tanulmányok

111/1980

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

NEM ISMÉTELHETŐ DÖNTÉSHOZATAL ANALÍZISE KOCKÁZATTAL JÁRÓ ESETEKBEN

Irta:

BENEDIKT SZVETLÁNA

Tanulmányok 111/1980.

A kiadásért felelős:

DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 108 0
ISSN 0324-2951

8011533 MTA KESZ Sokszorosító, Budapest. F. v.: dr. Héczey Lászlóné

1. Bevezetés

Kockázatos döntéshozatalról akkor van szó, amikor a döntéshozónak az

$$A_i = (x_{i1}, p_{i1}; \dots x_{ij}, p_{ij}; \dots) \tag{1.1}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ alaku alternativák közül kell választania.
Az (1.1)-ben $x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{ik}$ jelöli a vizsgálandó alternativa alkalmazásának különböző lehetséges következményeit (elemi eseményeit), a p_{ij} az x_{ij} esemény bekövetkezésének a valószinüségét jelenti ($\sum_j p_{ij} = 1$).
Az élet számos területén (pl. a müszaki rendszerek irányitásánál, a természetes katasztrófák elleni harcban stb.) gyakran előfordulnak olyan szituációk, amikor a döntéshozó csupán olyan alternativák között kénytelen választani, amelyeknél kisebb-nagyobb veszteségek léphetnek fel (a különböző veszteségek fellépésének a valószinüségeit ismertnek tekintjük). Ebben az esetben az A_i döntési alternativa az (1.2) jelöléssel fejezhető ki:

$$A_i = (l_{i1}, p_{i1}; \dots l_{ij}, p_{ij} \dots) \tag{1.2}$$

ahol $l_{ij} = l(x_{ij})$ - az x_{ij} esemény bekövetkezésekor keletkező veszteséget, p_{ij} pedig az x_{ij} esemény bekövetkezésének a valószinüségét jelenti, $(i = 1, \dots n)$.
Kockázatos döntések hozatalánál az optimális döntési alternativa kiválasztása általában a matematikai várható érték kritérium alapján történik. E kritérium szerint az (1.2) tipusu alternativák közül az az A_i alternativa tekinthető optimálisnak, amely esetén a várható veszteségek értéke, azaz

$$\sum_j l_{ij} p_{ij} \tag{1.3}$$

mennyiség minimális.

Egyes konkrét szituációkban azonban a várható érték kritériumának alkalmazása a józan észnek teljesen ellentmondó döntésekhez vezet. Emiatt több szerző tagadja e kritérium univerzális voltát. (E nézetek kritikai áttekintése megtalálható [1] és [2] -ben.)

D. Kahneman és A. Tversky [3] [4] számos példát hoznak fel annak kimutatására, hogy az emberek a kockázattal járó esetekben gyakran olyan döntéseket hoznak, amelyek egyáltalán nincsenek összhangban a várható hasznosság elvével. Emiatt ezek a szerzők a kockázatos döntések leirására a várható hasznosság elmélet helyett az általuk kidolgozott elmélet (procpect theory) használatát javasolják.

Ezen elmélet több eltérést mutat az (1.3)-hoz képest. Igy például p valószinüségek helyett az alábbi feltételeknek megfelelő $\Pi(p)$ sulyozó függvények használatát javasolja (e feltételeket az emberek viselkedésének tanulmányozása alapján álitották fel).

1. $\Pi(1) = 1$
2. $\Pi(0) = 0$
3. $\Pi'(p) \geq 0$
4. $\Pi(p) > p$ kis valószinüségek tartományában.
5. $\Pi(rp) > r\Pi(p) \quad 0 > r > 1.$
6. $0 < p, q, r \leq 1$ tartományban:

$$\frac{\Pi(p \cdot q)}{\Pi(p)} \leq \frac{\Pi(pqr)}{\Pi(pr)}$$

Különösen sok probléma merül fel a várható érték kritérium alkalmazásakor az egyszeri, tehát nem ismételhető döntések esetén. A várható érték maximalizálása, illetve minimalizálása ugyanis csakis sokszor ismétlődő döntés esetén vezet a valódi érték maximalizálásához, illetve minimalizálásához, mert csak akkor érvényes a nagy számok törtvénye.

A fenti okok miatt több szerző [5], [6], [7], [8] tagadja ennek az elvnek az alkalmazhatóságát az egyszeri, nem ismételhető kockázatos döntések esetén. A. Rapaport [9] kételkedik ennek az elvnek az olyan nem ismételhető kockázatos döntésekre való alkalmazhatóságában, amelyeknél nagy szerepe van az igen kis valószinüségü véletlen eseményeknek. Jelen cikknek a szerzője kimutatta [8], hogy ha az emlitett kis valószinüségü véletlen eseményeknek sulyos negativ következményei lehetnek, a döntési alternativák a várható veszteségek minimalizálásán alapuló kiválasztása igen nagy kockázattal is járhat és ennélfogva nem felel meg az óvatossági szempontoknak. Az un. minimax kritériumnak az adott tipusu döntéseknél való alkalmazhatóságával kapcsolatban pedig a következőket állapitotta meg. Mivelhogy e kritérium a döntési alternativák értékelésénél mindig a legsulyosabb lehetséges következményeket veszi alapul és ezeket próbálja (lehetőségek szerint) minimalizálni, e kritérium alkalmazása teljes kockázatmentességet és a legnagyobb elképzelhető óvatosságot biztositja. Ugyanakkor az adott esetben, amikor az alternativák különböző negativ következményeinek a valószinüségeit ismerjük, az ilyen nagy mértékü óvatosság általában semmivel sem indokolható és tulzottnak tekinthető. Sőt, mivelhogy e kritérium a fent emlitett valószinüségeket teljesen figyelmen kivül hagyja, ennek alkalmazása a józan észnek teljesen ellentmondó döntések kiválasztását is eredményezheti (a [8] ezt az állitást példával illusztrálja). A nem ismételhető kockázatos döntéshozatal esetén tehát a várható érték kritériumának alkalmazása nem biztositja a kellő óvatosságot, a minimax kritérium ezzel szemben tul óvatosnak bizonyul. Ebből arra következtethetünk, hogy a nem ismételhető döntések esetén az optimális döntéshozatalt biztositó kritériumnak az óvatosság, és ebből kifolyólag a fellépő veszteségek valószinüségeinek figyelembevétele tekintetében közbenső helyet kell elfoglalnia a minimax és a várható érték kritériumai között. Olyan kritériumra lenne szükség, amely a minimax kritériumhoz hasonlóan a döntési választások veszélyességének értékelésénél és összehasonlitásánál fokozottabb mértékben venné figyelembe a nagyobb veszteségek lehetőségét, de az utóbbi kritériumtól eltérően a lehetséges veszteségek értékein kivül valamilyen mértékben figyelembe venné a veszteségek valószinüségeit is. A kockázattal járó, nem ismételhető döntéshozatal esetére az irodalomban javasolt kritériumok között a fenti tulajdonságokkal biró kritérium is megtalálható. Igy például Kaufmann [7]-ben, miután kifejti azt a nézetet, hogy a nem ismételhető döntések esetén nem lehet fenntartás nélkül elfogadni a matematikai várható érték kritérium használatát, a nem ismételhető kockázatos döntéshozatal egyik konkrét gyakorlati példájában az optimális döntési alternativa meghatározására az (1.4) valószinüség minimalizálásán alapuló kritériumot használja. (E kritérium szerint az az A_i alternativa tekinthető optimálisnak, azaz legkevésbé költségesnek, amelynél ez a valószinüség a legkisebb.)

$$P\,(l_i \geq l_0) \qquad (1.4)$$

A (1.4) kifejezésben l_i az A_i alternativa alkalmazásakor fellépő veszteséget (az adott esetben diszkrét valószinüségi változó), az l_0 pedig egy meghatározott veszteséget jelent (ez utóbbit maga a döntéshozó választja ki a nagyobb lehetséges veszteségek közül). E kritérium alkalmazásával kapcsolatban azonban a következő probléma merül fel.

E kritérium minden egyes döntési alternativa vizsgálatánál az alternativa veszélyességet jellemző $p_i(l) = P(l_i \geq l)$ jelleggörbe pontjai közül csakis egyetlenegy, mégpedig az l_0 abszciszszával rendelkező pontjait veszi figyelembe. Emiatt a döntés kiválasztása erősen függ az l_0 érték választásától (lásd az 1. ábrát).

Az 1. ábrán a $p_1(l)$ jelleggörbe az A_1, a $p_2(l)$ jelleggörbe pedig A_2 alternativának felel meg. Ha

$l_0 = l_A$, akkor az A_2-t,

$l_0 = l_B$, akkor az A_1-t,

$l_0 = l_C$, akkor az A_2-t,

$l_0 = l_D$, akkor az A_1-t,

$l_0 = l_E$, akkor az A_2-t választjuk ki.

Mivelhogy a szóban forgó kritériumnál az l_0 érték kiválasztása nincs elméletileg alátámasztva, a döntésnek az l_0 érték megválasztásától való erős függése e kritérium komoly hibájának tekinthető.

Az elmondottak alapján felmerült a fenti kritérium általánositásának, azaz olyan kritérium kidolgozásának a gondolata, amelynek fő célkitüzése nemcsak egy meghatározott $l = l_0$ értékhez tartozó $P(l_i \geq l_0)$ valószinüségnek, hanem általában a nagyobb l veszteségekhez tartozó $P(l_i \geq l)$ valószinüségeknek a csökkentése lenne.

Ilyen kritériumnak nyilvánvalóan a megfelelő sulyozással figyelembe kellene venni a $p_i(l) = P(l_i \geq l)$ jelleggörbének l nagyobb értékeihez tartozó pontjait.

A különböző (l, p_i) koordinátákkal rendelkező pontok sulyozása nagy mértékben függ e koordináták által determinált alternativák veszélyességének értékelésétől is. Éppen ezért az emlitett célkitüzésü kritérium felállitásának szükséges feltétele annak a kérdésnek az eldöntése, hogy a kritérium által képviselendő szemléletből kiindulva, hogyan fejezhető ki mennyiségileg a két paraméter (egy veszteségérték és egy valószinüség) által determinált alternativák veszélyessége:

$$(l,\ p;\ 0,\ 1 - p) \tag{1.5}$$

Az (1.5) kifejezés egy olyan döntési alternativa tipust jelöl, amelynél p valószinüséggel l és 1 - p valószinüséggel 0 veszteségek léphetnek fel. (Ezen alternativa az (1.2) tipusu alternativák legegyszerübb speciális esetét képezi.)

Jelen cikk éppen a fenti kérdés vizsgálatát tüzte ki célul.

2. Az (l, p; 0, 1 - p) tipusu döntési alternativák veszélyességét értékelő függvényre vonatkozO követelmények megfogalmazása a nem ismételhető döntések esetén

A cimben szereplő tipusu döntési alternativák veszélyességének értékelésénél mindenekelőtt a következő probléma merül fel.

Ez az értékelés az l és p paramétereken kivül nagy mértékben függ a döntéshozónak a kockázatvállaláshoz való viszonyától (azaz az óvatosság mértékétől) is. Arra a kérdésre azonban, hogy mi is legyen a döntéshozó "helyes" óvatosságának mértéke a nem ismételhető döntésel esetén, pontos választ nem tudunk adni. Ezzel kapcsolatban csak az alábbi két szempontot vehetjük figyelembe (e szempontok a kidolgozandó kritériummal szembeni követelményekből következnek). Az első szempont az, hogy a döntéshozó óvatosságmértékének a várható érték kritérium óvatosságmértékénél nagyobbnak, a minimax kritérium óvatosságmértékénél pedig kisebbnek kell lennie. A másik szempont az, hogy az alternativák értékelésénél fokozottabb mértékben kell figyelemmel kisérni a nagyobb veszteségek fellépéseinek a lehetőségeit. Az emlitett két korlátozás mellett is azonban a döntéshozó óvatosságának végtelenül sok fokozata lehetséges a döntéshozatal különböző objektiv és szubjektiv körülményeitől (a döntés fontossága, a veszteségek természete, a döntéshozó egyéni beállitottsága stb.) függően. Ezért nem vállalkozhatunk arra, hogy előre meghatározzuk az alternativák veszélyességét az l és p paraméterek függvényében. A fenti problémát itt az alábbi módon kiséreljük meg megoldani. A döntési alternativák veszélyességét olyan háromváltozós (mindhárom paraméter szerint differenciálható) függvénnyel próbáljuk kifejezni, ahol harmadik paraméterként a döntéshozó óvatosságmértékét kifejező mennyiség szerepel. E mennyiség értékének megválasztását magára a döntéshozóra bizzuk. Ha ilyen függvény állna a döntéshozó rendelkezésére, ez a döntéshozó óvatossági szemléletének következetes érvényesitését tenné lehetővé. Jelöljük a döntéshozó óvatosságának mértékét kifejező dimenzió nélküli mennyiséget B-vel, az (l, p, 0, 1 - p) alternativák veszélyességét kifejező függvényt pedig U(l, p, B)-vel. Ezt később többször rizikófüggvénynek nevezzük. A továbbiakban vizsgáljuk meg, hogy vajon milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie az U(l, p, B) függvénynek ahhoz, hogy ki tudja fejezni a döntéshozó óvatosságmértékének figyelembevételével az (l, p; 0, 1 - p) tipusu alternativák veszélyességét a nem ismételhető döntéseknél.

2.1 Rizikófüggvény első deriváltjai és határfeltételei

Állapodjunk meg abban, hogy a döntéshozó óvatosságmértékét kifejező B pozitiv valós szám a $(0, \infty)$ határok között változhat, éspedig ugy, hogy a nagyobb B érték az óvatosság nagyobb mértékének, $B = 0$ érték a minimális, $B = \infty$ pedig a maximális óvatosság mértékének felel meg.
Az óvatosság mértékének növelésével nyilvánvalóan az $U(l, p, B)$ értéknek is kell növekednie. Ezért az előbbiek figyelembevételével

$$U'_B(l, p, B) \geq 0 \qquad 0 \leq p \leq 1, \qquad l \geq 0, \qquad B \geq 0 \qquad (2.1)$$

A kidolgozandó kritériummal szembeni követelményekből kifolyólag a szóban forgó alternativák veszélyességének értékelése a minimális óvatosságmértéknél $(B = 0)$ a várható érték kritériuma, a maximális óvatosság mértéknél $(B = \infty)$ pedig a minimax kritérium alapján történik. Igy tehát,

$$U(l, p, 0) = lp \qquad (2.2)$$
$$l \geq 0 \qquad 0 \leq p \leq 1$$
$$U(l, p, \infty) = l \qquad (2.3)$$
$$l \geq 0, \qquad 0 < p \leq 1$$

Továbbá, tetszőleges $B \geq 0$ értéknél az $U(l, p, B)$ függvénynek az alábbi határfeltételeknek kell eleget tennie:

$$U(0, p, B) = 0 \qquad 0 \leq p \leq 1, \qquad B \geq 0 \qquad (2.4)$$
$$U(l, 1, B) = l \qquad (B \geq 0, \quad l \geq 0) \qquad (2.5)$$
$$U(l, 0, B) = 0 \qquad (B \geq 0, \quad l \geq 0) \qquad (2.6)$$

Mivelhogy a szóbanforgó alternativák veszélyessége bármilyen $B \geq 0$ értéknél mind l, mind p növelésével nyilvánvalóan növekszik, az $U(l, p, B)$ függvénynek e paraméterek szerint növekvő függvénynek kell lennie. Igy tehát

$$U'_l\,(l,\ p,\ B) \geq 0 \qquad (l \geq 0,\quad B \geq 0,\quad 0 \leq p \leq 1) \qquad (2.7)$$

$$U'_p\,(l,\ p,\ B) \geq 0 \qquad (l \geq 0,\quad B \geq 0,\quad 0 \leq p \leq 1) \qquad (2.8)$$

2.2 A várható veszteségeknél nagyobb veszteségek előfordulásának figyelembevétele

Ha a $B > 0$ és B véges, akkor a veszteségek várható értékén ($l\,p$ érték) kivül figyelembe kell vennünk a várható értéktől való lehetséges pozitiv eltéréseknek a valószinüségeit is, mégpedig annál nagyobb mértékben, minél nagyobb a B érték. E valószinüségek a Csebisev-egyenlőtlenség alapján becsülhetők. Jelöljük a szóban forgó tipusu alternativa esetén fellépő veszteségeket kifejező változót ξ-vel, a veszteségek várható értékét $M(\xi)$-vel, szórását peig $D(\xi)$-vel. E jelölésekkel a Csebisev-egyenlőtlenség az alábbi módon fejezhető ki:

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2} \qquad (2.9)$$

ahol ε tetszőleges pozitiv szám.
A (2.9)-ből az következik, hogy

$$P(\xi - M(\xi) \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\xi^2)}{\varepsilon^2} \qquad (2.10)$$

Ha ε helyébe $\varepsilon M(\xi)$-t helyettesitünk, akkor alkalmas átalakitással végül a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$P\left(\frac{\xi - M(\xi)}{M(\xi)} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{D(\xi)}{M(\xi)}\right)^2 \qquad (2.11)$$

A (2.11)-ben szereplő $\frac{D(\xi)}{|M(\xi)|}$ hányadost relativ szórásnak szokták nevezni. Jelöljük a relativ szórást v-vel, ennek négyzetét pedig w-vel. Igy tehát:

$$v = \frac{D(\xi)}{|M(\xi)|} \qquad (2.12)$$

$$w = v^2 = \left(\frac{D(\xi)}{M(\xi)}\right)^2 \qquad (2.13)$$

A (2.11)-ben szereplő $\frac{\xi - M(\xi)}{M(\xi)}$ hányados tulajdonképpen a várható értéktől való relativ pozitiv eltérést jelenti. Jelöljük ezt az értéket λ-val. Igy tehát

$$\lambda = \frac{\xi - M(\xi)}{M(\xi)} \qquad (2.14)$$

A fenti jelölésekkel a (2.11) egyenlőtlenség az alábbi módon alakul:

$$P(\lambda \geq \varepsilon) \leq \frac{w}{\varepsilon^2} \qquad (2.15)$$

A (2.15) egyenlőtlenség a várható értéktől való különböző relativ nagyságu pozitiv eltéréseknek a valószinüségeit becsüli. A (2.15) értelmében azonos ε érték mellett a $P(\lambda \geq \varepsilon)$ valószinüség annál nagyobb értéket vehet fel, minél nagyobb a valószinüségi változó relativ szórásának a négyzete.
A fentiek alapján felmerült az a gondolat, hogy a szóban forgó tipusu döntési alternativák veszélyességének kifejezése céljából a várható veszteségek értékét meg kell szorozni a relativ szórásnégyzetétől és a B értékétől függő és amellett a (2.17)-(2.19) feltételeket kielégitő szorzóval.
Igy tehát $B > 0$ esetén:

$$U(l, p, B) = lp\, m(w, B) \qquad (2.16)$$

ahol $m'_w(w, B) \geq 0 \quad (B > 0, \quad w > 0) \qquad (2.17)$

$m'_B(w, B) \geq 0 \quad (B > 0, \quad w > 0) \qquad (2.18)$

$m(0, B) = 1 \qquad (2.19)$

Az m szorzóra további megkötéseket kaphatunk az alábbi valószinüségszámitási gondolatmenet alapján.

Itt mindenekelőtt figyelembe kell venni azt, hogy a szóban forgó tipusu alternativák esetén a veszteségek relativ szórásának négyzete kizárólag a p valószinüség értékétől függ. Ebben az esetben ugyanis

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = l^2p - l^2p^2 = l^2p^2(\frac{1}{p} - 1) \qquad (2.20)$$

$$w = \left(\frac{D(\xi)}{M(\xi)}\right)^2 = \frac{D^2(\xi)}{M^2(\xi)} = \frac{l^2p^2(\frac{1}{p} - 1)}{l^2p^2} = \frac{1}{p} - 1$$

Igy tehát

$$w = w(p) = \frac{1}{p} - 1 \qquad (2.21)$$

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$K(p, B) = m(w(p), B) \qquad (2.22)$$

Figyelembe véve, hogy w(p) differenciálható függvény, (2.17), (2.18) és (2.22)-ből következik, hogy a K(p, B) függvény mindkét paraméter szerint legalább egyszer differenciálható.
A (2.16), (2.21) és (2.22) egybevetéséből az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$U(l, p, B) = lp\ K(p, B) \qquad (2.23)$$

Figyelembe véve egyrészt a (2.17)-(2.18) követelményeket, másrészt pedig a (2.15) egyenlőtlenséget, megállapitjuk azokat a feltételeket, amelyeket a K(p, B) függvénynek ki kell elégiteni ahhoz, hogy kellőképpen figyelembe tudja venni, hogy milyen hatást gyakorolnak a szóban forgó döntési alternativák veszélyességére a $P(\lambda \geq \varepsilon)$ valószinüségek.
1. A (2.17), (2.21) és (2.22) egybevetéséből

$$K'_p(p, B) \leq 0 \qquad (2.24)$$

$$(0 \leq p \leq 1, \qquad B > 0)$$

2. A (2.18) és(2.22) egybevetéséből

$$K'_B(p, B) \geq 0 \tag{2.25}$$

$(B > 0, \quad 0 \leq p < 1)$

3. A (2.19), (2.21) és (2.22) egybevetéséből

$$K(1, B) = m[w(1), B] = m(0, B) = 1 \tag{2.26}$$

4. A (2.21) és (2.22) figyelembevételével véges B > 0 esetén:

$$K'_p(p, B)|_{p=1} = m'_w(w(p), B)|_{p=1} \cdot w'(p)|_{p=1} = \tag{2.27}$$

$$= m'_w(w, B)|_{w=0} \cdot w'(p)|_{p=1}$$

A (2.21) alapján

$$w'(p)|_{p=1} = -2 \tag{2.28}$$

Az $m'_w(w, B)|_{w=0}$ értéke a (2.15) egyenlőtlenség segitségével állapitható meg. A $w \approx 0$ tartományban, ahogyan ez a (2.15)-ből látható, a várható veszteségértéknél lényegesen nagyobb veszteség bekövetkezésének a valószinüsége végtelenül kicsi. Mivel adott esetben a fő hangsulyt éppen a nagyobb veszteségek fellépési lehetőségeinek figyelembevételére helyezzük, eltekintve a $B = \infty$ esettől, a $P(\lambda \geq \varepsilon)$ valószinüségeknek a választások veszélyességére való hatását elhanyagolhatjuk. Véges B esetén tehát:

$$m(w, B) = 1 \tag{2.29}$$
$$w \approx 0$$

Figyelembevéve a (2.19)-t, a (2.29)-ből az következik, hogy

$$m'_w(w, B)|_{w=0} = 0 \tag{2.30}$$

$B \geq 0$, B véges

A (2.27), (2.28) és (2.30) egybevetéséből:

$$K'_p(p, B)\Big|_{p=1} = 0 \qquad (2.31)$$

$B \geq 0$, B véges

5. A (2.22)-ből:

$0 < a \leq 1$ és $B > 0$ tartományban határátmenettel

$$\lim_{p\to 0} \frac{K(p, B)}{K(ap, B)} = \lim_{p\to 0} \frac{m(w(p), B)}{m(w(ap), B)} \qquad (2.32)$$

adódik.
Ugyanakkor a (2.21) alapján:

$$\lim_{p\to 0} w(p) = \infty \qquad (2.33)$$

$$\lim_{p\to 0} w(ap) = \infty$$

A $w\to\infty$ esetén, ahogyan ez a (2.15) egyenlőtlenségből látható, a várható veszteségeknél sokkal nagyobb veszteségek (beleértve a végtelenül nagy veszteségeket is) fellépésének a valószinüségei is eléggé nagy értékeket vehetnek fel.
Mivelhogy az adott esetben a fő hangsulyt éppen a nagyobb veszteségek fellépésére helyezzük, a fentiek alapján ésszerünek látszik a következő feltevés elfogadása.
Ha az $(l, p; 0, 1 - p)$ és $(l', p'; 0, 1 - p)$ alternativák esetén a várható veszteségek értéke megegyezik, azaz

$$lp = l'p' \qquad (2.34)$$

akkor az $U(l, p, B)$ és $U(l', p', B)$ függvények hányadosa $p\to 0$

esetén ez alternativákhoz hozzátartozó $P(\lambda \geq \varepsilon)$ valószinüségek lehetséges felső határainak hányadosához tart (feltéve, hogy $B > 0$).
A (2.15), (2.34), valamint (2.36) jelölést figyelembevéve, ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{p \to 0} \frac{U(1, p, B)}{U(\frac{1}{a}, ap, B)} = \lim_{p \to 0} \frac{w(p)}{w(ap)} \tag{2.35}$$

ahol

$$a = \frac{p'}{p} = \frac{1}{1'} \tag{2.36}$$

A (2.23), (2.34), (2.20)-ból és a (2.35) egyenlőségekből az következik, hogy $B > 0$-nál

$$\lim_{p \to 0} \frac{m(w(p), B)}{m(w(ap), B)} = \lim_{p \to 0} \frac{w(p)}{w(ap)} = \lim_{p \to 0} \frac{\frac{1}{p} - 1}{\frac{1}{ap} - 1} = a \tag{2.37}$$

A (2.37)-nek a (2.32)-vel való egybevetéséből az következik, hogy $B > 0$ esetén

$$\lim_{p \to 0} \frac{K(p, B)}{K(ap, B)} = a \tag{2.38}$$

6. A $K(p, B)$ függvény (2.31), (2.38) tulajdonságai együttvéve azt fejezik ki, hogy ha $a \approx 1$, akkor ahhoz, hogy a várható értéknél nagyobb veszteségeket figyelembe lehessen venni, szükséges, hogy a $\frac{K(p, B)}{K(ap, B)}$ hányados értéke 1-ről a-ra csökkenjen, miközben p valószinüségi értéke $p = 1$-ről $p = 0$-ra csökken. Ahhoz, hogy az emlitett veszteségek előfordulását az ($a \approx 1$, $p \approx 0$) esetén kivül figyelembe tudjuk venni az a és p egész értelmezési tartományban ($0 < p \leq 1$, $0 < a \leq 1$) szükséges, hogy a $\frac{K(p, B)}{K(ap, B)}$ hányados (a = const mellett) a p csökkentésével monoton csökkenjék. Mivel a $K(p, B)$ és a $K(ap, B)$ függvények differenciálhatók, és a $K(ap, B)$ függvény a fenti tartományban sehol sem zérus, a $\frac{K(p, B)}{K(ap, B)}$ hányados is differenciálható. Emiatt a

fenti követelmény a következőképpen fejezhető ki:

$$\left(\frac{K(p,\ B)}{K(ap,\ B)}\right)'_p \geq 0 \qquad (2.39)$$

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$f(p,\ B) = p\ K(p,\ B) \qquad (2.40)$$

A (2.40) jelölést használva (2.23)-ból

$$U(l,\ p,\ B) = l\ f(p,\ B) \qquad (2.41)$$

Az f(p, B) függvényt a továbbiakban többször sulyozó függvénynek nevezzük.

A következőkben az U(l, p, B), valamint a K(p, B) függvényre vonatkozó követelmények alapján megvizsgáljuk az f(p, B) függvényre vonatkozókat. Utána pedig megkeressük az ezeket a követelményeket kielégitő f(p, B) függvényt.

2.3 Az f(p, B) függvényre vonatkozó feltételek megfogalmazása

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$g(a,\ p,\ B) = \left(\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)}\right)^B \qquad (2.42)$$

$0 \leq p \leq 1$

$0 \leq a \leq 1$

$B \geq 0$

FELTÉTELEK A KERESENDŐ FÜGGVÉNYRE

a) $f(1,\ B) = 1 \qquad B \geq 0$

b) $f(0,\ B) = 0 \qquad B \geq 0$, B - véges

c) f(p, B)a ($0 \leq p \leq 1$, $B \geq 0$) tartományban p szerint legalább egyszer folytonosan differenciálható függvény legyen. Ebben a tartományban:

$$f'_p(p,\ B) > 0$$

d) $f'_p(p,\ B)\big|_{p=1} = 1 \qquad (B \geq 0$, B - véges)

e) $f(p, B)$ a $(0 \leq p \leq 1, B \geq 0)$ tartományban B szerint legalább egyszer folytonosan differenciálható függvény legyen. Ebben a tartományban:

$$f'_B(p, B) > 0$$

f) $f(p, 0) = p \qquad (0 \leq p \leq 1)$

g) $f(p, \infty) = 1 \qquad (0 < p \leq 1)$

h) $\lim\limits_{p \to 0} g(a, p, B) = 1 \qquad (0 < a \leq 1, B \geq 0)$

i) $g(a, p, B)$ a $(0 < p \leq 1, 0 < a \leq 1, B \geq 0)$ tartományban p szerint legalább egyszer folytonosan differenciálható függvény legyen. Ebben a tartományban:

$$g'_p(a, p, B) \geq 0$$

A FELTÉTELEK INDOKOLÁSA

a) A (2.5) és (2.41) együttes figyelembevétele alapján:

$$f(1, B) = \frac{U(1, 1, B)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$B \geq 0, \qquad 1 \geq 0$

b) A (2.6) és(2.40) alapján:

$$f(0, B) = \frac{U(1, 0, B)}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$B \geq 0, \qquad 1 \geq 0$

c) A (2.8) és (2.41) alapján:

$$f'_p(p, B) = \frac{U'_p(1, p, B)}{1} \geq 0$$

$0 \leq p \leq 1$

$1 \geq 0$

$B \geq 0$

d) A (2.40) és (2.31)-ből:

$$f'_p(p, B)|_{p=1} = K(1, B) + K'_p (p, B)|_{p=1} = K(1, B) \qquad (2.43)$$

A (2.40) figyelembevételével az a) feltételből következik, hogy

$$K(1, B) = 1 \qquad (2.44)$$

A (2.43) és (2.44) egybevetéséből:

$$f'_p (p, B)|_{p=1} = 1$$

e) E feltétel a (2.1) és (2.41) egybevetéséből következik:

f) A (2.2) és (2.41) alapján:

$$f(p, 0) = \frac{U(1, p, 0)}{1} = \frac{1p}{1} = p$$

$0 \leq p \leq 1, \qquad 1 \geq 0$

g) A (2.3) és (2.41) alapján:

$$f(p, \infty) = \frac{U(1, p, \infty)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$0 < p \leq 1; \quad 1 \geq 0$

h) A (2.42) és (2.40) alapján:

$$g(a, p, B) = \left(\frac{p\ K(p, B)}{a\ p\ K\ (ap, B)} \right)^B = a^{-B} \left(\frac{K(p, B)}{K(ap, B)} \right)^B \qquad (2.44)$$

A (2.38) felhasználásával a (2.44)-ből az következik, hogy B > 0 esetén:

$$\lim_{p\to 0} g(a,\ p,\ B) = a^{-B} \cdot \lim_{p\to 0} \left(\frac{K(p,\ B)}{K(ap,\ B)}\right)^{B} =$$

$$= a^{-B} \left(\lim_{p\to 0} \frac{K(p,\ B)}{K(ap,\ B)}\right)^{B} = a^{-B} \cdot a^{B} = 1 \qquad (2.45)$$

Ugyanakkor az f) feltétel teljesitése esetén:

$$g(a,\ p,\ 0) = \left(\frac{f(p,\ 0)}{f(ap,\ 0)}\right)^{0} = \left(\frac{1}{a}\right)^{0} = 1 \qquad (2.46)$$

$0 \leq p \leq 1$

Ebből viszont az következik, hogy tetszőleges $B \geq 0$ értéknél:

$$\lim_{p\to 0} g(a,\ p,\ B) = 1 \qquad (2.47)$$

i) A (2.44) egyenlőség alapján:

$$g'_p\ (a,\ p,\ B) = B\ a^{-B} \left(\frac{K(p,\ B)}{K(ap,\ B)}\right)^{B-1} \cdot \left(\frac{K(p,\ B)}{K(ap,\ B)}\right)'_p \qquad (2.48)$$

A (2.39) feltétel figyelembevételével a (2.48) egyenlőségből az következik, hogy a ($0 < p \leq 1$, $0 < a \leq 1$) tartományban

$$g'_p\ (a,\ p,\ B) \geq 0 \qquad (2.49)$$

3. Az a)-i) feltételeket kielégitő f(p, B) függvény megadása

Tétel

Az a), b), d), f), g), h) és i) feltételeknek csakis az alábbi tipusu függvény tehet eleget:

$$f(p,\ B) = [1 - B \ln p\ y(p,\ B)]^{-\frac{1}{B}} \qquad (3.1)$$

ahol y(p, B) az alábbi tulajdonságokkal rendelkező függvény:

$$y(1, B) \equiv 1 \tag{3.2a}$$

$$\lim_{p\to 0} y(p, B) = z(B) \tag{3.2b}$$

$$(z(0) = 1 \quad \text{és} \quad z(\infty) = 1)$$

$$\lim_{B\to 0} y(p, B) = 1 \tag{3.2c}$$

$$\lim_{B\to \infty} y(p, B) = 1 \tag{3.2d}$$

E tételt három lemma segitségével bizonyithatjuk be:

1. lemma

Az a), b), f), g), h) és i) feltételeknek a ($0 < p \leq 1$, $0 < a \leq 1$) tartományban eleget tevő $f(p, B)$ függvénynek szükségképpen ki kell elégitenie az alábbi függvényegyenletet:

$$\frac{1}{f^B(ap, B)} = \frac{1}{f^B(p, B)} + \frac{1}{f^B(a, B)} - S(a, p, B) \tag{3.3}$$

ahol $S(a, p, B)$ az alábbi tulajdonságokkal rendelkező függvény:

$$S(a, p, B) = S(p, a, B) \tag{3.4a}$$

$$S(1, p, B) \equiv 1 \qquad 0 < p \leq 1 \qquad B > 0 \tag{3.4b}$$

$$S(a, 1, B) \equiv 1 \qquad 0 < a \leq 1 \qquad B > 0 \tag{3.4c}$$

$$S(a, p, 0) \equiv 1 \qquad 0 < a \leq 1 \qquad 0 < p \leq 1 \tag{3.4d}$$

$$\lim_{p\to 0} [S(a, p, B) \cdot f^B(p, B)] = \lim_{a\to 0} [S(a, p, B) \cdot f^B(a, B)] = 0 \tag{3.4e}$$

$$\lim_{B\to\infty} [S(a, p, B) \cdot f^B(p, B)] = \lim_{B\to\infty} [S(a, p, B) \cdot f^B(a, B)] = 0 \tag{3.4f}$$

$0 \leq p < 1 \qquad 0 \leq a < 1$

$0 \leq a \leq 1 \qquad 0 \leq p \leq 1$

Bizonyitás

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$\phi(a, p, B) = \frac{g(a, p, B)}{g(a, 1, B)} = \frac{\left(\frac{f(p, B)}{f\ ap, B}\right)^B}{\left(\frac{f(1, B)}{f(a, B)}\right)^B} \tag{3.5}$$

A $\phi(a, p, B)$ függvény fenti definiciójából, valamint az a), f), h) és i) feltételekből az következik, hogy

$$\phi(1, p, B) \equiv 1 \qquad (0 < p \leq 1, \quad B > 0) \tag{3.6a}$$

$$\phi(a, 1, B) \equiv 1 \qquad (0 < a \leq 1, \quad B > 0) \tag{3.6b}$$

$$\phi(a, 0, B) \equiv f^B(a, B) \qquad (0 < a \leq 1, \quad B > 0) \tag{3.6c}$$

$$\phi(0, p, B) \equiv f^B(p, B) \qquad (0 < p \leq 1, \quad B > 0) \tag{3.6d}$$

$$\phi(a, p, 0) \equiv 1 \qquad (0 < p \leq 1, \quad 0 < a \leq 1) \tag{3.6e}$$

$$\phi(a, p, \infty) \equiv 1 \qquad (0 < p < 1, \quad 0 < a < 1) \tag{3.6f}$$

A (3.5)-ből látható az is, hogy a $\phi(a, p, B)$ az a és p szerint szimmetrikus függvény. Igy tehát,

$$\phi(a, p, B) = \phi(p, a B) \tag{3.7}$$

A (3.6a) és (3.6c) tulajdonságokból az a) feltételt kihasználva $\phi(a, p, B)$ az alábbi formában irható fel:

$$\phi(a, p, B) = f^B(a, B) + m(a, p, B) \tag{3.8}$$

ahol

$$m(a, 0, B) = m(1, p, B) = m(a, p, 0) = m(a, p, \infty) = 0 \qquad (3.9)$$

A (3.7) egyenlőség figyelembevételével a (3.9) egyenlőségből az következik, hogy

$$\phi(a, p, B) = f^B(p, B) + m(p, a, B) \qquad (3.10)$$

A (3.10) és (3.7) egyenlőségek egybevetéséből az következik, hogy

$$m(a, p, B) - m(p, a, B) = f^B(p, B) - f^B(a, B) = [f^B(p, B) -$$

$$- n^B(a, p, B)] - [f^B(a, B) - n^B(p, a, B)], \qquad (3.11)$$

ahol

$$n(a, p, B) = n(p, a, B) \qquad (3.12)$$

(tehát $n(a, p, B)$ - a és p szerint szimmetrikus függvény). A (3.11) egyenlőség figyelembevételével adjuk meg az n függvényt az alábbi formában:

$$m(a, p, B) = f^B(p, B) - n^B(a, p, B) \qquad (3.13)$$

A (3.13) egyenlőséget a (3.8) képletbe behelyettesitve az alábbi függvényegyenlethez jutunk:

$$\phi(a, p, B) = f^B(a, B) + f^B(p, B) - n^B(a, p, B) \qquad (3.14)$$

Az a), f) és g) feltételek figyelembevételével a (3.14) és (3.6a)-(3.6f) egyenlőségekből az alábbi egyenlőségek következnek:

$$n^B(1, p, B) = f^B(p, B) \qquad 0 < p \leq 1 \qquad B > 0 \qquad (3.15a)$$

$$n^B(a, 1, B) = f^B(a, B) \qquad 0 < a \leq 1 \qquad B > 0 \qquad (3.15b)$$

$$n^B(a, 0, B) = 0 \qquad 0 < a \leq 1 \qquad B > 0 \tag{3.15c}$$

$$n^B(0, p, B) = 0 \qquad 0 < p \leq 1 \qquad B > 0 \tag{3.15d}$$

$$\lim_{B \to 0} n^B(a, p, B) = 1 \qquad 0 < a \leq 1 \qquad 0 < p \leq 1 \tag{3.15e}$$

$$\lim_{B \to \infty} n^B(p, a, B) = 0 \qquad 0 < a < 1, \qquad 0 < p < 1 \tag{3.15f}$$

Az a), b), f) és g) feltételek figyelembevételével a (3.15a)-(3.15f) feltételeket kielégitő függvény a következő módon irható fel:

$$n^B(a, p, B) = f^B(p, B) \cdot f^B(a, B) \cdot S(a, p, B) \tag{3.16}$$

ahol az $S(a, p, B)$ a (3.4a)-(3.4f) tulajdonságokkal rendelkező függvény.
A (3.16) egyenlőséget a (3.14)-be behelyettesitve azt kapjuk, hogy

$$\phi(a, p, B) = f^B(a, B) + f^B(p, B) - f^B(p, B) \cdot f^B(a, B) \cdot S(a, p, B) \tag{3.17}$$

Ha a fenti egyenlet mindkét oldalát elosztjuk az $f^B(a, B) \cdot$ $\cdot\, f^B(p, B)$ szorzattal (a $0 < p \leq 1$, $0 < a \leq 1$ tartományban $f^B(a, B) \cdot f^B(p, B) \neq 0$), akkor a (3.5) jelölés és a feltétel figyelembevételével az egyszerüsitések elvégzése után az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\frac{1}{f^B(ap, B)} = \frac{1}{f^B(p, B)} + \frac{1}{f^B(a, B)} - S(a, p, B) \tag{3.18}$$

Ezzel az 1. lemma összes állitását bebizonyitottuk.

<u>2. lemma</u>

A (3.18) függvényegyenletnek és a d) feltételnek egyidejüleg csakis az alábbi tipusu függvény tehet eleget:

$$f(p, B) = [1 - B \ln p\, y(p, B)]^{-\frac{1}{B}} \quad (3.19)$$

ahol $y(p, B)$ az alábbi tulajdonságokkal rendelkező függvény:

$$y(1, B) \equiv 1 \quad (3.20a)$$

$$\lim_{p \to 0} y(p, B) = z(B) \quad (3.20b)$$

$$\lim_{B \to 0} [B\, y(p, B)] = 0 \quad (3.20c)$$

$$\lim_{B \to \infty} y(p, B) = 1 \quad (3.20d)$$

Bizonyitás

Vezessük be az alábbi segédfüggvényeket:

$$h(p, B) = \frac{1}{f^{B}(p, B)} - 1 \quad (3.21)$$

$$T(a, p, B) = 1 - S(a, p, B) \quad (3.22)$$

A (3.21) és (3.22) segédfüggvények felhasználásával a (3.18) függvényegyenlet az egyszerüsitések elvégzése után az alábbi függvényegyenletté alakul át:

$$h(ap, B) = h(p, B) + h(a, p) + T(a, p, B) \quad (3.23)$$

ahol

$$T(a, p, B) = T(p, a, B) \quad (3.24a)$$

$$T(1, p, B) = T(a, 1, B) \equiv 0 \quad (3.24b)$$

$$T(a, p, 0) \equiv 0 \quad (3.24c)$$

$$\lim_{p \to 0} [T(a, p, B) \cdot f^B(p, B)] = \lim_{a \to 0} [T(a, p, B) \cdot f^B(a, p)] = 0 \qquad (3.24d)$$

$$\lim_{B \to \infty} [T(a, p, B) \cdot f^B(p, B)] = \lim_{B \to \infty} [T(a, p, B) \cdot f^B(a, B)] = 0 \qquad (3.24e)$$

$0 < p < 1 \qquad 0 < a < 1$

$0 < a \leq 1 \qquad 0 < p \leq 1$

Figyelembe véve az f(p, B) függvénnyel szemben támasztott feltételeket, a h(p, B) függvénynek az alábbi tulajdonságokkal is kell rendelkeznie:

$$h(1, B) = 0 \qquad (3.25a)$$

$$h(0, B) = \infty \qquad (3.25b)$$

$$h'_p(p, B) < 0 \qquad (3.25c)$$

$$h'_p(p, B)\big|_{p=1} = -B \qquad (3.25d)$$

$$h(p, 0) = 0 \qquad (3.25e)$$

$$h(p, \infty) = \infty \qquad (3.25f)$$

Könnyen bebizonyitható, hogy a

$$h(p, B) = -B \ln p \qquad (3.26)$$

függvény kielégiti a (3.25a)-(3.25f) feltételek mindegyikét. Ugyanakkor kielégiti a (3.23) függvényegyenletet is. A (3.26) függvény esetén ugyanis a (3.23) függvényegyenletben $T(a, p, B) \equiv 0$ lesz, ami nem mond ellent a (3.24a)-(3.24e) feltételeknek. Mindebből az következik, hogy a h(p, B) függvény a következő módon fejezhető ki:

$$h(p, B) = -B \ln p \; y(p, B) \qquad (3.27)$$

ahol $y(p, B)$ olyan kétváltozós függvény, amelyből nem lehet szorzóként kiemelni a $(-B \ln p)^{-1}$ függvényt.
Ebben az esetben, figyelembe véve a (3.21) egyenletet, a keresendő $f(p, B)$ függvény az alábbi módon fejezhető ki:

$$f(p, B) = [1 - B \ln p \, y(p, B)]^{-\frac{1}{B}} \tag{3.28}$$

Vizsgáljuk most meg, vajon milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie az $y(p, B)$ függvénynek ahhoz, hogy a (3.27) kifejezés által meghatározott $h(p, B)$ függvény eleget tegyen a (3.23) és a (3.25a)-(3.25f) feltételeknek.
A (3.27) egyenlőség alapján:

$$h'_p(p, B)\big|_{p=1} = -B \, y(1, B) \tag{3.29}$$

A (3.25d) feltételt figyelembe véve a (3.29) egyenlőségből az alábbi egyenlőség következik:

$$y(1, B) \equiv 1 \tag{3.30}$$

A (3.27) egyenlőség felhasználásával a (3.23) egyenlet az alábbi egyenletté alakul át:

$$-B \ln p[y(ap, B) - y(p, B)] - B \ln a[y(ap, B) - y(a, B)] =$$

$$= T(a, p, B) \tag{3.31}$$

Szorozzuk a (3.31) egyenlet mindkét oldalát $f^B(p, B)$ függvénnyel. Ebben az esetben, figyelembe véve a (3.21) és (3.27) egyenlőségeket, az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\frac{-B \ln p[y(ap, B) - y(p, B)]}{1 - B \ln p \, y(p, B)} + \frac{-B \ln a[y(ap, B) - y(a, B)]}{1 - B \ln p \, y(p, B)} =$$

$$= f^B(p, B) \cdot T(a, p, B) \tag{3.32}$$

Ha $p \to 0$, akkor a (3.32) egyenlet jobb oldala a (3.24d) feltétel alapján zérushoz tart. Ugyanugy tart zérushoz az egyenlet bal oldalának második komponense is. Az egyenlőséghez tehát szükséges, hogy $p \to 0$ esetén az egyenlet bal oldalának első komponense is tartson zérushoz. Ez azt jelenti, hogy az alábbi egyenlőségeknek kell fennállnia:

$$\lim_{p \to 0} \frac{-B \ln p[y(ap, B) - y(p, B)]}{1 - B \ln p\, y(p, B)} = 0 \tag{3.33}$$

Mivelhogy

$$\lim_{p \to 0} \frac{-B \ln p[y(ap, B) - y(p, B)]}{1 - B \ln p\, y(p, B)} = \lim_{p \to 0} \frac{y(ap, B) - y(p, B)}{y(p, B)} =$$

$$= \lim_{p \to 0} \left(\frac{y(ap, B)}{y(p, B)} - 1 \right) \tag{3.34}$$

A (3.33) egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha

$$\lim_{p \to 0} \frac{y(ap, B)}{y(p, B)} = 1 \tag{3.35}$$

A (3.35) egyenlőség viszont akkor és csakis akkor lehet igaz, ha

$$\lim_{p \to 0} y(p, B) = \lim_{p \to 0} y(ap, B) = z(B) \tag{3.36}$$

ahol $z(B)$ a B tetszőleges függvénye.
Abban az esetben, ha $B \to \infty$, akkor a (3.32) egyenlet jobb oldala a (3.24e) feltétel alapján zérushoz tart. Ahhoz, hogy a bal oldala is tartson zérushoz, az alábbi egyenlőségeknek kell fennállniuk:

$$\lim_{B \to \infty} \frac{y(ap, B) - y(p, B)}{y(p, B)} = \lim_{B \to \infty} \frac{\ln a[y(ap, B) - y(a, B)]}{\ln p\, y(p, B)} = 0$$

A fenti egyenlőségek viszont akkor és csakis akkor állnak fenn, ha

$$\lim_{B\to\infty} y(p,\ B) = \lim_{B\to\infty} y(ap,\ B) = \lim_{B\to\infty} y(a,\ B) = C \qquad (3.37)$$

ahol C p-től és B-től független constans.
A (3.30) feltételt figyelembe véve az alábbi egyenlőségnek kell fennállnia:

$$C = 1 \qquad (3.38)$$

A (3.37) és(3.38) egyenlőségek egybevetéséből az következik, hogy

$$\lim_{B\to\infty} y(p,\ B) = 1 \qquad (3.39)$$

Abban az esetben, ha $B\to 0$, a (3.31) egyenlet jobb oldala a (3.24c) feltétel alapján zérussá válik. Ahhoz, hogy az egyenlet bal oldala is bármilyen p-nél és a-nál zérushoz tartson, szükséges, hogy az alábbi állitás legyen igaz:

$$\lim_{B\to 0} [B\ y(p,\ B)] = 0 \qquad (3.40)$$

Ezzel a 2. lemma összes állitását bebizonyitottuk.

3. lemma

Ahhoz, hogy a (3.1) egyenlet által determinált f(p, B) függvény eleget tegyen az f) követelménynek is, az szükséges, hogy az ott szereplő y(p, B) függvény az alábbi feltételt elégitse ki:

$$y(p,\ 0) \equiv 1 \qquad (3.41)$$

Bizonyitás

A (3.1) egyenlet alapján:

$$\lim_{B\to 0} f(p,\ B) = \lim_{B\to 0} [1 - B \ln p\ y(p,\ B)]^{-\frac{1}{B}} =$$

$$= \lim_{B\to 0} \left\{ \left[1 - B \ln p\ y(p,\ B)\right]^{-\frac{1}{B \ln p\ y(p,\ B)}} \right\}^{\ln p\ y(p,\ B)} \qquad (3.42)$$

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$x = -\frac{1}{B \ln p\, y(p, B)} \tag{3.43}$$

A (3.40) feltétel alapján $B \to 0$ esetén $x \to -\infty$.
A fentieket figyelembe véve a (3.42) összefüggésből az következik, hogy

$$\lim_{B \to 0} f(p, B) = \lim_{x \to -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\ln p\, y(p, 0)} = \left(e^{\ln p}\right)^{y(p, 0)} =$$

$$= p^{y(p, 0)} \tag{3.44}$$

A (3.44) összefüggésből következik, hogy az $f(p, B)$ függvény akkor és csakis akkor tesz eleget az f) követelménynek is, ha

$$y(p, 0) \equiv 1 \tag{3.45}$$

Ezzel a tétel összes állitását bebizonyitottuk.
A tétel értelmében tehát az a), b), d), f), g), h), és i) feltételeknek csakis a (3.1) tipusu függvények felelnek meg. Az alábbiakban rávilágitunk az ilyen tipusu függvények egyik érdekes tulajdonságára:
Legyen x olyan, 1 veszteséggel járó véletlen esemény, amelynek valószinüsége $p(x)$.
Mint ismeretes, ennek az eseménynek entrópiája a következőképpen fejezhető ki:

$$H(x) = -\ln p(x) \tag{3.46}$$

A (3.46) és (3.20b) képletek figyelembevételével a (3.1) tipusu $f(p, B)$ függvény $p \approx 0$ értékeknél a következőképpen fejezhető ki:

$$f(p, B) = [1 - Bz(B)H(x)]^{-\frac{1}{B}} \tag{3.47}$$

A (3.47) egyenlet azt jelenti, hogy $p \approx 0$ értékeknél az $f(p, B)$ függvény viselkedését a véletlen események entrópiája határozza meg. A (3.1) tipusu $f(p, B)$ függvények közül kitüntetett helyzete van az alábbi függvénynek (ebben az esetben $y(p, B) \equiv \equiv 1$);

$$f(p, B) = (1 - B \ln p)^{-\frac{1}{B}} \tag{3.48}$$

A (3.2a), (3.2c) és (3.2d) egyenlőségek figyelembevételével ugyanis

$$\lim_{\substack{B \to 1 \\ B \to 0 \\ B \to \infty}} [1 - B \ln p\, y(p, B)]^{-\frac{1}{B}} = (1 - B \ln p)^{-\frac{1}{B}} \tag{3.49}$$

A (3.48) függvény kitüntetett helyzete másrészt abból fakad, hogy nemcsak kis valószinüségeknél, hanem p egész tartományában e függvény viselkedését a véletlen események entrópiája határozza meg.
A 3. lemma értelmében a (3.48) függvény eleget tesz az f) feltételnek. (Adott esetben ugyanis $y(p, B) \equiv 1$).
Bebizonyitható (l. a Függeléket), hogy ez a függvény az f) feltételen kivül kielégiti az $f(p, B)$ függvényre vonatkozó többi követelményt is.
Mindezt figyelembe véve a sulyozó függvénynek éppen a (3.48) függvényt választottuk.

4. Az (1, p; 0, 1 - p) tipusu alternativák veszélyességének értékelése nem ismételhető döntések esetén

Az előző fejezet eredményei alapján tehát a (2.40)-ben szereplő $f(p, B)$ sulyozó függvény megegyezik a (3.48) függvénnyel.
Ezt felhasználva, a fenti tipusu alternativák veszélyessége nem ismételhető döntések esetén az alábbi $U(1, p, B)$ rizikófüggvénnyel fejezhető ki:

$$U(l,\ p,\ B) = l \cdot f(p,\ B) = l(1 - B \ln p)^{-\frac{1}{B}} \tag{4.1}$$

ahol B az óvatosság mértékét kifejező konstans, amelynek értékét maga a döntéshozó választja ki a $(0, \infty)$ tartományból. Kiindulva a (4.1)-ből, arra a kérdésre keresünk most választ, hogy vajon milyen függvénykapcsolatnak kell lenni a p és l között ahhoz, hogy (l, p; 0, 1 - p) tipusu alternativa veszélyessége egy adott R ($R \leq 1$) értékkel legyen egyenlő, vagyis a következő egyenlőség teljesüljön:

$$U(l,\ p,\ B) = R \tag{4.2}$$

A (4.1) és (4.2) egybevetése alapján ez a függvénykapcsolat az alábbi alaku lesz:

$$p = e^{-\frac{1}{B}} \cdot e^{-\frac{1}{B}\left(\frac{l}{R}\right)^{B}} \tag{4.3}$$

Adott veszélyességü alternativák esetén tehát az l növelésével p értéke exponenciálisan csökken.
Ha a (4.3) függvényt felrajzoljuk a l, p sikban, akkor olyan pontok helygörbéjét kapjuk, amelynek (l, p) koordinátái azonos veszélyességü alternativákat jellemzik (a továbbiakban ezt az egyenlő veszélyességü alternativák jelleggörbéjének fogjuk nevezni).
A 2. ábrán látható a (3.48)-cal megadott f(p, B) függvény menete a $(0 \leq p \leq 1)$ tartományban a különböző B értékeknél $(B = 0;\ 0.1;\ 1;\ 10;\ \infty)$. A 3. ábra ábrázolja ugyanezeket a függvényeket logaritmikus koordinátarendszerben.
A 2. ábra jól szemlélteti az f(p, B) függvénynek az a), b), c), d), e), f), g) feltételek teljesülése miatt adódó sajátosságait.
Az alábbiakban felsoroljuk az f(p, B) függvénynek néhány olyan tulajdonságát, amely nem szerepel ugyan e függvényre vonatkozó feltételek között, azonban igen fontos a (4.1) kritériumnak a döntéshozatalnál való felhasználásánál (e tulajdonságok bizonyitása megtalálható az I. Függelékben).

1. A $(0 < p \leq 1,\ 0 < a < 1)$ tartományban tetszőleges véges $B > 0$ esetén

$$\left(\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)}\right)'_p > 0 \qquad (4.4)$$

Ez azt jelenti, hogy adott B és a mellett az $\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)}$ hányados p csökkentésével csökken.

Az f(p, B) függvénynek ezt a tulajdonságát jól illusztrálják a 3 ábrán látható jelleggörbék is. Ez a tulajdonság egyébként szükséges következménye annak, hogy az f(p, B) függvény eleget tesz az i) feltételnek.

2.

$$\lim_{p \to 0} \frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)} = 1 \qquad (a = \text{constans}) \qquad (4.5)$$

A (4.5) egyenlőség egyébként szükséges következménye annak, hogy az f(p, B) függvény eleget tesz a h) feltételnek.

3.

$$\left(\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)}\right)'_B < 0 \qquad (B > 0,\ 0 < a < 1) \qquad (4.6)$$

Az f(p, B) függvénynek a (4.6) tulajdonságát jól illusztrálja a 3. ábra.

4.

$$\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)} < \frac{1}{a} \qquad (B > 0,\ 0 < a < 1) \qquad (4.7)$$

5. A $0 < p < 1,\ 0 < a < 1$ tartományban $B > 0$ esetén:

$$\frac{f(ap,\ B)}{ap} > \frac{f(p,\ B)}{p} \qquad (4.8)$$

Ez azt jelenti, hogy $B > 0$-nál az $\frac{f(p,\ B)}{p}$ hányados p csökkentésekor növekszik.

6.

$$\left(\frac{f(p, B)}{p}\right)'_B > 0 \qquad (4.9)$$

7.

$$\frac{f(p, B)}{p} > 1 \qquad (4.10)$$

Az f(p, B) függvénynek ez a tulajdonsága jól látható a 3. ábrából. Most pedig vizsgáljuk meg, hogy az f(p, B) függvény (4.4)-(4.10) tulajdonságainak vajon milyen következményei vannak a (4.1) kritérium alkalmazása szempontjából.
Hasonlitsuk először össze e kritérium alapján az alábbi két alternativa veszélyességét.

$$A_1 = (l_1, p_1; 0, 1 - p_1) \qquad (4.11)$$

$$A_2 = (l_1, ap_1; 0, 1 - ap_1) \qquad (4.12)$$

Jelöljük az A_1 alternativa veszélyességét R_1-gyel, az A_2-ét R_2-vel. E jelölésekkel a (4.1)-ből

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{U(l_1, p_1, B)}{U(l_1, ap_1, B)} = \frac{f(p_1, B)}{f(ap_1, B)} \qquad (4.13)$$

A (4.4) figyelembevételével a (4.13)-ból következik, hogy p_1 csökkentésével $\frac{R_1}{R_2}$ hányados is csökken. Ez azt is jelenti, hogy az adott kritérium alkalmazása esetén a különböző véletlen események valószinüsége közötti különbségeknek annál kisebb hatásuk van a döntésre, minél kisebb valószinüségekről van szó. A nullához közeli p_1 valószinüségeknél az A_1 és A_2 alternativák veszélyessége közötti különbség elhanyagolható.
A (4.13) és (4.5) egybevetése alapján ugyanis:

$$\lim_{p_1 \to 0} \frac{R_1}{R_2} = \lim_{p_1 \to 0} \frac{U(l_1, p_1, B)}{U(l_1, ap_1, B)} = \lim_{p_1 \to 0} \frac{f(p_1, B)}{f(ap_1, B)} = 1 \qquad (4.14)$$

A (4.6) és (4.13) egybevetéséből viszont az következik, hogy ha p_1 = const mellett $\frac{R_1}{R_2}$ hányados B növelésével csökken.

Végül a (4.7) figyelembevételével a (4.13)-ból $B > 0$ esetén következik, hogy a $0 < p_1 < 1$ tartományban az $\frac{R_1}{R_2}$ hányados kisebb, mint a várható érték kritérium alkalmazásánál (ott $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{a}$) :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{f(p_1)}{f(ap_1)} < \frac{1}{a} \qquad (4.15)$$

A javasolt kritérium előbb emlitett tulajdonságai a következőképpen is interpretálhatók.
A (3.46) egyenlőséget figyelembe véve, a (4.1) kritérium a következőképpen fejezhető ki az entrópia fogalmának felhasználásával:

$$U(l, p, B) = l[1 + B\, H(x)]^{-\frac{1}{B}} \qquad (4.16)$$

A (4.16) azt jelenti, hogy egyszeri, nem ismételhető döntéshozatalnál a döntés szempontjából nem az események valószinüsége, hanem az entrópiája a fontos.
Most pedig a (3.46) felhasználásával hasonlitsuk össze a (4.11) és (4.12) által kifejezett A_1 és A_2 alternativa veszélyességét.

A (3.46), (4.13) és (F.10) figyelembevételével a $\frac{R_1}{R_2}$ hányados a következőképpen fejezhető ki:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{f(p_1)}{f(ap_1)} = \left(1 - \frac{B \ln a}{1 - B \ln p_1}\right)^{\frac{1}{B}} = \left(1 + \frac{H(x_2) - H(x_1)}{B^{-1} + H(x_1)}\right)^{\frac{1}{B}} \qquad (4.17)$$

ahol
x_1 - az l_1 veszteséggel járó, p_1 valószinüségü véletlen esemény;
x_2 - az l_2 veszteséggel járó, $p_2 = ap_1$ valószinüségü esemény.

A (4.17)-ből látható, hogy a nullához közeli p_1 valószinüségeknél, vagy nagyon nagy B értéknél (ezekben az esetekben $B^{-1} \ll \ll H(x_2)$), az $\frac{R_1}{R_2}$ hányados B = const mellett kizárólag a

$\frac{H(x_2) - H(x_1)}{H(x_1)}$ hányadostól függ.

Az alábbiakban hasonlitsuk össze az adott kritériumot a várható érték kritériummal az egyenlő veszélyességü alternativák jelleggörbéjének lefolyása tekintetében. Az R veszélyességü alternativák jelleggörbéjének az egyenlete az adott kritérium esetén a (4.3) szerint, a várható érték kritériuma esetén pedig az alábbi módon fejezhető ki:

$$p'(l) = \frac{R}{l} \tag{4.18}$$

A (4.1) és (4.2) egybevetése alapján:

$$\frac{R}{l} = \frac{U(l, p, B)}{l} = f(p, B) \tag{4.19}$$

A (4.19) felhasználásával a (4.3) által és a (4.18) által kifejezett valószinüségek hányadosa az alábbi egyenlőségnek tesz eleget:

$$\frac{p(l)}{p'(l)} = \frac{p(l)}{f(p, B)} \tag{4.20}$$

A (4.10) figyelembevételével a (4.20)-ból következik, hogy minden l-re

$$p(l) \leq p'(l) \tag{4.21}$$

Tehát, az általunk javasolt kritérium alkalmazásakor az egyenlő veszélyességü alternativák jelleggörbéje alatt halad annak a görbének, amit a várható érték kritériuma esetén kapunk.
A (4.3), (4.9) és (4.20) egybevetéséből viszont az látható, hogy

$\frac{p(l)}{p'(l)}$ hányados l növelésével (B = const mellett), valamint B növelésével (l = const mellett) csökken.

A kritérium sajátosságainak ismertetése után rátérünk most a B óvatosságmérték megválasztásának a kérdésére. A B-nek a $(0, \infty)$ intervallumból való kiválasztása eléggé problematikus, az intervallum végtelen hossza miatt.

Emiatt felmerült az a gondolat, hogy a lehetséges B értékek intervallumát a $(0, \infty)$-tól $(N^{-10}, 10^{N})$-re csökkentsük, ahol N olyan pozitiv valós szám, amelynél az intervallum csökkentésének a döntésre való hatása gyakorlatilag elhanyagolható.

Mivelhogy $\frac{f(p, B) - f(p, 0)}{f(p, 0)}$ és $\frac{f(p, \infty) - f(p, B)}{f(p, \infty)}$ hányadosok p csökkentésével növekszenek, az utóbbi feltétel teljesüléséhez szükséges, hogy még a legkisebb vizsgálandó valószinüségeknél is az alábbi egyenlőtlenségek legyenek igazak:

$$\frac{f(p, \infty) - f(p, 10^{-N})}{f(p, \infty)} = 1 - f(p, 10^{-N}) \leq \frac{m}{100}$$

$$\frac{f(p, 10^{-N}) - f(p, 0)}{f(p, 0)} = \frac{f(p, 10^{-N})}{p} - 1 \leq \frac{m}{100} \qquad (4.22)$$

ahol

m - a megengedett százalékos hiba.

Ha például a legkisebb figyelembe vehető valószinüség nem nagyobb 10^{-4}-nél, akkor $m = 4\%$ esetén $N = 3$ biztositja a (4.22) egyenlőtlenségek teljesitését.

A (4.22) érvényesitéséhez szükséges N értékeknél, pl. $N = 3$-nál azonban a lehetséges B értékek skálája még mindig tulságosan széles.

A B kiválasztását lényegesen megkönnyitenénk, ha azt vissza tudnánk vezetni az alábbi tulajdonságokkal rendelkező C mennyiségek kiválasztására:

1. $C = F(B)$; ahol $F'_B \geq 0$

2. $C_{min} = F(10^{-N}) = 0 \qquad (4.23)$

3. $C_{max} = F(10^{N}) = 100$

C mennyiség használata ugyanis az óvatosság mértékének megszokott százalékos kifejezését teszi lehetővé. A (4.23) tulajdonságokkal biró C az alábbi módon fejezhető ki:

$$C\% = 50 + 50 \frac{\lg B}{N} \qquad (4.24)$$

Ebből

$$B = 10^{N} \left(\frac{C}{50} - 1\right) \qquad (4.25)$$

A (4.25)-ből látható, hogy C = 50%-nak B = 1 felel meg.

I. Függelék

1. A (3.48) függvény kielégiti az a) feltételt. Ugyanis

$$f(1,\ B) = \left(\frac{1}{1 - B\ln 1}\right)^{\frac{1}{B}} = 1 \qquad (F.1)$$

$B \geq 0$, B - véges constans.

2. A (3.48) függvény kielégiti a b feltételt. Ugyanis

$$f(0,\ B) = \left(\frac{1}{1 - B\ln 0}\right)^{\frac{1}{B}} = 0 \qquad (F.2)$$

$B \geq 0$, B - véges constans.

3. A (3.48) függvény kielégiti a c) feltételt. Ugyanis

$$f'_p(p,\ B) = -\frac{1}{B}(1 - B\ln p)^{-\frac{1}{B} - 1}\left(-\frac{B}{p}\right) = \frac{1}{p}(1 - B\ln p)^{-\frac{1}{B} - 1} \qquad (F.3)$$

A $0 < p \leq 1$ tartományban $f'_p(p,\ B) \geq 0$.

4. Az (F.3) alapján:

$$f'_p(p,\ B)\Big|_{p=1} = 1 \qquad B \geq 0 \qquad B \text{ - véges.}$$

Tehát a (3.48) függvény kielégiti a d) feltételt is.

5. A (3.48) alapján

$$\ln f(p,\ B) = -\frac{1}{B}\ln(1 - B\ln p)$$

Ha a fenti egyenlet mindkét oldalát B szerint deriváljuk, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{f'_B(p,\ B)}{f(p,\ B)} = \frac{1}{B^2}\ln(1 - B\ln p) + \frac{1}{B}\,\frac{\ln p}{1 - B\ln p}$$

Innen:

$$f'_B(p,\ B) = f(p,\ B)\left[\frac{1}{B^2}\ln(1 - B\ln p) + \frac{1}{B}\,\frac{\ln p}{1 - B\ln p}\right] \qquad (F.4)$$

Ahogyan az (F.4)-ből látható, a $0 < p \leq 1$ tartományban

$$f'_B(p, B) \geq 0 \tag{F.5}$$

Tehát, a (3.48) függvény kielégiti az e) feltételt is.

6. A (3.48) alapján:

$$\ln f(p, B) = -\frac{1}{B} \ln(1 - B \ln p)$$

$$\lim_{B\to\infty} [\ln f(p, B)] = -\lim_{B\to\infty} \frac{\ln(1 - B \ln p)}{B} = -\lim_{B\to\infty} \frac{-\ln p}{1 - B \ln p} = 0 \tag{F.6}$$

Ugyanakkor

$$\lim_{B\to\infty} f(p, B) = e^{\lim\limits_{B\to\infty}[\ln f(p, B)]} \tag{F.7.}$$

Az (F.6) és (F.7) egybevetéséből az következik, hogy

$$\lim_{B\to\infty} f(p, B) = e^0 = 1 \tag{F.8}$$

Tehát, a (3.48) függvény eleget tesz a g) feltételnek is.

7. A (2.42) és (3.48) alapján $B \geq 0$ esetén:

$$\lim_{p\to 0} g(a, p, B) = \lim_{p\to 0} \frac{(1 - B \ln p)^{-\frac{1}{B}}}{(1 - B \ln ap)^{-\frac{1}{B}}} = \lim_{p\to 0} \frac{1 - B \ln ap}{1 - B \ln p} =$$

$$= \frac{-\frac{B \cdot a}{ap}}{-\frac{B}{p}} = 1 \tag{F.9}$$

Tehát a (3.48) függvény kielégiti a h) feltételt is.

8. A (2.42) és (3.48) alapján:

$$g(a, p, B) = \left(\frac{f(p, B)}{f(ap, B)}\right)^B = \frac{1 - B \ln ap}{1 - B \ln p} = 1 - \frac{B \ln a}{1 - B \ln p} \tag{F.10}$$

Az (F.10)-ből látható, hogy $g'_p(a, p, B) \geq 0$, tehát a (3.48) függvény eleget tesz az i) feltételnek is.

9. A (4.4.) és (4.5) bizonyitása:

Fejezzük ki a (3.48) alapján az $\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)}$ hányadost:

$$\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)} = \left(\frac{1 - B\ \ln\ ap}{1 - B\ \ln\ p}\right)^{\frac{1}{B}} = \left(1 - \frac{B\ \ln\ a}{1 - B\ \ln\ p}\right)^{\frac{1}{B}} \tag{F.11}$$

Ennek p szerinti első deriváltja az egyszerüsitések elvégzése után a következőképpen fejezhető ki:

$$\left(\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)}\right)'_p = - \frac{B\ \ln\ a}{p(1 - B\ \ln\ p)^2} \left(1 - \frac{B\ \ln\ a}{1 - B\ \ln\ p}\right)^{\frac{1}{B} - 1} \tag{F.12}$$

Figyelembe véve, hogy az adott esetben

$p < 1$ és $a < 1$

az (F.12)-ből a (4.4) igaz volta következik.

Az (F.11)-ből határátmenettel

$$\lim_{p\to 0} \frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)} = \left(1 - \lim_{p\to 0} \frac{B\ \ln\ a}{1 - B\ \ln\ p}\right)^{\frac{1}{B}} = 1$$

adódik.

10. A (4.6) bizonyitása

Az $\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)}$ hányadosnak B szerinti első deriváltja a következőképpen fejezhető ki:

$$\left(\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)}\right)'_B = \frac{f'_B\ (p,\ B) \cdot f(ap,\ B) - f(p,\ B) \cdot f'_B(ap,\ B)}{f^2(ap,\ B)} \tag{F.13}$$

Az (F.4) alapján:

$$\frac{f'_B(p,\ B)}{f(p,\ B)} = N(p,\ B) \tag{F.14}$$

$$\frac{f'_B(ap, B)}{f(ap, B)} = N(ap, B)$$

ahol

$$N(p, B) = \frac{1}{B^2} \ln(1 - B \ln p) + \frac{1}{B} \frac{\ln p}{1 - B \ln p} \tag{F.15}$$

Az (F.15) mindkét oldalát p szerint deriválva az egyszerüsitések elvégzése után az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk:

$$N'_p(p, B) = \frac{(1 - B \ln p)^{-1}}{B\ p} [(1 - B \ln p)^{-1} - 1] \tag{F.16}$$

Mivel az (F.16) jobb oldalán szereplő szögletes zárójelekben levő kifejezés negativ előjelü, ezért

$$N'_p(p, B) < 0 \tag{F.17}$$

Ebből viszont az következik, hogy a < 1 esetén

$$N(ap, B) > N(p, B) \tag{F.18}$$

Az (F.14) figyelembevételével ez azt jelenti, hogy

$$\frac{f'_B(ap, B)}{f(ap, B)} > \frac{f'_B(p, B)}{f(p, B)} \tag{F.19}$$

Ezt felhasználva az (F.13)-ból következik, hogy

$$\left(\frac{f(p, B)}{f(ap, B)} \right)'_B < 0 \tag{F.20}$$

11. A (4.7) bizonyitása

Abból, hogy az f(p, B) függvény eleget tesz az f) feltételnek, következik, hogy

$$\frac{f(p,\ 0)}{f(ap,\ 0)} = \frac{p}{ap} = \frac{1}{a} \qquad (F.21)$$

Az (F.21) és (F.20) egybevetéséből viszont következik, hogy tetszőleges $B > 0$ értéknél

$$\frac{f(p,\ B)}{f(ap,\ B)} < \frac{1}{a} \qquad (F.22)$$

12. A (4.8) bizonyitása

A (4.8) egyenlőtlenség bizonyitása céljából szorozzuk meg az egyenlőtlenség bal oldalán lévő $\frac{f(ap,\ B)}{f(ap)}$ hányados számlálóját és nevezőjét $pf(p,\ B)$-vel:

$$\frac{f(ap,\ B)}{ap} = \frac{f(p,\ B)}{p}\ \frac{pf(ap,\ B)}{ap\ f(p,\ B)} \qquad (F.23)$$

Az (F.22) figyelembevételével az (F.23)-ból a (4.8) igaz volta következik.

13. A (4.9) bizonyitása

$$\left(\frac{f(p,\ B)}{p}\right)'_B = \frac{1}{p}\ f'_B(p,\ B) \qquad (F.24)$$

Mivel az $f(p,\ B)$ függvény eleget tesz az e) feltételnek:

$$f'_B(p,\ B) > 0 \qquad (F.25)$$

Az (F.24) és (F.25) egybevetéséből viszont a (4.9) következik.

11. A (4.10) bizonyitása

Mivel az $f(p,\ B)$ függvény eleget tesz az f) feltételnek:

$$\frac{f(p,\ 0)}{p} = 1 \qquad (F.26)$$

Ezt figyelembe véve a (4.9)-ből a (4.10) igaz volta következik.

II. Függelék

Példa a kritérium alkalmazására

Tegyök fel, hogy az alábbi 4 alternativát kell összehasonlitanunk a veszélyesség szempontjából.

A_1 : (10, 0.1; 0, 0.9)

A_2 : (40, 0.01; 0, 0.099)

A_3 : (330, 0.001; 0, 0.099)

A_4 : (333, 0.0001; 0, 0.0999)

Az alábbi táblázat tartalmazza az A_1, A_2, A_3, A_4 alternativáknak a (4.1) alapján megállapitott veszélyességértékeit B = = $3.162 \cdot 10^{-2}$; 1; 31.62 (vagy C = 25%; 50%; 75%) esetén. Az összehasonlitás céljából közöljük az alternativáknak az lp. várható érték, valamint a minimax kritérium alapján történő értékelésének eredményeit is.

Táblázat 1.

alternativák	$B=3,162 \cdot 10^{-2}$ C= 25%	B = 1 C = 50%	B = 31,62 C = 75%	lp B = 0	minimax $B = \infty$
A_1	1.084	3.03	8.728	1	10
A_2	0.54	7.12	34.16	0.4	40
A_3	0.636	41.5	278.16	0.33	330
A_4	1.03	32.46	278.04	0.0333	333

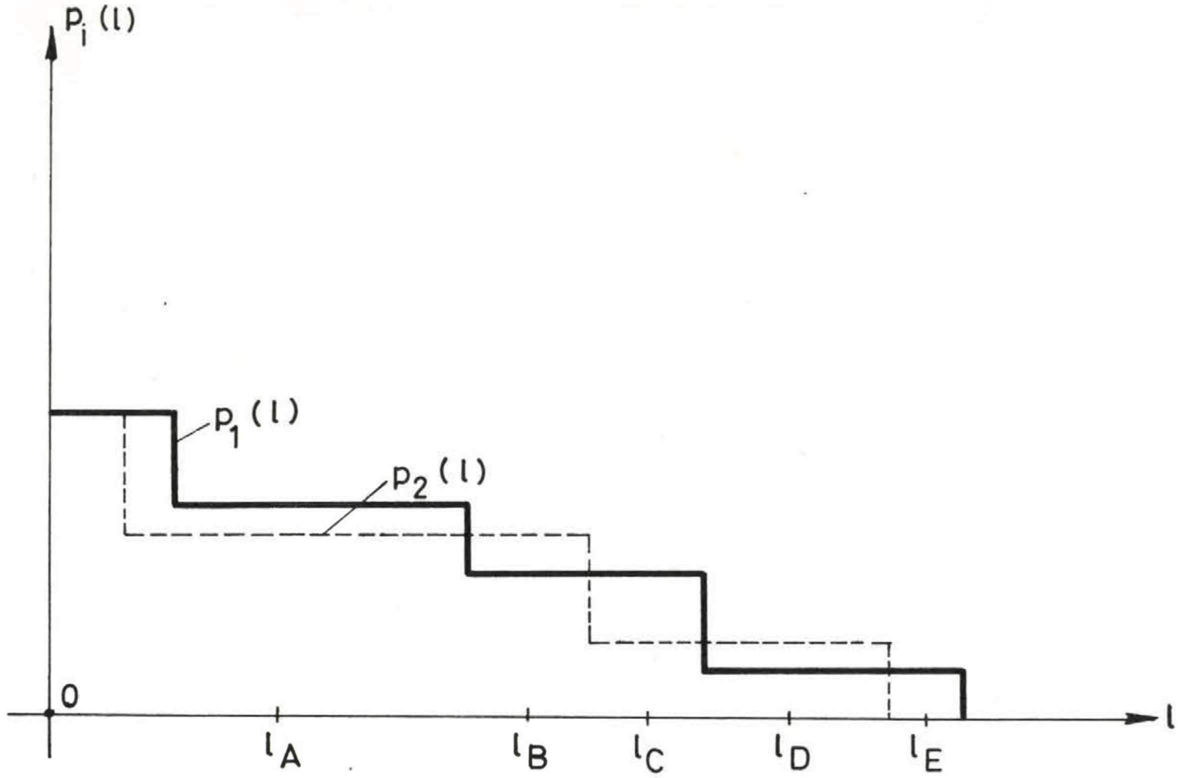
E táblázat alapján az alternativák veszélyességi sorrendje a különböző B-knél a következőképpen alakul:

B = 0	$A_4 < A_3 < A_2 < A_1$
$B = 3.162 \cdot 10^{-2}$	$A_2 < A_3 < A_4 < A_1$
B = 1	$A_1 < A_2 < A_4 < A_3$
B = 31,62	$A_1 < A_2 < A_4 < A_3$
$B = \infty$	$A_1 < A_2 < A_3 < A_4$

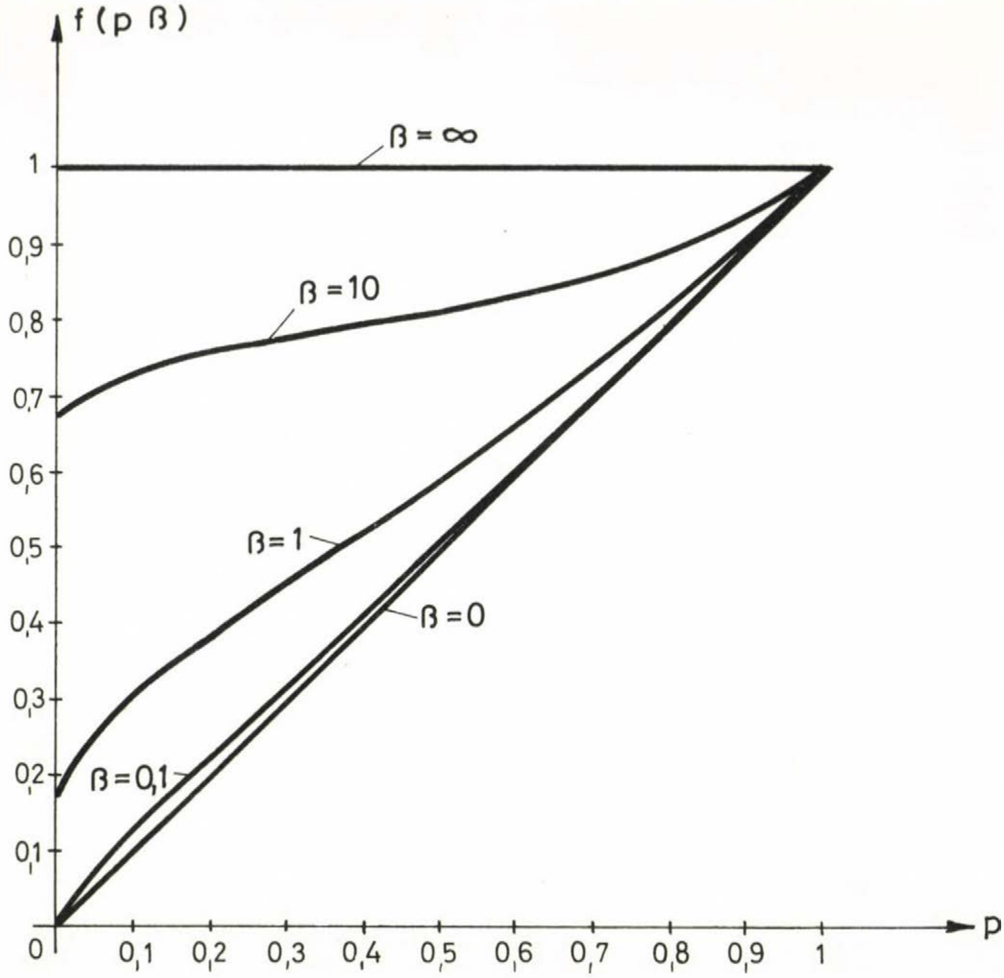
Irodalom

1. L. J. Savage: The Foundations of Statistic. New York, 1957.
2. R. D. Luce-H. Rajffa: Games and Decisions. Wiley. New York, 1957.
3. D. Kahneman and A. Tversky: Prospect theory: an analysis of decision under risk. Econometrica. Volume 47. Number 2. March.1979.
4. A. Tversky: On the Elication of Preferences: Descriptive Considerations. Conflicting Objectives in Decisions. Wiley IIASA International Series on Applied System Analysis.
5. O. Lange: Optimális döntések. Budapest, 1966.
6. P. C. Fishburn: Decision and value theory, John Wiley and sons. New York, 1964.
7. Arnold Kaufmann: The Science of Decision-making. An introduction to praxeology. World University Library. 1968.
8. S. Benedikt: Ein Optimalitskriterium für die Steuerung Eines Systems im Falle der Unvollstandigen Information. Journal of Cybernetics, 1974, vol 4, no 4.
9. A Rapaport: Strategy and conscience, Harper and Row, New York, 1964.

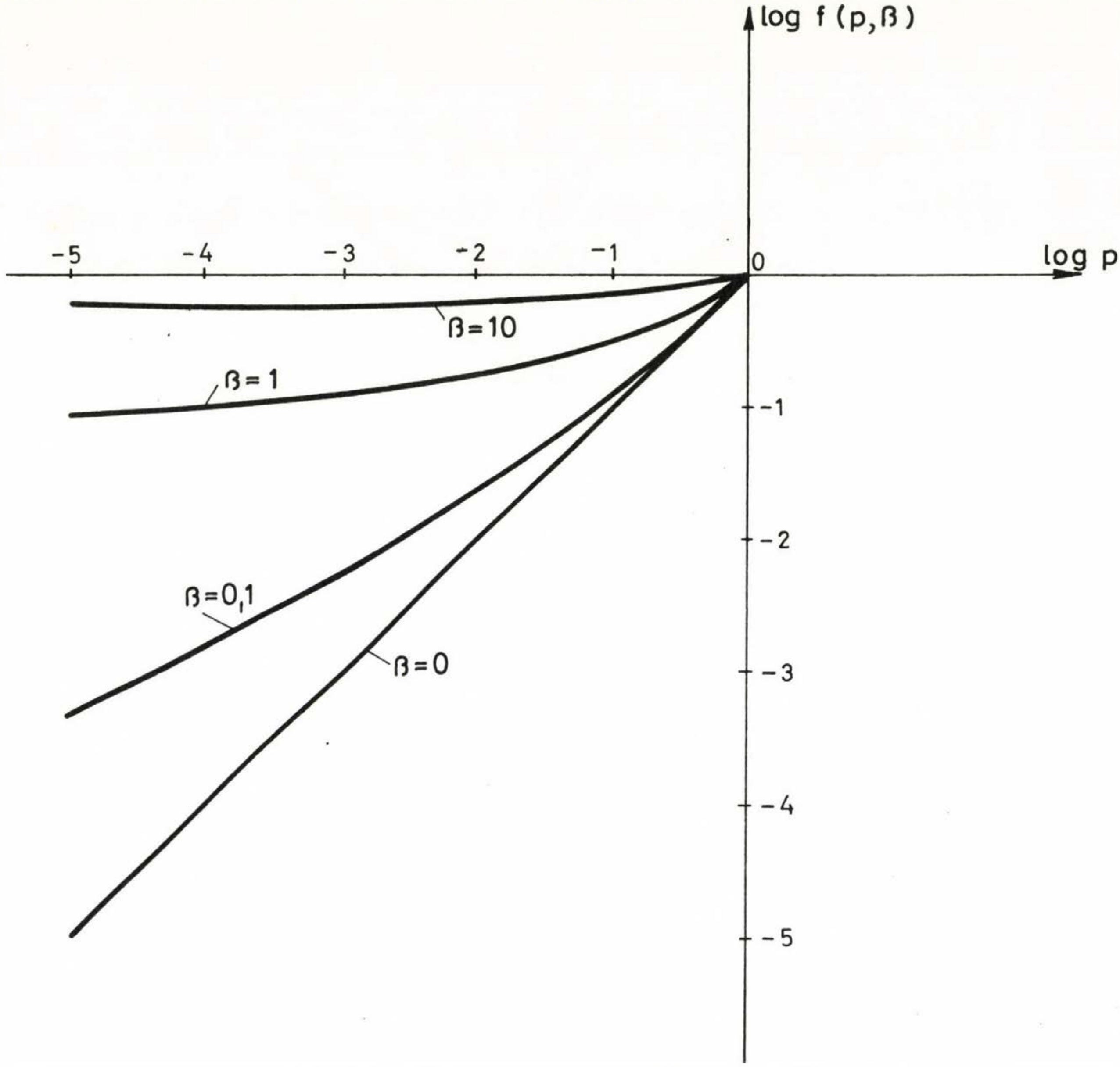
Á B R Á K



1. ábra.


f (p ß)
ß = ∞
ß = 10
ß = 1
ß = 0
ß = 0,1
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
p

2. ábra.



3. ábra.

TARTALOMJEGYZÉK

A TANULMÁNYOK sorozatban 1979-ben megjelentek:

88/1979 Renner G. - Gaál B. - Hermann Gy. - Horváth L. - Várady T.: Szoborszerü felületek tervezése és megmunkálása

89/1979 Ruda Mihály: A SIS77 statisztikai információs rendszer /a felhasznált számitástechnikai eszközök, a rendszer szerkezete és programjai/

90/1979 Bányász Cs. - Keviczky L.: Optimum Insensitivity of the Linear-continuous Transformation

91/1979 Téli iskola /Szentendre/

92/1979 Bolla M. - Csáki P. - Fischer J. - Herodek S. - Hoffman Gy. - Kutas T. - Telegdi L. - Wittmann I.: A balatoni ökoszisztéma modellezése

93/1979 Andor László: Kisgépes adatbázis kezelő rendszer

94/1979 Gertler János: Egy statisztikus szürési eljárás számitógépes folyamatirányitásához

95/1979 Báthory M. - Galló V. - Kovács E. - Mérő L. - Siegler A. - Vajta L.: Festőrobot vezérlésére alkalmas alafelsimerési berendezés

96/1979 Mérő László: Konturkeresés zajos digitalizát képekben

97/1979 Pásztorné - Matavovszky T.: Boole-függvény kezelőrendszer

98/1979 Kecskés Zsuzsa: Három dimenziós tárgyak drótvázának ábrázolása vonalrajzoló grafikus berendezésekkel

99/1979 Ivics József: KGST Riga

100/1979 Téli iskola

1980-ban jelentek meg:

101/1980 Gerencsér László - Hangos Katalin: Diszkrét lineáris sztochasztikus rendszerek önhangoló szabályozása

102/1980 Pásztorné Varga Katalin: Rekurziv eljárás

103/1980 Gerencsér Piroska - Szép Endre - Zilahy Ferenc Marton Zsolt: Robotmegfogók adaptivitása I.

104/1980 Knuth Előd - Radó Péter - Tóth Árpád: Az SDLA előzetes ismertetése

105/1980 E. Knuth - P. Radó - Á. Tóth: Preliminary description of SDLA

106/1980 Prékopa András: Sztochasztikus programozási modellek és alkalmazásuk

107/1980 Kelle Péter: Megbizhatósági készletmodellek és alkalmazásuk

108/1980 Almásy Gedeon: Mérlegegyenletek és mérési hibák

109/1980 Békéssy A.-Demetrovics J.-Gyepesi Gy.: Relációs adatbázis logikai szintü vizsgálata funkcionális függőségek szempontjából

110/1980 Gaál A. - Soltész J. - Ruda M. - Ratkó I.: Tanulmányok a statisztikai adatfeldolgozásról