tanulmányok

145/1983.

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

BELSŐ ÁLLAPOTÚ BOLYONGÁSOK

Irta:

TELCS ANDRÁS

Tanulmányok 145 /1983

A kiadásért felelős:

DR VÁMOS TIBOR

Főosztályvezető:

Demetrovics János

ISBN 963 311 159 5
ISSN 0324-2951

TARTALOMJEGYZÉK

Mindenek előtt *Szász Domokosnak* szeretném megköszönni szakmai és baráti irányitását. Igen sok segitséget kaptam *Krámli András* és *Lukács Páltól*, számos beszélgetésünk sokat jelentett a probléma jobb megértésében.

Hálával tartozom a *Magyat Tudományos Akadémia Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetének*, a *Számitástudományi Főosztálynak*, azért hogy lehetővé tették számomra e tanulmány létrehozását. Személy szerint *Demetrovics János* támogatását szeretném megköszönni.

Végül pedig hálásan köszönöm a szöveg szerkesztésében és gépelésében nyujtott áldozatos munkáját *Karvázy Gyulánénak*

0. BEVEZETÉS

Dolgozatunkban kiépitjük a kétdimenziós belső állapotu bolyongások potenciálelméletét, bebizonyitunk egy hányados-limesz tételt az első elérési időkre vonatkozóan, majd ezt felhasználva belátjuk, hogy a lokális módositás nem csorbitja az invariancia elv érvényességét.

Az 1. fejezetben összefoglaljuk a téma statisztikus fizikai és valószinüségszámitási előzményeit. A 2. fejezet a potenciálelmélet kiépitését tartalmazza, végül a 3. fejezet a lokálisan módositott közegben folyó belső állapotu bolyongást tárgyalja.

[11] cikkünkben sikerült belátnunk, hogy $d \geq 2$ dimenzió esetén is érvényes [10]-beli eredményünk általánositása belső állapotu bolyongásokra, azaz, ha a belső állapotu bolyongást módositjuk lokálisan, az ivariancia elv érvényben marad. Ennek bizonyitása során nem alkalmazhattuk /ugy mint a [10]-ben/ a hányados-limesz tételt, ehelyett ad'hoc becslést kellett adnunk. Többek között ez ösztönzött arra, hogy kiépitsük a belső állapotu bolyongások potenciálelméletét. Ezt felhasználva pedig a hányados-limesz tételt is sikerült általánositanunk.

A Megszámlálható Markov láncok potenciálelméletét Kemény és Snell [1-3] alapozták meg, végső soron a belső állapotu bolyongások is ide sorolhatók. Mint Kesten és Spitzer alapvető munkái [4], [5],[7] mutatják, a bolyongások néhány érdekes speciális vonást mutatnak. Kemény és Snell [1] cikkét követően született Kesten és Spitzer [4] tanulmánya, viszont a Spitzerék által használt potenciál-magot [3]-ban aknázzák ki Kemény és Snell a Markov láncokra általában. Erre az eredményre pedig Spitzer jelentős könyve [7] nem hivatkozik.

Mindezeket látva nem tünik haszontalannak, hogy a [7]-beli felépitést követve kiépitsük a kétdimenziós belső állapotu bolyongások potenciálelméletét, felhasználva a Markov láncokra vonatkozó általánosabb [1]-[3] eredményeket. Megjegyezzük, hogy a $d=1$ $d\geq 3$ esetek vizsgálata ezen eszközök alkalmazásával szintén elvégezhető, nem valószinü, hogy elvi nehézséget jelentene.

1. A VÉLETLEN BOLYONGÁSOK ÉS A STATISZTIKUS FIZIKA KÖZÖS PROBLÉMÁI

Az egyszerüség kedvéért e fejezetben véletlen bolyongásról szólva az egyszerü szimmetrikus bolyongást képzeljük magunk elé. Ez egy a d-dimenziós egész-rácson mint állapottéren folyó diszkrét idejü stacionárius Markov lánc, melynek P átmenetvalószinüség-mátrixa igen egyszerü

$$P(x,y) = P(0,y-x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2d} & \text{ha } |x-y| = 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{array} \right\} \quad x,y \in Z^d \qquad /1.1/$$

A folyamat kezdőhelye $X_0 \in Z^d$ tetszőleges, az i-edik időpontban X_i helyen találhatjuk, ugy hogy ide

$$P(x_{i-1}, X_i) = P(0, X_i - X_{i-s}) \qquad /1.2/$$

valószinüséggel jutott az előző X_{i-1} helyéről. Ha $x_i := X_i - X_{i-1}$ akkor $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ független azonos eloszlásu valószinüségi változókból álló n elemü összeg.

A véletlen bolyongás számos igen érdekes tulajdonsággal rendelkezik; kiemelnénk ezek közül azt, hogy a diffuziós folyamat diszkrét analógjának tekinthető. Ezt a kapcsolatot fejezi ki a megfelelő differencia- illetve differenciál-egyenletek közti összefüggés és az invariancia elv. Ez utóbbin az

$$\frac{1}{\sqrt{n}} X_{[nt]} \overset{\mathcal{D}}{\Longrightarrow} W(t) \qquad /1.3/$$

összefüggést értjük, ami a normált bolyongásnak a Wiener folyamathoz való gyenge értelemben vett konvergenciáját jelenti a folytonos függvények terében ha n tart végtelenhez.

A statisztikus fizikában egyre nagyobb érdeklődés mutatkozik a nem homogén közegben folyó diffuziók vizsgálata iránt. Ez ösztönözte a diszkrét analóg hasonló irányu vizsgálatait. H. Spohn /[6]-ban/ az alábbi bolyongás tanulmányozását javasolta.

Vegyük a d=2 dimenziós egész-rácsot Z^2-et és ennek elemeit véletlen módon hagyjuk el. Pontosabban független, azonos eloszlásu valószinüségi változók szerint $P_o < \frac{1}{2}$ valószinüséggel elhagyjuk az egyes elemeket. A visszamaradt halmazon uj átmenetvalószinüség-mátrixot definiálunk ugy, hogy adott helyen a lehetséges négy szomszédos /1 távolságu/ rácspontból megmaradtak közül egyforma valószinüséggel lépünk valamelyikre.
Megjegyezzük, hogy a modell két valószinüségi mezőt tartalmaz. Az első a lehetséges állapotok halmazáért felelős,a második a bolyongásért. Az állapottér kialakulása mint folyamat szoros kapcsolatban van az Ising modellel és a perkoláció elmélettel. Nekünk elegendő annak az ismerete ezen eredmények közül, hogyha $P_o < \frac{1}{2}$, akkor az origó pozitiv valószinüséggel egy végtelen "cluster" -be bejárható rácsponthalmazba esik.

Természetesen számos más inhomogén közegü bolyongás is definiálható. Ezek közül most csak egyet ismertetünk, melyet [10]-ben javasoltunk. Legyen G = (V,E) V megszámlálható szögponthalmazon, E élekkel definiált lokálisan véges gráf. Legyenek

$$\alpha(e) \geq 0 \quad e \in E \qquad /1.4/$$

független azonos eloszlásu valószinüségi változók.

Ezek segitségével definiáljunk V-n egy átmenetvalószinüség-mátrixot: $x,y \in V$

$$P(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(x,y)}{\sum\limits_{(x,z)\in E} \alpha(x,z)} & \text{ha } x,y \in E \\ 0 & \text{ha } \sum\limits_{(x,z)\in E}\alpha(x,z)=0 \text{ vagy } (x,y)\notin E \end{cases} \qquad /1.5/$$

A bolyongás pedig egy V-n folyó P átmenetü Markov lánc lesz. [11] cikkünkben sikerült Pólya György hires tételét a bolyongás visszatérőségéről erre a bolyongásra is általánositani.

[10] cikkünkben a véletlen módositás egy speciális esetét vizsgáltuk, sikerült belátnunk, hogy ha a módositás csak véges sok rácsponton változtatja meg az egyszerü szimmetrikus bolyongás átmenetvalószinüség-mátrixát, akkor az /1.3/ invariancia elv érvényben marad.

A diffuziós folyamatok vizsgálata során született Ja.G. Szináj hires modellje az un. Szináj-biliárd. Ez a következő: Tekintsük a d-dimenziós tóruszt és ennek felületén néhány konvex, sima határu ütközőt. A "biliárd-golyó" egy apró részecske szabad mozgást végez a tórusz felszinén, mig egy ütköző határához nem ér, onnan tökéletesen rugalmasan visszaverődik. Ennek a mozgásnak a leirásához konstruált Szináj egy Markov-felbontást. E felbontás egy átfogalmazása a szintén Szináj által javasolt belső állapotu bolyongás. Következzék ennek a definiciója.

D: /Belső állapotu bolyongás/

$d \in N$ a dimenzió

M tetszőleges megszámlálható halmaz

$H := Z^d x M$ az állapottér

Legyen $U_n \in H$ $n=0,1,2,\ldots$ homogén Markov lánc

$U_n := (X_n, \varepsilon_n)$, ahol $X_n \in Z^d$, $\varepsilon_n \in M$

és U_n átmenetvalószinüsége $P: H^2 \to [0,1]$

Z^d - eltolás-invariáns, azaz

$$P(U_{n+1} = (y,\beta)\,|\,U_n=(x,\alpha)) = P_{y-x,\alpha,\beta} \qquad /1.6/$$

U_n a belső állapotu bolyongás, amelynek $X_n \in Z^d$ a vektor-komponense, ε_n pedig ugyanekkor a belső állapot. O

Krámli András és Szász Domokos [9] lokális centrális határeloszlás tételt bizonyitott az U_n folyamatra. Dolgozatukra igen erősen fogunk épiteni. Lényegében ugyanazokra a feltevésekre van szükségünk, melyekből tételüket levezették. Mindenekelőtt feltesszük, hogy a belső állapotok M halmaza véges:

$$|M| = m \in N$$

2. A KÉTDIMENZIÓS BELSŐ ÁLLAPOTU BOLYONGÁSOK POTENCIÁLELMÉLETE

2.0 Általános jelölések

Elnézést kérünk mindazoktól az olvasóinktól, akik nem kedvelik az erősen formalizált matematikai irásmódot, mi a tömörség kedvéért mégis ehhez folyamodunk.

Az alábbi jeleket általánosan alkalmazni fogjuk:

$\|B\|$	jelölje egy tetszőleges B halmaz számosságát
$:=$	definiáló egyenlőség
$\exists$	létezik kvantor
$\forall$	minden kvantor
$\exists!$	létezik egy és csak egy
$\Rightarrow$	akkor, következtetési reláció
$\Leftrightarrow$	akkor és csakis akkor
N	természetes számok halmaza
Z	egész számok halmaza
R	valós számok halmaza
C	komplex számok halmaza.

További megállapodások:

Az M a belső állapotok halmazát azonositjuk az $\{1,2,\dots,m\}\subset N$ halmazzal és általános elemeit a görög ABC első betüivel jelöljük: $/\alpha,\beta,\gamma,\delta/$.

Ha $d\in N$, Z^d a d-dimenziós egész rács ennek általános elemeit a kisbetüs latin ABC utolsó jegyeivel jelöljük x,y,z.

A $H=Z^d\times M$ halmaz elemeit pedig u,v,w-vel jelöljük általában.

Amikor $u=(x,\alpha)$ H elem valamely függvény argumentumában szerepel, gyakran csak $x\alpha$-t irunk, pl.: $P(x\alpha,y\beta)$.

Ha P átmenetvalószinüség, illetve általában a valószinüség szimbóluma P_u jelentse az U_n folyamat esetén az $U_o=u$ feltétel melletti feltételes valószinüséget. P^k, illetve P_k

legyen a k-szoros iteráltja P-nek.

Szövegünk áttekinthetőségét a következőkkel igyekszünk elősegiteni. Számozzuk a definiciókat szakaszonként pl.: 2.3.4.D: és a D: mögé rövig szöveg vagy néhány szimbólum kerül, amelyek definiciója következik. Az egyszerübb állitásokat és a kiemelendő tételeket szintén szekciönként számozzuk pl.: 2.1.4.L: /azaz a 2.1.4. Lemma/, illetve pl. 2.1.5.T: /azaz a 2.1.5. Tétel/.

Minden definició, illetve állitás szövegrészét O jellel zárjuk el, elhatárolandó a kisérőszövegtől. Bizonyitást az állitással azonos sorszámu, pl.
2.1.4.B: jellel kezdünk és □-el fejezzük be a Q.E.D. helyett.

Miután igen gyakran fogunk hivatkozni Spitzer [7] könyvének egyes részeire, ezt röviden az ottani jelöléssel tesszük, pl.: 13.§.4. /Definició, Lemma, Tétel, Példa/.

Dolgozatunk jelölései lehetőség szerint követik Spitzer formalizmusát.

Ez azt eredményezi, hogy a legtöbb állitás és annak általánositása formailag egybeesik, mig persze maguk az objektumok mások és esetleg az állitás tartalma is lényegesen eltér. Éppen ezért azokat az eredményeket, amelyek általánositott alakja formailag változatlan, nem idézzük, megelégszünk azzal, hogy az eltéréseket emeljük ki a jobb érthetőség kedvéért.

2.1. A potenciálelmélet alapkérdései

Ebben a szakaszban a klasszikus elmélet néhány alapfeladatát és a nekik megfelelő diszkrét problémát kivánjuk bemutatni. A felsorolás nem teljes, pusztán a későbbi kifejtéssel kapcsolatos illusztráció vele a célunk.

Az első tisztázandó kérdése az, hogy melyek a Laplace egyenlet megoldásai, azaz

$$\Delta f = 0$$

mely f függvényekre teljesül, ahol Δ a Laplace operátor. Másképp fogalmazva, ha P valószinüség-operátor, mely függvényekre teljesül

$$Pf = f$$

azaz melyek a reguláris függvények P-re nézve.

<u>2.1.1.D:</u> /Reguláris függvények/

Ha $P:H^2 \to [0,1]$ a belső állapotu bolyongás átmenetvalószinü-szinüség-operátora, P visszatérő és aperiodikus /hogy ez pontosan mit jelentsen, később tisztázzuk, most értsük azt, hogy minden H-beli helyről bármely másik pozitiv valószinüséggel elérhető/

$f:H \to R$ $f \geq 0$ függvény reguláris, ha

$$(Pf)(u) := \sum_{v\in H} P(u,v)f(v) = f(u) \quad \forall u \in H$$

azaz $Pf = f$ ○

<u>2.1.1.T:</u> Ha f reguláris $\Rightarrow$ f konstans. ○

<u>2.1.1.B:</u> Lásd 13.§.1.L. □

Érdemes megjegyezni, hogy az aperiodicitás szükséges feltétel. Az ellenpéldát 13.§ 1. Példa alapján egyszerüen megkonstruálhatjuk.

Hasznos lesz, ha e tételünket operátorokra is megfogalmazzuk:

2.1.2. Következmény

Ha P mint előbb

$$\left.\begin{array}{l} F:H^2 \to R \quad F \geq 0 \\ PF = F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists! f:\ H \to R \quad f \geq 0 \\ F = \mathbb{1} f^* \end{array}$$ O

Itt az $\mathbb{1}$ a H-n azonosan 1 függvényt jelöli. Gyakran fogjuk más "csupa 1-ből" álló vektorra is ezt a jelölést alkalmazni. Ha egyébként nem ad lehetőséget a félreértésre, akkor megjegyzést nem füzünk a használatához, nem látjuk el indexszel. $A(^*)$ jelölje az adjungálás operációt, amely véges vektortereknél a konjugálás és sor → oszlop, oszlop → sort cserét jelenti.

Fogalmazzuk meg a klasszikus Dirichlet feladatot. Legyen $D \subset R^2$ nyilt, egyszeresen összefüggő tartomány, melynek ∂D határa kellően sima egyszerü zárt görbe. Keresendő $u:\bar{D} \to R$ folytonos, korlátos függvény, melyre

/1/ $\Delta u = 0 \quad R^2 \setminus D \cup \partial D$

/2/ $u = \phi \quad \partial D$-n

Itt ϕ adott függvény ∂D-n. O

2.1.2.D: /Dirichlet feladat/

P visszatérő, aperiodikus
$B \subset H$ $\phi:B \to R$ adott fv és $|B| = \infty$ esetén korlátos, keresendő olyan korlátos $f:H \to R$ függvény, melyre

/1/ $(Pf)(u) = f(u) \ \forall u \in H \setminus B$

/2/ $f(u) = \phi(u) \ \forall u \in B$ O

2.1.3.T: A P-re vonatkozó Dirichlet feladatnak $\exists! f$ megoldása és ha

$H_B(u,v) := P_u(U_n = v, U_i \notin B \quad i=0...n-1)$

$\Rightarrow f = H_B \phi$ O

2.1.3.B: 13.§2.L. □

A klasszikus Poisson feladat esetén D legyen az előbbi tartomány, legyen $\rho \geq 0$ függvény adott $\bar{D}$-n. Ez a ρ játsza a töltéseloszlás szerepét, ha elektrosztatikai hátteret képzelünk el feladatukhoz.

A kérdés az, milyen f potenciált kelt a ρ töltéseloszlás, azaz mely f függvényekre teljesül:

/1/ $\Delta f(x) = 0 \qquad x \in R^2 \setminus \bar{D}$

/2/ $\Delta f(x) = \rho(x) \quad x \in D$

/3/ $f(x) + \frac{1}{2\pi} \ln|x| \cdot [\int_D \rho(y)dy] \to 0$, ha $|x| \to \infty$

Megjegyezzük, hogy a klasszikus feladat megoldásának egyértelmüségét a /3/ feltétel - a logaritmikus potenciál keresése - biztositja. A megoldás $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0 \rho(y) \ln|x-y| dy$ alaku, ahol számunkra fontos, hogy a potenciálmag szerepét a logaritmus játsza.

2.1.3.D: /Poisson feladat/

P mint eddig aperiodikus visszatérő
$B \subset H$ $|B| < \infty$, $\rho: B \to R$ $\rho \geq 0$ függvény, melyet $H \setminus B$-n 0-nak definiálunk.
Keresendő f függvény, melyre igaz

/1/ $(P-I)f(u) = 0 \qquad \forall u \in H \setminus B$

/2/ $(P-I)f(u) = \rho(u) \qquad \forall u \in B$

/3/ $f \geq 0$ 0

2.1.4.T: Ha $A: H^2 \to R$ operátor kielégiti a

$$(P-I)A = I \qquad /2.1.1/$$

egyenletet, azaz a Poisson feladat partikuláris megoldása, akkor A a potenciál magja, azaz

$$f = A\rho$$

megoldása a Poisson feladatnak. O

A /2.1.1/ összefüggést a 2.6.13 Tételben fogjuk igazolni, magának a 2.1.4 Tételnek a bizonyitása triviális.

Ezzel elérkeztünk a negyedik és eredeti célunkat jelentő diffuziós feladathoz.

D az eddigi R^2-beli tartomány. Keresendő $u(x,t):R^2 xR \to R$ függvény, melyre

/1/ $\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{2} \Delta u$ ha $t > 0$ $x \in R^2 \setminus D$

/2/ $u(x,t) = 1$ ha $t > 0$ $x \in \partial D$

3/ $\lim\limits_{t \to +0} u(xt) = 0$ ha $x \in R^2 \setminus D$

Az /1/ összefüggés a jól ismert hővezetési egyenlet, /2/ azt fejezi ki, hogy ∂D határt "1 hőmérsékleten" tartjuk, /3/ pedig azt jelenti, hogy a kezdőpillanatban $R^2 \setminus D$-n 0 volt a hőmérséklet. Mint ismeretes, $u(x,t)$ megoldás $t \to \infty$ esetén konvergál a megfelelő Dirichlet feladat megoldásához: $u(x)$-hoz:

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = u(x) = 1 \qquad \forall x \in R^2 \setminus D$$

<u>2.1.4.D:</u> /Diffuziós feladat/

P aperiodikus, visszatérő $B \subset H$ $|B| < \infty$

/1/ $(Pf_n)(u) = f_{n+1}(u)$ ha $n \geq 0$ $\forall u \in H \setminus B$

/2/ $f_n(u) = 1$ ha $n \geq 0$ $\forall u \in B$

/3/ $f_0(u) = 0$ ha $\forall u \in H \setminus B$ O

Vezessük be egy tetszőleges $B \subset H$ halmaz első elérésének idejét.

<u>2.1.5.D:</u> /T_B/

$B \subset H$

$$T_B := \min \{ k \in N \mid U_k \in B \}$$

$T_B := \infty$ ha a definiáló halmaz üres. O

<u>2.1.5.T:</u> A diffuziós feladatnak $\exists!$ f_n megoldása

$$f_n(u) = \begin{cases} P_u(T_B \le n) & \text{ha } u \in H \setminus B \\ 1 & \text{ha } u \in B \end{cases}$$ O

<u>2.1.5.B:</u> Közvetlenül adódik f_n definiciójából, hogy megoldás, az egyértelmüség pedig a rekurziv definiálhatóság //1/ miatt/ teljesül /lásd 16.§/. $\Box$

Végső célunk a T_B valószinüségi változó vizsgálata, amely számos nem stacionárius jelenség megértéséhez visz közelebb. Meg fogjuk határozni a

$$\frac{P_v(T_B > n)}{P_u\,(T_{\{u\}} > n)}$$

hányados határértékét, ha $n \to \infty$.

Érdemes két egyszerübb eredményt előrebocsátani. Ha $B = \{u_0\}$ egyelemü halmaz, akkor igaz lesz a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_v(T_{\{u_0\}} > n)}{P_{u_0}(T_{\{u_0\}} > n)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(v, u_0) - P_n(u_0, u_0)$$

összefüggés, ahol a jobboldal is konvergens. /$u_0 \in H$ speciálisan választott rögzitett elem./

A másik érdekes összefüggés az időbeli viselkedésre ad aszimptotikát:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(\alpha)s}{\pi} \ln(n).P_{(C,\alpha)}(T_{\{(O,\alpha)\}} > n) = 1$$

2.2. Alapdefiniciók

Ebben a szakaszban ismertetjük Krámli András és Szász Domokos [9]-beli eredményét.

Először tetszőleges $d \in N$ dimenzióra definiálunk néhány fogalmat.

M véges halmaz, melyet azonositunk az $\{1,2,\dots,m\} \subset N$ halmazzal $H=Z^d xM$ az U_n belső állapotu bolyongás állapottere. Jelölje L az U_n Markov lánc átmenetvalószinüség-operátorát.

2.2.1.D: /L/

$$L: \ell_1(H) \to \ell_1(H)$$

$$(Lf)(x) = \sum_{y \in Z^d} L_y f(x+y) \qquad \forall x \in Z^d \qquad /2.2.1/$$

L_y pedig L_y: $C^m \to C^m$ lineáris operátor

$$L_y = (P_{y,\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,m} \qquad /2.2.2/$$

mátrixszal definiálható a szokásos bázisában C^m-nek, továbbá

$$f := \{f(x) \ x \in Z^d \ f(x) \in C^m\}$$

$\ell_1(H)$ beli függvény vektora. O

Az U_n definiciója és P eltolásinvarianciája miatt az $\varepsilon_o, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ a sorozat M állapotterü Markov láncot alkot, melynek átmenetvalószinüség-mátrixa Q.

2.2.D: /Q/

$$Q := \sum_{y \in Z^d} L_y \qquad /2.2.3/$$

I. Feltevés:

Q ergodikus és aperiodikus. O

Feltevésünkből következik, hogy $\exists! \mu \in R^m$ stacionárius eloszlás az M-en

$$\mathbb{1}^* \mu = \sum_{\alpha \in M} \mu(\alpha) = 1 \qquad \mu^* Q = \mu^* \qquad /2.2.4/$$

igaz persze a $Q\mathbb{1} = \mathbb{1}$ összefüggés is, hiszen Q sztochasztikus mátrix.

2.2.3.D: /Fourier transzformált/

Ha $f \in \ell_1(H)$ jelölje $\hat{f}$ a Fourier transzformáltját, ekkor

$$\hat{f}(t) := \sum_{y \in Z^d} e^{i(t,y)} f(y) \quad t \in [-\pi, \pi]^d \qquad /2.2.5/$$

ha pedig $L: \ell_1(H) \to \ell_1(H)$ operátor, akkor Fourier transzformáltja $\hat{L}$ legyen

$$\hat{L}(t) = \sum_{y \in Z^d} e^{i(t,y)} L_y \quad t \in [-\pi, \pi]^d \qquad /2.2.6/ \quad O$$

Igy $\alpha(t) = \hat{L}(t)$ nem már mint a P karakterisztikus függvénye, ami maga is operátor:

$$\alpha(t). C^m \to C^m \qquad t \in [-\pi, \pi]^d$$

Igaz továbbá, hogy

$$P(U_n=(x,\alpha)\,|\,U_0=(0,\alpha)) = (\delta^{*}_{0,\alpha}\, L^n)(x)\mathbb{1} \qquad /2.2.7/$$

ahol

$$\delta_{0\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x\neq 0 \\ e_\alpha & \text{ha } x=0 \end{cases} \qquad \delta_{0\alpha}\in \ell_1(H).\ e_1,\dots,e_m \quad C^m$$

a C^m szokásos bázisa.

Igy az inverziós formula szerint:

$$P(U_n=(x,.)\,|\,U_0=(0,\alpha)) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{-\pi}^{\pi}\dots\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(x,t)} e^{*}_{\alpha}{}^{n}(t)dt \qquad /2.2.8/$$

<u>2.2.4.D:</u> /M, Σ/

$$M_\ell := \sum_{y\in Z^d} y_\ell\, L_y \qquad \ell=1,2,\dots,d \qquad /2.2.9/$$

$$\Sigma_{k,\ell} := \sum_{y\in Z^d} y_k\, y_\ell\, L_y \qquad k,\ell=1,2,\dots,d \qquad /2.2.10/$$

ahol $y^{*}=(y_1,\dots,y_d)\in Z^d$ a komponensek irásmódja. O

<u>II. Feltevés:</u>

A /2.2.9/ és /2.2.10/ kifejezésekben szereplő szummák abszolut értelemben konvergensek. O

<u>III. Feltevés:</u>

$$\mu^{*} M_\ell \mathbb{1} = 0 \qquad \ell=1,2,\dots,d \qquad /2.2.11/$$

$$\sigma := (\sigma_{k,\ell})_{k,\ell=1,\dots,d} \text{ pozitiv definit operátor} \qquad /2.2.12/$$

ahol

$$\sigma_{k,\ell} := \mu^{*}\Sigma_{k,\ell}\mathbb{1} - \mu^{*}[M_k(Q-I)^{-1}M_\ell + M_\ell(Q-I)^{-1}M_k]\mathbb{1} \qquad /2.2.13/$$

O

A Peron-Frobenius tételből és I Feltevésből következik, hogy Q-nak az 1 egyszeres sajátvektora 1 sajátértékkel, továbbá, hogy minden más sajátértéke 1-nél kisebb abszolutértékü. Legyen $\lambda(t)$ az $\alpha(t)$ legnagyobb abszolutértékü sajátértéke $\phi(t)$ sajátvektorral, azaz

$$\alpha(t)\phi(t) = \lambda(t)\phi(t).$$

Mint [9]-ből kiderül:

<u>1. Alaplemma:</u>

Ha igaz az I, II, III feltevés, akkor $\lambda(t)$ sorfejtése

$$\lambda(t) = 1 - \frac{1}{2} t^{*}\sigma t + o(|t|^2) \qquad /2.2.14/$$

alaku. O

<u>2. Alaplemma:</u>

Ha $\mu^{*}(t)\alpha(t) = \hat{\lambda}(t)\mu^{*}(t)$ a baloldali sajátvektorok közül a legnagyobb abszolutértékkel rendelkező a $\hat{\lambda}(t)$ sajátérték $\mu(t)$ sajátvektorral, akkor sorfejtése $\phi(t)$, illetve $\mu(t)$-nek.

$$\phi(t) = 1 + \phi_1 t + o(|t|^2) \qquad /2.2.15/$$

$$\mu(t) = \mu + \mu_1 t + o(|t|^2) \text{ alaku} \qquad /2.2.16/$$

O

A belső állapotu bolyongások aritmetikája a következő két csoporttal jellemezhető:

<u>2.2.5.D:</u> /S, G/

$$S := \{t \in [-\pi,\pi]^d : \|\alpha(t)\| = 1\}$$

itt $\| \ \|$ a spektrál-normát jelöli, $|S| < \infty$.

E halmaz zárt részcsoportja a d-dimenziós tórusznak, G pedig a Z^d-n P által /illetve S által/ generált minimális /duális/ részcsoport.

$G := \{y \in Z^d : \forall t \in S \ (y,t) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\}$ O

Ha $|S|>1$, akkor lehetséges, hogy a H állapottér több zárt részosztályra bomlik $H = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$ ugy, hogy ezek az osztályok diszjunktak és $u \in H_i, v \notin H_i$ esetén $\forall n$-re $P_n(u,v) = P_u(U_n=v) = 0$. Ebben az esetben viszont, ha $U_0 \in H_i$, akkor $\forall n$-re $U_n \in H_i$ is fenáll /hisz H_i zárt osztály/, igy elég ezen osztályokat külön-külön vizsgálnunk. Nem jelent tehát tényleges megszoritást, ha feltesszük a következőt:

IV. Feltevés:

H egyetlen zárt osztályt alkot az U_n Markov-láncra nézve. O
E feltevés mellett is lehetséges, hogy $|S|>1$, viszont biztos, hogy $\forall n$, $v \in H$-ra $\exists n \in N$: $P_n(u,v)>0$. Másrészt igy az is biztos, hogy $\forall n$ H állapot periodusa azonos, ha $|S|=1$ akkor èz a periódus 1. Érdemes megjegyezni,hogy ez utóbbi esetben, azaz ha $|S|=1$, a Spitzer által erősen aperiodikusnak nevezett bolyongáshcz jutunk. /Vö. 5.§.1.D 7.§.8.L./.

A reguláris függvények 2.1.1 Definiciója során P-re kirótt feltevéseket most már pontositani tudjuk, az aperiodicitás éppen a IV. Feltevésünket jelentette.

Dolgozatunk teljes hátralévő részében tegyük fel, hogy P teljesiti az I-IV kikötéseket. Ha más élesitésre vagy gyengitésre nincs szükségünk, akkor a P-re nem teszünk megkötést,automatikusan feltesszük I-IV-et.

2.2.1.T: /Centrális határeloszlás tétel/

Ha P-re teljesül I-III,

g_σ a σ szórásu nulla várhatóértékü normális eloszlás sürüségfüggvénye, σ a /2.2.12/-beli szórásmátrix

χ_G pedig a G csoport indikátora

$\phi, \phi_\alpha, \rho_\beta \in Z^d$

$s:=|S|$, akkor

$$\sum_{(x,\alpha)\in H} \left| n^{\frac{d}{2}} P_{(0,\beta)}(U_n=(x,\alpha)) - s\mu(\alpha) g_\sigma\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\chi_G(-x+n(\phi+\rho_\alpha-\rho_\beta))\right| \qquad /2.2.17/$$

Kifejezés tart O-hoz ha $n\to\infty$. ◻

Megjegyezzük, hogy $s=1$, akkor $\chi_G \equiv 1$.

2.3. A potenciálmag

E szakaszban és a hátralévőkben a $d=2$ dimemziós esetet vizsgáljuk a már emlitett I-IV. feltevések mellett.

Nem visszatérő Markov láncokra a

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n$$

sor konvergens, igy $A=(I-P)^{-1}$ előállitása igen egyszerü, ez lehet a potenciálmag. Nehézséget a visszatérő Markov-láncok jelentenek, ezen belül is a Markov null-láncok, azaz ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} P^k = 0$$

A kétdimenziós belsőállapotu bolyongások éppen ebbe a csoportba tartoznak. Fő feladatunk az lesz, hogy belássuk a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| P_k(0\delta,0\delta)\frac{\mu(\beta)}{\mu(\delta)} - P_k(x\alpha,0\beta)\right| \qquad /2.3.1/$$

és a

$$\sum_{u=0}^{\infty} \left| P_k(x\alpha,0\beta) - P(y\gamma,0\beta)\right| \qquad /2.3.2/$$

sorok konvergenciáját. Ez Kemény, Snell terminológiája szerint [1] azt jelenti, hogy Markov-láncunk normális. E tulajdonságból számos állitás már egyszerüen következik, mint például az, hogy a $P_{n+1}H_B$ operátornak $n\to\infty$ esetén véges limesze van, mégpedig $1\rho_B^{x}$ alakban, ahol ρ_B^{x} valószinüségeloszlás a távolról induló bolyongás B-be lépésének eloszlása lesz.

Érdemes megjegyezni, hogy a gyengébb

$$(x)\lim_{n\to\infty} \sum_{w} P_{n+1}(u,w)H_B(w,v)-P_{n+1}(Z,w)H_B(w,v) < \infty$$

állitást minden további feltevés nélkül, egyszerüen be lehet látni. /Lásd még [1] (x) feltétel 230.0/ nekünk viszont ez az összefüggés nem elegendő a további vizsgálatok során, szükségünk van a normalitás bizonyitására.

<u>2.3.1.D:</u> /G_n/

$$G_n := \sum_{k=0}^{n} P_k \qquad \text{O}$$

$G_n(u,v)$ tehát annak a várható értéke, hogy u-ból indulva hányszor járt a bolyongás v-ben n lépés alatt.

<u>2.3.2.D:</u> /B_n, B/

$$B_n(x\alpha,y\beta):= G_n(x\alpha,x\alpha)\frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} - G_n(x\alpha,y\beta)$$

$$B(x\alpha,y\beta) = \lim_{n\to\infty} B_n(x\alpha,y\beta)$$

ahol (x,α), $(y,\beta)\in H$. O

<u>2.3.1.L:</u> Ha fennáll I-III és s=1

$B(O\alpha,O\beta)$ definiciója értelmes az előállitó limesz véges. O

2.3.1.B:

Az inverziós formula szerint

$$B_n(O\alpha, O\beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_\alpha^* \sum_{k=0}^{n} \alpha^k(t)[e_\alpha \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} - e_\beta]\, dt$$

Legyen $\alpha_1(t) = \alpha(t)-\lambda(t)\phi(t)\mu^*(t)$, ahol $\phi(t)$ és $\mu(t)$ ugy van normálva, hogy $\phi^*(t)\mu(t) = 1$. $\phi(t)$ és $\mu(t)$ definiciója szerint $\|\alpha_n(t)\| < 1$, igy elég $\alpha(t) = \alpha_1(t) + \lambda(t)\phi(t)\mu^*(t)$ felbontás második tagjának integrál-beli vizsgálata, hiszen $\Sigma\alpha_1^k = (I-\alpha_1)^{-1}$ konvergens sor integrálható. Másrészt $\alpha_1(t)\phi(t) = 0$ és ezért $\alpha^k = \alpha_1^k + (\lambda\phi\mu^*)^k$ a hatványozás egyszerü eredménye.

$$(**)\quad I_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\lambda^{n+1}(t)}{1-\lambda(t)}\, e_\alpha^*\phi(t)\mu^*(t)[e_\alpha \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} - e_\beta]dt$$

A 2. Alaplemma szerint $\mu(t) = \mu + \mu_1 t + O(|t|^2)$, μ pedig merőleges

$$e_\alpha \cdot \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} - e_\beta \quad \text{-ra.}$$

Tudjuk az s=1 feltételből, hogy $|\lambda(t)| < 1$, ha $t \neq 0$, igy ezt a pontot kivéve az integrálási tartományból $n \to \infty$ esetén $(**)$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{1}{1-\lambda(t)} [c_1 t + O(|t|^2)]dt$$

alakot ölti Lebergue tétele szerint. Ha felhasználjuk az 1. Alaplemmát is

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{c_1 t + o(|t|^2)}{\frac{1}{2}t^*\sigma t + o(|t|^2)}\, dt$$

integrálhoz jutunk, ami véges, mert σ pozitiv definit. Ezzel a kivánt integrál felbontásának mindkét tagjáról beláttuk, hogy véges. □

2.3.2.L: Ha fennáll I-III és s=1, $\alpha,\beta\in M$

$$C_n(O\alpha,O\beta):=G_n(O\alpha,O\beta)-G_n(O\beta,O\beta)$$

$$C(O\alpha,O\beta):=\lim_{n\to\infty}G_n(O\alpha,O\beta)$$

$\Rightarrow$ $C(O\alpha,O\beta)$-t definiáló limesz létezik és véges. O

2.3.2.B: Lényegében azonos az előző lemma bizonyitásával, $\mu(t)$ helyett $\phi(t)$ sorfejtését használjuk és azt, hogy $e_\alpha-e_\beta$ merőleges 1-re. □

2.3.3.L: Ha fennáll I-III és s=1

$$x\in Z^2,\delta,\beta\in M$$

$$D_n(x\delta,O\beta):=G_n(O\delta,O\delta)\frac{\mu(\beta)}{\mu(\delta)}-G_n(x\delta,O\beta)$$

$$D(x\delta,O\beta):=\lim_{n\to\infty}D_n(x\delta,O\beta)$$

$\Rightarrow$ a D-t definiáló limesz létezik és véges. O

2.3.3.B: A 12.§.1. Állitás és az eddigiek alapján nyilvánvaló. □

2.3.4.T: Ha fennáll I-III és s=1 $x\in Z^2$ $\alpha,\beta,\delta\in M$

$$E_n^\delta(x\alpha,O\beta)=G_n(O\delta,O\delta)\frac{\mu(\beta)}{\mu(\delta)}-G_n(x\alpha,O\beta)$$

$$E^\delta(x\alpha,O\beta):=\lim_{n\to\infty}E_n^\delta(x\alpha,O\beta)$$

$\Rightarrow$ az E^δ-t definiáló limesz létezik és véges. O

2.3.4.B: Állitásunk az előző lemmák egyesitése. □

2.3.2.D: /δ_o,Θ/

Legyen $\delta_o \in M$ az a belső állapot, melyre

$$\max_{\delta\in M} E^{\delta}(O\beta,O\beta) \leq E^{\delta_o}(O\beta,O\beta)$$

egy rögzitett β-ra.

Ilyen létezik, hisz M véges, ha több van tetszőlegesen választunk közülük, látható, hogy β-től független a definició. Jelölje $\Theta:=(O,\delta_o) \in H$ a megfelelő kitüntetett H-beli elemet. A továbbiakban ez lesz a potenciálok "viszonyitási nivója". O

2.3.3.D: /Potenciálmag/

$$x,y\in Z^2,\quad \alpha,\beta\in M$$
$$A(x\alpha,y\beta) := E^{\delta_o}(x\alpha,y\beta)$$ O

2.3.5.L: Ha fennáll I-III és $s=1 \Rightarrow \forall u,\ v\in M$

$$A(u,v) \geq 0$$
$$A(\Theta,\Theta) = 0$$ O

2.3.5.B: Nyilvánvaló a /2.3.2/ Definicióból. □

Megjegyezzük, hogy sajnos $A(u,v) = 0$-ból nem következik sem $u=V$, sem $u=\Theta$, $v=\Theta$, ahogy ez a klasszikus elméletben teljesül. Ez az A véges halmazon való invertálhatóságát fogja némileg neheziteni.

Következő tételünk a potenciálmag aszimptotikus viselkedéséről szól, kimondása csak a μ/μ tipusu normálásban tér el 12.§.2. állitásától.

2.3.6.T: Ha fennáll I-III és s=1 $\Rightarrow \forall x,\ y \in Z^2$ $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in$ M

$$\lim_{|x|\to\infty} \left| \frac{\mu(\gamma)}{\mu(\beta)} A(x\alpha, y\beta) - A(x\delta, O\gamma) \right| = 0 \qquad 0$$

2.3.6.B: A bizonyitás egyszerüen következik az eddigiekből 12.§.2. Tétel alapján. □

Az előző Lemmasort minimális technikai nehézségek árán általánosithatjuk az s > l esetekre is, igy igazak az alábbi tételek:

2.3.7.T: Ha fennáll I-IV $\forall u,\ v \in H$ a 2.3.3. Definició-beli limesz létezik és véges A(u, v) potenciálmag létezik és véges továbbá

$$A(u,v) \geq 0 \quad \text{és} \quad A(\Theta,\Theta) = 0 \qquad 0$$

2.3.8.T: Ha fennáll I-IV és $x,y \in Z^2$ $\alpha,\beta,\delta,\gamma \in$ M $\Rightarrow$

$$\lim_{|x|\to\infty} \left| \frac{\mu(\gamma)}{\mu(\beta)} A(x\alpha, y\beta) - A(x\delta, O\gamma) \right| + 0 \qquad 0$$

A további felépitésnél nem fogunk támaszkodni az alábbi önmagában is érdekes tételre, amely némileg erősebb feltevések mellett az $A(x\alpha, O\beta)$ potenciálmag $|x|$ logarotmusával való növekedését állitja. Vagyis A éppen a logaritmikus potenciálmag.

2.3.9.T: Ha fennáll I-IV, továbbá

1/ $M_1 = M_2 = 0$

2/ $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = 0$ $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \Sigma_0$

pozitiv definit

3/ $E((X_1 t)^{2+\delta}) < \infty$ valamely $\delta > 0$-ra

$$\Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} \left| A(x\alpha, O\beta) - \mu(\beta)\ln|x| \right| = c_0$$

ahol $x \in Z^2$ $\alpha,\beta \in M$ $c_o \in R$ $c_o > 0$ konstans. O

2.3.9.B: A bizonyitás lényeges, de technikai jellegü módositásokkal a 12.§.3. Tétel bizonyitásán alapszik. □

2.4. Elemi összefüggések, forditott bolyongások

2.4.1.D:

Legyen $B \subset H$ $|B| < \infty$

$T_B := \min\{k \in N \mid U_k \in B\}$

$Q_{n,B} := Q_n(u,v) := P_u(U_n = v,\ T_B > n)$ $u,v \in H \setminus B$

$$H_B(u,v) := \begin{cases} P_u(U_{T_B} = v,\ T_B < \infty) & u \in H \setminus B \quad v \in B \\ \delta(u,v) & u,\ v \in B \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\pi_B(u,v) := \begin{cases} P_u\,(U_{T_B} = v,\ T_B < \infty) & u,\ v \in B \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$g_B(u,v) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(u,v) & u,v \in H \setminus B \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$G_n(u,v) := \sum_{k=0}^{n} P_k(u,v) \quad u,v \in H$$

$$G(u,v) := \lim_{n\to\infty} G_n(u,v) \quad u,v \in H$$ O

Ezeket a valószinüségeket vagy várható értékeket gyakran fogjuk operátor alakkal röviditeni. Evidens például, hogy ha $Q_1 = Q_B$, $Q_o = I$, akkor fennáll a

$$Q_{n+1,B} = Q_{n,B}\, Q_{1,B}$$

összefüggés.

<u>2.4.1.L:</u>

Ha fennáll a IV feltevés, d pedig tetszőleges $\Rightarrow$

$$PH_B - H_B = \pi_B - I_B \quad \text{ahol } I_B = \begin{cases} I & \text{a } B^2 - n \\ 0 & H^2 \setminus B\text{-n} \end{cases} \qquad /2.4.1/$$

$$0 \leq g_B(u,v) \leq g_B(v,v) < \infty \quad \forall u,\ v \in H \qquad /2.4.2/$$

$$H_B(u,v) = g_B P(u,v) \quad u \notin B \quad v \in B \qquad /2.4.3/$$

$$G = H_B G \qquad /2.4.4/$$ O

<u>2.4.1.B:</u> 10.§.1. □

<u>2.4.2.D:</u> /Forditott bolyongás/

Legyen $D: H^2 \to R$ "diagonális mátrix"azaz $D(u,v) = 0$, ha $u \neq v$

$$D(u,u) := \frac{1}{\mu(\alpha)}, \text{ ha } u = (x,\alpha) \in H.$$

A forditott bolyongás /szintén H állapotterü Markov lánc/ átmenetvalószinüség-operátora $\overleftarrow{P}$

$$\overleftarrow{P} := DP^T D^{-1}, \quad \text{ahol } P^T \text{ a P transzponáltja.} \qquad /2.4.5/$$ O

Ez a definició koordinátás alakban:

$$\overleftarrow{P}(x\alpha, y\beta) = \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} P(y\beta, x\alpha) \quad x,y \in Z^2 \quad \alpha,\beta \in M.$$

<u>2.4.2.L:</u> Ha fennáll I és IV feltevés $\Longrightarrow$

$\overleftarrow{P}$ sztochasztikus operátor, azaz

$$\overleftarrow{P}\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

továbbá igaz, hogy μ a stacionárius eloszlása P-nek az M-en, azaz

$$\sum_{(x,\alpha) \in H} \mu(\alpha) \overleftarrow{P}(x\alpha, y\beta) = \mu(\beta) \qquad \forall (y,\beta) \in H.$$ O

2.4.2.B: Egyszerü számolással adódik. □

E lemma alapján már beszélhetünk forditott bolyongásról, melyre szintén definiálhatók a 2.4.1. Definició-beli mennyiségek, jelölje ezeket is $(\overleftarrow{\ })$

2.4.3.L: Ha fennáll I és IV feltevés

$$\overleftarrow{Q}\mathbb{1} = \mathbb{1}, \quad \mu^{*}\overleftarrow{Q} = \mu^{*}, \quad \overleftarrow{Q} = DQ^{T}D^{-1} \qquad /2.4.6/$$

$$\overleftarrow{G}_n = DG_n^{T}D^{-1} \qquad /2.4.7/$$

$$\overleftarrow{Q}_{n,B} = DQ^{T}_{n,b}D^{-1} \qquad /2.4.8/$$

$$\overleftarrow{\pi}_B = D\,{}_B^{T}D^{-1} \qquad /2.4.9/$$

$$\overleftarrow{g}_B = Dg_B^{T}D^{-1} \qquad /2.4.10/$$ o

Megjegyezzük, hogy hasonló állitás nem teljesül $\overleftarrow{H}_B$-ra.

2.4.3.B: Az állitások nyilvánvalóak a definiciókból, /2.4.9/-hez megjegyezzük, hogy $\overleftarrow{\pi}_B = \sum_{n=0}^{\infty} \overleftarrow{Q}_{n,B}P$,
/2.4.10/-hez hogy $\overleftarrow{g}_B = \sum_{n=0}^{\infty} \overleftarrow{Q}_{n,B}$. □

2.4.3.D: /λ/

$$\lambda: H \to R \quad \lambda(x,\alpha) := \mu(\alpha) \quad \forall (x,\alpha) \in H$$

speciális leképzést vezessük be. $B \subset H$ esetén λ_B jelölje B-re való megszoritását. o

2.4.4.L: Ha fennáll I és IV feltevés

$$\pi_B\mathbb{1} = 1 \quad \text{és} \quad \lambda_B^{*}\pi_B = \lambda_B^{*} \qquad /2.5.11/$$ o

2.4.4.B: Elég hivatkoznunk a 11.§.2. Állitásra és arra, hogy IV miatt $P_u(T_B<\infty)=1$. $\forall u \in H$. □

2.4.5.L: $P_{n+1}\,H_B = H_B + G_n[\pi_B - I_B]$ ha igaz I-IV o

2.4.5.B: 11.§.1. Állitás. □

2.4.6.L:

Ha $A_n = \frac{G_n(\circledast,\circledast)}{\mu(\delta_o)}(\mathbb{1}\lambda^{*}) - G_n$

vagyis az A összeg első n tagja, akkor

$$P_{n+1} H_B = H_B - A_n [\pi_B - I_B]$$

fenn az I-IV teljesülése esetén.

2.4.6.B: Vegyük észre, hogy □

$$A_n = \frac{G_n(\circledast,\circledast)}{\mu(\delta_o)}(\mathbb{1}\lambda^{*}) - Gn$$

2.4.7.T: Az I-IV feltevések esetén a $\lim_{n\to\infty} P_{n+1} H_B$ limesz létezik és véges

$$\lim_{n\to\infty} P_{n+1} H_B = \mathbb{1}\rho_B^{*}$$

ahol ρ_B valószinüségeloszlás B-n, azaz $\mathbb{1}^{*}\rho_B = 1$, továbbá fennáll a

$$H_B = \mathbb{1}\rho_B^{*} + A[\pi_B - I_B] \qquad /2.4.12/$$

összefüggés. O

2.4.7.B: A limesz létezése következik abból, hogy a 2.4.6 Lemmában szereplő A_n $n\to\infty$ esetén konvergál. Az $\mathbb{1}\rho_B^{*}$ alaku felbontás azt jelenti, hogy "messziről" indulva a B-be való belépés helye független a kezdőhelytől és ρ_B a belépési eloszlás. Ennek igazolása 11.§.3. Állitása szerint történik. □

A szemléletesség kedvéért /2.4.12/-t "koordinátás" alakban is megfogalmazzuk: $\forall u \in H$ és $\forall v \in B$-re.

$$H_B(u,v) = \rho_B(v) + \sum_{w\in B} A(u,w)[\pi_B(w,v) - \delta(w,v)]$$

A /2.4.12/ kifejezés központi szerepet fog játszanai számos bizonyitásunkban, bizonyos értelemben ez az összefüggés a ∂D határon vett normális menti deriválást takarja a diszkrét esetben. Vagyis a Gauss-Osztogradckij tételben szereplő integrálmag, ez biztositja a felületi és térfogati integrál közti kapcsolatot a diszkrét esetben.

2.5. A potenciálmag invertálhatósága véges halmazon

Ebben a szakaszban megpróbáljuk a H_B, ρ_B π_B mennyiségeket a potenciálmag segitségével kifejezni. Mint látni fogjuk, egy B véges halmazon invertálva a potenciálmagot /2.4.12/ alapján ez megvalósitható. Először a már nem triviális $|B|=2$ esetet vegyük, az igy kapott eredmények hasznosak lesznek az általános eset tisztázásához is és az invertálás szükségessége is e példán keresztül válik világossá.

Legyen $B = \{u,v\}$ $u = (x,\alpha)$, $v = (y,\beta)$. Teljesüljenek mindvégig az I-IV feltevések.

2.5.1.L:

Ha $\pi := \pi_B(v,u)$, akkor 2.4.4. Lemma miatt

$$\pi_B(v,v) = 1 - \pi_B(v,u) = 1-\pi \qquad /2.5.1/$$

$$\pi_B(u,v) = \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} \pi_B(v,u) = \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} \pi \qquad /2.5.2/$$

$$\pi_B(u,u) = 1 - \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} \pi \qquad /2.5.3/$$

o

2.5.2.L: /2.4.12/ és az előző Lemma alapján

$$I_B = 1\rho_B^{\mathbf{x}} + \pi \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \qquad /2.5.4/$$

ahol $a := A(u,v) - \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} A(u,u)$

$b := \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} A(v,u) - A(v,v)$

Igaz továbbá , hogy

$$a \geq 0$$
$$b \geq 0$$
$$a+b > 0$$
$$1 > \pi > 0$$

$$\rho_B(u) = \frac{b}{a+b} \quad \rho_B(v) = \frac{a}{a+b} \qquad /2.5.5/$$

$$\pi = \frac{1}{a+b} \qquad /2.5.6/$$

$$H_B(w,v) = \frac{A(w,u)\,\frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} - A(w,v)}{a+b} \qquad /2.5.7/ \qquad \circ$$

<u>2.5.3.L:</u> Felhasználva az előző lemmát és azt, hogy

$$g_u(w,v) = H_{\{u,v\}}(w,v)g_u(v,v) \qquad /2.5.8/$$

$$g_u(v,v) = \frac{1}{\pi_B(v,u)} \quad v \in H \qquad /2.5.9/$$

azaz általában

$$g_u(w,v) = \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)}\,A(w,u) - A(w,v) + A(u,v) - \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)}\,A(u,u)$$
$$w, v \in H \qquad /2.5.10/ \qquad \circ$$

Látható a /2.4.12/ összefüggésből, hogy egy olyan lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, amelynek AX=I az alakja. Vagyis, ahogy ezt $|B|=2$-re ki lehet számolni, az A inverzét kell megkapnunk először. Ez viszont a Spitzer járta úttól eltérően nem mindig lehetséges. A-nak B^2-re megszoritása A_B nem feltétlenül invertálható. Hogy miért, arra az alábbi tétel ad magyarázatot.

<u>2.5.4.T:</u>

Ha $b=|B|$ $2 \leq b < \infty$ és A_B az A potenciálmag B^2-re való megszoritása

$$|u| = 1, \; u^{*} A_B = 0 \Rightarrow \exists\, a \in B: u = \pm e_a \qquad /2.5.11/$$

$$\rho_B = e_a \qquad /2.5.12/$$

és alkalmasan átrendezve B felsorolását $B = \{b_1, \dots, b_b\}$ $b_b = a$ módon

$$A_B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ b \end{array}, \quad r(A_B) = b-1 \qquad /2.5.13/$$

alaku lesz a b-1 rangu A_B mátrix. O

2.5.4.B: Ha a /2.4.12/ összefüggést B^2-ra megszoritjuk, akkor a

$$H_B = I_B = 1_B \rho_B^{*} + A_B[\pi_B - I_B] \qquad /2.5.14/$$

összefüggést kapjuk. Ha $u^{*}A_B = 0$ és $u \not\equiv 0$, azaz A_B nem invertálható, $\Longrightarrow u^{*} = u^{*}(1_B\rho_B^{*}) = (u^{*}1_B)\rho_B^{*} \geq 0$, igy u komponensei állandó előjelüek, feltehetjük, hogy $u \geq 0$. Mivel 2.3.5. Lemma szerint $A_B \geq 0$, ha $A_B = [a_1, \dots, a_b]$ akkor $u^{*}a_i = 0$ $\forall i = 1, \dots, b$, de akkor $u_j > 0$-ból következik $a_i(j) = 0$ $\forall i = 1 \dots b$, $\forall_j = 1 \dots b$-re. Vagyis A_B bizonyos soraiban csupa nulla áll. Tegyük fel, hogy

$u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$ $u_{k+1}, \dots u_b > 0$, ami alkalmas átrendezéssel elérhető, akkor $a_j(k+1), \dots, a_j(b) = 0$ $\forall i = 1, 2, \dots, b$ vagyis egyenletünkből

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & \dots & \rho_b \\ & & \\ \rho_1 & \dots & \rho_b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} [\pi_B - I_B]$$

formát kapjuk.

Ebből viszont egyszerüen leolvasható, hogy $\rho_1 = \rho_2 = \dots \rho_{b-1} = 0$, de másrészt $\rho_{k+1} = 1$ is fennáll, ami lehetetlen, ha $k \neq b-1$. Igy $\rho_B(b) = \rho_b = 1$ és $\nu(A_B) = b-1$, $u = e_b$. □

2.5.1.D: /A_B inverze K_B/

Legyen $2 \leq |B| < \infty$, λ_B a λ B-ra való megszoritása. K_B az A_B általánositott inverze, ha a/ A_B-nek létezik inverze $\Rightarrow K_B := A_B^{-1}$

b/ ha A_B-nek nincs inverze $\Rightarrow K_B := (A_B + e_b\,\lambda_B^{*})^{-1}$

ahol e_b az előző tétel szerinti rendezésből nyert vektor. Vezessük még be a következő jelöléseket

$$K_B(.,v) = (\lambda_B^{*} k_B)(v) \qquad v \in B$$

$$K_B(u,.) = (K_B \mathbb{1}_B)(u) \qquad u \in B$$

$$K_B(.,.) = \lambda_B^{*} K_B \mathbb{1} \qquad \text{O}$$

2.5.5.L: Ha $2 \leq |B| < \infty$ $B \subset H \Rightarrow K_B$ definiciója értelmes, azaz ha 2.5.1.D. b/ esetre áll fenn, akkor

$(A_B + e_b\,\lambda^{*}B)$-nek létezik inverze.

Igazak továbbá általában a

$$K_S(.,.) > 0 \qquad /2.5.15/$$

$$\rho_B^{*} = \frac{1}{K_B(.,.)}\,\lambda_B^{*} K_B \qquad /2.5.16/$$

$$\pi_B - I_B = K_B - \frac{K_B \mathbb{1}_B \lambda_B^{*} K_B}{K_B(.,.)} \quad \text{összefüggések} \qquad /2.5.17/ \quad \text{O}$$

Ezek alapján már a H_B értékét is meg tudjuk határozni a /2.4.12/ alapján.

2.5.5.B: A /2.5.15/ - /2.5.17/ összefüggések könnyen igazolhatók a 11.§.1. bizonyitását követve. Nekünk csak azt kell belátnunk, hogyha A_B nem invertálható, akkor $D = (A_B + e_B\lambda_B^{*})$ invertálható. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, azaz, hogy $u:B \to R$ $u \not\equiv 0$ /$|u|=1$ az általánosság rovása nélkül/, melyre $u^{*}D = 0$. Ekkor /2.5.13/ szerint

$$I_B = \mathbb{1}\rho_B^{*} + (A_B + e_B\,\lambda_B^{*})[\pi_B - I_B]$$

hiszen 2.4.4. lemmából következik $\lambda_B^{*}[\pi_B - I_B] = 0$. Balról u^{*}-al szorozva

$$u^{*} = u^{*}\mathbb{1}e_{b}^{*} ,$$

hiszen $\rho_B = e_b$, de

$e_b^{*} A_B = 0$, igy $u^{*}D = (u^{*}\mathbb{1})\lambda_B^{*} = 0$-ból $u^{*}\mathbb{1} = 0$

és igy $u^{*} = 0$. □

2.6. Green függvények és tulajdonságaik

Ebben a szakaszban belátjuk, hogy az A potenciálmag a Poisson egyenlet partikuláris megoldása. Segitségével kifejezzük $B \subseteq H$ véges halmazok g_B Green függvényét és leirjuk aszimptotikus viselkedését is. g_B előállitása során melléktermékként azt is belátjuk, hogy a $(P-I)F=I$ egyenlet megoldásai $A+\mathbb{1}f^{*}$ alakuak, ha $F-A$ korlátos.

E részben is feltesszük, hogy teljesül I-IV.

2.6.1.T: Az A potenciálmagra fennáll

$(P-I)\,A = I$ összefüggés O

2.6.1.B: Feladatunk némileg bonyolultabb, mint a 13.§.3. bizonyitása, ezért a fő lépéseket összefoglaljuk. Tudjuk, hogy

$$A_n = \frac{G_n(\bullet,\bullet)}{\mu(\delta_0)}(\mathbb{1}\lambda^{*}) - G_n$$

ezért $PA_n = A_n + I - P_{n+1}$

de $n\to\infty$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} PA_n = A + I$

viszont lim és P nem feltétlen felcserélhető. A Fatou lemma szerint:

$$\lim_{n\to\infty} PA_n \geq P \lim_{n\to\infty} A_n , \text{ igy } PA \leq A + I$$

Legyen az eltérés $F := A+I-PA \geq 0$, igy $PA = A+I-F$. Viszont $\overleftarrow{P} = DP^T D^{-1}$-ből következik

$$\overleftarrow{A} = DA^T D^{-1}$$

is. Ebből viszont következik már

$$\overleftarrow{F} = DF^T D^{-1}$$

is. Ezután $\overleftarrow{P}$-ra alkalmazzuk a 13.§.3. Állitás megfelelő lépéseit a

$$\overleftarrow{H}_B = \mathbb{1}\overleftarrow{\rho}^{*}_B + \overleftarrow{A}\,[\overleftarrow{\pi}_B - I_B]$$

egyenletre. Azt kapjuk, hogy

$$\overleftarrow{F}\,(\overleftarrow{\pi}_B - I_B) = 0$$

amiből $(\pi_B - I_B)\,F = 0$ és kételemü B halmaz esetén könnyen látható, hogy $\exists f$: $F = \mathbb{1}f^{*}$, igy

$$P_n A = A + G_{n-1} - n\mathbb{1}f^{*}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} 1/n\; P_n A = -\mathbb{1}f^{*}$$

mert $1/n\; A$ és $1/n\; G_n \to 0$, ha $n\to\infty$. Ekkor viszont $f \leq 0$, de $F \geq 0$ volt, igy $f = 0$. □

Ezután belátjuk a "Messziről jött ember" tételét. Megmutatjuk ugyanis, hogy a távoli kezdőhelytől független a B-be lépés eloszlása, igy a B-be lépő azt mond a kezdőhelyről, amit akar.

<u>2.6.2.T:</u> Ha B H $2 \leq |B| < \infty$, akkor a

$$\text{a} \lim_{|x|\to\infty} H_B(x\alpha, v) =: H_B(\infty, v) =: B^{*}_B(v) \quad \forall v \in B \quad \forall \alpha \in M$$

limesz $\forall v \in B$, $\alpha \in M$-re létezik és véges, továbbá

$$H_B(\infty, v) = \frac{\lambda^{*} K_B}{K_B(.,.)}(v) = \rho^{*}_B(v) \qquad 0$$

2.6.2.B: Ujra felhasználjuk a $\lambda_B^*[\pi_B - I_B] = 0$ összefüggést és igy

$$\sum_{v\in B} A(u,v)[\pi_B(v,w)-I(v,w)] = \sum_{v\in B} [A(u,v)-A(u,\Theta)\frac{\lambda^*(v)}{\mu(\delta_o)}][\pi_B(v,w) - I_B(v,w)]$$

Ha felhasználjuk a /2.4.12/ összefüggést és a 2.3.8 Tételt akkor a kivánt állitáshoz jutunk. □

E tétel teszi világossá, hogy A_B miért nem invertálható. Ha ugyanis B-be csak egy $b \in B$ ponton át lehet belépni, akkor $H_B(\infty,v) = \rho^* B(v)$ nulla, hacsak $v \neq b$. Ebből pedig már könnyen adódik, hogy A_B-nek a b-edik sora csupa nullából áll. Ezután egy technikai jellegü lemma következik.

2.6.3.L:

Ha $\overleftarrow{L} = DL^T D^{-1} \Rightarrow (\overleftarrow{\overleftarrow{L}}) = L$ /2.6.1./

$D(1\lambda^*)^T D^{-1} = 1\lambda^*$ /2.6.2/

$\overleftarrow{K}_B = DK_B^T D^{-1}$ /2.6.3/

$\overleftarrow{K}_B(.,.) = k_B(.,.)$ /2.6.4/

$$\frac{1}{K_B(.,.)} \cdot K_B 1\lambda_B^* = D[1\lambda_B^* \overleftarrow{K}_B]^T D^{-1} = D[1\overleftarrow{\rho}_B^{*\,T}]D^{-1} \qquad /2.6.5/$$ O

2.6.3.B: Egyszerü számolással adódik. □

Ezek után már kis tudjuk számolni a g_B Green függvényt, ha $2 \leq |B| < \infty$. A $|B| = 1$ esetet 2.5.3. Lemma tartalmazza.

2.6.4.T: Ha $B \subset H$ $2 \leq |B| < \infty$

$$g_B = -A - \frac{1\lambda^*}{K_B(.,.)} + AD[1\overleftarrow{\rho}_B^*]^T D^{-1} + (1\rho_B^*)A + A[\pi_B - I_B]A \qquad /2.6.6/$$

ahol

$$\rho_B^* = \frac{\lambda^* K_B}{K_B(.,)} \quad \text{és} \quad 1\overleftarrow{\rho}_B^* = \frac{1\lambda^* \overleftarrow{K}_B}{K_B(.,.)}$$ O

2.6.4.B:

Felhasználva az előző lemma összefüggéseit a 14.§.2. Tétel bizonyitását általánosithatjuk.

Legyen először $u \in B$, ekkor $g_B(u,v) = 0$ $\forall v \in B$-t kell igazolnunk. Ha a 2.4.7. Tétel /2.4.12/ összefüggését B-re megszoritjuk

$$A_B[\pi_B - I_B] = I_B - 1\rho_B^*$$

állitást kapjuk. Ezt felhasználva alakitsuk át /2.6.6/-ot.

$$-A_B - \frac{1\lambda_B^*}{K_B(\cdot,\cdot)}) + A_B\, D[1\overset{\leftarrow *}{\rho}]^T D^{-1} + 1\rho_B^* A_B + [I_B - 1\rho_B^*]\, A_B =$$

$$= - \frac{1\lambda_B^*}{K_B(\cdot,\cdot)} + A_B D[1_B^{*}\overset{\leftarrow}{\rho}]^T\, D^{-1} = 0$$

ezen utóbbi lépés /2.6.2/ és /2.6.5/ következménye.

Abban az esetben, ha $u \in H$ $v \in B$, $g_B(u,v) = 0$-t a következő módon igazolhatjuk. Alkalmazzuk a 2.4.7. Tételt a forditott bolyongásra, ebből azt kapjuk, hogy

$$[\pi_B - I_B]\, A_B = D[I_B - 1\rho_B^*]^T\, D^{-1}$$

felhasználva a forditott és eredeti bolyongás közti átmenetet. De ekkor

$$-A_B - \frac{1\lambda_B^*}{K_B(\cdot,\cdot)}) + A_B\, D[1\overset{\leftarrow *}{\rho_B}]^T\, D^{-1} + 1\rho_B^*\, A_B + A_B D[I_B - 1\overset{\leftarrow *}{\rho_B}]^T\, D^{-1} =$$

$$= \frac{1\lambda_B^*}{K_B(\cdot,\cdot)}) + 1\rho_B^*\, A_B = 0,$$

ahogy ez előbb is adódott K_B és ρ_B, illetve λ_B kapcsolatából.

Az általános eset $u,v \in H \setminus B$ bizonyitásához használjuk fel a g_B és H_B definiciójából adódó

$$H_B - I = g_B P - g_B$$

összefüggést a $\overleftarrow{P}$-ra.

Legyen továbbá $V := g + A$, ekkor

$$\overleftarrow{P}\overleftarrow{V} + \overleftarrow{V} + \overleftarrow{H}_B \qquad /2.6.7/$$

felhasználva az előző és a $PA = A + I$ összefüggést $\overleftarrow{P}$-ra. Az igy kapott egyenlet egy H_B jobboldalu Poisson egyenlet. /Lásd a 2.1. fejezetben 11. old./. Ezért remélhető, hogy $\overleftarrow{V}$-beli megoldásáról be tudjuk látni, hogy

$$\overleftarrow{V} = \mathbb{1}\tau^{*} + \overleftarrow{A}\,\overleftarrow{H}_B$$

alaku. A Poisson egyenlet egy megoldása a 2.1.4. és 2.6.1. Tétel alapján

$$\overleftarrow{W} = \overleftarrow{A}\overleftarrow{H}_B$$

alaku. Belátjuk, hogy a lehetséges megoldások a mi esetünkben ettől csak $\mathbb{1}\tau^{*}$-ban térnek el és meghatározzuk ezt a mátrixot is. E célból vegyük a $\overleftarrow{V}$ és $\overleftarrow{W}$ különbségét és irjuk fel a fenti egyenletek egybevetésével a $\overleftarrow{Z} := \overleftarrow{V} - \overleftarrow{W}$-re vonatkozót:
$\overleftarrow{Z} = g_B + A - H_B A$, melyet bővitve

$$\overleftarrow{Z} = g_B + A - (\mathbb{1}e_1^{*})A - H_B[(\mathbb{1}e_1^{*})A - A]$$

alakhoz jutunk. Ebben a kifejezésben g_B és $A - (\mathbb{1}e_1^{*})A$ korlátos a második változójában /felhasználva a 2.3.8. Tételt és g_B tulajdonságait/. Most felhasználva /2.6.7/-et, azaz hogy $\overleftarrow{V}$ kielégiti a Poisson egyenletet

$$\overleftarrow{P}\overleftarrow{Z} = \overleftarrow{Z}$$

összefüggéshez juthatunk. $\overleftarrow{Z}$ a második változójában korlátos és kielégiti a kapott egyenletet, ezért 2.1.2 következmény szerint

$$\overleftarrow{Z} = c.\mathbb{1}\tau^{*}$$

alaku lehet csak.

Ebből viszont

$$V = Dc\,\tau 1^{*}D^{-1} + H_B A$$

azaz

$$g_B = -A + DC1\tau^{*}D^{-1} + 1\rho_B^{*}A + A[\pi_B - I_B]A.$$

Ha pedig ujra felhasználjuk a $v \in B$ esetnél elmondottakat, akkor

$$D\,c\tau 1^{*}D^{-1} = -\frac{1\lambda^{*}}{K_B(\cdot,\cdot)} + AD[1\overset{\leftarrow}{\rho}{}_B^{*}]^T D^{-1}$$

adódik. Ezzel pedig a kivánt állitáshoz jutottunk. □

Az egységesség kedvéért, ha $|B| = 1$, akkor legyen

$$K_B(\cdot,\cdot) = \infty \quad \text{és} \quad \frac{1}{K_B(\cdot,\cdot)} = 0.$$

<u>2.6.5. következmény</u>

$$(\rho_B^{*}A)(u) \begin{cases} = \dfrac{1}{K_B(\cdot,\cdot)} & \text{ha } u \in B \\[2ex] \geq \dfrac{1}{K_B(\cdot,\cdot)} & \text{ha } u \in H \setminus B \end{cases}$$

<u>2.6.6.T:</u> Ha $B \subset H$ $1 \leq |B| < \infty$, akkor

$$g_B(u,\infty\beta) := \lim_{|y|\to\infty} g_B(u,y\beta) \quad (y,\beta) \in H \qquad u \in H$$

limesz létezik és véges. Ha

$$B = \{u\} \quad u = (x\beta)$$

$$g_u(w,\infty\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\mu(\beta)}[A(w,u) - A(u,u)] \qquad /2.6.9/$$

speciálisan, ha $u=\Theta$, akkor

$$g_\Theta(w,\infty\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\mu(\delta_o)} A(w,u). \qquad /2.6.10/$$

Ha pedig $|B| \geq 2$, akkor

$$g_B(u,\infty\alpha)= \frac{\mu(\alpha)}{K_B(\cdot,\cdot)} \sum_{\substack{t\in B\\ v\in B}} (A(ut)K_B(t,v)-I(u,v)) \qquad /2.6.11/$$

vagyis

$$g_B(\infty) = \left(\frac{AK_B}{K_B(\cdot,\cdot)} - I \right) \mathbb{1}\mu^{*} \qquad /2.6.12/$$

O

2.6.6.B: Legyen e_1 az $u \in H$ egységvektora

$$g_B(u,v) = [AD(\mathbb{1}\overset{\leftarrow *}{\rho}_B)^T D^{-1} - \frac{\mathbb{1}\lambda^{*}}{K_B(\cdot,\cdot)} + (H_B - \mathbb{1}e_1^{*})A](u,v) =$$

$$= (AK_B - I)\frac{\mathbb{1}\lambda^{*}}{K_B(\cdot,\cdot)}(u,v) + \sum_{t\in B} H_B(u,t)[A(tv)-A(uv)]$$

g_B-nek ehhez az előállitásához juthatunk, ha a 2.6.4. Tételben $A[\pi_B - I_B]$-t /2.4.12/ szerint helyettesitjük. A 2.3.8 Tétel szerint a második tag nullához tart, igy adódik az állitás a $|B| \geq 2$ esetben. Ha $|B| = 1$, akkor g_B-nek a 2.5.3. Lemma-beli előállitására alkalmazható a 2.3.8. Tétel és igy kapjuk a kivánt állitást. □

2.6.6.D: $g_B^{\infty}(u) := g_B^{*}(u,\infty.)\mathbb{1}$ O

2.6.7.L:

$$\exists u\in H:\ A(u,\Theta) \neq 0$$ O

2.6.7.B: Tegyük fel az ellenkezőjét, ekkor 2.6.1 Tétel szerint

$$0 = P_n A \Big|_{(u,\Theta)} = A(u,\Theta) + G_{n-1}(u,\Theta)$$

volna, ami ellentmondás, hiszen $G_n(u,\Theta)$ tart végtelenhez ha n tart végtelenhez, $A(u,\Theta)$ pedig konstans. □

2.6.8.L: Ha $|B| = 1 \Rightarrow g_B^\infty \not\equiv 0$ ○

2.6.8.B: Először legyen $B = \{\Theta\}$, de a 2.6.6. Tétel alapján

$$g_B^\infty(u) = \frac{1}{\mu(\delta_o)} A(u,\Theta) \not\equiv 0$$

Ha $B = \{u\}$, akkor

$$g_B^\infty(w) = \frac{1}{\mu(\delta_o)} [A(w,u) - 1A(u,u)]\mu^*$$

Az előző lemma bizonyitásához hasonlóan

$$0 = P_n g_B^\infty = \frac{1}{\mu(\delta_o)} [A(\cdot,u)+G_{n-1}(\cdot,u)-P_n 1A(u,u)]\mu^*$$

ellemontmondás. □

○

2.6.9.T: $g_B^\infty \not\equiv 0$

2.6.9.B: Megint indirekt módon bizonyithatunk

$$0 = P_n g_B^\infty = P_n \left[\frac{AK_B}{K_B(\cdot,\cdot)} - I \right] \frac{1\mu^*}{\mu(\delta_o)} =$$

$$= \frac{1}{\mu(\delta_o)} \left[G_n(\Theta,\Theta) \frac{\mu^*}{\mu(\delta_o)} - \mu^* \right]$$

ami ellentmondás. □

2.7. A hányados-limesz tétel

E szakaszban is tegyük fel, hogy P-re teljesül I-IV.

2.7.1.D: $/R_n/$

$$\forall\alpha \in M \quad T_\alpha := T_{\{(0,\alpha)\}}$$

$$R_n(\alpha) := P_{(0,\alpha)}(T_\alpha > n)$$ ○

2.7.1.L:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \ln(n).R_n(\alpha) = \frac{1}{\mu(\alpha)s} \quad \forall\alpha\in M \qquad (2.7.1)$$ O

2.7.1.B: Egyszerüen következik a 16.§.1. Példa becslését alkalmazva a centrális határeloszlás tételből. □

2.7.2. Következmény:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{(O,\alpha)}(T_\alpha > n)}{P_{(O,\beta)}(T_\beta > n)} = \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} \quad \forall\alpha,\beta\in M. \qquad (2.7.2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{n+1}(\alpha)}{R_n(\alpha)} = 1 \quad \forall\alpha\in H \qquad (2.7.3)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{2n}(\alpha)}{R_n(\alpha)} = 1 \quad \forall\alpha\in M. \qquad (2.7.4)$$ O

Érdemes megjegyezni, hogy az utóbbi két állitáson áll vagy bukik a hányados-limesz tétel, mint ahogy ez a bizonyitásból kiderül. A centrális határeloszlás tétel hiányában viszont nagy nehézséget jelentene (2.7.2), (2.7.3) igazolása.

2.7.3.T: Hányados-limesz tétel $|B| = 1$-re.

Legyen $B = \{u\}\subset H \quad u = (x\ \alpha), \quad v\in H\setminus B \implies$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_v(T_u > n)}{P_u(T_u > n)} = \mu(\alpha).\, g_u^\infty(v) = A(v,u)-A(u,u) \qquad (2.7.5)$$

Ha pedig $u = \Theta\in H$, akkor

$\mu(\delta_o)g_\Theta^\infty(v) = A(v,\Theta)$, miatta limesz $A(v.\Theta)$. O

2.7.3.B: Lényegében a 16.§.1. Tétel bizonyitását követjük.

$$P_v(T_u>n) = \frac{R_{n+1}(\alpha)}{R_n(\alpha)} \cdot \sum_{\substack{t\in H\\ t\neq u}} g_u(v,t)\, F_n(t),$$

ahol $$F_n(t) = \frac{P_t(T_u=n+1)}{R_{n+1}(\alpha)}$$

Tudjuk, hogy

/1/ $$\lim_{|y|\to\infty} g_u(v,(y\beta)) = \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} [A(v,u)-A(u,u)]$$

/2/ $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t) = 0$ a 16.§.1.-beli bizonyitást $\overleftarrow{P}$-ra alkalmazva

/3/ $F_n(t) \geq 0$ és $\lambda^* F_n = \mu(\alpha)$

mivel

$$\sum_{\substack{t\in H\\ t\neq u}} \mu(\alpha) F_n(t) = \sum_t \mu(\alpha) \frac{P_t(T_u=n+1)}{P_u(T_u>n+1)} =$$

$$= \sum_{t=(y\beta)\in H} \frac{\mu(\alpha)}{\mu(\beta)} \mu(\beta) \frac{\overleftarrow{P}_u(\overleftarrow{U}_{n+1}=t\ T_u>n+1)}{\overleftarrow{P}_u\ (T_u>n+1)} = \mu(\alpha)$$

a $\overleftarrow{P}$-ra vonatkozó teljes valószinüség tétel szerint. E három összefüggésből pedig egyszerü számolással következik a tétel. □

2.7.4.T: Hányados-limesz tétel.

Ha P teljesiti az I-IV feltevésekben foglaltakat, $B\subset H,\ 1 \leq |B|<\infty$, $v = (y,\beta) \in H$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_u(T_\beta > n)}{P_v(T_v > n)} = \mu(\beta) g_B^\infty(u) \qquad \text{O}$$

2.7.4.B: A bizonyitás 16.§ további részében megtalálható, $|B|$-re vonatkozó indukcióval egyszerüen általánosan is elvégezhető. Egyetlen lényeges eleme a (2.7.4) összefüggés felhasználása, amelyet számunkra a centrális-határeloszlás tétel biztosit. $\square$

3. LOKÁLISAN MÓDOSITOTT BOLYONGÁSOK

Ebben a fejezetben a [11]-beli eredményünkre adunk némileg egyszerübb bizonyitást a két dimenziós esetben, felhasználva a 2.7-ben bizonyitott hányados-limesz tételt.

3.1. Invariancia elv

Mindenek előtt továbbra is tegyük fel I-IV-et.

3.1.1 Következmény: $\forall \alpha, \beta \in M, x \in Z^2$

$$E_{(0,\alpha)} T_{(x,\beta)} < \infty \qquad /3.1.1/ \quad \text{o}$$

3.1.1.D: $A_n(\alpha)$, A_n

Legyen $u_1, \dots, u_m$ az R^m ortonormált bázisa

$$\forall \alpha \in M \; A_n(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} \Big[\sum_{x \in Z^2} \chi(U_i = (x,\alpha)) - \mu(\alpha) \Big].$$

$$A_n := \sum_{\alpha \in M} A_n(\alpha) u_\alpha \qquad \text{o}$$

3.1.2.D: $/V_n/$

$$V_n := (X_n, A_n) \in Z^2 \; R^m$$

az (x_n, ε_n) által definiált bolyongás.

3.1.2. Tétel:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} V_{[nt]} \overset{\mathscr{C}}{\Longrightarrow} W_\Sigma(t) \qquad \text{ha } n \to \infty$$

ahol $\overset{\mathscr{C}}{\Longrightarrow}$ a folytonos függvények terében való gyenge konvergenciát jelöli, W_Σ nulla várható értékü Σ szórásu Wiener folyamat.

Σ felbomlik $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & \Sigma_m \end{pmatrix}$ alakban

ahol Σ_2 2x2-es Σ_m mxm-es mátrix, továbbá $W_\Sigma = (W_{\Sigma_2}, W_{\Sigma_m})$ alaku, ahol a két komponens független Wiener folyamat. ○

Ez az állitás speciális esete a Markov láncok függvényei határeloszlás tételének.

/Lásd [6] 242. old. 20.1. Tétel és 232. old. 2. példa./

3.2. Lokális módositás

3.2.1.D: /G/

Az egyszerübb fogalmazás kedvéért bevezetjük a P által generált alábbi irányitott gráfot

$$G: = (H,E)$$

$$E: = \{(\overrightarrow{u,v}) \mid P(u,v) > 0\}$$ ○

Megjegyezzük, hogy /3.1.1/ azt jelenti a gráfok nyelvén, hogy G erősen összefüggő, vagyis $\forall u, v \in H$-ra

$\exists n: \; P_n(u,v) > 0.$

V. Feltevés: G lokálisan véges gráf, azaz

$$\forall u \in H \qquad |\{v \in H : P(u,v) > \}| < \infty$$

vagyis P véges hatósugaru. ○

A továbbiakban feltesszük, hogy I-V. teljesül.

3.2.2.D: /Lokális módositás/

$\overline{P}$ lokális módositása P-nek, ha

$$B \subset H \; |B| < \infty : \quad \forall u \in H \setminus B \quad \forall v \in H$$

$$P(u,v) = \overline{P}(u,v)$$ ○

Ezután a módositás gráfon követhető hatását diszkutáljuk.

Legyen $\overline{G}$ a $\overline{P}$ által generált irányitott gráf. Könnyen látható, hogy $\overline{G}$-nak a $H \setminus B$-n kifeszitett része egyetlen végtelen erősen összefüggő komponenst tartalmaz. Legyen ez $G_\infty := (H_\infty, E_\infty)$ és legyen $G_B := (H \setminus H_\infty, E_B) = (H_B, E_B)$ a komplementeren maradó gráf, amely véges sok véges komponensből áll.

Az invariancia elv vizsgálatakor ujra feltehetjük, hogy $\overline{G}$ nem tartalmaz elnyelő halmazt, illetve, hogy $\overline{P}$ rekurrens maradt, ellenkező esetben ugyanis a bolyongás 1 valószinüséggel egy véges halmazban tartózkodik, ha $n \to \infty$.

Meg kell még jegyezni, hogy H_B-t elhagyva H-ból a H_∞-en G_∞ továbbára is erősen összefüggő marad.

<u>3.2.3.D:</u> $/\overline{U}_n := (Y_n, \beta_n),\ \overline{V}_n := (Y_n, B_n)/$

Legyen $\overline{U}_n$ a $\overline{P}$ által definiált Markov lánc, $\overline{V}_n$ pedig ugyanugy képződik $\overline{U}_n$-ből, mint V_n az U_n-ből. O

<u>3.2.1. Tétel:</u> /Invariancia elv/

Ha fennáll I-V, továbbá $\overline{P}$-re teljesülnek az előbbiek, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \overline{V}_{[nt]} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} W_\Sigma(t)$$

ahol W_Σ azonos a 3.1.2. Tétel-belivel. O

<u>3.2.1. Megjegyzés:</u>

Hasonló állitás igaz a $d \geq 3$ dimenziós esetben. Ha $d = 1$, akkor viszont hasonló eredmény nem várható, ahogy ezt [10]-beli ellenpéldánk mutatja. O

A tétel bizonyitásának alapgondolata azonos a [10]-ben alkalmazottal. A hányados-limesz tétel segitségével belátható, hogy $\overline{U}_n$ $\sigma(\sqrt{n})$ időt tölt n lépés alatt a módositott területen. Ezt a hatást viszont a $\sqrt{n}$-el való normálás elnyeli.

3.2.4.D: $/\tau_n, \bar{\tau}_n/$

$$\tau_n := \sum_{i=o}^{n} \chi(U_i \in H_B)$$

$$\bar{\tau}_n := \sum_{i=o}^{n} \chi(\bar{U}_i \in H_B) \qquad \circ$$

3.2.5.D: $/\nu_n, \bar{\nu}_n/$

$$\nu_n := \sum_{i=1}^{n} \chi(U_i \in H_B, U_{i-1} \notin H_B)$$

$$\bar{\nu}_n := \sum_{i=1}^{n} \chi(\bar{U}_i \in H_B, \bar{U}_{i-1} \notin H_B) \qquad \circ$$

3.2.6.D: $/q_k, r_k/$

$$q_1 := \min \{i \in N \mid \bar{U}_i \in H_B\}$$

$$r_1 := \min \{i \in N \mid i > q_1 \ \bar{U}_i \notin H_B\}$$

$$q_k := \min \{i \in N \mid i > q_{k-1} \ \bar{U}_i \in H_B\} \quad k=2,3,\ldots$$

$$r_k := \min \{i \in N \mid i > r_{k-1} \ \bar{U}_i \notin H_B\} \quad k=2,3,\ldots \qquad \circ$$

Nyilvánvaló mármost, hogy

$$\bar{\tau}_n = \sum_{i=1}^{\bar{\nu}_n} r_i - q_i$$

3.2.7.D: $/\ell_k, m_k/$

$$m_k = \min \{i \in N \mid i > r_k \ \beta_i = \beta_{q_k}\}$$

$$\ell_k = \min \{m_k, q_{k+1}\} \qquad \circ$$

m_k tehát azt az első időpontot jelenti, amikor a H_B-ből való kilépés után először lépünk abba a belső állapotba, ahová az előző H_B-be lépés történt. E két hely közti trajektória-darabot kivágva, a két trajektória-darab ugy csatlakoztatható, hogy a kapott sorozat P szerinti Markov lánc lesz. ℓ_k-ra azért van szükségünk, mert előfordulhat, hogy $\beta_i = \beta_{q_k}$ bekövetkezése előtt visszatérünk H_B-be. Ebben az esetben ezt az egész trajektória-darabot ki fogjuk hagyni.

3.2.8.D: $/L_k, R_k/$

$$L_k := \ell_k - q_k \qquad R_k := r_k - q_k \qquad \text{O}$$

Ezeket felhasználva a következő becslés adható:

$$\bar{\tau}_n \le \sum_{i=1}^{\bar{\nu}_n} R_i < \sum_{i=1}^{\bar{\nu}_n} L_i =: T(n) \qquad /3.2.1/$$

3.2.9.D: $/I_n/$

$$I_n := \{1,2,3,\dots,n\} \setminus \bigcup_{i=1}^{\bar{\nu}_n} [q_i, \ell_i] \qquad \text{O}$$

I_n definició szerint része azon időpontok halmazának, melyekben $\bar{U}_n$ az eredeti P szerint fejlődik. Ezek után az alábbi lemmasor vezet tételünk bizonyitásához.

3.2.2.L: $\exists\, c_0 > 0$ konstans, $\exists\, n_0 \in N$: $\forall n > n_0$

$$\bar{E}_v(T(n)) \le c_0 \ln(n) \qquad \forall v \in H \qquad \text{O}$$

Ebből az állitásból már következik tételünk, de ennek bizonyitásához a következő tételekre lesz még szükség.

3.2.3.L: $\exists\, c_1 > 0$, $\exists\, n_1 \in N$: $\forall n > n_1$ $n \in N$

$$\bar{E}_v(T(n)) \le c_1 \bar{E}_v(\bar{\nu}_n) \qquad \text{O}$$

3.2.10.D: $/T_C\ \overline{T}_C/$

Ha $C \subset H$

$$T_C := \min\{i \in N \mid U_i \in C\}$$

$$\overline{T}_C := \min\{i \in N \mid \overline{U}_i \in C\} \qquad \circ$$

T_C /illetve $\overline{T}_C$/ a C halmaz első elérésének ideje U_n /illetve $\overline{U}_n$/ által.

3.2.11.D: $/\partial C,\ \delta C/$

Ha $C \subset H$

$$\partial C := \{u \in H\setminus C \mid \exists\, v \in C : P(v,u) > 0\}$$

$$\delta C := \{u \in C \mid \exists\, v \in H\setminus C : P(v,u) > 0\} \qquad \circ$$

Mivel C lokálisan véges, ezért ha C véges, akkor δC és ∂C is véges halmazok.

3.2.4.L:

$$\overline{E}_v(\overline{\nu}_n) \le \frac{1}{\min\limits_{u \in \partial H_B} \overline{P}_u(T_{H_B} > n)} \qquad \circ$$

Fontos észrevenni ezek után, hogy

$$\overline{P}_v(\overline{T}_{H_B} > n) = P_v(T_{H_B} > n) \quad \text{ha } v \in H\setminus B$$

3.2.5.L: /A hányados-limesz tétel következménye/

$$\exists\, C_3, C_4 > 0,\ n_3 \in N: \quad \forall n > n_3$$

$$\frac{1}{P_u(T_{H_B}>n)} \le \frac{c_3}{g^{\infty}_{H_B}(u)\; P_V(T_V>n)} \le c_4 . \ell n(n) \qquad \text{o}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség bizonyitása megint a centrális határeloszlás tételből következik egyszerü becslésekkel.

3.2.6.L: $\exists\ 0<d<\infty,\ n_5 \in N,\ \forall n>n_5,\ \forall u,\ v \in \partial H_B$

$$d \le \frac{P_u(T_{H_B} > n)}{P_v(T_{H_B} > n)} \le \frac{1}{d} \qquad \text{o}$$

Ezzel pedig a 3.2.5-beli becslés a ∂H_B szerinti minimumra is átvihető.

3.3. Invariancia elv bizonyitása lokális módositás esetén

B: Tekintsük a $\overline{v}_j := \overline{V}_{j+1} - \overline{V}_j$ lépésvektorokat. Vagyis

$$\overline{V}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{v}_j$$

Legyen $\tilde{V}_n$ a $\overline{V}_n$ következő approximációja:

$$\tilde{V}_n := \sum_{i \in I_n} \overline{v}_i$$

I_n-et ugy definiáltuk, hogy

$$\tilde{P}(\tilde{V}_{k-1}, \tilde{V}_k \mid \tilde{V}_k - \tilde{V}_{k-1} \neq 0) = P(\tilde{V}_{k-1}, \tilde{V}_k \mid \tilde{V}_k - \tilde{V}_{k-1} \neq 0)$$

Igy $\tilde{V}_n$-ből a 0 lépéseket kihagyva egy P szerint folyó Markov láncot nyerünk. Legyen ez $\underset{\sim}{V}_n$.

Ekkor pedig

$$|\overline{V}_n - V_n| \le |\overline{V}_n - \underset{\sim}{V}_{n-T(n)}| + |\underset{\sim}{V}_{n-T(n)} - V_n| \le 2\sqrt{m+2}\; T(n).$$

Felhasználva a 3.2.2. Lemmát

$$\sup_{0\le t\le 1} E(T([nt])) \le c.\ell n(n) = \sigma(\sqrt{n})$$

amiből a Markov egyenlőtlenség alapján

$$\sup_{0\le t\le 1} \frac{1}{\sqrt{n}}|\bar{V}_{[nt]}-V_{[nt]}| \to 0 \qquad \text{ha } n \to \infty$$

□

5.4. A lemmák bizonyitása

3.4.1.B: /3.2.6.L/

Ha $u,v \in H_\infty$, akkor létezik egy pozitiv valószinüségő $D_{u,v}$ ut H_∞ -beli pontokkal u-ból v-be, legyen ennek hossza $n_{u,v}$.

$$P_u(T_{H_B} > n) \ge P_u(D_{u,v}, T_{H_B} > n) \ge$$

$$P_u(D_{u,v})P_v(T_{H_B} > n-n_{u,v}) \ge P_u(D_{u,v})P_v(T_{H_B} > n)$$

Igy ha $d = \min_{u,v\in\partial H_B} \{P_u(D_{u,v})\}$, akkor a kivánt állitást kapjuk. □

3.4.2.B: /3.2.5.L/

Felhasználva 3.2.6. lemmát, ha n elég nagy

$$\frac{1}{\min_{v\in\partial H_B} P_v(T_{H_B} > n)} \le \frac{1}{d\ P_u(T_{H_B} > n)} = \frac{P_v(T_v > n)}{dP_u(T_{H_B} > n)} \cdot \frac{1}{P_v(T_v > n)}$$

de ez a hányados-limesz tétel szerint

$$\leq \frac{c_4}{g^{\infty}_{H_B}(u)P_V(T_V > n)}$$

Ebből pedig a második becslés már következik a centrális-határeloszlás tételből. □

3.4.3.B: /3.2.4.L/

$$1 = \sum_{u \in \partial H_B} \sum_{i=o}^{n} \overline{P}_V(\overline{U}_i = u)\overline{P}_u(\overline{T}_{H_B} > n-i) \geq \overline{E}_V(\overline{\nu}_n).\min_{u \in \partial H_B} \overline{P}_u(\overline{T}_{H_B} > n)$$

□

3.4.4.B: /3.2.3.L/

Ahogy [10] cikkünkben történt, a Wald azonosságot szeretnénk alkalmazni. Ehhez független azonos eloszlásu felső becslést adunk L_k-ra. $\forall k \in N$-re $V \in \delta H_B$-re inditsunk u-ból egy-egy $\overline{P}$ szerinti bolyongást /speciálisan, ha $u = \overline{U}_{q_k}$, akkor magát az $\overline{U}_n$-t vegyük./

Legyen $L_k(u)$ az L_k-nak megfelelő idő különböző u-kra, és speciálisan $L_k(U_{q_k}) = L_k$. Igy

$$L_k^+ := \sum_{u \in \delta H_B} L_k(u) > L_k$$

és L_k^+-k független, azonos eloszlásu valószinüségi változók. Ezután belátjuk, hogy $\overline{E}(L_1^+) < \infty$

$$\overline{E}(L_1^+) = \sum_{u \in \partial H_B} \overline{E}(L_1(u))$$

és

$$\overline{E}(L_1(u)) = \overline{E}_u(R_1) + \overline{E}_u(\ell_1 - r_1)$$

Mivel H_B véges és $\overline{G}$-ben nincs elnyelő komponens, azért $\overline{E}_u(R_1) < \infty$.

$$\overline{E}_u(\ell_1 - r_1) \leq \sum_{v \in \partial H_B} \overline{P}_u(\overline{U}_{r_1} = v)\overline{E}_r(\ell_1 - r_1)$$

és

$$\overline{E}_v(\ell_1 - r_1 | \overline{U}_{r_1} = v) \leq E_{r_1}(m_1(u) - r_1)$$

ahol $m_1(u)$ az m_1 idő $\overline{U}_{r_1} = v$ feltétel melletti értéke legyen. /Lásd 3.2.6.D./

Ha $v = (x, \alpha)$

$$E_v(m_1(u) - r_1) = \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{y \in Z^2} kP(U_k = (y, \alpha) | U_o = v)$$

ez pedig nem más, mint az α állapot első elérésének ideje /tetszőleges Z^2-beli pontban/, ez viszont nyilván véges.

Egyesitve az eddigi eredményeket, 3.2.4 és 3.2.3.-ból következik a kivánt 3.2.2. lemma-beli becslés.

4. ÖSSZEFOGLALÁS

Mint azt az előző két fejezetben láthattuk, a felvetett kérdések megválaszolása rejt némi nehézséget magában, pedig a Markov-láncok potenciálelméletét már husz éve megalapozták, másrészt, mint azt nyomban vázolni fogjuk, e kérdések szinte csak iskola feladatok a témakör fő problémáihoz képest.

Ahhoz, hogy a Lorentz gáz viselkedését még jobban megértsük, a végtelen sok belső állapottal rendelkező bolyongás elemzésére van szükség. Krámli Andrásnak és Szász Domokosnak globális centrális határeloszlástételt sikerült igazolnia, melyről az 1982. szeptemberi Pannon Szimpóziumon számoltak be Visegrádon.

A következő a potenciálelmélet szempontjából is lényeges lépés a lokális tétel bizonyitása lenne.

Egy másik igen nagy intenzitással müvelt kutatási terület az inhomogén közegü bolyongásoké /folyamatoké/. Itt olyan alapvető problémák is megoldatlanok, mint a Pólya tétel általánositása, azaz a visszatérőség feltétele inhomogén /véletlen/ közegben.

E probléma nehézsége abban rejlik, hogy $d \geq 2$ dimenzió esetén a Nash-Williams-féle szemlélettel nehéz képet kapni a potenciál kialakulásáról. Egy dimenziós esetben egy egyváltozós rekurzió megoldása adja a potenciált. Bizonyos eredmények születtek $d=2$ esetre is, pl. [12], viszont a tett megszoritások tulajdonképpen az egydimenzióra való visszavezetést biztositják implicit módon.

Az invariancia elv érvényességi köre is tisztázatlan a $d \geq 2$ esetben. [13]-ban periodikus, illetve kvázi periodikus módositásokat vizsgálnak. Szinaj [14] pedig erős technikai feltevések mellett önadjungált bolyongásokra igazolta az invariancia elvet. $d \geq 5$ esetre Dobrushin-nek sikerült a problémát teljes általánosságban tisztáznia.

A globális módositás jobb megértéséhez vinne közelebb az egyszerü szimmetrikus bolyongás további vizsgálata például az önátmetszések, betöltési idők kontrollálása révén.

Végül a harmadik csöppet sem kézenfekvő problémakör az inhomogén közegü végtelen sok belső állapottal rendelkező bolyongások vizsgálata.

IRODALOMJEGYZÉK

1. J.G. Kemeny, J.L. Snell: Potentials for Denumerable Markov Chains.
J. of Math. Anal. and Appl., Vol. 3. No. 2. 1981, 196-260.

2. J.G. Kemeny, J.L. Snell: On Markov Chain Potentials.
Ann. Math. Stat., 32 /1961/ 709-715.

3. J.G. Kemeny, J.L. Snell: A New Potential Operator for Recurrent Markov Chains.
J. London Math. Soc., 38, 1963, 359-520.

4. H. Kesten, F. Spitzer: Ratio Theorems for Random Walks I.
J. d'Analyse Math., 9 /1963/ 285-322.

5. H. Kesten: Ratio Theorems for Random Walks II.
J. d'Analyse Math., 9 /1963/ 323-379.

6. P. Billingsley: Convergence of Probability Measures.

7. J.F. Spitzer: Principles of Random Walks /1964/.

8. H. Spohn, H. Van Breijeren /megjelenés alatt/.

9. A. Krámli, D. Szász: Random Walks with Internal Degrees of Freedom I. Local Limit Theorems /megjelenés alatt/.

10. D. Szász, A. Telcs: Random Walks in an Inhomogeneous Medium with Local Impurities.
J. of Stat. Phys., Vol. 26. No. 3./1981/, 527-537.

11. A. Telcs: Local Impurities in Random Walk with Internal States /megjelenés alatt/.

12. S. Kalikov: Generalized Random Walk in Random Environment.
The Annals of Probability, 1981, Vol. 9. No. 5. 753-768.

13. V. Seshadri, K. Lindeberg, K.E. Shuler: Random Walks on Periodic and Random Lattices II. Random Walk Properties via Generating Function Techniques.
J. Stat. Phys. 21, 1979, 5.

14. Ja.G. Szináj /megjelenés alatt/.

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1982-BEN MEGJELENTEK

130/1982	Barabás Miklós - Tőkés Szabolcs: A lézer printer képalkotás hibái és optikai korrekciójuk
131/1982	RG-II/KNVVT "Szisztemü upravlenija bazani dannüh i informacionnüe szisztemü" Szbornik naucsno-iszszledovatel'szkih rabot rabocsej gruppü RG-II KNVVT, Bp. 1979. T o m I.
132/1982	RG-II/KNVVT T o m II.
133/1982	RG-II KNVVT T o m III.
134/1982	Knuth Előd - Rónyai Lajos: Az SDLA/SET adatbázis lekérdező nyelv alapjai /orosz nyelven/
135/1982	Néhány feladat a tervezés-automatizálás területéről. Örmény-magyar közös cikkgyüjtemény
136/1982	Somló János: Forgácsoló megmunkálások folyamatainak optimálási és irányitási problémái
137/1982	KGST I-15.1. Szakbizottság 1979. és 80. évi előadásai
138/1982	Kovács László: Számitógép-hálózati protokollok formális specifikálása és verifikálása
139/1982	Operációs rendszerek elmélete 7. visegrádi téli iskola

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1983-BAN MEGJELENTEK

140/1983 Operation Research Software Descriptions (Vol.1.) Szerkesztette: Prékopa András és Kéri Gerzson

141/1983 Ngo The Khanh: Prefix-mentes nyelvek és egyszerü determinisztikus gépek

142/1983 Pikler Gyula: Dialógussal vezérelt interaktiv gépészeti CAD rendszerek elméleti és gyakorlati megfogalmazása

143/1983 Márkusz Zsuzsanna: Modellelméleti és univerzális algebrai eszközök a természetes és formális nyelvek szemantikaelméletében

144/1983 PUBLIKÁCIOK '81 Szerkesztette: Petróczy Judit