tanulmányok

161/1984

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

TÖBBÉRTÉKÜ LOGIKÁK SZERKEZETÉRŐL

Irta:

Hannák László

Tanulmányok 161/1984

A kiadásért felelős:
DR VÁMOS TIBOR

Főosztályvezető:
DEMETROVICS JÁNOS

ISBN 963 311 180 3
ISSN 0324 - 2951

SZÁMALK REPRO VGM 84/255

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A többértékü logika vizsgálata a diszkrét matematikának meglehetősen uj ága. A felvetődő problémák eredete - mint arra az elnevezés is utal - a matematikai logika témakörében kereshető. A kutatás első lépései a Boole-függvények viselkedésével kapcsolatosak /[4], [36], [47], [48], [79]/. Azt is mondhatjuk, hogy a többértékü logika tulajdonképpen a 2-értékü logika természetes általánositásaként keletkezett. Fejlődése, a felvetődő problémák bonyolultsága azonban uj matematikai módszerek bevetését tette szükségessé.

A kutatások eredményeinek legfőbb felhasználási területe - s igy sok esetben a további vizsgálatok ösztönzője is - a számitástechnika , a különféle automaták és áramkörök tervezése és konstruálása. A többértékü logika függvényei ugyanis jól használhatók véges állapotu áramköri elemekből felépitett hálózatok modellezésére.

Az itt tárgyalt eredmények egyszersmind szorosan kapcsolódnak a legutóbbi években a véges algebrák klónjainak az univerzális algebra tárgykörébe eső kutatásaihoz is. Ez nem véletlen: a többértékü logika zárt osztályai és a klónok nagyon hasonló fogalmak. A definiciójukban levő eltérés nem lényegi, inkább csak a klasszikus "logikai", ill. a modernebb "algebrai" megközelités különbségéből adódik. A legtöbb eredmény mind a többértékü logika, mind az univerzális algebra eszközeivel egyenértéküen megfogalmazható. A teljesség igénye nélkül szeretnék ezek közül utalni Rosenberg [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [64], Quackenbush [52], [53], Salomaa [67], [68], [69], [70], [71], [72] és a magyar szerzők közül Csákány [6], [8], [9], [10], [11], Szabó [76] dolgozataira, továbbá Werner [81], Pöschel-Kaluzsnyi [49] és Grätzer [30] könyveire, melyek eredményeit esetenként idézzük is, és amelyekből /sok helyen/ a dolgozat terminológiája is származik.

A tanulmányt három fejezetre osztottuk. Egy-egy fejezet különböző jellegü kérdésekkel foglalkozik, ezért a fejezetek bizonyos mértékig önálló egységeknek is tekinthetők.

Mindhárom fejezetben épitünk néhány - a témakörben klasszikusnak számitó - eredményre, mint például a maximális klónok Rosenberg-féle jellemzése, vagy a klónok és relációalgebrák közötti /Pol-Inv/ Galois-kapcsolat. Ugyancsak mindhárom fejezetben egységesen használunk jelöléseket és fogalmakat. Azért, hogy a témában járatosabb olvasót ne terheljük feleslegesen, a dolgozat azonban önmagában is olvasható maradjon, ezeket az alapdefiniciókat és tételeket az első fejezet előtt, a "Fogalmak, jelölések" cimü részben külön ismertetjük. Okot ad erre az eljárásra a már emlitett terminológiai kettősség is: a dolgozat egyfajta, az univerzális algebraihoz közelebbi terminológiát használunk. Ugy gondoltuk, a definiciók felidézése azt is lehetővé teszi, hogy rávilágitsunk a logikai és algebrai fogalmazásmód közötti eltérésekre és azonosságokra.

Az első fejezetet a klónháló számossági problémáinak szenteltük. Kételemü halmaz fölött Post /[47]-ben/ leirta az összes klónokat. Legalább 3 elemü alaphalmaz esetén Janov és Mucsnik [37] eredményeiből következik, hogy az összes klónok számossága kontinuum. Vizsgálataink kiindulópontja Rosenbergnek a klónháló duális atomjait leiró tétele. Először arra a kérdésre adunk választ, hány részklónja van egy - adott tipusu - maximális klónnak. Az un. affin maximális klónra a választ Szendrei [79] és Bagyinszki-Demetrovics [2] dolgozataiból ismerjük. Az 1.3. tétel azt mondja ki, hogy a részklónok számossága másik négy tipus esetén is /legalább 3 elemü alaphalmazon/ kontinuum. Az önduális osztályok vizsgálatánál eltekintettünk a Rosenberg-tételnek a maximális klónt definiáló permutációkra kirótt feltételétől: egy π permutációval felcserélhető összes függvények S_{π} klónjait vizsgáltuk. Két kivételtől eltekintve - s ezek közül csak az egyik ad maximális klónt - sikerült belátni, hogy az S_{π} részklónjainak számossága kontinuum /1.10.tétel/.

A két kivételes permutáció esetére Marcsenkov adott bizonyitást [43]-ban. Eredményeinket ezzel kiegészitve teljes leirást kapunk a különféle tipusu maximális klónok részklónjainak számosságáról, ezt foglalja össze az 1.12. tétel.

A fejezet második része a klónhálók néhány duális ideáljának és intervallumának számosságát adja meg. Ezek közül elsőként az un. majdnem-projekciók generálta duális ideálok számosságáról bizonyitjuk, hogy /legalább négyváltozós esetben/ kontinuum /1.14. tétel/. A következő kérdést McKenzie vetette fel 1983-ban, a Szegeden tartott univerzális algebrai konferencián: Mi az olyan klónok számossága, melyek tartalmazzák az összes konstansok klónját? Ha az alaphalmaz legalább három elemü, a válasz itt is kontinuum /1.16.tétel/. Az 1.17. és

1.18. tételek a klónhálónak a majdnem-projekciók ill. konstansok generálta klónnak alulról és bizonyos maximális osztályokkal ill. ezek metszeteivel felülről határolt intervallumairól mondja ki, hogy számosságuk kontinuum.

A fejezet záró eredménye a különböző függvénytelies algebrák számosságát adja meg: Legalább 4-elemü alaphalmazon kontinuum sok ilyen konstruálható.

A nagy számosságu klónhalmazok konstruálásához bevezettük a szeparáló relációhalmazok fogalmát. A bizonyitásokban az [1], [37], [18], [19], [20] dolgozatoktól eltérően ezt a fogalmat és az erre épülő módszert alkalmazzuk /ld. 1.4., 1.5. lemma/. Az egyetlen kivétel az 1.7. lemma: itt a már [20]-ban is megtalálható "direkt" módszert követtük. A szeparáló relációk alkalmazása lehetővé tette, hogy néhány állitást /mint pl. az 1.14., 1.17., 1.18. tételek/ egyszerübben igazoljunk.

A második fejezet a maximális klónok generátorrendszereivel foglalkozik. Első részében röviden összefoglaltuk a dolgozatban tárgyalt kérdés előzményeit, Lau [40] és Schofield [75] munkái alapján. Ezekből kiderül, hogy a monoton tipusu maximális klónok kivételével mind végesen generálhatóak; pontosan tudjuk, melyek közülük az egyetlen függvénnyel generálhatóak. A monoton maximális klónok esetében általában nem tudjuk garantálni véges generátorrendszer létezését. Ilyen van, ha a definiáló részbenrendezés háló, vagy az alaphalmaz kicsi. /Legfeljebb 7 elemü, ld. [40]./ A [26] eredményei alapján a kérdést arra vezettük vissza, hogy mikor lehet egy korlátos részbenrendezést megőrző függvények között un. többségi függvényt találni. Ha ugyanis ilyen van egy klónban, akkor Baker és Pixley egy tételének könnyen igazolható következményeként a klón végesen generálható lesz. /2.3. lemma/. Először is belátjuk, hogy háromváltozós többségi függvény létezése jellemzi a hálókat /2.4. lemma/ Példát mutatunk olyan korlátos részbenrendezésre, amely nem háló, de polimorfizmusai között van többségi függvény /2.7. lemma/. A 2.12. tétel olyan - csak a részbenrendezéstől függő - feltételt ad, amely biztositja többségi függvény létezését egy korlátos részbenrendezés polimorfizmusai között. A feltétel az, hogy az R részbenrendezés előállitható legyen egy L hálóból ugy, hogy elhagyjuk L-ből egy konvex részhalmazát. Mivel többségi függvény létezése öröklődik a retrakt-képzésre és a véges direkt szorzatra /2.10. lemma/, ilyen módon egy, a hálóknál lényegesen bővebb osztályát nyerjük azoknak a részbenrendezéseknek, melyeknek polimorfizmusai végesen generálhatóak.

A használt módszer sajnos nem irja le az összes korlátos részbenrendezéseket. A 2.18. tétel mutat példát olyan R részbenrendezésre, amelynek polimorfizmusai között semmilyen aritásu többségi függvény sem fordulhat elő.

<u>A harmadik fejezet</u> a 3-elemü halmaz fölött értelmezett önduális maximális klón, /S/, részklónhálójának leirása. Mivel - az első fejezet 1.12. tétele szerint - a vizsgált osztály kontinuum sok részklónt tartalmaz, nem reméltünk - és nem is adunk - hiánytalan leirást a hálóról, klónok egy csoportjának tartalmazási viszonyait és bázisait adjuk meg a [21], [24] dolgozatok felépitését követve. A fejezet első része a vizsgált klónok definicióját tartalmazza: Ezek néhány természetesen adódó kivételtől eltekintve, mind a $\{0,1\}$ halmazt őrző függvények klónjai lesznek. /Minden olyan klónt sikerült leirni, amely tartalmaz a $\{0,1\}$ -et nem őrző függvényt, de nagyon kevés ilyen van: 7 darab./ Ez a tulajdonság adta a kezünkbe a háló vizsgálatának módszerét: a $\{0,1\}$ halmazt őrző függvények megszorithatók erre a halmazra, megszoritásuk Boole-függvény, és ez az ugynevezett Boole-megszoritás klónokra is értelmezhető. Ha pedig egy olyan Boole-függvényt tekintünk, amely őrzi a $\{0\}$ és $\{1\}$ halmazokat, ez mindig kiterjeszthető S-beli fügvénnyé. Ez

a kiterjesztés - sajnos - nem egyértelmü, a vizsgált klónok definiálása pontosan azt jelenti, hogy megmondjuk, milyen tulajdonságu kiterjesztésekből álló klónokat veszünk figyelembe /3.1.-3.5./.

A fejezet második részében megadjuk a tárgyalt klónok egy bázisát /3.1. lemma - 3.13. lemma/. Mint kiderül, ezek a klónok mind véges bázisuak, és rendjüket is meghatározzuk.

A harmadik rész a vizsgált osztályok tartalmazási viszonyait adja meg. Azt a módszert követtük, hogy minden klónhoz megkiséreltük meghatározni a benne maximális, valódi részklónjainak halmazát. Ez, lényegében két eset kivételével, sikerült, s igy a háló "felderitetlen területei" lokalizálhatók /3.14. - 3.26. lemma /.

A fejezet végén a 3.27. - 3.30. tételekben összefoglaltuk a vizsgált klónok szerkezete alapján az S összes részklónjainak L_S hálójára adódó eredményeket. Sikerült meghatározni pl. néhány érdekes függvényt tartalmazó összes klónok duális ideáljait, valamint L_S összes atomját és duális atomját.

A dolgozatban a lemmák és tételek számozása minden fejezetben elölről kezdődő, de egy fejezeten belül folyamatos sorszám, melyet a fejezet sorszáma előz meg.

Fogalmak, jelölések

Az $\mathfrak{A} = <A;F>$ algebrán az A alaphalmazon $f_\alpha \in F$, $f_\alpha : A^{m_\alpha} \to A$ müveletekkel értelmezett /megfelelő tipusu/ univerzális algebrát értjük. Az $<A;F>$ algebra véges, ha alaphalmazának számossága véges. Azok az algebrai strukturák, melyeknek klónjairól a dolgozatban szó lesz, kivétel nélkül végesek. Véges algebra /k-elemü/ alaphalmazát gyakran fogjuk, a számolás egyszerüsitése kedvéért, az $E_k = \{0,1,2, \ldots, k-1\}$ halmazzal reprezentálni. Az A halmaz számosságát card (A) jelöli. Az algebra müveleteit /az A-n értelmezett/ függvényeknek fogjuk nevezni.

Legyen $n \geq 1$ és jelöljük $P_A^{(n)}$-nel az A halmazon értelmezett összes n-változós függvények halmazát:

$$P_A^{(n)} = \{ f(x_1, \ldots, x_n) \mid f: A^n \to A \}$$

és legyen $P_A = \bigcup\limits_{n \geq 1} P_A^{(n)}$.

P_{E_k}-t az egyszerüség kedvéért P_k-val fogjuk jelölni. A 0-változós függvények halmazát /konstansok/ C_A-val, ill. C_k-val jelöljük. Ezeket technikai okokból konstans értékü egyváltozós függvényként kezeljük.

A P_A halmazon vezessük be a következő $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, \circ$ müveleteket:

Ha $f \in P_A^{(n)}$, $g \in P_A^{(m)}$, legyen

$$\zeta(f)(x_1,\dots,x_n) := f(x_2,x_3,\dots,x_n,x) \ ,$$

$$\tau(f)(x_1,\dots,x_n) := f(x_2,x_1,\dots,x_n) \ ;$$

$$\Delta(f)(x_1,\dots,x_n) := f(x_1,x_1,x_3,\dots,x_n) \ , \text{ ha } n>1 \ ;$$

$$\nabla(f)(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) := f(x_2,x_3,\dots,x_{n+1}) \ ;$$

$$(g \circ f)(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+n-1}) =$$
$$= f(g(x_1,\dots,x_m), x_{m+1},\dots,x_{m+n-1}) \ ;$$

és ha n = 1, legyen:

$$\zeta(f) = \tau(f) = \Delta(f) = f \ .$$

Az $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ függvényt <u>projekciónak</u> /i-edik projekciónak/ nevezzük. Itt elhagyjuk ugyan az alaphalmaz megjelölését, de ez nem vezet félreértésre. A P_A-ban található projekciók összességét J_A-val jelöljük.

Az $f(x_1, \dots, x_n)$ függvény változóinak számát f <u>aritásának</u> nevezzük és ar(f)-fel jelöljük.

Azt mondjuk, hogy az $f(x_1, \dots, x_n) \in P_A$ függvény <u>lényegesen függ</u> az i-edik változójától, ha található olyan

$$\underline{a} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \quad \text{és}$$

$$\underline{b} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

$\underline{a} \in A^n$, $\underline{b} \in A^n$, hogy $f(\underline{a}) \neq f(\underline{b})$.

Ellenkező esetben nevezzük x_i-t az f függvény <u>fiktiv változójának</u>. Legyen $\mathfrak{F} \subseteq P_A$, $f \in P_A$. Azt mondjuk, hogy f <u>szuperpozició</u> az $\mathfrak{F}$ fölött / f előállitható, mint $\mathfrak{F}$-beli függvények szuperpoziciója/, ha f megkapható $\mathfrak{F}$-beli függvényekből az $e_1^2(x_1, x_2) = x_1$ projekció és a $\zeta, \tau, \Delta, \circ$ müveletek véges sokszori alkalmazásával.

Az $\mathfrak{F} \subseteq P_A$ lezárásának nevezzük, és $[\mathfrak{F}]$-fel jelöljük az összes $\mathfrak{F}$ fölötti szuperpoziciók halmazát.

$A < P_A; e_1^2, \zeta, \tau, \Delta, \circ > (0,1,1,1,2)$ tipusu univerzális algebrát nevezzük az A fölötti teljes függvényalgebrának, és $\underline{P}_A$-val jelöljük.

Az $\mathfrak{F} \subseteq P_A$ esetén $[\mathfrak{F}]$ nyilván megegyezik a $\underline{P}_A$ algebra $\mathfrak{F}$ által generált részalgebrájával. Megjegyezzük, hogy ugyanerre az eredményre vezet, ha $\underline{P}_A$ helyett az eggyel több müvelettel rendelkező, de csak az $e_1^1(x) = x$

projekciót tartalmazó $\langle P_A; \ e_1^1, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, \circ \rangle$ $(0,1,1,1,1,2)$ tipusu univerzális algebrát, illetve ez utóbbi részalgebráit tekintenénk.

Az $\mathfrak{F} \subseteq P_A$ halmazt <u>klónnak</u> /vagy függvényalgebrának/ nevezzük, ha $\mathfrak{F} = [\mathfrak{F}]$

Megjegyezzük, hogy a fent definiált lezárási operátor zárt halmazai /a klónok/ és az un. zárt osztályok a k-értékü logikában nem esnek pontosan egybe. A zárt osztály definiciójánál ti. csak a $\{\zeta, \tau, \Delta, \nabla, \circ\}$ müvelethalmazra való zártságot követeljük meg. Mig tehát a <u>klón</u> mindig tartalmazza az összes projekciókból álló függvényalgebrát, a zárt osztály nem. Például az összes egyváltozós konstans értékü függvények halmaza zárt osztály, de nem klón.

A tanulmányban /stiláris okokból/ használjuk majd a zárt halmaz, zárt osztály kifejezést is, de csak akkor, ha a klón, amiről szó van, "magától", valamilyen egyéb megkövetelt tulajdonságánál fogva tartalmazza az összes projekciók halmazát. /Például a maximális zárt osztályok ugyanazok, mint a maximális klónok. Azok a k-értékü logika terminológiája szerinti zárt osztályok, amelyek eleve tartalmazzák a projekciókat, pontosan a klónok./

Az $\mathfrak{F} \subseteq P_A$ halmazt a $G \subseteq P_A$ klón generátorrendszerének nevezzük, ha $[\mathfrak{F}] = G$. $\mathfrak{F}$ bázisa G-nek, ha $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$,

$[\mathfrak{F}_1]=G$ esetén $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}$.

Ha $\mathfrak{F}\subseteq P_A$ klón, jelölje $\mathfrak{F}^{(m)}$ az összes m-változós, $\mathfrak{F}$ -beli függvények halmazát. Speciálisan P_A összes egyváltozós függvényeinek halmazát $P_A^{(1)}$, az összes permutációk /tehát szürjektiv egyváltozós függvények/ halmazát Σ_A jelöli.

Az A halmazon értelmezett n-változós relációnak nevezzük A^n egy részhalmazát, az összes n-változós relációk halmazát az A-n R_A^n-val, az összes /véges változós/ relációk halmazát az A-n R_A-val jelöljük. $R_A=\bigcup_{n\geq 1} R_A^{(n)}$.
A $\varrho\in R_A^{(n)}$ relációra az "n" számot nevezzük a reláció aritásának, és $\mathrm{ar}(\varrho)$ -val jelöljük.

A függvényalgebra fogalmához hasonlóan bevezethetjük a <u>relációalgebra</u> fogalmát, mint a $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, \circ, \delta_2^{\{1,2\}}$ müveletekre nézve zárt halmazt, ahol $\varrho\in R_A^n$, $\varrho'\in R_A^m$ esetén legyen

$$\zeta(\varrho)=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid (x_2,x_3,\dots,x_n,x_1)\in\varrho\},$$

$$\tau(\varrho)=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid (x_2,x_1,\dots,x_n)\in\varrho\},$$

$$\Delta(\varrho)=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\mid (x_1,x_1,x_3,\dots,x_n)\in\varrho\}\quad /\text{ha } n>1/;$$

$$\nabla(\varrho)=\{(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})\mid (x_2,x_3,\dots,x_{n+1})\in\varrho\};$$

$$\varrho'\circ\varrho=\{(x_1,\dots,x_{m-1},x_m,\dots,x_{m+n-2})\mid \exists u\ (x_1,\dots,x_{m-1},u)\in\varrho' \text{ és } (u,x_m,\dots,x_{m+n-2})\in\varrho\};$$

$$\zeta(\varrho)=\tau(\varrho)=\Delta(\varrho)=\varrho\ , \text{ ha } n=1$$

és $\delta_2^{\{1,2\}}$ az alábbiak szerint definiált, az $\{1,2\}$ halmazon értelmezett egyetlen osztályból álló ekvivalenciához tartozó diagonális reláció.

Diagonális relációnak nevezzük a $\delta_m^{\varepsilon}(x_1,\dots,x_m)$ relációt, ha

1./ ε egy ekvivalencia-reláció az $\{1,2,\dots,m\}$ halmazon;

2./ $(x_1,\dots,x_m)\in\delta_m^{\varepsilon}$ pontosan akkor, ha $(i,j)\in\varepsilon\Rightarrow x_i=x_j$.

A diagonális relációk ugyanazt a szerepet játsszák a relációalgebrák között, mint a projekciók a függvényalgebrák között. D_A /ill. D_k/ jelöli az összes diagonális relációk halmazát.

A továbbiakban először néhány speciális reláció-tulajdonságot definiálunk:

Egy $\varrho\in R_A{}^n$ relációt teljesen szimmetrikusnak nevezünk, ha $(x_1,\dots,x_n)\in\varrho$ esetén minden $\pi:\{1,\dots,n\}\longrightarrow\{1,\dots,n\}$ permutációra $(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})\in\varrho$.

A ϱ teljesen reflexiv, ha $(x_1,\dots,x_m)\in\varrho$ mindannyiszor, valahányszor $\mathrm{card}(x_1,\dots,x_m)<m$.

A $c \in A$ a ϱ centrumeleme, ha minden $(x_2,x_3,\dots,x_n) \in A^{n-1}$ esetén $(c,x_2,\dots,x_n) \in \varrho$. A centrumelemek halmaza: a ϱ <u>centruma</u>.

A ϱ relációt centrális relációnak nevezzük, ha

1./ teljesen szimmetrikus;

2./ teljesen reflexiv;

3./ van legalább egy centrumeleme.

Jelölje t_r azt az r-változós relációt, melyre:

$$(x_1,\dots,x_r) \in t_r \Leftrightarrow \mathrm{card}(x_1,\dots,x_r) < r .$$

A ϱ h-változós relációt h-regulárisnak /h-univerzálisnak/ nevezzük, ha $h \geq 3$ és megadható $m \geqslant 1$ és egy Φ szürjektiv leképezés, $\Phi : A \rightarrow (E_h)^m$ ugy, hogy $\varrho = \Phi^{-1}((t_h)^m)$, azaz: $(a_1,\dots,a_n) \in \varrho$ pontosan akkor, ha minden $j/=1,2,\dots,m/$-re $(b_1(j),\dots,b_h(j)) \in t_h$, ahol $b_i(j)$ jelöli a $\Phi(a_i)$ vektor $/\Phi(a_i) \in (E_h)^m$! / j-edik koordinátáját /szokták ezt - szemléletesebben - ugy fogalmazni, hogy a $\Phi(a_i)$, $/i=1,\dots,h/$ számok h- alapu számrendszerben való felirásában mind az m darab számjegyre teljesül, hogy legfeljebb h-1 különböző fordul elő közöttük /.

A ϱ 4-változós relációt <u>affin</u> relációnak nevezzük, ha card $(A) = p^k$ és megadható $G = \langle A;\ \circ,+,- \rangle$

elemi Abel p-csoport ugy, hogy

$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\varrho$ pontosan akkor, ha $x_1+x_2=x_3+x_4$.

A $\{K\subseteq P_A\}$ klónok halmaza /és az $\{R\subseteq R_A\}$ reláció-algebrák halmaza/ a halmazelméleti tartalmazással mint részbenrendezéssel hálót alkot, jelölje ezt $\mathcal{L}(P_A)$ ill. $\mathcal{L}(R_A)$. Az egyszerüség kedvéért $\mathcal{L}(P_k)$-t $\mathcal{L}_k$ jelöli.

Azt mondjuk, hogy az $f(x_1,\dots,x_n)$ függvény <u>megőrzi</u> a $\varrho(x_1,\dots,x_r)$ relációt, ha:

$$\underline{x}_j = (x_1^j,x_2^j,\dots,x_r^j)\in\varrho \qquad /j=1,2,\dots,n/, \text{ esetén}$$

$$\left(f(x_1^1,x_1^2,\dots,x_1^n),\ f(x_2^1,\dots,x_2^n),\dots,f(x_r^r,\dots,x_r^n)\right)\in\varrho .$$

$\mathfrak{F}\subseteq P_A$ ill $Q\subseteq R_A$ esetén az $\mathfrak{F}$ invariáns relációinak ill. Q polimorfizmusainak nevezzük a következő, <u>Inv</u>$(\mathfrak{F})$-fel ill. <u>Pol</u> (Q)-val jelölt halmazokat:

$$\mathrm{Inv}(\mathfrak{F})=\{\varrho\in R_A \mid \forall f\in\mathfrak{F} : f \text{ megőrzi a } \varrho\text{-t}\} ,$$

$$\mathrm{Pol}(Q)=\{f\in P_A \mid \forall \varrho\in Q : f \text{ megőrzi a } \varrho\text{-t}\} .$$

Alább ismertetünk néhány, a témában alapvető jelentőségü, klasszikussá vált eredményt, amelyekre a dolgozat támaszkodik. Ha külön nem jelöltük meg a forrást, az idézett eredmények megtalálhatók pl. Pöschel-Kaluzsnyin [49] -ben. Mi a továbbiakban ezekre az állításokra az itt szereplő nevükkel fogunk hivatkozni.

Jablonszkij-lemma: Legyen $f(x_1,\dots,x_n) \in P_k$, $k \geq 3$, $n > 2$ olyan függvény, amely legalább 2 változójától lényegesen függ és $l \geq 3$ különböző értéket felvesz. Ekkor

1./ Található $K_1, K_2, \dots, K_n$ halmazrendszer / $K_i \subset E_k$, $i=1,\dots,n$ / ugy, hogy $|K_i| \leq 2$ és f a $K_1 x K_2 x \dots x K_n$ szorzathalmazon legalább 3 értéket felvesz.

2./ Található olyan $L_1,\dots,L_n$ halmazrendszer /$L_i \subseteq E_k$, $i=1,\dots,n$/, hogy card $(L_i) \leq l-1$ /$i=1,\dots,n$/ és f az $L_1 x L_2 x \dots x L_n$ szorzathalmazon mind az l értéket felveszi.

A $K \subseteq P_A$ függvényhalmazt /illetve az $\langle A,K \rangle$ algebrát/ teljesnek nevezzük, ha $[K] = P_A$. A K függvényteljes, ha $[K \cup C_A] = P_A$.

Az $f \in P_k$ függvényt Słupecki-függvénynek nevezzük, ha

1./ legalább 2 változójától lényegesen függ;

2./ minden értéket felvesz.

Słupecki-tétel v. Słupecki-kritérium. Legyen card $(A \geq 3)$, $P_A^{(1)} \subseteq \mathcal{F} \subseteq P_A$; $\mathcal{F}$ pontosan akkor teljes, ha tartalmaz Słupecki-függvényt.

Rousseau-tétel. ld. [65] Az $\underline{A} = \langle A, f \rangle$ algebra /$f \in P_A$/ pontosan akkor teljes, ha

1./ $\underline{A}$-nak nincs valódi részalgebrája;

2./ $\underline{A}$-nak nincs valódi kongruenciája;

3./ $\underline{A}$-nak nincs valódi automorfizmusa.

Galois-kapcsolat reláció- és függvényalgebrák között.

Legyen $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1 \subseteq P_k, Q, Q_1 \subseteq R_k$.

$\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{Pol}\,(\mathrm{Inv}(\mathfrak{F}))$ és $Q \subseteq \mathrm{Inv}(\mathrm{Pol}\,(Q))$, továbbá:

$\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$ esetén $\mathrm{Inv}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathrm{Inv}\,(\mathfrak{F}_1)$;

$Q_1 \subseteq Q$ esetén $\mathrm{Pol}\,(Q) \subseteq \mathrm{Pol}\,(Q_1)$.

$\mathfrak{F}$ pontosan akkor klón, ha $\mathfrak{F} = \mathrm{Pol}\,(\mathrm{Inv}\,(\mathfrak{F}))$,

Q pontosan akkor relációalgebra, ha $Q = \mathrm{Inv}(\mathrm{Pol}(Q))$.

A $\mathrm{Pol}\colon \mathcal{L}(R_A) \longrightarrow \mathcal{L}(P_A)$ ill. az $\mathrm{Inv}\colon \mathcal{L}(P_A) \longrightarrow \mathcal{L}(R_A)$ leképezések a $\mathcal{L}(R_A)$, $\mathcal{L}(P_A)$ hálók antiizomorfizmusai.

Definiáljuk az $\underline{U}_k, \underline{H}_k, \underline{C}_k, \underline{L}_k, \underline{M}_k, \underline{S}_k$ halmazokat a következőképpen:

$\underline{U}_k$: az E_k-n értelmezett nem-triviális ekvivalencia-relációk halmaza;

$\underline{H}_k$: az E_k-n értelmezett h-reguláris relációk halmaza;

$\underline{C}_k$: az E_k-n értelmezett nem-diagonális centrális relációk halmaza;

$\underline{L}_k$: az E_k-n értelmezett affin relációk halmaza;

$\underline{M}_k$: az E_k-n korlátos részbenrendezések halmaza /egy részbenrendezés korlátos, ha van legnagyobb és legkisebb eleme/;

$\underline{S}_k$: az E_k egyenlő primhosszuságu ciklusokra bontható fixpontmentes permutációi gráfjainak halmaza.

Ekkor, Rosenberg tétele szerint:

az $\mathcal{L}_k$ háló duális atomjai /P_k maximális részklónjai/ pontosan a $K=\mathrm{Pol}(\varrho)$ alakuak, ahol

$$\varrho \in \underline{H}_k \cup \underline{U}_k \cup \underline{C}_k \cup \underline{M}_k \cup \underline{L}_k \cup \underline{S}_k \quad .$$

A dolgozat egészében megtartjuk a maximális klónoknak a fenti jellemzésből adódó, következő osztályozását:

A $K = \mathrm{Pol}(\varrho) \subseteq P_k$ maximális klón U-tipusu, ha $\varrho \in \underline{U}_k$,
C-tipusu vagy centrális, ha $\varrho \in \underline{C}_k$,
H-tipusu vagy h-reguláris, ha $\varrho \in \underline{H}_k$,
L-tipusu vagy affin vagy kvázi-lineáris, ha $\varrho \in \underline{L}_k$,
M-tipusu vagy monoton, ha $\varrho \in \underline{M}_k$,
S-tipusu vagy önduális, ha $\varrho \in \underline{S}_k$.

Gyakran fogunk hivatkozni Post klasszikus eredményére, a P_2 összes részklónjainak leirására. Azért, hogy a

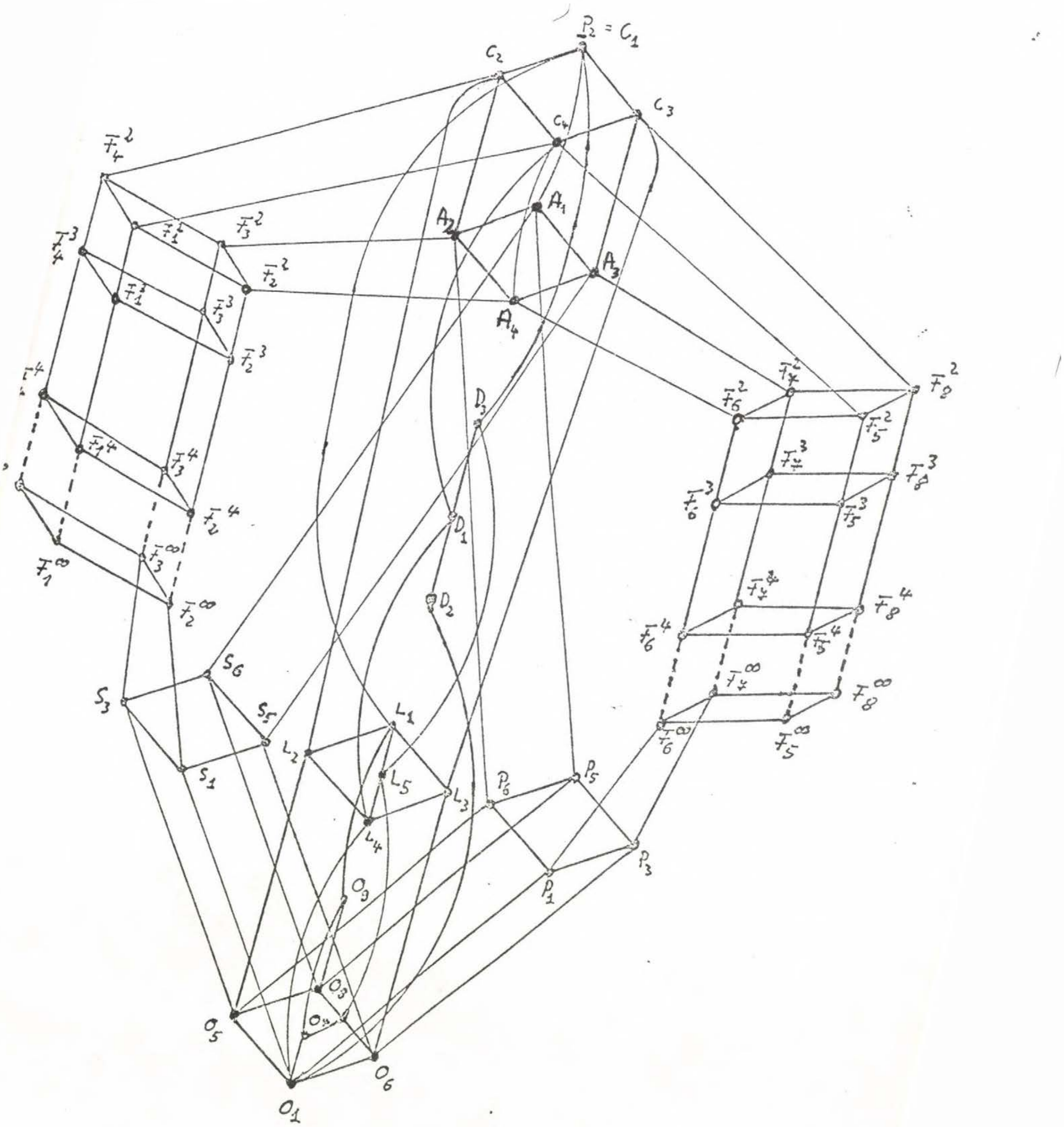
"Post-diagram alapján könnyen látható..." tipusu állitások tartalma valóban világos legyen, mellékelünk egy rajzot az $\mathcal{L}_2$ hálóról /1. ábra/. A P_2-beli klónokra az itt megadott elnevezésekkel hivatkozunk. Teljes leirásuk, bázisaik megtalálhatók pl. [36], [47]-ben.

<u>Definició</u>: A $d(x_1,\dots,x_n)\in P_A$ függvényt <u>n-változós többségi függvénynek</u> nevezzük, ha minden $x,y\in A$-ra

$$d(x,x,\dots,x,y)=d(x,x,\dots,x,y,x)=\dots=$$
$$=d(y,x,\dots,x)=x.$$

Az alábbi állitást Baker és Pixley [3] -ban /Corr.5.1./ bizonyitotta, mi némi terminológiai módositással idézzük:

<u>Baker-Pixley tétel</u>. Ha a $K\subseteq P_A$ klón tartalmaz egy $d_n(x_1,\dots,x_n)$ n-változós többségi függvényt, /$n>2$/ akkor K pontosan az Inv(K) legfeljebb (n-1)- változós elemeinek polimorfizmusaiból áll.



1. ábra

I. Számossági kérdések

Ebben a fejezetben adott tulajdonságu klónok számosságát vizsgáljuk. Először bizonyos rögzitett klónok részklónjainak számosságát fogjuk meghatározni.

Arra a kérdésre, hogy mi az összes klónok halmazának számossága P_k-ban, a válasz régtől fogva ismert. A $k=2$ esetben ez a számosság megszámlálható /amint ezt a Post-diagramról közvetlenül leolvashatjuk/, $k > 2$ esetén pedig kontinuum. Számossági megfontolásokból könynyen adódik, hogy P_k legfeljebb kontinuum sok klónt tartalmaz; annak bizonyitása pedig, hogy valóban van legalább ennyi részklónja, megtalálható Janov-Mucsnik [37] dolgozatában. Az egyszerübb fogalmazás kedvéért vezessük be a következő függvényt:

Definició: Legyen $K \subseteq P_k$ klón. Jelölje $\nu(K)$ K összes részklónjai halmazának számosságát. Azaz:

$$\nu(K) = \mathrm{card}(\{B \mid B \subseteq K, \quad B = [B]\}) .$$

A véges halmazok fölötti teljes függvényalgebrákra vonatkozó fenti állitás tehát ugy fogalmazható át, hogy

$$\nu(P_2) = \aleph_0 , \quad \nu(P_k) = \mathfrak{c} \quad , \text{ ha } k > 2$$

Most - és a továbbiakban is - $\aleph_0$ jelölje a megszámlálható, $\mathfrak{c}$ pedig a kontinuum számosságot.

Maximális klónok részklónjai

A fejezet első részében a ν függvény viselkedését fogjuk vizsgálni P_k maximális részklónjaira. A $k=2$ esetben összesen öt maximális részklón van, a Post-diagram jelöléseit használva ezek: C_2, C_3, A_1, L_1, D_3.

$$\nu(C_1) = \nu(C_2) = \nu(A_1) = \aleph_0 , \quad \nu(L_1) = 9, \quad \nu(D_3) = 7.$$

A $k \geq 3$ esetben is találhatunk olyan maximális osztályokat, melyekre $\nu(K)$ véges: ha $k=p$ primszám, és K egy kvázi-lineáris maximális klón, akkor $\nu(K) < \aleph_0$. /Demetrovics-Bagyinszki [14] /, mégpedig

$$\nu(K) = 2^p(p-2)+p+2+2d(p-1)+2p \sum_{n \mid p-1} 2^n$$

ahol $d(p-1)$ a $p-1$ különböző osztóinak száma.

Ha k nem primszám, $\nu(K)$ értéke $\aleph_0$ a kvázilineáris maximális osztályokra /Szendrei [78] /.

Legyen A véges halmaz, card(A)>2. Az $\underline{M},\underline{H},\underline{C},\underline{U}$ tipusu maximális osztályok egységesen kezelhetőek. A vizsgálatokhoz egy - a Janov és Mucsnik által bevezetetthez hasonló - függvénykonstrukció szolgál kiindulásul.

<u>Definició</u>: Legyen $i \geq 3$ és $g_i \in P_A^{(i)}$ az alábbiak szerint definiált függvény:

$$(1) \quad g_i(x_1,\dots,x_i) = \begin{cases} b, & \text{ha } \mathrm{card}(\{j \mid x_j=c\})=i, \\ b, & \text{ha } \mathrm{card}(\{j \mid x_j=c\})=i-1 \text{ és} \\ & \quad \mathrm{card}(\{j \mid x_j=b\})=1, \\ a & \text{egyébként.} \end{cases}$$

/a,b,c különböző, rögzitett elemek A-ból./

<u>1.1. lemma</u>. Legyen $G=\{ g_i \mid i > 2\}$. Ekkor minden $K \subseteq P_A$ $\underline{H},\underline{C},\underline{U},\underline{M}$ tipusu maximális klónhoz választható olyan $a,b,c \in A$ elemhármas, hogy $G \subseteq K$.

<u>Bizonyitás</u>:

1./ Ha k h-reguláris tipusu, bármely három különböző $a,b,c \in A$ megfelel, hiszen minden G-beli függvény legfeljebb két értéket vesz fel, ezért minden h-reguláris relációt megőriz.

2./ Ha K centrális, válasszunk a,b,c elemeket ugy, hogy az a elem a $\varrho \in R^{(t)}$ definiáló reláció centrumába essék. Ekkor minden $g_i \in G$-re $(g_i(\underline{x}_1), \dots, g_i(\underline{x}_t))$ vagy minden koordinátájában b -vel egyezik meg, vagy valamelyik koordinátája centrumelem. Tehát $G \subseteq \mathrm{Pol}(\varrho) = K$.

3./ Ha K $\underline{U}$-tipusu maximális klón, legyen ε a definiáló ekvivalencia és $a \neq b$ ugy, hogy $(a,b) \in \varepsilon$. /Mivel ε nem-triviális, mindig választható ilyen a,b./

4./ Végül, ha K monoton maximális klón, válasszuk a-t és c-t a definiáló μ részbenrendezés minimális ill. maximális elemének, b-t pedig ugy, hogy $\{x \mid b < x < c\} = \emptyset$ teljesüljön. Ha most $g_i(\underline{x}) > g_i(\underline{y})$, akkor az $\underline{x}$ koordinátái a $\{b,c\}$ halmazból kerülnek ki, ezért $\underline{x} \leq \underline{y}$ nem teljesülhet. Másrészt a két lehetséges képelem /a és b/ mindig összehasonlitható, tehát $G \subseteq \mathrm{Pol}(\mu) = K$.

__1.2. lemma.__ Legyen $G = \{g_i \mid i > 2\}$ az (1) -ben definiált függvényhalmaz. Ekkor $\nu([G]) = \mathfrak{c}$.

__Bizonyitás__: Először is megjegyezzük, hogy ha belátjuk, hogy $g_i \notin [G \setminus \{g_i\}]$, akkor készen vagyunk. Ez esetben ugyanis egy-egyértelmü megfeleltetés létesithető az egész számok N halmazának összes részhalmazai és $[G]$ bizonyos részklónjai között, ti. $M \subseteq N$-nek feleltessük meg a $G_M = [\{g_i \mid i \in M\}]$ klónt. Ha $M \neq M'$, nyilván $G_M \neq G_{M'}$, igy $[G]$ összes részklónjainak számossága valóban kontinuum.

A $g_i \notin [G \setminus \{g_i\}]$ állitást a g_i-k invariáns relációi segitségével bizonyithatjuk:

Legyen ϱ_n a következő 2n-változós reláció:

$$\varrho_n = \{a,b\}^{2n} \setminus \underline{z}_n \cup V_n \text{ , ahol}$$

$\underline{z}_n = (b,b,\dots,b,a,a,\dots,a)$, az első n koordináta b, a többi koordináta a.

$V_n = \{\underline{x} \mid \underline{x} \in \{b,c\}^n \times \{a,c\}^n$ és létezik j, $1 \leqslant j \leqslant n$ ugy, hogy $x_j = b, x_{n+j} = a$, különben $\underline{x}$ minden koordinátája c.$\}$

A

$$\begin{vmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{p}_n \\ \underline{p}_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{p}_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b,c,c,\dots,c \\ c,b,c,\dots,c \\ \\ \\ \\ c,c,c,\dots,b \\ a,c,c,\dots,c \\ \\ \\ \\ c,c,c,\dots,a \end{vmatrix}$$

mátrix mutatja, hogy $g_n \notin \mathrm{Pol}(\varrho_n)$, hiszen a fenti mátrix minden oszlopa ϱ_n-beli, a $(g_n(\underline{p}_1),\ldots,g_n(\underline{p}_{2n}))$ vektor azonban a ϱ_n-ből kizárt $\underline{z}_n$. Tegyük fel, hogy $i \neq n$. Bizonyitjuk, hogy ekkor $g_i \in \mathrm{Pol}(\varrho_n)$. Miután minden g_i az $\{a,b\}$ halmazba képez, elegendő megmutatni, hogy nem létezik olyan

$$\left|\begin{matrix} \underline{p}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{p}_n \\ \underline{q}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} p_{11},\ldots,p_{1i} \\ \vdots \\ p_{n1},\ldots,p_{ni} \\ q_{11},\ldots,q_{1i} \\ \vdots \qquad \vdots \\ q_{n1},\ldots,q_{ni} \end{matrix}\right|$$

mátrix melynek oszlopai ϱ_n-beliek, a $(g_i(\underline{p}_1),\ldots,g_i(p_n),g_i(q_1),\ldots,g_i(q_n))$ vektor pedig pontosan $\underline{z}_n$. Tegyük fel az ellenkezőjét, Ekkor először is egyetlen $\underline{p}_j$ $/1 \leq j \leq n/$ sem tartalmazhat a értékü elemet, vagy egynél több b értéküt. Másrészt egy ilyen sor sem lehet a csupa c vektor, mert ebben az esetben a megfelelő $\underline{q}_j$ is az volna és ezen a g_i függvény értéke b. Tehát az első n sor mindegyikében pontosan egy b szerepel, a többi elem c. Abból, hogy a mátrix oszlopai ϱ_n-beliek, következik, hogy minden oszlop pontosan egy b értéket tartalmaz az első n sorában. Ez ellentmond az $i \neq n$ feltételnek.

Tehát: $g_i \in Pol(\varrho_j)$ pontosan akkor, ha $i \neq j$, igy $[G \setminus \{g_i\}] \subseteq Pol(\varrho_i)$ miatt $g_i \notin [G \setminus \{g_i\}]$.

<u>1.3. tétel.</u> Ha $K \subseteq P_k$ <u>M,H,C,U</u> tipusu maximális klón és $k \geq 3$, akkor $\nu(K) = \mathfrak{c}$.

A tétel állitása az 1.1. és 1.2. lemmák közvetlen következménye.

Megjegyezzük, hogy az 1.3. tétel állitása már [20]-ban és /ettől függetlenül/ Szendrei [77]-ben is szerepel, a bizonyitások azonban a fentitől eltérőek.

Az 1.3. tétel bizonyitásának gondolatmenetét a továbbiakban is fel fogjuk még használni, ezért érdemes két lényeges pontját külön is megfogalmaznunk. A következő két lemmát nem bizonyitjuk, mert ez csak ismétlése lenne az 1.2. lemma bizonyitásának.

<u>Definició:</u> A $G = \{G_1, \ldots, G_n, \ldots\}$, $G_i \subseteq P_k$ klónhalmazt <u>teljesen függetlennek</u> nevezzük, ha minden $G_i \in G$ -hez létezik olyan $g_i \in G_i$, hogy $g_i \notin [\cup G \setminus \{g_i\}]$.

Definició. Klónok egy T halmazát egyesitésre zártnak nevezzük, ha

$$\left[\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right] \in T$$

teljesül mindannyiszor, valahányszor minden $\alpha \in$ I-re $A_\alpha \in T$. /I megszámlálahtó indexhalmaz./

1.4. lemma. Ha T a P_A klónjainak egy egyesitésre zárt halmaza ugy, hogy T-ben van megszámlálhatóan végtelen teljesen független rendszer, akkor $\mathrm{card}(T) = \mathfrak{c}$.

Megjegyzés. Az, hogy T-ben van megszámlálhatóan végtelen független rendszer, nyilvánvalóan önmagában nem elegendő feltétel.

Legyen pl. $T = \{\Gamma_i \mid \Gamma_i = [\{g_{i_1},\dots,g_{i_{m_i}}\}]\}$,

azaz az összes véges sok g_i által generált klón. /$g_i \in G$ az (1)-ben definiált függvény./

T nyilván tartalmazza a $\{[g_3],[g_4],\dots[g_n],\dots\}$ megszámlálhatóan végtelen független rendszert, ugyanakkor minden $\Gamma_i \in T$ végesen generált, tehát $\mathrm{card}(T) = \aleph_0$.

Definició. Azt mondjuk hogy a $\varrho = \{\varrho_1,\dots,\varrho_n,\dots\}$

relációhalmaz szeparálja a $G=\{G_1,\dots,G_n,\dots\}$ klónhalmazt, ha

$$G_i \subseteq \mathrm{Pol}(\varsigma_j) \text{ pontosan akkor teljesül, ha } i \neq j.$$

1.5. lemma. Ha a $G=\{G_1,\dots,G_n,\dots\}$ klónhalmazhoz található $\Sigma=\{\sigma_1,\dots,\sigma_n,\dots\}\subseteq R_K$ ugy, hogy Σ szeparálja G-t, akkor G teljesen független.

Világos, hogy az 1.3. tétel bizonyitásában is ezt az utat követtük: adott klón részklónjainak halmaza nyilván egyesitésre zárt, és azt mutattük meg, hogy a $G = \{[g_3],\dots,[g_i],\dots\}$ klónhalmaz teljesen független, megkonstruálva a bizonyitás során definiált $\varsigma=\{\varsigma_3,\dots,\varsigma_n,\dots$ G-t szeparáló relációhalmazt.

Megjegyezzük még, hogy az 1.3. tétel bizonyitása a tételben kimondottnál kissé többet is igazol:

Legyen $E_{(a,b)}$ az A-n értelmezett ekvivalencia-relációk olyan halmaza, hogy $(a,b)\in\varepsilon$ minden $\varepsilon\in E_{(a,b)}$-re. Legyen $\underline{C}_a$ az olyan centrális relációk halmaza, amelyre $\rho\in\underline{C}_a$ esetén "a" eleme a ς centrumának /a,b rögzitett elemek A-ból/. Jelölje $T_{(a,b)}$, T_a, H^* a következő klónokat P_A-ból:

$$T_{(a,b)} = \bigcap_{\varepsilon\in E_{(a,b)}} \mathrm{Pol}(\varepsilon)$$

.

.

$$T_a = \bigcap_{\varrho \in \underline{C}_a} \mathrm{Pol}(\varrho)$$

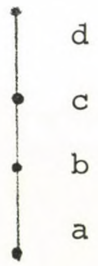
$$H^{*} = \bigcap_{\gamma \in \underline{H}} \mathrm{Pol}(\gamma)$$

Ekkor $\nu(T_{(a,b)}) = \nu(T_a) = \nu(H^{*}) = \mathfrak{l}$. A bizonyitás azon az észrevételen mulik, hogy az 1.1. lemmában voltaképpen a $g_i \in T_{(a,b)}$, $g_i \in T_a$ és $g_i \in H^{*}$ állitásokat igazoltuk. A monoton maximális osztályokról is hasonlót mondhatunk: Ha μ_1 és μ_2 korlátos részbenrendezések az A halmazon, μ_1 és μ_2 legkisebb elemei valamint legnagyobb elemei egybeesnek, továbbá található egy olyan $y \in A$, hogy

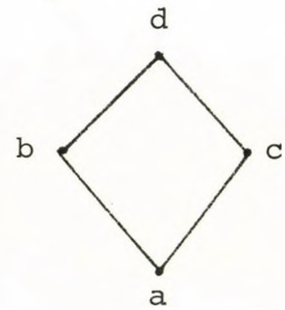
$$\{x \mid y \leq_{\mu_1} x \leq_{\mu_1} 1\} = \emptyset \quad \text{és}$$
$$\{x \mid y \leq_{\mu_2} x \leq_{\mu_2} 1\} = \emptyset ,$$

akkor $\nu(\mathrm{Pol}(\mu_1) \cap \mathrm{Pol}(\mu_2)) = \mathfrak{l}$. /1 a μ_1 és μ_2 - a feltételek szerint közös - legnagyobb elemét jelöli./ Például, legyen $A = \{a,b,c,d\}$, μ_1 és μ_2 az alábbi részbenrendezések:

μ_1 :



μ_2 :



Ekkor $\nu(\mathrm{Pol}(\mu_1) \cap \mathrm{Pol}(\mu_2)) = \zeta$.

<u>Önduális klónok</u>

Az egyetlen eddig nem vizsgált maximális osztály az $\underline{S}$ tipus, azaz az önduális függvények osztálya. Ahhoz, hogy az A halmaz π permutációjának gráfja P_A egy maximális klónját definiálja, a permutációnak két feltételt kell teljesitenie. π -nek fixpontmentesnek kell lennie, és azonos primhosszuságu, diszjunkt ciklusokra kell bomlania. E feltételektől el fogunk tekinteni, és a $\nu(S_\pi)$ függvényt fogjuk meghatározni, ahol S_π jelöli a π gráfjának összes polimorfizmusaiból álló klónt az A halmaz tetszőleges π permutációja esetén.

Világos, hogy $f(x_1,\dots,x_n) \in S_\pi$ pontosan akkor teljesül,ha igaz az $f(\pi(x_1),\dots,\pi(x_n)) = \pi(f(x_1,\dots,x_n))$ azonosság. Ennek alapján könnyen igazolható a következő állitás:

<u>1.6. lemma.</u> Legyen $f(x_1,\dots,x_n)$ parciális függvény A^n-ből A-ba, π az A egy permutációja, és tegyük hogy f-et a π minden pályájának legfeljebb egy elemén definiáltuk. / π az A^n-en komponensenként hat./ Tegyük fel, továbbá, hogy ha f definiálva van az $\underline{x} \in A^n$ elemen, akkor $f(\underline{x})$ pályájának hossza osztja $\underline{x}$ pályájának hosszát. /A π által generált csoport szerinti pályáról van szó./ Ekkor f kiterjeszthető $P_A^{(n)}$-beli függvénnyé ugy, hogy $f \in S_\pi$.

<u>1.7. lemma.</u> Legyen $k > 2$, card $(A) = k$, π az A egy permutációja ugy, hogy π tartalmaz két diszjunkt ciklust. Legyenek ezek $C = (c_o \dots c_{n-1})$ és $D = (d_o d_i \dots d_{m-1})$. Tegyük még fel, hogy $m > 1$ és $n|m$. Ekkor $\nu(S_\pi) = \mathfrak{c}$.

<u>Bizonyitás:</u> Természetesen most is teljesen független klónhalmazt fogunk konstruálni S_π-ben, mégpedig egyetlen elemmel generálható klónokból. Az 1.6. lemma lehetővé teszi, hogy csak parciálisan definiáljuk a szükséges függvényeket. Válasszunk ezért reprezentáns elemeket a π minden pályájából A^i-n, ezek halmazát jelölje B_i, legyen még $i \geq 3$. Definiáljuk az $f_i(x_1,\dots,x_i)$ függvényt B_i-n a következőképpen:

$f_i : (B_i \subseteq A^i) \longrightarrow A$ parciális függvény /i>2/:

(2)

$$f_i(x_1,\dots,x_2) = \begin{cases} d_\ell, \text{ ha } \{x_1,\dots,x_i\} = \{d_{\ell+1}, d_\ell\} \subseteq D, \\ \qquad x_s = d_\ell \text{ és } x_j = d_{\ell+1} \ j \neq s\text{-re}, \\ c_0 \in C, \text{ ha } \{x_1,\dots,x_i\} \subseteq C \cup D, \\ x_1 \quad \text{különben}. \end{cases}$$

Mivel $n|m$, $f_i(x_1,\dots,x_i)$ kiterjeszthető P_A-beli függvénnyé ugy, hogy $f_i \in S_\pi$.

Bizonyitani fogjuk, hogy az $F = \{ f_3 \ ,\dots, f_n \ , \dots \}$ klónhalmaz teljesen független. Mielőtt ennek nekilátnánk, megjegyezzük, hogy a bizonyitás könnyen elvégezhető lenne az 1.2. lemmában bemutatott módszerrel, a szeparáló relációk halmaza is hasonló az ott megadotthoz.[x] Szeretnénk egy másik módot is mutatni egy klónhalmaz függetlenségének igazolására, ezért most másképp járunk el /hasonló bizonyitás szerepel [18]-ban is/.

Az $F\{[f_i] \mid i > 2\}$ klónhalmaz függetlenségének bizonyitása:

Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy az A halmazt az E_k halmazzal reprezentáltuk, ugy, hogy

$$C = (0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1}) \quad \text{és}$$
$$D = (1 \ 2 \ d_2 \ \dots \ d_{m-1})$$

---

[x] A szeparáló relációk az 1.2. lemmában megadottakból ugy keletkeznek, hogy az ott definiált 2n-változós relációnak csak az első n koordinátáját vesszük figyelembe.

azaz $c_o=0$, $d_o=1$, $d_1=2$.

Jelölje Y_i^{ℓ} azt az $(x_1,\dots,x_{\ell})$ vektort, melyre

$$x_i=1 \text{ és } x_j=2, \text{ ha } i\neq j,\ j\in\{1,2,\dots,\ell\}.$$

Ekkor nyilván

$$f_{\ell}(Y_i^{\ell})=1 \text{ teljesül minden } i\leq\ell\text{-re.}$$

Azt kell bizonyitani, hogy

$$f_{\ell}(x_1,\dots,x_{\ell})\notin[F\setminus\{f_{\ell}\}]=\bigcup_{i\neq\ell}\{f_i\}=F_{\ell}$$

Tegyük fel, hogy az állitás nem igaz, azaz $f_{\ell}(x_1,\dots,x_{\ell})$ előáll, mint F_{ℓ} feletti szuperpozició, és jelölje $\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_{\ell})$ azt a kifejezést, amelyre

$$f_{\ell}(x_1,\dots,x_{\ell})=\mathfrak{A}(x_1,\dots,x_{\ell}), \text{ és az } \mathfrak{A}\text{-ban}$$

felhasznált függvények F_{ℓ}-beliek.

Legyen $f_s(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$ egy az $\mathfrak{A}$-ban előforduló F_{ℓ}-beli függvények közül ugy, hogy a változók helyére $\mathfrak{A}$-ban valóban változók kerülnek /f_s az $\mathfrak{A}$ "legbelső" szintjén van/. Ha $s\leq\ell$, található olyan $t\leq\ell$, hogy $t\notin\{i_1,\dots,i_s\}$ és nyilván:

$$f_{\ell}(Y_t^{\ell})=1, \text{ de } f_s(Y_t^{\ell})=0 \text{ miatt az } \mathfrak{A}(Y_t^{\ell})^{x}$$

nem lehet 1. Ha pedig $s>\ell$, akkor található olyan i_t, i_v indexpár, melyre $i_t=i_v$, s ekkor

---

x $f_s(Y_t^{\ell})$ az $f_s(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$ függvénynek az Y_t^{ℓ} vektoron vett kiértékelését jelenti.

$$f_s\left(Y_{i_t}^{\ell}\right)=\emptyset,\text{ s ezért } \mathfrak{M}\left(Y_{i_t}^{\ell}\right)\neq 1.$$

Miután S_π részklónjainak halmaza egyesitésre zárt, innen nyerjük, hogy az 1.7. lemmában leirt feltételek esetén valóban $\nu(S_\pi)=\mathfrak{c}$.

Az 1.7. lemmából azonnal adódik:

<u>1.8. tétel.</u> Legyen $K\subsetneq P_k$ önduális maximális klón, k nem prim. Ekkor $\nu(K)=\mathfrak{c}$.

Lássuk most a k=prim eseteket.

<u>1.9. lemma.</u> Legyen $k\geq 5$, $\operatorname{card}(A)=k$, π egyetlen k hosszuságu ciklusból álló permutáció. Ekkor $\nu(S_\pi)=\mathfrak{c}$.

<u>Bizonyitás</u>: Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $A=E_k$ és $\pi=(0\ 1\ 2\ \dots\ k-1)$.
Definiáljuk a $g_i(x_1,\dots,x_i)$ $/i>3/$ függvényeket a $\{0,1,2\}^i$ halmazon az alábbiak szerint:

3

$$g_i(x_1,x_1,\dots,x_1)=x_1,$$

$$g_i(x_1,\dots,x_i)=0,\text{ ha } (x_1,\dots,x_i)\in\{0,1\}^i\setminus\{1\}^i \text{ vagy } (x_1,\dots,x_i)\in\{0,2\}^i\setminus\{2\}^i,$$

$$g_i(x_1,\dots,x_i)=1,\text{ ha } (x_1,\dots,x_i)\in\{1,2\}^i\setminus\{2\}^i,$$

és $(x_1,\dots,x_i)\in\{0,1,2\}^i\setminus\{0,1\}^i\setminus\{0,2\}^i\setminus\{1,2\}^i$ -re:

$$g_i(x_1,\dots, x_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha pontosan 1 koordináta 2 és} \\ & \text{pontosan 1 koordináta 0,} \\ 0 & \text{egyébként .} \end{cases}$$

Most ugyan a $g_i(x_1,\dots,x_i)$ a π permutáció néhány pályájának több helyén is definiált, de könnyen kiszámolható, hogy ez nem mond ellent a $g_i \in S_\pi$ állitásnak; ha g_i-t pontosan egy helyen adnánk meg ezek közül, majd kiterjesztenénk S_π-beli, mindenütt definiált függvénnyé, a kiterjesztés pontosan a fent megadott értékeket venné fel $\{0,1,2\}^i$-n. $g_i(x_1,\dots,x_n)$ tehát kiterjeszthető S_π-beli függvénnyé. /Itt használjuk ki, hogy $k \geq 5$./

Definiáljuk továbbá a $\varrho_i \subseteq (E_3)^i$ relációkat:

Legyen $\varrho_i = (\{0,1\}^i \setminus \{1\}^i) \cup V_i$, ahol

$V_i = \{ \underline{v}_i \mid \underline{v}_i = (v_i^1,\dots,v_i^i)$ és $\underline{v}_i$-ben pontosan 2 koordináta nem egyenlő 1-gyel, ugy, hogy ha $v_i^j = 0$, akkor $v_i^{j+1} = 2\}$

/v_i^{j+1} indexelésében a "+" mod i értendő./

V_i tehát az $(1,1,\dots,1,0,2,1,\dots,1)$ alaku vektorok halmaza. Bizonyitjuk, hogy a $\varrho = \{\varrho_4,\dots,\varrho_n,\dots\} \subseteq R_k$ szeparálja a $G = \{[g_4],\dots,[g_n],\dots\}$ halmazt, ahol g_i a (3)-ban definiált függvény.

1./ $g_i \notin Pol(\varrho_i)$, hiszen a

$$\begin{vmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \cdot \\ \\ \\ \\ \underline{v}_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

mátrix minden oszlopa ϱ_i-ből való, ugyanakkor $g_i(\underline{v}_j) = 1$ minden $1 \leq j \leq i$-re, tehát

$$(g_i(\underline{v}_1), g_i(\underline{v}_2), \dots, g_i(\underline{v}_i)) \notin \varrho_i,$$

és igy $g_i \notin Pol(\varrho_i)$, azaz $[g_i] \notin Pol(\varrho_i)$.

2./ Legyen $i \neq j$. Bizonyitanunk kell, hogy $g_i \in Pol(\varrho_j)$. Tegyük fel az ellenkezőjét, legyen $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_j)$ olyan, hogy $(g_i(\underline{x}_1), \dots, g_i(\underline{x}_j)) \notin \varrho_j$ és az

$$\underline{\underline{X}} = \begin{vmatrix} \underline{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{x}_j \end{vmatrix}$$ mátrix minden oszlopa ϱ_j-beli.

Mivel a g_i függvény $(E_3)^i$-n csak a $(2,\dots,2)$ helyen vesz fel 2-t, a $g_i(\underline{x}_1),\dots,g_i(\underline{x}_j)$ értékek között csak ugy szerepelhet 2, ha valamilyen s-re $\underline{x}_s=(2,\dots,2)$. Ekkor az $\underline{\underline{X}}$ mátrix oszlopai csak ugy lehetnek mind ϱ_j-ből, ha minden oszlop megegyezik, és pontosan egy sor - mégpedig $\underline{x}_{s-1}$ - csupa 0, a többi 1-es, ekkor azonban $g_i(\underline{x}_{s-1})=0$, $g_i(\underline{x}_t)=1$, ha $t\neq s$ és $t\neq s-1$, tehát

$$(g(\underline{x}_1),\ g_i(\underline{x}_2),\dots,\ g_i(\underline{x}_j))\in\ \varrho_j\ .$$

Feltehető tehát, hogy $(g_i(\underline{x}_1),\dots,g_i(\underline{x}_j))\in\{0,1\}^j$, ami $(g_i(\underline{x}_1),\dots,g_i(\underline{x}_j))\notin\varrho_i$ miatt azt jelenti, hogy

$$g_i(\underline{x}_1)=g_i(\underline{x}_2)=\dots=g_i(\underline{x}_j)=1\ .$$

Mivel az $\underline{\underline{X}}$ mátrix minden oszlopa ϱ_j-beli, ezért minden oszlop tartalmaz legalább egy 0-t, és mivel $g_i(\underline{x}_t)=1$ $1\leq t\leq j$-re, minden sor legfeljebb egy 0 elemet tartalmaz, azaz $j<i$. Másfelől, $g_i(\underline{x}_t)=1$ miatt, minden 0-t tartalmazó sorban pontosan egy 2 van. A ϱ_i reláció invariáns a koordináták ciklikus permutációjával szemben, a g_i pedig változóinak permutációival szemben, igy feltehető, hogy az első oszlop utolsó eleme 2 /ti. ha nem, a sorok és oszlopok egy permutációjával $\underline{\underline{X}}$ megfelelően átrendezhető/. A $\underline{v}_i$-k definiciója és $g_i(\underline{x}_t)=1$ miatt az első oszlop utolsó előtti eleme 0; és az utolsó előtti sor valamelyik eleme 2. Az $\underline{\underline{x}}$ mátrix az oszlopok

seréjével átrendezhető ugy, hogy ez az elem a második oszlopba kerüljön, s.i.t. Végül is az $\underline{\underline{X}}$ mátrixot a sorok ciklikus permutációjával és az oszlopok megfelelő seréjével mindig átrendezhetjük ugy, hogy az egyes sorokon a g_i által felvett függvényérték 1 marad, a mátrix pedig az alábbi alaku lesz:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 2 & \dots \\ 1 & 1 & & 2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 2 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 2 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \end{vmatrix}}_{j \text{ oszlop}}$$

A j+1-edik oszloptól kezdődően a $g_i(\underline{\underline{x}}_t) = 1$ /t=1 ,...,j/ feltétel miatt csupa 1 áll. Ez ellentmond annak, hogy a mátrix minden oszlopa ϱ_j-beli.

Tehát valóban: $g_i \in \mathrm{Pol}(\varrho_j)$, ha $i \neq j$, s igy

$$[g_i] \subseteq \mathrm{Pol}(\varrho_j) \text{ , ha } i \neq j,$$

$\varrho = \{\varrho_4, \dots, \varrho_n, \dots\}$ tehát szeparálja G-t, innen az 1.4. és 1.5. lemmák alapján kapjuk a tétel állitását.

Az 1.8. és 1.9. tétel eredményéből azonnal adódik az $\underline{S}$-tipusu maximális osztályokra a következő:

<u>1.10. tétel.</u> Ha $K \subseteq P_k$ önduális maximális klón és $k > 3$, akkor $\nu(K) = \Gamma$.

Az S_π alaku klónokra a következő eredmények adódnak:

<u>1.11.tétel.</u> Legyen A véges halmaz, card $(A)>2$, π az A egy permutációja. Ekkor - két eset kivételével - $\nu(S_\pi) = \Gamma$. A kivételes esetek: k=3 és π a 3 elemü ciklus ;
k=4 és π a 4 elemü ciklus.

<u>Bizonyitás:</u> Ha π tartalmaz legalább 5 elemü ciklust, az állitás az 1.9. tétel egyszerü következménye; ha az 1.8. tétel feltételeinek megfelelő alaku, ugy abból következik. Ha π egyik feltételnek sem tesz eleget, három eset lehetséges:

1./ π a kivételek valamelyike,

2./ card (A) =5 és $\pi = (a_1\ a_2)\ (a_3\ a_4\ a_5)$,

3./ card (A) =7 és $\pi = (a_1\ a_2\ a_3)(a_4\ a_5\ a_6\ a_7)$,

A 2./ és 3./ esetben reprezentáljuk az A halmazt E_5-tel ill. E_7-tel ugy, hogy

$$\pi = (0\ 3)(1\ 2\ 4) \quad \text{ill.} \quad \pi = (0\ 3\ 4)\cdot(1\ 2\ 5\ 6)$$

adódjék. Könnyen ellenőrizhető, hogy az 1.9. tétel bizonyitásához (3)-ban definiált g_i függvények mindkét esetben kiterjeszthetők S_π-beli függvényekké.

A kivételes esetekre Marcsenkov adott meg teljesen független klónhalmazt [43]-ban. Ez a (3) alatt definiált konstrukciónak a következő módositása:

Legyen $n \geq 3$, f_n az alábbi 2n-változós parciális függvény:

(4)

$$f_n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_1=x_2=\dots=x_n=0 \text{ vagy} \\ & \text{létezik pontosan egy } j \text{ index ugy, hogy } x_i=y_i=0, \\ & \text{ha } i\neq j \text{ és } x_j=1,\ y_j=2, \\ 1, & \text{ha } (x_1,\dots,x_n)\in E_2^n-\{0\}^n. \end{cases}$$

Az $f_n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ kiterjeszthető önduális függvénnyé akár a (0 1 2), akár a (0 1 2 3) ciklusra vonatkozóan, és az $F=\{[f_3],\dots,[f_n],\dots\}$ klónhalmaz teljesen független. A bizonyitást elhagyjuk /megtalálható [43]-ban/, de a (4) konstrukcióra a későbbiekben még hivatkozunk.

Eredményeinket a fentiekkel kiegészitve kapjuk a maximális klónokra a következőt:

<u>1.12. tétel.</u> Legyen $K \subseteq P_k$, $k > 2$, K maximális klón. Ekkor

$$\nu(K) = \begin{cases} \text{véges, ha } K \text{ affin és } k \text{ prim,} \\ \aleph_0 \text{ , ha } K \text{ affin és } k \text{ nem prim,} \\ \mathfrak{c} \quad \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen H részcsoportja a Σ_A teljes szimmetrikus csoportnak, és jelöljük S_H-val az összes H-val felcserélhető függvények halmazát. /f felcserélhető H-val, ha H minden elemével felcserélhető./

Az S_π alaku klónok az S_H alaku klónok olyan speciális esetei, amikor a H-t egyetlen π permutáció generálja. Mit mondhatunk $\nu(S_H)$ értékéről "bonyolultabb" csoportokban?

Ha $H=\Sigma_A$, kapjuk az un. homogén függvényeket /Csákány [9]./ Marcsenkov /[44]/ leirta a 3-elemü halmazon értelmezett homogén klónok hálóját, ebből kiderül, hogy

$$\nu(S_{\Sigma_3}) = 8.$$

A k-elemü halmaz összes homogén függvényeinek számát is Marcsenkov adta meg /[44]/. Az eredmény

$$\nu(S_{\Sigma_4}) = 14 \quad \text{és} \quad k > 4 \quad \text{esetén}$$

$$\nu(S_{\Sigma_k}) = 4k-3.$$

A továbbiakban néhány speciális H permutációcsoportra adjuk meg a $\nu(S_H)$ függvényt. /Az eredményeket bizonyitás nélkül közöljük./

<u>Definició.</u> Legyen $H \subseteq \Sigma_k$ permutációcsoport. A $D \subseteq E_k$ halmaz H blokkja, ha minden $h \in H$-ra

$$h(D) \subseteq D \text{ vagy } h(D) \cap D = \emptyset \text{ teljesül.}$$

Ha D a H blokkja, legyen:

$$H_D = \{ \xi \in \Sigma_D \mid \exists\, \sigma \in H : \sigma(x) = \xi(x),\ x \in D\text{-re} \}.$$

<u>1.13. tétel</u> /Demetrovics-Hannák-Rónyai [16], Th.2/.
Legyen D a H blokkja, Ekkor $\nu(S_H) \geq \nu(S_{H_D})$.

<u>Definició.</u> A $H \subseteq \Sigma_A$ csoport szemireguláris, ha csak az egységelemének van fixpontja.

<u>Következmény.</u> Ha $H \subseteq \Sigma_A$ szemireguláris csoport és nem 2-csoport, akkor $\nu(S_H) = k$.

<u>Következmény.</u> Ha $H \subseteq \Sigma_A$, $p > 2$ prim és H p-csoport, akkor

$$\nu(S_H) = k.$$

Az $\mathcal{L}_k$ duális ideáljai és intervallumai

Az eddigekben olyan klónhalmazok számosságát adtuk meg, melyek az $\mathcal{L}_k$ háló ideáljai. A továbbiakban a háló bizonyos duális ideáljainak /egy rögzitett klónt tartalmazó összes klónok halmazának/ számosságát és a háló néhány érdekes intervallumának számosságát határozzuk meg.

<u>Definició.</u> Legyen $K_1, K_2 \subseteq P_k$, $K_1 \subseteq K_2$ és definiáljuk a $\gamma(K_1, K_2)$ függvényt:

$$\gamma(K_1, K_2) = \mathrm{card}(\{B \mid K_1 \subseteq B \subseteq K_2\}) \quad , \text{ és a}$$

könnyebb fogalmazás kedvéért jelölje $\beta(K)$ a $\gamma(K, P_k)$ értékét. Világos, hogy $\nu(K) = \gamma(J_K, K)$.

A $\beta(K)$ függvény értékét néhány "kis" klónra ismerjük. Tudjuk pl., hogy a $(P_k^{(1)}, P_k)$ intervallum egy k+1 hosszuságu lánc /l. pl. Pöschel-Kaluzsnyin [49]/, azaz

$$\gamma(P_k^{1}\ , \ P_k) = \beta(P_k^{(1)}) = k+1.$$

A kételemü halmazon természetesen minden klón-párra ismerjük a $\gamma(K_1, K_2)$ értékét. P_2-ben a minimális nemtriviális klónok: O_4, O_6, O_5, P_1, P_2, L_4 és D_2. Ezekre

$\beta(O_5) = \beta(O_6) = \beta(P_1) = \beta(P_2) = \aleph_0$,
$\beta(O_4) = 7$,
$\beta(L_4) = 11$,
$\beta(D_2) = 7$.

Legyen $d(x_1,\dots,x_n)$ többségi függvény A-n. Jelölje K_d az d által generált klónt. Baker-Pixley tételének közvetlen következménye, hogy $\beta(K_d)$ véges; értéke fölülről becsülhető az A-n értelmezett legfeljebb n-1 -változós relációk számával. Ez a becslés általában nagyon durva, hiszen maga $d(x_1,\dots,x_n)$ sem őrzi meg az összes legfeljebb n-1 -változós relációt.

Az utóbbi évek vizsgálataiban fontos szerepet játszanak az un. majdnem-projekciók:

Definició. A $\ell_n(x_1,\dots,x_n) \in P_k$ $(n \leq k)$ függvényt majdnem-projekciónak nevezzük, ha

$$\ell_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{ha card } (\{x_1,\dots,x_n\}) < n, \\ x_n & \text{egyébként} \end{cases}$$

Először bizonyitani fogjuk a következő tételt:

1.14. tétel. Legyen card(A)=k >3, n > 3, $\ell_n(x_1,\dots,x_n)$ majdnem-projekció A-n. Ekkor $\beta([\ell_n(x_1,\dots,x_n)]) = C$.

Bizonyitás. Tekintsük az 1.9. tétel bizonyitásához (3)-ban definiált g_i parciális függvényeket és ϱ_i relációkat.

Terjesszük ki a g_i-ket most tetszőleges módon.

Legyen $G' = \{[g_4, \ell_n], [g_5, \ell_n], \dots\}$. Bizonyitjuk, hogy $\varrho = \{\varrho_4, \dots, \varrho_m, \dots\}$ szeparálja G'-t. Az 1.9. bizonyitásában láttuk, hogy $g_i \notin \mathrm{Pol}(\varrho_i)$, igy $[g_i, \ell_n] \notin \mathrm{Pol}(\varrho_i)$. Csak azt kell belátni, hogy $[g_i, \ell_n] \subseteq \mathrm{Pol}(\varrho_j)$, feltéve, hogy $i \neq j$. Láttuk, hogy $g_i \in \mathrm{Pol}(\varrho_j)$. Az $\ell_n(x_1, \dots, x_n) \in \in \mathrm{Pol}(\varrho_j)$ állitás igazolására tegyük fel, hogy $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_j) \in (\varrho_j)^n$; ekkor az $\underline{x}_i$ vektorok mind a $\{0,1,2\}^n$ halmazból valók. Miután $\ell_n(x_1, \dots, x_n)$ legalább 4-változós, $\ell_n(x_1, \dots, x_n) \equiv x_1$ az E_3^n halmazon, és igy $(\ell_n(\underline{x}_1), \dots, \ell_n(\underline{x}_j))$ valóban eleme ϱ_j-nek.

Az 1.14. tétel bizonyitásának fő gondolatát a későbbiekben való felhasználás kedvéért ismét érdemes külön kissé általánosabban is megfogalmazni.

1.15. lemma. Legyen $G = \{G_1, \dots, G_n, \dots\}$ klónhalmaz, $\varrho = \{\varrho_1, \dots, \varrho_n, \dots\} \subseteq R_k$ a G-t szeparáló relációhalmaz. Ha K olyan klón, hogy $K \subseteq \mathrm{Pol}(\varrho_i)$ minden $\varrho_i \in \varrho$ relációra, akkor $\not\rho(K) = \mathfrak{c}$.

Ezt az öteletet fogjuk használni a következő tétel bizonyitása során is:

1.16. tétel. Legyen $\mathrm{card}(A) = k \geq 3$, jelölje $[C_A]$ az összes konstans generálta klónt. Ekkor $\beta([C_A]) = \mathfrak{c}$.

Bizonyitás. Feltehető, hogy $A=E_k$. Definiáljuk $m \geq 3$ -ra a $h_m(x_1,\dots,x_m)$ függvényeket az alábbiak szerint:

(5)

$$h_m(x_1,\dots,x_m) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x_s=1 \text{ és } i\neq s,\ i\in(1,2,\dots,m) \\ \qquad \text{esetén } x_i=2 \\ \quad \text{vagy } x_s=2 \text{ és } i\neq s,\ i\in(1,2,\dots,m) \\ \qquad \text{esetén } x_i=1, \\ 0 \text{ különben.} \end{cases}$$

Legyen $H = \{[h_3],\dots,[h_n],\dots\}$. Először is megadjuk a $\sigma = \{\sigma_3,\dots,\sigma_n,\dots\}$ relációhalmazt.[x] Legyen $\sigma_m \subset (E_k)^{2m+1}$,

$$\sigma_m = A_m \cup B_m \cup C_m \text{, ahol}$$

$$A_m = \{(a,\dots,a) \in (E_k)^{2m+1}, a \in E_k\}$$

$$B_m = \{(\underline{v}',\underline{v}'',2) \in (E_k)^{2m+1} \mid \text{ahol } \underline{v}',\underline{v}'' \in A^m,$$
$$\underline{v}' = (v_1',\dots,v_m')\ ;\ \underline{v}'' = (v_1'',\dots,v_m'')$$
és létezik pontosan egy s index,
hogy $v_s' = 2$, $v_s'' = 1$ és $i\neq s$-re:
$v_i'=1$ és $v_i'' = 2.\}$

$$C_m = \{0,1\}^{2m+1} \setminus \{(1,1,\dots,1,0)\} .$$

---

[x] A tétel eredeti bizonyitásában /[1]/ nem adtuk meg a szeparáló relációkat, de a konstrukció azonos. Mivel igy egyszerübb és a dolgozat tárgyalásmódjához közelebb áll, a bizonyitásnak ezt a formáját irjuk le.

Bizonyitjuk, hogy σ szeparálja H-t.

1./ $h_m \notin Pol(\sigma_m)$. Tekintsük ugyanis a

$$\begin{vmatrix} \underline{g}_1 \\ \underline{g}_2 \\ \vdots \\ \underline{g}_m \\ \underline{g}_{m+1} \\ \underline{g}_{m+2} \\ \underline{g}_{m+3} \\ \vdots \\ \underline{g}_{2m} \\ \underline{g}_{2m+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

m x 2m+1-es mátrixot.

Világos, hogy a mátrix minden oszlopa σ'_m -ből való. Ezzel szemben $h_m(\underline{g}_1) = h_m(\underline{g}_2) = \dots = h_m(\underline{g}_{2m}) = 1$ és $h_m(\underline{g}_{2m+1}) = 0$, tehát $(h_m(\underline{g}_1), \dots, h_m(\underline{g}_{2m}), h_m(\underline{g}_{2m+1})) \notin \sigma_m$.

2./ Legyen $i \neq m$. Ekkor $h_i \in Pol(\sigma_m)$.

Mivel $h_i(\underline{x})$ mindig E_2-beli, elég megmutatni, hogy nincs olyan

$$\begin{vmatrix} \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_{2m+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2m+1}^1 & & \dots & x_{2m+1}^i \end{vmatrix}$$

mátrix, melynek oszlopai $\mathfrak{S}_m$-ből valók és

$$\left(h_i(\underline{x}_1), h_i(\underline{x}_2), \dots, h_i(\underline{x}_{2m+1})\right) = (1,1,\dots,1,0) \; .$$

Ismét indirekt bizonyitást adunk. Tegyük fel, hogy $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_{2m+1}$ a fenti feltételeknek eleget tevő vektorok, jelölje $\underline{x}^t$ a mátrix t-edik oszlopát. Először is megjegyezzük, hogy ha valamelyik oszlop C_m-ből való, a függvényértékek $(h_i(\underline{x}_1),\dots, h_i(\underline{x}_{2m+1}))$ vektora is C_m-beli.

Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük tehát, hogy az első j oszlop: $\underline{x}^1,\dots,\underline{x}^j \in B_m$, és $\underline{x}^{j+1},\dots,\underline{x}^m \in A_m$. Ha $j < m$, könnyen látható, hogy az első 2m sor között van olyan, amely megegyezik a mátrix utolsó sorával, tehát valamilyen $p \leq 2m$-re $\underline{x}_p = \underline{x}_{2m+1}$, azaz $h_i(\underline{x}_p) = h_i(\underline{x}_{2m+1})$, és igy $(h_i(\underline{x}_1),\dots,h_i(\underline{x}_{2m+1})) \neq (1,\dots,1,0)$. A j tehát legalább m, és $i \neq m$ miatt $i > m$.

Tegyük fel, hogy $i \neq j$, azaz vannak A_m-beli vektorok a mátrix oszlopai között. Nyilván csak az az eset érdekes, amikor ezek az $(1,\dots,1)$ vagy a $(2,\dots,2)$ vektorok. Legyen $\underline{x}^{j+1} = (1,\dots,1)$. Ekkor található olyan p index, hogy $m+1 \leq p \leq 2m$ és az $\underline{x}_p$ vektor az első j oszlopban legalább $j-1$ darab 1 -et tartalmaz. /Nyilván van ugyanis $\underline{x}_p$ ugy, hogy az első j oszlopban van 1 érték, és $h_i(\underline{x}_p)=1$ miatt ekkor $i-1$ darab 1 van $\underline{x}_p$ koordinátái között./ Könnyen kiszámolható, hogy /$j > m$ miatt/ ekkor van a mátrixnak olyan sora, amely az első j koordinátában csupa 2 -t tartalmaz, ez megegyezik az utolsó sorral, s igy ismét ellentmondásra jutottunk.

Ha $x^{j+1} = (2,\dots,2)$, hasonló gondolatmenet vezet ellentmondásra.

Marad tehát az az eset, amikor $i=j$, azaz a mátrix minden oszlopa B_m-ből való, és $i > m$. Ekkor található a mátrix első m sora között olyan $\underline{x}_p$, amely legalább két 2 értéket tartalmaz. Ez a sor $h_i(\underline{x}_p)=1$ miatt $i-1$ számu 2 értéket tartalmaz, és $i > m$ miatt az első m sor között van olyan is, ami egyáltalán nem tartalmaz 2 -t. Ez ismét ellentmondás.

Az 1.16. tétel bizonyitásához - az 1.15. lemma szerint - elég belátni, hogy $[C_A] \subseteq \mathrm{Pol}(\sigma_j)$ minden $\sigma_j \in \sigma$ relációra. Ez azonban triviális, hiszen

$$A_j = \{ \{0\}^{2j+1}, \ldots, \{k-1\}^{2j+1} \} \ .$$

Az 1.14. és 1.16. tételekhez szeretnénk a következő megjegyzéseket füzni.

1./ Az $\ell_n(x_1,\ldots,x_n)$ függvény homogén, azaz $\ell_n \in S_\pi$ teljesül minden π permutációra. Az 1.14. tétel bizonyitásában használhattuk volna az 1.7. lemma bizonyitásához (2)-ben megadott függvénykonstrukciót is, a bizonyitás változtatás nélkük elmondható. Tehát: Az $\ell_n(x_1,\ldots,x_n)$ függvényhez mindig tudunk kontinuum sok olyan klónt konstruálni, hogy ezek S_π-beliek, és tartalmazzák $\ell_n(x_1,\ldots,x_n)$-t, feltéve, hogy az alaphalmaz számossága legalább 4, és π nem a négyelemü teljes ciklus.

2./ Az 1.16. tétel bizonyitásához használt konstrukcióra igaz, hogy h_m megőrzi az összes olyan ε ekvivalencia-relációt, melyre $(0,1) \in \varepsilon$, megőrzi az összes olyan centrális relációt, melyre a 0 centrumelem és az összes h-reguláris relációt is. Mivel a 0,1 elemek kijelölése az A véges halmazban tetszőleges lehet, a fenti két megjegyzés alapján a következő állitásokat nyerhetjük:

<u>1.17. tétel.</u> Legyen $k > 3$, card$(A)=k$, π az A egy tetszőleges permutációja, $n > 3$. Ekkor - egyetlen kivételtől eltekintve - $\gamma([\ell_n], S_\pi) = \mathfrak{c}$. A kivételes eset a $k=4$, π a négyelemü teljes ciklus. Speciálisan, ha $k > 3$, és K önduális maximális osztály, akkor $\gamma([\ell_n], K) = \mathfrak{c}$.

A tanulmány harmadik fejezetében látni fogjuk, hogy a $k > 3$ feltétel valóban szükséges: P_3-ban a maximális önduális osztálynak csak megszámlálható sok ℓ_3-at tartalmazó részklónja van /3.30. tétel/.

<u>1.18. tétel.</u> Legyen $k \geq 3$, card $(A)=k$. Ekkor

$$\gamma([c_A], H^*) = \mathfrak{c} \;;$$

$$\gamma([c_A], T_a) = \mathfrak{c} \;;$$

$$\gamma([c_A], T_{(a,b)}) = \mathfrak{c} \,.$$

/A H^*, T_a, $T_{(a,b)}$ klónok definicióját ld. az 1.5. lemma után./

Speciálisan, ha K h-reguláris, centrális, vagy U-tipusu maximális klón, akkor $\gamma([c_A], K) = \mathfrak{c}$.

Utolsóként az $\mathcal{L}_k$ háló intervallumainak számosságával foglalkozó állitások közül szeretnénk példát mutatni arra, hogyan lehet kihasználni azt, hogy egy klónhalmazt szeparáló relációhalmazok kiválasztásában bizonyos mértékü szabadságunk lehet. Az 1.19. állitás valóban csak illusztráció, olyan "természetes módon" definiálható klónt mutat, melyre az általa generált ideál és duális ideál egyaránt kontinuum számosságu. Önmagában egy olyan K klón konstruálása, melyre $\nu(K) = \beta(K) = \mathfrak{c}$, nagyon egyszerü: elegendő például a (2) alatt definiált g_i függvények közül a páros indexüek által generált klónt képezni. Jelölje $P_{k,\ell}$ az összes olyan P_k-beli f függvények klónját, melyekre $\mathrm{Im}(f) \subseteq E_\ell$.

Legyenek a g_i függvények az (1) alatt definiáltak. Reprezentálja az A véges halmazt E_k ugy, hogy a=k-3, b=k-2, c=k-1. Legyen $k \geqslant 5$. Ha az 1.2. lemma bizonyitásában adott ϱ_i relációk helyett a

$\varrho'_i = \varrho_i \cup (E_{k-3})^{2i}$ relációkat vezetjük be, a

$\varrho' = \{\varrho'_3, \dots, \varrho'_n, \dots\}$ halmaz szintén szeparálja

$G = \{[g_3], \dots, [g_n], \dots\}$ -t.

Másfelől, $P_{k,\ell} \subseteq \mathrm{Pol}(\varrho'_i)$ teljesül nyilvánvalóan minden $\varrho'_i \in \varrho'$ -re, ha $\ell \leq k-3$. Az 1.15. lemma szerint innen azonnal adódik, hogy $\beta(P_{k,\ell}) = \mathfrak{c}$, ha $\ell \leq k-3$.

Mivel pedig a fenti g_i függvények c=0, b=1 választás mellett $P_{k,2}$ -beli függvények, a következőt kapjuk:

<u>1.19. állitás.</u> Legyen $k \geq 5$, $\ell \geq 2$, $\ell \leq k-3$. Ekkor

$$\nu(P_{k,\ell}) = \beta(P_{k,\ell}) = \mathfrak{c}.$$

Függvényteljes klónok

A most következő - és a fejezetet záró - eredmény megfogalmazása és bizonyitása előtt szeretnénk néhány szót a felvetett kérdés eredetének szentelni. Az 1.12. tételből következik, hogy minden $k \geq 3$ primre az $\underline{S}$-tipusu maximális osztályok részklónjainak számossága kontinuum. Demetrovics-Hannák-Rónyai [23] cikkének fő eredménye azt mondja ki, hogy ha card $(A) = k \geq 3$, k prim, akkor az $\underline{S}$-tipusu maximális osztályok részklónjai függvényteljesek, az un. lineáris klónok kivételével. A kivételes klónok - amint az Demetrovics-Bagyinszki [14] publikációjából kiderül, véges sokan vannak, tehát legalább 3-elemü primelemszámu halmaz fölött mindig kontinuum sok különböző függvényteljes klón konstruálható. Természetesen adódott a kérdés, igaz-e ez általában is legalább 3-elemü halmazokon.

1.20. tétel. Legyen $k \geq 3$, ekkor P_k függvényteljes részklónjai halmazának számossága kontinuum.

Bizonyitás. $k=3$-ra az állitás az előző bekezdésben ismertetett eredményekből adódik.

Legyen $k \geq 4$. Olyan megszámlálható, teljesen független klónhalmazt fogunk konstruálni, amelynek minden egyes klónja függvényteljes. Mivel a függvényteljes klónok halmaza nyilván egyesitésre zárt, az 1.4. lemma szerint adódik a tétel állitása.

Jelölje ismét g_i az(1) alatt definiált függvényeket, ϱ_i az 1.2. lemmában megadott relációkat, és legyen a=0, b=1, c=2. Definiáljuk a h_n /$n \geq 3$/ függvényeket az alábbiak szerint:

$$(6) \qquad h_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} g_n(x_1,\dots,x_n) & \text{, ha } (x_1,\dots,x_n) \in (E_3)^n; \\ w(x_1,x_2) & \text{, ha } x_3=3; \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $w(x,y) = \max(x,y)+1$, az un. Webb-függvény. /A $\max(x,y)$ az E_k természetes rendezése szerint, a "+" pedig mod k értendő./ Mivel $w(x,y)$-ra $[w]=P_k$ teljesül /ld. Webb [79]/, és $w(x,y) \in [h_n, C_k]$, minden egyes h_n klón függvényteljes.

A $\{[h_1],\dots,[h_n],\dots\} = H$ halmaz függetlenségének bizonyitására a $\varrho = \{\varrho_3,\dots,\varrho_n,\dots\}$ szeparáló relációhalmaz változtatás nélkül felhasználható és a bizonyitás is szó szerint azonos lehet az 1.2. lemmáéval, hiszen

$$h_n(x_1,\dots,x_n) = g_n(x_1,\dots,x_n), \text{ ha } (x_1,\dots,x_n) \in (E_3)^n .$$

II. Maximális klónok generátorrendszereiről

Az előző fejezetben láttuk, hogy $k > 2$ esetén léteznek végesen nem generálható klónok. Sőt, a konstrukciók megmutatták, hogy minden n egész számra meg tudunk adni pontosan n függvényből álló bázisu klónokat. Definiáljuk /egy klón generátorrendszerei "bonyolultságának" mérésére/ a $K \subseteq P_k$ klón <u>rendjét</u> /jelölése: rend (K)/, mint a K generátorrendszereiben előforduló maximális aritásu függvény aritásának minimumát. A végesen nem generálható klónok rendjét végtelennek tekintjük. /Ebben az esetben nyilván minden generátorrendszer tartalmaz akármilyen nagy aritásu függvényt./ Ugyancsak az előző fejezet konstrukciói /ill. [37]/ mutatnak példát n-rendü klónra, tetszőleges n természetes számra. Az $\underline{U}$, $\underline{C}$, $\underline{S}$, $\underline{H}$, $\underline{M}$ tipusu maximális osztályok akármelyikének részklónjai rendjére vonatkozóan megfogalmazhatjuk a következő állitást:

Ha K egy - a fenti 5 tipus valamelyikébe eső - maximális klón P_k-ban $/k > 2/$, és n tetszőleges természetes szám, akkor létezik $B_n \subseteq K$ klón ugy, hogy B_n rendje pontosan n, továbbá létezik $B_\infty \subseteq K$ ugy, hogy B_∞ nem véges rendü. /A B_n klónok lehetnek pl. az egyes maximális osztályokban konstruált végtelen bázisu klónok egy n-aritásu báziseleme által generált klónok, ha $n > 3$ és könnyen megadhatók az n=1,2,3 esetekre./

Természetesen egy klónnak az a tulajdonsága, hogy tartalmaz végesen nem generálható részklónt, nem jelenti azt, hogy ő maga nem végesen generált, erre a legkézenfekvőbb példa maga P_k. A P_k generátorrendszerei közül különös érdeklődésre tartanak számot az egyelemüek. Az $f \in P_k$ függvényt Sheffer-függvénynek nevezzük, ha generálja P_k-t, azaz $[f] = P_k$.

Tudjuk, hogy minden $k \geq 2$-re létezik kétváltozós Sheffer-függvény /Webb, 1935/ nevezetesen az

$f(x,y) = \max(x, y) + 1$, ahol max a $0 < 1 < 2 < \ldots < k-1$ rendezés szerinti maximum,

a + pedig a modulo k összeadás. P_k tehát az egyáltalán elvárható legegyszerübb bázissal rendelkezik.

Kiterjedt irodalma van annak a kérdéskörnek, hogy hogyan garantálható /pl. a függvény értéktáblájának néhány helyen való megadásával/, hogy egy függvény Sheffer-tulajdonságu legyen, hány Sheffer-függvény van /legalább/ rögzitett k-ra. Ezzel részletesen nem foglalkozunk, csak utalni szeretnénk pl. Davies [12], Webb [79], Schofield [75], Rosenberg [63] ill. a hazai szerzők közül Demetrovics [15] eredményeire.

Egyetlen függvénnyel generálható maximális klónok

P_k maximális klónjaira vonatkozóan is vizsgálták azt a kérdést, mikor generálható egy maximális klón egyetlen függvénnyel. Shofield [75] bizonyitotta a következőt:

2.1. tétel. A K maximális klón pontosan akkor generálható egyetlen $f \in K$ függvénnyel, ha $K= \mathrm{Pol}(\varrho)$, ahol ϱ :

1./ egy nemtriviális ekvivalencia, vagy

2./ egy egyváltozós centrális reláció,

3./ egy - a Rosenberg-tételben szereplő - tipusu speciális permutáció.

E három tipust rendre $\underline{U}$, $\underline{C}^1$, $\underline{S}$ jelöli.

A bizonyitás első része konstruktiv, a vizsgált maximális osztályokra megad egy-egy generáló függvényt. A megforditás Rousseau tételének /[65]/ felhasználásával /és kis finomitásával/ adódik. Ezek a konstrukciók az osztályok rendjére vonatkozóan a következő eredményeket adják:

1./ Ha K önduális maximális osztály, és a definiáló reláció d számu ciklusra bomlik: $\mathrm{rend}(K) \leq 2d+1$;

2./ Ha $K \in \underline{C}^1$, $\mathrm{rend}(K)=2$;

3./ Ha K U-tipusu maximális osztály: $\mathrm{rend}(K)=2$.

Az, hogy ha K egy L-tipusu maximális osztály, akkor rend(K)=2, közvetlenül adódik abból a tényből, hogy K pontosan az

$$f(x_1,\dots,x_n) = A_1\cdot x_1 \oplus A_2\cdot x_2 \oplus\dots\oplus A_n\cdot x_n \oplus a_o$$

alaku függvényekből áll /l. pl. Rosenberg [60]/, ahol $k=p^m$ és az alaphalmazt $(E_p)^m$ alakban reprezentáljuk, a $\oplus$ a Z_p-beli összeadás /koordinátánként/, a szorzás a szokásos /mod p/ mátrixszorzás, ezek egy- ill. kétváltozós müveletek.

A maximális osztályok rendjének legteljesebb leirása végül Lautól származik, aki /részben az eddig ismertetett eredményeket is felhasználva/ bizonyitotta, hogy:

2.2. tétel. /Lau [40]/: Legyen $K\subseteq P_k$ maximális klón.

$$\mathrm{rend}(K) = \begin{cases} 3, & \text{ha } K\in \underline{S} \text{ és } k=2,\\ 2, & \text{ha } K\in \underline{L}\cup\underline{U}\cup\underline{H}\cup\underline{C}^1, \end{cases}$$

ha pedig $K\in\underline{C}$ és a γ definiáló reláció n-változós és centruma Γ, akkor:

1./ $\mathrm{rend}(K)=2$, ha $k\text{-card}(\Gamma)\leq h$ és

$\leq h$ egyébként,

2./ $\mathrm{rend}\ K\leq [h/2]+1$, ha $k\text{-card}(\Gamma)> h$

és $(a_o,\dots,a_{h-1})\in\gamma \Rightarrow \mathrm{card}(\{a_o,\dots,a_{h-1}\})< h$

vagy $\{a_o,\dots,a_{h-1}\}\cap\Gamma\neq\emptyset$.

A centrális maximális klónok rendjére - azokban az esetekben, mikor nem sikerült pontos értéket meghatározni - a triviális $2 \leq \mathrm{rend}(K)$ alsó korláton kivül mást nem ismerünk.

A monoton osztályok rendjéről még ennél is kevesebbet tudunk. Azt a kérdést sem sikerült eddig eldönteni, hogy vajon minden monoton maximális klón végesen generálható-e.

A fejezet célja éppen az, hogy a definiáló korlátos részbenrendezés szerkezetéből kiindulva feltételeket találjunk arra vonatkozóan, hogy a K monoton maximális osztály mikor végesen generálható.

Jelölje a K monoton maximális klónt definiáló relációt R, legkisebb elemét 0, legnagyobb elemét 1. Érdekes, hogy mig a $K=\mathrm{Pol}(R)\subseteq P_k$ klón rendjének meghatározása általában nagyon nehéznek látszik, abban a speciális esetben, ha R háló, nagyon egyszerüen adódik, hogy $\mathrm{rend}(K)=2$.

Ennek igazolásához csak azt kell észrevenni, hogy a monoton Boole-függvények közismert előállitása a következőképpen vihető át az R háló monoton függvényeire. Legyen

$$\max(x_1,\ldots,x_n) = \max(x_1,\max(x_2,(\ldots\max(x_{n-1},x_n))\ldots)$$

$$\min(x_1,\ldots,x_n) = \min(x_1,\min(x_2,(\ldots\min(x_{n-1},x_n))\ldots) ,$$

$$V_{\alpha}^{\beta}(x)=\begin{cases}\beta, & \text{ha } x\geq\alpha,\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Azonnal ellenőrizhető, hogy

$$f(\underline{x})=\max\left(\min\left(V_{a_1^1}^{f(\underline{a}^1)}(x_1),\dots,V_{a_n^1}^{f(\underline{a}^1)}(x_n)\right),\dots,\min\left(V_{a_1^s}^{f(\underline{a}^s)}(x_1),\dots,V_{a_n^s}^{f(\underline{a}^s)}(x_n)\right)\right)$$

ahol $s=k^n$ $\underline{a}^j=(a_1^j,\dots,a_n^j)\in(E_k)^n$

Többségi függvények és a végesen generálhatóság

Mielőtt nekifognánk a monoton maximális klónok vizsgálatának, szeretnénk felhivni a figyelmet egy lényegében egyszerüen igazolható, de a továbbiak szempontjából alapvető jelentőségü tényre. Baker-Pixley idézett eredményének közvetlen következményeként adódik az alábbi:

2.3. lemma. Ha $K\subseteq P_k$ klón, és K tartalmaz a

$$d(x,\dots,x,y)=d(x,\dots,y,x)=\dots=d(y,x,\dots,x)=x$$

egyenlőséggel definiált n-változós többségi függvényt, akkor K végesen generálható.

Baker-Pixley tétele szerint ekkor K pontosan az $\mathrm{Inv}(K)$ legfeljebb $(n-1)$-változós relációinak polimorfizmusaiból áll.

Minden olyan legfeljebb $(n-1)$-változós ϱ relációhoz ami nem $\mathrm{Inv}(K)$-beli, megadható olyan $f_\varrho \in K$, hogy f_ϱ nem őrzi a ϱ-t, tehát megadható véges sok függvény ugy, hogy ezek legfeljebb $(n-1)$-változós invariáns relációi pontosan egybeesnek $\mathrm{Inv}(K)$ legfeljebb $(n-1)$-változós elemeivel. Ezek a függvények kiegészitve a $d(x_1,\dots,x_n) \in K$ függvénnyel nyilván a K klónt generálják. Ha tehát egy K klónról igazolni tudjuk, hogy tartalmaz n-változós többségi függvényt, akkor azt is igazoltuk, hogy K végesen generálható. A 2.3. lemma közvetlenül felhasználható például annak igazolására, hogy a legalább kétváltozós centrális relációval definiált, az önduális maximális klónok és a monoton maximális klónok közül azok, melyeknek definiáló relációja egy L háló, végesen generálhatóak:

Legyen π tetszőleges permutációja E_k-nak. Ekkor a

$$d(x,y,z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x=y\,, \\ z & \text{egyébként} \end{cases}$$

3-változós többségi függvény eleme S -nek.

Ha L háló, a

$$u_3(x,y,z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)\wedge(y\vee z) \qquad \text{és}$$

$$m_3(x,y,z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$$

mindegyike monoton 3-változós többségi függvény / $\wedge$ és $\vee$ jelöli az L metszet és egyesités müveletét /.

Végül ha ϱ egy h-változós centrális reláció, $h \geq 2$ és u a ϱ centrumeleme, a

$$d(x_1,\ldots,x_{h+1}) = \begin{cases} a, & \text{ha card } (\{i/x_i=a\}) \geq h, \\ u & \text{egyébként} \end{cases}$$

definicióval adott függvény h+l-változós többségi függvény, és $d(x_1,\ldots,x_{h+1}) \in \mathrm{Pol}(\varrho)$, hiszen

ha $(d(\underline{x}_1),\ldots,d(\underline{x}_h)) \notin \varrho$, akkor az $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_h$

vektorok mindegyike olyan alaku, hogy legfeljebb egy kivétellel $\underline{x}_p$ minden koordinátája azonos $f(\underline{x}_p)$-vel, különben u előfordulna $(d(\underline{x}_1),\ldots,d(\underline{x}_h))$ koordinátái között. Mivel a d függvény h+l-változós, van olyan j index, hogy minden $\underline{x}_i$ $/i \leq h/$ j-edik koordinátája éppen $d(\underline{x}_i)$, igy $d(x_1,\ldots,x_{h+1}) \in \mathrm{Pol}(\varrho)$.

A fenti állitáshoz két megjegyzést szeretnénk füzni: Az önduális klónokhoz definiált többségi függvény választása valójában nem függött a π permutációtól. Valójában tehát azt igazoltuk, hogy S_G minden $G \in \Sigma_A$ permutációcsoportra végesen generálható, ahol S_G jelöli a G-vel felcserélhető összes függvényből álló klónt. Ugyanigy a centrális klónok esetében a d függvény definiciója csak az u elemtől függött. Ezért, ha ϱ_i $/i \in I/$ h-változós centrális relációk olyan családja, melyre valamely $u \in E_k$ minden ϱ_i centrumába beleesik, akkor

$K = \bigcap\limits_{i \in I} \mathrm{Pol}(\varrho_i)$ szintén végesen generálható.

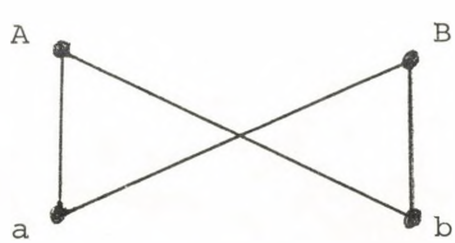
Monoton maximális klónok

Térjünk most már rá a monoton maximális klónok vizsgálatára; arra a kérdésre keressük a választ, hogy az R részbenrendezés milyen tulajdonságai garantálják n-változós többségi függvény létezését Pol(R)-ben.

Először is belátjuk, hogy háromváltozós többségi függvény létezése jellemzi a hálókat a részbenrendezések között.

2.4. lemma. Ha R olyan korlátos részbenrendezés, hogy Pol(R) tartalmaz háromváltozós többségi függvényt, akkor R háló.

Bizonyitás. Tegyük fel, hogy R nem háló. Legyen a,b,A,B az R négy eleme, ugy, hogy a, b-nek nincs legkisebb felső korlátja, de mind A, mind B minimális felső korlátjuk /2.1. ábra/



2.1. ábra

Legyen $d(x,y,z)$ többségi függvény. Ekkor

$$d(a,b,b)=b, \qquad d(a,B,B)=B$$

$$d(a,b,a)=a, \qquad d(A,A,B)=A$$

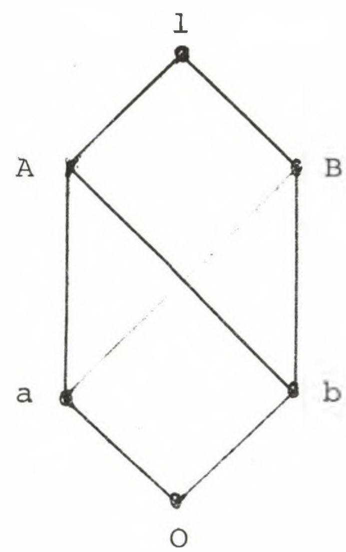
$$d(a,b,B)=x \quad \text{és}$$

$$d\in \mathrm{Pol}(P)\text{-ből}$$

$$a\leq x\leq B \quad \text{és} \quad b\leq x\leq A \quad \text{következik,}$$

ami lehetetlen.

A legkisebb elemszámu korlátos részbenrendezés, amely nem háló, a hatelemü halmazon konstruálható:



2.2. ábra

Jelölje R_6 az ábrán látható részbenrendezést.

2.5. lemma. Pol (R_6) nem tartalmaz négyváltozós többségi függvényt.

Bizonyitás. Legyen $d(x_1,x_2,x_3,x_4)$ négyváltozós többségi függvény, $d(a,b,A,B)=x$. Ekkor $A>a$, $A>b$ miatt $d(A,A,A,B)=A\geq x$ teljesül, ha $d(x_1,x_2,x_3,x_4)\in \mathrm{Pol}(R_6)$. Hasonlóan $B\geq x$, $a\leq x$, $b\leq x$ is bizonyitható.

A fenti lemma könnyen általánositható.

2.6. lemma. Ha az R korlátos részbenrendezés nem háló, Pol(R) nem tartalmazhat három- vagy négyváltozós többségi függvényt.

Bizonyitás. Elegendő a négyváltozós esetre szoritkozni, ezt ugyanugy láthatjuk be, mint a 2.5. lemma állitását.

Meg fogjuk azonban mutatni, hogy Pol(R_6) tartalmaz ötváltozós többségi függvényt. Először is vezessük be az $u_3(x,y,z)$ és $m_3(x,y,z)$ következő általánositásait: Legyen $(L,\wedge,\vee)$ háló, $n\geq 3$. Definiáljuk az u_n,m_n,d_n,D_n n-változós függvényeket:

$$u_n(x_1,\dots,x_n):=\bigwedge_{i<j}(x_i\vee x_j)$$

$$m_n(x_1,\dots,x_n):=\bigvee_{i<j}(x_i\wedge x_j)$$

$$D_n(\underline{x})=u_n(\underline{x})\vee m_n(\underline{x})$$

$$d_n(\underline{x})=u_n(\underline{x})\wedge m_n(\underline{x})$$

2.7. lemma. Az u_n, m_n, D_n, d_n függvények Pol(L)-beli n-változós többségi függvények.

Bizonyitás. A függvények monotonitása nyilvánvaló. Legyen $\underline{x}=(x,x,\dots,x,y,x,\dots,x)$. Ekkor pl.

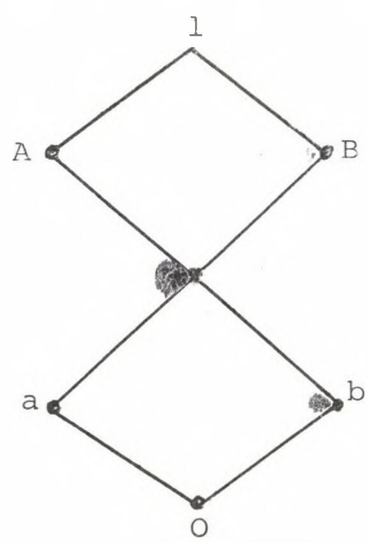
$$u_n(\underline{x})=\bigwedge_{1\leq i<j\leq n}(x\vee x)\wedge(x\vee y)=x\wedge(x\vee y)=x.$$

Hasonlóan egyszerü számolás igazolja, hogy $m_n(\underline{x})=x$, és világos, hogy

$$d_n(\underline{x})=u_n(\underline{x})\wedge m_n(\underline{x})=m_n(\underline{x})\vee u_n(\underline{x})=D_n\underline{x}=x.$$

Megjegyezzük még - erre a továbbiakban szükségünk lesz -, hogy $\underline{x}\leq\underline{y}$ esetén $d_n(\underline{x})\leq D_n(\underline{y})$.

Jelölje R^{*} a 2.3. ábrán látható részbenrendezést.



2.3. ábra

R^* nyilván háló, R^* alaphalmaz tartalmazza R_6 alaphalmazát, és ha $x,y \in R_6$, akkor $x \leq y$ /R_6-ban/ pontosan akkor teljesül, ha $x \leq y$ /R^*-ban/. Ez a tulajdonság biztositja, hogy ha $f(x)$ monoton függvény, $f(\underline{x}): (R^*)^n \to R^*$, és $x \in (R_6)^n$ esetén $f(x) \in R_6$, akkor az f megszoritása R_6-ra szintén monoton függvény.

Megjegyezzük, hogy minden R részbenrendezés beágyazható a fenti rendezéstartó módon egy L hálóba /Grätzer [31]/.

<u>2.8. tétel.</u> $\mathrm{Pol}(R_6)$ tartalmaz ötváltozós többségi függvényt.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen

$$U = \{ \underline{x} \in (R_6)^5;\ \mathrm{card}(\{i \mid x_i \in \{1,A,B\}) \geq 3\}: \text{"felső ötösök"},$$
$$V = \{ \underline{x} \in (R_6)^5;\ \mathrm{card}(\{i \mid x_i \in \{0,a,b\}) \geq 3\}: \text{"alsó ötösök"}.$$

Világos, hogy $U \wedge V = \emptyset$ és $U \vee V = R_6$.

Definiáljuk a $d(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ függvényt ugy, hogy $d(\underline{x}): (R_6)^5 \to R^*$ és

$$d(\underline{x}) = \begin{cases} m_5, & \text{ha } \underline{x} \in U, \\ u_5, & \text{ha } \underline{x} \in V. \end{cases}$$

$d(\underline{x})$/$U \wedge V = \emptyset$ miatt/ jól definiált, és m_5, u_5 definiciója miatt nyilván többségi függvény. Először is belátjuk, hogy $d(x)$ valójában $(R_6)^5 \to R_6$ leképezés, azaz $Im(d) \subseteq R_6$. Legyen $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_5) \in U$. Ekkor legalább két összehasonlitható koordináta van $\underline{x}$-nek $\{1, A, B\}$-be eső koordinátái között, jelölje ezeket x_i, x_j és legyen $x_i \leq x_j$. Ekkor $x_i \wedge x_j = x_i$, s ezért $m_5(\underline{x}) \geq x_i$, azaz $d(x) \in U$. Hasonló érvelés mutatja, hogy ha $\underline{x} \in V$, akkor $d(\underline{x}) \in V$.

Bizonyitani kell még, hogy $d(x) \in Pol(R_6)$, azaz d monoton. Legyen $\underline{x}$, $\underline{y} \in (R_6)^5$, $\underline{x} \leq \underline{y}$ R_6 szerint.

Ha $\underline{x} \in V$, $\underline{y} \in U$, akkor $d(x) \in \{a,b,0\}$, $d(y) = \{A,B,1\}$ miatt $d(x) \leq d(y)$. Feltehető tahát, hogy $\underline{x} \in V$, $\underline{y} \in V$. /Az $\underline{x} \in U$, $\underline{y} \in U$ eset bizonyitása az alábbi "dualizálása", $\underline{x} \in U$, $\underline{y} \in V$ pedig nyilván lehetetlen/:

Miután $\underline{x} \leq \underline{y}$ /$(R_6)^5$ -ben/, $x \leq y$ $(R^*)^5$ -ben, és igy

$$d(\underline{x}) = u_5(\underline{x}) \leq u_5(\underline{y}) = d(\underline{y}),\ u_5 \text{ monotonitása}$$

miatt R^* -ban.

Láttuk, hogy $d(\underline{x}) \in R_6$, $d(\underline{y}) \in R_6$, s igy $d(x) \leq d(y)$ R_6-ban. Ezzel bizonyitottuk, hogy:

<u>2.9. tétel.</u> A $K=Pol(R_6)$ klón végesen generálható.

Mielőtt továbbmennénk az n-változós többségi függvények és a korlátos részbenrendezések kapcsolatának vizsgálatában, egy kis kitérőt kell tennünk. D. Lau, idézett cikkében, szintén bebizonyitotta, hogy $Pol(R_6)$ végesen generálható, és rendje 2. A bizonyitás konstruktiv, megad egy sor egyváltozós és néhány speciális kétváltozós függvényt, és hosszadalmas számolás eredményeként kijön, hogy a megadott függvények generálják $Pol(R_6)$-ot. A módszer - a kiinduló függvények erősen speciális választása miatt - D. Lau szerint sem látszik általánosithatónak, a bizonyitás sok helyen kihasználja, hogy éppen R_6-ról van szó.

A monoton osztályok rendjére vonatkozó becslést mi nem fogunk adni, viszont az n-változós többségi függvények keresésének módszere a korlátos részbenrendezéseknek a hálóknál jóval bővebb osztályára müködik.

Nézzük meg először, mennyire "öröklődik" a többváltozós függvény létezése algebrai konstrukcióknál:

Legyen R részbenrendezés, $f: R \longmapsto R$ monoton leképezés. Az $f(x)$ függvény <u>retrakció</u>, ha $f(f(x)) = f(x)$, azaz $x \in Im(f)$-re $f(x) = x$ teljesül.

<u>2.10. lemma.</u> Legyenek R_1, R_2 részbenrendezések /nem feltétlenül korlátosak/. Tegyük fel, hogy $Pol(R_1)$, ill. $Pol(R_2)$ tartalmaz n-, ill. m-változós többségi függvényt.

Ekkor:

i./ ha R' az R_1 retraktja, akkor $\mathrm{Pol}(R')$ is tartalmaz n-változós többségi függvényt,

ii./ $\mathrm{Pol}(R_1 \times R_2)$ tartalmaz $\max(m,n)$-változós többségi függvényt.

Bizonyitás.

i./ Jelölje Φ azt a retrakciót, amelyre $\mathrm{Im}(\Phi) = R'$, és $d_1(x_1,\dots,x_n)$ a $\mathrm{Pol}\ R_1$ -beli n-változós többségi függvényt. Legyen

$$d^*(x_1,\dots,x_n) = \Phi(d_1(x_1,\dots,x_n)).$$

Egyrészt világos, hogy $\mathrm{Im}(d^*) \subseteq R'$, másrészt ha

$$\underline{a} = (x,\dots,x,y,x,\dots,x),\ x \in R',\ y \in R', \text{ akkor}$$

$$d^*(\underline{a}) = \Phi(d_1(a)) = \Phi(x) = x.$$

d^* monoton, hiszen mind d, mind Φ monoton.

ii/ Feltehető, hogy $n \geq m$, azaz $\max(n,m) = n$. Először is definiáljuk a $d'(x_1,\dots,x_n)$ n-változós többségi függvényt, $\mathrm{Pol}(R_2)$-ben az m-változós $d_2(x_1,\dots,x_m) \in \mathrm{Pol}(R_2)$ segitségével: minden $(x_1,\dots,x_n) \in R_2^n$ -re legyen

$$d'(x_1,\dots,x_n) := d_2(x_1,\dots,x_m).$$

A definició nyilván korrekt, és d' monoton többségi függvény. Legyen a $d^{*}(\underline{x}):(R_1 \times R_2)^n \to (R_1 \times R_2)$ leképezés a

$$d^{*}((x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)) =$$
$$(d_1(x_1,\dots,x_n),\ d'(y_1,\dots,y_n))$$

egyenlőséggel definiálva, ahol $x_i \in R_1$, $y_i \in R_2$ $/1 \leq i \leq n/$.
d^{*} nyilván monoton leképezés, hiszen koordinátánként az, továbbá, ha

$$\underline{a} = ((x,y),(x,y),\dots,(u,v),\dots,(x,y)) \in (R_1 \times R_2)^n ,$$
$$d^{*}(\underline{a}) = (d_1(x,x,\dots,u,\dots,x),d'(y,y,\dots,v,\dots y)) = (x,y)$$

azaz d^{*} valóban többségi függvény.

Ezzel bizonyitottuk, hogy az olyan részbenrendezések halmaza, amelyek tartalmaznak /rögzitett n-re/ n-változós többségi függvényt, zárt a direkt szorzat képzésére és a retrakt-képzésre. Részbenrendezéseknek a fenti két müveletre zárt osztályát nevezzük /Rival és Duffus [27] nyomán/ rendezésvarietásnak..

<u>2.11. következmény.</u> Az előző lemma bizonyitásából adódik, hogy azok a részbenrendezések, melyek polimorfizmusai között van n-változós többségi függvény $/n \geq 3/$, rendezésvarietást alkotnak.

Ezáltal végesen generálható $\underline{M}$-tipusu maximális klónoknak máris egy nagy osztályát nyertük: tekintsük az összes hálók és az R_6 által generált rendezésvarietást. Ennek minden R eleme olyan, hogy Pol R tartalmaz ötváltozós többségi függvényt, következésképp végesen generálható.

A továbbiakban először megfogalmazunk és bizonyitunk egy szükséges feltételt arra vonatkozóan, hogy egy R korlátos részbenrendezés polimorfizmusai között legyen n-változós többségi függvény.

Az R egy H részhalmazát konvexnek nevezzük, ha $x \in H$, $y \in H$ maga után vonja, hogy minden $z \in R$, $x \leq z \leq y$-ra z is H-beli. Az $\{x_1,\dots,x_n\}$ halmazt antiláncnak nevezzük, ha $i \neq j$ esetén x_i nem összehasonlitható x_j-vel. Egy antilánc maximális, ha ujabb elemmel nem bővithető.

<u>2.12. tétel.</u> Legyen L véges háló, H konvex részhalmaza L-nek, $\{0,1\} \cap H = \emptyset$. Jelölje R az $L \setminus H$ korlátos részbenrendezést. Ekkor Pol(R) tartalmaz 2t+1-változós többségi függvényt, ahol t az L-beli antiláncok elemszámának maximuma.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen

$$A = \{x \in R;\ \exists\, y \in H \text{ ugy, hogy } x \leq y\},$$

$$B = R \setminus A .$$

Először is megjegyezzük, hogy ha $x \in A$, $z \in L$ és $z \leq x$, akkor $z \in A$. $x \in A$ miatt létezik ugyanis $y \in H$ ugy, hogy $x \leq y$, azaz $z \leq x \leq y$. Másrészt z nem lehet H-beli, hiszen H konvex, és igy $z \in H$-ból $x \in H$ következnék. Hasonlóan, ha $x \in B$, $z \in L$, $z \geq x$, akkor $z \in B$; valóban, z a H konvexitása miatt R-ben van és $z \in A$-ból $x \in A$ következnék.

Legyen $n=2t+1$, és definiáljuk - a 2.8 .tétel bizonyitásához hasonlóan - R^n egy (U,V) particióját:

$$U = \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{x} \text{ legalább } t+1 \text{ koordinátája B-beli}\},$$
$$V = \{\underline{x} \in R^n \mid \underline{x} \text{ legalább } t+1 \text{ koordinátája A-beli}\}.$$

Nyilván $U \cap V = \emptyset$ és $U \cup V = R^n$.

Definiáljuk a $d(\underline{x}): R^n \longrightarrow L$ függvényt: legyen

$$d(x) = \begin{cases} D_n(\underline{x}), \text{ ha } \underline{x} \in U, \\ d_n(\underline{x}), \text{ ha } \underline{x} \in V. \end{cases}$$

D_n, d_n a 2.15. lemmában szereplő függvények, azaz

$$D_n(\underline{x}) = u_n(\underline{x}) \cup m_n(\underline{x}),$$
$$d_n(\underline{x}) = u_n(\underline{x}) \cap m_n \underline{x}.$$

Először is: $Im(d) \subseteq R$. Legyen ugyanis $\underline{a} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, ekkor legalább t+1 koordinátája B-beli, ezek között található i,j indexpár ugy, hogy $x_i \leq x_j$. /n választása miatt van legalább két összehasonlitható elem a t+1 között./ Ekkor

$m_n(\underline{a}) \geq x_j$, s igy

$D_n(\underline{a}) \geq x_j$, tehát

$d(\underline{a}) = D_n(\underline{a}) \in B$. Hasonlóan, ha $\underline{a} = (x_1, \ldots, x_n) \in V$,

akkor $d(\underline{a}) = d_n(\underline{a}) \in A$.

$d(\underline{x})$ nyilvánvalóan többségi függvény; be kell még bizonyitani, hogy $d(\underline{x}) \in Pol\ R$.

Legyen $x \in R^n$, $y \in R^n$, $\underline{x} \leq \underline{y}$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Ha $\underline{x} \in U$, $\underline{y}$ nem lehet V-ben, ugyanis lenne legalább egy olyan i koordináta, melyre $x_i \in B$ és $y_i \in A$ teljesül, $x_i \leq y_i$ miatt pedig $x_i \in A$, ami ellentmondás.

Ha $\underline{x} \in V$, $\underline{y} \in U$, akkor $d(\underline{x}) = d_n(\underline{x})$ és $d(\underline{y}) = D_n(\underline{y})$, és a 2.7. lemma bizonyitásának végén tett megjegyzés értelmében $d_n(\underline{x}) \leq D_n(\underline{y})$.

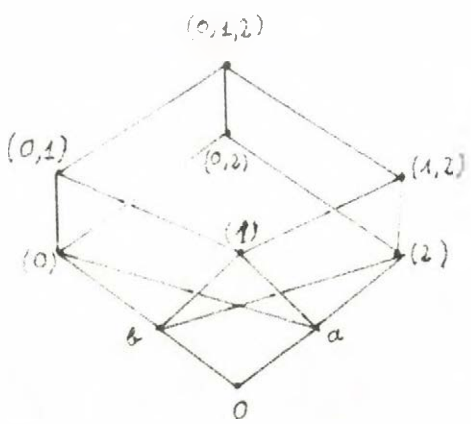
Az $\underline{x}, \underline{y} \in U$ és $\underline{x}, \underline{y} \in V$ esetek teljesen hasonlóan kezelhetők, egymás "duálisai". Ezért csak az $\underline{x}, \underline{y} \in U$ bizonyitást részletezzük:

$d(\underline{x}) = D_n(\underline{x})$, $d(\underline{y}) = D_n(\underline{y})$, a D_n maga monoton függvény, tehát:

$$d(\underline{x}) = D_n(\underline{x}) \leq D_n(\underline{y}) = d(\underline{y}) .$$

A többségi függvény változószámára adott n=2k+1 érték természetesen nem pontos. A fenti konstrukció jó pl. akkor, ha n=2m+1, ahol m az A és B halmazokban található antiláncok elemszámának maximuma.

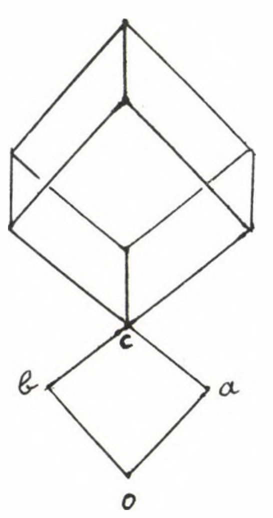
Láttuk, hogy pl. az R_6 korlátos részbenrendezés polimorfizmusai nem tartalmaznak négyváltozós többségi függvényt. A következőkben ezt a konstrukciót fogjuk általánositani. Legyen $m \geq 2$, és jelölje $H(\ell)$ az E_ℓ összes nem-üres részhalmazainak a tartalmazásra nézve részbenrendezett halmazát. Adjunk ehhez a halmazhoz három további elemet, a,b és O-t és terjesszük ki a $H(\ell)$ részbenrendezését ezekre az elemekre is, legyen $0 < a$, $0 < b$ és $a < x$, $b < x$ minden $x \in H(\ell)$ -re. Jelölje az igy keletkezett korlátos részbenrendezést $R(\ell)$. R nem háló, hiszen a-nak és b-nek nincs legkisebb felső korlátja. Speciálisan R(2) izomorf a már vizsgált R_6 részbenrendezéssel. R(3) szerkezetét a 2.4. ábra mutatja.



2.4. ábra

Vegyük most hozzá az R_ℓ részbenrendezett halmazhoz egy további c elemet ugy, hogy $a < c$, $b < c$ és $c < x$ teljesül minden $x \in H(\ell)$-re. Jelölje az igy keletkező korlátos részbenrendezést $R^*(\ell)$. $R^*(2)$ izomorf lesz a jól ismert R^* -gal. Könnyü belátni, hogy $R^*(\ell)$ háló: a c-nél nagyobb elemek halmaza és c együtt izomorf E_ℓ összes részhalmazainak hálójával, a $\{0,a,b,c\}$ az E_2 összes részhalmazainak hálójával, és ez a két háló ugy illeszkedik egymáshoz, hogy az első "0" eleme a második "1" eleme. $R^*(3)$ alakja a 2.5. ábrán látható.

A 2.13. tétel szerint $R(\ell)$ polimorfizmusai között van $2\binom{\ell}{\left[\frac{\ell}{2}\right]}+1$ -változós többségi függvény, ahol $\left[\frac{\ell}{2}\right]$ $\frac{\ell}{2}$ egészrészét jelöli. Ez az eredmény tovább élesithető.



2.5. ábra

<u>2.14. tétel.</u> $\mathrm{Pol}(R(\ell))$ tartalmaz $\ell+3$ -változós többségi függvényt.

<u>Bizonyitás.</u> A 2.13. tétel bizonyitásához hasonlóan legyen

$$A = \{0,a,b\},$$
$$B = H(\ell),$$

$n=\ell+3$, és

$$U = \{\underline{x} \in R(\ell)^n \mid \text{legalább k+1 koordináta B-beli}\},$$
$$V = \{\underline{x} \in R(\ell)^n \mid \text{legalább 3 koordináta A-beli}\}.$$

Most is világos, hogy $U \wedge V = \emptyset$ és $U \vee V = R(\ell)^n$. A $d(x_1,\dots,x_n)$ függvényt definiáljuk ugyanugy, mint a 2.13. tételben, az L háló szerepét $R^*(\ell)$ veszi át. Ugyancsak egyszerüen adódik, hogy

$$x \in B,\ y \in R^*(\ell),\ x \leq y \text{ esetén } y \in B \text{ és}$$
$$x \in A,\ y \in R^*(\ell),\ y \leq x \text{ esetén } y \in A\,.$$

Ha $\underline{x} \in U$, akkor legalább $\ell+1$ koordinátája B-beli. Ekkor van két különböző index, i és j ugy, hogy $x_i \wedge x_j$ szintén B-beli, hiszen $B = H(\ell)$, és egy ℓ-elemü halmaz összes részhalmazai közül nem lehet $\ell+1$ darabot kiválasztani, hogy bármelyik kettő metszete üres legyen. Igy tehát $m_n(\underline{x}) \in B$ /hiszen $m_n(\underline{x}) \geq x_i \wedge x_j$, $D_n(\underline{x}) \in B$, és ezért $d(\underline{x}) \in B$. Hasonlóan, ha $\underline{x} \in V$, akkor $d(\underline{x}) = d_n(\underline{x}) \in A$. Az, hogy

$d(\underline{x}) \in \mathrm{Pol}(R(\ell))$, hasonlóan adódik, mint a 2.19. tételben.

<u>2.15. lemma.</u> $\mathrm{Pol}(R(\ell))$ nem tartalmaz $\ell+2$ -változós többségi függvényt.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $Y_i = E_\ell \setminus \{i\}$, $/i=0,1,\dots,\ell-1/$.
Világos, hogy nincs olyan $z \in R(\ell)$, amelyre $a \leq z$, $b \leq z$ és $z \leq Y_i$ $/i=0,1,\dots,\ell-1/$ egyszerre teljesülne, hiszen $a \leq z$, $b \leq z$ miatt $z \in H(\ell)$, ugyanakkor $\bigcap_{i \in E_\ell} Y_i = \emptyset$.
Legyen $d(x_1,\dots,x_{\ell+2})$ többségi függvény, és legyen

$$z = d(\{0\}, \{1\}, \dots, \{\ell-1\}, a, b).$$

Tegyük fel, hogy $d \in \mathrm{Pol}(R(\ell))$. Az $a < \{i\}$, $b < \{i\}$ $/i \in E_\ell/$ egyenlőtlenségekből

$$z \geqslant d(a,\dots,a,a,b) = a \quad \text{és}$$

$$z \geqslant d(b,\dots,b,a,b) = b \quad \text{, az}$$

$\{i\} \leq Y_j$ $/i \neq j/$ egyenlőtlenségekből pedig

$$z \leq d(Y_i, Y_i, \dots, \{i\}, Y_i, \dots, Y_i) = Y_i \quad /i \in E_1/$$

következnék, ami ellentmondás.

Kombinálva a 2.14. tétel és a 2.15. lemma eredményeit, kapjuk az alábbi tételt:

<u>2.16. tétel.</u> Minden $n \geqslant 5$ egész számhoz konstruálható

olyan R korlátos részbenrendezés, amelyre Pol(R) tartalmaz n-változós többségi függvényt, de nem tartalmaz n-1 változós többségi függvényt.

Jelölje LH a 2.12. tételben megadott tipusu korlátos részbenrendezések osztályát, $V_f(LH)$ ennek lezárását a véges direkt szorzatra és retraktképzésre. Ha R korlátos részbenrendezés, jelölje t(R) a Pol(R)-ben található n-változós többségi függvények aritásának minimumát.

Az $\underline{M}$-tipusu maximális osztályok generátorrendszereire vonatkozó eredményeket - a 2.12. tétel, 2.10. lemma és 2.3. lemma állitásának összekapcsolásával, az alábbiakban foglalhatjuk össze.

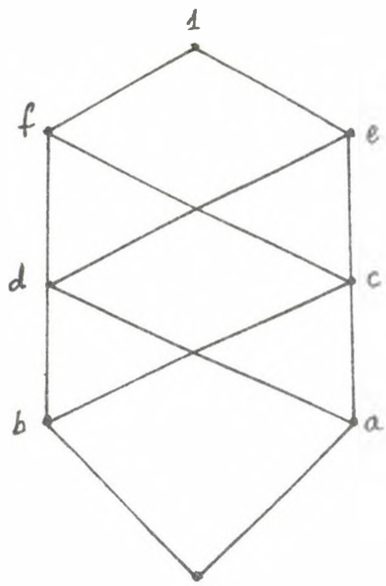
<u>2.17. tétel.</u> Ha az R korlátos részbenrendezésre teljesül az alábbi két feltétel bármelyike, akkor Pol(R) végesen generálható.

a./ R a $V_f(LH)$ osztályból való;

b./ R egy, a korlátos részbenrendezések olyan $\underline{R}$ osztálya által generált rendezés-varietásból való, amelyre megadható egy m $(3 \leq m < \infty)$ korlát ugy, hogy minden $R' \in \underline{R}$-re $t(R') \leq m$.

A 2.17. tételben nem irtuk fel az összes részbenrendezéseket. Azt, hogy van olyan korlátos részbenrendezés, melyre sem az a./ sem a b./ feltétel nem teljesül, ugy mutatjuk meg, hogy adunk egy példát olyan R korlátos részbenrendezésre, amelynek polimorfizmusai között nincs többségi függvény. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy $Pol(R_8)$ nem végesen generálható - csak annyit, hogy ezekkel az eszközökkel nem tudjuk bizonyitani, hogy az. Valójában nem tudjuk, hogy $Pol(R_8)$ végesen generálható-e.

<u>2.18. tétel.</u> A 2.5. ábrán látható R_8 részbenrendezésre $Pol(R_8)$ nem tartalmaz /semmilyen aritásu/ többségi függvényt.



2.5. ábra

<u>Bizonyitás.</u> Az állitással ellentétben tegyük fel, hogy a $d(x_1,\dots,x_n)$ többségi függvény $Pol(R_8)$-beli. Először

is, a $c \leq f$, $c \leq e$, $d \leq f$, $d \leq e$ egyenlőtlenségek miatt $\underline{x} \in (c,d)^n$ esetén

$$d(\underline{x}) \leq d(e,\dots,e)=e \text{ és}$$

$$d(\underline{x}) \leq d(f,\dots,f)=f \quad ,$$

továbbá $c \geq a$, $c \geq b$, $d \geq a$, $d \geq b$ miatt

$$d(\underline{x}) \geq d(a,\dots,a)=a \text{ és}$$

$$d(\underline{x}) \geq d(b,\dots,b)=b \quad ,$$

tehát $x \in \{c,d\}^n$ esetén $d(\underline{x}) \in \{c,d\}$.

Tekintsük az

$$\underline{x}^1 = (d,c,c,\dots,c) \, ,$$

$$\underline{x}^2 = (d,d,c,\dots,c) \, ,$$

$$\vdots$$

$$\underline{x}^{n-1} = (d,d,d,\dots,d,c)$$

vektorokat. Mivel $d(\underline{x}^1)=c$ és $d(\underline{x}^{n-1})=d$, létezik olyan j index, hogy $d(\underline{x}^j)= c$, és $d(\underline{x}^{j+1})=d$. Legyen

$$\underline{z} = (d,d,\dots,d,e,c,\dots,c) \, ,$$

$$\underline{u} = (f,f,\dots,f,e,f,\dots,f) \, ,$$

ahol az e a $j+1$-edik helyen áll. Egyrészt $\underline{z} \geq \underline{x}^j$ és $\underline{z} \geq \underline{x}^{j+1}$, ezért $d(\underline{z}) \geq d$ és $d(\underline{z}) \geq c$, másrészt $\underline{z} \leq \underline{u}$ és $\underline{z} \leq (e,e,\dots,e,e)$, ezért $d(\underline{z}) \leq f$ és $d(\underline{z}) \leq e$. Ez pedig nyilvánvaló ellentmondás, hiszen R_8 nem tartalmaz c, d és e,f közé eső elemet.

III. P_3 önduális osztályainak szerkezetéről

E fejezet célja az, hogy részletes leirást adjunk P_3 maximális önduális osztályának részklónjairól, pontosabban a részklónok egy nagy csoportjáról. Jelölje e fejezetben S az x+1 (mod 3) permutációval felcserélhető P_3-beli függvények halmazát, L_s pedig az S részklónhálóját. Bár S részklónhálójának itt adott leirása nem teljes abban az értelemben, hogy nem ismerjük minden klón helyét és bázisát, a háló néhány jellemző tulajdonsága és bizonyos intervallumai pontosan és hiánytalanul megadhatók.

Meg fogjuk határozni L_s összes atomját; duális atomját; az összes olyan klónokat, melyek L_s minden automorfizmusánál helyben maradnak; az összes olyan S-beli klónokat, melyek tartalmazzák a d(x,y,z) duális diszkriminátort, ill. a t(x,y,z) un. ternáris diszkriminátort /l. Fried-Pixley [29] és Pixley [46] /. Megadjuk az $(\ell_3(x,y,z),S)$ intervallum összes elemét.

A vizsgálat körébe vont klónoknak megadjuk egy-egy bázisát, és a klónok egymáshoz viszonyitott helyzetét az L_s hálóban. A fejezet logikailag három részre bontható: az első részben definiáljuk azokat az S-beli klónokat, amelyekkel foglalkozunk, és az L_s háló néhány tulajdonságát bizonyitjuk. A második részben minden klónhoz megadjuk annak egy bázisát, a harmadik részben pedig az egyes osztályok közötti tartalmazási relációkat.

E fejezetben gyakran fogunk beszélni E_3 egy adott részhalmazát őrző függvényekről. Ezt a kifejezést mindig abban az értelemben használjuk, hogy f megőrzi azt az egyváltozós centrális relációt, amelynek centruma a szóbanforgó részhalmaz: $f(x_1,\dots,x_n)$ H-őrző, /ahol $H\subset E_3$/, ha

$$(x_1,\dots,x_n)\in H^n \quad \text{esetén} \quad f(x_1,\dots,x_n)\in H.$$

Lineáris függvényen az

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o$$

alaku függvényt értjük. Az összeadás és szorzás mod 3 értendő az egész fejezet során.

L_s bizonyos elemeinek leirására a következő észrevétel ad lehetőséget: Legyen $f(x_1,\dots,x_n)\in S$ $\{0,1\}$-őrző függvény. Ekkor beszélhetünk az $f(x_1,\dots,x_n)$ ugynevezett Boole-megszoritásáról, amit $Bf(x_1,\dots,x_n)$-el jelölünk:

$$Bf(x_1,\dots,x_n)\in P_2 \quad \text{és}$$
$$Bf(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n), \text{ ha } (x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n$$

Ha $K\subseteq S$ olyan klón, amelynek függvényei mind $\{0,1\}$-őrzők, a $BK=\{Bf \mid f\in K\}$ függvényhalmaz - a K Boole-megszoritása - P_2 egy részklónja: a függvények Boole-megszoritásából előállitható P_2-beli klónok nyilván C_4 részklónjai.

Ha pedig $K \subseteq C_4 \subseteq P_2$, a

$$K' = \{ f \in S \mid Bf \in K \}$$

halmaz nyilván S egy részklónja. Sajnos, általában nem igaz az, hogy C_4 minden részklónjához csak egy olyan S-beli klón tartozik, melynek Boole-megszoritása K.

Ha $f \in S^{(1)}$, és értelme van Bf-ről beszélni, $Bf(x)=x$ és nyilván $f(x)=x$. Ha $f \in S^{(2)}$ és f nem projekció, de $\{0,1\}$-őrző, két lehetőségünk van: $Bf(x,y)=x \vee y$ ill. $Bf(x,y)=x \wedge y$; f mindkét esetben egyértelmüen meghatározott Bf által.

Ha viszont f legalább háromváltozós, az első fejezetben definiált $\ell_3(x,y,z)$ majdnem-projekció jól mutatja, hogy a Boole-megszoritás nem határozza meg a függvényt, hiszen $\ell_3(x,y,z) \neq \ell_3(x,z,y)$, de $B\ell_3(x,y,z) = B\ell_3(x,z,y) = x$. Mivel az $f(x) = x$ P_3-beli függvény Boole-megszoritása is x, a $K_1 = [\{x\}] \subseteq P_3$ és $K_2 = [\ell_3(x,y,z)] \subseteq P_3$ klónokra $BK_1 = BK_2$, de $K_1 \neq K_2$. Az $f(x)=x$ és $\ell_3(x,y,z)$ függvények mutatják azt, hogy a Boole-megszoritás a függvény aritását nem határozza meg.

Először is nevezzük el S bizonyos részklónjait:

3.1. Legyen

$$O = [\{x\}]$$

$$L = [\{f \mid f \in S \text{ és } f \text{ lineáris}\}]$$

$$L_1 = [\{f \mid f \in L \text{ és } f \text{ 0-őrző}\}]$$

$$L_2 = [\{x,\ x+1,\ x+2\}]$$

$$S_0 = [\{f \mid f \in S \text{ és } f \text{ 0-őrző}\}]$$

$$S_2 = [\{f \mid f \in S \text{ és } f \text{ felcserélhető a } \pi(x) = 2x \text{ permutációval}\}]$$

A fentiek olyan klónok, melyek függvényei nem mind őrzik meg a $\{0,1\}$ halmazt. Vezessük be az S, S^*, S_2, $R: L_2 \to L_S$ leképezéseket.

3.2. Legyen $K \subseteq P_2$ egy a

C_4, A_4, D_1, D_2, L_4, O_1,

F_5^2, F_5^3, ..., F_5^∞ ,

F_6^2, F_6^3, ..., F_6^∞ ,

F_1^2, F_1^3, ... F_1^∞ ,

F_2^2, F_2^3, ..., F_2^∞ , P_1, S_1

klónok közül. Jelölje SK azt az S-beli klónt, melyre

$$SK = \{ f \in S \mid f \text{ őrzi a } \{0,1\} \text{-et és } Bf \in K \}.$$

3.3. Ha $K \subseteq P_2$, $K \in D_1, D_2, L_4, O_1$, legyen

$$S_2K = \{ f \mid f \text{ őrzi a } \{0,1\}\text{-et, } f \in S_2 \text{ és } Bf \in K \}.$$

3.4. Ha SK, (S_2K) az SD_2, S_2D_2, SF_2^2, SF_2^3, ..., SF_2 , SS_1, SF_6^2, SF_6^3, ... SF_6^∞, SP_1 klónok valamelyike, akkor jelölje S^*K, (S_2^*K) az összes olyan $f(x_1,\dots,x_n) \in SK$ (S_2K) függvényt, melyre igaz, hogy:

(x) ha $f(x_1,\dots,x_n)$ néhány változó azonositásával olyan $g(x_{p_1},\dots,x_{p_m})$ függvénybe megy át, melyre $Bg(x_{p_1},\dots,x_{p_m}) = x_{p_i}$, akkor $g(x_{p_1},\dots,x_{p_m}) = x_{p_i}$.

Erre a tulajdonságra később is mint a (x) tulajdonságra hivatkozunk majd.

3.5. Ha pedig $K=S_1$ vagy $K=P_1$, legyen

$RK = \{f \mid f$ őrzi a $\{0,1\}$-et, $Bf \in K$ és f és Bf a változóknak azonos halmazától függ lényegesen $\}$

A 3.1. - 3.5.-ben megadott klónok bázisait és egymáshoz való viszonyát fogjuk leirni. A 3.1., 3.2. és 3.3. alatt definiált függvényhalmazok nyilvánvalóan zárt halmazok. Miután L_1 összes függvényei

$f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2+\dots,a_nx_n$ alakuak, és $\sum a_i(2x_i) = 2(\sum a_ix_i)$, ezért L_1 minden függvénye felcserélhető a $\pi(x)=2x$ permutációval, tehát $L_1 \subseteq S_2$.

Az S_2 minden függvénye felcserélhető az $x+1$ és a $2x$ permutációval, következésképpen E_3 minden permutációjával, azaz S_2 a háromelemü halmaz homogén függvényeinek osztálya. Nyilvánvaló, hogy S_2 elemei 0-őrzők, tehát $S_2 \subseteq S_0$. Azt kell megmutatnunk, hogy a 3.4. és 3.5. alatt definiált függvényhalmazok valóban zárt osztályok.

A P_2-ben érvényes dualitás miatt nyilván elegendő az $S^* F_2^2$, $S^*F_2^3,\dots,S^*F_2^\infty$, S^*S_1, S^*D_2, $S_2^*D_2$ halmazokra szoritkozni. Legyen K a fenti függvényhalmazok egyike, $f_o,\dots,f_m \in S^{*}K$ és

$$f(x_1,\dots,x_n) = f_o(f_1(x_1,\dots,x_n), f_2(x_1,\dots,x_n),\dots, f_m(x_1,\dots,x_n)) .$$

Világos, hogy $Bf \in K$, csak azt kell megmutatnunk, hogy a $(*)$ tulajdonság is teljesül f-re. Ennek bizonyitása kissé hosszadalmas, de nem nehéz; itt terjedelmi okokból nem részletezzük. /Megtalálható a [24] dolgozatban./ Az RS_1 és RP_1 osztályok zártságának igazolása azon az észrevételen mulik, hogy ha f_o, $f_1,\dots,f_m$ S_1 /ill. P_1/-beli függvények, akkor az $f_o(f_1,\dots,f_m)$ lényeges változóinak halmaza egyesitése az f_o, $f_1,\dots,f_m$ lényeges változói halmazának.

Tekintsük a $\pi : E_3 \to E_3$, $\pi(x) = 2x+1$ permutációt. Feleltessük meg az $f(x_1,\dots,x_n) \in S$ függvénynek a

$$\pi(f(\pi(x_1),\dots,\pi(x_n))) = 2f((2x_1+1),\dots,(2x_n+1)) + 1$$

függvényt. Mivel

$$2(f(2(x_1+1)+1),\dots,(2(x+1)+1)) + 1 =$$
$$2(f(2x_1,\dots,2x_n)) + 1 =$$
$$2(f((2x_1+1),\dots,(2x_n+1)) -2+1 =$$
$$2(f((2x_1+1),\dots,(2x_n+1))+1)+1 ,$$

ez a megfeleltetés /az E_3 elemeinek ez a permutációja/ S-beli függvényt S-beli függvénybe visz át, Ennél a megfeleltetésnél az SF_1^μ és SF_5^μ $/\mu=2,3,\ldots,\infty$ /, az SF_2^μ és SF_6^μ , SS_1 és SP_1, S^*S_1 és S^*P_1, RS_1 és RP_1 ill. S^*F_2 és $S^*F_6^\mu$ osztályok lesznek rendre páronként egymás képei. /Ez közvetlenül következik a definiciókból és abból, hogy 2x+1 a Boole-megszoritásokon pontosan az L_2 hálónak a (0,1) permutáció által indukált automorfizmusát eredményezi./

A 2x+1 permutáció - mint láttuk - az L_s háló egy automorfizmusát indukálja. Az S, L, S_1, S_2, SC_4, SA_4, SD_1, SD_2, S^*D_2, S_2D_1, SL_4, SO_1, S_2D_2, $S_2^*D_2$, S_2L_4, S_2O_2, L_1, L_2, O osztályok ennek az automorfizmusnak fixpontjai. /Hiszen Boole-megszoritásuk a (0 1) permutáció által L_2-n indukált automorfizmusnak szintén fixpontjai, az S, S_2 operátorok és a(*) tulajdonság pedig függetlenek az alaphalmaz elemeinek fenti permutációjától./

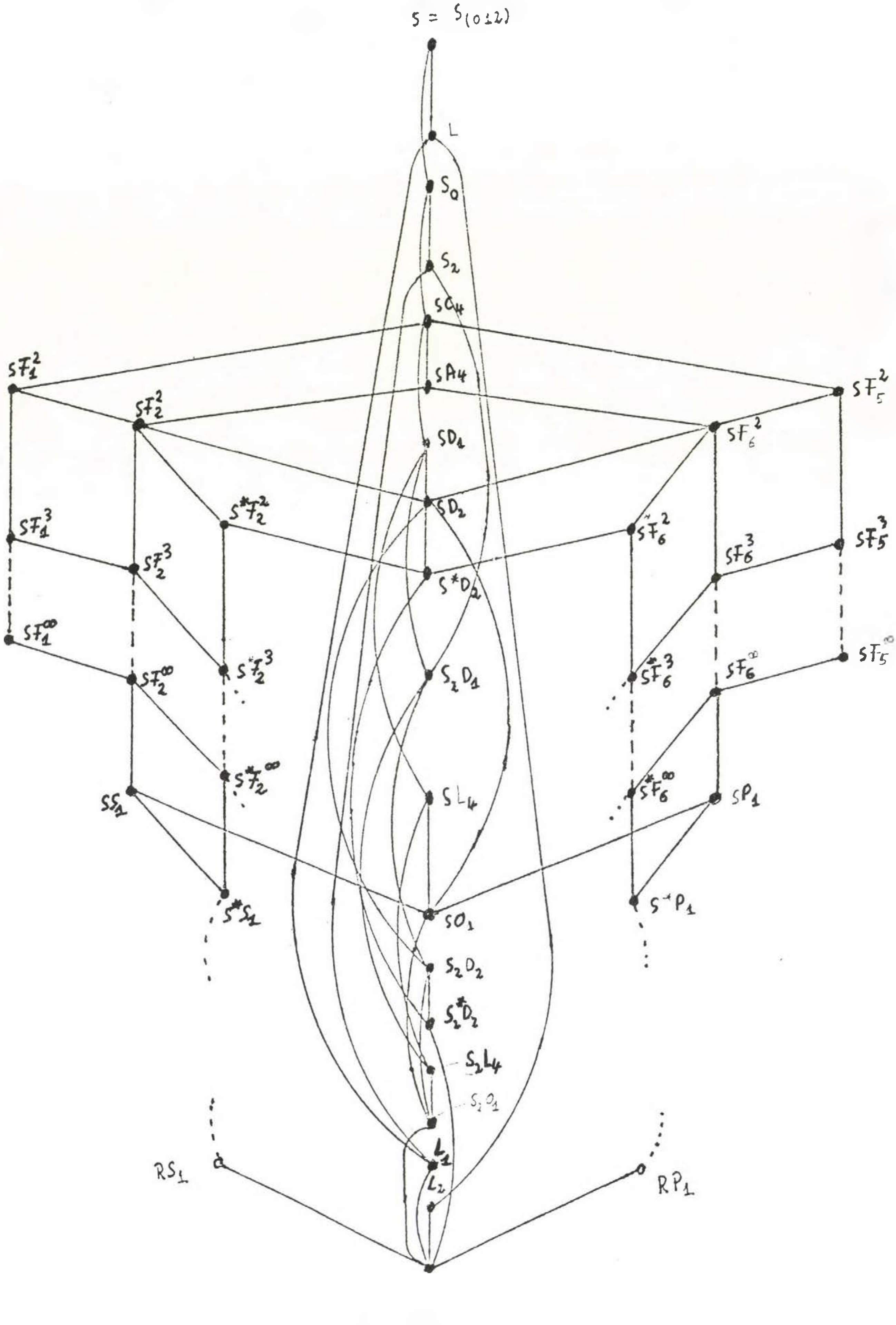
A későbbiekben látni fogjuk, hogy a fent felsorolt osztályok kimeritik az L_s háló fenti automorfizmusa fixpontjainak halmazát.

Az L, S_1, S_2 osztályokról eddig elmondottak, továbbá a klónok Boole-megszoritásainak tartalmazási viszonyai, melyeket P_2 szerkezetéből jól ismerünk, valamint az a tény, hogy ha $K \subseteq P_2$ klónra mind SK, mind S^*K

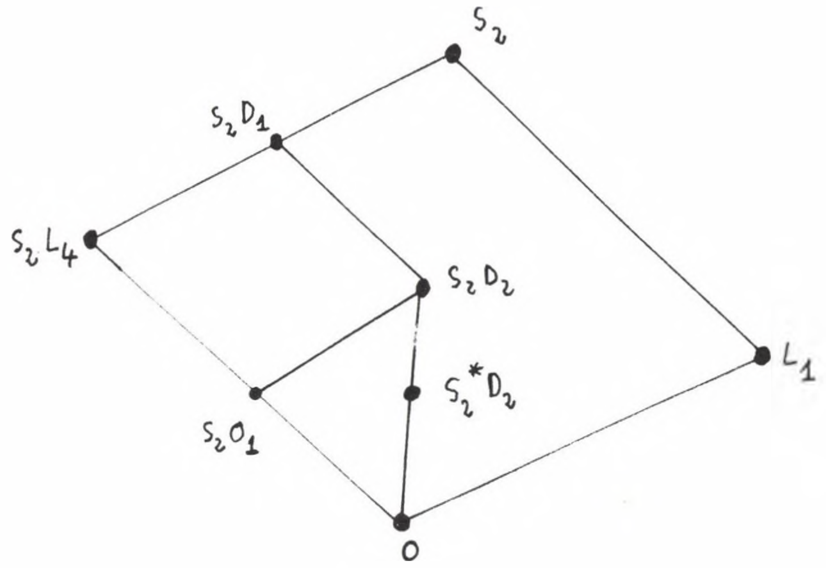
definiálva volt, akkor $S^{*}K \subseteq SK$, lehetővé teszik, hogy egy diagramon ábrázoljuk a definiált osztályokat /3.1. ábra/. Az ábrán két klón között rajzolt vonal e pillanatban csak annyit jelent, hogy a följebb rajzolt tartalmazza a másikat. Még hátra van annak bizonyitása, hogy a diagram teljes, abban az értelemben, hogy két folytonos vonallal összekötött klón közé nem lehet beiktatni mindkettőtől különböző harmadikat. Mielőtt ebbe belefognánk, meghatározzuk a felsorolt klónok egy-egy bázisát.

S részklónjainak bázisai

S.S. Marcsenkov [43]-ban leirta S összes homogén részosztályának szerkezetét és bázisait. Mint azt láttuk, S homogén részklónjai pontosan S_2 részosztályai, azaz az S_2, S_2D_1, S_2D_2, $S_2^{*}D_2$, S_2L_4, S_2O_1, L_1, O. Tartalmazási viszonyaikat a 3.2. ábra mutatja, bázisaikat szintén a [43] munkából idézzük.


S = S(012)
L
S0
S2
SC4
SA4
SD1
SD2
S*D2
S2D1
SL4
SO1
S2D2
S2*D2
S2L4
S2O1
L1
L2
SF1^2
SF1^3
SF1^∞
SF2^2
SF2^3
SF2^∞
S*F2^2
S*F2^3
S*F2^∞
SS1
S*S1
RS1
SF5^2
SF5^3
SF5^∞
SF6^2
SF6^3
SF6^∞
S*F6^2
S*F6^3
S*F6^∞
SP1
S*P1
RP1

3.1. ábra



3.2. ábra

Legyenek $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $\gamma(x,y,z)$ $\{0,1\}$-őrző S-beli függvények ugy, hogy

$$B\,\varphi(x,y,z)=x,\ \varphi(0,1,2)=1,\ \varphi(0,2,1)=2\ ,$$
$$B\,\psi(x,y,z)=xy\vee yz\vee xz,\ \psi(0,1,2)=\psi(0,2,1)=0\ ,$$
$$B\,\gamma(x,y,z)=x+y+z\ /\mathrm{mod}\ 2/,\ \gamma(0,1,2)=\gamma(0,2,1)=0\ .$$

A φ,ψ,γ függvények jól definiáltak. Marcsenkov [43]-ban megmutatta, hogy

3.1. lemma.

$\{\psi(x,y,z),\ 2x+2y\}$ bázisa S_2-nek,
$\{\psi(x,y,z),\ \gamma(x,y,z)\}$ bázisa S_2D_1-nek,
$\{\varphi(x,y,z),\ \psi(x,y,z)\}$ bázisa S_2D_2-nek,
$\{\psi(x,y,z)\}$ bázisa $S_2^*D_2$-nek,
$\{\gamma(x,y,z)\}$ bázisa S_2L_4-nek,
$\{\varphi(x,y,z)\}$ bázisa S_2O_1-nek,
$\{2x+2y\}$ bázisa L_1-nek.

Az O bázisa természetesen $\{x\}$, rendje 1.

Az L_1 rendje 2, S_2, S_2D_1, S_2D_2, $S_2^*D_2$, S_2L_4, S_2O_1 rendje 3.

Az L_2 hálónak fentebb leirt szimmetriája miatt csak az

SA_4, SD_1, SD_2, S^*D_2, SL_4, SO_1, L_2, SS_1, S^*S_1, RS_1 ill.

SF_1^{μ}, SF_2^{μ}, $S^*F_2^{\mu}$ / $\mu=2,3,\dots,\infty$ / osztályokkal kell foglalkoznunk. Triviálisan adódik a következő állitás:

<u>3.2. lemma.</u> Az L_2 osztály bázisa $\{x+1\}$, rendje 1.

Jelölje $\omega_{ab}(x,y,z)$ azt a függvényt, melyre $\omega_{ab}\in S$,

$$B\omega_{ab}(x,y,z)= x,$$
$$\omega_{ab}(0,1,2)=a,$$
$$\omega_{ab}(0,2,1)=b,\ (a,b\in E_3).$$

<u>3.3. lemma.</u> $\omega_{01}(x,y,z)$ bázisa SO_1-nek. SO_1 rendje 3.

<u>Bizonyitás.</u> Világos, hogy $\omega_{01}(x,y,z)\in SO_1$.

$\omega_{01}(x,y,z)$-ből nyerhetők a következő függvények:

$$\omega_{11}(x,y,z)=\omega_{01}(\omega_{01}(x,y,z),\omega_{01}(y,x,z),\ y)$$
$$\omega_{12}(x,y,z)=\omega_{01}(\omega_{11}(x,y,z),\omega_{01}(y,x,z),\ y)$$
$$\omega_{20}(x,y,z)=\omega_{11}(\omega_{12}(x,y,z),\ z,x)$$
$$\omega_{22}(x,y,z)=\omega_{11}(\omega_{12}(x,y,z),\ z,\omega_{01}(x,y,z).$$

Legyen $f(x_1,\ldots,x_n) \in SO_1$, $Bf(x_1,\ldots,x_n) = x_1$. Mivel $n \leq 2$-re $f(x_1,x_2) = x_1$ adódnék, feltehető, hogy $n \geq 3$. Ebből következik, hogy rend $(SO_1) = 3$.

Mivel $\omega_{12}(x,z,y) = \varphi(x,y,z)$,

$$[\omega_{12}(x,y,z)] = S_2O_1,$$

azaz megkapunk minden olyan $f_0(x_1,\ldots,x_n)$ függvényt, amelyre

$$Bf_0(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \quad \text{és} \quad \underline{a} \in (E_3)^n,\ \underline{a} = (a_1,\ldots,a_n),$$

$a_1 = 0$, $\{a_2,\ldots,a_n\} \supseteq \{1,2\}$ esetén

$$2f_0(a_1,\ldots,a_n) = f_0(2a_1,\ldots,2a_n) \text{ /Marcsenkov [43]/ .}$$

Jelöljük A_n-nel a továbbiakban mindig az olyan $(a_1,\ldots,a_n) \in (E_3)^n$ vektorok halmazát, melyre: $a_1 = 0$, $\{a_2,\ldots,a_n\} \supseteq \{1,2\}$.

Legyen f_1 olyan függvény, melyre:

$$Bf_1(x_1,\ldots,x_n) = x_1, \text{ és } a \in A_n \text{-re:}$$

$$f_1(\underline{a}) = \begin{cases} f(\underline{a}), & \text{feltéve, hogy } f(2a) = 2f(a) = 2f, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Válasszunk h_1 és h_2 függvényeket S_2O_1-ből ugy, hogy minden $\underline{a} \in A_n$-re,

ha $f(\underline{a}) = 0$, $f(2\underline{a}) = 1$, legyen $h_1(\underline{a}) = 1$, $h_2(\underline{a}) = 2$,

ha $f(\underline{a}) = 1$, $f(2\underline{a}) = 0$, legyen $h_1(\underline{a}) = 2$, $h_2(\underline{a}) = 1$,

és $h_1(\underline{a}) = h_2(\underline{a}) = 0$, ha $(f(\underline{a}), f(2\underline{a})) \in \{(0,0),(1,2),(2,1)\}$.

Az

$$f_2(x_1,\ldots,x_n) = \omega_{01}(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ h_1(x_1,\ldots,x_n),\ h_2(x_1,\ldots,x_n))$$

egyenlőséggel definiált $f_2(x_1,\dots,x_n)$ megegyezik $f(x_1,\dots,x_n)$-nel minden olyan $\underline{a}\in A_n$ vektoron, melyre:

$$(f(\underline{a}),\ f(2\underline{a}))\in\{(0,0),(1,2),(2,1),(1,0),(0,1)\}.$$

A többi $\underline{a}\in A_n$ vektoron $f_2(\underline{a})=0$.

Legyen h_3, h_4 két olyan függvény S_2O_1-ből, melyre $\underline{a}\in A_n$ esetén

$$h_3(\underline{a})=1,\ h_4(\underline{a})=2, \text{ ha } f(\underline{a})=1 \text{ és } f(2\underline{a})=1,$$
$$h_3(\underline{a})=h_4(\underline{a})=0, \text{ egyébként.}$$

Az

$$f_3(x_1,\dots,x_n)=\omega_{11}(f_2(x_1,\dots,x_n),\ h_3(x_1,\dots,x_n),h_4(x_1,\dots,x_n))$$

megegyezik $f(x_1,\dots,x_n)$-nel az A_n összes olyan $\underline{a}$ elémén melyre

$$(f(\underline{a}),f(2\underline{a}))\in\{(0,0),(1,2),(2,1),(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

A konstrukciót még két lépésben iterálva olyan f_5 függvényhez jutunk, melyre:

$$f_5(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n).$$

A 3.3. lemma bizonyitása során tulajdonképpen azt kellett csinálni, hogy olyan $f(x_1,\dots,x_n)$-t konstruáljunk, amelyre $Bf(\underline{x})=x_1$ és $f(x_1,\dots,x_n)$ az A_n halmaz minden egyes elemére előre adva van.

Mielőtt továbbmennénk, megfogalmazunk egy lemmát, ami a későbbi bizonyitásokban nagyon hasznos lesz. Az állitás némi számolással könnyen igazolható. A "komponensek szuperpoziciójáról" szóló tételt /l. pl. [36], Th.2./ fogalmazzuk csak át, az S-beli függvények önduális tulajdonságát kihasználva.

3.4. lemma. Legyen $f(x_1,\dots,x_n)\in S$, $B\subseteq(E_3)^{n-1}$ rögzitett halmaz. Jelölje $f_j^o(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$ az f függvény j-edik komponensét, /j-edik O-komponensét/ melyre

$$f_j(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)= f(x_1,\dots,x_{j-1},0,x_{j+1},\dots,x_n).$$

Tegyük fel, hogy $\{h_1,\dots,h_m\}\subseteq S$ olyan függvényrendszer, melyre $[\{h_{1_j}^{\circ},\dots,h_{m_j}^{\circ}\}]$ tartalmaz egy $H^o(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1}\dots,x_n)$ függvényt ugy, hogy

$$H^o(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)=f_j^o(x_1\ ,\dots,x_{j-1},x_{j+1}\dots,x_n)$$

teljesül mindig, valahányszor $(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)\in B$.

Ekkor a $[\{h_1,\dots,h_m\}]$ tartalmaz olyan $H(x_1,\dots,x_n)$ -t melyre

$$f(x_1,\dots,x_n)=H(x_1,\dots,x_n),\ \text{ha } x_j=0 \text{ és}$$

$$(x_1,\dots,x_{j-1},\ x_{j+1},\dots,x_n)\in B.$$

A 3.4. lemmának nyilvánvaló következménye, hogy ha $B=(E_3)^{n-1}$ és a lemma feltételei teljesülnek, akkor

$$f(x_1,\dots,x_n)= H(x_1,\dots,x_n).$$

hiszen mindkét függvény S-ből való, ezért j-edik komponensük egyértelmüen meghatározza őket.

Az $f \in S$ függvény első komponensét, ha ez nem félreérthető, f^o-lal fogjuk jelölni. A_n jelöli továbbra is $(E_3)^n$-nek a 3.3.-ban definiált

$$A_n = \{(a_1,\dots,a_n) \mid a_1=0 \text{ és } \{a_2,\dots,a_n\} \supseteq \{1,2\}\}$$

részhalmazát.

<u>3.5. lemma.</u> Legyen K a C_4, A_4, D_1, D_2, L_4, F_1^{μ}, F_2^{μ} $/\mu=2,\dots,\infty/$, S_1 klónok valamelyike, $\{g_1,\dots,g_m\}$ a K egy generátorrendszere, $\{h_1,\dots,h_m\} \subseteq SK$ ugy, hogy $Bh_i=g_i$ $/i=1,\dots,m/$. Ekkor $\{h_1,\dots,h_m\} \cup \omega_{01}$ az SK klón generátorrendszere.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $f(x_1,\dots,x_n)$ tetszőleges függvény SK-ból. Mivel $\{g_1,\dots,g_m\}$ generálja K-t, elő lehet állitani olyan $f_o(x_1,\dots,x_n)$ függvényt a $\{h_1,\dots,h_m\}$ rendszer segitségével, melyre:

$$Bf_o(x_1,\dots,x_n)=Bf(x_1,\dots,x_n).$$

Az $\omega_{c1}(x,y,z)$ segitségével pedig - mint a 3.3. lemmában láttuk, előállitható minden olyan $f_j(x_1,\dots,x_n) \in S_2O_1$, melyre

$$Bf_j(x_1,\dots,x_n)=x_j, \text{ és minden } \underline{a} \in A_n\text{-re } f_j(\underline{a})=f(\underline{a}).$$

Az

$$f_o(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n))=f(x_1,\dots,x_n)$$

azonosság ezek után triviális következménye annak a ténynek, hogy K-t a P_2 $\{0\}$-őrző klónjai közül választottuk.

<u>3.6. Következmény.</u> Az SC_4, SD_1, SD_2, SL_4, SF_1^∞, SF_2^∞, SS_1 osztályok rendje 3. Az SA_4 osztály rendje 2, az SF_1^μ, SF_2^μ osztályok rendje $\mu+1$ / $\mu=2,3,\ldots,$ /.

<u>Bizonyitás.</u> A 3.5. lemma szerint, ha SK a fenti osztályok valamelyike,

$$\max(\mathrm{rend}(K),3) \geqslant \mathrm{rend}(SK) \geqslant \mathrm{rend}(K).$$

Innen adódik az állitás az SC_4, SD_1, SD_2, SL_4, SF_1^μ, SF_2^μ /$\mu=2,3,\ldots,\infty$/ osztályokra. /A felsorolt klónok Boole-megszoritásainak rendje $\geqslant 3$, l. pl. [36]-ban./

Legyen $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ olyan függvény, melyre

$$B\alpha = x \vee y, \quad B\beta = x \cdot y.$$

Ekkor $\{B\alpha, B\beta\}$ az A_4 egy bázisa, és

$$\omega_{0\alpha}(x,y,z)=\alpha(x, \beta(z, \beta(x,y)))$$

azért

$$SA_4=[\alpha(x,y), \beta(x,y)],$$

tehát SA_4 rendje 2. $\{\alpha(x,y), \omega_{0\alpha}(x,y,z)\}$ generálja SS_1-et.

Tetszőleges kétváltozós $f(x,y) \in SS_1$ függvényre igaz, hogy

$$Bf(x,y) \in \{x, y, x \vee y\}.$$

Ha $Bf(x,y)=x$, akkor /f öndualitása miatt/ $f(x,y)=x$, és hasonlóan, ha $Bf(x,y)=y$, akkor $f(x,y)=y$.

Ha pedig $Bf(x,y) = x \vee y$, akkor $f(x,y)=\alpha(x,y)$, tehát ha SS_1 rendje 2 lenne, az $\alpha(x,y)$ függvény volna a bázisa. Ez pedig lehetetlen, hiszen ha $V(x_1,\ldots,x_n)$ egy olyan formula, amely az $\alpha(x,y)$ függvényekből és az $x_1,\dots,x_n$ szimbólumokból épül fel, könnyen ellenőrizhető, hogy V pontosan azoktól a változóitól függ lényegesen, melyektől BV is. Igy pl. az $\omega_{01}(x,y,z)\notin[\alpha(x,y)]$.

Legyen $\tau(x,y,z)\in S$ olyan függvény, mely őrzi a $\{0,1\}$-et és $B\tau(x,y,z)=xy\vee xz\vee yz$, $\tau(0,1,2)=0$, $\tau(0,2,1)=1$.

<u>3.7. lemma.</u> A $\tau(x,y,z)$ az $S^{*}D_2$ bázisa. $S^{*}D_2$ rendje 3.

<u>Bizonyitás.</u> A fentebb definiált $\psi(x,y,z)$ függvényre

$$\psi(x,y,z)=\tau(x,\tau(x,y,z)\ ,\ \tau(x,z,y))$$

ahonnan nyerjük, hogy $S_2^{*}D_2\subseteq[\tau]$.

Elegendő megmutatni, hogy $[\tau]$ tartalmaz olyan $d(x,y,u,v)$ függvényt, melyre

(1) $$d(0,1,2,u,v)=u,\quad d(0,2,1,u,v)=v.$$

Ekkor ugyanis $S_2^{*}D_2\subseteq[\tau]$ miatt rendelkezésünkre állnak tetszőleges olyan függvények, melyekre

$$Bg\in[B\tau]\quad \text{és}\quad \underline{a}\in A_n\quad \text{esetén}$$

$$2g(\underline{a})=g(2\underline{a})\ /\text{l. Marcsenkov [43]}\ /.$$

Találhatunk tehát olyan f_1,f_2,f_3,f_4 függvényeket, hogy

$$Bf=Bf_1=Bf_2=Bf_3$$

és $\underline{a}\in A_n$ esetén

$$f_1(\underline{a})=f_2(2\underline{a})=1,\ f_1(2\underline{a})=f_2(\underline{a})=2,$$

$$f_3(\underline{a})=f(\underline{a})\ ,\ f_4(2\underline{a})=f(2\underline{a}),\ \text{s ezekből}$$

$$f(x_1,\dots,x_n)=d(x_1,f_1(x_1,\dots,x_n),\ f_2(x_1,\dots,x_n),$$
$$f_3(x_1,\dots,x_n),\ f_4(x_1,\dots,x_n)).$$

Meg kell tehát mutatni, hogy $[\tau]$-ban van (1) tulajdonságu függvény:

Legyen $a\in\{1,2\}$, $g'_a(x,y,z,u)$ a következő függvény $S_2^{*}D_2$-ből:

$$Bg'_a(x,y,z,u)=xy\vee xz\vee yz\ ,$$

$$g'_a(0,1,2,a)=a,g'_a(0,2,1,2a)=2a,$$

$$g'_a(x,y,z,u)=0 \text{ egyébként, ha } (x,y,z,u)\in A_4$$

A

$$g_1(x,y,z,u)=\ \tau(x,z,g'_1(x,y,z,u))\ ,\text{ ill.}$$

$$g_2(x,y,z,u)=\tau(\tau(x,z,y),\ x,g'_2(x,y,z,u))$$

olyan függvények, hogy

$$g_a(0,1,2,a)=a \text{ és}$$

$$g_a(x,y,z,a)=0,\text{ ha}(x,y,z,u)\in A_4,(x,y,z,u)\neq(0,1,2,a).$$

Hasonlóan konstruálhatók a $h_a(x,y,z,v)$ függvények, melyekre

$$h_a(0,2,1,a)=a \quad \text{és } h_a(x,y,z,v)=0,\text{ ha}$$
$$(x,y,z,v)\in A_4 \text{ és } (x,y,z,v)\neq(0,1,2,a).$$

Legyenek

$$d_1(x,y,z,u,v)=\tau(g_1(x,y,z,u),y,h_1(x,y,z,v))\ ,$$
$$d_2(x,y,z,u,v)=\tau(g_2(x,y,z,u),\ h_2(x,y,z,v),y).$$

Könnyü számolás igazolja, hogy

$$d(x,y,z,u,v)=\tau(d_1(x,y,z,u,v),\tau(x,y,z),d_2(x,y,z,u,v))$$

a megkivánt tulajdonságu függvény.

Az $S^{*}D_2$ rendje nem lehet kevesebb, mint D_2 rendje. Ezzel a lemma mindkét állitását igazoltuk.

<u>3.8. lemma.</u> Az $\{\alpha(x,y), 2x+2y\}$ az S_0 osztály bázisa.
S_0 rendje 2.

Ha $f(x_1,\ldots,x_n)$ S , akkor f_j^0 0-őrző függvény, minden $j\in\{1,2,\ldots,n\}$-re. Másfelől, ha az $f(x_1,\ldots,x_n)\in S$ minden 0-komponense 0-őrző, akkor $f\in S_0$. Jelölje T_0 az összes 0-őrző függvények halmazát P_3-ban.

Az $x+y$, $x\cdot y$ függvények bázisa T_0-nak, tehát minden S_0-beli $f(x_1,\ldots,x_n)$ függvény minden komponense előállitható $\{x+y, x\cdot y\}$ segitségével. A 3.4. lemma szerint elég tehát megkeresni azokat az S_0-beli függvényeket, melyek 0-komponenseiként az $x+y$, $x\cdot y$ függvények megkaphatók:

$$2x+2(2y+2z) = 2x+y+z$$

első 0-komponense adja az $x+y$ függvényt. Az

$$\alpha(x,y) = 2(x^2+xy+y^2+x+y)$$

függvényből pedig az

$$\alpha(x,y) + 2\alpha(y,z) + \alpha(x,z) = x^2+2xy+2xz+x+yz$$

függvény első 0-komponenseként az yz függvényt állithatjuk elő. Mivel a $2x+2y$ L_1-beli, a $\alpha(x,y)$ RS-beli, $\{2x+2y, x,y\}$ valóban bázisa is S -nek.

A következő állitás egyszerüen adódik abból a tényből, hogy a $\{2x+2y\}$ az L_1 osztály bázisa /l. még Demetrovics-Bagyinszki[14]/.

<u>3.9. lemma.</u> Az L osztály bázisa a $2x+2y+1$ függvény. L rendje 2.

<u>3.10. lemma.</u> Az $\{x+1,\ \alpha(x,y)\}$ rendszer bázisa S-nek. S rendje 2.

A 3.3. lemma szerint, elég megmutatni, hogy a fenti függvények szuperpozicióinak O-komponenseiből előállitható pl. az $\{x+1,\ \max(x,y)\}$ rendszer.

Ha $g(x,y,z)$ olyan függvény, melynek első O-komponense $g_1^o=\max(y,z)$, akkor $g(x,y,y)+1$ első O-komponense

$$\max(y,y)+1 = y+1.$$

Elegendő tehát az $\alpha(x,y)$-t előállitani.

A 1., 2., 3., 4. táblázat tartalmazza rendre az $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$, $f_3(x,y,z)$, $f_4(x,y,z)$ függvények első O-komponenseit, ahol:

$$f_1(x,y,z)=\alpha(y,\ \alpha(x,z+2)) \quad ,$$
$$f_2(x,y,z)=\alpha(f_1(x,y,z),\ f_1(x,y,z)),$$
$$f_3(x,y,z)=\alpha(\alpha(x+2,y+1),\ \alpha(x,x+2)) \ ,$$
$$f_4(x,y,z)=\alpha(f_2(x,y,z),\ f_3(x,y,z)) \ .$$

1./

	0	1	2
0	0	0	1
1	1	1	1
2	0	0	2

2./

	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	2

3./

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	0	0	1

4./

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	1	1	2

Innen pedig az

$$f_5(x,v,z)=\alpha(f_4(x,v,z),f_4(x,z,v))$$

függvény első 0-komponenseként valóban az

$$f_5\,(0,y,z)=\max(y,z)\text{ adódik.}$$

3.11. lemma. Az $\alpha(x,y)$ az RS_1 osztály bázisa. RS_1 rendje 2.

Bizonyitás. Meg fogjuk mutatni, hogy $[\alpha(x,y)]$ tartalmazza a következő függvényeket:

$g_1(x,y,z,u)$, melyre $g(0,1,2,u)=u+1$,

$g_2(x,y,z,u,v)$, melyre $g(0,1,2,u,v)=\max(u,v)$,

továbbá, minden $n\geq 1$-re a $h_n(x_1,\dots,x_{n+1})$-et, melyre

$$h_n^{\circ}(y_2,\dots,y_n)=\begin{cases}1, & \text{ha } 1\in\{y_1,\dots,y_n\}\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Ezekből a

$$g_3(x,x_1,\dots,x_n,u)=g_1(x,h_n(x,x,\dots,x_n),h_n(h_n(x,x_1,\dots,x_n),x_1,\dots,x_n,u)$$

illetve a

$$g_4(x,x_1,\dots,x_n,u,v)=g_2(x,h_n(x,x_1,\dots,x_n),h_n(h_nx,x_1,\dots,x_n),x_1,\dots,x_n),u,v)$$

szuperpoziciókkal nyerhető g_3,g_4 függvényekre teljesül, hogy

$g_3^{\circ}(x,x_1,\dots,x_n,u)=u+1$ és

$g_4^{\circ}(x,x_1,\dots,x_n,u,v)=\max(u,v)$, feltéve, hogy $\{x_1,\dots x_n\}=\{1,2\}$.

A 3.4. lemma szerint ekkor a g_3, g_4 függvényekből elő-állitható minden $f(x,x_1,\dots,x_m)$ RS_1-beli függvényhez olyan $f'(x,x_1,\dots,x_m)\in[g_3,g_4]$, melyre

$$f'(x,x_1,\dots,x_m)=f(x,x_1,\dots,x_m),\ \text{valahányszor}\ x=0\ \text{és}\ \{x_1,\dots,x_m\}=\{1,2\}.$$

Mivel pedig $Bf'=(x_1 \vee x_2 \vee,\dots,\vee x_m) = Bf$ /hiszen f'-t végül is csak $\alpha(x,y)$ felhasználásával nyertük/,

$$f'(x,x_1,\dots,x_m)= f(x_1,x_1,\dots,x_n)$$

teljesül mindenütt, igy a lemmát igazoltuk.

Hátra van a g_1,g_2 függvények megszerkesztése:

Legyen

$$g_1(x,y,z,u)=\alpha(\alpha(x,u),\alpha(\alpha(y,u),\alpha(z,u)))$$

és

$$h_n(x,y_1,\dots,y_n)=\alpha(\alpha(x,y_1),\ \alpha(\alpha(x,y_2)\ ),\dots,\ \alpha(\alpha(x,y_{n-1}),\alpha(x,y_n))\dots)).$$

Egyszerü ellenőrzés mutatja, hogy ezek a függvények a kivánt tulajdonságuak.

Legyen továbbá:

$$f_1(x,y,z,u)= g_1(x,y,z,g_4(x,y,z,u)),$$

$$f_2(x,u,v)=\alpha(\alpha(x,u),\ \alpha(x,v)),$$

$$f_3(x,y,z,u,v)= f_2(x,f_1(x,y,z,u),f_1(x,y,z,v),$$

$$f_4(x,y,z,u,v)=\alpha(f_2(x,u\ v),f_3(x,y,z,u,v)),$$

és végül

$$f_5(x,y,z,u,v)=\alpha(z,f_3(x,y,z,u,v)).$$

Az $f_2(0,u,v)$, $f_3(0,1,2,u,v)$, $f_4(0,1,2,u,v)$, $f_5(0,1,2,u,v)$ értéktábláit rendre az 5.,6.,7.,8. táblázat tartalmazza, az $f(0,1,2,u)= u+2$.

5./

	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	0

6./

	0	1	2
0	0	0	1
1	0	0	1
2	1	1	1

7./

	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

8./

	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

A

$$g_2(x,y,z,u,v)=\alpha(f_4(x,y,z,u,v),f_5(x,y,z,u,v))$$

a keresett g_2 függvényt adja.

Legyen $\alpha^*(x,y,z)$ olyan, hogy $B\alpha^*(x,y,z) = x \vee y$,

$$\alpha^*(0,1,2)=0,\ \alpha^*(0,2,1)=1.$$

<u>3.12. lemma.</u> Az S^*S_1 bázisa $\alpha^*(x,y,z)$, S^*S_1 rendje 3.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $f(x_1,\dots,{}_n)\in S^*S_1$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy

$$Bf(x_1,\dots,x_m) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_m,\quad m \leq n.$$

Ha m=1, azaz $Bf(x_1,\dots,x_m) = x_1$, a (*) tulajdonság miatt $f(x_1,\dots,x_n) = x_1$.

Legyen m=2, $\underline{a} =(a_1,a_2,\dots,a_n)$. Ha $a_1 = a_2$, akkor $Bf(x_1,x_2,\dots,x_n)= \underline{a}_1$, és a (*) tulajdonság miatt $f(x_1,\dots,x_n) =a_1$.

Ha $\underline{a}$ legfeljebb 2 értéket tartalmaz, $f(\underline{a})$-t egyértelmüen meghatározza $Bf(\underline{x})$, elegendő tehát olyan vektorokat figyelembe venni, melyekre $a_1 \neq a_2$ és $\{a_1,\dots,a_n\} = E_3$, és olyan $f'(x_1,\dots,x_n)$-t konstruálni, melyre:

$$Bf' = Bf \text{ és } f'(\underline{x}) = f(\underline{x}), \text{ ha } \underline{x} \text{ a fenti}$$

tipusu vektorok közül való.

Nyilvánvaló, hogy $\alpha(x,y,y) = \alpha(x,y)$. A 3.11. lemma szerint konstruálható olyan $g_1(x_1,\dots,x_n)$ függvény, melyre $2 \in \{a_3,\dots,a_n\}$ esetén

$$g_1(0,1,a_3,\dots,a_n) = \begin{cases} 2, & \text{ha } f(0,1,a_3,\dots,a_n)=0, \\ 1 & \text{egyébként}; \end{cases}$$

továbbá $1 \in \{a_3,\dots,a_n\}$ esetén

$$g_1(0,2,a_3,\dots,a_n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } f(0,2,a_3,\dots,a_n) \in \{1,2\}, \\ 0 & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Az $f_1(x_1,\dots,x_n) = \alpha^*(x_1,x_2,g_1(x_1,\dots,x_n))$ függvényre $Bf_1 = x_1 \vee x_2$. Könnyen kiszámolható, hogy ha $2 \in \{a_3,\dots,a_n\}$, akkor

$$f_1(0,1,a_3,\dots,a_n) = f(0,1,a_3,\dots,a_n), \text{ ha}$$
$$f(0,1,a_3,\dots,a_n) \in \{0,1\}$$

és

$$f_1(0,1,a_3,\dots,a_n) = 1, \text{ ha } f(0,1,a_3,\dots,a_n) = 2,$$

ill., ha $1 \in \{a_3,\dots,a_n\}$, akkor

$$f_1(0,2,a_3,\dots,a_n) = f(0,2,a_3,\dots,a_n), \text{ ha}$$
$$f(0,1,a_3,\dots,a_n) \in \{0,1\}$$

és

$$f_1(0,2,a_3,\dots,a_n) = 1 \text{ ha } f(0,2,a_3,\dots,a_n) = 2.$$

A g_1 függvényhez hasonlóan konstruáljuk meg $\alpha(x,y)$ segitségével azt a $g_2(x_1,\dots,x_n) \in RS_1$ függvényt, melyre $2 \in \{a_3,\dots,a_n\}$ esetén:

$$g_2(0,1,a_3,\dots,a_n) = \begin{cases} 2, & \text{ha } f(0,1,a_3,\dots,a_n) = 2, \text{ és} \\ 1 & \text{egyébként}, \end{cases}$$

illetve $1 \in \{a_3,\dots,a_n\}$ esetén

$$g_2(0,2,a_3,\dots,a_n)=\begin{cases}2, & \text{ha } f(0,2,a_3,\dots,a_n)=2,\\ 1 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

A g_1, g_2 függvényekből most már

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha^*(g_1(x_1,\dots,x_n),x\ ,g_2(x_1,\dots,x_n)).$$

A bizonyitás innen m szerinti teljes indukcióval folytatható. Tegyük fel, hogy $m>2$, és minden $m'<m$-re igazoltuk, hogy minden $f(x_1,\dots,x_n)$ függvény, melynek Boole-megszoritása

$$Bf_1=x_1\vee x_2\vee\dots\vee x_m$$

alaku, előáll α^* szuperpoziciójaként.

Legyen $f(x_1,\dots,x_n)$ olyan, hogy $Bf(x_1,\dots,x_n)=x_1\vee x_2\vee\dots\vee x_m$.

Az indukciós feltevés miatt van olyan $f_1(x_1,\dots,x_n)$, $f_2(x_1,\dots,x_n)$, melyre

$$Bf_1=x_1\vee x_2\vee\dots\vee x_{m-1}$$

$$Bf_2=x_2\ \dots\ x_m\ ,\ \text{és}$$

$$f(x_1,\dots,x_n)=f_2(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n),\ \text{ha}$$

$$\{x_1,\dots,x_n\}=E.$$

Ekkor nyilván

$$f(x_1,\dots,x_n)=\alpha(f_1,\dots,x_n)=f_2(x_1,\dots,x_n))$$

$\alpha^*(x,y,z)$ tehát valóban generálja S^*S_1-et.

Másrészt S^*S_1 legfeljebb kétváltozós függvényei x és $\alpha(x,y)$, tehát S^*S_1 rendeje valóban 3.

Hátra van még a felsorolt klónok közül az $S^*F_2^\mu$ $/\mu=2,3,\dots,\infty/$ alakuak bázisainak meghatározása.

Ezekre vonatkozóan csak az eredményt adjuk itt meg. Az általunk ismert bizonyitások gondolata hasonló, mint a 3.11 lemmáé, de egy kicsit több számolással járnak, és a Boole-megszoritások normálformáinak elemzését igénylik, ettől meglehetősen terjedelmesek. Részletesen megtalálhatóak a [24] cikkben, lemma 10. ill. lemma 11. alatt.

Legyen $\sigma(x,y,z)$ olyan függvény, melyre

$$B\sigma(x,y,z) = x \vee y z \,,$$

$$\sigma(0,1,2) = \sigma(0,2,1) = 2 \,.$$

<u>3.13. lemma.</u> A $\sigma(x,y,z)$ függvény az $S^{*}F_2^{\infty}$ egy bázisa. $S^{*}F_2^{\infty}$ rendje 3.

Legyen $\delta_\mu(x_1,\dots,x_{\mu+1})$ olyan függvény, melyre

$$B\,\delta_\mu(x_1,\dots,x_{\mu+1}) = \bigwedge_{i=1}^{\mu+1} (x_1 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee \dots \vee x_{\mu+2}) \quad \text{és}$$

$$\delta_\mu(0,\dots,0,1,2) = \delta_\mu(0,\dots,0,2,1) = 2.$$

<u>3.14. lemma.</u> A $\delta_\mu(x_1,\dots,x_{\mu+1})$ függvény az $S^{*}F_2^{\mu}$ bázisa, ha $\mu=3,4,\dots$.

Az $S^{*}F_2^{2}$ bázisa a $\{\tau(x,y,z), d(x,y)\}$, $S^{*}F_2^{\mu}$ rendje $\mu+1$.

<u>A diagram teljessége</u>

A továbbiakban rátérünk annak bizonyitására, hogy a 3.1. diagram teljes, azaz, ha A,B klónokat vonallal kötöttük össze, és $A \subset B$, akkor A maximális valódi részklónja B-nek.

A 3.2. ábra fenti értelemben vett teljességét nem bizonyitjuk, ez megtalálható Marcsenkovnak homogén klónokról szóló [44] munkájában. Az előzőekhez hasonlóan, most is kihasználjuk az L_s háló szimmetriáját, ezért csak az S, L, S_1, SC_4, SA_4, SD_1, SD_2, S^*D_2, SL_4, SO_1, L_2, RS_1, $S^*F_2^2$, SF_1, S^*F_2 $/\mu=2,\dots,\infty/$ osztályokkal foglalkozunk. Azt a módszert követjük, hogy a fenti osztályoknak rendre meghatározzuk az összes maximális részosztályát.

A K klón összes maximális részklónjainak halmazát a rövidség kedvéért $\mathcal{M}(K)$-val fogjuk jelölni. Demetrovics-Bagyinszki [2] cikkéből vehetjük át a következő lemmát.

<u>3.15. lemma.</u> $\mathcal{M}(L_2) = \{0\}$. $\mathcal{M}(L) = \{L_1, L_2\}$.

<u>3.16. lemma.</u> $\mathcal{M}(SO_1) = S_2O_1$.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen

$$f(x_1,\dots,x_n) \in SO_1 \setminus S_2O_1, \quad \text{és} \quad Bf = x_1$$

$f \notin S_2O_1$ miatt van olyan $\underline{a} = (a_1,\dots,a_n) \in (E_3)^n$, hogy

$$2\,f(\underline{a}) \neq f(2\underline{a}).$$

Feltehető, hogy $a_i = 0$. Legyenek

$$x_0 = \{ i \mid a_i = 0 \},$$
$$x_1 = \{ i \mid a_i = 1 \},$$
$$x_2 = \{ i \mid a_i = 2 \},$$

és tekintsük azt a g (x,y,z) függvényt, melyet az x_0, x_1, x_2-be eső indexü változók azonositásával f-ből nyertünk. Nyilván

$$2\, g(0,1,2) = 2f(\underline{a}) \neq f(2a) = g(0,2,1). \text{ Tehát}$$

$$g(x,y,z) = \omega_{ab}\, x,y,z \quad \text{és} \; (a,b) \notin \{(0,0),(1,2),(2,1)\}.$$

Ha $(a,b)=(0,1)$ vagy $(a,b)=(1,0)$, készen vagyunk, hiszen legfeljebb y és z felcserélésével kapjuk SO_1 egy generátorelemét. A többi esetekben:

$$\omega_{01}(x,y,z) = \omega_{11}(x,y,\omega_{11}(x,y,z)),$$

$$\omega_{01}(x,y,z) = \omega_{02}(\omega_{02}(x,y,z), z,x),$$

$$\omega_{01}(x,y,z) = \omega_{20}(\omega_{20}(x,z,y),y,x) \text{ , és végül}$$

$$\omega_{20}(x,y,z) = \omega_{22}(x,y,\omega_{22}(x,y,z)) .$$

Tehát bármely $f \in SO_1 \setminus S_2O_1$ függvényre $[f] = SO_1$, amivel a lemmát beláttuk.

<u>3.17 lemma.</u> $\mathcal{M}(SL_4) = \{SO_1, S_2L_4\}$.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $f_1 \in SL_4 \setminus S_2L_4$, $f_2 \in SL_4 \setminus SO_1$.
Miután az S_2L_4 és SO_1 osztályok egyike sem tartalmazza a másikat, elég belátni, hogy $[f_1,f_2] = SL_4$
A 3.14 lemmához hasonlóan, f_1-ből levezethető egy $g(x,y,z)$, a 2x-hez nem önduális függvény. Ha $Bg(x,y,z)=x$, akkor ebből megkapjuk $\omega_{01}(x,y,z)$-t; és mivel Bf_2 legalább két változójától függ, ekkor a 3.4. lemma szerint $\{f_1,f_2\}$ generálja SL_4-et.

Ha pedig Bg is legalább két változójától lényegesen függ, akkor Bg=x+y+z, ezért a

$$h(x,y,z)=g(g(x,y,z),y,z)\text{-re } Bh(x,y,z)=x$$

teljesül, s igy $\{f_1\}=SL_4$.

Megjegyezzük; a további bizonyitásokban is mindig kihasználjuk azt a minden egyes esetben triviálisan igazolható tényt, hogy azok a klónok, melyek maximális voltát igazolni akarjuk, L_s páronként nem összehasonlitható elemei.

<u>3.18. lemma.</u> $\mathcal{M}(S^{*}D_2)=S_2^{*}D_2$.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen ismét $f(x_1,\dots,x_n)\in S^{*}D_2\setminus S_2^{*}D_2$.
A 3.5. lemmához hasonlóan most is levezethető f-ből olyan háromváltozós g függvény, melyre

$$Bg(x,y,z)=xy\vee xz\vee yz, \text{ és } g(0,2,1)\neq 2g(0,1,2).$$

/Ha ti. $Bg(x,y,z)=x$ lenne, akkor a $(*)$ tulajdonság miatt $g(x,y,z)=x$ is teljesülne, ami ellentmond annak az állitásnak, hogy $g(x,y,z)$ nem felcserélhető 2x-el./ Elegendő tehát megmutatni, hogy - bármi legyen is a $g(x,y,z)$ - g-ből levezethető a Υ függvény.

Ha $g(0,1,2)=a$ és $g(0,2,1)=b$, jelölje a függvényt $g_{ab}(x,y,z)$,

$$\Upsilon(x,y,z)=g_{01}(x,y,z)=g_{10}(x,y,z),$$

és hamar ellenőrizhetők az alábbi egyenlőségek is:

$$\Upsilon(x,y,z)=g_{02}(z,g_{02}(x,y,z),x),$$
$$\Upsilon(x,y,z)=g_{20}(y,g_{20}(x,z,y),x),$$
$$\Upsilon(x,y,z)=g_{11}(x,g_{11}(z,y,x),g_{11}(x,y,z)),$$
$$\Upsilon(x,y,z)=g_{22}(g_{22}(y,z,x),x,z).$$

Ezzel az állitást bebizonyitottuk.

<u>3.19 lemma.</u> $\mathcal{M}(SD_2)=\{S_2D_2, S^*D_2, SO_1\}$.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $f_1(x_1,\ldots,x_n)\in SD_2 \setminus S_2D_2$,

$f_2(x_1,\ldots,x_n)\in SD_2 \setminus S^*D_2$,

$f_3(x_1,\ldots,x_n)\in SD_2 \setminus SO_1$.

Ismét azt fogjuk igazolni, hogy $[\{f_1,f_2,f_3\}]=SD_2$.
A 3.15. lemmához hasonlóan, f_1-ből levezethető egy g_1 háromváltozós függvény, melyre

$$g_1(0,1,2)\neq 2\; g_1(0,2,1)\ .$$

Mivel $f_2\notin S^*D_2$, változóinak valamilyen azonositásával levezethető belőle olyan $f_2'(x_{i1},\ldots,x_{in})$ függvény, melyre:

$$Bf_2'(x_{i1},\ldots,x_{in}) = x_{i1} \quad \text{és}$$
$$f_2'(x_{i1},\ldots,x_{ij}) \neq x_{i1} \quad .$$

Legyen $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_j)$ olyan vektor, melyre $f_2(\underline{a})\neq a_1$.
Feltehető, hogy $a_1=0$; az $\underline{a}$-ban azonos értékü helyeken található változók azonositása tehát olyan $g_2(x,y,z)$ háromváltozós függvényt ad, melyre

$$g_2(0,1,2)\neq 0 \quad \text{és} \quad Bg_2(x,y,z)=x.$$

Mivel $f_3\notin SO_1$, Bf_3 legalább három változójától lényegesen függ, igy bázisa D_2-nek /L.[36]/.
Ha $Bg_1(x,y,z)=x$, ugy a 3.15. lemma miatt $[g_1]= SO_1$, és innen a 3.4. lemmát alkalmazva nyerjük, hogy

$$[\{g_1,f_3\}] = [\{f_1,f_3\}] = SO_1 .$$

Feltehető tehát, hogy $Bg_1 = xy \vee yz \vee xz$. Ekkor a 3.18.lemma szerint $[g_1] = S^{*}D_2$, ezért $g_1(x,y,z)$-ből levezethetők az alábbi függvények:

$$h_1(x,y,z):\ h_1(0,1,2)=1,\ h_1(0,2,1)=0,$$

$$h_2(x,y,z):\ h_2(0,1,2)=2,\ h_2(0,2,1)=0.$$

A $h(x,y,z) = g_2(x,h_1(x,y,z),\ h_2(x,y,z))$ függvényre nyilván $Bh=x$, és $h(0,1,2)\neq 0$, $h(0,2,1)=0$ teljesül, igy $h(x,y,z)$ - a 3.16.lemmában bizonyitottakat figyelembe véve - bázisa SO_1-nek. A 3.5. lemma állitása szerint ekkor a $\{h,g_1\}$, s igy az $\{f_1,f_2\}$ is bázisa SD_2-nek.

<u>3.20.lemma.</u> $\mathcal{M}(SD_1) = \{S_2D_1, SD_2, SL_4\}$.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $f_1 \in SD_1 \setminus S_2D_1$,

$f_2 \in SD_1 \setminus SD_2$,

$f_3 \in SD_1 \setminus SL_4$.

Akkor $Bf_2 \in D_1 \setminus D_2$, $Bf_3 \in D \setminus L_4$, és f_1-ből az előzőekhez hasonlóan levezethető egy $g(x,y,z)$ a 2x permutációval nem felcserélhető függvény. Mivel D_2 és L_4 maximális osztályok D_1-ben /l.[36]/, $[Bf_2,Bf_3]=D_1$.

Ha $Bg(x,y,z)=x$, az előző lemmához hasonlóan fejezhetjük be a bizonyitást: $[g] = SO_1$, s igy a 3.5. lemma szerint $[\{g,f_2,f_3\}]$, tehát $[\{f_1,f_2,f_3\}]$ is lefedi SD_1-t.

Tegyük fel tehát, hogy $Bg(x,y,z)$ mindhárom változójától lényegesen függ. Az f_2, f_3 függvények szuperpoziciójaként előállitható egy olyan $g_2(x,y,z)$, melyre

$$Bg_2(x,y,z) = x+y+z \pmod 2 .$$

Ha a $g_2\ (x,y,z)$ maga nem cserélhető fel a 2x permutációval, a 3.16. lemma bizonyitásának gondolatmenetét követve bizonyithatjuk, hogy $[g_2] \geq SO_1$, s igy $[\{g_2, f_2, f_3\}] = SD_1$. Legyen $g_2 \in S_2L_4$, és rendezzük át $g(x,y,z)$ változóit ugy, hogy

$$g(0,1,2)=1,\quad g(0,2,1)=2$$

teljesüljön. Ekkor a

$$h(x,y,z) = g(x, g_2\ (x,y,z), g_2(x,z,y))$$

függvényre

$$Bh(x,y,z) = x+y+z \mod 2 ,\quad h(0,1,2) = g(0,1,2),$$
$$h(0,2,1) = g(0,2,1),\ \text{tehát}\ h \notin S_2L_4 ,$$

igy $[\{h, f_2, f_3\}] = SD_1$.

<u>3.21. lemma.</u> $\mathcal{M}(SA_4) = \{SF_2^2\ ,\ SF_6^2\}$.
$\mathcal{M}(SC_4) = \{SD_1, SA_4, SF_1^2, SF_5^2\}$.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $f_1 \in SA_4 \setminus SF_2^2$, $f_2 \in SA_4 \setminus SF_6^2$; ekkor $Bf_1 \in A_4 \setminus F_2^2$, $Bf_2 \in A_4 \setminus F_6^2$, igy Bf_1, Bf_2-ből levezethető az $x \vee y$ ill. $x.y$ függvény, azaz f_1-ből és f_2-ből levezethető az $\alpha(x,y)$ és $\beta(x,y)$. Ezekből megkapjuk SO_1-et, s a 3.5. lemma szerint ekkor $[\alpha,\beta] = SA$. Lényegében azonos gondolatmenet vezet célhoz a lemma második állitásának bizonyitásában is. Itt már voltaképpen azt használtuk

ki, hogy ezekre a klónokra a Boole-megszoritás egyértelmüen meghatározza az eredeti, S-beli klónt.

<u>3.22. lemma.</u> $\mathcal{M}(S_o)=\{S_2, SC_4\}$.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $f_1 \in S_o \setminus S_2$,

$f_2 \in S_o \setminus SC_4$.

Ekkor f_1 nem cserélhető fel a 2x permutációval, f_2 pedig nem őrzi a $\{0,1\}$-et. Változók azonositásával levezethető $f_1(x_1,\dots,x_n)$-ből egy $g_1(x,y,z)$ függvény, amely a 2x-el nem felcserélhető, $f_2(x_1,\dots,x_n)$-ből pedig egy $g_2(x,y)$, mely nem őrzi a $\{0,1\}$-et. /De $f_1 \in S_o$ miatt $\{0\}$-t igen./ Feltehető, hogy $g_2(0,1)=2$. Ha $g_2(1,0)=2$, akkor $g(x,y)=2x+2y$, ha $g_2(1,0)=1$, ill $g_2(1,0)=0$, akkor a

$$g_2(g_2(g_2(x,y),g_2(x,y)),g_2(x,y))=2x+2y,$$

illetve a

$$g_2(g_2(y,x),g_2(g_2(x,y),g_2(y,x)))=2x+2y$$

azonosságok miatt $[f_1]$ tartalmazza a 2x+2y függvényt. A $g_1(x,y,z)$ változóinak esetleges átrendezésével elérhetjük, hogy a $g(0,1,2)\neq g(0,2,1)$ egyenlőtlenség teljesüljön.

Legyen $p(x,y)=g_1(x,y,2x+2y)$.

$p(0,1)\neq 2\ p(0,2)$ a fentiek szerint. Ha a $2x+2y$, $p(x,y)$ függvények szuperpoziciójaként elő tudjuk állitani az $\alpha(x,y)$ függvényt, a 3.7. lemma állitása szerint készen vagyunk. Lássuk tehát, hogyan kaphatjuk meg ezt a függvényt:

ha $p(0,1)=1$, $p(0,2)=0$, akkor $p(x,y)=\alpha(x,y)$;

ha $p(0,1)=p(0,2)=1$, akkor $p(x, 2y+2p(x,y)) = \alpha(x,y)$;

ha $p(0,1)=0$, $p(0,2)=2$, akkor a $p(y,2x+2y)$;

ha $p(0,1)=2$, akkor $2p(x,y)+2x$ formulák az első két eset valamelyikében szereplő függvényre vezetnek.

3.23. lemma. $\mathcal{M}(S) = \{S_o \ , \ L\}$.

Bizonyitás. Legyen $f_1(x_1,\ldots,x_n) \in S \setminus S_0$,

$f_2(x_1,\ldots,x_n) \in S \setminus L$.

Mivel f_1 nem őrzi a $\{0\}$-t, $f_1(x,\ldots,x) \in \{x+1,x+2\}$,

s igy $x+1 \in [f_1]$.

Másfelől, $f_2\ (x_1,\ldots,x_n)$-ből levezethető egy $g(x,y)$ függvény, amely nem lineáris: mivel f_2 nem lineáris, nem $\sum a_i x_i + a_o$ alaku. Ha

$$f_2(x_1,\ldots,x_n)=x_1^2 \cdot h_1(x_2,\ldots,x_n)+x_1 h_2(x_2,\ldots,x_n)+ h_3(x_2,\ldots,x_n)$$

alaku, és h_1 nem mindenütt 0, legyen $\underline{a}=(a_2,\ldots,a_n)$ olyan vektor, melyre $h_1(\underline{a})\neq 0$. Legyen továbbá $x=x_1$, minden olyan x_t /$t=2,\ldots,n$/ pedig, amelyre a_t =0, 1 ill. 2 legyen rendre y, $y+1$, $y+2$. A változóknak ez az azonositása nyilván kétváltozós nem-lineáris függvényhez vezet. Ha

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 x_2 \cdot h(x_3,\ldots,x_n) + x_1\ h_2(x_3,\ldots,x_n) + x_2 \cdot h_3(x_3,\ldots,x_n)+h_4(x_3,\ldots,x_n),$$

az $x=x_1=x_2$ azonositás a már tárgyalt esetre vezet.

Ha bizonyitani tudjuk, hogy egy tetszőleges nem-lineáris $g(x,y)$ függvény és az $x+1$ permutáció együtt generálja a $\alpha(x,y)$-t, a 3.10. lemma szerint készen vagyunk.

Feltehető, hogy $g(0,0)=0$, és legyen $g(0,1)=a$, $g(1,0)=b$.
$g\notin L$ miatt $(a,b)\in\{(0,1),(1,0),(2,2)\}$.
Ha $a=b=1$, akkor $g(x\ y)=\alpha(x,y)$,
ha $a=1$, $b=2$, $g(x+2,y)=\alpha(x,y)$,
ha $a=0$, $b=2$, $g(x,y+1)=\alpha(x,y)$, az előző esetre vezet.
Az $a=2$, $b=1$ és $a=2$, $b=0$ esetek a változók felcserélésével adódnak.

<u>3.24. lemma.</u> $\mathcal{M}(RS_1)=\{0\}$.

<u>Bizonyitás.</u> Ha $f(x_1,\dots,x_n)\in RS_1\setminus 0$, f legalább két változójától lényegesen függ. Legyen $x=x_1$, $y=x_2=x_3=\dots=x_n$. A változók ilyen azonositása nyilván az $\alpha(x,y)$ függvényt adja /hiszen $B(f(x,y,\dots,y))'=x\vee y$ /, másrészt $[\alpha]=RS_1$.
A soron következő lemmák bizonyitása hasonlóan végezhető el, mint a 2.21., ill. 3.19. lemmáké, ezért ezeket elhagyjuk. A hátralévő osztályokra a következők igazolhatók:

<u>3.25. lemma.</u> Ha $\mu=\{2,3,\dots\}$, $\mathcal{M}(SF_1^{\mu})=\{SF_1^{\mu+1},SF_2^{\mu}\}$.

<u>3.26. lemma.</u> $\mathcal{M}(SF_2^2)=\{SF_2^3,\ SD_2\ S^{*}F_2^2\}$,
és ha $\mu=\{3,4,\dots\}$, $\mathcal{M}(SF_2^{\mu})=\{SF_2^{\mu+1},\ S^{*}F_2^{\mu+1}\}$.
$\mathcal{M}(SF_2^{\infty})=\{SS_1,S^{*}F_2\}$.
$\mathcal{M}(SS_1)=\{SO_1,\ S^{*}S_1\}$.

<u>3.27. lemma.</u> $S^{*}F_2^2 = \{ S^{*}D_2, S^{*}F_2^3 \}$.

A fenti állitások bizonyitásait [24], lemma 22, lemma 23, és lemma 24 tartalmazza.

Lássuk most már, milyen következtetéseket vonhatunk le az L_S háló szerkezetére vonatkozóan eddig szerzett ismereteinkből.

<u>3.28. tétel.</u> Az L_S hálónak hat atomja van. Ezek: L_1, L_2, S_2O_1, $S_2^{*}D_2$, RS_1, RP_1 .

<u>Bizonyitás.</u> Világos, hogy a felsorolt osztályok valóban atomjai L_S-nek.

Legyen $f(x_1,\dots,x_n) \in S$. Ha $f(x,\dots,x) \neq x$, $[f]$ tartalmazza $x+1$-et, tehát L-et. Ha f nem őrzi meg a $\{0,1\}$-et a 3.22. lemma bizonyitásában követett gondolatmenet alapján levezethető belőle a $g(x,y) = 2x+2y$, tehát $[f]$ tartalmazza L_1-et.

Ha f őrzi a $\{0,1\}$-et, van értelme f Boole-megszoritásáról beszélni, és ha f minimális L_S-ben, $[Bf]=[x]$ vagy $[Bf]$ atom L_2-ben. Az első esetben lesz $[f]= S_2O_1$, és ha $[Bf] = x \vee y$, xy, $xy \vee xz \vee yz$ ill. $x+y+z \pmod 2$, egyszerü számolás igazolja, hogy $[f]$ rendre tartalmazza az RS_1 , RP_1, $S_2^{*}D_2$, S_2L_4 osztályokat. Mivel S_2L_4 tartalmazza SO_1-et, ezért ez az eset nem ad L_S-beli atomot.

3.29. tétel. A $\pi(x) = 2x + 1 \pmod 3$ permutáció által indukált leképezés az L_S /egyetlen nem triviális/ hálóautomorfizmusa. Ennek fixpontjai pontosan az

$S, L, S_0, S_2, SC_4, SA_4, SD_1, SD_2, S^*D_2, S_2D_1, SL_4, SO_1,$
$S_2D_2, S_2^*D_2, S_2L_4, S_2O_1, L_1, L_2, O$

osztályok.

A felsorolt és az itt ismertetett eredményekből következően jól lokalizálható és leirható klónokon kivül L_S természetesen már zárt osztályokat is tartalmaz.

Éppen az első fejezet (4) konstrukciója mutatott rá arra, hogy S valójában kontinuum sok részklónt tartalmaz. A "fel nem deritett terület" az $RS_1, S^*F_2^3$ illetve az $RP_1, S^*F_6^3$ intervallumokba esik. Az első fejezetben megadott, kontinuum sok részklónt tartalmazó osztály ráadásul $S_2^*F_2^\infty$ részklónja. Az első fejezetben /1.17. tétel/ láttuk, hogy az $\mathcal{L}_k$ háló kontinuum sok klónt tartalmaz az $([\ell_k(x_1,\dots,x_k)], S_\pi)$ intervallumban, ha $k > 3$, $\ell_k(x_1,\dots,x_k)$ egy k-változós majdnem-projekció, S_π pedig egy önduális maximális klón. A $k=3, \pi = (0\ 1\ 2)$ esetben más a helyzet. Az $\ell_3(x,y,z)$ generálta klón az S_2O_1 osztály /hiszen $\ell_3(x,y,z)$ éppen a 3.2. lemmában definiált $\omega_{21}(x,y,z)$/, és az (S_2O_1, S) intervallum megszámlálható, elemeit pontosan ismerjük:

3.30. tétel. /Az első fejezet jelöléseit használva/

$$\gamma(\ell_3(x,y,z), S_{(012)}) = \aleph_0 .$$

az L_s háló $[\ell_3(x,y,z)]$-t tartalmazó elemei pontosan a következők:

S_2C_1, S_2D_2, SO_1 S_2D_1, SD_2, $S_2L_4, SL_4, SD_1, SA_4, SC_4, S_2, S_0, S, SF_1$, SF_2^{μ}, SF_5^{μ}, SF_6^{μ} /$\mu=2,3,\dots$ /, SP_1 és SS_1.

Jelölje $t(x,y,z)$, $d(x,y,z)$ az un. ternáris diszkriminátor ill. duális diszkriminátor függvényeket. /Pixley [46]. Fried-Pixley [29] /:

$$t(x,y,z) = \begin{cases} x, & \text{ha } y=z, \\ y & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$d(x,y,z) = \begin{cases} x, & \text{ha } y\neq z, \\ z & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A $d(x,y,z)\in P_3$ éppen a 3.1-ben definiált $\psi(x,y,z)$ függvény, tehát $[d(x,y,z)] = S^{*}{}_2D_2$. Könnyü számolás igazolja, hogy $t(x,y,z)$-ből levezethető az S_2D_1 osztály bázisát adó $\beta(x,y,z)$ függvény. Tehát S-ben a $d(x,y,z)$-t ill. $t(x,y,z)$-t tartalmazó klónok pontosan az $(S_2^{*}D_2, S)$ ill. (S_2D_1, S) intervallumok az L_s hálóban.

<u>3.31. tétel.</u> A $d(x,y,z)\in P_3$ duális diszkriminátorra $\gamma([d(x,y,z)], S_{(012)})=17$, a $d(x,y,z)$-t tartalmazó klónok pontosan az $S_2^{*}D_2$, S_2D_1, $S^{*}D_2$, SD_2, SD_1, $S^{*}F_2^2$; $S^{*}F_6^2$, SF_2^2, SF_6^2 , SF_1^2, SF_5^2, SA_4, SC_4, S_2, S_0, S.

A $t(x,y,z)\in P_3$ ternáris diszkriminátorra: $\gamma([t(x,y,z)])=6$, a $t(x,y,z)$-t tartalmazó klónok pontosan az S_2D_1, SD_1, SC_4, S_2, S_1, S.

Irodalomjegyzék

[1] I. Ágoston, J. Demetrovics, L. Hannák; On the cardinality of clones containing all constants. /Proc..Conf. Szeged 1983/, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, /1985/

[2] J. Bagyinszki, J. Demetrovics; Lineáris osztályok szerkezete primszám értékü logikában. MTA SZTAKI Közlemények, Budapest, 16 /1976/

[3] K.A. Baker, A.F. Pixley; Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems. Math. Zeitschr., 43 /1975/ 165-174.

[4] V.G. Bodnarcsuk, L.A. Kaluzsnyin, V.N. Kotov, B.A. Romov; Galois-elmélet Post-algebrákra. /oroszul/ I-II. Kibernetika, Kiev, I:5 /1969/ 1-10, II:6 /1969/ 1-9.

[5] G.A. Burle; Az összes egyváltozós függvényt tartalmazó osztályok a k-értékü logikában. /oroszul/ Diszkretnij Analiz., Novoszibirszk, 10 /1967/ 3-7.

[6] B. Csákány, T. Gavalcová; Three-element quasi-primal algebras. Studia Sci. Math. Hung., Szeged, 16 /1983/ 237-248.

[7] B. Csákány, T. Gavalcová; Finite homogeneous algebras. I. Acta Sci. Math., Szeged, 42 /1980 57-65.

[8] B. Csákány; All minimal clones on the three-element set. Acta Cybernetica, Szeged, 6 /1983/ 227-238.

[9] B. Csákány; Homogeneity and completeness. Lecture Notes in Comp. Sci., Springer-Verlag, 117 /1981/ 81-89.

[10] B. Csákány; Three-element groupoids with minimal clones. Acta Sci. Math., Szeged, 45 /1983/ 111-117.

[11] B. Csákány; Homogeneous algebras are functionally complete. Alg. Univ., 11 /1980/ 149-158.

[12] Roy O. Davies; On n-valued Sheffer-functions. Preprint Université de Montreal, 1974.

[13] J. Demetrovics; A kétértékü logika strukturális vizsgálata. Alk. Mat. Lapok, Budapest, 2 /1975/ 405-424.

[14] J. Demetrovics, J. Bagyinszki; The lattice of linear classes in prime-valued logics. Banach Center Publ., Varsó, 7 /1982/ 105-123.

[15] J. Demetrovics; On the main diagonal of Sheffer-functions. Discrete Math., 21 /1978/ 1-5.

[16] J. Demetrovics, L. Hannák, L. Rónyai; Selfdual classes and automorphism groups. Proc. 13 ISMVL., Kyoto, /1983/ 122-125.

[17] J. Demetrovics, L. Hannák; On the number of functionally complete algebras. Proc. 12. ISMVL, Paris, /1982/ 329-330.

[18] J. Demetrovics, L. Hannák; On the cardinality of self-dual closed classes in k-valued logics. MTA SZTAKI Közlemények, Budapest, 23 /1979/ 8-17.

[19] J. Demetrovics, L. Hannák; The cardinality of closed sets in pre-complete classes in k-valued logics. Acta Cybernetica, Szeged, 4 /1979/ 3, 273-277.

[20] J. Demetrovics, L. Hannák; The number of reducts of a preprimal algebra. Alg. Univ., 16 /1983/ 178-185.

[21] J. Demetrovics, L. Hannák; Sz.Sz. Marcsenkov; On closed classes of selfdual funcitons in P_3. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, North-Holland, 28 /1981/ 183-189.

[22] J. Demetrovics, L. Hannák, L. Rónyai; Prime element algebras with transitive automorphism groups. C.R. Comp. Rend. Math. Acad. Sci., Canada, 3 /1981/ 1, 19-22.

[23] J. Demetrovics. L. Hannák, L. Rónyai; Almost all prime-element algebras with transitive automorphism groups are functionally complete. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, North-Holland, 28 /1981/ 191-201.

[24] J. Demetrovics, L. Hannák, Sz.Sz. Marcsenkov; Önduális osztályok szerkezete 3-értékü logikában. /oroszul/ Diszkr.Analiz., Novoszibirszk,. 34 /1980/ 38-73. C.R. Compt. Rend. Acad. Sci., Canada, 2 /1980/ 4, 209-213.

[25] J. Demetrovics, L. Rónyai; On free spectra of clones with sharply transitive automorphism groups. Proc. 13 ISMVL., Kyoto, /1983/ 126-128.

[26] J. Demetrovics, L. Hannák, L. Rónyai; Near unanimity functions of partial orderings. Proc. 14. ISMVL., Manitoba, /1984/

[27] D. Duffus, I. Rival; A structure theory for ordered sets. Discr. Math., 35 /1981/ 53-118.

[28] G. Epstein; The lattice theory of Post algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 95 /1960/ 300-317.

[29] E. Fried, A.F. Pixley; The dual discriminator function in universal algebra. Acta Sci. Math., Szeged, /1979/ 83-100.

[30] G. Grätzer; Universal Algebra. D. van Nostrand Co. Princeton /N.J./ 1968.

[31] G. Grätzer; General Lattice theory. Akademie-Verlag Berlin, 1978.

[32] L. Hannák; Relations in constructions of large set of clones. MTA SZTAKI Közlemények, Budapest, 30 /1984/ 7-17.

[33] L. Hannák; On dual ideals of the lattice of clones. Acta Cybernetica, Szeged /1984/ to appear.

[34] L. Hannák, J. Demetrovics; A k-értékü logika önduális osztályairól. MTA SZTAKI Közlemények, Budapest, 23/1979/.

[35] S.V. Jablonszkij; A P_k-beli függvények szuperpoziciójáról. /oroszul/ Problemi Kibernetiki, Moszkva, 8 /1962/ 75-90.

[36] S.V. Jablonszkij, G.P. Gavrilov, V.B. Kudrjavcev; Boolesche Funktionen und Postsche Klassen. Akad. Verlag, Berlin, 1970.

[37] Ju.I. Janov, A.A. Mucsnik; Véges bázis nélküli zárt osztályok létezéséről k-értékü logikában. /oroszul/ Dokl. Akad. Nauk., Moszkva, 127 /1959/ 44-46.

[38] V.B. Kudrjavcev; A k-értékü logika majdnem teljes osztályainak lefedései. /oroszul/ Diszkr. Analiz., Novoszibirszk, 19 /1971/ 15-47.

[39] A.V. Kuznecov; Lezárási strukturák és funkcionális teljességi kritériumok. /oroszul/ Uszpehi Math. Nauk., Moszkva, 16 /1961/ 98, 201-202.

[40] D. Lau; Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen logik. Z. Math. Logik Grundlagen Math., 24 /1978/ 79-96.

[41] A.I. Malcev; Iterativ algebrák és Post-varietások. /oroszul/ Algebra i Logika, Novoszibirszk, 5 /1966/ 2., 5-24.

[42] A.I. Malcev; Słupecki és Jablonszkij egy tételének élesitése. /oroszul/ Algebra i Logika, Novoszibirszk, 6 /1967/ 3, 61-75.

[43] Sz.Sz.Marcsenkov; A többértékü logika önduális függvényeinek zárt osztályairól. /oroszul/ Prob. Kibern., Moszkva, 36 /1979/ 5-22.

[44] Sz.Sz.Marcsenkov; Homogén algebrákról. /oroszul/ Dokl. Akad. Nauk. Sz.Sz. Sz.R., Moszkva, 256 /1981/ 787-790.

[45] P.P. Pálfy, L. Szabó, Á. Szendrei; Automorphism groups and functional completeness. Alg. Univ.,15 /1982/ 385-400.

[46] A.F. Pixley; The ternary discriminator function in universal algebra. Math.Ann., 191 /1971/ 167-180.

[47] E.L. Post; Determination of all closed systems of truth tables. Bull. Amer. Math. Soc., 26 /1920/ 437.

[48] E.L. Post; The two-valued iterative systems of mathematical logic. Ann.Math. Studies 5. Princeton Univ. Press 1941.

[49] R. Pöschel, L.A. Kaluzsnyin; Funktionen und Relationen-algebren VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften /1979/.

[50] R. Pöschel; Die funktionale Vollständigkeit von Funktionen-klassen über einen Familie endlicher Mengen. Z. Math. Logik u. Grundlagen Math., 20 /1974/ 534-550.

[51] R. Pöschel; Concrete representation of algebraic structures and a general Galois-theory. Contributions to General Algebra. /Proc. Klagenfurt Conf., May 25-28/ /1978/.

[52] R.W. Quackenbush; Some classes of idempotent functions and their composition. Colloq. Math., 29 /1974/ 71-81.

[53] R.W. Quackenbush; On the composition of idempotent functions. Algebra Universalis, 1 /1971/ 7-12.

[54] I.G. Rosenberg; Complete sets for finite algebras. Math. Nachr., 44 /1970/ 1-6, 253-258.

[55] I.G. Rosenberg; Maximal clones on algebras A and A^r. Rend. Circ. Math., Palermo, Serie II., 18 /1969/ 329-333.

[56] I.G. Rosenberg; The number of maximal closed classes in the set of functions over a finite domain. J. Comb. Theory, /1973/ 1-7.

[57] I.G. Rosenberg; A classification of universal algebras by infinitary relations. Alg. Univ., 1 /1972/ 3, 350-354.

[58] I.G. Rosenberg; Strongly rigid relations. Rocky Mountain J. Math., 34 /1973/ 631-639.

[59] I.G. Rosenberg; Universal algebras with all operations of bounded range. Coll. Math., 30 /1974/ 177.

[60] I.G. Rosenberg; Some maximal closed classes of operations on infinite sets. Math. Ann., 212 /1974/ 157-164.

[61] I.G. Rosenberg; Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. Rozpr. ČSAV. Řada Math. Přír. Věd. Praha 80 /1980/ 4, 1-93.

[62] I.G. Rosenberg; Special types of universal algebras preserving a relation. Publ. CRM-169 Canada, /1983/ 1-24.

[63] I.G. Rosenberg; On generating large classes of Sheffer-functions. Publ. CRM-466, Canada, /1978/ 1-27.

[64] I.G. Rosenberg; A Galois-connection between universal algebras and relations. Publ. CRM-432, Canada, /1978/ 1-38.

[65] G. Rousseau; Completeness in finite algebras with a single operation. Proc. Amer. Math. Soc., 18 /1967/ 1009-1013.

[66] A. Salomaa; On the composition of functions of several variables ranging over a finite set. Ann.Univ. Turku, Ser. A.I.4. 1 /1960/ 1-48.

[67] A. Salomaa; On the number of simple bases of the set of functions over a finite domain. Ann. Univ. Turku, Ser. A.I. 52 /1962/ 1-4.

[68] A. Salomaa; On basic groups for the set of functions over a finite domain. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.I. Math., 338 /1963/ 1-5.

[69] A. Salomaa; On essential variables of functions especially in the algebra of logic. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.I. Math. 339 /1963/ 3-11.

[70] A. Salomaa; On sequences of functions over an arbitrary domain. Ann. Univ. Turku, Ser. A.I. 62 /1963/ 1-5.

[71] A. Salomaa; On infinitely generated sets of operations in finite algebras. Ann. Univ. Turku, Ser. A.I. 74 /1964/ 1-12.

[72] A. Salomaa; On the height of closed sets of operations in finite algebras. Ann. Acad. Sci. Fenn.,Ser. A.I. 363 /1965/ 1-12.

[73] P. Schofield; On a correspondence between many-valued and two-valued logics. Z. Math. Logic. Grundl. Math., 10 /1964/ 265-274.

[74] P. Schofield; Complete subsets of mappings over a finite domain. Proc. Camb. Phil. Soc., 62 /1966/ 597-611.

[75] P.Schofield; Independent conditions for completeness of finite algebras with a single generator. J. London Math. Soc., 44 /1969/ 413-423.

[76] L. Szabó; Concrete representation of related structures of universal algebras. Acta. Sci. Math., Szeged, 40 /1978/ 175-184.

[77] Á. Szendrei; On closed sets of linear operations over a finite set of square-free cardinality. EIK, Berlin, 14 /1978/ 11, 547-559.

[78] Á. Szendrei; On closed classes of quasilinear functions. Czech. Math. J. 30 /105/ /1980/ 3, 493-509.

[79] D.L. Webb; Generation of any n-valued logic by one binary operator. Proc. Nat. Acad. Sci., 21 /1935/ 252-254.

[80] H.Werner; Eine Charakterisierung funktional Vollständinger Algebren. Arch. Math., 21 /1970/ 381-385.

[81] H. Werner; Discriminator-Algebras. Studien zur Algebra u. ihre Anwendungen. Bd.6. Akad. Verlag Berlin. 1978.

A Tanulmányok sorozatban 1983-ban megjelentek:

140/1983 Operations Research Software Descriptions (Vol. 1.) Edited by A. Prekopa and G. Keri

141/1983 Ngo The Khanh: Prefix-mentes nyelvek és egyszerü determinisztikus gépek

142/1983 Pikler Gyula: Dialógussal vezérelt interaktiv gépészeti CAD rendszerek elméleti és gyakorlati megfogalmazása

143/1983 Márkusz Zsuzsanna: Modellelméleti és univerzális algebrai eszközök a természetes és formális nyelvek szemantikaelméletében

144/1983 Publikációk '81 Szerkesztette: Petróczy Judit

145/1983 Telcs András: Belső állapotu bolyongások

146/1983 Varga Gyula: Numerical Methods for Computation of the Generalized Inverse of Rectangular Matrices

147/1983 Proceedings of the joint Bulgarian-Hungarian workshop on "Mathematical Cybernetics and Data Processing" /Szerkesztette: Uhrin Béla/

148/1983 Sebestyén Béla: Fejezetek a részecskefizikai elektronikus kisérleteinek adatgyüjrő, - feldolgozó rendszerei köréből

149/1983 L. Keviczky - J. Hethéssy: A general approach for deterministic adaptive regulators based on explicit identification

150/1983 IFIP TC.2 WORKING CONFERENCE "System Description Methodologies" May 22-27. 1983. Kecskemét, /Szerkesztette: Knuth Előd/

151/1983 Márkusz Zsuzsanna: On First Order Many-Sorted LOGIC

152/1983 Operations Research Software Descriptions (Vol. 2.) Edited by A. Prekopa and G. Keri

153/1983 T.M.R. Ellis: The automatic generation of user--adaptable application-oriented language processors based on quasi-parallel modules

154/1983 Publikációk '82 /Szerkesztette: Petróczy Judit/

A TANULMÁNYOK SOROZATBAN 1984-BEN MEGJELENTEK:

155/1984 Deák, Hoffer, Mayer, Németh, Potecz, Prékopa, Straziczky: Termikus erőmüveken alapuló villamos-energiarendszerek rövidtávu, optimális, erőmüvi menetrendjének meghatározása hálózati feltételek figyelembevételével.

156/1984 Radó Péter: Relációs adatbáziskezelő rendszerek összehasonlitó vizsgálata

157/1984 Ho Ngoc Luat: A geometriai programozás fejlődései és megoldási módszerei

158/1984 Proceedings of the 3rd International of Young Computer Scientists, Edited by J. Demetrovics and J. Kelemen.

159/1984 Bertók Péter: A system for monotoring the machining operation in automatic manufacturing systems

160/1984 Ratkó István: Válogatott számitástechnikai és matematikai módszerek orvosi alkalmazása /Kandidátusi értekezés/