tanulmányok

179 / 1986

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

EGY VEGES CRISS-CROSS MÓDSZER ÉS ALKALMAZÁSAI

Irta:

TERLAKY TAMÁS

Tanulmányok 179/1986

A kiadásért felelős:

Dr. KEVICZKY LÁSZLÓ

ISBN 963 311 208 7

ISSN 0324-2951

86.355 Alfaprint

TARTALOMJEGYZÉK

O. Bevezetés.

Lineáris programozási feladatok megoldására általánosan elfogadott, jól bevált módszer a szimplex módszer /Dantzig [7]/. A szimplex módszer hatékonysága gyakorlati feladatokon általában kielégítő, elméletileg azonban nem hatékony, nem polinomiális algoritmus. Polinomiális algoritmust adott lineáris programozási feladatok megoldására Khaciján[25,26], algoritmusa azonban már közepes méretű feladatok esetében is végrehajthatatlan a a megkívánt számítási pontosság miatt.

A szimplex módszerrel kapcsolatban jelentkező másik elméleti és alkalmazási probléma, hogy degenerált esetben ciklizálás fordulhat elő. A ciklizálás kiküszöbölésére szolgál a lexikografikus szimplex módszer /Charnes [5,6]/ és a Bland [3] által adott pivotálási szabály. Mindkét módszer azt a lehetőséget használja ki, hogy nem egyértelmű a pivot elem kiválasztása a szimplex módszernél.

A szimplex módszer két fázisban oldja meg a lineáris programozás feladatát, ez pedig a lineáris programozás tömeges oktatásának elterjedésével /mérnökök, közgazdászok stb./, mivel a két fázis és főleg az áttérés az első fázisról a másodikra nehezen érthető nem matematikusok számára, felvetette annak igényét, hogy egy fázisban oldjuk meg a lineáris programozási feladatokat. Egy fázisú módszer megalkotására történt próbálkozás a Zionts [23,24] által adott criss-cross módszer publikálásával. Zionts módszere nem követelt meg sem primál,sem duál megengedett megoldást indulómegoldásként. Tetszőleges bázisból indulva primál és duál iterációkat váltogatva jut el optimális megoldásig. Zionts módszere megegyezik a primál illetve duál szimplex módszerrel,amennyiben primál illetve duál megengedett megoldást kapunk. Az algoritmus végességét mindezideig nem sikerült bizonyítani, ez továbbra is nyitott kérdés marad.

Az általunk az I. fejezetben közölt criss cross módszer véges, és Zionts módszeréhez hasonlóan tetszőleges bázisból indítható. Primál és duál típusú iterációkat alkalmazva véges lépésben optimális megoldáshoz jutunk, ha létezik optimális megoldás. Criss-cross módszerünk külömbözik Zionts módszerétől abban a vonatkozásban, hogy nem felváltva alkalmazzuk a primál és duál tipusú iterációkat, valamint abban, hogy primál vagy duál megengedett megoldás esetében sem egyezik meg a primál vagy duál szimplex módszerrel. Esetünkben az is lehetséges, hogy primál illetve duál megengedett megoldás után ismét olyan megoldást kapunk, mely se nem primál,se nem duál megengedett.

Eljárásunk Zionts módszerének alapötletén alapszik, de a módszer konstruálásában és végességének bizonyításakor a

Bland[3] által közölt ortogonalitási tulajdonságokat használtuk fel.

A criss-cross módszer megegyezik a primál illetve duál szimplex módszer Bland féle változatával abban a speciális esetben, amennyiben a jobboldal, illetve a célfüggvény az azonosan nulla vektor. Igy módszerünkkel megoldhatjuk az $\{yA\leq c\}$ illetve az $\{Ax=b,\ x\geq 0\}$ feladatokat is.

A II. fejezetben közölt algoritmusok a magyar módszer alapötletén alapulnak és a criss-cross módszer speciális eseteit használják fel az adódó részfeladatok megoldásában. A magyar módszer alapötlete az alábbi: Vegyünk egy primál duál feladatpárt és a hozzá tartozó komplementaritási feltételeket. Egy primál megengedett megoldásból indulva, ehhez komplementáris duál megoldást konstruálunk. Az algoritmus egyes lépéseiben a primál megengedett megoldást úgy javítjuk, a duál megoldást úgy módosítjuk, hogy a primál célfüggvény értéke minden lépésben határozottan javul, miközben a komplementaritási feltételek fennállnak. Ezt a javítást addig ismételjük, míg a duál feltételek is teljesülnek, azaz míg optimális megoldást nem kapunk. Algoritmusainkban a magyar módszer fent közölt általános alapötletét, nem pedig konkrét gráfelméleti tartalmát használtuk fel. Bizonyítjuk algoritmusaink konvergenciáját.

Bemutatjuk, miként adódik a primál illetve duál szimplex módszer egy változata a fenti algoritmusok speciális eseteként. Ezen szimplex módszerek degeneráció esetén a Bland féle pivot szabályt alkalmazzák, nem degenerált esetben csak a bázisba be illetve onnan kikerülő elem választására alkalmazzuk a Bland féle kiválasztási szabályt. Ezen szimplex módszerek végessége direkt módon, Bland [3] bizonyításának adaptálásával is bizonyítható lenne, ez azonban az általánosabb módszerek végességéből is következik.

Igy lehetővé válik számunkra, hogy a véges criss-cross módszerre alapozva vezessük be a szimplex módszer külömböző változatait.

A III. fejezetben a véges criss-cross módszer alkalmazása található irányított matroidok esetében. Bizonyítjuk a criss-cross módszer végességét ebben az általános esetben is, és így új konstruktív bizonyítást adunk a Farkas lemma általánosítására, Minty szinezési lemmájának általánosítására és az általános dualitási tételre /Bland [2]/. A criss-cross módszer irányított matroidokon is könnyen végrehajtható, míg a Bland által adott véges pivotálási szabály nagyon komplikált és a pivot elemet sem adja meg közvetlenül.

Rockafellar [17] vetette fel a lineáris programozás kombinatorikus absztrakciójának lehetőségét, mely absztrakciót Bland[2] valósított meg irányított matroidok segítségével. Mivel a criss-cross módszer irányított matroidokon is ugyanúgy véges, mint lineáris programozási feladatok esetében, így látható, hogy a criss-cross módszer a lineáris programozási feladatok kombinatorikai tulajdonságaira épül.

Nyitott kérdés még a criss-cross módszer és változatainak hatékonysága. Mindezideig eldöntetlen, hogy az algoritmus polinomiális-e vagy sem. Ezen kérdések eldöntése további kutatás tárgyát képezik.

A használt jelölésekkel kapcsolatban a következőket jegyezzük meg. A mátrixokat nagy, a vektorokat kis latin betűkkel jelöljük. A skalárokat és a vektorok koordinátáit a megfelelő görög betűkkel jelöljük. Az indexhalmazokat J betűvel jelöljük, továbbá $\|J\|$ jelöli a J indexhalmaz elemeinek számát. J_B-vel jelöljük a B bázishoz tartozó vektorok indexeinek halmazát. Nem külömböztetünk meg sor és oszlop vektort, ha egy vektorral balról szorzunk egy mátrixot vagy vektort, akkor azon sorvektor értendő. Egy T mátrix i-ik sorát $t^{(i)}$-vel, j-ik oszlopát t_j-vel jelöljük, továbbá $t_{(j)}$ jelöli a T szimplex tábla j-ik oszlopa által generált /a sortér dimenziójával megegyező dimenziójú/ vektort.

A III. fejezetben a matroidelméletben általánosan elfogadott, Bland[2] által közölt jelöléseket használjuk.

Végezetül meg szeretném köszönni Klafszky Emilnek, aspiránsvezetőmnek sokoldalú segítségét, értékes tanácsait.

I.A criss-cross módszer és végességének bizonyítása

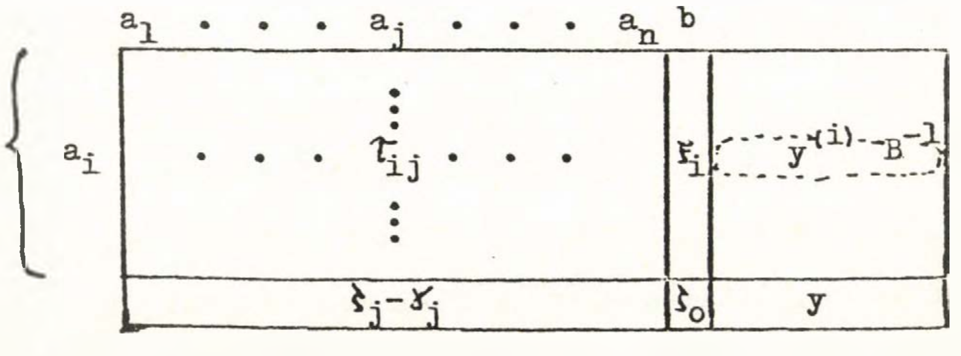
Ebben a fejezetben a bázistábla alaptulajdonságainak összefoglalása után közöljük a véges criss-cross módszert definiáló pivotálási szabályt, majd bizonyítjuk az eljárás végességét.

I.1.A bázistábla alaptulajdonságai

Tekintsük az alábbi lineáris programozási feladatpárt:

min cx	max yb
feltéve, hogy $Ax=b$	feltéve, hogy $yA\leqq c$
$x\geqq 0$	

Ahol A tetszőleges m-szer n-es mátrix /feltehetjük, hogy rang$(A)=m$/, $c=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, $x=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $b=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$. Egy adott B bázisnak megfelelően írjuk fel a bázistáblát. Megjegyezzük, hogy a tábla i-ik során az a_i bázisvektorhoz tartozó sort értjük eltérően a mátrixok sorainak szokásos sorszámozásától.



/ 1.ábra /

Jól ismert, hogy $y=c_B B^{-1}$, $z=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=c_B B^{-1}A=yA$ és $\zeta_o=c_B x_B=yb$ ahol c_B illetve x_B a c illetve x vektor J_B-hez tartozó koordinátáit tartalmazza. Legyen $t^{(i)}=(\tau_{i1},\dots,\tau_{in})=$ $=y^{(i)}A$ ha $i\in J_B$ és $t_{(j)}=(\tau_{(j)1},\dots,\tau_{(j)n})$ ha $j\notin J_B$, ahol

$$\tau_{(j)i}=\begin{cases}\tau_{ij} & \text{ha } i\in J_B\\ -1 & \text{ha } i=j\\ 0 & \text{máskor.}\end{cases}$$

Az alábbiakban közölt definíciók, észrevételek jól ismertek, illetve könnyen ellenőrizhetők. Bizonyításukra most nem térünk ki, a bizonyítások megtalálhatók például [7,16]-ban.

<u>1.Definició:</u> Az a_i vektor <u>nem primál megengedett</u>, ha $\xi_i<0$. Ha x bázismegoldás, akkor $i\in J_B$.

<u>2.Definició:</u> Az a_j vektor <u>nem duál megengedett</u> , ha $\zeta_j-\gamma_j>0$. Ha y bázismegoldás, akkor $j\notin J_B$.

<u>3.Megjegyzés:</u> Ha x primál megengedett, y duál megengedett és $(yA-c)x=0$ akkor x és y optimális megoldások.

Egy bázistáblához tartozó x és y megoldások mindig kielégítik az $(yA-c)x=0$ komplementaritási feltételt, így bázistábla esetén $x\geq 0$, $z-c\leq 0$ elégséges feltétele az optimalitásnak.

Az alábbi megjegyzéseink már egy adott bázistáblára, az abból nyerhető információkra vonatkoznak. Jelölje Lin/A/ az A mátrix sorvektorai által kifeszített alteret R^n-ben.

<u>4.Megjegyzés:</u> Minden $i\in J_B$ esetén $t^{(i)}\in$ Lin/A/, mivel $t^{(i)}=e_k B^{-1}A$ ha az a_i vektor a k-ik elem a B bázisban.

5.Megjegyzés: Minden $j \notin J_B$ esetén $t_{(j)} \perp Lin/A/$, mivel $At_{(j)}=BB^{-1}a_j-a_j=0$.

6.Megjegyzés: Mivel $z=yA$, így $z \in Lin/A/$. Igy tetszőleges két y', y'' bázismegoldás esetén $(z'-c)-(z''-c) \in Lin/A/$.

7.Megjegyzés: Tetszőleges két x', x'' megoldás esetén $/Ax'=b$, $Ax''=b/$ $x'-x'' \perp Lin/A/$, mivel $A(x'-x'')=b-b=0$.

8.Megjegyzés: Ha $t_{(j)} \leq 0$ valamely $j \notin J_B$ esetén, akkor tetszőleges $\bar{x}$ primál megengedett megoldás esetén $\bar{x}-\vartheta t_{(j)}$ is primál megengedett megoldás minden $\vartheta \geq 0$ esetén. Ha $t_{(j)}$ tetszőleges, akkor $A(\bar{x}-\vartheta t_{(j)})=b$ igaz minden $\vartheta \geq 0$ esetén, de $\bar{x}-\vartheta t_{(j)} \geq 0$ nem feltétlenül áll fenn.

9.Megjegyzés: Ha $t^{(i)} \geq 0$ valamely $i \in J_B$ esetén, akkor tetszőleges $\bar{y}$ duál megengedett megoldás esetén $\bar{y}-\vartheta y^{(i)}$ is duál megengedett megoldás, ahol $\vartheta \geq 0$.

Most két lemmát bizonyítunk, melyek biztosítják eljárásunk végrehajthatóságát.

1.Lemma: Ha egy B' bázisnál $\xi_i'<0$ és $t^{(i)'} \geq 0$ valamely $i \in J_{B'}$ esetén, akkor nem létezik primál megengedett megoldás.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy létezik B'' primál megengedett bázis és a neki megfelelő x'' primál megengedett megoldás. Ekkor 4. és 7.Megjegyzés szerint $(x'-x'')t^{(i)'}=0$, azaz

$$\xi_i'=\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}'\xi_j'',$$

átrendezve

$$\xi'_i=\xi''_i+\sum_{j\notin J_{B'}}\tau'_{ij}\xi''_j$$

Mivel feltevésünk szerint $t^{(i)'}\geqq 0$ és $x''\geqq 0$, igy $0>\xi'_i\geqq\xi''_i$ ami ellentmondás, lemmánkat bebizonyítottuk.

<u>2.Lemma:</u> Ha egy B' bázisnál $\zeta'_j-\gamma_j>0$ és $t'_{(j)}\leqq 0$ valamely $j\notin J_{B'}$ esetén, akkor nem létezik duál megengedett megoldás.

<u>Bizonyítás:</u> Tegyük fel indirekt, hogy létezik B'' duál megengedett bázis, azaz $z''-c\leqq 0$. Ekkor 5. és 6.Megjegyzések szerint $[(z'-c)-(z''-c)]t'_{(j)}=0$, azaz

$$\zeta'_j-\gamma_j=-\sum_{i=1}^{n}(\zeta''_i-\gamma_i)\tau'_{(j)i}$$

rendezve

$$\zeta'_j-\gamma_j=\zeta''_j-\gamma_j-\sum_{i\in J_{B'}}(\zeta''_i-\gamma_i)\tau'_{ji}$$

Mivel feltevésünk szerint $z''-c\leqq 0$ és $t'_{(j)}\leqq 0$ így $0<\zeta'_j-\gamma_j\leqq\zeta''_j-\gamma_j$ ami ellentmondás, lemmánkat beláttuk.

A továbbiakban ismertetjük a criss-cross módszert definiáló pivotálási szabályt.

I.2. A criss-cross módszer

A criss-cross módszer bázistáblák sorozatán halad végig. A pivotelem kiválasztása után a bázistranszformációt a szokásos módon hajtjuk végre. Rögzítsük az eljárás idejére a változók egy tetszőleges sorrendjét. A criss-cross módszert definiáló pivotálási szabály egy adott bázistábla esetén az alábbi.

P.Pivotálási szabály:

/a/ /i/ Ha $x \geq 0$ és $z-c \leq 0$ akkor 3.Megjegyzés szerint optimális megoldásnál vagyunk. Az eljárás véget ért.

/ii/ Ha /i/ nem áll fenn, legyen

$k=\min\{i \mid \xi_i<0 \text{ vagy } \xi_i-\gamma_i>0 \quad i=1,\dots,n\}$.

/b/ /i/ Ha $\xi_k<0$ és $t^{(k)} \geq 0$ akkor 1. Lemma szerint nincs primál megengedett megoldás. Az eljárás véget ért.

/ii/ Duál transzformáció

Ha /i/ nem áll fenn, legyen $s=\min\{j \mid \tau_{kj}<0 \quad j \notin J_B\}$.

Az a_s vektor bekerül a bázisba és a_k távozik.

/c/ /i/ Ha $\xi_k-\gamma_k>0$ és $t_{(k)} \leq 0$ akkor 2.Lemma szerint nincs duál megengedett megoldás. Az eljárás véget ért.

/ii/ Primál transzformáció

Ha /i/ nem áll fenn, legyen $r=\min\{i \mid \tau_{ik}>0 \quad i \in J_B\}$.

Az a_k vektor bekerül a bázisba és a_r távozik.

A fenti pivot szabály alkalmazásával hajtsuk végre rendre a bázistranszformációkat, az így adódó módszert nevezzük criss-cross módszernek.

A criss-cross módszerben a bázisba bejövő és a bázisból kikerülő vektor egyértelműen meghatározott, mivel $\xi_i<0$ és $\zeta_i-\gamma_i>0$ egyidejűleg nem fordulhat elő, ugyanis $\xi_i=0$ ha $i\notin J_B$ és $\zeta_i-\gamma_i=0$ ha $i\in J_B$. Egyértelműen adódik az is, hogy primál vagy duál iterációt hajtsunk végre, így ha lerögzítettük a változók egy sorrendjét, akkor a kiinduló bázis egyértelműen meghatározza az algoritmus további menetét.

A criss-cross módszer az /ai/, /bi/ vagy /ci/ esetnél ér véget, amikor optimális megoldást kaptunk, illetve a táblázatból látható, hogy nincs primál vagy duál megengedett megoldás.

Mielőtt a criss-cross módszer végességét bizonyítanánk, a módszert egy egyszerű példán illusztráljuk.

Példa.

Az alábbi, Zionts[23] által adott, és az általa javasolt criss-cross módszerrel is megoldott feladatot oldjuk meg. A megoldást az ugynevezett rövid táblán mutatjuk be, azaz a bázisnak megfelelő triviális táblarészt elhagyjuk.

$$\min(-3\xi_1+4\xi_2)$$

$$\begin{aligned} \xi_1+2\xi_2 &\geq 2 \\ 3\xi_1+\xi_2 &\geq 4 \qquad \xi_1\geq 0,\ \xi_2\geq 0 \\ \xi_1-\xi_2 &\leq 1 \\ \xi_1+\xi_2 &\leq 3 \end{aligned}$$

Induló megoldás

	a_1	a_2	
a_3	-1	-2	-2
a_4	-3	-1	-4
a_5	1	-1	1
a_6	1	1	3
	3	-4	0

Magyarázat

Nem megengedett az a_1, a_3, a_4 vektor. Primál transzformációval kezdünk, mivel $\xi_1 - \gamma_1 = 3$, azaz az a_1 vektor nem duál megengedett. Az a_5 vektor távozik a bázisból.

Az első iteráció után

	a_5	a_2	
a_3	1	-3	-1
a_4	3	-4	-1
a_1	1	-1	1
a_6	-1	2	2
	-3	-1	-3

Nem megengedett az a_3, a_4 vektor. Duál iteráció következik, mivel $\xi_3 < 0$, azaz az a_3 vektor nem primál megengedett. Az a_2 vektor jön be a bázisba.

A második iteráció után

	a_5	a_3	
a_2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
a_4	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
a_1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
a_6	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$

Optimális megoldás!

A feladat megoldásához egyel kevesebb iteráció kellett mint Zionts[23] módszerének alkalmazásakor. A kétfázisú szimplex módszer alkalmazásakor, ha Bland[3] pivotálási szabályát alkalmazzuk akkor hét iteráció szükséges a feladat megoldásához. Természetesen ezekből az adatokból nem szabad messzemenő következtetéseket levonnunk.

I.3. A criss-cross módszer végességének bizonyítása

A módszer bázismegoldásokon halad keresztül. Mivel véges sok külömböző bázis van, így a criss-cross módszer végességéhez csak azt kell belátnunk, hogy nem ciklizálhat. Amenynyiben beláttuk, hogy ciklizálás nem fordulhat elő, akkor véges sok lépés után /ai/, /bi/ vagy /ci/ esetnél ér véget az algoritmus.

<u>Tétel:</u> A P.Pivotálási szabály által definiált criss-cross módszer nem ciklizálhat.

<u>Bizonyítás:</u> Tegyük fel indirekt, hogy eljárásunk ciklizál. Legyen J^* azon indexek halmaza, melyek a ciklus során be illetve kikerültek a bázisból. Megjegyezzük, ha $i \notin J^*$ akkor az a_i vektor a ciklus során vagy végig a bázisban volt, vagy végig a bázison kívül volt. Legyen $q=\max\{i \mid i \in J^*\}$.

Vizsgáljuk azt a két helyzetet, amikor a_q bekerül illetve amikor a_q kikerül a bázisból a ciklus során. Legyen a_r az a_q helyett kilépő és a_s az a_q helyett a bázisba belépő vektor. Legyen B' az előbbi , B'' az utóbbi bázis és külömböztessük meg a két bázistábla elemeit ' illetve ''-vel.

A transzformációk típusa szerint az alábbi négy esetet kell megkülömböztetnünk.

/α/ a_q primál transzformációnál kerül be és primál transzformációnál kerül ki a bázisból.

/β/ a_q primál transzformációnál kerül be és duál transzformációnál kerül ki a bázisból.

/γ/ a_q duál transzformációnál kerül be és primál transzformációnál kerül ki a bázisból.

/δ/ a_q duál transzformációnál kerül be és duál transzformációnál kerül ki a bázisból.

Vizsgáljuk rendre a fenti eseteket, mind a négy esetben ellentmondásra fogunk jutni, így egyik eset sem lehetséges.

/α/ Primál transzformációnál, B' bázis esetén a_q bejön a bázisba és a_r távozik, valamint primál iterációnál B'' bázis esetén a_q távozik a bázisból és a_s kerül be a bázisba.

A P.Pivotálási szabály alapján z'-c és $t''_{(s)}$ vektorok az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

/1'/ $\zeta'_q-\gamma_q>0$ /1''/ $\tau''_{(s)q}>0$

/2'/ $\zeta'_j-\gamma_j\leq 0$ $j<q$ /2''/ $\tau''_{(s)q}\leq 0$ $j<q$

A 6. és 8.Megjegyzéseket figyelembe véve fennáll az alábbi:

$$0=[(z'-c)-(z''-c)]t''_{(s)}$$

Felhasználva, hogy $\zeta_j-\gamma_j=0$ $j\epsilon J_B$ és $t''_{(s)}$ definícióját kapjuk:

$$0=\sum_{j\epsilon J_{B''}\setminus J_{B'}}(\zeta'_j-\gamma_j)\tau''_{(s)j}-(\zeta'_s-\gamma_s)+(\zeta''_s-\gamma_s)$$

Figyelembe véve /2',2''/ tulajdonságokat, valamint, hogy s<q és $\zeta''_s-\gamma_s>0$ kapjuk, hogy

$$0>(\zeta'_q-\gamma_q)\tau''_{(s)q}$$

ami /1',1''/ tulajdonságok szerint lehetetlen, így ez az eset nem lehetséges.

/β/ Primál transzformációnál, B' bázis esetén a_q bejön a bázisba és a_r távozik, valamint duál transzformációnál B'' bázis esetén a_q távozik a bázisból és a_s kerül be a bázisba.

A P.Pivotálási szabály alapján a $z'-c$, $z''-c$, x' és x'' vektorok az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

/1'/ $\zeta'_q-\gamma_q>0$		/1''/ $\xi''_q<0$	
/2'/ $\zeta'_j-\gamma_j\leq 0$	$j<q$	/2''/ $\xi''_j\geq 0$	$j<q$
/3'/ $\xi'_j\geq 0$	$j<q$	/3''/ $\zeta''_j-\gamma_j\leq 0$	$j<q$

A 6. és 7.Megjegyzéseket figyelembe véve fennáll az alábbi:

$$0=\left[(z'-c)-(z''-c)\right](x'-x'')$$

Felhasználva, hogy $\zeta_j-\gamma_j=0$ $j\in J_B$ és $\xi_j=0$ $j\notin J_B$ kapjuk:

$$0=-\sum_{j\in J_{B''}\setminus J_{B'}}(\zeta'_j-\gamma_j)\xi''_j-\sum_{j\in J_{B'}\setminus J_{B''}}(\zeta''_j-\gamma_j)\xi'_j$$

Figyelembe véve /2',2'',3',3''/ tulajdonságokat

$$0\leq(\zeta'_q-\gamma_q)\xi''_q$$

ami /1',1''/ tulajdonságok szerint ellentmondás, így ez az eset sem lehetséges.

/γ/ Duál transzformációnál B' bázis esetén a_q bejön a bázisba és a_r távozik, valamint primál transzformációnál B'' bázis esetén a_q távozik a bázisból és a_s kerül be a bázisba.

A P.Pivotálási szabály alapján a $t^{(r)'}$ és $t''_{(s)}$ vektorok az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

/1'/ $t'_{rq}<0$		/1''/ $t''_{(s)q}>0$	
/2'/ $t'_{rj}\geq 0$	$j<q$	/2''/ $t''_{(s)j}\leq 0$	$j<q$

Az 5. és 8.Megjegyzéseket figyelembe véve fennál az alábbi:

$$0=t^{(r)'}t''_{(s)}$$

Felhasználva $t''_{(s)}$ és $t^{(r)'}$ definicióját kapjuk:

$$0=\sum_{j\in J_{B''}\setminus J_{B'}} \tau'_{rj}\tau''_{(s)j}+\tau''_{(s)r}-\tau'_{rs}$$

Figyelembe véve /2',2''/ tulajdonságokat, valamint hogy $r,s<q$ kapjuk, hogy

$$0\leq\tau'_{rq}\tau''_{(s)q}$$

ami /1',1''/ tulajdonságok szerint ellentmondás, így ez az eset sem lehetséges.

/δ/ Duál transzformációnál B' bázis esetén a_q bejön a bázisba és a_r távozik, valamint duál transzformációnál B'' bázis esetén a_q távozik a bázisból és a_s kerül be a bázisba.

A P.Pivotálási szabály alapján a $t^{(r)'}$ és az x'' vektorok az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek.

/1'/ $\tau'_{rq}<0$ /1''/ $\xi''_q<0$

/2'/ $\tau'_{rj}\geq 0$ $j<q$ /2''/ $\xi''_j\geq 0$ $j<q$

A 7. és 8.Megjegyzéseket figyelembe véve fennáll az alábbi:

$$0=t^{(r)'}(x'-x'')$$

Felhasználva $t^{(r)'}$ definícióját és, hogy $\xi_j=0$ $j\in J_B$ kapjuk:

$$0=\xi'_r-\xi''_r-\sum_{j\in J_{B''}\setminus J_{B'}} \tau'_{rj}\xi''_j$$

Figyelembe véve /2',2''/ tulajdonságokat, valamint, hogy $r<q$ és $\xi'_r<0$ kapjuk, hogy

$$0>\tau'_{rq}\xi''_q$$

ami /1',1''/ tulajdonságok szerint lehetetlen, így ez az eset sem lehetséges.

Mivel mind a négy lehetséges esetben ellentmondásra jutottunk, így a criss-cross módszernél ciklizálás nem fordulhat elő, azaz véges számú iteráció után véget ér.

I.4.Megjegyzések a criss-cross módszer alkalmazásához

Ha eljárásunk a /bi/ vagy /ci/ esetnél ér véget, akkor azt tudjuk, hogy nem létezik primál illetve duál megengedett megoldás. Ekkor vizsgálhatjuk azt a kérdést, hogy a /bi/ illetve /ci/ esetben létezik-e duál illetve primál megengedett megoldás. Ennek a kérdésnek az eldöntésére egyszerű eljárást tudunk adni. Az első esetben legyen $b=0$ /$x=0$/ a második esetben legyen $c=0$ /$z-c=0$/ a továbbiakban és így alkalmazzuk a criss-cross módszert. Ennek eredményeként, mivel eljárásunk véges a /bi/ esetben vagy azt kapjuk, hogy /ci/ is fennáll, azaz duál megengedett megoldás sem létezik, vagy duál megengedett megoldásnál ér véget eljárásunk. A /ci/ esetben vagy primál megengedett megoldást kapunk, vagy /bi/ eset is előáll, azaz primál megengedett megoldás sem létezik.

Megjegyezzük, hogy $b=0$ /$x=0$/ illetve $c=0$ /$z-c=0$/ esetén a criss-cross módszer a primál illetve duál szimplex módszerre redukálódik, ha a szimplex módszer esetében a Bland[3] által megfogalmazott pivotálási szabályt alkalmazzuk. Ezek a speciális esetek a szimplex módszer első fázisa helyett is alkalmazhatók primál illetve duál megengedett induló megoldás konstruálására, illetve annak eldöntésére, hogy az $\{Ax=b,\ x\geq 0\}$ illetve $\{yA\leq c\}$ feladatok megoldhatók-e. Ezt a két speciális esetet fogjuk felhasználni értekezésünk II. részében bemutatásra kerülő algoritmusokban.

Amennyiben sem a b sem a c vektor nem egyezik meg a zérus vektorral, akkor a criss-cross módszer még primál vagy duál megengedett megoldás esetén sem egyezik meg a primál illetve duál szimplex módszerrel. A criss-cross módszer alkalmazása során előfordulhat az az eset is, hogy primál vagy duál megengedett megoldás után ismét sem primál sem duál megengedett megoldást kapunk.

Egyenlőtlenséges feltételek esetén a b vektor koordinátáinak előjeleitől függetlenül a slack változók jó induló megoldást biztosítanak a criss-cross módszerhez, ami általában se nem primál se nem duál megengedett. Amennyiben egyenlőséges feltételek is szerepelnek,akkor annyi pivot művelet segítségével, ahány egyenlőséges feltétel szerepel, megkaphatjuk az induló bázist illetve annak inverzét.

II.Magyar Módszer típusú algoritmusok lineáris programozási feladatok megoldására

Ebben a részben a criss-cross módszer speciális eseteit felhasználva építjük fel algoritmusainkat. Felhasználjuk a bázistábla tulajdonságait is, melyeket az I.1. részben közöltünk. Algoritmusaink során primál illetve duál megengedett megoldásokat javítunk fokozatosan úgy, hogy közben a komplementaritási feltételek teljesülnek, addig míg optimális megoldást nem kapunk.

II.1.Egy primál típusú algoritmus

Egy x primál megengedett megoldást javítunk fokozatosan egy alkalmas bázistábla alkalmas $t_{(j)}$ vektora segítségével. A $t_{(j)}$ vektorokat a véges criss-cross módszer segítségével generáljuk. Bizonyítani fogjuk, hogy az x megoldás javítására csak véges sok esetben kerülhet sor, s így véges sok lépésben optimális megoldást kapunk, illetve belátjuk, hogy nem létezik duál megengedett megoldás. Tehát eljárásunk véges.

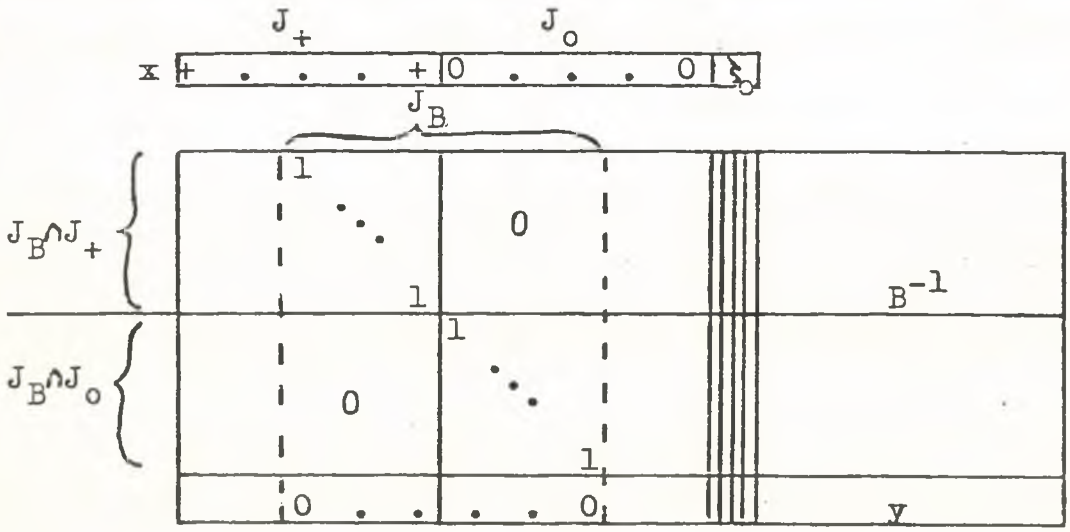
Az algoritmus az alábbi

Legyen adott egy x primál megengedett /nem feltétlenül bázis/ megoldás. Osszuk a $J=\{1,\dots,n\}$ index halmazt az alábbi két részhalmazra:

$$J_o=\{j \mid \xi_j=0 \quad j=1,\dots,n\}$$

$$J_+=\{j \mid \xi_j>0 \quad j=1,\dots,n\}$$

Induljunk ki egy tetszőleges bázistáblából.



/2.ábra/

Algoritmusunk az alábbi négy lépésből áll.

1.Redukálás.

2.Komplementáris alakra hozás/$\|J_+\|$ csökkentése/.

3.Részfeladat megoldása a criss-cross módszerrel.

4.Célfüggvény javítás/J_+ és J_o átrendezése/.

A fenti lépések elnevezése előrevetíti az alábbi definíciók szükségességét.

<u>1.Definíció:</u> Egy B bázishoz tartozó bázistáblát az x primál megengedett megoldáshoz viszonyítva <u>redukáltnak</u> nevezzük, ha $\tau_{ij}=0$ minden $i\in J_B\cap J_o$, $j\in J_+$ esetén.

2.Definició: Egy B bázishoz tartozó bázistáblát és egy x primál megengedett megoldást komplementárisnak nevezünk, ha $\zeta_j - \gamma_j = 0$ ha $j \in J_+$.

Most vizsgáljuk részletesen az egyes lépéseket. A továbbiakban azt mondjuk, hogy az (i,j) helyen pivotálunk, amikor a pivot transzformáció során a_i távozik és a_j jön be a bázisba.

1.Redukálás

Ha van olyan $i \in J_B \cap J_o$ és $j \in J_+$ hogy $\tau_{ij} \neq 0$, akkor az (i,j) helyen pivotálva növeljük $J_B \cap J_+$ elemszámát. Mivel $\| J_B \cap J_+ \| \leq m$, így véges sok lépésben redukálhatunk egy táblázatot. Megjegyezzük, hogy a redukálás során J_+ és J_o nem változik.

2.Komplementáris alakra hozás

Redukált táblát szeretnénk komplementáris alakra hozni. Ezt az x megoldás sorozatos javításával és a tábla ismételt redukálásával érhetjük el. Ha $\zeta_j - \gamma_j = 0$ minden $j \in J_+$ esetén, akkor a táblázat komplementáris. Ha $\zeta_s - \gamma_s \neq 0$ valamely $s \in J_+$ esetén, akkor igaz az alábbi lemma.

1.Lemma: Ha $\zeta_s - \gamma_s \neq 0$ valamely $s \in J_+$ esetén, akkor az $\bar{x} = x - \vartheta t$ vektor szintén primál megengedett és $\bar{\zeta}_o = c\bar{x} < cx = \zeta_o$, ahol $0 < \vartheta \leq \vartheta_o = \min\left\{ \frac{\xi_i}{\tau_j} \middle| \tau_j > 0 \right\} = \frac{\xi_r}{\tau_r}$ és $t = (\tau_1, \ldots, \tau_n) = t_{(s)} \operatorname{sgn}(\zeta_s - \gamma_s)$.

<u>Bizonyítás:</u> Mivel $tc=|\xi_s-\gamma_s|$, így $c\bar{x}=cx-\vartheta|\xi_s-\gamma_s|<cx$ minden $\vartheta>0$ esetén. I.8.Megjegyzés szerint $A\bar{x}=A(x-\vartheta t)=b$ és ϑ_0 definíciója miatt $x-\vartheta t=x-\vartheta t_{(s)}\operatorname{sgn}(\xi_s-\gamma_s)\geq 0$, hiszen ha $\tau_j<0$ akkor ξ_j nő és ha $\tau_j>0$ akkor ξ_r éppen $\vartheta=\vartheta_0$ értéknél csökken zérusra, míg a többi koordináta nem negatív. Lemmánkat így bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy $\vartheta_0=+\infty$ esetén a primál feladat célfüggvénye nem korlátos alulról, azaz nem létezik duál megengedett megoldás.

Alkalmazzuk az 1.Lemmát valamely $s\in J_+$ mellett, amikor $\xi_s-\gamma_s\neq 0$ és $\vartheta=\vartheta_0$. Igy kapunk egy új $\bar{x}=x-\vartheta_0 t$ primál megengedett megoldást, miközben a primál feladat célfüggvényértéke határozottan csökkent és J_+-ból legalább egy index átkerül J_0-ba.

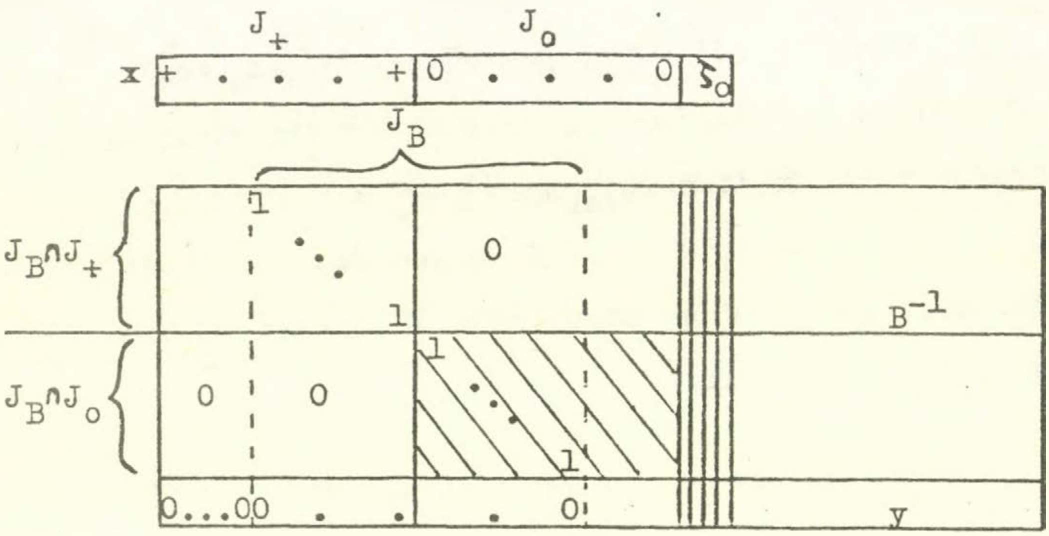
Tehát a következő módon érhetünk el egy x primál megengedett megoldást és egy hozzá viszonyítva redukált, komplementáris bázistáblát.

1.Redukáljuk a táblázatot.

2.Ha van olyan $s\in J_+$, hogy $\xi_s-\gamma_s\neq 0$ akkor az 1.Lemma alkalmazásával csökkentsük J_+ elemszámát. GO TO 1.

Ha $\xi_j-\gamma_j=0$ minden $j\in J_+$ esetén, akkor a bázistábla redukált és komplementáris az x megoldáshoz viszonyítva.

Igy véges sok lépés után az alábbi x primál megengedett megoldáshoz és a hozzá viszonyítva redukált, komplementáris bázistáblához jutunk.



/3.ábra/

Könnyen igazolható az alábbi lemma.

2.Lemma: A fent adott x és y vektorok optimális megoldásai az alábbi lineáris programozási feladat-párnak.

$\min cx$	$\max yb$
feltéve, hogy $Ax=b$	feltéve, hogy $ya_j \leq \gamma_j \quad j\in J_+$
$\xi_j=0 \quad j\in J_o$	
$\xi_j \geq 0 \quad j\in J_+$	

Bizonyítás: Nyilván x és y megengedett megoldásai a fenti feladatoknak, valamint $(yA-c)x=0$ miatt optimálisak is.

Megjegyezzük, hogy véges sok $/J_+,J_o/$ pár van, és így az előző lemmában szereplő feladat-párból is véges sok létezik.

3.Részfeladat megoldása

A criss-cross módszer alkalmazásával oldjuk meg az $\{ya_j \leq \gamma_j \mid j\in J_o\}$ részfeladatot a fenti táblázatból, azaz az adott y vektorból indulva. Igy a fenti táblán J_0-ban levő vektorok kerülnek be és távoznak a bázisból. Ez azt jelenti, hogy $\{\xi_j-\gamma_j \mid j\in J_0\}$ alkotja a célfüggvény sort és a résztáblázat tartalmazza a pivot elemeket.

Hajtsuk végre a pivot transzformációkat az egész bázistáblán. Ezek a transzformációk megőrzik a redukált és komplementaritási tulajdonságokat, mivel a J_+-hoz tartozó oszlopok nem változnak ezen transzformációk során.

A criss-cross módszer véges sok lépés után az alábbi két eset valamelyikénél ér véget.

/a/ $\xi_j-\gamma_j\le 0 \quad j\in J_0$

/b/ $\xi_s-\gamma_s>0$ valamely $s\in J_0$ esetén és $\tau_{is}\le 0$ minden $i\in J_B\cap J_0$-nál.

4.A célfüggvény javítása

Ha az /a/ esetnél ér véget a criss-cross módszer, akkor $Ax=b$, $x\ge 0$, $yA\le c$, $(yA-c)x=0$, azaz x és y optimális megoldások.

Ha a criss-cross módszer a /b/ esetnél ér véget, akkor legyen $\bar{x}=x-\vartheta_0 t_{(s)}$ ahol $\vartheta_0=\min\left\{\frac{\xi_i}{\tau_{is}} \,\middle|\, \tau_{is}>0,\ i\in J_+\right\}=\frac{\xi_r}{\tau_{rs}}$. Az 1.Lemma szerint a primál feladat nem korlátos, ha $\vartheta_0=+\infty$, és ha $\vartheta_0<+\infty$ akkor $\bar{x}$ primál megengedett megoldás és $c\bar{x}<cx$.

Készítsük el az új J_+,J_0 halmazokat és térjünk vissza a tábla redukálásához. Vegyük észre, hogy $s\in J_+$ és $r\in J_0$ lesz, és így a redukálást az (r,s) helyen való pivotálással kezdhetjük.

Algoritmusunkat az alábbiakban foglalhatjuk össze.

II.1.Algoritmus

STEP0.-Legyen x primál megengedett megoldás és B egy tetszőleges bázis. Készítsük el a J_+, J_o index halmazokat és a kiinduló bázistáblát.

STEP1.-Redukáljuk a táblát.

STEP2.-Ha a bázistábla komplementáris GO TO 3.

-Ha $\xi_s-\gamma_s \neq 0$ valamely $s \in J_+$ esetén, javítsuk az x megoldást $t_{(s)}$-sel.

Ha $\vartheta_o=+\infty$, nincs duál megengedett megoldás. STOP.

Ha $\vartheta_o<+\infty$, akkor $\|J_+\|$ csökken. GO TO 1.

STEP3.-Oldjuk meg criss-cross módszerrel a J_o által definiált részfeladatot.

STEP4.-Ha $z-c \leq 0$, akkor x és y optimális megoldások. STOP.

-Ha $\xi_s-\gamma_s>0$ valamely $s \in J_o$ esetén akkor javítsuk az x megoldást $t_{(s)}$ segítségével.

Ha $\vartheta_o=+\infty$, nincs duál megengedett megoldás. STOP.

Ha $\vartheta_o<+\infty$ GO TO 1.

Az alábbi tétel bizonyítja az eljárás konvergenciáját.

Tétel: A II.1.Algoritmus véges sok lépés után véget ér.

Bizonyítás: Az algoritmus minden egyes lépése véges, így csak azt kell bizonyítanunk, hogy véges sokszor kerülhet sor az egyes lépések végrehajtására. Mivel amikor a harmadik lépésre kerül sor, akkor x és y optimális megoldása a J_+,J_0 által definiált feladatoknak /2.Lemma/, véges sok J_+,J_0 felosztás létezik és mivel a primál feladat célfüggvénye a negyedik lépésben határozottan csökken, így egyetlen feladat sem térhet vissza, azaz a harmadik és negyedik lépések végrehajtására csak véges sokszor kerülhet sor. Igy az első és a második lépés végrehajtására is csak véges sokszor kerülhet sor, mivel a második lépésben $\|J_+\|$ csökken és a primál célfüggvény csökken. Tételünket bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy az első és a második lépéssel szintén megoldunk egy részfeladatot a harmadik lépéshez hasonlóan.

Az algoritmus végrehajtásához valójában nincs szükségünk a B^{-1} mátrixra és az y vektorra, csak ha duál optimális y megoldásra is szükségünk van.

A II.3. fejezetben bemutatjuk, hogy a primál szimplex módszer egy változata miként adódik a II.1.Algoritmus speciális eseteként.

II.2.Egy duál típusú algoritmus

Egy y duál megengedett megoldást javítunk fokozatosan egy alkalmas bázistábla alkalmas $y^{(i)}$ vektora segítségével. Az $y^{(i)}$ vektorokat a véges criss-cross módszer segítségével generáljuk. Bizonyítani fogjuk, hogy az y megoldás javítására csak véges sokszor kerülhet sor, s így optimális megoldást kapunk véges sok lépésben, illetve belátjuk, hogy nem létezik primál megengedett megoldás.

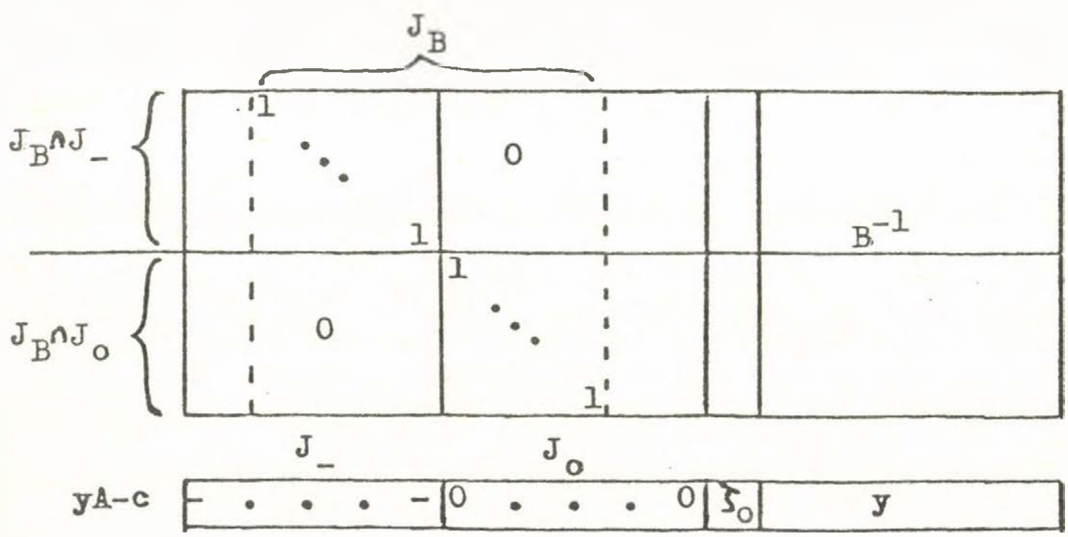
Az algoritmus az alábbi

Legyen y egy tetszőleges duál megengedett /nem feltétlenül bázis/ megoldás. Osszuk a $J=\{1,\dots,n\}$ index halmazt az alábbi két részhalmazra:

$$J_o=\{j \mid ya_j=\gamma_j \quad j=1,\dots,n\}$$

$$J_-=\{j \mid ya_j<\gamma_j \quad j=1,\dots,n\}.$$

Induljunk ki egy tetszőleges bázistáblából.



/4.ábra/

Az algoritmus az alábbi négy lépésből áll:

1.Redukálás.

2.Komplementáris alakra hozás /$\|J_-\|$ csökkentése/.

3.Részfeladat megoldása a criss-cross módszerrel.

4.Célfüggvény javítás /J_- és J_o átrendezése/.

A fenti lépések elnevezése előrevetíti az alábbi definíciók szükségességét.

<u>1.Definíció:</u> Egy B bázishoz tartozó bázistáblát az y duál megengedett megoldáshoz viszonyítva <u>redukáltnak</u> nevezünk, ha $\tau_{ij}=0$ minden $i\in J_B\cap J_-$, $j\in J_o$ esetén.

<u>2.Definició:</u> Egy B bázishoz tartozó bázistáblát és egy y duál megengedett megoldást <u>komplementárisnak</u> nevezünk, ha

$\xi_i=0$ $i\in J_B\cap J_-$ esetén.

Most vizsgáljuk részletesen az egyes lépéseket. Mivel az alkalmazott módszerek és az algorimus lépései hasonlóak a II.1. fejezetben bemutatottakhoz, így a bizonyítások részleteit itt elhagyjuk.

<u>1.Redukálás</u>

Ha van olyan $i\in J_B\cap J_-$ és $j\in J_o$, hogy $\tau_{ij}\neq 0$, akkor az (i,j) helyen pivotálva csökkentjük $J_B\cap J_-$ elemszámát. Igy véges lépésben redukálhatunk egy táblázatot. Megjegyezzük, hogy a redukálás során J_- és J_o nem változik.

2. Komplementáris alakra hozás

Redukált táblát szeretnénk komplementáris alakra hozni. Ezt az y megoldás sorozatos javításával és a tábla ismételt redukálásával érhetjük el. Ha $\xi_i=0$ $i\in J_B\cap J_-$, akkor a tábla komplementáris. Ha $\xi_r\neq 0$ valamely $r\in J_B\cap J_-$ esetén, akkor igaz az alábbi lemma.

<u>1.Lemma:</u> Ha $\xi_r\neq 0$ valamely $r\in J_B\cap J_-$ esetén, akkor az $\bar{y}= y-\vartheta\tilde{y}$ vektor szintén duál megengedett megoldás és $\bar{\xi}_o=\bar{y}b>yb=\xi_o$, ahol $\tilde{y}=y^{(r)}\operatorname{sgn}(-\xi_r)$ és

$$0<\vartheta\leqq\vartheta_o=\min\left\{\frac{ya_j-\gamma_j}{\tau_{rj}\operatorname{sgn}(-\xi_r)}\;\middle|\;\tau_{rj}\operatorname{sgn}(-\xi_r)<0\right\}=\frac{ya_s-\gamma_s}{\tau_{rs}\operatorname{sgn}(-\xi_r)}\,.$$

<u>Bizonyítás:</u> Az $y^{(r)}A=t^{(r)}$ összefüggés figyelembevételével könnyen elvégezhető.

Megjegyezzük, hogy $\vartheta_o=+\infty$ esetén a duál feladat célfüggvénye nem korlátos felülről, azaz nem létezik primál megengedett megoldás.

Alkalmazzuk az 1.Lemmát valamely $r\in J_B\cap J_-$ mellett amikor $\xi_r\neq 0$ és $\vartheta=\vartheta_o$. Igy kapunk egy uj $\bar{y}=y-\vartheta_o\tilde{y}$ duál megengedett megoldást, miközben a duál feladat célfüggvény értéke nőtt és J_--ból legalább egy index átkerült J_o-ba.

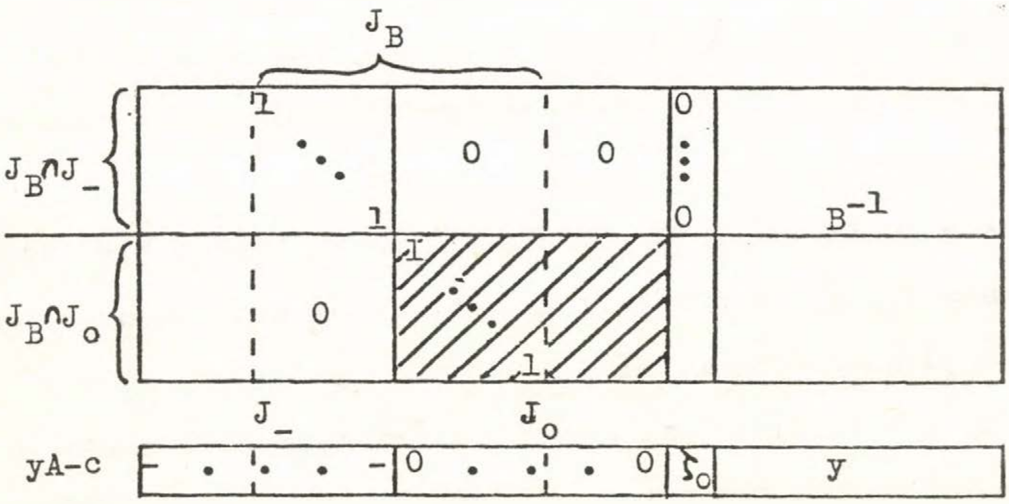
Tehát a következő módon érhetünk el egy y duál megengedett megoldást és egy hozzá viszonyítva redukált, komplementáris bázistáblát.

1.Redukáljuk a táblázatot.

2.Ha van olyan $r \in J_B \cap J_-$ hogy $\xi_r \neq 0$, akkor az 1.Lemma alkalmazásával csökkentsük J_- elemszámát. GO TO 1.

Ha $\xi_i = 0$ minden $i \in J_B \cap J_-$ esetén, akkor a bázistábla redukált és komplementáris az y megoldáshoz viszonyítva.

Igy véges sok lépés után az alábbi y duál megengedett megoldáshoz és a hozzá viszonyítva redukált, komplementáris bázistáblához jutunk.



/5.ábra/

Könnyen igazolható az alábbi lemma.

2.Lemma: A fent adott x és y vektorok optimális megoldásai az alábbi lineáris programozási feladat-párnak.

min cx	max yb
feltéve, hogy Ax=b	feltéve, hogy $ya_j \leq \gamma_j \quad j \in J_-$
$\xi_j \geq 0 \quad j \in J_-$	$ya_j = \gamma_j \quad j \in J_o$

Bizonyítás: Nyilvánvaló.

Megjegyezzük, hogy véges sok $/J_-,J_o/$ pár van, és így az előző lemmában szereplő feladat-párból is véges sok van.

3.Részfeladat megoldása

A criss-cross módszer alkalmazásával oldjuk meg a $\left\{\sum_{j\in J_o} a_j\xi_j=b,\ \xi_j\geq 0\quad j\in J_o\right\}$ részfeladatot a fenti táblázatból, vagyis az ott adott x vektorból kiindulva. Igy a fenti táblán csak a J_o-ban levő vektorok kerülnek be és távoznak a bázisból. Ez azt jelenti, hogy $\{\xi_j \mid j\in J_B\cap J_o\}$ alkotja a megoldás oszlopot és a résztáblázat tartalmazza a pivot elemeket.

Hajtsuk a pivot transzformációkat az egész bázistáblán végre. Ezek a transzformációk megőrzik a redukált és komplementaritási tulajdonságokat, mivel a $J_B\cap J_-$-hoz tartozó sorai a táblázatnak változatlanok maradnak a transzformációk során.

A criss-cross módszer véges sok lépés után az alábbi két eset valamelyikénél ér véget.

/a/ $\xi_j\geq 0$ $\quad j\in J_B\cap J_o$.

/b/ $\xi_r<0$ valamely $r\in J_B\cap J_o$ esetén és $\tau_{rj}\geq 0$ minden $j\in J_o$ esetén.

4.A célfüggvény javítása

Ha az /a/ esetnél ér véget a criss-cross módszer, akkor $Ax=b$, $x\geq 0$, $yA\leq c$, $(yA-c)x=0$ azaz x és y optimális megoldások.

Ha criss-cross módszer a /b/ esetnél ér véget, akkor legyen $\bar{y}=y-\vartheta_o y^{(r)}$ ahol $\vartheta_o=\min\left\{\frac{ya_j-\gamma_j}{\tau_{rj}}\ \middle|\ \tau_{rj}<0\right\}=\frac{ya_s-\gamma_s}{\tau_{rs}}$.

Az 1.Lemma szerint a duál feladat nem korlátos, ha $\vartheta_0=+\infty$, és ha $\vartheta_0<+\infty$, akkor $\bar{y}$ duál megengedett megoldás és $\bar{y}b>yb$.

Készítsük el az új J_-,J_0 halmazokat, és térjünk vissza a tábla redukálásához. Vegyük észre, hogy $r\in J_-$ és $s\in J_0$ lesz, és így a redukálást az (r,s) helyen való pivotálással kezdhetjük.

Algoritmusunkat az alábbiakban foglalhatjuk össze.

II.2.Algoritmus

STEP0.-Legyen y duál megengedett megoldás és B egy tetszőleges bázis. Készítsük el a J_-,J_0 indexhalmazokat és a kiinduló bázistáblát.

STEP1.-Redukáljuk a táblát.

STEP2.- Ha a tábla komplementáris GO TO 3.

-Ha $\xi_r\neq 0$ valamely $r\in J_B\cap J_-$ esetén, akkor javítsuk y-t $y^{(r)}$ segítségével.

Ha $\vartheta_0=+\infty$, nincs primál megengedett megoldás. STOP.

Ha $\vartheta_0<+\infty$, akkor $\|J_-\|$ csökken. GO TO 1.

STEP3.-Oldjuk meg a criss-cross módszerrel a J_0 által definiált részfeladatot.

STEP4.-Ha $x\geq 0$ akkor x és y optimális megoldások. STOP.

-Ha $\xi_r<0$ valamely $r\in J_B\cap J_0$ esetén akkor javítsuk y-t $y^{(r)}$ segítségével.

Ha $\vartheta_0=+\infty$, nincs primál megengedett megoldás. STOP.

Ha $\vartheta_0<+\infty$ GO TO 1.

Az alábbi tétel bizonyítja az eljárás konvergenciáját.

Tétel: A II.2.Algoritmus véges sok lépés után véget ér.

Bizonyítás: Hasonló, mint a II.1.Algoritmus esetében. A gondolatmenet azonossága miatt nem ismételjük meg.

Megjegyezzük, hogy az első és a második lépéssel szintén megoldunk egy részfeladatot a harmadik lépéshez hasonlóan.

Az algoritmus végrehajtásához valójában nincs szükségünk a B^{-1} mátrixra és az y vektorra, csak ha a duál optimális y megoldásra is szükségünk van.

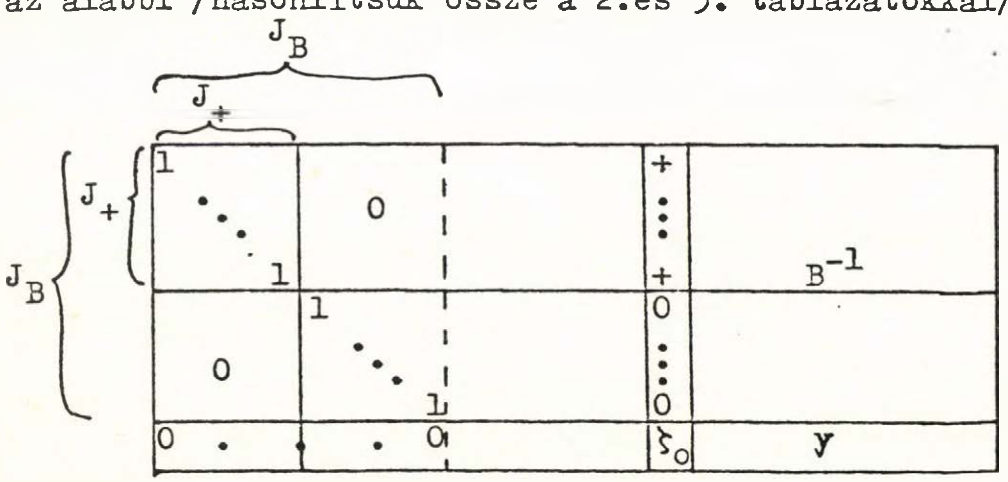
A II.4. fejezetben mutatjuk be, hogy a duál szimplex módszer egy változata miként adódik a II.2.Algoritmus speciális eseteként.

II.3. A primál szimplex módszer mint speciális Magyar Módszer

Ebben a fejezetben megmutatjuk, miként adódik a primál szimplex módszer a II.1.Algoritmus speciális eseteként.

Legyen az induló x primál megengedett megoldás egy B bázishoz tartozó bázismegoldás és induljunk ki a B bázishoz tartozó bázistáblából.

Nyilvánvaló, hogy ekkor $J_+ \subset J_B$ és így a kiinduló táblázat az alábbi /hasonlítsuk össze a 2.és 3. táblázatokkal/.



/6.ábra/

Elhagyhatjuk a II.1.Algoritmus első és második lépését, mivel $J_+ \setminus J_B = \emptyset$ és $\zeta_j - \gamma_j = 0$ minden $j \in J_+ \subset J_B$ esetén, azaz a bázistábla és a hozzá tartozó x bázismegoldás redukált és komplementáris egymáshoz viszonyítva. A II.1.Algoritmus harmadik lépésének megfelelő részfeladat megoldása a criss-cross módszerrel ugyanazon pivot műveleteket eredményezi, mintha a Bland[3] által adott pivotálási szabályt alkalmaznánk a ciklizálás elkerülésére a szimplex módszernél. A negyedik lépés, amikor a célfüggvény értékét javítjuk és az utána következő pivot művelet az (r,s) helyen $/\xi_s-\gamma_s>0$ valamely $s\in J_o$ esetén, $\tau_{js}\leq 0$ minden $j\in J_o$ esetén valamint $\xi_r>0/$ azért, hogy redukáljuk ismét a táblát, megegyezik azzal, hogy az egész táblán /a megoldásoszlopon is/ végrehajtjuk a szokásos primál szimplex pivot műveletet τ_{rs} pivotelem választással. Ismert, hogy az új $\bar{x}=x-\vartheta_o t_{(s)}$ megoldás megegyezik a pivot művelet eredményeként kapott megoldással.

Igy a szimplex módszerhez tartozó pivotálási szabály úgy módosult, hogy a bázisba bejövő változó mindig a legalacsonyabb indexű nem duál megengedett változó. A bázisból távozó változó választására a közönséges szimplex módszer kiválasztási szabályát alkalmazzuk, ha nem degenerált a transzformáció, míg degenerált esetben a lehetséges távozó változók közül a minimális indexű távozik a bázisból.

A $J_+\subset J_B$ reláció a fentiek értelmében továbbra is fennáll, mivel minden egyes bázistranszformáció megegyezik egy szimplex pivot művelettel, azaz az x primál megengedett megoldás mindig a bázistáblához tartozó marad.

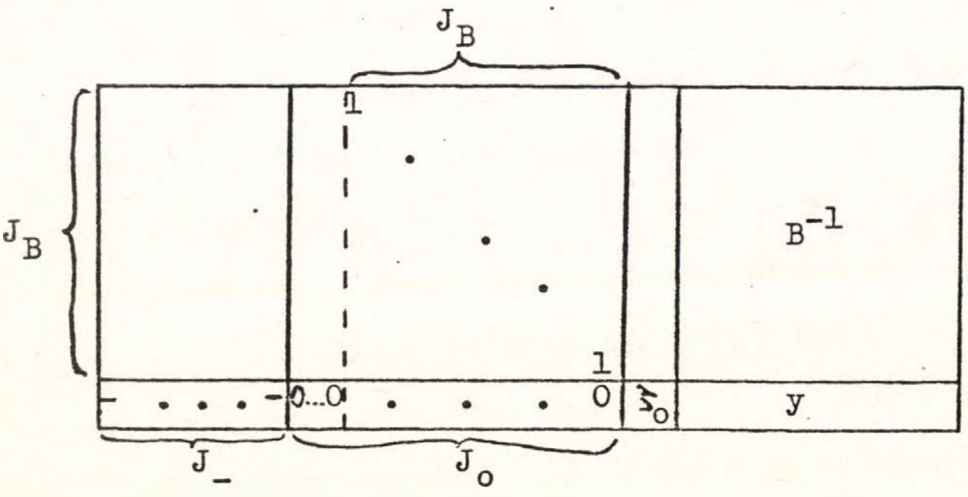
Igy a primál szimplex módszer egy variánsát kaptuk a II.1.Algoritmus speciális eseteként. Mivel II.1.Algoritmus véges, igy a szimplex módszer ezen változata is véges. Ezen módszer végességét természetesen bizonyíthattuk volna direkt módon, Bland[3] bizonyításának változatlan átvételével is, de esetünkben ez egy általánosabb algoritmus végességéből is következik.

II.4. A duál szimplex módszer mint speciális Magyar Módszer

Ebben a fejezetben megmutatjuk, miként adódik a duál szimplex módszer a II.2.Algoritmus speciális eseteként.

Legyen az induló duál megengedett megoldás egy B bázishoz tartozó bázismegoldás és induljunk ki a B bázishoz tartozó bázistáblából.

Nyilvánvaló, hogy ekkor $J_- \cap J_B = \emptyset$ és így a kiinduló táblázat az alábbi /hasonlítsuk össze a 4.,5. táblázatokkal/.



/7.ábra/

Elhagyhatjuk a II.2.Algoritmus első és második lépését, mivel $J_B \cap J_- = \emptyset$ és $\xi_j = 0$ minden $j \in J_-$ esetén, azaz a bázistábla és a hozzá tartozó y bázismegoldás redukált és komplementáris egymáshoz viszonyítva. A II.1.Algoritmus harmadik lépésének megfelelő részfeladat megoldása a criss-cross módszerrel ugyanazon pivotműveleteket eredményezi, mintha a Bland féle pivot szabályt alkalmaznánk a duál szimplex módszer degenerált transzformációinál. A célfüggvény javítása és a tábla redukálása egy lépésben végezhető el az (r,s) helyen való pivotálással $/\xi_r<0$ valamely $r\in J_B$ esetén, $\tau_{rj}\geq 0$ minden $j\in J_o$ esetén és $\zeta_s-\gamma_s<0/$, mivel a pivot művelet éppen az új $\bar{y}=y-\vartheta_o y^{(r)}$ megoldást eredményezi.

Igy a duál szimplex módszerhez tartozó pivotálási szabály úgy módosul, hogy a bázisból távozó vektor mindig a legalacsonyabb indexű a nem megengedettek közül, míg a bázisba bekerülő vektor kiválasztásakor, a duál szimplex módszerrel adódó lehetséges alternatívák közül csak degenerált esetben választjuk a legalacsonyabb indexű változót.

A $J_-\cap J_B=\emptyset$ reláció a fentiek értelmében továbbra is fennáll, mivel minden egyes pivot transzformáció megegyezik egy duál szimplex pivot művelettel, azaz az y duál megengedett megoldás mindig a bázistáblához tartozó marad.

Igy a duál szimplex módszer egy variánsát kaptuk a II.2. Algoritmus speciális eseteként. Ezen módszer végességét Bland bizonyításának adaptálásával is elvégezhetnénk, a módszer végessége azonban közvetlenül adódik az általánosabb II.2.Algoritmus végességéből.

/

II.5.Egy új lehetőség a lineáris programozás megoldási módszereinek oktatására

A konvergens criss-cross módszer és a magyar módszer típusú algoritmusok létrejöttével új lehetőség nyílik a lineáris programozás megoldási módszereinek oktatására.

Azoknak, akik csak ismerkedés szinten, néhány órában tanulnak lineáris programozást, az időigényes és nem matematikusok számára nehezen érthető kétfázisú szimplex módszer helyett oktatható a criss-cross módszer, mely nagyon egyszerű, könnyen programozható ás általános feladatok megoldására is alkalmas.

Bővebb kurzusok keretében az alábbi felépítés lehetséges: Induljunk ki az egyszerű criss-cross módszerből, majd erre építve, a magyar módszer alapötletének felhasználásával tanítsuk a II.1. és II.2. algoritmusokat /itt csak a lineáris programozásra való alkalmazás új, mivel általában gráfelméletből addigra már ismert a magyar módszer/. Ezen algoritmusok speciális eseteiként vezessük be a primál illetve duál szimplex módszert, és így egyúttal a degenerált esetben előforduló ciklizálás elkerülésére is módszert adtunk. Ezután a Bland szabály nélküli általános szimplex szabály közlése már csak egy rövid megjegyzés. A ciklizálás elkerülésére, a teljesség kedvéért, alternatív módszerként tanítható a lexikografikus szimplex módszer.

A nem matematikusok számára legnehezebben érthető kétfázisú szimplex módszer így már mélyebb ismeretek birtokában vezethető be, valamint az önmagában bonyolultnak tűnő primál-duál módszer / Dantzig-Ford-Fulkerson[8]/ már könnyen adódik mint II.2.Algoritmus és az első fázis módszerének ötvözete.

A fenti felépítés előnye, hogy a kurzus elején az általános formájú feladat megoldására azonnal rendelkezésre áll egy megoldási módszer, és így nem okoz újabb zavarokat az általánosabb feladatok bevezetése.

III. A véges criss-cross módszer irányított matroidokon

Mielőtt az irányított matroidot definiálnánk, néhány szót kell ejtenünk a matroidok alaptulajdonságairól. A matroidok a mátrixok és vektorterek lineáris függetlenségi tulajdonságainak absztrakciói /Whitney[22]/. A matroidelméleti alapismeretek elsajátíthatók Lawler[12] könyvéből, Lovász[13] vagy Tutte[21] cikkéből. A számunkra is fontos matroidelméleti dualitás szép tárgyalása található Minty[15] cikkében.

Az alábbiakban röviden közöljük a matroidok definícióját független halmazokon, bázisokon illetve ciklusokon keresztül. Ismert , hogy ezek a definíciók ekvivalensek /Tutte[21]/.

Legyen $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ és $\mathcal{F}\subset P(E)$.

<u>1.Definició:</u> Az $F\in\mathcal{F}$ halmazokat <u>függetleneknek</u> nevezzük és az $M=(E,\mathcal{F})$ párt <u>matroidnak</u> nevezzük, ha

1. $\emptyset\in\mathcal{F}$,
2. $F_1\in\mathcal{F}$ és $F_2\subset F_1$, akkor $F_2\in\mathcal{F}$,
3. $F_1,F_2\in\mathcal{F}$ és $\|F_1\|>\|F_2\|$, akkor van olyan $e\in F_1\setminus F_2$, hogy $F_2\cup\{e\}\in\mathcal{F}$.

<u>2.Definició:</u> Egy $C\subset E$ halmazt <u>ciklusnak</u> nevezünk, ha $C\notin\mathcal{F}$, de minden $F\subsetneq C$ esetén $F\in\mathcal{F}$.

Jelöljük $\mathcal{C}$-vel az E-n értelmezett ciklusok halmazát.

3.Definíció: Az $M=(E,\mathcal{C})$ pár matroid és a $C\in\mathcal{C}$ halmazok a matroid ciklusai, ha

/a/ 1. $C_1,C_2\in\mathcal{C}$ és $C_1\subset C_2$, akkor $C_1=C_2$

2. $C_1,C_2\in\mathcal{C}$ és $e_i\in C_1\setminus C_2$, $e_j\in C_1\cap C_2$, akkor van olyan $C_3\in\mathcal{C}$, hogy $e_i\in C_3\subset(C_1\cup C_2)\setminus\{e_j\}$.

/b/ Ekkor a matroid független halmazai azok az $F\subset E$ halmazok, melyek nem tartalmaznak ciklust.

4.Definíció: A $B\subset E$ halmazt bázisnak nevezzük, ha $B\in\mathcal{F}$ és nincs olyan $F\in\mathcal{F}$, hogy $B\subsetneq F$.

Jelöljük $\mathcal{B}$-vel az E-n értelmezett bázisok halmazát.

5.Definició: Az $M=(E,\mathcal{B})$ pár matroid és a $B\in\mathcal{B}$ halmazok a matroid bázisai, ha

/a/ 1. $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ esetén $\|B_1\|=\|B_2\|$

2. $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ és $e_i\in B_1$, akkor létezik olyan $e_j\in B_2$, hogy $(B_1\setminus\{e_i\})\cup\{e_j\}\in\mathcal{B}$.

/b/ Ekkor a matroid független halmazai a B bázisok és ezek részhalmazai.

Könnyen belátható, hogy ha $\mathcal{B}^*=\{B^*|B^*=E\setminus B$ valamely $B\in\mathcal{B}$ esetén$\}$, akkor $M^*=(E,\mathcal{B}^*)$ szintén matroid.

6.Definíció: Az $M^*=(E,\mathcal{B}^*)$ matroidot az $M=(E,\mathcal{B})$ matroid duálisának nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a duális matroid ciklusait kociklusoknak nevezzük, valamint a matroid bázisainak elemszámát a matroid rangjának nevezzük.

A törlés és összehúzás művelete, egy adott matroidra alkalmazva, egy újabb matroidot eredményez.

7.Definíció: Ha az $M=(E,\mathcal{C})$ matroidot az $\bar{M}=(\bar{E},\bar{\mathcal{C}})$ matroiddal helyettesítjük, ahol $\bar{E}=E\setminus e$, $\bar{\mathcal{C}}=\{C \mid C\in\mathcal{C}$ és $e\notin C\}$, akkor azt mondjuk, hogy az e elemet töröltük M-ből.

8.Definíció: Ha az $M=(E,\mathcal{C})$ matroidot az $\bar{M}=(\bar{E},\bar{\mathcal{C}})$ matroiddal helyettesítjük, ahol $\bar{E}=E\setminus e$, $\bar{\mathcal{C}}=\{C\setminus\{e\} \mid C\setminus\{e\}\neq\emptyset$, $C\in\mathcal{C}$, és nincs olyan $C_o\in\mathcal{C}$, hogy $C_o\setminus\{e\}\subsetneq C\setminus\{e\}\}$, akkor azt mondjuk, hogy az e elemet összehúztuk M-ben.

Ismert, hogy egy elem összehúzásával illetve törlésével ismét matroidot kapunk, valamint a törlésnek illetve összehúzásnak a duális matroidban összehúzás illetve törlés felel meg.

III.1.Az iránvított matroid definíciója és alaptulajdonságai

Ebben a fejezetben az irányított matroid Bland[2] által adott definícióját, és az irányított matroidok azon alaptulajdonságait foglaljuk össze, melyek a criss-cross módszer végrehajtásához, illetve végességének bizonyításához szükségesek.

Legyen $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ egy véges halmaz. Előjeles halmaznak nevezünk egy $X=(X^+,X^-)$ halmazpárt, ha $X^+,X^-\subset E$ és $X^+\cap X^-=\emptyset$. Az $X=(X^+,X^-)$ előjeles halmazt úgy is tekinthetjük, mintha az $\underline{X}=X^+\cup X^-$ halmazt osztottuk volna pozitív és negatív elemekre. Ha $X=(X^+,X^-)$ egy előjeles halmaz, akkor X ellentettjének a (-X) előjeles halmazt nevezzük, ahol $(-X)^+=X^-$ és $(-X)^-=X^+$. Az $Y=\pm X$ jelölést használjuk, ha vagy $Y=X$ vagy $Y=-X$. Ha $\mathcal{O}=\{X_1,\dots,X_p\}$ előjeles halmazok egy rendszere E-n, akkor $\underline{\mathcal{O}}=\{\underline{X}_1,\dots,\underline{X}_p\}$-vel jelöljük a megfelelő /nem előjeles/ halmazrendszert.

<u>1.Definíció:</u> Legyenek $\mathcal{O}$ és $\mathcal{O}^*$ előjeles halmazok rendszerei E-n. Az $M=(E,\mathcal{O})$ és $M^*=(E,\mathcal{O}^*)$ párokat <u>duális irányított matroidoknak</u> nevezzük, ha az alábbi négy feltétel fennáll.

/a/ $\underline{\mathcal{O}}$ illetve $\underline{\mathcal{O}}^*$ ciklusai illetve kociklusai az $\underline{M}=(E,\underline{\mathcal{O}})$ illetve $\underline{M}^*=(E,\underline{\mathcal{O}}^*)$ duális matroidoknak.

/b/ $X\in\mathcal{O}\Rightarrow -X\in\mathcal{O}$ és $Y\in\mathcal{O}^*\Rightarrow -Y\in\mathcal{O}^*$.

/c/ $X_1, X_2 \in \mathcal{O}$ és $\underline{X}_1 = \underline{X}_2 \Rightarrow X_1 = \pm X_2$

$Y_1, Y_2 \in \mathcal{O}^*$ és $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 \Rightarrow Y_1 = \pm Y_2$

/d/ $X \in \mathcal{O}$, $Y \in \mathcal{O}^*$ és $\underline{X} \cap \underline{Y} \neq \emptyset$ esetén

$(X^+ \cap Y^+) \cup (X^- \cap Y^-) \neq \emptyset$ és $(X^+ \cap Y^-) \cup (X^- \cap Y^+) \neq \emptyset$.

Ha $M = (E, \mathcal{O})$ és $M^* = (E, \mathcal{O}^*)$ duális irányított matroidok, akkor az M és M^* matroidot irányított matroidnak nevezzük, és $\mathcal{O}$ illetve $\mathcal{O}^*$ az M illetve M^* matroid egy irányítása. Az M^* irányított matroidot az M irányított matroid duálisának nevezzük. A matroid dualitás tulajdonságaiból azonnal következik, hogy minden irányított matroidnak létezik és egyértelmű a duálisa, és $M^{**} = M$.

A /d/ feltételt ortogonalitási feltételnek nevezzük. A továbbiakban az X és Y előjeles halmazokat ortogonálisaknak nevezzük, ha $\underline{X} \cap \underline{Y} = \emptyset$ vagy /d/ fennáll.

Bland és Las Vergnas /[4] 2.1-2.2.Tétel/ bizonyította, hogy a /d/ ortogonalitási feltétel ekvivalens az alábbi /d'/ feltétellel.

/d'/ Minden $X_1, X_2 \in \mathcal{O}$, $e' \in (X_1^+ \cap X_2^-) \cup (X_1^- \cap X_2^+)$ és $e'' \in (X_1^+ \setminus X_2^-) \cup (X_1^- \setminus X_2^+)$ esetén van olyan $X_3 \in \mathcal{O}$, hogy $X_3^+ \subset (X_1^+ \cup X_2^+) \setminus \{e'\}$, $X_3^- \subset (X_1^- \cup X_2^-) \setminus \{e'\}$ és $e'' \in \underline{X}_3$.

Hasonlóan $\mathcal{O}^*$ esetében is.

Megemlítjük, hogy példák találhatók irányított matroidokra Bland[2] valamint Bland és Las Vergnas[4] cikkében. Bland[2] cikkében részletesen tárgyalja, miként indukál egy lineáris programozási feladat egy irányított matroidot. Ezen példák ismétlését itt nem tarjuk szükségesnek.

A fejezet hátralevő részében a lineáris algebrából jól ismert bázistáblának megfelelő bázistábla konstrukciót ismertetjük irányított matroidokra, majd bizonyítás nélkül közöljük a bázistábla alaptulajdonságait. Az alábbi bázistábla konstrukció szintén Bland[2] cikkében található.

Legyen $\mathcal{B}$ az $\underline{M}$ matroid bázisainak halmaza és legyen m az $\underline{M}$ matroid rangja. Jól ismert, hogy tetszőleges $B=\{e_{b_1},\dots,e_{b_m}\}\in\mathcal{B}$ bázis esetén minden e_{b_i}-hez /$i=1,\dots,m$/ egyértelműen létezik $\underline{Y}_{b_i}\in\underline{\mathcal{C}}^*$ kociklus $\underline{M}^*$-ban úgy, hogy $\underline{Y}_{b_i}\cap B=\{e_{b_i}\}$. Az $\{\underline{Y}_{b_1},\dots,\underline{Y}_{b_m}\}$ halmazt az $E\setminus B$ duál bázishoz tartozó <u>kociklusok alaprendszerének</u> nevezzük. Legyen Y_{b_i} $i=1,\dots,m$ az az egyértelműen létező irányított kociklus, melyre $e_{b_i}\in Y^+_{b_i}$ és $\underline{Y}_{b_i}\cap B=\{e_{b_i}\}$.

Legyen $T(B)$ az $\{Y_{b_i},\dots,Y_{b_m}\}$ irányitott kociklusok alaprendszerének előjeles incidencia mátrixa, azaz a $T(B)$ mátrix sorait az Y_{b_i} irányított kociklusok előjeles incidencia vektorai alkotják. Hasonlóan az I-II. fejezetekben bevezetett jelölésekhez, az Y_{b_i} irányított kociklushoz tartozó sort $T(B)$-ben a b_i-ik sornak nevezzük / a szokásos i-ik sor elnevezés helyett/. Igy a $T(B)$ mátrix t_{ij} eleme azt jelenti, hogy az $Y_i\in\{Y_{b_1},\dots,Y_{b_m}\}$ irányított kociklusban milyen az e_j elem előjele.

A T(B) mátrixot bázistáblának vagy röviden táblának nevezzük. Egy T(B) tábla az alábbi, könnyen ellenőrizhető tulajdonságokkal rendelkezik.

1.Tulajdonság: Ha $e_k \notin B$ akkor a T(B) tábla e_k-oszlopa megfelel egy $X=(X^+,X^-)$ irányított ciklusnak, ahol $X^+=\{e_i \mid \tau_{ik}=+1\}$ és $X^-=\{e_i \mid \tau_{ik}=-1\} \cup \{e_k\}$.

2.Tulajdonság: Az M és M^* irányított matroidok dualitásából következik, hogy az $E \setminus B$ elemekhez tartozó irányított ciklusok ellentettjei az irányított ciklusok B bázishoz tartozó alaprendszerét adják.

3.Tulajdonság: Minden $X \in \mathcal{C}$ irányított ciklus tetszőleges $e_k \in \underline{X}$ eleméhez van olyan $B \in \mathcal{B}$ bázis, hogy $e_k \notin B$ és a T(B) tábla e_k-oszlopa /1.Tulajdonság értelmében/, vagy az X /ha $e_k \in X^-$/, vagy a (-X) /ha $e_k \in X^+$/ irányított ciklust adja.

4.Tulajdonság: Egy $B \in \mathcal{B}$ bázis és $e_s \notin B$ elem esetén $\overline{B}=(B \cup \{e_s\}) \setminus \{e_r\}$ akkor és csak akkor bázis, ha $\tau_{rs} \neq 0$.

A T(B) tábla kicserélését a $T(\overline{B})$ táblára, amikor $\overline{B}=(B \cup \{e_s\}) \setminus \{e_r\}$ /$e_r \in B, e_s \notin B$, $\tau_{rs} \neq 0$/, a T(B) tábla (r,s) helyén végrehajtott pivot műveletnek nevezzük.

III.2.Alternatíva tételek bizonyítása a criss-cross módszerrel

Ebben a fejezetben a criss-cross módszer egy speciális változata segítségével irányított matroidokon adott alternatíva tételeket bizonyítunk. Igy bizonyítjuk a lineáris algebrából jól ismert Farkas lemma és a gráfelméletből jól ismert Minty féle szinezési tétel általánosítását.

Legyen $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ valamint $M=(E,\mathcal{O})$ és $M^*=(E,\mathcal{O}^*)$ duális irányított matroidok.

__1.Definíció:__ Az $X\in\mathcal{O}$ irányított ciklust __megengedettnek__ nevezzük, ha $e_1\in X^+$ és $X^-=\emptyset$.

Az alábbi feladat megoldására adunk megoldást az alábbiakban.

__M.1.Feladat:__ Keressünk megengedett irányított ciklust, ha létezik, illetve mutassuk ki, hogy nem létezik irányított ciklus M-ben, amely megengedett.

A továbbiakban a III.1. részben adott bázistáblát használjuk fel. Feltesszük, hogy $e_1\notin B$, és így a T(B) tábla e_1-oszlopa ad egy X_1 irányított ciklust. Igy az M.1.Feladat az alábbi módon is megfogalmazható:

Keressünk olyan bázistáblát, melyben $(-X_1)\in\mathcal{O}$ megengedett irányított ciklus, illetve olyan bázistáblát, mely bizonyítja, hogy nincs megengedett irányított ciklus.

Először egy egyszerű lemmát bizonyítunk.

1.Lemma: Ha valamely bázistábla és $e_k \in B$ esetén $\tau_{kl}=+1$ és $\tau_{ki} \in \{0,+1\}$ ha $e_i \notin B$, akkor nem létezik $X \in \mathcal{O}$ megengedett irányított ciklus.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy van $X \in \mathcal{O}$ megengedett irányított ciklus, azaz $X=(X^+,X^-)$, $e_1 \in X^+$, $X^-=\emptyset$. Tekintsük az $e_k \in B$ elemhez tartozó $Y_k \in \mathcal{O}^*$ irányított kociklust. Ekkor $e_1 \in \underline{X} \cap \underline{Y}_k \neq \emptyset$ és $e_1 \in (X^+ \cap Y_k^+) \cup (X^- \cap Y_k^-) \neq \emptyset$, de $(X^+ \cap Y^-) \cup (X^- \cap Y^+) = \emptyset$ mivel $X^-=Y^-=\emptyset$. Igy ellentmondásba kerültünk az X és Y_k ciklusok ortogonalitásával, lemmánkat beláttuk.

Legyen adott egy $T(B)$ bázistábla $/e_1 \notin B/$. Az algoritmusunkat definiáló pivotálási szabály az alábbi.

M.1.Pivotálási szabály

/a/ /i/ Ha $\tau_{i1} \in \{-1,0\}$ minden $e_i \in B$ esetén, akkor $(-X_1)$ megengedett irányított ciklus. Az M.1.Feladatot megoldottuk, eljárásunk véget ért.

/ii/Ha /i/ nem áll fenn, legyen $r=\min\{i \mid \tau_{i1}=+1,\ e_i \in B\}$.

/b/ /i/ Ha $\tau_{rj} \in \{0,+1\}$ minden $e_j \notin B$ esetén, akkor 1.Lemma szerint nincs megengedett irányított ciklus. Az M.1.Feladatot megoldottuk, eljárásunk véget ért.

/ii/Ha /i/ nem áll fenn, legyen $s=\min\{j \mid \tau_{rj}=-1,\ e_j \notin B\}$. Az e_r elem távozik, az e_s elem bekerül a bázisba. Pivotáljunk az (r,s) helyen. $\overline{B}=(B \cup \{e_s\}) \setminus \{e_r\}$.

Folytassuk az eljárást az új $T(\bar{B})$ bázistáblával. A bázistábla 4.Tulajdonsága szerint $\bar{B}$ is bázis. Az e_1 elem nem báziselem az eljárás során nyilvánvalóan.

Eljárásunk /ai/ vagy /bi/ esetnél ér véget, mindkét esetben megoldottuk M.1.Feladatot. Az M.1.Feladat megoldásához /mivel véges sok bázis van/ mindössze azt kell bebizonyítanunk, hogy eljárásunk nem ciklizálhat, azaz tetszőleges B bázis legfeljebb egyszer fordulhat elő eljárásunk során.

<u>Tétel:</u> Az M.1.Pivotálási szabály alkalmazásával ciklizálás nem fordulhat elő.

<u>Bizonyítás:</u> Tegyük fel indirekt, hogy eljárásunk ciklizál, azaz egy B bázisból indulva ismét a B bázishoz jutunk. Legyen $E^c=\{e_i \mid e_i$ kikerül a bázisból a ciklus során$\}$. Megjegyezzük, hogy $e_i \notin E^c$ esetén e_i vagy végig bázis, vagy végig nem bázis elem volt a ciklizálás során. Legyen $q=\max\{i \mid e_i \in E^c\}$.

Vizsgáljuk azt a két helyzetet, amikor e_q bekerül a bázisba és amikor távozik a bázisból. Legyen B' és B'' az előbb említett két bázis, és külömböztessük meg ' illetve ''-vel a T(B') és T(B'') tábla elemeit. Legyen e_r a bázist elhagyó elem, amikor e_q bekerül a bázisba és legyen e_s a bázisba bejövő elem, amikor e_q távozik a bázisból. Nyilvánvaló, hogy $q>1$, $r,s<q$ és $e_r, e_s \in E^c$.

Tekintsük az Y_r' irányított kociklust és az X_1'' irányított ciklust, melyek az M.1.Pivotálási szabály alapján az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek.

/1'/ $e_q \in Y_r'^-$	/1''/ $e_q \in X_l''^+$
/2'/ $e_l \in Y_r'^+$	/2''/ $e_l \in X_l''^-$
/3'/ $\underline{Y}_r' \subset (E \setminus B') \cup \{e_r\}$	/3''/ $\underline{X}_l'' \subset B'' \cup \{e_l\}$
/4'/ $Y_r'^- \cap E^c = \{e_q\}$	/4''/ $X_l''^+ \cap E^c = \{e_q\}$

Igy $e_q \in \underline{X}_l'' \cap \underline{Y}_r' \neq \emptyset$ és $e_q \in (X_l''^+ \cap Y_r'^-) \cup (X_l''^- \cap Y_r'^+) \neq \emptyset$, viszont $(X_l''^+ \cap Y_r'^+) \subset E^c \cup \{e_l\}$ és $(X_l''^- \cap Y_r'^-) \subset E^c \cup \{e_l\}$ és így /1',1'',2', 2'',4',4''/ tulajdonságok szerint mindkét halmaz üres. Ez ellentmond az irányított ciklusok és kociklusok ortogonalitásának, tételünket beláttuk.

Az M.1.Pivotálási szabály által definiált algoritmus a criss-cross módszer egy speciális alakja. A criss-cross módszer általános alakját a III.3. fejezetben tárgyaljuk.

A criss-cross módszer végességének közvetlen következménye a Farkas lemma egy általánosítása.

<u>1.Következmény:</u> Legyen $M=(E,\mathcal{O})$ és $M^*=(E,\mathcal{O}^*)$ duális irányított matroidok, $e \in E$ tetszőleges. Az alábbi alternatívák közül egy és csak egy áll fenn.

/a/ van olyan $X \in \mathcal{O}$ irányított ciklus, melyre $e \in X^+, X^- = \emptyset$

vagy

/b/ van olyan $Y \in \mathcal{O}^*$ irányított kociklus, hogy $e \in Y^+, Y^- = \emptyset$.

<u>Bizonyítás:</u> A ciklusok és kociklusok ortogonalitása miatt /a/ és /b/ egyidejűleg nem állhat fenn.

Számozzok E elemeit úgy, hogy $e_l = e$ legyen, ekkor a criss-cross módszer két kimenetele adja tételünk bizonyítását.

Hasonlóképpen nyerjük a Minty féle szinezési tétel általánosításának egy bizonyítását. Bizonyításunk konstruktív, míg Bland [2] bizonyítása induktív.

<u>2.Következménv:</u> Osszuk az E halmazt három R,G,W diszjunkt részre és legyen $e\in E$. Az alábbi alternatívák közül egy és csak egy áll fenn.

/a/ van olyan $X\in\mathcal{O}$, hogy $e\in\underline{X}\subset R\cup G$ és $X^{-}\cap R=\emptyset$,

vagy

/b/ van olyan $Y\in\mathcal{O}^{*}$, hogy $e\in\underline{Y}\subset R\cup W$ és $Y^{-}\cap R=\emptyset$.

<u>Bizonvítás:</u> Használva a matroidelméletből jól ismert törlés és összehúzás műveletét /töröljük W-t és húzzuk össze G-t/ tételünket visszavezethetjük az 1.Következményre.

Természetesen az M.1.Pivotálási szabály alkalmas módosításával is bizonyítható lett volna a 2.Következmény. A bizonyításnak ezt a változatát most nem részletezzük.

III.3. A criss-cross módszer általános alakja és a dualitástétel bizonyítása

Legyen $E=\{e_1,\ldots,e_n\}$ és $M=(E,\mathcal{O})$ és $M^*=(E,\mathcal{O}^*)$ duális irányított matroidok.

1.Definíció: Az $X\in\mathcal{O}$ irányított ciklust primál megengedettnek nevezzük, ha $e_1\in X^+$ és $X^-\subset\{e_2\}$.

2.Definíció: Az $Y\in\mathcal{O}^*$ irányított kociklust duál megengedettnek nevezzük, ha $e_2\in Y^+$ és $Y^-\subset\{e_1\}$.

Megjegyezzük, hogy a fenti megengedett halmazokat extremálisaknak is nevezzük. Használatos még a bázis megengedett elnevezés is. Az elnevezés indoklása új fogalmak bevezetését igényelné /Bland[2]/ így ettől itt, most eltekintünk.

3.Definíció: Az X és Y előjeles halmazokat komplementárisaknak nevezzük, ha $\underline{X}\cap\underline{Y}\subset\{e_1,e_2\}$.

4.Definíció: Az $X\in\mathcal{O}$ primál megengedett irányított ciklust optimálisnak nevezzük, ha van olyan $Y\in\mathcal{O}^*$ duál megengedett irányított kociklus, hogy X és Y komplementáris halmazok.

5.Definíció: Az $Y\in\mathcal{O}^*$ duál megengedett irányított ciklust optimálisnak nevezzük, ha van olyan $X\in\mathcal{O}$ primál megengedett irányított ciklus, hogy X és Y komplementáris halmazok. Ekkor nyilván X is optimális.

Az alábbi feladatot oldjuk meg ebben a fejezetben.

<u>M.2.Feladat:</u> Keressünk $X\in\mathcal{C}$ és $Y\in\mathcal{C}^*$ primál illetve duál optimális irányított ciklust illetve kociklust, vagy bizonyítsuk be, hogy nem létezik optimális irányított ciklus illetve kociklus.

Ebben a fejezetben is a III.1. fejezetben bemutatott bázistáblát fogjuk felhasználni.

Feltesszük a továbbiakban, hogy $e_1\notin B$ és $e_2\in B$. Pivotálási szabályunk meg fogja őrizni ezt a tulajdonságot. A T(B) tábla e_1-oszlopa egy $X_1\in\mathcal{C}$ irányított ciklust, az e_2-sora pedig egy $Y_2\in\mathcal{C}^*$ irányított kociklust ad. A lineáris programozási terminológiának megfelelően a tábla e_1-oszlopát <u>megoldás oszlopnak</u>, a tábla e_2-sorát <u>célfüggvény sornak</u> is nevezhetjük.

A T(B) tábla optimális, ha $(-X_1)\in\mathcal{C}$ és $Y_2\in\mathcal{C}^*$ primál illetve duál megengedettek, mivel ekkor $(-X_1)$ és Y_2 komplementárisak is $/\underline{X}_1\subset B\cup\{e_1\}$, $\underline{Y}_2\subset(E\setminus B)\cup\{e_2\}/$ azaz optimálisak.

Ha $\{e_2\}\in\mathcal{C}$, akkor a fenti kívánalmaknak megfelelő tábla nem létezik, így feltesszük azt is, hogy $\{e_2\}\notin\mathcal{C}$.

Az alábbi két lemma bizonyítja, hogyan látható egy T(B) táblából, hogy nem létezik duál illetve primál megengedett kociklus illetve ciklus.

<u>1.Lemma:</u> Ha valamely bázistábla és $e_k\notin B$, $k\neq 1$ esetén $\tau_{2k}=-1$ és $\tau_{ik}\in\{-1,0\}$ $e_i\in B$ esetén, akkor nem létezik $Y\in\mathcal{C}^*$ duál megengedett irányított kociklus.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy létezik $Y\in\mathcal{O}^*$ duál megengedett irányított kociklus, azaz $Y=(Y^+,Y^-)$, $e_2\in Y^+$, $Y^-\subset\{e_1\}$. Tekintsük a T(B) tábla e_k-oszlopának megfelelő X_k irányított ciklust. Ekkor $e_2\in\underline{X}_k\cap\underline{Y}\neq\emptyset$ és $e_2\in(X_k^+\cap Y^-)\cup(X_k^-\cap Y^+)\neq\emptyset$, de $(X_k^+\cap Y^+)\cup(X_k^-\cap Y^-)=\emptyset$ mivel $X_k^+=\emptyset$, $e_1\notin\underline{X}_k$ és $Y^-\subset\{e_1\}$. Ez ellentmond X_k és Y irányított ciklusok ortogonalitásának, lemmánkat beláttuk.

2.Lemma: Ha valamely bázistábla és $e_k\in B$, $k\neq 2$ esetén $\tau_{k1}=+1$ és $\tau_{ki}\in\{0,+1\}$ $e_i\notin B$ esetén, akkor nem létezik $X\in\mathcal{O}$ primál megengedett irányított ciklus.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy létezik $X\in\mathcal{O}$ primál megengedett irányított ciklus, azaz $X=(X^+,X^-)$, $e_1\in X^+$, $X^-\subset\{e_2\}$. Tekintsük a T(B) tábla e_k-sorának megfelelő Y_k irányított ko-ciklust. Ekkor $e_1\in\underline{X}\cap\underline{Y}_k\neq\emptyset$ és $e_1\in(X^+\cap Y_k^+)\cup(X^-\cap Y_k^-)\neq\emptyset$, de $(X^+\cap Y_k^-)\cup(X^-\cap Y_k^+)=\emptyset$ mivel $Y_k^-=\emptyset$, $e_2\notin\underline{Y}_k$ és $X^-\subset\{e_2\}$. Ez ellentmond az X és Y_k irányított ciklusok ortogonalitásának, lemmánkat beláttuk.

Amennyiben nem létezik primál megengedett ciklus vagy duál megengedett kociklus, akkor 4. és 5.Definíciók értelmében nem létezik sem primál sem duál optimális ciklus illetve kociklus.

Ha adott egy B bázis és T(B) bázistábla, melyre $e_2\in B$ és $e_1\notin B$, akkor a criss-cross módszert definiáló pivotálási szabály az alábbi.

M.2.Pivotálási szabály

/a/ /i/ Ha $\tau_{2j}\in\{0,+1\}$ $j=2,\dots,n$ és $\tau_{i1}\in\{-1,0\}$ $e_i\in B$, $i\neq 2$, akkor a $(-X_1)$ irányított ciklus primál, az Y_2 irányított kociklus duál megengedett, azaz optimálisak. Az M.2.Feladatot megoldottuk, eljárásunk véget ért.

/ii/Ha /i/ nem áll fenn, legyen

$k=\min\{i \mid \tau_{2i}=-1$ vagy $\tau_{i1}=+1 \quad i=3,\dots,n\}$.

/b/ /i/ Ha $\tau_{2k}=-1$ és $\tau_{ik}\in\{-1,0\}$ minden $e_i\in B$ esetén, akkor 1.Lemma szerint nincs $Y\in\theta^*$ duál megengedett irányított kociklus. Az M.2.Feladatot megoldottuk, eljárásunk véget ért.

/ii/ Primál transzformáció

Ha /i/ nem áll fenn, legyen $r=\min\{i \mid \tau_{ik}=+1,\ e_i\in B\}$. Pivotáljunk az (r,k) helyen, az e_r elem távozik, az e_k elem kerül be a bázisba. $\bar{B}=(B\cup\{e_k\})\setminus\{e_r\}$.

/c/ /i/ Ha $\tau_{k1}=+1$ és $\tau_{ki}\in\{0,+1\}$ $e_i\notin B$ esetén, akkor 2.Lemma szerint nincs $X\in\theta$ primál megengedett irányított ciklus. Az M.2.Feladatot megoldottuk, eljárásunk véget ért.

/ii/ Duál transzformáció

Ha /i/ nem áll fenn, legyen $s=\min\{j \mid \tau_{kj}=-1,\ e_j\notin B\}$. Pivotáljunk a (k,s) helyen, az e_k elem távozik, az e_s elem kerül be a bázisba, $\bar{B}=(B\cup\{e_s\})\setminus\{e_k\}$.

Folytassuk az eljárást az új $T(\bar{B})$ bázistáblával. A bázistábla 4.Tulajdonsága értelmében $\bar{B}$ is bázis. Az eljárás során nyilván $e_2 \in B$ és $e_1 \notin B$.

Eljárásunk az /ai/,/bi/ vagy /ci/ eseteknél ér véget. Az /ai/ esetben optimális irányított ciklusokat kaptunk, a /bi/ és /ci/ esetekben pedig nem léteznek optimális irányított ciklusok. Az M.2.Feladat megoldásához csak azt kell belátnunk, hogy az M.2.Pivotálási szabállyal definiált criss-cross módszer nem ciklizálhat, mivel véges sok külömböző $B \in \mathcal{B}$ bázis létezik.

Tétel: Az M.2.Pivotálási szabály által definiált criss-cross módszer nem ciklizál, azaz véges lépésben véget ér.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy az eljárás ciklizál, azaz egy B bázisból indulva ismét a B bázishoz jutunk. Legyen $E^c = \{e_i \mid e_i$ elhagyja a bázist a ciklizálás során$\}$. Megjegyezzük, hogy $e_i \notin E^c$ esetén e_i vagy végig báziselem vagy végig nem bázis elem volt. Jelölje $q = \max\{i \mid e_i \in E^c\}$.

Tekintsük azt a két helyzetet, amikor e_q bekerül a bázisba és amikor e_q távozik a bázisból. Legyen ebben a két helyzetben B' illetve B'' a két bázis. Külömböztessük meg ' illetve ''-vel a T(B') illetve T(B'') táblák elemeit. Legyen e_r a bázisból kilépő elem, amikor e_q bekerül a bázisba, és e_s a bázisba belépő elem, amikor e_q kikerül a bázisból. Nyilvánvaló, hogy $q > 2$, $r, s < q$ és $e_r, e_s \in E^c$.

Az alábbi négy esetet kell megkülömböztetnünk.

/α/ e_q primál transzformációnál kerül be és primál transzformációnál kerül ki a bázisból.

/β/ e_q primál transzformációnál kerül be és duál transzformációnál kerül ki a bázisból.

/γ/ e_q duál transzformációnál kerül be és primál transzformációnál kerül ki a bázisból.

/δ/ e_q duál transzformációnál kerül be és duál transzformációnál kerül ki a bázisból.

Vizsgáljuk a fenti négy esetet, be fogjuk bizonyítani, egyik eset sem lehetséges, azaz ciklizálás nem fordulhat elő.

/α/ Az e_q elem primál transzformációnál B' bázis esetén jön be a bázisba és e_r távozik, valamint az e_q elem primál transzformációnál B'' bázis esetén távozik a bázisból és e_s kerül be a bázisba.

Az M.2.Pivotálási szabály alapján $Y'_2 \in \mathcal{O}^*$ és $X''_s \in \mathcal{O}$ az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.

/1'/ $e_q \in Y'^{-}_2$	/1''/ $e_q \in X''^{+}_s$
/2'/ $e_2 \in Y'^{+}_2$	/2''/ $e_2 \in X''^{-}_s$
/3'/ $Y'^{-}_2 \cap E^c = \{e_q\}$	/3''/ $X''^{+}_s \cap E^c = \{e_q\}$
/4'/ $\underline{Y}'_2 \subset (E \setminus B') \cup \{e_2\}$	/4''/ $\underline{X}''_s \subset B'' \cup \{e_s\}$

Az /1',1''/ tulajdonságok szerint $e_q \in \underline{X}''_s \cap \underline{Y}'_2 \neq \emptyset$. A /4',4''/ tulajdonságokat felhasználva $\underline{X}''_s \cap \underline{Y}'_2 \subset [B'' \cup \{e_s\}] \cap [(E \setminus B') \cup \{e_2\}] \subset$ $\subset E^c \cup \{e_2\}$, és így /3',3''/ szerint $(X''^{+}_s \cap Y'^{+}_2), (X''^{-}_s \cap Y'^{-}_2) \subset \{e_2, e_q\}$

melyből /1',1'',2',2''/ felhasználásával kapjuk, hogy $X_s^{\prime\prime +} \cap Y_2^{\prime +} = \emptyset$ és $X_s^{\prime\prime -} \cap Y_2^{\prime -} = \emptyset$, ami ellentmond $X_s^{\prime\prime}$ és $Y_2^{\prime}$ ortogonalitásának. Igy ez az eset nem lehetséges.

/β/ Az e_q elem primál transzformációnál B' bázis esetén jön be és e_r távozik a bázisból, valamint az e_q elem duál transzformációnál B'' bázis esetén távozik a bázisból, amikor e_s jön be a bázisba. Tekintsük az $X_1^{\prime}, X_1^{\prime\prime}$ irányított ciklusokat és az $Y_2^{\prime}, Y_2^{\prime\prime}$ irányított kociklusokat.

Az $X_1^{\prime}$, $X_1^{\prime\prime}$ irányított ciklusok és az $Y_2^{\prime}$, $Y_2^{\prime\prime}$ irányított kociklusok az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek.

/X1/ $X_1^{\prime +} \cap E^c = \emptyset$ /Y1/ $Y_2^{\prime -} \cap E^c = \{e_q\}$

/X2/ $\underline{X}_1^{\prime} \subset B' \cup \{e_1\}$ /Y2/ $\underline{Y}_2^{\prime} \subset (E \setminus B') \cup \{e_2\}$

/X3/ $X_1^{\prime\prime +} \cap E^c = \{e_q\}$ /Y3/ $Y_2^{\prime\prime -} \cap E^c = \emptyset$

/X4/ $\underline{X}_1^{\prime\prime} \subset B'' \cup \{e_1\}$ /Y4/ $\underline{Y}_2^{\prime\prime} \subset (E \setminus B'') \cup \{e_2\}$

/X5/ $e_1 \in X_1^{\prime -} \cap X_1^{\prime\prime -}$ /Y5/ $e_2 \in Y_2^{\prime +} \cap Y_2^{\prime\prime +}$

A III.1. fejezetben az ortogonalitási feltétellel ekvivalens feltételként adott /d'/ feltétel szerint /$X_1 = X_1^{\prime\prime}$, $X_2 = -X_1^{\prime}$, $e' = e_1$, $e'' = e_q$ illetve $-Y_2^{\prime}$, $Y_2^{\prime\prime}$, e_2, e_q szereposztással/ az alábbi tulajdonságokkal rendelkező $X \in \mathscr{C}$ irányított ciklust és $Y \in \mathscr{C}^*$ irányított kociklust nyerjük a fent felsorolt tulajdonságok alapján.

/1'/ $e_1 \notin \underline{X}$ /1''/ $e_2 \notin \underline{Y}$

/2'/ $e_q \in X^+$ /2''/ $e_q \in Y^+$

/3'/ $X^+ \subset \{e_q\} \cup B' \cup (B'' \setminus E^c)$ /3''/ $Y^+ \subset \{e_q\} \cup [(E \setminus B') \setminus E^c] \cup (E \setminus B'')$

/4'/ $X^- \subset (B'' \setminus \{e_q\}) \cup (B' \setminus E^c)$ /4''/ $Y^- \subset [(E \setminus B') \setminus \{e_q\}] \cup [(E \setminus B'') \setminus E^c]$

A /2',2''/ tulajdonságok szerint $e_q \in \underline{X} \cap \underline{Y} \neq \emptyset$, de /2',2'', 3',4''/ szerint

$X^+ \cap Y^- \subset \{\{e_q\} \cup B' \cup (B'' \setminus E^c)\} \cap \{[(E \setminus B') \setminus \{e_q\}] \cup [(E \setminus B'') \setminus E^c]\} = \emptyset$,

és /2',4',2'',3''/ szerint

$X^- \cap Y^+ \subset \{(B'' \setminus \{e_q\}) \cup (B' \setminus E^c)\} \cap \{\{e_q\} \cup [(E \setminus B') \setminus E^c] \cup (E \setminus B'')\} = \emptyset$.

Ez ellentmond X és Y ortogonalitásának, így ez az eset sem lehetséges.

/γ/ Az e_q elem duál transzformációnál B' bázis esetén jön be és e_r távozik a bázisból, valamint az e_q elem primál transzformációnál B'' bázis esetén távozik a bázisból amikor e_s jön be a bázisba.

Az M.2.Pivotálási szabály alapján $Y'_r \in \mathscr{O}^*$ és $X''_s \in \mathscr{O}$ az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.

/1'/ $e_1 \in Y'^{+}_r$	/1''/ $e_2 \in X''^{-}_s$
/2'/ $e_q \in Y'^{-}_r$	/2''/ $e_q \in X''^{+}_s$
/3'/ $Y'^{-}_r \cap E^c = \{e_q\}$	/3''/ $X''^{+}_s \cap E^c = \{e_q\}$
/4'/ $\underline{Y}'_r \subset (E \setminus B') \cup \{e_r\}$	/4''/ $\underline{X}''_s \subset B'' \cup \{e_s\}$

A /2',2''/ tulajdonságok alapján $e_q \in \underline{X}''_s \cap \underline{Y}'_r \neq \emptyset$, valamint /4',4''/ és E^c definíciójának felhasználásával kapjuk, hogy $\underline{X}''_s \cap \underline{Y}'_r \subset [B'' \cup \{e_s\}] \cap [(E \setminus B') \cup \{e_r\}] \subset E^c$. Igy /3',3''/ miatt $Y'^{+}_r \cap X''^{+}_s \subset \{e_q\}$ és $Y'^{-}_r \cap X''^{-}_s \subset \{e_q\}$, melyekből /2',2''/ alapján kapjuk, hogy $Y'^{+}_r \cap X''^{+}_s = \emptyset$ és $Y'^{-}_r \cap X''^{-}_s = \emptyset$, ami ellentmond Y'_r és X''_s ortogonalitásának. Tehát ez az eset sem lehetséges.

/δ/ Az e_q elem duál transzformációnál B' bázis esetén jön be és e_r távozik a bázisból, valamint az e_q elem duál transzformációnál B'' bázis esetén távozik a bázisból, amikor e_s jön be a bázisba.

Az M.2.Pivotálási szabály alapján $Y_r' \in \mho^*$ és $X_l'' \in \mho$ az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.

/1'/ $e_q \in Y_r'^-$	/1''/ $e_q \in X_l''^+$
/2'/ $e_l \in Y_r'^+$	/2''/ $e_l \in X_l''^-$
/3'/ $Y_r'^- \cap E^c = \{e_q\}$	/3''/ $X_l''^+ \cap E^c = \{e_q\}$
/4'/ $\underline{Y}_r' \subset (E \setminus B') \cup \{e_r\}$	/4''/ $\underline{X}_l'' \subset B'' \cup \{e_l\}$

Az /1',1''/ tulajdonságok szerint $e_q \in \underline{X}_l'' \cap \underline{Y}_r' \neq \emptyset$, valamint /4',4''/ és E^c definíciójának felhasználásával kapjuk, hogy $\underline{X}_l'' \cap \underline{Y}_r' \subset [B'' \cup \{e_l\}] \cap [(E \setminus B') \cup \{e_r\}] \subset E^c \cup \{e_l\}$. Igy /3',3''/ miatt $Y_r'^+ \cap X_l''^+ \subset \{e_l, e_q\}$ és $Y_r'^- \cap X_l''^- \subset \{e_l, e_q\}$, melyekből /1',1'',2', 2''/ felhasználásával kapjuk, hogy $Y_r'^+ \cap X_l''^+ = \emptyset$ és $Y_r'^- \cap X_l''^- = \emptyset$, ami ellentmond Y_r' és X_l'' ortogonalitásának. Ez az eset sem lehetséges.

Mivel mind a négy lehetséges eset ellentmondásra vezetett, igy beláttuk, hogy ciklizálás nem fordulhat elő, azaz tételünket bebizonyítottuk.

Tételünk közvetlen következménye az irányított matroidokon adott általános dualitás tétel /Bland[2] 3.5.Tétel/, melyre így egy új algoritmikus bizonyítást nyertünk.

<u>Következmény:</u> Legyenek $M=(E,\mathcal{O})$ és $M^*=(E,\mathcal{O}^*)$ duális irányított matroidok. Legyen $e',e''\in E$. Az alábbi alternatívák közül pontosan egy áll fenn.

/a/ Létezik olyan $X\in\mathcal{O}$, melyre $e'\notin \underline{X}$, $e''\in X^+$ és $X^-=\emptyset$, vagy
létezik olyan $Y\in\mathcal{O}^*$, melyre $e'\in Y^+$, $e''\notin \underline{Y}$ és $Y^-=\emptyset$.

/b/ Létezik $X\in\mathcal{O}$ és $Y\in\mathcal{O}^*$, melyekre $e'\in \underline{X}^+$, $X^-\subset\{e''\}$,
$e''\in Y^+$, $Y^-\subset\{e'\}$ és $\underline{X}\cap\underline{Y}\subset\{e',e''\}$.

<u>Bizonyítás:</u> Az irányított ciklusok és kociklusok ortogonalitásából következik, hogy /a/ és /b/ nem állhat fenn egyidejűleg.

Ha $\{e''\}\in\mathcal{O}$ akkor nyilvánvalóan /a/ áll fenn.

Ha $\{e''\}\notin\mathcal{O}$ akkor $e_1=e''$ és $e_2=e''$ választással alkalmazhatjuk a criss-cross módszert, melynek három kimenete adja állításunk bizonyítását, mivel a criss-cross módszer véges.

Megjegyezzük, hogy a fenti következmény szavakban kimondva azt jelenti, hogy ha primál megengedett irányított ciklus és duál megengedett irányított kociklus is létezik, akkor optimális irányított ciklus illetve kociklus is létezik.

Irodalomjegyzék

[1] M.L.Balinski and A.W.Tucker: Duality theory of linear programs:A constructive approach with applications. SIAM Rewiew Vol.11.No.3, 1969./347-377/

[2] R.G.Bland: A combinatorial abstraction of linear programming. Journal of Combinatorial Theory /B/ 23.1977./33-57/

[3] R.G.Bland:New finite pivoting rules for the simplex method Mathematics of Operations Research.2.1977./103-107/

[4] R.G.Bland and M.Las Vergnas: Orientablity of matroids Journal of Combinatorial Theory /B/.24.1978./94-123/

[5] A.Charnes:Optimality and degeneracy in linear programming Econometrica.20.1952./160-170/

[6] A.Charnes,W.W.Cooper and A.Henderson: An introduction to linear programming. John Wiley and Sons Inc. NY.1953

[7] G.B.Dantzig: Linear programming and extensions Princeton University Press, Princeton. 1963.

[8] G.B.Dantzig, L.R.Jr.Ford and D.R.Fulkerson: A primal dual algorithm for linear programs. in H.W.Kuhn and A.W.Tucker /eds./ Linear inequalities and related systems, Annals of Mathematics Studies No. 38. Princeton University Press, Princeton. 1956.

[9] H.W.Kuhn: The Hungarian Method for assignment problems. Naval Research Logistic Quarterly 2.1955./83-97/

[10] H.W.Kuhn:Variants of the Hungarian Method for assignment problems.Naval Research Logistic Quarterly 3.1956./253-258/

[11] Klafszky E. és Terlaky T.: Variants of the Hungarian method for solving linear programs. Mathematical Programming Study /megjelenés alatt/.

[12] E.L.Lawler: Kombinatorikus optimalizálás, hálózatok és matroidok. Műszaki könyvkiadó, Budapest 1982.

[13] Lovász L.:A matroidelmélet rövid áttekintése. Matematikai Lapok 22.évf. 3-4. 1971 /249-267/

[14] C.E.Lemke: The dual method of solving the linear programming problem. Naval Research Logistic Quarterly. 1. 1954 /36-47/

[15] G.J.Minty: On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs. Electrical Networks and Network Programming, Journal of Mathematics and Mechanics, 15. 1966./385-520/

[16] Prékopa A.: Lineáris programozás I. Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968.

[17] R.T.Rockafellar: The elementary vectors of a subspace of R^n, in Combinatorial Mathematics and Its Applications, Proceedings of the Chapel Hill Conference, 1967, eds.R.G.Bore and T.A.Dowling. University of North Carolina Press. 1969. /104-127/

[18] Terlaky T.: Egy új véges criss-cross módszer és végességének bizonyítása. Alkalmazott Matematikai Lapok, /megjelenésre elfogadva/

[19] Terlaky T.: A convergent criss-cross method. Mathematics of Oprationschforschung und Statistic, ser.Optimization /megjelenésre elfogadva/.

[20] Terlaky T.: A finite criss-cross method for oriented matroids. Journal of Combinatorial Theory /B/. /megjelenés alatt/.

[21] W.T.Tutte: Lectures on matroids. Journal of Research National Bureau Std.B.69.1965. /1-47/

[22] H.Whitney: On the abstract properties of linear dependence. American Journal of Mathematics. 57.1935./509-533/

[23] S.Zionts: The criss-cross method for solving linear programming problems. Management Science. Vol.15.No.7. 1969. /426-445/

[24] S.Zionts: Some empirical tests of the criss-cross method. Management Science. Vol.19.No.4.1972./406-410/

[25] L.G.Khaciján:Polinomiálnüj algoritm v linyejnom programmirovanije. Zsurnal Vücsiszlityelnoj Matyematyiki Matyematyicseszkoj Fiziki, Tom.20.No.1.1980./51-68/.

[26] L.G.Khaciján:Polinomiálnüj algoritm v linyejnom programmirovanije. DAN SSSR, 244,5. 1979./1093-1096/.

1985-BEN MEGJELENTEK:

166/1985 Radó Péter: Információs rendszerek számitógépes tervezése

167/1985 Studies in Applied Stochastic Programming I. Szerkesztette: Prékopa András /utánnyomás/

168/1985 Böszörményi László - Kovács László - Martos Balázs - Szabó Miklós: LILIPUTH

169/1985 Horváth Mátyás: Alkatrészgyártási folyamatok automatizált tervezése

170/1985 Márkus Gábor: Algoritmus mátrix alapu logaritmus kiszámitására kriptográfiai alkalmazásokkal

171/1985 Tamás Várady: Integration of free-form surfaces into a volumetric modeller

172/1985 Reviczky János: A számitógépes grafika terület-kitöltő algoritmusai

173/1985 Kacsukné Bruckner Livia: Mozgáspálya generálás bonyolult geometriáju felületek 2 1/2D-s NC megmunkálásához

174/1985 Bolla Marianna: Mátrixok spektrálfelbontásának és szinguláris felbontásának módszerei

175/1985 Hannák László, Radó Péter: Adatmodellek, adatbázis-filozófiák

176/1985 Számitógépes képfeldolgozási és alakfelismerési kutatók találkozója.
Szerkesztette: Csetverikov Dmitirj,
Fóglein János és Solt Péter

177/1985 Gyárfás András: Problems from the world surrounding perfect graphs

178/1985 PUBLIKÁCIÓK'84
Szerkesztette: Petróczy Judit