# tanulmányok 1981/127

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

# N-SZEMÉLYES MINŐSÉGI DIFFERENCIÁLJÁTÉKOK KÉSLELTETÉSSEL ÉS KÉSLELTETÉS NÉLKÜL

Irta:

*LIPCSEY ZSOLT*

Tanulmányok 1981/127

A kiadásért felelős:

*DR VÁMOS TIBOR*

ISBN 963 311 124 2

ISSN 0324-2951

MAHIR - KG-INFORMATIK 81 636

TARTALOMJEGYZÉK

Disszertációm az 1977-ben megirt és megvédett egyetemi doktori dolgozatom átirt, javitott, kissé bővitett változata. A dolgozat átirásánál tekintetbe vettem a doktori dolgozat opponenseinek, Dr. Czáh Lászlónak és Dr.Kósa Andrásnak észrevételeit és javaslatait, továbbá N.N.Kraszovszkijnak, és munkatársának, A.V. Krjazsimszkijnak e disszertációm alaptételéről irott dolgozatomhoz füzött megjegyzéseit.

# BEVEZETÉS

Dolgozatunkban N-személyes Banach és Hilbert tereken lezajló késleltetett és nem késleltetett differenciáljátékok exisztenciaproblémáival foglalkozunk. A témaválasztás jelentőségének jobb megvilágitása érdekében először a differenciáljátékok kutatásainak néhány jellegzetességével foglalkozunk, irodalmi hivatkozások nélkül, hiszen ezek bőségesen megtalálhatók a játékok történetének leirásában.

A differenciáljátékok kutatási eredményeinek zöme kétszemélyes játékokhoz kapcsolódik. Az N-személyes játékok kutatása az 1970-es évek elejével indult meg. A kutatási eredményeket lényegében két csoportba sorolhatjuk:

1. Jellemzést ad a játékban fellépő peremértékfeladatok megoldásaira.
2. Az emlitett peremértékfeladatok megoldhatóságát vizsgálja.

Mint ezt a differenciáljátékok történeténél láthatjuk, a kétszemélyes és az N személyes játékok kutatásainak első lépéseit az 1. csoportba sorolhatjuk. Ennek okát könnyen megérthetjük, ha arra gondolunk, hogy a variációszámitásban például mennyivel könnyebb az extremális pályákat jellemezni,mint a megfelelő optimumfeladat megoldásnak létezését bebizonyitani.

Amellett, hogy az N-személyes játékok kutatása nem nagy multra tekint vissza, a 2. csoportba tartozó minőségi problémák vizsgálatát az is neheziti, hogy itt elkerülhetetlenül kooperativ minőségi játékok problémái kerülnek elő, és ez a problémamegfogalmazást igen szerteágazóvá teszi, és elbonyolitja. Ez magyarázza, hogy N = 2 esetben minőségi problémákkal foglalkozó dolgozatok konkrét feladatokkal foglalkoznak, de legalábbis speciális dinamikáju játékokat vizsgálnak.

A két és N-személyes játékoknál találkozunk azzal a törekvéssel, hogy absztrakt tereken is vizsgáljuk őket. A játékokkal modellezett gyakorlati problémáknál ugyanis gyakran játszanak szerepet véletlen tényezők, és ilyenkor sokszor igen kézenfekvő

- sőt szükséges - a fázispont helyett valószinüségi változót vizsgálni. De absztrakt tereken lezajló játékokhoz vezetnek a parciális differenciálegyenletekkel megfogalmazható játékok is.

Témaválasztásunknak e rövid történeti háttérrel való indoklása után nézzük meg röviden a dolgozat felépitését és az eredményeket:

A 0.§-ban az N-személyes differenciáljátékokat, mint speciális N-személyes klasszikus játékokat definiáljuk. Az N-személyes minőségi játékokat pedig az N-személyes differenciáljátékok egy speciális osztályaként adjuk meg, ami lehetővé teszi, hogy a klasszikus kooperativ játékok mintájára vethessünk fel az egyébként elég nehezen kezelhető problémákat.

Dolgozatunk célja, mint ezt már láttuk, exisztenciaproblémák vizsgálata. A fellépő peremfeladatok megoldásának létezéséhez a peremtől és helytől függő feltételeket kell szabni a játék dinamikájára. Miután az általában variációs módszereken alapuló szükséges feltételek olyanok, hogy ha létezik az adott problémának megoldása, azt egyértelmüen jellemzik, kézenfekvő ezekből kiindulni. Mi az irodalomban található számos módszer közül Kraszovszkij lokális stratégiválasztását vesszük alapul ([16]). A módszere, ha van megoldás, azt megadja. Mi azonban azt is szeretnénk tudni, hogy az adott cél érdekében elég jó e a módszerrel hozott döntés, várható-e a megoldás létezése. Ezért az adott pontban hozott döntést minősitjük, és azt mondjuk, hogy ha tudtunk az adott cél szempontjából elég jó döntést hozni, akkor e feladat szempontjából fölényben vagyunk a többi játékossal szemben. E minősités alapját az képezi, hogy a szóbanforgó módszerben egy az adott ponthoz tartozó funkcionál nyeregpontja lesz a jó stratégiaválasztás. Hogy ez elég e a "nyeréshez", vagyis közelebb visz e a célhoz vagy sem, ezt a funkcionálnak nyeregpontjában felvett értéke alapján döntjük el. A dolgozatban vizsgált négyféle alapfeladatnak megfelelően négy ilyen fölényfogalmat vezetünk be az 1.§-ban, és ezek kapcsolatainak vizsgálata mellett itt vezetjük be a stratégiák lokális megválasztási szabályát is.

A 2.§-ban azt tételezzük fel, hogy egy tartomány minden pontjához megadtuk a pont egy környezetében a célunkhoz "jónak minősitett" stratégiaválasztási szabályt. Azt a kérdést vetjük fel, hogy mely feltételek mellett adható meg minden ponthoz egyértelmüen e lokális stratégiákkal összhangban levő globális stratégiválasztási szabály ugy, hogy bármely kezdetiértékproblémának legyen megoldása? Irodalomból is ismert, hogy ez általában nem lehetséges. Szeparábilis Banach - terek esetére megfogalmazunk egy feltételt, és egy módszert is adunk a "szabályos" halmazok bevezetésével a fenti probléma e feltétel melletti megoldására. Az egyértelmüség elejtésével azonban adunk két módszert, amelyek minden olyan esetben alkalmazhatók, ha a lokális stratégiák értelmezési tartománya nyilt. A szabályos halmaz fogalmához hasonlót Brunovskij vezet be [51]-ben található dolgozatában. Az itt található jellemzéseket és konstrukciókat azonban nem emliti.

A 3.§-ban bemutatott alkalmazásoknál azt mutatjuk be, hogy ha az 1.§-ban definiált "minősitő" feltételek teljesülnek a játékban szereplő peremértékprobléma célhalmazának határpontjaira, akkor az 1.§-ban megadott módszerrel felépitett lokális stratégiaválasztási szabályokat összefüzve a 2.§-ban megadott módszerek közül a megfelelővel, a megfelelő feladat megoldható (azaz az elfutás, vagy elfogás megvalósul). Ennek jelentősége kettős:

1. Exisztencia problémáknál nehéz kérdés, hogy hol kell követelményeket támasztani? Itt e kérdésre egyszerü választ adunk: elfutáshoz elegendő a célhalmaz perempontjait vizsgálnunk, elfogásnál pedig a határpontok vizsgálata biztosithat olyan környezetet, ahonnét kiinduló játék biztosan elfogással végződik.
2. A peremen könnyen ellenőrizhető-e a feltétel? Erre is igenlő választ adhatunk, különösen Hilbert tereken és véges dimenziós tereken. Természetesen ugy értve e választ, hogy a dinamikát leiró egyenlet bonyolultságától eltekintünk.

A bebizonyitott két alaptétel jelentősége az, hogy lehetővé teszi a pálya egy becslése, mint információ alapján az elfutást illetve elfogást a megfelelő feltételek teljesülése esetén. Ezt a dolgozatban csak a késleltetett információju játékokra használtuk fel, de lehetőséget ad más esetekben pontatlan információ melletti "nyerés" biztositására.

A Hilbert terekre vonatkozó eredmények jelentősége az, hogy konvex célhalmazok esetén tisztán csak a fölénnyel megadhatók a már emlitett elfogási-elfutási feltételek. Banach terek esetében a terek geometriája miatt még konvex célhalmazokra is geometriai jellegü megszoritásokat kell tenni. Az adott feltételek élességét mutatja az utolsó két tétel, amely szerint ugy késleltetett, mint pedig nem késleltetett információju esetben bizonyos konvex célhalmazok mellett az elfutásra adott feltétel szükséges és elegendő. Ehhez hasonló eredményeket véges dimenziós esetben Lagunov érte el, de speciális dinamikáju rendszer feltételezésével, és csak egyidejü információ mellett.

E szükséges és elegendő feltételnek érdekessége abban áll még, hogy azt bizonyitjuk be, hogy ha a K koaliciónak nincsen meg a késleltetés nélküli elfutáshoz a fölénye, akkor az $I\setminus K$ (Többiek csoportja) koalició számára van olyan kiindulás, hogy még késleltetett információ mellett is célhoz ér. Ha pedig a K koaliciónak nincsen meg a késleltetett információ melletti elfutáshoz szükséges fölénye, akkor az $I\setminus K$ koalició számára van olyan kiindulás, hogy egyidejü információ mellett biztosan célhoz ér.

Végül pedig a vázolt numerikus eljárás jelentőségére hivjuk fel a figyelmet, amelynek a konvergenciáját biztositják a §. alapfeltételei, és igy mindegyik fent emlitett esetben alkalmazható és ha a megfelelő elméleti tétel szerint egy feladat megoldható, akkor az adott numerikus eljárás egyuttal a feladatot meg is oldja.

A Hilbert tereken konvex célhalmazokkal megfogalmazott problémához még azt tesszük hozzá, hogy ezek a feladatok már magukba foglalják a klasszikus kétszemélyes üldözési elfutási játékokat is.

Ezuton szeretnék köszönetet mondani dr. Kósa Andrásnak dolgozatom elkészitésében nyujtott támogatásáért és értékes tanácsaiért.

# A DIFFERENCIÁLJÁTÉKOK TÖRTÉNETE

A differenciáljátékok problémaköre az 1940-es évek végén kezdett kialakulni. A téma első dolgozata R.Isaacs nevéhez fűződik és 1951. november 17-én jelent meg (Rand Report, P-257, Games of Pursuit). E dolgozatban szerzője még nem használja a differenciáljáték elnevezést és mint maga irja [7] dolgozatában, tartalmaz elemi hibákat.

Az 1950-es években született eredmények zömükben zárt közleményekben jelentek meg. A differenciáljáték elnevezés is ebben az időszakban alakult ki és R. Isaacs-tól származik. Ezzel magyarázható, hogy a játékok problémaköréhez tartozó különböző feladattipusokat nem különböző cikkek sorozatából szokás idézni, hanem R. Isaacs 1965-ben megjelent könyvét tekintjük kiindulási irodalomnak (ld. [6]). A szerző ebben összefoglalja korábbi próbálkozásait és szép rendszerben sok megoldatlan megfogalmazott problémát ad közre természetesen saját eredményei mellett. A könyv nagy jelentősége abban áll, hogy a differenciáljátékoknak szinte valamennyi jellegzetes sajátosságát bemutatja.

A differenciáljátékok továbbfejlődésére igen nagy hatást gyakorló másik jelentős esemény Pontrjagin - Boltjanszkij - Gamkrelidze - Miscsenkó 1962-ben megjelent [37] müve volt. E könyvben szerzői optimális vezérléselméleti problémák megoldására adtak módszert maximumelvükkel, áthidalva a Bellman-függvénnyel kapcsolatos differenciálhatósági problémákat. Ez az eredmény a differenciáljátékok elméletének is első átütő módszere volt, hiszen a vezérléselmélet mint egyszemélyes differenciáljáték, a téma egy fejezetét képezi.

Az egyszemélyes játékok optimális megoldására kidolgozott ut a kétszemélyes játékoknál mindkét fél számára elfogadható - optimális - stratégiapárok keresésére irányitotta a figyelmet. A két játékos ellentétes célját ilyenkor ugy fejezzük ki, hogy egyetlen célfüggvényt adunk meg, melyet az egyik játékos maximalizálni, a másik pedig minimalizálni akar. Az olyan játékokat, ahol mindegyik játékoshoz tartozik egy kifizetőfüggvény, amely kifejezi az illető játékos nyereményét az összes játékos stratégiaválasztásának függvényében, kvantitativ játéknak nevezzük. Ha pedig két személyes játékok esetében a két játékos kifizetőfüggvénye egymásnak minusz egyszerese, ekkor antagonisztikus 0-összegü játékról beszélünk. E játékok megoldásának első próbálkozásai a dinamikus programozás Bellman egyenletének kétszemélyes játékoknál megfelelő Isaacs-Bellman egyenlethez vezettek, amely R. Isaacs 1965-ben megjelent már emlitett [6] könyvében is megtalálható, természetesen igen egyszerü olyan példák kiséretében, amelyeknél az egyenletnek nincsen a módszer alkalmazhatóságához szükséges egyértékü sima megoldása. A Bellman - egyenlet problémáinak feloldásában oly sikeres maximum-elv analógjaként felvetődött egy maximum-minimum- elv felállitásának gondolata az "idő-optimum" illetve egy általánosabb probléma esetében. Az egyik első ilyen eredmény 1962-ben a [17] dolgozatban jelent meg és a [37]-re támaszkodik.

Maga Pontrjagin is ezen az uton indult el [30] dolgozatában. Idevágó eredményeit [31] dolgozatában zárja le, egy egyszerü mellékelt példával, melyre az általa kidolgozott, akkor legáltalánosabb módszer nem alkalmazható.

Hamar kiderült tehát, hogy a vezérléselméletben kidolgozott leghatásosabb módszerek is igen mérsékelt sikerrel alkalmazhatók a differenciáljátékok problémáinal. Némi magyarázattal szolgál azonban, hogy addig, mig egy optimumfeladat legalább $\varepsilon$-optimális megoldásához elegendő, hogy a költségfunkcionál felülről korlátos legyen, optimum létezéséhez pedig elegendő, hogy a funkcionál értelmezési tartománya valamilyen értelemben zárt legyen (és természetesen az értelmezési tartomány ne legyen üres), egy min-max feladat megoldhatóságához az szükséges, hogy a költségfunkcionálnak nyeregpontja legyen. Ha ilyen van, a funkcionálnak e pontban felvett értékét nevezzük a játék értékének. Könnyü példát mutatni arra, hogy a játékban nincs mindkét fél számára elfogadható kompromisszum. Mindkét fél számára elfogadható szituáció olyan stratégiapárt jelent, amelynél mindkét fél biztos lehet abban, hogy ha a nyeregpontot jelentő stratégiapár őt illető komponensét választotta, a másik félnek érdeke a másik komponens választása. Ez egyuttal azt is jelenti, hogy költségfüggvény tulajdonságai alapján információt nyerhetünk a másik játékos választásáról és ennek az a feltétele, hogy a játéknak legyen értéke.

Ha azonban nincs a játéknak értéke, valamilyen feltevéssel kell élnünk a másik fél választott stratégiájáról. Az egyik szokásos ilyen feltevés szerint minden $t$ időpontban ismertnek tételezzük fel a másik játékos választását valamennyi $t'$, $t' \leq t$-re. A megengedett egyenlőséget annak határeseteként értelmezhetjük, hogy kisebb késéssel nyerünk információt az ellenfélről, mint az rólunk. Gyakorlati szempontból természetesen erősen vitatható ez a feltevés, mint ezt R.Isaacs megjegyzi a már emlitett [7] (1974-es cikkgyüjtemény) dolgozatában, mégis még ugyanabban a cikkgyüjteményben igen neves szerző (Pschenichnij) él azzal a feltevéssel, hogy az ellenfél stratégiáját egy kis intervallumon előre ismeri. Ez is mutatja, hogy nem könnyü a szóbanforgó kisegitő feltevést ugy megválasztani, hogy a kapott matematikai modell kezelhető is legyen és játékot modellezzen.

A fenti feltevés mellett az a feladatunk, hogy adott peremfeltétel megoldásához vezető stratégiapárt adjunk meg, általában optimalitási kritérium nélkül. Ez a játékokkal modellezett gyakorlati problémáknak azt a jellegezetességét tükrözi, hogy elsődleges kérdés a peremfeltétel megoldása (azaz az adott cél elérése), és csupán másodlagos az optimális elérése. E megondolások vezettek a minőségi játékok fogalmának kialakulásához, ahol a játék célja az adott peremfeltételek teljesitése.

E fejtegetések mintegy tükörképét adják az 1964-65 évet követő 4-5 éves időszak kutatásainak.

A már emlitett - 1966-ban megjelent - [31] dolgozatában Pontrjagin rámutatott a min-max elven alapuló variációs módszerek korlátaira. Egyuttal felmerült az igény uj módszerek keresése iránt. Az utkeresés jelentős állomását jelentette Pontrjagin 1967-es Los angelesi utja, melynek során több előadást tartott eredményeiről különböző amerikai városokban (ld. [33]). A továbbhaladáshoz szükséges lökést ezen utja során E.Pollakkal a Berklini egyetem professzorával folytatott beszélgetés adta. Polak kifejtette, hogy véleménye szerint a lineáris játékok problémáit minden addiginál általánosabban lehetne megoldani, a linearitás felhasználásával. Ez azért volt igen figyelemre méltó, mert a [31] dolgozat függelékének ellenpéldája egy igen egyszerü lineáris játék volt, másrészt [32] dolgozatában a [31] dolgozat nemlineáris módszereit próbálja lineáris játékokra általánositani. Amerikai utját követően (ld. a [33] dolgozatok) lineáris játékokkal foglalkozik. Az elfogást tárgyalja, de nem variációs módszerekkel, hanem a linearitás felhasználásával. Dolgozataiban azzal a feltevéssel él, hogy az elfogó játékos stratégiaválasztásához ismeri az ellenfél választását az adott időpillanatban, vagyis információs fölényben van. Bár második dolgozatának módszere "optimális" megoldást ad az "időoptimum" feladatra, nem törekszik optimális stratégiákra, csupán az elfogás időpontjára ad felső korlátot.

Pontrjagin dolgozatát számos lineáris játékokkal foglalkozó dolgozat követte. Ezek egyrészt az állandó együtthatós esetre kidolgozott módszert igyekeznek általánositani változóegyütthatós lineáris rendszerekre, másrészt az elfogási idővel, mint funkcionállal megadott mennyiségi játéknak próbálják a nyeregpontját meghatározni. Pontrjagin módszerét általánositja Nyikolszkij 1969-ben megjelent [21] dolgozatában.

A linearitást Pontrjagintól eltérően felhasználó két utat kell kiemelnünk, melyek egyuttal az elfogási időre vonatkozó minimax problémát is megoldják. Az egyik ut Psenyicsnyij nevéhez füződik, (ld. [38]), és konvex irányitási tartományok feltételezése mellett módszere konvex halmazoknak hipersikkal való elválaszthatóságán alapszik.

A másik módszer Kraszovszkijtól és munkatársaitól származik. Az ide kapcsolódó dolgozataik (ld. pl. [8]) eredményeit és a módszert Kraszovszkij 1969-ben megjelent [9] könyve foglalja össze. A módszer lényege, hogy geometriailag keresi meg az elfogó játékos számára azt a $p_0$ célpontot valamely $\tau$ időpontban, amellyel az elfutó játékost legjobban megközelitheti annak bármely stratégiája mellett. (Ez valójában egy min-max feladat geometriai megoldását jelenti.) E $p_0$ pont optimális elérése pedig Pontrjagin maximumelvét alkalmazza. Könyvében sok alkalmazást mutat be.

1969-ben jelent meg Pontrjaginnak és Miscsenkónak [34] dolgozata, amelyben bebizonyitanak egy elfutási tételt lineáris játékokra. Ez volt a differenciáljátékok történetében az első ilyen általános elfutási tétel. A dolgozat módszere ezuttal is a linearitáson alapszik, nem használ optimalitási kritériumokat. A $t$-beli stratégiaválasztásnál ismertnek tételezi fel az ellenfél stratégiáját minden $t' \leq t$ időpontban. A módszert Pontrjagin több lépésben továbbfejlesztette, eredményei a maguk nemében egyedülállóak.

A mennyiségi játékok megoldását jelentő nyeregpont létezésének kérdésénél felmerült nehézségek természetesen nem csupán a minőségi játékok irányában terelték a kutatásokat, hanem számos szerző a nyeregpont létezésének kérdését vizsgálta. Mint emlitettük, ez a kérdés a lineáris játékok kutatóit is foglalkoztatta.

Az egyik kifejezetten a játék értékével foglalkozó dolgozat Petroszjan nevéhez füződik, aki geometriai kényszerek mellett vizsgálja meg a játék értékének létezését nemlineáris játékokra (ld. [24]).

Itt kell megemlitenünk A.Blaquiere, F. Gerard és G. Leitman [48] könyvét. Első felében a szerzők a nyeregpont meghatározásának variációs módszereivel foglalkoznak. Egyrészt szükséges, másrészt elegendő feltételt adnak az optimális pályák létezésére. Utóbbiakat a "szakadási felületek" vizsgálata utján adják azáltal, hogy feltételeket adnak az Isaacs-Bellman módszer számára rossz esetek kizárására. A könyv második fele kétszemélyes minőségi játékokkal foglalkozik. Módszerének lényege az, hogy a játék alaphalmazát három részhalmazra bonthatjuk: Az egyik azon pontok halmaza, ahonnét az első játékosnak van olyan stratégiaválasztása, hogy az ellenfél bármilyen választása mellett célt ér. A második játékos számára is megadhatunk ilyen halmazt, végül e két diszjunkt halmazt választja el a harmadik. Természetesen mindegyik halmaz lehet üres. A könyv azt az esetet vizsgálja, amikor az elválasztó halmaz felület, amelyet egy folytonosan differenciálható függvény 0 nivófelületeként jellemezhetünk. A mü egy többéves kutatási periódust foglal öszsze, amit a benne található irodalmjegyzék tanusit, részben összefoglaló, bevezető jellegü.

Még egy fontos utat kell megemlitenünk ebből az időszakból. Varaya Pr. [44] dolgozatában 1967-ben dinamikus rendszerekkel leirt játékok egy osztályára bizonyitja be, hogy a játéknak létezik értéke. Ugyancsak a játék értékével foglalkozik 1969-ben megjelent [49] dolgozata. A dinamikus rendszerekkel való megközelitésben az a fontos pozitivum rejlik, hogy az egészen konkrét differenciáljátékok vizsgálatától kiindulást jelent általánosabb vizsgálatok irányába.

Módszerében érdekes Petrovnak 1970-ben megjelent dolgozata, aki az időtartamot felosztva részintervallumonként adja meg "$\varepsilon$ - optimális" stratégiáit, majd $\varepsilon \to 0$ mellett belátja, hogy ezek limesze nyeregpont-stratégia.

Petroszjan egy dolgozatára hivjuk fel még a figyelmet, mielőtt az 1970-es évekre áttérnénk. 1970-ben jelent meg a [27] dolgozat, és nem teljes információs játékokkal foglalkozik. Dolgozatában a már emlitett információs problémának azt a megoldását vitatja, jogos-e egy adott $t$ időpontban a stratégiaválasztáshoz az ellenfél ezen időpontbeli stratégiájának a felhasználása. Dolgozata játékelméleti módszereken alapszik és feltünnek a kevert stratégiák, amelyeknél a játékos véletlen törvényszerüségek alapján választ stratégiát. A kevert stratégiákhoz kapcsolódik még Smoljakov [41] dolgozata.

A 60-as években számos kutatási irányzat alakult ki és az 1970-es évekre felmerült a kutatási eredmények összefoglalásának, rendszerezésének igénye. Ennek eredményeképpen irányitáselméleti és optimalizálással foglalkozó konferenciákon megjelenik a differnciáljátékok önálló témája.

Az 1969-es nizzai konferenciáról kiemeljük a differenciáljátékok témakörének képviselőjeként Pontrjagin nevét. A szerző itt az elfutásról szóló lineáris játékokra vonatkozó eredményeit ismertette, melyek a már emlitett [34] dolgozat eredményeinek továbbfejlesztései. Egy másik fontos lépcsőt jelent Kraszovszkijnak itt megjelent dolgozata. Tovább folytatja geometriai jellegü vizsgálatait minőségi játékok esetében. Láttuk, hogy a minőségi játékok korábbi módszerei azon alapultak, hogy az egyes játékosok számára "jó" kiindulási pontok halmazát alkalmas differenciálható függvény nivóhalmazaival jellemezhetjük. (Ld. [48]), és ilyenkor e függvény gradiense segitségével felállitott lokális min-max elv alapján választhatjuk meg stratégiánkat. Kraszovszkij is megfogalmaz egy lokális min-max elvet, melyhez azonban nem szükséges az emlitett sima függvény létezése. Ezzel részletesebben Kraszovszkij könyvénél foglalkozunk majd. (A fenti dolgozatok megtalálhatók a [14]-ben.)

Ugyanebben az évben rendezték meg az első differenciáljátékokról szóló nemzetközi konferenciát Massachusett egyetemén Amherstben (ld. [50]). E konferencián már megjelentek a végtelen dimenziós tereken megfogalmazott konvex-konkáv játékok, és alkalmazásaik parciális differenciálegyenletekre. Ezek az eredmények Bensoussan nevéhez füződnek.

1970-ben két szimpózium is foglalkozott differenciáljátékokkal. Az egyik a varennai hatás-ellenhatás matematikai modelljeivel foglalkozó nyáriiskola, a másik pedig az American Automatic Control Council-nak a Georgia Institut of Technology atlanti intézetében tartott 1970 évi szimpóziuma.

A varennai nyáriiskola kiadványa szerkezetileg négy részre bomlik (ld. [51]). Az első részben öt neves szerző összefoglalja a differenciáljátékokra vonatkozó alapismereteket bevezető tanulmányok formájában. E tanulmányok témái röviden az alábbiak: Berkovitz az egészen hagyományos variációs uttal foglalkozik, A. Blaquire tanulmánya a már emlitett [48] könyvének módszereit követi. Friedman egzisztenciaproblémákkal foglalkozik. Eljárása azon alapszik, hogy az intervallum felosztása után részintervallumonként ad meg a nyeregponthoz alulról és felülről közelitő stratégiákat. Bebizonyitja, hogy létezik limeszstratégia, amelyhez tartozó költség éppen a játék értéke. Ki kell emelnünk R.T.Rockafellar dolgozatát, aki duális jellemzést ad a nyeregpontra, Varaya eredményeivel pedig [44] dolgozata kapcsán már foglalkoztunk.

A második részből az első három dolgozatot emlitjük: Aubin pareto minimum elvét, A. Bensoussan konvex-konkáv funkcionálok nyeregpontjáról szóló dolgozatát. Az utóbbi dolgozatban az eredmények számos alkalmazását találjuk diffuzió-egyenletre és egyéb parciális differenciálegyenletekre. Végezetül P. Brunovszkij dolgozatának a jelen dolgozat szempontjából az a jelentősége, hogy ő vezette be dolgozatában az elnyelő-taszitó halmazok fogalmát, amelyekhez dolgozatunk eredményeinek egy része kapcsolódik. Elnyelő halmazon olyan halmazokat értünk, amelyekre teljesül, hogy ha az egyik játékosnak sikerül a halmaz határára juttatni az állapotvektort, akkor azt is el tudja érni, hogy a halmazból sohase jusson ki. Taszitó egy halmaz akkor, ha a célhalmazra valamelyik tulajdonság teljesül.

Az emlitett amerikai szimpóziumnak egy négy dolgozatból álló összefoglaló tanulmánya jelent meg a differenciáljátékok témaköréről (ld. [52]). Az első dolgozat a differenciáljátékok helyzetét elemzi és az elért eredmények kritikáját adja. A szerző rámutat arra, hogy a kétszemélyes játékok esetében eddig elért eredmények nem kielégitőek a gyakorlat tükrében. Az 1970-es évekig is általánosan elfogadott az a feltevés, hogy egy adott $t$ időpillanatban a döntést hozó játékos felhasználhatja az ellenfél ezen időpontbeli döntését. Márpedig ugy közgazdasági, mint katonai alkalmazásoknál az időeltolódás igen alapvető sajátosság. A másik fontos, az elméletben figyelmen kivül hagyott tényező az, hogy egy adott játék során az elfutó-elfogó szerep nem állandó a gyakorlatban. Gazdasági alkalmazások esetében pedig általában több csoport alakul ki, és e csoportok a játék során keverednek is, érdekeik függvényében. A sztochasztikus játékokról szóló dolgozat szerzője értékeli az e témában kialakult kis számu irányzatot. A klasszikus játékelméletben olyan központi szerepet játszó kevert stratégiákat itt nem tekinti oly sikeresnek. A véletlen törvényszerüségek bevezetésének szükségességét a kiindulási adatok pontatlan ismeretével, a stratégia felépitéséhez szükséges információ pontatlanságával illetve hiányosságaival és a dinamikába belejátszó véletlen tényezőkkel indokolja.

Végül a negyedik dolgozat, amely E. Roxin nevéhez füződik, a játék értékének problémáját boncolgatja. A probléma megoldásának kulcsát a variációs módszer Berkovitz Blaquiere féle elég bonyolult javitott változatával szemben más, a szakadási felületekkel nem bajlódó módszerekben jelöli meg. Kiemeli Varaya és Friedman már emlitett módszereit. Felhivjuk a figyelmet e cikkgyüjtemény végén közölt irodalomjegyzékre, amelyben felsorolt 367 dolgozatot a téma 1970-ig megjelent teljes irodalmának tekinthetjük.

A differenciáljátékok helyzetével foglalkozó dolgozatok közül fontos helyet foglal el Miscsenkó [19], 1971-ben megjelent dolgozata. A szerző ebben Pontrjagin körül kialakult Sztyeklov intézeti iskola eredményeit értékeli. Ezek az eredmények három téma köré csoportosulnak: 1. A két játékos közül az egyik determinisztikusan játszik. 2. Az egyik játékos véletlen törvényszerüség szerint játszik, a másik játékos pedig irányitani próbál. 3. Mindkét játékos játszik. Az utolsó témakörben a legjelentősebb eredmények Pontrjagin már emlitett eredményei. A véletlen stratégiát tartalmazó játékkal kapcsolatosan Pontrjaginnak, Miscsenkónak és Kolmogorovnak közös dolgozatait emliti a szerző, amelyek a még ma is alig müvelt sztochasztikus differenciáljátékok témaköréhez kapcsolódnak.

Az 1970-es évek kutatásainak főbb irányvonalaihoz eljuthatunk eddigi elemzéseink folytatásával. Láttuk, hogy a differenciáljátékok értékének létezése körüli problémák információs problémákhoz vezettek. Érték nem létezése esetén feltevéssel kellett élnünk ugyanis a másikról a stratégia felépitésekor felhasználható ismereteket illetően. A szokásos áthidaló feltevés erős kritikát kapott az emlitett [52] cikkgyüjteményben. A kutatások másik meghatározó tényezőjét a meglévő eredmények összessége jelentette. Láttuk, hogy üldözés, elfutás és minőségi játékok témáiban a lineáris játékok vizsgálata lényegében lezárult. Továbbra is élő probléma maradt azonban a játék értékének létezési problémája. E megjegyzések összefoglalásaképpen az alábbi főbb témák köré csoportosithatjuk az 1970-es években megjelent dolgozatokat: 1. Nem teljes információju játékok, 2. Nemlineáris minőségi játékok, 3. A játék értékének kérdése. Végül egy negyedik témát emlitünk, melynek eddig nincsenek előzményei, ez pedig az N-személyes játékok. Ebben az utóbbi témában minőségi játékok vizsgálata egészen konkrét problémák megoldásáig jutott el a mai napig, mennyiségi kérdéseket pedig főképpen variációs módszerekkel vizsgálnak.

Kezdjük az időszak irodalmának áttekintését a nemlineáris játékok minőségi problémáinak vizsgálatával. Két dolgozatot említünk átmenetként a lineáris problémákról a nemlineárisakra: Az egyik Pontrjagin (ld. [36]), a másik Gamkrelidze és Haratisvili (ld. [4]) nevéhez füződik. Pontrjagin dolgozata a jelzett cikkgyüjteményben az elfutásra vonatkozó eredményeinek legkifinomultabb módszerét tárgyalja. Igen szép dolgozat, amelyben leirt módszer minőségi játékok témakörében egyedülálló. Gamkrelidze és Haratisvili dolgozatukban Pontrjagin eredményét általánositják nemlineáris jobboldalu, lineáris, állandóegyütthatós n-edrendü baloldalu differenciáljátékokra. Módszerük alapja hasonló Pontrjaginéhoz, nevezetesen hogy a megoldást alkalmas alakban előállitják és az előállitás ismeretében határozzák meg az elfutó stratégiát.

Igazán nemlineáris differenciáljátékok témaköréhez tartozó, alapvetően uj módszereken nyugvó eredményeket Kraszovkij és Szubbotin publikáltak a minőségi játékok témakörében. Első idevágó eredményeik az 1970-71 közötti dolgozataikban találhatók meg (ld. [11], [15]). E módszerek alapját képezik annak a nagy összefoglaló könyvnek, amely 1974-ben jelent meg és mindezeket az eredményeket tárgyalja. A [20] dolgozattal együtt Kraszovszkij--Szubbotin munkásságát a [16], 1974-ben megjelent könyvük alapján ismertetjük.

Jelen dolgozat szempontjából igen fontos geometriai módszert mutat be Lagunov [18] dolgozatában. Eredménye rokon, de élesebb mint Brunovszkij [51]-ben megjelent már emlitett dolgozatának eredményei. Ami alapvetően uj, az, hogy elfutásra a célhalmaz felületén fogalmaz meg feltételt. Dolgozatának korlátját az jelenti, hogy csak differenciálgeometriai eszközökkel tudja a felületre megfogalmazott feltételeit kezelni és ezért csak egy kodimenziós kétszer folytonosan differenciálható felületre tud feltételt adni. További korlátozó feltevés dolgozatában az, hogy a jobb oldal két egyenként egy játékostól függő tagra esik szét (azaz a két játékos "függetlenül" irányithatja a rendszert). Ez a feltétel pedig esetében biztositja a lokális nyeregpont létezését. Ami viszont eredményének élességét mutatja, a fenti feltételek mellett szükséges és elegendő feltételt fogalmaz meg elfutásra.

Megemlitjük még Nyikolszkij dolgozatát, aki dinamikus rendszerek esetére bizonyit be elfutási tételt 1972-ben megjelent [23] dolgozatában. Nyikolszkij munkássága a nem teljes információju rendszerekhez is kapcsolódik, idevágó eredményei megtalálhatók az 1971-ben megjelent [22] és [54] dolgozataiban. Ő a nem teljes információt ugy érti, hogy az irányitáshoz az állapotvektornak csupán a vetületét ismeri és lineáris esetben Pontrjagin módszerét próbálja általánositani.

A differenciáljátékok értékének létezése mint emlitettük továbbra is élő probléma maradt. E témából három dolgozatot emelünk ki. Kettő Petrov nevéhez, a harmadik pedig Friedman nevéhez füződik. Petrov 1970-ben megjelent [28] dolgozatában üldözési játékokról mutatja meg a két játékos távolságával megfogalmazott három költségfüggvény mellett, hogy létezik nyeregpont. Az 1973-ban megjelent [29] dolgozatában azonban példát mutat olyan üldözési játékra, amelynél a megfogalmazott költségfüggvénynek nincsen nyeregpontja. Friedman [33] dolgozatában szintén a játék értékének létezésével foglalkozik.

Az eredmények összefoglalásának helyzetfelmérésének az igénye továbbra is megmutatkozik. 1973-ban jelent meg A. Blaquiere gondozásában az [1] cikkgyüjtemény. Az 1970-es évek kutatásainak irányvonala tükröződik abban, hogy e cikkgyüjteményben már önálló helyet kapnak az n-személyes mennyiségü játékok.

Bevezető cikkében Isaacs elemzi a differenciáljátékok történetét. Mondanivalóját röviden ugy összegezhetjük, hogy véleménye szerint a differenciáljátékok matematikai kezelésének még mindig nem alakult ki a kellőképpen rugalmas módszere. Tehát bizonyos értelemben még mindig az utkeresés stádiumában vagyunk. Sorra veszi az egyes témákat. A kevert stratégiákról igen érdekes véleményt ir: feltehetően a vezérléselméleten nevelkedett fel a játékelmélész nemzedék és ezért kerülik ezt a megoldási módszert.

A 0-összegü játékok témaköre, mint a nyeregpont keresésének kérdése, továbbra szerepel. E témában Psenyicsnyij irt egy dolgozatot az $\varepsilon$-stratégiákról, melyek segitségével a játék értékének létezésére ad bizonyitást, természetesen bizonyos feltételek mellett. Asszimetrikusan kezeli a játékosokat és ennek megfelelően stratégiapárokat ad meg, méghozzá egy helytől függő $\varepsilon(z)$ időtartamra. A gyüjtemény második dolgozatának szerzői A. Blaquiere és P. Caussin, akik Banach terekre általánositják korábbi, az Isaacs-Bellman egyenlethez kapcsolódó eredményeiket. Ezt egy nem teljes információju játékról szóló dolgozat követi. A szerző a stratégiák megadásánál nem használja fel az ellenfél adott időpontbeli adatait. A feladatot végül is egy variációs min-max elvre vezeti vissza. Hasonló témáju Ciletti dolgozata is.

A nem 0-összegü, n-személyes játékokkal foglalkozó rész dolgozatai a pareto-egyensuly jellemzésével a Nash-féle egyensuly létezésével és koaliciós játékokkal foglalkoznak. A pareto egyensulyra Blaguiere és Juricek a variációs módszert általánositják. Az irányitásban fellépő átkapcsolási problémákat itt is a korábbi, szakadási felületek osztályozásának módszerével próbálja megoldani. Stalford és Leitman adnak elegendő feltételt N-személyes játékok esetében Nash-féle egyensulypont létezésére. Egy dolgozat foglalkozik a koaliciós játékokkal, amelyek lényege, hogy az együttes haszon növelésének érdekében egyéni hasznuk figyelmen kivül hagyásával az egy koalicióba tömörülő játékosok a koalició közös költségfüggvényét igyekeznek maximalizálni. Juricek ez esetben is a variációs módszert alkalmazza a probléma megoldására.

Összefoglalásképpen azt mondhatjuk, hogy a cikkgyüjtemény szerzői a differenciajátékok témakörének viszonylag fiatal, időszerü kérdéseit vizsgálják, melyek megoldásánál - természetesen - a leghagyományosabb variációs módszert igyekeznek alkalmazni és általánositani.

1974-ben két nagyobb lélegzetü kiadvány jelent meg a témában. Az egyik Kraszovszkij és Szubbotin [16] könyve, a másik a Journal of Optimization c. folyóirat Leitman és Ho szerkesztésében kiadott [53] különszáma.

Kraszovszkij és Szubbotin könyvükben az 1969 óta eltelt időszak alatt elért eredményeiket foglalják össze, amelyek egy szép és erős geometriai módszert eredményeztek általános nemlineáris kétszemélyes differenciáljátékok minőségi problémáinak megoldására. Módszerük első igen lényeges mozzanata, hogy általánositott trajektoriákkal dolgoznak. Ez azt jelenti, hogy trajektoriának tekintik az olyan görbéket is, amelyek töröttvonalak egyenletes limeszeként előállnak. Ezért sok, a variációs módszernél megoldhatatlan szakadási problémákhoz vezető feladatnak is lesz általánositott megoldása. Módszerük másik fontos eleme, hogy a korábbi minőségi játékokra alkalmazott módszerekkel ellentétben nem igényli a célhalmazt és a játékosok számára "jó" kiindulási pontok halmazait jellemző sima függvény létezését. Ehelyett minden pontban egy geometriai meggondolások alapján felépitett függvény lokális nyeregpontjának megadása utján választja meg stratégiáját. Végezetül fő eredménye, amelyet azután rengeteg problémára alkalmaz, egy alternativa tétel, amelyben jellemzi az elfutó illetve elfogó játékosok számára "megfelelő" pontok halmazát. Belátja azon pontok halmazáról, ahonnét lehetséges az elfogás egy véges időn belül, hogy zárt. Igy természetesen a komplementer nyilt. Mennyiségi játékokra való alkalmazások lényege, hogy a zárt "elfogási tartományon" a "folytonos" funkcionál felveszi minimumát vagy maximumát. Tekintettel azonban arra, hogy a zártságot a szerzők általánositott trajektoriák segitségével bizonyitották, igy a szóbanforgó zárt halmaz nem üres volta esetén a szerző általában egy $\varepsilon$-optimális megoldás létezését tudja biztositani. A könyv érdekessége, hogy kevert stratégiákkal is foglalkozik, melyeket mint emlitettünk, Isaacs hiányolt [1]-ben irt összefoglalójában.

Mint ez az [53] cikkgyüjteményen is tükröződik, a differenciáljátékok sztochasztikus megközelitése, kevert stratégiák felépitése ebben az időszakban kezd teret hóditani. Megemlitjük ezzel kapcsolatban, hogy az 1974-ben megtartott Stochastic Control szimpoziumon, bár meghirdetett témaként szerepelt a differenciáljátékok, elfogadható dolgozat nem érkezett be.

(Összehasonlitásként vezérléselméleti témáju szimpoziumon már 1969-ben helyet kaptak a differenciáljátékok.) A szóbanforgó különkiadás dolgozatainak több mint fele valamilyen formában a sztochasztikus differenciáljátékok témakörébe tartozik. D.J. Wilson lineáris kvadratikus differenciáljátékok esetében ad kevert stratégiák felhasználásával megoldást. Dolgozatának érdekessége, hogy absztrakt Hilbert téren fogalmazza meg először a problémát, és megoldása után alkalmazza differenciáljátékokra. Lineáris, kvadratikus problémát old meg késleltetett zajos információval K. Movi és E. Shimemura. A zajos késleltetett információt csupán az első játékosról tételezik fel a szerzők, a másodiknak a teljes információ a rendelkezésére áll. Az első játékos egy optimális állapotbecsléssel helyettesiti a hiányzó információját és igy ad meg optimális stratégiakonstrukciót. Y.C. Ho dolgozatában az előzetes és késleltetett ismeretek felhasználásával próbál minimax feltételeket adni sztochasztikus játékokra. Végül W.H. Hartman az N-személyes csoportmunka esetét vizsgálja, ami olyan N-személyes játékot jelent, amelyben egy költségfüggvény szerepel.

A további determinisztikus problémát taglaló dolgozatok numerikus módszerekkel, késleltetett információju rendszerekre általánositott variációs módszerekkel és a Nash-féle egyensulypontra adandó feltételekkel foglalkoznak.

A Journal of Optimization c. folyóirat 1976. januári ([55]) száma a differenciáljátékok témájáról szóló különkiadás. A különszám szerkesztője G. Leitmann. Az ide beérkezett dolgozatok legnagyobb része továbbra is a differenciáljátékok információs szerkezetéhez kapcsolódik. Uj témaként jelentkezik absztrakt tereken az extremális vektorok, multikritériumok szerint optimális megoldások keresése. Végül üldözési, elfutási feladatok, illetve egy lineáris játékokkal foglalkozó dolgozat szerepel a cikkgyüjteményben.

Az utóbbi évek kutatásaiban szinte feltámadtak a nyeregpont, egyensulypont létezésével és egyensulyi stratégiák konstruktiv előállitásával foglalkozó dolgozatok. Bernhard dolgozatában

([59]) szükséges és elegendö feltételt ad teljes információju, nem korlátos kontrol paraméterü lineáris játékok esetén egyensulyi stratégiák létezésére. Számos szerző foglalkozik nem teljes információju rendszerek egyensulypontjának kérdésével (ld. pl.[76], [79], [81]). [62] dolgozatában Csencov konstruktiv módszert mutat kétszemélyes játék esetében az ilyen stratégiák felépitésére. A szóbanforgó kérdéskör érdekes, uj oldalára hivja fel a figyelmet [70] dolgozatában Jumarie, aki a nyeregpontok stabilitási tulajdonságait vizsgálja és az első játékos optimális választásával nyert rendszer strukturális stabilitási tulajdonságai alapján elemzi a második játékos választási lehetőségeit.

Ugyancsak stabilitási módszerrel ad megoldást Leitman, Skowronszkij [75] dolgozatában az elfutási problémákra olyan célhalmaz esetén, ahol a célhalmaz Ljapunov függvénnyel jellemezhető. Ezzel egyuttal áttértünk a minőségi játékok témájára. Itt egyaránt sok szerző foglalkozik Pontrjagin - Miscsenko eredményeinek nemlineáris játékokra való általánositásával (ld. [66], [80]). A másik irány több személyes minőségi játékok kutatása. Ebben a témában is az előbb idézett eredményekhez hasonlóan két, legfeljebb három személyes elég konkrét problémákat vizsgálnak a szerzők (ld. pl. [65], [83]).

A differenciáljátékok problémakörének sokat tárgyal és nehéz pontja a szintézis, ami továbbra is sok szerzőt foglalkoztat. Az eddigiekhez képest uj megközelitést Bradley, és Yu adnak [60] dolgozatukban. A játékproblémát először a célhalmaz adott határpontjának alkalams környezetében oldják meg. Ha ezután "féligáteresztő" karakterisztikus felületet nyernek, ezt tekintve célhalmaznak, ujra ismétlik az eljárást. Megmutatják, hogy az eddigi módszereknél lényegesen eredményesebb az eljárásuk. Ugyancsak a szintézis problémaköréhez kapcsolódnak Kraszkovszkij [79] és Brunovszkij [61] dolgozatai.

Végül az információ problémája differenciáljátékok esetében tovább élesedett azért, mert ma már az egyre bővülő elméletet a gyakorlatban is alkalmazzák. Ehhez pedig ez a fontos kérdés egyre pontosabb tisztázásra szorul (ld. [64], Hajek dolgozatát).

Több szerző foglalkozik közelitően ismert állapoton alapuló stragétiaválasztással konkrét játékok esetében (ld. pl. [86], [67]), ill. késleltetett információju és dinamikáju rendszerekkel (ld. pl. [74]).

Foglaljuk össze röviden a differenciáljátékok témakörében kialakult főbb irányvonalakat és a jelenleg is fontos kérdéseket:

A differenciáljátékok kutatásának első próbálkozásai két személyes játékok esetében a variációs módszeren alapultak. E módszer azonban egyrészt elsősorban szükséges feltételt szolgáltatott a nyeregponti stratégiák megadására, másrészt sok szakadási problémához vezetett, nem volt elég hatékony. A variációs módszer, mint első próbálkozás, minden ujabb játéktipusnál ujra és ujra jelentkezik, igy absztrakt tereken lejátszódó két személyes játékoknál, N-személyes játékoknál és késleltetett információju játékoknál.

A differenciáljátékoknál fellépő peremértékfeladatok megoldhatóságára vonatkozó elegendő feltételt biztositó valamennyi tétel bizonyitása konstruktiv eljárást igényel (ideértve a variációs módszerekhez kapcsolódó elég bonyolult elegendő feltételeket is). A variációs módszerek bonyolultsága miatt a kutatások iránya leginkább a szakaszonként állandó illetve szakaszonként megadott közelitő stratégiákhoz vezetett. A lineáris játékok esetében nagy előnyt jelentett az a tény, hogy a megoldás konkrét alakban előállitható.

Fontos probléma az információ kérdése. Ha a játéknak nincs értéke, vagy egyensulypontja, ugy nincs olyan stratékiaválasztásuk, amely a másikat arra késztetné, hogy ő is egy meghatározott stratégiát válasszon. Ilyen esetben az egyik lehetőség az, hogy feltételezzük, hogy kisebb késéssel veszünk tudomást az ellenfél választásáról, mint az a mienkről. A másik ut az, hogy véletlen stratégiaválasztás segitségével "nagy valószinüséggel" nagy nyereségre szert tenni. Mindkét felfogás eredményes lehet optimális stratégiák megadására is, ha a játéknak van értéke. Az előző módszer az irodalomban gyakori (különösen a nem késleltetett határeset), mig az utóbbi most kezd teret hóditani.

A jelenlegi kutatásokról azt mondhatjuk, hogy továbbra is élő probléma jól használható elgendő feltételek megadása egyensulypont létezésére, illetve a fellépő peremfeltételek megoldhatóságára. Hasonló a helyzet lokálisan megadott optimális stratégiák (kielégitó stratégiák) összekapcsolásával globális optimális (kielégitő) stratégiákká. Nyitott probléma még a sztochasztikus játékok információs problémája is.

Dolgozatunkban Brunovszkijnak az [51]-ben található irása, Lagunov [18] dolgozata és Kraszkovszkij-Szubbotin munkássága ( [16] ) alapján egy geometriai módszert adunk nemlineáris N-személyes késleltetett Banach-tereken lezajló játékoknál fellépő peremfeladatok vizsgálatára. Minőségi problémák megoldhatóságát vizsgáljuk és ilyenek megoldhatóságára illetve meg nem oldhatóságára adunk a módszer alkalmazásaként elegendő feltételeket.

# 0.§ ALAPVETŐ FOGALMAK

A differenciáljátékok a játékelméletnek az utóbbi 10-15 évben kifejlődött, ma is gyors fejlődésben levő fiatal ága. Ezért az alapfeladatot kézenfekvő játékelméleti feladatként megfogalmazni. Induljunk ki tehát az N-személyes játékok egy elég általános definiciójából. Ez azért is célszerü, mert a differenciáljétkok osztályozásának szempontjai nagyrészt a játékelméletben szokásos szempontok, és igy természetesebben kapjuk meg ezeket a játéktipusokat.

## 1. AZ N-SZEMÉLYES JÁTÉKOK

Jelölje $N$ a játékban résztvevő játékosok $I$ halmazának elemszámát. Minden résztvevő (jelöljük őket $1 \leq i \leq N$ egész számokkal) adott halmazból választhat stratégiát (e halmazok általában lépéssorozatokból állnak). Az $i \in I$ játékos számára elérhető stratégiák halmazát jelöljük $S_i$-vel. A játékosok $s_i \in S_i$ $1 \leq i \leq N$ választása határozza meg az $(s_1,\dots,s_N) =: s$ szituációt. Az összes szituációk halmazát

$$(1) \qquad S := \underset{i \in I}{X} S_i$$

jelöli. Minden $i \in I$ játékoshoz tartozik egy $H_i$: $S \to R$ kifizetőfüggvény.

<u>0.1 Definició:</u> A

$$(2) \qquad \Gamma := \langle\langle N\rangle, (S_1, S_2, \dots, S_N), (H_1, \dots, H_N)\rangle, \quad \langle N\rangle := (1, 2, \dots, N)$$

rendszert N személyes játéknak nevezzük, ahol $S_i$ halmazt jelöl, $H_i := \overset{N}{\underset{i=1}{X}} S_i \to R$ pedig valós függvény $i=1,2,\dots,N$ mellett.

A játékosok célja olyan stratégiaválasztás, hogy a kifizetőfüggvényekkel kifejezett nyereményük a lehető legnagyobb legyen.

Az N személyes játék definicója után érdemes bevezetni még ezen a szinten néhány - a differenciáljátékoknál is alapvető - olyan fogalmat, melyek rávilágitanak a stratégiaválasztás módszereire.

A legalapvetőbb ilyen fogalom az N-személyes játék Nash-féle egyensulypontja. Legyen $s=(s_1,\dots,s_N)$ egy szituáció. Azt a szituációt, amely s-től az i-ik stratégiában tér el, jelölje $s \| s_i'$, ahol $s_i'$ az $s_i$ helyett álló stratégiát jelöli.

<u>0.2 Definició:</u> A játék $s^* = (s_1^*,\dots,s_N^*) \in S$ szituációját a játék Nash-féle egyensulypontjának nevezzük, ha bármely $s_i \in S_i$ esetén

$$(3) \qquad H_i(s^* \| s_i) \le H_i(s^*)$$

minden $1 \le i \le N$ mellett.

Az egyensulypont tehát olyan szituációt jelent, amely minden játékos számára elfogadható. A játékoknak általában nem létezik egyensulypontja. Elég tág játékosztályokra azonban található mindenki számára elfogadható kompromisszum.

Ha a játékban nincsen mindenki számára elfogadható szituáció, akkor a játékosok más utakat keresnek nyereményük növelésére. Két ilyen lehetőséget emlitünk, az egyiket a differenciáljátékoknál játszott fontos szerepe miatt részletezve.

Kevert stratégiákon a stratégiák véletlen megválasztását értjük, pontosabban az egyes játékosok egymástól független véletlen törényszerüségek szerint választják meg stratégiájukat.

Az emlitett másik utnál a játékosok között egy kijátszási sorrendet jelölünk ki. Legyen ez esetünkben éppen indexeik természetes sorrendje. Az i-ik játékos stratégiája megválasztásánál figyelembe veheti az i-1, i-2,...,1 játékosok döntéseit. Ezt felirhatjuk

$$(4) \qquad s_i = s^{(i)}(s_{i-1},\dots,s_1)$$

függvény formájában is, ahol az $s^{(i)}$ függvény az i játékos döntését adja meg az előtte álló játékosok döntéseinek függvényében. Tovább finomitható e kijátszási sorrend elve, ha az $S_i$, $1\leq i\leq N$ halmazok elemeiről feltevéssel élünk. Legyen T az egész, vagy valós számok $\pm\infty$-el kiegészitett halmaza, attól függoen, hogy diszkrét vagy folytonos ideju játékokról beszélünk. Legyen a játék időtartama a $[t_o,t_1]=\{t\mid t_o\leq t\leq t_1, t\in T\}$ intervallum ahol $t_o$ véges. Legyen minden $i\in I$ mellett $U_i$ adott halmaz, és legyen

(5) $S_i:=\{s\mid s:\ [t_o,t_1]\to U_i$, s eleget tesz adott feltételének$\}$

Ilyen stratégiák mellett ugy finomithatjuk a fenti kijátszási sorrend elvét, hogy az i-ik játékos választását $s^{(i)}(s_1,\ldots,s_N)$ Volterra tipusu leképzéssel adjuk meg:

<u>O.3 Definició:</u> Az $s^{(i)}$ leképezést Volterra tipusunak nevezzük, ha felirható

(6) $$s^{(i)}(s_1,\ldots,s_N)(t)=f(\{s_1(t'),\ldots,s_{i-1}(t')\}_{t'=t'}\ \{s_1(t''),\ldots,s_N(t'')\}_{t''<t})$$

alakban.

Volterra tipusu leképezésnél a finomitott kijátszási sorrend ugy érvényesül, hogy az i-ik játékos a t időpontban döntéséhez felhasználhatja a sorrendben őt megelőzők t-beli döntéseit és valamennyi játékos $t'<t$-beli döntését, $t'\in[t_o,t_1]$ mellett.

Még egy jellegzetesen N-személyes nyereménynövelési módot emlitünk meg részletezés nélkül. Ez a kooperativ játék. Erről akkor beszélünk, ha a játékosok egy $V\subset I$ csoportja egyéni nyereményének növelése helyett a koalició $H_V:=\sum_{i\in V} H_i$ nyereményének növelésére törekszik. Ennek nyilván akkor van értelme, ha igy nagyobb nyereményhez jutnak, mint az egyénileg elérhető legnagyobb nyeremények összege.

Most pedig rátérünk az N-személyes differenciáljátéknak, mint a fent bevezetett N-személyes játékok speciális osztályának definiciójára.

## 2. DIFFERENCIÁLJÁTÉKOK

Az előző pont jelöléseit itt is megtartjuk, vagyis I jelöli a játékosok N elemü halmazát. Legyen B egy Banach tér, R pedig jelentse a valós számok halmazát. Képezzük az $E:=R\times B$ szorzat Banach teret, elemeit jelöljük $(t,x)$-el. E pont során a t "időpontok" halmaza mindig az R-el egyezik meg.

Legyen továbbá $U_i$ minden $i\in\langle N\rangle$ mellett Banach tér és legyen $C_i\subset U_i$, $i\in\langle N\rangle$ mellett valamilyen halmaz.

Legyen $G\subset E$ nyilt halmaz és legyen

$$(7)\qquad f:\ G\times \mathop{X}_{i=1}^{N} C_i \to B$$

egy leképezés. (Az f-re, $C_i$-re további feltételeket majd a következő §-beli konkrét vizsgálatoknál adunk.) Az f-hez egyértelmüen tartozik a

$$(7a)\qquad F:\ G\times \mathop{X}_{i=1}^{N} C_i \to E$$

$$F:=(id_R,f)$$

Legyen $[t_o,t_1]\subset\overline{R}$ zárt intervallum, ahol $\overline{R}:=R\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ és $t_o\in R$. Rögzitve egy $(t_o,z_o)=\tilde{z}_o\in G$ pontot, legyen $\tilde{z}$ egy a $D(\tilde{z}):=[t_o,t_v(\tilde{z}))\subset[t_o,t_1]$ intervallumon megadott olyan leképezés, melyre teljesülnek

$$(8)\qquad \tilde{z}:\ D(\tilde{z})\to G$$

$$\tilde{z}(t)=(t,x(t))\in G$$

és $\tilde{z}(t_o)=\tilde{z}_o$ feltételek. Megjegyezzük, hogy $D(\tilde{z})$ értelmezési tartomány megadásában szereplő jobb oldali kapcsos zárójel azt jelzi, hogy az intervallum lehet jobbról zárt vagy nyilt.

Adjunk meg továbbá minden $1 \leq i \leq N$ mellett egy

(9) $$s_i : \mathcal{D}(s_i) \to C_i$$

leképzést $\mathcal{D}(s_i) = [t_o, t_v(s_i)\} \subset [t_o, t_1]$ értelmezési tartománnyal.

0.4 Definició: Akkor mondjuk, hogy a (8)-al definiált $\tilde{z}$ leképezés megoldása a

(10) $$\dot{z}(t) = F(z(t), \mathop{X}_{i=1}^{N} s_i(t))$$

egyenletnek, ha

a. $\tilde{z}$ abszolut folytonos és $\mathcal{D}(\tilde{z}) \subset \overline{\bigcap_{i=1}^{N} \mathcal{D}(s_i)}$;

b. $\tilde{z}$ m.m. differenciálható erős értelemben;

(11) c. $\dot{\tilde{z}}(t) = F(\tilde{z}(t), \mathop{X}_{i=1}^{N} s_i(t))$ m.m.

teljesül.

Megjegyezzük, hogy egzisztenciáról és unicitásról a 0.4. definicióban szereplő megoldással kapcsolatban egyenlőre nincsen szó.

A differenciáljátékok dinamikájának megadása után most a differenciáljátékoknál fellépő perem feladatot fogalmazzuk meg.

Legyen $\Theta \subset G$ egy zárt részhalmaz, és legyen $(t_o, z_o) = \tilde{z}_o \in G$, $\tilde{z}_o \notin \Theta$ egy rögzitett pont.

A $\Theta$-t szokás a játék cél vagy terminális halmazának nevezni. Differenciáljátékoknál a terminális halmaz az egyes játékosok célhalmazainak egyesitéseként áll elő.

0.5 Definició: A (9)-cel definiált $(s_1, s_2, \ldots, s_N)$ irányitásról akkor mondjuk, hogy összeköti a $\tilde{z}_o$ pontot a $[t_o, t^*\} \subset \subset [t_o, t_1]$ intervallumon a $\Theta$-val, ha $t^*$ véges, és ha van a (10) egyenletnek olyan, a $[t_o, t^*\}$ intervallumon értelmezett 0.4 definició szerinti értelmben vett $\tilde{z}$ megoldása, amelyre teljesülnek a

(12) $\tilde{z}(t_o) = \tilde{z}_o$,

$\lim_{t \nearrow t^*} \tilde{z}(t) \in \Theta$, és $\tilde{z}(t) \notin \Theta$, ha $t<t^*$

feltételek. Az ilyen $\tilde{z}$ görbét nevezzük a továbbiakban $\tilde{z}_o$-at és $\Theta$-t összekötő görbének.

Ezzel eljutottunk a differenciáljátéknak mint N-személyes játéknak a definiálásához. Sorra definiáljuk a 0.1 defincióban szereplő fogalmakat. Legyen i egy rögzitett I-beli elem.

0.6 Definició: Az i játékos számára felhasználható stratégiának nevezünk egy olyan (9) alaku $s_i$ leképezést, amelyhez $i \neq j$ $1 \leq j \leq N$ mellett megadhatók olyan $s_j$ (9) alaku leképezések, hogy az $s := \mathop{X}_{k=1}^{N} s_k$ irányitással az alábbi feltétel teljesül:

Létezik olyan $\tilde{z}: D(\tilde{z}) \subset [t_o, t_1] \to G$, $t_o \in D(\tilde{z})$, $\tilde{z}(t_o) = z_o$ görbe, amely eleget tesz a (10) differenciálegyenletnek az $s$ irányitás mellett a 0.4 definició értelmében.

0.7 Definició: Az i, $1 \leq i \leq N$ játékos stratégiáinak halmaza legyen az

(13) $S_i := \{s \mid s: D(s) \subset [t_o, t_1] \to C_i$, i számára felhasználható stratégia$\}$

0.8 Definició: Megengedett szituációnak nevezzük az $S := \mathop{X}_{i=1}^{N} S_i$ szorzathalmaz olyan $s$ elemét, amellyel teljesül a 0.6 definició feltétele. Az $s = (s_1, \ldots, s_N)$ értelmezési tartományán a $D(s) := \bigcap_{i=1}^{N} D(s_i)$ intervallumot értjük.

Megjegyezzük, hogy a fentiekből következik, hogy minden játékos minden felhasználható stratégiájához található olyan megengedett szituáció, amelyben az adott stratégia szerepel

0.9 Definició: Egy $H: S \to \overline{R}$ leképezést megengedettnek nevezünk, ha a megengedett szituációk halmazának pontjain véges értéket vesz fel, a nem megengedett szituációkon pedig minusz végtelen értéket.

0.10 Definició: Differenciáljátékon olyan

$$\Gamma = \langle\langle N\rangle,(S_1,S_2,\ldots,S_N),(H_1,H_2,\ldots,H_N)\rangle$$

játékot értünk, ahol $\langle N\rangle$ jelenti a játékosok N elemü halmazát, $S_i$ $1\le i\le N$ mellett a felhasználható stratégiák halmazát, $H_i$ pedig $H_i: S\to R$ megengedett függvény minden $i\in\langle N\rangle$ mellett, amelyet az i játékos kifizetőfüggvényének szokás nevezni.

A differenciáljátékoknak az irodalomban általában tárgyalt formájánál a lokális unicitási tétel teljesül a (11) egyenletre. Az itt bemutatott játékfogalomnak csupán annyi a jelentősége, hogy ez a formalizálás akár elég tág értelemben vett dinamikus rendszerekre (ld. [45]) is változtatás nélkül átvihető. Későbbiek egyszerübb megértése érdekében megadjuk az eddigi fogalmak "szokásos" definicióit is:

Tegyük fel, hogy a (7) ill. a (7a)-val megadott leképezések folytonosak, és tetszőleges rögzitett $U\in \mathop{X}\limits_{i=1}^{N} C_i$ mellett az $f$ ill. $F$ eleget tesz a lokális Lipschitz-féle feltételeknek.

0.6a Definició: Az $s_i$ (9)-cel megadott leképezést az $i\in\langle N\rangle$ játékos számára felhasználható stratégiának nevezzük, ha Borel-mérhető. Ezek halmazát $S_i$-vel jelöljük.

0.8a Definició: Az $S := \mathop{X}\limits_{i=1}^{N} S_i$ halmaz elemeit szituációk halmazának, elemeit pedig szituációknak nevezzük. Egy $s\in S$ szituáció értelmezési tartományán a $\mathcal{D}(s) = \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathcal{D}(s_i)$ halmazt értjük, ahol $s := (s_1,s_2,\ldots,s_N)$.

A differenciáljátékok peremérték problémájára pedig az alábbi egyszerü definició adódik:

0.5a Definició: Legyen $s\in S$ egy szituáció. Akkor köti össze az s szituáció a $z_o\in G\setminus\Theta$ pontot a $\Theta$ halmazzal, ha a

$$\dot{\tilde{z}} = F(\tilde{z},s)$$
$$\tilde{z}(t_o) = z_o$$

kezdetiérték feladat $\tilde{z}$ megoldásához megadható olyan véges

$t^*(s,z_o)\in K(s)$ pont, hogy a $\tilde{z}$ megoldás értelmezve van a $[t_o,t^*(s,z_o))$ intervallumon és

$$\lim_{t\nearrow t^*(s,z_o)} \tilde{z}(t)\in\Theta \quad \text{és}$$

$$\tilde{z}(t)\notin\Theta, \quad \text{ha} \quad t<t^*(s,z_o)$$

A 0.9, 0.10 definiciók ezután változatlanok maradnak.

Az igy definiált N-személyes differenciáljáték fogalom tulságosan általános. A $H_i$ kifizetőfüggvények tulajdonságaitól függően sokféle feladattipust fogalmazhatunk meg. További osztályozásra ad módot az $\Gamma$ függvény alkja. A most következő 3. pontban a differenciáljátékok osztályozásával foglalkozunk.

## 3. A DIFFERENCIÁLJÁTÉKOK OSZTÁLYOZÁSA

A differenciáljátékok osztályozásának szempontjait részben a játékelmélet általános szempontjai szolgáltatják, részben a differenciáljátékok speciális tulajdonságai nyujtanak ujabb szempontokat. Először az általános osztályozási szempontokat tárgyaljuk, majd a differenciáljátékokhoz kapcsolódó további osztályokat nézzük. A legáltalánosabb osztályozási alapot a játékban résztvevő személyek száma adja. Három alapvetően eltérő játékosztályt szoktak megkülönböztetni:

1. Egyszemélyes játékok.
2. Kétszemélyes játékok.
3. N-személyes játékok.

E három csoport megkülönböztetését az indokolja, hogy mindegyik csoporthoz tartoznak olyan matematikai módszerek, amelyek csak az illető csoport esetében alkalmazhatók. Az egyszemélyes játékok az optimumkeresési feladatokat foglalják magukba, differenciáljátékok esetében pedig a vezérléselmélet problémaköréhez jutunk.

A további osztályozások alapját a $H_i$ kifizetőfüggvények tulajdonságai képezik. Mielőtt ebbe belemennénk, szükségünk lesz az alábbi fogalomra:

0.11 Definició: A $\Gamma = \langle\langle N\rangle,(S_1,\dots,S_N),(H_1,\dots,H_N)\rangle$ és a $\Gamma' = \langle\langle N\rangle,(S_1,\dots,S_N),(H_1',\dots,H_N')\rangle$ két játékot ekvivalensnek nevezzük, ha megadhatók olyan $k_i > 0$ és $c_i$ valós számok, hogy

$$(14) \qquad H_i = k_i H_i' + c_i$$

Ezt

$$(15) \qquad \Gamma \sim \Gamma'$$

formában jelöljük.

Könnyen látható, hogy két ekvivalens játék a stratégiaválasztás szempontjából egyenértékü, hisz a két kifizetőfüggvényrendszer kitüntetett pontjai (maximum, nyeregpont, stb.) egybeesnek.

0.12 Definició: Legyen $S' \subset S$ a megengedett szituációk halmaza. A $\Gamma$ játékot $c$ összegünek nevezzük, ha a

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{N} H_i \big|_{S'} = c$$

Megjegyezzük, hogy ha az $S$-ben minden szituáció megengedett mint általában a játékelméletben, akkor ez éppen az ott szokásos $c$ összegü játék definiciójával esik egybe.

Könnyen belátható, hogy minden állandó összegü játék ekvivalens egy 0-összegüvel. Ezért a továbbiakban a $c$-összegü játékot 0-összegünek tekintjük.

0.13 Definició: A kétszemélyes 0-összegü játékot antagonisztikus játéknak nevezzük.

Legyen $\Gamma = \langle\langle 2\rangle,(S_1,S_2),(H_1,H_2)\rangle$ egy antagonisztikus játék. Ekkor fennáll a $H_1 = -H_2$ kapcsolat. Ezért az antagonisztikus játékokat egyetlen $H: S \to R$ kifizetőfüggvénnyel jellemezhetjük. A 0.2 definicióval meghatározott Nash-féle egyensulyponton pedig olyan $(s_1^*, s_2^*) \in S$ szituációt értünk, amelyre a

$$(17) \qquad H(s_1, s_2^*) \le H(s_1^*, s_2^*) \le H(s_1^*, s_2) \qquad s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$$

feltétel teljesül. Az ilyen $(s_1^*,s_2^*)\in S$ pontot nevezzük a játék nyeregpontjának. (Ami nem biztos, hogy létezik, és ha létezik nem biztos, hogy egyetlen ilyen van.) A $H(s_1^*,s_2^*)=v$ szám pedig a <u>játék értéke</u>.

Két további játékosztályt vezetünk be $2\leq N$ személyes differenciáljátékok esetében. Ezek az osztályok azonban már a differenciáljátékokhoz kapcsolódnak. E két osztály a kvantitativ és kvalitativ játékok osztályai. Ezek definiciójához szükségünk lesz a 2. pontbeli fogalmakra és jelölésekre.

Legyen $s\in S'$ egy megengedett szituáció (0.8 definició). Legyen $\tilde{Z}(s)$ az alábbi halmaz:

$$\tilde{Z}(s)=\{\tilde{z}\mid \tilde{z} \text{ az } s \text{ irányitással összeköti } z_o\text{-t és } \Theta\text{-t a } [t_o,t^*(\tilde{z})],\ t^*(\tilde{z})\leq t_1 \text{ véges int.-on}\}$$

(ld. a 0.5 definiciót)

A bevezetett halmaz segitségével megadhatunk egy $t^*(s)$ számot az alábbi definicióval:

$$t^*(s)=\inf\{t^*\mid \exists\tilde{z}\in\tilde{Z}(s), \text{ hogy } \tilde{z}(t^*)\in\Theta\} \tag{18}$$

<u>0.14 Definició</u>: A $t^*(s)$ a játék befejeződésének időpontja az $s$ szituációban.

Ezután megadunk két halmazcsaládot: $\forall\ \varepsilon>0$ esetén legyen

$$\tilde{Z}_\varepsilon(s)=\{\tilde{z}\mid \tilde{z}\in\tilde{Z}(s), \text{ melyhez } \exists\ t\in[t^*(s)+\varepsilon)\cap[t_o,t_1], \text{ hogy } \tilde{z}(t)\in\Theta\} \tag{18a}$$

$$Z_\varepsilon(s)=\{z\mid z\in\Theta,\ \exists\ \tilde{z}\in\tilde{Z}_\varepsilon(s), \text{ és } t\in[t^*(s)+\varepsilon)\cap[t_o,t_1], \text{ hogy } z=\tilde{z}(t)\} \tag{18b}$$

Természetesen mindkét halmaz üres akkor, ha $t^*(s)=\infty$. Legyen $\Theta_i\subset\Theta$ zárt $(i=1,2,\dots,N)$, és tegyük fel, hogy

$$\Theta=\bigcup_{i=1}^{N}\Theta_i$$

(A $\Theta_i$ bizonyos indexekre lehet üres is.)

Legyen $f_i$ az $i \subset I$ játékoshoz rendelt alábbi függvény:
Ha $\Theta_i \neq \emptyset$ akkor

$$(19) \qquad f_i(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha } x\in\Theta_i \\ 0, & \text{ha } x\in G\setminus\Theta_i \end{cases}$$

Ha $\Theta_i = \emptyset$ akkor

$$(19) \qquad f_i(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha } x\in G\setminus\Theta \\ 0, & \text{ha } x\in\Theta \end{cases}$$

Legyen $s\in S'$ egy olyan megengedett szituáció, melyre $t^*(s)=\infty$. Legyen $\tilde{z}$ egy, a 0.6 definició (2) feltételének $s$-sel eleget tevő görbe. Jelöljük $\alpha_i(s)$-el az alábbi határértéket:

$$\alpha_i(s) := \lim_{t\to t_1} f_i(\tilde{z}(t)).$$

A bevezetett fogalmak segitségével definiálhatjuk a minőségi, kvalitativ differenciáljátékot:

<u>0.15 Definició</u>: A $\Gamma=\{I,\{S_i\}_{i=1}^N, \{H_i\}_{i=1}^N\}$ 0.10 definició szerint megadott differendiáljátékot kvalitativ játéknak nevezzük, ha ekvivalens egy olyan differenciáljátékkal, amelynek kifizetőfüggvényei felirhatók az alábbi formában:

$$H_i(s) = \begin{cases} \alpha_i(s) & t^*(s) = \infty \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{z\in Z_\varepsilon(s)} f_i(z), \quad \text{ha a} & t^*(s)<\infty \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy az $\alpha(s)$ és a lim sup biztosan léteznek. Ha ugyanis $t^*(s)=\infty$, akkor minden a feltételeknek eleget tevő $\tilde{z}$ görbe a $\Theta$ kivül halad, akár véges $t_1$, akár nem. Itt pedig minden $f_i$ konstans értéket vesz fel (ld. a [19] definiciót). A lim sup pedig azért létezik, mert $\varepsilon \to 0$ mellett $Z_\varepsilon(s)$ monoton fogyó halmazrendszer és igy a sup is monoton fogyó számsorozatot ad, melynek korlátossága miatt biztosan lesz limesze.

Ha a kvalitativ játék 0-összegü, akkor ez azt jelenti, hogy csupán egyetlen játékos nyerhet, stratégiaválasztástól függően. A terminális pontok ugyanis legfeljebb egyetlen $\Theta_i$ halmazhoz tartozhatnak minden $s$ megengedett szituációban minden elég kis $\varepsilon(s)$ mellett. Ha a differenciálegyenlet megoldásaira érvényes az unicitás tétele, akkor ehhez elegendő a $\Theta_i$ halmazok diszjunktságát megkövetelnünk. (Ebből csupán annyi következik, hogy csak egy játékos nyerhet. A 0-összegüséghez legalább egy $\Theta_i$-nek üresnek kell lennie.) Ha nincs unicitás, vagy a $\Theta_i$ halmazok nem diszjunktak, akkor nyerhet egyidejüleg több játékos is.

Ezután definiáljuk a kvantitativ vagy mennyiségi játékokat. Megadunk minden $1 \leq i \leq N$ mellett egy olyan megengedett s szituációkon értelmezett funkcionált, melyekre $t^*(s) < \infty$.

Legyen $Z(z_o,\Theta)$ az alábbi halmaz:

$$Z(z_o,\Theta) = \bigcup_{s \in S'} \tilde{Z}(s), \quad S' \subset S \text{ megengedett sz. halmaza} \tag{21}$$

Legyen

$$I_i : Z(z_o,\Theta) \to R, \quad 1 \leq i \leq N \tag{22}$$

egy funkcionál.

<u>0.16 Definició</u>: A $\Gamma = \langle\langle N\rangle, (S_1,\dots,S_N), (H_1,\dots,H_N)\rangle$ 0.10 definició szerint megadott differenciáljátékot kvantitativ játéknak nevezzük, ha ekvivalens egy olyan játékkal, melynek $H_i'$ kifizetőfüggvényeit megadhatjuk az alábbi formában:

$$H_i'(s) = \begin{cases} -\infty & \text{ha} \quad t^*(s) = +\infty \\ \limsup\limits_{\varepsilon \to 0\, \tilde{z} \in \tilde{Z}_\varepsilon(s)} I_i(\tilde{z}) & \text{ha} \quad t^*(s) < \infty \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy a kvantitativ és kvalitativ játékok osztályai nem diszjunktak. Mint a definiciókból kiderül, kvalitativ játék esetében adott célhalmazt kell elérnünk, illetve elkerülnünk. A kvantitativ játékoknál bármilyen nyeremény érdekében valamennyi játékosnak érdeke, hogy olyan szituációt válaszszanak, amely mellett elérik a $\Theta$ célhalmazt. Ez azt jelenti, hogy kvantitativ játék megoldásának szükséges feltétele az, hogy a $\Theta_i = \Theta$, $i=1,2,\dots,N$ melletti kvalitativ játék megoldható legyen nem 0 nyereménnyel. A kvalitativ játékok megoldása tehát

alapját képezi valamennyi kvantitativ játék megoldásának, az utóbbi esetben a lehetséges kvalitativ megoldásokból válogatjuk ki az "opitmális" megoldást.
A kvalitativ és kvantitativ játékok definiciói is jelentősen egyszerüsödnek, ha az egzisztencia unicitási feltételek teljesülnek.

A 8.a definicióban szereplő $t^*(s,z_o)$-at általában megfogalmazhatjuk ugyanis (nem véges esetre is)

$$t^*(s):=\sup\{\tau \mid \tau\in[t_o,t_1),\ z(t)\notin\Theta,\ \text{ha}\ t\in[t_o,\tau]\}$$

formában.

Igy

$$H_i(s)=\begin{cases}\alpha_i(s), & \text{ha} \quad t^*(s)=\infty\\ f_i(z^*(s)), & \text{ha} \quad t^*(s)<\infty\end{cases}$$

ahol $z^*(s) = \lim\limits_{t\nearrow t^*(s)} \tilde{z}(t)$.

Hasonlóan egyszerüsödik a 0.16 definició.

További játékosztályokat nyerünk még a játék dinamikáját megadó differenciálegyenlet tipusa alapján. Ezek megegyeznek a differenciálegyenleteknél szokásos osztályokkal. Hármat emlitünk meg:

Lineáris a játék, ha a differenciálegyenlet lineáris és az irányitási paraméterek is lineárisan szerepelnek.

Nemlineáris játékelméleti problémáról beszélünk, ha legalább a vezérlési paraméterek nemlineárisan szerepelnek az egyenletben.

Késleltetett információju játékról akkor beszélünk, ha a dinamikát egy késleltetett differenciálegyenlet irja le.

Ezzel áttekintettük a főbb osztályozási szempontokat.

# 1.§. A FÖLÉNY KÉRDÉSE

Dolgozatunkban N-személyes minőségi játékok egzisztencia-problémáival szeretnénk foglalkozni. Ezeknek a problémáknak alapkérdése a következő: A játékosok egy $K \subset I$ csoportja tud-e ugy stratégiát választani, hogy egy másik $K' \subset I$ csoport bármely stratégiaválasztása mellett egy adott peremfeltételt teljesitő (esetleg nem teljesitő) megoldásgörbét kapjunk? Az ilyen kérdések megválaszolása, mint ezt a történeti résznél már emlitettük, mindig konstruktiv eljárást igényel (ld. [4], [18], [31], [36], [39]). Ezek az eljárások valamilyen, a dinamikára és a célhalmazra kirótt feltételek teljesülésén alapszanak. A kérdésfeltevésből is és a történeti részben leirtakból is elég kézenfekvően következik, hogy a fenti feltételek a játékosok szempontjából nem szimmetrikusak.

E §-ban a dinamikára kirótt feltételtipusokkal és ezek kapcsolataival fogunk foglalkozni. Négyféle feltételtipust vezetünk be az alábbi négy feladatnak megfelelően: az adott célhalmaz elérése késleltetés nélkül, késleltetéssel, a célhalmaz elkerülése késleltetéssel és anélkül. Ha a játékosok egy csoportjának lehetősége van célja megvalósitására egy másik csoport akarata ellenére is, ezt ugy mondjuk, hogy fölényben van a másik csoporttal szemben. Erős fölényről akkor beszélünk, ha késleltetett információ esetén is elegendő a cél megvalósitására, gyengéről akkor, ha csupán a másik választásának ismeretében tudunk jól választani az adott időpillanatban. Elfutó fölényről akkor beszélünk, ha ennek megfelelő birtokában a koalició az adott célhalmaz elkerülésére képes, a célhalmaz eléréséhez elegendő fölényt fölénynek fogjuk nevezni.

## 1. FÖLÉNY DEFINICIÓK

A 0.§ jelöléseit érvényesnek tekintjük az egész dolgozatban, a függeléket leszámitva.

E §-ban bevezetünk néhány jelölést, amelyeket az egész dolgozatban használni fogunk.

Legyen $\Phi: A \to D$ egy leképezés, ahol A és D halmazok. A leképezés meghatároz egy leképezést $P(A)$-ból $P(D)$-be, ahol $P(A)$ ill. $P(D)$ az A ill. D halmazok hatványhalmazinak halmazát jelöli. E leképezést természetes módon az alábbi definicióval adjuk meg:

Legyen $U \subset A$

$$(*) \qquad \Phi[U] := \{z \mid z = \Phi(x), \quad x \in U\} \subset D$$

Az igy kapott $P(A) \to P(D)$ leképezést jelölésben csupán a helyettesitési értékeknél különböztetjük meg az eredeti $\Phi$-től.

Legyen most $\Psi: \underset{i=1}{\overset{m}{X}} A_i \to D$ egy leképezés, ahol $A_i$,D halmazokat jelölnek $i=1,2,\ldots,m$ mellett. Legyen $J \subset \langle m \rangle$, ahol $\langle m \rangle := \{i \mid i \in N, 1 \leq i \leq m\}$. Legyen $B_i = \{a_i\}$, $a_i \in A_i$, $i \in \langle m \rangle \setminus J$, és legyen $B_i \subset A_i$, $i \in J$ tetszőleges részhalmaz. Ilyen esetben használni fogjuk az alábbi jelölési módot a halmaz jelölésére.

$$(**) \qquad \Psi[(\underset{i \in \langle m \rangle \setminus J}{X} a_i) \times \underset{i \in J}{X} B_i)] := \Psi[\underset{i=1}{\overset{m}{X}} B_i]$$

Valójában a (**) bal és jobb oldalának argumentumában a változók sorrendje közt egy bijektiv kapcsolat áll fenn, amely bijekciót azonban a $\Psi$ értelmezési tartományának definiciója és a (**) bal oldalán a változók sorrendje minden esetben egyértelmüen definiál. Miután dolgozatunkban gyakran célszerü lesz ilyen változócsoportokat képezni, ezeket - ahol félreértést nem okoz - csupán az odatartozó változók megjelölésével adjuk meg, sorrendet csak ott irjuk majd elő, ahol ez lényeges lesz. Vagyis a (**) bal oldalának argumentumát általában egy bijekció erejéig egyértelmüen adjuk csak meg.

A $\Psi$ függvényre vonatkozóan még egy fontos jelölést vezetünk be. Legyen ismét $a_i \in A$, $i \in \langle m \rangle$, és képezzük az $a := \underset{i \in \langle m \rangle \setminus J}{X} a_i$ $\underset{i \in \langle m \rangle \setminus J}{X} A_i$-beli elemet. Megadunk egy $\Psi_a : \underset{i \in J}{X} A_i \to D$ leképezést rögzitett a mellett az alábbi egyenlőséggel:

$$\Psi_a(b) := \Psi(a_1, a_2, \ldots, a_m), \text{ ahol } b := \underset{i\in J}{\times} a_i \in \underset{i\in J}{X} A_i$$

Az igy nyert $\Psi_a$ leképezéshez tartozó őskép leképezés $P(D) \to P(\underset{i\in J}{X} A_i)$ ahol a $P$ a hatványhalmaz jelölésére szolgál. A $\Psi_a^{-1}$ őskép leképezés jelölésére a leirás és megfogalmazás egyszerüsitése érdekében az alábbi jelölést vezetjük be:

Legyen $U \subset P(D)$.

$$(***) \qquad \Psi^{-1}(\underset{i\in\langle m\rangle\setminus J}{\times} a_i, U) := \Psi_a^{-1}(U) \subset \underset{i\in J}{X} A_i.$$

Ez a megállapodás nagymértékben leegyszerüsiti a dolgozat további részében a bizonyitásokat. Bár a (***) baloldala egyértelmüen jellemzi, hogy honnét hova tart az őskép leképezés, a dolgozatban szinte kizárólag ugy használjuk, hogy a $\underset{i\in J}{X} A_i$ vagy ennek alkalmas részhalmaza is szerepel mint az ősképet tartalmazó halmaz.

Még két, a továbbiakban használt jelölésre hivjuk fel a figyelmet:

Ha a fenti $\Phi$ R-be, hat, akkor $\Phi$ nivóhalmazainak jelölésére használni fogjuk a

$$(****) \qquad \{\Phi<c\},\ \{\Phi\leq c\},\ \{\Phi>c\},\ \{\Phi\geq c\}$$

jelöléseket. Ha a $c\in R$ szám tulajdonságait hangsulyozni kivánjuk, szerepelhet a $\{\Phi\geq c>0\}$ és $\{\Phi>c\geq 0\}$ jelölés is.

Végül, ha A egy Banach tér, és A' a duálisa, továbbá $e\in A'$, $x\in A$, az e-nek x helyen felvett helyettesités, értékét

$$(*****) \qquad \langle e,x\rangle\text{-el}$$

jelöljük. Most rátérünk a §-ban vizsgálandó problémák tárgyalására.

Legyen $K\subset I$ egy valódi részhalmaz, a játékosok ilyen csoportját koaliciónak nevezzük.

A 0.§ 2. pontjában bevezetett $C_i$ halmazok legyenek a továbbiakban kompaktak. Legyen az F leképezés folytonos és tegyen eleget minden rögzitett $u \in \overset{N}{\underset{i=1}{X}} C_i$ mellett lokális Lipschitz-féle feltételnek. (A jelöléseket ld. a (7) kifejezésnél és környékén.)

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

Legyen $K \subset I$ egy koalició.

$$(24) \qquad U_K := \underset{i \in K}{X} C_i$$

Legyen

$$(25) \qquad U_K^{\perp} := \underset{i \in I \setminus K}{X} C_i$$

Ezzel előkészitettük a fölényfogalmak definicióit.

Legyenek K, K' két koalició, amelyekre teljesül a $K \cap K' = \emptyset$ feltétel. Legyen $e \in E'$, ahol E' az E Banach-tér duálisa és legyen $x_o \in G \subset E$ rögzitett pont.

1.1 Definició: A K koalició gyenge fölényben van a K' koalicióval szemben az $x_o \in G$ pontban az e funkcionállal kijelölt "irányban", ha megadható olyan $c>0$, hogy minden $v \in U_{K'}$-höz található olyan $u(v) \in U_K$, hogy

$$(26) \qquad F[x_o, (U_{K \cup K'}^{\perp}) \times \{(u(v), v)\}] \subset \{e \geq c > 0\}$$

teljesül.

1.2 Definició: A K koaliciónak gyenge elfutó fölénye van a K'-vel szemben az $x_o \in G$ pontban az e funkcionállal kijelölt "irányban", ha minden $v \in U_{K'}$-höz van olyan $u(v) \in U_K$, hogy

$$(27) \qquad F[x_o, (U_{K \cup K'}^{\perp}) \times \{(u(v), v)\}] \subset \{e \geq 0\}$$

teljesül.

1.3 Definició: A K koaliciónak erős fölénye van az $x_o$ pontban az e funkcionállal kijelölt irányban, ha megadható olyan $u \in U_K$ és $c>0$, hogy az

(28) $\quad F[x_o,\ U_K^{\perp}\ x\{u\}] \subset \{e \geq c > 0\}$

teljesül.

<u>1.4 Definició</u>: A $K$ koaliciónak erős elfutó fölénye van az $x_o$ pontban az $e$ funkcionállal kijelölt irányban, ha létezik olyan $u \in U_K$, hogy az

(29) $\quad F[x_o,\ U_K^{\perp}\ x\{u\}] \subset \{e \geq 0\}$

teljesül.

Megmutatjuk a bevezetett négy fölényfogalomról, hogy páronként szoros kapcsolatban állnak egymással.

<u>1.1 Tétel</u>: A $K$ koaliciónak akkor és csakis akkor van erős fölénye az $x_o$ pontban az $e$ funkcionállal kijelölt irányban, ha az $I \setminus K$ koaliciónak nincsen gyenge elfutó fölénye a $-e$ funkcionállal kijelölt irányban.

<u>Bizonyitás</u>:

1. Tegyük fel, hogy a $K$ koaliciónak erős fölénye van az $e$ irányban. Ez azt jelenti, hogy van olyan $u \in U_K$, amely mellett (28) teljesül. Ezért ezen $u$-hoz nem található olyan $v(u) \in U_K^{\perp}$, hogy a (27) $-e$-vel teljesüljön.

2. Tegyük fel, hogy az $I \setminus K$-nak nincs gyenge elfutó fölénye az $x_o \in G$ pontban a $-e$ irányban. Ez azt jelenti, hogy van olyan $u \in U_K$, hogy minden $v \in U_K^{\perp}$ mellett az

(31) $\quad \langle e,\ F(x_o,(u,v))\rangle > 0$

feltétel teljesül. Azonban a

(32) $\quad \Phi(v) := \langle e,\ F(x_o,v,u)\rangle,\ v \in U_K^{\perp}$

függvény, mint két folytonos függvény kompoziciója folytonos és az $U_K^{\perp}$ kompakt halmazon mindenütt pozitiv értékeket vesz fel. Legyen $c$ a $\Phi$ függvény pozitiv minimuma. A fenti $u \in U_K$ és a $c$ szám teljesitik az 1.3 definició feltételét. Ezzel a tételt beláttuk.

1.2 Tétel: A $K$ koaliciónak akkor és csakis akkor van gyenge fölénye az $e$ funkcionállal kijelölt irányban az $I\setminus K$ koalicióval szemben, ha az $I\setminus K$ koaliciónak nincsen erős elfutó fölénye a $-e$ irányban.

Bizonyitás:

1. Tegyük fel, hogy a $K$ koaliciónak nincsen az $x_o$ pontban gyenge fölénye az $e$ irányban. Ez azt jelenti, hogy $1/n$-hez megadható olyan $u_n \in U_K^{\perp}$ elem $n=1,2,\dots$ mellett, hogy

$$(33) \qquad \langle e, F(x_o, u_n x U_K)\rangle \leq 1/n$$

Az $U_K^{\perp}$ kompaktsága folytán az $u_n$ sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat, legyen ez $u_{n_k} \to u$, ahol $u \in U_K^{\perp}$ a részsorozat határeleme. Minden $v \in U_K$ mellett továbbá $u_{n_k} x\, v \to u x v$, és a (33) egyenlőtlenség folytán

$$(34) \qquad \langle e, F(x_o, u x U_K)\rangle \leq 0$$

teljesül, ami az állitás egyik felét adja.

2. Ha az $I\setminus K$ koaliciónak erős elfutó fölénye van az $x_o$ pontban a $-e$ irányban, akkor ez azt jelenti, hogy van olyan $u \in U_K^{\perp}$, hogy minden $v \in U_K$ mellett az

$$(35) \qquad \langle e,\ F(x_o, u x v)\rangle \leq 0$$

feltétel teljesül, vagyis ehhez az $u \in U_K^{\perp}$-hoz nem adható meg olyan $v(u) \in U_K$, hogy

$$(36) \qquad \langle e,\ F(x_o, u x v(u))\rangle > 0$$

teljesüljön és ezzel az állitást beláttuk.

A most következő két tétel a bevezetett erős és gyenge fölényfogalmakat jellemzik.

Legyen $e \in E'$ egy egységnormáju funkcionál.

1.5 Definició: Az $E$ Banach téren bevezetjük és $|||\ |||_e$-vel jelöljük az alábbi normát:

(37) $\quad |||x|||_e = \max\{\|x\|, |\langle 2e,x\rangle|\}$, $x\in E$.

Jelöljük $K_{\varepsilon,t}(0)$-vel az alábbi kupot:

$$K_{\varepsilon,t}(0) := \bigcup_{\lambda>0} \lambda\cdot\{G_e^{|||\ |||_e}(0)+t\}$$

ahol $0<\varepsilon<1$, $G_\varepsilon^{|||\ |||_e}(0) := \{x \mid x\in E,\ |||x|||_e<\varepsilon\}$, $t\in E$, $|||t|||_e=1$.

<u>1.3 Tétel</u>: A $K$ koalició akkor és csakis akkor van fölényben a $K'$ koalicióval szemben az $x_o\in G$ pontban az $e\in E'$-vel kijelölt irányban, ha megadható olyan $1>\varepsilon>0$, és $t\in E$, $|||t|||_e=1$, $\langle 2e,t\rangle=1$, hogy minden $v\in U_{K'}$ elemhez található olyan $u(v)\in U_K$ elem, hogy teljesül az

(38) $$F(x_o, U^1_{KUK'}, X\{u(v)xv\}) \subset K_{\varepsilon,t}(0) := \bigcup_{\lambda>0} \lambda\{G_\varepsilon^{|||\ |||_e}(0)+t\}$$

<u>Bizonyitás</u>:

1. Tegyük fel, hogy a $K$ koaliciónak fölénye van az $e$ irányban az $x_o$ pontban a $K'$ felett. Az 1.1 definició szerint tehát a

(39) $$V := F^{-1}(x_o, \{e\geq c\}) \subset \mathop{\times}_{i=1}^{N} C_i$$

halmaz nem üres és a folytonosság miatt kompakt.

Az $F$ leképezésnek a $G\times V$-re való megszoritása teljesiti a függelék F2.3 tételének feltételeit $c=\delta h$, $0<\delta<1$ mellett ezért igaz, hogy

(40) $$F[x_o,V]\subset K_{\varepsilon,t}(0)$$

az idézett tétel alapján. Miután az 1.1 definició feltételének teljesülése és $V$ konstrukciója biztosit olyan $u(v)$-t minden $v\in U_{K'}$-hez, hogy

(41) $$U^1_{KUK'}\ xu(v)xv \subset V$$

teljesül, az állitás első felét bebizonyitottuk.

2. Teljesüljön a (38) feltétel valamely $t \in E$, $e \in E'$ és $\varepsilon > 0$-ra. Belátjuk, hogy ekkor teljesül az 1.1 definició feltétele.

Képezzük a $G_n := K_{\varepsilon,t}(0) \cap \{e > 1/n\}$ halmazsorozatot $n = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ mellett. Képezzük továbbá az alábbi halmazt:

$$H_n = \{u \mid u \in U_K, \text{ és } \exists\ v(u) \in U_K \text{ hogy } F(x_o, U^{\perp}_{K \cup K'}, x v(u) x u) \subset G_n\} \tag{42}$$

Belátjuk, hogy $H_n$ nyilt. Legyen $u \in H_n$. Miután az $U_{K \cup K'} x\, v(u) x\, u$ halmaz kompakt metrikus tér, folytonos képe is kompakt, amely a fenti $G_n$ határától véges pozitiv $\delta$ távolságra van. Ám F egyenletesen is folytonos $x_o$ rögzitése mellett a $\overset{N}{\underset{i=1}{X}} C_i$ kompakt szorzattéren, ezért $\delta/2$-höz megadható olyan $G_{\delta_1(\delta/2)}(u)$ környezet, hogy minden $u' \in G_{\delta_1(\delta/2)}(u)$-beli pontra teljesül (42) feltétele.

A (38)-al kifejezett feltétel azonban biztositja, hogy

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = U_{K'}, \tag{43}$$

és miután $U_{K'}$ kompakt, a $H_n$-ek pedig nyiltak, van olyan véges $n$, hogy $H_n$ az $U_{K'}$-t már lefedi. A legkisebb ilyen $n$ legyen $n_o$, $c = 1/n_o$ mellett teljesül az 1.1 definició feltétele. Ezzel a tételt maradéktalanul beláttuk.

<u>1.4 Tétel</u>: A K koalició akkor és csakis akkor van erős fölényben az $x_o$ pontban az $e \in E'$, $\|e\| = 1$ funkcionállal kijelölt irányban, ha megadható olyan $1 > \varepsilon > 0$, és $t \in E$, $|||t|||_e = 1$, $<2e, t> = 1$, amelyhez található olyan $u \in U_K$ elem, hogy az

$$F[x_o, u x U_K^{\perp}] \subset K_{\varepsilon,t}(0) \tag{44}$$

tartalmazás teljesül.

<u>Bizonyitás</u>: A tételt az 1.3 tételhez hasonlóan bizonyithatjuk be, csupán egyszerübben. Itt a bizonyitást nem részletezzük.

A most következő tételek is az erős illetve gyenge fölényt jellemzik, méghozzá e tulajdonságok helytől való függését.

1.6a Definició: $G^e_{K,K'}$-vel jelöljük az alábbi halmazt:

$G^e_{K,K'}:=\{x \mid x \in G$-ben $K$ gy. fölényben van $K'$-vel sz.-ben az $e$ irányban$\}$

1.6b Definició: $G^e_K$ -val jelöljük az alábbi halmazt:

$G^e_K:=\{x \mid x \in G$-ben $K$ erős fölényben van az $e$ ir.-ban$\}$

1.6c Definició: $F^e_{K,K'}$-vel jelöljük az alábbi halmazt:

$F^e_{K,K'}:=\{x \mid x \in G$-ben $K$-nak elf. fölénye van $K'$-vel sz.-ben az $e$ irányban$\}$

1.6d Definició: $F^e_K$-val jelöljük az alábbi halmazt:

$F^e_K:=\{x \mid x \in G$-ben $K$-nak erős elf. fölénye van az $e$ ir.-ban

1.5 Tétel: A $G^e_{K,K'}$ és $G^e_K$ halmazok nyiltak.

Bizonyitás: Elegendő megmutatni, hogy ha $x_o \in G^e_{K,K'}$-nek ($G^e_K$-nak), akkor létezik $G_\delta(x_o) \subset G^e_{K,K'}$ ($G^e_K$) alkalmas $\delta>0$-val.

Az $x_o \in G^e_{K,K'}$ ($G^e_K$) azt jelenti, hogy a

(45) $$V:= F^{-1}(x_o,\{e \geq h>0\}) \subset \mathop{X}_{i=1}^{N} C_i$$

kompakt halmaz nem üres, sőt az egyes fölényeknek megfelelően tartalmaz bizonyos alaku pontokat.

Szoritsuk meg a $F$ leképezést az alábbi módon:

$$F : GXV \to E,$$

erre $h/2$-vel igaz, hogy

(46) $$F(x_o,V) \subset \{e>h/2\}.$$

$V$ kompaktsága folytán azonban létezik olyan $G_\delta(x_o) \subset G$, hogy

(47) $\quad F(G_\delta(x_o),V) \subset \{e>h/2\}$

teljesül. Ez pedig mindkét szóbanforgó fölényfogalomra bizonyitja a tétel állitását.

1.6 Tétel: Az $F^e_{K,K'}$ és az $F^e_K$ halmazok zártak.

Bizonyitás: Ezek zártsága közvetlen következménye az 1.1, 1.2 tételeknek melyek szerint e halmazok megfelelő $G^e$ tipusu halmazok komplementerei, melyek viszont az 1.5 tétel szerint nyiltak.

## 2. LOKÁLIS STRATÉGIÁK FOGALMA

E pontban azzal foglalkozunk, hogy ha a $G$ halmaz valamely pontjában fennáll a bevezetett fölénytipusok közül valamelyik egy koalició számára, akkor hogyan használhatja fel ezt a koalició stratégiája megválasztására. Az erős és gyenge fölény alapján képzett stratégiának az a tulajdonsága, hogy egy pontra megadott stratégiaválasztási szabály "ugyanazt" eredményezi a pont egy környezetében, mint a pontban, lehetőséget nyujt arra, hogy e stratégiválasztási szabályokat fogjuk lokális stratégiáknak nevezni. Első lépésként az alábbi tétel konstrukciójával megadjuk fölény teljesülése esetére a stratégiaválasztási "szabályt".

1.7 Tétel: Legyen a $K$ koaliciónak az $x_o \in G$ pontban az $e \in E'$ $\|e\| = 1$ irányban fölénye a $K$ koalicióval szemben. Ekkor megadható egy $V_e$: $U_{K'} \to U_K$ Borel-mérhető leképezés ugy, hogy

(48) $\quad F[x_o, U^{I}_{K \cup K'} \times V_e(u) \times u] \subset \{e \geq c\}$ ahol $c>0$

az 1.1 definicióban szereplő pozitiv szám, tetszőleges $u \in U_{K'}$-ra.

Bizonyitás: Megjegyezzük először is, hogy a bizonyitásban lényegtelen a $c$ szám értéke, ennek a tételben csupán a fölény definiciója miatt van szerepe. Ezért tetszőleges $c$ mellett bizonyitjuk a tételt, azért, hogy egyuttal elfutó fölényre is megkapjuk a $V$ leképezés konstrukcióját.

A fölény definiciójából következik, hogy minden $u \in U_{K'}$-höz van olyan $v(u)$, hogy az $F[x_o, U^{\perp}_{K \cup K'}, x v(u) x u] \subset \{e \geq c\}$. (Ez a lényeges sajátosság gyenge elfutó fölény esetében $c=0$-val teljesül, ld. az 1.2 definiciót.) Ez azt jelenti, hogy minden $w \in U^{\perp}_{K \cup K'}$ mellett teljesül az

(49) $$F^{-1}(x_o, w, \{e \geq c\}) \supset \{(v(u), u) \mid u \in U_{K'}\}$$

tartalmazás. Másrészt az $F$ folytonossága miatt az

(50) $$F^{-1}(x_o, w, \{e \geq c\}) \subset U_K \times U_{K'}$$

halmaz kompakt. Képezzük az

(51) $$F = \bigcap_{w \in U^{\perp}_{K \cup K'}} F^{-1}(x_o, w, \{e \geq c\}) \subset U_K \times U_{K'}$$

kompakt halmazt, amely a (49) miatt nem üres, sőt a vetülete az $U_{K'}$-re az egész halmaz lesz $(p_{K'}(F) = U_{K'})$.

Ekkor azonban a függelék F.1.2 tétele biztositja, hogy megadható olyan

(52) $$V_e : U_{K'} \to U_K$$

Borel-mérhető leképezés, amelyre teljesül az

(53) $$F \supset \{(V_e(u), u) \mid u \in U_{K'}\}$$

feltétel, ami azt jelenti, hogy $V_e$ eleget tesz a (48) feltételnek. Ezzel a tételt beláttuk.

1.1 Megjegyzés: Ha a $K$ koaliciónak erős fölénye van az $x_o$ pontban az $e \in E'$, $\| e \| = 1$ irányban, akkor megadható a

(54) $$V_e(u) := v \in U_K, \quad u \in U^{\perp}_K$$

konstans leképezés ugy, hogy az (1.2) definicióval szereplő $c>0$-val teljesül az

(55) $F(x_o,u,V_e(u)) \in \{e \geq c\}$, minden $u \in U_K^{\perp}$

mellett.

Ez az 1.2 definició természtes következménye.

1.2 Megjegyzés: Miután felhivtuk a figyelmet arra, hogy az 1.7 tétel bizonyitásában nem volt lényeges szerepe a szereplő $c$ konstans értékének és láttuk, hogy ami a tétel bizonyitásához szükséges, az teljesül a gyenge elfutó fölényre is, ezért kimondhatjuk külön bizonyitás nélkül az alábbi tételt:

1.8 Tétel: Ha a $K$ koaliciónak gyenge elfutó fölénye van az $x_o \in G$ pontban a $K'$ koalicióval szemben az $e \in E'$, $\|e\|=1$ irányban, akkor megadható egy

(56) $V_e : K' \to K$

Borel-mérhető leképezés ugy, hogy minden $u \in U_{K'}$-re teljesül az

(57) $F[x_o, U^{\perp}_{K \cup K'}, V_e(u), u] \subset \{e \geq 0\}$

feltétel.

1.3 Megjegyzés: Erős elfutó fölény esetében az 1.1 megjegyzés eljárása biztosit egy az (57)-nek eleget tevő $V_e$ leképezést.

A $V_e$ leképezések definiciója után megmutatjuk bevezetett fölény teljesülésének számunkra alapvetően fontos következményét.

1.9 Tétel: Legyen a $K$ koaliciónak a $K'$ koalicióval szemben az $x_o \in G$ pontban az $e \in E'$, $\|e\|=1$ irányban fölénye. Ekkor megadható egy alkalmas

(58) $K_{\varepsilon,h}(0) = \bigcup_{\lambda>0} \lambda \cdot \{G_{\varepsilon}^{e}(0)+h\}$

kup (lásd az 1.5 definiciót), ahol $\langle e,h \rangle = 1/2$, $\|h\| \sim 1/2$ (azaz közel 1/2), és amelyre teljesül az alábbi:

Megadható a $t_o \in R$-hez $((t_o,z_o)=x_o \in G)$ olyan $\delta>0$, hogy a K' koalició bármely $u:[t_o,t(u)\} \subset [t_o,t_1] \to U_{K'}$, és az I (KUK') mérhető stratégiaválasztására az

$$(59)\qquad \begin{aligned}&\dot{x}(t)=F(x(t),\ v(t),\ V_e(u(t)),\ u(t))\ t\in[t_o,t(u)\}\ \text{m.m}\\ &x(t_o)=x_o\end{aligned}$$

differenciálegyenlet megoldása teljesiti az

$$x(t)\in x_o+K_{\varepsilon,h}(0),\quad t\in(t_o,t_o+\delta)\subset[t_o,t(u)\}$$

feltételt, ahol a $V_e$ az 1.7 tételben biztositott Borel-mérhető leképezés.

1.10 Tétel: Legyen a K koaliciónak erős fölénye az $x_o \in G$ pontban az $e\in E'$, $\|e\| = 1$ irányban. Ekkor megadható egy alkalmas $K_{\varepsilon,h}(0)$ kup (ld. (58)), ahol $\langle e,h\rangle=1/2$, $\|h\| \sim 1/2$ (azaz közel 1/2) és amelyre teljesül az alábbi:

Megadható a $t_o \in R$ ponthoz $((t_o,z_o)=x_o \in G)$ olyan $\delta>0$, hogy az I∖K koalició bármely $u:[t_o,t(u)\} \subseteq [t_o,t_1] \to U_K^{\perp}$ mérhető stratégiaválasztására az

$$(60)\qquad \begin{aligned}&\dot{x}(t) = F(x(t),\ u(t),\ V_e(u(t)))\ \text{m.m}\quad t\in[t_o,t(u)\}\\ &x(t_o) = x_o\end{aligned}$$

differenciálegyenlet megoldása teljesiti az

$$x(t)\in x_o + K_{\varepsilon,h}(0),\quad t\in[t_o,t_o+\delta]\subset[t_o,t(u)\}$$

feltételt, ahol $V_e$ az 1.1 megjegyzésben biztositott konstans leképezés.

Bizonyitás: A két tételt együtt bizonyitjuk. Képezzük az $x_o \in G$ mellett az

$$(61)\qquad F^{-1}(x_o,\{e\geq c>0\}) = V \subset \mathop{\mathrm{X}}_{i=1}^{N} C_i$$

kompakt halmazt, ahol a c az 1.1 illetve az 1.3 definiciókban biztositott pozitiv szám. A $V_e$ leképezés konstrukciója biztositja, hogy fölény esetén minden $u\in U_K$ és $v\in U^{\perp}_{K\cup K'}$ mellett a $(v,V_e(u),u)\in V$ teljesüljön, erős fölény mellett pedig minden $u\in U_K$ mellett igaz az $(u,V_e(u))\in V$ feltétel.

Legyenek mármost $u:[t_o,t(u)\} \to U_K$, $v:[t_o,t(u)\} \to U^{\perp}_{K\cup K'}$ mérhető leképezések, a fentiek alapján.

(62) $\quad (v,V_e(u),u):[t_o,t(u)\} \to V$

mérhető leképezést kapunk, mert $V_e$ Borel-mérhető. Ehhez hasonlóan az $u:[t_o,t(u)\} \to U^{\perp}_K$ erős fölény esetében egy

(63) $\quad (V_e(u), u) : [t_o,t(u)\} \to K$

mérhető leképezést határoz meg. Ezzel azonban előállitottuk az (59) és (60) megoldásfüggvényekre a függelék F2.4 tételének feltételeit, amely a tételeinek állitásait bizonyitja.

<u>1.4 Megjegyzés</u>: Az 1.9 és 1.10 tételek bizonyitásához idézett F2.4 tétel bizonyitásából az is kiderül, hogy megadható az $x_o$ pontnak egy olyan alkalmas $\delta'>0$ környezete, amelynek minden pontjára érvényes az 1.9 és 1.10 tétel állitása, méghozzá az alábbi formában:

<u>1.11 Tétel</u>: Az 1.9 és 1.10 tételekben szereplő $x_o$ pontnak megadható olyan $G_{\delta'}(0)$, $\delta'>0$ környezete, megadható olyan $\delta>0$ és $K_{\varepsilon,h}(0)$, amelyek minden $x'\in G_{\delta'}(x_o)$-beli pontra teljesitik az 1.9 illetve az 1.10 tétel állitásait, méghozzá az egész $G_{\delta'}(x_o)$-on univerzális $V_e$ stratégiaválasztással.

<u>1.5 Megjegyzés</u>: Az 1.11 tétel segitségével azt sikerült megmutatnunk erős és gyenge fölények esetében, hogy a $G^e_{K,K'}$ illetve a $G^e_K$ nyilt halmazok előállithatók olyan nyilt környezetek uniójaként, amelyek mindegyikén egy konstans $V_e$ stratégiaválasztási szabály segitségével használhatjuk fel meglevő fölényünket. Legyen most egy $G\subset G^e_{K,K'}$, $(G\subset G^e_K)$ olyan nyilt halmaz, amelynek minden pontjára teljesül az 1.11 tétel állitása, a $V_e$ stratégiaválasztási szabállyal.

1.7 Definició: A $(V_e, G)$ párt nevezzük a K koalició lokális stratégiaválasztásának, vagy röviden lokális stratégiájának.

A most következő §-ban megmutatjuk, hogy hogyan lehet a lokális stratégiaválasztási szabályokból felépiteni globális stratégiaválasztási szabályokat.

## 2. §. A LOKÁLIS STRATÉGIÁK SZINTÉZISE

Az előző §-ban bevezettük a $K \subset I$ koalició fölényének többféle fogalmát és ezek fennállása esetén stratégiaválasztási módszert is adtunk. E módszerről erős illetve gyenge fölény esetében megmutattuk, hogy egy alkalmas nyilt halmazon "megfelelő" választást biztosit. Ezért bevezettük a lokális stratégia fogalmát, amely egy $(V_e, G)$ alaku párt jelent, ahol a $V_e$ egy Borel mérhető leképezés, $G$ pedig az előbb emlitett alkalmas nyilt halmaz.

Most azt a kérdést vetjük fel, hogy hogyan biztosithatjuk a lokális stratégiák összekapcsolását? Ez alatt azt kell érteni, hogy ha az (59) vagy (60) differenciálegyenletek megoldása a $G$ halmaz valamely határpontjához érkezik, vajon milyen feltételek mellett folytatható a játék e határponton csatlakozó valamely másik $(V'_e, G')$ lokális stratégiaválasztási szabálynak megfelelően? E probléma rokon a szakadási felületek közismert problémájával.

A felvetett problémát két esetben oldjuk meg. A második esetben adott megoldás szinte feltétel nélkül alkalmazható, tétel formájában kimondott finomitott változatai mindössze a metrizálhatóságon mulnak és azon, hogy a stratégiákat nyilt halmazokon adjuk meg. Az első, finomabb eljárás szigoru feltételekhez kötött, csak erős vagy gyenge fölény esetében alkalmazható és csupán szeparábilis Banach tereken. Az első módszer feltételeinek megfogalmazásához meg kell fogalmaznunk lokális stratégiák családjának egy folytonossághoz hasonló tulajdonságát.

### 1. ELNYELÉSI ÉS TASZITÁSI PONTOK

Bevezetünk egy alapvető fogalmat, amelyet kupmezőnek fogunk nevezni.

Legyen $\Omega \subset G \subset E$ egy nyilt halmaz. Legyen minden $x \in \Omega$-hoz megadva egy $e(x) \in E'$, $\|e\| = 1$, és egy $0 < \varepsilon(x) < 1$ szám. Képezzük minden fenti $x$ mellett a $K_{\varepsilon(x), t(x)}(0)$ kupot, ahol $t(x) \in E$,

$<e(x), t(x)> = 1/2$ és $\|t\|(x) \sim 1/2$ és

$$(64) \qquad K_{\varepsilon(x),t(x)}(0) = \bigcup_{\lambda>0} \lambda \{G_{\varepsilon(x)}^{e}(0)+t(x)\}.$$

2.1 Definició: A $\mathcal{K}: x \to K_{\varepsilon(x),t(x)}(0)$, $x\in\Omega$ leképezéssel és $\Omega$-val képzett $(\mathcal{K}, \Omega)$ párt kupmezőnek nevezzük.

2.1 Megjegyzés: Minden lokális stratégiához tartozik egy kupmező, amelyet az 1.11 tétel biztosit.

Egy $F\subset E$ halmaz lezárását $\bar{F}$-al jelöljük.

2.2 Definició: Az $x\in\bar{F}$ pontot az $F\subset E$ halmaz $(\mathcal{K}, \Omega)$ kupmezővel szembeni elnyelési pontjának nevezzünk, ha van olyan $\delta>0$, hogy az

$$(K_{\varepsilon(x),t(x)}(0) + x) \cap G_{\delta}(x) \subset F \cap \Omega$$

feltétel teljesül.

2.3 Definició: Az $x\in\bar{F}$ pontot az $F$ taszitási pontjának nevezzük, ha az $E\setminus F$ elnyelési pontja.

2.1 Lemma: Ha $x\in \operatorname{int}(F)\cap\Omega$, akkor $x$ elnyelési pont.

Bizonyitás: Ha ugyanis van eleme a metszetnek, ez nem üres nyilt, igy van olyan $\delta>0$, hogy $G_{\delta}(x)\subset \operatorname{int}(F)\cap\Omega$ ami a tételt bizonyitja.

2.1 Következmény: Taszitási pont csak határpont lehet.

2.2 Következmény: Tetszőleges $(\mathcal{K}, \Omega)$ esetén $\Omega$ minden pontja $\mathcal{K}$ -val szemben elnyelési pont.

2.4 Definició: Egy $F\subset E$ halmazt a $(\mathcal{K}, \Omega)$-ra nézve szabályosnak nevezünk akkor, ha $\bar{F}\cap\Omega$ minden pontja taszitó vagy elnyelő.

2.1 Tétel: Egy $(\mathcal{K}, \Omega)$ kupmezőre nézve szabályos halmazok halmazalgebrát alkotnak, vagyis

1. Ha $F_1, F_2$ szabályos halmazok, ugy $F_1 \cup F_2$ is az.
2. Ha $F_1, F_2$ szabályos halmazok, ugy $F_2 \cap F_2$ is az.
3. Ha $F$ szabályos, ugy $E\setminus F$ is az.
4. Az egész tér, $E$ szabályos.

Bizonyitás: A 2.1 lemmára való tekintettel a taszitó-elnyelő tulajdonságot elegendő mindegyik esetben a határpontokra belátni.

1. Vegyük a $\partial F_1 \cup \partial F_2$ zárt halmazt ($\partial F_i$ jelöli az $F_i$ halmaz határát, mely zárt).

Legyen $x \in \partial F_1 \cup \partial F_2$-nek. Ha e pont legalább az egyikre nézve elnyelési pont, akkor az uniónak is elnyelési pontja lesz, ez természetes következménye a 2.2 definiciónak. Legyen ugyanis mondjuk az elnyelő halmaz az 1 indexü, ekkor a definició szerint van olyan $G_\delta(x)$, hogy $G_\delta(x) \subset \Omega$ és

$$G_\delta(x) \cap (K_{\varepsilon(x),t(x)}(0)+x) \subset F_1 \cap \Omega \subset (F_1 \cup F_2) \cap \Omega .$$

Ha az x valamelyiknek belső pontja, akkor a 2.1 lemma szerint elnyelési pont.

Marad tehát annak bizonyitása, hogy az x pont egyiknek sem elnyelési pontja. Ekkor lehet mindkettőnek taszitási pontja, vagy lehet az egyiknek külső pontja, a másiknak taszitási pontja.

Az első esetben $i=1,2$ mellett van olyan $G_{\delta i}(x)$, hogy az $E \setminus F_i$-re teljesül a 2.2 definició feltétele. De akkor a $\delta = \min_i \delta_i$-re az $(E \setminus F_1) \cap (E \setminus F_2) = E \setminus (F_1 \cup F_2)$-vel is teljesül a feltétel, tehát a pont taszitási marad.

A második esetben van olyan környezete a pontnak, miután az egyik (mondjuk $F_1$) külsejében van, hogy e környezet teljes egészében az $F_1$ külsejében fekszik. De akkor e környezetnek és az $F_2$-re a 2.2 definició által biztositott környezetnek a metszete éppen megfelel az unióhoz. Ezzel az 1. pontot beláttuk.

2. A 2. állitás az 1. állitásból következik komplementerképzés utján.

3. Ennek bizonyitása azért egyszerü, mert ha egy határpont taszitási pont, ez a komplementernek a 2.3 definició szerint elnyelési pontja. A komplementer határpontjaira ugyanez érvényes. Ezzel ezt be is láttuk.

4. Az egész tér lezárásának metszete $\Omega$-val $\Omega$, amelynek minden pontja elnyelési pont a 2.2 következmény szerint.

2.3 Következmény: A ( $K$,$\Omega$) bármely szabályos nyilt részhalmazának szabályos részhalmazai is halmazalgebrát alkotnak.

2.2 Lemma: Legyen $\Omega\subset E$ nyilt halmaz és legyen $\Omega$-n megadva egy "állandó" kupmező, azaz a 2.1 definició jelöléseivel

(65) $$K_{\varepsilon(x),t(x)}(0)=K_{\varepsilon,t}(0).$$

Ekkor megadható egy olyan $|||\ |||_K$ norma E-n, amelyre

1. $\varepsilon>0$ mellett $\{|||\ |||_K<\varepsilon\}$ szabályos K-ra nézve.
2. A $|||\ |||_K$ norma ekvivalens az eredeti $\|\ \|$ -val.

Bizonyitás: Belátjuk, hogy a $K_{\varepsilon,t}(0)$ halmaz minden határpontjára teljesül, hogy ha $x\in K_{\varepsilon,t}(0)$, ugy $x+K_{\varepsilon,t}(0)\subset K_{\varepsilon,t}(0)$

Legyen $r\in K_{\varepsilon,t}(0)$, ez előáll

(66) $$r = \lambda t + \lambda v, \qquad \lambda > 0$$

alakban, ahol $|||v|||_e<\varepsilon<1$, és $|||t|||_e=1$. (ld. a kupmező 2.1 definicióját.) Az x határpont pedig $x=\lambda t+\lambda v'$ alaku, ahol $|||v'|||_e\leq\varepsilon$. (Ugyanis ha x határpont, ugy megadható egy $\lambda_n t+\lambda_n v_n \to x$ sorozat ugy, hogy $\lambda_n$ korlátos és igy megadható ugy is, hogy konvergens legyen. Ha $\lambda_o$ e konvergens sorozat limeszpontja, ez nem 0, mert x sem az, de akkor osztva $\lambda_n$- el sorozat elemeit, $v_n$-et kifejezhetjük két konvergens sorozat különbségeként és igy $v_n$-ről beláttuk, hogy konvergens és ezért a limeszpont, $|||v'|||_e\leq\varepsilon$ teljesül.)

Vegyük az $x+K_{\varepsilon,t}(0)$ pontjait. Ezek előállnak

(67) $$\lambda t+\lambda v'+\bigcup_{\mu>0}\mu\,\{G_e^{|||\ |||_e}(0)+t\}$$

alakban, vagy átirva:

(68) $$x+K_{\varepsilon,t}(0)=\{y\mid y=(\lambda+\mu)t+(\lambda+\mu)(\tfrac{\lambda}{\lambda+\mu})v+\tfrac{\mu}{\lambda+\mu}w)\}$$

ahol megmutatjuk, hogy a $(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}v+\frac{\mu}{\lambda+\mu}w)\in G_\varepsilon^{|||\ |||_e}(0)$.

Felhasználva azonban, hogy 0,

$$(69) \qquad \left|\left|\left|\frac{\lambda}{\lambda+\mu}v + \frac{\mu}{\lambda+\mu}w\right|\right|\right|_e \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda+\mu}|||w|||_e < \varepsilon$$

amivel beláttuk az állitást.

Hasonlóan belátható, hogy a $-K_{\varepsilon,t}(0)$ minden határpontja taszitási pont.

Az $e$ funkcionál definiciójából következik, hogy az $\{-e\leq\delta\}$, és az $\{e\geq\delta\}$ halmazok $\delta$ tetszőleges valós mellett szabályosak. Ezért képezzük a $G_1=K_{\varepsilon,t}(0)\{e\leq 1\}$ és a $G_2=-K_{\varepsilon,t}(0)\cap\}e\geq -1\}$ halmazokat, melyek szintén szabályosak lesznek. E két halmaz segitségével könnyen megadhatjuk a kivánt "gömböt". Szabályos halmaz minden eltoltja szabályos konstans kupmező esetén. A $t$ definiciója alapján $2t\in\{e=1\}$, képezzük tehát a

$$(70) \qquad G(0):=\{G_1 - 2t\}\cup\{G_2 + 2t\}$$

halmazt. Könnyen belátható a kup definiciója alapján, hogy $G(0)$ a 0 egy korlátos, nyilt, konvex, kiegyensulyozott környezete, ezért az általa meghatározott Minkowsky funkcionál norma lesz, amely egyenértékü az eredeti normával. A $G(0)$ továbbá szabályos és minden számszorosa is az marad. Ezzel a tételt beláttuk.

<u>2.4 Következmény</u>: Legyen $E$ egy szeparábilis Banach tér. Ekkor a 2.2.lemma feltételeinek eleget tevő kupmező alaphalmaza előáll megszámlálható sok szabályos halmaz egyesitéséből.

<u>2.5 Következmény</u>: A 2.4 következményben szereplő előállitás helyettesithető szabályos halmazokból álló diszjunkt halmazrendszerrel is. Ha ugyanis $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$, ahol $G_i$ szabályos halmaz minden $i=1,2,\ldots$ mellett, akkor a

$$(71) \qquad G_i := G_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} G_j\right)$$

halmazok a 2.1 tétel alapján szabályosak, egyesitésük pedig, mint ismeretes és könnyen látható az egész $G$.

Ezzel eljutottunk oda, hogy megfogalmazhatjuk a szintézis problémáját és megoldási lehetőségeit vizsgáljuk Banach tereken és véges dimenziós tereken.

## 2. SZINTÉZIS PROBLÉMA KOMPATIBILIS STRATÉGIÁKNÁL

Lokális stratégiák szintézisén egy olyan stratégiaválasztási módszer megadását értjük, amely a fázistér minden pontjában egyértelmüen adja meg a stratégia megválasztásának a módját és emellett minden pontban egybeesik valamelyik lokális stratégiával. Mint ismeretes, ez a probléma általában nem oldható meg (Ld. a szakadási felületek problémáit a variációs módszereknél). A globális stratégiaválasztási módszernek olyannak kell ugyanis lennie, hogy minden pontban a játékot leiró differenciálegyenlet rendelkezzék egy $(t,t+\delta(t))$ intervallumon legalább is lokálisan egyértelmü megoldással. Ehhez pedig az szükséges, hogy ha egy lokális stratégia alkalmazási területének egy határpontjához érünk, e határponton megadott uj stratégiával az uj lokális stratégia érvényességi területén maradjon a fázispont legalább egy kis időintervallumra. Más szóval, az uj stratégiának e pont elnyelési pontja legyen. Általában ez nem vihető keresztül és ezért a hely függvényében egyértelmü stratégiaválasztási módszer megadásának feladatát pontonként véges választási lehetőségre enyhitjük. Ez utóbbiról látni fogjuk, hogy szinte korlátozás nélkül megoldható. Most először az első, nehezebb feladatot fogalmazzuk meg pontosan és bizonyos feltételek mellett megoldjuk. A második problémával a 3. pontban foglalkozunk.

Legyen $\Omega \subset G \subset E$ egy nyilt részhalmaz. Tegyük fel, hogy megadtunk lokális stratégiák egy $\{V_{e_\alpha}, G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ családját ugy, hogy teljesüljön az

$$\Omega = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \tag{72}$$

feltétel. Mint ezt az 1.11 tételben beláttuk, e stratégiacsaládhoz tartozik kupmezőknek egy $(K_\alpha, G_\alpha)_{\alpha\in A}$ családja és ha a

$(K_\alpha, G_\alpha)$ párokat az 1.11 tétel feltételeinek megfelelően képeztük, akkor még az is igaz, hogy ezek konstans kupmezők lehetnek.

2.5 Definició: Kupmezőnek egy $\{K_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ családját az $x\in\Omega$ pontban kompatibilisnek nevezzük, ha megadható olyan $G_\delta(x)$ környezet és egy $x$-től függő $K_{\varepsilon(x),t(x)}(0)$ kup, hogy minden $\alpha\in A$ mellett $y\in G_\delta(x)\cap G_\alpha$ esetén

(73) $$K_{\varepsilon(x),t(x)}(0) \supset K^\alpha_{\varepsilon_\alpha(y),t_\alpha(y)}(0)$$

2.6 Definició: Kupmezők egy $(K_\alpha, G_\alpha)_{\alpha\in A}$ családja az $\Omega\subset\Omega\subset E$ halmazon kompatibilis, ha minden $x\in\Omega$-ban kompatibilis.

Legyen most E szeparábilis Banach-tér. Megadunk $\Omega\subset\Omega\subset E$-n egy $K$ kupmezőt a következőképpen:

(74) $$K_{\varepsilon(x),t(x)}(0):=co\left(\bigcup_{\substack{\alpha\in A\\ x\in G_\alpha}} K^\alpha_{\varepsilon_\alpha(x),t_\alpha(x)}(0)\right)$$

ahol co a mögötte álló halmaz konvex burkát jelöli.

Ha az eredeti $\{K_\alpha, G_\alpha\}$ rendszer kompatibilis volt, ugy a $K$ kupmező minden pont egy alkalmas környezetében egy konstans kuppal "majorálható". Az igy bevezetett jelölések mellett az alábbi tételt mondhatjuk ki:

2.2 Tétel: Legyen $\{V_\alpha,G_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha = \Omega\subset\Omega\subset E$ lokális stratégiák egy olyan családja, hogy a neki megfelelő kupmezők $\{K_\alpha,G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ családja teljesitse $\Omega$-n kompatibilitás feltételét. Ekkor megadható egy $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, a (74)-el definiált $\{K, G\}$ kupmezővel szemben szabályos halmazokból álló olyan diszjunkt halmazrendszer, amely teljesiti az alábbiakat:

1. $B_i\subset G_{\alpha i}$, $i=1,2,\ldots$

2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$

3. $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ nyilt halmaz.

4. Minden $x\in\Omega$-hoz megadható egy és csakis egy olyan $B_{i(x)}$, hogy az $x$ a $K_{\alpha i(x)}$ kupmezővel szemben elnyelési pontja $B_{i(x)}$-nek.

Bizonyitás: Vegyük minden $x$ körül azt a $G_{\delta(x)}(x)$ környezetet, amelyet a kompatibilitás (72) feltétele biztosit.

Képezünk $\Omega$-nak egy $(\alpha,x)\in A\times\Omega$-val indexelt, a $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ és $\{G_{\delta(x)}(x)\}x\in\Omega$ fedőrendszereknél finomabb $G_{\alpha,x}:=G_\alpha\cap G_{\delta(x)}(x)$ nyilt halmazokból fedőrendszerét és a $G_{\alpha,x}$ halmazon a $V_{\alpha,x}$ stratégiát a $V_\alpha$ stratégia megszoritásaként definiáljuk. Minden $G_{\alpha,x}$-en egy konstans kupmezőt is definiálunk a $K_x$ kompatibilitás által biztositott kuppal. Ritkitsuk meg e fedőrendszer halmazait ugy, hogy minden $x$-hez egy olyan $G_{\alpha(x),x}$-et válasszunk ki, melyre teljesül, hogy $x\in G_{\alpha(x),x}$. A 2.2 lemma minden $G_{\alpha(x),x}$ biztosit egy a $K_x$ kuphoz tartozó olyan $|||\ |||_{K_x}$ normát, amely ekvivalens az eredeti normával és a $G_{\delta(x)}^{|||\ |||_{K_x}}(0)+x\subset G_{\alpha(x),x}$ halmaz szabályos a $K_x$-el szemben. Jelöljük egyszerüség kedvéért az $x$ pont e szabályos környezetét $G_x$-el és helyettesitsük az $\Omega$ halmaz $\{G_{\alpha(x),x}\}_{x\in\Omega}$ fedőrendszerét a $\{G_x\}_{x\in\Omega}$ szabályos halmazokból álló nyilt fedőrendszerrel. A tér metrizálhatósága és szeparábilitása folytán azonban e nyilt fedőrendszerből kiválasztható megszámlálható részrendszer is, mely lefedi $\Omega$-t. Legyen e rendszer $\{G_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$.

Képezzük a

$$(75)\qquad B_i:=G_{x_i}\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}G_{x_j}$$

diszjunkt szabályos halmazokból álló fedőrendszert. Ennek 1-4 tulajdonságai a konstrukció alapján világosan teljesülnek.

Talán a 4. pontot érdemes meggondolni: A diszjunktság következtében minden $x\in\Omega$ csak egy $B_{i_o}$ -nek lehet eleme. Ha ennek belső pontja, akkor a 4. állitás teljesül. Ha határpont és elnyelési pont, akkor is készen vagyunk. Ha azonban taszitási pontja, akkor vegyük az első $i_o$ darab $B_i$ halmaz egyesitését. Ez nyilt, $x$ ennek belső pontja (ld. a 3. állitást) van egy környezete, mely ezen unióhoz tartozik és a (74) kupnak ezzel vett metszete is ide tartozik. E metszet egy $x$ körüli alkalmas környezetének azonban benne kell lennie valamelyik halmazban, különben legalább egyikük nem volna szabályos halmaz. Ahol e metszet van, annak lesz $x$ elnyelési pontja, a diszjunktság miatt pedig világos, hogy csupán egy ilyen lehet.

2.6 Következmény: Jelölje $V$ az alábbi leképezéseket a 2.2 tétel feltételeinek teljesülése esetén:

$$(76)\qquad \begin{array}{ll} V : \Omega \times U_{K'} \to U_K & \text{gyenge fölény mellett} \\ V : \Omega \times U_K^{\perp} \to U_K & \text{erős fölény mellett} \end{array}$$

ahol

$$(77)\qquad V(x,u) := V_{\alpha i}(u),\ \text{ha}\ x \in B_i$$

ahol $u \in U_{K'}$, az első esetben, $u \in U_K^{\perp}$ a második esetben, és a 2.2 tétel jelöléseit használtuk. Legyen $x_o \in \Omega$ tetszőleges pont. Ekkor az

$$x(t_o) = x_o$$

$$\dot{x}(t) = F(x(t),\ v(t),\ V(x(t),u(t)),\ u(t))$$

illetve

$$(78)\qquad \dot{x}(t) = F(x(t),\ v(t),\ V(x(t),\ v(t)))$$

differenciálegyenleteknek $u(t)$ ill. $v(t)$ Borel mérhető irányitás mellett létezik megoldása, éspedig minden $x(t) \in \Omega$ mellett egy $(t, t+\delta(t))$ intervallumon lokálisan egyértelmüen folytatható.

Bizonyitás: Ez az 1.11 tételnek és a most bizonyitott tételnek közvetlen következménye. Az 1.11 tétel szerint ugyanis minden $B_i$ belsejében az állitás igaz. A 2.2 tétel 4. pontja szerint továbbá mindegyik $B_i$ halmaz bármelyik határpontjáról valamelyik $B_j$ halmaz belsejébe folytatódik a megoldás és igy ujból az 1.11 tétel biztositja a következmény állitásának helyességét.

A szabályos halmazok algebrájának még egy érdekes sajátosságát mutatjuk meg végesdimenziós terek esetében. Legyen E végesdimenziós.

Legyen $\{\mathcal{K}, G\}$, $G \subset E$ nyilt egy egyelemü kompatibilis kupmezőcsalád.

Legyen $G' \subset G$ tetszőleges.

2.3 Tétel: $\varepsilon>0$-hoz megadható olyan $H \subset G'$ szabályos halmaz, hogy ha $\rho(x, \partial G')$ jelöli az $x \in E$ pont távolságát $G'$ határától, akkor

$$\sup_{x \in \partial H} \rho(x, \partial G') < \varepsilon \tag{79}$$

Bizonyitás:

1. Legyen a $\overline{G'}$ kompakt. Ez esetben képezzük a

$$G'_\varepsilon = \{x \mid x \in G',\ \rho(x, \partial G') \geq \varepsilon\} \tag{80}$$

kompakt halmazt. A 2.2 tétel alapján a $G'_\varepsilon$ halmazt előállitjuk nyilt szabályos halmazok megszámlálható monoton növekedő uniójaként. A $G'_\varepsilon$-t kompaktsága miatt e sorozat valamely véges indexü eleme már lefedi és e szabályos halmaz teljesiti a tétel állitását.

2. Ha $\overline{G'}$ nem kompakt, akkor képezzük a

$$G'_{\varepsilon,n} = \{x \mid x \in G',\ \delta(x, \partial G') \geq \varepsilon,\ n-1 \leq \| x \| \leq n\} \tag{81}$$

kompakt halmazokat. Ezek $\varepsilon$ sugaru nyilt környezetét véve $G'$-beli nyilt halmazt kapunk, amely teljesiti az 1. feltételét és ebben megadhatjuk a $G'_{\varepsilon,n}$ kompakt halmaznak egy kellőképpen finom szabályos fedőhalmazát. Legyenek e halmazok $H_n$, $n=1,2,\dots$ . A keresett approximáló halmaz

$$H := \bigcup_{n=1} H_n \tag{82}$$

lesz, ugyanis könnyen belátható, hogy a szóbanforgó halmazok közül tetszőleges $x \in \Omega$ pont egy $\delta$ sugaru környezetébe csupán véges számu metsz bele. Ezzel pedig a tételt beláttuk.

## 3. SZINTÉZIS NEMSZEPARÁBILIS TEREKEN

Az előző pont elején vázolt két szintézisprobléma közül kompatibilis stratégiacsaládok esetére módszert adtunk a nehezebb, helytől függő globális stratégia feladatának megoldására. Adósak maradtunk azonban a gyengébb, de általánosabb feltételek mellett érvényes igért megoldási módszerrel. Ehhez csupán annyit fogunk felhasználni, hogy a lokális stratégiákat nyilt halmazokon adjuk meg. E módszernél az sem lényeges, hogy a stratégiához rendelhető egyáltalán kupmező. Mig az előző pont módszerei a határpontok elnyelési, taszitási tulajdonságain multak, ez esetben azt a tényt fogjuk felhasználni, hogy ha egy lokális stratégia nyilt alaphalmazának belső pontját irom elő kezdetiértékproblémának, akkor a megoldásgörbe biztosan e nyilt alaphalmazban halad egy kis időintervallumon. Vagyis az előző pont elnevezésével élve, nyilt halmaz minden pontja elnyelő, függetlenül attól, hogy van-e az egész tértől különböző kup, mely eleget tesz az 1.11 tétel feltételeinek.

Ennek alapján tulajdonképpen módszerünk igen egyszerü: Legyen $\{V_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ lokális stratégiák egy családja, melynek alaphalmazai lefedik E valamely $\Omega$ részhalmazát. Tegyük fel, hogy az $x(t)$ megoldásgörbe valamely $G_\alpha$-ban haladva annak határpontjához érkezett. Ha ez $\Omega$ belső pontja, ugy van olyan $G_{\alpha'}$, hogy lefedi e határpontot. De $G_{\alpha'}$ nyiltsága miatt ennek belső pontja, ezért a $V_{\alpha'}$ stratégiával folytathatjuk a játékot, egy időintervallumon. Nem kizárt azonban, hogy az uj stratégiával a fázispont visszamegy a $G_\alpha$-ba, de most ott nem a $V_\alpha$ stratégiát alkalmazza. Vagyis ezzel az összekapcsolási módszerrel a választott stratégia nem csupán a hely függvénye, hanem bizonyos pályapontokban hozott döntéseké is.

Az alább bebizonyitandó tételek két ponton finomitják a fenti ötletet:

1. Minden döntési pontban véges számu stratégia között kell döntenünk.

2. Minden $G_\alpha$ halmazban korlátozzuk a belépésre felhasználható pontok halmazát. Ezzel némiképpen megszoritjuk a tulságosan gyakori stratégiaváltás szükségességét.

Tekintsük A-t teljesen rendezett halmaznak.

2.4 Tétel: Legyen $\{V_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ lokális stratégiák egy osztálya. Ekkor megadható minden $\alpha\in A' \subset A$ mellett egy nem üres $G'_\alpha \subset \hat{G}_\alpha$, $\hat{G}'_\alpha \subset G_\alpha$ nyilt halmazokból álló halmazrendszer ugy, hogy

1. $\bigcup_{\alpha\in A'} G'_\alpha = \Omega = \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$

2. $\{G'_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ lokálisan véges rendszer

3. Minden $\alpha\in A'$ esetén van olyan $x\in G'_\alpha$, hogy $x\notin G'_{\alpha'}$, ha $\alpha' \neq \alpha$, $\alpha'\in A'$.

4. Legyen $p\in\Omega$. Rendeljük p-hez az alábbi $\alpha(p)\in A'$ elemet:

$$\alpha(p) := \min\{\alpha \mid \alpha\in A',\ p\in G'_\alpha\} \tag{83}$$

Bizonyitás: Miután $\Omega$ metrizálható tér, parakompakt. Ez azt jelenti, hogy megadható a $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ fedőrendszerének olyan $G'_\alpha \subset \hat{G}'_\alpha \subset G'_\alpha$ nyilt finomitása, hogy $G'_\alpha$ lokálisan véges fedőrendszer.

Legyen $A_1 \subset A$ az a részhalmaz, amelyre $\alpha\in A_1$ mellett $G'_\alpha \neq \emptyset$. Ha van olyan $\alpha\in A_1$, hogy $G'_\alpha \subset \bigcup_{\substack{\alpha'\in A_1\\ \alpha'\neq\alpha}} G'_{\alpha'}$, akkor hagyjuk el az ilyen $\alpha$-t $A_1$-ből. A Zorn lemma segitségével könnyen belátható, hogy van olyan minimális $A' \subset A_1$, melyből már nem lehet elhagyni ilyen uton $\alpha$-t. Ez teljesiti a 3. feltételt.

Végül a 4. pont állitásához azt jegyezzük meg, hogy azoknak az $\alpha$-knak a halmaza, amelyre a (84)-ben a minimumot kell képeznünk, véges a lokálisan végesség miatt és teljesen rendezett halmaz véges részhalmazának van minimális eleme.

2.7 Definició: A $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha = \Omega$ fedőrendszerhez hozzárendelünk egy függvényt a következő definicióval:

$h(x) := \sup\{\delta \mid \delta\text{-hoz } \exists\alpha(\delta)\in A, \text{ hogy } G_\delta(x) \subset G_{\alpha(\delta)}\}$ ha $x\in\Omega$.

2.3 Lemma: A bevezetett h függvény eleget tesz globális Lipschitz-féle feltételnek 1 Lipschitz-féle állandóval.

Bizonyitás: Legyen $x\in\Omega$ rögzitett pont.

Legyen $x\in G_{h(x)/2}(x)$ tetszőleges pont. Ha $\varepsilon>0$ tetszőleges elég kicsi szám, ugy megadható olyan $G_{\alpha(\varepsilon)}$ fedőhalmaz, hogy $G_{h(x)-\varepsilon}(x) \subset G_{\alpha(\varepsilon)}$. Másrészt ha $h(x)/2 \leq h(x)-\varepsilon$ akkor a $G_\delta(x') \subset G_{\alpha(\varepsilon)}$, ha $\delta = h(x)-\varepsilon-\| x-x\|$. Ez azonban azt jelenti, hogy miután $\varepsilon$ tetszőleges volt a $h(x') \geq h(x) - \| x-x'\|$. Az $x$ és $x'$ szerepét felcserélve megkapjuk a lemma állitását.

2.5 Tétel: Legyen $\{V_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ lokális stratégiák egy osztálya és legyen $0<\mu<1$ valós szám. Megadható egy $\{G'_\beta\}_{\beta\in B}$ lokálisan véges nyilt fedőrendszere $\Omega$-nak, ugy, hogy teljesülnek az alábbi feltételek:

1. Minden $\beta\in B$-hez tartozik egy $\alpha(\beta)\in A$ ugy, hogy $G'_\beta \subset G_\alpha(\beta)$

2. A $\{G'_\beta\}_{\beta\in B}$ fedőrendszer teljesiti a 2.4 tétel 3. feltételét.

3. Minden $\beta\in B$ mellett $\rho(G'_\beta, \partial G_{\alpha(\beta)}) \geq (1-\mu) \sup_{x\in G'\beta} h(x)$ ahol $h(x)$ a $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ rendszerhez a 2.7 definicióval hozzárendelt függvény.

4. Legyen $p\in\Omega$ tetszőleges, válasszuk $G_{\alpha(p)}$-t az alábbiak szerint:

$$\alpha(p) := \min \{\alpha(\beta) \mid \beta\in B \text{ és } p\in G'_\beta\}$$

Bizonyitás:

1. Vegyük $x\in\Omega$ esetén az $x$ körüli $G_{\delta(x)}(x)$ környezetet, ahol $\delta(x)=h(x)\cdot\mu/3$. E környezetben a 2.3 lemma miatt igaz, hogy $h(y) \leq h(x)(1+\mu/3)$.

2. Található olyan $\alpha(x)\in A$, hogy ha $\delta'=(1-\mu/3)h(x)$, akkor $G_{\delta'}(x) \subset G_{\alpha(x)}$-nek.

3. Belátjuk, hogy bármely $y\in G_{\delta(x)}(x)$-re a

$$\rho(y, \partial G_{\alpha(x)}) > (1-\mu) \sup_{z\in G_{\delta(x)}(x)} h(z).$$

A bal oldal $\geq h(x)(1-2\mu/3)$, mig a jobb oldalnak a bizonyitás 1. pontja alapján felső becslését adja az $(1+\mu/3)h(x)(1-\mu)$. A jobb oldalon álló kifejezés helyett e nála nagyobb $h(x)(1-2\mu/3-\mu^2/3)$ kifejezést beirva megkapjuk az állitást.

4. Ezután az igy kapott $\{G_{\delta(x)}(x)\}_{x\in\Omega}$ fedőrendszerre alkalmazva a 2.4 tételt, megkapjuk a kivánt fedőrendszert, a $B\subset\Omega$ indexhalmazzal, amely a fentiek miatt teljesiteni fogja a tételünk állitásait.

Legyen $[t_o, t_1] \subset R$ egy intervallum, legyen $z:[t_o, t_1] \to \Omega$ egy folytonos leképezés és legyen $\{G_\alpha, G'_\alpha\}$ két nyilt fedőrendszere $\Omega$-nak, $\overline{G'_\alpha} \subset G_\alpha$, $\alpha \in A$ mellett és legyen $G'_\alpha$ lokálisan véges. A $z$ görbe döntési pontjain az alábbi pontokat értjük: $\{z(t_o), z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots\}$ amelyeket teljes indukcióval az alábbiak szerint adunk meg:

Rendeljünk $z(t_o)$-hoz egy $G'_{\alpha_o}$-t, amelyre teljesül, hogy $z(t_o) \in G'_{\alpha_o}$. Legyen $z_1$ a $G'_{\alpha_o}$-nak az a határpontja, melyre $z(t^*) = z_1$, ahol $t^* = \sup\{t' \mid z[[t_o, t']] \subset G'_{\alpha_o}\}$. Nevezzük e pontot a $G'_{\alpha_o}$-ból való kilépési pontnak. Rendeljünk $z_1$-hez egy $\alpha_1 \in A$ indexet, mely ismét teljesiti a $z_1 \in G'_{\alpha_o}$ feltételt. Az ebből való kilépési pont legyen $z_2$, stb.

2.7 Következmény: Legyen most $\{V_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokális stratégiák egy családja. Legyen $A' \subset A$ a 2.4 illetve $\alpha(B) \subset A$ a 2.5 tételben biztositott rész indexhalmazok és legyen $\{G'_\alpha\}_{\alpha \in A} / \{G'_\beta\}_{\beta \in B}/$ az idézett tételekben biztositott lokálisan véges fedőrendszerek. Legyen most $z$ egy tetszőleges folytonos $\Omega$-ban haladó görbe $z(t_o)$ kezdőponttal. Adjuk meg a $\{G_\alpha, G'_\alpha\}_{\alpha \in A} / \{G_{\alpha(\beta)}, G'_\beta\}_{\beta \in B}/$ fedőrendszerpárhoz ugy a $z$ görbe döntési pontjait, hogy minden $z_i$ döntési pontban az $\alpha(z_i)$ indexet válasszuk, amelyet a 2.4 illetve 2.5 tételek 4. pontja biztosit. Könnyen látható, hogy igy adott görbe esetén a döntési pontok csak a kezdőpontnak és a görbének a függvényei.

Legyen most a fenti $z$ görbére a bevezetett döntési pontokkal $t_i^*$, $i=1, \ldots,$ az az időpont, melyre $z(t_i^*) = z_i$.

A $\{V_\alpha, G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokális stratégiákból képzett globális stratégián az alábbi leképezést értjük:

$$V:\quad C([t_o, t_1], \Omega) x \Omega x \Omega U_{K'} \to U_K$$

ahol a $C([t_o, t_1], \Omega)$ a $[t_o, t_1]$ intervallum $[t_o, t'\}, t' \leq t_1$ alaku részintervallumain értelmezett $\Omega$-beli értékü folytonos görbéket jelöli és $V$ nem az egész szorzathalmazon van megadva az alábbi definicióval:

Ha $z \in C([t_o, t_i], \Omega)$, és $x = z(t)$, ahol $t \in [t_i^*, t_{i+1}^*]$ akkor

(84) $\qquad V(z,x,u) := V_{\alpha(z_i)}(x,u)$

ha $i=1,2,\ldots$, illetve $z_i$ helyén $z(t_o)$ szerepel, ha $t\in[t_o,t_1^*]$.

2.8 Következmény: Az

$$x(t_o)=x_o,$$

$$\dot{x}(t) = F(x(t),v(t),\ V(x,x(t),\ u(t)),\ u(t))$$

illetve

$$\dot{x}(t) = F(x(t),\ u(t)\ ,\ V(x,x(t),\ u(t)))$$

differenciálegyenleteknek létezik megoldása bármely mérhető $v(t)\in U^{\perp}_{K\cup K'}$, $u(t)\in U_{K'}$, illetve $U^{\perp}_{K}$ mellett és minden $t$ mellett a megoldás értelmezési tartományából megadható egy $\delta(t)$, hogy a megoldás a $[t,t+\delta(t)]$ intervallumon egyértelmü is.

Bizonyitás: A megoldás konstrukciója könnyen elvégezhető, mert az $x_o$-nál megválasztott $G_{\alpha(x_o)}$-ban a $V_{\alpha(x_o)}$ segitségével megoldhatjuk az egyenletet. Ezzel megkapjuk $z_1$-et, ahonnét folytathatjuk a megoldást $z_2$-ig, stb. A lokális egyértelmüség pedig abból adódik, hogy minden választott nyilt halmazon teljesül e feltétel.

A nem teljes információju játékok egy osztálya szempontjából fontos az alábbi megjegyzés.

2.9 Következmény: Legyen $g\in C([t_o,t_1],\Omega)$ tetszőleges görbe. Ekkor az

$$x(t_o) = x_o$$

$$\dot{x} = F(x(t),\ v(t),\ V(g,g(t),\ v(t),\ u(t)),\ u(t))$$

kezdetiértékproblémának létezik lokálisan egyértelmü megoldása tetszőleges mérhető $[t_o, t_r(u,v))\subset[t_o,t_1]$ intervallumon értelmezett $U(t)\in U_{K'}$, $v(t)\in U^{\perp}_{K\cup K'}$, $t\in[t_o,t_r(u,v))$ Borel-mérhető iránvitás esetén. Erős fölény esetében $U_{K'}:=U^{\perp}_{K}$.

Bizonyitás: Hasonló, csak egyszerübb mint a 2.8 következmény bizonyitása.

Mint a differenciálegyenlet felirásából ez jól látszik, az irányitás megválasztásánál a $g$ trajektóriát vesszük alapul.

## 3.§. ALKALMAZÁSOK

E befejező §-ban általános jellegü alkalmazásokat mutatunk be. A 0.15 definicióval megadott minőségi játékkal foglalkozunk. Az alábbi két problémát tárgyaljuk:

1. A $K$ koaliciónak az a célja, hogy egy $K'$ koalició ne tudja elérni az $\bigcup_{i\in K} \Theta_i$ halmazt.
2. A koaliciónak az a célja, hogy elérje az $\bigcup_{i\in K} \Theta_i$ halmazt, ahol mindkét halmaz a $G \subset E$ nyilt halmaz zárt részhalmaza. E halmazokat e § során $\Theta_K$ illetve $\Theta_{K'}$-vel jelöljük.

Két alaptételt mondunk ki, melyek alkalmazásaiként két elfogási és két elfutási tételt bizonyithatunk, késleltetett illetve nem késleltetett esetekben.

További két tételt mondunk ki Hilbert terek esetére, konvex célhalmazokkal és belátjuk, hogy konvex halmaz $\varepsilon$ sugaru környezetén kivülmaradásra szükséges és elegendő feltétel adható. Végül egy numerikus eljárást is adunk, amely konvex halmaz $\varepsilon$ sugaru környezetén kivül maradásra késleltetett és nem késleltetett esetben mindig müködik, ha az elfutás emlitett szükséges és elegendő feltétele teljesül. Ellenkező esetben ugyanez a módszer elfogásra is alkalmas.

### 1. ELFOGÁSI ÉS ELFUTÁSI ALAPTÉTELEK

Az alaptételek bizonyitása előtt belátunk néhány lemmát.

Legyen $E$ a 0.§-ban bevezetett Banach-tér, legyen továbbá $H \subset E$ egy zárt részhalmaz. Jelöljük továbbá $\rho(x,H)$-val az $x\in E$ pontnak $H$-tól mért távolságát, melynek definiciója közismert.

A most következő 3.1, 3.2, 3.3 és 3.4 lemmáknál feltételezzük, hogy mindegyik lemma kimondásánál a sorozatban őt megelőző lemmák feltételei és jelölései érvényben vannak.

3.1 Lemma: $1>\varepsilon>0$-hoz és $x\in E$-hez található olyan $y(x)\in\partial H$, hogy

(85) $\qquad \rho(x,H)\leq\| x-y(x)\| \leq(1+\varepsilon\cdot\rho(x,H))\rho(x,H)$

teljesüljön.

Bizonyitás: Ez az állitás a $\rho(x,H)$ definiciója alapján nyilvánvaló.

3.1 Definició: A $\rho(\cdot,H)$ távolságfüggvényt az $x\in E$ pontban simának nevezzük, ha megadható egy $G_{\delta'(x)}(x)$ környezet egy $e_x\in E'$, $\| e_x\| = 1, \forall x_1,x_2\in G_{\delta'(x)}(x)$-hez $\| e_{x_1,x_2}\| <C\cdot\rho(x,H)$, és egy $\alpha_{x_1,x_2}\in R$ ugy, hogy $e_{x_1,x_2}\in E'$

(86) $\qquad \rho(x_i,H) = <e_x+e_{x_1,x_2},(x_1-y(x))> + \alpha_{x_1,x_2}$

ahol $<e_x,x-y(x)> = \| x-y(x)\|$ és $i=1,2$. A $C>0$ állandó.

3.2 Lemma: Ha az $x\in E$ pont a $\rho(\cdot,H)$ távolságfüggvénynek simasági pontja, akkor a 3.1 definició alapján megadható $e_x$ funkcionálhoz található olyan $G_{\delta(x)}(x)$ környezete x-nek $\delta(x)<\delta'(x)$, hogy $\delta(x)<\varepsilon\cdot\rho(x,H)$ és teljesül az

(87) $\qquad (1-\varepsilon\cdot\rho(x',H))\cdot\rho(x',H)<<e_x,x'-y(x)>$

$\qquad <(1+\varepsilon\cdot\rho(x',H))\rho(x',H), x'\in G_{\delta(x)}(x)$

Bizonyitás: Azt kell csupán megmutatnunk, hogy van ilyen környezet. A 3.1 definició biztositja a $G_{\delta'(x)}(x)$ környezetet, amelynek x eleme. A (87) egyenlőtlenség teljesül továbbá magára az x pontra és mindkét szereplő egyenlőtlenség határozott lévén és folytonos függvények szerepelnek benne, igy mindegyik egy-egy nyilt halmazon teljesül, melyeknek van közös pontja, az x maga. De ez már a lemmát bizonyitja.

3.3 Lemma: Legyenek $x_1,x_2\in G_{\delta(x)}(x)$, két tetszőleges pont. Ekkor a (86)-ban szereplő $\alpha_{x_1,x_2}$ - re teljesül az alábbi becslés:

(88) $\quad |\alpha_{x_1,x_2}| \leq (\varepsilon(4+c)+c)\cdot\rho^2(x,H)$

feltéve, hogy $\rho(x,H)<1$.

Bizonyitás: Rendezzük át a (86) kifejezést:

$$\alpha_{x_1,x_2}=\rho(x_1,H)-\langle e_x,x_1-y(x)\rangle-\langle e_{x_1,x_2},x_1-y(x)\rangle$$

ahol alkalmazhatjuk a (87) becslést, amelynek alapján

(89) $\quad |\alpha_{x_1,x_2}|<\varepsilon\cdot\rho^2(x_1,H) + c\cdot\rho(x,H)\cdot\| x_1-y(x)\|$

Ám a Lipschitz féle feltételnek eleget tesz a $\rho$ függvény, ezért a $\delta(x)<\varepsilon\cdot\rho(x,H)$ felhasználásával

$$\rho^2(x_1,H)\leq\rho^2(x,H)+2\varepsilon\cdot\rho^2(x,H)+\varepsilon^2\cdot\rho^2(x,H)\leq(1+3\varepsilon)\rho^2(x,H)$$

és

$$\| x_1-y(x)\| \leq\rho(x,H)+2\varepsilon\cdot\rho^2(x,H)$$

ahol felhasználtuk, hogy a $\rho(x,H)<1$ és ezért alacsonyabb hatványok beirásával növeltünk.

Ezeket mind beirva és ismét alkalmazva a fenti hatványozáscsökkentêssel való növelést:

(90) $\quad |\alpha_{x_1,x_2}|\leq(\varepsilon(4+c)+c)\cdot\rho^2(x,H).$

Ezzel pedig a tételt beláttuk.

3.4 Lemma: Megadható olyan $\varepsilon$ és $c$-től függő $\gamma>0$ szám és $c_1,c_2>0$ állandók, hogy ha $\gamma>\rho(x,H)$, akkor bármely $x_1,x_2\in G_{\delta(x)}(x)$ mellett minden $x'\in G_{\delta(x)}(x)$ esetén

(91) $\quad c_2\rho(x',H)\leq\langle e_x+e_{x_1,x_2},x'-y(x)\rangle+\alpha_{x_1,x_2}\leq c_1\cdot\rho(x',H)$

Bizonyitás: Osszuk el a (91) egyenlőtlenséget $\rho(x',H)$-val és a hányadosra adjunk alsó és felső becsléseket:

$$\frac{<e_x,x'-y(x)>}{\rho(x',H)}+\frac{<e_{x_1,x_2},x'-y(x)>}{\rho(x',H)}+\frac{\alpha_{x_1,x_2}}{\rho(x',H)}=c(x') \tag{92}$$

1. Felülről becsülünk:

Az első tagot a (87) alapján, a másodikat a 3.1 definició alapján, a harmadikat pedig a 3.3 lemma alapján becsüljük meg:

$$\begin{aligned}c(x') &\le +1+\varepsilon\cdot\rho(x',H)+c\cdot\rho(x,H)(1+\varepsilon\cdot\rho(x',H))+\\ &+(\varepsilon(4+c)+c)\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\rho(x',H)\\ &\le 1+2\varepsilon+c+c\cdot\varepsilon+(4\varepsilon+\varepsilon c+c)(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)=c_1\end{aligned} \tag{93}$$

ahol az utolsó tag becslésénél tekintetbe vettük a 3.2 lemmában kikötött norma arányt.

2. Alulról becsülünk:

Alsó becslésnél ugyanazokra a becslésekre hivatkozunk csupán negativ előjellel alkalmazzuk őket, ahol ez szükséges és a (93)-ból nem hagyjuk el a második részből kiemelhető $\rho(x,H)$-t.

$$\begin{aligned}c(x') &\ge 1-\varepsilon\cdot\rho(x',H)-c\cdot\rho(x,H)(1+\varepsilon\cdot\rho(x',H))\\ &-(4\varepsilon+\varepsilon\cdot c+c)\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\rho(x,H)\\ &\ge 1-\rho(x,H)\left[(5\varepsilon+\varepsilon c+c)\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}+c+\varepsilon\right]\\ &\ge 1-\rho(x,H)(6\varepsilon+\varepsilon c+2c)\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\end{aligned}$$

Látható, hogy ha $\rho(x,H)<\gamma$, ahol $\gamma<\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}(6\varepsilon+\varepsilon c+2c)^{-1}$, akkor van $c(x')>c_2>0$.

Ezzel a lemmát beláttuk.

Ezzel befejeztük az előkészületeket, most rátérünk az alaptételek közvetlen előkészitésre az előző §-ok jelöléseivel.

Tételezzük fel, hogy a $H\subset G\subset E$ zárt halmaz körül megadható egy $\Omega\subset G\cap \mathrm{Ext}(H)$ nyilt halmaz, ugy, hogy $\partial H\subset\partial\Omega$.

Tételezzük fel továbbá, hogy a $\rho$ függvény ezen az $\Omega$ halmazon minden pontban sima, méghozzá egy univerzális $c$-vel. Tételezzük fel, hogy minden $x\in\Omega$ ponthoz a 3.1 definició szerint létező $e_x\in E'$ funkcionállal megadott irányban az $y(x)\in H$ határpontban valamilyen fölénye van a $K$ koaliciónak. Az $x$ pont körüli $G_{\delta(x)}(x)$ környezetben legyen $V_x$ az $y(x)$-fölényt az $y(x)$ pontban realizáló 1.7, 1.8 tételek és 1.1, 1.3 megjegyzések valamelyike által biztositott $V$ leképezés. (Vagyis a határponton határozzuk meg, hogy hogyan választjuk meg az $x$ pont egy környezetében a stratégiánkat.) Ilyenformán nyertünk egy $\{V_x,G_{\delta(x)}(x)\}_{x\in\Omega}$ lokális stratégiacsaládot. Legyen $h$ a $\{G_{\delta(x)}(x)\}_{x\in\Omega}$ fedőrendszerhez 2.7 definicióval megadott függvény. Képezzük a $\{V_x,G_{\delta(x)}(x)\}_{x\in\Omega}$ lokális stratégiacsaládot. E lokális stratégiacsalád 2.7 következmény szerinti összekapcsolását jelöljük $V^{\mu}$-vel, ezen összekapcsolás alapjául a 2.5 tétel konstrukcióját alkalmazzuk, $1>\mu>0$-vel.

Legyen $1>\nu>0$ egy valós szám. Legyenek $z,\tilde{z}\in C([t_o,t_1],\Omega)$, $D(z)\subset D(\tilde{z})$, melyekre teljesül a

$$(94)\qquad \|z(t)-\tilde{z}(t)\|\leq\nu\cdot h(\tilde{z}(t))$$

és teljesüljön az alábbi: $z$ abszolut folytonos és

$$(95)\qquad \begin{aligned} &z(t_o)=\tilde{z}(t_o)\\ &\dot{z}(t)=F(z(t),\ V^{\mu}(\tilde{z},\tilde{z}(t),u(t)),u(t)) \qquad \text{illetve}\\ &\dot{z}(t)=F(z(t),V(t),\ V^{\mu}(\tilde{z},\tilde{z}(t),u(t)),u(t))\end{aligned}$$

egyenletek közül a fölénytipusnak megfelelő teljesül, ahol $u(t)\in U_{K'}$, $v(t)\in U^{\perp}_{KUK'}$, illetve $u(t)\in U^{\perp}_{K}$.

A nevezett jelölések és fogalmak segitségével kimondhatjuk az alábbi két alaptételt:

<u>3.1 Tétel</u>: Tegyük fel, hogy a $K$ koaliciónak elfutó fölénye van minden $x\in\Omega$ mellett az $y(x)$ pontban, az $e_x$ irányban a $K'$ koalicióval szemben. Ekkor nincs a $K'$ és $I\setminus KUK'$ (erős fölény esetén az utóbbi üres) koalicióknak olyan stratégiaválasztása,

hogy a $(v, V^{(1-\nu)}, u) \in S$ szituáció irányitása összekötné $z(t_o)$-t a H-val. (ld. 0.5 definició, ill. 0.5a definició).

Megjegyezzük természetesen, hogy a tétel feltételezi a $\rho$ H-tól mért távolságfüggvényről a 3.1 definició feltételének teljesülését.

Bizonyitás: Tételezzük fel, hogy a tétel állitásával ellentétben van olyan véges $T>t_o$, hogy $\lim_{t \nearrow T} z(t) \in \partial H$. Miután az F feltevésünk szerint eleget tesz a lokális Lipschitz féle feltétel követelményeinek van olyan $G_1(z(T)) \subset G$ környezet, amelyben F L Lipschitz-féle állandóval teljesiti e feltételt.
Megadható továbbá egy $G_2(z(T)) \subset G_1(z(T))$, amelynek sugara a 3.4 lemmában biztositott $\gamma$-nál kisebb.

Legyen $\{\tilde{z}(t_i^*)\}_{i=0}^{\infty}$ a $\tilde{z}$ görbe $V^{1-\nu}$ stratégiához tartozó döntési pontjainak halmaza, $t_o^* := t_o$ jelöléssel. Bevezetve a $\tilde{z}_i = \tilde{z}(t_i^*)$ ill. $z_i = z(t_i^*)$ jelöléseket, belátjuk, hogy $z(t) \in G_{\delta(\alpha(\tilde{z}_i))}(\alpha(\tilde{z}_i))$, ha $t \in [t_i^*, t_{i+1}^*)$ (az $\alpha$ leképezést ld. a 2.5 tételnél, a 4. állitásban).

A (85a) és a döntési pontok definiciója értelmében

$$\tilde{\alpha}(\tilde{z}(t)) := \alpha(\tilde{z}_i) \quad t \in [t_i^*, t_{i+1}^*) \tag{96}$$

és ha tekintetbe vesszük, hogy a lokális stratégiákat az $\Omega$ pontjaival indexeltük $\{V_x, G_{\delta(x)}(x)\}_{x \in \Omega}$ alakban, akkor a 2.5 tétel 3. állitásából a $\mu = 1-\nu$ feltételből és (94)-ből rögtön megkapjuk, hogy

$$\| z(t) - \alpha(\tilde{z}(t)) \| \leq \delta(\alpha(\tilde{z}(t))), \tag{97}$$

amit bizonyitani akartunk.

Célszerü bevezetni még az

$$\alpha(\tilde{z}_i) =: \approx{z}_i \tag{98}$$

jelölést.

Vegyünk minden $z_i, z_{i+1}$ párhoz és $\tilde{\tilde{z}}_i$-hoz egy $e_{z_i,z_{i+1}}, e_{\tilde{\tilde{z}}_i} \in E'$ és $\alpha_{z_i,z_{i+1}}$, a 3.1 definició értelmében a $G_{\delta(\tilde{\tilde{z}}_i)}(\tilde{\tilde{z}}_i)$ környezet pontjaira létező funkcionált és számot, amelyek segitségével megadunk egy $H(t)$ függvényt az alábbiak szerint:

$$(99) \qquad H(t) := \langle e_{\tilde{\tilde{z}}_i} + e_{z_i,z_{i+1}}, z(t) - y(x_i) \rangle + \alpha_{z_i,z_{i+1}}$$

ha $t_i^* \leq t \leq t_{i+1}^*$.

A (99)-el bevezetett $H$ (t) függvény abszolut folytonos és deriváltjára teljesül a (95)-nek megfelelően az alábbiak egyike:

$$(100) \qquad \dot{H}(t) = \langle e_{\tilde{\tilde{z}}_i}, F(z(t), V^{1-\nu}(\tilde{z}, \tilde{z}(t), u(t)), u(t)) \rangle +$$
$$\langle e_{z_i,z_{i+1}}, F(z(t), V^{1-\nu}(\tilde{z}, \tilde{z}(t), u(t)), u(t)) \rangle$$

vagy a másik jobb oldalnál a $F(z(t), V^{1-\nu}(\tilde{z}(t), u(t)), u(t)), v(t))$ szerepel hol az $u(t)$, $v(t)$ függvények jelentését lásd a (95).

Vizsgáljuk meg a kapott függvényt a $G_2(z(T))$ környezetben, azaz egy alkalmas $[t^*, T]$ intervallumon, amikor már a $z(t)$ és a $\tilde{z}(t) \in G_2(z(T))$, $t \in [t^*, T]$ esetén, $t^* < T$.

A $G_2(z(T))$ környezetben teljesülnek a 3.4 lemma feltételei, ezért van olyan $c_1$ és $c_2$, hogy

$$(101) \qquad c_2 \rho(z(t), H) \leq \dot{H}(t) \leq c_1 \cdot \rho(z(t), H)$$

Vizsgáljuk meg most a $\dot{H}(t)$-t. Ennek második tagjára a következő igaz:

Az F az egész $G_2(z(T))$-ben eleget tesz a Lipschitz féle feltételnek, ezért megadható egy M korlát, amellyel

$$(102a) \qquad \| F \| \leq M$$

bármely stratégiaválasztás mellett a $G_2(z(T))$-ben. Ezért a második tagra a (100) kifejezés jobboldalán érvényes az

$$(102) \qquad |\langle e_{z_i, z_{i+1}}, F(z,\dots)\rangle| \le M\cdot c\cdot \rho(\tilde{\tilde{z}}_i, H) \le cM\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\rho(z(t),H)$$

Most az első tag becslése következik:
Becsüljük meg az alábbi eltérést:

$$(103a) \qquad \begin{aligned} &|\langle e_{\tilde{\tilde{z}}_i}, F(z(t), V_{y(\tilde{\tilde{z}}_i)}(\dots),\dots)\rangle - \\ &-\langle e_{\tilde{\tilde{z}}_i}, F(y(\tilde{\tilde{z}}_i), V_{y(\tilde{\tilde{z}}_i)}(\dots),\dots)\rangle| \le \\ &\le L\cdot \| z(t)-y(\tilde{\tilde{z}}_i)\| \le L\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}[\rho(z(t),H)+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\rho(z(t),H)] = \\ &= C\cdot\rho(z(t),H) \end{aligned}$$

Tekintetbe véve, hogy a levont tag értéke a tétel feltétele miatt nem negativ, hiszen V elfutó fölényt realizál az $y(\tilde{\tilde{z}}_i)$ pontban az $e_{\tilde{\tilde{z}}_i}$ irányban, azt kapjuk, hogy

$$(103) \qquad \langle e_{\tilde{\tilde{z}}_i}, F(z(t), V_{y(\tilde{\tilde{z}}_i)}(\dots),\dots)\rangle \ge -C\rho(z(t),H).$$

alapján.

A (102) és a (103) becsléseket egybeirva

$$(104) \qquad \dot{H}(t) \ge -(C+cM\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})\rho(z(t),H) \ge -D\rho(z(t),H)$$

A (101) és (104) becslések felhasználásával végül is azt kapjuk, hogy

$$(105) \qquad \dot{H}(t) \ge -\tilde{D}\cdot H(t)$$

egy $[t^*,T]$ intervallumon és $H(t^*)>0$, a (101) miatt, T definiciójának figyelembevételével.

Képezzünk most egy $A \subset R^2$ halmazt és ezen értelmezünk két függvényt:

$$(106)\qquad \begin{aligned} &A := \{(x,s) \mid x = H(s),\ t \le s \le T\} \\ &f(x,t) := \dot{H}(t),\ (x,t) \in A \\ &g(x,t) := -D \cdot x,\ (x,t) \in R^2 \end{aligned}$$

E függvényekkel felirhatunk egy-egy differenciálegyenletet:

$$(107)\qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t),t) \\ \dot{y}(t) &= g(y(t),t) \end{aligned}$$

$x(t^*)=y(t^*)=H(t^*)$ kezdetiértékproblémával.
A (108) miatt ezek a differenciálegyenletek teljesitik a függelék F2.1 tételének feltételeit és mindkét egyenletre vonatkozó kezdetiértékproblémának van (az elsőnek legalább egy, a másodiknak egyértelmü) megoldása, amelyekre teljesül az idézett tétel állitása, azaz

$$(108)\qquad x(t)=H(t) \ge y(t) = H(t^*) \cdot e^{-\tilde{D}\cdot(t-t^*)}$$

amelyből a (101) felhasználásával T-re azt kapjuk, hogy

$$(109)\qquad \rho(z(T),H) \ge \frac{c_2}{c_1}(z(t^*),H) \cdot e^{-\tilde{D}(T-t^*)}$$

amelyből következik, hogy $z(T) \notin H$, azaz a tételt beláttuk.

3.2 Tétel: Tételezzük fel, hogy a $\rho$, H-ról mért távolságfüggvény az $\Omega \subset \mathrm{Ext}(H) \cap G$ halmazon sima. Tegyük fel, hogy megadható egy olyan $p \in \partial H$ pont, melynek van olyan $G_o(p) \subset G$ környezete, hogy ennek minden $x$ pontjába a $K$ koaliciónak az $y(x) \in \partial H$ pontban a $-e_x$ irányban egy legalább $c(p)/c(p)$ az 1.1, 1.3 definiciókban szereplő $\alpha$ mértékü fölénye van a K' koalicióval szemben, (illetve erős fölénye van). Ekkor van a p pontnak olyan környezete, hogy ha a K koalició a $V^{1-\nu}$, globális stratégiát alkalmazza, ugy a K' illetve $I \setminus K \cup K'$ koaliciók bármely stratégiaválasztása mellett a (95) megoldása véges idő alatt eléri a környezet bármely pontjából indulva H-t.

Bizonyitás: Megadható p pont körül tételünk feltételei miatt a 3.1 tétel bizonyitásában meghatározott $G_2(p)$, amelyet ott a $z(T)$ határpontra adtunk meg és az általánosság csorbitása nélkül feltételezhetjük, hogy $G_o(p)\supset G_2(p)$, ha ugyanis nem teljesülne, akkor vegyük e két környezet metszetét.

A (95) egyenlet minden $\Omega$-ban haladó megoldásához hozzárendelhetjük a (99)-el definiált $H(t)$ függvényt, melynek deriváltjára teljesül a (100) előállitás.

Ha e megoldásnak van $G_2(p)$-ben haladó szakasza, azon a szakaszon érvényesek a (101), (102a), (102) és a (103a) becslések. Ugyancsak érvényes lesz a (106) becslés.

A (103a) becslés alapján adjunk felső becslést a (100) derivált első tagjára:

$$(110)\qquad \langle e_{x_i}, F(z(t), V_{y(x_i)}(\ldots),\ldots)\rangle \leq -c(p)+C\rho(z(t),H)$$

ahol felhasználtuk a fölény mértékére vonatkozó feltevést.

A (102) és a (110) becslések felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(111)\qquad \dot{H}(t)\leq -c(p)+D\cdot\rho(z(t),H)$$

Legyen $G_{\delta_1}(p)\subset G_2(p)$ az a környezet, melynél $\delta_1<c(p)/2D$. Ezen egész környezetben az itt haladó $z(t)$-hez tartozó $\dot{H}(t)<-c(p)/2$.

Vegyük most azt a $G_{\delta_2}(p)$ környezetét a p pontnak, amelyre teljesül a

$$(112)\qquad \frac{\delta_1-\delta_2}{M} > \frac{c_1\cdot\delta_2}{c(p)/2}$$

amely figyelembe véve a $c(p)\leq M$ feltételt (mely igen könnyen belátható a definiciók alapján), mindig egy $\delta_2<\delta_1$ sugarat eredményez ($c_1$ a (101)-ben szereplő 1-nél nagyobb állandó).

Beláthatjuk, hogy a $z(t)\in G_{\delta 2}(p)$, akkor van olyan véges T érték, hogy valamely $t^*\in[t,T]$ értékre $z(t^*)\in H$.

Ha $z(t)\in G_{\delta_2}(p)$, akkor $\rho(z(t),H)<\delta_2$ és ezért

$$(113)\qquad H(t) \leq c_1 \cdot \delta_2$$

a (101) felhasználásával. A $z$ görbe $G_{\delta_1}(p)$ környezetben haladó $[t,\tilde{t}]$ szakaszán a megfelelő $H$ függvényre $\delta_1$ definiciója miatt érvényes a

$$(114)\qquad H(s) \leq H(t) - \frac{c(p)}{2}(s-t)$$

becslés.

Ha mármost $z(t)\in G_{\delta_2}(p)$, akkor legalább

$$(115)\qquad T-t := \frac{\delta_1-\delta_2}{M}$$

ideig a $G_{\delta_1}(p)$-ben halad a $z(t)$ görbe, ahol felhasználtuk a (102a) becslést.

Azonban ekkor a (114) és a (112), (113) felhasználásával

$$(116)\qquad H(T) \leq H(t) - \frac{c(p)}{2} \cdot \frac{\delta_1-\delta_2}{M} \leq c_1 \cdot \delta_2 - \frac{c(p)\,(\delta_1-\delta_2)}{2M} \leq 0$$

ami csak ugy lehetséges a (101) figyelembevételével, hogy valamely $t<t^* \leq T$ mellett $\rho(z(t^*),M)=0$. Ezzel pedig beláttuk a tételt, a kivánt környezet a $G_{\delta_2}(p)$ lesz.

Gyakorlati problémák esetében érdekes lehet a nem teljes információju játékok olyan dinamikáju esete is, amikor a teljes dinamika a $\tilde{z}$ függvénye, vagyis a (95) helyett az $U$ ill. $v$ stratégiaválasztások változatlanul hagyása mellett a

$$(116a)\qquad \begin{aligned} z(t_o) &= \tilde{z}(t_o), \\ \dot{z}(t) &= F(\tilde{z}(t), V^{\mu}(\tilde{z},\tilde{z}(t),u(t)),u(t)) \\ \dot{z}(t) &= F(z(t), v(t), V^{\mu}(\tilde{z},\tilde{z}(t),u(t)),u(t)) \end{aligned} \qquad \text{ill.}$$

egyenletek adják meg a dinamikát.

Ezen esetekre az alábbiak igazak.

3.1a Tétel: A 3.1 tétel feltételeinek teljesülése esetén a 3.1 tétel változatlanul igaz marad.

3.2a Tétel: A 3.2 tétel feltételeinek teljesülése esetén a 3.2 tétel állitása változatlanul igaz marad.

A 3.1a és 3.2a tételek bizonyitása szó szerint megegyezik a 3.1 ill. 3,2 tételek bizonyitásával, csupán a

$$(1-\nu\cdot\varepsilon)\cdot\rho(\tilde{z}(t),H)\leq\rho(z(t),H)\leq(1+\nu\cdot\varepsilon)\cdot\rho(\tilde{z}(t),H)$$

egyenlőtlenséget kell belátni, ami a

$$|\rho(z(t),H)-\rho(\tilde{z}(t),H)|\leq\| z(t)-\tilde{z}(t)\|,$$

a (94) egyenlőtlenség, és a 3.2 lemmabeli $\delta(x)\leq\varepsilon\cdot\rho(x,H)$-ból következő $h(x)\leq\varepsilon\cdot\rho(x,H)$ egyenlőtlenségek nyilvánvaló következménye.

## 2. ELFUTÁS-ELFOGÁS KÉSLELTETÉSSEL ÉS ANÉLKÜL.

### a. Elfogás és elfutás késleltetés nélkül.

3.3 Tétel: Elfutási tétel:

Legyen $\Theta_{K'} = \bigcup_{i\in K'} \Theta_i$. Legyen továbbá $\Omega \subset \mathrm{Ext}(\Theta_{K'})\cap G$ egy olyan nyilt halmaz, amelyre teljesül a $\partial\Omega \supset \partial\Theta_{K'}$ és amelyre teljesül az alábbi: Legyen a $\rho$ $\Theta_{K'}$-től mért távolságfüggvénynek minden $x\in\Omega$ pont simasági pontja univerzális $C>0$-val. (ld. 3.1 definiciót), és legyen az előző pontban leirt hozzárendeléssel a K koaliciónak minden $y(x)\in\partial\Theta_{K'}$ pontban az $e_x$ irányban elfutó fölénye. Ekkor a K koalició a $z(t)$ és $u(t)\in U_{K'}$ ismeretében a $V^{1-\nu}(z(t),u(t))$, tetszőleges $1>\nu>0$ mellett az előző pontban definiált globális stratégiaválasztás alapján meg tudja ugy választani stratégiáját, hogy a K' koalició semmilyen stratégiaválasztással nem tud olyan szituációt képezni, hogy összekösse $z(t_o)\in\mathrm{Ext}\Theta_{K'}$ pontot $\Theta_{K'}$-vel.

Bizonyitás: A $z=\tilde{z}$ $\nu=0$ mellett teljesiti a $z,\tilde{z}$-ra kirótt feltételeket, egyébként pedig teljesülnek a 3.1 tétel feltételei. Megjegyezzük még, hogy $z=\tilde{z}$ mellett az itt javasolt globális stratégia helyett a lokális stratégiák összefüzésére bármelyik 2.§-beli összefüzési módszert alkalmazhattuk volna a tétel állitása ugyanugy igaz marad (természetesen olyan összefüzési módszert, amelyet a lokális stratégiák lehetővé tesznek).

3.4 Tétel: Elfogási tétel:

Legyen $\Theta_K = \bigcup_{i\in K} \Theta_i$. Legyen továbbá $\Omega \subset \mathrm{Ext}(\Theta_K)\cap G$ egy olyan nyilt halmaz, amelyre teljesül a $\partial\Omega \supset \partial\Theta_K$ és amely teljesiti az alábbi feltételt: Legyen $\rho$ $\Theta_K$-tól mért távolságfüggvénynek minden $x\in\Omega$ simasági pontja univerzális $C>0$-val (ld. a 3.1 definiciót). Legyen $p\in\partial\Theta_K$ olyan pont, amelynek van olyan $G(p)\subset G$ környezete, $G(p)\cap\mathrm{Ext}\Theta_K \subset \Omega$, hogy minden $x\in G(p)\cap\mathrm{Ext}(\Theta_K)$ esetén a $K$ koaliciónak legalább $c(p)$ mértékü fölénye van az előző pontbeli hozzárendeléssel meghatározott $y(x)\in\partial\Theta_K$ pontban a $-e_x$ irányban a $K'$ koalicióval szemben. Ekkor van a $p$ pontnak olyan $G_{\delta_2}(p)$ sugaru környezete, amelyből kiinduló játékot a $z(t)$, $u(t)\in U_K$, ismeretében választott $V^{1-\nu}(z,z(t),u(t))$, $1>\nu>0$ tetszőleges stratégia segitségével véges idő alatt be tudja fejezni, azaz a (95) megfelelő kezdetiértékproblémájához megadható olyan $T$, hogy van olyan $t^*\in[t_o,T]$ melyre a (95) megoldása teljesiti a $z(t^*)\in\Theta_K$ feltételt $z(t_o)\in G_{\delta_2}(p)$-re.

Bizonyitás: Pontosan ugy a 3.2 tétel következménye, mint a 3.3 tétel következett a 3.1 tételből. Itt is érvényes természetesen az ottani egyszerüsitő megjegyzés.

3.2 Megjegyzés: A fenti két elfutási tételben láttuk, hogy a $K$ koalició $t$-beli stratégiaválasztásához felhasználta a $K'$ koalició $t$-beli döntését.

b. Elfogás és elfutás késleltetéssel

E pontban a 3.1a illetve a 3.2a tételeket használjuk fel. Először a késleltetés mértékére adunk feltételt.

Az $F$ függvény feltevéseink szerint a $G$ halmazon eleget tesz a lokális Lipschitz-féle feltételnek. Fedjük le $G$-t olyan $\{G_{\delta_o(x)}(x)\}_{x\in G}$ környezetekkel, amelyek mindegyikéhez tartozik egy $L(x), x \in G$, az adott környezetben érvényes Lipschitz-féle állandó. Minden ilyen környezetben megadhatunk olyan $M(x)>0$ számot, hogy az egész környezetben

$$(117) \qquad \| F(y,\dots)\| \leq M(x), y \in G\, G_{\delta_o(x)}(x).$$

Vegyük azt a fedőrendszert, melyet azok a $\{G_x\}_{x\in G}$ halmazok adnak, amelyekre a (117) érvényes. Legyen e fedőrendszerhez a 2.7 definicióval hozzárendelt függvény $h_1$.

3.1 Feltétel: Legyen $h_o$ egy folytonos pozitiv függvény a $G$ halmazon. Egy $\tau(x)>0$ késleltetést $x\in G$ mellett megengedett késleltetésnek nevezük a $h_o$ feltétel mellett, ha teljesül a

$$(118) \qquad \tau(x) \leq \min\{\frac{h_1(x)}{M(x)+4}, h_o(x)\}/M(x)$$

feltétel és $\tau$ mint $x$ függvénye folytonos.

3.5 Lemma: Legyen $\tau(x)$ egy megengedett késleltetés. Legyen egy $z\in C([t_o,t_1],G)$ abszolut folytonos görbe és legyen $u(t)\in \prod_{i=1}^{N} K_i$ egy tetszőleges mérhető irányitás. Teljesitse $z$ az alábbi késleltetett differenciálegyenletet:

$$(119) \qquad \dot{z}(t) = F(z(t-\tau(z(t)),u(t)) \text{ m.m.}$$

Ekkor $z(s):=z(t_o)$, $s\leq t_o$ teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$(120) \qquad \| z(t)-z(t-\tau(z(t))\| \leq h_o(z(t))$$

Bizonyitás:

1. Tegyük fel, hogy az $F$ függvény korlátos és $M$ a korlátja. Ekkor könnyen megbecsülhetjük a (124) különbséget:

$$(121) \qquad \| z(t)-z(t-\tau(z(t))\| \leq M\tau(z(t))$$

ahol $M \geq \| F\|$.

Integráljuk most a $[t-\tau(z(t)),t]$ intervallumon a (119) kifejezést:

$$(122)\qquad \int_{t-\tau(z(t))}^{t} F(z(s-\tau(z(s))),\ u(s))ds$$

Becsüljük meg az integrandusban szereplő késleltetett pályapontok távolságát a t-beli késleltetett pályaponttól:

$$(123)\qquad \| z(t-\tau(z(t))-z(s-\tau(z(s)))\| \leq M[t-s+\tau(z(t))+\tau(z(s))]$$

A $\tau(z(t))\geq t-s$. Tegyük fel továbbá, hogy $\tau(z)\leq\varphi(z)$, ahol az egész G-n értelmezett 1-el Lipschitz-féle feltételnek eleget tevő függvény:

$$(124)\qquad \| z(t-\tau(z(t)))-z(s-\tau(z(s)))\| \leq M(3\varphi(z(t))+M\varphi(z(t)))$$

2. Ha mármost a lemma feltételeinek jelölései mellett

$$(125)\qquad \varphi(x):=\frac{h_1(x)}{M(M+4)},\quad M=M(x),$$

akkor azt kapjuk, hogy a (124) becslés biztositja azt, hogy a (121) különbséget előállitó (122) integrál integrandusában levő késleltetett argumentum végig a $z(t)$ körüli $h_1(z(t))$ sugaru körben marad és ezért az integrandusra érvényes $M(z(t))$-vel a (117) becslés és igy

$$(126)\qquad \| z(t)-z(t-\tau(z(t))\| \leq M(z(t))\tau(z(t))\leq h_o(z(t))$$

<u>3.6 Lemma</u>: Legyen $h$ 1 Lipschitz-féle állandóval Lipschitz féle feltételnek eleget tevő pozitiv függvény és legyenek $z_1,z_2\in E$ olyan pontok, melyekre

$$(127)\qquad \| z_1-z_2\| <\lambda\cdot h(z_1)\qquad 0<\lambda<1.$$

Ekkor teljesül a

(128) $$\| z_1 - z_2 \| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} h(z_2)$$

Bizonyitás:

Képezzük a $h(z_1)-h(z_2)$ különbséget, erre igaz a

(129) $$h(z_1)-h(z_2) \leq \| z_1-z_2 \| \leq \lambda \cdot h(z_1)$$

becslés, ahonnét az állitás már következik.

Következmény: $\lambda<1/2$ mellett 1-nél kisebb a $\lambda/(1-\lambda)$ állandó értéke.

Ezzel elérkeztünk a késleltetett elfutási illetve elfogási tételek kimondásához és bizonyitásához.

3.5 Tétel: Késleltetett elfutási tétel:

Legyen $\Theta_{K'} := \bigcup_{i\in K'} \Theta_i$. Legyen $\Omega \subset \mathrm{Ext}(\Theta_K)\cap G$ egy olyan nyilt halmaz, amely teljesiti a $\partial\Omega \supset \partial\Theta_{K'}$ feltételt, és amelyik teljesiti az alábbiakat: Legyen a $\Theta_{K'}$, halmaztól mért távolságfüggvénynek minden $x\in\Omega$ simasági pontja és legyen az előző pontban leirt hozzárendeléssel a K koaliciónak minden $y(x)\in\partial\Theta_{K'}$-ben erős elfutó fölénye az $e_x$ irányban. Legyen továbbá e fölényt realizáló lokális stratégiák családjához a 2.7 definicióval hozzárendelt függvény h, mely $\Omega$-n van értelmezve és legyen $0<\lambda<1/2$ mellett $\tau:\Omega\to R^+$ egy olyan megengedett késleltetés, amely teljesiti $h_o=\lambda h$-val a 3.1 feltételt. Ha $\tilde{z}(t):=z(t-\tau(z(t)))$, $z(s):=z(t_o)$, $s\leq t_o$, ahol $z,\tilde{z}\in C([t_o,t_1],\Omega)$ és ráadásul z abszolut folytonos és e pár teljesiti a (116a) megfelelő kezdetiértékproblémáját, a K koalició $V^{1-\nu}$ globális stratégiája mellett, ahol $\nu=\lambda/(1-\nu)<1$, akkor $z(t_o)\in\mathrm{Ext}(\Theta_{K'})$ esetén a K' koalició stratégiaválasztásával nem tud olyan szituációt előállitani, amely összekötné $z(t_o)$-t $\Theta_K$,-vel. Ehhez K stratégiáját a $\tilde{z}(t)=z(t-\tau(z(t)))$ alapján választja meg $V^{1-\nu}(\tilde{z}(t))$ formában.

Bizonyitás: Ha a 3.5 és 3.6 lemmákat alkalmazzuk, akkor megkapjuk, hogy teljesül a $z,\tilde{z}$-ra a tételben irott $\nu$-vel a (94) feltétel. Ezek együtt biztositják a 3.1 tétel feltételeit, ami az irott globális stratégiával biztositja az elfutást. A stratégiaválasztás ez esetben azért történik a $\tilde{z}$ alapján csupán, mert tudjuk, hogy erős fölény esetén nem kell tekintettel lennünk az ellenfél választására. Végül még annyit jegyzünk meg, hogy késleltetett esetben csak a 2.5 tétel alapján összefüzött stratégiával lehet boldogulni, ahogy ezt a 3.1 és 3.2 tételek bizonyitása lényegesen fel is használja.

3.6 Tétel: Késleltetett elfogási tétel:

Legyen $\Theta_K = \bigcup_{i\in K} \Theta_i$. Legyen továbbá $\Omega \subset \mathrm{Ext}\,\Theta_{K\cap G}$ olyan nyilt halmaz, amelyre teljesül a $\partial\Omega \supset \partial\Omega\Theta_K$, és amely teljesiti az alábbi feltételt: Legyen a $\Theta_K$ halmaztól mért távolságfüggvénynek minden $x\in\Omega$ pont simasági pontja univerzális $c>0$-val. Legyen $p\in\partial\Theta_K$ olyan pont, amelynek van olyan $G(p)\subset G$ környezete, $G(p)\cap\mathrm{Ext}(\Theta_K)\subset\Omega$, hogy minden $x\in G(p)\cap\mathrm{Ext}(\Theta_K)$ esetén a $K$ koaliciónak legalább $c(p)$ mértékü erős fölénye van az előző pontbeli hozzárendeléssel meghatározott $y(x)\in\partial\Theta_K$ pontban a $-e_x$ irányban. Legyen továbbá e fölényeket realizáló előző pontban megadott lokális stratégiák családjához a 2.7 definicióval hozzárendelt függvény $h$, amely legalább $G(p)$-n van értelmezve és legyen $0<\lambda<1/2$ mellett $\tau:\Omega\to R^+$ egy olyan megengedett késleltetés, amely teljesiti $G(p)$-n a $h_o=\lambda\cdot h$ függvénnyel a 3.1 feltételt. Ha a $\tilde{z}(t):=z(t-\tau(z(t)))$, $z(s):=z(t_o)$, $s\leq t_o$, $z,\tilde{z}\in C([t_o,t_1],\Omega$, és ráadásul $z$ abszolut folytonos és e párra teljesül a (116.a) megfelelő kezdetiértékproblémája, a $V^{1-\nu}$ globális stratégia mellett, ahol $\nu=\lambda/(1-\lambda)<1$, akkor megadható $p$-nek olyan $G_{\delta 2}(p)$ környezete, hogy ha $z(t_o)\in G_{\delta 2}(p)$, akkor van olyan véges $T$, hogy $t^*\in[t_o,T]$, $t^*>t_o$-ra $z(t^*)\in\Theta_K$. Ehhez a $H$ koalició stratégiáját a $\tilde{z}(t)=z(t-\tau(z(t)))$ késleltetett információ alapján választja meg.

Bizonyitás: Teljes egészében megegyezik a 3.5 tételével, azzal a különbséggel, hogy a bizonyitáshoz a 3.2a tételt használjuk fel. A 2.5 tétel eljárásánál gyengébb összefüzés itt sem alkalmazható.

## 3. ELFOGÁS ÉS ELFUTÁS HILBERT TÉRBEN KONVEX CÉLHALMAZOKTÓL

Legyen a továbbiakban az $E$ terünk egy Hilbert tér. Ismeretes, hogy Hilbert téren pontnak és konvex zárt halmaznak a távolsága felvétetik, azaz ha $H$ az $E$ egy konvex részhalmaza, akkor $x\in E$-hez hozzárendelhetjük a $H$-ra való $y(x)$ vetületét (megtartjuk e jelölést itt is, hogy egyszerübben hivatkozhassunk majd az előző pont tételeire), amelyre $\rho(x,H)=\|x-y(x)\|$ és mint ismeretes, teljesül az $\|y(x_1)-y(x_2)\|\leq\|x_1-x_2\|$ Lipschitz féle feltétel. Belátunk most egy lemmát, amelyből következik, hogy a $\rho$ távolságfüggvénynek egyrészt minden $Ext(H)$-beli pontja simasági pontja, másrészt a távolságfüggvény e halmazon folytonosan differenciálható.

3.7 Lemma: Legyen $H\subset E$ konvex zárt halmaz. Ekkor $x\in Ext(H)$ esetén a $\rho(x,H)$ differenciálható és deriváltja éppen $(x-y(x))/\|x-y(x)\|=:e_x$. Érvényes egyuttal $x$ egy alkalmas környezetében a

$$(130)\qquad |\rho(x',H)-\langle e_x,\ x'-y(x)\rangle|\leq\frac{1}{2}\|x-x'\|^2/\rho(x,H)$$

becslés.
Igaz továbbá, hogy e függvény deriváltja folytonos is az $Ext(H)$-ban és minden pont egy alkalmas környezetében a derivált eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek.

Bizonyitás: Legyen $x$ egy tetszőleges $Ext(H)$-beli pont, legyen ennek távolsága $H$-tól $\rho(x,H)=c$. Az ilyen távolságu pontok halmaza konvex, halmaz határa és e konvex halmazhoz fektethető $x$-en keresztül egy támasz hipersik. Más oldalról e pontok halmaza kivül lesz az $y(x)$ pont körüli $c$ sugaru gömbön. De Hilbert téren gömbnek minden határpontjában csupán egyetlen érintő hipersikja lehet, ezért az $x$-en keresztül fektethető hipersik egyuttal az $y(x)$ körüli $c$ sugaru gömbnek is érintője és e két felület között lesz a $\rho(x,H)=c$ felület. A (130) becslést geometriai meggondolás alapján könnyen megkapjuk.

1. Következmény: $\varepsilon>0$-val a 3.1 definiciónak eleget tevő pontokból álló környezet sugara $x\in Ext(H)$ esetén

$\delta(x)=\varepsilon^{3/2}\cdot\rho^{3/2}(x,H) \leq \varepsilon\cdot\rho(x,H)$, ahhoz, hogy $\| e_{x_1,x_2} \| \leq \varepsilon\rho(x,H)$ legyen.

2. Következmény: A deriváltra vonatkozó formulával kapcsolatban rögtön láthatjuk, hogy a bizonyitás jelöléseivel $\{\rho>c/2\}$ halmazon a derivált eleget tesz Lipschitz-féle feltételnek, $L=4/c$ Lipschitz-féle állandóval.

E megjegyzések után a 3.3, 3.4, 3.5 és 3.6 tételeket az alábbi formában mondhatjuk ki:

3.1 Feltevés: Álljon elő a H halmaz véges sok egymástól diszjunkt konvex nyilt halmazokkal elválasztható konvex zárt halmazból. Legyen $\Omega$ ezen elválasztó nyilt halmazok egyesitése és $x\in\Omega$ esetén legyen $e_x:=(x-y(x))/\| x-y(x)\|$, ahol az $y(x)$ arra a H-t alkotó konvex zárt halmazra való vetület, amelyet $\Omega$-nak x-et tartalmazó komponense tartalmaz.

3.3a Tétel: Teljesitse a 3.3 tétel $\Theta_K$, célhalmaza a 3.1 feltevésben foglaltakat. Ekkor ha a 3.1 feltevésben szereplő x, y(x) és $e_x$-el $\forall x\in\Omega$ mellett teljesül a 3.3 tétel fölényre vonatkozó feltétele, akkor a 3.3 tétel állitása igaz.

3.4a Tétel: Teljesitse a 3.4 tétel $\Theta_K$ célhalmaza a 3.1 feltevésben foglaltakat. Ekkor ha a 3.1 feltevésben szereplő x,y(x) és $e_x$-el $\forall x\in\Omega$ mellett teljesül a 3.4 tétel fölényre vonatkozó feltétele, akkor a 3.4 tétel állitása igaz.

3.5a Tétel: Teljesitse a 3.5 tétel $\Theta_K$, célhalmaza a 3.1 feltevésben foglaltakat. Ekkor ha a 3.1 feltevésben szereplő x,y(x) és $e_x$-el $\forall x\in\Omega$ mellett teljesül a 3.5 tétel fölényre vonatkozó feltétele, akkor a 3.5 tétel állitása igaz.

3.6a Tétel: Teljesitse a 3.6 tétel $\Theta_K$ célhalmaza a 3.1 feltevésben foglaltakat. Ekkor ha a 3.1 feltevésben szereplő x,y(x) és $e_x$-el $\forall x\in\Omega$ mellett teljesülnek a 3.6 tétel fölényre vonatkozó feltevései, akkor a 3.6 tétel állitása igaz.

Bizonyitás: Mindnégy tételben azt kell bebizonyitani, hogy az $\Omega$ pontjaiban a $\rho$-nak minden pontja simasági pontja. Ez pedig ugy teljesül, hogy a célhalmaz egyes komponenseit tartalmazó nyilt komponenseken igaz, méghozzá a 3.7 lemma 1. következménye miatt.

Megjegyezzük, hogy e tételek olyan értelemben maximálisak, hogy ezekben az elfutáshoz, illetve elfogáshoz csak a célhalmaz határpontjaira teszünk kikötést és az is csupán a fölényre vonatkozik. E kikötések gyengitésével lehet csupán erősebb tételeket bizonyitani, de az alábbi két tétel mutatja, hogy az elfutásra vonatkozó feltevések nem gyengithetők általában.

2. Feltevés: Legyenek az 1. feltevésben szereplő H halmaz komponensei $H_p$, $p=1,2,\dots,r$ és legyen minden ilyen $H_p$ halmaz egy $H_p^o \subset H_p$ konvex zárt halmaztól legfeljebb $\varepsilon_p>0$ távolságra levő pontok halmaza.

3.7 Tétel: Teljesitse a 3.3 tétel $\Theta_{K'}$ célhalmaza az 1. és 2. feltevésekben foglaltakat. Ekkor a 3.3 tétel fölényre vonatkozó feltétele a K koalició számára az elfutás szükséges és elegendő feltétele, méghozzá ugy, hogy ha a koalició nem tud a 3.3-ban biztositott nem késleltetett információk alapján elfutni, akkor az $I\setminus K$ számára teljesül a 3.6 tétel feltétele az elfogásra, azaz még megengedett késleltetéssel is eléri $\Theta_{K'}$-t.

Bizonyitás: Ez a tétel egyszerü következménye a 3.7 lemma 2. következményének és a 2. feltevésnek. Ugyanis, először is azt jegyezzük meg, hogy minden $y(x)$-et helyettesithetünk a $\partial H_p$-beli pont helyett a neki megfelelő $\partial H_p^o$-re való vetülettel. Igy kiderül, hogy az $\Omega$-n a 2. következmény miatt az $e_x$ eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek nekünk elegendő ebből annyi, hogy a $\Theta_{K'}$ halmaz határán is folytonos.

Ha mármost nem teljesül minden határpontban a 3.3 tétel elfutásra vonatkozó feltétele, akkor van olyan pont, amelyben valamilyen $c>0$-val az 1.3 feltevés igaz $e_p$-vel egy p határpontban. (Felhasználtuk az 1.1 tételt.) Ámde az $e_x$ folytonossága miatt e pontnak van olyan környezete, amelyben már teljesül a 3.6a tétel feltétele és igy beláttuk, hogy a tétel igaz.

3.8 Tétel: Teljesitse a 3.5 tétel $\Theta_{K'}$ célhalmaza az 1. és 2. feltevésekben foglaltakat. Ekkor a 3.5 tétel feltétele késleltetett információ melletti elfutásra szükséges feltétel is abban az értelemben, hogy ha nem teljesül, akkor van olyan határpontja a célhalmaznak, amelynek megadható olyan környezete, hogy ebből nem késleltetett információval a K eléri a célhalmazt, mert teljesül a 3.4a tétel feltétele.

Bizonyitás: E tételt is ugyanugy bizonyithatjuk, ahogy a 3.7 tétel bizonyitását vázoltuk, csupán a 1.2 tételt kell felhasználnunk.

A 3.7 és 3.8 tételek azt mutatják, hogy a bemutatott módszerek késleltetett és nem késleltetett esetben $\varepsilon$ pontosságu célzásokra és elfogásra, ami a gyakorlat számára általában kielégitő és numerikusan más ut nem is követhető, elegendőek, mert szükséges és elegendő feltételt adnak elfutásra. A most következő pontban igen röviden egy numerikus módszert adunk.

## 4. NUMERIKUS MÓDSZER

Numerikus eljárásunk vázlatát a 3.1 illetve a 3.2 alaptételek szintjén foglaljuk össze igen röviden. Ez alatt azt értjük, hogy a tárgyalt négyféle esetet nem nézzük külön.

Legyen megadva minden, a 3.1, 3.2 tételek előkészitésénél szereplő $x \in \Omega$ körüli $G_{\delta(x)}(x)$ környezet. Legyen továbbá megadva a (94)-ben szereplő $\nu$, továbbá a $\tilde{z}$, $z$ pár, ahol $\tilde{z}$ a $z$-nek (94)-et teljesitő becslése. Ezt minden időpontban adottnak tekintjük. Legyen megadva továbbá a $z(t_o)=z_o=\tilde{z}(t_o)$ kezdetiértékprobléma. Ismertnek tételezzük fel (mert számitható az egyenlet és a célhalmaz ismeretében) a $h$ függvényt is. Kérdés, hogy a $\tilde{z}$ becslés ismeretében hogyan használjuk fel a $\{V_x, G_{\delta(x)}(x)\}_{x\in\Omega}$ lokális stratégiákat arra, hogy a $z$ görbe biztosan elkerülje a $H$ halmazt, vagy a másik feladatnak megfelelően biztosan elérje azt.

Eljárásunk a következő:

Legyenek a $t_o, t_1, \dots, t_k$ időpontok azok, amelyekben uj lokális stratégiára térünk át. E pontokat a következőképpen határozzuk meg:

Válasszuk a $\tilde{z}(t_i)$ pontban azt a $(V_{\tilde{z}(t_i)}, G_{\delta(\tilde{z}(t_i))}(\tilde{z}(t_i)))$ párt, amelyre teljesül a $\delta(\tilde{z}(t_i)) > (1-\nu)h(\tilde{z}(t_i))$. Ez megválasztható igy, a $h$ függvény definiciója miatt.

Legyen a $\tilde{z}(t_{i+1})$ az a legkisebb $t>t_i$, amelyre az ellenfél stratégiaválasztása mellett a $V_{\tilde{z}(t_i)}$ lokális stratégia alkalmazásával először teljesül, hogy $\|\tilde{z}(t_i)-\tilde{z}(t)\| = (1-\nu)h(\tilde{z}(t)_i)$.

Erre a $t=t_{i+1}$-re ismét a fentieknek megfelelően választunk uj stratégiát. Ezzel az eljárással a 3.1 illetve 3.2 tételek biztositják a $z$-re vonatkozó kikötéseket.

Hilbert tér esetében $\varepsilon$ pontosságu elfutásra illetve célzásra 2. feltételnek eleget tevő célhalmazok esetében az elméleti eredmény mellé numerikus eljárást is ad a fenti módszer, vagyis az elfutásra vonatkozó elméleti szükséges és elegendő feltétel kiegészül azzal, hogy egyuttal az adott feltétel mellett konvergens numerikus módszer is adható.

# FÜGGELÉK

## F1. BOREL MÉRHETŐ LEKÉPEZÉS MEGADÁSA ADOTT ZÁRT HALMAZBA ESŐ GRAFIKONNAL

Legyenek E és F szeparábilis lokálisan kompakt metrikus terek. Jelöljük az E tér Borel-halmazait $\mathcal{B}(E)$-vel, jelölje $p_E : E\times F \to E$ ($p_E : E\times F \to F$) az $E\times F$-ből az E-be (F-be) való vetitést.

<u>F1.1 Definició:</u> Az $u: E \to F$ leképezést Borel-mérhetőnek nevezzük, ha minden $G \subset F$ nyilt halmazra $u^{-1}(G) \in \mathcal{B}(E)$.

<u>F1.1 Tétel:</u> Legyen $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n: E \to F$, $n=1,2,\dots$ mellett Borel-mérhető leképezések pontonként konvergens sorozata. Ekkor az $u(x) := \lim u_n(x)$, $x \in E$ egyenlőséggel pontonként megadott $u: E \to F$ leképezés is Borel mérhető.

Legyen most $H \subset E\times F$ zárt halmaz.

<u>F1.2 Tétel:</u> Ha a $p_E(H) = E$ teljesül, akkor megadható olyan $u: E \to F$ Borel-mérhető leképezés, amelyre

$$(x, u(x)) \in H, \text{ minden } x \in E \text{ esetén.} \tag{F.1}$$

<u>Bizonyitás:</u> Megadunk egy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ Borel-mérhető leképezéssorozatot, amely pontonként konvergens és limesze teljesiti az (F.1) feltételt.

1. Az $u_1$ függvény megadása:

Az E,F terek feltevésünk szerint szeparábilisek, ezért $\varepsilon = 1/2$-hez megadható olyan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ H sorozat, hogy teljesül a

$$H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{1/2}(p_n) \tag{F.2}$$

tartalmazás, ahol a $G_{1/2}(p_n)$ a lokális kompaktság miatt kompakt környezet.

A $p_E(G_{1/2}(p_i) \cap H) \subset E$ halmaz kompakt, mert $p_E$ folytonos, H pedig zárt.

Képezzük a

$$(F.3)\qquad B_i^1 := \bar{p}_E[G_{1/2}(p_i)\cap\ ]\setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} p_E[G_{1/2}(p_j)\cap H],\ i=1,2,\dots$$

páronként diszjunkt Borel-halmazok rendszerét amelyre teljesül, hogy

$$(F.4)\qquad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^1 .$$

Ezután megadjuk az $u_1$ leképezést az alábbiak szerint:

$$(F.5)\qquad u_1(x) := p_i,\ \text{ha } x\in B_i^1$$

Az $u_1$ leképezés grafikonjára teljesül a

$$(F.6)\qquad \Gamma(u_1) \subset G_{1/2}(H)$$

tartalmazás, ahol $G_{1/2}(H)$ jelenti a $H$ halmaz 1/2 sugaru környezetét, a $\Gamma$ pedig az $u_1$ függvény grafikonját.

2. Az $u_2$ leképezést $\varepsilon=1/4$-hez az alábbiak szerint adjuk meg:

A $G_{1/2}(p_i)\cap H$ halmazok kompaktsága következtében megadható minden $i=1,2,\dots$ mellett olyan $\{p_{ik}\}_{k=1}^{n_i} \subset G_{1/2}(p_i)\cap H$ véges sok pont, hogy $\bigcup_{k=1}^{n_i} H\cap G_{1/4}(p_{ik}) \supset H\cap G_{1/2}(p_i)$ teljesül.

Állitsuk elő ezután a $B_i^1$ halmazt a következő formában:

$$(F.7)\qquad B_{ik}^2 = p_E[G_{1/4}(p_{ik})\cap H]\cap B_i^1 \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{k-1} p_E[G_{1/4}(p_{ij})\cap H]\cap B_i^1,\qquad k=1,\dots,n_i .$$

Minden rögzitett i mellett teljesül a

$$(F.8)\qquad B_i^1 = \bigcup_{k=1}^{n_i} B_{ik}^2$$

összefüggés és a $B_{ik}^2$ rendszer elemei diszjunktak és az (F.8) miatt egyesitésük lefedi az egész E teret.

Az $u_2$ leképezést igy definiáljuk:

$$(F.9) \qquad u_2(x):=p_{ik}, \text{ ha } x\in B^2_{ik}$$

amelyből azonnal következik, hogy

$$(F.10) \qquad \Gamma(u_2) \subset G_{1/4}(H)$$

$$\rho(u_1(x),\ u_2(x)) \leq 1/2$$

feltételek teljesülnek.

3. Tegyük fel, hogy a 2. pont eljárásának n-szeri ismétlésével megadtuk a $B^n_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ halmazrendszert ugy, hogy

$$(F.11) \qquad B^{n-1}_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}} = \bigcup_{j=1}^{n_{i_1,\ldots,i_{n-1}}} B^n_{i_1,\ldots,i_{n-1},j}$$

ahol

$$B^n_{i_1,\ldots,i_{n-1},j}:=p_E[G_{1/2^n}(p_{i_1,\ldots,i_{n-1},j})\cap H]\cap$$

$$(F.12) \qquad \cap B^{n-1}_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \quad (\bigcup_{k=1}^{j-1} p_E[G_{1/2^n}(p_{i_1,\ldots,i_{n-1},k})\cap H]\cap$$

$$\cap B^{n-1}_{i_1,\ldots,i_{n-1}})$$

és a $p_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},j}\in G_{1/2^{n-1}}(p_{i_1,\ldots,i_{n-1}})\cap H$ pontokkal teljesül a

$$(F.13) \qquad G_{1/2^{n-1}}(p_{i_1,\ldots,i_{n-1}})\cap H\subset \bigcup_{j=1}^{n_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}}} G_{1/2^n}(p_{i_1,\ldots,i_{n-1},j})$$

tartalmazás és ezzel megadtuk az

(F.14) $\quad u_n(x)=p_{i_1,i_2,\dots,i_n},\ x\in B^n_{i_1,\dots,i_n}$

függvényt. Erre teljesül a

(F.15) $\quad \Gamma(u_n) \subset G_{1/2^n}(H)$

$$\rho(u_n(x),\ u_{n-1}(x)) \leq 1/2^{n-1},\ x\in E\partial$$

két feltétel.

Az $u_{n+1}$ függvényt a 2. pont lejárásának megismétlése utján kapjuk meg.

Ezzel az eljárással megadjuk az $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ Borel-mérhető függvények egy megszámlálható sorozatát.

Legyen $x\in E$ egy rögzitett pont, az $u_n(x)$ alaku pontsorozat Cauchy sorozat az (F.15) miatt és a kompaktság következtében minden $x\in E$-re konvergens. Legyen u az alábbi leképezés:

(F.16) $\quad u(x):=\lim\limits_{n} u_n(x),\ x\in E$ mellett.

Az $(x,u(x)) \subset G_{1/2^n}(H)$, $n=1,2,\dots$ mellett, ezért

(F.17) $\quad (x,u(x))\in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_{1/2^n}(H)=H$

ami a tétel bizonyitását adja, az F1.1 tétel figyelembevételével.

## F2. DIFFERENCIÁLEGYENLŐTLENSÉGEK

### 1. Alapbecslés.

F2.1 Tétel: Legyen $A\subset R^2$ egy halmaz. Legyen továbbá $f:A\to R$ egy mérhető leképezés. Legyen továbbá $g:R^2\to R$ folytonos leképezés. Legyenek továbbá $y,z:[t_o,T]\to R$ folytonos leképezések, amelyekre teljesülnek az alábbiak:

$$(y(s),s)\in A,\quad s\in[t_o,T],\ \text{továbbá}$$

$$\text{(F.18)}\qquad y(t)=y(t_o)+\int_{t_o}^{t} f(y(s),s)ds$$

$$z(t)=z(t_o)+\int_{t_o}^{t} g(z(s),s)\,ds$$

és

1. $f(x,s)\geq g(x,s),\ (x,s)\in A.$

2. A $g(x,s)$ csökkenő függvény rögzitett $s$ mellett az $x$ változóban.

Ekkor $y(t_o)=z(t_o)$ esetén

$$\text{(F.19)}\qquad y(t)\geq z(t)$$

minden $t\in[t_o,T]$ mellett.

Bizonyitás: Tegyük fel, hogy megadható olyan $t\in[t_o,T]$ hogy $z(t)>y(t)$ áll fenn.

Képezzük a

$$\text{(F.20)}\qquad t_o\leq t^*:=\inf\{s\,|\,z(t'),t'\in[s,t]\}$$

értéket. Miután mindkét függvény folytonos, $t^*<T$, továbbá $y(t^*)=z(t^*)$. Figyelembevéve még a $z(t_o)=y(t_o)$ feltételt, és az (F.20) egyenlőtlenséget, megadható olyan $\delta>0$, hogy $[t^*,t^*+\delta]\subset[t_o,T]$ és $t\in[t^*,t^*+\delta]$ mellett $z(t)>y(t)$.

Az (F.18) előállitásnak és az 1. feltételnek az alapján

$$y(t)=y(t^*)+\int_{t^*}^{t} f(y(s),s)ds\geq y(t^*)+\int_{t^*}^{t} g(y(s),s)ds,$$

ahol alkalmazva továbbá a $g$-re kirótt 2. feltételt, az $y(s)<z(s)$, $\rho\in[t^*,t^*+\delta]$ figyelembevételével:

$$y(t^*)+\int_{t^*}^{t} g(y(s),s)ds\geq y(t^*)+\int_{t}^{t} g(z(s),s)ds=z(t)$$

azaz $y(t)\geq z(t)$ minden $t\in[t^*,t^*+\delta]$ mellett. Ezzel pedig a tételt bebizonyitottuk.

2. Konvex Kupok.

Legyen B egy Banach tér és legyen $G_1(0)$ egy 0 körüli környezet.

Képezzünk egy ujabb környezetet ebből az alábbi definicióval:

Legyen $e \in B'$, $\| e \| = 1$ folytonos lineáris funkcionál. Képezzük az alábbi normát:

$$\text{(F.21)} \qquad |||x|||_e := \max \{2|\langle e, x\rangle|, \; \| x \| \}$$

Könnyen beláthatjuk, hogy e norma ekvivalens az eredeti normával. Az is könnyen igazolható, hogy

$$\text{(F.22)} \qquad G_1^{|||\;|||}(0) = G_1(0) \cap \{|e| \leq 1/2\}$$

fennáll.

Legyen továbbá $t \in \{|e| = 1/2\} \cap G_1(0) \neq \emptyset$, melyre $\langle 2e, t\rangle = |||t|||_e = 1$. Jelöljünk egy ilyen $G_1(0)$-beli belső pontot t-vel. Igaz az alábbi állitás:

<u>F2.2 Tétel:</u> A $\{2e>c>0\}$ halmaz előáll

$$\text{(F.23)} \qquad \{2e>c>0\} = \bigcup_{\lambda>0} \lambda \{G_1^{|||\;|||_e}(0)+t\} + c \cdot t$$

alakban.

<u>Bizonyitás:</u> Elegendő az állitást $c=0$ mellett belátni, amelyhez tartozó baloldalt $-ct$-vel való eltolás utján kapjuk meg.

Miután $t \in G_1(0)$ belső pont, van olyan $G_\varepsilon(t)$ környezete, melyre

$$\text{(F.24)} \qquad G_\varepsilon(t) \subset G_1(0)$$

teljesül. Ebből következik, hogy

$$\text{(F.25)} \qquad G_1(0) \cap \{2|e|<1\} \supset G_\varepsilon(-t) \cap \{2e>-1\}$$

ahol felhasználtuk a gömbi környezet kiegyensulyozottságát.

Az (F.24) azt jelenti tehát, hogy $G_1^{|||\ |||}(0) \supset G_\varepsilon(-t)\cap\{2e>-1\}$ feltétel teljesül. Ennek t-vel való eltolására azt kapjuk, hogy

(F.26) $$G^{|||\ |||}_1(t) \subset \{2e>0\}$$

és

(F.27) $$G_1^{|||\ |||}(t) \supseteq G_\varepsilon(0)\cap\{2e>0\}$$

tartalmazások teljesülnek.

Ismeretes továbbá, hogy

(F.28) $$\bigcup_{\lambda>0}\lambda\{G_\varepsilon(0)\cap\{2e>0\}\} = \{2e>0\}$$

teljesül, a tétel állítását beláttuk.

Legyen most K egy kompakt metrikus tér, legyen $G \subset B$ nyilt halmaz és legyen $f: G\times K \to B$ folytonos leképezés. Legyen $e \in B'$ egységnormáju folytonos lineáris B-n értelmezett funkcionál. Teljesitse az

(F.29) $$f(x_o,K) \subseteq \{e>h>0\}$$

feltételt valamely $x_o \in B$-re.

Legyen továbbá $|||\ |||_e$ a fent bevezetett norma. Ezzel érvényes az alábbi tétel:

<u>F2.3 Tétel:</u> Megadhatók olyan $t\in B$, $|||t|||_e=1$, $0<\varepsilon<1$, $\langle 2e,t\rangle=1$ ugy, hogy

(F.30) $$f(x_o,K)\subseteq \bigcup_{\lambda>0}\{G_\varepsilon^{|||\ |||_e}(0)+t\} = K_{\varepsilon,t}(0)$$

teljesül.

<u>Bizonyitás:</u> Az F2.2 tétel $c=2h$-val biztositja, hogy az

(F.31) $$\{e>h>0\} = \bigcup_{\lambda>0}\lambda\{G_1^{|||\ |||_e}(0)+t\}+ct$$

előállitás érvényes, ahol az unióban szereplő halmazok nyiltak (ld. az (F.23) összefüggést). A K halmaz kompakt, ezért folytonos képe is az és igy $f(x_0,K)\subset\{e>h>0\}$ is kompakt lesz, van tehát olyan véges $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ halmaz, hogy

$$f(x_0,K)\subset\bigcup_{i=1}^{k}\lambda_i\{G_1^{|||\;|||_e}(0)+t\}+ct$$

is igaz. A szereplő fedőhalmazok a $\lambda$-nak monoton függvényei a tartalmazásra nézve, ezért vegyük a legkisebb $\lambda_i$-t, mely már lefedi az $f(x_0,K)$-t, ezzel

$$(F.32)\qquad f(x_0,\ )\subset\lambda_{i_0}\{G_1^{|||\;|||_e}(0)+t\}+ct=G_{\lambda_{i_0}}^{|||\;|||_e}(0)+(\lambda_{i_0}+c)t.$$

A kapott eredményt felhasználva

$$(F.33)\qquad f(x_0,K)\subset G_{\lambda_{i_0}}^{|||\;|||_e}(0)+(\lambda_{i_0}+c)t\subseteq\bigcup_{\lambda>0}\lambda\{G_{\lambda_{i_0}}^{|||\;|||_e}(0)+(\lambda_{i_0}+c)t\}=\bigcup_{\lambda>0}\lambda\{G_{\frac{\lambda_{i_0}}{\lambda_{i_0}+c}}^{|||\;|||_e}(0)+t\}$$

amellyel beláttuk a tételt.

Legyen most $u:[t_0,t_1]\to K$ mérhető leképezés, legyen továbbá

$$(F.34)\qquad x:[t_0,t_1]\to B,$$

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(x(s),\ u(s))\,ds$$

abszolut folytonos leképezés.

<u>F2.4 Tétel:</u> Legyen F a fent definiált leképezés, és teljesitse az $x_0\in B$-ben az (F.29)-et valamely $e\in B'$, $\|e\|=1$ funkcionállal. Ekkor a fent definiált $|||\;|||_e$ normához megadható olyan $1>\varepsilon>0$ és $h\in B$, $|||h|||_e=1$, és olyan $\delta>0$, hogy ha $t_0<t\le t_0+\delta$ tetszőleges, továbbá $x(t_0)=x_0$, akkor az (F.33)-al megadott x függvényre teljesül, hogy

$$(F.35)\qquad x(t)\in(x_0+K_{\varepsilon,h}(0))$$

<u>Bizonyitás:</u> Az F2.3 tétel biztosit egy nyilt $K_{\varepsilon,h}(0)$ kupot, amelyre

$$(F.36)\qquad f(x_o,K)\subset K_{\varepsilon,h}(0)$$

teljesül. Képezzük az

$$f^{-1}(K_{\varepsilon,h}(0))\subset B\times K$$

halmazt, ez f folytonossága folytán nyilt halmaz, amely tartalmazza az $\{x_o\}\times K$ halmazt. K kompaktsága folytán azonban van olyan $\delta_o>0$, hogy $G_{\delta_o}(x_o)\times K\subset f^{-1}(K_{\varepsilon,h}(0))$ is teljesül.

Miután x(t) abszolut folytonos, igy folytonos is, ezért megadható olyan $\delta_1$, hogy $\|x(t)-x(t_o)\|<\delta_o$, ha $|t-t_o|<\delta_1$.

Belátjuk, hogy $\delta_1=\delta$, amelyet a tételben keresünk.

Be kell látnunk, hogy minden $t_o<t\leq t_o+\delta$ mellett $x(t)\in K_{\varepsilon,h}(0)+x_o$, vagy ami ugyanaz, $x(t)-x_o\in K_{\varepsilon,h}(0)$.

Megjegyezzük, hogy a $K_{\varepsilon,h}(0)$ kupban azok és csak azok az r vektorok vannak, amelyekhez van olyan $\lambda>0$, hogy

$$(F.37)\qquad |||\lambda\cdot h-r|||_e<\varepsilon\cdot\lambda.$$

Ezzel egyenértékü, hogy

$$(F.37a)\qquad |||h-\frac{|||r|||_e}{\lambda}\cdot\frac{r}{|||r|||_e}|||_e<\varepsilon.$$

Könnyen belátható, hogy a $\lambda$ mindig megválasztható $|||r|||_e=\lambda$ alakban.

Vizsgáljuk meg tehát az

$$(F.38)\qquad |||x(t)-x_o-\int_{t_o}^{t}|||f|||_e\cdot h\,ds|||_e=|||\int_{t_o}^{t}[f(x(s),u(s))-$$
$$-|||f(x(s),u(s))|||_e\cdot h]ds|||_e\leq\int_{t_o}^{t}|||f(x(s),u(s))-$$
$$-|||f(x(s),u(s)|||_e\cdot h|||_e ds$$

különbség normáját. Felhasználva, hogy $t_o<t<t_o+\delta$ mellett (F.36) teljesül, igy igaz, hogy

$$(F.39) \qquad |||x(t)-x_o-h\cdot\int_{t_o}^{t} |||f(x(s),u(s)|||_e ds|||_e < \int_{t_o}^{t} |||f(x(s),u(s))|||_e\cdot\varepsilon ds$$

ahol az (F.38) végére alkalmaztuk az (F.37a) jellemzést.

Ezzel azonban az $x(t)-x_o$ különbségről beláttuk, hogy teljesiti az (F.37) feltételt, tehát a $K_{\varepsilon,h}(0)$ kupnak eleme minden $t_o<t\leq t_o+\delta$ mellett. Ezzel beláttuk a tételt.

Megjegyezzük még, hogy Banach tereken az (F.23) előállitáshoz speciális norma bevezetése szükséges, mint ezt az alábbi példa mutatja:

Vegyük az $R^2$ teret mint Banach teret és lássuk el az $\|x\|=|x_1|+|x_2|$ normával. Ismeretes, hogy ezzel a O körüli gömbök olyan négyzetek lesznek, melyek csucsai a tengelyekre illeszkednek. Vegyük az egységgömböt és toljuk el az $x_1$ koordináta irányába +1-el és nézzük az $\{x_1>0\}$ félteret.
Az $\bigcup_{\lambda>0} \lambda\{G_1(0)+(1,0)\}$ halmaz egy 0 csucsu $90^o$-os nyilásszögü kup lesz és nem adja ki az $\{x_1>0\}$ félteret.

## F3. PARCIÁLIS MAXIMUM (MINIMUM) FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

Legyen M egy metrikus tér, K kompakt halmaz. Legyen

$$(F.40) \qquad f:M\times K\rightarrow R$$

egy folytonos függvény. Tegyen eleget f továbbá K-ban egyenletesen minden rögzitett $u\in K$ mellett $((x,v)\in M\times K)$ az x változójában Lipschitz-féle feltételnek. Legyen

$$(F.41) \qquad f_m(x):= \min_v f(x,v),$$

azaz

$$f_m: M\rightarrow R$$

leképezés.

F3.1 Tétel: Az $f_m$ függvény folytonos, ha f folytonos és az $f_m$ eleget tesz a lokális Lipschitz-féle feltételnek, ha f az u rögzitése mellett x-ben eleget tesz a lokális Lipschitz-féle feltételnek. Ekkor az $f_m$ függvény valamely x körüli Lipschitz-féle állandója megegyezik az f ugyan e pontbeli Lipschitz-féle állandójával.

Bizonyitás:

a. Legyen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ olyan sorozat, melyre $x_n \to x \in M$. K kompaktsága folytán megadható olyan $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ sorozat, hogy $f(x_n,v_n)=f_m(x_n)$.

A $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatból kiválasztható egy konvergens $v_{n_k}$ részsorozat, amelyre

(F.42) $$f(x_{n_k},v_{n_k}) \to f(x,v).$$

Az $f_m$ függvény definiciója folytán

(F.43) $$f(x,v) \leq f(x,v'),\ \forall v' \in K \quad \text{mellett}$$

és ezért

(F.44) $$f_m'(x)=f(x,v).$$

Ha más konvergens részsorozatot választunk ki az $f(x_n,v_n)$-ből, ez is szükségképpen az $f_m(x)$-hez tart és ezért az $f_m(x_n)$ sorozatnak mindössze egyetlen torlódási pontja lehet, vagyis a sorozat konvergens és igy az (F.44) figyelembevételével $f_m$ folytonos.

b. A Lipschitz-féle feltétel bizonyitása:

Legyen $x \in M$ és $v_o \in K$, melyekre

(F.45) $$f_m(x) = f(x,v_o).$$

Az $f_m$ definiciója alapján

$$\min f(x',v) \leq f(x',v_o) \leq f(x,v_o)+L(x)d(x'x)$$

Más oldalról

$$f(x,v_o)-L(x)d(x',x)\leq f(x,v)-L(x)\cdot d(x',x)\leq f(x',v) \tag{F.46}$$

ahol az elejét és a végét nézve csupán a jobb oldal függ a v-től, ezért a jobb oldal minimumára is teljesül az egyenlőtlenség, ami a tételt bizonyitja.

# IRODALOMJEGYZÉK


[1] A.Blaquiere: Topics in Differential Games. 1973. North-Holland Publ. Company, Amsterdam-London.

[2] A.Blaquiere,P.Caussin: Further Geometric Aspects of Differential Games. Megjelent az [1]-ben.

[3] Friedman, Avner: Upper and Lower Values of Differential Games. J. Diff. Eq. 12. (1972). 462-473.

[4] Gamkrelidze-Haratisvili: Differencialnaja igra ujlonyenyija sz nyelinyejnüm upravlenyiem. Trudü Ordena Lenina Mat. Inst. im. V.A. Szteklova A.N. SzSzSzR. 12. köt. 1971.

[5] Gnoemszkij, L.Sz.: K Zadacse Preszledovanyija. PMM.26. No. 5., 960 (1962.)

[6] R.Isaacs: Differential Games. Wilayland Sons Inc., New York-London-Sidney, 1965.

[7] R.Isaacs: Some Fundamentals of Differential Games. Megjelent [1]-ben.

[8] Kraszovszkij,G.Sz., Szubbotin A.I.: Optimalnoe uklonyenyija v differencialnoj igre. Diff. Ur. 1968.4.No. 12.2159.

[9] Kraszovszkij,G.Sz.: Regularization of a Certain differential Game. Izv.A.N. SzSzSzR, Techn.Kib. 1969. No.1. 3-8.

[10] Kraszovszkij,G.Sz., Szubbotin,A.I.: Ob optimalnij stratégii v linyejnom differencialnom igre. PMM.33. No.4.698. (1969).

[11] Kraszovszkij,G.Sz.Szubbotin,A.I.: O struktura differencialnün igrah. DAN.190.No.3. (1970)

[12] Kraszovszkij,N.N.: Igrovie Zadacsi o Vsztrecse dvizsenyij. Izd. Nauka. Moszkva. 1970.

[13] Kraszovszkij,N.N.: Kzadacse o preszledovanyije. DAN. 1970.191.No.2. 270-272.

[14] Proceedings of Intern. Congr. Math. Nizza. 1970.

[15] Kraszovszkij,N.N., Szubbotin, A.I.: O sztrukture igrovüh zadacs dinamiki. PMM.35.No.1. (1971).

[16] Kraszovszkij,N.N., Szubbotin,A.I.: Pozicionnüe differencalnüe igri. Izd. NAUKA, Moszkva, 1974.

[17] Kelendzseridze, D.L.:Ob odnom zadacse optimalnogo preszledovanyija. Avt. i. Telemech. 23.No.8.1008. (1962).

[18] Lagunov,V.N.: A nonlinear differential game of evasion. DAN.202.1972.

[19] Miscsenko,E.F.: Zadacsi preszledovanyija i uklonyenyija ot vsztercsi v teorii differencialnüh igr. Izv. Akad. Nauk. SzSzSzR, Techn.Kibern. 1971.No.5.3-9.

[20] Miscsenko,E.F., Szatimov,N.: Contact avoidance problem in differential games with nonlinear controls. Diff. Ur. 9. (1973). 1792-1797.

[21] Nyikolszkij,M.Sz.: Nyesztacionarnüe linyejnüe differencialnüe igri. Vesztn. M.G.U. Szer.Mat.i.Mech.No.3.65 (1969)

[22] Nikolskij,M.Sz.: Puruit of an uncompletly known object. Vestn. M.G.U. Szer.Mat.i. Mech. 26.1971.No.1. 3-8.

[23] Nikolszkij,M.Sz.: Dynamical Pursuit games. Vestn.M.G.U. Ser.Mat.i.Mech. 27.1972.No.4.46-52.

[24] Petroszjan,L.A.: Differencialnüe igri sz nyezaviszimümi dvzsenyijami.Litovszk. Mat. Szborny. 8.20.1968.

[25] Petroszjan,L.A.: Ob odnom invariante v differencialnüh igrah preszledovanyija. Vesztny. L.G.U.No.1.42.1968.

[26] Petroszjan,L.A.: Differential games with incomplet information.DAN.195. (1970.)558-561.

[27] Petroszjan,L.A.: Topological Games and their applications to pursuit problems. Vestny. L.G.U.24.1969.No. 19.55-63.

[28] Petrov,N.M.: O szuscsesztvovanyija znacsenyija igri preszledovanyija. DAN. 190.No.6.(1970).

[29] Petrov,M.N.: The absence of the value of a pursuit game. Diff.Ur. 9.1973.860-867.

[30] Pontrjagin,L.S.: O nyekotorüh differecialnüh igrah. 1964.DAN.156.No.4.738-741.

[31] Pontrjagin,L.S.: K teorii differencialnüh igr. 1966. U.M.N. 21.V.4.219-274.

[32] Pontrjagin,L.S., Miscsenko,E.F.: Linyejnüe differencialnüe igri. DAN. 1967.1974.No.1.27-29.

[33] Pontrjagin,L.S.: O linyejnüh differencialnüh igrah (1) DAN.174.No.1967.
O linyejnüh differencialnüh igrah (2) DAN.175.No.4.1967.764.

[34] Pontrjagin,L.S., Miscsenko,E.F.: Zadacsa ob ubeganyii odnogo upravljaemogo objekta ot drugovo. DAN.189.1969. 721-723.

[35] Pontrjagin,L.S.: Linyejnaja differencialnaja igra ubeganyija. DAN. 1970.191.No.283-285.

[36] Pontrjagin,L.S.: Linyejnaja differencialnaja igra ubeganyija. Trudü ordena Lenina Mat.Inst.Im.V.A. Szteklovan.A.N.SzSzSzR, T.112-1971.

[37] Pontrjagin,L.S.,V.G.Boltjaszkij,R.V.Gamkrelidze,E.F. Miscsenko: Matematicseszkaja teorija optimalnüh processzov. MIR.1962.

[38] Psenyicsnyij,V.N.: Linyejnüe differencialnüe igri. Avt. i Telemech. No. 1.65.1968.

[39] Pšenyicsnyij,V.N.: - strategies in differential games. Megjelent [1]-ben.

[40] Sakawa Yoskiyuki: Solution of linear pursuit-evasion games. SIAM Control.8.1970. 101-112.

[41] Smoljakov,E.R.: Differential Games in Mised Strategies. DAN.191.1970.39-42.

[42] Szubbotin,A.I.: Differential games with constraints on the phase states. DAN. 193.294-297.(1970).

[43] Subbotin A.I.: Program and position absorbtion in differential games. PMM.36.(1972), 740-743.

[44] Varaiya,Pr.: On the existence of solution to a differential games.SIAM J.Contr.,5.No.1.153.(1967).

[45] Varaiya,Pr.: Differential games with dinamical systems. Mejelent [51]-ben.

[46] Zorea Torrel, Procopio: Existence of differential games with given value. Trabajos Estadist.20.(1969).

[47] Yu,P.L.: Some fundamental qvalifications of optimal strategies and transition surfaces in differenctial games. J.of Opt. Th.and Appl. 9.1972.399-425.

[48] Blaquiere,A., Gerard,F., Leithman,G.: Qvalitative and qvantitative games. Academic Press, New York, London 1969.

[49] Varaiya,Pr., Jiguan Lin: Existance of saddle points in differential games. SIAM J.Contr.V.7.No.1.1969.

[50] Proc.First Int.Conf. on Theory and Appl. of differential games, University of Massachusette, Amherst, Sept,1969.

[51] Kuhn,Szegő: Differential games and related topics. North-Holland Publ. Company, Amsterdam, London, 1971.

[52] Differential Games., Theory and applications. Symposium of the American Automatic Control Council, 1970. jun.,26. Georgia Inst. of Technology, Atlanta. Kiadó: The Am. Soc. of Mech. Engineers, New York, 1970.

[53] Jorunal of optimization, Theory and Applications, 1974, Vol. 13. No.3. Differential games issue. Leitman és Ho.

[54] M.Sz. Nyikolszkij: Ob odnom zadacse preszledovanyija sz nyeopolnoj informaciej. Izv. Ak.N.SzSzSzR. Tech. Kib. 1971. No.5.10-13.

[55] Journal of Optimization, Theory and Applications. 1976. Vol.18.No.1. Differential games issue.

[56] Joszida: Funkcionalnüj analiz. MIR. Moszkva 1967.

[57] Cayley,J.: Obscsaja topologija. 1968. Moszkva Nauka.

[58] Lakschmikantam,L.,E.Leela: Differential and integral inequalities. Academic Press.

## IRODALOMJEGYZÉK KIEGÉSZÍTÉSE

[59] Bernhard,P: Linear-quadratic, two-person, zero-sum differential games; necessary and sufficient conditions. J. Opt. Theory and Appl. 27. (1979). No. 1 51-69.

[60] Bradley, J.; Yu, P.L.: Conditions for optimality and transition surfaces using reprical concept. Internat. J. System Sci. 1976. No. 3 (299-319)

[61] Brunovszkij,A: Completing linear differential games by state dependent strategies. Kybernetika (Prague) 10 (1974), 1-12.

[62] Csencov,A.G.: Maximum derivation in a differential games Diff. Uravny 12 (1976) No 5 848-856

[63] Chikrij, A.A.: Technique for evading several pursuers. Remote Control 39 (1978) No. 8 part. 1. 1122-1126.

[64] Differential games and applications Proc. Workshop, Enchede, 1977. Lecture notes in Control and Inf. Sci. Vol. 3. Springer, Berlin, 1977.

[65] Getz, W.M.; Leitmann,G: Qualitative differential games with two targets. J. Math. Anal. Appl. 68 (1979) No. 2 (421-430).

[66] Gustjatnikov, P.B.: Evasion and L-evasion in an n-person differential games. Dokl. Ak. Nauk. SSSR. 232 (1977) No. 3 (517-520)

[67] Hacsatrjan, R.V.: A class of differential games with incomplete information. Advances in games theory (Proc. Second All Union Conf. Con Game Theory, Vilnyusz, 1971. pp (241-245)).

[68] Hajek, O.: Differential games and applications. Proc. Workshop, Enchede, 1977. Lecture notes in control and Inf. Sci. Vol. 3. Springer, Berlin, 1977.

[69] Hexner, G.: A differential game of incomplete information J.O.T.A. 28 (1979) no 2 (213-232).

[70] Jumarie, G.: Stability, structural stability and games: toward a theory of differential games. J.O.T.A. 22 (1977) No. 4 (607-629)

[71] Karimov, A.K.: Nonlinear differential games. Izv. Akad. Nauk. Azerbajdzsan, SSSR. Ser. Fiz. - Techn. Math. Nauk. 1976. No 2 (37-42).

[72] Kraszovszkij, N.N.: Mixed strategies in differential games. Dokl. Akad. Nauk, SSSR. 235 (1977) No 3 (519-522).

[73] Kraszovszkij, N.N.: On the synthesis of control in a differential games. Dokl. Ak.N. SSSR. 239 (1978) No 5 (1041-1043).

[74] Krajazsminszkij,A.V.: On the theory of positional differential games of approach - evasion. DAN. SSSR. 239 (1978) No. 4 (779-782).

[75] Leitman, G.: Skowronkij J.: Avoidance control. J.O.T.A. 23 (1977).

[76] Mine, Hisaski.; Shisido Harunori: A method of determining characteristic functions for cooperative differential games without side payment. Mem. Fac. Engr. Kyoto Univ. 38. (1976), No. 4 (169-181).

[77] Ostapenkon, V.V.: A differential evasion game. DAN. Ukr. SSSR. ser. A., 1978. No. 7. (594-596).

[78] Papavassilopoulos, G.P.: Menadic, J.V.: Cruz, J.B.: On the existence of Nash strategies and solutions to coupled Riccati equations in linear-quadratic games. J.O.T.A. 28, (1979), No. 1 (49-76).

[79] Petrosjan, G.: A pursuit game with fixed duration and with delay of information for both players. Current trends in game theory. Izd. Mokslas, Vilnyusz, 1976. (109-114).

[80] Psenyicsnyij, B.N.: The evasion Problem. Kibernetika (Kiev) 1975, No. 4 (120-127).

[81] Petrosjan, L.A.: Differencialnüe igri preszledovanyija. Izdat. Lening. Univ., Leningrad, 1977.

[82] Tamar, B.: Informationally nonunigue equilibrium solutions in differential games. SIAM J. Control Opt. 15. (1977), No. 4 (636-660).

[83] Tomszkij, G.V.: Piecewise synthetizing strategies in differential games. Control of Dyn, Systems; Leningrad. Univ.; Leningrad, 1978. (238-244).

[84] Tanimoto, S.: On a class of threeplayer differential games. J.O.T.A. 25. (1978), No.3. (469-473).

[85] Uchida, Kemko: A hote on the existence of Nash equilibrium point in stochastic differential games. SIAM.J. Control Opt. 17 (1979), No. 1 (1-4).

[86] Yu, D.L.: Second order game problem: decision dynamics in gaming phenomena. J.O.T.A. 27 (1979), No. 1, (147-166).

[87] Wilson, D.J.: Differential games with Ho information. SIAM J. Control Opt. 15 (1977), No. 2 (233-246).

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1980-BAN JELENTEK MEG:

101/1980 Gerencsér László - Hangos Katalin: Diszkrét lineáris sztochasztikus rendszerek önhangoló szabályozása

102/1980 Pásztorné Varga Katalin: Rekurziv eljárás

103/1980 Gerencsér Piroska - Szép Endre - Zilahy Ferenc Marton Zsolt: Robotmegfogók adaptivitása I.

104/1980 Knuth Előd - Radó Péter - Tóth Árpád: A SDLA előzetes ismertetése

105/1980 E. Knuth - P. Radó - Á. Tóth: Preliminary description of SDLA

106/1980 Prékopa András: Sztochasztikus programozási modellek és alkalmazásuk

107/1980 Kelle Péter: Megbizhatósági készletmodellek és alkalmazásuk

108/1980 Almásy Gedeon: Mérlegegyenletek és mérési hibák

109/1980 Békéssy A. - Demetrovics J. - Gyepesi Gy.: Relációs adatbázis logikai szintü vizsgálata funkcionális függőségek szempontjából

110/1980 Gaál A. - Soltész J. - Ruda M. - Ratkó I.: Tanulmányok a statisztikai adatfeldolgozásról

111/1980 Benedikt Szvetlána: Nem ismételhető döntéshozatal analizise kockázattal járó esetekben

112/1980 Verebély Pál: Többprocesszoros, osztott intelligenciáju grafikus rendszerek tervezési és megvalósitási kérdései

113/1980 V. Visegrádi Téli Iskola

114/1980 Demetrovics János: Relációs adatmodell logikai és strukturális vizsgálata

115/1980 Gergely József: Program package for sparse matrices

## 1981-BEN JELENTEK MEG:

116/1981 Siegler András: Egy 6 szabadságfoku antropomorf manipulátor kinematikája és számitógépes vezérlése

117/181 Knuth Előd - Radó Péter: Principles of Computer Aided System Description

118/1981 Demetrovics János - Gyepesi György: Általános függések és lekérdezéssel kapcsolatos algoritmusok relációs adatmodellekben

119/1981 Sztanó Tamás: REAL-TIME programrendszerek eseményvezérelt szervezése

120/1981 Szentgyörgyi Zsuzsa: A számitástechnika müszaki fejlődése és társadalmi hatásai

121/1981 Vicsek Tamásné (Strehó Mária): Vizsgálatok a kezdeti érték problémák numerikus megoldásával kapcsalatban

122/1981 Andó Györgyi - Lipcsey Zsolt: Sztochasztikus Ljapunov módszerek és alkalmazásaik

123/1981 Márkusz Zsuzsanna: Intelligens interaktiv rendszerek elvi problémái

124/1981 Márkusz Zsuzsanna: Logikai alapu programozási módszerek és alkalmazásaik számitógéppel segitett épitészeti tervezési feladatok megoldásához

125/1981 Fabók Julianna: Software implementációs nyelvek

126/1981 Várszegi Sándor: Multimikroszámitógép-rendszerek