tanulmányok 141/1983

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓINTÉZETE

PREFIX-MENTES NYELVEK ÉS EGYSZERŰ DETERMINISZTIKUS GÉPEK

Irta:

NGO THE KHANH

Tanulmányok 141/1983

A kiadásért felelős:

DR VÁMOS TIBOR

Főosztályvezető:

DR DEMETROVICS JÁNOS

ISBN 963 311 150 1

ISSN 0324-2951

BEVEZETÉS

A formális nyelvek elmélete a számitástudomány egyik legfontosabb témaköre. Az ötvenes évek végén vezette be Chomsky a formális grammatika fogalmát, s az azóta eltelt alig húsz esztendő alatt a formális nyelvek a számitástechnika csaknem minden területén nélkülözhetetlen eszközökké váltak. A géptől független programozási nyelvek gyors elterjedése és a szintaktikusan vezérelt forditóprogramok sikeres alkalmazása hamar megmutatta ennek az elméletnek a gyakorlati jelentőségét. A formális nyelveket kétféle eszközzel fogalmazhatjuk, generativ grammatikákkal vagy elfogadó automatákkal. A generativ grammatikák a nyelv definicióját a generálás oldaláról, tehát a szintézis oldaláról közelitik meg. Ezzel szemben az automatákat inkább analitikus eszközként használjuk. A formális nyelvek szintaktikus elemzése elméletének alapvető eredménye a determinisztikus nyelvek fogalmának kialakitása, és ezek elemzésének megoldása, melyre 1965-ben került sor. A fogalom automata-elméleti definiciója Ginsburgtól és Greibachtól származik [1966], a generativ oldalról való megközelités és a megfelelő elemzési eljárás kidolgozása pedig Knuth érdeme [1965]. Knuth LR(K)-elemzőjénél kedvezőbben Harrison és Havel [1973] vezette be a strict-determinisztikus nyelvek fogalmát. E nyelvosztály az LR(K)-tipusú nyelvek olyan halmaza, amely a prefix-mentes tulajdonságot tartja úgy, hogy tetszőleges (x,y) szópár esetén ha az x és xy szavak együtt beletartoznak egy stict-determinisztikus nyelvbe, akkor y szükségképpen az üres szó. A determinisztikus automaták oldaláról Hopcorft [1966] és Friedman [1977] az egyszerü gépeket definiálta, de ezek által elfogadott nyelvek osztálya csak valódi része a prefix-mentes determinisztikus 2-tipusú (context-free) nyelvosztálynak.

Tanulmányom ezekhez a problémákhoz kapcsolódik és azt igyekszünk megmutatni, hogy létezik a determinisztikus automaták egy olyan hierarchiája, amely pontosan a prefix-mentes determinisztikus Chomsky-féle nyelvosztályok hierarchiájának felel meg. A bevezetésen kivül értekezésem hat fejezetből áll, s mindvégig csak determinisztikus automatákkal és prefix-mentes nyelvekkel fogunk foglalkozni.

Az 1. fejezetben előkészületként a determinisztikus automaták és Chomsky-féle nyelvek egymáshoz való viszonyát ismertetjük anélkül, hogy a közölt tartalmazási, illetve generálási összefüggések bizonyitására kitérnénk.

A 2. fejezetben a prefix-mentes nyelvekkel foglalkozunk. Az alapvető definiciók megfogalmazása mellett megvizsgáljuk a prefix-mentes nyelvosztálynak az ismert müveletekre vonatkozó zártságait, valamint néhány uj müveletet tárgyalunk, amelyek a prefix-mentes tulajdonságot tartják is.

A további négy fejezetben a prefix-mentes determinisztikus Chomsky-féle nyelvosztályokat tárgyaljuk. Mindenekelőtt a determinisztikus automaták egyes speciális osztályaival foglalkozunk, amelyeket egyszerü determinisztikus géposztályoknak nevezünk (egyszerü determinisztikus véges géposztály, pushdown -géposztály, lineárisan korlátolt géposztály, Turing-géposztály). E gépek legfontosabb vonása az, hogy a gép egy bemenő szó elfogadása után rögtön megáll, ami azt jelenti, hogy az elfogadott nyelv prefix-mentes. Fő eredménynek tekinthetjük mind a négy fejezetben azokat a feltételeket, amelyek megmutatják, hogy az egyszerü determinisztikus géposztályok pontosan a megfelelő prefix-mentes determinisztikus Chomsky-féle nyelvosztályokat fogadják el. Tárgyaljuk az egyszerü determinisztikus gépek osztályozását, és a vizsgálat során ismertetjük a Friedman által adott egyszerü gépek szerepét, valamint az egyszerü kétszalagos gépek szerepét, amely az egyszerü gép egy szalagról kétszalagra való kiterjesztése, és az egyszerü determinisztikus Turing-géppel egyezik meg. Természetesen vizsgáljuk az elfogadott nyelvosztályok zártságait is.

Befejezésül ezen a helyen szeretnénk hálás köszönetet mondani aspiránsvezetőmnek, DR. Demetrovics Jánosnak munkám során nyujtott hatásos segitségéért és értékes tanácsaiért.

TARTALOMJEGYZÉK

Oldal

1. Fejezet

CHOMSKY-FÉLE NYELVOSZTÁLYOK ÉS DETERMINISZTIKUS AUTOMATÁK

Ebben a fejezetben determinisztikus automaták különböző fajtáit, és azoknak a Chomsky-féle nyelvosztályokhoz való viszonyát tárgyaljuk. Először átnézzük formális nyelvek és Chomsky-féle nyelvosztályok definicióját, majd ismertetjük a determinisztikus automaták alapfogalmait, s bizonyitás nélkül közöljük a továbbiakban szükséges eredményeket. Itt érdemes emlitenünk, hogy e fejezetben főként Davis ([4]-1958), Gécseg-Peák ([6]-1972), Ginsburg ([7]-1966 és [9]-1968), Hopcroft-Ullman ([12]-1969), Révész ([23]-1979) , Salomaa ([24]-1969 és [25]-1973) könyveire támaszkodunk, pontosabban a determinisztikus véges automatákat Gécseg-Peák, Révész könyvei alapján, a determinisztikus pushdown-automatákat Ginsburg könyvei és Ginsburg-Greibach ([8]-1966) cikke alapján, a determinisztikus lineárisan korlátolt automatákat Salomaa könyvei alapján, a determinisztikus Turing-gépeket pedig Davis, Hopcroft-Ullman könyvei alapján tárgyaljuk.

1.1 Alapfogalmak és jelölések

Tetszőleges jeleknek egy véges, nemüres halmazát véges ábécének nevezzük, és Σ-val szokás jelölni. A Σ elemeiből álló jelsorozatokat szavaknak mondjuk, s Σ elemeiből álló szavak összességét Σ^*-gal jelöljük. A Σ^* elemének tekintjük az ún. üres szót is, melyet λ-val jelölünk, s amely egyetlen jelet sem tartalmaz.

Két Σ^*-beli szónak a concatenációján (vagy szorzatán) értjük azt a Σ^*-beli szót, amely az adott két szónak egymás után való leirásából adódik. Egy x szó tükörképén értjük azt a szót, amely az x szó jeleinek forditott sorrendben való leirásából adódik. Jelöljük ezt x^R-rel, tehát, ha $x=a_1a_2...a_n$ akkor $x^R=a_n...a_2a_1$.

Egy x szó hosszán értjük az x szó jeleinek a számát, s $|x|$-el jelöljük. Eszerint: $|\lambda|=0$, $|xy|=|x|+|y|$ tetszőleges x és y szavakra. Egy x szót az y szó részszavának mondunk, ha léteznek olyan x_1, x_2 szavak, amelyekkel az $y=x_1xx_2$ egyenlőség fennáll. Amennyiben $x_1=\lambda$ és $x_2\neq\lambda$, akkor x az y valódi elejét képezi, és ezt igy jelöljük: $x<y$.

A szavaknak egy tetszőleges halmazát nyelvnek nevezzük, és általában L-lel jelöljük. Az üres nyelvet, vagyis azt a nyelvet, amelynek egyetlen szava sincs, az üres halmazt jelentő $\emptyset$ szimbólummal jelöljük. Az üres nyelv nem tévesztendő össze a $\{\lambda\}$ nyelvvel, amely egyedül az üres szót tartalmazza, mig a $\emptyset$ nyelv semmilyen szót sem tartalmaz. A $\Sigma^*-\{\lambda\}$ szóhalmazt Σ^+-szal jelöljük.

1.2 Nyelvekre értelmezett müveletek

Legyenek adva L, L_1 és L_2 nyelvek. A nyelvekre mint szóhalmazokra közvetlenül értelmezhetők a halmazelméleti alapmüveletek:

$$\begin{aligned}
L_1\cup L_2 &= \{w/w\in L_1 \quad vagy \quad w\in L_2\},\\
L_1\cap L_2 &= \{w/w\in L_1 \quad és \quad w\in L_2\},\\
L_1-L_2 &= \{w/w\in L_1 \quad és \quad w\notin L_2\},\\
\overline{L} &= \Sigma^*-L, \quad ahol \quad L\subseteq\Sigma^*.
\end{aligned}$$

A concatenáció és tükrözés müveleteit is kiterjeszthetjük nyelvekre:

$$L_1L_2 = \{w_1w_2/w_1 \in L_1 \text{ és } w_2 \in L_2\},$$
$$L^R = \{w^R/w \in L\}.$$

Definiáljuk még az L_1 nyelvnek L_2-re vonatkozó bal és jobb hányadosait, amelyeket az $L_1 \setminus L_2$ és L_1/L_2 szimbólumokkal jelöljük:

$$L_1 \setminus L_2 = \{w \ / \text{ van olyan } w_1 \in L_1 : w_1 w \in L_2\}$$
$$L_1/L_2 = \{w \ / \text{ van olyan } w_2 \in L_2 : w w_2 \in L_1\}$$

A szóhalmazokra értelmezhető müveletek között fontos szerepet játszik még a homomorfizmus, amely a concatenáció müveletére nézve müvelettartó.

1.1 Definició. Legyen adva két véges ábécé Σ_1 és Σ_2. A Σ_1^* halmaznak a Σ_2^*-ba való h leképezését homomorfizmusnak nevezzük, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1/ A leképezés egyértelmü, azaz minden $w_1 \in \Sigma_1^*$ szóhoz egyetlen $h(w_1) \in \Sigma_1^*$ szó tartozik.

2/ A leképezés müvelettartó, azaz tetszőleges $x, y \in \Sigma_1^*$ szavakra $h(xy)=h(x)h(y)$.

Egy h homomorfizmust λ-mentesnek nevezünk, ha $h(w) \neq \lambda$ valahányszor $w \neq \lambda$. Amennyiben $h(x)=\lambda$ minden w szóra, akkor azt mondjuk, hogy a h homomorfizmus triviális (vagy a nullhomomorfizmus).

1.3 Chomsky-féle nyelvosztályok

1.2 Definició.

a/ Egy G generativ grammatikán a következő rendezett négyest értjük: $G=(V_N, V_T, S, F)$, ahol V_N és V_T diszjunkt véges ábécé, $S \in V_N$, az F pedig olyan rendezett (P, Q) szópároknak egy véges halmaza, amelyekre $P, Q \in (V_N \cup V_T)^*$ és P legalább egy V_N-beli jelet tartalmaz. A V_N és V_T elemeit nemterminálisnak illetve terminálisnak szokás nevezni. Az F elemeit képező (P, Q) rendezett párokat szabályoknak nevezzük és általában $P \to Q$ alakban irjuk, ahol persze kikötjük, hogy a $\to$ jel nem szerepel sem a V_N-ben sem a V_T-ben. Az S kitüntetett nemterminális jel, amely a G grammatikában a generálás kezdő eleme.

b/ A következő módon definiáljuk az $X, Y \in (V_N \cup V_T)^*$ szavakra vonatkozó $\xrightarrow[G]{}$ relációt:

$$X \underset{G}{\Longrightarrow} Y \iff \begin{cases} \text{Van olyan } (P,Q) \in F \text{ szabály, és} \\ P_1, P_2 \in (V_N \cup V_T)^* \text{ szavak, amelyekre} \\ X = P_1 P P_2 \text{ és } Y = P_1 Q P_2. \end{cases}$$

Legyen a $\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$ reláció a $\underset{G}{\Longrightarrow}$ relációnak a reflexiv és tranzitiv lezárása. Végül, a G grammatika által generált nyelv a következő:

$$L(G) = \{w \in V_T^* \ / \ S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w\}$$

A grammatika és az általa generált nyelv definiciója szerint minden grammatikához egy egyértelmüen meghatározott nyelv tartozik, de megforditva, egy nyelvet nemcsak egyetlen grammatikával generálhatunk.

1.3 Definició. Két grammatikát ekvivalensnek nevezünk, ha ugyanazt a nyelvet generálják.

Ezzel a fogalommal a különböző grammatikákat bizonyos formai tulajdonságok alapján osztályokba soroljuk. Az osztályozás alapját a szabályok alakjára vonatkozó kikötések képezik abban a hierarchiában, amelyet az elmélet egyik megalapozója N.Chomsky vezetett be, s amelyet alább ismertetünk.

1.4 Definició. A $G=(V_N,V_T,S,F)$ grammatikát i-tipusúnak nevezzük, ha az alábbi kikötések közül az i-edik teljesül:

$i=0$/ Nincs semmilyen kikötés.

$i=1$/ Az F minden szabálya $P_1AP_2\to P_1\dot{P}P_2$ alakú, ahol $P,P_1,P_2\in(V_N\cup V_T)^*$, $A\in V_N$ és $P\neq\lambda$, kivéve esetleg az $S\to\lambda$ szabályt, amely viszont csak úgy szerepel az F-ben, ha az S nem fordul elő semelyik szabálynak a jobb oldalán.

$i=2$/ Az F minden szabálya $A\to P$ alakú, ahol $A\in V_N, P\in(V_N\cup V_T)^*$.

$i=3$/ Az F minden szabálya $A\to PB$ vagy $A\to P$ alakú, ahol $A,B\in V_N$, $P\in V_T^*$.

Az $i=0,1,2,3$ értékek esetén i-tipusúnak mondunk egy nyelvet, ha van olyan i-tipusú grammatika, amely azt generálja. Az i-tipusú nyelvek osztályát $\mathcal{L}_i$-vel jelöljük.

1.1 Megjegyzés: A definicióból rögtön belátható, hogy minden 3-tipusú grammatika egyben 2-tipusú, és minden 1-tipusú egyben 0-tipusú is, csak a 2-tipusú és az 1-tipusú grammatikák között nem látszik egyértelmünek a viszony, éspedig az üres szóval kapcsolatos körülményes megszoritások miatt. Ezt az akadályt könnyen kiküszöbölhetjük, ha használjuk a λ-mentes grammatika definicióját. Tehát, kapjuk:

$$\mathcal{L}_3 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0,$$

ahol a tartalmazások mindenütt valódi részeket jelentenek.

1.4 Determinisztikus véges automaták

A véges automatáknak igen kiterjedt elmélete van, és ennek az elméletnek számos gyakorlati alkalmazása. Ebből az elméletből csak a formális nyelvekkel kapcsolatos alapvető összefüggéseket ismertetjük.

1.5 Definició.

a/ Egy determinisztikus véges automatán (röv. DV- automatán) az $M=(K,\Sigma,\delta,q_0,H)$ rendezett ötöst értjük, ahol

K egy véges halmaz; az állapothalmaz,

Σ egy véges ábécé; a bemenő ábécé,

$q_0 \in K$; a kezdő állapot,

$H \subseteq K$; a végállapotok halmaza,

δ a $K \times \Sigma$ halmaznak K-ba való leképezése; az átmenetfüggvény.

b/ Adott M DV-automatának egy konfigurációján értjük azt a qw szót, amelyre $q \in K$ és $w \in \Sigma^*$.

A következő módon definiáljuk a konfigurációkra vonatkozó $\vdash_M$ relációt:

$$qaw \vdash_M pw \Longleftrightarrow \delta(q,a)=p,$$

ahol $q,p \in K$, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$.

Legyen $\vdash\frac{*}{M}$ reláció az $\vdash\frac{}{M}$ reláció tranzitiv lezárása. Végül, az M DV-automata által elfogadott nyelv a következő:

$$L(M)=\{w\in\Sigma^* \ / \ q_o w \vdash\frac{*}{M} p, \quad ahol \quad p\in H\}$$

<u>1.2 Megjegyzés:</u> Ha a δ átmenetfüggvény nem egyértelmü, azaz a $K\times\Sigma$ halmaz elemeihez a K-nak nem egy-egy elemét, hanem egy-egy részhalmazát rendeli hozzá, akkor azt mondjuk, hogy az M véges automata nemdeterminisztikus.

<u>1.1 Tétel.</u> Tetszőleges L nyelvre a következő három állitás egymással ekvivalens:

1/ Az L nyelv 3-tipusú.

2/ $L=L(M)$, ahol M egy nemdeterminisztikus véges automata.

3/ $L=L(M')$, ahol M' egy determinisztikus véges automata.

<u>1.3 Megjegyzés:</u> Itt érdemes megfigyelnünk, hogy ennek a tételnek a teljes bővitése a [25]-ben levő II.5.6. tétel, amelyben látható egy 3-tipusú nyelvnek egyik ekvivalens feltétele, hogy a nyelven értelmezett "ekvivalens" reláció osztályainak a száma véges. Ezt a feltételt szokták használni egy nyelv 3-tipusú tulajdonságának vizsgálatára, például könnyü belátnunk, hogy $L=\{a^n b^n / n\geq 1\}$ nem 3-tipusú, mivel az L nyelvnél nem teljesül a fenti feltétel.

<u>1.2 Tétel.</u> Az $\mathcal{L}_3$ nyelvosztály zárt a concatenáció, az unió, a metszet, és a komplemensképzés müveletére nézve.

<u>Korollárium.</u> Ha $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$, akkor $L_1 - L_2 \in \mathcal{L}_3$.

<u>1.3 Tétel.</u> Az $\mathcal{L}_3$ nyelvosztály zárt a homomorfizmusra nézve.

1.5 Determinisztikus pushdown-automaták

A 2-tipusú nyelvek elméletének részletesebb kifejtése található Ginsburg könyveiben, különösen Ginsburg-Greibach cikkében láthatjuk a determinisztikus pushdown-automatákra (veremautomatákra) vonatkozó szép és értékes eredményeket.

1.6 Definició.

a/ Egy determinisztikus pushdown-automatán (röv. DP-automatán) az $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_o,z_o,H)$ rendezett hetest értjük, ahol

K az állapothalmaz,

Σ a bemenő ábécé,

Γ a pushdown-ábécé,

$q_o \in K$ a kezdő állapot,

$z_o \in \Gamma$ a kezdő pushdown-jel,

δ átmenetfüggvény a $K \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma$ halmaznak $K \times \Gamma^*$-ba való egy leképezése, amelyre teljesülnek a következő feltételek: tetszőleges $q \in K$, $z \in \Gamma$ kettesre,

vagy i/ $\delta(q,\lambda,z)$ pontosan egy elemet tartalmaz, és $\delta(q,a,z)$ nem definiált semmilyen $a \in \Sigma$-ra;

vagy ii/ $\delta(q,\lambda,z)$ nem definiált, és minden $a \in \Sigma$-ra $\delta(q,a,z)$ pontosan egy elemet tartalmaz.

b/ Adott M DP-automatának egy konfigurációján értjük azt a (q,w,α) hármast, amelyre $q \in K$, $w \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Gamma^*$.

A következő módon definiáljuk a konfigurációkra vonatkozó $\vdash_M$ relációt:

$$(q,aw,\alpha z) \vdash_M (p,w,\alpha\beta) \Longleftrightarrow \delta(q,a,z)=(p,\beta),$$

ahol $q,p \in K$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $w \in \Sigma^*$, $z \in \Gamma$, $\alpha,\beta \in \Gamma^*$

Legyen $\vdash\frac{*}{M}$ reláció az $\vdash\frac{}{M}$ reláció tranzitiv lezárása. Végül, az M DP-automata által elfogadott nyelv a következő:

$$L(M)=\{w\in\Sigma^*/\ (q_o,w,z_o)\ \vdash\frac{*}{M}\ (p,\lambda,\alpha),\ ahol\ p\in H,\alpha\in\Gamma^*\}$$

Egy L nyelvet akkor nevezünk determinisztikus 2-tipusúnak (röv. d2-tipusúnak), ha létezik olyan M DP-automata, amelyre $L=L(M)$. $\mathcal{L}_{d2}$-vel jelöljük a d2-tipusú nyelvek osztályát.

<u>1.4 Megjegyzés:</u> Ha nincs semmilyen kikötés a δ átmenetfüggvénynél, azaz δ a $K\times(\Sigma\cup\{\lambda\})\times\Gamma$ halmaznak $K\times\Gamma^*$-ra való egy tetszőleges leképezése, akkor azt mondjuk, hogy az M pushdown-automata nemdeterminisztikus.

<u>1.4. Tétel.</u> Legyen Σ egy véges ábécé, és $L\subseteq\Sigma^*$.
Az L nyelv akkor és csak akkor 2-tipusú, ha létezik olyan M pushdown-automata, amelyre $L=L(M)$.

<u>1.5 Tétel.</u> Legyen $\Sigma=\{a,b\}$, akkor $L=\{ww^R/w\in\Sigma^*\}$ nyelv 2-tipusú, de nem d2-tipusú, azaz az $\mathcal{L}_{d2}$ nyelvosztály valódi része az $\mathcal{L}_2$ nyelvosztálynak.

<u>1.6 Tétel.</u> Legyen Σ egy véges ábécé, és $c\in\Sigma$.
$L\subseteq(\Sigma-\{c\})^*$ nyelv akkor és csak akkor d2-tipusú, ha az $L_1=L\cdot\{c\}$ nyelv d2-tipusú.

<u>1.7 Tétel.</u> Ha $L\in\mathcal{L}_{d2}$ és $L'\in\mathcal{L}_3$, akkor $L\cup L'$, $L\cap L'$, $L-L'$ nyelvek d2-tipusúak.

<u>1.8 Tétel.</u> <u>(Bar-Hill lemma)</u>

Bármely L 2-tipusú nyelvhez megadható két természetes szám, p és q úgy, hogy minden $P\in L$ szó, amelyre $|P|>p$, felirható $P=UXWYV$ alakban olyan módon, hogy $|XWY|\leq q$, $XY\neq\lambda$ és minden $i\geq 0$ egész számra $UX^iWY^iV\in L$.

Korollárium. Az $\{a^nb^nc^n/n\geq 1\}$ és $\{a^nb^nc^n\$/n\geq 1\}$ nyelvek nem tartoznak bele az $\mathcal{L}_2$ nyelvosztályba.

1.6 Determinisztikus lineárisan korlátolt automaták

Ebben a szakaszban Myhill ([16]-1960) és Salomaa ([25]-1973) könyvei alapján tárgyaljuk a determinisztikus lineárisan korlátolt automaták alapfogalmait, de mondható, hogy a determinisztikus lineárisan korlátolt automatákkal kapcsolatban viszonylag kevés eredmény ismeretes, s mindmáig nyitott kérdés viszont az, hogy a determinisztikus lineárisan korlátolt automata egyenértékü-e a nemdeterminisztikus változattal.

1.7 Definició.

a/ Egy determinisztikus lineárisan korlátolt automatán (röv. DLK-automatán) az $M=(\Gamma,K,\delta,q_0,H)$ rendezett ötöst értjük, ahol

Γ a szalagábécé,

K az állapothalmaz,

$q_0\in K$ a kezdő állapot,

$H\subseteq K$ a végállapotok halmaza,

δ átmenetfüggvény pedig a $K\times\Gamma$ halmaznak $K\times(\Gamma\cup\{R,L\})$ halmazba való egy leképezése, amelyre teljesül a következő feltétel: tetszőleges $q\in K$, $z\in\Gamma$ kettesre $\delta(q,z)$ pontosan egy elemet tartalmaz.

b/ Adott M DLK-automatának egy konfigurációján értjük azt a w_1qw_2 szót, amelyre $q\in K$, $w_1,w_2\in\Gamma^*$ és $w_1w_2\neq\lambda$. A következő módon definiáljuk a konfigurációkra vonatkozó $\vdash_M$ relációt:

1/ $w_1qxw_2 \vdash_M w_1pyw_2 \Longleftrightarrow \delta(q,x)=(p,y)$,

2/ $w_1qxw_2 \vdash_M w_1xpw_2 \Longleftrightarrow \delta(q,x)=(p,R)$,

3/ $w_1yqxw_2 \vdash_M w_1pyxw_2 \Longleftrightarrow \delta(q,x)=(p,L)$,

ahol $q,p\in K$, $x,y\in\Gamma$, $w_1,w_2\in\Gamma^*$.

Legyen $\vdash_M^*$ reláció az $\vdash_M$ reláció tranzitiv lezárása. Végül, valamely $\Sigma\subseteq\Gamma$ halmazra az M DLK-automata által elfogadott nyelv a következő:

$$L(M)=\{w\in\Sigma^*/q_0w \vdash_M^* \alpha p,\ ahol\ p\in H,\ \alpha\in\Gamma^*\}$$

Egy L nyelvet akkor nevezünk determinisztikus 1-tipusúnak (röv. dl-tipusúnak), ha létezik olyan M DLK-automata, amelyre $L=L(M)$. $\mathcal{L}_{dl}$-gyel jelöljük a dl-tipusú nyelvek osztályát.

<u>1.5 Megjegyzés:</u> Ha a δ átmenetfüggvény nem egyértelmü, azaz a $K\times\Gamma$ halmaz elemeihez a $K\times(\Gamma\cup\{R,L\})$-nek nem egy-egy elemét, hanem egy-egy részhalmazát rendeli hozzá, akkor azt mondjuk, hogy az M lineárisan korlátolt automata nemdeterminisztikus.

<u>1.9 Tétel.</u> Egy L nyelv akkor és csak akkor 1-tipusú, ha létezik olyan M lineárisan korlátolt automata, amelyre $L=L(M)$. A lineárisan korlátolt automatának a Chomsky-féle nyelvosztályokkal való kapcsolata található Kuroda ([13]-1964) cikkében, amelyben a következő állitással mutatta meg, hogy az $\mathcal{L}_2$ nyelvosztály valódi része az $\mathcal{L}_{dl}$-nek.

1.10 Tétel. Bármely 2-tipusú L nyelvhez megadható olyan M DLK-automata, amelyre $L=L(M)$.

Fontos észrevétel az 1-tipusú nyelvosztályról, hogy az $\mathcal{L}_1$ nyelvosztály csak a λ-mentes homomorfizmusra nézve zárt, az általános homomorfizmusra pedig nem zárt. A következőkben ismertetjük az ún. k-lineárisan kitörlő homomorfizmust (Lásd [25]-III.10.-szakaszában), amelyre nézve zárt az $\mathcal{L}_1$ nyelvosztály.

1.8 Definició. Legyen két véges ábécé Σ_1 és Σ_2, $L \subseteq \Sigma_1^*$ és k valamely természetes szám. A Σ_1^* halmaznak a Σ_2^*-ba való h homomorfizmusát az L nyelvre vonatkozó k-lineárisan kitörlőnek nevezzük, ha tetszőleges $w \in L$ szóra $|w| \leq k.|h(w)|$.

1.11 Tétel. Legyen L egy nyelv és h az L nyelvre vonatkozó k-lineárisan kitörlő homomorfizmus, ahol k valamely természetes szám. A $h(L)$ nyelv akkor és csak akkor 1-tipusú, ha az L nyelv 1-tipusú.

Végül, az alábbi lemmával megmutatjuk, hogy bármely DLK-automatát lehet olyan ekvivalens alakra hozni, amelynek a lényeges megszoritása, hogy az automatának tetszőleges bemenőjelet a beolvasása után azonnal kell helyettesiteni egy nem bemenőjellel, és a munkaszalagra csak a nem bemenőjeleket lehet irni. A továbbiakban az egyszerüség kedvéért erre az alakra szoritkozunk.

1.12 Lemma. Legyen Σ egy véges ábécé. Bármely $L \subseteq \Sigma^*$ dl-tipusú nyelvhez megadható olyan $M'=(\Gamma', K', \delta', q_0', H')$ DLK-automata, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

i/ $L=L(M')$.

ii/ A δ' átmenetfüggvény a $K'X\Gamma'$ halmaznak $K'X((\Gamma'-\Sigma)\cup\{R,L\})$ halmazra való egy leképezése, amelyre teljesül az alábbi feltétel: tetszőleges $q\in K$, $a\in\Sigma$ ketteshez létezik $p\in K$, $z\in\Gamma'-\Sigma$ kettes úgy, hogy $\delta'(q,a)=(p,z)$, azaz nincsenek $\delta'(q,a)=(p,R)$ és $\delta'(q,a)=(p,L)$ alakúak.

Bizonyitás: Legyen $L=L(M)$, ahol $M=(\Gamma,K,\delta,q_o,H)$ egy DLK-automata és $\Sigma\subseteq\Gamma$. A következő módon definiáljuk az $M'=(\Gamma',K',\delta',q_o',H')$ DLK-automatát:

$\Gamma'=\Gamma\cup\{a'|a\in\Sigma\}$,

$K'=K$,

$q_o'=q_o$,

$H'=H$,

δ' átmenetfüggvény pedig a következő:

1/ Tetszőleges $a\in\Sigma$, $q\in K$ kettesre: $\delta'(q,a)=(q,a')$.

2/ Tetszőleges $x\in\Gamma-\Sigma$, $q\in K$ kettesre:

a/ Ha $\delta(q,x)=(p,i)$, ahol $i\in\{R,L\}$, akkor $\delta'(q,x)=(p,i)$.

b/ Ha $\delta(q,x)=(p,y)$, akkor $\delta'(q,x)=(p,\bar{y})$, ahol

$$\bar{y}=\begin{cases} y & ha \quad y\in\Gamma-\Sigma. \\ y' & ha \quad y\in\Sigma. \end{cases}$$

3/ Tetszőleges $a\in\Sigma$, $q\in K$ kettesre:

a/ Ha $\delta(q,a)=(p,i)$, ahol $i\in\{R,L\}$, akkor $\delta'(q,a')=(p,i)$.

b/ Ha $\delta(q,a)=(p,y)$, akkor $\delta'(q,a')=(p,\bar{y})$, ahol

$$\bar{y}=\begin{cases} y & ha \quad y\in\Gamma-\Sigma. \\ y' & ha \quad y\in\Sigma. \end{cases}$$

A δ' konstrukciójából látható, hogy a δ' átmenetfüggvény az ii/ tulajdonságnak megfelel, és az M' DLK-automata azokat és csak azokat a $w\in\Sigma^*$ szavakat fogadja el, amelyeket az M DLK-automata elfogad és megforditva. Ezzel a lemma bizonyitását befejeztük.

1.7 Determinisztikus Turing-gépek

A Turing-gép definiciójának több változata ismeretes, amelyekről bebizonyitható, hogy egyenértéküek. A Turing-gépek elméletének részletesebb kifejtése található Turing ([28]-1936) cikkében, Davis ([4]-1958), Hopcroft-Ullman ([12]-1969), Salomaa ([25]-1973) könyveiben. A Turing-gép eredeti definiciójában az ún. iró-olvasó fej tetszés szerint munkaszalagon előre-hátra végtelenül mozoghat. Hopcroft-Ullman pedig az egyenértéküséget bebizonyitva adta azt a definiciót, amelyben a gép munkaszalagjának bal vége rögzitve van, és a gép iró-olvasó fejének ezt a határt nem lehet átlépni. Természetesen, balról jobbra megforditva kapjuk a következő definiciót, amelyet a célszerüség kedvéért fogunk használni a továbbiakban.

1.9 Definició.

a/ Egy determinisztikus Turing-gépen (röv. DT-gépen) az $M=(K,\Gamma,\Sigma,\delta,q_o,H)$ rendezett hatost értjük, ahol

K az állapothalmaz,

Γ a szalagábécé, amelynek egy speciális jelét blanknak nevezzük, s B-vel szokás jelölni,

$\Sigma \subseteq (\Gamma-\{B\})$ a bemenő ábécé,

$q_o\in K$ a kezdő állapot,

$H \subseteq K$ a végállapotok halmaza,

δ átmenetfüggvény a $K\times\Gamma$ halmaznak $K\times(\Gamma-\{B\})\times\{R,L\}$-be való egy leképezése, amelyre teljesül a következő feltétel:
tetszőleges $q\in K$, $z\in\Gamma$ kettesre $\delta(q,z)$ pontosan egy elemet tartalmaz.

b/ Adott M DT-gépnek egy konfigurációján értjük a w_1qw_2 vagy qBw alakú szót, amelyre $q\in K$, $w\in(\Gamma-\{B\})^+$, $w_1,w_2\in(\Gamma-\{B\})^*$ és $w_1w_2\neq\lambda$. A következő módon definiáljuk a konfigurációkra vonatkozó $\vdash_{\overline{M}}$ relációt:

1/ $w_1qxw_2 \vdash_{\overline{M}} w_1zpw_2$ ha $\delta(q,x)=(p,z,R)$,

2/ $w_1yqxw_2 \vdash_{\overline{M}} w_1pyzw_2$ ha $\delta(q,x)=(p,z,L)$,

3/ $qxw_2 \vdash_{\overline{M}} pBzw_2$ ha $\delta(q,x)=(p,z,L)$,

4/ $qBw \vdash_{\overline{M}} zpw$ ha $\delta(q,B)=(p,z,R)$,

5/ $qBw \vdash_{\overline{M}} pBzw$ ha $\delta(q,B)=(p,z,L)$,

ahol $q,p\in K$, $x,y,z\in\Gamma-\{B\}$, $w_1,w_2\in(\Gamma-\{B\})^*$, $w\in(\Gamma-\{B\})^+$.

Legyen $\overset{*}{\vdash_{\overline{M}}}$ reláció az $\vdash_{\overline{M}}$ reláció tranzitiv lezárása. Végül, az M DT-gép által elfogadott nyelv a következő:

$$L(M)=\{w\in\Sigma^*/q_0w \overset{*}{\vdash_{\overline{M}}} \alpha p,\ \text{ahol } p\in H,\ \alpha\in(\Gamma-\{B\})^*\}.$$

<u>1.6 Megjegyzés:</u>

a/ E definiciónak a Turing-gép eredeti definiciójával való egyenértéküségét bebizonyithatjuk azzal a módszerrel, amely a Hopcroft-Ullman által konstruált módszerhez általában hasonló, csak vegyük figyelembe, hogy a munkaszalag jobb szélének B-lépéssel való érintésével helyettesitsük a bal szélének B-lépéssel való érintését; vagy másképpen, ha használjuk a balra egy lépést végrehajtó módszert, amelyet Davis [1]-ben kontruált, akkor bebizonyithatjuk a Hopcroft-Ullman által adott definicióval való egyenértéküségét.

b/ Ha a δ átmenetfüggvény nem egyértelmü, azaz a $K\times\Gamma$ halmaz elemeihez a $K\times(\Gamma-\{B\})\times\{R,L\}$-nek nem egy-egy elemét, hanem egy-egy részhalmazát rendeli hozzá, akkor azt mondjuk, hogy az M Turing-gép nemdeterminisztikus.

1-13 Tétel. Tetszőleges L nyelvre a következő három állitás egymással ekvivalens:

1/ Az L nyelv 0-tipusú.

2/ $L=L(M)$, ahol M egy nemdeterminisztikus Turing-gép.

3/ $L=L(M')$, ahol M' egy determinisztikus Turing-gép.

1-14 Tétel. Az $\mathcal{L}_0$ nyelvosztály zárt a concatenáció, az unió és a metszet müveletére nézve.

Korollárium. Ha $L\in \mathcal{L}_0$ és $L'\in \mathcal{L}_3$, akkor az $L-L'$ nyelv 0-tipusú.

1.15 Tétel. Az $\mathcal{L}_0$ nyelvosztály zárt a homomorfizmusra nézve.

1.16 Tétel. Legyen $\Sigma=\{a,b\}$, akkor van olyan $L \subseteq \Sigma^*$ 0-tipusú nyelv, amely nem tartozik bele az $\mathcal{L}_1$ nyelvosztályba. Végül, az 1.12-lemmához hasonló jelentéssel bebizonyitjuk a következő állitást.

1.17 Lemma. Legyen Σ egy véges ábécé. Bármely $L \subseteq \Sigma^*$ 0-tipusú nyelvhez megadható olyan $M'=(K',\Gamma',\Sigma,\delta',q_0',H')$ DT-gép, amelyre $L=L(M')$ és a δ' átmenetfüggvény rendelkezik a következő tulajdonsággal:

Ha $\delta'(q,x)=(p,Z,i)$, akkor $Z\in\Gamma-\Sigma-\{B\}$, ahol $q,p\in K$, $x\in\Gamma$, $i\in\{R,L\}$.

Bizonyitás: Az 1.13 Tétel értelmében feltehetjük, hogy $L=L(M)$, ahol $M=(K,\Gamma,\Sigma,\delta,q_0,H)$ egy DT-gép. A következő módon definiáljuk az $M'=(K',\Gamma',\Sigma,\delta',q_0',H')$ DT-gépet:

$K'=K$,

$\Gamma'=\Gamma\cup\{a'/a\in\Sigma\}$,

$q_0'=q_0$,

$H'=H$,

a δ' átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $q\in K$, $x\in\Gamma$ kettesre:

Ha $\delta(q,x)=(p,Z,i)$, akkor $\delta'(q,x)=(p,\bar{Z},i)$, ahol $p\in K$, $Z\in\Gamma-\{B\}$, $i\in\{R,L\}$, és

$$\bar{Z}=\begin{cases} Z & ha \quad Z\in\Gamma-\Sigma-\{B\} \\ Z' & ha \quad Z\in\Sigma \end{cases}$$

2/ Tetszőleges $q\in K$, $a\in\Sigma$ kettesre: $\delta'(q,a')=\delta'(q,a)$

A δ' konstrukciójából látható, hogy a δ' átmenetfüggvény a lemma feltételének megfelel, és az M' DT-gép azokat és csak azokat a $w\in\Sigma^*$ szavakat fogadja el, amelyeket az M DT-gép elfogad és megforditva. Ezzel a lemma bizonyitását befejeztük.

2. Fejezet

PREFIX-MENTES NYELVEK

Ebben a fejezetben foglalkozunk a formális nyelv egy speciális osztályával, amelyet prefix-mentesnek nevezünk. A prefix-mentes tulajdonságot úgy érthetjük, hogy egy L nyelvet akkor nevezünk prefix-mentesnek, ha a nyelv tetszőleges szavának semmilyen valódi eleje sem tartozik bele magába az L nyelvbe. Megvizsgáljuk a prefix-mentes nyelvosztálynak az ismert müveletekre vonatkozó zártságát, valamint adunk néhány új müveletet, amelyek a prefix-mentes tulajdonságot tartják.

2.1 Definició. Egy L nyelvet akkor nevezünk prefix-mentesnek, ha tetszőleges (x,y) szópár esetén az $x \in L$ és $xy \in L$ feltételekből következik, hogy y szükségképpen az üres szó.

Megállapodás. A definicióban nyilvánvalónak tekintjük azt, hogy az L nyelv nem üres. A teljességért megállapitjuk, hogy a $\emptyset$ nyelv prefix-mentes is.

A prefix-mentes nyelvek osztályát $\mathcal{L}_p$-vel jelöljük. A definició alapján könnyü belátnunk: egy L nyelv, amely a λ üres szót is tartalmazza, akkor és csak akkor prefix-mentes ha $L=\{\lambda\}$.

2.1 Tétel. Az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztály zárt a concatenáció és metszet müveletére nézve.

Bizonyitás. Legyen L_1, L_2 két prefix-mentes nyelv. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $L_1 \neq \{\lambda\}$, $L_2 \neq \{\lambda\}$. Az nyilvánvaló, hogy az $L_1 \cap L_2$ nyelv prefix-mentes, mivel $L_1 \cap L_2 \subseteq L_1$ (és még $L_1 \cap L_2 \subseteq L_2$).
Most bebizonyitjuk: $L_1 L_2 \in \mathcal{L}_p$.

Legyenek x és y tetszőleges szavak, amelyekre $x \in L_1 L_2$ és $xy \in L_1 L_2$. Az L_1 és L_2 prefix-mentes tulajdonsága miatt az $x \in L_1 L_2$ feltételből következik: létezik pontosan egy (u_1, u_2) szópár, amelyre $u_1 \in L_1$, $u_2 \in L_2$ és $x = u_1 u_2$.

Hasonlóan az $xy \in L_1 L_2$ feltételből következik: létezik pontosan egy (v_1, v_2) szópár, amelyre $v_1 \in L_1$, $v_2 \in L_2$ és $xy = v_1 v_2$. Az most is nyilvánvaló, hogy $u_1 = v_1$, mivel másküllönben v_1 az u_1-nek valódi eleje lenne, vagy megforditva, amig mindkettő szó együtt beletartozik az L_1 nyelvbe, ami szintén ellentmondás. Ebből nyilván $v_2 = u_2 y$ is adódik. Mivel $L_2 \in \mathcal{L}_p$ és $u_2 \in L_2$, $v_2 \in L_2$, azért y szükségképpen az üres szó, ami éppen azt jelenti, hogy $L_1 L_2 \in \mathcal{L}_p$. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

<u>2.2 Tétel.</u> Ha L nyelv prefix-mentes, akkor az $\bar{L}$ nyelv kivezet az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztályból, s ezért az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztály nem zárt a komplemensképzés müveletére nézve.

Bizonyitás. Legyen $L \in \mathcal{L}_p$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $L \neq \{\lambda\}$. Ekkor van olyan nemüres x szó, amelyre $x \in L$. Másrészt az L prefix-mentes tulajdonsága miatt nyilván $xx \notin L$, $xxx \notin L$ adódik, vagyis $xx \in \bar{L}$ és $xxx \in \bar{L}$, amely mutatja, hogy az $\bar{L}$ nyelv nem prefix-mentes.

<u>2.3 Tétel.</u> Az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztály nem zárt az unióra nézve.

Bizonyitás. A tétel bizonyitásához elegendő, hogy megadjunk két olyan prefix-mentes nyelvet, amelyeknek az uniója nem tartozik bele az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztályba.

Tekintsük az $L_1=\{a^n b/n\geq 0\}$ és $L_2=\{b^n a/n\geq 1\}$ nyelveket. Könnyen belátható, hogy ezek prefix-mentesek, viszont az $L_1 \cup L_2=\{a^n b/n\geq 0\} \cup \{b^n a/n\geq 1\}$ nyelv már nem prefix-mentes. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

E tétel mellett könnyü belátnunk, hogy két prefix-mentes nyelv uniója akkor és csak akkor prefix-mentes, ha az egyik nyelv tetszőleges szavának semmilyen valódi eleje sem tartozik bele a másikba, és megforditva. Ebből felvetődik a kérdés, hogy lehetne a fenti feltételt vizsgálni, és ennek alapján definiálnánk olyan müveletet, amely nemcsak az unióhoz hasonló, hanem tartja a prefix-mentes tulajdonságot is. Ezzel a céllal bevezetjük az alábbi definiciót.

2.2 Definició. Legyen Σ egy véges, nemüres ábécé, és $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ két nyelv.

a/ A következő módon definiáljuk az L_1 nyelvnek L_2-re vonatkozó prefix-mentes differenciáját (jelben $L_1 p L_2$):

$$L_1 p L_2 = \{y \in L_1 / \text{ Ha } x<y, \text{ akkor } x \notin L_2\}.$$

b/ Definiáljuk továbbá az L_1 és L_2 prefix-mentes unióját (jelben $L_1 \cup_p L_2$) úgy, hogy

$$L_1 \cup_p L_2 = (L_1 p L_2) \cup (L_2 p L_1).$$

A definicióból könnyen belátható:

$$L_1 \cup_p L_2 = L_1 \cup L_2 - \{y_1 \in L_1 / \text{ van olyan } x<y_1 : x \in L_2\}$$
$$-\{y_2 \in L_2 / \text{ van olyan } x<y_2 : x \in L_1\}.$$

A következő állitással megmutatjuk, hogy a fenti müveletek érvényesek az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztályra.

2.4 Tétel. Ha $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_p$, akkor $L_1 p L_2$, $L_1 \cup_p L_2 \in \mathcal{L}_p$ is.

Bizonyitás. Legyen L_1, L_2 két prefix-mentes nyelv. Ekkor nyilván $L_1 p L_2$, $L_2 p L_1 \in \mathcal{L}_p$ adódik, mivel $L_1 p L_2 \subseteq L_1$ és $L_2 p L_1 \subseteq L_2$.

Most azt kell bizonyitanunk, hogy az $L_1 \cup_p L_2$ nyelv prefix-mentes. Legyenek x és y tetszőleges szavak, amelyekre $x \in L_1 \cup_p L_2$ és $xy \in L_1 \cup_p L_2$. Mivel $L_1 \cup_p L_2 = (L_1 p L_2) \cup (L_2 p L_1)$ és az L_1 és L_2 szereplései egymással egyenértéküek, azért feltehetjük: $x \in L_1 p L_2 = \{u \in L_1 /\ ha\ v<u,\ akkor\ v \notin L_2\}$. Megkülönböztetünk két esetet:

a. eset: $xy \in L_1 p L_2$.

Ekkor könnyen belátható, hogy mind az x, xy szó beletartozik a prefix-mentes L_1 nyelvbe. Eszerint $y=\lambda$ adódik.

b. eset: $xy \in L_2 p L_1$.

Ebben az esetben nyilvánvaló, hogy y szó szükségképpen az üres szó. Ha ugyanis nem igy volna, akkor az $L_2 p L_1$ definiciója szerint nyilván $x \notin L_1$, ami szintén ellentmondás. Mindkét esetben megmutattuk, hogy tetszőleges (x,y) szópár esetén az $x \in L_1 \cup_p L_2$ és $xy \in L_1 \cup_p L_2$ feltételekből következik, hogy $y=\lambda$, azaz $L_1 \cup_p L_2 \in \mathcal{L}_p$.

Még érdemes észrevenni az L_1 nyelvnek L_2-re vonatkozó prefix-mentes differenciájáról, hogy ha a szó valódi elejét jelentő $<$ szimbólumot helyettesitjük az egyenlőség szimbólumával, akkor megkapjuk az L_1 nyelvnek L_2-re vonatkozó differenciáját, amely természetesen értelmezhető a prefix-mentes nyelvekre.

2.5 Tétel. Ha $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_p$, akkor $L_1 - L_2 \in \mathcal{L}_p$.

Bizonyitás. Az $L_1 - L_2 \subseteq L_1$ tartalmazásból adódik.

2.6 Tétel. Az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztály nem zárt a bal és jobb hányadosra nézve.

Bizonyitás. A tétel bizonyitásához elegendő, hogy megadjunk két olyan prefix-mentes nyelvet, amelyeknek a bal hányadosa (és különben a jobb hányados részére) kivezet az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztályból.

Először, a bal hányados részére megadjuk a következő két nyelvet:

$$L_1 = \{ab, bb\} \quad \text{és} \quad L_2 = \{abbb, bbb\}.$$

Könnyen belátható, hogy ezek prefix-mentesek, viszont az $L_1 \setminus L_2 = \{w /$ van olyan $w_1 \in L_1 : w_1 w \in L_2\} = \{bb, b\}$ nyelv már nem prefix-mentes.

A jobb hányados részére pedig tekintsük az alábbi prefix-mentes nyelveket:

$$L_1' = \{a^n bb / n \geq 1\} \quad \text{és} \quad L_2' = \{bb\}.$$

Ekkor nyilván az $L_1' / L_2' = \{w /$ van olyan $w_2 \in L_2' : w w_2 \in L_1'\} = \{a^n / n \geq 1\}$ nyelv nem prefix-mentes. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

2.7 Tétel. Az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztály nem zárt a homomorfizmusra nézve.

Bizonyitás. A tétel bizonyitásánál sokkal erősebben megmutatjuk, hogy van olyan L prefix-mentes nyelv és λ-mentes homomorfizmus, amelyekre a $h(L)$ nyelv nem prefix-mentes.

Definiáljuk most az L nyelvet és a h homomorfizmust a következőképpen:

$L=\{a^n b/n\geq 0\}$,

h homomorfizmus a következő:

1/ $h(\lambda)=\lambda$,

2/ $h(a)=ba$,

3/ $h(b)=b$.

Világos, hogy a $h(L)=\{b\}\cup\{(ba)^m b/m\geq 1\}$ nyelv nem prefix-mentes.

Az alábbi részben foglalkozunk a homomorfizmusok egy speciális osztályával, amely a prefix-mentes tulajdonságot tartja.

2.3 Definició. Legyen adva két véges ábécé Σ_1 és Σ_2. A Σ_1^* halmaznak a Σ_2^*-ba való egy h homomorfizmusát prefix-mentesnek nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal: tetszőleges $x,y\in\Sigma_1^*$ szavakra $h(x)<h(y)\Longrightarrow x<y$.

A prefix-mentes homomorfizmusokból a triviális homomorfizmusokat hagyjuk el, akkor kapjuk a következő állitást.

2.8 Tétel. Legyen adva két véges ábécé Σ_1 illetve Σ_2 és $h:\Sigma_1^*\to\Sigma_2^*$ egy nemtriviális homomorfizmus.
Ha a h homomorfizmus prefix-mentes, akkor λ-mentes is.

Bizonyitás. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy a Σ_1 ábécé nem üres. Mivel a h homomorfizmus nemtriviális, azért van olyan $a\in\Sigma_1$ jel, amelyre $h(a)\neq\lambda$. Most indirekt tegyük fel, hogy a h homomorfizmus nem λ-mentes, vagyis legyen $x\in\Sigma_1^*-\{\lambda\}$ olyan szó, amelyre $h(x)=\lambda$. Másrészt a prefix-mentes homomorfizmus definiciója szerint a $h(x)=\lambda < h(a)$ feltételből következik, hogy $x<a$, ami szintén ellentmondás.

<u>2.9 Tétel.</u> Legyen adva két véges ábécé Σ_1 illetve Σ_2, és $h\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ egy nemtriviális prefix-mentes homomorfizmus. Az $L \subseteq \Sigma_1^*$ nyelv akkor és csak akkor prefix-mentes, ha $h(L)\subseteq \Sigma_2^*$ nyelv prefix-mentes.

Bizonyitás. Amennyiben $L=\{\lambda\}$, akkor nincs mit bizonyitanunk. A bizonyitást két részben végezzük.

1. rész. Ha $L\in \mathcal{L}_p$, akkor $h(L)\in \mathcal{L}_p$.

Ezzel ellentétben tegyük fel, hogy vannak olyan X, $Y\neq\lambda$ szavak, amelyekre $X\in h(L)$ és $XY\in h(L)$.
Ebből következik, hogy léteznek olyan $x,y\neq\lambda$ szavak, amelyekre $X=h(x)$ ill. $Y=h(y)$, és $x\in L$ ill. $xy\in L$, ami az L nyelv prefix-mentes tulajdonságának ellentmondására vezet.

2. rész. Ha $h(L)\in \mathcal{L}_p$, akkor $L\in \mathcal{L}_p$.

Legyenek x és y tetszőleges szavak, amelyekre $x\in L$ és $xy\in L$.
Könnyen belátható, hogy $h(y)=\lambda$, mivel a $h(L)$ nyelv prefix-mentes és $h(x)\in h(L)$ ill. $h(xy)=h(x)h(y)\in h(L)$.
Másrészt a 2.8 Tétel értelmében a $h(y)=\lambda$ feltételből rögtön következik, hogy $y=\lambda$, ami éppen azt jelenti, hogy az L nyelv prefix-mentes.
Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

Mint tudjuk, a pushdown-automatáknál a determinisztikus változat nem egyenértékü a nemdeterminisztikus változattal, a lineárisan korlátolt automaták esetében mindmáig nyitott kérdés viszont az, hogy a determinisztikus változat egyenértékü-e a nemdeterminisztikus változattal, s ezért világos, hogy a determinisztikus automaták által elfogadott nyelvosztályoknak a prefix-mentes homomorfizmusra vonatkozó zártságát általában nem könnyü vizsgálnunk. Mi a továbbiakban példaként foglalkozunk a prefix-mentes homomorfizmusok egy konkrét osztályával, amelyet most megfogalmazunk.

2.4 Definició. Legyen Σ és Δ két diszjunkt véges ábécé, illetve $w\in\Delta^*$ valamely rögzitett szó. A következő módon definiáljuk a Σ^* halmaznak a $(\Sigma\cup\Delta)^*$-ba való h_w homomorfizmusát:

1/ $h_w(\lambda)=\lambda$,

2/ $h_w(a)=aw$ tetszőleges $a\in\Sigma$ jelre,

3/ $h_w(xy)=h_w(x)h_w(y)$ tetszőleges $x,y\in\Sigma^*$ szavakra.

Definiáljuk továbbá egy $L\subseteq\Sigma^*$ nyelvnek a h_w homomorfizmus által hozzárendelt képét úgy, hogy

$$h_w(L)=\{h_w(P)/P\in L\}.$$

A definicióból nyilván adódik a következő állitás.

2.10 Tétel. Legyen Σ és Δ két diszjunkt véges ábécé. Tetszőleges $w\in\Sigma^*$ szóra a h_w homomorfizmus prefix-mentes.

Korollárium. Legyen Σ és Δ két diszjunkt véges ábécé, illetve $w\in\Sigma^*$ valamely rögzitett szó.
Az $L\subseteq\Sigma^*$ nyelv akkor és csak akkor prefix-mentes, ha $h_w(L)\subseteq(\Sigma\cup\Delta)^*$ nyelv prefix-mentes.

Bizonyitás. A 2.9 és 2.10 Tételekből adódik.

Mielőtt a prefix-mentességről a szuffix-mentességre forditanánk, a prefix-mentes nyelvek tükrözését megvizsgáljuk.

<u>2.11 Tétel.</u> Az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztály nem zárt a tükrözésre nézve.

Bizonyitás. A tétel bizonyitásához elegendő, hogy megadjunk egy olyan L prefix-mentes nyelvet, amelyre az L^R nyelv nem prefix-mentes. Tekintsük az $L=\{a^n b/n\geq 1\}$ nyelvet. Vilgáos, hogy az L nyelv prefix-mentes, viszont az $L^R=\{ba^n/n\geq 1\}$ nyelv kivezet az $\mathcal{L}_p$ nyelvosztályból.

<u>2.5 Definició.</u> Egy L nyelvet akkor nevezünk szuffix-mentesnek, ha az L^R nyelv prefix-mentes, vagyis tetszőleges (y,x) szópár esetén az $x\in L$ és $yx\in L$ feltételekből következik, hogy y szükségképpen az üres szó.

Megállapodás. A definicióban nyilvánvalónak azt tekintjük, hogy az L nyelv nem üres. A teljességért megállapitjuk, hogy a $\emptyset$ nyelv szuffix-mentes.
A szuffix-mentes nyelvek osztályát $\mathcal{L}_{sz}$-sel jelöljük. Definiáljuk még az $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_{sz}$ nyelvosztályt, amely egyszerre prefix-mentes és szuffix-mentes.

A fenti tételek bizonyitásaihoz hasonló módon könnyü belátnunk, hogy az $\mathcal{L}_{sz}$ és $\mathcal{L}_f$ nyelvosztályok egyike sem zárt az unióra és a komplemensképzésre nézve, de zárt a concatenációra és a metszetre nézve. A tükrözésre nézve pedig az $\mathcal{L}_{sz}$ nyelvosztály nem zárt, viszont az $\mathcal{L}_f$ nyelvosztály zárt.

A prefix-mentes nyelveket az eddigiekben csak a prefix-mentes tulajdonsággal tárgyaltuk. Most foglalkozunk a prefix-tulajdonásggal. Mindenekelőtt a prefix-mentes differenciához konjugált müveletet rendeljük hozzá, amely a prefixtuldajdonságot őrzi, s ennek alapján bevezetjük a prefixtartalmazás fogalmát is (Lásd részletesen [22]-ben).

<u>2.6 Definició.</u> Legyen Σ egy véges, nemüres ábécé, és $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ két nyelv. A következő módon definiáljuk az L_1 nyelvnek az L_2-re vonatkozó prefixdifferenciáját (jelben $L_1\bar{p}L_2$):

$$L_1\bar{p}L_2=\{y\in L_1 / \text{ van olyan } x<y: x\in L_2\}.$$

A 2.1 és 2.6 definiciókból nyilván adódik a következő állitás.

<u>2.12 Tétel.</u> Ha $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}_p$, akkor:

1/ $L_1\bar{p}L_2 \in \mathfrak{L}_p$,

2/ $(L_1pL_2)\cap(L_1\bar{p}L_2)=\emptyset$,

3/ $(L_1pL_2)\cup(L_1\bar{p}L_2)=L_1$,

4/ $L_1pL_2=L_1-(L_1\bar{p}L_2)$.

<u>2.7 Definició.</u> Legyen Σ egy véges, nemüres ábécé, és $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ két prefix-mentes nyelv.

a/ Tetszőleges $w\in\Sigma^*$ szóról azt mondjuk, hogy a w szó prefixképpen tartozik bele az L_2 nyelvbe (jelben $w\in_p L_2$), ha létezik olyan $x<w$ szó, amelyre $x\in L_2$.

b/ L_1 és L_2 nyelvekről azt mondjuk, hogy az L_2 nyelv prefixképpen tartalmazza az L_1 nyelvet (jelben $L_1 \subseteq_p L_2$), ha az L_1 minden szava prefixképpen tartozik bele az L_2 nyelvbe, azaz

$$L_1 \subseteq_p L_2 \Longleftrightarrow \{w\in L_1 \Longrightarrow w\in_p L_2\}.$$

A definicióból könnyen belátó, hogy tetszőleges L_1 és L_2 prefix-mentes nyelvekre $(L_1\bar{p}L_2) \subseteq_p L_2$. Ennél sokkal erősebben belátjuk a következő állitást.

<u>2.13 Tétel.</u> Legyen Σ egy véges, nemüres ábécé, és $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ két prefix-mentes nyelv.
$L_1 \subseteq_p L_2$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $L_1 = L_1 \bar{p} L_2$.

Bizonyitás. A fenti megjegyzés értelmében világos, hogy ha $L_1 = L_1 \bar{p} L_2$ akkor $L_1 \subseteq_p L_2$.

Most megforditva bebizonyitjuk: ha $L_1 \subseteq_p L_2$ akkor $L_1 = L_1 \bar{p} L_2$. Ehhez csak azt kell igazolnunk, hogy $L_1 \subseteq L_1 \bar{p} L_2$, mivel a 2.6 definicióból nyilván $L_1 \bar{p} L_2 \subseteq L_1$ adódik. Másrészt a 2.7 definicióból az is nyilvánvaló, hogy ha $w \in L_1$ akkor $w \in_p L_2$, vagyis létezik olyan $x < w$ szó, amelyre $x \in L_2$, azaz $w \in L_1 \bar{p} L_2$.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

3. Fejezet

EGYSZERŰ DETERMINISZTIKUS VÉGES GÉPEK

Ebben a fejezetben foglalkozunk a determinisztikus véges automaták egy speciális osztályával, melyet egyszerű determinisztikus véges géposztálynak nevezünk, s ennek a géposztálynak az a karakterisztikus tulajdonsága, hogy pontosan a prefix-mentes 3-tipusú nyelvek osztályát fogadja el.

3.1 Prefix-mentes nyelvek és egyszerű determinisztikus véges gépek

3.1 Definició.

a/ Egy egyszerű determinisztikus véges gépen (röv. EDV-gépen) az $M=(K,\Sigma,\delta,q_o,H)$ rendezett ötöst értjük, ahol

K az állapothalmaz,

Σ a bemenő ábécé,

$q_o \in K$ a kezdő állapot,

$H \subseteq K$ a végállapotok halmaza,

δ átmenetfüggvény a $(K-H)X\Sigma$ halmaznak a K-ba való leképezése.

b/ Adott M EDV-gép egy konfigurációján értjük azt a qw szót, amelyre $q \in K$, $w \in \Sigma^*$. A következő módon definiáljuk a konfigurációkra vonatkozó $\vdash_M$ relációt:

$$qaw \vdash_M pw \Longleftrightarrow \delta(q,a)=p,$$

ahol $q \in K-H$, $p \in K$, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$.

Legyen $\overset{*}{\vdash_M}$ reláció az $\vdash_M$ reláció tranzitiv lezárása.

Végül, az M EDV-gép által elfogadott nyelv a következő:

$$L(M)=\{w\in\Sigma^*/q_o w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} p, \text{ ahol } p\in H\}.$$

Egy L nyelvet egyszerü determinisztikus 3-tipusúnak (röv. ed3-tipusúnak) nevezünk, ha létezik olyan M EDV-gép, amelyre $L=L(M)$. Az ed3-tipusú nyelvek osztályát $\mathcal{L}_{ed3}$-mal jelöljük.

3.1 Megjegyzés: A célszerüség kedvéért a δ átmenetfüggvényre kirottuk azt a feltételt, hogy semmilyen $p\in H$, $a\in\Sigma$ kettesnél $\delta(p,a)$ nincs értelmezve, azaz a δ átmenetfüggvény nem teljes a $K\times\Sigma$ halmazon. De könnyen belátható, hogy egy EDV-gép DV-automatává válik, ha bevezetünk egy új $\bar{q}$ állapotot, amelyből a gép csak egyetlen $\bar{q}$ állapotba mehet át. Ezt belátjuk a következő tétel bizonyitásában.

3.1 Tétel. Legyen Σ egy véges ábécé, és $L\subseteq\Sigma^*$.
Az L nyelv akkor és csak akkor ed3-tipusú, ha az L nyelv prefix-mentes és 3-tipusú, azaz az $\mathcal{L}_{ed3}$ nyelvosztály megegyezik az $\mathcal{L}_p$ és $\mathcal{L}_3$ metszetével.

Bizonyitás.

1. rész. Ha $L\in\mathcal{L}_3\cap\mathcal{L}_p$ akkor $L\in\mathcal{L}_{ed3}$.

Az 1.1 Tétel értelmében feltehető, hogy $L=L(M)$, ahol

$M=(K,\Sigma,\delta,q_o,H)$ egy DV-automata.

Most konstruálunk olyan M' EDV-gépet, amelyre $L(M')=L(M)$.
Legyen $M'=(K,\Sigma,\delta',q_o,H)$, ahol a δ' átmenetfüggvény a következő módon van definiálva:

a/ Tetszőleges $q\in K-H$, $a\in\Sigma$ kettesre: $\delta'(q,a)=\delta(q,a)$.

b/ Minden $p\in H$, $a\in\Sigma$ kettesre: $\delta'(p,a)$ nem definiált.

Belátjuk először, hogy $L(M') \subseteq L(M)$. Legyen $w\in L(M')$, vagyis $q_o w \vdash_{M'}^{*} p$, ahol $p\in H$. A δ' konstrukciójából nyilván $q_o w \vdash_{M}^{*} p$ is adódik, azaz $w\in L(M)$.

Megforditva bebizonyitjuk, hogy $L(M) \subseteq L(M')$. Ehhez elég megmutatnunk: ha $w\notin L(M')$ akkor $w\notin L(M)$.

Itt két esetet különböztetünk meg:

1. eset. Legyen $w=w_1aw_2$ és $q_o w_1 a w_2 \vdash_{M'}^{*} paw_2$, ahol $p\in H$, $a\in\Sigma$, $w_1,w_2\in\Sigma^*$.

Ekkor nyilván $q_o w_1 \vdash_{M}^{*} p$ adódik, azaz $w_1\in L(M)$.
Mivel az $L(M)$ nyelv prefix-mentes és $y=aw_2\neq\lambda$, azért $w=w_1y\notin L(M)$.

2. eset. Legyen $q_o w \vdash_{M'}^{*} q$, ahol $q\notin H$.

Ebben az esetben nyilván $q_o w \vdash_{M}^{*} q$ adódik, azaz $w\notin L(M)$.
Végeredményben tehát $L(M')=L(M)=L$, ahol M' egy EDV-gép. Eszerint $L\in \mathcal{L}_{ed3}$ áll fenn.

2. rész. Ha $L\in \mathcal{L}_{ed3}$, akkor $L\in \mathcal{L}_3 \cap \mathcal{L}_p$.

Legyen $L=L(M)$, ahol $M=(K,\Sigma,\delta,q_o,H)$ egy EDV-gép. Világos, hogy az $L(M)$ nyelv prefix-mentes, mivel semelyik $p\in H$, $a\in\Sigma$ kettesnél $\delta(p,a)$ nincs értelmezve, azaz az M gép rögtön elakad, amikor egy szót elfogad és valamely végállapotban van, mig a bemenő szó további része beadható.

Most igazoljuk: $L\in \mathcal{L}_3$.

Konstruáljuk az $M'=(K\cup\{\bar{q}\},\Sigma,\delta',q_o,H)$ DV-automatát úgy, hogy $\bar{q}\notin K$ és δ' átmenetfüggvény a következő:

a/ Tetszőleges $q\in K-H$, $a\in\Sigma$ kettesre: $\delta'(q,a)=\delta(q,a)$.

b/ Minden $p\in H\cup\{\bar{q}\}$, $a\in\Sigma$ kettesre: $\delta'(p,a)=\bar{q}$.

Nyilván M' azokat és csak azokat a $w\in\Sigma^*$ szavakat fogadja el, amelyeket M elfogad és megforditva. Eszerint $L(M')=L(M)$ áll fenn.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

3.2 Az ed3-tipusú nyelvosztály tulajdonságai

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk az $\mathcal{L}_{ed3}$ nyelvosztálynak az ismert, valamint az előző fejezetben adott müveletekre vonatkozó zártságait. Ezeknek a bizonyitásaiban az $\mathcal{L}_3$ és $\mathcal{L}_p$ nyelvosztályok zártságaira visszatekintve tulajdonképpen használjuk a 3.1 Tételt.

<u>3.2 Tétel.</u> Ha az L nyelv ed3-tipusú, akkor az $\bar{L}$ nyelv kivezet az $\mathcal{L}_{ed3}$ nyelvosztályból, s ezért az $\mathcal{L}_{ed3}$ nyelvosztály nem zárt a komplemensképzésre nézve.

Bizonyitás. A 2.2 Tétel bizonyitásából adódik.

<u>3.3 Tétel.</u> Az $\mathcal{L}_{ed3}$ nyelvosztály nem zárt az unióra nézve.

Bizonyitás. Tekintsük a 2.3 Tétel bizonyitásában adott nyelveket:

$$L_1=\{a^n b/n\geq 0\} \quad és \quad L_2=\{b^n a/n\geq 1\}.$$

Világos, hogy az $L_1 \cup L_2$ nyelv nem prefix-mentes, és a 3.1 Tétel szerint az $L_1 \cup L_2$ nyelv nem is ed3-tipusú. Most csak azt kell igazolnunk, hogy $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{ed3}$.
Konstruálunk olyan M_1, M_2 EDV-gépeket, amelyre $L_1=L(M_1)$ és $L_2=L(M_2)$. Legyen $M_1=(K_1,\{a,b\},\delta_1,q_o,\{q_h\})$ és $M_2=$ $=(K_2,\{a,b\}, \delta_2,q_o,\{q_h\})$, ahol

1/ $K_1=\{q_o,q_h\}$, és a δ_1 átmenetfüggvény a következő:

a/ $\delta_1(q_o,a)=q_o$,

b/ $\delta_1(q_o,b)=q_h$.

2/ $K_2=\{q_o,q_1,\bar{q},q_h\}$ és a δ_2 átmenetfüggvény a következő:

a/ $\delta_2(q_o,b)=q_1$,

b/ $\delta_2(q_o,a)=\bar{q}$,

c/ $\delta_2(q_1,b)=q_1$,

d/ $\delta_2(q_1,a)=q_h$,

e/ $\delta_2(\bar{q},b)=\delta_2(\bar{q},a)=\bar{q}$.

A δ_1 és δ_2 konstrukciójából könnyen belátható, hogy az M_1 és M_2 EDV-gépek és $L_1=L(M_1)$ ill. $L_2=L(M_2)$.

3.4 Tétel. Az $\mathcal{L}_{ed3}$ nyelvosztály zárt a concatenációra és a metszetre nézve.

Bizonyitás. Az 1.2, 2.1. és 3.1 Tételekből adódik.

3.5 Tétel. Ha $L,L'\in\mathcal{L}_{ed3}$, akkor $L-L'\in\mathcal{L}_{ed3}$.

Bizonyitás. Az 1.2 Tétel korolláriumából és a 2.5 Tételből adódik.

3.6 Tétel. Ha $L,L'\in\mathcal{L}_{ed3}$, akkor $LpL'\in\mathcal{L}_{ed3}$.

Bizonyitás. Legyen $L=L(M)$ és $L'=L(M')$, ahol $M=(K,\Sigma,\delta,q_o,H)$ és $M'=(K',\Sigma',\delta',q_o',H')$ két EDV-gép. Konstruálunk olyan M_1 EDV-gépet, amelyre $L(M_1)=LpL'$. Legyen az $M_1=(K_1\Sigma\cup\Sigma',\delta_1,[q_o,q_o'],H)$ EDV-gép a következő módon definiálva:

$K_1=\{[q,q']/q\in K-H$ és $q'\in K'-H'\}\cup K\cup\{\bar{q}\}$, ahol $\bar{q}\notin K$,

a δ_2 átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $b\in\Sigma\cap\Sigma'$, $q\in K-H$, $q'\in K'-H'$ hármasra:
ha $\delta(q,b)=p$ és $\delta'(q',b)=p'$, akkor $\delta_1([q,q'],b)=\bar{p}$, ahol

$$\bar{p} = \begin{cases} p & ha \quad p\in H \\ [p,p'] & ha \quad p\notin H \quad és \quad p'\notin H' \\ \bar{q} & ha \quad p\notin H \quad és \quad p'\in H' \end{cases}$$

2/ Tetszőleges $a\in\Sigma\dot{-}\Sigma'$, $q\in K-H$, $q'\in K'-H'$ hármasra:

$$\delta_1([q,q'],\ a)=\delta(q,a)$$

3/ Tetszőleges $a'\in\Sigma'-\Sigma$, $q\in K-H$, $q'\in K'-H'$ hármasra:

$$\delta_1([q,q'],a')=\bar{q}$$

4/ Tetszőleges $q\in K-H$ állapotra:

$$\delta_1(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & ha \quad a\in\Sigma \\ \bar{q} & ha \quad a\in\Sigma'-\Sigma. \end{cases}$$

5/ Minden $a\in\Sigma\cup\Sigma'$-re:

$$\delta_1(\bar{q},a)=\bar{q}.$$

A δ_1 konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $w\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$ szóra:

$$\langle 3.6.1\rangle \quad \begin{cases} q_o w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} p \\ q_o' w \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} p' \end{cases} \Longleftrightarrow [q_o, q_o']\, w \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} \bar{p},$$

ahol

$$\bar{p} = \begin{cases} p & ha \quad p \in H. \\ [p,p'] & ha \quad p \notin H \text{ és } p' \notin H'. \\ \bar{q} & ha \quad p \notin H \text{ és } p' \in H'. \end{cases}$$

Most bebizonyitjuk: $L(M_1)=LpL'$.

($\Longleftarrow$). Belátjuk először, hogy $LpL' \subseteq L(M_1)$.

Legyen $w \in LpL' = \{w \in L / \text{ ha } x < w, \text{ akkor } x \notin L'\}$. Ekkor két esetet különböztetünk meg.

1. eset. Legyen $w \in (\Sigma \cap \Sigma')^*$ és $q_o w \vdash_M^* p$ ill. $q_o' w \vdash_{M'}^* q'$, ahol $p \in H$, $q' \in K'$.

A <3.6.1> állitásból nyilván $[q_o, q_o']w \vdash_{M_1}^* p$ adódik, azaz $w \in L(M_1)$.

2. eset. Legyen $w = w_1 a w_2$, ahol $w_1 \in (\Sigma \cap \Sigma')^*$, $a \in \Sigma - \Sigma'$, $w_2 \in (\Sigma \cup \Sigma')^*$, és $q_o w_1 a w_2 \vdash_M^* q_1 a w_2 \vdash_M q_2 w_2 \vdash_M^* p$ ill. $q_o' w_1 \vdash_{M'}^* q'$, ahol $p \in H$, $q' \notin H'$.

Ismét használjuk a <3.6.1> állitást és kapjuk:

$[q_o, q_o'] w_1 a w_2 \vdash_{M_1}^* [q_1, q_1'] a w_2 \vdash_{M_1} q_2 w_2 \vdash_{M_1}^* p$, azaz $w \in L(M_1)$.

Mindkét esetben beláttuk: $w \in L(M_1)$ valahányszor $w \in LpL'$.

($\Longrightarrow$). Megforditva igazoljuk, hogy $L(M_1) \subseteq LpL'$.

Ehhez elég megmutatnunk: ha $w \notin LpL'$, akkor $w \notin L(M_1)$.

Világos, hogy ha $w \notin L$, akkor $w \notin L(M_1)$, mivel az M és M_1 végállapothalmazai egymással azonosak. Nézzük tehát a $w \in L-(LpL')$ esetet, vagyis $w = w_1 a w_2$ és

$$\begin{cases} q_o w_1 a w_2 \vdash_M^* q_1 a w_2 \vdash_M q_2 w_2 \vdash_M^* p, & ahol \quad p \in H, \\ q_o' w_1 a w_2 \vdash_{M'}^* p' a w_2, & ahol \quad p' \in H'. \end{cases}$$

Hasonlóan kapjuk:

$$[q_o,q_o']w_1aw_2 \vdash_{M_1}^{*} \bar{q}aw_2 \vdash_{M_1}^{*} \bar{q}, \text{ ahol } \bar{q}\in H, \text{ azaz } w\notin L(M_2).$$

Végeredményben tehát az $L(M_1)=LpL'$ egyenlőség áll fenn, az-az $LpL'\in \mathcal{L}_{ed3}$.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

<u>3.7 Tétel.</u> Ha $L,L'\in \mathcal{L}_{ed3}$, akkor $L \cup pL'\in \mathcal{L}_{ed3}$.

Bizonyitás. Legyenek L és L' ed3-tipusúak. Ekkor a 3.1 Tétel szerint ezek nyilván 3-tipusúak és prefix-mentesek. Ebből a 2.4 Tétel értelmében következik, hogy $L\cup pL'\in \mathcal{L}_p$. Eszerint most csak azt kell igazolnunk: $L\cup pL'\in \mathcal{L}_3$. Másrészt a 3.6 Tétel szerint nyilvánvaló, hogy LpL' és $L'pL$ nyelvek ed3-tipusúak, s ezért 3-tipusúak is. Tehát az 1.2 Tételből nyilván $L\cup pL'=(LpL')\cup(L'pL)\in \mathcal{L}_3$ adódik. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

<u>3.8 Tétel.</u> Az $\mathcal{L}_{ed3}$ nyelvosztály nem zárt az általános homomorfizmusra nézve, de zárt a prefix-mentes homomorfizmusra nézve.

Bizonyitás. Az első állitás a 2.7 Tétel bizonyitásából adódik. A második az 1.3- és 2.9 Tételek következménye.

<u>Korollárium.</u> Legyen Σ és Δ két diszjunkt véges ábécé, illetve $w\in\Sigma^*$ valamely rögzitett szó.
Az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv akkor és csak akkor ed3-tipusú, ha a $h_w(L) \subseteq$ $\subseteq (\Sigma\cup\Delta)^*$ nyelv ed3-tipusú.

4. Fejezet

EGYSZERÜ DETERMINISZTIKUS PUSHDOWN-GÉPEK

Ebben a fejezetben foglalkozunk a determinisztikus pushdown-automaták egy speciális osztályával, amelyet egyszerü determinisztikus pushdown-gépozstálynak nevezünk. Ennek a géposztálynak az a karakterisztikus tulajdonsága, hogy pontosan a prefix-mentes determinisztikus 2-tipusú nyelvosztályt fogadja el. Megvizsgáljuk az egyszerü determinisztikus véges gépek és egyszerü determinisztikus pushdown-gépek osztályozását. A vizsgálat során egyidejüleg belátjuk az ún. egyszerü gép szerepét, amelynek a definicióját Friedman adta meg ([5]-1977).

4.1 Prefix-mentes nyelvek és egyszerü determinisztikus pushdown-gépek

4.1 Definició.

a/ Egy egyszerü determinisztikus pushdown-gépen (röv. EDP-gépen) az $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_o,z_o,H)$ rendezett hetest értjük, ahol

K	az állapothalmaz,
Σ	a bemenő ábécé,
Γ	a pushdown-ábécé,
$q_o \in K$	a kezdő állapot,
$z_o \in \Gamma$	a kezdő pushdown-jel,
$H \subseteq K$	a végállapotok halmaza,

δ átmenetfüggvény a $(K-H)X(\Sigma\cup\{\lambda\})X\Gamma$ halmaznak a $KX\Gamma^*$-ba való egy leképezése, amelyre teljesülnek a következő feltételek: tetszőleges $q\in K-H$, $z\in\Gamma$ kettesre

vagy i/ $\delta(q,\lambda,z)$ pontosan egy elemet tartalmaz, és
$\delta(q,a,z)$ nem definiált semmilyen $a\in\Sigma$-ra; vagy
ii/ $\delta(q,\lambda,z)$ nem definiált, és minden $a\in\Sigma$-ra
$\delta(q,a,z)$ pontosan egy elemet tartalmaz.

b/ Adott M EDP-gép egy konfigurációján értjük azt a (q,w,α) hármast, amelyre $q\in K$, $w\in\Sigma^*$, $\alpha\in\Gamma^*$. A következő módon definiáljuk a konfigurációkra vonatkozó $\vdash_M$ relációt:

$$(q,aw,\alpha z) \vdash_M (p,w,\alpha\beta) \Longleftrightarrow \delta(q,a,z)=(p,\beta),$$

ahol $q\in K-H$, $p\in K$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $w\in\Sigma^*$, $z\in\Gamma$, $\alpha,\beta\in\Gamma^*$.

Legyen $\vdash_M^*$ reláció az $\vdash_M$ reláció tranzitiv lezárása. Végül, az M EDP-gép által elfogadott nyelv a következő:

$$L(M)=\{w\in\Sigma^*/(q_0,w,z_0) \vdash_M^* (p,\lambda,\alpha),\ ahol\ p\in H,\ \alpha\in\Gamma^*\}.$$

Egy L nyelvet egyszerü determinisztikus 2-tipusúnak (röv. ed2-tipusúnak) nevezünk, ha létezik olyan M EDP-gép, amelyre $L=L(M)$. Az ed2-tipusú nyelvek osztályát $\mathcal{L}_{ed2}$-vel jelöljük.

<u>4.1 Megjegyzés.</u> A 3.1 megjegyzéshez hasonlóan a δ átmenetfüggvényre kiróttuk azt a feltételt, hogy semmilyen $p\in H$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $z\in\Gamma$ hármasnál $\delta(q,a,z)$ nincs értelmezve, amely a prefix-mentes tulajdonságot dönti el.

<u>4.1 Tétel.</u> Legyen Σ egy véges ábécé, és $L\subseteq\Sigma^*$. Az L nyelv akkor és csak akkor ed2-tipusú, ha az L nyelv prefix-mentes és d2-tipusú.

Bizonyitás.

1. rész. Ha $L\in \mathcal{L}_{d2}\cap\mathcal{L}_p$, akkor $L\in \mathcal{L}_{ed2}$.

Legyen $L=L(M)$, ahol $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_o,z_o,H)$ egy DP-automata. Konstruálunk olyan M' EDP-gépet, amelyre $L(M')=L(M)$. Legyen $M'=(K,\Sigma,\Gamma,\delta',q_o,z_o,H)$, ahol a δ' átmenetfüggvény a következő:

a/ Tetszőleges $q\in K-H$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $z\in\Gamma$ hármasra: ha $\delta(q,a,z)=(p,\alpha)$, akkor $\delta'(q,a,z)=(p,\alpha)$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$.

b/ Minden $p\in H$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $z\in\Gamma$ hármasra: $\delta(p,a,z)$ nem definiált.

Most bebizonyitjuk: $L(M')=L(M)$.
Először, a δ' konstrukciójából következően nyilván $L(M')\subseteq L(M)$ áll fenn.

Megforditva igazoljuk, hogy $L(M)\subseteq L(M')$. Ehhez elég megmutatnunk: ha $w\notin L(M')$, akkor $w\notin L(M)$. Világos, hogy ha az M' EDP-gép egy w szóra közömbös úgy, hogy a (q_o,w,z_o) kezdőkonfigurációból a gép periódikusan végtelenül mozog és soha sem áll meg, akkor az M DP-automata a w szóra is közömbös. Eszerint csak három esetet kell vizsgálnunk:

1. eset. Legyen $w=w_1aw_2$ és $(q_o,w_1aw_2,z_o)\xrightarrow[M']{*}(p,aw_2,\alpha)$, ahol $p\in H$, $a\in\Sigma$, $w_1,w_2\in\Sigma^*$, $\alpha\in\Gamma^*$.

Ekkor nyilván $(q_o,w_1,z_o)\xrightarrow[M]{*}(p,\lambda,\alpha)$ adódik, azaz $w_1\in L(M)$. Ebből rögtön következik, hogy $w=w_1aw_2\notin L(M)$, mivel az $L(M)$ nyelv prefix-mentes és $y=aw_2\neq\lambda$.

2. eset. Legyen $w=w_1w_2$ és $(q_o,w_1\ w_2,z_o)\xrightarrow[M']{*}(q,w_2,\lambda)$, ahol $q\in K-H$, $w_1,w_2\in\Sigma^*$.

Ebben az esetben nyilván $(q_o, w_1\ w_2, z_o) \vdash_{M}^{*} (q, w_2, \lambda)$ adódik, ahol $q \in K-H$, és azért $w = w_1 w_2 \notin L(M)$.

3. eset. Legyen $(q_o, w, z_o) \vdash_{M'}^{*} (q, \lambda, \alpha z)$, ahol $q \in K-H$, $z \in \Gamma$, $\alpha \in \Gamma^*$ és $\delta(q, \lambda, z)$ nem definiált.

Hasonlóan beláthatjuk, hogy $w \notin L(M)$.

Végeredményben tehát az $L(M') = L(M)$ egyenlőség áll fenn.

2. rész. Ha $L \in \mathcal{L}_{ed2}$, akkor $L \in \mathcal{L}_{d2} \cap \mathcal{L}_{p}$.

Legyen $L = L(M)$, ahol $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_o, z_o, H)$ egy EDP-gép. Könnyen belátható, hogy az $L(M)$ nyelv prefix-mentes, mivel $\delta(p, a, z)$ nem definiált minden $p \in H$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $z \in \Gamma$ hármasra, azaz az M gép elakad, amikor egy szót elfogad és valamely végállapotban van, mig a bemenő szó további része beadható. Most bebizonyitjuk: $L \in \mathcal{L}_{d2}$. Ehhez konstruáljuk az $M' = (K \cup \{\bar{q}\}, \Sigma, \Gamma, \delta', q_o, z_o, H)$ DP-automatát úgy, hogy $\bar{q} \notin K$ és a δ' átmenetfüggvény a következő:

a/ Tetszőleges $q \in K-H$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $z \in \Gamma$ hármasra:
ha $\delta(q, a, z) = (p, \alpha)$, akkor $\delta'(q, a, z) = (p, \alpha)$, ahol $p \in K$, $\alpha \in \Gamma^*$.

b/ Minden $p \in H \cup \{\bar{q}\}$, $z \in \Gamma$ kettesre:

$\delta'(p, \lambda, z) = (\bar{q}, \lambda)$

A δ' konstrukciójából következően nyilván M' azokat és csak azokat a $w \in \Sigma^*$ szavakat fogadja el, amelyeket M elfogad és megforditva. Eszerint $L(M') = L(M)$, azaz $L \in \mathcal{L}_{d2}$. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

4.2 Megjegyzés: Ismeretes, hogy a determinisztikus pushdown-automaták egyik ekvivalens fogalma az $LR(K)$-grammatika, amelyet Knuth definiált ([13], 1965). Eszerint a fenti tétel értelmében az is igaz, hogy egy nyelv akkor és csak akkor ed2-tipusú, ha $LR(K)$-tipusú és prefix-mentes. Érdekes megfigyelni, hogy az *LR(K)*-grammatikáknál sokkal szilárdabb kikötéssel Harrison és Havel ([10]-1973) definiálta az ún. strict-determinisztikus nyelvek osztályát, amely nemcsak prefix-mentes, hanem pontosan a determinisztikus pushdown-automaták által üres veremmel elfogadott nyelvosztállyal egyezik meg. De az *LR(K)*-grammatika illetve strict-determinisztikus grammatika konstrukciója igen bonyolult, és ezeket eszközként nehéz használni az általuk generált nyelvek tulajdonságainak vizsgálataira.

Ennek ellenére az EDP-gépekkel vizsgálhatjuk az $\mathcal{L}_{ed2}$ nyelvosztály tulajdonságait, amelyeket megfogalmazunk a 4.3 szakaszaban, sőt az a fontos probléma is eldönthető, hogy egy d2-nyelv prefix-mentes-e (Lásd [22]-ben).

4.2 Az EDV-gépek és EDP-gépek osztályozása

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy az EDP-gépek által elfogadott nyelvek osztálya valóban bővebb, mint az EDV-gépek által elfogadott nyelveké, azaz $\mathcal{L}_{ed3}$ valódi része $\mathcal{L}_{ed2}$-nek. Most mindenekelőtt az ún. egyszerü géposztályt tárgyaljuk, amelyet Friedman definiált, s ez a géposztály az EDV-gépek és az EDP-gépek közötti szerepet játszik.

<u>4.2 Definició.</u>

a/ Egy egyszerü gépen az $M=(\Sigma,\Gamma,\delta,z_0)$ rendezett négyest értjük, ahol

Σ a bemenő ábécé,

Γ a pushdown-ábécé,

$z_0 \in \Gamma$ a kezdő pushdown-jel,

δ átmenetfüggvény a $(\Sigma \cup \{\lambda\}) X \Gamma$ halmaznak a Γ^*-ba való egy leképezése, amelyre teljesülnek a következő feltételek: tetszőleges $z \in \Gamma$-ra,

vagy i/ $\delta(\lambda, z)$ pontosan egy elemet tartalmaz, és $\delta(a, z)$ nem definiált semmilyen $a \in \Sigma$-ra; vagy

ii/ $\delta(\lambda, z)$ nem definiált, és minden $a \in \Sigma$-ra $\delta(a, z)$ egy elemet tartalmaz.

b/ Adott M egyszerü gépnek egy konfigurációján értjük azt a (w, α) kettest, amelyre $w \in \Sigma^*$ és $\alpha \in \Gamma^*$.
A következő módon definiáljuk a konfigurációkra vonatkozó $\vdash_{M}$ relációt:

$$(aw, \alpha z) \vdash_{M} (w, \alpha\beta) \Longleftrightarrow \delta(a, z) = \beta,$$

ahol $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $w \in \Sigma^*$, $z \in \Gamma, \alpha, \beta \in \Gamma^*$.

Legyen $\vdash_{M}^{*}$ reláció az $\vdash_{M}$ reláció tranzitiv lezárása.
Végül, az M egyszerü gép által elfogadott nyelv a következő:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* / (w, z_0) \vdash_{M}^{*} (\lambda, \lambda)\}$$

Egy L nyelvet egyszerü context-freé-nek (röv. ec-tipusúnak) nevezünk, ha létezik olyan M egyszerü gép, amelyre $L = L(M)$.
Az ec-tipusú nyelvek osztályát $\mathcal{L}_{ec}$-vel jelöljük.

4.3 Megjegyzés. A definicióból könnyen belátható, hogy minden ec-tipusú nyelv prefix-mentes, mivel egy egyszerü gép akkor és csak akkor fogad el egy szót, ha a pushdown-szalag kiürül, azaz a gép elakad.

4.2 Tétel.

a/ Bármely M EDV-géphez megadható olyan M' egyszerü gép, amelyre $L(M') = L(M)$.

b/ Van olyan M_1 egyszerü gép, amelyre $L(M_1) \notin \mathcal{L}_{ed3}$.

Bizonyitás:

a/ rész. Legyen $M=(K,\Sigma,\delta,q_o,H)$ egy EDV-gép. A következő módon konstruáljuk az $M'=(\Sigma,\Gamma,\delta',Z_{qo})$ egyszerü gépet:

$\Gamma=\{Z_q/q\in K\}$,

a δ' átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $q\in K-H$, $a\in\Sigma$ kettesre:
ha $\delta(q,a)=p$, akkor $\delta'(a,Z_q)=Z_p$.

2/ Minden $p\in H$ állapotra:
$\delta'(\lambda,Z_p)=\lambda$.

A δ' konstrukciójából könnyen belátható, hogy az M' egyszerü gép azokat és csak azokat a $w\in\Sigma^*$ szavakat fogadja el, amelyeket az M EDV-gép elfogad, és megforditva. Eszerint az $L(M')=L(M)$ egyenlőség áll fenn.

b/ rész. Az 2.3 megjegyzésben beláttuk, hogy az $L_1=\{a^nb^n/n\geq 1\}$ nyelv nem 3-tipusú, és azért a 4.1 Tétel értelmében nem is ed3-tipusú. Tehát csak egy olyan M_1 egyszerü gépet kell megadnunk, amelyre $L_1=L(M_1)$.

Legyen $M_1=(\{a,b\},\Gamma_1,\delta_1,z_o)$, ahol
$\Gamma_1=\{z_o,A,B,E\}$,

a δ_1 átmenetfüggvény a következő:

1/ $\delta_1(a,z_o)=B$, $\delta_1(b,z_o)=E$.
2/ $\delta_1(a,B)=AB$, $\delta_1(b,B)=\lambda$.
3/ $\delta_1(a,A)=E$, $\delta_1(b,A)=\lambda$.
4/ $\delta_1(a,E)=E$, $\delta_1(b,E)=E$.

A δ_1 konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $n\geq 1$ egész számra: $(a^n b^n, Z_o) \vdash_{M_1}^{*} (b^n, A^{n-1}B) \vdash_{M_1}^{*} (\lambda,\lambda)$, azaz $a^n b^n \in L(M_1)$.
Hasonlóképpen azt is megvizsgálhatjuk, hogy tetszőleges $w\in\{a,b\}^*-\{a^n b^n / n\geq 1\}$ szóra:

$$(w, Z_o) \vdash_{M_1}^{*} (\lambda, \alpha E),\text{ ahol } \alpha\in\{A,B\}^*,\text{ azaz } w\notin L(M_1),$$

kivéve a $w=\lambda$ esetet, amelyben a gép nem működik.
Végeredményben tehát $L(M_1)=\{a^n b^n / n\geq 1\}$.
Ezzel a tétel bizonyitását befejztük.

4.3 Tétel.

a/ Bármely M egyszerü géphez megadható olyan M' EDP-gép, amelyre $L(M')=L(M)$.

b/ Van olyan M_1 EDP-gép, amelyre $L(M_1)\notin \mathcal{L}_{ec}$.

Bizonyitás.

a. rész. Legyen $M=(\Sigma,\Gamma,\delta,Z_o)$ egy egyszerü gép.

Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy tetszőleges $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z\in\Gamma$ kettesre: ha $\delta(a,Z)=\alpha$, akkor $\alpha\in(\Gamma-\{Z_o\})^*$. (Ellenkező esetben új $\bar{Z}_o$ kezdő pushdownjel és $\delta(\lambda,\bar{Z}_o)=Z_o$ érvényesség bevezetésével ezt mindig elérhetjük.)
A következő módon definiáljuk az $M'=(\{q_o,q_h\},\Sigma,\Gamma',\delta',q_o,Z_o,\{q_h\})$ EDP-gépet:

$\Gamma'=\Gamma\cup\{\$\}$, ahol $\$\notin\Gamma$,

a δ' átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$ elemre:
ha $\delta(a,Z_o)=\alpha$, akkor $\delta'(q_o,a,Z_o)=(q_o,\$\alpha)$, ahol $\alpha\in\Gamma^*$.

2/ Tetszőleges $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z\in\Gamma-\{Z_o\}$ kettesre:
ha $\delta(a,Z)=\alpha$, akkor $\delta'(q_o,a,Z)=(q_o,\alpha)$, ahol $\alpha\in\Gamma^*$.

3/ $\delta'(q_o,\lambda,\$)=(q_h,\$)$.

A δ' konstrukciójából könnyen belátható:

<4.3.1> $(aw,\alpha Z) \vdash_{M}^{*} (w,\beta) \Longleftrightarrow (q_o,aw,\$\alpha Z) \vdash_{M'}^{*} (q_o,w,\$\beta)$,

ahol $a\in\Sigma$, $w\in\Sigma^*$, $Z\in\Gamma,\alpha,\beta\in\Gamma^*$.

Ennek alapján a bemenő szó hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyü belátnunk:

$$(w,Z_o) \vdash_{M}^{*} (\lambda,\beta) \Longleftrightarrow (q_o,w,Z_o) \vdash_{M'}^{*} (q_o,\lambda,\$\beta),$$

ahol $w\in\Sigma^*$, $\beta\in\Gamma^*$.

Végeredményben tehát kapjuk:

$$w\in L(M) \Longleftrightarrow (w,Z_o) \vdash_{M}^{*} (\lambda,\lambda)$$

$$\Longleftrightarrow (q_o,w,Z_o) \vdash_{M'}^{*} (q_o,\lambda,\$) \vdash_{M'} (q_h,\lambda,\$)$$

$$\Longleftrightarrow w\in L(M')$$

b. rész. Először bizonyitás nélkül megemlitjük a Friedman által adott következő állitást (Lásd [5]-ben):

Az $L_1=\{a^nba^nb/n\geq 1\}\cup\{a^nca^nc/n\geq 1\}$ nyelv nem ec-tipusú.
Ennek alapján most olyan M_1 EDP-gépet kell megadnunk, amelyre $L_1=L(M_1)$. Legyen $M_1=(K,\{a,b,c\},\Gamma,\delta_1,q_o,Z_o,\{q_h\})$, ahol

$K = \{q_o,q_b,q_c,\bar{q},q_h\}$,

$\Gamma = \{Z_o,A\}$,

a δ_1 átmenetfüggvény a következő:

1/ $\delta_1(q_o,a,Z_o)=(q_o,Z_oAA)$,
$\delta_1(q_o,b,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$,
$\delta_1(q_o,c,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$,

2/ $\delta_1(q_o,a,A)=(q_o,AA)$,
$\delta_1(q_o,b,A)=(q_b,\lambda)$,
$\delta_1(q_o,c,A)=(q_c,\lambda)$,

3/ $\delta_1(q_b,a,A)=(q_b,\lambda)$,
$\delta_1(q_b,b,A)=(\bar{q},\lambda)$,
$\delta_1(q_b,c,A)=(\bar{q},\lambda)$,

4/ $\delta_1(q_b,a,Z_o)=(\bar{q},\lambda)$,
$\delta_1(q_b,b,Z_o)=(q_h,\lambda)$,
$\delta_1(q_b,c,Z_o)=(\bar{q},\lambda)$,

5/ $\delta_1(q_c,a,A)=(q_c,\lambda)$,
$\delta_1(q_c,b,A)=(\bar{q},\lambda)$,
$\delta_1(q_c,c,A)=(\bar{q},\lambda)$,

6/ $\delta_1(q_c,a,Z_o)=(\bar{q},\lambda)$,
$\delta_1(q_c,b,Z_o)=(\bar{q},\lambda)$,
$\delta_1(q_c,c,Z_o)=(q_h,\lambda)$,

7/ $\delta_1(\bar{q},x,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$, minden $x\in\{a,b,c\}$ elemre,
$\delta_1(\bar{q},\lambda, A)=(\bar{q},\lambda)$.

Először könnyü belátnunk, hogy tetszőleges $n\geq 1$ egész számra:

$$(q_o,a^nba^nb,Z_o) \overset{*}{\underset{M_1}{\longmapsto}} (q_o,ba^nb,Z_oA^{n+1}) \underset{M_1}{\longmapsto} (q_b,a^nb,Z_oA^n) \overset{*}{\underset{M_1}{\longmapsto}} (q_b,b,Z_o)$$

$$\overset{*}{\underset{M_1}{\longmapsto}} (q_h,\lambda,\lambda),$$

és

$$(q_o,a^nca^nc,Z_o) \overset{*}{\underset{M_1}{\longmapsto}} (q_o,ca^nc,Z_oA^{n+1}) \underset{M_1}{\longmapsto} (q_c,a^nc,Z\,A^n) \overset{*}{\underset{M_1}{\longmapsto}} (q_c,c,Z_o)$$

$$\overset{*}{\underset{M_1}{\longmapsto}} (q_h,\lambda,\lambda),$$

azaz $a^nba^nb\in L(M_1)$ és $a^nca^nc\in L(M_1)$.

Hasonlóképpen azt is megvizsgálhatjuk, hogy tetszőleges $w\in\{a,b,c\}^*-L_1$ szóra:

$$(q_o,w,Z_o) \overset{*}{\underset{M_1}{\longmapsto}} (\bar{q},\lambda,Z_o), \text{ azaz } w\notin L(M_1),$$

kivéve a $w=\lambda$ esetet, amelyben a gép nem müködik.

Tehát $L(M_1)=L_1=\{a^n b a^n b/n\geq 1\}\cup\{a^n c a^n c/n\geq 1\}$.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

4.4 Tétel. Van olyan prefix-mentes 2-tipusú nyelv, amely nem tartozik bele az $\mathcal{L}_{ed2}$ nyelvosztályba.

Bizonyitás. Legyen $\Sigma=\{a,b\}$. Az 1.5 Tétel szerint az $L=\{ww^R/w\in\Sigma^*\}$ nyelv 2-tipusú, de nem d2-tipusú. Tekintsük most az alábbi nyelvet:

$$L_1=L\{c\}=\{ww^R c/w\in\Sigma^*\}.$$

Világos, hogy ez 2-tipusú és prefix-mentes. Tehát csak azt kell bebizonyitanunk, hogy $L_1\notin\mathcal{L}_{ed2}$.

Ezzel az állitással ellentétben tegyük fel, hogy az L_1 nyelv ed2-tipusú. Ebből a 4.1 Tétel értelmében következik, hogy az $L_1=L\{c\}$ nyelv d2-tipusú. Másrészt az 1.6 Tétel szerint az $L\{c\}\in\mathcal{L}_{d2}$ feltételből rögtön következik, hogy az L nyelv d2-tipusú, ami szintén ellentmondás.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

Végül, $\mathcal{L}_{p2}$-vel jelöljük a prefix-mentes 2-tipusú nyelvek osztályát és kapjuk a következő tartalmazási relációt:

$$\mathcal{L}_{ed3}\subsetneq\mathcal{L}_{ec}\subsetneq\mathcal{L}_{ed2}\subsetneq\mathcal{L}_{p2},$$

ahol a tartalmazások mindenütt valódi részeket jelentenek. Emellett könnyü belátnunk, hogy $\mathcal{L}_{ed3}\subsetneq\mathcal{L}_3$ és $\mathcal{L}_{ed2}\subsetneq\mathcal{L}_2$.

4.3 Az ed2-tipusú nyelvosztály tulajdonságai

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk az $\mathcal{L}_{ed2}$ nyelvosztálynak az ismert, valamint a 2-fejezetben adott müveletekre vonatkozó zártságait. Itt érdekes megfigyelni, hogy az $\mathcal{L}_{ed2}$ nyelvosztály ugyanugy, mint az $\mathcal{L}_2$ nyelvosztály, nem zárt a metszetre nézve. Mindenekelőtt a 4.1 Tétel értelmében az $\mathcal{L}_{d2}$ és $\mathcal{L}_p$ nyelvosztályok zártságaira visszanézve könnyü belátnunk a következő tételeket.

4.5 Tétel. Ha $L\in\mathcal{L}_{ed2}$, akkor az $\bar{L}$ nyelv kivezet az $\mathcal{L}_{ed2}$ nyelvosztályból. Eszerint az $\mathcal{L}_{ed2}$ nyelvosztály nem zárt a komplemensképzésre nézve.

Bizonyitás. A 2.2 Tétel bizonyitásából adódik.

4.6 Tétel. Az $\mathcal{L}_{ed2}$ nyelvosztály nem zárt az unióra nézve.

Bizonyitás. A 3.3 Tétel bizonyitásából adódik.

4.7 Tétel. Az $\mathcal{L}_{ed2}$ nyelvosztály nem zárt a metszetre nézve.

Bizonyitás. A tétel bizonyitásához elegendő megmutatnunk, hogy van két olyan ed2-tipusú nyelv, amelyeknek a metszete kivezet az $\mathcal{L}_{ed2}$ nyelvosztályból.

Tekintsük az alábbi nyelveket:

$$L_1=\{a^nb^nc^i\$/n\geq 1 \text{ és } i\geq 1\},$$

$$L_2=\{a^ib^nc^n\$/i\geq 1 \text{ és } n\geq 1\}.$$

A Bar-Hill lemma (az 1.8 Tétel) korolláriuma szerint az $L=L_1 \cap L_2=\{a^n b^n c^n \$ / n \geq 1\}$ nyelv nem 2-tipusú, s azért nem is ed2-tipusú. Tehát most csak azt kell mutatnunk, hogy az L_1 és L_2 nyelvek ed2-tipusúak. Konstruálunk olyan M_1 és M_2 EDP-gépeket, amelyekre $L_1=L(M_1)$ és $L_2=L(M_2)$.

Legyen $M_1=(K_1,\{a,b,c,\$\},\Gamma_1,\delta_1,q_o,Z_o,\{q_h\})$, ahol
$K_1=\{q_o,q_1,q_2,q_3,\bar{q},q_h\}$,
$\Gamma_1=\{Z_o,A\}$,
a δ_1 átmenetfüggvény a következő:

1. a/ $\delta_1(q_o,a,Z_o)=(q_1,Z_o A)$,
   b/ $\delta_1(q_o,d,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$ minden $d\in\{b,c,\$\}$ elemre
   c/ $\delta_1(q_o,\lambda,A)=(\bar{q},Z_o)$.
2. a/ $\delta_1(q_1,a,A)=(q_1,AA)$,
   b/ $\delta_1(q_1,b,A)=(q_2,\lambda)$,
   c/ $\delta_1(q_1,d,A)=(\bar{q},Z_o)$, minden $d\in\{c,\$\}$ elemre
   d/ $\delta_1(q_1,\lambda,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$,
3. a/ $\delta_1(q_2,b,A)=(q_2,\lambda)$,
   b/ $\delta_1(q_2,d,A)=(\bar{q},Z_o)$ minden $d\in\{a,c,\$\}$ elemre,
   c/ $\delta_1(q_2,c,Z_o)=(q_3,Z_o)$,
   d/ $\delta_1(q_2,d,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$ minden $d\in\{a,b,\$\}$ elemre.
4. a/ $\delta_1(q_3,c,Z_o)=(q_3,Z_o)$,
   b/ $\delta_1(q_3,\$,Z_o)=(q_h,Z_o)$,
   c/ $\delta_1(q_3,d,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$, minden $d\in\{a,b\}$ elemre
   d/ $\delta_1(q_3,\lambda,A)=(\bar{q},Z_o)$,
5. a/ $\delta_1(\bar{q},\lambda,A)=(\bar{q},Z_o)$,
   b/ $\delta_1(\bar{q},d,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$ minden $d\in\{a,b,c,\$\}$ elemre.

és $M_2=(K_2,\{a,b,c,\$\},\Gamma_2,\delta_2,q_o,Z_o,\{q_h\})$,

$K_2=\{q_o,q_1,q_2,q_3,\bar{q},q_h\}$,

$\Gamma_2=\{Z_o,B\}$,

a δ_2 átmenetfüggvény a következő:

1. a/ $\delta_2(q_o,a,Z_o)=(q_1,Z_o)$,
   b/ $\delta_2(q_o,d,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$ minden $d\in\{b,c,\$\}$ elemre,
   c/ $\delta_2(q_o,\lambda,B) =(\bar{q},Z_o)$.
2. a/ $\delta_2(q_1,a,Z_o)=(q_1,Z_o)$,
   b/ $\delta_2(q_1,b,Z_o)=(q_2,Z_oB)$,
   c/ $\delta_2(q_1,d,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$ minden $d\in\{c,\$\}$ elemre,
   d/ $\delta_2(q_1,\lambda,B) =(\bar{q},Z_o)$
3. a/ $\delta_2(q_2,b,B)=(q_2,BB)$,
   b/ $\delta_2(q_2,c,B)=(q_3,\lambda)$,
   c/ $\delta_2(q_2,d,B)=(\bar{q},Z_o)$ minden $d\in\{a,\$\}$ elemre,
   d/ $\delta_2(q_2,\lambda,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$.
4. a/ $\delta_2(q_3,c,B)=(q_3,\lambda)$,
   b/ $\delta_2(q_3,d,B)=(\bar{q},Z_o)$ minden $d\in\{a,b,\$\}$ elemre,
   c/ $\delta_2(q_3,\$,Z_o)=(q_h,Z_o)$,
   d/ $\delta_2(q_3,d,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$ minden $d\in\{a,b,c\}$ elemre.
5. a/ $\delta_2(\bar{q},\lambda,B)=(\bar{q},Z_o)$,
   b/ $\delta_2(\bar{q},d,Z_o)=(\bar{q},Z_o)$ minden $d\in\{a,b,c,\$\}$ elemre.

A δ_1 és δ_2 konstrukciójaiból könnyen belátható:

i/ Tetszőleges $n\geq 1$ és $i\geq 1$ egész számokra:

$(q_o,a^nb^nc^i\$,Z_o) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (q_h,\lambda,Z_o)$ és $(q_o,a^ib^nc^n\$,Z_o) \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (q_h,\lambda,Z_o)$,

azaz $L_1=\{a^nb^nc^i\$/n\geq 1 \text{ és } i\geq 1\} \subseteq L(M_1)$ és

$L_2=\{a^ib^nc^n\$/i\geq 1 \text{ és } n\geq 1\} \subseteq L(M_2)$.

ii/ Tetszőleges $\bar{w}_1 \in \{a,b,c,\$\}^*-L_1$ és $\bar{w}_2 \in \{a,b,c,\$\}^*-L_2$ szavakra:

$(q_0,\bar{w}_1,Z_0) \vdash_{M_1}^{*} (\bar{q},\lambda,\alpha_1 Z_0)$, ahol $\alpha_1 \in \{A,Z_0\}^*$, és

$(q_0,\bar{w}_1,Z_0) \vdash_{M_2}^{*} (\bar{q},\lambda,\alpha_2 Z_0)$, ahol $\alpha_2 \in \{B,Z_0\}^*$,

kivéve az $\bar{w}_1=\lambda$, $\bar{w}_2=\lambda$ esetet, amelyben az M_1 és M_2 EDP-gépek nem müködnek.

Ezek szerint $L_1=L(M_1)$ és $L_2=L(M_2)$. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

4.8 Tétel. Az $\mathcal{L}_{ed2}$ nyelvosztály zárt a concatenációra nézve.

Bizonyitás. Legyenek L és L' ed2-tipusú nyelvek. Amennyiben $L=\{\lambda\}$ vagy $L'=\{\lambda\}$, akkor nincs mit bebizonyitanunk. Ezért tegyük fel, hogy $L=L(M)\neq\{\lambda\}$ és $L'=L(M')\neq\{\lambda\}$, ahol $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,H)$ és $M'=(K',\Sigma',\Gamma',\delta',q_0',Z_0',H')$ EDP-gépek. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük:

i/ $K\cap K'=\Gamma\cap\Gamma'=\emptyset$,

ii/ Tetszőleges $q\in K-H$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z\in\Gamma$ hármasra: ha $\delta(q,a,Z)=(p,\alpha)$, akkor $p\neq q_0$.

Ha ugyanis nem igy volna, akkor új jelek bevezetésével az i/ kikötést mindig elérhetjük, az ii/ kikötést pedig új $\bar{q}_0$ kezdő állapot és $\delta(\bar{q}_0,\lambda,Z_0)=(q_0,Z_0)$ érvényesség bevezetésével könnyen megkaphatjuk, s ezek az elfogadott nyelveket nem érintik.

Most bebizonyitjuk, hogy $L.L'\in\mathcal{L}_{ed2}$.

A következő módon konstruáljuk azt az $\bar{M}=(\bar{K},\bar{\Sigma},\bar{\Gamma},\bar{\delta},q_0,Z_0,H')$ EDP-gépet, amely az $L.L'$ nyelvet fogadja el.

$\bar{K} = K \cup K' \cup \{\bar{q}\}$, ahol $\bar{q} \notin K \cup K'$,

$\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \Sigma'$,

$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$,

a $\bar{\delta}$ átmenetfüggvény a következő:

I. A (q_o, Z_o) kettesnél két esetet különböztetünk meg:

1/ $\delta(q_o, \lambda, Z_o)$ definiált.

Ha $\delta(q_o, \lambda, Z_o) = (p, \alpha)$, akkor $\bar{\delta}(q_o, \lambda, Z_o) = (p, Z_o'\alpha)$,

ahol $p \in K$, $\alpha \in \Gamma^*$.

2/ $\delta(q_o, \lambda, Z_o)$ nem definiált.

a/ Tetszőleges $a \in \Sigma$-ra:

ha $\delta(q_o, a, Z_o) = (p, \alpha)$, akkor $\bar{\delta}(q_o, a, Z_o) = (p, Z_o'\alpha)$,

ahol $p \in K$, $\alpha \in \Gamma^*$.

b/ Minden $a' \in \Sigma' - \Sigma$ elemre: $\bar{\delta}(q_o, a', Z_o) = (\bar{q}, \lambda)$.

II. Tetszőleges $(q, Z) \in (K-H) \times \Gamma - \{(q_o, Z_o)\}$ kettesnél két esetet különböztetünk meg:

1/ Ha $\delta(q, \lambda, Z)$ definiált, akkor $\bar{\delta}(q, \lambda, Z) = \delta(q, \lambda, Z)$.

2/ Ha $\delta(q, \lambda, Z)$ nem definiált, akkor:

$$\bar{\delta}(q, a, Z) = \begin{cases} \delta(q, a, z) & ha \quad a \in \Sigma \\ (\bar{q}, \lambda) & ha \quad a \in \Sigma' - \Sigma. \end{cases}$$

III. Minden $q \in K-H, Z' \in \Gamma'$ kettesre: $\bar{\delta}(q, \lambda, Z') = (\bar{q}, \lambda)$.

IV. Minden $p \in H$ végállapotra:

1/ $\bar{\delta}(p, \lambda, Z) = (p, \lambda)$ minden $Z \in \Gamma$-ra.

2/ $\bar{\delta}(p, \lambda, Z_o') = (q_o', Z_o')$.

3/ $\bar{\delta}(p, \lambda, Z') = (\bar{q}, \lambda)$ minden $Z' \in \Gamma' - \{Z_o'\}$ elemre.

V. Tetszőleges $(q',Z')\in(K'-H')\times\Gamma'$ kettesnél két esetet különböztetünk meg:

1/ Ha $\delta'(q',\lambda,Z')$ definiált, akkor $\bar{\delta}(q',\lambda,Z')=\delta'(q',\lambda,Z')$,

2/ Ha $\delta'(q',\lambda,Z')$ nem definiált, akkor:

$$\bar{\delta}(q',a',Z') = \begin{cases} \delta'(q',a',Z') & \text{ha} \quad a'\in\Sigma'. \\ (\bar{q},\lambda) & \text{ha} \quad a'\in\Sigma-\Sigma'. \end{cases}$$

VI. Minden $q'\in K'-H'$, $Z\in\Gamma$ kettesre: $\bar{\delta}(q',\lambda,Z)=(\bar{q},\lambda)$.

VII. Minden $Z\in\Gamma\cup\Gamma'$ elemre: $\bar{\delta}(\bar{q},\lambda,Z)=(\bar{q},\lambda)$.

A $\bar{\delta}$ konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $w\in(\Sigma\cup\Sigma')^*$ szóra:

$$w\in L.L' \iff \begin{cases} \text{Léteznek } w_1\in\Sigma^* \text{ és } w_2\in\Sigma'^* \text{ szavak, amelyekre} \\ w_1\in L,\ w_2\in L' \text{ és } w=w_1w_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (q_0,w_1,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p,\lambda,\alpha), \text{ ahol } p\in H,\ \alpha\in\Gamma^*, \text{ és} \\ (q_0',w_2,Z_0') \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (p',\lambda,\alpha'), \text{ ahol } p'\in H',\ \alpha'\in\Gamma'^* \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (q_0,w_1w_2,Z_0) \overset{*}{\underset{\bar{M}}{\vdash}} (p,w_2,Z_0'\alpha) \overset{*}{\underset{\bar{M}}{\vdash}} (p,w_2,Z_0') \\ \underset{\bar{M}}{\vdash} (q_0',w_2,Z_0') \overset{*}{\underset{\bar{M}}{\vdash}} (p',\lambda,\alpha'), \text{ ahol} \\ p'\in H'^*,\ \alpha'\in\Gamma'^*. \end{cases}$$

$$\iff w=w_1w_2\in L(\bar{M})$$

Tehát $LL'=L(\bar{M})\in \mathcal{L}_{ed2}$ áll fenn. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

Most gyengitjük a fenti tételek kikötését úgy, hogy az L és L' közül nem mindkettő ed2-tipusú, hanem az egyik nyelv ed2-tipusú, és a másik ed3-tipusú. Ekkor kapjuk az alábbi állitásokat.

4.9 Tétel. Ha $L \in \mathcal{L}_{ed2}$ és $L' \in \mathcal{L}_{ed3}$, akkor az $L \cap L'$ és $L-L'$ nyelvek ed2-tipusúak.

Bizonyitás. Az 1.7, 2.1, 3.1, 4.1 Tételekből adódik.

4.10 Tétel. Ha $L \in \mathcal{L}_{ed2}$ és $L' \in \mathcal{L}_{ed3}$, akkor $LpL' \in \mathcal{L}_{ed2}$.

Bizonyitás. Legyen $L=L(M)$ és $L'=L(M')$, ahol $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_o,Z_o,H)$ egy EDP-gép és $M'=(K',\Sigma',\delta',q_o',H')$ egy EDV-gép. Most konstruálunk olyan M_1 EDP-gépet, amely az LpL' nyelvet fogadja el.

Legyen $M_1=(K_1,\Sigma\cup\Sigma',\Gamma,\delta_1,[q_o,q_o'],Z_o,H)$, ahol

$K_1=K\cup\{[q,q']/q\in K-H, q'\in K'\}\cup\{\bar{q}\}$ és $\bar{q}\notin K$,

a δ_1 átmenetfüggvény a következő.

I. Tetszőleges $q\in K-H$, $Z\in\Gamma$ kettesnél két esetet különböztetünk meg:

1/ $\delta(q,\lambda,Z)$ definiált.

Ha $\delta(q,\lambda,Z)=(p,\alpha)$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$, akkor:

a/ $\delta_1(q,\lambda,Z)=(p,\alpha)$

b/ Tetszőleges $q'\in K'$ állapotra: $\delta_1([q,q'],\lambda,Z)=(\bar{p},\alpha)$, ahol

$$\bar{p} = \begin{cases} p & ha \quad p\in H, \\ [p,q'] & ha \quad p\notin H. \end{cases}$$

2/ $\delta(q,\lambda,Z)$ nem definiált.

a/ Minden $p'\epsilon H'$, $a\epsilon\Sigma\cup\Sigma'$ kettesre:

$$\delta_1([q,p'],a,Z)=(\bar{q},\lambda).$$

b/ Tetszőleges $q'\epsilon K'-H'$, $b\epsilon\Sigma\cap\Sigma'$ kettesre:

ha $\delta(q,b,z)=(p,\alpha)$ és $\delta'(q',b)=p'$, ahol $p\epsilon K,\alpha\epsilon\Gamma^*,p'\epsilon K'$, akkor $\delta_1([q,q'],b,Z)=(\bar{p},\alpha)$, ahol

$$\bar{p}=\begin{cases} p & ha \quad p\epsilon H \\ [p,p'] & ha \quad p\not\epsilon H \end{cases}$$

c/ Tetszőleges $q'\epsilon K'-H'$, $a\epsilon\Sigma-\Sigma'$ kettesre:

$$\delta_1([q,q'],a',Z)=\delta(q,a,Z).$$

d/ Tetszőleges $q'\epsilon K'-H'$, $a'\epsilon\Sigma'-\Sigma$ kettesre:

$$\delta_1([q,q'],a',Z)=(\bar{q},\lambda).$$

e/
$$\delta_1(q,a,Z)=\begin{cases} \delta(q,a,Z) & ha \quad a\epsilon\Sigma. \\ (\bar{q},\lambda) & ha \quad a\epsilon\Sigma'-\Sigma. \end{cases}$$

II. Minden $Z\epsilon\Gamma$-ra: $\delta_1(\bar{q},\lambda,Z)=(\bar{q},\lambda)$.

A δ_1 konstrukciójából könnyü belátnunk, hogy tetszőleges $a\epsilon\Sigma\cap\Sigma'$ elemre:

<4.10.1> $$\left.\begin{cases} (q,a,\alpha Z) \vdash_M^* (p,\lambda,\beta) \\ q'a \vdash_{M'} p' \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow ([q,q'],a,\alpha Z) \vdash_{M_1}^* (\bar{p},\lambda,\beta),$$

ahol $q\epsilon K-H$, $p\epsilon K$, $Z\epsilon\Gamma,\alpha,\beta\epsilon\Gamma^*$, $q'\epsilon K'-H'$, $p'\epsilon K'$ és

$$\bar{p} = \begin{cases} p & ha \quad p\in H. \\ [p,p'] & ha \quad p\notin H. \end{cases}$$

Ennek alapján indukcióval könnyen igazolhatjuk, hogy tetszőleges $w\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$ szóra:

$$\langle 4.10.2\rangle \quad \left.\begin{cases} (q_0,w,Z_0) \vdash_M^* (p,\lambda,\beta) \\ q_0'w \vdash_{M'}^* p' \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow ([q_0,q_0'],w,Z_0) \vdash_{M_1}^* (\bar{p},\lambda,\beta),$$

ahol $p\in K$, $\beta\in\Gamma^*$, $p'\in K'$ és

$$\bar{p} = \begin{cases} p & ha \quad p\in H. \\ [p,p'] & ha \quad p\notin H. \end{cases}$$

Most bebizonyitjuk: $L(M_1)=LpL'$.

($\Longleftarrow$). Belátjuk először, hogy $LpL' \subseteq L(M_1)$.
Legyen $w\in LpL'$. Ekkor két esetet különböztetünk meg:

1. eset. Legyen $w\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$ és $(q_0,w,Z_0) \vdash_M^* (p,\lambda,\alpha)$ ill.
$q_0'w \vdash_{M'}^* q'$,
ahol $p\in H$, $q'\in K'$, $\alpha\in\Gamma^*$.

A $\langle 4.10.2\rangle$ állitásból nyilván $([q_0,q_0'],w,Z_0) \vdash_M^* (p,\lambda,\alpha)$ adódik, azaz $w\in L(M_1)$.

2. eset. Legyen $w=w_1aw_2$, ahol $w_1\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$, $a\in\Sigma-\Sigma'$, $w_2\in(\Sigma\cup\Sigma')^*$,

$$\text{és} \quad \begin{cases} (q_0,w_1aw_2,Z_0) \vdash_M^* (q_1,aw_2,\alpha_1 Z) \vdash_M (q_2,w_2,\alpha_1\alpha) \vdash_M^* (p,\lambda,\beta), \\ \quad \text{ahol } p\in H. \\ q_0'w_1 \vdash_{M'}^* q_1', \quad \text{ahol} \quad q_1'\notin H' \end{cases}$$

Ismét használjuk a $\langle 4.10.2\rangle$ állítást és kapjuk:

$$([q_o,q_o'],w_1aw_2,Z_o) \xrightarrow[M_1]{*} ([q_1,q_1'],aw_2,\alpha_1 Z) \xrightarrow[M_1]{} (q_2,w_2,\alpha_1\alpha)$$
$$\xrightarrow[M_1]{*} (p,\lambda,\beta),$$

ahol $p \in H$.

Eszerint: $w=w_1aw_2 \in L(M_1)$.

Mindkét esetben beláttuk, hogy $w \in L(M_1)$ valahányszor $w \in LpL'$, azaz $LpL' \subseteq L(M_1)$.

($\longrightarrow$). Megforditva bebizonyitjuk, hogy $L(M_1) \subseteq LpL'$. Ehhez elég megmutatnunk: ha $w \notin LpL'$, akkor $w \notin L(M_1)$. Világos, hogy ha $w \notin L$ akkor $w \notin L(M_1)$, mivel az M és M_1 EDP-gépek végállapothalmazai egymással azonosak. Nézzük tehát a $w \in (L-LpL')=L\bar{p}L'$ esetet, vagyis $w=w_1aw_2$, ahol $w_1 \in (\Sigma \cap \Sigma')^*$, $a \in \Sigma \cup \Sigma'$, $w_2 \in (\Sigma \cup \Sigma')^*$, és

$$\begin{cases} (q_o,w_1aw_2,Z_o) \xrightarrow[M]{*} (q_1,aw_2,\alpha_1 Z) \xrightarrow[M]{} (q_2,w_2,\alpha_2) \xrightarrow[M]{*} (p,\lambda,\alpha), \\ \text{ahol } p \in H. \\ q_o'w_1 \xrightarrow[M']{*} p', \text{ ahol } p' \in H'. \end{cases}$$

A <4.10.2> állitásból könnyen belátható:

$$([q_o,q_o'],w_1aw_2,Z_o) \xrightarrow[M_1]{*} ([q_1,p'],aw_2,\alpha_1 Z) \xrightarrow[M_1]{} (\bar{q},w_2,\alpha_1)$$
$$\xrightarrow[M_1]{*} (\bar{q},w_2,\lambda).$$

Eszerint: $w=w_1aw_2 \notin L(M_1)$.

Végeredményben tehát az $L(M_1)=LpL'$ egyenlőség áll fenn, azaz $LpL' \in \mathcal{L}_{ed2}$.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

Mielőtt tárgyalnánk az $LUpL'$ nyelvet, foglalkozzunk az EDP-gép lehetséges közömbösségével, amelyet elméletileg megoldhatónak tekintsünk abból a szempontból, hogy tetszőleges w szóról és tetszőleges 2-tipusú L nyelvről eldönthető: a $w\in L$ tartalmazás fennáll-e.

<u>4.11 Lemma.</u> Bármely ed2-tipusú L nyelvhez megadható olyan $M'=(K',\Sigma',\Gamma',\delta',q_0',Z_0',H')$ EDP-gép, amelyre $L=L(M')$ és tetszőleges $q\in K'-H'$, $Z\in\Gamma'$ kettesre ha $\delta'(q,\lambda,Z)=(p,\alpha)$, akkor az α szó a következő kétféle alakú lehet:

i/ $\alpha=\lambda$,

ii/ $\alpha=\alpha_1 Z_1$ és $\delta'(p,\lambda,Z_1)$ nem definiált.

Bizonyitás. Legyen $L=L(M)$, ahol $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,H)$ egy EDP-gép. A következő módon konstruáljuk az M' EDP-gépet:

$K' = K\cup\{\bar{q}\}$, ahol $\bar{q}\notin K$,

$\Sigma' = \Sigma$,

$\Gamma' = \Gamma$,

$q_0' = q_0$,

$Z_0' = Z_0$,

$H' = H$,

a δ' átmenetfüggvény a következő:

Tetszőleges $q\in K-H$, $Z\in\Gamma$ kettesre

1/ Ha $\delta(q,\lambda,Z)$ nem definiált, akkor tetszőleges $a\in\Sigma$-ra.

$\delta'(q,a,Z)=\delta(q,a,Z)$.

2/ Ha $\delta(q,\lambda,Z)$ definiált, akkor megvizsgáljuk az M EDP-gépnek a (q,λ,Z) konfigurációból való müködését és három esetet különböztetünk meg:

a. eset. $(q,\lambda,Z) \vdash_M^* (p,\lambda,\lambda)$, akkor $\delta'(q,\lambda,Z)=(p,\lambda)$.

b. eset. $(q,\lambda,Z) \vdash_M^* (p,\lambda,\alpha_1 Z_1)$ és $\delta(p,\lambda,Z_1)$ nem definiált,

akkor $\delta'(q,\lambda,Z)=(p,\alpha_1 Z_1)$.

c. eset. Van olyan $q_1 \in K-H$, $Z_1 \in \Gamma$ kettes, amelyre

$(q,\lambda,Z) \vdash_M^* (q_1,\lambda,\alpha_1\beta_1 Z_1) \vdash_M^* (q_1,\lambda,\alpha_1\beta_1\beta_1 Z_1)$,

akkor $\delta'(q,\lambda,Z)=(\bar{q},Z)$.

3/ Tetszőleges $a\in\Sigma$-ra, $Z\in\Gamma$-ra:

$\delta'(\bar{q},a,Z)=(\bar{q},Z)$.

A δ' konstrukciójából könnyen belátható, hogy M' azokat és csak azokat a $w\in\Sigma^*$ szavakat fogadja el, amelyeket M elfogad és megforditva, s emellett a lemma utóbbi feltétele nyilván teljesül. Ezzel a lemma bizonyitását is befejeztük.

<u>4.12 Tétel.</u> Ha $L\in \mathcal{L}_{ed2}$ és $L'\in \mathcal{L}_{ed3}$, akkor az $L\cup pL'$ nyelv ed2-tipusú.

Bizonyitás. A 4.11-Lemma értelmében feltehetjük, hogy $L=L(M)$, ahol az $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_o,Z_o,H)$ EDP-gép a 4.11-lemmának megfelel, és $L'=L(M')$, ahol $M'=(K',\Sigma',\delta',q_o',H')$ egy EDV-gép.

A 4.8 Tétel bizonyitásához hasonlóan továbbá feltehető:

i/ $K\cap K'=\emptyset$.

ii/ Tetszőleges $q\in K-H$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z\in\Gamma$ hármasra:

ha $\delta(q,a,Z)=(p,\alpha)$, akkor $p\neq q_o$.

Most konstruálunk olyan M_2 EDP-gépet, amely az $L\cup pL'$ nyelvet fogadja el.

Legyen az $M_2=(K_2,\Sigma\cup\Sigma',\Gamma_2,\delta_2,[q_o,q_o'],Z_o,H_2)$ EDP-gép a következő módon definiálva:

$K_2=\{[q,q']/q\in K-H, q'\in K'-H'\}\cup K\cup K'\cup\{\bar{q},q_h\}$, ahol $\bar{q},q_h\notin K\cup K'$,

$\Gamma_2=\Gamma\cup\{\bar{Z}\}$, ahol $\bar{Z}\notin\Gamma$,

$H_2=H\cup H'\cup\{q_h\}$,

a δ_2 átmenetfüggvény a következő:

I. A (q_o,Z_o) kettesnél két esetet különböztetünk meg.

1/ $\delta(q_o,\lambda,Z_o)$ definiált.

Ha $\delta(q_o,\lambda,Z_o)=(p,\alpha)$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$, akkor:

a/ $\delta_2(q_o,\lambda,Z_o)=(p,\bar{Z}\alpha)$.

b/ $\delta_2([q_o,q_o'],\lambda,Z_o)=(\bar{p},\bar{Z}\alpha)$, ahol

$$\bar{p}=\begin{cases} q_h & \text{ha } p\in H. \\ [p,q_o'] & \text{ha } p\notin H. \end{cases}$$

2/ $\delta(q_o,\lambda,Z_o)$ nem definiált.

a/ Tetszőleges $b\in\Sigma\cap\Sigma'$ elemre:

ha $\delta(q_o,b,Z_o)=(p,\alpha)$ és $\delta'(q_o',b)=p'$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$, $p'\in K'$, akkor $\delta_2(q_o,b,Z_o)=(p,\bar{Z}\alpha)$ és $\delta_2([q_o,q_o'],b,Z_o)=(\bar{p},\bar{Z}\alpha)$,

ahol

$$\bar{p}=\begin{cases} q_h & \text{ha } p\in H \text{ vagy } p'\in H'. \\ [p,p'] & \text{ha } p\notin H \text{ és } p'\notin H'. \end{cases}$$

b/ Tetszőleges $a\in\Sigma-\Sigma'$ elemre:

ha $\delta(q_o,a,Z_o)=(p,\alpha)$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$,

akkor $\delta_2(q_o,a,Z_o)=(p,\bar{Z}\alpha)$ és $\delta_2([q_o,q_o'],a,Z_o)=(p,\bar{Z}\alpha)$.

c/ Tetszőleges $a'\in\Sigma'-\Sigma$ elemre:

$\delta_2(q_o, a', Z_o)=(\bar{q}, \bar{Z})$ és $\delta_2([q_o, q_o'], a', Z_o)=(\delta'(q_o', a'), \bar{Z})$

II. Tetszőleges $(q, Z)\in(K-H)\times\Gamma-\{(q_o, Z_o)\}$ kettesnél két esetet különböztetünk meg.

1/ $\delta(q,\lambda,Z)$ definiált.

Ha $\delta(q,\lambda,Z)=(p,\alpha)$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$, akkor:

a/ $\delta_2(q,\lambda,Z)=(p,\alpha)$.

b/ Tetszőleges $q'\in K'-H'$ állapotra: $\delta_2([q,q'],\lambda,Z)=(\bar{p},\alpha)$ ahol

$$\bar{p} = \begin{cases} q_h & ha \quad p\in H \\ [p,q'] & ha \quad p\notin H \end{cases}$$

2/ $\delta(q,\lambda,Z)$ nem definiált.

a/
$$\delta_2(q,a,Z)=\begin{cases} \delta(q,a,Z) & ha \quad a\in\Sigma. \\ (\bar{q},\lambda) & ha \quad a\in\Sigma'-\Sigma. \end{cases}$$

b/ Tetszőleges $b\in\Sigma\cap\Sigma'$ elemre, $q'\in K'-H'$ állapotra:

ha $\delta(q,b,Z)=(p,\alpha)$, és $\delta'(q',b)=p'$,

akkor $\delta_2([q,q'],b,Z)=(\bar{p},\alpha)$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$, $p'\in K'$ és

$$\bar{p} = \begin{cases} q_h & ha \ p\in H \quad vagy \ p'\in H'. \\ [p,p'] & ha \ p\notin H \quad és \quad p'\notin H'. \end{cases}$$

c/ Tetszőleges $a\in\Sigma-\Sigma'$ elemre, $q'\in K'-H'$ állapotra:

$\delta_2([q,q']a,Z)=\delta(q,a,Z)$.

d/ Tetszőleges $a'\in\Sigma'-\Sigma$ elemre, $q'\in K'-H'$ állapotra:

$\delta_2([q,q'],a',Z)=(\delta'(q',a'),\lambda)$.

III. Tetszőleges $q'\in K'-H'$ állapotra:

1/ $\delta_2(q',\lambda,Z)=(q',\lambda)$ minden $Z\in\Gamma$-ra.

2/ $$\delta_2(q',a',\bar{Z})=\begin{cases}(\delta'(q',a'),\bar{Z}) & ha \quad a'\in\Sigma'.\\ (\bar{q},\bar{Z}) & ha \quad a'\in\Sigma-\Sigma'.\end{cases}$$

IV. Minden $q\in K-H$, $q'\in K'-H'$ kettesre:

1/ $$\delta_2([q,q'],a',\bar{Z})=\begin{cases}(\delta'(q',a'),\bar{Z}) & ha \quad a'\in\Sigma'\\ (\bar{q},\bar{Z}) & ha \quad a'\in\Sigma-\Sigma'.\end{cases}$$

2/ $\delta_2(q,\lambda,\bar{Z})=(\bar{q},\bar{Z})$.

V. Minden $Z\in\Gamma$ elemre:

1/ $\delta_2(\bar{q},\lambda,Z)=(\bar{q},\lambda)$.

2/ $\delta_2(\bar{q},a,\bar{Z})=(\bar{q},\bar{Z})$ minden $a\in\Sigma\cup\Sigma'$ elemre.

A δ_2 konstrukciójából indukcióval könnyü belátnunk, hogy tetszőleges $w\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$ szóra:

$$\langle 4.12.1\rangle \quad \begin{cases}(q_0,w,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p,\alpha)\\ q_0'w \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} p'\end{cases} \Longleftrightarrow ([q_0,q_0'],w,Z_0) \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (\bar{p},\bar{Z}\alpha),$$

ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$, $p'\in K'$ és

$$\bar{p} = \begin{cases} q_h & ha \quad p\in H \quad vagy \quad p'\in H'.\\ [p,p'] & ha \quad p\notin H \quad és \quad p'\notin H'.\end{cases}$$

Most bebizonyitjuk: $L(M_2)=L\cup pL'$.

($\longleftarrow$). Belátjuk először, hogy $L \cup pL' \subseteq L(M_2)$
Legyen $w \in L \cup pL' = (LpL') \cup (L'pL)$. Amennyiben $w \in LpL'$, ahol $L \in \mathcal{L}_{ed2}$ és $L' \in \mathcal{L}_{ed3}$, akkor a 4.8 Tétel bizonyitásához teljesen hasonlóképpen igazolhatjuk, hogy $w \in L(M_2)$. Azért tegyük fel, hogy $w \in L'pL$.

A 4.11-lemma feltételeiből nyilván következik, hogy tetszőleges olyan $w \in \Sigma^*$ szóra, amelynek egyetlen valódi eleje sem tartozik bele az $L(M)$ nyelvbe, csak a következő esetek lehetnek:

a/ $(q_o, w, Z_o) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \lambda, \alpha Z)$, ahol $q \in K$, $Z \in \Gamma$ és $\alpha \in \Gamma^*$ és $\delta(q, \lambda, Z)$ nem definiált.

b/ $w = w_1 w_2$ és $(q_o, w_1 w_2, Z_o) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, w_2, \lambda)$, $q \in K$, $w_1, w_2 \in \Sigma^*$.

Eszerint a $w \in L'pL$ szónál csak a következő három esetet kell vizsgálni:

1. eset. Legyen $w \in (\Sigma \cap \Sigma')^*$ és $q_o' w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} p'$ ill. $(q_o, w, Z_o) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q, \lambda, \alpha)$, ahol $p' \in H'$, $q \in K$, $\alpha \in \Gamma^*$

A <4.12.1> állitásból nyilván $([q_o, q_o'], w, Z_o) \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (q_h, \lambda, \bar{Z}\alpha)$ adódik, azaz $w \in L(M_2)$.

2. eset. Legyen $w = w_1 w_2$ és $q_o' w_1 w_2 \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} q_1' w_2 \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} p'$, ill. $(q_o, w_1 w_2, Z_o) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, w_2, \lambda)$, ahol $p' \in H'$, $q_1' \in K' - H'$, $q \in K - H$, $w_1 \in (\Sigma^* \cap \Sigma')^*$, $w_2 \in \Sigma'^+$.

Ismét használjuk a <4.12.1> állitást és kapjuk:

$$([q_o, q_o'], w_1 w_2, Z_o) \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} ([q, q_1'], w_2, \bar{Z}) \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (p', \lambda, \bar{Z}),$$

ahol $p' \in H_2$, azaz $w \in L(M_2)$.

3. eset. Legyen $w=w_1a'w_2$, ahol $w_1\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$, $a'\in\Sigma'-\Sigma$, $w_2\in\Sigma'^*$,

$$\text{és}\begin{cases} q_0'w_1a'w_2 \vdash_{M'}^{*} q_1'a'w_2 \vdash_{M'} q_2'w_2 \vdash_{M'}^{*} p', \\ \text{ahol } p'\in H'. \\ (q_0,w_1,Z_0) \vdash_{M}^{*} (q_1,\lambda,\alpha), \text{ ahol } q_1\notin H,\ \alpha\in\Gamma^*. \end{cases}$$

Az előző esethez hasonlóan kapjuk:

$$([q_0,q_0'],w_1a'w_2,Z_0) \vdash_{M_2}^{*} ([q_1,q_1'],a'w_2,\bar{Z}\alpha) \vdash_{M_2} (q_2',w_2,\bar{Z}\alpha)$$

$$\vdash_{M_2}^{*} (q_2',w_2,\bar{Z}) \vdash_{M_2}^{*} (p',\lambda,\bar{Z}),$$

ahol $p'\in H_2$, azaz $w\in L(M_2)$.

Mindhárom esetben beláttuk: ha $w\in L'pL$, akkor $w\in L(M_2)$.
Tehát az $L\cup pL'=(LpL')\cup(L'pL) \subseteq L(M_2)$ tartalmazás fennáll.

($\Longrightarrow$). Megforditva igazoljuk, hogy $L(M_2) \subseteq L\cup pL'$. Ehhez elegendő megmutatnunk: ha $w\notin L\cup pL'$ akkor $w\notin L(M_2)$. Először könnyen belátható, hogy $w\notin L\cup L'$, akkor $w\notin L(M_2)$. Nézzük tehát a $w\in L\cup L'-(L\cup pL')$ esetet. Amennyiben $w\in L$ (LpL'), ahol $L\in \mathcal{L}_{ed2}$ és $L'\in \mathcal{L}_{ed3}$, akkor a 4.8 Tétel bizonyitásához teljesen hasonlóan belátjuk, hogy $w\notin L(M_2)$. Ezért legyen $w\in L'-(L'pL)$. Ekkor léteznek olyan $y\neq\lambda$, x szavak, amelyekre $w=xy$ és $w\in L'$ ill. $x\in L$, vagyis:

$$\begin{cases} (q_0,x,Z_0) \vdash_{M}^{*} (p,\lambda,\alpha), \quad \text{ahol } p\in H,\ \alpha\in\Gamma^*. \\ q_0'xy \vdash_{M'}^{*} q'y \vdash_{M'}^{*} p', \quad \text{ahol } q'\notin H' \text{ és } p'\in H'. \end{cases}$$

Ismét használjuk a <4.12.1> állitást és kapjuk:

$$([q_0,q_0'],x,Z_0) \vdash_{M_2}^{*} (q_h,\lambda,\bar{Z}\alpha), \text{ ahol } q_h\in H_2, \text{ azaz } x\in L(M_2).$$

Ebből az $L(M_2)$ nyelv prefix-mentességének értelmében következik, hogy $w=xy\notin L(M_2)$, mivel $y\neq\lambda$.
Végeredményben tehát az $L(M_2)=L\cup pL'$ egyenlőség fennáll.

Érdemes megfigyelni, hogy a determinisztikus pushdown-automatának az általános prefix-mentes homomorfizmussal való kapcsolatát igen nehéz vizsgálni. Ehelyett a h_w homomorfizmussal való kapcsolatával foglalkozunk.

<u>4.13 Tétel.</u> Legyen Σ, Δ két diszjunkt véges ábécé, és $w \in \Delta^*$ valamely rögzitett szó.

Az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv akkor és csak akkor ed2-tipusú, ha a $h_w(L) \subseteq (\Sigma \cup \Delta)^*$ nyelv ed2-tipusú.

Bizonyitás. A tétel bizonyitásához a következő lemmát fogjuk használni.

<u>4.14 Lemma.</u> Az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv akkor és csak akkor d2-tipusú, ha a $h_w(L) \subseteq (\Sigma \cup \Delta)^*$ nyelv d2-tipusú.

Tételünk a lemmából és a 2.10 Tétel korolláriumából már valóban következik, mert a 4.1 Tétel értelmében mind az L és $h_w(L)$ nyelv akkor és csak akkor ed2-tipusú, ha az L és $h_w(L)$ nyelvek d2-tipusúak és prefix-mentesek. Nézzük tehát a lemma bizonyitását.

Amennyiben $L=\{\lambda\}$ vagy $w=\lambda$, akkor nincs mit bebizonyitanunk. Legyen tehát $L \neq \{\lambda\}$ és $w=d_1 \ldots d_n$, ahol $n \geq 1$ és $d_1, \ldots, d_n \in \Delta$. A bizonyitást két részben külön-külön végezzük.

1. rész. Ha $L \in \mathcal{L}_{d2}$, akkor $h_w(L) \in \mathcal{L}_{d2}$.

Legyen $L=L(M)$, ahol $M=(K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, H)$ egy DP-automata. A következő módon konstruáljuk azt az $M'=(K', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0, Z_0, H)$ DP-automatát, amely a $h_w(L)$ nyelvet fogadja el.

$K'=K\cup\{q_{d_1},\dots,q_{d_n}/q\in K\}\cup\{\bar{q}\}$, ahol $\bar{q}\notin K$,

$\Sigma'=\Sigma\cup\{d_1,\dots,d_n\}$,

$\Gamma'=\Gamma\cup\{A\}$, ahol $A\notin\Gamma$,

a δ' átmenetfüggvény a következő:

I. Tetszőleges $q\in K$, $Z\in\Gamma$ kettesnél két esetet különböztetünk meg:

1/ $\delta(q,\lambda,Z)$ definiált,

Ha $\delta(q,\lambda,Z)=(p,\alpha)$ akkor $\delta'(q,\lambda,Z)=(p,\alpha)$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$.

2/ $\delta(q,\lambda,Z)$ nem definiált.

a/ Tetszőleges $a\in\Sigma$-ra:

ha $\delta(q,a,Z)=(p,\alpha)$, akkor $\delta'(q,a,Z)=(p_{d_1},\alpha A)$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$.

b/ Minden $i\in\{1,2,\dots,n\}$ egész számra:

$\delta'(q,d_i,Z)=(\bar{q},\lambda)$.

II. Minden $q\in K$ állapotra: $\delta'(q,\lambda,A)=(\bar{q},\lambda)$.

III. Tetszőleges $q\in K$ állapotra, $i\in\{1,2,\dots,n-1\}$ egész számra:

1/
$$\delta'(q_{d_i},a,A)=\begin{cases}(q_{d_{i+1}},A) & ha\quad a=d_i.\\ (\bar{q},\lambda) & ha\quad a\in\Sigma'-\{d_i\}.\end{cases}$$

2/
$$\delta'(q_{d_n},a,A)=\begin{cases}(q,\lambda) & ha\quad a=d_n\\ (\bar{q},\lambda) & ha\quad a\in\Sigma'-\{d_n\}.\end{cases}$$

3/ $\delta'(q_{d_i},\lambda,Z)=\delta'(q_{d_n},\lambda,Z)=(\bar{q},\lambda)$ minden $Z\in\Gamma$-ra.

IV. Minden $z\in\Gamma'$ elemre $\delta'(\bar{q},\lambda,z)=(\bar{q},\lambda)$.

A δ' konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $q\in K$, $a\in\Sigma$, $Z\in\Gamma$ hármasra:

<4.14.1> $\delta(q,a,Z)=(p,\alpha) \Longleftrightarrow (q,ad_1\ldots d_n,Z) \vdash_{M'}^{*} (p,\lambda,\alpha)$,

ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$.

Ennek alapján indukcióval könnyü bebizonyitanunk, hogy tetszőleges $u\in\Sigma^*$ szóra:

<4.14.2> $(q_0,u,Z_0) \vdash_{M}^{*} (p,\lambda,\alpha) \Longleftrightarrow \{(q_0,h_w(u),Z_0)$

$\vdash_{M'}^{*} (p,\lambda,\alpha)\}$,

ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$.

Végeredményben tehát kapjuk, hogy tetszőleges $u\in\Sigma^*$ szóra:

$u\in L(M) \Longleftrightarrow (q_0,u,Z_0) \vdash_{M}^{*} (p,\lambda,\alpha)$, ahol $p\in H$, $\alpha\in\Gamma^*$.

$\Longleftrightarrow (q_0,h_w(u),Z_0) \vdash_{M'}^{*} (p,\lambda,\alpha)$, ahol $p\in H$, $\alpha\in\Gamma^*$.

$\Longleftrightarrow h_w(u)\in L(M')$

Eszerint: $L(M')=h_w(L)$, azaz $h_w(L)\in \mathcal{L}_{d2}$

2. rész. Ha $h_w(L)\in \mathcal{L}_{d2}$, akkor $L\in \mathcal{L}_{d2}$.

Legyen $h_w(L)=L(M)$, ahol $M=(K,\Sigma\cup\{d_1,\ldots,d_n\},\Gamma,\delta,q_0,Z_0,H)$ egy DP-automata. A következő módon definiáljuk azt az $M'=(K',\Sigma,\Gamma,\delta',q_0,Z_0,H)$ DP-automatát, amelyre $L=L(M')$.

$K'=K\cup\{q_{d_1},\ldots,q_{d_n}/q\in K\}$,

a δ' átmenetfüggvény a következő:

Tetszőleges $q\in K$, $Z\in\Gamma$ kettesnél két esetet különböztetünk meg:

1/ $\delta(q,\lambda,Z)$ definiált.

Ha $\delta(q,\lambda,Z)=(p,\alpha)$, ahol $p\in K,\alpha\in\Gamma^*$ akkor:

a/ $\delta'(q,\lambda,Z)=(p,\alpha)$.

b/ $\delta'(q_{d_i},\lambda,Z)=(p_{d_i},\alpha)$ minden $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ egész számra

2/ $\delta(q,\lambda,Z)$ nem definiált.

a/ Tetszőleges $a\in\Sigma$-ra:

ha $\delta(q,a,Z)=(p,\alpha)$, akkor $\delta'(q,a,Z)=(p_{d_1},\alpha)$

ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$.

b/ Tetszőleges $i\in$ $1,2,\ldots,n-1$ egész számra:

ha $\delta(q,d_i,Z)=(p,\alpha)$, akkor $\delta'(q_{d_i},\lambda,Z)=(p_{d_{i+1}},\alpha)$,

ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$.

c/ Ha $\delta(q,d_n,Z)=(p,\alpha)$, akkor $\delta'(q_{d_n},\lambda,Z)=(p,\alpha)$,

ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$.

A δ' konstrukciójából könnyen megvizsgálhatjuk:

<4.13.3> $\{(q,d_1\ldots\ldots d_n,\alpha)\ \overset{*}{\underset{M}{\vdash}}\ (p,\lambda,\beta)\}$

$\Longleftrightarrow \{(q_{d_1},\lambda,\alpha)\ \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}\ (p,\lambda,\beta)\}$,

ahol $q,p\in K$, $\alpha\in\Gamma^+$, $\beta\in\Gamma^*$.

Ennek alapján indukcióval bebizonyitjuk, hogy tetszőleges $u\in\Sigma^*$ szóra:

<4.14.4> $(q_o,h_w(u),Z_o)\ \overset{*}{\underset{M}{\vdash}}\ (p,\lambda,\beta) \Longleftrightarrow (q_o,u,Z_o)\ \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}\ (p,\lambda,\beta)$,

ahol $p\in K$, $\beta\in\Gamma^*$.

Az $u=a\in\Sigma$ esetben a <4.14.3> állitást használva könnyü belátnunk:

$$\{(q_0,ad_1\ldots d_n,Z_0) \vdash_M^* (q',ad_1\ldots d_n,\alpha'Z) \vdash_M (q,d_1\ldots d_n,\alpha) \vdash_M^* (p,\lambda,\beta)\}$$

$$\Longleftrightarrow \{(q_0,a,Z_0) \vdash_{M'}^* (q',a,\alpha'Z) \vdash_{M'} (q_{d_1},\lambda,\alpha) \vdash_{M'}^* (p,\lambda,\beta)\}$$

Eszerint az állitás már igaz.

Tegyük fel, hogy az állitás minden $u\in\Sigma^*$ n hosszúságú szóra igaz, és legyen $u=u_1a$, ahol $a\in\Sigma$, $u_1\in\Sigma^*$ és $|u_1|=n$. Ekkor az indukciós feltevés értelmében kapjuk:

$$(q_0,h_w(u_1),Z_0) \vdash_M^* (q',\lambda,\alpha'Z') \Longleftrightarrow (q_0,u_1,Z_0) \vdash_{M'}^* (q',\lambda,\alpha'Z').$$

Ismét használjuk a <4.14.3> állitást és könnyen beláthatjuk:

$$\{(q_0,h_w(u_1)ad_1\ldots d_n,Z_0) \vdash_M^* (q',ad_1\ldots d_n,\alpha'Z') \vdash_M (q,d_1\ldots d_n,\alpha) \vdash_M^* (p,\lambda,\beta)\}$$

$$\Longleftrightarrow \{(q_0,u_1a,Z_0) \vdash_{M'}^* (q',a,\alpha'Z') \vdash_{M'} (q_{d_1},\lambda,\alpha) \vdash_{M'}^* (p,\lambda,\beta)\},$$

azaz az állitás igaz az $u\in\Sigma^*$ $(n+1)$ hosszúságú szóra. Végeredményben tehát kapjuk, hogy tetszőleges $u\in\Sigma^*$ szóra:

$$h_w(u)\in L(M) \Longleftrightarrow (q_0,h_w(u),Z_0) \vdash_M^* (p,\lambda,\alpha),\ \text{ahol } p\in H,\ \alpha\in\Gamma^*.$$

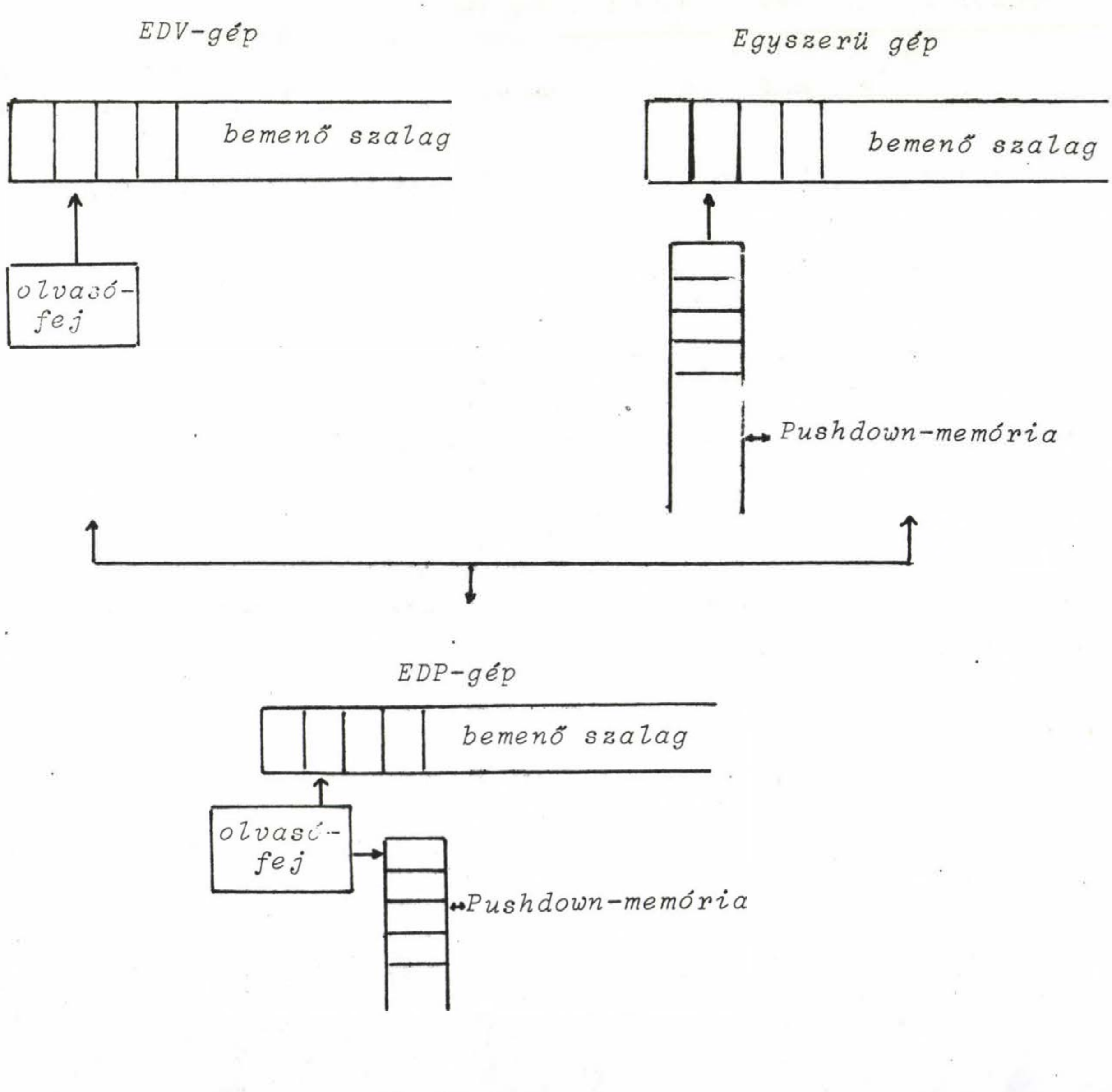
$$\Longleftrightarrow (q_0,u,Z_0) \vdash_{M'}^* (p,\lambda,\alpha),\ \text{ahol } p\in H,\ \alpha\in\Gamma^*.$$

Eszerint: $L=L(M')$, azaz $L\in \mathcal{L}_{d2}$.

Ezzel a lemma bizonyitását befejeztük.

A következő részben belátjuk egy ed2-tipusú nyelvnek egy ed3-tipusú nyelv és eç-tipusú nyelv meteszetének homomorf képére vonatkozó előállitását. Mindenekelőtt az EDP-gépnek egy EDV-géppel és egy egyszerü géppel való kombinációja szemléletesen a 4.1 ábrán megadott három rajznak az összehasonlitásából is látszik.

4.1. ábra



Itt figyelembe kell vennünk, hogy közöttük két nagy különbség van:

1/ Az EDV-gépnél nincsenek λ-lépések megengedve, mig az EDP-gép megengedi.

2/ Az egyszerü gép egy szót üres pushdown-memóriával fogad el, mig az EDP-gép egy végállapottal elfogad és közömbös a pushdown-memória végső tartalmával szemben.

Ezeket a nehézségeket könnyen áthidalhatjuk a következő két lemmával.

4.15 Lemma. Bármely ed2-tipusú L nyelvhez megadható olyan $M'=(K',\Sigma',\Gamma',\delta',q_o',Z_o',\{q_h\})$ EDP-gép, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

i/ $L=L(M')$

ii/ Tetszőleges $w\in\Sigma'^*$ szóra:

$$w\in L(M') \Longleftrightarrow (q_o,w,Z_o) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (q_h,\lambda,\lambda).$$

Bizonyitás. Legyen $L=L(M)$, ahol $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_o,Z_o,H)$ egy EDP-gép. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy tetszőleges $q\in K-H$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z\in\Gamma$ hármasra:

ha $\delta(q,a,Z)=(p,\alpha)$, akkor $p\neq q_o$.

A következő módon konstruáljuk az $M'=(K',\Sigma',\Gamma',\delta',q_o',Z_o',\{q_h\})$ EDP-gépet:

$K'=K\cup\{\bar{q},q_h\}$, ahol $\bar{q},q_h\notin K$,

$\Sigma'=\Sigma$,

$\Gamma'=\Gamma\cup\{\bar{Z}_o\}$, ahol $\bar{Z}_o\notin\Gamma$,

$Z_o'=Z_o$,

$q_o'=q_o$,

a δ' átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$ elemre:

ha $\delta(q_o,a,Z_o)=(p,\alpha)$, akkor $\delta'(q_o,a,Z_o)=(p,\bar{Z}_o\alpha)$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$.

2/ Tetszőleges $(q,Z)\in(K-H)\times\Gamma-\{(q_o,Z_o)\}$ elemre, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$-ra:

ha $\delta(q,a,z)=(p,\alpha)$, akkor $\delta'(q,a,Z)=(p,\alpha)$, ahol $p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$.

3/ Tetszőleges $p\in H$ állapotra:

a/ $\delta'(p,\lambda,Z)=(p,\lambda)$ minden $Z\in\Gamma$-ra.

b/ $\delta'(p,\lambda,\bar{Z}_o)=(q_h,\lambda)$.

4/ Minden $q\in K-H$ állapotra: $\delta'(q,\lambda,\bar{Z}_o)=(\bar{q},\lambda)$

5/ Minden $Z\in\Gamma'$-re: $\delta'(\bar{q},\lambda,Z)=(\bar{q},\lambda)$.

A δ' konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $w\in\Sigma^*$ szóra:

$$w\in L(M)\Longleftrightarrow(q_o,w,Z_o)\overset{*}{\underset{M}{\vdash}}(p,\lambda,\alpha),\text{ ahol } p\in H,\ \alpha\in\Gamma^*.$$

$$\Longleftrightarrow(q_o,w,Z_o)\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}(p,\lambda,\bar{Z}_o\alpha)\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}(p,\lambda,\bar{Z}_o)$$

$$\underset{M'}{\vdash}(q_h,\lambda,\lambda).$$

$$\Longleftrightarrow w\in L(M').$$

Eszerint az M' EDP-gép a lemma feltételeinek megfelel.

<u>4.15 Lemma.</u> Bármely ed2-tipusú L nyelvhez megadható olyan $M'=(K',\Sigma',\Gamma',\delta',q_o',Z_o',H')$ EDP-gép és h homomorfizmus, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek:

i/ $L=h(L(M'))$.

ii/ Minden $q\in K'-H'$, $Z\in\Gamma'$ kettesre $\delta'(q,\lambda,Z)$ nem definiált.

Bizonyitás. Legyen $L=L(M)$, ahol $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_o,Z_o,H)$ egy EDP-gép. Először tekintsük a következő halmazt:

$$\Delta=\{(q,Z)\in(K-H)\times\Gamma/\delta(q,\lambda,Z)\ \textit{definiált}\}$$

A következő módon konstruáljuk az $M'=(K',\Sigma',\Gamma',\delta',q_o',Z_o',H')$ EDP-gépet:

$K'=K\cup\{\bar{q}\}$, ahol $\bar{q}\notin K$,
$\Sigma'=\Sigma\cup\{e_{[q,Z]}/(q,Z)\in\Delta\}$,
$\Gamma'=\Gamma$,
$q_o'=q_o$,
$Z_o'=Z_o$,
$H'=H$,

a δ' átmenetfüggvény a következő:

I. Tetszőleges $q\in K-H$, $Z\in\Gamma$ kettesnél két esetet különböztetünk meg:

1/ $\delta(q,\lambda,Z)$ definiált.

$$\delta'(q,a,Z)=\begin{cases}\delta(q,\lambda,Z) & \text{ha } a=e_{[q,Z]}.\\ (\bar{q},\lambda) & \text{ha } a\in\Sigma'-\{e_{[q,Z]}\}.\end{cases}$$

2/ $\delta(q,\lambda,Z)$ nem definiált.

$$\delta'(q,a,Z)=\begin{cases}\delta(q,a,Z) & \text{ha } a\in\Sigma\\ (\bar{q},\lambda) & \text{ha } a\in\Sigma'-\Sigma.\end{cases}$$

II. Minden $Z\in\Gamma$-ra: $\delta'(\bar{q},\lambda,Z)=(\bar{q},\lambda)$.

Világos, hogy az M' EDP-gépnél nincsenek λ-lépések, azaz az ii/ feltételnek megfelel. Most belátjuk az i/ feltétel teljesülését.

A δ' konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $(q,Z)\in\Delta$ kettesre:

<4.16.1> $(q,a,\alpha Z) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (p,\lambda,\beta) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Létezik } u\in(\Sigma'-\Sigma)^* \text{ szó amelyre} \\ (q,ua,\alpha Z) \underset{M'}{\overset{*}{\vdash}} (p,\lambda,\beta) \end{cases}$

ahol $a\in\Sigma$, $p\in K$, $\alpha,\beta\in\Gamma^*$, és az $\underset{M}{\overset{*}{\vdash}}$ ill. $\underset{M'}{\overset{*}{\vdash}}$ relációk utolsó lépései nem λ-lépések.

Ennek alapján indukcióval bebizonyitjuk, hogy tetszőleges $w=a_1\ldots a_n\in\Sigma^*$ szóra:

<4.16.2> $(q_o,a_1\ldots a_n,Z_o) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (p,\lambda,\beta)$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Léteznek } u_1\ldots u_n\in(\Sigma'-\Sigma)^* \text{ szavak, amelyekre} \\ (q_o,u_1a_1\ldots u_na_n,Z_o) \underset{M'}{\overset{*}{\vdash}} (p,\lambda,\beta) \end{cases}$

ahol $p\in K$, $\beta\in\Gamma^*$ és az $\underset{M}{\overset{*}{\vdash}}$ ill. $\underset{M'}{\overset{*}{\vdash}}$ relációk utolsó lépései nem λ-lépések.

A $w=a\in\Sigma$ esetben az állitás nyilván a <4.16.1> állitásból adódik. Most tegyük fel, hogy az állitás minden $w\in\Sigma^*$ n hosszúságú szóra igaz, és legyen $w=a_1\ldots a_na$, ahol $a_1,\ldots a_n,a\in\Sigma$ tetszőleges jelek.
Ekkor az indukciós feltevés értelmében kapjuk:

$(q_o,a_1\ldots a_n,Z_o) \underset{M}{\overset{*}{\vdash}} (q,\lambda,\alpha Z) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Léteznek } u_1,\ldots,u_n\in(\Sigma'-\Sigma)^* \\ \text{szavak, amelyekre:} \\ (q_o,u_1a_1\ldots u_na_n,Z_o) \\ \underset{M'}{\overset{*}{\vdash}} (q,\lambda,\alpha Z) \end{cases}$

ahol $q\in K-H$, $Z\in\Gamma$, $\alpha\in\Gamma^*$.

Továbbá két esetet kell vizsgálnunk:

a. eset: $\delta(q,\lambda,Z)$ definiált:

Ismét használjuk a <4.16.1> állitást és kapjuk:

$$(q,a,\alpha Z) \vdash_{M}^{*} (p,\lambda,\beta) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Létezik } u\in(\Sigma'-\Sigma)^* \text{ szó, amelyre} \\ (q,ua,\alpha Z) \vdash_{M'}^{*} (p,\lambda,\beta) \end{cases}$$

b. eset: $\delta(q,\lambda,Z)$ nem definiált.
Ekkor választjuk az $u=\lambda$ szót és kapjuk:

$$(q,a,\alpha Z) \vdash_{M} (p,\lambda,\beta) \Longleftrightarrow (q,a,\alpha Z) \vdash_{M'} (p,\lambda,\beta).$$

Tehát mindkét esetben az állitás a $w\in\Sigma^*$ $(n+1)$ hosszúságú szóra is igaz. Végül, a <4.16.2> állitás segitségével valamint az utolsó lépés szemlélésével könnyü belátnunk, hogy tetszőleges $w=a_1\dots a_n\in\Sigma^*$ szóra:

$$w=a_1\dots a_n\in L(M) \Longleftrightarrow (q_o,a_1\dots a_n,Z_o) \vdash_{M}^{*} (p,\lambda,\alpha),\ \text{ahol } p\in H, \alpha\in\Gamma^*.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Léteznek } u_1,\dots,u_n,u\in(\Sigma'-\Sigma)^* \text{ szavak, melyekre} \\ (q_o,u_1a_1\dots u_na_nu,Z_o) \vdash_{M'}^{*} (p,\lambda,\alpha),\ \text{ahol} \\ p\in H,\ \alpha\in\Gamma^* \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Léteznek } u_1,\dots u_n,u\in(\Sigma'-\Sigma)^* \text{ szavak, amelyekre} \\ u_1a_1\dots u_na_nu\in L(M') \end{cases}$$

Most már csak egy olyan homomorfizmust kell megadnunk, amely a $w=a_1\dots a_n$ szóhoz az $u_1a_1\dots u_na_nu$ szót rendeli hozzá. Legyen ezért a h homomorfizmus a következő módon definiálva:

1/ $h(\lambda)=\lambda$.

2/ $$h(a) = \begin{cases} a & ha\ \ a\in\Sigma \\ \lambda & ha\ \ a\in\Sigma'-\Sigma. \end{cases}$$

3/ $h(xy)=h(x)h(y)$ tetszőleges $x,y\in\Sigma'^*$ szavakra.

Ekkor a $h(L(M'))$ elemei pontosan az $L(M)$-beli szavak lesznek. Ezzel a lemma bizonyitását befejeztük.

<u>4.4. Megjegyzés:</u> A 4.16 lemma bizonyitásában a δ' átmenetfüggvény konstrukciója az M EDP-gépnek a végállapothalmazát és a pushdown-memória tartalmát nem érinti, azaz az M' EDP-gép az M EDP-gép 4.15 lemmabeli ii/ teljesülésének következtében ennek a feltételnek is megfelel.
Ezen lemmák után könnyenbelátjuk az alábbi állitást.

<u>4.17 Tétel.</u> Bármely ed2-tipusú L nyelvhez megadható olyan ed3-tipusú L_1 nyelv, ec-tipusú L_2 nyelv és h homomorfizmus, amelyekre $L=h(L_1\cap L_2)$.

Bizonyitás. A 4.15 és 4.16 lemmák értelmében feltehetjük, hogy $L=h_1(L(M))$, ahol h_1 egy olyan homomorfizmus és $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\{q_h\})$ egy olyan EDP-gép, amelyekre teljesülnek a fenti lemmák ii/ feltételei, azaz tetszőleges $q\in K-\{q_h\}$, $Z\in\Gamma$ kettesre $\delta(q,\lambda,Z)$ nem definiált és $w\in L(M)\Longleftrightarrow(q_0,w,Z_0)\overset{*}{\underset{M}{\vdash}}(q_h,\lambda,\lambda)$.

Vegyünk továbbá egy Σ' ábécét, amelynek az elemeit kölcsönösen egyértelmüen megfeleltetjük a $(K-\{q_h\})\times\Gamma$ elemeinek:

$$\Sigma'=\{x_{[q,Z]}/q\in K-\{q_h\},Z\in\Gamma\}.$$

A δ értelmezését nézve most konstruáljuk egyszerre az M_1 EDV-gépet és az M_2 egyszerü gépet úgy, hogy

$M_1=(K_1,\Sigma\cup\Sigma',\delta_1,q_o,\{q_h\})$ és $M_2=(\Sigma\cup\Sigma',\Gamma_2,\delta_2,Z_o)$ ahol

$K_1=K\cup\{[q,Z]/q\in K-\{q_h\},\ Z\in\Gamma\}\cup\{\bar{q}\}$, ahol $\bar{q}\notin K$,

$\Gamma_2=\Gamma\cup\{[Z,q]/Z\in\Gamma,\ q\in K-\{q_h\}\}\cup\{\bar{Z}\}$, ahol $\bar{Z}\notin\Gamma$,

δ_1 és δ_2 átmenetfüggvényvek a következők:

Ia. Tetszőleges $q\in K-\{q_h\}$ állapotra:

1/ Tetszőleges $Z\in\Gamma$-ra: $\delta_1(q,x_{[q,Z]})=[q,Z]$

2/ Minden $a\in\Sigma\cup\Sigma'-\{x_{[q,Z]}/Z\in\Gamma\}$ elemre: $\delta_1(q,a)=\bar{q}$.

Ib. Tetszőleges $Z\in\Gamma$-ra:

1/ Tetszőleges $q\in K-\{q_h\}$ elemre: $\delta_2(x_{[q,Z]},Z)=[Z,q]$.

2/ Minden $a\in\Sigma\cup\Sigma'-\{x_{[q,Z]}/q\in K-\{q_h\}\}$ elemre:

$\delta_2(a,Z)=\bar{Z}$.

II. Tetszőleges $q\in K-\{q_h\}$, $Z\in\Gamma$ kettesre:

1/ Tetszőleges $a\in\Sigma$-ra:

ha $\delta(q,a,Z)=(p,\alpha)$, ahol $p\in K,\alpha\in\Gamma^*$, akkor:

a/ $\delta_1([q,Z],a)=p$.

b/ $\delta_2(a,[Z,q])=\alpha$.

2/ Minden $a'\in\Sigma'$ elemre:

a/ $\delta_1([q,Z],a')=\bar{q}$

b/ $\delta_2(a',[Z,q])=\bar{Z}$

III. Minden $a\in\Sigma\cup\Sigma'$ elemre:

a/ $\delta_1(\bar{q},a)=\bar{q}$

b/ $\delta_2(a,\bar{Z})=\bar{Z}$

A δ_1 és δ_2 konstrukciójából könnyü belátnunk, hogy tetszőleges $a\in\Sigma$ elemre:

<4.17.1>

$$(q,a,\alpha Z) \underset{M}{\vdash} (p,\lambda,\beta) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Létezik } a'=x_{[q,Z]}\in\Sigma', \text{amelyre} \\ q\, x_{[q,Z]}a \overset{*}{\underset{M1}{\vdash}} p, \text{ és} \\ (x_{[q,Z]}a,\alpha Z) \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (\lambda,\beta) \end{cases}$$

ahol $q\in K-\{q_h\}$, $p\in K$, $Z\in\Gamma$, $\alpha,\beta\in\Gamma^*$.

Ebből indukcióval könnyen bebizonyithatjuk, hogy tetszőleges $w=a_1\ldots a_n\in\Sigma^*$ szóra:

<4.17.2>

$$(q_0,a_1\ldots a_n,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (p,\lambda,\beta) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Léteznek } a_1',\ldots,a_n'\in\Sigma', \\ \text{amelyekre:} \\ q_0a_1'a_1\ldots a_n'a_n \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} p, \text{ és} \\ (a_1'a_1\ldots a_n'a_n,Z_0) \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (\lambda,\beta) \end{cases}$$

ahol $p\in K$, $\beta\in\Gamma^*$.

Végeredményben tehát kapjuk, hogy tetszőleges $w=a_1\ldots a_n\in\Sigma^*$-ra:

$$w=a_1\ldots a_n\in L(M) \Longleftrightarrow (q_0,a_1\ldots a_n,Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_h,\lambda,\lambda).$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Léteznek } a_1',\ldots a_n'\in\Sigma', \text{ amelyekre:} \\ q_0a_1'a_1\ldots a_n'a_n \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} q_h, \text{ és} \\ (a_1'a_1\ldots a_n'a_n,Z_0) \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (\lambda,\lambda) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Léteznek } a_1'.\ldots.a_n'\in\Sigma', \text{ amelyekre:} \\ a_1'a_1\ldots a_n'a_n\in L(M_1)\cap L(M_2) \end{cases}$$

Legyen most a h_2 homomorfizmus a következő módon definiálva:

1/ $h_2(\lambda)=\lambda$

2/ $$h_2(a)=\begin{cases} a & ha \quad a\theta\Sigma, \\ \lambda & ha \quad a\theta\Sigma' \end{cases}$$

3/ $h_2(xy)=h(x)h(y)$ tetszőleges $x,y\theta(\Sigma\cup\Sigma')^*$ szavakra.

Ekkor nyilvánvaló, hogy $L(M)=h_2(L(M_1)\cap L(M_2))$.
Végül, definiáljuk a h homomorfizmust ugy, hogy tetszőleges $a\theta\Sigma\cup\Sigma'$ elemre $h(a)=h_1(h_2(a))$, azaz a h homomorfizmus a h_1 és h_2 összetétele, és ennek értelmében nyilván $L=h(L(M_1)\cap L(M_2))$ fennáll. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

<u>Korollárium.</u> Bármely ed2-tipusú L nyelvhez megadhatók olyan ec-tipusú L_1 és L_2 nyelvek és h homomorfizmus, amelyekre

$$L = h(L_1\cap L_2).$$

Bizonyitás. A 4.2 tételből adódik.

5. Fejezet

EGYSZERÜ DETERMINISZTIKUS LINEÁRISAN KORLÁTOLT GÉPEK

Ebben a fejezetben a determinisztikus lineárisan korlátolt automaták egy speciális osztályával foglalkozunk, amelyet egyszerü determinisztikus lineárisan korlátolt géposztálynak nevezünk. Megmutatjuk, hogy ez a géposztály pontosan a prefix-mentes determinisztikus 1-tipusú nyelvek osztályát fogadja el.

5.1. Prefix-mentes nyelvek és egyszerü determinisztikus lineárisan korlátolt gépek.

5.1. Definició

a/ Egy egyszerü determinisztikus lineárisan korlátolt gépen (röv. EDLK-gépen) az $M = (\Gamma, K, \Sigma, \delta, q_o, H)$ rendezett hatost értjük, ahol

Γ a szalag ábécé,

K az állapothalmaz,

Σ a bemenő ábécé, és $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$.

$q_o \in K$ a kezdő állapot,

$H \subseteq K$ a végállapotok halmaza,

δ átmenetfüggvény a $KX(\Gamma \cup \Sigma)$ halmaznak $KX(\Gamma U\{R,L\})$-b[illegible] való egy leképzése, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

i/ Tetszőleges $q \in K-H$, $z \in \Gamma \cup \Sigma$ kettesre: $\delta(q,z)$ pontosan egy elemet tartalmaz.

ii/ Tetszőleges $p \in H$, $z \in \Gamma$ kettesre: $\delta(p,z)$ pontosan egy elemet tartalmaz.

iii/ Minden $p \in H$, $a \in \Sigma$ kettesre: $\delta(p,a)$ nem definiált.

b/ Adott M $EDLK$-gépnek egy konfigurációján értjük azt a w_1qw_2 szót, amelyre $q \in K$, $w_1, w_2 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ és $w_1w_2 \neq \lambda$. A következő módon definiáljuk a konfigurációkra vonatkozó $\vdash_M$ relációt:

1/ $w_1qxw_2 \vdash_M w_1pzw_2 \iff \delta(q,x) = (p,z)$,

2/ $w_1qxw_2 \vdash_M w_1xpw_2 \iff \delta(q,x) = (p,R)$,

3/ $w_1yqxw_2 \vdash_M w_1pyxw_2 \iff \delta(q,x) = (p,L)$,

ahol $q,p \in k$, $x,y \in \Gamma \cup \Sigma, z \in \Gamma, w_1, w_2 \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$.

Legyen $\vdash_M^*$ reláció az $\vdash_M$ reláció tranzitiv lezárása.

Végül, az M EDLK-gép által elfogadott nyelv a következő:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid q_0w \vdash_M^* \alpha p, \text{ ahol } p \in H, \alpha \in (\Gamma \cup \Sigma)^*\}.$$

Egy L nyelvet akkor nevezünk egyszerü determinisztikus 1-tipusúnak (röv. ed_1-tipusúnak), ha létezik olyan M EDLK-gép, amelyre $L = L(M)$. $\mathcal{L}_{ed_1}$-gyel jelöljük az ed_1-tipusú nyelvek osztályát.

5.1. Megjegyzés Ebben a definicióban ismét kiróttuk a δ átmenetfüggvényre azt a kikötést, hogy semmilyen $p \in H$, $a \in \Sigma$ kettesnél $\delta(p,a)$ sincs értelmezve, amely az elfogadott nyelv prefix-mentes tulajdonságát dönti el.

5.1. Tétel Legyen Σ egy véges ábécé, és $L \subseteq \Sigma^*$. Az L nyelv akkor és csak akkor ed_1-tipusú, ha az L nyelv prefix-mentes és d_1-tipusú.

Bizonyitás.

1. rész. Ha $L \in \mathcal{L}_{d_1} \cap \mathcal{L}_p$, akkor $L \in \mathcal{L}_{ed_1}$.

Először az 1.12.Lemma értelmében feltehető, hogy $L = L(M)$, ahol az $M = (\Gamma, K, \delta, q_o, M)$ DLK-automata az 1.12.lemma ii/ feltételének megfelel, vagyis a δ átmenetfüggvény a $K X \Gamma$ halmaznak $K X((\Gamma - \Sigma)\ U\ \{R, L\})$ halmazra való egy leképzése, amelyre teljesül: tetszőleges $q \in K$, $a \in \Sigma$ ketteshez létezik a $p \in K$, $z \in \Gamma - \Sigma$ kettes úgy, hogy $\delta(q,a) = (p,z)$. Most konstruálunk olyan M' EDLK-gépet, amelyre $L(M') = L(M)$.

Legyen az $M' = (\Gamma', K, \Sigma, \delta', q_o, M)$ EDLK-gép a következő módon definiálva:

$$\Gamma' = \Gamma - \Sigma,$$

a δ' átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $q \in K-H$, $z \in \Gamma'\ U\ \Sigma$ kettesre:

$\delta'(q,z) = \delta(q,z)$.

2/ Tetszőleges $p \in H$, $z \in \Gamma'$ kettesre: $\delta'(p,z) = \delta(p,z)$.

3/ Minden $p \in H$, $a \in \Sigma$ kettesre: $\delta'(p,a)$ nem definiált.

A δ' konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szóra: ha $w \in L(M')$, akkor $w \in L(M)$, azaz $L(M') \subseteq L(M)$. Megforditva bebizonyitjuk, hogy $L(M) \subseteq L(M')$. Ehhez elég megmutatnunk: ha $w \notin L(M')$, akkor $w \notin L(M)$.

Először világos, hogy ha az M' $EDLK$-gép egy w szóra közömbös úgy, hogy a $q_o w$ konfigurációból a gép periodikusan végtelenül mozog és soha sem áll meg, akkor az M DLK-automata a w szóra is közömbös. Eszerint csak a következő három esetet kell vizsgálni:

a. eset: Legyen $w = w_1 a w_2$, ahol $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$,

és $q_o w_1 a w_2 \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \alpha_1 p a w_2$, ahol $p \in H$, $\alpha_1 \in \Gamma^*$.

Ekkor nyilván $q_o w_1 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha_1 p$ adódik, azaz $w_1 \in L(M)$.

Eszerint az is nyilvánvaló, hogy $w = w_1 y \notin L(M)$, mivel az $L(M)$ nyelv prefix-mentes és $y = a w_2 \neq \lambda$.

b. eset: Legyen $q_o w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha q$, ahol $q \notin H$ és $\alpha \in \Gamma^*$.

Ebben az esetben könnyen belátható, hogy $q_o w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha q$ is adódik, s azért $w \notin L(M)$.

c. eset: Legyen $q_o w \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} q z \alpha w_2$, ahol $w_2 \in \Sigma^*$, $\alpha \in \Gamma^*$, $q \in K$, $z \in \Gamma$ és $\delta(q,z) = (p,L)$, azaz az M' gép megáll.

Ekkor nyilván $q_o w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} q z \alpha w_2$ adódik és az M gép is megáll, ami azt jelenti, hogy $w \notin L(M)$.

Végeredményben tehát az $L(M') = L(M)$ egyenlőség áll fenn, azaz $L = L(M) \in \mathcal{L}_{ed_1}$.

2. rész. Ha $L \in \mathcal{L}_{ed_1}$, akkor $L \in \mathcal{L}_{d_1} \cap \mathcal{L}_p$.

Legyen $L = L(M)$, ahol $M = (\Gamma, K, \Sigma, \delta, q_0, H)$ egy EDLK-gép. Először világos, hogy az $L(M)$ nyelv prefix-mentes, mivel a δ definiciója szerint $\delta(p,a)$ nem definiált semmilyen $p \in H$, $a \in \Sigma$ kettesre, azaz az M EDLK-gép egy bemenő szó elfogadása után rögtön megáll, mig a bemenő szó további része beadható. Most bebizonyitjuk: $L \in \mathcal{L}_{d_1}$.

A következő módon konstruáljuk azt az $M' = (\Gamma', K', \delta', q_0, H)$ DLK-automatát, amely az $L(M)$ nyelvet fogadja el.

$\Gamma' = \Gamma \cup \Sigma$,

$K' = K \cup \{\bar{q}\}$, ahol $\bar{q} \notin K$,

a δ' átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $q \in K-H$, $z \in \Gamma \cup \Sigma$ kettesre: $\delta'(q,z) = \delta(q,z)$.

2/ Tetszőleges $p \in H$ állapotra:

$$\delta'(p,z) = \begin{cases} \delta(p,z) & \text{ha } z \in \Gamma \\ (\bar{q},R) & \text{ha } z \in \Sigma \end{cases}$$

3/ Minden $z \in \Gamma \cup \Sigma$ elemre: $\delta'(\bar{q},z) = (\bar{q},R)$.

A δ' konstrukciójából nyilván M' azokat és csak azokat a $w \in \Sigma^*$ szavakat fogadja el, amelyeket M elfogad és megforditva. Tehát, az $L(M') = L(M)$ egyenlőség áll fenn, azaz $L \in \mathcal{L}_{d_1}$. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

5.2. Az EDP-gépek és EDLK-gépek osztályázása

Mielőtt megvizsgálnánk ezt az osztályozást, tárgyaljuk az $\mathcal{L}_{ed_1}$ és $\mathcal{L}_{p_2}$ nyelvosztályok kapcsolatát.

5.2. Tétel

a/ Bármely prefix-mentes 2-tipusú L nyelvhez megadható olyan az EDLK-gép, amelyre $L = L(M)$.

b/ Van olyan M_1 EDLK-gép, amelyre $L(M_1) \notin \mathcal{L}_{p_2}$.

Bizonyitás.

a/ Világos, hogy az első állitás az 1.10- és 5.1- Tételekből adódik.

b/ A második állitás bizonyitásához tekintsük az $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ nyelvet, amely az 1.8. Tétel (Bar-Hill lemma) korolláriuma szerint nem 2-tipusú. Most konstruálunk olyan M_1 EDLK-gépet, amelyre $L_1 = L(M_1)$. Legyen az $M_1 = (\Gamma_1, K_1, \{a,b,c\}, \delta_1, q_0, \{q_h\})$ EDLK-gép a következő módon definiálva:

$$\Gamma_1 = \{A,B,C,X,Y\},$$

$$K_1 = \{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{11}, q_{12}, \bar{q}, q_h\},$$

a δ_1 átmenetfüggvény a következő:

1/ $\delta_1(q_0,a) = (q_0,A)$, $\delta_1(q_0,A) = (q_1,R)$,

$\delta_1(q_1,a) = (q_1,X)$, $\delta_1(q_1,X) = (q_1,R)$,

$\delta_1(q_1,b) = (q_1,B)$, $\delta_1(q_1,B) = (q_2,R)$,

$\delta\ (q_2,b) = (q_2,Y)$, $\delta_1(q_2,Y) = (q_2,R)$.

2/ $\delta_1(q_2,c) = (q_2,C)$, $\delta_1(q_2,C) = (q_3,L)$,

$\delta_1(q_3,Z) = (q_3,L)$ tetszőleges $Z\in\{B,X,Y\}$ elemre,

3/ $\delta_1(q_3,A) = (q_4,R)$, $\delta_1(q_4,X) = (q_4,A)$,

$\delta_1(q_4,A) = (q_5,R)$, $\delta_1(q_4,B) = (q_{12},R)$.

4/ $\delta_1(q_5,X) = (q_6,R)$, $\delta_1(q_5,B) = (q_7,R)$.

5/ $\delta_1(q_6,Y) = (q_3,X)$,

$\delta_1(q_6,Z) = (q_6,R)$ tetszőleges $Z\in\{B,X\}$ elemre.

6/ $\delta_1(q_7,X) = (q_7,R)$, $\delta_1(q_7,Y) = (q_8,X)$.

7/ $\delta_1(q_8,X) = (q_8,L)$, $\delta_1(q_8,B) = (q_9,R)$,

$\delta_1(q_9,X) = (q_9,B)$, $\delta_1(q_9,B) = (q_{10},R)$.

8/ $\delta_1(q_{10},X) = (q_{11},R)$, $\delta_1(q_{10},C) = (q_{10},R)$.

9/ $\delta_1(q_{11},Z) = (q_{11},R)$ tetszőleges $Z\in\{C,X\}$ elemre.

$\delta_1(q_{11},c) = (q_8,C)$, $\delta_1(q_8,C) = (q_8,L)$.

10/ $\delta_1(q_{10},c) = (q_{12},C)$, $\delta_1(q_{12},C)=(q_h,R)$

11/ Tetszőleges $q \in K_1 - \{\bar{q}, q_h\}$, $x \in \Gamma_1 \cup \{a,b,c\}$ kettesre:

ha $\delta(q,x)$ még nem fordul elő az 1/—| lo/ alakúakban,

akkor $\delta(q,x) = (\bar{q},A)$.

12/ $\delta_1(q_h,Z) = (\bar{q},A)$ minden $Z \in \Gamma_1$ elemre.

$\delta_1(\bar{q},Z) = (\bar{q},A)$ minden $Z \in (\Gamma - \{A\}) \cup \{a,b,c\}$ elemre.

$\delta_1(\bar{q},A) = (\bar{q},R)$.

A δ_1 konstrukciójából könnyen megvizsgálható, hogy ha $\bar{w} \in \{a,b,c\}^* - L_1 - \{\lambda\}$, akkor $q_o\bar{w} \underset{M_1}{\overset{*}{\vdash}} \alpha q'$, ahol $\alpha \in \Gamma_1^*$ és

$$q' = \begin{cases} q_1 & \text{ha} \quad \bar{w} \in \{a^n \mid n \geq 1\}. \\ q_2 & \text{ha} \quad \bar{w} \; \{a^n b^m \mid n \geq 1 \quad m \geq 1\}. \\ \bar{q} & \text{egyébként} \end{cases}$$

azaz $\bar{w} \notin L(M_1)$.

Megforditva bebizonyitjuk, hogy $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \subseteq L(M_1)$.

Valóban kaphatjuk a következő levezetéseket:

i/ $q_o abc \underset{M_1}{\overset{*}{\vdash}} ABq_2C \underset{M_1}{\overset{*}{\vdash}} q_3ABC \underset{M_1}{\vdash} Aq_4BC \underset{M_1}{\vdash} ABq_{12}C \underset{M_1}{\vdash} ABCq_h$.

l

ii/ Tetszőleges $n \geqq 1$ egész számra:

$$q_o a^{n+1}\, b^{n+1}\, c^{b+1} \;\vdash^{*}_{M_1}\; AX^n BY^n q_2 Cc^n$$

$$\vdash^{*}_{M_1}\; A^{n+1} BX^{n-1} q_8 XCc^n$$

$$\vdash^{*}_{M_1}\; A^{n+1} B^{n+1} C^n q_{1o} c$$

$$\vdash_{M_1}\; A^{n+1} B^{n+1} C^n q_{12} C$$

$$\vdash_{M_1}\; A^{n+1}\, B^{n+1}\, C^{n+1} q_h .$$

Ezek szerint: $w = a^n b^n c^n \in L(M_1)$ minden $n \geqq 1$ számra.
Végeredményben tehát az $L(M_1) = L_1$ egyenlőség áll fenn.
Ezzel a tétel bebizonyitását befejeztük.
Ebből a tételből nyilván adódik az alábbi állitás.

5.3. Tétel

a/ Bármely M EDP-géphez megadható olyan M' EDLK-gép, amelyre $L(M') = L(M)$.

b/ Van olyan M_1 EDLK-gép, amelyre $L(M_1) \notin \mathcal{L}_{ed_2}$.

Végezetül, $\mathcal{L}_{p_1}$-gyel jelöljük a prefix-mentes 1-tipusú nyelvek osztályát és a fenti tételek alapján kapjuk:

$$\mathcal{L}_{ed_3} \subsetneqq \mathcal{L}_{ec} \subsetneqq \mathcal{L}_{ed_2} \subsetneqq \mathcal{L}_{p_2} \subsetneqq \mathcal{L}_{ed_1} \subseteq \mathcal{L}_{p_1} ,$$

ahol a tartalmazások mindenütt, kivéve az utolsót, valódi részeket jelentenek. Világos, hogy az $\mathcal{L}_{ed_1} \subseteq \mathcal{L}_{p_1}$ tartalmazásnál nyitott kérdés viszont az, hogy az EDLK-géposztály pontosan a prefix-mentes 1-tipusú nyelvek osztályát fogadja-e el. Ezenkívül az is nyilvánvaló, hogy van olyan 1-tipusú nyelv, amely nem ed_1-tipusú, azaz $\mathcal{L}_{ed_1} \subsetneq \mathcal{L}_1$.

5.3. Az edl-tipusú nyelvosztály tulajdonságai

Először az 5.1. Tétel értelmében az $\mathcal{L}_{d1}$ és $\mathcal{L}_p$ nyelvosztályok zártságaira visszanézve könnyü belátnunk a következő tételeket.

<u>5.4. Tétel</u> Ha $L \in \mathcal{L}_{ed_1}$, akkor az $\bar{L}$ nyelv kivezet az $\mathcal{L}_{ed_1}$ nyelvosztályból. Eszerint az $\mathcal{L}_{ed_1}$ nyelvosztály nem zárt a komplemensképzésre nézve.

Bizonyitás. A 2.2. Tétel bizonyitásából adódik.

<u>5.5. Tétel</u> Az $\mathcal{L}_{ed_1}$ nyelvosztály nem zárt az unióra nézve.

Bizonyitás. A 3.3. Tétel bizonyitásából adódik.

Mielőtt folytatnánk a tárgyalást, bevezetjük az EDLK-gépnek az 1.12- lemmához hasonló alakját, amelyre az egyszerüség kedvéért általában szoritkozunk.

5.6. Lemma Bármely ed_1-tipusú L nyelvhez megadható olyan $M' = (\Gamma', K', \Sigma', \delta', q_0', H')$ EDLK-gép, amelyre teljesülnek:

i/ $L = L(M')$.

ii/ Tetszőleges $q \in K'-H'$, $a \in \Sigma'$ ketteshez létezik egy olyan $p \in K'$, $z \in \Gamma'$ kettes, amelyre $\delta'(q,a) = (p,z)$.

Bizonyitás. Legyen $L = L(M)$, ahol $M=(\Gamma, K, \Sigma, \delta, q_0, H)$ egy EDLK-gép. A következő módon definiáljuk az $M'=(\Gamma', K', \Sigma', \delta', q_0', H')$ EDLK-gépet:

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{a' \mid a \in \Sigma\},$$

$$K' = K \cup \{\bar{q}\}, \text{ ahol } \bar{q} \notin K,$$

$$\Sigma' = \Sigma,$$

$$q_0' = q_0,$$

$$H' = H,$$

a δ' átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $q \in K$, $Z \in \Gamma$ kettesre: $\delta'(q,Z) = \delta(q,Z)$.

2/ Tetszőleges $q \in K-H$, $a \in \Sigma$ kettesre:

a/ $\delta'(q,a) = (q,a')$

b/ $\delta'(q,a') = \delta(q,a)$.

3/ Tetszőleges $p \in H$, $a \in \Sigma$ kettesre: $\delta'(p,a') = (\bar{q},R)$.

4/ Tetszőleges $Z \in \Gamma' \cup \Sigma$ elemre:

$$\delta'(\bar{q},Z) = \begin{cases} (\bar{q},Z') & \text{ha } Z \in \Sigma \\ (\bar{q},R) & \text{ha } Z \in \Gamma' \end{cases}$$

A δ' konstrukciójából könnyen belátható, hogy a δ' átmenetfüggvény az ii/ feltételnek megfelel, és M' azokat és csak azokat a $w \in \Sigma^*$ szavakat fogadja el, amelyeket M elfogad és megforditva.

Ezzel a lemma bizonyitását befejeztük.

<u>Megállapodás.</u> A továbbiakban csak azokra az EDLK-gépekre szorotkozunk, amelyek az 5.6.-lemma ii/ feltételének megfelelnek, ezért az egyszerüség kedvéért az "5.6-lemmának megfelelt" jelzőt elhagyjuk.

<u>5.7. Tétel</u> Az $\mathcal{L}_{ed_1}$ nyelvosztály zárt a concatenációra nézve.

Bizonyitás. Legyen $L = L(M)$ és $L' = L(M')$; ahol

$$M = (\Gamma,K,\Sigma,\delta,q_o,H) \quad \text{és} \quad M' = (\Gamma',K',\Sigma',\delta',q_o',H')$$

két EDLK gép.

Amennyiben $L = \{\lambda\}$ vagy $L' = \{\lambda\}$, akkor nincs mit bizonyitanunk. Ezért az általánosság megszoritása nélkül továbbá feltehetjük:

i/ $L \neq \{\lambda\}$ és $L' \neq \{\lambda\}$.

ii/ $K \cap K' = \Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$.

Most konstruálunk olyan M_1 EDLK-gépet, amelyre $L(M_1) = L.L'$. Legyen az $M_1 = (\Gamma_1, K_1, \Sigma\cup\Sigma', \delta_1, q_o, H')$ EDLK-gép a következő módon definiálva:

$$\Gamma_1 = \Gamma\cup\Gamma'\cup\{\bar{Z}\},\quad \text{ahol} \quad \bar{Z} \notin \Gamma\cup\Gamma',$$

$$K_1 = K\cup K'\cup\{\bar{q}\},\quad \text{ahol} \quad \bar{q} \notin K\cup K',$$

a δ_1 átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $q\in K-H$ állapotra:

$$\delta_1(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{ha} \quad a\in\Gamma\cup\Sigma. \\ (\bar{q},\bar{Z}) & \text{ha} \quad a\in\Gamma'\cup(\Sigma'-\Sigma). \end{cases}$$

2/ Tetszőleges $p\in H$ állapotra:

$$\delta_1(p,a) = \begin{cases} \delta(p,a) & \text{ha} \quad a\in\Gamma. \\ \delta'(q_o',a) & \text{ha} \quad a\in\Sigma'. \\ (\bar{q},\bar{Z}) & \quad a\in\Gamma'\cup(\Sigma-\Sigma'). \end{cases}$$

3/ Tetszőleges $q'\in K'-H'$ állapotra:

$$\delta_1(q',a') = \begin{cases} \delta'(q',a') & \text{ha} \quad a'\in\Gamma'\cup\Sigma'. \\ (\bar{q},\bar{Z}) & \text{ha} \quad a\in\Gamma\cup(\Sigma-\Sigma'). \end{cases}$$

4/ Tetszőleges $p' \in H'$ állapotra:

$$\delta_1(p',a') = \begin{cases} \delta'(p',a') & \text{ha} \quad a' \in \Gamma'. \\ (\bar{q},\bar{Z}) & \text{ha} \quad a' \in \Gamma. \end{cases}$$

5/ Minden $q \in K \cup K'$ állapotra, $Z \in \Gamma \cup \Gamma' \cup \Sigma \cup \Sigma'$ elemre:

a/ $\delta_1(q,\bar{Z}) = (\bar{q},\bar{Z})$

b/ $\delta_1(\bar{q},Z) = (\bar{q},\bar{Z})$

c/ $\delta_1(\bar{q},\bar{Z}) = (\bar{q},R)$.

A δ_1 konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $w \in \Sigma^*$, $w' \in \Sigma'^*$ szavakra:

i/ $q_o w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha p \iff q_o w \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} \alpha p$.

ii/ $q_o' w' \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \alpha' p' \iff \{$tetszőleges $p \in H$-ra: $pw' \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} \alpha' p'\}$.

Másrészt az L és L' prefix-mentes tulajdonságai értelmében az is nyilvánvaló, hogy $w \in LL'$ akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik pontosan egy (w_1,w_2) szópár, amelyre $w=w_1w_2$ és $w_1 \in L$ ill. $w_2 \in L'$.

Ezek szerint könnyen belátjuk:

$$w \in LL' \iff \begin{cases} \text{Létezik egy olyan } (w_1,w_2) \text{ szópár,} \\ \text{amelyre } w=w_1w_2 \text{ és } w_1 \in L \text{ ill. } w_2 \in L'. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} q_o w_1 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha p, \text{ ahol } p \in H, \ \alpha \in \Gamma^*, \text{ és} \\ q_o' w_2 \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \alpha' p', \text{ ahol } p' \in H', \ \alpha' \in \Gamma'^*. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \{q_o w_1 w_2 \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} \alpha p w_2 \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} \alpha\alpha' p', \text{ ahol } p' \in H', \ \alpha \in \Gamma^*, \ \alpha' \in \Gamma'^*\}.$$

$$\Longleftrightarrow w = w_1 w_2 \in L(M_1).$$

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

5.8. Tétel Az $\mathcal{L}_{ed_1}$ nyelvosztály zárt a metszetre nézve.

Bizonyitás. Legyen $L = L(M)$ és $L' = L(M')$, ahol $M = (\Gamma, K, \Sigma, \delta, q_o, H)$ és $M' = (\Gamma', K', \Sigma', \delta', q_o', H')$ két EDLK-gép. Itt csak az L és L' nyelvek metszetét figyeljük, azért az egyszerüség kedvéért tekintsük, hogy $\Sigma = \Sigma'$. Az általánosság megszoritása nélkül továbbá feltehető, hogy $K \cap K' = \emptyset$. Most konstruálunk olyan M_2 EDLK-gépet, amelyre $L(M_2) = L \cap L'$.

Legyen az $M_2 = (\Gamma_2, K_2, \Sigma, \delta_2, [q_o, q_o'], H_2)$ EDLK-gép a következő módon definiálva:

$$\Gamma_2 = \{[Z,Z'] \mid Z \in \Gamma, Z' \in \Gamma'\} \cup \{[Z,Z',q] \mid Z \in \Gamma, Z' \in \Gamma', q \in K \cup K'\} \cup \{\bar{Z}\},$$

ahol $\bar{Z} \notin \Gamma \cup \Gamma'$;

$$K_2 = K \cup K' \cup \{[q,q'] \mid q \in K, q' \in K'\} \cup \{[q,q',i] \mid q \in K, q' \in K', i \in \{-2,-1,0,1,2\}\} \cup$$

$$\cup \{\bar{q}\}, \text{ ahol } \bar{q} \notin K \cup K',$$

$H_2 = \{[p,p'] \mid p\in H$ és $p'\in H\}$,

a δ_2 átmenetfüggvény a következő:

I/ Tetszőleges $a\in\Sigma$ -ra:

1/ Tetszőleges $q\in K-H$, $q'\in K'-H'$ kettesre:

ha $\delta(q,a) = (p,z)$ és $\delta'(q',a) = (p',z')$, akkor

$\delta_2([q,q'],a) = ([p,p'],[z,z'])$, ahol $p\in K, p'\in K', z\in\Gamma, z'\in\Gamma'$.

2/ Minden $q\in K_2-H_2-\{[q,q']/q\in K-H,\ q'\in K'-H'\}$ állapotra

$\delta_2(q,a) = (\bar{q},\bar{Z})$.

II/ Tetszőleges $q\in K$, $x\in\Gamma$, $q'\in K'$, $x'\in\Gamma'$ négyesre:

1/ Ha $\delta(q,x) = (p,y)$ és $\delta'(q',x') = (p',y')$,

akkor $\delta_2([q,q'],[x,x'] = ([p,p'],[y,y'])$, ahol

$p\in K$, $y\in\Gamma$, $p'\in K'$, $y'\in\Gamma'$.

2/ Ha $\delta(q,x) = (p,i)$ és $\delta'(q',x') = (p',i)$, ahol

$i\in\{R,L\}$, $p\in K$, $p'\in K'$, akkor $\delta_2([q,q'],[x,x'])=([p,p'],i)$.

3a/ Ha $\delta(q,x) = (p,R)$ és $\delta'(q',x') = (p',y')$,

akkor $\delta_2([q,q'],[x,x']) = (p',[x,y',p])$, ahol

$p\in K$, $p'\in K'$, $y'\in\Gamma'$.

3b/ Ha $\delta(q,x) = (p,R)$ és $\delta'(q',x') = (p',L)$,

akkor $\delta_2([q,q'],[x,x']) = (q',[x,x',p])$,

ahol $p \in K$, $p' \in K'$.

4a/ Ha $\delta(q,x) = (p,y)$ és $\delta'(q',x') = (p',R)$,

akkor $\delta_2([q,q'],[x,x']) = (p,[y,x',p'])$,

ahol $p \in K$, $y \in \Gamma$, $p' \in K'$.

4b/ Ha $\delta(q,x) = (p,y)$ és $\delta'(q',x') = (p',L)$,

akkor $\delta_2([q,q'],[x,x']) = ([p,p',-1],[y,x'])$,

ahol $p \in K$, $y \in \Gamma$, $p' \in K'$.

5a/ Ha $\delta(q,x) = (p,L)$ és $\delta'(q',x') = (p',R)$,

akkor $\delta_2([q,q'],[x,x']) = (q,[x,x',p'])$,

ahol $p \in K$, $p' \in K'$.

5b/ Ha $\delta(q,x) = (p,L)$ és $\delta'(q',x') = (p',y')$,

akkor $\delta([q,q'],[x,x']) = ([p,p',-2],[x,y'])$,

ahol $p \in K$, $p' \in K'$, $y' \in \Gamma'$.

III/ Tetszőleges $q \in K$, $q' \in K'$ állapotokra:

1/ $\delta_2(q,q',-i],[x,x']) = ([q,q',i],L)$ minden $x \in \Gamma$, $x' \in \Gamma'$

kettesre és $i \in \{1,2\}$ számra.

2a/ $\delta_2([q,q',1],[x,x']) = (q',[x,x',q])$ minden $x \in \Gamma$, $x' \in \Gamma'$

kettesre.

2b/ $\delta_2([q,q',2],[x,x']) = (q,[x,x',q'])$ minden $x \in \Gamma$, $x' \in \Gamma'$

kettesre.

3/ $\delta_2([q,q',0],[x,x']) = ([q,q'],R)$ minden $x \in \Gamma$, $x' \in \Gamma'$

kettesre.

IV/ Tetszőleges $q \in K$, $x \in \Gamma$ kettesre:

1/ Ha $\delta(q,x) = (p,y)$, ahol $p \in K$, $y \in \Gamma$, akkor:

a/ $\delta_2(q,[x,x']) = (p,[y,x'])$ minden $x' \in \Gamma'$ elemre.

b/ $\delta_2(q,[x,x',q']) = (p,[y,x',q'])$ minden $x' \in \Gamma'$,

$q' \in K'$ kettesre.

2/ Ha $\delta(q,x) = (p,L)$, ahol $p \in K$, akkor:

a/ $\delta_2(q,[x,x']) = (p,L)$ minden $x'\in\Gamma'$ elemre.

b/ $\delta_2(q,[x,x',q']) = (p,L)$ minden $x'\in\Gamma'$, $q'\in K'$ kettesre.

3/ Ha $\delta(q,x) = (p,R)$, ahol $p\in K$, akkor:

a/ $\delta_2(q,[x,x']) = (p,R)$ minden $x'\in\Gamma'$ elemre.

b/ $\delta_2(q,[x,x',q']) = ([p,q',0],[x,x'])$ tetszőleges $x' \in \Gamma'$, $q' \in K'$ kettesre.

V/ Tetszőleges $q'\in K'$, $x'\in\Gamma'$ kettesre:

1/ Ha $\delta'(q',x') = (p',y')$, ahol $p'\in K'$, $y'\in\Gamma'$, akkor:

a/ $\delta_2(q',[x,x']) = (p',[x,y'])$ minden $x\in\Gamma$ elemre.

b/ $\delta_2(q',[x,x',q]) = (p',[x,y',q])$ minden $x\in\Gamma$, $q\in K$ kettesre.

2/ Ha $\delta'(q',x') = (p',L)$, ahol $p'\in K'$, akkor:

a/ $\delta_2(q',[x,x']) = (p',L)$ minden $x \in \Gamma$ elemre.

b/ $\delta_2(q',[x,x',q]) = (p',L)$ minden $x \in \Gamma, q \in K$ kettesre.

3/ Ha $\delta'(q',x') = (p',R)$, ahol $p' \in K'$, akkor:

a/ $\delta_2(q',[x,x']) = (p',R)$ minden $x \in \Gamma$ elemre.

b/ $\delta_2(q',[x,x',q]) = ([q,p',0],[x,x'])$ tetszőleges $x \in \Gamma$, $q \in K$ kettesre.

VI/ Tetszőleges $q \in K_2 - H_2 - \{\bar{q}\}$, $z \in \Gamma_2$ kettesre:

ha $\delta_2(q,z)$ még nem fordul elő az I, → V, alakúakban, akkor $\delta_2(q,z) = (\bar{q},\bar{Z})$.

VII/ Minden $z \in \Gamma_2 - \{\bar{Z}\}$ elemre:

1/ $\delta_2(\bar{q},z) = (\bar{q},\bar{Z})$.

2/ $\delta_2(\bar{q},\bar{Z}) = (\bar{q},R)$.

Most bebizonyitjuk: $L(M_2) = L \cap L'$.

Először az egyszerüség kedvéért használjuk a következő szinbólumot:

Legyen $\alpha_n = z_1 \ldots z_n \in \Gamma^*$ és $\alpha'_n = z'_1 \ldots . z'_n \in \Gamma'^*$, akkor jelöljük:

$$[\alpha_n,\alpha'_n] = [z_1,z'_1]\ \dots\ [z_n,z'_n].$$

A IV, és V, alakúak értelmében könnyen belátható, hogy tetszőleges $q\in K$, $q'\in K'$ állapotokra, $\alpha_n,\beta_m\in\Gamma^*$, $\alpha'_n,\beta'_m\in\Gamma'^*$ szavakra:

<5.8.1> $$\left\{\begin{array}{l} \alpha_n q\beta_m \vdash^{*}_{M} \gamma_{n+m}p \\ \alpha'_n q'\beta'_m \vdash^{*}_{M'} \gamma'_{n+m}p' \end{array}\right. \iff \{[\alpha_n,\alpha'_n][q,q'][\beta_m,\beta'_m] \vdash^{*}_{M_2} \vdash^{*}_{M_2}[\gamma_{n+m},\gamma'_{n+m}][p,p']\},$$

ahol $p\in K$, $p'\in K'$, $|\alpha_n|=|\alpha'_n|=n$, $|\beta_m|=|\beta'_m|=m$, $|\gamma_{n+m}|=|\gamma'_{n+m}|=n+m$.

Ebből indukcióval bebizonyitjuk, hogy tetszőleges $w\in\Sigma^*$ szóra:

<5.8.2> $$\left\{\begin{array}{l} q_o w \vdash^{*}_{M} \alpha_n p \\ q'_o w \vdash^{*}_{M'} \alpha'_n p' \end{array}\right. \iff [q_o,q'_o]w \vdash^{*}_{M_2} [\alpha_n,\alpha'_n][p,p'],$$

ahol $p\in K$, $p'\in K'$, $\alpha_n\in\Gamma^*$, $\alpha'_n\in\Gamma'^*$ és $|\alpha_n|=|\alpha'_n|=|w|= n$.

A $w=a\in\Sigma$ esetében az állitás az <5.8.1> állitásból és az I/ alakú konstrukciójából nyilván adódik.

˥

Tegyük fel, hogy az állítás minden $w \in \Sigma^*$ n hosszúságú szóra igaz, és legyen $w = w_1 a \in \Sigma^*$, ahol $|w_1| = n$ és $a \in \Sigma$. Ekkor az indukciós feltevés értelmében kapjuk:

$$\left\{\begin{array}{l} q_0 w_1 \vdash_M^* \alpha_1 q_1 \\ \\ q_0' w_1 \vdash_{M'}^* \alpha_1' q_1' \end{array}\right. \Longleftrightarrow [q_0, q_0'] w_1 \vdash_{M_2}^* [\alpha_1, \alpha_1'][q_1, q_1'],$$

ahol $[q_1, q_1'] \notin H_2$, $\alpha_1 \in \Gamma^*$, $\alpha_1' \in \Gamma'^*$.

Megint használjuk az <5.8.1> állítást és kapjuk:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 q_1 a \vdash_M \alpha_1 q z \vdash_M^* \alpha p \\ \\ \alpha_1' q_1' a \vdash_{M'} \alpha_1' q' z' \vdash_{M'}^* \alpha' p' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \{[\alpha_1, \alpha_1'][q_1, q_1'] a \vdash_{M_2} [\alpha_1, \alpha_1'][q, q'][z, z'] \vdash_{M_2}^* \vdash_{M_2}^* [\alpha, \alpha'][p, p']\},$$

ahol $q, p \in K$, $q', p' \in K$, $z \in \Gamma$, $z' \in \Gamma'$, $\alpha \in \Gamma^*$, $\alpha' \in \Gamma'^*$.

Ezek szerint: az állítás már igaz.

Végül, az <5.8.2> állítás értelmében könnyen belátjuk, hogy tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szóra:

$$w \in L \; L' \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} q_0 w \vdash_M^* \alpha p, & \text{ahol } p \in H,\ \alpha \in \Gamma^* \\ \\ q_0' w \vdash_{M'}^* \alpha' p', & \text{ahol } p' \in H', \alpha' \in \Gamma'^* \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow [q_0, q_0'] w \vdash_{M_2}^* [\alpha, \alpha'][p, p'], \text{ ahol } [p, p'] \in H_2.$$

$$\Longleftrightarrow w \in L(M_2).$$

Tehát, az $L(M_2)=L\cap L'$ egyenlőség áll fenn, és a tétel bizonyitását befejeztük.

Mielőtt folytatnánk az $L-L'$, LpL', $L\cup pL'$ nyelvek tárgyalását, foglalkozunk az EDLK-gépnek a következő lehetséges közömbösségével: Az EDLK-gép egy w bemenő szóra úgy közömbös, hogy a q_ow kezdő konfigurációból a gép periodikusan végtelenül mozog, és soha sem áll meg. Ezt a közömbösséget elméletileg megoldhatónak tekintsük abból a szempontból, hogy tetszőleges w szóról és tetszőleges 1-tipusú L nyelvről eldönthető: a $w\in L$ tartalmazás fennáll-e.

5.9. Lemma. Bármely M EDLK-gépet lehet olyan alakra hozni, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal:
tetszőleges olyan w bemenő szóra, amelynek semmilyen valódi eleje nem tartozik bele az $L(M)$ nyelvbe, a q_ow kezdőkonfigurációból a gép véges sok lépés után mindig megáll valamely αq alakú konfigurációval.

Bizonyitás. Legyen $M = (\Gamma,K,\Sigma,\delta,q_o,H)$ egy EDLK-gép. Az általánosság megszoritása nélkül továbbá feltehető: tetszőleges $q\in K$, $x\in\Gamma\cup\Sigma$ kettesre ha $\delta(q,x)=(p,y)$, ahol $y\in\Gamma\cup\{R,L\}$, akkor $p\neq q_o$.

Először tekintjük a következő halmazt:

$$\Delta L = \{[q,z]\in K\times\Gamma \mid \delta(q,z) = (p,L), \text{ ahol } p\in K\}.$$

Világos, hogy az "5.6 lemmának megfelelt" megállapodás szerint a w bemenő szó helyett csak az $\alpha\in\Gamma^*$ szóra lehetséges közömbösséget kell vizsgálnunk.

Először, egy-egy $[q,z]\in\Delta L$ elemhez az ISM $([q,z])$ jelöléssel rendeljük hozzá olyan $\alpha z\in\Gamma^*$ szavak halmazát, amelyek rendelkeznek az alábbi két tulajdonsággal:

i/ Létezik olyan $p\in K$ állapot, amelyre

$$\alpha qz \vdash_M^* p\bar{\alpha}z \vdash_M^* \alpha qz.$$

ii/ az αz szónak egyetlen olyan β rész szava sincs, amely legalább kétszer egymás után előfordul úgy, hogy

a/ $\alpha z = \beta_1\beta\beta z_2\beta_2 z$, ahol $\beta_1,\beta_2\in\Gamma^*$, $z_2\in\Gamma$, esetleg:

$$\beta_2=\lambda \quad \text{és} \quad z_2=z.$$

b/ Léteznek olyan q_β, $p_\beta\in K$ állapotok, amelyekre:

$$\beta\beta q_\beta z_2 \vdash_M^* \beta q_\beta\beta' z_2, \quad \text{és}$$

$$p_\beta\beta'\beta' z_2 \vdash_M^* \beta p_\beta\beta' z_2.$$

A következő algoritmussal megmutatjuk, hogy tetszőleges $[q,z]\in\Delta L$ elemre választhatjuk az ISM$([q,z])$ elemeit. Az algoritmus lényeges megvalósitása az, hogy az α megvizsgált szó elejére behelyezünk tetszőleges $x\in\Gamma$ elemet és vizsgáljuk a gépnek az $x\alpha qz$ konfigurációból való müködését. Az algoritmus lépéseit a következőképpen módositjuk:

0-Lépés. Legyen $\alpha = \lambda$.

1-Lépés. Legyen $\alpha q z \vdash_M^* q'z'\alpha'z$ és $\delta(q',z')=(p',L)$,

ahol $q',p'\in K$, $z'\in\Gamma$, $\alpha'\in\Gamma^*$, esetleg:

$\alpha'=\lambda$ és $z'=z$. Ekkor jelöljük: $\alpha_I = \alpha$.

2-Lépés. Tetszőleges $x\in\Gamma$ elemnél két esetet különböztetünk meg:

a. eset. Létezik olyan $\beta\in\Gamma^*$ szó, amelyre $\alpha_I z=\beta x\beta\alpha_1 z$ és

$x\beta x\beta\alpha_1 qz \vdash_M^* x\beta p'x\beta'\alpha_1' z \vdash_M^* p'x\beta'x'\beta'\alpha_1' z$.

Ekkor hagyjuk ezt az elemet és foglalkozunk a másikkal.

b. eset. Egyéb esetben folytatjuk az $x\alpha_I qz$ vizsgálatát:

i/ Ha létezik olyan $p\in K$ állapot, amelyre

$x\alpha_I qz \vdash_M^* px'\alpha_I' z \vdash_M^* x\alpha_I qz$, akkor legyen:

$x\alpha_I z\in ISM([q,z])$.

ii/ Ha $x\alpha_I qz \vdash_M^* q'z'\alpha_I' z$ és $\delta(q',z')=(p',L)$,

akkor legyen: $\alpha=x\alpha_I$, és visszatérünk az 1-lépésre.

iii/ A fenti két eseten kivül hagyjuk ezt az elemet, és foglalkozunk a másikkal.

Világos, hogy a választás véges sok lépésben mindig befejeződik, mivel a K és Γ végesek. Emellett az $ISM[(q,z)]$ halmaz ii/ feltétel miatt az is nyilvánvaló, hogy az $ISM([q,z])$ elemeinek a száma véges. Eszerint az $ISM(M)= \bigcup_{[q,z]\in\Delta L} ISM([q,z])$ halmaz is véges. Most konstruálunk olyan M' EDLK-gépet, mely a lemmának megfelel. Az $ISM(M)$ végessége értelmében az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy az $ISM(M)$ halmaznak csak egyetlen szava van, és legyen $\alpha = z_k \dots z_1 z \in ISM(M)=ISM([q,z])$. Ekkor definiáljuk az $M'=(\Gamma',K',\Sigma,\delta',q_0,H)$ EDLK-gépet úgy, hogy

$$\Gamma' = \Gamma\cup\{[x,\not{b}]\,|\,x\in\Gamma\}\cup\{\bar{z}\}, \text{ ahol } \bar{z}\notin\Gamma,$$

$$K' = K\cup\{q_z,q_{z_1},\dots,q_{z_k},[q,0],\bar{q}\}, \text{ ahol } \bar{q}\notin K,$$

a δ' átmenetfüggvény a következő:

I/ Tetszőleges $a\in\Sigma$-ra:

1/ Ha $\delta(q_0,a) = (p,y)$, ahol $p\in K$, $y\in\Gamma$, akkor

$\delta'(q_0,a)=(p,[y,\not{b}])$.

2/ Tetszőleges $q'\in K-H-\{q_0\}$ állapotra:

ha $\delta(q',a)=(p,y)$, akkor $\delta'(q',a) = (\bar{p},y)$, ahol $p\in K$, $y\in\Gamma$, és

$$\bar{p} = \begin{cases} p & \text{ha } p\neq q \\ q_z & \text{ha } p=q \end{cases}$$

3/ Minden $q'\in\{q_z,q_{z_1},\dots,q_{z_k},[q,0],\bar{q}\}$ állapotra:

$\delta'(q',a)=(\bar{q},\bar{z})$.

II/ Tetszőleges $(q',x)\in K\times\Gamma-\{(q,z)\}$ kettesre:

1/ Ha $\delta(q',x)=(p,y)$, akkor $\delta'(q',x)=(\bar{p},y)$ és

$\delta'(q',[x,\not{s}])=(\bar{p},[y,\not{s}])$, ahol $p\in K$, $y\in\Gamma$ és

$$\bar{p} = \begin{cases} p & \text{ha } p\neq q \\ q_z & \text{ha } p=q \end{cases}$$

2/ Ha $\delta(q',x) = (p,R)$, akkor $\delta'(q',x)=(\bar{p},R)$ és

$\delta'(q',[x,\not{s}]) = (\bar{p},R)$, ahol $p\in K$ és

$$\bar{p} = \begin{cases} p & \text{ha } p\neq q \\ q_z & \text{ha } p=q \end{cases}$$

3/ Ha $\delta(q',x) = (p,L)$, akkor:

a/ $\delta'(q',[x,\not{s}]) = (\bar{q},R)$.

b/ $\delta'(q',x) = (\bar{p},L)$, ahol $p\in K$ és

$$\bar{p} = \begin{cases} p & \text{ha } p\neq q \\ q_z & \text{ha } p=q. \end{cases}$$

4/ a/ $\delta'(q,[z,\not{s}]) = (\bar{q},R)$

b/ $\delta'(q,z) = (\bar{p},L)$, ahol $p \in K$ és

$$\bar{p} = \begin{cases} p & \text{ha} \quad p \neq q \\ q_z & \text{ha} \quad p = q \end{cases}$$

III/ Tetszőleges $x \in \Gamma' - \{\bar{z}\}$ elemre:

1/

$$\delta'(q_z,x) = \begin{cases} (q_{z_1},L) & \text{ha} \quad x = z \\ (q,x) & \text{ha} \quad x \neq z \end{cases}$$

2/ Tetszőleges $i=1,2,\ldots,k-1$ egész számra:

$$\delta'(q_{z_i},x) = \begin{cases} (q_{z_{i+1}},L) & \text{ha} \quad x = z_i \\ ([q,0],R) & \text{ha} \quad x \neq z_i \end{cases}$$

3/

$$\delta'(q_{z_k},x) = \begin{cases} (\bar{q},R) & \text{ha} \quad x \in \{z_k,[z_k,\not{s}]\} \\ ([q,0],R) & \text{ha} \quad x \notin \{z_k,[z_k,\not{s}]\} \end{cases}$$

4/

$$\delta'([q,0],x) = \begin{cases} ([q,0],R) & \text{ha} \quad x \neq z \\ (q,x) & \text{ha} \quad x = z \end{cases}$$

IV/ Tetszőleges $q'\in K'-\{\bar{q}\}$ állapotra, $z'\in\Gamma'-\{\bar{z}\}$ elemre:

1/ $\delta'(q',\bar{z}) = (\bar{q},\bar{z})$

2/ $\delta'(\bar{q},z') = (\bar{q},R)$

3/ $\delta'(\bar{q},\bar{z}) = (\bar{q},R)$.

A δ' konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $w\in\Sigma^*$ szóra:

$$w\in L(M) \Longleftrightarrow q_o w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} x\alpha p, \quad \text{ahol } p\in H, \; x\in\Gamma, \; \alpha\in\Gamma^*$$

$$\Longleftrightarrow q_o w \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} [x,\not{b}]\alpha p, \quad \text{ahol } p\in H$$

$$\Longleftrightarrow w\in L(M').$$

(A $w=\lambda$ eset triviális, és nem kell vizsgálnunk.)
Most tekintjük azt a $w\notin L(M)$ szót, amelynek semmilyen valódi eleje sem tartozik bele az $L(M)$ nyelvbe. Ekkor három esetet különböztetünk meg.

1. eset. Legyen $q_o w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} x\alpha q'$, ahol $q'\notin H$, $x\in\Gamma$, $\alpha'\in\Gamma^*$.

Ebben az esetben nyilván $q_o w \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} [x,\not{b}]\alpha q'$ adódik.

2. eset. Legyen $w=w_1w_2$ és $q_o w_1 w_2 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} q'x\alpha w_2$, ahol $w_1\in\Sigma^+, w_2\in\Sigma^*$, $\alpha\in\Gamma^*$, $q'\in K$, $x\in\Gamma$ és $\delta(q',x) = (p,L)$.

Ekkor a II.3. kifejezésből könnyen belátható:

$$q_o w_1 w_2 \vdash_{M'}^{*} q'[x,\not{s}]\alpha w_2 \vdash_{M'}^{*} [x,\not{s}]\alpha[\bar{z}]^n \bar{q},$$

ahol $n = |w_2|$.

3.eset. Legyen $w=w_1 w_2$ és $q_o w_1 w_2 \vdash_{M}^{*} x\alpha_1 z_k \ldots z_1 q z w_2$,

ahol $w_1 \in \Sigma^+$, $w_2 \in \Sigma^*$, $x \in \Gamma$, $\alpha_1 \in \Gamma^*$, esetleg:

$\alpha_1 = \lambda$ és $x = z_k$.

Ismét használjuk a II.3. kifejezést és kapjuk:

$$q_o w_1 w_2 \vdash_{M'}^{*} [x,\not{s}]\alpha z_k \ldots z_1 q_z z w_2 \vdash_{M'}^{*} [x,\not{s}]\alpha q_{z_k} z_k \ldots z_1 z w_2 \vdash_{M'}^{*}$$

$$\vdash_{M'}^{*} [x,\not{s}]\alpha z_k \ldots z_1 z(\bar{z})^n \bar{q}$$

ahol $n = |w_2|$.

Ezek szerint mindhárom esetben belátjuk: az M' EDLK-gép a lemma igényelt alakjának megfelel.

5.2. Megjegyzés. A következő két tételben azokra az EDLK-gépekre szoritkozunk, amelyek az 5.9. lemma igényelt alakjának megfelelnek. Tehát, az egyszerüség kedvéért megállapodunk, hogy róla nem kell ismételten beszélni.

<u>5.10. Tétel.</u> Ha L, $L' \in \mathcal{L}_{ed_1}$, akkor az $L-L$ és $L \rho L'$ nyelvek ed_1-tipusúak.

Bizonyitás. Legyen $L=L(M)$ és $L'=L(M')$, ahol $M=(\Gamma,K,\Sigma,\delta,q_0,H)$ és $M'=(\Gamma',K',\Sigma',\delta',q_0',H')$ két EDLK-gép.

Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $K \cap K'=\Gamma \cap \Gamma'=\emptyset$. A bizonyitást két részben külön-külön végezzük.

a/ Először konstruálunk olyan M_3 EDLK-gépet, amelyre $L(M_3)=L-L'$.

Legyen az $M_3=(\Gamma_3,K_3,\Sigma \cup \Sigma',\delta_3,[q_0,q_0'],H)$ EDLK-gép a következő módon definiálva:

$\Gamma_3=\Gamma \cup \{[z,z'],[z,z',q],[z,z',\not b],[z,z',\not b,q] \mid z \in \Gamma,\ z' \in \Gamma',q \in K \cup K'\} \cup \{\bar{z}\}$,

ahol $\bar{z} \notin \Gamma$,

$K_3=\{[q,q'],[q,q',\not b],[q,q',i] \mid q \in K,q' \in K',i \in \{-2,-1,0,1,2\}\} \cup K \cup K' \cup \{\bar{q}\}$,

ahol $\bar{q} \notin K \cup K'$,

a δ_3 átmenetfüggvény a következő:

I/ 1/ Tetszőleges $q \in K-H$, $q' \in K'-H'$ kettesre:

a/ Tetszőleges $b \in \Sigma \cap \Sigma'$ elemre:

ha $\delta(q,b)=(p,z)$ és $\delta'(q',b)=(p',z')$, akkor $\delta_3([q,q'],b)=([p,p'],[z,z',\not b])$, ahol $p \in K$, $p' \in K'$, $z \in \Gamma$, $z' \in \Gamma'$.

b/ Tetszőleges $a \in \Sigma - \Sigma'$ elemre:

$$\delta_3([q,q'],a) = \delta(q,a)$$

c/ Tetszőleges $a' \in \Sigma' - \Sigma$ elemre:

$$\delta_3([q,q'],a') = (\bar{q},\bar{z}).$$

2/ Tetszőleges $q \in K-H$ állapotra:

$$\delta_3(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{ha} \quad a \in \Sigma \\ (\bar{q},\bar{z}) & \quad\quad a \in \Sigma' - \Sigma \end{cases}$$

3/ Minden $q \in K_3 - \{[q,q'] \mid q \in K-H, \quad q' \in K'-H'\} - K,$

$a \in \Sigma \cup \Sigma'$ kettesre:

$$\delta_3(q,a) = (\bar{q},\bar{z}).$$

II/ Tetszőleges $q \in K$, $x \in \Gamma$, $q' \in K'$, $x' \in \Gamma'$ négyesre:

1/ Ha $\delta(q,x)=(p,y)$ és $\delta'(q',x')=(p',y')$, ahol $p \in K$, $p' \in K'$, $y \in \Gamma$, $y' \in \Gamma'$, akkor:

a/ $\delta_3([q,q'],[x,x']) = ([p,p'],[y,y']).$

b/ $\delta_3([q,q'],[x,x',\not{s}]) = ([p,p'],[y,y',\not{s}]).$

2/ Ha $\delta(q,x) = (p,L)$ és $\delta'(q',x') = (p',L)$, ahol $p \in K$, $p' \in K'$, akkor:

a/ $\delta_3([q,q'],[x,x']) = ([p,p'],L)$.

b/ $\delta_3([q,q'],[x,x',\not{b}]) = ([p,p'],L)$

3/ Ha $\delta(q,x)=(p,R)$ és $\delta'(q',x')=(p',R)$, ahol $p \in K$, $p' \in K'$, akkor:

a/ $\delta_3([q,q'],[x,x']) = ([p,p'],R)$.

b/ $\delta_3([q,q'],[x,x',\$]) = ([p,p',\not{b}],[x,x'])$.

4a/ Ha $\delta(q,x)=(p,R)$ és $\delta'(q',x')=(p',y')$, ahol $p \in K$, $p' \in K'$, $y' \in \Gamma'$, akkor:

a/ $\delta_3([q,q'],[x,x'])=(p',[x,y',p])$.

b/ $\delta_3([q,q'],[x,x',\not{b}])=(p',[x,\ ,\not{b},p])$.

4b/ Ha $\delta(q,x)=(p,R)$ és $\delta'(q',x')=(p',L)$, ahol $p \in K$, $p' \in K'$, akkor:

a/ $\delta_3([q,q'],[x,x']) = (q',[x,x',p])$.

b/ $\delta_3([q,q'],[x,x',\not{b}]) = (q',[x,x',\not{b},p])$.

5a/ Ha $\delta(q,x)=(p,y)$ és $\delta'(q',x')=(p',R)$, ahol $p\in K$, $p'\in K'$, $y\in\Gamma$, akkor:

a/ $\delta_3([q,q'],[x,x'])=(p,[y,x',p'])$

b/ $\delta_3([q,q'],[x,x',\not{b}])=(p,[y,x',\not{b},p'])$.

5b/ Ha $\delta(q,x)=(p,y)$ és $\delta'(q',x')=(p',L)$, ahol $p\in K$, $p'\in K'$, $y\in\Gamma$, akkor:

a/ $\delta_3([q,q'],[x,x'])=([p,p',-1],[y,x'])$.

b/ $\delta_3([q,q'],[x,x',\not{b}])=([p,p',-1],[y,x',\not{b}])$.

6a/ Ha $\delta(q,x)=(p,L)$ és $\delta'(q',x')=(p',R)$, ahol $p\in K$, $p'\in K'$, akkor:

a/ $\delta_3([q,q'],[x,x'])=(q,[x,x',p'])$.

b/ $\delta_3([q,q'],[x,x',\not{b}])=(q,[x,x',\not{b},p'])$.

6b/ Ha $\delta(q,x)=(p,L)$ és $\delta'(q',x')=(p',y')$, ahol $p\in K$, $p'\in K'$, $y'\in\Gamma'$, akkor:

a/ $\delta_3([q,q'],[x,x'])=([p,p',-2],[x,y'])$.

b/ $\delta_3([q,q'],[x,x',\not{b}])=([p,p',-2],[x,y',\not{b}])$.

III/ Tetszőleges $q \in K$, $q' \in K'$ állapotokra:

1/ $\delta_3([q,q',-i],[x,x'])=([q,q',i],L)$ minden $x \in \Gamma$, $x' \in \Gamma'$ kettesre és $i \in \{1,2\}$ elemre.

2/ $\delta_3([q,q',1],[x,x'])=(q',[x,x',q])$ minden $x \in \Gamma$, $x' \in \Gamma'$ kettesre.

3/ $\delta_3([q,q',2],[x,x'])=(q,[x,x',q'])$ minden $x \in \Gamma$, $x' \in \Gamma'$ kettesre.

4/ $\delta_3([q,q',0],[x,x'])=([q,q'],R)$ minden $x \in \Gamma$, $x' \in \Gamma'$ kettesre.

5/ $\delta_3([q,q',\not{b}],[x,x'])=(\bar{p},R)$ minden $x \in \Gamma$, $x' \in \Gamma'$ kettesre, ahol

$$\bar{p} = \begin{cases} q & \text{ha } q \in H \text{ és } q' \notin H' \\ q & \text{ha } q \notin H \text{ és } q' \in H' \\ [q,q'] & \text{ha } q \notin H \text{ és } q' \notin H' \\ \bar{q} & \text{ha } q \in H \text{ és } q' \in H' \end{cases}$$

IV/ Tetszőleges $q \in K$, $x \in \Gamma$ kettesre:

1/ Ha $\delta(q,x)=(p,y)$, ahol $p \in K$, $y \in \Gamma$, akkor:

a/ $\delta_3(q,[x,x'])=(p,[y,x'])$ minden $x' \in \Gamma'$ elemre.

b/ $\delta_3(q,[x,x',q'])=(p,[y,x',q'])$ minden

$x' \in \Gamma'$, $q' \in K'$ kettesre.

c/ $\delta_3(q,[x,x',\not{b},q'])=(p,[y,x',\not{b},q'])$ minden

$x' \in \ '$, $q' \in K'$ kettesre.

2/ Ha $\delta(q,x) = (p,L)$, ahol $p \in K$, akkor:

a/ $\delta_3(q,[x,x'])=(p,L)$ minden $x' \in \Gamma'$ elemre.

b/ $\delta_3(q,[x,x',q'])=(p,L)$ minden $x' \in \Gamma'$,

$q' \in K'$ kettesre.

c/ $\delta_3(q,[x,x',\not{b},q'])=(p,L)$ minden $x' \in \Gamma'$,

$\bar{q}' \in K'$ kettesre.

3/ Ha $\delta(q,x)=(p,R)$, ahol $p \in K$, akkor:

a/ $\delta_3(q,[x,x'])=(p,R)$ minden $x' \in \Gamma'$ elemre

b/ $\delta_3(q,[x,x',q'])=([p,q',0],[x,x'])$ minden

$x' \in \ '$, $q' \in K'$ kettesre.

c/ $\delta_3(q,[x,x',\not{b},q'])=([p,q',\not{b}],[x,x'])$ minden $x'\in\Gamma$; $q'\in K'$ kettesre

V/ Tetszőleges $q'\in K'$, $x'\in\Gamma'$ kettesre:

1/ Ha $\delta'(q',x')=(p',y')$, ahol $p'\in K'$, $y'\in\Gamma'$, akkor:

a/ $\delta_3(q',[x,x']) = (p',[x,y'])$ minden $x\in\Gamma$ elemre.

b/ $\delta_3(q',[x,x',q])=(p',[x,y',q])$ minden $x\in\Gamma$, $q\in K$ kettesre.

c/ $\delta_3(q',[x,x',\not{b},q])=(p',[x,y',\not{b},q])$ minden $x\in\Gamma$, $q\in K$ kettesre.

2/ Ha $\delta'(q',x')=(p',L)$, ahol $p'\in K'$, akkor:

a/ $\delta_3(q',[x,x'])=(p',L)$ minden $x\in\Gamma$ elemre.

b/ $\delta_3(q',[x,x',q])=(p',L)$ minden $x\in\Gamma$, $q\in K$ kettesre

c/ $\delta_3(q',[x,x',\not{b},q])=(p',L)$ minden $x\in\Gamma$, $q\in K$ kettesre.

3/ Ha $\delta'(q',x')=(p',R)$, ahol $p'\in K'$, akkor:

a/ $\delta_3(q',[x,x'])=(p',R)$ minden $x\in\Gamma$ elemre.

b/ $\delta_3(q',[x,x',q])=([q,p',0],[x,x'])$ minden $x\in\Gamma$, $q\in K$ kettesre.

c/ $\delta_3(q',[x,x',\not{b},q])=([q,p',\not{b}],[x,x'])$ minden $x\in\Gamma$, $q\in K$ kettesre.

VI/ Tetszőleges $q\in K$, $z\in\Gamma$ kettesre:

$$\delta_3(q,z) = \delta(q,z).$$

VII/ Tetszőleges $q\in K_3 - \{\bar{q}\}$, $z\in\Gamma_3$ kettesre:

ha $\delta_3(q,z)$ még nem fordul elő az II/ → VI/ alakúakban, akkor $\delta_3(q,z)=(\bar{q},\bar{z})$.

VIII/ Minden $z\in\Gamma_3 - \{\bar{z}\}$ elemre:

1/ $\delta_3(\bar{q},z)=(\bar{q},\bar{z})$.

2/ $\delta_3(\bar{q},\bar{z})=(\bar{q},R)$.

A δ_3 konstrukciójából az <5.8> Tétel bizonyitásához hasonlóképpen bebizonyithatjuk, hogy tetszőleges $w\in(\Sigma\cap\Sigma^*)$ szóra:

$$\langle 5.10.1\rangle \quad \left\{\begin{array}{l} q_o w \vdash_{M}^{*} \alpha p \\ \\ q_o' w \vdash_{M'}^{*} \alpha' p' \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad [q_o, q_o']w \vdash_{M_3}^{*} [\alpha,\alpha']\bar{p}\ ,$$

ahol $p\in K$, $p'\in K'$, $\alpha\in\Gamma^*$, $\alpha'\in\Gamma'^*$ és

$$\bar{p} = \left\{\begin{array}{lllll} p & \text{ha} & p\in H & \text{és} & p'\notin H' \\ p & \text{ha} & p\notin H & \text{és} & p'\in H' \\ [p,p'] & \text{ha} & p\notin H & \text{és} & p'\notin H' \\ \bar{q} & \text{ha} & p\in H & \text{és} & p'\in H' \end{array}\right.$$

Most bebizonyitjuk: $L(M_3) = L-L'$.

($\Leftarrow$) Belátjuk először, hogy $L-L' \subseteq L(M_3)$.

Legyen $w\in L-L'$. Ekkor három esetet különböztetünk meg.

1. eset. Legyen $w\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$ és $q_o w \vdash_{M}^{*} \alpha p$,

$q_o' w \vdash_{M'}^{*} \alpha' q'$, ahol $p\in H$, $q'\notin H'$, $\alpha\in\Gamma^*$,

$\alpha'\in\Gamma'^*$.

Az <5.10.1> állításból nyilván $[q_0,q_0']w \overset{*}{\underset{M_3}{\vdash}} [\alpha,\alpha']p$ adódik, azaz $w\in L(M_3)$.

2.eset. Legyen $w=w_1aw_2$, ahol $w_1\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$, $a\in\Sigma\cup\Sigma'$, $w_2\in(\Sigma\cup\Sigma')^*$, és

$$\begin{cases} q_0w_1aw_2 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha_1q_1aw_2 \underset{M}{\vdash} \alpha_1qzw_2 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \bar{\alpha}_1\alpha_2p, & \text{ahol } p\in H. \\ q_0w_1 \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \alpha_1'p', & \text{ahol } p'\in H'. \end{cases}$$

Ismét használjuk az <5.10.1> állítást és kapjuk:

$$[q_0,q_0']w_1aw_2 \overset{*}{\underset{M_3}{\vdash}} [\alpha_1,\alpha_1']q_1aw_2 \underset{M_3}{\vdash} [\alpha_1,\alpha_1']qzw_2 \overset{*}{\underset{M_3}{\vdash}} [\bar{\alpha}_1,\alpha_1']\alpha_2p,$$

azaz $w=w_1aw_2\in L(M_3)$.

3. eset. Legyen $w=w_1aw_2$, ahol $w_1\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$, $a\in\Sigma-\Sigma'$, $w_2\in(\Sigma\cup\Sigma')^*$, és

$$\begin{cases} q_0w_1aw_2 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha_1q_1aw_2 \underset{M}{\vdash} \alpha_1qzw_2 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \bar{\alpha}_1\alpha_2p, & \text{ahol } p\in H. \\ q_0'w_1 \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \alpha_1'q_1', & \text{ahol } q_1\notin H'. \end{cases}$$

Hasonlóképpen könnyü belátnunk:

$$[q_0,q_0']w_1aw_2 \overset{*}{\underset{M_3}{\vdash}} [\alpha_1,\alpha_1'][q_1,q_1']aw_2 \underset{M_3}{\vdash} [\alpha_1,\alpha_1']qzw_2 \overset{*}{\underset{M_3}{\vdash}}$$

$$\overset{*}{\underset{M_3}{\vdash}} [\bar{\alpha}_1,\alpha_1']\alpha_2 p.$$

Eszerint: $w = w_1aw_2 \in L(M_3)$.

Mindhárom esetben beláttuk: $w \in L(M_3)$ valahányszor $w \in L-L'$, azaz $L-L' \subseteq L(M_3)$.

($\Rightarrow$) Megforditva bebizonyitjuk, hogy $L(M_3) \subseteq L-L'$. Ehhez elég megmutatnunk: ha $w \notin L-L'$, akkor $w \notin L(M_3)$. Világos, hogy ha $w \notin L$, akkor $w \notin L(M_3)$, mivel az M és M_3 végállapothalmazai egymással azonosak. Nézzük tehát a $w \in L \cap L'$ esetet, vagyis:

$$\begin{cases} q_0 w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha p, & \text{ahol} \quad p \in H \\ \\ q_0' w \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \alpha' p', & \text{ahol} \quad p' \in H' \end{cases}$$

Az <5.10.1> állitásból nyilván $[q_0,q_0']w \overset{*}{\underset{M_3}{\vdash}} [\alpha,\alpha']\bar{q}$ adódik, azaz $w \notin L(M_3)$.

Végeredményben kapjuk: $L(M_3)=L-L'$.

b/ Az LpL' nyelv elfogadására konstruáljuk az

$M_4=(\Gamma_3,K_3,\Sigma\ \ \Sigma',\delta_4,[q_0,q_0'],H)$ EDLK-gépet úgy, hogy a

δ_4 átmenetfüggvényre szimuláljuk a δ_3 minden alakját,

kivéve a III/5 alakot, amelyet helyettesitsünk a következő kifejezéssel:

III,b/ Tetszőleges $[q,q']\in K\times K'$ elemre, $[x,x']\in\Gamma\times\Gamma'$ elemre:

5/ $\delta_4[q,q',\not{s}],[x,x'])=(\bar{p},R)$, ahol

$$\bar{p}=\begin{cases} q & \text{ha } q\in H \\ \bar{q} & \text{ha } q\notin H \text{ és } q'\in H' \\ [q,q'] & \text{ha } q\notin H \text{ és } q'\notin H'. \end{cases}$$

Az a/ rész bizonyitásához hasonlóan beláthatjuk, hogy az $L(M_4)=LpL'$ egyenlőség fennáll.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

<u>5.11. Tétel.</u> Ha $L,L\in \mathcal{L}_{ed_1}$, akkor az $L\cup pL'$ nyelv ed_1-tipusú.

Bizonyitás. Legyen $L=L(M)$ és $L'=L(M')$, ahol $M=(\Gamma,K,\Sigma,\delta,q_o,H)$ és $M'=(\Gamma',K',\Sigma',\delta',q_o',H')$ két EDLK-gép. Az általánosság megszoritása nélkül továbbá feltehető, hogy $K\cap K'=\Gamma\cap\Gamma'=\emptyset$. Most konstruálunk olyan M_5 EDLK-gépet, amelyre $L(M_5)=L\cup pL'$.

Legyen az $M_5=(\Gamma_5,K_5,\Sigma\cup\Sigma',\delta_5,[q_o,q_o'],H_5)$ EDLK-gép a következő módon definiálva:

$$\Gamma_5=\Gamma\cup\Gamma'\cup\{[z,z'],[z,z',q],[z,z',\not b],[z,z',\not b,q]\mid z\in\Gamma,z'\in\Gamma',$$

$$q\in K\cup K'\}\cup\{\bar z\},\ \text{ahol}\ \bar z\notin\Gamma\cup\Gamma',$$

$$K_5=K\cup K'\cup\{[q,q'],[q,q',\not b],[q,q',i]\mid q\in K,\ q'\in K',$$

$$i\in\{-1,-1,0,1,2\}\ \}\cup\{\bar q,q_h\},\ \text{ahol}\ \bar q,\ q_h\notin K\cup K'$$

$$H_5=H\cup H'\cup\{q_h\},$$

a δ_5 átmenetfüggvény a következő:

I/ 1. Tetszőleges $q\in K-H$, $q'\in K'-H'$ kettesre:

a/ Tetszőleges $b\in\Sigma\cap\Sigma'$ elemre:

ha $\delta(q,b)=(p,z)$ és $\delta'(q',b)=(p',z')$, akkor

$\delta_5([q,q'],b)=([p,p'],[z,z',\not b])$, ahol $p\in K$, $p'\in K'$, $z\in\Gamma$, $z'\in\Gamma'$.

b/ Tetszőleges $a \in \Sigma - \Sigma'$ elemre:

$$\delta_5([q,q'],a) = \delta(q,a)$$

c/ Tetszőleges $a' \in \Sigma' - \Sigma$ elemre:

$$\delta_5([q,q'],a') = \delta'(q',a').$$

2. Tetszőleges $q \in K-H$ állapotra:

$$\delta_5(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{ha} \quad a \in \Sigma \\ (\bar{q},\bar{z}) & \text{ha} \quad a \in \Sigma' - \Sigma \end{cases}$$

3. Tetszőleges $q' \in K' - H'$ állapotra:

$$\delta_5(q',a') = \begin{cases} \delta'(q',a') & \text{ha} \quad a' \in \Sigma' \\ (\bar{q},\bar{z}) & \quad a' \in \Sigma - \Sigma' \end{cases}$$

4. Minden $q \in K_5 - K - K' - \{[q,q'] \mid q \in K-H, q' \in K'-H'\} - \{q_h\}$,

$a \in \Sigma \cup \Sigma'$ kettesre:

$$\delta_5(q,a) = (\bar{q},\bar{z}).$$

II/ Tetszőleges $q \in K$, $x \in \Gamma$, $q' \in K'$, $x' \in \Gamma'$ négyesre,

1. Ha $\delta(q,x)=(p,y)$ és $\delta'(q',x')=(p',y')$,

   ahol $p \in K$, $p' \in K'$, $y \in \Gamma$, $y' \in \Gamma'$,

   akkor:

   a/ $\delta_5([q,q'],[x,x']) = ([p,p'],[y,y'])$.

   b/ $\delta_5([q,q'],[x,x',\not{b}])=([p,p'],[y,y',\not{b}])$.

2. Ha $\delta(q,x)=(p,L)$ és $\delta'(q',x')=(p',L)$, ahol

   $p \in K$, $p' \in K'$, akkor:

   a/ $\delta_5([q,q'],[x,x'])=([p,p'],L)$.

   b/ $\delta_5([q,q'],[x,x',\not{b}])=([p,p'],L)$.

3. Ha $\delta(q,x)=(p,R)$ és $\delta'(q',x')=(p',R)$, ahol

   $p \in K$, $p' \in K'$ akkor:

   a/ $\delta_5\ ([q,q'],[x,x'])=([p,p'],R)$.

   b/ $\delta_5\ ([q,q'],[x,x',\not{b}])=([p,p',\not{b}],[x,x'])$.

4a/ Ha $\delta(q,x)=(p,R)$ és $\delta'(q',x')=(p',y')$, ahol $p\in K$, $p'\in K'$, $y'\in\Gamma'$, akkor:

a/ $\delta_5([q,q'],[x,x'])=(p',[x,y',p])$.

b/ $\delta_5([q,q'],[x,x',\not b])=(p',[x,y',\not b,p])$.

4b/ Ha $\delta(q,x)=(p,R)$ és $\delta'(q',x')=(p',L)$, ahol $p\in K$, $p'\in K'$, akkor:

a/ $\delta_5([q,q'],[x,x'])=(q',[x,x',p])$.

b/ $\delta_5([q,q'],[x,x',\not b])=(q',[x,x',\not b,p])$.

5a/ Ha $\delta(q,x)=(p,y)$ és $\delta'(q',x')=(p',R)$, ahol $p\in K$, $y\in\Gamma$, $p'\in K'$, akkor:

a/ $\delta_5([q,q'],[x,x'])=(p,[y,x',p'])$.

b/ $\delta_5([q,q'],[x,x',\not b])=(p,[y,x',\not b,p'])$.

5b/ Ha $\delta(q,x)=(p,y)$ és $\delta'(q',x')=(p',L)$, ahol

$p\in K$, $y\in\Gamma$, $p'\in K'$, akkor:

a/ $\delta_5([q,q'],[x,x'])=([p,p',-1],[y,x'])$.

b/ $\delta_5([q,q'],[x,x',\not{s}])=([p,p',-1],[y,x',\not{s}])$.

6a/ Ha $\delta(q,x)=(p,L)$ és $\delta'(q',x')=(p',R)$, ahol

$p\in K$, $p'\in K'$, akkor:

a/ $\delta_5([q,q'],[x,x'])=(q,[x,x',p'])$.

b/ $\delta_5([q,q'],[x,x',\not{s}])=(q,[x,x',\not{s},p'])$.

6b/ Ha $\delta(q,x)=(p,L)$ és $\delta'(q',x')=(p',y')$, ahol

$p\in K$, $p'\in K'$, $y'\in\Gamma$, akkor:

a/ $\delta_5([q,q'],[x,x'])=([p,p',-2],[x,y'])$.

b/ $\delta_5\ [q,q'],[x,x',\not{s}])=([p,p',-2],[x,y',\not{s}])$.

III/ Tetszőleges $q\in K$, $q'\in K'$ állapotokra:

1/ $\delta_5([q,q',-i],[x,x'])=([q,q',i],L)$, minden

$x\in\Gamma$, $x'\in\Gamma'$ kettesre és $i\in\{1,2\}$ számra.

2/ $\delta_5([q,q',1],[x,x'])=(q',[x,x',q])$ minden

$x\in\Gamma$, $x'\in\Gamma'$ kettesre.

3/ $\delta_5([q,q',2],[x,x'])=(q,[x,x',q'])$ minden

$x\in\Gamma$, $x'\in\Gamma'$ kettesre.

4/ $\delta_5([q,q',0],[x,x'])=([q,q'],R)$ minden

$x\in$, $x'\in\Gamma'$ kettesre.

5/ $\delta_5([q,q',\not{s}],[x,x'])=(\bar{p},R)$ minden $x\in\Gamma$, $x'\in\Gamma'$

kettesre, ahol

$$\bar{p} = \begin{cases} q_h & \text{ha } q\in H \text{ vagy } q'\in H' \\ [q,q'] & \text{ha } q\notin H \text{ és } q'\notin H' \end{cases}$$

IV/ Tetszőleges $q\in K$, $x\in\Gamma$ kettesre:

1/ Ha $\delta(q,x)=(p,y)$, ahol $p\in K$, $y\in\Gamma$, akkor:

a/ $\delta_5(q,[x,x'])=(p,[y,x'])$ minden $x'\in\Gamma'$ elemre.

b/ $\delta_5(q,[x,x',q'])=(p,[y,x',q'])$ minden $x'\in\Gamma'$, $q'\in K'$ elemre.

c/ $\delta_5(q,[x,x',\not{b},q'])=(p,[y,x',\not{b},q'])$ minden $x'\in\Gamma'$, $q'\in K'$ kettesre.

2/ Ha $\delta(q,x)=(p,L)$, ahol $p\in K$, akkor:

a/ $\delta_5(q,[x,x'])=(p,L)$ minden $x'\in\Gamma'$ elemre.

b/ $\delta_5(q,[x,x',q'])=(p,L)$ minden $x'\in\Gamma'$, $q'\in K'$ kettesre.

c/ $\delta_5(q,[x,x',\not{b},q'])=(p,L)$ minden $x'\in\Gamma'$, $q'\in K'$ kettesre.

3/ Ha $\delta(q,x)=(p,R)$, ahol $p\in K$, akkor:

a/ $\delta_5(q,[x,x'])=(p,R)$ minden $x'\in\Gamma'$ elemre.

b/ $\delta_5(q,[x,x',q'])=([p,q',0],[x,x'])$ minden $x'\in\Gamma'$, $q'\in K'$ kettesre.

c/ $\delta_5(q,[x,x',\not{b},q'])=([p,q',\not{b}],[x,x'])$ minden $x'\in\Gamma'$, $q'\in K'$ kettesre.

V/ Tetszőleges $q'\in K'$, $x'\in\Gamma'$ kettesre:

1/ Ha $\delta'(q',x')=(p',y')$, ahol $p'\in K'$, $y'\in\Gamma'$, akkor:

a/ $\delta_5(q', [x, x']) = (p', [x, y'])$ minden $x \in \Gamma$ elemre.

b/ $\delta_5(q', [x, x', q]) = (p', [x, y', q])$ minden $x \in \Gamma$, $q \in K$ kettesre.

c/ $\delta_5(q', [x, x', \not{b}, q]) = (p', [x, y', \not{b}, q])$ minden $x \in K$, $q \in K$ kettesre.

2/ Ha $\delta'(q', x') = (p', L)$, ahol $p' \in K'$, akkor:

a/ $\delta_5(q', [x, x']) = (p', L)$ minden $x \in \Gamma$ elemre.

b/ $\delta_5(q', [x, x', q]) = (p', L)$ minden $x \in \Gamma$, $q \in K$ kettesre.

c/ $\delta_5(q', [x, x', \not{b}, q]) = (p', L)$ minden $x \in \Gamma$, $q \in K$ kettesre.

3/ Ha $\delta'(q', x') = (p', R)$, ahol $p' \in K'$, akkor:

a/ $\delta_5(q', [x, x']) = (p', R)$ minden $x \in \Gamma$ elemre.

b/ $\delta_5(q', [x, x', q]) = ([q, p', 0], [x, x'])$ minden $x \in \Gamma$, $q \in K$ kettesre.

c/ $\delta_5(q', [x, x', \not{b}, q]) = ([q, p', \not{b}], [x, x'])$ minden $x \in \Gamma$, $q \in K$ kettesre.

VI/ Tetszőleges $q \in K$, $Z \in \Gamma$ kettesre:

$$\delta_5(q,Z)=\delta(q,Z).$$

VII/ Tetszőleges $q' \in K'$, $Z \in \Gamma'$ kettesre:

$$\delta_5(q',Z')=\delta'(q',Z').$$

VIII/ Tetszőleges $q \in K_5-\{\bar{q}\}$, $Z \in \Gamma_5$ kettesre:

ha $\delta_5(q,Z)$ még nem fordul elő a II/ → VII/ alakúakban,

akkor $\delta_5(q,Z)=(\bar{q},\bar{Z})$.

IX/ Minden $Z \in \Gamma_5-\{\bar{Z}\}$ elemre:

1/ $\delta_5(\bar{q},Z)=(\bar{q},\bar{Z})$.

2/ $\delta_5(\bar{q},\bar{Z})=(\bar{q},R)$.

A δ_5 konstrukciójából az 5.8. Tétel bizonyitásához hasonlóképpen bebizonyithatjuk, hogy tetszőleges $w \in (\Sigma \cap \Sigma')^*$ szóra:

$$\langle 5.11.1\rangle \quad \left\{\begin{array}{l} q_o w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha p \\ \\ q_o' w \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \alpha' p' \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad [q_o, q_o']w \overset{*}{\underset{M_5}{\vdash}} [\alpha,\alpha']\bar{p} \ ,$$

ahol $p \in K$, $p' \in K'$, $\alpha \in \Gamma^*$, $\alpha' \in \Gamma'^*$ és

$$\bar{p} = \begin{cases} q_h & \text{ha} \quad p \in H \text{ vagy } p' \in H' \\ [p,p'] & \text{ha} \quad p \notin H \text{ és } p' \notin H'. \end{cases}$$

Most bebizonyitjuk: $L(M_5) = L \cup_p L'$.

(<=) Belátjuk először, hogy $L \cup_p L' \subseteq L(M_5)$.

Mivel $L \cup_p L' = (L_p L') \cup (L'_p L)$, azért tegyük fel, hogy

$w \in L_p L'$. (A $w \in L'_p L$ esetet hasonlóképpen bizonyithatjuk.)

Ekkor két esetet különböztetünk meg:

1. eset. Legyen $w \in (\Sigma \cap \Sigma')^*$ és $q_o w \vdash_M^* \alpha p$ ill.

$q'_o w \vdash_{M'}^* \alpha' p'$, ahol $p \in H$, $\alpha \in \Gamma^*$, $p' \in K'$, $\alpha' \in \Gamma'^*$.

Az <5.11.1> állitásból nyilván $[q_o, q_o] w \vdash_{M_5}^* [\alpha, \alpha'] q_h$

adódik, ahol $q_h \in H_5$. Eszerint: $w \in L(M_5)$.

2. eset. Legyen $w=w_1aw_2$, ahol $w_1\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$, $a\in\Sigma-\Sigma'$, $w_2\in(\Sigma\cup\Sigma')^*$, és

$$\begin{cases} q_0w_1aw_2 \vdash_M^* \alpha_1q_1aw_2 \vdash \alpha_1qzw_2 \vdash_M^* \bar{\alpha}_1\alpha p, & \text{ahol } p\in H. \\ q_0'w_1 \vdash_{M'}^* \alpha_1'q_1', & \text{ahol } q_1'\notin H'. \end{cases}$$

Ismét használjuk az <5.11.1> állitást és kapjuk:

$$[q_0,q_0']w_1aw_2 \vdash_{M_5}^* [\alpha_1,\alpha_1'][q_1,q_1']aw_2 \vdash_{M_5} [\alpha_1,\alpha_1']qZw_2 \vdash_{M_5}^* [\bar{\alpha}_1,\alpha_1']\alpha p,$$

ahol $p\in H_5$, azaz $w\in L(M_5)$.

Ezek szerint: $w\in L(M_5)$ valahányszor $w\in L\cup_p L'$, vagyis $L\cup_p L'\subseteq L(M_5)$.

(=>). Megforditva bebizonyitjuk, hogy $L(M_5)\subseteq L\cup_p L'$. Ehhez elég megmutatnunk: ha $w\notin L\cup_p L'$, akkor $w\notin L(M_5)$. Világos, hogy ha $w\notin L\cup L'$, akkor $w\notin L(M_5)$. Nézzük tehát a $w\in L\cup L'-(L\cup_p L')$ esetet. Legyen $w\in L-(L_p L')$. (A $w\in L'-(L_p' L)$ esetet hasonlóképpen bizonyithatjuk.)

Ekkor léteznek olyan $y\neq\lambda$, x szavak, amelyekre $w=xy$ és $w\in L$ ill. $x\in L'$, vagyis:

$$\begin{cases} q_0 xy \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha q y \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \bar{\alpha}\beta p, & \text{ahol} \quad p \in H, \quad q \in K-H. \\ \\ q_0' x \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} \alpha' p', & \text{ahol} \quad p' \in H' \end{cases}$$

Megint használjuk az <5.11.1> állítást és kapjuk:

$$[q_0, q_0']x \overset{*}{\underset{M_5}{\vdash}} [\alpha, \alpha']q_h, \quad \text{ahol} \quad q_h \in H_5.$$

Eszerint: $x \in L(M_5)$. Ebből rögtön következik, hogy $w = xy \notin L(M_5)$, mivel az $L(M_5)$ nyelv prefix-mentes és $y \neq \lambda$.

Végeredményben tehát az $L(M_5) = L \cup_p L'$ egyenlőség áll fenn.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

<u>5.12. Tétel.</u> Legyen Σ, Δ két diszjunkt véges abácé, és $w \in \Delta^*$ valamely rögzitett szó.

Az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv akkor és csak akkor ed_1-tipusú, ha a $h_w(L) \subseteq (\Sigma \cup \Delta)^*$ nyelv ed_1-tipusú.

Bizonyitás. Amennyiben $L = \{\lambda\}$ vagy $w = \lambda$, akkor nincs mit bebizonyitanunk. Legyen tehát $L \neq \{\lambda\}$ és $w = d_1 \dots d_n$, ahol $n \geq 1$ és $d_1, \dots, d_n \in \Delta$.

1. rész. Ha $L \in \mathcal{L}_{ed_1}$, akkor $h_w(L) \in \mathcal{L}_{ed_1}$.

Legyen $L=L(M)$, ahol $M=(\Gamma,K,\Sigma,\delta,q_0,H)$ egy EDLK-gép. A következő módon konstruáljuk azt az $M'=(\Gamma',K',\Sigma',\delta',q_0,H)$ EDLK-gépet, amely a $h_\omega(L)$ nyelvet fogadja el.

$$\Gamma' = \Gamma\cup\{[z,\not{b}]\,|\,z\in\Gamma\}\cup\{A\},\quad \text{ahol } A\notin\Gamma,$$

$$K' = K\cup\{q_{d_1},\ldots,q_{d_n}\,|\,q\in K\}\cup\{[q,i]\,|\,q\in K, i\in\{-1,1\}\}\cup\{\bar{q}\},$$

ahol $\bar{q}\notin K$,

$$\Sigma' = \Sigma\cup\{d_1,\ldots,d_n\}$$

a δ' átmenetfüggvény a következő:

I. 1/ Tetszőleges $q\in K-H$ állapotra:

a/ Tetszőleges $a\in\Sigma$ elemre:

ha $\delta(q,a)=(p,Z)$, akkor $\delta'(q,a)=(p,[Z,\not{b}])$,

ahol $p\in K$, $Z\in\Gamma$.

b/ Minden $a'\in\{d_1,\ldots,d_n\}$ elemre: $\delta'(q,a')=(\bar{q},A)$.

2/ Tetszőleges $q\in K$ állapotra, $i\in\{1,\ldots,n\}$ számra.

$$\delta'(q_{d_i},a) = \begin{cases} (q_{d_i}, A) & \text{ha } a=d_i \\ (\bar{q},A) & \text{ha } a\in\Sigma'-\{d_i\} \end{cases}$$

3/ Minden $q \in K'-K-\{q_{d_1},\ldots,q_{d_n} | q \in K\}, a \in \Sigma'$ kettesre:

$$\delta'(q,a)=(\bar{q},A).$$

II/ Tetszőleges $q \in K$, $x \in \Gamma$ kettesre:

1/ Ha $\delta(q,x)=(p,y)$, ahol $p \in K$, $y \in \Gamma$, akkor:

a/ $\delta'(q,x)=(p,y)$

b/ $\delta'(q,[x,\not{b}])=(p,[y,\not{b}])$.

2/ Ha $\delta(q,x)=(p,L)$, ahol $p \in K$, akkor:

a/ $\delta'(q,x)=([p,-1],L)$.

b/ $\delta'(q,[x,\not{b}])=([p,-1],L)$.

3/ Ha $\delta(q,x)=(p,R)$, ahol $p \in K$, akkor:

a/ $\delta'(q,x)=([p,1],R)$

b/ $\delta'(q,[x,\not{b}])=(p_{d_1},x)$

4/ $\delta'(q,A)=(\bar{q},A)$.

III/ Tetszőleges $q\in K$ állapotra:

1/ $\delta'([q,i],x)=(q,x)$ minden $x\in\Gamma$-ra, $i\in\{-1,1\}$ számra.

2/ $\delta'([q,i],[x,\not{s}])=(q,[x,\not{s}])$ minden $x\in\Gamma$-ra, $i\in\{-1,1\}$ számra.

3/ $\delta'([q,-1],A)=([q,-1],L)$.

4/ $\delta'([q,1],A)=([q,1],R)$.

IV/ Tetszőleges $q\in K$ állapotra, $i\in\{2,3,\dots,n-1\}$ egész számra:

1/

$$\delta'(q_{d_1},x)=\begin{cases}(q_{d_1},R) & \text{ha } x\in\Gamma\\ (q_{d_2},R) & \text{ha } x=A\\ (\bar{q},A) & \text{ha } x\in\Gamma'-\Gamma-\{A\}.\end{cases}$$

2/

$$\delta'(q_{d_i},x)=\begin{cases}(q_{d_i+1},R) & \text{ha } x=A\\ (\bar{q},A) & \text{ha } x\in\Gamma'-\{A\}.\end{cases}$$

3/ $$\delta'(q_{dn},x) = \begin{cases} (q,R) & x=A \\ (\bar{q},A) & x\in\Gamma'-\{A\}. \end{cases}$$

V/ Minden $x\in\Gamma'-\{A\}$ elemre:

1/ $\delta'(\bar{q},x) = (\bar{q},A)$.

2/ $\delta'(\bar{q},A) = (\bar{q},R)$.

Most bebizonyitjuk: $L(M') = h_\omega(L)$.

Először az egyszerüség kedvéért a h_ω homomorfizmushoz hasonlóképpen definiáljuk a $h_{A^n}: \Gamma^*\to(\Gamma\cup\{A\})^*$ homomorfizmust.

1/ $h_{A^n}(\lambda) = \lambda$.

2/ $h_{A^n}(x) = x\,A^n$ tetszőleges $x\in\Gamma$ elemre.

3/ $h_{A^n}(\alpha_1\alpha_2) = h_{A^n}(\alpha_1)\,h_{A^n}(\alpha_2)$ tetszőleges $\alpha_1,\alpha_2\in\Gamma^*$

szavakra.

Ekkor, a δ' konstrukciójából könnyen beláthatjuk, hogy tetszőleges $\alpha_1,\alpha_2\in\Gamma^*$ szavakra:

<5.12.1> $\alpha_1 q\alpha_2 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha p \iff h_{A^n}(\alpha_1)q h_{A^n}(\alpha_2) \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} h_{A^n}(\alpha)[p,1]$,

ahol $q,p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*$

Ennek a segitségével hasonlóan megvizsgálhatjuk, hogy tetszőleges $\alpha \in \Gamma^*$ szóra, $a \in \Sigma$-ra:

<5.12.1> $\alpha q a \vdash_M^* \beta Z p \iff h_{A^n}(\alpha) q a \vdash_{M'}^* h_{A^n}(\beta) Z p_{d_1}$,

ahol $q,p \in K$, $Z \in \Gamma$, $\beta \in \Gamma^*$.

Ezek után indukcióval bebizonyitjuk, hogy tetszőleges $u \in \Sigma^*$ szóra:

<5.12.3> $q_0 u \vdash_M^* \alpha p \iff q_0 h_w(u) \vdash_{M'}^* h_{A^n}(\alpha) p$,

ahol $p \in K$, $\alpha \in \Gamma^*$.

A $w=a \in \Sigma$ esetben az <5.12.1> és <5.12.2> állitásokból kapjuk:

$$q_0 a \vdash_M^* Zp \iff q_0 a d_1 \ldots d_n \vdash_{M'}^* Z p_{d_1} d_1 \ldots d_n \vdash_{M'}^* Z A^n p,$$

azaz az állitás már igaz.

Most tegyük fel, hogy az állitás minden $u \in \Sigma^*$ n hosszúságú szóra igaz, és foglalkozunk az $u=u_1 a \in \Sigma^*$ szóval, ahol $|u_1|=n$ és $a \in \Sigma$.

Legyen $q_0 u_1 a \vdash_M^* \alpha_1 q_1 a \vdash_M^* \alpha_2 q Z \vdash_M \alpha p$, ahol $\alpha = \alpha_2 Z$,

ami azt jelenti, hogy az utolsó lépésben használjuk a $\delta(q,z)=(p,R)$ kifejezést. Először az indukciós feltevés szerint kapjuk:

$$q_o u_1 \vdash_{M}^{*} \alpha_1 q_1 \iff q_o h_w(u_1) \vdash_{M'}^{*} h_{A^n}(\alpha_1) q_1 .$$

A folytatásban könnyen belátjuk:

$$\{\alpha_1 q_1 a \vdash_{M}^{*} \alpha_2 q Z \vdash_{M} \alpha_2 Z p\} \iff \{h_{A^n}(\alpha_1) q_1 a d_1 \ldots d_n \vdash_{M'}^{*} h_{A^n}(\alpha_2) Z p_{d_1} d_1 \ldots d_n$$

$$\vdash_{M'}^{*} h_{A^n}(\alpha_2 Z) p\} ,$$

ahol $h_{A^n}(\alpha_2 Z) = h_{A^n}(\alpha_2) Z A^n = h_{A^n}(\alpha)$.

Ezek szerint: az állitás tetszőleges $u = u_1 a \in \Sigma^*$ $(n+1)$ hosszúságú szóra is igaz.

Végeredményben az <5.12.3> állitás segitségével könnyen belátjuk, hogy tetszőleges $u \in \Sigma^*$ szóra:

$$u \in L(M) \iff q_o u \vdash_{M}^{*} \alpha p, \quad \text{ahol} \quad p \in H, \quad \alpha \in \Gamma^* .$$

$$\iff q_o h_w(u) \vdash_{M'}^{*} h_{A^n}(\alpha) p, \quad \text{ahol} \quad p \in H.$$

$$\iff h_w(u) \in L(M'),$$

azaz $L(M') = h_w(L)$. Tehát: $h_w(L) \in \mathcal{L}_{ed_1}$.

2. rész. Ha $h_w(L)\in \mathcal{L}_{ed_1}$, akkor $L\in \mathcal{L}_{ed_1}$.

Legyen $h_w(L)=L(M)$, ahol $M=(\Gamma,K,\Sigma\cup\{d_1,\ldots,d_n\},\delta,q_o,H)$ egy EDLK-gép. Most konstruálunk olyan M' EDLK-gépet, amelyre $L=L(M')$.

Legyen az $M'=(\Gamma',K',\Sigma,\delta',[q_o,o],H')$ EDLK-gép a következő módon definiálva:

$\Gamma' = \{[x_o,x_1,\ldots,x_n] \mid x_o,x_1,\ldots,x_n\in\Gamma\cup\{d_1,\ldots,d_n\}\}\cup\{\bar{Z}\}$,

$K' = \{[q,i] \mid q\in K,\ i\in\{0,1,\ldots,n\}\}\cup\{\bar{q}\}$,

$H' = \{[p,o] \mid p\in H\}$,

a δ' átmenetfüggvény a következő:

I/ 1/ Tetszőleges $q\in K-H$, $a\in\Sigma$ kettesre:

Ha $\delta(q,a)=(p,Z)$, akkor $\delta'([q,o],a)=([p,o],[Z,d_1,\ldots,d_n])$.

2/ Minden $q\in K'-\{[q,o] \mid q\in K\}, a\in\Sigma$ kettesre:

$\delta'(q,a)=(\bar{q},\bar{Z})$.

II/ Tetszőleges $q\in K$ állapotra, $Z\in\Gamma\cup\{d_1,\ldots,d_n\}$ elemre, $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ egész számra:

1/ Ha $\delta(q,Z)=(p,y)$, ahol $p\in K$, $y\in\Gamma$, akkor:

a/ $\delta'([q,o],[Z,x_1,\ldots,x_n])=([p,o],[y,x_1,\ldots,x_n])$

minden $x_1,\ldots,x_n\in\Gamma\cup\{d_1,\ldots,d_n\}$ elemre,

b/ $\delta'([q,i],[x_o,\ldots,x_{i-1},Z,x_{i+1},\ldots,x_n]) =$

$= ([p,i],[x_o,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n])$

minden $x_o,\ldots,x_{i-1}, x_{i+1},\ldots,x_n\in\Gamma\cup\{d_1,\ldots,d_n\}$ elemre.

c/ $\delta'([q,n],[x_o,\ldots,x_{n-1},Z])=([p,n],[x_o,\ldots,x_{n-1},y])$

minden $x_o,\ldots,x_{n-1}\in\Gamma\cup\{d_1,\ldots,d_n\}$ elemre.

2/ Ha $\delta(q,Z)=(p,L)$, ahol $p\in K$, akkor:

a/ $\delta'([q,o],[Z,x_1,\ldots,x_n])=([p,n],L)$

minden $x_1,\ldots,x_n\in\Gamma\cup\{d_1,\ldots,d_n\}$ elemre.

b/ $\delta'([q,i],[x_o,\ldots,x_{i-1},Z,x_{i+1},\ldots,x_n])=$

$=([p,i-1],[x_o,\ldots,x_{i-1},Z,x_{i+1},\ldots,x_n])$

minden $x_o,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\in\Gamma\cup\{d_1,\ldots,d_n\}$ elemre.

c/ $\delta'([q,n],[x_0,\dots,x_{n-1},Z])=([p,n-1],[x_0,\dots,x_{n-1},Z])$

minden $x_0,\dots,x_{n-1}\in\Gamma\cup\{d_1,\dots,d_n\}$ elemre.

3/ Ha $\delta(q,Z)=(p,R)$, ahol $p\in K$, akkor:

a/ $\delta'([q,o],[Z,x_1,\dots,x_n])=([p,1],[Z,x_1,\dots,x_n])$

minden $x_1,\dots,x_n\in\Gamma\cup\{d_1,\dots,d_n\}$ elemre.

b/ $\delta'([q,i],[x_0,\dots,x_{i-1},Z,x_{i+1},\dots,x_n])=$

$=([p,i+1],[x_0,\dots,x_{i-1},Z,x_{i+1},\dots,x_n])$

minden $x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n\in\Gamma\cup\{d_1,\dots,d_n\}$ elemre.

c/ $\delta'([q,n],[x_0,\dots,x_{n-1},Z])=([p,o],R)$

minden $x_0,\dots,x_{n-1}\in\Gamma\cup\{d_1,\dots,d_n\}$ elemre.

4/ Tetszőleges $q\in K'-\{\bar{q}\}$, $Z\in\Gamma'$ kettesre ha $\delta'(q,Z)$ még nem fordul elő a II/1 → II/3 alakúakban, akkor

$\delta'(q,Z)=(\bar{q},\bar{Z})$.

III/ Minden $Z\in\Gamma'-\{\bar{Z}\}$ elemre:

1/ $\delta'(\bar{q},Z)=(\bar{q},\bar{Z})$.

2/ $\delta'(\bar{q},\bar{Z})=(\bar{q},R)$.

Most bebizonyitjuk: $L(M')=L$.

Az egyszerüség kedvéért használjuk a következő jelöléseket:

i/ $\Gamma^*(n+1)=\{\alpha\in\Gamma^* \mid |\alpha|=k(n+1)$, ahol $k\geq o$ egész szám$\}$.

ii/ Tetszőleges $\alpha=x_{1,i},\ldots,x_{1,n+1},\ldots\ldots,x_{m,1},\ldots,x_{m,n+1}\in\Gamma^*(n+1)$

szóra: $[\alpha]_{n+1}=[x_{1,i},\ldots,x_{1,n+1}]\ldots[x_{m,1},\ldots,x_{m,n+1}]$.

A δ' konstrukcióból könnyen belátjuk, hogy tetszőleges $\alpha_1,\alpha_2\in\Gamma^*(n+1)$ szóra:

$$\alpha_1 q\alpha_2 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha p \iff [\alpha_1]_{n+1}[q,o][\alpha_2]_{n+1} \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} [\alpha]_{n+1}[p,o],$$

ahol $q,p\in K$, $\alpha\in\Gamma^*(n+1)$.

Ebből könnyen belátjuk, hogy tetszőleges $\alpha\in\Gamma^*(n+1)$ szóra, $a\in\Sigma$-ra:

$$\alpha q a d_1 \dots d_n \vdash_M^* \beta p \iff [\alpha]_{n+1}[q,o]a \vdash_{M'}^* [\beta]_{n+1}[p,o].$$

Továbbá az 1/ részhez hasonlóan indukcióval bebizonyithatjuk, hogy tetszőleges $u \in \Sigma^*$ szóra:

$$q_o h_w(u) \vdash_M^* \alpha p \iff [q_o,o]u \vdash_{M'}^* [\alpha]_{n+1}[p,o],$$

ahol $p \in K$, $\alpha \in \Gamma^*(n+1)$.

Végeredményben tehát kapjuk, hogy tetszőleges $u \in \Sigma^*$ szóra:

$$h_w(u) \in L(M) \iff q_o h_w(u) \vdash_M^* \alpha p, \text{ ahol } p \in H,\ \alpha \in \Gamma^*(n+1).$$

$$\iff [q_o,o]u \vdash_{M'}^* [\alpha]_{n+1}[p,o], \text{ ahol } [p,o] \in H'$$

$$\iff u \in L(M').$$

Eszerint: $L(M')=L$, azaz $L \in \mathcal{L}_{ed_1}$.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

6. Fejezet

EGYSZERÜ DETERMINISZTIKUS TURING-GÉPEK

Ebben a fejezetben a determinisztikus Turing-gépek egy speciális osztályával foglalkozunk, amelyet egyszerü determinisztikus Turing-gélyosztálynak nevezünk. Megmutatjuk, hogy ez a géposztály pontosan a prefix-mentes 0-tipusú nyelvek osztályát fogadja el. Itt tárgyaljuk azt az egyszerü kétszalagos gépek osztályát, amely nemcsak az egyszerü géposztály egyszalagról két szalagra való kiterjesztése, de meg is egyezik az egyszerü determinisztikus Turing-gépek osztályával.

6.1 Prefix-mentes nyelvek és egyszerü determinisztikus Turing-gépek

6.1 Definició.

a/ Egy egyszerü determinisztikus Turing-gépen (röv. EDT-gépen) az $M=(K,\Gamma,\Sigma,\delta,q_0,H)$ rendezett hatost értjük, ahol

K az állapothalmaz,

Γ a szalagábécé, amelynek egy speciális jelét blanknak nevezzük, s B-vel szokás jelölni,

Σ egy bemenő ábécé, amelyre $\Sigma\cap\Gamma=\emptyset$

$q_0 \in K$ a kezdő állapot,

$H \subseteq K$ a végállapotok halmaza,

δ átmenetfüggvény a $K \times (\Gamma \cup \Sigma)$ halmaznak a $K \times (\Gamma-\{B\}) \times \{R,L\}$-be való egy leképezése, amelyre teljesülnek:

i/ Tetszőleges $q\in K-H$, $Z\in\Gamma\cup\Sigma$ kettesre:
$\delta(q,Z)$ pontosan egy elemet tartalmaz.

ii/ Tetszőleges $p\in H$, $Z\in\Gamma$ kettesre:
$\delta(p,Z)$ pontosan egy elemet tartalmaz.

iii/ Minden $p\in H$, $a\in\Sigma$ kettesre: $\delta(p,a)$ nem definiált.

b/ Adott M EDT-gépnek egy konfigurációján értjük azt a w_1qw_2 vagy qBw alakú szót, amelyre $q\in K$, $w\in((\Gamma-\{B\})\cup\Sigma)^+$, $w_1,w_2\in((\Gamma-\{B\})\cup\Sigma)^*$ és $w_1w_2\neq\lambda$.
A következő módon definiáljuk a konfigurációkra vonatkozó $\vdash_M$ relációt:

1/ $w_1qxw_2 \vdash_M w_1Zpw_2$ ha $\delta(q,x)=(p,Z,R)$.

2/ $w_1yqxw_2 \vdash_M w_1pyZw_2$ ha $\delta(q,x)=(p,Z,L)$.

3/ $qxw_2 \vdash_M pBZw_2$ ha $\delta(q,x)=(p,Z,L)$.

4/ $qBw_2 \vdash_M Zpw_2$ ha $\delta(q,B)=(p,Z,R)$.

5/ $qBw_2 \vdash_M pBZw_2$ ha $\delta(q,B)=(p,Z,L)$.

ahol $q,p\in K$, $x\in(\Gamma-\{B\})\cup\Sigma$, $y,Z\in\Gamma-\{B\}$, $w_1\in(\Gamma-\{B\})^*$, $w_2\in((\Gamma-\{B\})\cup\Sigma)^*$. Végül, az M EDT-gép által elfogadott nyelv a következő:

$$L(M)=\{w\in\Sigma^*/q_0w \overset{*}{\vdash_M} \alpha p,\ ahol\ p\in H,\ \alpha\in(\Gamma-\{B\})^*\}.$$

Egy L nyelvet akkor nevezünk egyszerü determinisztikus 0-tipusúnak (röv. ed0-tipusúnak), ha létezik olyan M EDT-gép, amelyre $L=L(M)$. $\mathcal{L}_{ed0}$-val jelöljük az ed0-tipusú nyelvek osztályát.

<u>6.1 Tétel.</u> Legyen Σ egy véges ábécé, és $L \subseteq \Sigma^*$. Az L nyelv akkor és csak akkor ed0-tipusú, ha az L nyelv prefix-mentes és 0-tipusú, azaz az $\mathcal{L}_{ed0}$ nyelvosztály megegyezik az $\mathcal{L}_p$ és $\mathcal{L}_o$ nyelvosztályok metszetével.

Bizonyitás.

1. rész. Ha $L \in \mathcal{L}_o \cap \mathcal{L}_p$, akkor $L \in \mathcal{L}_{ed0}$.

Az 1.15 Tétel és 1.20-Lemma értelmében feltehetjük, hogy $L=L(M)$, ahol $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_o,H)$ DT-gép az 1.18 Lemma ii/ feltételének megfelel, azaz tetszőleges $q \in K$, $x \in \Gamma$ kettesre ha $\delta(q,x)=(p,Z,i)$ akkor $Z \in \Gamma-\Sigma$, ahol $p \in K$, $i \in \{R,L\}$.

Most konstruálunk olyan M' EDT-gépet, amelyre $L(M')=L(M)$. Legyen az $M'=(K,\Gamma',\Sigma,\delta',q_o,H)$ EDT-gép a következő módon definiálva:

$\Gamma' = \Gamma-\Sigma$

δ' átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $q \in K-H$, $x \in \Gamma' \cup \Sigma$ kettesre: $\delta'(q,x)=\delta(q,x)$.

2/ Tetszőleges $p \in H$, $x \in \Gamma'$ kettesre: $\delta'(p,x)=\delta(p,x)$.

3/ Minden $p \in H$, $a \in \Sigma$ kettesre: $\delta'(p,a)$ nem definiált.

A δ' konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szóra: ha $w \in L(M')$, akkor $w \in L(M)$, azaz $L(M') \subseteq L(M)$.

Most megforditva bebizonyitjuk, hogy $L(M) \subseteq L(M')$. Ehhez elég megmutatnunk: ha $w \notin L(M')$ akkor $w \notin L(M)$. Először nyilvánvaló, hogy ha az M' EDT-gép egy w szóra közömbös úgy, hogy a $q_o w$ kezdőkonfigurációból a gép periódikusan végtelenül mozog és soha sem áll meg, akkor az M DT-gép a w szóra is közömbös.

Eszerint csak a következő két esetet kell megkülönböztetnünk:

1. eset. Legyen $w=w_1aw_2$, ahol $w_1,w_2 \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ és

$$q_o w_1 a w_2 \vdash_{M'}^{*} \alpha_1 p a w_2, \text{ ahol } p \in H, \ \alpha_1 \in (\Gamma-\{B\})^*.$$

Ekkor nyilván $q_o w_1 \vdash_{M}^{*} \alpha_1 p$ adódik, azaz $w_1 \in L(M)$. Ebből rögtön következik, hogy $w=w_1aw_2 \notin L(M)$, mivel $L(M) \in \mathcal{L}_p$ és $y=aw_2 \neq \lambda$.

2. eset. Legyen $q_o w \vdash_{M'}^{*} \alpha q$, ahol $q \notin H$, $\alpha \in (\Gamma-\{B\})^*$.

Ekkor nyilván $q_o w \vdash_{M}^{*} \alpha q$ adódik, azaz $w \notin L(M)$. Végeredményben tehát $L(M')=L(M)$ áll fenn, azaz $L \in \mathcal{L}_{ed0}$.

2. rész. Ha $L \in \mathcal{L}_{ed0}$ akkor $L \in \mathcal{L}_o \cap \mathcal{L}_p$.

Legyen $L=L(M)$, ahol $M=(K,\Gamma,\Sigma,\delta,q_o,H)$ egy EDT-gép. Világos, hogy $L(M) \in \mathcal{L}_o$, mivel minden EDT-gép a Turing-gép is. Másrészt a δ átmenetfüggvény iii/ feltétele szerint az M EDT-gép egy bemenő szó elfogadása után rögtön megáll, ami azt jelenti, hogy az $L(M)$ nyelv prefix-mentes. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

6.2 Az EDLK-gépek és EDT-gépek osztályozása

Mindenekelőtt tárgyaljuk az EDT-géposztálynak az $\mathcal{L}_{pl}$ nyelvekkel való kapcsolatát.

6.2 Tétel.

a/ Bármely prefix-mentes 1-tipusú L nyelvhez megadható olyan M EDT-gép, amelyre $L=L(M)$.

b/ Van olyan M_1 EDT-gép, amelyre $L(M_1) \notin \mathcal{L}_{p1}$.

Bizonyitás.

a/ Világos, hogy minden 1-tipusú nyelv 0-tipusú, s azért az első állitás a 6.1 Tételből nyilván adódik.

b/ A második állitás bizonyitásához az 1.16 Tétel értelmében feltehetjük, hogy az $L \subseteq \{a,b\}^*$ nyelv 0-tipusú, de nem 1-tipusú. Az általánosság megszoritása nélkül továbbá feltehető, hogy $\lambda \notin L$.
Ekkor könnyen beláthatjuk, hogy az $L_1 = L.\{\$\} = \{w\$/w \in L\}$ nyelv prefix-mentes 0-tipusú, és a 6.1 Tétel szerint: $L_1 \in \mathcal{L}_{ed0}$, vagyis létezik olyan M_1 EDT-gép, amelyre $L_1 = L(M_1)$. Most bebizonyitjuk, hogy az L_1 nyelv nem 1-tipusú, s azért nem is tartozik bele az $\mathcal{L}_{p1}$ nyelvosztályba. Ezzel ellentétben feltesszük, hogy az L_1 nyelv 1-tipusú. A következő módon definiáljuk a h homomorfizmust:

1/ $h(\lambda) = \lambda$
2/ $h(a) = a$
3/ $h(b) = b$
4/ $h(\$) = \lambda$
5/ $h(w_1 w_2) = h(w_1)h(w_2)$ tetszőleges $w_1, w_2 \in \{a,b,\$\}^*$ szavakra.

A h definiciójából könnyen belátható, hogy $L = h(L_1)$.
Most bebizonyitjuk: h az L_1 nyelvre vonatkozó 2-lineárisan kitörlő homomorfizmus.

Legyen $w_1 \in L_1 = L.\{\$\}$, vagyis $w_1 = w\$$, ahol $w \in L$. Világos, hogy $h(w_1) = w$ és $|w| \geq 1$, mivel $\lambda \notin L$. Eszerint kapjuk:

$$2|h(w_1)| = 2|w| \geq |w| + 1 = |w\$| = |w_1|.$$

Tehát: minden $w_1 \in L_1$ szóra $|w_1| \leq 2|h(w_1)|$, azaz h az L_1 nyelvre vonatkozó 2-lineárisan kitörlő homomorfizmus. Másrészt az 1.11 Tétel szerint az $L_1 \in \mathcal{L}_1$ feltételből következik, hogy az $L=h(L_1)$ nyelv is 1-tipusú, ami szintén ellentmondás.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

Ebből a tételből nyilván adódik a következő tétel.

6.3 Tétel.

a/ Bármely M EDLK-géphez megadható olyan M' EDT-gép, amelyre $L(M')=L(M)$.

b/ Van olyan M_1 EDT-gép, amelyre $L(M_1) \notin \mathcal{L}_{ed1}$.

Az előző tartalmazásokat nézve és a fenti tételek alapján kapjuk:

$$\mathcal{L}_{ed3} \subsetneq \mathcal{L}_{ec} \subsetneq \mathcal{L}_{ed2} \subsetneq \mathcal{L}_{p2} \subsetneq \mathcal{L}_{ed1} \subset \mathcal{L}_{p1} \subsetneq \mathcal{L}_{ed0}.$$

Ezen kivül az is nyilvánvaló, hogy van olyan 0-tipusú nyelv, amely nem ed0-tipusú, azaz $\mathcal{L}_{ed0} \subsetneq \mathcal{L}_0$.

6.3 Az ed0-tipusú nyelvosztály tulajdonságai

Először a 6.1 Tétel alapján és az $\mathcal{L}_0$ és $\mathcal{L}_p$ nyelvosztályok zártságait nézve könnyen beláthatjuk a következő tételeket.

6.4 Tétel. Ha $L \in \mathcal{L}_{ed0}$, akkor az $\bar{L}$ nyelv kivezet az $\mathcal{L}_{ed0}$ nyelvosztályból. Eszerint az $\mathcal{L}_{ed0}$ nyelvosztály nem zárt a komplemensképzésre nézve.

Bizonyitás. A 2.2 Tétel bizonyitásából adódik.

6.5 Tétel. Az $\mathcal{L}_{ed0}$ nyelvosztály nem zárt az unióra nézve.

Bizonyitás. A 3.3 Tétel bizonyitásából adódik.

6.6 Tétel. Az $\mathcal{L}_{ed0}$ nyelvosztály zárt a concatenációra és a metszetre nézve.

Bizonyitás. Az 1.14, 2.1 és 6.1 Tételekből adódik.

Mielőtt folytatnánk a tárgyalást, azt megfigyeljük, hogy tetszőleges M Turing-gép és w bemenő szó esetében a $w \in L(M)$ probléma algoritmikusan eldönthetetlen. Eszerint azokról az $L-L'$, LpL', $L \cup pL'$ nyelvekről, amelyekre $L, L' \in \mathcal{L}_{ed0}$, semmit sem mondhatunk. Az $\mathcal{L}_{ed2}$ helyzetéhez hasonlóan gyengitjuk a kezdő feltételt úgy, hogy az L és L' nyelvek közül nem mindkét nyelv ed0-tipusú, hanem az egyik ed0-tipusú és a másik ed3-tipusú, akkor a 6.1 Tétel értelmében kapjuk a következő tételeket.

6.7 Tétel. Ha $L \in \mathcal{L}_{ed0}$ és $L' \in \mathcal{L}_{ed3}$, akkor az $L-L'$ nyelv ed0-tipusú.

Bizonyitás. Az 1.14 Tétel korolláriumából és a 2.5 Tételből adódik.

6.8 Tétel. Ha $L \in \mathcal{L}_{ed0}$ és $L' \in \mathcal{L}_{ed3}$, akkor az LpL' nyelv ed0-tipusú.

Bizonyitás: Legyen $L=L(M)$ és $L'=L(M')$, ahol

$M=(K,\Gamma,\Sigma,\delta,q_o,H)$ egy EDT-gép, és

$M'=(K',\Sigma',\delta',q_o',H')$ egy EDV-gép.

Most konstruálunk olyan M_1 EDT-gépet, amelyre $L(M_1)=LpL'$. Legyen az $M_1=(K_1,\Gamma_1,\Sigma\cup\Sigma',\delta_1,[q_o,q_o'],H)$ EDT-gép a következő módon definiálva:

$K_1=K\cup\{[q,q']/q\in K-H,\ q'\in K'-H'\}\cup\{\bar{q}\}$, $ahol$ $\bar{q}\notin K$,

$\Gamma_1=\Gamma\cup\{[Z,q']/Z\in\Gamma-\{B\},\ q'\in K'\}\cup\{\bar{Z}\}$, $ahol$ $\bar{Z}\notin\Gamma$,

a δ_1 átmenetfüggvény a következő:

I. Tetszőleges $q\in K-H$, $q'\in K'-H'$ kettesre:

1/ Tetszőleges $b\in\Sigma\cap\Sigma'$ elemre:

a/ Ha $\delta(q,b)=(p,Z,L)$ és $\delta'(q',b)=p'$, akkor $\delta_1([q,q'],b)=(p,[Z,p'],L)$, ahol $p\in K$, $Z\in\Gamma-\{B\}$, $p'\in K'$.

b/ Ha $\delta(q,b)=(p,Z,R)$ és $\delta'(q',b)=p'$, akkor $\delta_1([q,q'],b)=(\bar{p},Z,R)$, ahol $p\in K$, $Z\in\Gamma-\{B\}$, $p'\in K'$ és

$$\bar{p}=\begin{cases} p & ha \quad p\in H \\ [p,p'] & ha \quad p\notin H \text{ és } p'\notin H'. \\ \bar{q} & ha \quad p\notin H \text{ és } p'\in H'. \end{cases}$$

2/ Tetszőleges $a\in\Sigma-\Sigma'$ elemre: $\delta_1([q,q'],a)=\delta(q,a)$.

3/ Tetszőleges $a'\in\Sigma'-\Sigma$ elemre: $\delta_1([q,q'],a')=(\bar{q},\bar{Z},R)$.

II. Tetszőleges $q\in K-H$, $a\in\Sigma\cup\Sigma'$ kettesre:

$$\delta_1(q,a)=\begin{cases} \delta(q,a) & ha \quad a\in\Sigma. \\ (\bar{q},\bar{Z},R) & ha \quad a\in\Sigma'-\Sigma. \end{cases}$$

III. Tetszőleges $q \in K$, $x \in \Gamma - \{B\}$ kettesre:

1/ Ha $\delta(q,x)=(p,Z,L)$, ahol $p \in K$, $Z \in \Gamma - \{B\}$, akkor:

$\begin{cases} \text{a/ } \delta_1(q,x)=(p,Z,L). \\ \text{b/ } \delta_1(q,[x,q'])=(p,[Z,q'],L) \text{ minden } q' \in K' \end{cases}$
állapotra.

2/ Ha $\delta(q,x)=(p,Z,R)$, ahol $p \in K$, $Z \in \Gamma - \{B\}$, akkor:

$\begin{cases} \text{a/ } \delta_1(q,x)=(p,Z,R). \\ \text{b/ } \delta_1(q,[x,q'])=(\bar{p},Z,R), \text{ ahol} \end{cases}$

$$\bar{p} = \begin{cases} p & ha \quad p \in H. \\ [p,q'] & ha \quad p \notin H \text{ és } q' \notin H'. \\ \bar{q} & ha \quad p \notin H \text{ és } q' \in H'. \end{cases}$$

3/ $\delta_1(q,B)=\delta(q,B)$.

4/ $\delta_1(q,\bar{Z})=(\bar{q},\bar{Z},R)$.

IV. Minden $q \in K-H$, $q' \in K'-H'$, $Z \in \Gamma_1$ hármasra:

$\delta_1([q,q'],Z)=(\bar{q},\bar{Z},R)$.

V. Minden $x \in \Gamma_1 \cup \Sigma \cup \Sigma'$ elemre:

$\delta_1(\bar{q},x)=(\bar{q},\bar{Z},R)$.

A δ_1 konstrukciójából indukcióval könnyü belátnunk, hogy tetszőleges $w \in (\Sigma \cap \Sigma')^*$ szóra:

$$\langle 6.8.1\rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0 w \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha p \\ \\ q_0' w \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} p' \end{array} \right\} \Longleftrightarrow [q_0,q_0']w \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} \alpha\bar{p},$$

ahol $p \in K$, $\alpha \in (\Gamma - \{B\})^*$, $p' \in K'$, és

$$\bar{p} = \begin{cases} p & ha \quad p\in H. \\ [p,p'] & ha \quad p\notin H \quad és \quad p'\notin H'. \\ \bar{q} & ha \quad p\notin H \quad és \quad p'\in H'. \end{cases}$$

Most bebizonyitjuk: $L(M_1)=LpL'$.

($\Longleftarrow$). Belátjuk először, hogy $LpL' \subseteq L(M_1)$.
Legyen $w\in LpL'$, és két esetet különböztetünk meg:

1. eset. Legyen $w\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$ és $q_0w \overset{*}{\underset{M}{\longmapsto}} \alpha p$ ill. $q_0'w \overset{*}{\underset{M'}{\longmapsto}} q'$, ahol $p\in H$, $\alpha\in(\Gamma-\{B\})^*$, $q'\in K'$.

A <6.8.1> állitásból nyilván $[q_0,q_0']w \overset{*}{\underset{M_1}{\longmapsto}} \alpha p$ adódik, azaz $w\in L(M_1)$.

2. eset. Legyen $w=w_1aw_2$, ahol $w_1\in(\Sigma\cap\Sigma')^*$, $a\in\Sigma-\Sigma'$, $w_2\in(\Sigma\cup\Sigma')^*$, és

$$\begin{cases} q_0w_1aw_2 \overset{*}{\underset{M}{\longmapsto}} \alpha_1q_1aw_2 \underset{M}{\longmapsto} \alpha_1qZw_2 \overset{*}{\underset{M}{\longmapsto}} \alpha p, \\ \text{ahol } p\in H. \\ q_0'w_1 \overset{*}{\underset{M'}{\longmapsto}} q_1', \text{ ahol } q_1'\notin H. \end{cases}$$

Ismét használjuk a <6.8.1> állitást és kapjuk:
$[q_0,q_0']w_1aw_2 \overset{*}{\underset{M_1}{\longmapsto}} \alpha_1[q_1,q_1']aw_2 \underset{M_1}{\longmapsto} \alpha_1qZw_2 \overset{*}{\underset{M_1}{\longmapsto}} \alpha p$, azaz $w=w_1aw_2\in L(M_1)$. Mindkét esetben beláttuk, hogy $w\in L(M_1)$ valahányszor $w\in LpL'$, azaz $LpL' \subseteq L(M_1)$.

($\Longrightarrow$). Megforditva igazoljuk, hogy $L(M_1) \subseteq LpL'$.
Ehhez elég megmutatnunk: ha $w\notin LpL'$, akkor $w\notin L(M_1)$. Világos, hogy ha $w\notin L$, akkor $w\notin L(M_1)$, mivel az M és M_1 EDT-gépek végállapothalmazai egymással azonosak. Nézzük tehát a $w\in L-(LpL')$ esetet, vagyis:

$w=w_1aw_2$, ahol $w_1 \in (\Sigma \cap \Sigma')^*$, $a \in \Sigma \cup \Sigma'$, $w_2 \in (\Sigma \cup \Sigma')^*$, és:

$$\begin{cases} q_o w_1 a w_2 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha_1 q_1 a w_2 \underset{M}{\vdash} \alpha_1 q Z w_2 \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \alpha p, & \text{ahol } p \in H \\ q_o' w_1 \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} p', & \text{ahol } p' \in H'. \end{cases}$$

A <6.8.1> állitásból könnyen belátható:

$[q_o, q_o']w_1aw_2 \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} \alpha_1\bar{q}aw_2 \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} \alpha_1(\bar{Z})^n\bar{q}$, ahol $\bar{q} \notin H$ és $n=|aw_2|$.

Eszerint: $w=w_1aw_2 \notin L(M_1)$.

Végeredményben tehát az $L(M_1)=LpL'$ egyenlőség áll fenn. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

E tétel mellett nem foglalkozunk az $L \cup pL'$ nyelv tárgyalásával, mivel $L \cup pL'=(LpL') \cup (L'pL)$ és az $L'pL$ nyelvet a Turing-gép közömbössége miatt nem tudjuk vizsgálni.

<u>6.9 Tétel.</u> Az $\mathcal{L}_{\text{ed0}}$ nyelvosztály zárt a prefix-mentes homomorfizmusra nézve.

Bizonyitás. Az 1.3 és 2.9 Tételekből adódik.

<u>Korollárium.</u> Legyen Σ és Δ két diszjunkt,véges ábécé, illetve $w \in \Sigma^*$ valamely rögzitett szó.

Az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv akkor és csak akkor ed0-tipusú, ha a $h_w(L) \subseteq (\Sigma \cup \Delta)^*$ nyelv ed0-tipusú.

A következő táblázatban összefoglaljuk az $\mathcal{L}_{\text{p}}$, $\mathcal{L}_{\text{ed0}}$, $\mathcal{L}_{\text{ed1}}$, $\mathcal{L}_{\text{ed2}}$ és $\mathcal{L}_{\text{ed3}}$ nyelvosztályok tulajdonságait.

Nyelvosztály / Zárt müvelet	$\mathcal{L}_{ed_3}$	$\mathcal{L}_{ed_2}$	$\mathcal{L}_{ed_1}$	$\mathcal{L}_{ed_o}$	$\mathcal{L}_p$
1/ Komplemensképzés $(\bar{L})$	N	N	N	N	N
2/ Unió $(L_1 \cup L_2)$	N	N	N	N	N
3/Metszet $(L_1 \cap L_2)$	I	N	I	I	I
4/ $R \in \mathcal{L}_{ed3}$ nyelvvel való metszet $(L \cap R)$.	I	I	I	I	I
5/ Concatenáció $(L_1 . L_2)$	I	I	I	I	I
6/ Differencia $(L_1 - L_2)$	I	?	I	?	I
7/ $R \in \mathcal{L}_{ed3}$ nyelvvel való differencia $(L-R)$.	I	I	I	I	I
8/ p-differencia $(L_1 p L_2)$	I	?	I	?	I
9/ $R \in \mathcal{L}_{ed3}$ nyelvvel való p-differencia (LpR).	I	I	I	I	I
10/ p-Unió $(L_1 \cup p L_2)$	I	?	I	?	I
11/ $R \in \mathcal{L}_{ed3}$ nyelvvel való p-Unió $(L_1 \cup pR)$	I	I	I	?	I
12/ h_w homomorfizmus	I	I	I	I	I

ahol az I jelölés azt jelenti: "igen",
az N jelölés azt jelenti: "nem",
a ? jelölés azt jelenti: "nyitott kérdés".

E táblázatból láttuk, hogy az egyes nyelvosztályoknak vannak közös tulajdonságai, de mind az öt nyelvosztály nem elégiti ki az ún. absztrakt nyelvcsalád (AFL= abstract family of languages) axiómáit, amelynek a definiciója éppen az, hogy egy nemüres nyelvosztályt akkor nevezünk AFL-nek, ha zárt a következő müveletekre nézve:

1/ Az unió $(L_1 \cup L_2)$.
2/ A concatenáció $(L_1 . L_2)$.
3/ Az iteráció (L_1^+).
4/ Az inverz homomorfizmus $(h^{-1}(L_1))$.
5/ A λ -mentes homomorfizmus $(h(L_1))$.
6/ Egy 3-tipusú nyelvvel való metszet $(L_1 \cap R)$.

6.4 Egyszerü kétszalagos gépek.

Ebben a szakaszban tárgyaljuk azt a géposztályt, amely az egyszerü gépek egy pushdown-szalagról két pushdown-szalagra való kiterjesztése, s egyszerü kétszalagos géposztálynak nevezzük. Megmutatjuk, hogy az új géposztály pontosan az egyszerü determinisztikus Turing-géposztály szerepével egyezik meg. Ennek alapján vizsgáljuk az $\mathcal{L}_{ec}$, $\mathcal{L}_{ed2}$ és $\mathcal{L}_{ed0}$ nyelvosztályok kapcsolatát.

6.2 Definició.

a/ Egy egyszerü kétszalagos gépen (röv. EK-gépen) az $M=(\Sigma, \Gamma, \Gamma', \delta, Z_o, Z_o')$ rendezett hatost értjük, ahol

Σ a bemenő ábécé,
Γ és Γ' két pushdown-ábécé,
$Z_o \in \Gamma$ és $Z_o' \in \Gamma'$ két kezdő pushdown-jel,
δ átmenetfüggvény a $\Gamma X (\Sigma \cup \{\lambda\}) X \Gamma'$ halmaznak $\Gamma^* X$ Γ'^*-ba való egy leképezése, amelyre teljesülnek a következő feltételek:
tetszőleges $Z \in \Gamma$, $Z' \in \Gamma'$ kettesre:

vagy i/ $\delta(Z, \lambda, Z')$ pontosan egy elemet tartalmaz, és
$\delta(Z, a, Z')$ nem definiált semmilyen $a \in \Sigma$-ra; vagy
ii/ $\delta(Z, \lambda, Z')$ nem definiált, és minden $a \in \Sigma$-ra
$\delta(Z, a, Z')$ pontosan egy elemet tartalmaz.

b/ Adott M EK-gép egy konfigurációján értjük azt a (α,w,α') hármast, amelyre $\alpha\in\Gamma^*$, $w\in\Sigma^*$, $\alpha'\in\Gamma'^*$.

A következő módon definiáljuk a konfigurációkra vonatkozó $\vdash_M$ relációt:

$$(\alpha Z,aw,\alpha' Z') \vdash_M (\alpha\beta,w,\alpha'\beta') \Longleftrightarrow \delta(Z,a,Z')=(\beta,\beta'),$$

ahol $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $w\in\Sigma^*$, $Z\in\Gamma,\alpha,\beta\in\Gamma^*$, $Z'\in\Gamma,\alpha',\beta'\in\Gamma'^*$.

Legyen $\vdash_M^*$ az $\vdash_M$ reláció tranzitiv lezárása.
Végül, az M EK-gép által elfogadott nyelv a következő:

$$L(M)=\{w\in\Sigma^*/(Z_o,w,Z_o') \vdash_M^* (\lambda,\lambda,\lambda)\}$$

6..1 Megjegyzés: A definició szerint az M EK-gép egy bemenő szót üres pushdown-szalagokkal elfogad. Tehát, minden M EK-gépre az $L(M)$ nyelv szükségképpen prefix-mentes.

6.9 Tétel. Legyen Σ egy véges ábécé, és $L\subseteq\Sigma^*$.
Az L nyelv akkor és csak akkor ed0-tipusú, ha létezik olyan M EK-gép, amelyre $L=L(M)$.

Bizonyitás.

1. rész. Tetszőleges M EK-gépre $L(M)\in\mathcal{L}_{10}$.

Legyen $M=(\Sigma,\Gamma,\Gamma',\delta,Z,Z_o')$ egy EK-gép. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $\Gamma\cap\Gamma'=\emptyset$.
Először a 6.1 megjegyzés szerint: $L(M)\in\mathcal{L}_p$. Tehát, a 6.1 Tétel értelmében most csak azt kell igazolnunk, hogy $L(M)\in\mathcal{L}_o$.
Konstruálunk olyan G 0-tipusú grammatikát, amelyre $L(G)=L(M)$.
Legyen a $G=(V_N, V_T,S,F)$ 0-tipusú grammatika a következő módon definiálva:

$V_N = \Gamma \cup \Gamma' \cup \{S\}$, *ahol* $S \notin \Gamma \cup \Gamma'$,

$V_T = \Sigma$,

az F szabályai a következők:

1/ $(S \to Z_o Z_o') \in F$.

2/ Tetszőleges $Z \in \Gamma$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $Z' \in \Gamma'$ hármasra:
ha $\delta(Z, a, Z') = (\beta, \beta')$ akkor $(ZZ' \to \beta a (\beta')^R) \in F$.

3/ Tetszőleges $Z \in \Gamma$, $a \in \Sigma$ kettesre: $(Za \to aZ) \in F$.

Az F definiciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $a \in \Sigma$-ra:

$$(\alpha, a, \alpha') \vdash_M^* (\beta, \lambda, \beta') \Longleftrightarrow \alpha.(\alpha')^R \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} a\beta(\beta')^R,$$

ahol $\alpha \in \Gamma^+$, $\alpha' \in \Gamma'^+$, $\beta \in \Gamma^*$, $\beta' \in \Gamma'^*$.

Ebből indukcióval könnyen bebizonyithatjuk, hogy tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szóra:

$$(Z_o, w, Z_o') \vdash_M^* (\alpha, \lambda, \alpha') \Longleftrightarrow S \underset{G}{\Longrightarrow} Z_o Z_o' \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w\alpha.(\alpha')^R.$$

Végeredményben tehát azt kapjuk, hogy tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szóra:

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\Longleftrightarrow (Z_o, w, Z_o') \vdash_M^* (\lambda, \lambda, \lambda) \\ &\Longleftrightarrow S \underset{G}{\Longrightarrow} Z_o Z_o' \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w \\ &\Longleftrightarrow w \in L(G), \end{aligned}$$

azaz $L(M) = L(G)$, vagyis $L(M) \in \mathcal{L}_o$. Eszerint $L(M) \in \mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_o = \mathcal{L}_{ed0}$.

2. rész. Ha $L \in \mathcal{L}_{ed0}$ akkor $L = L(M_1)$, ahol M_1 egy EK-gép.

Legyen $L=L(M)$, ahol $M=(K,\Gamma,\Sigma,\delta,q_o,H)$ egy EDT-gép. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető:

i/ $K\cap\Gamma = \emptyset$,

ii/ Tetszőleges $q\in K$, $x\in\Gamma\cup\Sigma$ kettesre:
ha $\delta(q,x)=(p,Z,i)$ akkor $p\neq q_o$, ahol $Z\in\Gamma$, $i\in\{R,L\}$.

Most konstruálunk olyan M_1 EK-gépet, amelyre $L(M_1)=L(M)$. Legyen az $M_1=(\Sigma,\Gamma_1,\Gamma_1',\delta_1,q_o,\$)$ EK-gép a következő módon definiálva:

$\Gamma_1 = K\cup\Gamma\cup\{\$\}$,

$\Gamma_1' = (K-\{q_o\})\cup\Gamma\cup\{\$\}$, ahol $\$\notin K\cup\Gamma$,

δ_1 átmenetfüggvény a következő:

I. Tetszőleges $a\in\Sigma$ bemenőjelre, $q\in K-H-\{q_o\}$ állapotra:

1a/ Ha $\delta(q_o,a)=(p,Z,R)$ akkor $\delta_1(q_o,a,\$)=(BZp,\$)$.

1b/ Ha $\delta(q_o,a)=(p,Z,L)$ akkor $\delta_1(q_o,a,\$)=(B,\$Zp)$.

2a/ Ha $\delta(q,a)=(p,Z,R)$ akkor $\delta_1(q,a,\$)=(Zp,\$)$.

2b/ Ha $\delta(q,a)=(p,Z,L)$ akkor $\delta_1(q,a,\$)=(\lambda,\$Zp)$.

II. Tetszőleges $p\in H$ állapotra, $y\in\Gamma-\{B\}$ elemre:

1/ $\delta_1(p,\lambda,\$)=(\lambda,\$)$

2/ $\delta_1(y,\lambda,\$)=(\lambda,\$)$

3/ $\delta_1(\$,\lambda,\$)=(\$,\$)$

4/ $\delta_1(B,\lambda,\$)=(\lambda,\lambda)$

III. Tetszőleges $y\in\Gamma$-ra:

1/ $\delta_1(q_o,\lambda,y)=(\$,\$)$.

2/ Tetszőleges $q\in K-\{q_o\}$ állapotra:

a/ ha $\delta(q,y)=(p,x,R)$ akkor $\delta_1(q,\lambda,y)=(xp,\lambda)$.

b/ ha $\delta(q,y)=(p,x,L)$ akkor $\delta_1(q,\lambda,y)=(\lambda,xp)$.

3/ Minden $x\in\Gamma\cup\{\$\}$ elemre:
$\delta_1(x,\lambda,y)=(\$,\$)$.

IV. Tetszőleges $q\in K-\{q_o\}$ állapotra:

1/ Minden $q_1\in K$ állapotra:

$\delta_1(q_1,\lambda,q)=(\$,\$)$.

2/ Tetszőleges $x\in\Gamma-\{B\}$ elemre:

$\delta_1(x,\lambda,q)=(q,x)$.

3/ $\delta_1(B,\lambda,q)=(Bq,B)$

4/ $\delta_1(\$,\lambda,q)=(\$,\$)$.

A δ_1 konstrukciójából könnyen belátható, hogy tetszőleges $q\in K$ állapotra, $\alpha_1,\alpha_2\in(\Gamma-\{B\})^*$ szavakra:

<6.9.1> $$\begin{cases} \text{a/ } \alpha_1 q\alpha_2 \vdash_M^* \alpha p \Longleftrightarrow (B\alpha_1 q,\lambda,\$\alpha_2^R) \vdash_{M_1}^* (B\alpha p,\lambda,\$). \\ \text{b/ } qB\alpha_2 \vdash_M^* \alpha p \Longleftrightarrow (Bq,\lambda,\$\alpha_2^R B) \vdash_{M_1}^* (B\alpha p,\lambda,\$), \end{cases}$$

ahol $\alpha\in(\Gamma-\{B\})^*$, $p\in K$.

Ebből indukcióval bebizonyitjuk, hogy tetszőleges $w\in\Sigma^*$ szóra:

<6.9.2> $$q_o w \vdash_M^* \alpha p \Longleftrightarrow (q_o,w,\$) \vdash_{M_1}^* (B\alpha p,\lambda,\$).$$

A $w=a\in\Sigma$ esetben a <6.9.1> állitás felhasználásával két esetet különböztetünk meg:

1. eset. Ha $\delta(q_o,a)=(p,Z,R)$, akkor kapjuk:

$$q_o a \vdash_M Zp \Longleftrightarrow (q_o,a,\$) \vdash_{M_1} (BZp,\lambda,\$).$$

2. eset. Ha $\delta(q_o,a)=(p,Z,L)$, akkor kapjuk:

$$q_o a \vdash_M qBZ \vdash_M^* \alpha p \Longleftrightarrow (q_o,a,\$) \vdash_{M_1} (B,\lambda,\$Zq) \vdash_{M_1} (Bq,\lambda,\$ZB)$$

$$\vdash_{M_1}^* (B\alpha p,\lambda,\$)$$

Mindkét esetben beláttuk, hogy igaz az állitás.
Tegyük fel, hogy minden $w\in\Sigma^*$ n hosszúságú szóra igaz az állitás, és foglalkozzunk azzal a $w=w_1a\in\Sigma^*$ szóval, amelyre $|w_1|=n$ és $a\in\Sigma$.

Legyen $q_ow_1a \vdash_M^* \alpha_1q_1a \vdash_M^* \alpha p$. Először az indukciós feltevés értelmében kapjuk:

$$q_ow_1 \vdash_M^* \alpha_1q_1 \Longleftrightarrow (q_o,w_1,\$) \vdash_{M_1}^* (B\alpha_1q_1,\lambda,\$).$$

A folytatásnál két esetet különböztetünk meg:

1. eset: Ha $\delta(q_1,a)=(p,Z,R)$, akkor könnyen belátható:

$$\alpha_1q_1a \vdash_M \alpha_1Zp \Longleftrightarrow (B\alpha_1q_1,a,\$) \vdash_{M_1} (B\alpha_1Zp,\lambda,\$),$$

ahol $\alpha=\alpha_1Z$.

2. eset: Ha $\delta(q_1,a)=(q,Z,L)$, akkor a <6.9.1> állitás értelmében kapjuk:

$$\{\alpha_1q_1a \vdash_M \alpha_2q\beta_2 \vdash_M^* \alpha p\} \Longleftrightarrow \{(B\alpha_1q_1,a,\$) \vdash_{M_1} (B\alpha_1,\lambda,\$Zq)$$

$$\vdash_{M_1} (B\alpha_2q,\lambda,\$\beta_2^R) \vdash_{M_1}^* (B\alpha p,\lambda,\$)\},$$

ahol $\alpha_2\beta_2=\alpha_1Z$.

Mindkét esetben beláttuk, hogy a $w=w_1a\in\Sigma^*$ szóra is igaz az állitás.

Végeredményben a <6.9.2> állitás segitségével könnyü belátnunk, hogy tetszőleges $w\in\Sigma^*$ szóra:

$$
\begin{aligned}
w\in L(M) &\Longleftrightarrow q_0w \vdash_M^* \alpha p, \quad ahol \quad p\in H. \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} (q_0,w,\$) \vdash_{M_1}^* (B\alpha p,\lambda,\$) \vdash_{M_1} (B\alpha,\lambda,\$) \\ \qquad\qquad \vdash_{M_1}^* (B,\lambda,\$) \vdash_{M_1} (\lambda,\lambda,\lambda) \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow w\in L(M_1),
\end{aligned}
$$

azaz $L(M_1)=L(M)$. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

<u>6.2 Megjegyzés.</u> Az 1. rész bizonyitását konstruktivan megtettük, de sokkal egyszerübb volna, ha a Church-féle tézisre való hivatkozással formálisan bebizonyitanánk.

A következő részben megvizsgáljuk az $\mathcal{L}_{ec}$, $\mathcal{L}_{ed2}$ és $\mathcal{L}_{ed0}$ nyelvosztályok egymással való kapcsolatait. Mindenekelőtt az egyszerüség kedvéért alkalmazzuk a következő jelölést:

Legyen $M=(\Sigma,\Gamma,\Gamma',\delta,Z_0,Z_0')$ egy EK-gép. Tetszőleges $Z\in\Gamma$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z'\in\Gamma'$ hármasra ha $\delta(Z,a,Z')=(\alpha,\alpha')$ akkor jelöljük:

$$h_E(\delta(Z,a,Z'))=\alpha$$

$$h_M(\delta(Z,a,Z'))=\alpha'.$$

<u>6.10 Tétel.</u> Legyen $M=(\Sigma,\Gamma,\Gamma',\delta,Z_o,Z'_o)$ egy EK-gép. Ha az M EK-gép rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy tetszőleges $Z\in\Gamma$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z'\in\Gamma'$ hármasra $|h_E(\delta(Z,a,Z'))|=|h_M(\delta(Z,a,Z'))|$, akkor $L(M)\in \mathcal{L}_{ec}$.

Bizonyitás. A tétel bizonyitásához elegendő, ha konstruálunk olyan M_1 egyszerü gépet, amelyre $L(M_1)=L(M)$. Az egyszerüség kedvéért ismét használjuk az $[\alpha,\alpha']$ jelölést úgy, hogy tetszőleges $\alpha=Z_1\ldots Z_n\in{}^+$, $\alpha'=Z'_1\ldots Z'_n\in\Gamma'^+$ szavakra:

$$[\alpha,\alpha']=[Z_1,Z'_1]\ldots[Z_n,Z'_n].$$

Legyen most az $M_1=(\Sigma,\Gamma_1,\delta_1,[Z_o,Z'_o])$ egyszerü gép a következő módon definiálva:

$$\Gamma_1 = \{[Z,Z']/Z\in\Gamma,\ Z'\in\Gamma'\},$$

a δ_1 átmenetfüggvény a következő:

Tetszőleges $Z\in\Gamma$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z'\in\Gamma'$ hármasra:

a/ Ha $\delta(Z,a,Z')=(\alpha,\alpha')$, ahol $|\alpha|=|\alpha'|\geq 1$, akkor $\delta_1(a,[Z,Z'])=[\alpha,\alpha']$.

b/ Ha $\delta(Z,a,Z')=(\lambda,\lambda)$ akkor $\delta_1(a,[Z,Z'])=\lambda$.

A δ_1 konstrukciójából könnyen belátható, hogy az M_1 egyszerü gép azokat és csak azokat a $w\in\Sigma^*$ szavakat fogadja el, amelyeket M elfogad és megforditva.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

6.11 Tétel. Legyen $M=(\Sigma,\Gamma,\Gamma',\delta,Z_o,Z_o')$ egy EK-gép. Ha az M EK-gép rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy tetszőleges $Z\in\Gamma$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z'\in\Gamma'$ hármasra $|h_E(\delta(Z,a,Z'))|\leq 1$, akkor $L(M)\in \mathcal{L}_{ed2}$.

Bizonyitás. A tétel bizonyitásához elegendő, ha konstruálunk olyan M_2 EDP-gépet, amelyre $L(M_2)=L(M)$.

A $|h_E(\delta(Z,a,Z'))|\leq 1$ feltétel azt jelenti, hogy tetszőleges $Z\in\Gamma$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z'\in\Gamma'$ hármasra: ha $\delta(Z,a,Z')=(\alpha,\alpha')$, akkor $\alpha\in\Gamma\cup\{\lambda\}$. Az általánosság megszoritása nélkül továbbá feltehető, hogy tetszőleges $Z\in\Gamma$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z'\in\Gamma'$ hármasra: ha $\delta(Z,a,Z')=(\alpha,\alpha')$ akkor $\alpha\in(\Gamma-\{Z_o\})\cup\{\lambda\},\alpha'\in(\Gamma'-\{Z_o'\})^*$. Ha ugyanis nem igy volna, akkor két új $\bar{Z}_o$, $\bar{Z}_o'$ kezdőjel és $\delta(\bar{Z}_o,\lambda,\bar{Z}_o')=(Z_o,Z_o')$ érvényesség bevezetésével ezt mindig elérhetjük, s ez az elfogadott nyelvet nem érinti.

Legyen most az $M_2=(K_2,\Sigma,\Gamma_2,\delta_2,q_{Z_o},Z_o',\{q_h\})$ EDP-gép a következő módon definiálva:

$K_2 = \{q_Z/Z\in\Gamma\}\cup\{q_\lambda,\bar{q},q_h\}$,

$\Gamma_2 = \Gamma'\cup\{\$\}$, ahol $\$\notin\Gamma'$,

a δ_2 átmenetfüggvény a következő:

1/ Tetszőleges $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$ elemre:

a/ Ha $\delta(Z_o,a,Z_o')=(Z,\alpha')$, ahol $Z\in\Gamma$, $\alpha'\in\Gamma'^*$, akkor $\delta_2(q_{Z_o},a,Z_o')=(q_Z,\$\alpha')$.

b/ Ha $\delta(Z_o,a,Z_o')=(\lambda,\alpha')$, ahol $\alpha'\in\Gamma'^*$. akkor $\delta_2(q_{Z_o},a,Z_o')=(q_\lambda,\$\alpha')$.

2/ Tetszőleges $Z \in \Gamma - \{Z_o\}$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $Z' \in \Gamma' - \{Z'_o\}$ hármasra:

a/ Ha $\delta(Z,a,Z') = (x,\alpha')$, ahol $x \in \Gamma$, $\alpha' \in \Gamma'^*$,
akkor $\delta_2(q_Z,a,Z') = (q_x,\alpha')$.

b/ Ha $\delta(Z,a,Z') = (\lambda,\alpha')$, ahol $\alpha' \in \Gamma'^*$,
akkor $\delta_2(q_Z,a,Z') = (q_\lambda,\alpha')$.

3/ Minden $Z' \in \Gamma'$ elemre:

a/ $\delta_2(q_\lambda,\lambda,Z') = (\bar{q},\lambda)$

b/ $\delta_2(\bar{q},\lambda,Z') = (\bar{q},\lambda)$

4/ Minden $Z \in \Gamma$ elemre:

a/ $\delta_2(q_Z,\lambda,\$) = (\bar{q},\$)$.

b/ $\delta_2(\bar{q},\lambda,\$) = (\bar{q},\lambda)$.

c/ $\delta_3(q_\lambda,\lambda,\$) = (q_h,\lambda)$

A δ_2 konstrukciójából indukcióval könnyen beláthatjuk, hogy tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szóra:

$$(Z_o,w,Z'_o) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (Z,\lambda,\alpha') \Longleftrightarrow (q_{Z_o},w,Z'_o) \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (q_Z,\lambda,\$\alpha'),$$

ahol $Z \in \Gamma \cup \{\lambda\}$, $\alpha' \in \Gamma'^*$.

Végeredményben tehát azt kapjuk, hogy tetszőleges $w \in \Sigma^*$ szóra:

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\Longleftrightarrow (Z_o,w,Z'_o) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (\lambda,\lambda,\lambda) \\ &\Longleftrightarrow (q_{Z_o},w,Z'_o) \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (q_\lambda,\lambda,\$) \underset{M_2}{\vdash} (q_h,\lambda,\lambda) \\ &\Longleftrightarrow w \in L(M_2), \end{aligned}$$

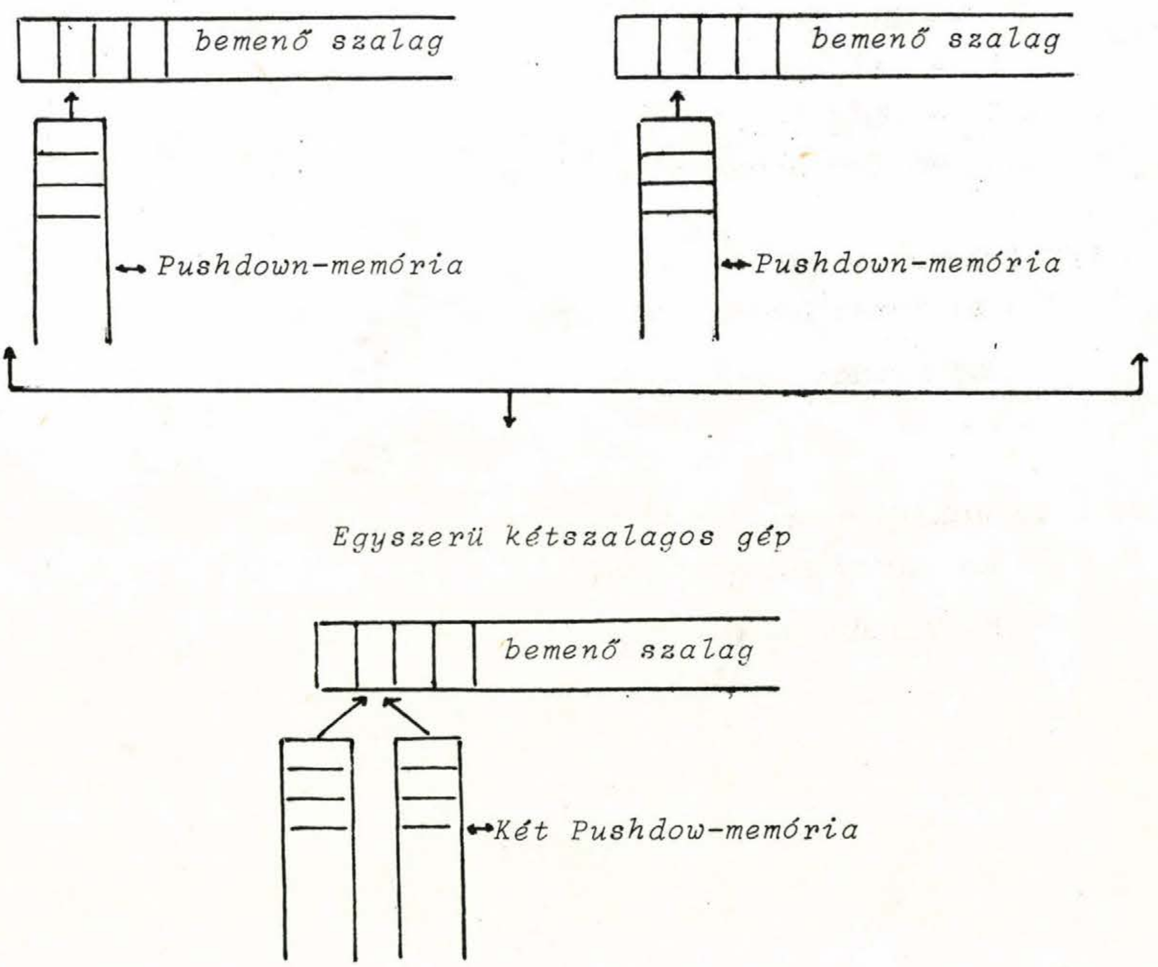
azaz $L(M_2) = (L(M)$. Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

<u>6.3 Megjegyzés:</u> Mivel a $h_E(\delta(Z,a,Z'))$ és $h_M(\delta(Z,a,Z'))$ szereplései egymással azonosak, azért igaz a tétel akkor is, ha $|h_M(\delta(Z,a,Z'))|\leq 1$ tetszőleges $Z\in\Gamma$, $a\in\Sigma\cup\{\lambda\}$, $Z'\in\Gamma'$ hármasra.

Most a 4.1 Tételhez hasonlóan vizsgáljuk egy ed0-tipusú nyelvnek két ec-tipusú nyelv metszetére való homomorf képét. Természetesen, nagyon nehéz lesz, ha ezt az EDT-gép szempontjából nézzük. Itt a 6.9 Tétel értelmében tárgyaljuk az egyszerü gép és egyszerü kétszalagos gép kapcsolatát. Mindenekelőtt a következő ábrán szemléltetjük az utóbbi kapcsolatot.

6.1. ábra

Két egyszerü gép



Ebből érthetjük, hogy egy EK-gép két egyszerü gép kombinációja.

<u>6.12 Tétel.</u> Bármely M EK-géphez megadható olyan h homomorfizmus és két ec-tipusú L_1, L_2 nyelv, amelyekre

$$L(M)=h(L_1 \cap L_2).$$

Bizonyitás. Legyen $M=(\Sigma,\Gamma,\Gamma',\delta,Z_o,Z_o')$ egy EK-gép. Először definiáljuk a következő halmazt:

$$\Sigma_1=\{x_{[Z,Z']}/Z\in\Gamma \text{ és } Z'\in\Gamma'\}.$$

Most konstruáljuk egyszerre az $M_1=(\Sigma',\Gamma_1,\delta_1,Z_o)$ és $M_2=(\Sigma',\Gamma_2,\delta_2,Z_o')$ egyszerü gépeket úgy, hogy

$\Sigma' = \Sigma\cup\Sigma_1$,
$\Gamma_1 = \Gamma\cup\{[Z,Z']/Z\in\Gamma \text{ és } Z'\in\Gamma'\}\cup\{\bar{Z}\}$, ahol $\bar{Z}\notin\Gamma$,
$\Gamma_2 = \Gamma\cup\{[Z,Z']/Z\in\Gamma \text{ és } Z'\in\Gamma'\}\cup\{\bar{Z}\}$, ahol $\bar{Z}\notin\Gamma'$,
δ_1 és δ_2 átmenetfüggvények a következők:

I/ 1/ Tetszőleges $Z\in\Gamma$ elemre:
a/ Tetszőleges $Z'\in\Gamma'$ elemre: $\delta_1(x_{[Z,Z']},Z)=[Z,Z']$.
b/ Minden $a\in\Sigma\cup\Sigma_1-\{x_{[Z,Z']}/Z'\in\Gamma'\}$ elemre:
$\delta_1(a,Z)=\bar{Z}$.

2/ Tetszőleges $Z'\in\Gamma'$ elemre:
a/ Tetszőleges $Z\in\Gamma$ elemre: $\delta_2(x_{[Z,Z']},Z')=[Z,Z']$.
b/ Minden $a\in\Sigma\cup\Sigma_1-\{x_{[Z,Z']}/Z\in\Gamma\}$ elemre:
$\delta_2(a,Z')=\bar{Z}$.

II. Tetszőleges $Z\in\Gamma$, $Z'\in\Gamma'$ kettesnél két esetet különböztetünk meg:

1/ $\delta(Z,\lambda,Z')$ definiált.

Ha $\delta(Z,\lambda,Z')=(\alpha,\alpha')$, ahol $\alpha\in\Gamma^*$ és $\alpha'\in\Gamma'^*$, akkor

$$\begin{cases}\delta_1(\lambda,[Z,Z'])=\alpha.\\ \delta_2(\lambda,[Z,Z'])=\alpha'.\end{cases}$$

2/ $\delta(Z,\lambda,Z')$ nem definiált.

a/ Tetszőleges $a\in\Sigma$ elemre:

ha $\delta(Z,a,Z')=(\alpha,\alpha')$ ahol $\alpha\in\Gamma^*$, $\alpha'\in\Gamma'^*$, akkor:

$$\begin{cases}\delta_1(a,[Z,Z'])=\alpha\\ \delta_2(a,[Z,Z'])=\alpha'\end{cases}$$

b/ Minden $a'\in\Sigma_1$ elemre:

$$\begin{cases}\delta_1(a',[Z,Z'])=\bar{Z}.\\ \delta_2(a',[Z,Z'])=\bar{Z}.\end{cases}$$

III. 1/ $\delta_1(a,\bar{Z})=\bar{Z}$ minden $a\in\Sigma\cup\Sigma_1$ elemre.

2/ $\delta_2(a,\bar{Z})=\bar{Z}$ minden $a\in\Sigma\cup\Sigma_1$ elemre.

A δ_1 és δ_2 konstrukciójából könnyen megállapithatjuk, hogy tetszőleges $\alpha\in\Gamma^+$, $\alpha'\in\Gamma'^+$ szavakra:

<6.12.1>

$$(\alpha,\lambda,\alpha')\ \underset{M}{\overset{*}{\longmapsto}}\ (\beta,\lambda,\beta') \Longleftrightarrow \begin{cases}\text{Létezik olyan } u\in\Sigma_1^* \text{ szó,}\\ \text{amelyre } (u,\alpha)\ \underset{M_1}{\overset{*}{\longmapsto}}\ (\lambda,\beta) \text{ és}\\ (u,\alpha')\ \underset{M_2}{\overset{*}{\longmapsto}}\ (\lambda,\beta')\end{cases}$$

ahol $\beta\in\Gamma^*$, $\beta'\in\Gamma'^*$.

Itt könnyen belátható, hogy az u szó hossza pontosan egyenlő az $\vdash\frac{*}{M}$ relációban való $\delta(Z,\lambda,Z')$ alakú felhasználások számával. Ebből szintén könnyü igazolnunk, hogy tetszőleges $a\in\Sigma$-ra:

<6.12.2> $\{(\alpha,a,\alpha') \vdash\frac{*}{M} (\beta_1 Z,a,\beta_1' Z') \vdash\frac{}{M} (\beta,\lambda,\beta')\}$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Létezik olyan } u=u_1 x_{[Z,Z']}\in\Sigma_1^* \text{ szó, amelyre} \\ (u_1 x_{[Z,Z']}a,\alpha) \vdash\frac{*}{M_1} (x_{[Z,Z']}a,\beta_1 Z) \\ \vdash\frac{}{M_1} (a,\beta_1[Z,Z']) \vdash\frac{*}{M_1} (\lambda,\beta), \quad \text{és} \\ (u_1 x_{[Z,Z']}a,\alpha') \vdash\frac{*}{M_2} (x_{[Z,Z']}a,\beta_1' Z') \\ \vdash\frac{}{M_2} (a,\beta_1'[Z,Z']) \vdash\frac{*}{M_2} (\lambda,\beta') \end{array}\right.$$

Most indukcióval bebizonyitjuk, hogy tetszőleges $w=a_1\ldots a_n\in\Sigma^*$ szóra:

<6.12.3>

$$(Z_o,a_1\ldots a_n,Z_o') \vdash\frac{*}{M} (\beta,\lambda,\beta') \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Léteznek olyan} \\ u_o,u_1\ldots u_n\in\Sigma_1^* \text{ szavak,} \\ \text{amelyekre} \\ (u_o a_1 u_1\ldots a_n u_n,Z_o) \vdash\frac{*}{M_1} (\lambda,\beta) \\ (u_o a_1 u_1\ldots a_n u_n,Z_o') \vdash\frac{*}{M_2} (\lambda,\beta') \end{array}\right.$$

A $w=a\in\Sigma$ esetben az állitás a <6.12.1> és <6.12.2> állitásokból adódik.

Tegyük fel, hogy az állitás minden $w\in\Sigma^*$ n hosszúságú szóra már igaz, és foglalkozzunk tetszőleges $w=a_1\ldots a_n a\in\Sigma^*$ szóval.

Legyen $(Z_o, a_1 \ldots a_n a, Z_o') \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (\alpha, a, \alpha') \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (\beta, \lambda, \beta')$,
ahol $\alpha \in \Gamma^+$, $\alpha' \in \Gamma'^+$, $\beta \in \Gamma^*$, $\beta' \in \Gamma'^*$.

Először az indukciós feltevés szerint kapjuk:

$$(Z_o, a_1 \ldots a_n, Z_o') \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (\alpha, \lambda, \alpha') \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Léteznek olyan } u_o, u_1 \ldots u_n \in \Sigma_1^* \\ \text{szavak, amelyekre} \\ (u_o a_1 u_1 \ldots a_n u_n, Z_o) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (\lambda, \alpha) \\ (u_o a_1 u_1 \ldots a_n u_n, Z_o') \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (\lambda, \alpha'). \end{cases}$$

A folytatásban egyszer-egyszer használjuk a <6.12.1> és <6.12.2> állitásokat úgy, hogy

$$(\alpha, a, \alpha') \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (\beta, \lambda, \beta') \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Létezik két } \bar{u}, u \in \Sigma_1^* \text{ szó, amelyekre.} \\ (\bar{u}au, \alpha) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (\lambda, \beta) \\ (\bar{u}au, \alpha') \overset{*}{\underset{M'}{\vdash}} (\lambda, \beta') \end{cases}$$

Most vegyük: $\bar{u}_n = u_n \bar{u}$, és beláttuk az állitás érvényességét.
A <6.12.3> állitásból könnyen kapjuk, hogy tetszőleges $w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^*$ szóra:

$$a_1 \ldots a_n \in L(M) \Longleftrightarrow (Z_o, a_1 \ldots a_n, Z_o') \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (\lambda, \lambda, \lambda).$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Léteznek olyan } u_o, u_1, \ldots, u_n \in \Sigma_1^* \text{ szavak,} \\ \text{amelyekre} \\ (u_o a_1 u_1 \ldots a_n u_n, Z_o) \overset{*}{\underset{M_1}{\vdash}} (\lambda, \lambda, \lambda) \\ (u_o a_1 u_1 \ldots a_n u_n, Z_o') \overset{*}{\underset{M_2}{\vdash}} (\lambda, \lambda, \lambda) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Léteznek } u_o, u_1, \ldots, u_n \in \Sigma_1^*, \text{ szavak, ame-} \\ \text{lyekre} \\ u_o a_1 u_1 \ldots a_n u_n \in L(M_1) \cap L(M_2). \end{cases}$$

Végül, a következő módon definiáljuk a h homomorfizmust:

1/ $h(x) = \lambda$.

2/ $h(a) = \begin{cases} a & \text{ha } a \in \Sigma \\ \lambda & \text{ha } a \in \Sigma_1 \end{cases}$

3/ Tetszőleges $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ szavakra: $h(w_1 w_2) = h(w_1) h(w_2)$.

Ekkor a $h(L(M_1) \cap L(M_2))$ elemei pontosan az $L(M)$-beli szavak lesznek, azaz $L(M) \cap h(L(M_1) = L(M_2))$.

Ezzel a tétel bizonyitását befejeztük.

A 4.3-, 6.9- és 6.12 Tételekből nyilván adódik a következő tétel.

<u>6.13. Tétel</u> Bármely edo-tipusú L nyelvhez megadható olyan h homorfizmus és két ed2-tipusú L_1, L_2 nyelv, amelyekre $L = h(L_1 \cap L_2)$.

IRODALOMJEGYZÉK

1 AHO,A. - Ullman,J.: The theory of parsing, translation, and compiling.
vol. I-II. Prentice-Hall (1972, 1973).

2 Bagyinszki,J. - Demetrovics,J.: The structure of the class of symmetric languages invariant for inner linear transformations.
In proc.s of second Hung. Comp.Sci.Conf. 100-130 (Budapest, 1977).

3 Bagyinszki,J. - Demetrovics,J.: The lattice of symmetric languages invariant under inner linear transformations.
MTA-SzTAKI Közlemények 19/1978, 7-14.

4 Davis,M.: Computability and unsolvability.
McGraw-Hill (1958).

5 Friedman, E.P.: Simple context-free languages and free monadic recursion schemes.
Mathematical systems theory 11, 9-28 (1977).

6 Gécseg,F. - Peák,I.: Algebraic theory of automata
Akadémiai kiadó, Budapest (1972).

7 GinsBurg,S.: The mathematical theory of context-free languages.
McGraw-Hill, New York (1966).

8 GinsBurg, S. - Greibach,S.: Deterministic context-free languages.
Information and control 9 (1966), 620-648.

9 GinsBurg,S.: Algebraic theory of automata.
Academic Press, New-York (1968).

10 Harrison,M.A. - Havel, I.M.: Strict deterministic grammars.
Journal of computer and system sciences 7 (1973), 237-277.

11 Harrison,M.A.: Introduction of formal language theory.
Addison-wesley, California (1978).

12 Hopcroft,J. - Ullman,J.: Formal languages and their relation to automata.
Addison-wesley (1969).

13 Knuth,D.E.: On the translation of languages from left to right.
Information and control 8 (1965), 607-639.

14 Korenjak, A.J. - Hopcrof,J.E.: Simple deterministic languages.
IEEE conference record of 7th Annual Symposium on Switching and automata theory (1966), 36-46.

15 Kuroda,S.Y.: Classes of languages and linear-bounded automata.
Information and control 7 (1964), 207-223.

16 Myhill,J.: Linear-bounded automata.
Wadd Tech. Note 60-165 (1960)

17 NGO THE KHANH: Simple deterministic machines and their languages.
Computational linguistics and computer languages XIV (1980), 209-242.

18 NGO THE KHANH: Prefix-free languages and simple deterministic automata.
Conference on Math. systems theory /Hungary 1980/, Department of Mathetmatics Karl-Marx University of Economics, Budapest, 1981-I. 67-71.

19 NGO THE KHANH: Simple deterministic machines.
Acta cybernetica, Tom5, Fasc.4, Szeged-1982, 423-440.

20 NGO THE KHANH: Prefix-mentes nyelvek és egyszerü determinisztikus gépek.
MTA-SzTAKI Tanulmányok, Budapest-1982.

21 NGO THE KHANH: Prefix-free languages and simple deterministic machines.
To Appear in Computational linguistics and Computer languages.

22 NGO THE KHANH: Prefix-mentes nyelvek eldöntési problémái.
MTA-SzTAKI Tanulmányok /Megjelenés alatt/

23 Révész, Gy.: Bevezetés a formális nyelvek elméletébe.
Akadémiai Kiadó, Budapest 1979.

24 Salomaa, A.: Theory of automata.
Pergamon Press, Oxford (1969).

25 Salomaa, A.: Formal languages.
Academic Press (1973).

26 Starke, P.H.: Abstrakte automaten.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, (1969).

27 Takaoka, T.: A note on the ambiguity of context-free grammars. Information Processing Letters, Vol. 3 No. 2. (1974). 35-36.

28 Turing, A.M.: On computable numbers with an application to the entscheidmigs problem.
Proc. London Math. Soc. 42 (1936), 230-265.

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1982-BEN MEGJELENTEK

130/1982 Barabás Miklós - Tőkés Szabolcs: A lézer printer képalkotás hibái és optikai korrekciójuk

131/1982 RG-II/KNVVT "Szisztemü upravlenija bazani dannüh i informacionnüe szisztemü" Szbornik naucsno-iszszledovatel'szkih rabot rabocsej gruppü RG-II KNVVT, Bp. 1979. T o m I.

132/1982 RG-II/KNVVT T o m II.

133/1982 RG-II KNVVT T o m III.

134/1982 Knuth Előd - Rónyai Lajos: Az SDLA/SET adatbázis lekérdező nyelv alapjai /orosz nyelven/

135/1982 Néhány feladat a tervezés-automatizálás területéről. Örmény-magyar közös cikkgyüjtemény

136/1982 Somló János: Forgácsoló megmunkálások folyamatainak optimálási és irányitási problémái

137/1982 KGST I-15.1. Szakbizottság 1979. és 80. évi előadásai

138/1982 Kovács László: Számitógép-hálózati protokollok formális specifikálása és verifikálása

139/1982 Operációs rendszerek elmélete 7. visegrádi téli iskola

19 NGO THE KHANH: Simple deterministic machines.
Acta cybernetica, Tom5, Fasc.4, Szeged-1982, 423-440.

20 NGO THE KHANH: Prefix-mentes nyelvek és egyszerü determinisztikus gépek.
MTA-SzTAKI Tanulmányok, Budapest-1982.

21 NGO THE KHANH: Prefix-free languages and simple deterministic machines.
To Appear in Computational linguistics and Computer languages.

22 NGO THE KHANH: Prefix-mentes nyelvek eldöntési problémái.
MTA-SzTAKI Tanulmányok /Megjelenés alatt/

23 Révész, Gy.: Bevezetés a formális nyelvek elméletébe.
Akadémiai Kiadó, Budapest 1979.

24 Salomaa, A.: Theory of automata.
Pergamon Press, Oxford (1969).

25 Salomaa, A.: Formal languages.
Academic Press (1973).

26 Starke, P.H.: Abstrakte automaten.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, (1969).

27 Takaoka, T.: A note on the ambiguity of context-free grammars. Information Processing Letters, Vol. 3 No. 2. (1974). 35-36.

28 Turing, A.M.: On computable numbers with an application to the entscheidmigs problem.
Proc. London Math. Soc. 42 (1936), 230-265.

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1982-BEN MEGJELENTEK

130/1982	Barabás Miklós - Tőkés Szabolcs: A lézer printer képalkotás hibái és optikai korrekciójuk
131/1982	RG-II/KNVVT "Szisztemü upravlenija bazani dannüh i informacionnüe szisztemü" Szbornik naucsno-iszszledovatel'szkih rabot rabocsej gruppü RG-II KNVVT, Bp. 1979. T o m I.
132/1982	RG-II/KNVVT T o m II.
133/1982	RG-II KNVVT T o m III.
134/1982	Knuth Előd - Rónyai Lajos: Az SDLA/SLT adatbázis lekérdező nyelv alapjai /orosz nyelven/
135/1982	Néhány feladat a tervezés-automatizálás területéről. Örmény-magyar közös cikkgyüjtemény
136/1982	Somló János: Forgácsoló megmunkálások folyamatainak optimálási és irányitási problémái
137/1982	KGST I-15.1. Szakbizottság 1979. és 80. évi előadásai
138/1982	Kovács László: Számitógép-hálózati protokollok formális specifikálása és verifikálása
139/1982	Operációs rendszerek elmélete 7. visegrádi téli iskola

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1983-BAN MEGJELENTEK

140/1983 Operation Research Software Descriptions (Vol.1.)
Szerkesztette: Prékopa András és Kéri Gerzson

83.395 Tempó 300 pld,