4$. This condition implies that either A is a (not necessarily commutative) field or $A\cong M_2(Q)$.

We can easily recognize if A is commutative, and in the remaining cases the center of A, the algebra of elements from A commuting with every element of A, is isomorphic to Q. In this case A is called a central simple algebra over Q. What we have left is the following.

<u>Problem 4.</u> Given is a central simple algebra A over Q and $\dim_Q A=4$. Decide if A is a skew field or $A\cong M_2(Q)$. In the latter case find a pair of zero divisors in A. We will show that this question is equivalent to the following number theoretic qestion.

<u>Problem 5.</u> Let a,b,c be nonzero integers. Decide if the equation $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 = 0$ has a nontrivial

integer solution. In the latter case find a solution.

From this equivalence it will follow that the first part of problem 4 is in NP $\cap$ coNP.

2. Quaternion algebras

In this section we introduce the notion of quaternion algebras and apply some basic properties of them to the problem of zero divisors.

Let α, β be nonzero rational numbers. We define an associative Q algebra (α, β) by "generators and relations".

$$(\alpha, \beta) = \langle 1, y, z \mid 1y = y1 = y;\ 1z = z1 = z;\ y^2 = \alpha\cdot 1;\ z^2 = \beta \cdot 1;\ yz = -zy \rangle$$

The relations imply that 1 is the identity element of (α, β). The algebra (α, β) is called a quaternion algebra. It is immediate that $(-1,-1)$ is the wellknown algebra of quaternions.

Next we summarize the properties of quaternion algebras we will need later. The proofs can be found in O'Meara[5], §. 57.

Proposition 2.1.

a) (α, β) is generated as a Q vectorspace by the elements 1,y,z,yz and therefore $\dim_Q(\alpha, \beta)=4$.

b) (α, β) is a central simple algebra over Q (i.e. it is a simple algebra and its center is Q).

c) $\xi_0 \cdot 1 + \xi_1 y + \xi_2 z + \xi_3 yz$, $(\xi_i \in Q)$ is a zero divisor in (α, β) iff $\xi_0^2 - \xi_1^2\alpha - \xi_2^2\beta + \xi_3^2\alpha\beta = 0$.

d) If (α, β) contains zero divisors then so does the Q subspace spanned by 1,y,z. $\square$

Example It is easy to see that $M_2(Q) \cong (1,-1)$. Indeed, if e_{ij} denotes the 2x2 matrix which has 1 at the crossing of the i-th row and j-th column and zeros elsewhere, then one can put

$$1 = e_{11} + e_{22}, \quad y = e_{21} + e_{12}, \quad z = e_{21} - e_{12}.$$

Now the relations are easily verified.

Next we prove an algorithmic converse of the statements of proposition 2.1. a) and b).

Theorem 2.2. If A is a four dimensional central simple algebra over Q then A is isomorphic to a quaternion algebra. Moreover, if A is given by structure constants, then we can effectively find such a representation in time polynomial in the input size.

Remark The first statement is wellknown. Our aim is to give an algorithm to find a quaternion algebra representation for A.

Proof. First we notice that from the Wedderburn-Artin structure theorem it follows that either A is a skew field or $A \cong M_2(Q)$, therefore if we have a zero divisor in A, then $A \cong M_2(Q)$. Moreover, we can easily find elements e_{ij} $1 \leq i,j \leq 2$ such that $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ hold for $1 \leq i,j,k,l \leq 2$ (see Rónyai [7], section 5.1.). Using the elements e_{ij}, we can go along the lines of the preceding example to find elements $y,z \in A$ such that

$$y^2 = 1 \ , \ z^2 = -1 \ , \ yz = -zy.$$

Now our algorithm works as follows. First we pick an arbitrary non central element $x \in A$. If x is a zero divisor in A (it can be checked by solving a system of linear equations) then $A \cong M_2(Q)$ and we can construct y and z as above. Otherwise Q(x) is a field, more precisely it is a quadratic extension of Q. This means that $Q(x) \cong Q(\sqrt{m})$ for an integer m and one can easily find a $u \in Q(x)$ such that $u^2=m$. The field Q(u) has an automorphism sending u to -u. By a theorem of Noether and Skolem (c.f. Pierce [6], p.230) this implies the existence of a $v \in A$ such that v is invertible and $v^{-1}uv = -u$. We can find such an element v by solving the system of linear equations vu=-uv, where v is an unknown element of A. (As it was before, we can again assume, that v is not a zero divisor.) Now observing that $v^2u=-vuv=uv^2$, we obtain that $v^2=\alpha \in Q$. If we put y=u and z=v, then we have

$y^2=m$, $z^2=\alpha$, $yz=-zy$, that is we constructed the isomorphism $A\cong(m,\alpha)$. $\square$

The process described here involves only a constant number of arithmetical operations. If the structure constants of A are at most n bits long then the method requires cn log(n) log log(n) bit operations.

Remark. By multiplying z with an appropriate integer we can achieve that $\alpha\in\mathbb{Z}$ too.
Now we are able to prove our main result.

Theorem 2.3. Problems 4. and 5. are equivalent in the sense that if there exists a polynomial time algorithm for one of them then there exists a polynomial time algorithm for the other as well.

Proof.
Suppose first, that we have a polynomial time algorithm for problem 4, and let $f(\underline{x})=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2$ be a ternary quadratic form with $a,b,c\in\mathbb{Z}$ and $abc\neq 0$. The equation $f(\underline{x})=0$ has a nontrivial integral solution iff $f_1(\underline{x})=x_1^2+\frac{b}{a}x_2^2+\frac{c}{a}x_3^2=0$ does. Now consider the quaternion algebra $A=(-\frac{b}{a},-\frac{c}{a})$. Proposition 2.1 c) and d) imply that $A\cong M_2(Q)$ if and only if $f_1(\underline{x})=0$ has a nontrivial integral solution. The algorithm for problem 4. concludes that either A is a skew field thus $f(\underline{x})=0$ has no nontrivial solutions or it gives $y_1,y_2,y_3,y_4\in Q$ such that

$$y_1^2+\frac{b}{a}y_2^2+\frac{c}{a}y_3^2+\frac{bc}{a^2}y_4^2=0.$$

If $y_3=y_4=0$, then we have a solution of $f(\underline{x})=0$.

We can suppose here that one of the numbers $-\frac{b}{a}$ or $-\frac{c}{a}$ is not a square of a rational number. By symmetry we may assume that $l=-\frac{b}{a}$ is not a square. Then if N ( ) denotes the norm of $Q(\sqrt{l})$ then we have

$$N(y_1+\sqrt{l}\,y_2) = -\frac{c}{a}\,N(y_3+\sqrt{l}\,y_4)\,.$$

The rational numbers x_1, x_2 are defined by the following

$$x_1+\sqrt{l}\,x_2 = \frac{y_1+\sqrt{l}\,y_2}{y_3+\sqrt{l}\,y_4},$$

and put $x_3=1$. Using the multiplciativity of N ( ) we obtain that $x_1^2+\frac{b}{a}x_2^2+\frac{c}{a}x_3^2=0$. This work can obviously be done in polynomial time of the input size.

Now suppose that we have a polynomial time procedure to solve problem 5, and let A be a central simple algebra with $\dim_Q A=4$ given by structure constants. Using the algorithm of theorem 2.2. we can effectively find $y, z\in A$; $\alpha, \beta\in Z$ such that $A\cong(\alpha,\beta)$, $y^2=\alpha$, $z^2=\beta$, $yz=-zy$. We ask our oracle about the quadratic form $f=x_1^2-\alpha x_2^2-\beta x_3^2$. If it has no nontrivial solutions, then proposition 2.1. implies that A is a skew field. Otherwise from a solution of $f(\underline{x})=0$ we can immediately obtain a zero divisor.

$\square$

3. Ternary quadratic forms over the rationals

In this section we look at ternary quadratic forms with integer coefficients from an algorithmic point of view.

Proposition 3.1. Problem 5. is in NP.
Proof. It is enough to show that if

$$(*) \qquad ax^2+by^2+cz^2=0 \qquad ; a,b,c \in \mathbb{Z}, \quad abc \neq 0.$$

has a nontrivial solution then it has a polynomial size solution (in terms of the sizes of a,b,c) This is wellknown (see Cassels [1] lemma 8.1.). If $(*)$ is solvable, then it has a nontrivial solution $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$ such that

$$\max\{|x_0|, |y_0|, |z_0|\} \leq 3(|a|+|b|+|c|) . \qquad \square$$

To show that Problem 5. is in co-NP, we will use a beautiful theorem of Legendre on the solvability of $(*)$: Suppose that abc is squarefree. Then $(*)$ is solvable iff $ax^2+by^2+cz^2$ is indefinite (i.e., the numbers a,b,c are not all of the same sign) and there exist integers e_1, e_2, e_3 such that

$$a e_1^2 + b \equiv 0 \pmod{c}$$

$$b e_2^2 + c \equiv 0 \pmod{a}$$

$$c e_3^2 + a \equiv 0 \pmod{b}.$$

Proofs can be found in most introductory textbooks on number theory.

The general case can easily and effectively be reduced to the case when abc is squarefree if we can factor integers. If in $(*)$ say $d^2|a$ then introducing $x_1 = dx$ we get

$$\frac{a}{d^2} x_1^2 + by^2 + cz^2 = 0 .$$

This equation has a nontrivial integral solution iff (*) does. If an integer e divides a and b in (*) then introducing $z_1 = \frac{z}{e}$ and dividing by e we obtain the equivalent equation

$$\frac{a}{e}x^2 + \frac{b}{e}y^2 + cez_1^2 = 0 .$$

After these reduction steps abc is replaced by a proper divisor of it.

If (*) has no solution then it can be cerfified as follows:

a) If $a^2x+by^2+cz^2$ is definite then we are done.

b) Otherwise quess and verify the prime factorization of abc. The squarefree reduction can be done in polynomial time, so we may assume that abc is squarefree. If (*) is not solvable, then by Legendre's theorem at least one of the congruences, say ($ae_1^2 + b \equiv 0 \pmod c$)) has no solution. This amounts to the fact that for some prime p, $p|c$ the congruence $e_1^2 \equiv -\frac{b}{a}$ mod(p) has no solutions. This can be verified by proving that $\left(-\frac{b}{a}\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$. We obtained the following.

Proposition 3.2. Problem 5. is in co-NP. $\square$

Combining theorem 2.3 and propositions 3.1 and 3.2 we have the following.

Corollary 3.3. Problem 4. is in NP $\cap$ co-NP. $\square$

Finally we remark, that if factoring integers and solving quadratic equations modulo a prime can both be done in polynomial time then problem 5, and therefore problem 4, can also be solved in polynomial time. One can find a solution using for example the constructive proof of Legendre's theorem presented in Ireland-Rosen [4] pp. 272-274.

4. Problems and comments

1. We discussed the problem of finding zero divisors in algebras A over the rationals such that $\dim_{Q} A=4$. Using the theory of quaternion algebras, we reduced this problem to a number theoretic question, to the solvability of ternary quadratic equations. However, the complexity of the problem remains open.

2. We have pointed out, that problem $5 \in P$ provided that factoring integers and solving quadratic equations mod p are also in P. Is it true that problem 5. is at least as difficult as factoring integers?

3. Concerning the problem of finding zero divisors, the main open question is of course the status of problem 2'. Is it true that problem $2' \in NP$? More specifically, is it true that a simple associative algebra has "small" zero divisors if it contains any?

4. In the proof of theorem 2.2. we constructed a

maximal subfield F of A that turned out to be a cyclic extension of Q and a $u \in A$ such that the inner automorphism defined by u acted as the generating element of the Galois group of F over Q. A very deep theorem of Albert-Hasse-Brauer-Noether (c.f. Pierce [6] chapter 18) states that such decomposition exists for any central simple algebra A over an algebraic number field L. More precisely there exists a maximal subfield $K \subseteq A$, such that K/L is Galois, Gal (K/L) is a cyclic group. Can one effectively find K if A and L are given?

REFERENCES

1. J.W.S. Cassels, Rational quadratic forms; Academic Press, 1978.

2. K.Friedl, L. Rónyai, Polynomial time solutions of some problems in computational algebra; Proc. 17 th ACM STOC, Providence, Rhode Island, 1985, 153-162.

3. I.N. Herstein, Noncommutative rings; Math. Association of America, 1968.

4. K. Ireland, M. Rosen, A classical introduction to modern number theory; Springer-Verlag, 1982.

5. O.T. O'Meara, Introduction to quadratic forms; Springer-Verlag 1963.

6. R.S. Pierce, Associative algebras; Springer-Verlag 1982.

7. L. Rónyai, Zero divisors and invariant subspaces; University of Oregon Techn. Rep. CIS-TR 85-11.

Нуль-делители в алгебрах кватернионов

Л. Роняи

Р е з ю м е

Статья является продолжением работы об алгоритмических проблемах в ассоциативных алгебрах конечных размерностей. Мы занимаемся следующей проблемой:

П р о б л е м а: Пусть дана ассоциативная алгебра A над рациональными числами. Содержит ли A нуль-делители?

В статье показано, что эта проблема сводится к проблеме об разрешимости тернари-квадратических уровнений.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 111-115

SOME COMBINATORIAL RESULTS FOR FINITE SEQUENCES OF SIGNS

B. UHRIN

Comp. and Autom. Inst. Hung. Acad. Sci.
Hungary

In the paper we present some combinatorial identities concerning finite sequences of signs, i.e. numbers -1,0,+1 . Proofs can be find in the references cited or will be published elsewhere.

The motivation of these combinatorial investigations is as follows. Let $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ be a sequence of signs / we shall always assume that at least two v_i-s are not zero /. We shall denote by $S^+(v)$ the maximal number of sign changes in the sequence achievable by appropriate assignment of numbers +1 or -1 to zero entries of the sequence. Similarly, $S^-(v)$ will denote the minimal number of sign shanges, i.e. the number of sign changes in the sequence when zeros are discharged. For example $S^+(+1,-1,0,0,+1,0,-1) = 5$ and S^- of the same sequence is equal to 3 .

Denote $I = (1,2,\ldots,m)$. Let $\Phi(I) :=$ linear hull$(\{\varphi_i\}_{i=1}^n)$, where $\varphi_i : I \to R^1$ are linearly independent on I and $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ is a Chebyshev system of order $n \leq m$. The elements of $\Phi(I)$ are called generalized polynomials. The classical example for such a set is the set of all algebraic polynomials of the degree at most n-1. Given a function $f : I \to R^1$ which is not in $\Phi(I)$, we say that $\psi \in \Phi(I)$ is nearer to f than $\varphi \in \Phi(I)$ if

$$|f(i) - \psi(i)| \begin{cases} = 0 & \text{if } f(i) = \varphi(i) \\ < |f(i) - \varphi(i)| & \text{if } f(i) \neq \varphi(i) \end{cases}$$

for all $i \in I$.

The function φ^* is nearest to f if there is no ψ that would be nearer to f than φ^* .

Now, we have proved in [1] that φ^* is nearest to f if and only if $S^+(v) \geq n$, where $v_i = \operatorname{sgn}(f(i) - \varphi^*(i))$, $i \in I$.

So the maximal number of sign changes in a sequence characterizes "nearest" generalized polynomials. Any best approximating element / in l_p or max norm / is clearly a nearest element, hence the result covers all interesting cases of best discrete approximations / [1] /.

An other classical example of approximating functions is the class of splines. It is well known that splines does not constitute a Chebyshev system but a so called weak Chebyshev system. In [1] we showed some similar but weaker characterization theorems as that above for a member of a weak Ch-subspace to be nearest to a given function. In these results not only S^+ but also S^- proved to be important.

In the cores of all approximation results there were purely linear algebraic statements about the solvability of systems of linear inequalities. The algebraic results are interesting also in themselves / see [2],[3]/.

A practical determination of S^+ would be the repetition of the following two steps:

Take $j := \min\{i : v_i \neq 0\}$, $c := j-1$, $a := v_j$, and after that

Step 1. $\begin{cases} \text{If } a.v_{j+1} \leq 0 \text{ then } c:=c+1 \text{ and } a:=-v_j . \\ \text{If } a.v_{j+1} > 0 \text{ then } a:=v_{j+1} . \end{cases}$

Step 2. Let $j:=j+1$ and repeat steps 1,2.

After the $(m-1-\min\{i:v_i\neq 0\})$-times repetition of the above steps we shall have $S^+(v) = c$.

In this procedure many steps are a-priori superfluous in the sense that they surely do not increase the value of c. Say, we have the following block ..+,0,0,0,0,+,.. . It is clear that the last zero in the block does not contribute to $S^+(v)$, i.e. in the step from this zero to + the c is not increased . The last zero in the block ...,+,0,0,0,0,0,-,... behaves similarly . In general, if between two plusses there are even number of zeros or between a plus and a minus there are odd number of zeros, then we have the same situation as described above. We see that the knowledge of such blocks would hopefully increase the speed of computation of $S^+(v)$. For the description of the above effects we introduced a classification of blocks of zeros as follows.

For k=0

$$Z_0^1(v) := \{i \ : \ 1 \leq i \leq m-1, \ v_i . v_{i+1} = -1\} ,$$

$$Z_0^2(v) := \{i \ : \ 1 \leq i \leq m-1, \ v_i . v_{i+1} = +1\} .$$

For $k \geq 1$

$$Z_k^1(v) := \{i+k-1 \ : \ 2 \leq i \leq m-k, \ v_i = v_{i+1} = .. = v_{i+k-1} = 0, v_{i-1} . v_{i+k} = -1\} ,$$

$$Z_k^2(v) := \{i+k-1 \ : \ 2 \leq i \leq m-k, \ v_i = v_{i+1} = .. = v_{i+k-1} = 0, v_{i-1} . v_{i+k} = +1\} .$$

The cardinality of any finite set H is dedoted by $|H|$.

Now we have

(1) $$S^{+}(v) + \sum_{k\geq 0} \left(|Z^{2}_{2k}(v)| + |Z^{1}_{2k+1}(v)|\right) = m - 1 .$$

(2) $$S^{-}(v) = \sum_{k\geq 0} |Z^{1}_{k}(v)| .$$

The numbers S^{+}, S^{-} can be determined using a somewhat "dual" approach. We say that v is weakly alternating [alternating] on $i_1 < i_2 < \dots < i_p \subset I$, if $\varepsilon(-1)^k v_{i_k} \geq 0$ [>0] for all $k=1,2,\dots,p$, where ε is either +1 or -1 .

Now define

$\tilde{S}(v)$ [$\hat{S}(v)$] := max { p : there is $i_1, i_2, \dots, i_{p+1} \subset I$ such that v is weakly alternating [alternating] on $i_1,\dots,i_{p+1}$ } .

We have

(3) $$S^{+}(v) = \tilde{S}(v) , \quad S^{-}(v) = \hat{S}(v)$$

and using these identities, we can prove

(4) $$|\{v : S^{+}(v) = k\}| = 2\binom{m}{k+1}(2^{k+1} - 1) , |\{v : S^{-}(v) = k\}| = 2\binom{m}{k+1} .$$

The total number of different sign vectors is 3^m, hence assuming that (when choosen randomly) each vector can be choosen with the same probability, one can determine using (4) the probabilities $P(S^{+}(v) = k)$, $P(S^{-}(v) = k)$.

In some investigations we needed formulas for the number of different vectors u such that $u_i \neq 0$ for all i and $S^{+}(u) = S^{+}(v)$, [$S^{-}(u) = S^{-}(v)$] . Denoting these nubers by $M(v)$ and $m(v)$, respectively, we can write

(5) $$M(v) = \prod_{k\geq 1} (2k+1)^{|Z^{2}_{2k}(v)|} \cdot (2k)^{|Z^{1}_{2k-1}(v)|} ,$$

(6) $$m(v) = \prod_{k\geq 1} (k+1)^{|Z^{1}_{k}(v)|} .$$

In the references below we list only own papers. They contains references to other authors , but we have to note that the combinatorial investigations of finite sequences of signs of the type presented here were not paid any attention. This is not true for the motivation of these investigations: the study of "nearest" algebraic polynomials goes back to L.Fejér, M.Fekete, J.v.Neumann /early twenties/ and had been continued among others by T.Motzkin, J.L.Walsh, J.Rice and O.Shisha .

References

[1] B.Uhrin, A characterization of generalized juxtapolynomials on finite point sets, in: B. Sz-Nagy , J. Szabados , Eds.: "Functions, Series, Operators ", Proc.of the Riesz-Fejér Memorial Conference, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol 35, North-Holland, Amsterdam-New York, 1983, 1221-1237.

[2] B.Uhrin, "Theorem of Helly and the Existence of Generalized Polynomials with Prescribed Values and Signs", Seminar Notes, Mathematics No. 3 , Hungarian Committee for Applied System Analysis, Budapest, 1975.

[3] B.Uhrin, A characterization of finite Chebyshev sequences in R^n, Lin. Algebra and Appl., 18 /1977/, 59-74 .

[4] B.Uhrin, On two combinatorial identities useful in linear inequalities, In: A.Hajnal, V.T.Sós, Eds.: "Combinatorics", Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol 18, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978, 1081-1090 .

[5] B.Uhrin, Unified approach to the approximation on finite point sets, MTA SZTAKI Tanulmányok /Studies of Comput.and Autumat. Inst.of HAS /, 147/1983, 83-99.

[6] B.Uhrin, "Investigations concerning systems of linear inequalities, random polyhedral sets and quasi-concave functions" Dissertation for the degree of Candidate of Mathematical Sciences /~ Ph.D /, Hungarian Academy of Sciences , Budapest, 1978 / in Hungarian/ .

Несколько комбинаторических результатов для конечных последовательностей знаков

Б. Ухрин

Р е з ю м е

В статье показано несколько комбинаторических тождеств для конечных последовательностей знаков /чисел 0, +1, -1/. Несколько слов о мотивации этих исследований тоже дано в статье. Именно, показалось, что обобщенный многочлен, который является "самым близким" к данной функции может быть характеризован с помощью максимального числа перемен знака в одной последовательности. Используя тождества в статье можно - между прочим - дать быстрые алгоритмы для вычисления максимального числа перемен знака.

MATHEMATICAL LINGUISTICS

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 119-124

СПЕЦИЛИЗИРОВАННЫЕ СЛОВАРИ И АВТОМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА БОЛГАРСКОГО ТЕКСТА

Л.П.ДИМИТРОВА

Институт математики с ВЦ, БАН, София

Задача построения системы, способной перерабатывать неформализованную информацию на естественном языке, предполагает наличие специального математического и информационно-лингвистического обеспечения.

Компонент этого обеспечения - словари и система обслуживания словарей.

Организация словарной базы, анализ методов создания словарей, алгоритмы автоматического построения, редактирования и эксплуатации словарей - это вопросы, стоящие внимания разработчиков информационно-лингвистического обеспечения.

Словарь - это любой упорядоченный, относительно конечный массив лингвистической информации, представленный в виде списка, таблицы или перечня, удобного для размещения в памяти компьютера и снабженного программами автоматической обработки и пополнения.

Словари можно классифицировать либо по характеру лексических единиц, включенных в словарь либо по способу организации словника.

По характеру лексичиских единиц словари подразделяются на словари основ, словари исходных форм слов, словари словоформ и комбинированные словари.

Наибольшой интерес представляют словари основ и словари словоформ.

Словарь основ состоит из списка основ и списка окончаний. Этот словарь очень удобным для автоматической обработки языков флективного типа.

Словарь словоформ состоит из списка всех словоформ определенного подязыка. Для языков аналитического типа выгоднее строит словари словоформ.

По способу организации словников словари подразделяются на частотные (единицы ранжиравань в порядке убывания или возрастания их частот), алфавитные (единицы ранжированы по алфавиту), тезаурусы (словарные единицы сгруппированы по семантическим полям, понятийным группам и т.д.), конкордансы (словарные единицы сгруппированы по ключевым словам, взятым в контекстном окружении) и др.

В последнее время очень широкое распространение получили системы автоматического индексирования. Важным этапом ввода и предварительной обработки информации для них служит первоначальный словарный анализ.

Выделение этого анализа в самостоятельную процедуру объясняется наличием в индексируемых текстах лексических единиц, отождествление которых по словарю основ, используемых в системах автоматического индексирования, является невозможным или нежелательным. К таким лексическим единицам относятся неинформативные слова вводных выражений, обозначения единиц измерения, некоторые сокращения, служебные слова и выражения (предлоги, союзы, частицы, местоимения). В этом случае специально выделяют т.н. словарь предварительного анализа, который обычно содержит около 1000 лексических единиц. По данным статистических исследований на этапе предварительного словарного анализа отождествляются 25% словоформ текста, что подчеркивает важность данного анализа в общем процессе индексирования. Единицы этого словаря представлены в полной форме. Словарь разбит на блоки в соответствии с классами лексических единиц. В процессе автоматического индексирования широко используется система словарей, имеющая важное значение при решении основной задачи индексирования - переводе сообщений с естественного языка на искусственный язык.

Организованные на ЭВМ словари представляют собой массивы кодов слов, где каждому элементу соответствует определенная информация, которая может быть как чисто грамматической, так и включат в себя семантические компоненты. Основой словарной базы при автоматическом индексировании служат словари основ или словоформ, выбираемые в зависимости от конкретных условий. Предпосылками для выбора того или иного словаря является его объем и время работы алгоритма стождествления. По данным объем русского словаря основ в 20-30 раз меньше объема словаря словоформ. Время работы алгоритма отождествления по словарю словоформ значительно меньше, чем по словарю основ. Таким образом, при построений словарей следует руководствоваться минимальным временем поиска и рациональным использованием машинной памяти.

Составление словарей (как словоформ, так и основ слов) является трудоемким процессом, поэтому возникает задача автоматизации этого процесса. Наиболее сложным вопросам, стоящим на пути решения этой задачи, является автоматическое построение словаря основ - создание алгоритмов для выделения основ слов.

В качестве опорной базы для построения такого алгоритма можно использовать конечные буквосочетания словоформ - суффиксы, окончания и их различные комбинации, на основании которых можно осуществлять алгоритмизацию процесса разделения словоформы на основу и окончание путем сравнения конечных символов словоформы с элементами списков (групп) окончаний.

Для автоматического составления словаря болгарских основ используется словарь болгарских окончаний, содержащий 109 элементов. Для правильного сегментирования болгарских словоформ на основу и окончание составлен словарь исключений, содержащий около 7000 единиц. [1]

В последнее время появились немало работ, пока только экспериментальных, по лексической статистике - частотные словари, конкордансы и т.д., ориентированные на изучение и обобщение наблюдаемых эмпирических закономерностей. Эти работы находят приложение в области создания словарей-минимумов, в области машинного перевода, в области моделирования некоторых лингвистических явлений. Частотные словари находят приложение при определение коэффициентов употребительности типа "частота", "распространенность". Кроме этих типов, понятие употребительности обладает еще одно лингвистическое свойство: высказывания об употребительности того или иного явления имеют смысл относительно определенной совокупности текстов или определенной сферы общения, а совокупность таких высказываний есть одновременно высказывание о лингвистических свойствах (характерных черт, признаков) данных текстов или данной сферы общения.

Характерные лингвистические признаки, свойственные ряду текстов или ряду речевых произведений определенной сферы общения - это такие черты, которые выделяют тексты как однородные из полной совокупности текстов, причем однородность, естественно, определяется с точностью до употребительности определенных явлений.

Поэтому понятие употребительности того или иного явления, той или иной группы явлений может использоваться и используется реально в качестве критерия лингвистической однородности речевых произведений (принадлежности к одной теме, одному автору, одному функциональному стилю, одному литературному жанру и т.д.).

В Лаборатории математической лингвистики Института математики с ВЦ, БАН разработан пакет прикладных программ для автоматического составления словарей текстов на болгарском языке. Пакет разработан на языке PL/I и работает в операционной системе ДОС для ЭВМ ЕС1040. Пакет содержит программ для составления и обслуживания словарей, что позволяет дополнять их и печатать в удобном для пользователя виде. Пакетом возможно получить 12 разных видов словарей - словники, конкордансы, частотные словари и др.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л.Димитрова, Е. Паскалева, И.Ненова. Пакет програми за автоматично сегментиране на български текст. Сп. Системи и управление, брой 3, 1981, София.

SPECIALIZED LEXICONS AND AUTOMATIC PROCESSING OF BULGARIAN TEXT

L.P.DIMITROVA

Institute of Mathematics with Computer Centre
of Bulgarian Academy of Sciences

ABSTRACT

The modern computers offer the linguists possibilities of performance of a number of labour-consuming operations supplementing the linguistic and literary research. To help the linguists in these studies, at the Laboratory of Mathematical Linguistics of the Institute of Mathematics with Computer Centre to the Bulgarian Academy of Sciences are implemented research for automatic processing of texts in Bulgarian language, one aspect of which is automatical formation of the different kinds of dictionaries and dictionaries-wordbooks.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 125-129

A SYSTEM FOR AUTOMATIC RETRIEVAL OF LINGUISTIC INFORMATION

L. DIMITROVA, N. ISUSOVA

Institute of Mathematics of Bulgarian Academy of Sciences

Over the last years the problem of the creation of tools for man-machine dialogue in natural language is of great importance. This problem posed before the linguists some very important questions of theoretical and applied aspects. In laboratory around the word, several computer system have been developed that support at least elementary levels of natural-language interaction.

On the other hand, modern computers offer the linguists possibilities of performance of a number of labour-consuming operations supplementing the linguistic and literary research.

We will now describe in brief the result of our research for automatic processing of texts in Bulgarian Language.

This is a dialogue system, written in PASCAL in operation system APPLE-PASCAL for the personal computer APPLE II. The system is intended for users-linguists.

The dialogue system is system for automatical retrieval of the linear context of the given wordforms and word-combinations within the framework of definite boundary criteria.

Since the linear context of the given wordform contains definite linguistic information, its automatical retrieval ensures possibilities for the automatical examination of the use of a given element in speech.

The main functions of the system are:

1. Realization of an algorithm for automatical retrieval of the contextual environment of a given wordform (word-combination) and given boundary criteria in natural language text.
2. Allowing the user-linguists to work with the system in a dialogue regime in Bulgarian language.
3. Formation of the files with natural language texts, wich the system analysed, assurung of possibilities of its updating and modification.
4. Printing information for the content of these natural language-files.

All work files are written on diskettes. The functions of the system are realized by group of subroutines with a monitor. The monitor is written as a main procedure. It realizes the dialogue with the user in Bulgarian language.

The gialogue regime consist of a structures and linguistics tools for exchange of communications between the human and the computer. The main principle of the dialogue consists in the independent choice of the input communication and the completely determinative reaction of the system.

In this system two main kinds of dialogue take place, namely,

1. Menu,
2. The system poses questions, requiring the answer "YES" or "NO".

The first offers the user to select from a limited number of choice and the second - to accept the unique offer or to turn it down. Besides, the system gives the user commands as:

"PLEASE, PRESS THE KEY RETURN."

The user's answers are introduced by the keyboard. The symbolic strings which the system treats, contained the symbols of the Bulgarian and Latin alphabet, figures, space, punctuation marks and so on.

In the process of dialogue in Bulgarian language with the user his request for a service by the system is shaped. The wordform whose occurence in the analysed text and whose contextual environment will be determined automatically and will be printed, is defined by the user's request.

The system proposes the user to specify:

I. WHAT MUST THE STRING-PATTERN BE?

1. Affix.
2. Suffix.
3. Wordform.
4. Word-combination.

II. WHAT WILL CONTEXT'S BOUNDARY CRITERIA BE?

1. Space (in this direction the context is not requested).
2. Definite wordform.
3. Punctuation mark / . , ! ? : ; - ... /.
4. Number of wordforms (a figure, defining the number of words to the left and to the rigth of determined string-pattern in the frame of the context).

III. WHERE DOES THE USER WANT THE RESULT OF THE EXECUTION OF THE SYSTEM?

1. On screen.
2. On paper.
3. On a diskette as a file.

The main program prints the user's requests, analyses it for correctitude, loads the procedure, that performs the desired by the user treatement and activites it. When an uncorrect request appears, the main program prints the corresponding information.

The service, defined by the user's request, is performed by subroutines and functions, distributed in two program's modules.

The first program's module contains the group of procedures and functions for searching of contextual environment in natural language's texts by given wordforms or word-combinations and given boundary criteria of linear or other nature. The searching is realized by posing the given string-pattern on the main natural language's string. The automatic determination of contextual environment of the found in the main string patterns is executed by consecutive retrieval of the elements of the text in the two directions (left and rigth).

The other module contains the program editor. This program requires connection of the editor of the system APPLE-PASCAL. The user has the possibilities to modify his files with the natural language's texts, namely: to delete the text's file (or a part of it), to insert a text into the file, to copy the text's file (or a part of it). The system offers the user some possibilities of the system editor of APPLE-PASCAL.

These patterns and their contextual selection should enable the user to specify as precisely as possible these subset of wordforms and word-combinations that interest him and to retrieve automatically linguistics information about the combinability or uncombinability of the word in a sentence or of the component stems which are in various position within the wordform.

СИСТЕМА ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОЛУЧЕНИЯ ЛИНГВИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Л.П.ДИМИТРОВА, Н.И.ИСУСОВА

Институт математики с ВЦ, БАН

РЕЗЮМЕ

В работе коротко описаны результаты исследований, проводившиеся в Лаборатории математической лингвистики Института математики с ВЦ, БАН, по автоматической обработке текстов на болгарском языке. Рассматривается диалоговая система, предназначена пользователям-лингвистам. Система позволяет автоматически получать линейный контекст заданных словоформ и словосочетаний по заданным граничным критериям. Система дает возможности для автоматического исследования использования данного элемента речи.

MTA SZTAKI Tanulmányok 182/1986 pp 131-137

A PROGRAMMING ENVIRONMENT FOR DEVELOPING NATURAL LANGUAGE PROCESSING PROGRAMS

I. NEOVA

Laboratory of Mathematical Linguistics
Institute of Mathematics
Bulgarian Academy of Sciences

The paper describes a design and an experimental implementation of a programming environment for developing natural language processing programs. The environment supports the creation, modification, execution and debugging of programs written in MicroATNL and can be used as a research tool in the area of language and as an instrument for realization of applied dialogue systems.

INTRODUCTION

The mass distribution of personal computers in the last years presupposes an increase of variety of potential users. Quite often, the users are specialists in different fields and have no professional training in programming. For such a category of users to be able to fruitfully use computers it is of crucial importance that convenient interfaces to computers be available, as well as the possibility that a given problem be set and solved in the terms of the corresponding domain. The development of linguistic processors to applied systems with different applications is one of the possible approaches to the problem of non-professional users and computer interaction. The programming environment for developing natural language processing programs discussed here proposes means for the automation of linguistic processors programming and can be used in the building of natural language interface to applied dialogue systems, as well as an experimental tool in language investigations.

THE MICROATNL LANGUAGE

In the last 10 years, in the development of linguistic processors the formalism of the Augmented Transition Networks (the so-called ATN-grammars) is widely used 1 . This formalism can be looked upon as a meta-level with respect to the description of natural language which is the reason why within the ATN approach different models of language and language communication can be successfully realized. The use of the ATN-formalism is in a sense a classical approach to the representation of linguistic knowledge for the purposes of natural language communication with computers, which has led to the development, on the basis of the basic formalism, of a great number of different versions, or ATN-dialects. The existing realizations of such languages are usually superstructures of given LISP systems and can be used on big computers in an interactive mode.

The MicroATNL is a version for microcomputers of the linguistic knowledge representation language ATNL 2 . It includes an appropriate set of means, necessary for the development of linguistic processors and for whose realization the widely spread personal computers have sufficient resources.

As a language for a description of algorithms, developed on the basis of the ATN-formalism, the MicroATNL includes two basic

groups of means:
a) means for description of vocabulary of the natural language phrases being processed
b) means for description of the algorithms for analysis of input and synthesis of output phrases.
Correspondingly, each MicroATNL-program includes two basic sections - a vocabulary description division and a network description division.

GENERAL CHARACTERISTICS OF THE MICROATNL PROGRAMMING ENVIRONMENT

The programming environment for developing natural language processing programs supports the creation, modification, execution and debugging of programs written in MicroATNL, the whole processing being made on a personal computer. The ready programs may be executed on the computer they are developed by, as well as on other types of computers. Two basic aims are pursued by the implementation:
a) portability of the programming environment and the translation results
b) use of reasonable amount of computational resources in the operation mode.

Following the above stated aims, an implementation scheme is chosen based on translation of the program into an intermediate representation with a following interpretation of this representation. If a suitable intermediate representation and tools for the implementation are chosen, this approach ensures portability of the implementation and use of reasonable amount of computational resources for making it operational.

The MicroATNL-programs are represented in the environment in two basic forms - textual and intermediate. In current version of the programming environment the textual form is an input to the translator and is used for program printing or visualization on the screen as well as for transference of programs to other computers and carriers. The intermediate form is a set of list and tree-like structures and is used in the interpretation and debugging of the programs. A version of this form is used also in program creation and modification. The intermediate form is independent of the architecture of a particular computer system and of a particular data representation on external carriers. It allows an effective program interpretation, being at the same time close enough to the source program, which enables a relatively easy implementation of a system for a dynamic program debugging in terms of the source language.

The programming environment includes the following components:
a) a full-screen language-oriented editor
b) a translator/interpreter of MicroATNL-programs
c) a tool for interactive program debugging in terms of the source language.
In the realization the standard means of the high level language Pascal are used, which ensures its utilization on a large class of personal computers.

TRANSLATOR, INTERPRETER AND DEBUGGER

The translator is the main component of the programming environment. It ensures the transformation of MicroATNL-programs from textual to intermediate form. The process of translation includes building a table of symbols of the source program, encoding the identifiers in accordance with the functions they execute, and representation of the program in the form of the chosen data structures. The formation of the intermediate form is carried out simultaneously with the syntactic and semantic analysis of the program. It is a one-pass syntactic analysis that is carried out by the recursive descent method. The intermediate form obtained in this way could be directly interpreted or stored linearly on an external data carrier and used for subsequent interpretation.

The interpretation of the MicroATNL-program is carried out by a program interpreter and in the cases when it is not immediately after the translation it begins with the input of the intermediate form into the main memory and its reverse transformation from linear into standard form. The separate language constructions are interpreted by corresponding procedures in correspondence with their semantics. Special procedures ensure the execution of some basic actions connected with the mechanism of memory use in the ATN-formalism, with the initial processing of input phrase, etc.

The debugger operates on programs in an intermediate form, using additionally the table of symbols. It supplies the means for execution and interactive program debugging in terms of the source language. It allows a step-by-step execution, monitoring of the values of sertain objects, interruption of execution under certain conditions, etc.

LANGUAGE-ORIENTED EDITOR

The creation and modification of MicroATNL-programs is accomplished by means of a full-screen language-oriented editor which can be used for language training means as well. The editor uses knowledge about the program structure in order to direct its construction and modification as well as to detect and signal for errors as soon as possible after their entering. MicroATNL is a language with a regular syntactic structure. The use of language-oriented editing allows for concentration upon the language notions and frees the programmer from the obligation to be aware whether he follows syntactic details or not. The editor rules out the possibility to build a syntactically incorrect program. The basic possibilities ensured are:

a) movement in the program text
b) formation of the program text
c) correction of the program.

The movement in the program is accomplished along the elements of its structure. The text formation is made by means of templates, text editing being used for entering and modification of separate elements. The correction of the program is accompanied by modifying the intermediate form as well as the text on the screen. At any time the edited program can be transformed into a formatted text file for a following translation and execution.

CONCLUSION

The programming environment for developing natural language processing programs is in the phase of experimental realization. Developed are the translator and interpreter, the language-oriented editor being in a process of realization at the moment. In its design and programming participate the graduate-student Elka Mavrodieva and the student Ivan Derjanski. After its completion, the development will be capable of being used as a practically helpful means in linguistic investigations and in creation of applied systems understanding restricted natural language.

REFERENCES

1) Woods, W.A., Transition Network Grammars for Natural Language Analysis, Communications of the ACM, 13, 1970, pp.591-606.

2) Хорошевский, В.Ф., Представление лингвистических знаний на базе АТН-формализма, М., ВЦ АН СССР, 1982.

3) Nenova I., On an implementation of the ATNL-language, in: Bibel, W. and Petkoff, B.(eds.), Artificial Intelligence Methodology Systems Applications, North-Holland, Amsterdam, 1984.

СРЕДА ДЛЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

Ирина Ненова

В статье описывается проект и экспериментальная реализация среды программирования, предназначенной для разработки программ обработки естественно-языковых фраз. Среда предоставляет средства для создания, модифицирования, отладки и выполнения программ, написанных на языке МикроАТНЛ и может быть использована как средство для экспериментальных исследований в области языка и в качестве инструмента для создания прикладных систем, воспринимающих ограниченный естественный язык.

1985-BEN MEGJELENTEK:

166/1985 Radó Péter: Információs rendszerek számitógépes tervezése

167/1985 Studies in Applied Stochastic Programming I. Szerkesztette: Prékopa András /utánnyomás/

168/1985 Böszörményi László - Kovács László - Martos Balázs - Szabó Miklós: LILIPUTH

169/1985 Horváth Mátyás: Alkatrészgyártási folyamatok automatizált tervezése

170/1985 Márkus Gábor: Algoritmus mátrix alapu logaritmus kiszámitására kriptográfiai alkalmazásokkal

171/1985 Tamás Várady: Integration of free-form surfaces into a volumetric modeller

172/1985 Reviczky János: A számitógépes grafika terület-kitöltő algoritmusai

173/1985 Kacsukné Bruckner Livia: Mozgáspálya generálás bonyolult geometriáju felületek 2 1/2D-s NC megmunkálásához

174/1985 Bolla Marianna: Mátrixok spektrálfelbontásának és szinguláris relbontásának módszerei

175/1985 Hannák László, Radó Péter: Adatmodellek, adatbázis-filozófiák

176/1985 Számitógépes képfeldolgozási és alakfelismerési kutatók találkozója.
Szerkesztette: Csetverikov Dmitirj,
Főglein János és Solt Péter

177/1985 Gyárfás András: Problems from the world surrounding perfect graphs

178/1985 PUBLIKÁCIÓK'84
Szerkesztette: Petróczy Judit