tanulmányok 107/1980

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

MEGBIZHATÓSÁGI KÉSZLETMODELLEK ÉS ALKALMAZÁSUK

Irta:
Kelle Péter

Tanulmányok 107/1980.

A kiadásért felelős:
DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 104 8
ISSN 0324 - 2951

8011454 MTA KESZ Sokszorosító, Budapest. F. v.: dr. Héczey Lászlóné

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés

Az operációkutatásnak az alkalmazások szempontjából is fontos területe a készletgazdálkodás matematikai modellezése. A tanulmányban megbizhatósági jellegü készletmodellekkel és alkalmazásaival foglalkozunk, melyek hátterében a következő gyakorlati feladat áll: adjuk meg azt a minimális készletszintet, mely előirt megbizhatósággal lehetővé teszi a folyamatos anyagellátást az anyagbeérkezés és az igény véletlen jellegét figyelembe véve. A megbizhatóság mértéke leggyakrabban a folyamatos anyagellátás valószínűsége, melyet egyhez közeli értékkel alulról korlátozunk. A továbbiakabn ilyen valószínűséggel korlátozott készletmodelleket vizsgálunk.

Az irodalomban közölt készletmodellek nagy része a költségek minimalizálását tüzi ki célul. A hazai alkalmazásokra ezek a modellek általában nem megfelelőek, mert a költségtényezők a gyakorlatban igen nehezen adhatók meg. Másrészt ismertek ugyan olyan modellek, melyben a megrendelt tétel véletlen időpontban érkezik be, olyan modell azonban nem volt, mely a hazai viszonyokra jellemző több részletben, véletlenül elhelyezkedő időpontokban és esetleg véletlen nagyságú tételekben történő beszállitást vizsgálná. Az első ilyen modellt Prékopa András [17] és Ziermann Margit [28]közölte.

A tanulmányban a véletlen jellegü beérkezési folyamat többféle modellje szerepel, melyek a különböző gyakorlati feladatok számára megfelelő közelitést adnak, mint ezt az alkalmazások is alátámasztották. Elsősorban a Prékopa András által megfogalmazott véletlen ütemezésü beérkezési folyamat modellje [17] igen eredményesnek bizonyult a hazai gyakorlati felhasználásban és a vállalati szakemberek körében is gyorsan ismertté vált. A modell alaklamazásiban és további változatainak kidolgozásában elsősorban László Zoltán [12, 13] Gerencsér László [7], H. Klemm [10], Németh Gyula [14], Móricz Anna [44], Nagy Imre [45], Pintér János [15] és Vass István [53, 54], munkáit emlitjük. Ez a témakör a nemzetközi szakirodalomban kevéssé feltért terület, de a hazai alkalmazások szempontjából rendkivül jelentős.

Tanulmányom az irodalomban közölt eredmények továbbfejlesztésében és alkalmazásában végzett munkám kivánja összefoglalni. Célom az volt, hogy az ismert modelleknek a gyakorlatban alkalmazható általánositásait és ezek matematikai, illetve számitástechnikai eszközeit dolgozzam ki.

Az első fejezetben az irodalomban eddig közölt eredményeket foglalom össze, utalva a továbbfejlesztés általam elvégzett irányára. A további fejezetekben a témában elért saját eredményeimet ismertetem, míg az utolsó fejezetben a készletmodellek hazai alkalmazásának eddigi eredményeit összesitem.

A második fejezetben a véletlen ugrásu empirikus eloszlásfüggvényre adjuk meg az általánositott Kolgomorov – Szmirnov statisztika eloszlását. Ez a korábbiaknál általánosabb készletmodell megoldására alkalmas, de segitségével meg lehet határozni a véletlen ütemezésü beérkezés esetén a hiány valószinüségének a pontos értékét is az ismert aszimptotikus közelités helyett. Itt vizsgáljuk meg a véletlen intenzitásu igény esetét is és egy közelitő formulát adunk az optimális induló készletszint nagyságára.

A harmadik fejezet Prékopa András egy időben nem homogén szállitásokra is alkalmazható készletmodelljének [18] a megoldási algoritmusát tartalmazza. Több termék együttes készletszintjének optimális nagyságát sztochasztikus programozás segitségével határozzuk meg, szimulációs technika felhasználásával.

A negyedik fejezetben aszfaltkeverő berendezések anyagellátásának valószinűséggel korlátozott készletmodelljét és megoldásának módszerét irjuk le. Ez több tároló megfelelő kapacitásának a tervezését és induló készletszintjének meghatározását szolgálja többféle anyag sztochasztikusan összefüggő beérkezési folyamatának figyelembevételével.

Az ötödik fejezetben összefoglaljuk a készletmodellek, elsősorban a megbizhatósági készletmodellek hazai alkalmazásait, melyek a népgazdasági szintü készletnorma ajánlásoktól a vállalatok alapanyag-, tartalékalkatrész-, gyártásközi-, és késztermék-készletszintjének meghatározásáig egy igen széles kört ölelnek fel. Az alkalmazó vállalatok is sokfélék: különböző ipari, szolgáltató és kereskedelmi vállalatok. A felhasznált modellek szerinti csoportositásban az [41] tanulmányban foglaltuk össze az 1973-ig történt alkalmazásokat. A jelen tanulmányban a felhasználási területek szerint csoportositva, röviden ismertetjük az utóbbi években elért alkalmazási eredményeket is, és utalunk a hozzáférhető részletesebb információk forrásaira. Az emlitetteken kivül másutt is történtek kisérletek a modellek gyakorlati bevezetésére, amelyekről azonban kevés információt tudtunk beszerezni. Külföldön (elsősorban az NDK-ban és Csehszlovákiában) szintén ismertek a megbithatósági készletmodellek és felhasználásukra több helyen is sor került. Ezekről megfelelő információ hiányában szintén nem tudunk irni.

Az utolsó fejezetben a megbizhatósági készletmodelleknek egy vázlatos számitógépes rendszertervét ismertetjük, mely a vizsgált anyagok (alapanyagok, tartalékalakatrészek, félkész- - és késztermékek) különböző beérkezési és felhasználási folyamata mellett alkalmazható részekből áll. Tartalmazza a biztonsági készletszint meghatározására szolgáló egyszerü közelitő formulákat és a bonyolultabb, numerikus eljárásokkal megoldható modelleket.

Szeretnénk köszönetet mondani Prékopa Andrásnak a problémák felvetéséért és értékes tanácsaiért, továbbá az alkalmazásokat vezető kollégáknak a rendelkezésre bocsájtott információkért.

I. Valószinüséggel korlátozott megbizhatósági készletmodellek

1. A Prékopa – Ziermann modell

Prékopa András [17] és Ziermann Margit [28] 1963-ban publikálta az első megbizhatósági készletmodellt, mely a következő gyakorlati feladat megoldására készült: A T hosszuságú tervezési periódusban az A vállalat egyenletesen, c (pozitiv konstans) intenzitással használ fel valamely anyagot (terméket), melyet rendeléssel pótol. A teljes c szükségletet a szállitó B vállalat a $(0, T)$ termelési periódus alatt n ($n \geqslant 1$, rögzitett) alakalommal leszállitja A részére az alábbiak szerint:

(1a) Az egyes szállítások n számú független és a $(0, T)$ intervallumban egyenletes eloszlásu véletlen időpontban történnek.

(1b) A szállitási tételnagyságok egyenlőek.

Az A vállalat a folyamatos termelés érdekében a $t = 0$ időpontban M nagyságú biztonsági tartalékkal rendelkezik. A feladat annak a minimális M induló készletszintnek a meghatározása, mely adott $1 - \epsilon$ valószínűséggel biztositja a folyamatos termelést az egész $(0, T)$ periódusban.

Az általánosság megszoritása nélkül feltételezhetjük, hogy $c = T = 1$, ami az egységek alkalmas választásával mindig elérhető. Ekkor az (1a) és (1b) feltételek szerint a t időpontig a raktárba érkezett összmennyiség

$$(1.1) \qquad F_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1^*, \\ \frac{k}{n}, & \text{ha} \quad t_k^* < t \leqslant t_{k+1}^* \quad (k = 1, \ldots, n-1), \\ 1, & \text{ha} \quad t_n^* < t \leqslant 1, \end{cases}$$

ahol $t_1^* < \ldots < t_n^*$ a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett n elemü rendezett minta, mely a rendelések beérkezési időpontjait (szállitási időpontokat) képviseli. A raktárból a t időpontig igényelt összmennyiség egyenlő t-vel.

A $(0,1)$ intervallumon folyamatos anyagellátás feltétele, hogy a

$$(1.2) \qquad \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{ t - F_n(t) \} < M$$

egyenlőtlenség teljesül. Az optimális induló M készletszintet a

$$\min M$$

$$(1.3) \qquad \text{feltéve, hogy}$$

$$P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{ t - F_n(t) \} < M \right) \geqslant 1 - \epsilon$$

feltételes szélsőérték feladat megoldása adja.

Az (1.1) szerint értelmezett beérkezési folyamat a (0,1) intervallumon egyenletes eloszlás empirikus eloszlásfüggvénye, és igy (1.2) az ismert Kolmogorov – Szmirnov statisztika, melyre teljesül a következő

1.1. Tétel:

$$P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t - F_n(t)| < M) = \tag{1.4}$$
$$= 1 - M \sum_{i=0}^{[n(1-M)]} \binom{n}{i} (1 - M - \frac{i}{n})^{n-i} (M + \frac{i}{n})^{i-1}$$

Mivel az (1.4) kifejezés az M változó monoton növekvő függvénye, igy az (1.3) feladat megoldását a

$$P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t - F_n(t)| \leqslant M) = 1 - \epsilon \tag{1.5}$$

u.n. megbithatósági egyenlet gyöke adja.

A gyakorlatban n nagyobb értékeire az (1.5) egyenlet megoldása nehézkes. A közelitő megoldás egyszerü megadására felhasználható Szmirnov következő határeloszlás tétele:

1.2. Tétel:

$$\lim_{n \to \infty} P(\sqrt{n} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t - F_n(t)| < y) = 1 - e^{-2y^2} \tag{1.6}$$

ha $y > 0$ és 0 egyébként.

Ha az (1.6) aszimptotikus eloszlást véges n értékekre mint közelitő eloszlást tekintjük, akkor az $y = \sqrt{n}\, M$ helyettesitéssel az (1.5) egyenletnek az

$$M \approx \sqrt{\frac{1}{2n} \log \frac{1}{\epsilon}} \tag{1.7}$$

közelitő megoldását adhatjuk.

A rendelésfeladás időpontjában gyakran a tervezési periódus igényeinek c intenzitása nem ismert. A fenti modellt megvizsgáljuk abban az esetben, ha c valószinüségi változó. Erről a második fejezetben részletesen irunk.

2. A Prékopa modell

Az 1. pontban leirt modell első általánositását Prékopa András publikálta [17]. A gyakorlati alkalmazás szempontjából igen sikeresnek bizonyult a beérkezési folyamat következő modellje, az u.n. véletlen ütemezésü szállitási modell:

(2a) A szállitási időpontok modellezése megegyezik (1a)-val

(2b) A szállitott tételnagyságok modellje a következő: δ jelöli a legkisebb, egy alkalommal biztosan szállitott mennyiséget $(0 \leqslant \delta \leqslant 1/n)$, a fennmaradó $1 - n \cdot \delta$ mennyiséget pedig oly módon osztjuk el az n időpont között, hogy a $(0, 1 - n \cdot \delta)$intervallumot $n - 1$ db véletlenszerüen, egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint választott pont segitségével felosztjuk n részre, majd a kapott részek által képviselt mennyiségeket hozzárendeljük az egyes időpontokhoz.

(2c) Az egyes szállitási időpontokban a szállitott mennyiségek vektora sztochasztikusan független az érkezési időpontok rendszerétől.

A beérkezés sztochasztikus folyamatát igy a következő általánositott empirikus eloszlásfüggvény közeliti:

$$(1.8) \qquad F_n(t,\lambda) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } 0 \leqslant t \leqslant t_1^*, \\ \lambda \cdot \frac{k}{n} + (1-\lambda)\tau_k^*, & , \text{ha } t_k^* < t \leqslant t_{k+1}^* \quad (k = 1, \ldots, n-1), \\ 1 & , \text{ha } t_n^* < t \leqslant 1, \end{cases}$$

ahol $\lambda = n \cdot \delta$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ és $\tau_1^* < \tau_2^* < \ldots < \tau_{n-1}^*$, illetve $t_1^* < t_2^* < \ldots < t_n^*$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlásu rendezett minta, melyek egymástól függetlenek.

Az optimális M induló készletszintet az (1.3) feltételes szélsőérték feladat megoldásaként kaphatjuk az $F_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvény helyett az $F_n(t,\lambda)$ általánositott empirikus eloszlásfüggvényt véve. Prékopa András [17] cikkében közölte a következő tételt, mely az 1.2. tétel általánositása.

1.3. Tétel.

Az (1.8) szerint értelmezett $F_n(t,\lambda)$ általánositott empirikus eloszlásfüggvényre

$$(1.9) \qquad \lim_{n \to \infty} P\left(\sqrt{\frac{n}{1 + (1-\lambda)^2}} \cdot \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{ t - F_n(t,\lambda) \} < y \right) = 1 - e^{-2y^2}$$

ha $y > 0$ és 0 egyébként.

Ha az (1.9) aszimptotikus eloszlást véges n értékre az eloszlás közelitésének fogadjuk el, akkor az

(1.10) $$P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |t - F_n(t,\lambda)| < M\right) = 1 - \epsilon$$

megbizhatósági egyenletnek a közelitő megoldása az

(1.11) $$M \approx \sqrt{1 + (1 - \lambda)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2n} \log \frac{1}{\epsilon}}\,)$$

mely az optimális készletszint közelitő értékét adja (1.9) monotonitása miatt. Az (1.11) formula n "elég nagy" értékeire a gyakorlati alkalmazás számára kielégitő pontosságot ad. Véges n értékekre az

(1.12) $$\sup_{0 \leq t \leq 1} |t - F_n(t,\lambda)|$$

általánositott Kolgomorov – Szmornov statisztika eloszlását először László Zoltán határozta meg, de ez az eredmény még nincs publikálva. A II. fejezetben bizonyitunk egy általánosabb eredményt, mely a véletlen, ismert eloszlásfüggvényü ugrások esetén adja meg a Kolgomorov – – Szmirnov tipusu statisztika eloszlását. Ennek speciális esetenként megkaphatjuk az (1.12) statisztika eloszlását is.

3. Teljesen véletlen ütemezésü szállitás esete

László Zoltán [13] dolgozatában a $\lambda = 0$ esetben vizsgálja az (1.12) statisztika eloszlását. Az

(1.13) $$F_n(t,0) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \leq t \leq t_1^*, \\ \tau_k^*, & \text{ha} \quad t_k^* < t \leq t_{k+1}^* \quad (k = 1, \ldots, n-1), \\ 1, & \text{ha} \quad t_n^* < t \leq 1 \end{cases}$$

sztochasztikus folyamattal közelitett beérkezési folyamatot a teljesen véletlen szállitás esetének nevezi. Bebizonyitja a következő tételt:

1.4. Tétel:

(1.14) $$P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |t - F_n(t,0)| < M\right) = 1 - (1 - M)^n (1 + M)^{n-1},$$

ha $0 < M \leq 1$ és 0, ha $M \leq 0$.

Innen az

(1.15) $$1-(1-M)^n(1+M)^{n-1}=1-\epsilon$$

egyenlet megoldásával nyerhetjük a (1.10) megbizhatósági egyenlet pontos megoldását $\lambda = 0$ esetén.

László Zoltán [12] dolgozatában megvizsgálja azt az esetet is, amikor a (0,1) időintervallum összigénye nem egyezik meg a beérkező összes mennyiséggel, mert pl. az igény intenzitása különbözik a feltételezett értéktől. Ekkor a

(1.16) $$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{\alpha \cdot t - F_n(t,\lambda)\}$$

statisztika eloszlását kell meghatározni, ahol α pozitiv konstans. A $\lambda = 0$ esetre bizonyitja a következő tételt:

1.5. Tétel:

(1.17) $$P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{\alpha \cdot t - F_n(t,0)\} < M) = 1-(1-\frac{M}{\alpha})^n(1+M)^{n-1}$$

ha $\max\{0, \alpha - 1\} < M < \alpha$; 1, ha $\alpha \leqslant M$ és 0 egyébként.

Ha a beérkezési időszak hosszusága különbözik a felhasználási periódus hosszától, akkor az 1.5. tétel alkalmazható az optimális induló készletszint meghatározására a $\lambda = 0$ feltételezés mellett. Dolgozatunk II. fejezetében az (1.16) statisztika eloszlását tetszőleges $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetére meghatározzuk, továbbá véletlen α intenzitásu igény fellépését is vizsgáljuk.

4. Egyéb vizsgálatok az egytermékes modellel kapcsolatban

Az 1 – 3. pontban ismertett modellek egy anyagfajta (termék) készletszintjének kialakitását vizsgálják. Ha a $(0,t)$ intervallumban $(0 \leqslant t \leqslant T)$ igényelt összmennyiséget $\xi(t)$, a közben beérkező összmennyiséget $\eta(t)$ jelöli, akkor a valószinűséggel korlátozott készletmodelleket egy termék esetére a következő formában fogalmazhatjuk meg:

$$\min M,$$

(1.18) feltéve, hogy

$$P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{\xi(t) - \eta(t)\} < M) \geqslant 1-\epsilon$$

Az eddig vizsgált modellekben az $\eta(t)$ sztochasztikus folyamatot az empirikus eloszlásfüggvénnyel, vagy annak általánositott formájával közelitettük és a

$$(1.19)\qquad \xi(t) = c \cdot t \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

feltételezést tettük. Prékopa András [17] és Ziermann M. [28] megvizsgálja azt az esetet, amikor a $\xi(t)$ igényfolyamatot is az $\eta(t)$ beérkezési folyamathoz hasonlóan modellezzük. Pintér J. [15] megadja azt az induló készletszint értéket, mely több egymást követő periódusra biztositja a folyamatos anyagellátást.

Az $\eta(t)$ beérkezési, illetve a $\xi(t)$ igényfolyamat és az $\eta(t)$ beérkezési folyamat mindegyikét homogén Poisson folyamattal közeliti Németh Gyula [14] cikkében és erre a két esetre megadja az (1.18) feladat megoldását. Homogén Wiener folyamattal való közelités esetét is megvizsgálja. Feltételezi, hogy

$$(1.20)\qquad P(\eta(t) < x) = \Phi\left(\frac{x - u_1 t}{\sigma_1 \sqrt{t}}\right)$$

és

$$(1.21)\qquad P(\xi(t) < x) = \Phi\left(\frac{x - u_2 \cdot t}{\sigma_2 \cdot \sqrt{t}}\right)$$

ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvényt jelöli. Ha az $u_1 = u_2$ teljesül, akkor az (1.18) optimális megoldását az

$$(1{,}22)\qquad M = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\ \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)$$

adja. A Wiener folyamattal való közelités egy általánosabb modelljét adjuk a IV. fejezetben, ahol az $u_1 = u_2$ feltételezést elvetjük, továbbá sztochasztikusan összefüggő több beérkezési folyamat esetét tekintjük egy gyakorlati feladat kapcsán.

5. Prékopa többtermékes modellje időben nem homogén szállitási folyamatokra

Az eddig ismertetett modellek az anyagok (termékek) beérkezési sztochasztikus folyamatának időbeli homogenitását tételezik fel. Az első olyan modellt, mely nem él ezzel a megszoritással, Prékopa András közölte [18] cikkében. Itt több készletezendő anyag együttes készletszintjének optimumát kell meghatározni a hiány valószinüségének korlátozása mellett.

Először a vizsgált K számú anyag beérkezési folyamatának a [18] cikkben bevezetett modelljét ismertetjük, mely a 2. pontban szereplő modell általánositása. A különböző anyagok beérkezéseinek sztochasztikus folyamatát függetlennek tételezzük fel. Az egyszerüség kedvéért az anyagfajtára utaló felső indexet elhagyjuk, és az igényfolyamatot konstans, c intenzitásunak vesszük, bár az különösebb nehézség nélkül a beéérkezési folyamathoz hasonlóan modellezhető.

Mindegyik anyagfajta beérkezési folyamatáról a következőket tételezzük fel (anyagfajtánként különböző paraméterértékkel):

(5a) A szállitási időpontok száma rögzitett, ezt n jelöli.

(5b) A teljes szállitott mennyiség konstans és egyenlő $c.T$-vel, ami egyben a $(0,T)$ tervezési időszak anyagfelhasználása. Feltételezzük, hogy $c = T = 1$.

(5c) Az egyes szállitási időpontokban a szállitott mennyiségnek vektora sztochasztikusan független az érkezési időpontok rendszerétől.

(5d) A szállitott mennyiségek modellje a következő: δ jelöli a legkisebb, egy alkalommal biztosan szállitott mennyiséget $(0 \leqslant \delta \leqslant 1/n)$. A $(0, 1 - n \cdot \delta)$ intervallumban választunk L db pontot egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint, ahol $L > n - 1$. A kapott $y_1^* < y_2^* < \ldots < y_L^*$ rendezett mintából kiválasztjuk az $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1}$ sorszámuakat, végül a δ-val egyenlő fix szállitási mennyiségekhez rendre hozzáadjuk az

(1.23) $$\eta_1 = y_{i_1}^*, \quad \eta_2 = y_{i_2}^* - y_{i_1}^*, \ldots, \eta_n = 1 - n \cdot \delta - y_{i_{n-1}}^*$$

mennyiségeket. Ily módon tehát az n alkalommal szállitott véletlen mennyiségeket is a

(1.24) $$\delta + \eta_1, \quad \delta + \eta_2, \ldots, \delta + \eta_n$$

valószinüségi változók képviselik.

(5e) A szállitási időpontok folyamatát hasonlóan modellezük. A δ fix mennyiségnek megfelel egy γ minimális idő, mely két szomszédos szállitás között, illetve az első szállitás előtt biztosan van $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1/n)$ Az n db szállitási időpontot egy a $(0,1 - n\gamma)$ intervallumban egyenletes eloszlásu sokaság N elemű $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_N^*$ rendezett mintájából származtatjuk oly módon, hogy kiválasztjuk a $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ indexüeket, majd megalkotjuk a

(1.25) $$\xi_1 = x_{j_1}^*, \quad \xi_2 = x_{j_2}^* - x_{j_1}^*, \ldots, \xi_n = x_{j_n}^* - x^*_{j_{n-1}}$$

valószinüségi változókat, és végül a

(1.26) $$\gamma + \xi_1, \quad \gamma + \xi_2, \ldots, \gamma + \xi_n$$

valószinüségi változók részletösszegeiből megalkotjuk az n db szállitási időpontot.

A megbizhatósági modell az (5a) – (5e) feltételek szerint egymástól függetlenül beáramló k db anyagfajtára vonatkozik (melyre a felső index utal) és a következő valószinüséggel korlátozott sztochasztikus feladatban áll:

$$\min \sum_{i=1}^{k} d^{(i)} M^{(i)}$$

feltéve, hogy

$$(1.27) \quad H(\underline{M}) = h_1(M^{(1)}) \ldots h_k(M^{(k)}) \geqslant 1 - \epsilon,$$

$$\underline{M} \geqslant \underline{0}, \ \underline{M} \in D,$$

ahol $M^{(i)}$ jelöli az induló készletszintet, $d^{(i)}$ nemnegativ számok az egységnyi készletnek bizonyos értékelései (pl. ára) az i-edik anyagfajtára, D a kapacitáskorlátok k-dimenziós halmaza, a $h_i(M^{(i)})$ függvény pedig a folyamatos anyagellátási valószinüségét fejezi ki az i-edik anyagfajtára ($i = 1, \ldots, k$). Ez utóbbi a következő formában fejezhető ki (az anyagfajtára utaló indexeket itt is elhagyva):

$$(1.28) \quad h(M) = P(\zeta_j \leqslant M + (j-1)\delta - j \cdot \gamma, \quad j = 1, \ldots, n)$$

ahol

$$\zeta_1 = \xi_1$$

$$(1.29) \quad \zeta_2 = \xi_1 + \xi_2 - \eta_1$$

$$\ldots$$

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - \eta_1 - \eta_2 - \ldots - \eta_{n-1}.$$

Az (1.23) és (1.25) szerint értelmezett $\underline{\eta}' = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ és $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ valószinüségi vektorváltozók Dirichlet eloszlásuak, η együttes sürüségfüggvénye

$$(1.30) \quad s(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \left(\frac{1}{1-n\delta}\right)^n \frac{\Gamma(L+1)}{\Gamma(i_1)\Gamma(i_2-i_1)\ldots\Gamma(i_{n-1}-i_{n-2})\Gamma(L+1-i_{n-1})} *$$

$$* \left(\frac{z_1}{1-n\delta}\right)^{i_1-1} \left(\frac{z_2}{1-n\delta}\right)^{i_2-i_1-1} \ldots \left(\frac{z_{n-1}}{1-n\delta}\right)^{i_{n-1}-i_{n-2}-1} \left(1 - \frac{z_1 + \ldots + z_{n-1}}{1-n\delta}\right)^{L-i_{n-1}}$$

ha $z_i > 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $z_1 + \dots + z_{n-1} < 1 - n\delta$ és $s(z_1, \dots, z_{n-1}) = 0$ egyébként. Hasonló képlet adja $\underline{\xi}$ együttes sürüségfüggvényét. A $\underline{\xi}$ és $\underline{\eta}$ független valószinüségi vektorváltozók sürüségfüggvénye logaritmikusan konkáv, ennek felhasználásával Prékopa András [18] bebizonyitja, hogy az (1.28) szerint értelmezett $h(M)$ függvény az M változó logaritmikusan konkáv függvénye. Erre a tételre támaszkodva készitettük el az (1.27) sztochasztikus programozási feladat megoldási algoritmusát, melyben a $h(M)$ függvény értékeit szimulációs uton határozzuk meg. Az algoritmust a III. fejezetben részletesen ismertetjük.

II. Egy általánositott Kolmogorov – Szmirnov tipusú statisztika eloszlása és alkalmazása

1. A Kolgomorov – Szmirnov statisztika eloszlása véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvényre

Ebben a pontban definiáljuk a véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvényt és a megfelelő Kolmogorov – Szmirnov tipusú statisztika eloszlását határozzuk meg. Ez egy megbizhatósági készletmodell megoldáshoz szükséges, mely az előző fejezetben ismertetett valószinüséggel korlátozott modellek egy új változata:

Keressük azt a minimális M induló készletszintet, mely a $(0,T)$ tervezési periódus $(0,T_1)$ részében $(T_1 \leqslant T)$ $1-\epsilon$ valószinüséggel biztositja a folyamatos anyagellátását. A következő feltételes szélsőérték feladat megoldását keressük:

$$\min M$$

feltéve, hogy

$$(2.1) \qquad P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T_1} |\xi(t) - \eta(t)| < M\right) \geqslant 1-\epsilon,$$

ahol $\eta(t)$ és $\xi(t)$ jelöli a $(0,t)$ időintervallumban beérkező, illetve igényelt összes anyagmennyiséget $(0 \leqslant t \leqslant T)$ melyekről a következőket tételezzük fel:

(A): Az egyes szállitások n számú független és a $(0,T)$ intervallumban egyenletes eloszlású véletlen időpontban történnek (ez megegyezik az előző fejezet (1a) feltételével).

(B): A szállitott tételek véletlen nagyságuak, az i-edik szállitáskor beérkező mennyiséget a β_i/n valószinűségi változó képviseli $(i = 1, \dots, n)$.

(C): A $(0,T)$ intervallumban konstans α intenzitású igény jelentkezik $(\alpha > 0)$. A $(0,T_1)$ intervallumban beérkező mennyiség nem szükségképpen egyenlő az ugyanabban az intervallumban jelentkező igénnyel.

Legyen $s = T_1/T$ és az általánosság megszoritása nélkül feltételezhetjük, hogy $T = 1$. Ekkor az $F_n^{(\beta)}(t)$-vel jelölt beérkezési folyamat:

$$(2.2) \qquad F_n^{(\beta)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } 0 \leqslant t \leqslant t_1^*, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i/n & \text{, ha } t_k^* < t \leqslant t_{k+1}^* \quad (k = 1, \dots, n-1) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i/n & \text{, ha } t_n^* < t \leqslant 1, \end{cases}$$

melyet véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvénynek nevezzük, ahol $t_1^* < t_2^* < \ldots < t_n^*$ a (0,1)-en egyenletes eloszlásból vett rendezett minta. A (2.1) modellben $\eta(t) = F_n^{(\beta)}(t)$ és $\xi(t) = \alpha \cdot t$, ezért a szélsőérték feladat megoldásához a

$$(2.3) \qquad \sup_{0 \leq t \leq s} \{ \alpha \cdot t - F_n^{(\beta)}(t) \}$$

valószinűségi változó eloszlásának megadása szükséges. Ez esetünkben a (2.2) szerint definiált véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvényre vonatkozó Kolgomorov – Szmirnov tipusú statisztika.

Mielőtt a (2.3) statisztika eloszlását meghatároznánk, közlünk egy definiciót és Takács Lajos egyik tételét [26], melyet később felhasználunk.

Definició: Egy $\{\chi(u), \ 0 \leq u \leq T\}$ sztochasztikus folyamat felcserélhető növekményű, ha minden $n = 2,3 \ldots$ és minden véges $t \epsilon (0,T)$ esetén a

$$(2.4) \qquad \chi\left(\frac{r \cdot t}{n}\right) - \chi\left(\frac{r \cdot t - t}{n}\right), \qquad (r = 1,2,\ldots,n)$$

felcserélhető valószinűségi változók, azaz összes permutációjuknak megegyezik az együttes eloszlása.

2.1. Tétel: [26]: Tetszőleges $0 < y \leq T_1 \leq T$ esetén

$$(2.5) \qquad P\left(\sup_{0 \leq t \leq T_1} \{ t - \chi(t) \} \leq y\right) = 1 - \int_y^T \frac{y}{t}\, d_t P(\chi(t) \leq t - y)$$

ha $\{\chi(t), 0 \leq t \leq T\}$ szeparábilis, felcserélhető növekményű sztochasztikus folyamat, melynek majdnem minden realizációja nemcsökkenő lépcsős függvény, mely $t = 0$-ra eltünik.

A 2.1. tételben $d_t P(\chi(u) \leq t)$ a $P(t < \chi(u) < t + dt)$ valószinűséget jelöli akkor is, ha u a t-nek függvénye.

Most ismertetjük tételünket, mely a (2.3) Kolgomorov – Szmirnov tipusú statisztika eloszlását adja:

2.2. Tétel: Ha a β_i valószinűségi változók $(i = 1, \ldots, n)$ felcserélhetők, azaz $n!$ permutációjuk mindegyikének azonos az együttes eloszlása, akkor a (2.2) szerint definiált $F_n^{(\beta)}(t)$ véletlen ugrású empirikus eloszlásfüggvényre

$$P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant s} \left| \alpha \cdot t - F_n^{(\beta)}(t) \right| < M\right) = 1 - \left(1 - \frac{M}{\alpha}\right)^n -$$

(2.6)

$$- \frac{M}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \int_0^{n(\alpha s - M)} \left(\frac{M + \frac{x}{n}}{\alpha} \right)^{k-1} \left(1 - \frac{M + \frac{x}{n}}{\alpha} \right)^{n-k} dH_k(x),$$

ahol $H_k(x)$ jelöli a $\sum_{i=1}^{k} \beta_i$ eloszlásfüggvényét, α pozitiv konstans és $s \leqslant 1$.

Bizonyitás: A (2.3) statisztika eloszlását egy n dimenziós tartományon vett bonyolult integrál formulában lehet kifejezni. Ennek elemi úton történő egyszerűsitése rendkivül nehézkes. A $\chi(t) = F_n^{(\beta)}(t)/\alpha$ ($\alpha > 0$, konstans) sztochasztikus folyamatra teljesülnek a 2.1. tétel feltételei, ha a $\beta_i (i = 1, \ldots, n)$ valószinűségi változók felcserélhetőek. A 2.1. tétel jelöléseit alkalmazva az $y = M/\alpha$ helyettesitéssel

(2.6) $\quad d_t P(\chi(t) \leqslant t - y) = d_t P(F_n^{(\beta)}(t) \leqslant \alpha \cdot t - M).$

Ezt a valószinűséget határozzuk meg először.

Az $\alpha t - M$ *egyenes* $(0 \leqslant t \leqslant s)$ az $F_n^{(\beta)}(t) = 0$ magasságban, az első ugrási pont, t_1^* előtt metszi az $F_n^{(\beta)}(t)$ lépcsős függvényt, ha $t_1^* > M/\alpha$ mely egy $(1 - M/\alpha)^n$ valószinűségi esemény, ha $t \geqslant M/\alpha$ egyébként 0 valószinűséggel fordul elő (lásd az 1. ábrán). Igy

(2.7) $\quad d_t P(F_n^{(\beta)}(t) \leqslant \alpha \cdot t - M | t = M/\alpha < t_1^*) = (1 - M/\alpha)^n.$

Az $F_n^{(\beta)}(t)$ és $\alpha \cdot t - M$ metszése a $\sum_{i=1}^{n} \beta_i/n$, azaz a k-adik ugrás magasságában történik $(k = 1, \ldots, n)$, ha $t_k^* < t \leqslant t_{k+1}^*$ (ahol $t_{n+1}^* = 1$ definició szerint) és

(2.8) $$\frac{\sum_{i=1}^{k} \beta_i}{n} \leqslant \alpha \cdot t - M,$$

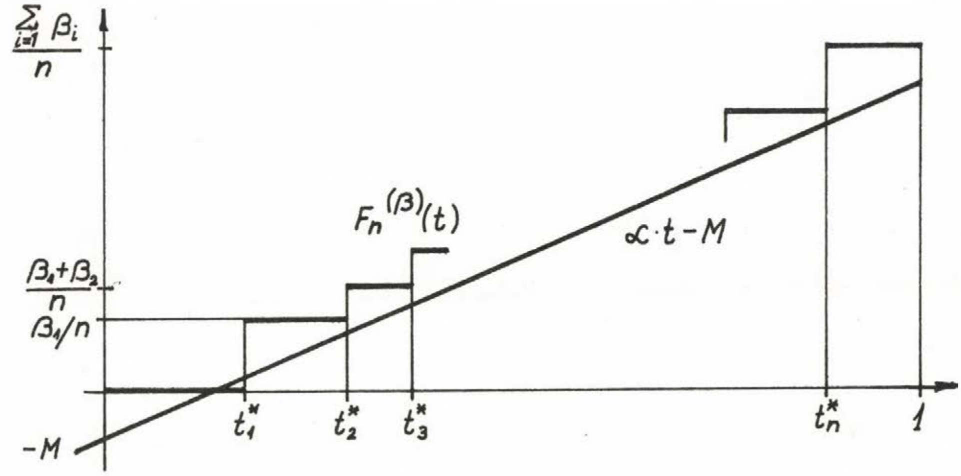
melyre

(2.9) $\quad P(t_k^* < t \leqslant t_{k+1}^*) = \binom{n}{k} t^k (1 - t)^{n-k}$

és

(2.10) $$d_t P\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \leqslant n(\alpha \cdot t - M) | t_k^* < t \leqslant t_{k+1}^*\right) =$$

$$= n\alpha d_t H_k(n(\alpha \cdot t - M)).$$



$F_n^{(\beta)}(t)$ és αt-M metszéspontjai

1. ábra

Ezek után közvetlenül fel tudjuk használni a (2.5) összefüggését, mely szerint

$$P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant s} \{\alpha \cdot t - F_n^{(\beta)}(t)\} \leqslant M\right) = 1 - \int_{M/\alpha}^{s} \frac{M}{\alpha \cdot t}\, d_t P(F_n^{(\beta)}(t) \leqslant \alpha \cdot t - M) =$$

$$(2.11) \qquad = 1 - \left(1 - \frac{M}{\alpha}\right)^n - Mn \int_{M/\alpha}^{s} \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\right] d_t H_k(n(\alpha \cdot t - M)).$$

Ez az összefüggés pedig az $x = n(\alpha \cdot t - M)$ helyetesitéssel a kivánt (2.6) egyenlőséget adja.

Csáki Endre a [4] dolgozatában a (2.6)-hoz hasonló formulát vezetett le arra a speciális esetre, amikor a $\beta_i (i = 1, \dots, n)$ független, azonos eloszlású valószinüségi változók. A felcserélhető valószinűségi változókra való kiterjesztés jelentőségét közvetlenül látjuk a következő pontban, ahol az I. fejezet 2. pontjában bevezetett véletlen ütemezésű szállitás esetére kivánjuk a tételt alkalmazni. A tétel közvetlen alkalmazására a gyakorlatban is sor kerülhet, ha a beérkező tételnagyságok eloszlását meg tudjuk adni.

2. A hiány valószinűségének meghatározása véletlen ütemezésű szállitás esetén

A gyakorlati alkalmazás szempontjából nagy jelentősége van az I. fejezet 2. pontjában leírt véletlen ütemezésű szállitás modelljének. Ez Prékopa András [17] dolgozata szerint a következő sztochasztikus folyamat:

$$(2.12)\qquad F_n(t,\lambda) = \begin{cases} 0 & ,\text{ ha } \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1^*, \\ \lambda \frac{k}{n} + (1-\lambda)\tau_k^*, & ,\text{ ha } \quad t_k^* < t \leqslant t_{k+1}^* \quad (k = 1,\dots,n-1), \\ 1 & ,\text{ ha } \quad t_n^* < t \leqslant 1, \end{cases}$$

ahol $(t_1^* < t_2^* < \dots < t_n^*)$, $(\tau_1^* < \tau_2^* < \dots < \tau_{n-1}^*)$ egymástól független, a (0,1) intervallumban egyenletes eloszlású véletlen pontok rendezett sorozatai és $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ konstans.

Az optimális M induló készletszintet a

min M

feltéve, hogy

$$(2.13)\qquad P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t - F_n(t,\lambda)| < M) \geqslant 1 - \epsilon$$

feltételes szélsőérték feladat megoldása adja, ahol ϵ rögzitett konstans $(0 < \epsilon < 1)$. Ezt a

$$(2.14)\qquad \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t - F_n(t,\lambda)|$$

statisztika eloszlásának segítségével lehet meghatározni. Mint a I/2. pontban ismertettük, Prékopa András [19] dolgozatában meghatározta a

$$(2.15)\qquad \sqrt{\frac{n}{1 + (1-\lambda)^2}} \cdot \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t - F_n(t,\lambda)|$$

statisztika aszimptotikus eloszlását $n \to \infty$ esetén, tetszőleges $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ értékre. Véges n esetén a (2.14) statisztika eloszlását a $\lambda = 1$ esetre Szmirnov [25] a $\lambda = 0$ esetre László Z. [13] adta meg (lásd 1.1. és 1.4 tétel).

Tetszőleges $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén az általánosabb

$$(2.16)\qquad \sup_{0 \leqslant t \leqslant s} \{\alpha \cdot t - F_n(t,\lambda)\}$$

statisztika eloszlását határozzuk meg az előző pontban bizonyitott 2.2 tétel segítségével ahol $s \leqslant 1$ és α pozitiv konstans.

2.3. Tétel: A (2.12) szerint definiált $F_n(t,\lambda)$ általánositott empirikus eloszlásfüggvényre $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ esetén

$$P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant s} \{\alpha \cdot t - F_n(t,\lambda)\} < M\right) = 1 - \left(1 - \frac{M}{\alpha}\right)^n -$$

(2.17)

$$- \frac{M}{\alpha} \sum_{k=1}^{r} k \binom{n}{k} \binom{n-1}{k} \int_0^{a_k} \left(\frac{M + (1-\lambda)z + \lambda \frac{k}{n}}{\alpha} \right)^{k-1} \left(1 - \frac{M + (1-\lambda)z + \lambda \frac{k}{n}}{\alpha} \right)^{n-k} z^{k-1}(1-z)^{n-k-1} dz,$$

$\max \{0, \alpha - 1\} < M < \alpha \cdot s$ esetén, ahol

$$a_k = \min \left\{ \frac{\alpha \cdot s - M - \lambda \frac{k}{n}}{1 - \lambda}, 1 \right\}$$

és

$$r = \min \left\{ \frac{n}{\lambda} (\alpha \cdot s - M), n - 1 \right\}$$

$\lambda = 0$ esetén $r = n - 1$ és $\lambda = 1$ esetén $a_k = 1$

Bizonyitás:

Legyen

(2.18) $\beta_i = \lambda + n(1 - \lambda)(\tau_i^* - \tau_{i-1}^*), \quad i = 1, \ldots, n$

ahol $\tau_1^* < \ldots < \tau_{n-1}^*$ a (0,1)-en egyenletes eloszlásból vett $n - 1$ elemű rendezett minta, $\tau_0^* = 0$ és $\tau_n^* = 1$. A (2.18) valószinűségi változók felcserélhetők (de nyilván nem függetlenek), mert a $\vartheta_i = \tau_i^* - \tau_{i-1}^*$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$ valószinűségi változók együttes sürüségfüggvénye (l.: pl. S. Wilks [27]) $f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = n!$ az

$$S_{n-1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}) : x_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n-1 \text{ és } \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leqslant 1 \right\}$$

$n - 1$ dimenziós szimplexben és 0 ezen kivül, ezért

$$\vartheta_n = 1 - (\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_{n-1}) = \tau_n^* - \tau_{n-1}^* \quad \text{és a } \vartheta_i \ (i = 1, \ldots, n-1)$$

valószinűségi változók együttes sürűségfüggvénye az $x_1, \ldots, x_{n-1}$ és $x_n = 1 - (x_1, \ldots, x_{n-1})$ változók teljesen szimmetrikus függvénye.

Igy tehát a 2.2. tétel alkalmazható a (2.16) statisztika eloszlásának meghatározására.

A β_i $(i = 1, \ldots, n)$ valószinűségi változók (2.18) szerinti értelmezése miatt (a 2.2. tétel jelöléseit alkalmazva):

$$H_k(x) = P(\tau_k^* < \frac{x - k \cdot \lambda}{n(1 - \lambda)})$$

és

$$dH_k(x) = k\binom{n-1}{k}\frac{1}{n(1-\lambda)}\left[\frac{x - k \cdot \lambda}{n(1-\lambda)}\right]^{k-1}\left[1 - \frac{x - k \cdot \lambda}{n(1-\lambda)}\right]^{n-k-1} dx.$$

A $z = \frac{x - k \cdot \lambda}{n(1 - \lambda)}$ helyettesitéssel a bizonyitandó (2.17) összefüggést nyerjük.

A (2.17) valószinűség M monoton növekvő függvénye, így a (2.13) feltételes szélsőérték feladat megoldását a

(2.18) $P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} | t - F_n(t,\lambda) | < M) = 1 - \epsilon$

az u.n. megbizhatósági egyenlet megoldása adja. A (2.17) jobboldali kifejezése alkalmas arra hogy egyszerű numerikus módszerrel meghatározzuk a (2.19) egyenlet gyökét. Gyakorlati feladatoknál hasznos segitséget jelent a (2.17) eloszlás táblázatos megadása.. Az I. mellékletben csatolunk ilyen táblázatokat, melyek egyuttal lehetővé teszik, hogy az (1.9) aszimptotikus eloszlás konvergenciájára is tapasztalati becsléseket adjunk és különböző ϵ értékek esetén meghatározzuk azt a legkisebb n értéket, melyre a gyakorlatban még elfogadható közelitést kapunk (1.11) alapján. A II. mellékletben összehasonlitjuk (2.19) egzakt és közelitő megoldásait.

A (2.14) statisztika eloszlását először László Z. határozta meg, mely eredményét még nem publikálta. A (2.16) statisztika, a (2.14) általunk megvizsgált általánosabb megfogalmazása lehetővé teszi olyan feladatok megoldását is, melyekre a korábbi eredmények nem voltak alkalmasak. Példaként néhány olyan gyakorlati feladatot ismertetünk, melyben a 2.2 tétel eredménye alkalmazható.

A megrendelt és beérkezett összmennyiség sokszor nem egyezik meg a tervperiódus igényelt összmennyiségével, mert a termelés intenzitása megváltozott. Ez az $\alpha \neq 1$ esetet jelenti, és a hiány valósznűségét a (2.16) statisztika eloszlásának segitségével lehet meghatározni.

Az igény intenzitására adott becslés gyakran pontatlan, α értékét célszerű valószinűségi változónak tekinteni. Ekkor is alkalmazható a 2.2. tétel eredménye, mint ezt a következő pontban kifejtjük.

Ha a beérkezési időszak hossúsága különbözik a felhasználási periódus hosszától, akkor alkalmas transzformációval az optimális induló készletszint meghatározható a 2.2. tétel segítségével, hasonlóan, mint az László Z. [12] dolgozatában részletesen ki van fejtve $\lambda = 0$ esetére.

A gyakorlatban előfordul, hogy a raktárban előforduló maximális készletszint nagyságára kell becslést adni vagy megtervezni azt a K raktárkapacitást, melyet $1 - \epsilon$ valószinűséggel nem lép túl a készletszint a $(0,T)$ periódusban. Ha a beérkezés az $F_n(t,\lambda)$ folyamat szerint történik, α az igény intemzitása és M az induló készletszint, akkor a

(2.20) $\quad P(\sup_{0 \leqslant t} \{M + F_n(t,\lambda) - \alpha \cdot t\} < K) = 1 - \epsilon$

egyenletet kell meoldani K-ra. Tetszőleges $\alpha > 0$ és $0 \geqslant \lambda \leqslant 1$ esetén felhasználható a 2.2. tétel eredménye a kövatkező összefüggés alapján:

2.3. Tétel:

$$P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} | \alpha \cdot t - F_n(t,\lambda) | < y) =$$

(2.21)

$$= P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} | F_n(t,\lambda) - \alpha \cdot t | < y + 1 - \alpha).$$

Bizonyitás: (2.21) baloldalát átalakitva kapjuk, hogy

$$P(\max \{ \alpha t_1^*, \alpha t_2^* - \frac{\lambda}{n} (1 - \lambda)\tau_1^*, \ldots, \alpha t_k^* - \lambda \frac{k-1}{n} - (1 - \lambda)\tau_{k-1}^*,$$

$$\ldots, \alpha t_{n-1}^* - \lambda \frac{n-2}{n} - (1 - \lambda)\tau_{n-2}^*, \alpha t_n^* - \lambda \frac{n-1}{n} -(1 - \lambda)\tau_{n-1}^* \} < y) =$$

$$= P(\max \{ \alpha(1 - t_n^*), \alpha(1 - t_{n-1}^*) - \lambda(1 - \frac{n-1}{n}) - (1 - \lambda)(1 - \tau_{n-1}^*), \ldots,$$

$$\alpha(1 - t_{n-k+1}^*) - \lambda(1 - \frac{n-k+1}{n}) - (1 - \lambda)(1 - \tau_{n-k+1}^*), \ldots,$$

$$\alpha(1 - t_1^*) - \lambda(1 - \frac{1}{n}) - (1 - \lambda)(1 - \tau_1^*)\} < y) =$$

$$= P(\max \{ \lambda \frac{1}{n} + (1 - \lambda)\tau_1^* - \alpha t_1^* + (\alpha - 1), \ldots, \lambda \frac{n-k+1}{n} +(1 - \lambda)\tau_{n-k+1}^* -$$

$$- \alpha t_{n-k+1}^* + (\alpha - 1), \ldots, \lambda \frac{n-1}{n} + (1 - \lambda)\tau_{n-1}^* - \alpha t_{n-1}^* + (\alpha - 1), 1 - \alpha t_n^* +$$

$$+ (\alpha - 1) \} < y) = P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{F_n(t,\lambda) - \alpha \cdot t\} < y + (1 - \alpha)),$$

ahol felhasználtuk, hogy t_k^* és t_{n-k+1}^* $(k = 1, \ldots, n)$ valamint τ_k^* és τ_{n-k}^* $(k = 1, \ldots, n - 1)$ páronként azonos eloszlásuak.

3. Véletlen intenzitásu igény vizsgálata

A megrendelés feladásának időpontjában gyakran nem ismert a tervezési periódus várható termelési intenzitása, azaz az igényfolyamat α paraméterére csupán becslést tudunk adni. Ekkor az α paramétert célszerű valószinűségi változónak tekinteni. Jelölje ennek eloszlásfüggvényét $G(y)$.

Az optimális M induló készletszint értékét a

min M

feltéve, hogy

(2.22)
$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \{ \alpha \cdot t - F_n(t,\lambda) \} < M\right) \geq 1 - \epsilon$$

feltételeles szélsőérték feladat megoldása nyujtja. Vizsgáljuk a

(2.23)
$$\int_{-\infty}^{\infty} P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \{\alpha \cdot t - F_n(t,\lambda)\} < M \mid \alpha = y\right) dG(y) = 1 - \epsilon$$

egyenletet! A bal oldalon álló valószinűség mint M-ben monoton növekvő (2.17) alakú függvények keveréke szintén monoton növekvő az M változó szerint, így (2.23) megoldása a (2.22) optimumát adja. A (2.23) egyenlet megoldása a gyakorlati alkalmazás céljaira sokszor tulságosan hosszadalmas, ezért kidolgoztunk egy egyszerű eljárást, mely $\lambda = 1$ esetén alkalmazható az optimális készletszint közelítésére.

A $\lambda = 1$ esetben $F_n(t,\lambda)$ az $F_n(t)$-vel jelölt empirikus eloszlásfüggvény, melyre alkalmazhatjuk Szmirnov határeloszlás tételének következő általánositását (bizonyítást l. pl. Csáki E. [4]/:

2.4. Tétel:

$\nu > 0$ és $\nu > h$ esetén

(2.24)
$$\lim_{n \to \infty} P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \left\{\left(1 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right) \cdot F_n(t)\right\} < \frac{\nu}{\sqrt{n}}\right) = 1 - e^{-2\nu(\nu - h)}.$$

Ha az $\alpha = 1 + h/\sqrt{n}$ és $M = \nu/\sqrt{n}$ helyettesitéseket alkalmazzuk, véges n értékekre a következő közelítést nyerhetjük.

(2.25)
$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \{ \alpha \cdot t - F_n(t) \} < M\right) \approx 1 - e^{-2nM(M + 1 - \alpha)}$$

$\max \{0, \alpha - 1\} < M < \alpha$ esetén. Ismert, hogy a Szmirnov tipusú aszimptotikus eloszlások konvergenciája elég lassú.

Összehasonlításokat végezve a (2.17) alapján meghatározott egzakt eloszlás értékeivel (1. I. melléklet), mégis azt tapasztaltuk, hogy a gyakorlatban alkalmazott $\epsilon = 0,05 - 0,2$

esetén a közelítés elfogadható.

Ha a

$$(2.26) \qquad P(\sup_{0 \leq t \leq 1} |\alpha \cdot t - F_n(t)| < M)\ 1 - \epsilon$$

egyenletet megoldjuk M-re a (2.5) közelítés és az egzakt eloszlás mellett (1. II. melléklet), a fenti értékek esetén a gyökök eltérése is a közelítés alkalmazhatóságát mutatja. A közelítő formula általában nagyobb valószinűséget ad a pontos értéknél, ezen torzítás miatt célszerű az $1 - \epsilon$ valószínűségi korlátnak a csökkentése.

A (2.26) egyenlet megoldását a (2.25) közelítés esetén rögzített α mellett a következő egyszerű explicit formula adja:

$$(2.27) \qquad M \approx \frac{\alpha - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2n} \log \frac{1}{\epsilon}}$$

ami a gyakorlatban igen elterjedt (1.7) közelítő megoldás általánositott formája.

Ha α valószínűségi változó, akkor a (2.25) közelítés mellett a teljes valószínűség tétele szerint

$$(2.28) \qquad P(\sup_{0 \leq t \leq 1} |\alpha \cdot t - F_n(t)| < M) \approx 1 - e^{-2nM(M+1)} E[e^{2nM\alpha}]$$

ha az $E[e^{2nM\alpha}]$ várható érték létezik. A (2.26) megbizhatósági egyenlet α különböző eloszlása esetén általában numerikus módszerrel könnyen megoldható, ha a (2.25) közelítést elfogadjuk.

A gyakorlati alkalmazás szempontjából legfontosabb a normális eloszlású α esete, ugyanis a becslési eljárás általában a várható érték és a szórás nagyságát adja és a normális eloszlással való közelítés gyakran elfogadható. Az m és s paraméterű normális eloszlású α esetében (2.26) közelitő megoldására, azaz M induló készletszint közel optimális értékére egyszerű explicit formulát tudunk adni:

$$(2.29) \qquad M \approx \frac{m - 1}{2(1 - ns^2)} + \sqrt{\frac{m - 1}{2(1 - ns^2)} + \frac{\log 1/\epsilon}{2n(1 - ns^2)}}$$

ha $s < \frac{1}{\sqrt{n}}$ teljesül.

A (2.29) közelítő megoldást elemi számolással kaphatjuk. Tetszőleges c konstansra érvényes a következő egyenlőség:

$$E[e^{c\cdot\alpha}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{c\cdot x - \frac{(x-m)^2}{2s^2}}\,dx =$$

$$= e^{mc + \frac{c^2s^2}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(m+cs^2))^2}{2s^2}}\,dx\right],$$

ahol a szögletes zárójelben levő tényező az $m + cs^2$ várható értékű és s szorású normális eloszlásfüggvény $+\infty$ -ben felvett értéke, így egyenlő 1-gyel. Az m és s paraméterű normális eloszlású α esetében a (2.28) közelítő eloszlás tehát

$$P(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\alpha\cdot t - F_n(t)| < M)$$

(2.30) $$\approx 1 - e^{-2nM[M+1-(m+nMs^2)]},$$

ha

(2.31) $$\max\left\{0, \frac{m-1}{1-ns^2}\right\} < M < \frac{m}{1-ns^2}$$

Ekkor a (2.26) megbizhatósági egyenlet közelítő megoldását adja az

(2.32) $$e^{-2nM[M+1-(m+nMs^2)]} = 1 - \epsilon$$

egyenlet (2.29) alakú gyöke, ha teljesülnek rá a (2.31) egyenlőtlenségek, melynek feltétele pontosan az $s < \frac{1}{\sqrt{n}}$ teljesülése.

III. Sztochasztikus programozási algoritmus több termék együttes készletszintjének meghatáro-meghatározására

1. A megoldási algoritmus és konvergenciájának bizonyítása

Prékopa András [18] cikkében leírt valószinűséggel korlátozott megbizhatósági készletmodell megoldási algoritmusát ismertetjük. Az I. fejezet 5. pontjában részletesen leírt modell k számú különféle termék (anyagfajta) optimális induló $\underline{M}' = (M^{(1)}, \ldots, M^{(k)})$ készletszint vektorát a következő sztochasztikus, egyben nemlineáris programozási feladat megoldásaként definiálja:

$$\min \sum_{i=1}^{k} d^{(i)} M^{(i)}$$

feltéve, hogy

$$H(\underline{M}) = h_1(M^{(1)}) \ldots h_k(M^{(k)}) \geqslant 1 - \epsilon, \tag{3.1}$$

$$M \geqslant \underline{0}, \ \underline{M} \in D,$$

ahol $d^{(i)}$ nemnegativ számok az egységnyi készletnek bizonyos értékelései (pl. beszerzési ára), a $h_i(M^{(i)})$ függvények pedig a hiány valószínűségét fejezi ki az i-edik termékre ($i = 1, \ldots, k$) és (1.28) szerint vannak értelmezve. D a kapacitáskorlátok k dimenziós halmaza $1 - \epsilon$ pedig a folyamatos anyagellátás valószínűségének alsó korlátja.

A (3.1) feladat megoldására a Fiacco – McCormick [6] által bevezetett SUMT nemlineáris programozási módszer belső pont algoritmusát alkalmazzuk. Tekintsük ehhez az alábbi büntető függvényt:

$$G(r, \underline{M}) = \sum_{i=1}^{k} d^{(i)} M^{(i)} - r \log\left(\prod_{i=1}^{k} h_i(M^{(i)}) - 1 + \epsilon\right), \tag{3.2}$$

ahol r rögzitett potitiv szám. Mint azt az I/5. pontban ismertettünk, Prékopa András [18] dolgozatában igazolta, hogy a $h_i(M^{(i)})$ függvények az $M^{(i)}$ változó logaritmikusan konkáv függvényei $i = 1, \ldots, k$ esetére és ebből könnyen belátható, hogy minden rögzitett ϵ esetén

$$\prod_{i=1}^{k} h_i(M^{(i)}) - 1 + \epsilon \tag{3.3}$$

is logaritmikusan konkáv függvény. Ebből következik, hogy rögzitett r esetén az M vektorváltozó $G(r,M)$ függvénye konvex az $\{ \underline{M} | \underline{M} \geqslant \underline{0} \}$ halmazon.

A SUMT belső pont módszere úgy müködik, hogy egy 0-hoz konvergáló $r_1 > r_2 > \ldots$ sorozat (elvben) minden r_m elemére elvégezzük a $G(r_m, \underline{M})$ függvény minimalizálását (ami a konvexitás miatt a globális minimumot adja). A minimum-értékek sorozata bizonyos feltételek teljesülése esetén konvergál a (3.1) feladat minimális célfüggvényértékéhez, tehát elég nagy m esetén a $G(r_m, \underline{M})$ függvényt minimalizáló $\underline{M}_m$ közelítőleg optimális megoldása feladatunknak.

Megmutatjuk, hogyha az $M^{(i)} \leqslant 1$ feltételt tesszük $i = 1, \ldots, k$ esetén, akkor a fenti konvergencia teljesül. E feltétel különben a feladat szempontjából nem jelent megszorítást, ugyanis triviálisan teljesülnek a

(3.4) $\quad h_i(1) = 1, \quad i = 1, \ldots, k$

egyenlőségek, amiből következik, hogy az $M^{(i)} \leqslant 1$ feltétel nélkül is az optimális $M^{(1)}, \ldots, M^{(k)}$ értékek mind automatikusan 1-nél kisebbnek adódnak.

Fiacco és McCormick [6] dolgozatukban bebizonyıtják, hogy a SUMT belső pont algoritmus konvergenciájának folytonos feltételi és célfüggvények esetén elegendő feltétele, hogy a megengedett megoldásokat meghatározó egyenlőtlenségek mind határozott egyenlőtlenséggel teljesülnek a belső pontokban.

Ami a (3.1) modellt illeti, a $0 \leqslant M^{(i)} \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, k$ feltételek már az ugyanezen feltételekkel meghatározott k dimenziós egységkocka belső pontjaiban is határozott egyenlőtlenséggel teljesülnek, elegendő tehát a valószínűségi feltétellel foglalkozni.

Legyen $\underline{M}_1$ a megengedett megoldások halmazának belső pontja.
Megmutatjuk, hogy $H(\underline{M}_1) > 1 - \epsilon$, ahol $0 < \epsilon < 1$. Az $\underline{1}$ és $\underline{M}_1$ vektorokat összekötő szakasz benne van a megengedett megoldások halmazában, minthogy ez konvex halmaz. E szakaszt $\underline{M}_1$-ből tovább meghosszabbítva, a kapott félegyenesen válasszunk egy $\underline{M}_0 \neq \underline{M}_1$ megengedett megoldást. Ekkor alkalmas $0 < \lambda < 1$ számmal fennáll az

$$\underline{M}_1 = \lambda \cdot \underline{1} + (1 - \lambda)\underline{M}_0$$

egyenlőség, amiből $H(\underline{M})$ logaritmikusan konkavitása miatt adódik, hogy

$$H(\underline{M}_1) \geqslant [H(\underline{1})]^{\lambda}[H(\underline{M}_0)]^{1-\lambda} \geqslant (1 - \epsilon)^{1 - \lambda} > 1 - \epsilon.$$

Ezzel tehát bebizonyitottuk, hogy a SUMT belső pont algoritmus konvergens a mi esetünkben.

A (3.2) szerinti $G(r,\underline{M})$ függvény feltétel nélküli minimalizálására sok általános módszer specializálható. Ezek egy része a gradiens meghatározását kivánja, melyre kidolgoztunk egy szimulációs eljárást (l. Prékopa András – Kelle Péter [21]). A nagy számitásigénye miatt nem volt célszerű az alkalmazása, így gradiensmentes módszereket alkalmaztunk (3.2) minimalizálására. Ezek közül Hooke és Jeeves [8], Rosenbrock [24] valamint Powell [16] módszerét említjük. A tapasztalatok szerint legjobbnak Hooke és Jeeves eljárása bizonyult, ami az optimum gyakorlat szempontjából megfelelő közelítésének gyorsaságát illeti. Numerikus példát és az algoritmus részletes leírást Prékopa András – Kelle Péter [21] és [22] cikkei tartalmazzák. Mellékeltük a programfutás egy eredményét (l. III. melléklet).

2. A folyamatos ellátás valószinűségének meghatározása szimulációs eljárással

A folyamatos anyagellátás valószínűségét a

(3.5) $\quad H(\underline{M}) = h_1(M^{(1)} \ldots h_k(M^{(k)})$

függvény fejezi ki, melynek kiszámítása adott $\underline{M}$ esetében szimulációval történik. A $h_i(M^{(i)})$ $i = 1, \ldots, k$ függvényeket az (1.28) kifejezések adják, kiszámításuk (elvileg) az (1.30) típusú Dirichlet eloszlás sürűségfüggvényének n dimenziós tartományon történő integrálása utján analitikusan is elvégezhető. Itt n a tervperiódusban történő szállítások számát jelöli, nagysága a gyakorlatban 10-et is meghaladhatja, ami az analitikus megoldás hatásosságát (illetve lehetőségét) kizárja.

A szimulációs módszer végrehajtására két módszer is kinálkozik. Ez egyik pontosan követi a szállítási időpontok és a szállított mennyiségek (1.24) és (1.26) alatti modellálását: N illetve L elemű egyenletes eloszlású mintákat vesszük nagy számban, ezeket rendezzük, és a kivánt sorszámú elemeket kiválasztjuk, stb. Ennek a módszernek nagy hátránya, hogy a nagy számban előforduló rendezés müveletének végrehajtása igen sok gépidőt igényel. Bár jól szervezett rendező rutinnal sikerült viszonylag jó gépidőt elérni, mégis nagy N (illetve L) esetén mindenképpen kedvezőtlen ez a módszer. Ismeretes ugyanis, hogy N elem rendezéseinek időtartama legalább $N \cdot \log_2 N$ nagyságrendben növekszik (1. Knuth, D.E. [11]/.

A másik, az előbbinél hatékonyabb szimulációs módszer azon alapszik, hogy tetszőleges Dirichlet eloszlás reprezentálható (lásd Wilks [27]), mint olyan $y_1, \ldots, y_n$ valószinűségi változók eloszlása, melyek

(3.6) $$y_i = \frac{x_i}{x_1 + \ldots + x_{n+1}}, \quad i = 1, \ldots, n$$

alakuak, ahol $x_1, \ldots, x_{n+1}$ független, standard gamma eloszlású valószinűségi változók, azaz x_i sürüségfüggvénye az alábbi

(3.7) $$\frac{z^{\vartheta_i - 1} e^{-z}}{\Gamma(\vartheta_i),}, \quad z > 0,$$

$\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n+1}$ pozitiv állandóak. Valóban a (3.6) valószinűségi változok együttes sürűségfüggvénye a következő:

(3.8) $$\frac{\Gamma(\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_{n+1})}{\Gamma(\vartheta_1) \ldots \Gamma(\vartheta_{n+1})} z_1^{\vartheta_1 - 1} \ldots z_n^{\vartheta_n - 1} (1 - z_1 - \ldots - z_n)^{\vartheta_{n+1} - 1}$$

ha $z_i > 0$, $i = 1, \ldots, n, z_1 + \ldots + z_n < 1$ egyébként pedig zéró, tehát $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n+1}$ alkalmas megválasztásával a kivánt Dirichlet eloszlás áll elő.

Ahrens és Dieter [1] hatékony módszert dolgozott ki gamma eloszlású valószinűségi változok szimulálására. Ez a módszer akkor igen előnyős, amikor a paraméter nagy vagy nem egész szám.

A valószinűségeket a szimuláció révén nyert relativ gyakoriságokkal közelítjük meg. Az adott pontosságot biztositó mintaelemszámot a Csebisev egyenlőtlenség Bernstein– féle élesítésére (l. pl. Rényi A. [23]) támaszkodva határozzuk meg. Az említett Bernstein– egyenlőtlenség a következő: ha ν_m jelöli m kisérlet során egy p valószinűségű esemény gyakoriságát, akkor

$$(3.9) \qquad P\left(\left|\frac{\nu_m}{m} - p\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant 2 \exp\left(-\frac{m\epsilon^2}{2p(1-p)\left(1+\frac{\epsilon}{2p(1-p)}\right)^2}\right)$$

ha $\qquad 0 < \epsilon \leqslant p(1-p)$.

Ha a baloldalon álló valószinűséget δ-val tesszük egyenlővé, akkor m-re azt kapjuk, hogy

$$(3.10) \qquad m \geqslant \frac{2p(1-p)\left(1+\frac{\epsilon}{2p(1-p)}\right)^2}{\epsilon^2} \log\frac{2}{\delta}.$$

Ha p változik 0 és 1 között, minden más pedig állandó (3.9) jobb oldalán, akkor a legnagyobb érték a $p = 1/2$ esetben adódik. Az így kapott alsó határ minden p valószinűségre univerzálisan jó. A valószinűséggel korlátozott modelleknél adhatunk p értékére alsó korlátot.

Készletmodelljeinkben a $H(\underline{M})$ függvény alsó korlátjaként legalább 0,8 használatos. Ilyen módon a szükséges mintaelemszám sokkal kisebb, mintha a valószinűségről semmilyen információ nem állna rendelkezésre. Az alábbi táblázat jól illusztrálja az m mintaelemszám változását ϵ és p függvényében, 90% biztonság mellett (a táblázatolt mintaelemszám az a legkisebb m, amelyre (3.9) baloldala nem nagyobb, mint 0,1):

p \ ϵ	0,1	0,05	0,025	0,01
0,5	216	726	2642	15.606
0,8	165	513	1785	10.209
0,9	130	352	1120	6,016
0,95	120	265	727	3.481

IV. Valószinűséggel korlátozott készletmodell egy aszfaltkeverési feladatra

1. A gyakorlati feladat és a készletmodell

Aszfaltkeverő berendezések anyagellátási problémáira dolgoztuk ki az alábbi készletmodellt, mely a folyamatos gyártáshoz szükséges induló készletszint és a megfelelő raktárkapacitás tervezését szolgálja. A gyakorlati feladat megoldására egy komplex számítógépes programrendszert készítettünk, mely a folyamatos és megfelelő összetételű anyagellátás több kérdését kezeli operációkutatási, adatkezelési, statisztikai és szimulációs módszerek alkalmazásával. Itt csak a készletmodellt és matematikai tulajdonságait ismertetjük. A feladatkör, a programrendszer és a numerikus eredmények leírása a Bodnár G. – Kelle P. [3] és Kelle P. [9] cikkekben szerepel.

Először röviden ismertetjük a technológiai folyamatnak azt a részét, melyre a készletmodellt kidolgoztuk. Különböző típusú közúzalékot $x_1, \ldots, x_n$ arányban összekevernek (a megfelelő arány meghatározását lásd Kelle P. [9])és ezután r db különböző sürüségű rostán szétválasztanak (esetünkben $r = 4$). A $\tau_{j-1} < d \leqslant \tau_j$ szemcseátmérőjü zúzalék a j-edik melegített tárolóba kerül, ez az $\eta_j(t)$ beérkezési folyamat $j = 1, \ldots, r$-re, mely időben folytonos és sztochasztikus a kőzúzalékokban levő szemcseátmérők arányának véletlen jellegü változása miatt. A tárolók output folyamata gyakorlatilag folytonos és egyenletes, rögzitett $z_1, \ldots, z_r$ intenzitással mindaddig, míg valamelyik tároló ki nem ürűl vagy túlfolyik. Mindkét esetben le kell állítani a folyamatot, megvárni a feltöltődést vagy az $x_1, \ldots, x_n$ keverési arányokat kell megváltoztatni egy időre. Ez megzavarja a termelést és csak ritkán fordulhat elő.

A tárolók kapacitását eredetileg a szabványnak megfelelő kőzúzalékokra tervezték, de az alapanyagok összetétele gyakran lényegesen eltér ettől. A fenti zavarok, leállások a gyakorlatban igen sürűen előfordulnak, ennek következtében szükséges a tárolók megnagyobbítása, bár ez a nagyságtól függően jelentős többletköltséget okoz.

A másik probléma, hogy a keverési eljárás nem kezdhető üres tárolókkal, meg kell határozni az indulásnál szükséges minimális q feltöltési időt.

A tárolók kapcacitásának megnövelésére és a fenti q időtartam meghatározására egy valószinűséggel korlátozott készletmodell két változatát dolgoztuk ki, melyek együttes valószinűségi korlátokat tekintenek.

Először azt a minimális q feltöltési időt keressük, mely előírt $1 - \epsilon_1$ valószinűséggel biztosítja az r db tároló folyamatos anyagellátását egy adott T hosszúságú időtartamra. Az $\eta_j(t)$ beérkezési folyamatra és a $z_j \cdot t$ $(j = 1, \ldots, r)$ output folyamatra ezt a feladatot a következő formában fogalmazzuk meg:

min q

feltéve, hogy

(4.1)

$$g(q) = P(\sup_{0 \leq t \leq T} |z_j \cdot t - \eta_j(t)| < q \cdot z_j, \quad j = 1, \ldots, r) \geq 1 - \epsilon_1 .$$

A modell második változatában a tároló méreteknek azt a költségoptimumot adó $\underline{K}' = (K_1, \ldots, K_r)$ vektorát keressük, mely adott $1 - \epsilon_2$ valószinűséggel biztosıtja, hogy a $(0,T)$ intervallumon nem fordul elő a tárolók túlfolyása:

min $G(\underline{K})$

feltéve, hogy

(4.2)

$$H(\underline{K}) = (\sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_j(t) - z_j \cdot t| < K_j - qz_j, \quad j = 1, \ldots, r) \geq 1 - \epsilon_2$$

$$\underline{0} \leq \underline{K} \leq \underline{Q},$$

ahol $\underline{Q} = (Q_1, \ldots, Q_r)$ a tároló méretek műszaki korlátait jelöli és $G(\underline{K})$ a tárolók és működtetési (fűtési) költsége, melynek konvexitását feltételezhetjük.

A tárolókba bekerülő anyagmennyiségek arányát $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ jelöli. Ezeket az arányokat a technológiai folyamat során nem mérik. Ha a felhasznált k-adik alapanyagban $\beta_{j,k}$ a $d < \tau_j$ szemcseátmérőjü zúzalék aránya (mely véletlenszerűen ingadozik), akkor a $\beta_{0,k} = 0$ jelöléssel

$$(4.3) \qquad \gamma_j = \sum_{k=1}^{n} x_k(\beta_{j,k} - \beta_{j-1,k}),$$

mely valószinűségi változó $j = 1, \ldots, r$ estén. A $\beta_{j,k}$ arányok realizációt sem mérik, de a minőségellenőrzés során nyilvántartják az alapanyagoknak a ρ_i $(i = 1, \ldots, n)$ átmérőjű rostákon áthulló $\alpha_{i,k}$ súlyarányait. A ρ_i értékek különböznek a $\tau_j (j = 1, \ldots, r)$ értékektől. A rendelkezésre álló adatok is alátámasztották, hogy a kőzúzalékok szemeloszlásának súlyarányait a lognormális eloszlás görbéje jól közelíti. A τ_j értéket közrefogó két ρ_i, ρ_{i-1} és a megfelelő $\alpha_{i-1,k}, \alpha_{i,k}$ realizációk felhasználásával lognormális eloszlást illesztünk, melynek τ_j helyen felvett értékét tekintjük az interpolált $\beta_{j,k}$ realizációnak. A (4.3) összefüggés segítségével meghatározható az

$$(4.4) \qquad F(\underline{y}) = P(\gamma_j < y_j, \quad j = 1, \ldots, r)$$

r dimenziós együttes eloszlás. Az output intenzitások értékét

$$(4.5) \qquad z_j = E[\gamma_j], \quad j = 1, \ldots, r$$

várható érték szerint rögzítjük hosszú időszakra.

Feltételezhetjük, hogy

(4.6) $E[\eta_j(t)] = y_j \cdot t, \quad j = 1, \ldots, r$

és

(4.7) $D^2[\eta_j(t)] = \sigma_j^2 \cdot t, \quad j = 1, \ldots, r,$

ahol y_j és σ_j konstans abban a $(0,T)$ periódusban, melyben a folyamatos anyagellátást vizsgáljuk. Itt $y' = (y_1, \ldots, y_r)$ a $\gamma' = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ valószinűségi vektorváltozónak a (4.4) eloszlás szerint vett realizációja.

Az $\eta_j(t)$ beérkezési folyamatnak olyan modelljét adjuk, mely a gyakorlati szempontból megfelelő közelítést ad és lehetővé teszi a (4.1) és (4.2) feladatok numerikus megoldását. Az $\eta_j(t)$ sztochasztikus folyamatról feltételezzük, hogy a $\underline{\gamma} = \underline{y}$ feltétel mellett homogén Wiener folyamat az y_j és σ_j paraméterekkel $j = 1, \ldots, r$ esetén, azaz szeparábilis, független növekményű sztochasztikus folyamat, melyre

(4.8) $$P(\eta_j(t) < u) = \Phi\left(\frac{u - y_j \cdot t}{\sigma_j \cdot \sqrt{t}}\right)$$

ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvényt jelöli.

2. A modell matematikai tulajdonságai

Az $\eta_j(t)$ folyamatra az előző pontban tett feltételek lehetővé teszik G. Baxter és M. Donsker [2] következő tételének alkalmazását:

4.1. Tétel:

Ha $\xi(t)$ m és σ paraméterű szeparábilis homogén Wiener folyamat, akkor

(4.9) $$P(\sup_{0 \leq t \leq T} \xi(t) < u) = P(\xi(T) < u) - e^{\frac{2mu}{\sigma^2}} \cdot P(\xi(T) < -u).$$

A (4.1) feladat feltételi függvényében levő $\xi(t) = z_j \cdot t - \eta_j(t)$ sztochasztikus folyamat teljesíti a 4.1. tétel feltételeit rögzitett $\gamma_j = y_j$ esetén és paraméterei $z_j - y_j$ és σ_j, így

$$g_j(q|y_j) = P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \{z_j \cdot t - \eta_j(t)\} < q \cdot z_j | \gamma_j = y_j) =$$

(4.10)

$$= \Phi\left(\frac{qz_j - (z_j - y_j) \cdot T}{\sigma_j \sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2qz_j(z_j - y_j)}{\sigma_j^2}} \Phi\left(\frac{-qz_j - (z_j - y_j) \cdot T}{\sigma_j \cdot \sqrt{T}}\right).$$

Feltételezhetjük, hogy rögzített $\underline{\gamma}$ esetén az $\eta_j(t)$ sztochasztikus folyamatok függetlenek, így

(4.11) $$g(q) = \int_{R^r} \left[\prod_{j=1}^{r} g_j(q|y_j)\right] dF(\underline{y}),$$

mely a q változó monoton növekvő függvénye. A $g(q) = 1 - \epsilon_1$ egyenletnek pontosan egy megoldása van $(0 < \epsilon < 1)$ és ez a (4.1) feladat optimális megoldását adja.

A (4.2) feladat sztochasztikus feltételében szereplő

$$H(\underline{K}) = P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\eta_j(t) - z_j \cdot t\} < K_j - q \cdot z_j, \quad j = 1, \ldots, r)$$

függvény bonyolult szerkezetű, de ha a $\underline{\gamma}$ valószinűségi vektorváltozónak logaritmikusan konkáv $f(\underline{y})$ együttes sürüségfüggvénye van, akkor $H(\underline{K})$ logaritmikus konkavitását is tudjuk igazolni. Ez az algoritmikus megoldást jelentősen megkönnyíti, hiszen (4.2) ekkor egy konvex programozási feladat.

Felhasználjuk Prékopa András [20] következő tételét:

4.2. Tétel:

Ha $f(\underline{x},\underline{y})$ az $\underline{x}$ n komponensű és az $\underline{y}$ m komponensű vektor függvénye logaritmikusan konkáv R^{n+m}-ben, akkor az $\underline{x}$ változó

$$\int_{R^m} f(\underline{x},\underline{y})dy$$

függvénye logaritmikusan konkáv R^n-ben.

A 4.2. tételen alapul a $H(\underline{K})$ függvényre vonatkozó következő tétel:

4.3. Tétel:

Legyen $\eta_1(t), \ldots, \eta_r(t)$ szeparábilis Wiener folyamat rögzitett $\underline{\gamma}$ esetén. Ha $\underline{\gamma}$ valószinűségi vektorváltozó folytonos eloszlású és $f(\underline{y})$ együttes sürüségfüggvénye logaritmikusan konkáv, továbbá q és $z_1, \ldots, z_r$ konstans, akkor a

(4.12) $\underline{H(K)} = P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\eta_j(t) - z_j \cdot t\} < K_j - q \cdot z_j,\ j = 1, \ldots, r)$

a $\underline{K}' = (K_1, \ldots, K_r)$ vektor logaritmikusan konkáv függvénye.

Bizonyítás:

A 4.2. tételből következik, hogy rögzitett t esetén $(0 \leqslant t \leqslant T)$ a

(4.13)
$$d(t,\underline{K}) = P(\eta_j(t) < K_j - (q - t) \cdot z_j,\ j = 1, \ldots, r) =$$
$$= \int_{R^r} \left(\prod_{j=1}^{r} \Phi\left(\frac{K_j - (q - t) \cdot z_j - y_j \cdot t}{\sigma_j \sqrt{t}}\right)\right) f(\underline{y}) d\underline{y}$$

függvény logaritmikusan konkáv a $\underline{K}$ vektorváltozó szerint. Ebből következik, hogy a $(0,T)$ intervallum minden $0 < t_1 < \ldots < t_N < T$ felosztására a

(4.14)
$$P(\eta_j(t_i) - z_j \cdot t_i < K_j - q \cdot z_j,\ j = 1, \ldots, r,\ i = 1, \ldots, N) =$$
$$= \prod_{i=1}^{N} d(t_i, \underline{K})$$

függvény szintén logaritmikusan konkáv. Tekintsük a $0 < t_1^{(k)} < \ldots < t_{N_k}^{(k)} < T$ felosztásoknak egy olyan sorozatát, melyre

$$\lim_{k \to \infty} \max_i \{ t_{i-1}^{(k)} - t_i^{(k)} \} = 0.$$

Ha $h_k(\underline{K})$ jelöli a (4.14) valószinűséget rögzitett k esetén, akkor az minden k-ra logaritmikusan konkáv függvény. Ez a tulajdonság nem változik, ha a k szerinti határértéket vesszük, így

$$H(\underline{K}) = \lim_{k \to \infty} h_k(\underline{K})$$

szintén a $\underline{K}$ logaritmikusan konkáv függvény, ami a 4.3. tétel állítása.

A gyakorlati feladat megoldásánál szétválasztottuk a (4.2) modell együttes valószinűségi korlátját és a marginális eloszlásra tett következő feltételeket tekintettük, $j = 1, \ldots, r$ esetére:

(4.14) $b_j(K_j) = P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \{\eta_j(t) - z_j \cdot t\} < K_j - qz_j) \geqslant 1 - \delta_j,$

ahol δ_j rögzitett konstans $(j = 1, \ldots, r)$ A (4.9) összefüggés felhasználásával

$$(4.15)\qquad b_j(K_j) = \int_{R^1} \Big[\Phi\Big(\frac{K_j - qz_j + (z_j - y_j)\cdot T}{\sigma_j\sqrt{T}} \Big) - e^{-\frac{2(y_j - z_j)(K_j - qz_j)}{\sigma_j^2}} \cdot \Phi\Big(\frac{-K_j + qz_j + (z_j - y_j)\cdot T}{\sigma_j\sqrt{T}} \Big)\Big]\, dF_j(y_j),$$

ahol $F_j(y_j)$ $(j = 1, \ldots, r)$ jelöli a $\underline{\gamma}$ valószinűségi vektorváltozó marginális eloszlásait és q értéke rögzitett, ezt a (4.1) feladat megoldása adja. A (4.15) függvény monoton növekvő ezért a (4.14) feltétel a K_j változóra egy egyszerü $L_j(\delta_j)$ alsó korlátot ad $(j = 1, \ldots, r)$ és így a $G(\underline{K})$ költségfüggvényt a

$$Q_j \geqslant K_j \geqslant L_j(\delta_j),\ j = 1, \ldots, r$$

egyenlőtlenségek által definiált tartományon kell minimalizálni.

Az induló feltöltési q időtartam és a $\underline{K}$ optimális raktárkapacitás vektor tervezésének egy programfutási eredményét a IV. melléklet tartalmazza.

V. A készletmodellek hazai alkalmazásai

1. Népgazdasági szintű készletvizsgálat

A termelő vállalat zavartalan működéséhez szükséges minimális készletek mennyiségének a meghatározása fontos népgazdasági érdek. A gazdasági szakembereket közgazdászokat és matematikusokat egyaránt foglalkoztatja az a probléma, hogy milyen módszerrel határozható meg a folyamatos anyagellátást biztosıtó minimális raktárkészlet és ezzel kapcsolatban a minimális forgóeszköz szükséglet; milyen eszközökkel lehet készletcsökkentést elérni a folyamatos ellátás biztosítása mellett? A kérdések megoldása rendkivül sokrétű feladat, melynek egyik fontos segédeszköze lehet a matematikai modellek és a számítástechnikai eszközök felhasználása, mint azt az alkalmazási eredmények mutatják.

Az Országos Tervhivatal 1961-ben a Matematikai Kutató Intézet munkatársaihoz fordult a következő megbizással: vizsgálják meg matematikai eszközök segítségével, hogy a termelés növekedési ütemének megfelelően milyen készletnövekedés indokolt. A végzett munkáról készült a [48] tanulmány, mely a feltett kérdéssel kapcsolatos vizsgálatok eredményeiről ad számot, másrészt azokat a modelleket és alkalmazási eredményeket tartalmazza, melyek a folyamatos anyagellátást adott valószinűséggel biztosító legkisebb raktárkészlet mennyiségének a meghatározását adják, feltéve, hogy a felhasználás folyamatosan történik.

A vállalati adatok elemzése alapján készült a Prékopa – Ziermann modell, és Prékopa András véletlen ütemezésű szállítási modellje, melyeket az első fejezetben ismertettünk. Ezek segítségével készültek azok a számitások és következtetések, melyeket a [48] tanulmány tartalmaz részletesen. A hazai ellátási viszonyokra jellemző több tételben, véletlen jelleggel történő előszállításokra épülő fenti megbizhatósági készletmodellek alkalmazásával kerül sor a következő megállapitásokra: Ha a beérkezési időpontok száma változatlan marad, megnövekedett termeléshez ugyanolyan arányban megnövelt induló készlet kell, amennyiben az ellátás megbizhatóságát változatlan szinten kivánjuk tartani. A gyakorlatban a megrendelések mennyiségének a növekedése a beérkezési időpontok számának a növekedését vonja maga után. Ekkor a biztonsági készlet növekedési üteme alacsonyabb lehet a termelés növekedési üteménél. Ennek a modellek alapján adódó számszerű értékeit a [48] tanulmány és Ziermann M. [17] cikke tartalmazza. Az ütemezett előszállítás, a szállítási határidők és tételek egyenletes elosztása véletlen jellegű zavaró tényezők esetén is készletcsökkenést tesz lehetővé a folyamatos anyagellátás biztonságának csökkenése nélkül. A szállitások (beérkezések) számától és az egyenletlenség mértékétől függően a Prékopa modell (lásd [28]) megadja az előirt megbizhatósági szinthez tartozó készletnorma nagyságát, mellyel a népgazdasági szintű készletelemzés fontos támpontját nyújtja. Ezzel a modellel a szakaszos, véletlen jellegű felhasználás és ennek következményei is vizsgálhatók.

2. Kereskedelmi vállalatok készletezése

Üzletek áruellátásának matematikai modellezésével hazánkban először Rényi A. és Ziermann M. foglalkozott. Az [52] dolgozatukban a következő kérdést vizsgálják: egy boltban, amely egy vagy több árucikket árul és amelyben az egyes árucikkek iránti kereslet eloszlását ismerjük, mekkora az a minimális készlet az egyes árucikkekből, amellyel a raktár következő feltöltéséig előírt megbizhatóggal ki lehet elégiteni a fogyasztókat? A dolgozatban szerepel a folyamatos anyagellátás valószinűsége, mint a teljes kielégítettség biztonságának mértéke. Ezenkivül definiálják a várakozáson felüli kereslet relativ kielégítési biztonságát, mely a várható kereseten túlmenő kielégítetlen kereslet és a várható keresleten túlmenő teljes kereslet hányadosának várható értéke. Ez utóbbi a kielégítetlen igények várható nagyságát karakterizálja, mely sok esetben a hiány előfordulásának valószinűségénél jobban jellemzi az anyagellátás hiányosságát. Az alkalmazásokban azonban a valószinűségi korlátozás terjedt el, ennek kivánt szintjét ugyanis könnyebben meg tudják adni a vállalati szakemberek. Jelen tanulmányunk is a hiány valószinűségét korlátozó modelleket vizsgálja, de figyelemre méltóak a várható érték típusú korlátozást tartalmazó modellek, melyek elmélete még kevéssé van kidolgozva.

Az [52] cikkben a szerzők a raktár feltöltési szintjének azt a minimális nagyságát keresik, mely előírt megbizhatósági mértéket kielégit. Könnyen realizálható eljárást adnak a feltöltési szint meghatározására a megbizhatósági szint előzőleg definiált mindkét formája esetén, amennyiben két feltöltési időpont között igényelt mennyiség eloszlása ismert. Feltételezik, hogy a rendelés egy tételben érkezik be. Több árucikk készletének feltöltési szintjével is foglalkoznak, azon feltevés mellett, hogy a bolt által árult összes árucikkből a raktárkészlet beszerzésére korlátozott pénzmennyiség áll rendelkezésre. A hiány előfordulásából és a készlettartásból származó összes várható költséget kivánják minimalizálni a fenti korlátozás mellett. Ez esetben az egyes árucikkekből raktáron tartandó mennyiségek nem határozhatók meg egymástól függetlenül. Normális eloszlású igények esetén egyszerű eljárást adnak a fenti tulajdonságú optimális feltöltési szintek meghatározására, mely a Lagrange-szorzó módszeren alapul. A modell alkalmazására cipőboltok áruellátásának vizsgálatával kapcsolatban került sor.

Szélesebbkörű alkalmazási eredmények vannak a nagykereskedelmi vállalatok készletgazdálkodásában. E vállalatok feladata, hogy a fogyasztókat közvetlenül ellátó áruházak és üzletek igényeit kielégitő árumennyiséget a gyártó vállalatoktól, illetve importból beszerezzék, készletezzék és a szükséges időpontokban és mennyiségekben a kiskereskedelemhez eljuttassák. A nagykereskedelmi vállalatok a rendeléseket bizonyos időközönként (általában negyedévenként) adhatnak fel. A megrendelt termék általában több tételben, véletlen jellegű időpontokban érkezik a gyártó vállalattól, mely rendszerint az előszállitás jogát fenntartja. A kiskereskedelmi raktárakból ugyancsak több részletben érkezik az igény, bizonyos időközönként. Az igények nagysága és időpontja sem ismert előre, véletlen jelleggel változik. A nagykereskedelmi vállalat azt a minimális készletszintet kivánja biztonsági készletként tartani, mely előírt valószinűséggel lehtővé teszi a kiskereskedelemből érkező igények kivánt időben és mennyiségben történő kielégítését, a gyártott cikkek beérkezésének véletlen jellegét figyelembe véve.

A vizsgált nagykereskedelmi vállalat a TRIÁL és RAVILL volt. Az első fejezetben ismertetett Prékopa modell egy- és kétmintás változatát alkalmazták. A munkát az MTA SzTAKI Operációkutatási Osztályáról Gerencsér László és Halász Sz., a Kerinforg Rendszertechnikai Osztályáról pedig Skarbszki Á., Móricz A. és Vass I. írányította. A kisérletekről Vass I. [53] cikke számol be. Az alkalmazás továbbfejlesztéséről szól Móricz A. [44] tanulmánya, mely a Belkereskedelmi Minisztériumban készült. A kereskedelmi vállalatok készlettervezését a fenti modellekre épülő rendszerrel kivánja segíteni. Figyelembe veszi a különböző gazdálkodási korlátozó tényezőket és szabályozó paramétereket is.

A nagykereskedelmi vállalatok készletezésének irányítására a Kerinforg Rendszertechnikai Osztályán készült egy számítógépes programrendszer DORIS (Demand Oriented Inventory System) néven. A programrendszer leírása az [31] ismertetésében valamint Vass I. [54] cikkében, elemzése pedig a Prékopa A. – Kelle P. [49] tanulmányban szerepel. A programrendszer a biztonsági készletszintet az első fejezetben ismertetett Prékopa modell alapján határozza meg. Ezenkivül tartalmazza a fogyasztási idősor elemzését és statisztikai előrejelzését. Lényegében az exponenciális simítási technikát használja. A trend kiszűrése után meghatározza a szezonális időfüggvényt. Egy modellt alkalmaz, mely figyelembe veszi a trendhatást, periódikus hatásokat és véletlen hatásokat, melyek összegeként adódik az előrejelzés értéke. A rendelési mennyiség meghatározását a biztonsági készletszint és az igény előrejelzése alapján határozza meg. A programrendszer sajátossága, hogy a folyamatos áruellátás adott szintű biztosítása a fő célkitűzése. Ebben különbözik a tőkés országokban készített készletgazdálkodási programcsomagoktól, melyeknél a (hazai körülmények között nehezen számszerűsíthető) készlettartási és hiányköltség várható összegét minimalizálják. A DORIS programrendszer figyelembe tudja venni a hazai viszonyokra jellemző több részletben, véletlenül elhelyezkedő időpontokban és véletlen nagyságú tételekben történő árubeérkezést, melyet a fenti programcsomagok nem vizsgálnak. A DORIS programrendszer felépítése lehetővé teszi az alkalmazását nemcsak nagykereskedelmi, hanem iparvállalatoknál is.

A termelőeszközkereskedelmi (TEK) vállalatok szerepe és célkitűzése hasonló a nagykereskedelmi vállaltokéhoz. A Metalloglobus színesfém TEK vállalatnál van folyamatban a STOMCOS (Stock Management and Control System) elnevezésű készletgazdálkodási program-rendszer bevezetése, melyet a VILATI készített ROBOTRON 21 típusú számítógépre. A rendszer ismertetése Jánoki L. [34] cikkében szerepel. A programrendszer tartalmazza az adatállomány feltöltését, aktualizálását és lekérdezését végrehajtó programokat, melyek a raktári események adminisztrációját végzik. A rendszer alkalmas magasraktárak irányítására is. Szerepelnek – a programcsomagokban általánosan alkalmazott – statisztikai és prognózismodellek továbbá az egyszerű költségoptimalízáló készletmodellek. Ezeken kívűl azonban felhasználható a véletlen jellegű szakaszos beérkezést és felhasználást vizsgáló Prékopa modell a folyamatos ellátást adott valószínűséggel biztosító induló készletszint meghatározására.

A STOMCOS programrendszert a VILATI a saját vállalati készletezésére alkalmazta, majd 1975-ben indult a rendszer adaptálása a Metalloglobus vállalatnál. Elsőként az adatfeldolgozási rendszert kell felépíteni, mely a készletgazdálkodás számítógépes rendszerének adatait szolgáltatja, de emellett a különböző könyvelési és statisztikai kimutatásokat is gépesíti. A vizsgált mintegy 10 ezer cikkelem évenként mintegy 250 ezer tételben lebonyolított forgalmát kell nyilvántartani, elemezni, összesíteni. A beérkezések és a kivételezések több éves adatsora szükséges a prognosztizáló és készletgazdálkodási modellek paramétereinek meghatározásához. Ennek hiányában is adhatók becslések, melyek alapján a modelekkel történő számítások elindíthatók és az adatrendszer bővülése esetén javíthatók.

A költségtényezők, elsősorban a hiányköltség becslése igen nehéz, mint általában a hazai vállalatoknál. Az anyagbeérkezés folyamata is véletlen jellegű, ezért elsősorban a megbizhatósági modellek alkalmazása jöhet szóba. A TEK vállalatok súlyponti célkitűzése: az áruellátás megfelelő biztosítása központi raktározással, szintén a modellek felhasználását indokolja. A BME Autómatizálási Tanszékén készült a Gál T. – Kelle P. – Kovács T. [33] rendszerterv a STOMCOS programcsomag adaptálására.

Az igények egy része – a nagyvállalatok megrendelései – előre ismertek, míg a sok kis felhasználó (mintegy 6 ezer vevő) igényének összessége statisztikai előrejelzési módszerrel becsülhető. A kettő aránya termékenként különböző. Ha a véletlen, előre pontosan nem becsülhető igény aránya kicsi, akkor jól alkalmazható a Prékopa modell. Olyan termékeknél, melyek iránti igény nagyrészt véletlen jellegű, pontosan nem becsülhető, a második fejezetben leírt véletlen intenzitású igényekre kidolgozott megbizhatósági modellek alkalmazása jobb eredményt ad. A programcsomag kibővitését ajánlottuk, már a (2.29) formula beépítése is jelentősen növelné az alkalmazhatóság területét. A rendszer bevezetése a Metalloglobusnál folyamatban van.

3. Iparvállalatok alapanyag-, tartalékalkatrész- és késztermék-készletezése

Az új gazdaságirányítási rendszer a vállalatokat érdekeltté teszi a készletszint csökkentésében. Ennek fontos eszközeként a számítógépes rendszerszervezést és matematikai modellezést is egyre több helyen kivánják felhasználni. Az első ilyen alkalmazás az Országos Bányagépgyártó Vállalatnál történt 1968-ban. A vállalat alapanyagainak, különösen tekintettel az idomacéloknak a készletezését vizsgálták, és az optimális rendelések meghatározására az "S szintre felrendelés" elnevezésű készletmodellt alkalmazták (lásd Prékopa A. [47]). A rendelés feladásainak időpontjai meghatározottak, a rendelési S szintet pedig a modell alapján úgy határozzuk meg, hogy a készlettartásból és a hiányból származó költségek összegének várható értéke minimális legyen. A rendelés feladásakor megvizsgálják a raktárban levő készletet és ezt az S szintre kiegészítő mennyiséget rendelik. Nagy I. és Prékopa A. [45] tanulmányukban részletesen leírják a modellt és alkalmazásának eredményeit. Kimutatják, hogy a vizsgált termékeknél a túlkészletezés nagysága 10-20% között mozog. Ilyen nagyságú készletcsökkentés még nem érintené jelentősen az ellátás megbizhatóságát és a javasolt rendelési mennyiségek a költségoptimumot biztosítanák. A hiányköltség számszerűsítése jelentette a legnagyobb nehézséget. Ennek meghatározásánál lényeges segítséget nyujt az ellátás kivánt biztonsági szintjének megadása, mely a hiányköltséggel kapcsolatba hozható.

Kénsavgyárak alapanyagellátásának vizsgálatánál került sor László Z. u.n. teljesen véletlen ütemezésű szállítási modelljének (lásd I. fejezet) alkalmazására. Az állandó intenzitású termeléshez szükséges piritet importból fedezik. Tekintettel arra, hogy fagyos időben a vagonokat nem lehet kirakni, a szállító partner az egész évi szükségletet mintegy fél év alatt leszállítja. Az üzemi naplók tanulsága szerint mind a szállítási időpontok, mind a leszállított tételek jó közelítéssel egyenletes eloszlásunak tekinthetők. Ha a szállítási periódust $(0,T_1)$, a felhasználási periódust pedig $(0,T)$ jelöli, $(T_1 \leq T)$, akkor a szállítási folyamat (1.13) alatti modelljét véve az M nagyságú induló készletszint a folyamatos anyagellátást legalább $1 - \epsilon$ valószínűséggel biztosítja, ha

$$(5.1) \qquad P\left(\sup_{0 \leq t \leq T_1} \{ \alpha t - F_n(t,0) \} \leq M \right) \geq 1 - \epsilon$$

az $\alpha = T_1/T$ jelöléssel. Az 1.5 tételből adódik, hogy az (5.1) egyenlőtlenséget kielégítő minimális M induló készletszintet az

$$(5.2) \qquad \left(1 - \frac{M}{\alpha}\right)^{n} (1 + M)^{n-1} = \epsilon$$

egyenlet megoldása adja, ahol n jelenti a szállítások számát. László Z. [12] dolgozatában megad egy iterációs eljárást az [5.2] egyenlet megoldására. A gyakorlati feladatnál a szállítások száma elég nagy volt, ahhoz, hogy az

$$(5.3) \qquad M \approx \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{\epsilon}$$

aszimptotikus közelítő formula az optimális induló készletszint jó közelítését adja. Ez egységnyi nagyságú felhasználás esetére vonatkozik, így a felhasználás összmennyiségével szorozva kapjuk a szükséges periódus eleji biztonsági készletszintet.

A Hungária Műanyagfeldolgozó Vállalat készletnövekedésének megfékezésére matematikai modellek bevezetését tervezte. Az alapanyagok és a termelés folyamatossága szempontjából fontos segédanyagok, köztük a TMK célokat szolgáló hengereltacél készleteinek csökkentése és kedvezőbb beszerzése volt a cél. A beszerzésnél nagyobb mennyiség egyszeri rendeléseinél árkedvezmény illeti a vállalatot. Ez a ritkább, nagytételekben történő rendelést indokolja, ugyanakkor a növekvő forgóeszközállomány erősen leterheli a vállalat fejlesztési alapját. A harmadik tényező a folyamatos ellátás, melyet nagy valószínűséggel biztosítani kell. A három tényezőt együttesen figyelembe vevő készletpolitikát dolgoztak ki az MKKE Ipargazdaságtani Tanszékén Megyeri E. és Chikán A. vezetésével. Ebben a költségoptimumot adó rendelési tételt determinisztikus modell alapján közelítik meg, a rendelést pedig akkor kell feladni, amikor a készlet lecsökkenése még nem veszélyezteti a biztonságos anyagellátást. A modellről és alkalmazásáról részletesen szól a [43] tanulmány.

A Textilipari alapanyagok, elsősorban festékanyagok készletezésével foglalkoztunk a Pamutnyomóipari Vállalat megbizásából. Itt a rendeléseket (elsősorban szocialista import esetén) a tárgynegyedévet 4-5 hónappal megelőzően kell feladni. Ekkor az igény még nem ismert.

Ennek becslésére készült egy előrejelzési programrendszer, mely az exponenciális simítási technikán alapul, a trend és szezonhatások figyelembevételével. A mintegy 8 ezer cikk igényeinek három éves adatsora számítógépes nyilvántartásban rendelkezésre áll. A becslési eljárás az igény, mint valószínűségi változó várható értékét és szórását adja. Az anyagbeérkezés több tételben történik, véletlenszerűen, de lényegében egyenletesen elosztva. A folyamatos anyagellátást $1 - \epsilon$ valószínűséggel biztosító induló készletszint meghatározása a (2.29) alatti formula alapján történik. Ez jó közelítést ad, amennyiben a felhasználás intenzitása normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető, és a beérkezések száma elég nagy (a gyakorlatban $n > 6$ esetén megfelelő). Kevés beérkezés esetén a fenti formula $1 - \epsilon$-nál nagyobb biztonságot ad. A mellékletben szereplő táblázat segítségével korrigálni lehet a készletszint javasolt értékeit. Az induló készletszint az előző periódus záró készlete, így az igény becslésével és a periódus elejére várható készletszint nagyságával a rendelési mennyiséget is meg tudjuk határozni. Az alkalmazás feltételeiről és az alkalmazott modellről részletesebben szól a Kelle P. [42] cikk.

Tartalékalkatrészek biztonsági készletszintjének a meghatározása a megbizhatósági készletmodellek egy jellegzetes alkalmazási területe. Ezzel a témakörrel kapcsolatos eredményeket hazánkban már az 50-es évek elején publikáltak. Rényi A. és Szentmártony F. [51] dolgozatukban meghatározzák azt a törzskészletnek nevezett készletszintet, melyre lecsökkenve rendelést kell feladni. Ezt úgy adják meg, hogy a rendelés beérkezéséig – mely egy tételben, rögzített időpontban történik – előirt valószínűséggel ne forduljon elő hiány. Hasonló eredményeket tartalmaz Palásti I. – Rényi A. – Szentmártony F. – Takács L. [46] cikke is. Ziermann M. [56] dolgozatában meghatározza azt a rendelési mennyiséget, mely esetén a készlettartási és a rendelés feladatási költségek egységnyi időre eső várható összege minimális. Ezek az eredmények sok helyütt alkalmazhatók, ahol bármelyik időpontban lehetőség van a rendelés feladására, továbbá a rendelés egy tételben érkezik be. Hazánkban azonban gyakran csak bizonyos időközönként adható fel rendelés, mely több tételben, rendszerint véletlen jelleggel érkezik be. Ilyen esetekben a tanulmányokban ismertetett megbizhatósági készletmodellek alkalmazására van lehetőség. Az első fejezetben ismertetett Prékopa modell segítségével határozták meg a Dunai Cement és Mészműben közel tízezer cikkre a szükséges biztonsági készletszintet, mely a véletlen jellegű alkatrész utánpotlás mellett előírt valószínűséggel biztositja a folyamatos tartalékalkatrész ellátását.

A soproni Postaigazgatóság megbizásából karbantartási és szerelési anyagok készletgazdálkodási kérdéseit vizsgálták a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen Chikán A. és Meszéna Gy. vezetésével. A költségoptimalizáláshoz szükséges hiányköltség meghatározása itt is nagy nehézséget jelent, így a megbizhatóság előírása szerepelt. Központi- és fiókraktárak rendszerének együttesét kellett figyelembe venni és a különböző szintek készletezéseit megfelelően összehangolni. Az alkalmazás eredményeit a [30] tanulmányban foglalják össze, míg a modellek leírása (egy kereskedelmi raktárrendszerre megfogalmazva) a Chikán A. – Meszéna Gy. [31] cikkben szerepel, melyben a megbizhatóság és a kockázat mértékének a kapcsolatát is vizsgálják a költségtényezőkkel összefüggésben.

A Betonútépítő Vállalat útépítő gépsorainak alkatrészellátását vizsgáltuk az Országos Piackutató Intézet munkatársaival együttműködésben. A gazdasági vezetők szerint a készletek összértéke túl magas, ugyanakkor a műszaki szakemberek alkatrészhiányra hivatkoznak. Ennek oka az alkatrészellátás bizonytalansága és az alkatrészek (közel tízezer alkatrész-fajta) várható igényének nem megfelelő becslése. A vállalat számítógépes adatfeldolgozást nem végez , igy csak egy kisérleti vizsgálatról lehetett szó. A szakértők által kiválasztott mintegy 50, különböző értékű és beszerzésű alkatrész készletezését vizsgáltuk. Ezek 4-5 éves gazdálkodási tablója áll rendelkezésre, mely a beérkezési és a felhasználások mennyiségét tartalmazza havi (néhol negyedéves) összesítésben. Rendeléseket évente (néhol negyedévente) lehet feladni, ennek szállítását negyedév-félév után kezdik, és általában több tételben, előre nem rögzített időpontokban érkezik be a megrendelt mennyiség. Az igények becslésére egyszerű, asztali számológépen elvégezhető exponenciális simítási eljárást alkalmaztunk. Az induló biztonsági készletszintek meghatározását Prékopa (1.11) közelítő formulája alapján végeztük, amennyiben mindegyik hónapban várható szállítás. Ritkább szállítások esetén az (1.4) formula, illetve az (1.15) formula táblázatolt értékeiből visszakereséssel határoztuk meg az M_1, illetve M_0-al jelölt induló készletszinteket. Ezek segítségével a László Z. által javasolt (lásd (12))

$$M_\lambda = \sqrt{M_1^2 + (1 - \lambda)^2(M_0^2 - M_1^2)} \tag{5.4}$$

formában közelítettük az $1 - \epsilon$ valószinűségi szinthez tartozó induló készletnagyságot, ahol λ a beérkező tételek egyenletességére jellemző (1.10) szerint definiált konstans. Az első három év adatsorának felhasználásával határoztuk meg a rendelendő mennyiséget a következő évre (évekre) és így kapott készletszintet hasonlítottuk össze a megvalósult utolsó (utolsó két) év készletszintjével. Az esetek nagy részében a javasolt eljárás alacsonyabb készletszinttel is biztosította az alkatrészigény ellátást, míg a többi esetben az igények nagy ingadozása miatt a becslési eljárás nem adott kielégítő eredményt. A modellekről és alkalmazási eredményeiről ir a Kelemen Z. – Kelle P. [35] tanulmány.

Készáruraktár készletszintjének meghatározására alkalmazták a Prékopa modellt a debreceni MGM Vállalatnál. Itt a véletlenszerű ingadozással jelentkező exportigényeket is nagy valószinűséggel rövid határidőn belül ki akarják ekégíteni, ez ugyanis nagy nyereséget hoz a vállalatnak. A modell segítségével több ezer különböző cikkre határozták meg a negyedév elején szükséges minimális raktárkészletet.

Alapanyag-, termelésközi- és késztermék-készletek együttesét kezelő átfogó készletgazdálkodási rendszer terve készült a MKKE Ipargazdasági Tanszékén egy kutatócsoport közreműködésével, melynek a jelen tanulmány szerzője is tagja volt. A rendszerterv a Gépipari Technológiai Intézet megbizásában készült. A gépipari összeszerelő jellegű vállalatok számítógépes készletgazdálkodási rendszerének egy típustervét kivánja megadni. Leírása a [29] tanulmányban szerepel. Itt csak azt említjük meg, hogy a feltételektől függően különböző modellek kiválasztását és összekapcsolását irányítja a rendszer. A jelen tanulmányban ismertetett megbizhatósági készletmodellek döntő szerepet játszanak a különböző szintű raktárak készletszintjeinek meghatározásában.

A Vegyiparri Számítástechnikai és Fejlesztési Társulás az elmúlt években dolgozta ki és több vegyipari vállalatnál már bevezette a VIR (Vállalat Irányítási Rendszer) elnevezésű komplex termelésirányítási rendszer egyes részeit (lásd Preisich M. – Szalai A. – Pompéry B. – Szatmári G. [50] cikkét). A készletgazdálkodási alrendszer az alapanyag-, tartalékalkatrész- és késztermék-készletezés számítógépes nyilvántartását majd irányítását kivánja szolgálni. Az alrendszer jelenlegi elkészültségi fázisában az ügyvitellel és elszámolással kapcsolatos funkciókat tudja elvégezni. Az igény előrejelzési, készlettervezési, – gazdálkodási és – elemző eljárások beépitése folyamatban van. Rendszertervét az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézetével együttműködésében készitették [55]. Itt is jelentős szerepet kapnak a megbizhatósági készletmodellek.

4. Gyártásközi készletek kialakitása

A gyártási folyamat megszervezésében az egyik fontos kérdés az egymáshoz kapcsolódó berendezések (gépek, gépsorok) folyamatos anyagellátásának biztosítása. Ez a gyakorlatban rendszerint a gyártó berendezések előtti félkésztermék-raktározással történik. Az így kialakuló gyártásközi készletek vizsgálatával és optimális szintjének meghatározásával foglalkoztunk a Dunai Vasmű Hideghengerművének termelésirányításával kapcsolatban (lásd a Kelle P.–Mészáros G. [38] tanulmányt). Ezt a munkát a továbbiakban röviden összefoglaljuk. Az alkalmazott modellek szélesebbkörű felhasználási lehetőséget nyújtanak, más tipusú gyártásközi készleteinek vizsgálatára, és optimalízálására is alkalmasnak lehetnek, mint ezt a Kelle P. [36] cikk kifejti.

A gyártásközi készletek kialakitását indokolja – az egymáshoz kapcsolódó berendezések eltérő gyártási intenzítása a feldolgozott anyag méretétől, illetve minőségétől függően és véletlen jellegű tényezők hatására,

- a berendezések TMK, illetve géphiba miatti leállításai. Mindezek a technológiai jellegű tényezők a gyártásközi készletek növekedésének irányába hatnak, míg a csökkentését indokolják

- a gazdaságossági szempontok,

- a raktározással kapcsolatos költségek és raktárkapacítás korlátok.

A berendezések előtt gyártásközi készleteknek azt a minimális nagyságát kivánjuk meghatározni, mely adott valószinűséggel biztositja a folyamatos termelést, a véletlen jellegű zavaró hatások ellenére.

Két berendezés közötti raktár készletének alakulását a beérkezési folyamat (az I. berendezés anyagkibocsájtása), az igényfolyamat (a II. bekezdés anyagfelhasználása) és az induló készlet határozza meg. A beérkezési- és az igényfolyamat hasonlóan zajlik: mindegyik berendezés anyagfelhasználása és kibocsájtása több tételben történik, véletlen jellegű zavaró tényezők hatása alatt.

A *havi tervezés számára* a szükséges gyártásközi készletszint durva becslése is elegendő. A különböző anyagtípusokból gyártandó mennyiségek (az u.n. tételek) itt csak közelítőleg ismertek, és ezek sorrendje nincs rögzítve. Az egymást követő berendezéseken a feldolgozás sebessége különböző, de az anyagtípusok változásai során a feldolgozási idők ingadozásai viszonylag rövid idő alatt (egy-két nap) kiegyenlítődnek, mert a berendezések átlagos feldolgozási sebességét a megépitéskor ennek megfelelően tervezték.

Amikor az I. berendezés feldolgoz egy tételt, azt a II. berendezés előtti raktárba szállitják. A vizsgált tervperiódsuban n számú tételt terveznek az I. és m számút a II. berendezésre (ezek különbözők is lehetnek). Több információ hiján azt tételezzük fel, hogy a beérkezés és a felhasználás folyamata a Prékopa modell szerint zajlik le. Amennyiben a tételek várható kibocsájtásáról és nagyságáról információink vannak és a bizonytalansági tényezőket is figyelembe kell venni, akkor Prékopa nem homogén szállitási folyamatra adott modelljét kell alkalmazni (lásd I/5 pont). Ez lényegesen több számítást kiván. A III. fejezetben leírt algoritmus egyszerűsített változatát (egy input és egy output folyamatra) kell alkalmazni, azonban ez is Monte-Carlo módszerek felhasználást kívánja, mint azt a Kelle P. [39] cikk leirja.

Az első fejezetben leírt Prékopa modell kérmintás változatát alkalmaztuk, melyben a beérkezési és a felhasználási folyamat egyaránt véletlen ütemezésű. Az I. berendezésénél a minimális és az átlagos tételnagyság hányadosa a (2.b) feltétel szerinti λ mennyiség a beérkezési folyamatra, hasonlóan határozzuk meg a μ mennyiséget a II. berendezésnél. Az (1.11) közelítő megoldás kétmintás változatát alkalmaztuk (lásd Prékopa A. [17]), mely alapján a folyamatos gyártást $1-\epsilon$ előírt valószinűséggel biztosító minimális M induló készletszint

$$M = C\sqrt{\frac{1+(1-\lambda)^2}{n} + \frac{1+(1-\mu)^2}{m}}\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{1}{\epsilon}} \tag{5.5}$$

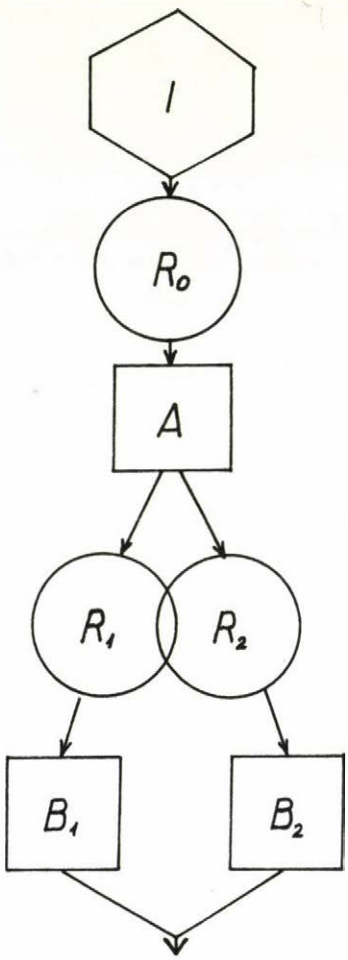
ahol $0 < \lambda \leqslant 1$, $0 < \mu \leqslant 1$ és C a tervezett összes feldolgozási mennyiség. Az n és m értéke elég nagy, a közelítés a havi tervezés szintjén megfelelő információt ad a gyártásközi készletnorma kialakításához.

A *heti ütemezéshez* kapcsolódó modellekkel foglalkozunk a következő részben. A termelésütemezés feladata, hogy egy rövidebb időszakra (egy hét vagy dekád) megadja a gyártandó tételeket, ezek sorrendjét, mely berendezésenként különbözhet a technológiai követelmények miatt. Erre az időszakra ismert a TMK terv, a technológiai leállások várható időpontja és hossza. Korábbi megfigyelések alapján becslés adható a gyártandó tételek elkészülési idejének eloszlására. Ilyen információk birtokában a készletezési folyamatok sokkal részletesebben vizsgálhatók és az ütemezés rendszerében lényegesebb szerepet játszanak. Két fontos feladat megoldását ismertetjük.

a.) A berendezések ütemezésének időbeli elcsúsztatása

A berendezéseken való átlagos átfutási idő, a tételek sorrendi különbözőségei, a leállítások és a véletlen ingadozások szükségessé teszik, hogy az egymást követő berendezésekre ugyanazokat a tételeket bizonyos időbeli késéssel ütemezzük. Ez biztosítja, hogy a gyártásközi készlet mennyisége és összetétele megfelelő legyen és a véletlen hatások kedvezőtlen alakulása esetén is adott megbizhatósággal az ütemezésnek megfelelő legyen az anyagellátás.

A kidolgozott módszer szemléltetésére a DV Hideghengermű egy berendezéscsoportját választjuk, mely a többi résztől viszonylag függetlenül kezelhető:

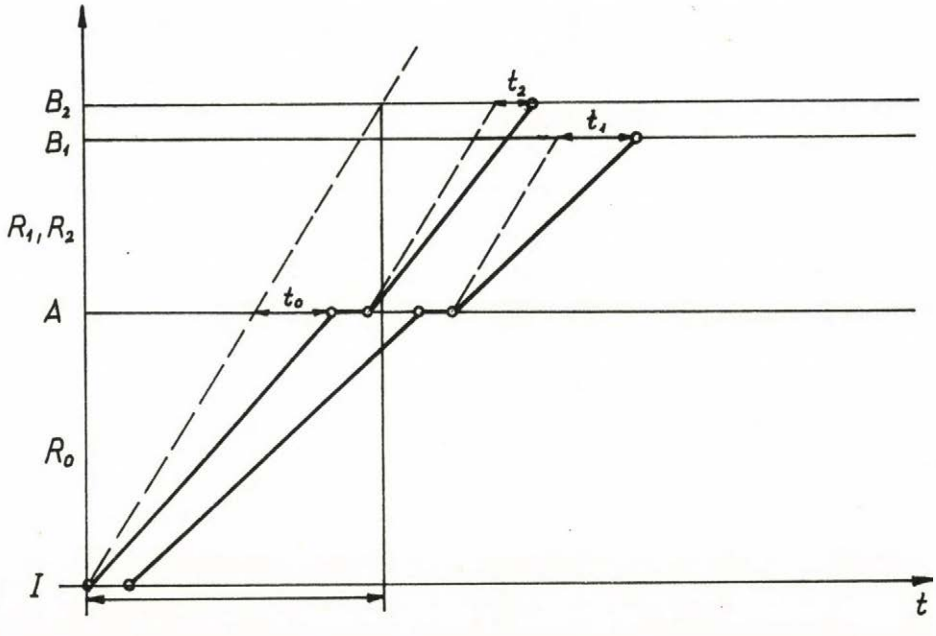


2. ábra

Itt I jelöli az alapanyag beérkezési forrást (egy másik gyárrészleg), A, B_1, B_2 három feldolgozó berendezést (pácoló és két hengersor), $R_i (i = 0,1,2)$ pedig a közöttük levő raktárakat. A termékek áramlása döntő többségben a nyilak irányában történik. Egy tétel a B_1 és B_2 egyikére kerül, amit lényegében már a tervezés szintjén eldöntünk az alapanyag típusa szerint.

Az R_i raktárak $(i = 0,1,2)$ biztonsági készletét az ütemezés számára a mennyiségben megadott érték nem jellemzi megfelelően, mert anyagtípusonként változik a feldolgozás intenzítása. Jobb mérték a biztonsági készlet várható feldolgozási ideje.

Az R_i $(i = 0,1,2)$ raktáraknak azt a minimális induló készletnagyságát (t_i-vel jelölt feldolgozási időt) keressük, mellyel egy ütemezési tételsorrend adott valószínűséggel legyártható. A $t_i (i = 0,1,2)$ időtartam jelenti a berendezéseken az ütemezés időbeli elcsusztatását, ezt a következő ábrán szemléltetjük:



3. ábra

A feladatot egy sztochasztikus programozási modelleként fogalmaztuk meg (lásd [40]), melyben figyelembe vesszük a gyártandó tételek elkészülési idejének véletlen jellegét, eloszlását, a korrelációs kapcsolatokat, a véletlen jellegű leállásokat, melyek mindegyikére elegendően sok statisztikai adat áll rendelkezésre.

A sztochasztikus modell megoldását vissza tudjuk vezetni konvex programozási feladat megoldására [40], így konvergens optimalizálási eljárás adható, melyben szükség van többdimenziós eloszlásfüggvények értékeinek meghatározására. Ez Monte-Carlo módszerrel történhet. Az eljárás kis gépidőigénnyel futtatható, míg a vizsgált tételek száma a 30-40-et nem haladja meg. E fölött összevonásokra van szükség, de a feladat több részre bontásával is a gyakorlat számára jó közelítő megoldást adhatunk és így nagyméretű feladatok is kezelhetők.

b.) Adott ütemezés végrehajthatóságának vizsgálata

Az induló készlet és az alapanyag várható beérkezési ütemének ismeretében meghatározható az ütemezésnek megfelelő folyamatos anyagellátás valószínűsége a berendezések együttesére. Célunk, hogy a gyártásközi készletek várható alakulását, az anyagellátás kritikus pontjait ki tudjuk mutatni az ütemezési periódus egészét tekintve, a záró készleteket, minimális, maximális és átlagos készletszintet is beleértve.

Egy szimulációs eljárást dolgoztunk ki, mely az alapanyag beérkezésétől indulva valamennyi lényeges befolyásoló tényezőt figyelembe vesz. A véletlen jellegű zavaró tényezőket generált véletlen számokkal reprezentáljuk, a statisztikai megfigyeléseknek megfelelő eloszlással.

Az eljárás felhasználható az a,/feladat megoldására is, ha az ott leírt algoritmus nem alkalmazható. Hátránya, hogy optimalizálás céljaira nehezen használható és gépidőigénye nagy.

A termelésprogramozáshoz kapcsolódó modellek

A napi aktuális irányítási feladatok a termelésprogramozás hatáskörébe tartozik. Jellegzetessége, hogy konkrét meglevő anyaggal és készletekkel kell foglalkozni, az operatív irányítást elősegíteni.

A gyártásközi készletek terén a feladat a megfelelő *jelző keszletszintek* meghatározása, melyek a beavatkozás szükségességét jelzik.
Az alsó szint az anyagellátás várható zavarára, a felső pedig a raktárkapacitás korlát megközelítésére figyelmezetet. Az egész periódusra megfelelő jelzőszintek megadása legfeljebb feldolgozási időtartamban mérve lehetséges, az operatív irányítás számára azonban jobban megfelel a tonnában megadott érték. Ez viszont a feldolgozandó tételek anyagától függ, ami egy időben változó, dinamikus jelzőszint-pár megadását jelenti.

Az ütemezéshez kapcsolódó szimulációs algoritmus (b/pont) alkalmas arra, hogy a folyamat időbeli lefutásának megfelelő jelző készletszinteket meghatározzuk. Az algoritmus programját kisebb módosításokkal az ütemezésnél rövidebb periódusra és gyakrabban kell futtatni.

VI. A megbizhatósági készletmodellek számítógépes rendszerének tervezete

1. A biztonsági készletszint kapcsolata egyéb készletgazdálkodási kérdésekkel

Ebben a fejezetben a készletgazdálkodás egyik legfontosabb feladatának számítógépes megoldására kivánunk egy vázlatos rendszertervet adni: hogyan határozhatjuk meg a folyamatos anyagellátáshoz szükséges minimális biztonsági készletszintet? Az előző fejezetben ismertettük az irodalomban közölt matematikai modelleket és az újonnan konstruált változatokat, melyek hazai gyakorlati alkalmazhatóságát az ötödik fejezetben vázolt példákkal kivántuk alátámasztani. A tapasztalatok összesítéseként készült az ismertetendő rendszerterv, mely egy számítógépes készletnyílvántartási rendszer döntéselőkészítő rendszerré való fejlesztését szolgálja.

A tanulmányban vizsgált kérdést általánosan a következő formában fogalmazhatjuk meg: Meghatározandó a folyamatos anyagellátást biztosító minimális induló készletszint, a biztonsági készlet. A továbbiakban is csak ezzel a kérdéssel foglalkozunk részletesen, röviden azonban leirjuk, hogy megoldásával egyéb készletgazdálkodási kérdésekre hogyan adható válasz.

Az M nagyságú biztonsági készletnek a vizsgált periódus elején raktáron kell lennie, hogy a folyamatos anyagellátást a kívánt szinten biztosítsa a $\xi(t)$ igényfolyamat és az $\eta(t)$ beérkezési folyamat véletlen jellegű zavaró tényezőinek figyelembevételével. Az átlagos készletszintre az

$$M + \frac{1}{T}\int_0^T E\,[\eta(t) - \xi(t)]dt \tag{6.1}$$

becslést adhatjuk, ahol E a várható értéket jelöli. Itt feltételezzük, hogy a hiányt a későbbi beérkezésekkel azonnal pótolják. A záró készletszint becsült nagysága

$$M + E[\eta(T) - \xi(T)] \tag{6.2}$$

melynek érétéke az igények megfelelő becslése esetén szintén M, amennyiben a szállítás és az igény folyamatában nem várhatók változások. A záró készletszintnek a következő periódus számára szükséges biztonsági készletszintet kell adni. Ezt a rendelés nagyságával lehet befolyásolni. Olyan nagyságú rendelést kell tehát feladni, mely a záró készletszint nagyságára a következő periódus számára szükséges biztonsági készletszintet adja.

2. A felhasználandó modellek rendszere

A $(0,T)$ periódus elején szükséges biztonsági készletszintet a

$$\min M$$

(6.3) feltéve, hogy

$$P\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\xi(t) - \eta(t)| \leqslant M\right) \geqslant 1 - \epsilon$$

feltételes szélsőérték feladat megoldásaként definiáltuk. A feladatot a $\xi(t)$ felhasználási és az $\eta(t)$ beérkezési folyamat alkalmas modellezése esetén tudjuk megoldani. A modell követelményei, hogy

- a valóságos folyamat megfelelő közelítését adja
- matematikai, számítógépes eszközökkel megoldható legyen a (6.3) feladat.
- a rendelésre álló vagy beszerezhető adatokra épüljön.

Egyszerű modell esetén explicit képlettel is megadható a megoldás, bonyolultabb modell esetén számítógépes algoritmus (esetleg szimulációs módszerek felhasználásával) adja a (6.3) feladat megoldását.

Egy általános jellegű készletgazdákodási programrendszerben a beérkezési és igényfolyamatok sokfélesége szükségessé teszi többféle modell figyelembevételét és alkalmazását. A továbbiakban összesítjük azokat a legfontosabb modelleket, melyek beépítése elsősorban szóba jöhet az eddigi alkalmazási tapasztalatok alapján. Az alkalmazás esetén a modell kiválasztásának a legfontosabb szempontjai a következők:

- A vizsgált cikk beérkezési és igényfolyamatainak jellemzői.
- A vizsgált cikk fontossága (kevésbé fontos cikkekre nem célszerű bonyolult modellt és számítási eljárást alkalmazni, elsősorban a gépidőigény miatt).
- A rendelkezésre álló adatok (a fogyasztás és beszállítás múltbeli lefolyása, várható alakulása, melyre gyakran kevés információ áll rendelkezésre egy jól közelítő modell megadásához).

2.1. A beérkezési folyamat modelljei

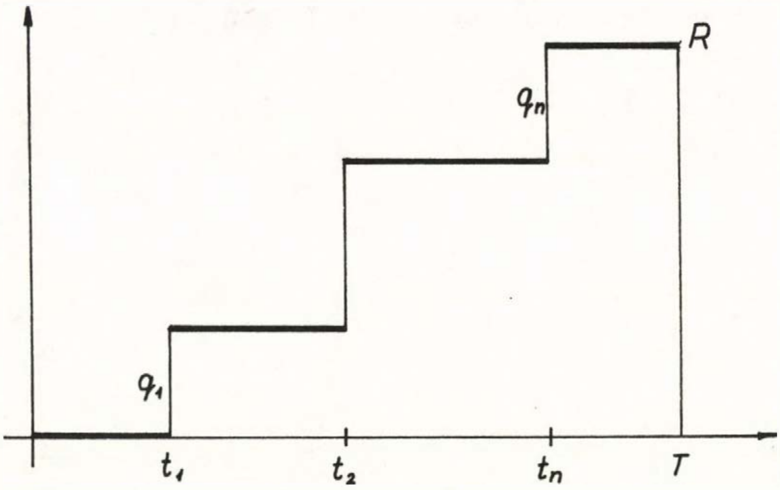
I. Modell: A rendelés beérkezése ismert t_1 időpontban, egy tételben történik. Ha a rendelés nagyságát R jelöli, akkor a beérkezési folyamat:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ R, & \text{ha } t_1 < t \leqslant T \end{cases} \tag{6.4}$$

II. Modell: A beérkezési időpont valószinűségi változó $F(t)$ eloszlással, azaz

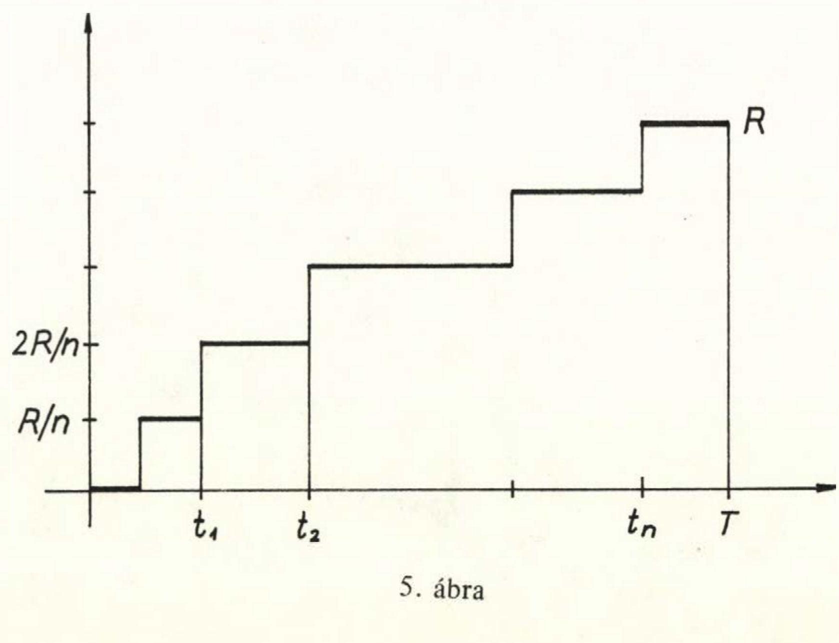
$$\begin{aligned} P(\eta(t) = 0) &= 1 - F(t) \\ P(\eta(t) = R) &= F(t) \end{aligned} \tag{6.5}$$

III. Modell: Többszöri beérkezés, ismert $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ időpontokban és ismert $q_1, q_2, \ldots, q_n$ tételekben.



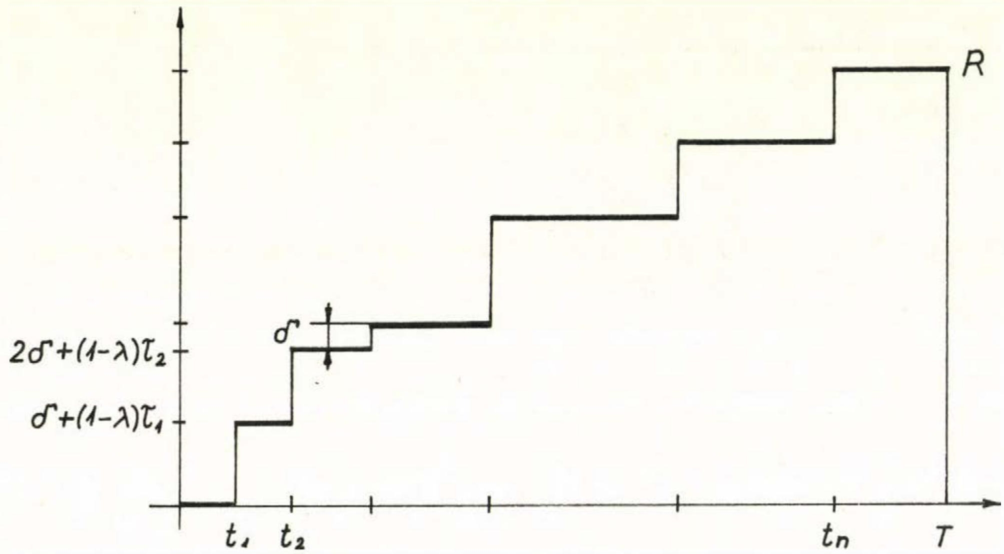
4. ábra

IV. Modell: (Prékopa – Ziermann modell, lásd I/1. pont): Beérkezés n egyenlő nagyságú tételben, egyenletes eloszlású véletlen időpontokban az (1.1) folyamat szerint:



5. ábra

V. Modell: (Prékopa modell, lásd I/2. pont): A beérkezések n számú véletlen időpontban, egyenletes eloszlás szerint történnek, a minimális tételnagyság δ, a fennmaradó rész véletlenül, egyenletesen oszlik meg a szállítási időpontokban az (1.8) folyamat szerint ($\lambda = n \cdot \delta$, azaz a minimális és az átlagos tételnagyság hányadosa):



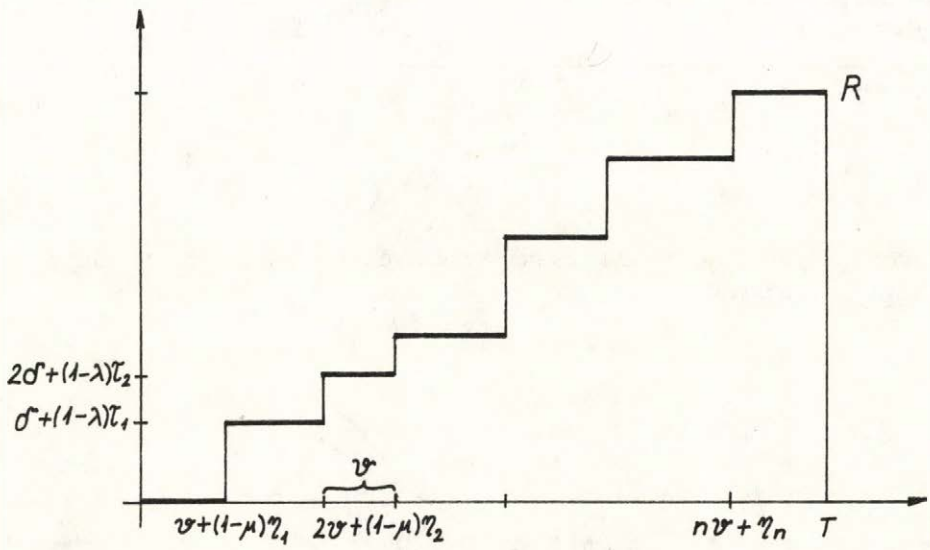
6. ábra

VI. Modell: A beérkezések n számú véletlen időpontban történnek. Két egymást követő beérkezés közötti minimális időtartam ϑ nagyságú ($\vartheta \leqslant T/n$), a fennmaradó $T - n \cdot \vartheta$ időtartam pedig véletlenszerűen egyenletesen oszlik meg az egymást követő beérkezések közötti időtartamoknál. A k-adik beérkezési időpont:

$$t_k = k \cdot \vartheta + (1 - \mu)\tau_k \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad \mu = n \cdot \vartheta / T$$

ahol $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású pontok nagyság szerint rendezett sorozata.

A beérkezési tételnagyságok az V. modell szerint.

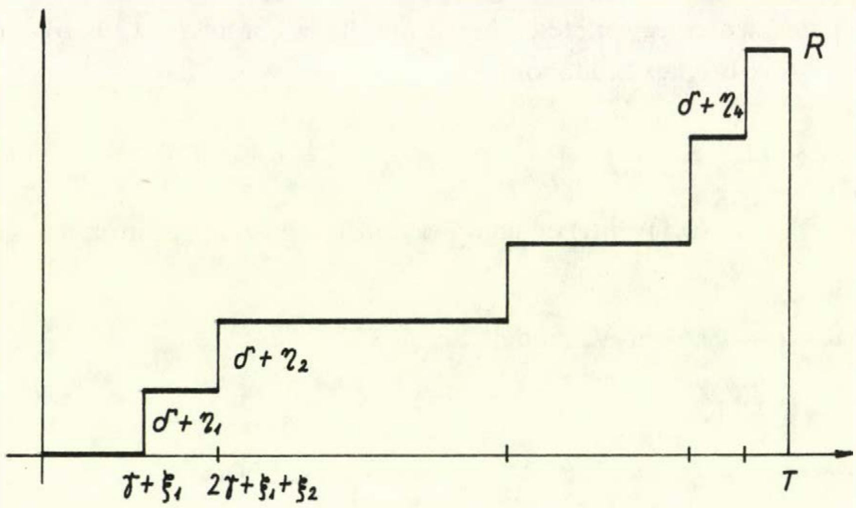


7. ábra

VII. Modell: (lásd II/1 pont) n számú beérkezés, egyenletes eloszlású véletlen időpontokban, tételnagyság tetszőleges eloszlással, beérkezési folyamat (2.2) szerint.

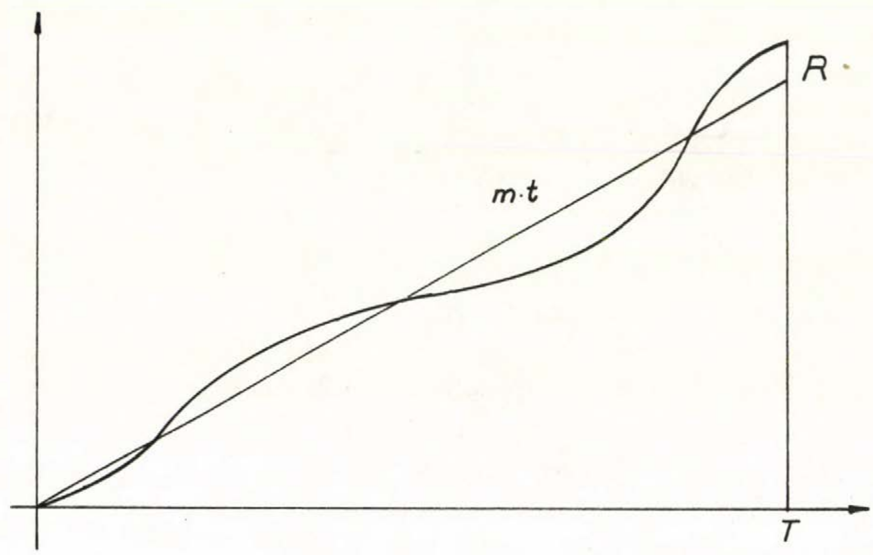
VIII. Modell: (lásd I/5 pont). A beérkezési időpontok nem egyenletesen oszlanak el a $(0,T)$ periódusban (pl. a periódus végén sürűbben fordul elő szállítás), és a beérkezési tételnagyságok is lényegesen különböznek.

Beérkezési folyamat (I/5.) szerint:



8. ábra

IX. Modell: (lásd IV. fejezet) folyamatos, egyenletes beérkezés, véletlen jellegű zavaró tényezők mellett az (4.8) folyamat szerint:



9. ábra

2.2. Az igényfolyamat modelljei:

1. Modell: folyamatos egyenletes igény, ismert α intenzitással

2. Modell: folyamatos, egyenletes igény, véletlen α intenzitással (az igény a rendelés feladás időpontjában a rendelési periódusra nem határozható meg kellő pontossággal)

3 – 9. Modell: a III – IX. Modellek megfelelői az igényfolyamatra

3. A modellek adatszükséglete

Ebben a pontban leírjuk azt a minimális adatszükségletet, mely alapján 2.1. és 2.2. pontban vázolt modellek kezelhetők. Segítségükkel meghatározható az induló készletszint szükséges nagysága, mely a folyamatos anyagellátást adott $1 - \epsilon$ valószínűséggel biztositja. A véletlen jellegű mennyiségek esetén az eloszlás ismeretében tudunk pontos megoldást adni, de a gyakorlat számára általában elegendő a várható érték és szórás ismerte, mely egyéb információ híján néhány múltbeli periódus megfigyelt adata alapján becsülhető.

Az adatigényt a gyakorlatban könnyen beszerezhető adatokra építjük, a számítógépes készletnyilvántartási rendszer szokásos felépítési rendszeréhez alkalmazkodva. Bár a modellek és a rájuk épülő megoldások (különösen a közelítő megoldások) lehetővé teszik a számítógépes rendszer nélküli feldolgozást is, hatásosan azonban egy számítógépes készletnyilvántartási rendszerhez kapcsolva működtethetők és azt egy döntéselőkészítő rendszerré tehetik.

A számítógépes készletnyilvántartási rendszer a készletmozgások nyilvántartásán és feldolgozásán alapul. Készletmodelljeink adatait is elsősorban erre építhetjük. Felhasználjuk a rendelések beérkezéseinek időpontjait és mennyiségeit továbbá az igénylések (felhasználások) időpontjait és a raktárból kivett mennyiségeket. Az igények nagysága álatlában megegyeznek a felhasználások nagyságával, de ha a raktárban hiány lép fel, akkor a tényleges igénynél kisebb a felhasználás, vagy időben késik az igény kielégitése. A számítógépes rendszerekben általában csak a felhasználásokat tartják nyilván, ebből a korábbi igények is csak becsülhetők. A gyakorlatban az igényfolyamat leírása a felhasználási folyamat adatainak segítségével történik, melyen utólagos korrekciót lehet végrehajtani a hiány előfordulása miatti eltérés alapján. Az alábbiakban felsort adatokat a vizsgált cikkek (termékek, anyagok, alkatrészek stb.) mindegyikére külön-külön meg kell adni.

Általános adatok mindegyik modellhez

Két rendelés feladás közötti időtartam (T)

Kivánt megbízhatósági szint ($1 - \epsilon$: a folyamatos ellátás valószinűsége)

Rendelés beérkezése:	– egy tételben (I. – II. Modell)
	– több tételben (III. – VIII. Modell)
	– folyamatosan (igen sok tételben, IX. Modell)
Igényfolyamat:	– folyamatos (1 –2., 9 Modell)
	– több tételben (3 – 8. Modell)

A beérkezési folyamat jellemzői:

Egy tételben történő beérkezésnél

I. Modellhez: beérkezési időpont (t_1)

II. Modellhez: beérkezési időpont eloszlása $/F(t)/$ vagy várható értéke (t) és szórása (σ_t)

Több tételben történő beérkezésnél

II. – VIII. Modellhez: beérkezések várható száma egy periódusban (n)

III. Modellhez: beérkezési időpontok $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ és tételnagyságok $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$

V. Modellhez: minimális és átlagos tételnagyság hányadosa (λ)

VI. Modellhez: két egymást követő beérkezés közötti minimális és átlagos időtartam hányadosa (μ)

VII. Modellhez: az előző periódusok megfigyelt tételnagyságai alapján közelítjük a $H_i(x)$ eloszlásokat $(i = 1,2, \ldots, n)$, melyek periodusonként az első i számú tétel együttes nagyságának eloszlásai

VIII. Modellhez: több periódus beérkezési időpontjának és tételnagyságainak statisztikai vizsgálata alapján eloszlás illesztés a III. fejezetben leírt módon.

Folyamatos beérkezésnél

IX. Modellhez: az átlagos beérkezési intenzitás (m) és szórásának (σ) becslése több periódus megvalósult beérkezési folyamatának statisztikai vizsgálatával

Az igényfolyamat jellemzői: (általában a felhasználási folyamat jellemzői alapján közelítjük)

1. Modellhez: az igényfolyamat intenzitása (α)

2. Modellhez: több periódus megfigyelt igényeinek (felhasználásainak) alapján az igény átlagos intenzitásának (α) és szórásainak (s) becslése vagy esetleg a $G(\alpha)$ eloszlás közelítése.

Több tételben jelentkező igénynél a beérkezési folyamathoz hasonló adatok az igényfolyamatról (általában a megfigyelt felhasználási adatsor alapján)

4. Az alkalmazandó eljárások rendszere

Biztonsági készlet alatt értjük a (6.3) feladat megoldásaként adódó M értéket, mely az a minimális induló készletszint, mely adott $1 - \epsilon$ valószínűséggel biztosıtja a folyamatos anyagellátását a vizsgált időszak egészében. Az M értékét általában egységnyi nagyságú igény fellépése esetére határozzuk meg. A biztonsági készletszintet ebből a periódus igényével való beszorzással kapjuk.

Először az egyszerűen meghatározható közelítő megoldások kiszámítását ismertetjük (közelítő explicit kifejezések), majd bonyolultabb eljárásokat adunk. A módszer kiválasztása függ a vizsgált cikk fontosságától és a rendelkezésre álló adatoktól. Bonyolultabb eljárások induló megoldásaként a fenti közelítések alkalmazhatók. A közelítő megoldások kifejezéseit több modellre összevontuk. A különböző modellek ennek speciális eseteként adódnak, bizonyos paraméterek elhagyásával (vagy rögzítésével).

4.1. Közelítő formula több tételben történő beérkezés esetén

Egységnyi nagyságú igény esetén a minimális induló készletszint:

$$(6.7)\qquad M(\epsilon,n,\lambda,\nu,s,m\mu) = \frac{\nu - 1}{2(1 - ns^2)} + \left\{ \left[\frac{\nu - 1}{2(1 - ns^2)} \right]^2 + \left[\frac{1 + (1 - \lambda)}{n} + \frac{1 + (1 - \mu)^2}{m} \right] \frac{ln\ 1/\epsilon}{2(1 - ns^2)} \right\}^{1/2}$$

Ahol a paraméterek jelentése

ϵ: hiány megengedett valószínűsége (0.01 – 0.2)

n: beérkezések száma két rendelés feladása között

λ: a beérkező tételnagyságok egyenletességére jellemző paraméter ($\lambda = n\delta$ ahol δ a min tételnagyság és a beérkező összmennyiség hányadosa) IV. modellnél $\lambda = 1$, egyébként $0 < \lambda < 1$.

ν: a várhatóan igényelt és a rendelt összmennyiség hányadosa (leggyakrabban 1)

s: az igény becslésének várható hibája (ν szórása)

m: a periódusban igényelt tételek száma, folyamatos felhasználás esetén m értéke nagynak választandó (pl 1000)

μ: az igényelt tételek egyenletességére jellemző konstans ($0 \leqslant \mu \leqslant 1$), vagy a VI. modellnél két egymást követő beérkezés közötti minimális és átlagos időtartam hányadosa.

A biztonsági készletszint ebből a formából adódik,

(6.7) $\quad B = C \cdot M$

ahol C: egy periódus igényének várható nagysága, $C = \alpha \cdot T$.

Közelítő megoldásként alkalmazható a következő modellek esetén:

Beérkezés:	Felhasználás:
IV. V. VI. VII. VIII.	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. modellek szerint

Ha n (illetve m) értéke nő, akkor a közelítés pontossága is javul. Előírt hibahatár esetén megadható, hogy mi a legkisebb n, melyre alkalmazható.

Ha valamelyik paraméter értékét nem tudjuk rögzíteni, csak megfigyeléseink vannak, hogy milyen értéket milyen gyakorisággal vesz fel, akkor a teljes valószínűség tétele szerint számolhatunk.

Pl. ha n_i a beérkezések száma p_i relativ gyakorisággal ($i = 1, \ldots, r$), akkor

$$M = \sum_{i=1}^{r} M(\epsilon, n_i, \lambda, \ldots, \mu) \cdot p_i$$

4.2. Implicit formulák több tételben történő beérkezés esetén

A folyamatos anyagellátás valószínűségének pontos értékét is meg tudjuk határozni az ismertetett modellekre adott M induló készletszint esetén. A szükséges kifejezések az I. és II. fejezetben már szerepeltek, itt újra összesítjük ezeket. Azt az M értéket kell meghatározni, melyre a valószínűség a kivánt $1 - \epsilon$ nagyságú lesz. Általában nemlineáris egyenlet megoldására vezet a feladat, mely numerikus módszerekkel a kivánt pontosságban egyszerűen és gyorsan elvégezhető.

Két rendelésfeladás közötti időtartamot választottuk időegységnek ($T = 1$) és a megrendelt összmennyiséget választottuk mennyiségi egységnek ($R = c = 1$), ez csupán lineáris transzformációt jelent. Az igényfolyamatot ismert α intenzitásúnak tételezzük fel (1. Modell) és egy $P(M,\alpha)$ függvény fejezi ki a folyamatos anyagellátás valószínűségét. Amennyiben a megrendelt és az igényelt összmennyiség a vizsgált periódusban megegyezik, akkor $\alpha = 1$ az egységek választása miatt.

Az igényfolyamat véletlen jellege esetén (2. Modell) is megtudjuk határozni a folyamatos anyagellátás valószínűségét, amennyiben az α intenzítás – paraméter $G(\alpha)$ eloszlását ismerjük A teljes valószinűség tétele szerint

$$P(M) = \int_0^\infty P(M,\alpha | \alpha = x) dG(x)$$

alakban kapjuk a kivánt valószínűséget M függvényében. Ebből szintén a $P(M) = 1 - \epsilon$ nemlineáris egyenlet megoldása adja a biztonsági szint M értékét egységnyi felhasználási mennyiségre, melyet a periódus összigényével szorozva kapjuk a biztonsági készletszintet a (6.7) kifejezésnek megfelelően.

A továbbiakban a különböző modellekre megadjuk a folyamatos anyagellátás valószínűségét kifejező formulákat M és α függvényeként. (A többi paraméter leírása a korábbiakban már szerepelt):

Egyenlő nagyságú tételekre (IV. Modell):

$$(6.8) \qquad P(M,\alpha) = 1 - \frac{M}{\alpha} \sum_{i=0}^{[n(\alpha - M)]} \binom{n}{i} \left(\frac{M + \frac{i}{n}}{\alpha} \right)^{i-1} \left(1 - \frac{M + \frac{i}{n}}{\alpha} \right)^{n-i}$$

Nem egyenlő nagyságú tételekre (V. Modell):

$$P(M,\alpha) = 1 - \left(1 - \frac{M}{\alpha}\right)^n -$$

$$- \frac{M}{\alpha} \sum_{k=1}^{r} k \binom{n}{k} \binom{n-1}{k} \int_0^{a_k} \left(\frac{M + (1-\lambda)x + \lambda \frac{k}{n}}{\alpha} \right)^{k-1} \left(1 - \frac{M + (1-\lambda)x + \lambda \frac{k}{n}}{\alpha} \right)^{n-k}$$

$$x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} dx,$$

ahol

$$a_k = \min \left\{ \frac{\alpha - M - \lambda \frac{k}{n}}{1 - \lambda}, 1 \right\}$$

$$r = \min \left\{ \frac{n}{\lambda} (\alpha - M), n - 1 \right\}$$

A $\lambda = 0$ esetben, azaz véletlen, nagyságú egyenletes eloszlású tételekre

$$(6.19) \qquad P(M,\alpha) = 1 - \left(1 - \frac{M}{\alpha}\right)^n (1 + M)^{n-1}$$

Ismert eloszlású véletlen tételekre (VII. Modell):

$$(6.11)\qquad P(M,\alpha) = 1 - \left(1 - \frac{M}{\alpha}\right)^n - \frac{M}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\int_0^{n(\alpha-M)}\left(\frac{M+\frac{x}{n}}{\alpha}\right)^{i-1}\left(1-\frac{M+\frac{x}{n}}{\alpha}\right)^{n-i} dH_i(x)$$

ahol $H_i(x)$ az első i számú tétel együttes nagyságának eloszlása. Ha ennek nagysága $h_j^{(i)}, p_j^{(i)}$ relatívgyakorisággal ($j = 1, \ldots, q$) akkor a fenti formula alakja:

$$(6.12)\qquad P(M,\alpha) = 1 - \left(1 - \frac{M}{\alpha}\right)^n - \frac{M}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\sum_{\substack{j=1\\ h_j^{(i)} \leqslant n(\alpha - M)}}^{q}\left[\frac{M+\frac{h_j^{(i)}}{n}}{\alpha}\right]^{i-1}\left[1-\frac{M+\frac{h_j^{(n)}}{n}}{\alpha}\right]^{n-i} p_j^{(i)}$$

A VIII. Modell esetén a III. fejezetben részletesen leírt eljárás egy termékes (egyszerűsített) változata alkalmazható.

Folyamatos jellegű beérkezés estén (IX. Modell),

ha a beérkezés intenzitása $z = C/T$, véletlen ingadozására jellemző szórása σ. Felhasználás intenzítása y_i, p_i valószínűséggel ($i = 1, \ldots, q$) 2. modell).

$$(6.13)\qquad P(M) = \sum_{i=1}^{q}\left[\Phi\left(\frac{M-(y_i-z)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{\frac{2M(y_i-z)}{\sigma^2}}\,\Phi\left(\frac{-M-(y_i-z)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]p_i$$

ahol Φ jelenti a standard normális eloszlásfüggvényt

Ismert ütemezésű beérkezés esetén (III. Modell)

beérkezési időpontok t_i,

tételek q_i, $i = 1, \ldots, r$

felhasználási intenzitás α (1. Modell)

$$(6.14)\qquad M = \max_{K=1,\ldots,r}\left\{\alpha t_k - \sum_{i=1}^{K-1} q_i\right\}$$

Véletlen intenzitás esetén α helyett $\alpha + P_\epsilon s$, ahol P_ϵ a biztonsági szinttől függő konstans, α az α várható értéke, s a szórása. Normális eloszlással való közelítés estén $P_\epsilon = \Phi^{-1}(1-\epsilon)$, ahol Φ^{-1} jelöli a standars normális eloszlásfüggvény inverzét.

4.3. Közelítő formulák egy tételben történő beérkezés esetén

A rendelés egy tételben történő beérkezése esetén a szükséges induló készletszint nagyságát ismert t_1 beérkezési időpont esetén (a periódus kezdetétől nézve) az

$$(6.15)\qquad M = \alpha \cdot t_1$$

alakban tudjuk megadni, ahol α az egységnyi időtartam igényének nagysága (1. Modell). Ha α valószínűségi változó $G(X)$ eloszlásfüggvénnyel (2. Modell), a megbizhatósági feltétel

$$(6.16) \quad P(\alpha t_1 < M) = G(\frac{M}{t_1}) = 1 - \epsilon,$$

mely alapján

$$(6.17) \quad M = t_1 G^{-1}(1 - \epsilon),$$

ahol G^{-1} jelöli a G eloszlásfüggvény inverzét. A $G(X)$ eloszlásfüggvény meghatározása a gyakorlatban általában nehéz, rendszerint nem áll elegendő mennyiségű statisztikai adat a rendelkezésre. Az α várható érték és az s szórás becslését elvégezzük és normális eloszlással közelítve

$$(6.18) \quad M = t_1(\alpha + k_\epsilon s)$$

adódik. A k_ϵ konstanst a továbbiakban is

$$(6.19) \quad k_\epsilon = \Phi^{-1}(1 - \epsilon)$$

alakban definiáljuk, ahol Φ^{-1} jelöli a standard normális eloszlásfüggvény inverzét.

Hasonlóan járhatunk el, ha a t_1 beérkezési időpont valószínűségi változó $F(t)$ eloszlással (II. Modell), mely esetben ismert α paraméterre

$$(6.20) \quad M = \alpha \cdot F^{-1}(1 - \epsilon)$$

vagy normális eloszlással való közelítésnél

$$(6.21) \quad M = \alpha(t + k_\epsilon \sigma_t)$$

ahol t és σ_t jelöli t_1 várható értékét és szórását.

Ha α és t_1 is valószínűségi változó, akkor általánosan a

$$(6.22) \quad P(\alpha t_1 < M) = \int_0^\infty F(\frac{M}{x}) dG(x) = 1 - \epsilon$$

megbízhatósági feltételből határozható meg M értéke, mely általában explicit módon nem fejezhető ki. A beérkezési idő alatti igény várható értéke $t\alpha$ és szórása

$$(6.23) \quad \vartheta = \sqrt{s^2\sigma_t^2 + s^2 t + \sigma_t^2\alpha}$$

alakban adódik, ezért normális eloszlással közelítve

(6.24) $M = t\alpha + k_\epsilon \cdot \vartheta$

az $1 - \epsilon$ valószínűségi szinthez tartozó biztonsági készletszint, ahol k_ϵ konstans (6.19) szerint határozható meg. Ez a gyakorlat számára általában megfelelő közelitést ad.

Irodalomjegyzék

[1] Ahrens, J.H. – Dieter, K.: Computer methods for sampling from gamma, beta, Poisson and binomial distributions, Computing 12 (1974) 223-246.

[2] Baxter, G. – Donsker, M.: On the distribution of the supremum for processes with stationary independent increments, Transactions of the American Mathematical Society, 85 (1957), 73-87.

[3] Dodnár G. – Kelle P.: Die optimale Grösse der Warmsilos von Asphaltmischanlangen, Das stationare Mischwerk. Der bituminöse Srassenbau (megjelenés alatt)

[4] Csáki E.: Vizsgálatok az empirikus eloszlásfüggvényről, Kandidátusi értekezés, Budapest, 1974.

[5] Dempster, A.: Generalized D_n^+ statistics, Annals of Mathematical Statistic, 30 (1959), 593-597.

[6] Fiacco, A.V. – McCormick, G.P.: Nonlinear Porgramming: Sequential Unconstrained Minimazation Technique. (Wiley, New York, 1968)

[7] Gerencsér L.: Reduction of the on-hand invertory on given level of reliabilty, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 7. Inventory Control and Water Storage Győr, 1971. (Bolyai J. Math. Soc. and North Holland Publ. Comp. Budapest, 1973.) 83-93.

[8] Hooke, R. – Jeeves, T.A.: Direct search solution of numerical and statistical problems. Journal of the ACM, 8 (1959), 215-229.

[9] Kelle P.: Chance constrained inventory model for an asphalt mixing problem, Stochastic Programming, Lecture Notes on Operations Research (megjelenés alatt)

[10] Klemm, H.: On the operating characteristic "service level", Colloquia Mathematica János Bolyai 7. Inventory Control and Water Storage Győr, 1971. (Bolyai J. Math. Soc. and North Holland Publ. Comp. Budapest, 1973) 169-179.

[11] Knuth, D.E.: The art of computer programming, vol. 3 Sorting and searching (Addison – Wesley P.C. 1973)

[12] László Z.:Egy teljesen véletlen megbízhatósági jellegű készletmodell, Kandidátusi értekezés, Veszprém, 1970.

[13] László Z.: Some recent result concerning reliability type inventory models, Colloquia, Mathematica Societatis János Bolyai 7. Inventory Control and Water Storage Győr, 1971. (Bolyai J. Math. Soc. and North-Holland Publ. Comp. Budapest, 1973. 179-187.

[14] Németh Gy.: Sztochasztikus készletmodellekkel kapcsolatos vizsgálatok, MTA Közleményei (1971) 133-135.

[15] Pintér J.: Empirikus eloszlásfüggvény-sorozatok maximális eltérésének vizsgálata; alkalmazás egy több periódusú megbízhatósági készletmodellre, Alkalmazott Matematikai Lapok 1/1975 189-195.

[16] Powell, M.J.D.: An iterative method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, Computer Journal 7(1964) 155-162.

[17] Prékopa A.: Reliability equation for an inventory problem and its asymptotic solutions, Colloquium ot the Application of Mathematics to Economics (Akadémia Kiadó, Budapest, 1965.) 317-327.

[18] Prékopa A.: Stochastic Programming Models for Inventory Control and Water Storage Problems, Colloqiuia Mathematica Societatis János Bolyai 7. Inventory Control and Water Storage, Győr, 1971. (Bolyai J. Math. Soc. and North-Holland Publ. Compl. Budapest, 1973.) 229-247/

[19] Prékopa A.: Generalizations of the Theorems of Smirnov with Application to a Reliability Type Inventory Problem, Mathematische Operations-forschung und Statistic 4(1973) 283-297.

[20] Prékopa A.:On logarithmic concave measures and functions. Acta Scientiarum Mathematicarum 34(1973) 283-297.

[21] Prékopa A. – Kelle P.: Sztochasztikus programozáson alapuló megbizhatósági jellegű készletmodellek, Alkalmazott Matematikai Lapok 2(1976) 1-16.

[22] Prékopa A. – Kelle P.: Realibility type inventory models based on stochastic programming, Mathematical Programming Study, 9(1978) 43-58.

[23] Rényi A.: Valószínűségszámítás (Tankönyvkiadó, Budapest, 1966)

[24] Rosenbrock, H.H. An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function, Computer Journal 3(1960) 173-184.

[25] Szmirnov, N.V.: Priblizsenyije zakanov raszregyelenija szlucsajnüh velicsin po empiricseszkim dannüm, Uszpehi Mat. Nauk 10(1949) 179-206.

[26] Takács L.: Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes (Wiley, New York, 1967)

[27] Wilks, S.S.: Mathematical Statistics (Wiley, New York, 1962)

[28] Ziermann M.: A Szmirnov tétel alkalmazása egy raktározási problémára, MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei 8(1963) 509-516.

[29] Chikán A. – Berács J. – Kelle P. – Nagy M. – Vass I.: Gépipari vállalatok integrált készletgazdálkodási rendszere, Tanulmány a Gépipari Technológiai Intézet számára, 1976.

[30] Chikán A. – Meszéna Gy.: Karbantartási-szerelési anyagok készletezése, Tanulmány, MKKE, 1975.

[31] A. Chikán – Gy. Meszéna: A multi-stage stochastic inventory model and its application, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 7. Inventory Control and Water Storage Győr, 1971. (Bolyai J. Math. Soc. and North Holland Publ. Comp. Budapest, 1973/49-61.

[32] DORIS (Demand Oriented Inventoy System) készletgazdálkodási programrendszer, KERINFORG, 1971.

[33] Gál T. – Kelle P. – Kovács T.: A STOMCOS anyaggazdálkodási programcsomag alkalmazásának rendszerterve a Metallóglóbus Vállalat készletgazdálkodási feladataira, Tanulmány, készült a BME Automatizálási Tanszékén, 1977.

[34] Jánoki Lajos: A VILATI-ban kifejlesztett STOMCOS számitógépes anyaggazdálkodási és raktárnyilvántartási rendszer, Termelésirányítás I. Az MTA Műszaki Tudományok Osztálya 2. Termelésirányítási Ankétjának előadásai Bp. 1978. 51-65.

[35] Kelemen Z. – Kelle P.: Gépalkatrész készletgazdálkodási feladatok megoldása I. – II. Tanulmány, a Betonútépitő Vállalat megbízásából készült az Országos Piackutató Intézetben, 1974.

[36] Kelle P.: optimális gyártásközi készletek kialakitása, Termelésirányitás I, Az MTA Műszaki Tudományok Osztálya 2. Termelésirányitási Ankétjának előadásai Bp. 1978. 81-90.

[37] Kelle P.: Stochastische Optimerungsmodelle für die Produktioslager eines Walzwerkes, Mitteilungen der Math. Ges.d. DDR. 1978/1. 31-36.

[38] Kelle P. – Mészáros G.: A hideghengermű gyártásközi készleteinek optimalizálása, Tanulmány MTA SzTAKI – Dunai Vasmű együttműködésében, 1977.

[39] Kelle P.: A készletgazdálkodás egy szimulációs modellje, "Számitógépes Rendszerszimuláció" szimpozion kiadványa, MTA Műszaki Tud. Osztálya, Bp. 1975.

[40] Kelle P.: Stochastische Mehr-Produkt Modelle für die Sicherheitsberstände bei einer Serienfabrikation, Rostocker Betriebswirtschaftliche Manuscripte 20 (1977) 151-161.

[41] Kelle P.: Készletgazdálkodási modellek, Tanulmány a "Szocialista Vállalat" cımű MTA kutatási főirány témájában, 1973.

[42] Kelle P.: Ein neuse Modell zur Bestimmung des zur kontinuirlichen Produktion notwendingen Lagerbestandes, MTA SzTAKI Working Paper MO/2, 1979.

[43] Megyeri E. – Chikán A.: A Hungária Műanyagfeldolgozó Vállalat készletgazdálkodásának fejlesztése, Tanulmány MKKE Ipargazdasági Tanszéke, 1971.

[44] Móritz A.: Möglichkeiten der Modellierung der Planung der Handelsunternehmen, Tanulmány, Kerinforg, 1977.

[45] Nagy I. – Prékopa A.: Az Országos Bányagépgyártó Vállalat gyáregységeinél végzett készletoptimalizálási vizsgálatokról, Tanulmány, NIM IGUSZI, 1968.

[46] Palásti I. – Rényi A. – Szentmártony F. – Takács L.: A raktárkészlet pótlásáról I. MTA Alk. Mat. Int. Közleményei 2(1953) 187-202.

[47] Prékopa A.: Az S szintre való felrendelés elnevezésű készletmodell és annak kiterjesztése intervallumszerű beérkezések esetén, Számológép, 1971. 34-45.

[48] Prékopa A. – Ziermann M.: Tanulmány a folyamatos termelést biztositó legkisebb raktárkészlettel kapcsolatos egyes problémákról, OT számára gépelt kézirat, 1962. A közgazdasági részt Bagó F. és Rieb L. készitette.

[49] Prékopa A. – Kelle P.: A hazánkban elérhető készletgazdálkodási programrendszerek kritikai elemzése, Tanulmány a "Szocialista Vállalat" cımű MTA Kutatási főirány témájában, 1973.

[50] Preisch M. – Szalai A. – Pompéry B. – Szatmári G.: Termelésirányıtás a nehéz- vegyipari vállalatoknál, Termeélésırányitás II., Az MTA Műszaki Tudományok Osztálya 2. Termelésirányıtási Ankétjának előadásai, Bp. 1978. 25-30.

[51] Rényi A. – Szentmártony F.: Gépalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószınűségszámıtási meghatározása, Matematikai Lapok 3 (1952) 129-139.

[52] Rényi A. – Ziermann M.: Üzletek áruellátásával kapcsolatos szélső érték feladatok, MTA Alk. Mat. Int. Közleményei 10(1961) 495-505.

[53] Vass I.: Készletgazdálkodási matematikai modellek alkalmazási problémái, DATA 8 (1972) 195-204.

[54] Vass I.: Application of an inventory model based on a stochastic input-output process, in the distribution industry, Kerinforg, 1973.

[55] Vegyipari vállalatok készlettervezési és elemző eljárásainak rendszerterve, Tanulmány, készült az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézetében a VSZFT megbizásából. A készítő munkacsoport: Chikán A., Bánki G., Borlói R., Kelle P., Kulcsár T., Meszéna Gy.

[56] Ziermann M.: A raktárkészlet pótlásáról II. MTA Alk. Mat. Int. Közleményei 2 (1953) 203-216.

[57] Kelle P.: Valószinűséggel korlátozott megbizhatósági készletmodellek vizsgálata, Egyetemi doktori értekezés, Bp. 1979.

I. Melléklet

A hiány valószínűsége véletlen ütemezésű szállítás és folyamatos anyagfelhasználás esetén

A mellékelt táblázat alkalmas arra, hogy adott induló M készletszint esetén meghatározzuk a folyamatos anyagellátás valószínűségét a (0,T) tervezési periódusban, ha a I. fejezet 2. pontjában leírt modell feltételei teljesülnek.

A jelölések a következők:

N: a beszállítások száma a (O,T) periódusban,

LAMBDA: a minimális nagyságú beszállított mennyiség és az átlagos beszállítási mennyiség hányadosa,

Y: az egységnyi igényre eső készletszint nagysága. Ha egységnyi idő alatt c mennyiséget használnak fel, akkor $Y = M/cT$ értékhez tartozó táblázatbeli érték adja a folyamatos anyagellát valószínűségét.

P: sorában a valószínűség pontos értéke a (2.8) formula alapján $\alpha = 1$, $s = 1$ esetben,

A sorában: közelítő érték a valószínűségre az (1.11) aszimptotikus formula alapján,

H sorában: a közelítő megoldás relatív százalékos hibája.

N=		5					10					20					40				
LAMBDA=		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
Y:																					
0.12	P:	0.17	0.18	0.19	0.19	0.19	0.23	0.26	0.28	0.30	0.30	0.33	0.38	0.43	0.47	0.48	0.50	0.57	0.64	0.69	0.71
	K:	0.07	0.09	0.11	0.13	0.13	0.13	0.17	0.21	0.24	0.25	0.25	0.31	0.37	0.42	0.44	0.44	0.52	0.60	0.66	0.68
	H:	59.0	51.6	42.4	33.1	29.0	41.1	34.2	26.3	20.2	17.9	24.6	19.5	14.0	11.1	8.5	12.5	9.0	6.0	4.0	3.3
0.14	P:	0.21	0.22	0.23	0.24	0.24	0.28	0.32	0.35	0.37	0.38	0.41	0.47	0.52	0.57	0.58	0.60	0.68	0.75	0.79	0.81
	K:	0.09	0.12	0.15	0.17	0.18	0.18	0.22	0.27	0.31	0.32	0.32	0.39	0.47	0.52	0.54	0.54	0.63	0.71	0.77	0.79
	H:	54.6	46.8	37.7	29.0	24.7	35.5	29.7	22.3	16.8	14.4	20.8	15.9	11.1	7.9	6.6	9.8	6.8	4.3	2.8	2.3
0.16	P:	0.24	0.26	0.28	0.29	0.29	0.33	0.38	0.42	0.45	0.46	0.49	0.55	0.61	0.65	0.68	0.69	0.77	0.83	0.87	0.88
	K:	0.12	0.15	0.19	0.21	0.23	0.23	0.28	0.34	0.39	0.41	0.40	0.48	0.56	0.62	0.64	0.64	0.73	0.81	0.85	0.87
	H:	50.5	42.6	33.7	26.1	22.0	32.6	25.9	19.1	14.2	12.0	17.7	13.1	8.9	6.2	5.1	7.7	5.1	3.1	1.9	1.5
0.18	P:	0.28	0.31	0.33	0.34	0.35	0.39	0.44	0.49	0.52	0.53	0.56	0.63	0.70	0.74	0.76	0.77	0.84	0.89	0.92	0.93
	K:	0.15	0.19	0.23	0.26	0.28	0.28	0.34	0.40	0.46	0.48	0.48	0.56	0.65	0.70	0.73	0.73	0.81	0.87	0.91	0.93
	H:	46.8	38.8	30.1	23.5	20.7	29.1	22.7	16.4	12.0	10.3	15.1	10.9	7.2	4.5	3.9	6.0	3.8	2.2	1.2	0.9
0.20	P:	0.32	0.35	0.38	0.40	0.41	0.45	0.50	0.55	0.59	0.60	0.63	0.70	0.77	0.81	0.82	0.84	0.90	0.94	0.96	0.96
	K:	0.18	0.23	0.27	0.31	0.33	0.33	0.40	0.47	0.53	0.55	0.55	0.64	0.72	0.78	0.80	0.80	0.87	0.92	0.95	0.96
	H:	43.4	35.4	27.1	21.0	20.5	26.1	19.9	14.1	10.2	8.7	12.8	9.0	5.8	3.7	3.0	4.7	2.8	1.5	0.8	0.6
0.22	P:	0.36	0.39	0.42	0.45	0.46	0.50	0.56	0.61	0.65	0.67	0.70	0.77	0.83	0.86	0.88	0.89	0.93	0.96	0.98	0.98
	K:	0.21	0.27	0.32	0.37	0.38	0.38	0.46	0.54	0.60	0.62	0.62	0.71	0.79	0.84	0.86	0.86	0.92	0.95	0.97	0.98
	H:	40.4	32.4	24.4	18.7	17.3	23.4	17.5	12.2	8.5	7.2	10.9	7.4	4.6	2.9	2.3	3.6	2.0	1.0	0.5	0.3
0.24	P:	0.40	0.44	0.47	0.50	0.51	0.55	0.62	0.67	0.71	0.73	0.75	0.82	0.87	0.91	0.92	0.92	0.96	0.98	0.99	0.99
	K:	0.25	0.31	0.37	0.42	0.44	0.44	0.52	0.60	0.66	0.68	0.68	0.77	0.84	0.89	0.90	0.90	0.95	0.97	0.99	0.99
	H:	37.5	29.7	22.0	16.7	14.7	21.0	15.5	10.6	7.3	6.0	9.3	6.1	3.7	2.2	1.7	2.7	1.4	0.6	0.3	0.2
0.26	P:	0.44	0.48	0.52	0.55	0.56	0.61	0.67	0.73	0.77	0.78	0.80	0.87	0.91	0.94	0.94	0.95	0.98	0.99	1.00	1.00
	K:	0.29	0.35	0.42	0.47	0.49	0.49	0.58	0.66	0.72	0.74	0.74	0.82	0.89	0.92	0.93	0.93	0.97	0.99	0.99	1.00
	H:	34.9	27.2	19.9	14.8	12.6	18.9	13.7	9.1	6.2	5.0	7.8	5.0	2.9	1.6	1.2	2.0	0.9	0.4	0.1	0.1
0.28	P:	0.49	0.53	0.57	0.60	0.61	0.66	0.72	0.78	0.81	0.83	0.85	0.90	0.94	0.96	0.96	0.97	0.99	1.00	1.00	1.00
	K:	0.32	0.39	0.47	0.52	0.54	0.54	0.63	0.71	0.77	0.79	0.79	0.87	0.92	0.95	0.96	0.96	0.98	0.99	1.00	1.00
	H:	32.5	25.0	18.0	13.2	11.0	17.0	12.1	7.9	5.2	4.2	6.5	4.1	2.2	1.2	0.9	1.4	0.6	0.2	0.1	0.0
0.30	P:	0.52	0.57	0.61	0.65	0.66	0.70	0.77	0.82	0.85	0.86	0.88	0.93	0.96	0.97	0.98	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00
	K:	0.36	0.44	0.51	0.57	0.59	0.59	0.68	0.76	0.82	0.83	0.83	0.90	0.94	0.97	0.97	0.97	0.99	1.00	1.00	1.00
	H:	30.3	23.0	16.4	11.8	9.7	15.3	10.6	6.8	4.3	3.5	5.5	3.3	1.7	0.8	0.6	1.0	0.4	0.1	0.0	0.0
0.32	P:	0.56	0.61	0.66	0.69	0.70	0.74	0.81	0.86	0.89	0.90	0.91	0.95	0.97	0.98	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
	K:	0.40	0.48	0.56	0.62	0.64	0.64	0.73	0.81	0.85	0.87	0.87	0.93	0.96	0.98	0.98	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00
	H:	28.3	21.2	14.9	10.5	8.7	13.7	9.4	5.9	3.6	2.9	4.6	2.5	1.3	0.5	0.4	0.7	0.2	0.1	0.0	0.0
0.34	P:	0.60	0.65	0.70	0.73	0.74	0.78	0.84	0.89	0.91	0.92	0.94	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
	K:	0.44	0.52	0.60	0.66	0.69	0.69	0.77	0.84	0.89	0.90	0.90	0.95	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
	H:	26.4	19.5	13.5	9.4	7.8	12.3	8.3	5.0	3.0	2.3	3.8	2.0	0.9	0.4	0.3	0.4	0.1	0.0	0.0	0.0
0.36	P:	0.63	0.69	0.74	0.77	0.78	0.82	0.87	0.91	0.94	0.94	0.95	0.98	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	K:	0.48	0.56	0.65	0.70	0.73	0.73	0.81	0.87	0.91	0.93	0.93	0.95	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
	H:	24.6	18.0	12.3	8.5	7.1	11.0	7.3	4.3	2.5	1.9	3.0	1.5	0.7	0.3	0.2	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0
0.38	P:	0.67	0.72	0.77	0.80	0.82	0.85	0.90	0.93	0.95	0.96	0.97	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	K:	0.51	0.60	0.69	0.74	0.76	0.76	0.84	0.90	0.93	0.94	0.94	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	H:	23.0	16.6	11.2	7.6	6.4	9.9	6.3	3.6	2.0	1.5	2.4	1.2	0.5	0.2	0.1	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0
0.40	P:	0.70	0.76	0.80	0.83	0.85	0.88	0.92	0.95	0.97	0.97	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	K:	0.55	0.64	0.72	0.78	0.80	0.80	0.87	0.92	0.95	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	H:	21.5	15.4	10.2	6.8	5.6	8.8	5.5	3.1	1.6	1.2	1.9	0.9	0.3	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
0.42	P:	0.73	0.79	0.83	0.86	0.87	0.90	0.94	0.97	0.98	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	K:	0.59	0.68	0.76	0.81	0.83	0.83	0.90	0.94	0.96	0.97	0.97	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	H:	20.1	14.2	9.3	6.0	4.9	7.8	4.8	2.6	1.3	0.9	1.5	0.5	0.2	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
0.44	P:	0.76	0.82	0.86	0.89	0.89	0.92	0.96	0.98	0.98	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	K:	0.62	0.71	0.79	0.84	0.86	0.86	0.92	0.96	0.97	0.98	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	H:	18.7	13.1	8.5	5.4	4.2	5.9	4.1	2.1	1.0	0.7	1.2	0.4	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.46	P:	0.79	0.84	0.88	0.91	0.91	0.94	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	K:	0.65	0.74	0.82	0.86	0.88	0.88	0.93	0.97	0.98	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	H:	17.5	12.1	7.7	4.7	3.6	5.1	3.5	1.7	0.8	0.5	0.9	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.48	P:	0.82	0.87	0.90	0.92	0.93	0.95	0.98	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	K:	0.68	0.77	0.84	0.89	0.90	0.90	0.95	0.97	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	H:	16.3	11.2	7.0	4.2	3.2	5.3	2.9	1.4	0.6	0.4	0.5	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

II. Melléklet

Folyamatos anyagellátást adott szinten biztosító induló készletszint

A táblázat tartalmazza az induló készletszintnek azt a nagyságát, mely a (0,T) tervezési periódusban a folyamatos anygellátást $1 - \epsilon$ valószínűséggel biztósıtja, ha az I. fejezet 2. pontjában leírt modell feltételei teljesülnek.

A jelölések a következők:

1 – EPS: a kívánt biztonsági szint,

LAMBDA: a minimális nagyságú beszállított mennyiség és az átlagos beszállítási mennyiség hányadosa,

N: a beszállítások száma a (0,T) periódusban,

P sorában: az induló készletszint értéke a (2.8) pontos kifejezése alapján,

A sorában: az induló készletszint értéke az (1.13) aszimptotikus közelítés alapján,

H sorában: a közelítés relatív százalékos hibája.

A táblázat értékei az egységnyi felhasználáshoz szükséges induló készletszint értékét adják meg. A (0,T) intervallumon c intenzítású felhasználás esetén a szükséges induló készletszint a c.T értékkel való beszorzással nyerhető.

AZ OPT. INDULO KESZLET PONTOS ES KOZELITO ERTEKE VELETLEN UTEMEZESU BEERKEZESRE/ ES A KOZELITES REL. SZAZALEKOS HIBAJA:

1-EPS=		0.75					0.80					0.85					0.90				
LAMBDA=		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
N:																					
4	P:	.470	.434	.406	.387	.382	.509	.469	.438	.418	.412	.553	.509	.476	.455	.447	.606	.558	.522	.501	.493
	K:	.589	.520	.465	.429	.416	.634	.561	.501	.452	.449	.689	.609	.544	.502	.487	.759	.671	.600	.553	.536
	H:	25.1	19.8	14.7	10.9	8.9	24.7	19.5	14.5	10.5	8.7	24.6	19.5	14.4	10.3	8.9	25.2	20.2	14.8	10.3	8.8
5	P:	.431	.396	.368	.349	.343	.466	.428	.397	.378	.370	.507	.465	.432	.411	.404	.557	.510	.475	.453	.447
	K:	.526	.465	.416	.384	.372	.567	.501	.449	.414	.401	.615	.544	.487	.449	.436	.679	.600	.536	.495	.480
	H:	22.2	17.7	13.2	9.9	8.5	21.6	17.3	12.9	9.5	8.3	21.4	17.2	12.8	9.2	7.9	21.7	17.5	13.0	9.1	7.3
6	P:	.400	.366	.339	.321	.315	.433	.396	.366	.347	.341	.472	.430	.398	.378	.372	.519	.473	.439	.418	.410
	K:	.481	.425	.380	.350	.340	.518	.458	.409	.377	.366	.562	.497	.445	.410	.398	.619	.548	.490	.452	.438
	H:	20.0	16.1	12.1	9.1	8.1	19.5	15.7	11.8	8.7	7.5	19.2	15.5	11.6	8.4	7.0	19.3	15.7	11.6	8.1	6.7
7	P:	.376	.342	.316	.299	.293	.407	.370	.342	.323	.317	.443	.403	.372	.352	.346	.488	.443	.410	.389	.382
	K:	.445	.393	.352	.324	.315	.479	.424	.379	.349	.339	.521	.460	.412	.379	.368	.573	.507	.453	.418	.406
	H:	18.3	14.8	11.2	8.5	7.4	17.8	14.4	10.9	8.1	6.8	17.5	14.2	10.6	7.7	6.5	17.5	14.4	10.6	7.5	6.3
8	P:	.356	.323	.298	.281	.276	.385	.350	.322	.304	.298	.419	.380	.350	.331	.324	.462	.419	.386	.366	.358
	K:	.416	.368	.329	.303	.294	.448	.396	.355	.327	.317	.487	.430	.385	.355	.344	.536	.474	.424	.391	.379
	H:	17.0	13.9	10.5	7.9	6.8	16.5	13.4	10.2	7.5	6.4	16.2	13.2	9.9	7.2	6.1	16.1	13.2	9.8	7.0	5.9
9	P:	.338	.307	.282	.266	.261	.366	.332	.305	.288	.282	.399	.361	.332	.313	.307	.440	.398	.366	.346	.339
	K:	.392	.347	.310	.286	.278	.423	.374	.334	.308	.299	.459	.406	.363	.335	.325	.506	.447	.400	.369	.358
	H:	16.0	13.0	9.9	7.5	6.4	15.4	12.6	9.6	7.1	6.1	15.1	12.3	9.3	6.8	5.9	14.9	12.3	9.2	6.6	5.5
10	P:	.324	.293	.269	.253	.248	.350	.317	.291	.274	.268	.382	.345	.317	.298	.292	.421	.380	.349	.329	.323
	K:	.372	.329	.294	.271	.263	.401	.355	.317	.292	.284	.435	.385	.344	.317	.308	.480	.424	.379	.350	.339
	H:	15.1	12.4	9.4	7.1	6.1	14.5	11.9	9.1	6.6	5.8	14.1	11.6	8.8	6.4	5.5	14.0	11.5	8.6	6.2	5.2
11	P:	.311	.281	.258	.242	.237	.336	.304	.278	.262	.256	.366	.331	.303	.285	.279	.404	.365	.334	.315	.308
	K:	.355	.314	.281	.259	.251	.382	.338	.302	.279	.270	.415	.367	.328	.303	.294	.457	.404	.362	.333	.324
	H:	14.3	11.8	9.0	6.8	5.9	13.8	11.3	8.6	6.5	5.6	13.4	11.0	8.3	6.1	5.2	13.2	10.9	8.2	5.9	4.9
12	P:	.299	.270	.247	.233	.227	.324	.292	.268	.251	.246	.353	.318	.291	.274	.268	.389	.351	.321	.302	.296
	K:	.340	.300	.269	.248	.240	.366	.324	.290	.267	.259	.398	.351	.314	.290	.281	.438	.387	.346	.319	.310
	H:	13.6	11.2	8.6	6.5	5.6	13.1	10.8	8.2	6.2	5.3	12.7	10.5	7.9	5.9	5.0	12.5	10.3	7.8	5.6	4.7
13	P:	.289	.261	.238	.224	.219	.313	.282	.258	.242	.237	.341	.307	.281	.264	.258	.376	.339	.310	.291	.285
	K:	.327	.289	.258	.238	.231	.352	.311	.278	.256	.249	.382	.339	.302	.278	.270	.421	.372	.333	.307	.298
	H:	13.0	10.8	8.3	6.3	5.4	12.5	10.3	7.9	5.9	5.1	12.1	10.0	7.6	5.6	4.8	11.9	9.8	7.4	5.4	4.5
14	P:	.280	.252	.230	.216	.211	.303	.273	.249	.234	.229	.330	.297	.271	.254	.249	.364	.328	.299	.281	.275
	K:	.315	.278	.249	.229	.223	.339	.300	.268	.247	.240	.368	.325	.291	.268	.260	.405	.358	.321	.296	.287
	H:	12.5	10.4	8.0	6.1	5.2	12.0	9.9	7.6	5.7	4.9	11.6	9.6	7.3	5.4	4.6	11.4	9.4	7.1	5.2	4.3
15	P:	.271	.244	.223	.209	.205	.294	.264	.241	.226	.221	.320	.288	.263	.246	.241	.353	.318	.290	.272	.266
	K:	.304	.269	.240	.222	.215	.328	.290	.259	.239	.232	.356	.314	.281	.259	.251	.392	.346	.310	.285	.277
	H:	12.1	10.0	7.7	5.9	5.0	11.6	9.6	7.3	5.5	4.7	11.2	9.2	7.0	5.2	4.5	10.9	9.0	6.8	5.0	4.2
16	P:	.264	.237	.217	.203	.198	.285	.257	.234	.219	.214	.311	.279	.255	.239	.233	.343	.308	.281	.264	.258
	K:	.294	.260	.233	.215	.208	.317	.280	.251	.231	.224	.344	.304	.272	.251	.243	.379	.335	.300	.277	.268
	H:	11.6	9.7	7.4	5.7	4.9	11.2	9.3	7.1	5.4	4.6	10.7	8.9	6.8	5.1	4.3	10.5	8.7	6.6	4.8	4.1
17	P:	.257	.231	.211	.197	.193	.278	.250	.228	.213	.208	.303	.272	.248	.232	.227	.334	.300	.274	.256	.250
	K:	.286	.252	.226	.208	.202	.308	.272	.243	.224	.218	.334	.295	.264	.243	.236	.368	.325	.291	.268	.260
	H:	11.3	9.4	7.2	5.5	4.7	10.8	9.0	6.9	5.2	4.5	10.4	8.6	6.6	4.9	4.2	10.1	8.4	6.4	4.7	3.9
18	P:	.250	.225	.205	.192	.188	.271	.243	.222	.207	.203	.295	.265	.241	.226	.221	.326	.292	.266	.249	.244
	K:	.277	.245	.219	.202	.196	.299	.264	.236	.218	.211	.325	.287	.257	.237	.230	.358	.316	.283	.261	.253
	H:	10.9	9.1	7.0	5.4	4.6	10.4	8.7	6.7	5.0	4.3	10.0	8.3	6.4	4.8	4.1	9.8	8.1	6.2	4.5	3.6
19	P:	.244	.219	.200	.187	.183	.264	.237	.216	.202	.197	.288	.258	.235	.220	.215	.318	.285	.260	.243	.238
	K:	.270	.239	.214	.197	.191	.291	.257	.230	.212	.206	.316	.279	.250	.230	.223	.349	.308	.275	.254	.246
	H:	10.6	8.8	6.8	5.2	4.5	10.1	8.4	6.5	4.9	4.2	9.7	8.1	6.2	4.6	4.0	9.4	7.9	6.0	4.4	3.6
20	P:	.239	.214	.195	.183	.178	.258	.232	.211	.197	.193	.281	.252	.230	.215	.210	.311	.279	.254	.237	.232
	K:	.263	.233	.208	.192	.186	.284	.251	.224	.207	.201	.308	.272	.243	.224	.218	.339	.300	.268	.247	.240
	H:	10.3	8.6	6.6	5.1	4.4	9.9	8.2	6.3	4.8	4.1	9.5	7.9	6.0	4.5	3.9	9.2	7.6	5.8	4.3	3.5
21	P:	.233	.210	.191	.178	.174	.253	.227	.206	.193	.188	.275	.247	.224	.210	.205	.304	.272	.248	.232	.226
	K:	.257	.227	.203	.187	.182	.277	.245	.219	.202	.196	.301	.266	.238	.219	.213	.331	.293	.262	.241	.234
	H:	10.1	8.4	6.5	5.0	4.3	9.6	8.0	6.2	4.7	4.0	9.2	7.7	5.9	4.4	3.6	8.9	7.4	5.6	4.2	3.4
22	P:	.229	.205	.187	.174	.170	.247	.222	.202	.189	.184	.269	.242	.220	.205	.201	.298	.267	.242	.227	.221
	K:	.251	.222	.198	.183	.178	.270	.239	.214	.197	.191	.294	.260	.232	.214	.208	.323	.286	.256	.236	.229
	H:	9.8	8.2	6.3	4.9	4.2	9.4	7.8	6.0	4.6	3.9	9.0	7.5	5.7	4.3	3.5	8.7	7.2	5.5	4.0	3.3
23	P:	.224	.201	.183	.171	.167	.242	.217	.198	.185	.180	.264	.237	.215	.201	.196	.292	.261	.237	.222	.217
	K:	.245	.217	.194	.179	.174	.264	.234	.209	.193	.187	.287	.254	.227	.209	.203	.316	.280	.250	.231	.224
	H:	9.6	8.0	6.2	4.7	4.1	9.1	7.6	5.9	4.5	3.8	8.7	7.3	5.6	4.2	3.4	8.4	7.0	5.4	4.0	3.2
24	P:	.220	.197	.179	.167	.163	.238	.213	.194	.181	.177	.259	.232	.211	.197	.192	.286	.256	.233	.217	.212
	K:	.240	.212	.190	.175	.170	.259	.229	.205	.189	.183	.281	.249	.222	.205	.199	.310	.274	.245	.226	.219
	H:	9.4	7.8	6.1	4.6	4.0	8.9	7.4	5.7	4.4	3.6	8.5	7.1	5.5	4.1	3.4	8.2	6.8	5.2	3.9	3.2
25	P:	.216	.193	.176	.164	.160	.233	.209	.190	.177	.173	.254	.228	.207	.193	.189	.281	.251	.228	.213	.208
	K:	.235	.208	.186	.172	.167	.254	.224	.201	.185	.179	.275	.243	.218	.201	.195	.303	.268	.240	.221	.215
	H:	9.2	7.6	5.9	4.6	3.8	8.7	7.3	5.6	4.3	3.5	8.3	6.9	5.3	4.0	3.3	8.1	6.7	5.1	3.8	3.1

III. Melléklet

Sztochasztikus programozási algoritmus egy futási eredménye több termék együttes készletszintjének meghatározására

A modellt az I/5 pontban ismertettük, a megoldási algoritmust pedig a III. fejezet ırja le.

A (3.1) feladatot a SUMT belső pont algoritmussal oldottuk meg. A (3.2) alakú büntetőfüggvények feltétel nélküli minimalizálását Hooke és Jeeves algoritmusával végeztük. A folyamatos anyagellátás valószınűségét kifejező (3.5) függvény értékeinek meghatározása szimulációs eljárással történt. A mintaelemszám az eljárás során változott a kivánt pontosságnak megfelelően.

```
TOBB TERMEK EGYUTTES INDULO KESZLETSZINTJENEK OPTIMALIZALASA

TERMEKEK SZAMA:  2

BEERKEZESI FOLYAMATOK PARAMETEREI

  I   NK    N  J(1) J(2) J(3) J(4) J(5)  GAM   L  K(1) K(2) K(3) K(4) DEL
  1    5   10    3    5    7    9    0 0.10   20    5    7   11    0 0.16
  2    5   10    2    3    5    7    9 0.15   10    2    5    7    8 0.12

CELFUGGVENY EGYUTTHATOK:  1.    1.5

INDULO M VEKTOR:   0.4   0.5
         Y:  4.896

PARAMETEREK:
ALFA= 1.5   BETA=  0.5   DX:  -0.1   -0.06
EPS1=0.05   EPS2=0.01



 1. BUNTETOFUGGVENY MINIMALIZALASA.   R= 1.000


 1. LEPES          MINTA SZAM:     150

SEARCH FAZIS


I  M(I) DX(I)    Y
 1 0.300-0.100 5.509
 1 0.450 0.050 4.827
 2 0.440-0.060 4.789

PATTERN FAZIS
M: 0.500 0.380  Y: 4.978
PONTOSSAG: 0.060   IDO: 0.320


 2. LEPES          MINTA SZAM:     400

SEARCH FAZIS


I  M(I) DX(I)    Y
 1 0.425-0.025 4.751
 2 0.430-0.030 4.532
 2 0.427-0.015 4.510

PATTERN FAZIS
M: 0.411 0.422  Y: 4.434
PONTOSSAG: 0.025   IDO: 1.120
 1.  BUNTETO FV. OPT.: 0.411 0.422



 2. BUNTETOFUGGVENY MINIMALIZALASA.   R= 0.200
```

```
 1. LEPES         MINTA SZAM:    150

SEARCH FAZIS.


I  M(I) DX(I)    Y
 1 0.351-0.100 2.357
 2 0.374-0.060 2.412
 2 0.331-0.030 2.135

PATTERN FAZIS
M: 0.310 0.320  Y: 2.871
PONTOSSAG: 0.010   IDO: 0.170



 2. LEPES         MINTA SZAM:    400

SEARCH FAZIS


I  M(I) DX(I)    Y
 1 0.364 0.040 2.475
 1 0.344-0.080 2.101
 2 0.364-0.070 2.020

PATTERN FAZIS
M: 0.337 0.354  Y: 1.979
PONTOSSAG: 0.080   IDO: 1.020
 2.  BUNTETO FV. OPT.: 0.337 0.354



 3. BUNTETOFUGGVENY MINIMALIZALASA.   R= 0.040


 1. LEPES         MINTA SZAM:    150

SEARCH FAZIS
I  M(I) DX(I)    Y
 1 0.325-0.060 1.105
 2 0.344-0.120 0.971
 2 0.330-0.060 0.963

PATTERN FAZIS
M: 0.323 0.324  Y: 0.856
PONTOSSAG: 0.120   IDO: 0.190



 2. LEPES         MINTA SZAM:    400

SEARCH FAZIS
I  M(I) DX(I)    Y
 1 0.313-0.040 0.796
 2 0.305-0.030 0.752

PATTERN FAZIS
M: 0.303 0.295  Y: 0.740



PONTOSSAG: 0.040   IDO: 1.310
```

```
3. LEPES        MINTA SZAM:   1500

SEARCH FAZIS
I  M(I) DX(I)   Y
 1 0.321-0.010 0.731
 2 0.296-0.009 0.729

PATTERN FAZIS
M: 0.320 0.294  Y: 0.727
PONTOSSAG: 0.010  IDO: 4.520
 3.  BUNTETO FV. OPT.: 0.320 0.295



 4. BUNTETOFUGGVENY MINIMALIZALASA.    R= 0.008


 1. LEPES        MINTA SZAM:    150

SEARCH FAZIS
I  M(I) DX(I)   Y
 1 0.329-0.030 0.542
 2 0.296 0.010 0.671
 2 0.193 0.060 0.531

PATTERN FAZIS
M: 0.320 0.292  Y: 0.502
PONTOSSAG: 0.060  IDO: 0.210


 2. LEPES        MINTA SZAM:    400

SEARCH FAZIS
I  M(I) DX(I)   Y
 1 0.321-0.015 0.498
 2 0.291-0.010 0.491

PATTERN FAZIS
M: 0.320 0.291  Y: 0.487
PONTOSSAG: 0.015  IDO: 2.030


 3. LEPES        MINTA SZAM:   1500

SEARCH FAZIS
I  M(I) DX(I)   Y
 1 0.320-0.001 0.481
 2 0.291-0.005 0.478

PATTERN FAZIS
M: 0.320 0.291  Y: 0.477
PONTOSSAG: 0.005  IDO: 6.540
 4.  BUNTETO FV. OPT.: 0.320 0.291


A FELADAT OPT. MEGOLDASA:   M(1)= 0.320   M(2)= 0.291
OSSZIDO=17.430 SEC
```

IV. Melléklet

Induló készletszint és optimális raktárkapacitás tervezésének egy programfutási eredménye

A gyakorlati feladatot, modelljét és megoldási algoritmusát a IV. fejezet tartalmazza.

Az induló várakozási időt a (4.1) modell alapján határoztuk meg, a (4.4) alatti együttes eloszlást diszkrét eloszlással közelítettük. Optimálisnak tekintjük a (4.14) egyenlőtlenséget kielégítő minimális tárolókapacitás értékét.

```
AZ INDULO VARAKOZASI IDO MEGHATAROZASA

AB-12 TIPUSU ASZFALTKEVEREKRE


Z= 0.385 0.351 0.144 0.110
SZ= 0.031 0.090 0.015 0.001


EGYJTTES ELOSZLAS:

          Y VEKTOR:                          P:
  0.380    0.350    0.140    0.110          0.260
  0.380    0.320    0.160    0.140          0.180
  0.320    0.380    0.120    0.180          0.160
  0.440    0.340    0.160    0.060          0.120
  0.440    0.360    0.120    0.080          0.110
  0.320    0.390    0.160    0.140          0.090
  0.380    0.340    0.160    0.120          0.080



Q= 0.140 0.160 0.180 0.200 0.220 0.240 0.260 0.280 0.300 0.320
VS= 0.458 0.519 0.690 0.758 0.768 0.769 0.770 0.880 0.880 0.880
     0.150    -0.269
     0.300     0.130
     0.225     0.018
     0.215     0.017
     0.183    -0.044
     0.235     0.013
     0.194    -0.002
     0.195     0.001
     0.195    -0.001



 0.19 IND. KESZLET ESETEN0.750 VASEGGEL FOLYAMATOS AZ   ANYAGELLATAS


MARGINALIS VALOSZINUSEGEK:
 1. TAROLORA: 0.99
 2. TAROLORA: 0.99
 3. TAROLORA: 1.00
 4. TAROLORA: 0.77
```

```
TAROLOKAPACITASOK MEGHATAROZASA



1. TAROLORA :
Q=  0.19 Z=  0.38 T=  1.00
 KAP:     0.1011     0.1108      0.1204      0.1300      0.1396      0.1493      0.1589      0.1685
HVAL:     0.7700     0.7701      0.7820      0.8841      0.9875      0.9999      1.0000      1.0000
      0.091     -0.130
      0.169      0.100
      0.130     -0.016
      0.135      0.057
      0.133      0.024

.131 KAPACITAS ESETEN0.899 VALSEGGEL NINCS TULFOLYAS



2. TAROLORA :
Q=  0.19 Z=  0.36 T=  1.00
 KAP:     0.0729     0.0820      0.0910      0.1000      0.1090      0.1181      0.1271      0.1361
HVAL:     0.2221     0.5905      0.7737      0.8880      0.9534      0.9844      0.9959      0.9992
      0.064     -2.577
      0.136      0.099
      0.100     -0.012
      0.104      0.020
      0.102      0.005
      0.101     -0.000
      0.102      0.003

.101 KAPACITAS ESETEN0.900 VALSEGGEL NINCS TULFOLYAS



3. TAROLORA :
Q=  0.19 Z=  0.14 T=  1.00
 KAP:     0.0342     0.0378      0.0414      0.0450      0.0486      0.0522      0.0558      0.0594
HVAL:     0.5300     0.5300      0.5331      0.9080      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000
      0.031     -0.370
      0.059      0.100
      0.045      0.008
      0.044     -0.156
      0.044     -0.067

.045 KAPACITAS ESETEN0.901 VALSEGGEL NINCS TULFOLYAS



4. TAROLORA :
Q=  0.19 Z=  0.11 T=  1.00
 KAP:     0.0817     0.0845      0.0873      0.0900      0.0928      0.0955      0.0983      0.1010
HVAL:     0.8400     0.8400      0.8400      0.8400      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000
      0.079     -0.060
      0.101      0.100
      0.090     -0.060
      0.095      0.100
      0.093      0.100
      0.091     -0.044
      0.094      0.100



      0.093      0.100
      0.092      0.100

.091 KAPACITAS ESETEN0.856 VALSEGGEL NINCS TULFOLYAS
```

A TANULMÁNYOK sorozatban 1979-ben megjelentek:

88/1979 Renner G. - Gaál B. - Hermann Gy. - Horváth L. - Várady T.: Szoborszerü felületek tervezése és megmunkálása

89/1979 Ruda Mihály: A SIS77 statisztikai információs rendszer /a felhasznált számitástechnikai eszközök, a rendszer szerkezete és programjai/

90/1979 Bányász Cs. - Keviczky L.: Optimum Insensitivity of the Linear-continuous Transformation

91/1979 Téli iskola /Szentendre/

92/1979 Bolla M. - Csáki P. - Fischer J. - Herodek S. - Hoffman Gy. - Kutas T. - Telegdi L. - Wittmann I.: A balatoni ökoszisztéma modellezése

93/1979 Andor László: Kisgépes adatbázis kezelő rendszer

94/1979 Gertler János: Egy statisztikus szürési eljárás számitógépes folyamatirányitásához

95/1979 Báthory M. - Galló V. - Kovács E. - Mérő L. - Siegler A. - Vajta L.: Festőrobot vezérlésére alkalmas alafelsimerési berendezés

96/1979 Mérő László: Konturkeresés zajos digitalizát képekben

97/1979 Pásztorné - Matavovszky T.: Boole-függvény kezelőrendszer

98/1979 Kecskés Zsuzsa: Három dimenziós tárgyak drótvázának ábrázolása vonalrajzoló grafikus berendezésekkel

99/1979 Ivics József: KGST Riga

100/1979 Téli iskola

1980-ban jelentek meg:

101/1980 Gerencsér László - Hangos Katalin: Diszkrét lineáris sztochasztikus rendszerek önhangoló szabályozása.

102/1980 Pásztorné: Rekurziv eljárás

103/1980 Gerencsér Piroska - Szép Endre - Zilahy Ferenc Marton Zsolt: Robotmegfogók adaptivitása I.

104/1980 Knuth Előd - Radó Péter - Tóth Árpád: Az SDLA előzetes ismertetése

105/1980 E. Knuth - P. Radó - Á. Tóth: Preliminary description of SDLA

106/1980 Prékopa András: Sztochasztikus programozási modellek és alkalmazásuk