tanulmányok

118/1981

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

ÁLTALÁNOS FÜGGÉSEK ÉS LEKÉRDEZÉSSEL KAPCSOLATOS ALGORITMUSOK RELÁCIÓS ADATMODELLEKBEN

Irta:

DEMETROVICS JÁNOS
GYEPESI GYÖRGY

Tanulmányok 1981/118

A kiadásért felelős:

DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 115 3

ISSN 0324-2951

Bevezetés

Tanulmányunkban a relációs adatmodellek elméletének két fontos problémakörével foglalkozunk.

Az első részben a relációs adatmodelleket az elsőrendü logikai eszközeivel vizsgáljuk. A relációkat elsőrendü modelleknek tekintve a [6] dolgozat alapján definiáljuk az általános függés, és a beágyazott általános függés fogalmát. Megmutatjuk, hogy az irodalomban előforduló függésfogalmak, a gyenge függés [4] kivételével általános illetve beágyazott általános függések.

Az Armstrong-féle elmélet [3] alapvető eredményeit bizonyitjuk általános és beágyazott általános függésekre. Fontos eszközünk a Horn-formula fogalma és az ezzel kapcsolatos matematikai logikai eredmények [8], [1o].

Bizonyos végességi kérdések kapcsán általánositjuk a [9] dolgozat ún. vadászat-algoritmusát általános függésekre. Hasonló algoritmus nincs beágyazott általános függésekre - ezt bizonyitjuk a 6. Tétel segitségével.

Végül kimutatjuk, hogy logikai megközelités ellenére az általános és beágyazott általános függések problémaköre lényegében kombinatorikai jellegü; a [4] dolgozatban vizsgált egyenlőséghalmazokkal áll szoros kapcsolatban.

A második részben a relációs adatmodellek lekérdezésének algoritmuselméleti problémáival foglalkozunk. Definiálunk egy absztrakt lekérdező nyelvet, a relációs kifejezések nyelvét. Azt vizsgáljuk, hogy relációs kifejezések ekvivalenciája hogyan dönthető el hatékony algoritmussal Bebizonyitjuk a [2] dolgozat fő eredményét, miszerint a relációs kifejezések ekvivalenciaproblémája NP-teljes.

Létezik azonban egy bő kifejezésosztály, melyre létezik polinomidejü algoritmus az ekvivalencia eldöntésére; ezt az algoritmust részletesen leirjuk.

Végül érintjük azt a kérdést, hogy az általános függéseket hogyan lehet a lekérdezés egyszerübbé tételét felhasználni; megmutatjuk, hogy lehet a vadászat-algoritmust alkalmazni.

I. Általános és beágyazott általános függések

1.§ Bevezetés

Ebben a részben a relációs adatmodellt az elsőrendü logika eszközeivel vizsgáljuk. Igy a függéseknek új tipusú, egységes tárgyalását adjuk.

Az adatmodell egy relációjának egy, a logikában szokásos relációjelet feleltetünk meg és a tényleges relációkat az igy megadott elsőrendü nyelv modelljeinek tekintjük. Megmutatjuk, hogy az irodalomban előforduló függések ezen nyelv elsőrendü formuláival jellemezhetőek. A tárgyalás alapja az, hogy a különféle függéseket leiró formulák hasonló szerkezetüek, igy az Armstrong-féle elmélet eredményei egységesen bizonyithatók.

Vizsgálataink során jobbára Horn-formulákkal foglalkozunk, melyek egyszerüek és modellelméleti szempontból jól kezelhetőek. A logikai módszer alkalmazásának egyik legfontosabb eredménye a következő: függések egy bő /és természetes módon definiálható/ osztályát tudjuk kijelölni, melynek konzisztens és a logikai következményre zárt részhalmazaihoz egyszerü algoritmussal tudunk megfelelő relációt konstruálni. Ennek speciális eseteiként adódnak Armstrong [3] eredményei a funkcionális-, és Maier, Mendelzon és Sagiv eredményei a funkcionális és metszet- függésekre[9].

Vázoljuk ennek a problémakörnek a legfontosabb megoldatlan problémáit is.

Eredményeink rámutatnak két függésfajta /a duális, és gyenge függés/ kivételes jellegére; ezért is foglalkoztunk ezekkel részletesen a [4] dolgozatban.

A fejezet végén rámutatunk arra, hogy a beágyazott általános függések a relációk egyenlőséghalmazára tesznek korlátozásokat. Igy a logikai problémák kombinatorikai feladatokká fogalmazhatók.

A fejezetben ismertnek tételezzük fel az elsőrendü logika alapvető fogalmait és legegyszerübb eredményeit /elsőrendü nyelv, formula, zárt formula, modell, igazság, levezethetőség, következmény; Gödel teljességi tétele, Löwenheim-Skolem tételek, stb./. Jelöléseinkben Shoenfield [1o] könyvét követjük; itt a felhasznált logikai eredmények is megtalálhatók. Jó magyar nyelvü referencia az ELTE matematikai logikai előadásairól készült stencil /Hajnal A. [7]/.

2.§

Ebben a részben eltekintünk attól, az eddig feltett konvenciótól, hogy reláció véges relációt jelent. Tehát egy reláció a továbbiakban lehet végtelen sok soros és igy természetesen megengedjük, hogy végtelen sok jelet használ. Ez nem jelenti azt, hogy az attributumhalmaz is lehet végtelen; továbbra is csak véges attributumhalmazokkal foglalkozunk.

Legyen Ω egy rögzitett véges, nem üres attributumhalmaz, $|\Omega| = d$. Tekintsük azt az $\mathcal{L}$ elsőrendü nyelvet, melynek nem-logikai jelei az = /egyenlőség/ és a P d-változós relációjel. Ha R reláció Ω -n, akkor S_R jelöli az R szimbólumainak halmazát, azaz $S_R = \{\tau(A) : \tau \in R, A \in \Omega\}$. Igy az (S_R, R) modell az $\mathcal{L}$ nyelv modellje.

Az $\mathcal{L}$ nyelv primformulái a $P(x_1, \dots, x_d)$ és az $x_i = x_j$ alakú formulák. Nem-primformulák a primformulák tagadásai, azaz a $\neg\varphi$ alakú formulák, ahol φ primformula.

A $P(x_1, \dots, x_d)$ alakú primformulákat <u>reláció-formulának</u> nevezzük. Formulák alatt az $\mathcal{L}$ nyelv formuláit értjük.

<u>1. Definició</u> <u>Horn formula:</u> φ Horn-formula, ha φ $A_1 \vee \dots \vee A_n$ alakú, ahol A_i primformula, vagy nem-primformula és A_i -k közül legalább egy primformula.

A $\mathcal{L}$ nyelv formuláival relációk függéseit akarjuk leirni. Az ismert függések olyanok, hogy - pontatlanul fogalmazva - bizonyos soroknak <u>azonos</u> oszlopbeli értékeire szabnak feltételeket. Ez magyarázza a következő definiciót.

2. Definició Jellegzetes formula: a φ formula jellegzetes, ha létezik olyan f függvény, amely a φ változójeleihez rendeli az 1,...,d számok valamelyikét úgy, hogy

(a) ha $P(x_{i_1},\dots,x_{i_d})$ előfordul φ -ban, akkor $f(x_{i_j})=j$ minden $1\le j\le d$ -re /azaz f azt mondja meg, hogy egy változójel hányadik helyen szerepelhet a P relációjelben; tehát pl. a $P(x_1,x_2)\wedge P(x_2,x_3)$ nem jellegzetes formula, hiszen x_2 P -ben a második és az első helyen is előfordul/; és

(b) ha $x_i = x_j$ előfordul φ -ben, akkor $f(x_i)=f(x_j)$ /pl. a $P(x_1,x_2)\vee(x_1=x_2)$ formula nem jellegzetes, hiszen $f(x_1)=1\neq 2=f(x_2)$ és $x_1=x_2$ előfordul benne/.

Hogyan irhatunk le elsőrendü formulákkal funkcionális függéseket? Mivel az $X\to Y$ funkcionális függés ekvivalens azzal, hogy minden $A\in Y$ -ra $X\to\{A\}$, elég az $X\to\{A\}$ alakúakat megfogalmazni. Legyen $X\subseteq\Omega$, $X=\{A_1,\dots,A_m\}$ és $A_{m+1}\in\Omega$. Az egyszerüség kedvéért feltesszük, hogy $A_1,\dots,A_{m+1}$ az Ω első $m+1$ attributuma, ilyen sorrendben. Ekkor $X\to\{A_{m+1}\}$ funkcionális függés fennállása egy R Ω feletti relációban nyilván ekvivalens azzal, hogy az (S_R,R) modellen igaz a következő formula:

$$(\forall x_1 \ldots x_m \forall x_{m+1} \ldots x_d \forall y_{m+1} \ldots y_d)(P(x_1 \ldots x_d) \wedge P(x_1 \ldots x_m, y_{m+1} \ldots y_d) \Rightarrow x_{m+1} = y_{m+1}).$$

Ez a formula jellegzetes /$f(x_i) = i$, $f(y_i) = i$ mutatja ezt/, zárt és az univerzális kvantor utáni kvantormentes része logikailag ekvivalens egy Horn-formulával /az $((x_{m+1} = y_{m+1}) \vee (\neg P(x_1 \ldots x_d)) \vee (\neg P(x_1 \ldots x_m, y_{m+1} \ldots y_d))$-val/, amelyben pontosan egy primformula szerepel és legalább egy nem-primformula. A funkcionális függés ezen alakjának felsorolt három "alaki" tulajdonságát kielégitő formulákat nevezzük általános függéseknek. Tehát:

3. Definició A φ formula általános függés /röviden ÁF/, ha $(\forall x_1 \ldots x_m)((A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \Rightarrow B)$ alakú jellegzetes, zárt formula és A_i relációformula minden $1 \leq i \leq m$ -re, $m \geq 1$ /azaz van legalább egy A_i /, B primformula,

továbbá az $x_1 \ldots x_m$ változójelek mindegyike előfordul valamelyik A_i -ben.

Nyilvánvaló, hogy a 3. Definició előtt leirt formula a funkcionális függésre általános függés. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a duális és gyenge függések nem irhatók le általános függésként, sőt beágyazott általános függésként sem.

Az ún. beágyazott függések /melyek reláció vetületén követelik valamilyen függés fennállását/ szintén fontos szerepet játszanak a relációs adatmodellekben, hiszen a lekérdezés egyik alapvető formája a reláció vetitése. A beágyazott függések elsőrendü leirásához az általános függések nem elegendőek.

Legyenek A_1, A_2, A_3 az Ω különböző elemei és R egy reláció Ω -n. Az, hogy R vetülete $\{A_1, A_2, A_3\}$ -ra kielégiti az $A_1 \twoheadrightarrow A_2$ többértékü függést ekvivalens azzal, hogy (S_R, R) -be igaz a következő formula:

$$\Big(\forall x_1 x_2 x_3 x_4 x_5\, y_1 .. y_{d-3}\, z_1 .. z_{d-3} \Big) \Big(\big(P(x_1 x_2 x_3\, y_1 \cdots y_{d-3}) \wedge P(x_1 x_4 x_5\, z_1 .. z_{d-3}) \big) \Rightarrow \\ \Rightarrow \big(\exists v_1 .. v_{d-3} \big) \big(P(x_1 x_2 x_5\, v_1 .. v_{d-3}) \big) \Big)$$

E formula alakjának a funkcionális függés formulájára végzetthez hasonló elemzése vezet a következő definicióhoz.

<u>4. Definició</u> A φ formula <u>beágyazott általános függés</u> /BÁF/, ha $(\forall x_1 \ldots x_m)\big((A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \Rightarrow (\exists y_1 .. y_r)(B_1 \wedge .. \wedge B_s)\big)$ alakú <u>jellegzetes</u>, <u>zárt</u> formula és

A_i reláció-formula, ha $1 \le i \le m$; $m \geqslant 1$;

B_j primformula, $1 \le j \le s$;

továbbá $x_1 \cdots x_m$ mindegyike előfordul valamelyik A_i -ben.

Jegyezzük meg, hogy a BÁF definiciójában azért engedtük meg $(B_1 \wedge .. \wedge B_s)$ -et, mert

$\bigwedge_{i=1}^{s} (\forall x_1 .. x_m)(A_1 \wedge .. \wedge A_m \Rightarrow (\exists y_{j_1} .. y_{j_{r_i}})(B_i))$ általában nem ekvivalens

$(\forall x_1 \cdots x_m)(A_1 \wedge .. \wedge A_m \Rightarrow (\exists y_{j_1} .. y_{j_{r_1}} .. y_{s_{r_s}})(B_1 \wedge .. \wedge B_s)$ -sel, továbbá hogy minden ÁF nyilvánvalóan BÁF.

Fontos észrevenni, hogy minden BÁF /és igy minden ÁF is/ igaz az üres reláción, azaz $(\emptyset, \emptyset)$ -en, sőt tetszőleges S-re $(S, \emptyset)$ -en.

A következőkben bebizonyitjuk, hogy a beágyazott általános függések "pontosan" öröklődnek relációk direkt szorzatára. Ez azt jelenti, hogy relációk direkt szorzatán egy BÁF akkor és csak akkor igaz, ha minden tényezőn igaz. Erre az eredményre támaszkodva fogjuk Armstrong azon tételét általánositani, mely szerint minden teljes $\mathfrak{f}$ -családhoz létezik olyan reláció, melynek funkcionális függései éppen a teljes család elemei.

5. Definició Legyenek $R_1, R_2, \dots$ relációk Ω -n /véges vagy végtelen sok/. Ekkor

$\otimes\langle R_1, R_2 \dots\rangle := \{\tau : (\forall i)(\exists \tau_i \in R_i)(\forall a \in \Omega)(\tau(a) = \langle \dots \tau_i(a) \dots \rangle)\}$ az $R_1, R_2 \dots$ relációk direkt szorzata.

1. Tétel /A.HORN, [8]/ Legyen φ egy $(Q_1 x_1 \dots Q_m x_m)(M_1 \wedge \dots \wedge M_s)$ alakú zárt formula, ahol minden M_i Horn formula és Q_j kvantor / $\exists$ vagy $\forall$/ . Legyenek továbbá $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \dots$ olyan modellek, melyek mindegyikén igaz φ . Ekkor φ igaz $\otimes\langle \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2 \dots\rangle$ -en.

Az 1. Tételben nem szükséges, hogy φ jellegzetes legyen és hogy φ -ben csak egy relációjel szerepeljen.

2. Tétel [6] Legyen φ $(\forall x_1 \dots x_m)(\psi)$ alakú jellegzetes,

zárt formula, ahol ψ kvantormentes. Legyenek továbbá $R_1, R_2 \dots$ olyan nem üres relációk, hogy $\otimes\langle R_1, R_2 \dots\rangle$ -n igaz φ.

Ekkor φ igaz R_i -n minden i -re.

Bizonyitás: indirekt tegyük fel, hogy φ nem igaz R_i -n valamely i -re. Nyilván feltehetjük, hogy $i=1$. A feltevés szerint $R_2, R_3 \dots$ egyike sem üres; legyen t_2 az R_2 -nek, t_3 az R_3 -nak, ... sora. Legyen $t_i = \langle t_{i,1}, t_{i,2}, \dots \rangle = \langle t_{i,j} : 1 \leq j \leq d \rangle$.

$R_1 \models \neg\varphi$, ami azt jelenti, hogy létezik, $q_1, \dots, q_m \in S_{R_1}$ úgy, hogy $R_1 \models \neg\psi[q_1 \dots q_m]$. Legyen $f : \{x_1, \dots x_m\} \to \{1, \dots, d\}$ olyan függvény, amely mutatja, hogy φ jellegzetes. $Q_1, \dots, Q_m \in S_R$ -eket definiálnak a következőképpen./Természetesen feltesszük, hogy q_i az x_i változójelet értékeli./ Legyen $Q_i = \langle q_i, t_{2,f(x_i)}, t_{3,f(x_i)}, \dots \rangle$. Mivel ψ kvantormentes, azért ezekután elég a kvantormentes formulákra bonyolultságuk szerinti indukcióval bizonyitani, hogy

$$(*) \quad R \models \psi[Q_1 \dots Q_m] \Leftrightarrow R_1 \models \psi[q_1 \dots q_m].$$

1. Legyen először ψ primformula.

(a) Ha ψ az $x_i = x_j$ formula, akkor $f(x_i) = f(x_j) =: r$. Igy $Q_i = \langle q_i, t_{2,r}, t_{3,r}, \dots \rangle$ és

$Q_j = \langle q_j, t_{2,r}, t_{3,r}, \dots \rangle$, tehát

$$R \models Q_i = Q_j \Leftrightarrow R_1 \models q_i = q_j .$$

(b) Ha ψ a $P(x_1, \dots x_d)$ relációformula, akkor $f(x_j)=j$, $j=1,\dots d$. Igy $Q_j = \langle q_j, t_{2,j}, t_{3,j} \dots \rangle$, ha $j = 1, \dots d$.

A direkt szorzat definiciója szerint igy
$(Q_1 \dots Q_d) \in R \Leftrightarrow ((q_1 \dots q_d) \in R_1 \wedge (\forall i \geq 2)(t_i \in R_i))$.
t_i - t azonban úgy választottuk, hogy $t_i \in R_i$ $(i \geq 2)$; igy $R \models P(Q_1, \dots Q_d) \Leftrightarrow R_1 \models P(q_1 \dots q_d)$.

2. Ha ψ_1 -re és ψ_2 -re igaz $(*)$, akkor nyilvánvalóan igaz $(\neg \psi_1)$-re, $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ -re és $(\psi_1 \vee \psi_2)$ -re is.

Ezzel az indukciós bizonyitás teljes.

□

3. Tétel / [6] / Legyen φ egy $(\forall x_1 \dots x_m)(\psi \Rightarrow (\exists y_1 \dots y_r)\gamma)$ alakú jellegzetes, zárt formula, ahol ψ kvantormentes és γ kvantormentes, primformulákból az $\wedge$ és a $\vee$ használatával előálló formula. Legyenek továbbá $R_1, R_2, \dots$ olyan nem üres relációk, hogy $R := \otimes \langle R_1, R_2, \dots \rangle$ -n igaz φ. Ekkor φ igaz R_i -n minden i-re.

Bizonyitás: indirekt tegyük fel, hogy $R_1 \models \neg \varphi$ és legyenek $q_1, \dots q_m$; $t_2, t_3, \dots$; f ugyanazok, mint a 2. Tétel bizonyitásában.

Igy $R_1 \models \psi[q_1, \dots q_m]$ és minden $s_1, \dots s_r \in S_{R_1}$-re
$R_1 \models \neg \gamma[q_1, \dots q_m, s_1, \dots s_r]$.

Mint a 2. Tétel bizonyitásában, $i = 1, \dots m$ -re legyen

$$Q_i = \langle q_i, t_{2,f(x_i)}, t_{3,f(x_i)}, \dots \rangle .$$

Ugyanúgy, mint 2. Tétel bizonyitásában, látható, hogy ekkor

$$R \models \psi [Q_1, \dots Q_m] .$$

A feltevés szerint $R \models \varphi$ és igy

$$R \models (\exists S_1, .. S_r)(\gamma [Q_1, .. Q_m, S_1, \dots S_r]).$$

$S_i \in S_R$, tehát $S_i = \langle s_{i,1}, s_{i,2}, \dots \rangle$. Jelöljük a rövidség kedvéért $s_{i,1}$ -et s_i -vel $i = 1, .. r$ -re.

Ezekután ellentmondás nyeréséhez elég bizonyitani, hogy ha γ kvantormentes, a primformulákból az $\wedge$ és a $\vee$ használatával előálló formula, akkor

$$(**) \quad R \models \gamma [Q_1, .. Q_m, S_1, .. S_r] \Rightarrow R_1 \models \gamma [q_1, .. q_m, s_1, .. s_r] .$$

/Jegyezzük meg, hogy $(**)$ -ban „$\Rightarrow$" szerepel és nem „$\Leftrightarrow$" !/

$(**)$ bizonyitását γ bonyolultsága szerinti indukcióval végezzük.

1. Legyen először γ primformula.

(a) Ha γ az $x_i = y_j$ formula, akkor $q_i = s_j$, hiszen $R \models \gamma [Q_1 \text{-} Q_m, S_1 \text{-} S_r]$, azaz $R \models Q_i = S_j$ és q_i a Q_i, s_j az S_j első komponense.

Hasonlóan intézhetők el az $x_i = x_j$ és az $y_i = y_j$ esetek.

(b) Ha γ reláció-formula, akkor $(**)$ igaz γ -re a direkt szorzat definiciója miatt.

2. Ha γ_1 -re és γ_2 -re igaz $(**)$, akkor nyilván igaz $/\gamma_1 \wedge \gamma_2$ /-re és $/\gamma_1 \vee \gamma_2$ /-re is. /Azonban $(\neg\gamma_1)$ -re már nem, hiszen γ_1 -re $(**)$-ban nem „$\Leftrightarrow$" -t teszünk fel; ez az oka annak a feltételnek, hogy γ a primformuláktól a $\neg$ használata nélkül épithető fel!/

□

4. Tétel /[6]/ Legyen φ egy BÁF, és legyenek $R_1, R_2, \dots$ nem-üres relációk Ω -n. Jelölje R $\otimes\langle R_1, R_2, \dots\rangle$ -t. Ekkor $R \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $(\forall i)(R_i \models \varphi)$.

Bizonyitás: φ BÁF, tehát $(\forall x_1 .. x_m)(A_1 \wedge \dots \wedge A_m \Rightarrow (\exists y_1 .. y_r)(B_1 \wedge .. \wedge B_s))$ alakú. φ logikailag ekvivalens

$$(\forall x_1 .. x_m)(\exists y_1 .. y_r)(A_1 \wedge .. \wedge A_m \Rightarrow B_1 \wedge .. \wedge B_s)$$ -sel és

$$(A_1 \wedge .. \wedge A_m \Rightarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_s)$$ pedig

$(M_1 \wedge \dots \wedge M_s)$- sel, ahol $M_i = (A_1 \wedge .. \wedge A_m \Rightarrow B_i)$.

Tehát φ logikailag ekvivalens egy

$$(Q_1 x_1 .. Q_\ell x_\ell)(M_1 \wedge .. \wedge M_s)$$ alakú formulával.

Az 1. és a 3. Tétel szerint tehát

$$R \models \varphi \Leftrightarrow (\forall i)(R_i \models \varphi).$$

□

A 4. Tétel egyik következménye, hogy a duális és gyenge függések egyike sem BÁF, ugyanis e függések nem öröklődnek pontosan a direkt szorzatra. Ezt a következő példa mutatja:

1. Példa Legyen $\Omega = \{A_1, A_2, A_3\}$;

$$R_1 = \{(0,1,2),(0,1,3)\},$$

$$R_2 = \{(0,1,2),(0,4,2)\}.$$

Ekkor

$$\otimes\langle R_1, R_2\rangle = \left\{ \begin{array}{l} \langle(0,0),(1,1),(2,2)\rangle, \langle(0,0),(1,4),(2,2)\rangle, \\ \langle(0,0),(1,1),(3,2)\rangle, \langle(0,0),(1,4),(3,2)\rangle \end{array} \right\}.$$

R_1 -ben és R_2 -ben igazak a $\{A_1\} \xrightarrow{d} \{A_2, A_3\}$ duális és az $\{A_1\} \xrightarrow{w} \{A_2, A_3\}$ gyenge függések, mig $\otimes\langle R_1, R_2\rangle$ -ben ezek egyike sem igaz.

Az erős függés ÁF-ekkel leirható, hiszen ha $A \xrightarrow{s} B$ erős függés és $A = \{A_1, \dots, A_k\}$, $B = \{B_1, \dots, B_\ell\}$, akkor $A \xrightarrow{s} B \Leftrightarrow (\forall 1 \le i \le k)(\{A_i\} \xrightarrow{f} B)$ azaz az erős függés ekvivalens k db funkcionális függés és-ével, és a funkcionális függések leirhatók ÁF-ekkel.

Fontos észrevétel a duális függésről, hogy bár direkt szorzatra nem öröklődik pontosan, de relációk diszjunkt uniójára igen; azaz, ha $R_1, R_2, \dots$ relációk, akkor

$$R := \{ r : (\exists i)(\exists s \in R_i)(\forall a \in \Omega)(r(a) = \langle s(a), i\rangle\} \text{ -n}$$

akkor és csak akkor igaz egy duális függés, ha minden R_i -n igaz.

Ezután Armstrong funkcionális függésekre vonatkozó eredményeinek általános függésekre és beágyazott általános függésekre való általánositásával foglalkozunk. Az általánositás szempontjából Armstrong fő eredményének következő alakja lesz célravezető:

ha Σ funkcionális függések olyan rendszere, amely zárt a logikai következésre /azaz: ha F olyan funkcionális függés, hogy minden R Σ -t kielégitő reláción F is igaz, akkor $F \in \Sigma$ /, akkor van olyan R reláció, amelyen tetszőleges F funkcionális függés akkor és csak akkor igaz, ha $F \in \Sigma$

Nevezzük az Σ -hoz ilyen módon létező relációkat Σ - pontosaknak. Armstrong másik alapvető eredménye az, hogy a funkcionális függések körében következtetési szabályok teljes rendszerét adja. Ez utóbbi eredményt nem tudjuk adaptálni általános függésekre. A Σ -pontos relációk létezését azonban bebizonyitjuk beágyazott általános függések logikai következményre zárt Σ halmazaira.

A következő egyszerü tétel önmagában is érdekes, mint matematikai logikai állitás.

5. Tétel /R. FAGIN, [6]/ Legyen Π egy tetszőleges elsőrendü nyelv zárt formuláiból álló halmaz. Ekkor ekvivalensek a következők:

(a) Létezik olyan Q operáció, amely modellek indexelt halmazaihoz modelleket rendel úgy, hogy ha $\varphi \in \Pi$ és $R_i : i \in I$ modellek, akkor

$$Q\langle R_i : i \in I\rangle \models \varphi \iff (\forall i \in I)(R_i \models \varphi).$$

(b) Ha $\Sigma \subseteq \Pi$ és $\Sigma^* = \{\varphi \in \Pi : \varphi$ logikai következménye Σ -nek$\}$, akkor létezik olyan R modell, amelyre

$$(\forall \varphi \in \Pi)(R \models \varphi \iff \varphi \in \Sigma^*)$$

/azaz létezik Π-re nézve Σ^* -pontos modell/.

(c) Ha $\Sigma \subseteq \Pi$ és $\{\sigma_i : i \in I\} \subseteq \Pi$, akkor $\Sigma \models \vee\{\sigma_i : i \in I\}$ ekvivalens azzal, hogy létezik olyan $j \in I$, melyre $\Sigma \models \sigma_j$.
/a $\Sigma \models \vee\{\sigma_i : i \in I\}$ jelölés azt jelenti, hogy Σ -nek minden modelljében igaz valamelyik σ_i /.

Bizonyitás: (a) $\Rightarrow$ (b) Legyen X az Π azon elemeinek halmaza, melyek nem logikai következményei Σ -nak. $\varphi \in X$ esetén, a logikai következmény definició-ja miatt, létezik R_φ modell, amelyben igaz Σ és $(\neg\varphi)$. Legyen $R = Q\langle R_\varphi : \varphi \in X\rangle$. Mivel Q az (a) szerinti operáció, azért világos, hogy $(\forall \varphi \in \Pi)(R \models \varphi \iff \varphi \in \Sigma^*)$.

(b)$\Rightarrow$(c) Ha $\Sigma \models \sigma_j$ valamely $j \in I$ -re, akkor $\Sigma \models \vee\{\sigma_i : i \in I\}$ nyilvánvalóan. Forditva, tegyük fel, hogy $\Sigma \models \vee\{\sigma_i : i \in I\}$. Legyen R olyan modell, amelyre $(\forall \varphi \in \Pi)(R \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma^*)$; (b) szerint ilyen R van. Mivel $\Sigma \models \vee\{\sigma_i : i \in I\}$, azért létezik $j \in I$, hogy $R \models \sigma_j$, ami azt jelenti, hogy $\sigma_j \in \Sigma^*$, azaz $\Sigma \models \sigma_j$.

(c) $\Rightarrow$(b) Tegyük fel, hogy (b) nem igaz és mutassa ezt Σ. Igy minden R Σ - modellhez létezik $\varphi_R \in \Pi \setminus \Sigma^*$, hogy $R \models \varphi_R$. Igy $\Sigma \models \vee\{\varphi_R : R\ \Sigma\text{-modell}\}$. (c) szerint létezik R, hogy $\Sigma \models \varphi_R$ azaz $\varphi_R \in \Sigma^*$, ami ellentmondás.

(b) $\Rightarrow$(a) Definiáljuk $Q\langle R_i : i \in I\rangle$ -t. Legyen $T_i = \{\varphi \in \Pi : R_i \models \varphi\}$ és $\Sigma = \cap\{T_i : i \in I\}$. $\Sigma = \Sigma^*$, mert ha $\varphi \in \Pi$ és $\Sigma \models \varphi$, akkor minden $i \in I$ -re $T_i \models \varphi$ és igy minden i -re $R_i \models \varphi$ azaz $\varphi \in \Sigma$

(b) szerint tehát létezik olyan R modell, amelyre

$$(\forall \varphi \in \Pi)(R \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma).$$

Nyilvánvaló, hogy $R =: Q\langle R_i : i \in I\rangle$ kielégiti az (a) feltételt.

□

Vegyük észre, hogy a beágyazott általános függések halmazára "majdnem igaz" az 5. Tétel (a) feltétele. Ugyanis a 4. Tétel szerint a beágyazott általános függések pontosan öröklődnek nem üres modellek direkt szorzatára. Az egyetlen probléma az, hogy a 4. Tétel csak nem üres modellek direkt szorzatára érvényes. Ezért szükséges a következő lemma.

Lemma Legyen Σ beágyazott általános függések halmaza és φ egy beágyazott általános függés. Ekkor $\Sigma \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha Σ minden nem üres modelljén igaz φ.

Bizonyitás: ha $\Sigma \models \varphi$, akkor világos, hogy Σ minden nem üres modelljén igaz φ.

Tegyük fel, hogy Σ minden nem üres modelljén igaz φ. Ekkor $\Sigma \models \varphi$, mert ha R modellje Σ -nak, akkor

(a) $R = \emptyset$ esetén $R \models \varphi$, mivel az üres reláción minden BÁF igaz,

(b) ha $R \neq \emptyset$, akkor a feltevés szerint $R \models \varphi$.

□

1. Következmény Legyen Σ beágyazott általános függések halmaza és $\Sigma^* = \{\varphi : \Sigma \models \varphi$ és φ beágyazott általános függés$\}$.

Ekkor létezik olyan R reláció, melyre

$(\forall \varphi$ beágyazott általános függésre$)(R \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma^*)$,

azaz létezik a BÁF-ekre nézve Σ^*-pontos reláció.

Bizonyitás: az 5. Tételt használjuk. Legyenek most a "modellek" a nem üres relációk és Π a beágyazott általános függések halmaza. Ekkor Π-re igaz 5. Tétel (a) feltétele és igy létezik olyan R reláció, hogy ha φ BÁF, akkor $R \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha Σ minden nem üres modelljén igaz φ.

A lemma szerint azonban igy $R \models \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi$.

□

2. Következmény Legyen Σ BÁF-ek egy halmaza és $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ BÁF-ek. Ekkor

$$\Sigma \models (\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots) \Leftrightarrow (\exists i)(\Sigma \models \varphi_i).$$

Bizonyitás: ha $(\exists i)(\Sigma \models \varphi_i)$, akkor nyilván $\Sigma \models (\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots)$. Forditva, tegyük fel, hogy $\Sigma \models (\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots)$. Persze ekkor Σ minden nem üres modelljén igaz $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ valamelyike. A nem üres modelleket tekintve modelleknek, a 4. és 5. Tétel szerint igy van olyan i, hogy Σ minden nem üres modelljén igaz φ_i, ami a lemma szerint azzal ekvivalens, hogy $\Sigma \models \varphi_i$.

□

A 4. Tétel utáni megjegyzésben rámutattunk arra, hogy a duális függések pontosan öröklődnek relációk diszjunkt uniójára, igy, az 5. Tétel szerint a duális függésekre igaz a 2. Következmény.

A következő példával megmutatjuk, hogy a gyenge függésekre nem igaz a 2. Következmény.

<u>2. Példa</u> Legyen $|\Omega|=3$, $\Omega=\{a,b,c\}$ / a példa tetszőleges, legalább három-elemü attributumhalmazon müködik; az általános esetben kiválasztva Ω -nak két különböző elemét, a-t és b-t, $\Omega\setminus\{a,b\}$ játssza $\{c\}$ szerepét/.

Legyen Σ azon $A \xrightarrow{w} B$ gyenge függések halmaza, melyekre $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ és:

(a) $A \subseteq \{a\} \Rightarrow a \in B$ és

(b) $A \subseteq \{b\} \Rightarrow b \in B$.

Ekkor $\varphi_1 = (\{a\} \xrightarrow{w} \{b,c\}) \notin \Sigma$ és $\varphi_2 = (\{b\} \xrightarrow{w} \{a,c\}) \notin \Sigma$. Továbbá a [4] dolgozat szerint nincs olyan reláció, melynek gyenge függései éppen Σ elemei, sőt $\Sigma \models \varphi_1 \vee \varphi_2$. De $i=1,2$-re $\Sigma \not\models \varphi_i$, amint azt a következő két reláció mutatja:

R_1 :=

a	b	c
0	1	3
0	2	4

; R_2 :=

a	b	c
1	0	3
2	0	4

$$R_1 \models \{a\} \not\xrightarrow{w} \{b,c\} \; ; \quad R_2 \models \{b\} \not\xrightarrow{w} \{a,c\}, R_i \models \Sigma .$$

Eddig nem törődtünk azzal, hogy a logikai következésre zárt BÁF-osztályokhoz konstruált pontos relációk végesek vagy végtelenek. Pontosabb, a leirt konstrukció általában végtelen relációkat eredményez. Armstrong funkcionális függésekre vonatkozó analóg eredménye azonban véges, pontos relációkat garantál.

A következő példa mutatja, hogy ez BÁF-ekre nem általánositható.

3. Példa Legyen $|\Omega| = 2$, $\Omega = \{A, B\}$;

τ_k olyan formula, amely akkor és csak akkor igaz egy R Ω feletti reláción, ha

$(\forall a, b \in S_R)((\exists r_1 \ldots r_{k+2} \in R)(a = r_1(A)$ és $r_i(B) = r_{i+1}(B)$, ha $1 \leq i < k+2$ páratlan, és $r_i(A) = r_{i+1}(A)$ ha $1 \leq i < k+2$ páros és $b = r_{k+2}(B))) \Rightarrow ((\exists r_1 \ldots r_k)(a = r_1(A)$ és $r_i(B) = r_{i+1}(B)$ ha $1 \leq i < k$ páratlan és $r_i(A) = r_{i+1}(A)$ ha $1 \leq i < k$ páros, és $b = r_k(B))$

τ_k BÁF; pl. τ_3 BÁF ekvivalense:

$$(\forall x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6)((P(x_1 x_3) \wedge P(x_4 x_3) \wedge P(x_4 x_5) \wedge P(x_6 x_5) \wedge P(x_6 x_2)) \Rightarrow (\exists y_1 y_2)(P(x_1 y_1) \wedge P(y_2 y_1) \wedge P(y_2 x_2)))$$

Legyen $\Sigma = \emptyset$; ekkor nincs véges Σ^*-pontos reláció, mert ha R k-soros, akkor $R \models \tau_\ell$ minden $\ell \geq k$-ra, és ugyanakkor nyilván létezik olyan végtelen reláció, melyen egyetlen τ_k sem igaz.

A véges pontos reláció létezése tehát nem várható. Azonban van egy ennél gyengébb, természetes módon felmerülő, a végességet célzó probléma; az a kérdés, hogy a "véges modelleken való következés" maga után vonja-e a "minden modellen való következés"-t. A probléma kényelmes megfogalmazásához szükséges a következő fogalom.

<u>6. Definició</u> Legyen Σ beágyazott általános függések egy halmaza, φ egy beágyazott általános függés. Azt mondjuk, hogy <u>Σ -ból végesen következik φ</u> $/ \Sigma \models_V \varphi$ /, ha minden olyan véges reláción, melyen igaz Σ, φ is igaz.

Legyen Σ BÁF-ek halmaza, φ BÁF. Ekvivalensek-e a következők:

(a) $\Sigma \models \varphi$

(b) $\Sigma \models_V \varphi$. Erre a kérdésre válaszol a következő két tétel.

<u>6. Tétel</u> Létezik φ ÁF és Σ BÁF-ek halmaza úgy, hogy $\Sigma \cup \{(\neg\varphi)\}$ -nek nincs véges modellje és van végtelen modellje.

Azaz BÁF-ok körében nem igaz, hogy $\Sigma \models \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models_V \varphi$.

<u>Bizonyitás:</u> az egyszerüség kedvéért tegyük fel, hogy $|\Omega| = 3$.

Legyen $\varphi = (\forall x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3)(P(x_1 x_2 x_3) \wedge P(y_1 y_2 y_3) \Rightarrow P(x_1 x_2 y_3))$.

Vegyünk két, mindenhol különböző sort, $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$-t és $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$-at. Egy R végtelen relációt és Σ -t konstruálunk úgy, hogy $a \in R$, $b \in R$ és $R \models \Sigma$ és $R \models \neg P(a_1 a_2 b_3)$.

Σ BÁF-elemei $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\ell, \ldots$ lesznek; ezeket és R sorait szimultán indukcióval definiáljuk. Ezenkivül Σ -nak lesznek ÁF-elemei is.

$$\psi_1 := \Big((\forall a_1 a_2 a_2\, b_1 b_2 b_3)(P(a_1, a_2, a_3) \wedge P(b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists z_1)(P(a_1, z_1, b_3))\Big).$$

$a, b \in R$, igy ψ_1 miatt R-nek lesz egy $r_1 = \langle a_1, z_1, b_3 \rangle$ alakú sora. El akarjuk érni, hogy z_1 ne lehessen a_2 vagy b_2. $R \models \neg P(a_1, a_2, b_3)$ miatt $z_1 \neq a_2$; $z_1 \neq b_2$ -t egy ÁF-fal biztosithatjuk :

$$\gamma_1 = (\forall x_1 x_2 x_3\, y_1 y_2 y_3)((P(x_1 x_2 x_3) \wedge P(y_1 y_2 y_3) \wedge$$
$$\wedge\, P(x_1 y_2 y_3)) \Rightarrow P(x_1 x_2 y_3))$$

-vel.

Tehát R eddig definiált része:

$$(a_1, a_2, a_3)$$
$$(b_1, b_2, b_3)$$
$$(a_1, z_1, b_3).$$

$$\psi_2 = (\forall x_1 x_2 x_3\, y_1 y_2 y_3 z_1)(P(x_1 x_2 x_3) \wedge P(y_1 y_2 y_3) \wedge P(x_1 z_1 y_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists v_1)(P(v_1, z_1, x_3))),$$

és ÁF-ekkel biztositjuk, hogy $v_1 \neq a_1, b_1$.

Általában ψ_k -val egy (a_1, z_k, b_3) illetve egy (v_k, z_k, a_3) alakú sort követelünk, attól függően, hogy k páratlan vagy páros. ÁF-ekkel biztositjuk, hogy $v_i \neq v_j$ és $z_i \neq z_j$ ha $i \neq j$. Könnyen végiggondolható, hogy ezt ellentmondás nélkül tehetjük, és az igy definiált sorok az a-val és b-vel egy $\Sigma \cup \{(\neg\varphi)\}$ -modellt adnak. Ez a modell végtelen és világos, hogy Σ definiciója miatt $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ -nak nincs véges modellje.

□

7. Tétel Legyen Σ ÁF-ek halmaza, φ ÁF. Ekkor ekvivalensek:

(a) $\Sigma \models \varphi$

(b) $\Sigma \models_V \varphi$.

Bizonyitás: (a)$\Rightarrow$(b) nyilvánvaló.

Bizonyitsuk (b) $\Rightarrow$ (a) -t! Tegyük fel, hogy $\Sigma \not\models \varphi$, azaz létezik olyan R reláció, amelyre $R \models \Sigma$ és $R \models \neg\varphi$. φ ÁF, ezért φ $(\forall x_1 .. x_m)(A_1 \wedge .. \wedge A_n \Rightarrow B)$ alakú jellegzetes, zárt formula, ahol A_i reláció-formula $(i=1,..n)$, B pedig primformula.

$R \models \neg\varphi$, tehát létezik $q_1, ..., q_m \in S_R$ úgy, hogy

$R \models (A_1 \wedge .. \wedge A_m)[q_1, .., q_m]$ és $R \models \neg B[q_1, .., q_m]$.

Mit jelent $R \models (A_1 \wedge .. \wedge A_m)[q_1 .. q_m]$?

A_i reláció-formula $(i=1,..n)$, tehát $R \models A_i[q_1 .. q_m]$ azt jelenti, hogy R-nek van egy r_i sora, ami mutatja $R \models A_i[q_1 .. q_m]$ -et. Tehát $(A_1 \wedge .. \wedge A_n)[q_1 .. q_m]$ kijelöl egy legfeljebb n-soros relációt, melynek szimbólumai $\{q_1, .., q_m\}$ -ből valók. Jelölje ezt a relációt R_0 . A "jellegzetesség" definiciója miatt feltehetjük, hogy R_0 különböző oszlopaiban nem fordulnak elő azonos jelek /hiszen ha R' egy tetszőleges reláció az $\Omega = \{a_1, .., a_d\}$ -n és R'-ből R"-t képezzük a következő módon:

$$R'' := \{ r : (\exists s \in R')(r(a_i) = \langle s(a_i), a_i \rangle, \text{ha } i=1,..d) \},$$

akkor R' -n ugyanazok a jellegzetes formulák igazak, mint R' -n/.

Legyen $\psi \in \Sigma$ tetszőleges. Definiáljuk a ψ-transzformációt tetszőleges olyan R' Ω feletti relációra, amelynek különböző oszlopaiban nem szerepelnek azonos szimbólumok, és véges sok sora van. Legyen $\psi = (\forall x_1 .. x_l)((A'_1 \wedge .. \wedge A'_k) \Rightarrow B')$ jellegzetes, zárt formula. Ha $R' \models \psi$, akkor R' ψ-transzformáltja maga R'. Ha létezik $r_1, .. r_l \in S_{R'}$ úgy, hogy $R' \models (A'_1 \wedge ... \wedge A'_k)[r_1, .., r_l]$, akkor

(a) ha B' az $x_i = x_j$ formula, akkor R' -ben r_i helyére r_j -t irunk a r_i minden előfordulásánál /az egyértelmüség kedvéért ezt $j < i$ esetén tesszük igy; ha $i = j$, akkor $R' \models \psi$ /. Ezzel elértük, hogy az R' -ből igy kapott reláción igaz lesz ψ a $\langle r_1, .. r_j, r_{j+1}, .. r_{i-1}, r_j, r_{i+1}, .. r_l \rangle$ elemsorozaton és az új relációban sem lesz azonos jel különböző oszlopokban, mert ψ jellegzetes volta miatt r_i és r_j az R' egy oszlopában vannak;

(b) ha B' a $P(x_{i_1}, .. x_{i_\alpha})$ formula, akkor R'-höz hozzávesszük a $(r_{i_1}, .., r_{i_\alpha})$ sort. ψ jellegzetes volta miatt ez a lépés is megőrzi azt a tulajdonságot, hogy különböző oszlopokban nem szerepelnek azonos jelek.

Az igy kapott új relációval R' szerepében folytatjuk az eljárást addig, amig ψ igaz lesz. Ahhoz, hogy az R' ψ - transzformáltja létezik, elég azt belátni, hogy a leirt eljárás véges sok lépésben véget ér.

Ez azért van igy, mert ha egy, az eljárás során az n-edik lépésben kapott R_n relációra $R_n \models \neg\psi$, akkor könnyen látható, hogy R_{n+1} nem egyezik meg R_i -vel $i<n+1$ -re, továbbá R' véges volta miatt az $S_{R'}$ elemeit szimbólumként használó reláció véges sok van; tehát az eljárás legfeljebb $|S_{R'}|^d$ lépésben véget ér.

R_0 -ra végezzük el /tetszőleges sorrendben/ a ψ-tranformációt minden $\psi \in \Sigma$ -ra. Világos, hogy nemcsak az egy transzformáció különböző lépéseinél előálló relációk, hanem az egymás után végzett transzformációk során előálló bármely két reláció sem egyenlő. Ezért véges sok lépés után Σ -modellt kapunk. Ha ezen a Σ -modellen igaz φ , akkor nyilván $R \models \varphi$ is /heurisztikusan: a ψ -transzformáláskor csak annyit csináltunk, amennyit ψ követel/.

Mivel $R \models \neg\varphi$, azért ezzel az eljárással olyan véges Σ -modellt konstruáltunk, amelyen φ nem igaz.

Ezzel beláttuk, hogy ha $\Sigma \not\models \varphi$, akkor $\Sigma \not\models_V \varphi$, azaz $\Sigma \models_V \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$.

$\square$

Megjegyzés:

1. A 7. tétel bizonyitásában leirt algoritmust vadászat-algoritmusnak nevezzük. A vadászat-algoritmus adott R relációt adott Σ ÁF-halmaz modelljévé alakit át, csak a "szükséges" változtatásokat végezve. A 6. Tételből könnyen következik, hogy BÁF-okra nincs ilyen algoritmus. A vadászat-algoritmust relációs kifejezések egyszerüsitésére is használjuk a II. részben.

2. Lényeges észrevétel a BÁF-ekkel kapcsolatban, hogy egy BÁF nem más, mint a relációk egyenlőséghalmazára vonatkozó "követelés". Legyen ugyanis φ BÁF,

$$\varphi = (\forall x_1 .. x_m)(A_1 \wedge .. \wedge A_m \Rightarrow (\exists y_1 .. y_r)(B_1 \wedge .. \wedge B_s)).$$

Jelölje $M_{i,j}$ $(1 \le i < j \le m)$ azon ℓ-ek halmazát $\{1, \dots d\}$ -ből, amelyekre A_i -ben és A_j -ben az ℓ -edik helyen ugyanaz a változójel szerepel /pl. ha $A_1 = P(x_1, x_2, x_3)$ és $A_2 = P(x_1, x_4, x_3)$, akkor $M_{1,2} = \{1, 3\}$/.

Hasonlóan, jelölje $L_{i,j}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le s)$ azon ℓ-ek halmazát $\{1, \dots, d\}$ -ből, melyekre A_i -ben és B_j -ben az ℓ-dik helyen ugyanaz a változójel szerepel és $K_{i,j}$ $(1 \le i < j \le s)$ azon ℓ-ek halmazát, melyekre B_i és B_j ℓ-edik helyén ugyanaz a változójel szerepel; feltéve, hogy B_i és B_j relációformulák. Ebben a pillanatban az egyenlőség alakú B_i -kel nem foglalkozunk /pontosabban: feltesszük, hogy φ -ban nincs ilyen/.

Ekkor φ a következő, egyenlőséghalmazokra vonatkozó megszoritással ekvivalens:

Ha létezik n' sor, $r_1, \dots, r_{n'}$ valamely $n' \leq n$ -re úgy, hogy valamely $f : \{1, \dots n\} \to \{1, \dots, n'\}$ függvényre $E_{r_{f(i)}, r_{f(j)}} \supseteq M_{i,j}$ minden $1 \leq i < j \leq n$ -re, akkor létezik $s' \leq s$ és $r_1, \dots r_{s'}$, sorok és $g : \{1, \dots s\} \to \{1, \dots s'\}$ úgy, hogy:

(a) $E_{r_{f(i)}, r_{g(j)}} \supseteq L_{i,j}$, ha $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq s$;

(b) $E_{r_{g(i)}, r_{g(j)}} \supseteq K_{i,j}$, ha $1 \leq i < j \leq n$.

Az $x_i = y_j$ alakú B-k könnyen kiküszöbölhetők úgy, hogy φ -ban y_j helyére x_i -t irunk; hasonlóan járhatunk el az $y_i = y_j$ alakú B -kel.

Ha B $x_\ell = x_k$ alakú, akkor azt kell leirnunk az egyenlőséghalmazok nyelvén, hogy minden $E_{i,j}$ -ben $(1 \leq i < j \leq n)$ benne van x_ℓ jellegzetessége is, ha A_i -ben x_ℓ /vagy x_k/ és A_j -ben x_k /vagy x_ℓ / szerepel /mivel φ jellegzetes, azért, $(x_\ell = x_k)$ φ -ben való előfordulása miatt x_ℓ és x_k is csak az x_ℓ jellegzetes helyén - ez x_ℓ jellegzetessége - szerepelhet/; és ezt könnyü megtenni.

3. A 2. pontban leirtak alapján a BÁF-okra vonatkozó problémák egyenlőséghalmazok nyelvére fogalmazhatók át és igy ezek a logikai problémák [4] alapján Δ -rendszerekre vonatkozó kombinatorikus feladatokkal ekvivalensek.

II. Relációs kifejezések ekvivalencia-problémája

1.§ Bevezetés

Ebben a részben a relációs adatmodell lekérdezésével foglalkozunk. Definiálunk egy absztrakt lekérdező nyelvet, az ún. relációs kifejezések algebráját. Azt vizsgáljuk, hogy e nyelv kérdéseinek ekvivalenciáját hogyan lehet hatékonyan eldönteni, illetve adott kérdéshez hogyan lehet a vele ekvivalens legrövidebb kérdést megtalálni.

Definiáljuk a kifejezések gyenge és erős ekvivalenciáját és megmutatjuk, hogy a gyakorlat szempontjából elég a gyenge ekvivalenciával foglalkozni.

Leirjuk a relációs kifejezések egy szemléletes és a kifejezések kényelmes kezelését biztositó interpretációját; minden kifejezéshez hozzárendelünk egy táblázatot, melynek segitségével adott relációk esetén áttekinthető módon számolható ki a kifejezés értéke ezen relációkon. A táblázatokra a vadászat-algoritmust alkalmazva /ld. I. fejezet 7. Tétel/ egyszerüsithetjük a megfelelő kifejezéseket az adatbázisban fennálló általános függések szerint. A beágyazott általános függéseket ilyen algoritmussal nem tudjuk felhasználni - az előző részben látott 6. Tétel egyik következménye az, hogy BÁF-ekre nem létezik ilyen algoritmus.

Bebizonyitjuk, hogy a relációs kifejezések ekvivalencia-problémája NP-teljes. Létezik azonban egy bő osztály /az egyszerü táblázattal reprezentálható kérdések osztálya/, melyen az ekvivalencia-probléma polinom-idő alatt megoldható.

A felhasznált algoritmuselméleti fogalmak és tételek /NP-feladatok, Karp- redukció, NP-teljes feladat létezése, a 3-SAT probléma NP-teljes, stb./ megtalálhatók Aho, Hopcroft és Ullman[1] kitünő könyvében.

2.§

A következőkben definiálandó kifejezéseket úgy tekintjük, mint attributumhalmazokon értelmezett operációsémákat. Tehát ha E egy kifejezés, akkor E -hez tartozik egy $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ sorozata attributúmhalmazoknak; ha R_i $i=1, \dots k$ -re reláció Ω_i -n, akkor $E[R_1, \dots, R_k]$ az E értéke az $R_1, \dots, R_k$ relációsorozaton.

A kifejezéseket rekurzióval definiáljuk úgy, hogy azt irjuk le, hogy mi a kifejezés értéke adott reláció-sorozaton.

Három alap-kifejezésünk lesz; a kiválasztás, a vetités, és az egyesités.

<u>1. Definició</u> Legyenek Ω_1, Ω_2 attributumhalmazok.

(1) <u>Kiválasztás</u> Legyen $A \in \Omega_1$ és c egy konstans. Az <u>$A = c$ kiválasztás</u> kifejezés értéke egy R Ω_1 feletti reláción $\sigma_{A=c}(R)$, ahol $\sigma_{A=c}(R) := \{\tau \in R : \tau(A) = c\}$.

(2) <u>Vetités</u> Legyen $X \subseteq \Omega_1$. Az <u>X -re való vetités</u> kifejezés értéke egy R Ω_1 feletti reláción $\pi_X(R)$, ahol

$\pi_X(R) := \{ s : s$ X -en értelmezett függvény és létezik $\tau \in R$, hogy $(\forall A \in X)(\tau(A) = s(A))\}$

(3) <u>Egyesités</u> Az <u>egyesités</u> kifejezés értéke az R_1, R_2 relációkon / R_1 Ω_1-n, R_2 Ω_2-n

reláció/ $R_1 \bowtie R_2$, ahol

$R_1 \bowtie R_2 := \{ s : s \ (\Omega_1 \cup \Omega_2)$-n
értelmezett függvény úgy, hogy
létezik $r_1 \in R_1$ és $r_2 \in R_2$ melyekre
$(\forall A \in \Omega_1)(r_1(A) = s(A)) \wedge (\forall A \in \Omega_2)(r_2(A) = s(A))$;
speciálisan $(\forall A \in \Omega_1 \cap \Omega_2)(r_1(A) = r_2(A)) \}$

<u>2. Definició</u> (1) A kiválasztás, a vetités és az egyesités relációs kifejezések.

(2) Ha E_1, E_2 relációs kifejezések, akkor

$\sigma_{A=c}(E_1)$, $\pi_X(E_1)$ és $E_1 \bowtie E_2$

is kifejezések, ahol A az E_1 kifejezés eredmény-attributumhalmazának eleme, X pedig részhalmaza.

(3) Relációs kifejezések azok a kifejezések, melyek (1) és (2) alapján véges sok lépésben előállithatók.

Most definiáljuk relációs kifejezések erős és gyenge ekvivalenciáját. Az erős ekvivalencia első látásra természetesebb fogalom a gyenge ekvivalenciáról. A gyenge ekvivalencia definiciója után leirunk egy módszert, amellyel minden relációs adatbázis olyanná alakitható, melyen a gyenge ekvivalens kifejezések már azonos eredményt szolgáltatnak - az átalakitás az adatbázist nem változtatja meg ténylegesen; lényegében egy, a kifejezések megválaszolása "elé" illesztett rövid algoritmus. A gyenge ekvivalencia előnye, hogy kényelmesen kezelhető.

3. Definició Legyenek E_1, E_2 relációs kifejezések az $\Omega_1,\dots,\Omega_k$ attributumhalmaz-sorozaton. Azt mondjuk, hogy

(1) E_1 és E_2 erősen ekvivalensek, ha minden $R_1,\dots,R_k$ relációsorozatra / R_i Ω_i -n reláció, $i=1,\dots,k$ / $E_1[R_1,\dots R_k]=E_2[R_1,\dots R_k]$.

(2) E_1 és E_2 gyengén ekvivalensek /jele: $E_1 \equiv E_2$ /, ha minden I $\left(\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i\right)$ feletti relációra

$$E_1[\pi_{\Omega_1}(I),\dots,\pi_{\Omega_k}(I)]=E_2[\pi_{\Omega_1}(I),\dots\pi_{\Omega_k}(I)].$$

Könnyen látható, hogy a gyenge ekvivalencia definiciójában azt is irhatjuk, hogy:

minden olyan $R_1,\dots,R_k$ relációsorozatra

/ R_i Ω_i -n reláció/,

amelyre $R_i=\pi_{\Omega_i}\left(\bowtie_{j=1}^{k} R_j\right)$, ha $i=1,\dots,k$,

teljesül, $E_1[R_1,\dots,R_k]=E_2[R_1,\dots,R_k]$.

Amikor kifejezések gyenge ekvivalenciájával foglalkozunk, akkor, a 3. Definició (2) pontja alapján olyan kifejezéseket elég tekintenünk, melyek egyetlen attributumhalmazon operálnak. Ugyanis, ha E_1 egy relációs kifejezés az $\Omega_1,\dots,\Omega_k$

attributumhalmazon, akkor E_1 -gyel gyengén ekvivalens az

$E_1(\pi_{\Omega_1}(\bigcup_{i=1}^{\ell}\Omega_i), \ldots \pi_{\Omega_\ell}(\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i))$ egyetlen attributumhalmazon $/(\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i)-n/$ operáló relációs kifejezés.

Az egy attributumhalmazon való hatás azért lényeges, mert az ilyen kifejezéseket tudjuk táblázatokkal interpretálni.

Mielőtt a táblázattal való interpretálást leirjuk, megmutatjuk, hogy milyen módon lehet a relációs adatbázisokat "gyenge ekvivalencia-türővé" tenni.

Legyenek egy adatbázis attributumhalmazai $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ és egy adott pillanatban az adatbázis tartalma az $R_1, \ldots, R_k$ relációk. Legyen $\#$ egy olyan jel, amely nem lehet az adatbázisban tárolt adat, legyen továbbá E egy tetszőleges relációs kifejezés. $E[R_1, \ldots, R_k]$ -t a következőképpen számolhatjuk ki: tekintsük $I' := \bowtie_{i=1}^{k} R_i$ -t és végezzük el azt az átalakitást I' -n, hogy minden i -re $/i=1,\ldots,k/$ $\pi_{\Omega_i}(I')$ nem R_i -beli sorait kicseréljük a mindenütt $\#$ -értékü sorra és az igy kapott relációkat egyesitjük. A kapott reláció I.

$E(I)$ -t kiszámoljuk és $E(I)$ /persze $E(I)$ is reláció/ minden olyan sorát töröljük, melyben szerepel $\#$.
Könnyen látható, hogy az igy kapott eredmény megegyezik $E[R_1, \ldots, R_k]$ -val.

Most leirjuk a relációs kifejezések táblázatokkal való interpretálását.

4. Definició Táblázat

Táblázat egy, a következő négy-féle jelből felépülő mátrix:

(1) változójelek /általában $\underline{a}$-val, $\underline{a}_i$-vel jelöljük/;

(2) különös változójelek /$\underline{b}$-vel, $\underline{b}_i$-vel jelöljük/;

(3) konstansjelek /$\underline{c}$-vel, $\underline{c}_i$-vel jelöljük/;

(4) blank.

Egy táblázat első sora a táblázat summája; egyedül ebben a sorban szerepelhet blank, de nem szerepelhet különös változójel.

Ezenkivül egy táblázat egy oszlopában csak az a változójel szerepelhet, ami a summa megfelelő oszlopában áll és különböző oszlopokban nem szerepelhetnek azonos változójelek vagy különös változójelek.

5. Definició Legyen T egy táblázat; jelölje S a T-ben előforduló jelek halmazát, C a konstansjelek halmazát. Feltesszük, hogy minden reláció a C elemeit használja jelekként.

Egy $\rho : S \to C$ függvény értékelése T-nek, ha $\underline{c} \in S \cap C \Rightarrow \rho(\underline{c}) = \underline{c}$.

Ha ρ értékelése T-nek és r sora T-nek, akkor $\rho(r) := (\rho(r(a)) :$ a eleme T attribum-halmazának$)$.

Ha r a summa,

akkor igy $\varrho(\tau)$ lehet τ -nél rövidebb sor — $\varrho(\tau)$ azokon az attributumokon értelmes, ahol τ értéke nem blank.

Legyen I tetszőleges reláció a T attributum-halmazán. Ekkor

$$T(I) := \{ \varrho(s) : s \text{ a } T \text{ summája, } \varrho \text{ olyan értékelése } T\text{-nek, hogy } (\forall \tau \in T)(\tau \neq s \Rightarrow \varrho(\tau) \in I) \}$$

6. Definició <u>Relációs kifejezések táblázatai</u>

A kifejezéseket a 2. Definició alapján bonyolultságuk /az alapkifejezésekből hány lépésben kaphatók/ szerint osztályozhatjuk. A kifejezések táblázatainak definiciója e bonyolultság szerint történik.

(1) Ha $E = \Omega$ /azaz E az identitás/, akkor az E egy $\Omega' \supseteq \Omega$ -n értelmezett táblázata egy sort és a summát tartalmazza;

(i) ha $A \in \Omega$, akkor a summa és a sor értéke A -ban ugyanaz a változójel;

(ii) ha $A \in \Omega' \setminus \Omega$, akkor a summa értéke A -ban blank, a soré pedig egy különös változójel.

(2) Legyen $E = \sigma_{A=\underline{c}}(E_1)$ és az E kifejezés T_1 táblázata már definiált. Az E kifejezés T táblázata T_1 -ből a következőképpen kapható:

(i) ha T_1 summájának értéke A -ban blank, vagy $\underline{c}$ -től különböző konstans, akkor $T = \emptyset$;

(ii) ha T_1 summájának értéke A -ban $\underline{c}$, akkor $T = T_1$;

(iii) ha T_1 summájának értéke A -ban az $\underline{a}$ változójel, akkor T_1 -ben $\underline{a}$-t mindenhol $\underline{c}$-vel helyettesitve, kapjuk T -t.

(3) Legyen $E = \pi_X(E_1)$ és T_1 az E_1 táblázata. T_1 summájának nem X -beli attributumokon felvett értékei helyett blank-et, T_1 soraiban pedig ugyanezen helyeken a változójelek helyett új különös változójeleket irva kapjuk az E kifejezés táblázatát.

(4) Legyen $E = E_1 \bowtie E_2$ és T_1, T_2 az E_1, E_2 olyan táblázatai, melyek attributumhalmazai egyenlők /(1), (2) és (3) alapján minden kifejezésnek, ami az egyesités müveletét nem tartalmazza, van tetszőlegesen bő attributumhalmazon táblázata és ez a tulajdonság majd nyilván öröklődik az egyesités használatára is/.

Nyilván feltehető továbbá, hogy a T_1 és T_2 által használt <u>különös változójelek különbözők</u>, valamint, hogy az azonos oszlopban előforduló <u>változójelek azonosak.</u> Az E kifejezés T táblázatát a következőképpen kapjuk:

(i) ha valamely oszlopban T_1 és T_2 summáinak értékei különböző konstansok, akkor $T = \phi$;

(ii) ha nincs olyan oszlop, melyben T_1 és T_2 summáinak értékei különböző konstansok, akkor T sorai a T_1 és T_2 sorai; T summájának értéke az A attributumon pedig a következő:

(a) ha T_1 és T_2 summáinak értéke A-n a c konstans, akkor T summájának értéke is ez;

(b) ha nem az (a) eset áll fenn, és a T_1 és T_2 summáinak valamelyike az $\underline{a}$ változójelet veszi fel A-n, akkor T summájának értéke is ez az $\underline{a}$ /ez egyértelmü, mert feltettük, hogy T_1 és T_2 summái azonos attributumon nem vehetnek fel különböző változójeleket/;

(c) végül, ha T_1 és T_2 summáinak értéke A-n blank, akkor T summája is blank A-n.

1. Tétel /[2]/ Legyen E relációs kifejezés, és T táblázata E-nek. Legyen I reláció a T attributumhalmazán.

Ekkor $T(I) = E(I)$.

/Emlékeztetünk arra, hogy ha E az $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ attributumhalmazokon operál és Ω a T attributumhalmaza, akkor $\Omega \supseteq \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$ és definició szerint $E(I) = E(\pi_{\Omega_1}(I), \dots, \pi_{\Omega_k}(I))$ /.

Bizonyitás: a bizonyitás az E bonyolultsága szerinti indukcióval $T(I)$ definiciója /5. Definició/ alapján könnyen elvégezhető. A részletek végiggondolását az olvasóra bizzuk.

□

Most definiáljuk az azonos attributumhalmazon értelmezett táblázatok közti <u>tartalmazó függvény</u> fogalmát. Ezen fogalom alapján lehet a relációs kifejezések közti ekvivalenciát "leforditani" táblázataik közti összefüggéssé.

<u>7. Definició</u> Legyenek T_1 és T_2 Ω feletti táblázatok.

Legyen továbbá Θ a T_1 sorainak a T_2 sorhalmazába való leképezése.

Azt mondjuk, hogy <u>Θ tartalmazó függvény,</u> ha

(a) ha τ sora T_1 -nek és $A \in \Omega$ -n τ értéke változójel, akkor $\Theta(\tau)$ értéke A -n vagy konstansjel, vagy változójel;

(b) ha τ és s olyan sorai T_1-nek, melyek értékei egy $A \in \Omega$ -n azonosak és ez az érték egy különös változójel, akkor $\Theta(\tau)$ és $\Theta(s)$ értékei A -n egyenlők;

(c) ha τ sora T_1-nak és τ értéke A -n a $\underline{c}$ konstansjel, akkor $\Theta(\tau)$ értéke is $\underline{c}$.

<u>2. Tétel /[2]/</u> Legyenek T_1 és T_2 Ω feletti táblázatok. Ekkor ekvivalensek:

(1) minden I Ω feletti relációra $T_2(I) \subseteq T_1(I)$ /röviden: $T_2 \subseteq T_1$ /;

(2) $\{A \in \Omega:$ T_1 summájának értéke blank$\}$= $=\{A \in \Omega:$ T_2 summájának értéke blank$\}$ és létezik $\Theta: T_1 \to T_2$ tartalmazó függvény.

Bizonyitás: (2)$\Rightarrow$(1) Legyen $\Theta: T_1 \to T_2$ egy tartalmazó függvény. Jelölje S_1 a T_1, S_2 pedig a T_2 jeleinek halmazát. Definiáljuk a $\psi: S_1 \to S_2$ függvényt úgy, hogy ha egy $\alpha \in S_1$ jel a T_1 egy τ sorának értéke az A attributumon és $\alpha' \in S_2$ a $\Theta(\tau)$ értéke A -n, akkor $\psi(\alpha) = \alpha'$. A tartalmazó függvény definiciója miatt ilyen ψ nyilván létezik. Jelölje s_i a T_i summáját $(i = 1, 2)$.

Legyen I reláció Ω -n, legyen továbbá $\varrho: S_2 \to C$ a T_2 egy tetszőleges olyan értékelése, hogy T_2 minden τ sorára $\varrho(\tau) \in I$.

Azt kell megmutatnunk, hogy létezik $\varrho': S_1 \to C$ értékelése T_1 -nek melyre $\varrho'(\tau) \in I$ minden $\tau \in T_1$ -re és $\varrho'(s_1) = \varrho(s_2)$.
Legyen $\varrho' = \varrho \circ \psi$. Ekkor $\tau \in T_1$ esetén $\psi(\tau) = \Theta(\tau)$ a $\psi(\tau)$ definiciója miatt és igy $\varrho'(\tau) = \varrho(\Theta(\tau)) \in I$.
Továbbá $\varrho(s_2) = \varrho(\psi(s_1)) = \varrho'(s_1)$.
(1)$\Rightarrow$(2) Tegyük fel most, hogy $T_2 \subseteq T_1$.
Legyen I az a reláció Ω -n, amelynek sorai a T_2 sorai; pontosabban tekintsünk egy $\varrho_2: S_2 \to C$ egy-egy értelmü függvényt, amely $S_2 \cap C$ -t elemenként helybenhagyja és legyen $I = \{ \varrho_2(\tau) : \tau$ sora T_2 -nek$\}$. Erre a ϱ_2 -ra persze $\varrho_2(s_2) \in T_2(I)$. $T_2 \subseteq T_1$ miatt tehát $\varrho_2(s_2) \in T_1(I)$, tehát van olyan $\varrho_1: S_1 \to C$ értékelése T_1 -nek, melyre $\varrho_1(\tau) \in I$, ha

τ sora T_1 -nek és $\rho_1(s_1) = \rho_2(s_2)$.

Legyen $\psi = \rho_2^{-1} \circ \rho_1 : S_1 \to S_2$. Könnyen látható, hogy ekkor a $\Theta(\tau) := (\psi(\tau(A)) : A \in \Omega)$ definicióval adott függvény tartalmazó.

□

1. Következmény Legyenek T_1 és T_2 Ω feletti táblázatok. Ekkor ekvivalensek:

(1) minden T Ω feletti relációra $T_1(I) = T_2(I)$ /röviden $T_1 \equiv T_2$ /;

(2) T_1 és T_2 summái /a változójelek esetleges "átszervezésével"/ egyenlők és léteznek

$$\Theta_1 : T_1 \to T_2 \quad \text{és} \quad \Theta_2 : T_2 \to T_1 \quad \text{tartalmazó}$$

függvények.

Ekkor Θ_i $(i=1,2)$ olyanok, hogy ha τ sor értéke egy A -n változójel, akkor $\Theta(\tau)$ értéke is változójel /a 7. Definició konstansjelet is megenged, de a forditott irányú tartalmazó függvénynél ennek a konstansjelnek nem lehetne változójel a képe/.

2. Következmény Legyen T táblázat és τ egy sora T-nek. Tegyük fel, hogy van T -nek egy másik sora, τ' úgy, hogy:

ha egy A attributumra $\tau(A) \neq \tau'(A)$, akkor $\tau'(A)$ egy, T -ben sehol máshol elő nem forduló, különös változójel.

Ekkor $T \setminus \{r\} \equiv T$

Bizonyitás: $\Theta : T \to T'$, hogy ha $p \neq r$, akkor $\Theta(p) = p$ és $\Theta(r) = r'$; és

$\Theta' : T' \to T$ az identitás;

ekkor Θ és Θ' tartalmazó függvények.

□

3. Tétel /[2]/ A táblázatok ekvivalencia-problémája NP-teljes

Bizonyitás: megmutatjuk a 3-SAT probléma Karp-redukálhatóságát a táblázatok ekvivalencia-problémájára.

Legyen $C = C_1 \wedge \dots \wedge C_q$ olyan n-változós Boole-formula, hogy $C_i = y_{i_1} \vee y_{i_2} \vee y_{i_3}$, ahol $y_{i_j} \in \{x_{i_j}, \neg x_{i_j}\}$ $(j = 1, 2, 3)$. T_1 és T_2 táblázatokat definiálunk $(n+q)$ számosságú attributumhalmazon. Minden C -ben előforduló Boole-változójelhez rögzitsünk egy-egy különös változójelet - x_i -hez $\underline{b}_i$-t.

T_1 summájának értéke $\underline{a}_i$ /változójel/ az i-edik attributumon $1 \leq i \leq q$ -re és blank az utolsó n attributum mindegyikén.

Ezenkivül T_1 -nek q sora van; $C_1, \dots, C_q$ mindegyikéhez egy-egy. Jelölje r_i a C_i sorát. A C_i -ben szereplő változójelek legyenek x_{i_1}, x_{i_2} és x_{i_3}. $1 \leq i \leq q$ esetén

r_i értéke az i -dik attributumon a_i , minden más oszlopban különös változójel úgy, hogy a $q+i_1$-, $q+i_2$- és a $q+i_3$ -dik attributumokon $\underline{b}_{i_1}$, $\underline{b}_{i_2}$ illetve $\underline{b}_{i_3}$ /az x_{i_1} -hez, x_{i_2} -höz illetve x_{i_3} -hoz rendelt különös változójelek/, egyébként Boole-változójelhez nem rögzitett különös változójel.

T_2 summája egyenlő a T_1 summájával. Ezenkivül T_2 -nek minden C_i -hez 7 sora van - annak megfelelően, hogy a C_i -beli Boole-változókat 7-féleképpen lehet úgy kiértékelni, hogy C_i igaz legyen. Tehát minden sorhoz egy C_i és a C_i változóinak egy kiértékelése tartozik, mégpedig úgy, hogy ha $C_i = y_{i_1} \vee y_{i_2} \vee y_{i_3}$ és a kiértékelés a $(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3)$, akkor a megfelelő sor értéke a_i $/1 \le i \le q/$ az i -dik attributumon; $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$ illetve $\underline{c}_3$ /konstansjelek 0,1 közül választva/ a $q+i_1$-, $q+i_2$- illetve a $q+i_3$ -dik attributumon; egyébként különös változójel.

A 2. Tétel alapján könnyen végiggondolható, hogy C akkor és csak akkor elégithető ki, ha $T_1 \supseteq T_2$.

Legyen $\mathcal{U}_1 = T_1 \bowtie T_2$ / $T_1 \bowtie T_2$ a 6. Definició (4) pontjában leirtak szerint kapható T_1 -ből és T_2 -ből/, és $\mathcal{U}_2 = T_2$. Mivel T_1 és T_2 summái egyenlők, azért minden I relációra az

$\mathcal{U}_1$ /és igy a T_1 és T_2 / attributumhalmaza felett igaz $\mathcal{U}_1(I) = T_1(I) \cap T_2(I)$.

Ezért $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2 \Leftrightarrow T_1 \supseteq T_2$.

Azaz $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2 \Leftrightarrow$ C kielégithető.

□

A 3. Tétel táblázatok ekvivalencia-problémájáról szól. Ez nem ugyanaz, mint a relációs kifejezések ekvivalencia-problémája, mert nem minden táblázat származik kifejezésből.

A 3. Tétel bizonyitása és a következő lemma alapján látható, hogy a relációs kifejezések ekvivalencia-problémája is NP-teljes.

Előbb azonban egy definició:

<u>8. Definició</u> Legyen T egy táblázat és A egy attributuma T-nek. Az A oszlopban egy szimbólum <u>ismételt</u>, ha:

(1) többször előforduló változójel, vagy

(2) többször előforduló olyan konstansjel, amely a T summájának értéke A-ban

(3) többször előforduló különös változójel

<u>Lemma</u> Ha T olyan, hogy minden oszlopában legfeljebb egy ismételt szimbólum van és a summa minden értéke /a blank-et kivéve természetesen/ valamely sorban is szerepel, akkor T egy relációs kifejezés táblázata.

Bizonyitás: T minden τ sorára legyen

$$\Omega_\tau := \left\{ A : A \text{ attributuma } T\text{-nek és } \tau(A) \text{ ismételt szimbólum vagy } \tau(A) \text{ konstansjel} \right\}$$

Tekintsük $\sigma_{A=\underline{c}}(\Omega_\tau)$ -et minden olyan $(\tau, A, \underline{c})$ hármasra, melyre τ sora T -nek, $\tau(A)=\underline{c}$ és a T summája nem a $\underline{c}$ értéket veszi fel A -n. Ezenkivül tekintsük még az $F_\tau = \pi_{\{A:(\exists \underline{c})(\sigma_{A=\underline{c}}(\Omega_\tau))\}}(\Omega)$ vetitést, ahol Ω a T attributumhalmaza. Egyesitsük az $F_\tau(\sigma_{A=\underline{c}}(\Omega_\tau))$ kifejezéseket és alkalmazzuk $\sigma_{A=\underline{c}}$ -t minden olyan $(A, \underline{c})$ -re, melyre T summájának értéke A-n $\underline{c}$. Végül vetitsünk azon attributumok halmazára, ahol T summája nem blank.

Az igy konstruált kifejezés táblázata T.

□

Következmény Relációs kifejezések ekvivalencia-problémája NP-teljes.

A következőkben leirunk egy kifejezésosztályt, az ún. egyszerü táblázatokkal interpretálható kifejezések osztályát, melynek elemei közti ekvivalencia-probléma polinom-idejü algoritmussal megválaszolható.

9. Definició A T táblázat egyszerü, ha minden A attributumára igaz a következő:

ha az A attributumon valamely különös változójel ismétlődik, akkor e szimbólumon kivül minden más jel legfeljebb egy sorban fordul elő az A oszlopban / tehát változójel szerepelhet kétszer: a summában és egy sorban/.

Példa: Legyen $\Omega = \{A, B, C, D\}$. Ekkor a

$\pi_{\{A,C\}}(\{A,B\} \bowtie \{B,C\}) \bowtie (\{A,B\} \bowtie \{B,D\})$ kifejezés táblázata

nem egyszerü.

Egyszerü táblázatok közti ekvivalenciára a következő heurisztikus algoritmust pontositjuk:

1. Legyenek T_1 és T_2 egyszerü táblázatok az Ω attributumhalmaz felett. Tegyük fel először, hogy sem T_1 -ben, sem T_2 -ben nem fordul elő ismételt különös változójel. Mivel ekvivalenciával foglalkozunk, csak olyan tartalmazó függvények érdekesek, melyek nem képeznek változójelet konstansjelre.

   Tehát, ismételt különös változójelek kizárása mellett, ilyen tartalmazó függvény létezéséhez elegendő azt vizsgálni, hogy ha τ a T_1 sora, akkor van-e τ' sora T_2 -nek, amely minden A -n változójel, ha τ az és egyenlő τ -rel, ha $\tau(A)$ konstans.

2. Azonban ha T_1 és T_2 "csak" egyszerüek, akkor előfordulhat bennük ismételt különös változójel. Tegyük fel, hogy az A oszlopban a $\underline{b}_1$ egy ismételt különös változójel a T_1 -ben. $T_1 \equiv T_2 \Leftrightarrow$ léteznek $\Theta_1 : T_1 \to T_2$ és $\Theta_2 : T_2 \to T_1$ tartalmazó függvények. Persze igy $\Theta_2 \circ \Theta_1 : T_1 \to T_1$ tartalmazó függvény. Tekintsük a T_1 azon sorait, melyek értéke A -n $\underline{b}_1$ legyen ezek halmaza S.

Két eset van:

(a) $\Theta_2 \circ \Theta_1$ S-et legalább 2 sorra képezi;

(b) $\Theta_2 \circ \Theta_1$ S minden elemét ugyanarra az r sorra képezi.

A (b) esetben az S minden sorát / r-t kivéve, ha esetleg $r \in S$/ elhagyva még T_1-gyel ekvivalens egyszerü táblázatot nyerünk, melynek A oszlopában már nem ismétlődik különös változójel.

Az (a) esetben $(\Theta_2 \circ \Theta_1)(r) \in S$, ha $r \in S$, mert T_1 egyszerü és $\underline{b}_1$ ismételt különös változójel az A oszlopban. Továbbá az S képe Θ_1-nél legalább 2 sor és ezek a sorok ugyanazt a különös változójelet veszik fel A-n /különben Θ_2 nem vihetné ezeket S-be/.

Tehát az (a) esetben a T_2-ben előfordul egy $\underline{b}_2$ különös változójel az A oszlopban <u>ismételten.</u>

E megjegyzések alapján algoritmusnak a következő: választunk egy olyan A attributumot, melyen T_1-ben ismételten előfordul egy különös változójel, $\underline{b}_1$. Tekintjük a T_1 azon sorainak S halmazát, melyek értéke A-n $\underline{b}_1$. Ha létezik $\Theta_2 \circ \Theta_1 : T_1 \to T_1$, amely S-et egyetlen sorra képezi, akkor T_1-gyel ekvivalens olyan egyszerü táblázatot konstruálhatunk, melyben az A oszlopon nincs ismételt különös változójel. Ha nincs ilyen tartalmazó függvény /és $T_1 \equiv T_2$ /, akkor T_2-ben is van $\underline{b}_2$ ismételt különös változójel az A oszlopon. Nyilvánvaló, hogy ekkor $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$

a T_1 és T_2 közti tartalmazó függvények szempontjából úgy viselkednek, mint azonos konstansok - tehát megint csak elérjük, hogy olyan táblázatot kell T_1 helyett nézni, amely továbbra is egyszerü és az A oszlopban nincs ismételt különös változójele.

Ezt a processzust minden oszlopra és T_2 -re is elvégezve, az 1. pontban leirt eljárással döntjük el az ekvivalenciát.

Ez az algoritmus polinom-idejü - ennek bizonyitása új fogalmakat és technikai jellegü lemmákat igényel.

<u>1o. Definició</u> Legyenek T_1 és T_2 táblázatok Ω felett és r a T_1, p pedig a T_2 egy sora.

Azt mondjuk, hogy <u>r fedi p -t</u>, ha minden A attributumra igaz a következő:

$p(A)$ változójel $\Rightarrow r(A)$ változójel és

$p(A)$ konstans $\Rightarrow p(A) = r(A)$.

A következő lemma világos a "fedés" és a "tartalmazó függvény" definicióiból, valamint azon tényből, hogy ekvivalens táblázatok között csak olyan tartalmazó függvények léteznek, melyek változójelnek változójelek feleltetnek meg.

<u>1. Lemma</u> Ha T_1, T_2 egyszerü, ismételt különös változójel nélküli táblázatok, akkor $T_1 \equiv T_2$ akkor és csak akkor, ha summáik egyenlők és T_1 minden sorát fedi T_2 valamely sora és forditva.

11. Definició Legyen T egyszerü táblázat, A a T egy attributuma és tegyük fel, hogy T-ben A-n ismételten előfordul egy különös változójel, b_1. Legyen $S = \{\tau : \tau$ sora T-nek és $\tau(A) = b_1\}$, és r a T egy tetszőleges sora.

Ekkor az S r-lezártja, $CL_r(S)$ az a legszükebb sorhalmaz, amelyre teljesül, hogy:

ha $x_1 \in CL_r(S)$, és x_2 olyan sora T-nek, amely valamely oszlopban az x_1-gyel azonos értéket vesz fel és ez az érték egy ismételt különös változójel és r értéke ebben az oszlopban más, akkor $x_2 \in CL_r(S)$; és $S \subseteq CL_r(S)$.

2. Lemma Legyenek T, S és r olyanok, mint a 11. Definicióban. Legyen Θ a T sorait T soraiba képező függvény a következő:

$$\Theta(x) := \begin{cases} r, & \text{ha } x \in CL_r(S); \\ x, & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor Θ tartalmazó $\Leftrightarrow$ r fedi $CL_r(S)$ minden elemét.

Bizonyitás: a definiciók alapján a bizonyitás könnyen elvégezhető.

□

Ezekután heurisztikus algoritmusunk nyilván pontosan megfogalmazható. Az algoritmus lépésszámát a következőképpen becsülhetjük meg:

1. A 2. Lemmát alkalmazzuk a T_1 minden A oszlopára, ha A -ban különös változójel előfordul ismételten: képezzük S -et és minden r sorára T_1 -nek tekintsük $CL_r(S)$-t ; ha r fedi $CL_r(S)$ -et, akkor hagyjuk el $(CL_r(S)\setminus\{r\})$-t.

2. Ennek végrehajtása után minden A oszlopra, melyben előfordul T_1 -ben ismételt különös változójel, ellenőrizzük, hogy T_2 -ben is van-e ismételt különös változójel - ha valahol "nem", akkor nem ekvivalensek; ahol "igen", ott az igy megfeleltetett különös változójeleket egy konstansjelre cseréljük.

3. Az igy kapott táblázatok közti ekvivalenciát az 1. Lemma alapján döntjük el.

1., 2. és 3.- nyilvánvaló számolás alapján - $(s \times t)$ -es táblázatokra $\theta(s^3t^2)$ lépést igényel.

Tehát bebizonyitottuk a következő tételt:

4. Tétel /[2]/ Egyszerü táblázatok ekvivalencia-problémája n hosszú input esetén $\theta(n^3)$ lépéses algoritmussal megoldható.

Végül megjegyezzük, hogy az előző fejezetben leirt vadászat-algoritmusra igaz a következő tétel /a bizonyitás nem nehéz, de részletezése elég hosszú/.

5. Tétel Legyen Σ $A'F$-ek halmaza és T egy táblázat. Alkalmazzuk a vadászat-algoritmust T -re, Σ -val.

Jelölje $\mathcal{T}'$ az algoritmus végén kapott táblázatot. Ekkor minden olyan I relációra, melyen Σ igaz,

$$\mathcal{T}(I) = \mathcal{T}'(I).$$

Irodalomjegyzék

[1] A.V.AHO, J.E. HOPCROFT, J.D. ULLMAN, The Design and Analysis of Computer Algorithms.
ADDISON-WESLEY, Reading, MA, 1974.

[2] A.V.AHO, Y.SAGIV, J.D. ULLMAN, Equivalences among relational expressions.
SIAM J.COMPUT., 8/1979/, 218-246.

[3] W.W. ARMSTRONG, Dependency structures of database relationships.
PROC. IFIP 74, North Holland /1974/, 580-583.

[4] J. DEMETROVICS -GY.GYEPESI, On the functional dependency and some generalizations of it.
ACM Trans. on Database Sys. /megjelenés alatt/.

[5] R.FAGIN, A normal form for relational databases that is based on domains and keys.
IBM Research Report RJ2520 /1979/, San Jose, California.

[6] R.FAGIN, Horn clauses and database dependencies.
IBM Research Report RJ2741 /1980/, San Jose, California.

[7] A.HAJNAL, Matematikai Logika.
ELTE egyetemi jegyzet.

[8] A.HORN, On sentences which are true on direct unions of algebras.
J. SYMBOLIC LOGIC, 16 /1951/,14-21.

[9] D.MAIER, A.MENDELZON, Y.SAGIV, Testing implications of
data dependencies.
ACM Trans. on Database Sys. 4 /1979/ 455-469.

[1o] J.R. SHOENFIELD, Mathematical Logic.
Addison-Wesley /1967/.

A TANULMÁNYSOROZATBAN 1980-BAN JELENTEK MEG:

101/1980 Gerencsér László - Hangos Katalin: Diszkrét lineáris sztochasztikus rendszerek önhangoló szabályozása

102/1980 Pásztorné Varga Katalin: Rekurziv eljárás

103/1980 Gerencsér Piroska - Szép Endre - Zilahy Ferenc Marton Zsolt: Robotmegfogók adaptivitása I.

104/1980 Knuth Előd - Radó Péter - Tóth Árpád: A SDLA előzetes ismertetése

105/1980 E. Knuth - P. Radó - A. Toth: Preliminary description of SDLA

106/1980 Prékopa András: Sztochasztikus programozási modellek és alkalmazásuk

107/1980 Kelle Péter: Megbizhatósági készletmodellek és alkalmazásuk

108/1980 Almásy Gedeon: Mérlegegyenletek és mérési hibák

109/1980 Békéssy A. - Demetrovics J. - Gyepesi Gy.: Relácios adatbázis logikai szintü vizsgálata funkcionális függőségek szempontjából

110/1980 Gaál A. - Soltész J. - Ruda M. - Ratkó I.: Tanulmányok a statisztikai adatfeldolgozásról

111/1980 Benedikt Szvetlána: Nem ismételhető döntéshozatal analizise kockázattal járó esetekben

112/1980 Verebély Pál: Többprocesszoros, osztott intelligenciáju grafikus rendszerek tervezési és megvalósitási kérdései

113/1980 V. Visegrádi Téli Iskola

114/1980 Demetrovics János: Relációs adatmodell logikai és strukturális vizsgálata

115/1980 Gergely József: Program package for sparse matrices

1981-BEN JELENTEK MEG:

116/1980 Siegler András: Egy 6 szabadságfoku antropomorf manipulátor kinematikája és számitógépes vezérlése

117/1981 Knuth Előd - Radó Péter: Principles of Computer Aided System Description

MAHIR - ROZMARING MGTSZ. - Nyomda 81.219