tanulmányok 106/1980

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI MODELLEK ÉS ALKALMAZÁSUK

Irta:
Prékopa András

Tanulmányok 106/1980.

A kiadásért felelős:

DR. VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 103 X
ISSN 03224-2951

Készült a
KSH Nemzetközi Számitástechnikai Oktató és Tájékoztató Központ
Reprográfiai Üzemében
80/073

SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI MODELLEK ÉS ALKALMAZÁSUK*

Prékopa András

Előadásomat az operációkutatás mibenlétének rövid összefoglalásával kezdem. Ez az a tudomány, amellyel foglalkozom. Ezen belül el fogom helyezni a sztochasztikus programozást, amely jelenlegi szűkebb szakterületem és amellyel előadásom is kapcsolatos.

Mint ismeretes, az "operational research" elnevezést Angliában alkalmazták először. A radar felfedezését követően 1937-ben a hadseregen belül egy kutató csoportot azzal a feladattal biztak meg, hogy dolgozzon ki tervet a radarállomások optimális elhelyezésére. Ennek a csoportnak az "operational research group" (magyarul "hadműveleti kutató csoport") elnevezést adták. A második világháború alatt több egyéb katonai és polgári vonatkozású optimalizálási feladat is felvetődött. Ezek megoldására azonban csak a háború után születtek általános módszerek, közülük legnevezetesebb az amerikai G.B.Dantzig 1947-ben megalkotott és 1951-ben közölt [4] ún. szimplex módszere, mely a lineáris programozás általános feladatát oldja meg és mind e mai napig a leghatékonyabb ebben a vonatkozásban. A negyvenes évek második felében "operational research", vagy ahogyan Amerikában használják: "operations research" alatt általában különféle rendszerek tervezésének és optimális irányításának tudományos módszertanát értik. Nálunk Magyarországon az

---

* 1980. január 29-én elhangzott akadémiai székfoglaló előadás

"operációkutatás" elnevezés honosodott meg. Az operációkutatás legfontosabb matematikai eszköze az ún. matematikai programozás, melynek a lineáris programozás a legelterjedtebben alkalmazott speciális esete. Az 50-es években közismertté vált, hogy L.V. Kantorovics szovjet matematikus már 1939-ben felfedezte a lineáris programozás modelljét és jelentőségét [9] , megoldási módszert is adott, mely azonban nem terjedt el a gyakorlatban.

A legújabb történeti kutatások kideritették, (I.Grattan-Guinness [8]), hogy J.Fourier francia matematikus már 1824-ben megfogalmazta a lineáris programozás feladatát, továbbá, hogy Farkas Gyula 1894-ben és 1898-ban megadta az elmélet alapjait - a nemlineáris esetre vonatkozólag is - és a lineáris esetre bizonyos szintü megoldást is nyújtott.(Prékopa [22]). Kutatásának eredeti célkitüzése az analitikus mechanika egy fontos feladatának a megoldása volt: mechanikai rendszer egyensúlyi állapotának megkeresése egyenlőtlenséges kényszerfeltételek esetén. Érdemes megemliteni, hogy amikor 1888-ban Fourier összegyüjtött munkáit kiadták, akkor az előszóban Darboux erről a következőket irta: "Nous avons aussi, par quelques emprunts à l'Histoire de l'Académie pour les années 1823 et 1824, pu faire connaitre d'une manière assez précise certaines idées sur la théorie des inégalités auxquelles l'illustre géomètre attachait une importance qu'il est permis, aujourd'hui, de trouver un peu exagérée".

Darboux tehát a lineáris egyenlőtlenségek elméletére vonatkozó Fourier-fél prognózist felnagyitottnak tekintette. Ezt némi joggal tehette, hiszen 1824 és 1888 között nem sok történt ebben a vonatkozásban. Az ezt követő évtizedben azonban már megjelentek Farkas Gyula korszakalkotó munkái.

A fentiek szerint a matematikai programozás feladata csaknem 150 évvel az operációkutatás létrejötte előtt már ismeretes volt az analitikus mechanika keretében. A matematikai programozás feladatát elvont matematikai nyelvezettel ma oly módon fogalmazhatjuk meg, hogy: keresendő egy többváltozós függvény minimuma (vagy maximuma) olyan mellékfeltételeknek eleget tevő (n-dimenziós) ponthalmazon, melyet függvényekre vonatkozó egyenlőtlenségek határoznak meg, vagyis:

$$\text{(1)}\qquad \begin{array}{ll} \text{minimalizálandó} & f(x) \\ \text{feltéve, hogy} & g_i(x) \geqq 0,\ i=1,\dots,m\ , \end{array}$$

ahol x csupán tömör jelölése az $x_1,\dots,x_n$ változók együttesének. A lineáris programozás ennek az a speciális esete, amikor a fenti függvények lineárisak, ekkor a feladat az alábbi alakot ölti:

$$\text{(2)}\qquad \begin{array}{ll} \text{minimalizálandó} & \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \\ \text{feltéve, hogy} & \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \geqq 0\ ,\quad i=1,\dots,m. \end{array}$$

Ha ebben a feladatban az a_{ik} , b_i , c_i együtthatók között véletlen mennyiségek (az elfogadott szakkifejezéssel élve: valószinüségi változók) vannak akkor új feladatot kell megfogalmaznunk, ez a feladat ugyanis értelmét veszti. Mi legyen az új feladat és hogyan oldjuk azt meg, ezzel foglalkozik a sztochasztikus programozás. Kiindulásul természetesen nem csupán lineáris, hanem nemlineáris programozási feladat is szolgálhat.

A fentieket jól szemléltethetjük az egyik legrégibb - ma már klasszikus - matematikai programozási feladaton, melyet G.J.Stigler amerikai közgazdász fogalmazott meg 1945-ben [25] . A feladat arra vonatkozik, hogy egy átlagos ember számára milyen ételfajtákkal és ételmennyiségekkel lehet egy napi táplálékot biztositani oly módon, hogy néhány tápanyag bizonyos minimum szinten az ételekben együttesen benne legyen (Stigler kilenc tápanyagot vett számitásba: kalória, fehérje, kálcium, vas és öt vitaminfajta), továbbá az ételek összköltsége a lehető legkisebb legyen. Képzeljük el, hogy a számbajövő ételfajtákról listát készitünk és akkor a fenti lineáris programozási feladatban a_{ik} azt jelenti, hogy a k-adik étel egységében milyen mennyiség található az i-edik tápanyagból, b_i azt jelenti, hogy emberünk egy napra vonatkozólag milyen mennyiséget igényel az i-edik tápanyagból és c_k pedig a k-adik étel egy egységének a piaci ára. Stigler képes volt arra, hogy találgatással két számszerü példát is bemutasson, a feladat általános megoldását azonban nem tudta megadni. Azt irja cikkében: "... the procedure is experimental because there does not appear to be any direct method of finding the minimum of a linear function subject to linear conditions". (Érdemes megemliteni, hogy a táplálási probléma determinisztikus változatának gyakorlati alkalmazhatóságát és a jelentős anyagi megtakaritás lehetőségét csak a 60-as évek közepén bizonyitották be és csak a 70-es évek végén vált több helyen hétköznapi gyakorlattá az alkalmazása. A sztochasztikus változat alkalmazása is egyre gyakoribb.)

Nem igényel magyarázatot az, hogy a táplálási problémában az a_{ik} és a c_k mennyiségek valószinüségi változók lehetnek. Tegyük fel most mégis azt, hogy ezek állandók és $b_1, \dots, b_m$ valószinüségi változók. Ez oly módon interpretálható, hogy nem egy, hanem sok személy számára készitjük el az ételt és mindenkinek másmás tápanyagkövetelményei vannak. A véletlen tehát itt valójában nincsen, hanem csak sok különböző egyed van, akik tápanyagkövetelményeikkel együtt statisztikai sokaságot alkotnak. (Azt is mondhatjuk, hogy a $b_1, \dots, b_m$ tápanyagkövetlemények valószinüségi változók egy véletlenszerüen kiválasztott egyed esetén.) Mármost a szakács azt kérdezheti tőlünk, hogy tulajdonképpen mit is csináljon ilyen körülmények között? Kinek főzzön a sok ember közül, egyáltalán hogyan járjon el? A 60-as évek közepén magam is résztvettem Amerikában egy, a táplálási problémával foglalkozó projekt munkájában és azt a javaslatot tettem, hogy a döntési elv abban álljon, hogy a tápanyagok a sokaság 100p%-át elégitsék ki, tehát pl. p=0.8 esetén az emberek 80%-a kapja meg minden tápanyagból a saját szintjének megfelelő mennyiséget és e feltétel mellett minimalizáljuk ugyanazt a költséget,mint előbb.

E feladat-megfogalmazással már hozzá is fogtunk a sztochasztikus programozás tárgyalásához. Ám mégis kanyarodjunk vissza korábbi történeti korokhoz és ejtsünk néhány szót a statisztikai döntéselméletről.

Nemrég irtam egy cikket a Statisztikai Szemlébe [20] a statisztikai döntéselméleti gondolkozásmód történeti fejlődéséről. Ismétlésbe nem szeretnék bocsátkozni, ezért csak röviden fogok szólni erről a tudományról.

Bár jól tudom, hogy egy-egy nagy gondolat nem füzhető csupán egy-egy személyhez, mégis a manapság elterjedt nézetet követve én is Pascalt tekintem a statisztikai döntéselméleti dondolkozás első nagy alakjának, mégpedig a hires, először 1670-ben megjelent "Gondolatok" [11] némelyikében fellelhető, matematikailag nem is formalizált megfontolásai alapján. (Pascal ilyenformán nem csupán a valószinüségelmélet, hanem a statisztikai döntéselmélet megalapitója is.)

Az első nagyszabású dolgozatot Daniel Bernoulli közölte 1738-ban [2], ez az ún. pétervári problémáról szól, melynek az a lényege, hogy egy végtelenül nagy várható nyereséggel kecsegtető szerencsejáték (melynek mibenlétét most nem részletezzük) nyerési lehetőségét senki nem akarja megvásárolni 20 dukátért. Daniel Bernoulli ennek és más hasonló problémának a feltárása és megoldása révén eljutott a hasznosság fogalmához is és az ökonometria egyik megalapozója lett. A statisztikai döntéselméletre a koronát a magyar származású Wald Ábrahám tette fel két hires könyvével, melyek " Szekvenciális Analizis" [27], illetve " Statisztikai Döntésfüggvények" [28] cimmel jelentek meg 1947-ben, illetve 1950-ben. Megitélésem szerint a szekvenciális analizis nagyobb alkotása Waldnak, mint a döntésfüggvények elmélete. Az előbbi konkrét és gyakorlatias, az utóbbi inkább általános gondolati sémákat, az akkoriban meglevő statisztikai döntési módszerek egységes foglalatát nyújtja, de nem ad a kezünkbe további új, hatékony gyakorlati módszereket. Mégis, ez az elmélet elég jelentős volt ahhoz, hogy számos statisztikai könyv szerzője a statisztika tudományának azt a definiciót adja, miszerint ez a véletlen követelmények közötti döntések elmélete (a statisztikusok világszerte két iskolába tartoznak, ezeket nagyfokú leegyszerüsitéssel leiró, illetve matematikai statisztikai iskoláknak nevezzük; most az utóbbiról van szó).

Ha ármost a statisztikus szemüvegén keresztül nézzük a világot, akkor azt mondhatjuk, hogy a sztochasztikus programozás a statisztika része, hiszen a véletlen körülmények közötti döntések kérdésével foglalkozik. Ezt is elfogadhatjuk, ám tegyük hozzá. hogy az ilyen statisztikai döntéselméleti feladatokat csak akkor soroljuk a sztochasztikus programozás körébe, ha a matematikailag formalizált döntési feladat valamilyen (nagyméretü) matematikai programozási feladat lesz.

Amikor a sztochasztikus programozás irányzata az ötvenes évek közepén kezdetét vette az amerikai Charnes, Cooper, Symonds [3] , Dantzig [5], az angol Beale [1] és az osztrák Tintner [26] munkássága révén, akkor a sztochasztikus programozás az első megközelitésben jelent meg, tehát az a kérdés merült fel, hogy mit kell tennünk egy olyan matematikai programozási feladattal, melyben véletlen tényezők szerepelnek.

A kezdeti vizsgálatokban kellő hangsúlyt kaptak az optimalizálási, a számitógépes-numerikus szempontok, ám mérsékelt súllyal szerepeltek a valószinüségelméleti-statisztikai szempontok. Én úgy gondolom, hogy az én munkásságom egyik jelentősége az, hogy olyan modelleket konstruáltam, amelyekben a valószinüségelméleti-statisztikai szempontok megfelelően érvényesülnek és ezért közelebb állnak a valósághoz.

Darwin Klingman texasi professzor a matematikai programozás eddigi történetét négy korszakra osztja. Az első, a fogantatás kora, a 30-as évek végére és a 40-es évek elejére esik. A második, a gyerekkor, az ötvenes éveket jelenti. Ebben az időben kezdte el Charnes és Cooper úttörő munkásságát az ipari alkalmazások vonalán. A harmadik, a serdülő kor, a hatvanas években volt, jellemzője a hatékony számitógépes algoritmusok létrejötte, az alkalmazási feladarok nagy számban való felvetődése és végül egy krizis, melyet elsősorban az okozott, hogy a feladatok megoldásai túl hosszú ideig tartottak és túl drágák voltak. A negyedik korszak a 70-es évekre esik. Több nagyon jó számitógépes programrendszer és alkalmazás révén a módszertan befutottnak tekinthető (Darwin Klingman erről szóló előadása 1977 szeptemberében hangzott el a texasi Austinban az External Methods and Systems Analysis cimü nemzetközi konferencián). J.A.M.Wolters szerint is [29] az operációkutatás a 70-es években nagy sikereket ért el.

Számunka, a szakma magyar müvelői számára a nemzetközi szakirodalom tanulmányozása alapján az a benyomás alakult ki, hogy az operációkutatás módszerei az iparilag-gazdaságilag legfejlettebb országokban már az 50-60-as években széles körben elterjedtek. Amikor 1965-ben először az Egysült Államokban jártam, megtudtam, hogy ez nem igy van és kiváltképpen nem volt ez érvényes a sztochasztikus programozásra vonatkozólag. Márpedig az elmélet és az algoritmusok kutatása feltétlenül igényelte a gyakorlat vezérfonalát. A valóság ennél még kellemetlenebb volt, ugyanis a a sztochasztikus programozással foglalkozó kutatók körében vajmi kevés érdeklődés volt tapasztalható gyakorlati feladatok megoldása iránt. Hogy a helyzetkép pontos legyen, hozzáteszem, nagyon leegyszerüsitett modellek alkalmazására voltak már példák, de nem voltak példák a bonyolultabb, elvileg is helytálló modellek alkalmazására, legfeljebb csak az alkalmazás esetleges lehetőségének megfogalmazása szintjén.

Mindezek arra sarkalltak engem, hogy itthon kezdeményezzek sztochasztikus programozási alkalmazási jellegü kutatásokat. A 60-as évek végén ez a tevékenység meg is indult. Nem hallgathatom el, hogy megemlitsem, elég nagy bátorság kellett ehhez, hiszen nyilvánvaló, hogy éppen az alkalmazás és a számitástechnika területén lehetőségeink elmaradnak az iparilag-gazdaságilag legfejlettebb országok kutatói rendelkezésére álló lehetőségektől. Az eltelt 10 évben elért eredményeink alapján ma mégis előkelő helyre tesznek bennünket a nemzetközi sztochasztikus programozási iskolák körében az alkalmazás szempontjából is, amint ez többször elhangzott, legutóbb egy tavaly ősszel Bécsben tartott előadásom után.

A sztochasztikus programozás a véletlen hatása alatt álló, véletlen által befolyásolt rendszerekkel, mássszóval, sztochasztikus rendszerekkel foglalkozik. A véletlent képviselik mondjuk a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószinüségi változók, mig a rendszerrel kapcsolatos néhány paramétert magunk állithatunk be, ezeket jelöljék $x_1, \dots, x_n$. Az utóbbiakat döntési változóknak nevezzük és ezek értékeit akarjuk valamilyen optimalizálási elvre támaszkodva rögziteni. A szituációtól és az ezzel összhangban kialakitott modelltől függően beszélhetünk statikus, illetve dinamikus modellről. Az előbbi esetben $x_1, \dots, x_n$ értékét egy alkalommal határozzuk meg, aztán pedig rögzitett értékek maradnak, noha a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószinüségi változók időről időre más-más értéket vesznek fel. Mint ahogyan egy épületet rövidebb hosszabb idő alatt megépitünk - ezt az időtartamot egy alkalomnak nevezzük - ám a rá ható különféle erők állandó és véletlenszerü mozgásban vannak. Az utóbbi esetben $x_1, \dots, x_n$ értékeit az időben egymás után határozzuk meg, miközben a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószinüségi változók közül egy-egy értéke rögzitődik, tehát a következő döntési, megfigyelési sorozat jön létre: döntünk x_1 értéke felől, megfigyeljük ξ_1 értékét, döntünk x_2 értéke felől, megfiggyeljük ξ_2 értékét, stb. Ez az eset fordul elő pl. a termelés tervezésekor, ugyanis az újabb és újabb rendelések módositják a termelési terveket.

A statikus modellek megalkotására vonatkozó saját elveim a következő módon foglalhatók össze: a.) a rendszer stabilitása elég nagy valószinüséggel biztositandó, b.) ha a rendszer az előbb megengedett, ritkán előforduló stabil helyzetbe kerül, akkor is az instabilitás valamilyen mérőszámának a hosszú idei átlaga maradjon egy előirt korlát alatt; c.) az instabil helyzet létrejötte költséget von maga után, ezt a feladatban a rendszerköltséghez hozzá kell adni.

A fentiekre példaként megadjuk a (2) feladatra épülő sztochasztikus programozási modelljavaslatunkat. Csupán $b_1, \dots, b_m$ legyenek valószinüségi változók. Ekkor a feladat a következő [15] :

$$\text{minimalizálandó} \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x_k + \sum_{i=1}^{m} q_i E\left[b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right]^+ \right\},$$

feltéve, hogy

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \geqq b_i \quad, \quad i=1,\dots,m \right) \geqq p, \tag{3}$$

$$E\left(b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k < b_i \right) \leqq d_i \,,\; i=1,\dots,m,$$

ahol p általunk elöirt, 1-hez közeli valószinüség, $d_1, \dots, d_m$ általunk elöirt felsö korlátok, $[\quad]^+$ pedig a zárójelben álló számot jelenti, ha az nemnegativ és zérót, ha az negativ.

Ennek a modellenek egyik speciális esetét fogalmaztam meg a táplálási problémára a 60-as években [12] . Elsö jelentös alkalmazása az 1969-72-es években történt a magyar villamosenergiaiparra vonatkozólag [18] .

Emlitettem, hogy az én modelljeimben a valószinüségelméleti, statisztikai szempontok nagyobb szerephez jutnak, mint a korábban megfogalmazott modellekben. Nos, a (3) feladatban ez többek között abban mutatkozik meg, hogy az elsö feltételben a bal oldalon több esemény együttes valószinüsége szerepel, mig korábban ehelyett a matematikailag sokkal egyszerübb, alábbi feltétel kikötésére szoritkoztak:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \geqq b_i \right) \geqq p_i \quad , \quad i=1,\dots,m,$$

ahol most nem csupán egy, hanem m számú elöirt valószinüség van, ezek a $p_1, \dots, p_m$ számok. Bár matematikailag azonnal belátjuk, hogy az együttes valószinüségre vonatkozó feltétel az, amely az elvi szempontoknak megfelel, a késöbb sorra kerülö modellek esetében világos lesz, hogy a külön-külön vett valószinüségi feltétel sok gyakorlati probléma esetéb egyszerüen nem is értelmezhetö.

Az események együttes bekövetkezésére vonatkozó valószinüségeknek a korlátozó feltételek közötti szerepeltetése érdekes és nehéz matematiaki problémákhoz vezetett. E problémák egyik leglényegesebbike abban áll, hogy vajon a gyakorlatban előforduló esetekben, vagy azok nagy részében, konvex halmaz-e azoknak az $x_1, \ldots, x_n$ szám n-eseknek a halmaza, amelyek a korlátozó feltételeknek eleget tesznek? Ebben az előadásban nem szándékozom a kérdés megválaszolása során nyert eredményeket részletesen ismertetni. Csupán egy tételemet emlitem meg, mely talán ebben a vonatkozásban a leglényegesebb.

Legyenek $g_1(x,\xi), \ldots, g_r(x,\xi)$ 2 n változós konkáv függvények, ahol x az $x_1,\ldots,x_n$ és ξ pedig a $\xi_1,\ldots,\xi_n$ szimbolumok tömör jelölése. A konkávitást most az egyszerüség kedvéért a teljes 2n-dimenziós térben megkivánjuk. Tegyük most fel, hogy ξ komponensei valószinüségi változók, együttes valószinüségeloszlásuk folytonos és az együttes valószinüségsürüségfüggvény logaritmusa konkáv n-változós függvény (ahol a függvény zéróval egyenlő, ott a logaritmusa legyen definició szerint $-\infty$). A fenti feltételek mellett érvényes a következő

Tétel. Az alábbi

$$h(x) = P\left(g_1(x,\xi) \geq 0 \quad , \ \ldots \ , \quad g_r(x,\xi) \geq 0\right)$$

függvény logaritmusa konkáv n-változós függvény.
A tétel bizonyitása a [13, 14, 16] müvekben található meg.

A továbbiakban néhány példát fogok közreadni az általam használt modellek köréből. Ezeket a közérthetőség kedvéért nagyon leegyszerüsitem és eltekintek a matematikai részletek tárgyalásától.

P.A.P.Moran [10] 1954-ben fogalmazta meg a róla elnevezett tározó modellt, melyet röviden ismertetünk.. Képzeljük el, hogy egy folyó völgyében egy meghatározott helyen tározót tudunk létesiteni, mely azután ipari, öntözési,kommunális célokra szolgál. Azt a kérdést vetjük fel, hogy milyen nagy legyen a tározó kapacitása, hogy előirt, mondjuk pl. 95% valószinüséggel minden időszakban tudjunk elegendő mennyiségü vizet szolgáltatni. A vizigány az időben ne változzék, a folyó vizhozama azonban legyen véletlenszerü. Az időt szakaszokra (periódusokra) osztjuk és bevezetjük az alábbi jelöléseket:

- x a tározó meghatározandó kapacitása (az egyetlen döntési változó);
- ξ_j a j-edik periódusban a tározóba befolyó vizmennyiség (ha a tározó tele van, a viz túlfolyik);
- M egy periódus vizigénye, melyről feltesszük, hogy a ξ_j vizmennyiség beérkezése után jelentkezik és állandó szám;
- ζ_j a j-edik periódus végén a tározóban levő viz.

Könnyü belátni, hogy fennáll az alábbi összefüggés:

$$\zeta_j = \max\left[\min\left(\zeta_{j-1} + \xi_j\,,\, x\right) - M\,,\, 0\right]\,,\quad j = 1, 2, \ldots,$$

ahol ζ_0 a vizzgálat kezdetén a tározóban lévő vizmennyiséget jelenti.

Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ azonos eloszlású, független valószinüségi változók, akkor a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ valószinüségi változó-sorozat ún. Markov-láncot alkot és igen enyhe feltételek mellett megmutatható, hogy elég hosszú idő eltelte után a tározóban levő vizmennyiség valószinüségeloszlása lényegében már nem változik, minden egyes periódusra ugyanaz marad, Ha tehát j egy távoli periódushoz tartozó index, akkor a tározó méretezése elvégezhető oly módon, hogy megoldjuk x-re vonatkozólag az alábbi egyenletet:

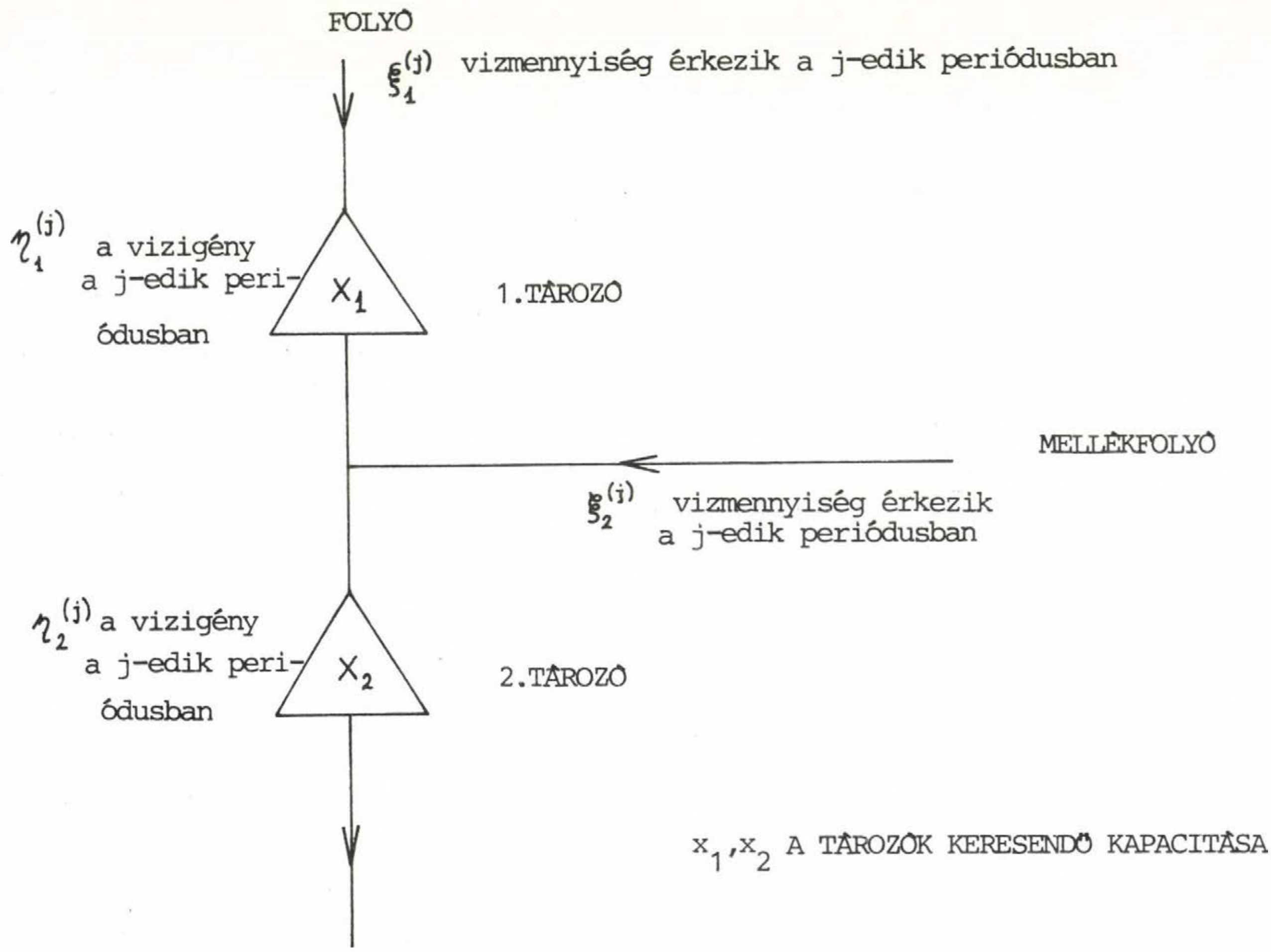
$$P\left(\min\left(\zeta_{j-1} + \xi_j, x\right) - M \geqq 0\right) = 0{,}95$$

ahol a jobb oldalon természetesen 0,95 helyett tetszőleges (1-hez közeli) p valószinüség is állhat.

A fenti egyenlet megoldása matematikailag egy lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti, ahol azonban az együtthatók meghatározása még külön problémát jelent.

A Moran-modell túlságosan egyszerü, feltételei a gyakorlatban általá-

ban nem teljesülnek. A vizigények nem vehetők állandónak, ezek valójában szintén valószinsüségi változók, melyek egymással és a tározóba érkező vizmennyiségekkel szoros kapcsolatban vannak.
Most bemutatjuk, hogyan lehet nem is egy, hanem egy egész tározó-rendszerhez tartozó kapacitásokat megtervezni oly módon, fellépő valószinüségi változókra vonatkozólag is csak kevés megszoritással éljünk([16, 19]).
Egyszerüség kedvéért csak a két tározóból álló rendszer esetének ismertetésére szoritkozunk. Az 1.ábrával a feladat megértését kivánjuk elősegiteni.



1. sz. ábra

SZEMLÉLTETŐ ÁBRA TÁROZÓRENDSZER TERVEZÉSI MODELLHEZ összesen n darab periódust (tehát véges sokat) fogunk vizsgálni, ez lehet pl. az év néhány hónapja tavasztól őszig (gyakori eset, hogy a téli csapadék teljesen feltölti a tározókat, emiatt az egyes évek közötti összefüggések elhanyagolhatók). Az alábbi jelöléseket vezetjük be:

$\xi_1^{(j)}$ $(\xi_2^{(j)})$	a j-edik periódusban az első (második) tározóba érkező vizmennyiség;
$\eta_1^{(j)}$ $(\eta_2^{(j)})$	a j-edik periódusban az első (második) tározó körzetében jelentkező vizigény;
$\zeta_1^{(j)}$ $(\zeta_2^{(j)})$	a j-edik periódus végén az első (második) tározóban levő vizmennyiség;
x_1 (x_2)	az első (második) tározó meghatározandó kapacitása;
V_1 (V_2)	az első (második) tározó kapacitásának ismert felső korlátja;
$c_1(x_1)$ $(c_2(x_2))$	az első (második) tározó létesitési költsége;
$q^{(j)}$	egy egységnyi viz hiányával bekövetkező veszteség a j-edik periódusban.

Feltesszük, hogy az egyes körzetek között nincs különbség az öntözőviz haszna szempontjából, emiatt elegendő csak egy veszteségfaktor, melyet $q^{(j)}$ jelöl a j-edik periódusra és feltesszük még, hogy az első tározó segiti a másodikat szükség esetén.

Annak a feltétele, hogy valamennyi periódus összes vizigényét teljesiteni tudjuk, az alábbi egyenlőtlenségekkel adható meg:

$$\sigma_1^{(j)} \geqq 0 \qquad j = 1, \dots, n,$$

$$\sigma_1^{(j)} + \sigma_2^{(j)} \geqq 0$$

ahol

$$\sigma_1^{(j)} = \min\left(\zeta_1^{(j-1)} + \xi_1^{(j)},\ x_1\right) - \eta_1^{(j)},$$

$$\delta_2^{(j)} = \min\left[\zeta_2^{(j-1)} + \max\left(\zeta_1^{(j-1)} + \xi_1^{(j)} - x_1, 0\right) + \xi_2^{(j)}, x_2\right] - \eta_2^{(j)},$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

Ezek után a sztochasztikus programozási feladat a következő módon fogalmazható meg:

$$\text{minimalizálandó} \quad \left\{c_1(x_1) + c_2(x_2) - \sum_{j=1}^{n} q^{(j)} E\left[d_1^{(j)} + \min\left(d_2^{(j)}, 0\right)\right]\right\}$$

$$\text{feltéve, hogy} \quad P\left(\delta_1^{(j)} \geq 0,\ \delta_1^{(j)} + \delta_2^{(j)} \geq 0,\ j = 1, \ldots, n\right) \geq p,$$

$$0 \leq x_1 \leq V_1,$$

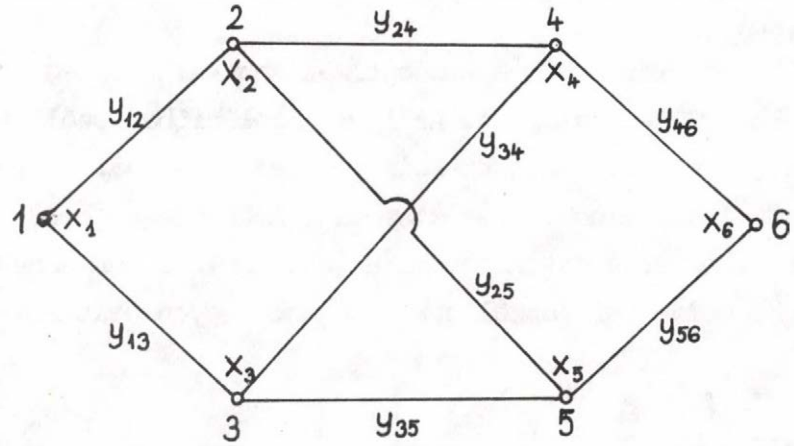
$$0 \leq x_2 \leq V_2.$$

Megmutatható, hogy a zárójelen belül álló $\delta_1^{(j)}$ és $\delta_1^{(j)} + \delta_2^{(j)}$ konkáv függvényei a $\xi_i^{(j)}$, $\eta_i^{(j)}$, x_i összesen 4n+2 változónak. Ha tehát valószinüségi változóink logkonkáv együttes eloszlással birnak, akkor az első feltétel bal oldalán az x_1, x_2 változók logkonkáv függvénye áll. A célfüggvény konvex, ha $c_1(x_1)$ és $c_2(x_2)$ konvex függvények. Ilyenformán tehát konvex programozási feladattal állunk szemben.

A feladat megoldásával most nem kivánok részletesen foglalkozni.

Később egy további, árvizi tározók méretezésére vonatkozó modellt is konstruáltam [21] , melyről azonban most nem lesz szó. Ehelyett egy hálózatok tervezésére vonatkozó modellt fogok röviden ismertetni.A modell általános matematikai sémáját 1973-ban közöltem. Annak villamos hálózatokra vonatkozó alkalmazhatósága Szendy Károly akadémikussal való beszélgetéseim során derült ki. Most egy általános hálózattervezési modellkonstrukcióról lesz szó. A modell részletes kifejtését a [24] dolgozat tartalmazza.

Képzeljünk el egy hálózatot, melynek n számú csomópontja (másnéven szögpontja) van (lásd 2.sz.ábra). Az egyes szögpontok mellett fel-



2. sz. ábra
Egy speciális 6 szögpontó hálózat ábrája

tüntetett $x_1, \dots, x_6$ szimbólumok termelési kapacitásokat, az élek mellett feltüntetett y_{12}, y_{13} stb. szimbólumok az élek mentén történő szállitási kapacitásokat jelentenek. Bizonyos csomópont-párok össze vannak kötve ágakkal (más néven élekkel). A csomópontokban $x_1, \dots, x_n$ nagyságú termelési kapacitások vannak, ezek vonatkozhatnak pl. villamosenergiára. Az ágakon is vannak kapacitások. Az i és k csomópontokat összekötő ág kapacitásáról most feltesszük az egyszerüség kedvéért, hogy egyenlő a k és i csomópontokat összekötő ág kapacitásával és ezt y_{ik} jelöli. Az x_i, y_{ik} mennyiségek ismeretlenek, ezeket a modellre támaszkodva kivánjuk meghatározni, egyelőre azonban vegyük ezeket rögzitettnek.

Egy adott időpillanatban a csomópontokon véletlen nagyságú igények jelennek meg, ezeket jelöljék $\xi_1, \dots, \xi_n$. Ha az i jelü csomópont esetében $x_i \geqq \xi_i$, akkor az ottani termelő kapacitás képes az ottani igény teljes kielégitésére, esetleg marad szabad kapacitás is. Ha azonban $x_i < \xi_i$, akkor más csomópont szabad kapacitásának a segitségével kell ezt az igényt kielégiteni, amennyiben ez egyáltalán lehetséges.

A felmerülő igényeket a hálózaton optimálisan kell kielégiteni, egy minimális költségü terv alapján. Az $i \to k$ relációban szállitandó mennyiséget f_{ik} fogja jelölni. Ezek ki kell hogy elégitsék az $f_{ik} + f_{ki} = 0$, $|f_{ik}| \leqq y_{ik}$ feltételeket minden i és k esetén. A hálózaton belül az összes igény kielégithető, ha találhatók olyan, a fenti követelményeknek eleget tevő f_{ik} számok, melyekkel fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$(4) \qquad x_i + \sum_{k=1}^{n} f_{ki} \geqq \xi_i \quad , \quad i = 1, \dots, n .$$

A gyakorlati problémákban e reláció-rendszer teljesülését nem kivánhatjuk meg a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószinüségi változók minden lehetséges értékrendszere esetére. Ez vagy nagyon költséges lenne, vagy egyszerüen nem is lehetséges. Ezért bevezetünk újabb változókat, melyeket a $z_1, \dots, z_n$ szimbólumokkal jelölünk és melyek segitségével a (2) feltételrendszerből egy mindig kielégithető feltétel-rendszert konstruálunk oly módon, hogy a változót az i-edik feltétel bal oldalán hozzáadjuk. Nyugodtan kiköthetjük, hogy $z_1 \geqq 0, \dots, z_n \geqq 0$.

A hálozattervezési modell ezek után megfogalmazható. Ez egy ún.kétlépcsős modell, melyben a második lépcső feladata az alábbi:

$$\text{minimalizálandó} \quad \left[\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}(f_{ik}) + \sum_{i=1}^{n} d_i(z_i) \right]$$

feltéve, hogy

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n} f_{ki} + z_i \geqq \xi_i - x_i \quad , \quad i = 1, \dots, n ,$$

$$f_{ik} + f_{ki} = 0 \quad , \quad |f_{ik}| \leqq y_{ik} \quad , \quad \text{minden } i, k \text{ esetén.}$$

Ebben a feladatban f_{ik} és z_i a változók, mig x_i , y_{ik} továbbá $\xi_1, \ldots, \xi_n$ is rögzitettek. A célfüggvényben levö $c_{ik}(f_{ik})$ az i , k relációban történö szállitási költségfüggvényt jelöli , $d_1(z_1)+\ldots+d_n(z_n)$ pedig annak a költsége, hogy a (4) feltétel nem elégithetö ki (célszerü a $d_i(z_i)$ függvényeket oly módon megválasztani, hogy automatikusan 0-val legyenek egyenlök, ha a (4) egyenlötlenségrendszer kielégithetö.

Az elsö lépcsö feladata hivatott az x_i , y_{ik} kapacitások meghatározására. Ha az (5) feladat minimum-értékét μ-vel jelöljük, mely tulajdonképpen az x_i , y_{ik} determinisztikus és a ξ_i valószinüségi változók függvénye, akkor a feladat az alábbi módon fogalmazható meg:

$$\text{minimalizálandó} \quad \left[\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) + \sum_{i,k=1}^{n} v_{ik}(y_{ik}) + E(\mu) \right] ,$$

feltéve, hogy

$$(6) \qquad P \begin{pmatrix} \text{annak a valószinüsége,} \\ \text{hogy a (4) egyenlötlen-} \\ \text{ségrendszer kielégithetö} \end{pmatrix} \geqq p ,$$

x_i , y_{ik} teljesitenek bizonyos korlátozó feltételeket (pl.elöirt alsó és felsö korlátok között vannak).

A célfüggvényben költségek szerepelnek; $E(\mu)$ a μ valószinüségi változó várható értékét jelöli. A p szám általunk elöirt valószinüség. A modell gyakorlati alkalmazását oly módon kell elképzelni, hogy az x_i , y_{ik} kapacitások rögzitésére szolgáló (6) modellt csak egyszer oldjuk meg, mig a második lépcsö feladatát ezt követöen gyakran, elvben végtelen sokszor kell megoldani. A (4) feladatot diszpécser-feladatnak is nevezhetjük.

A fenti modell - mint emlitettem - speciális esete egy általam 1973-ban konstruált modellnek, mely viszont variánsa az 1960-ban Dantzig és Madansky által megalkotott ún. kétlépcsös sztochasztikus programozási modellnek. Az általam javasolt módositás lényege abban áll, hogy valószinüségi korlátot szerepeltetek az elsö lépcsö feladatában, mely az elsö lépcsö eredeti feltételrendszerének (ezek most a (4) feltételek) összeférhetöséget biztositja nagy valószinüséggel. E hálózattervezési feladaton világosan látjuk a valószinüségi feltétel szükségességét. Egyben a modell a valószinüségelméleti-statisztikai kivánalmaknak is jobban megfelel.

Az elsö lépcsö feladatában szereplö valószinüségi feltétel nem bontható fel egyedi események valószinüségeire tett feltételekre. A valószinüség zárójelén belül elhelyezkedö esemény kifejezhetö az $x_1, \dots, x_n$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ változókra vonatkozó lineáris egyenlötlenségekkel, ám ezeknek csak együttesen tudunk fizikai értelmet tulajdonitani.

A feladat érdekessége, hogy aránylag kis számú csomópont esetén is nagy gyakorlati jelentösége van, pl. együttmüködö villamosenergiarendszerek esetében. A röviden emlitett, árvizi tározókra vonatkozó modell e hálózattervezési modell speciális eseteként fogható fel. Ebben az esetben is gyakran kicsi a csomópontok száma, igy a feladat gépi-numerikus megoldása reális idön belül elvégezhetö.

A hálózattervezési modell kétlépcsös mivoltával a dinamikus tipusú sztochasztikus programozási modellek körébe tartozik.

A sztochasztikus programozás képes hatékony modelleket ajánlani sztochasztikus és dinamikus rendszerekere.

J.A.M.Wolters azt irja 1979-ben [29] , hogy a dinamikus programozást nem alkalmazzák olyan gyakran, mint az remélhetö volna. Itt az 50-es évek elején Bellman által megalkottt dinamikus programozásról van szó. A fenti megállapitás legfőbb magyarázata, hogy a rendszerrel kapcsolatos, idöben egymás után fellépö valószinüségi változókat azonos eloszlásúaknak és függetleneknek tételezik fel, illetve, ha ezt a feltételt esetleg enyhitik is, ez nem jelent ettöl lényeges eltávolodást. A gyakorlati esetekben viszont igen gyakran nem teljesülnek ezek a feltételek.

Most röviden bemutatok egy dinamikus tupusú sztochasztikus programozási modellt, melyet a Balaton vizszintszabályozására vonatkozólag konstruáltam [17, 21].

Az időt hónapos periódusokra osztva, jelöljék $\xi_1, \xi_2, \dots$ a Balatonba befolyó vizmennyiségeket az egymás utáni hónapokban (valahonnan kezdve), $x_1, x_2, \dots$ pedig jelöljék a megfelelő hónapokban a Sió csatornán leereszthető vizmennyiségeket. A folyamatot úgy fogjuk fel, hogy x_i felől az i-edik hónap elején döntünk és csak ezután realizálódik ξ_i értéke. A $\xi_1, \xi_2, \dots$ vizmennyiségeket valószinüségi változóknak tekintjük és a Budapesti Müszaki Egyetem Vizgazdálkodási Tanszékén végzett viszgálatok eredményeivel összhangban feltesszük, hogy ezek ún. Gauss-folyamatot alkotnak, azaz közülük tetszőleges soknak az együttes valószinüségeloszlása normális, vagy más néven Gauss-eloszlás. Tegyük fel, hogy minden egyes hónapra van egy szabályzatilag előirt alsó és felső korlátja a vizszintnek. Az i-edik hónap esetére ezeket jelöljék a_i illetve b_i. Az $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots$ sorozat nyilván pieródikus lesz 12 periódussal, hiszen az egymás utáni évekre vonatkozólag a vizszintre vonatkozó szabályzatot nem kivánjuk változtatni.

Jelölje ζ_0 az induló vizszintet és K a Sió csatornán egy hónap alatt leereszthető legnagyobb vizmennyiséget.

Egymás utáni feladatokat oldunk meg. Az n+1-edik feladatban $x_1, \dots, x_n$ már rögzitett számok $\xi_1, \dots, \xi_n$ pedig realizálódott valószinüségi változók. Az x_{n+1} változó értékét akarjuk meghatározni, ám ennek érdekében előre nézünk N számú periódusra, vagyis meghatározzuk $x_{n+1}, \dots, x_{n+N}$ értékét, de véglegesnek csak x_{n+1} értékét fogadjuk el. Az a feladat, amelyben ez történik, az alábbi módon fogalmazható meg:

(5)
$$\begin{aligned} &\text{maximalizálandó} \quad P\left(a_{n+k} \leqq \zeta_0 + \xi_1 + \dots + \xi_{n+k} \leqq b_{n+k},\right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. k = 1, \dots, N \mid \xi_1, \dots, \xi_N\right), \\ &\text{feltéve, hogy} \\ &\qquad\qquad\qquad 0 \leqq x_{n+k} \leqq K, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a fenti feladatban a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószinüségi változók jellemző adatai és korrelációs kapcsolatai tetszőlegesek lehetnek.

A Balaton esetében elegendő volt a kéthónapos előrenézés (N=2). A CDC 3300 számitógépen 50 évre vonatkozó 600 feladat megoldása csupán 1 percet vesz igénybe az itt nem részletezett megoldási módszerre támaszkodva. Egyéb dinamikus tipusú sztochasztikus programozási modellekről információt nyújt a [23] dolgozat.

Hadd emlitsem meg befejezésül, hogy nemrég irtam egy cikket arról, hogy miként alkalmazhatók a sztochasztikus programozás modelljei a valószinüségelmélet és a statisztika klasszikus problémáinak a megoldására. Ebben szó esik a statisztikai próbák konstruálásáról, mintavételi tervek készitéséről stb.

Sok egyéb dologról sem beszéltem, ám nem az volt a célom, hogy felsorolási teljességre törekedjem, hanem hogy bemutassam a sztochasztikus programozás modellkonstrukciós gondolatvilágát.

Kedves kötelességemnek tartom megemliteni néhány munkatársam nevét, akik a fenti modellekkel kapcsolatban számitógépes programokat készitettek és a megoldó algoritmusok kidolgozásában is résztvettek. E munkatársaim Deák István, Szántai Tamás, Kelle Péter, Rapcsák Tamás és Mayer János. Külön ki kell emelnem Deák István teljesitményét, a többdimenziós normális eloszlás szimulációs software-jének nagy méretekben is müködő kidolgozását.

Irodalom

[1] E.M.L.Beale, On minimizing a convex function subject to linear inequalities, Journal of the Royal Statistical Society, Ser.B, 17(1955)173-184.

[2] D.Bernaoulli, Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanea 5(1738) 175-192. Angol fordítás:Econometrica 22(1954)23-36.

[3] A.Charnes, W.W.Cooper, G.H.Symonds, Cost horizons and certainty equivalents: an approach to stochastic programming of heating oil production, Management Science 5(1958) 236-263.

[4] G.B.Dantzig, Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalitiés, Activity Analysis of Production and Allocation (T.C.Koopmans editor),Wiley,New York, 1951, 339-347.

[5] G.B.Dantzig, Linear programming under uncertainty, Management Sciences 1(1955) 196-206.

[6] G.B.Dantzig, A.Madansky, On the solution of two-stage linear programs under uncertainty, proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, California 1961, 165-176.

[7] J.Fourier, Oeuvres, Gauthier-Villars , Paris, 1888.

[8] I.Grattan-Guinnes, Joseph Fourier's anticipation of linear programming, Operational Research Quarterly 21(1976) 361-364.

[9] Л.В. Канторович, Математические Методы Организации и Планирования Производства, Л.Г.У., 1939.

[10] P.A.P.Moran, The Theory of Storage,Methuen-Wiley,London-New York, 1959.

[11] B.Pascal, Pensés, Paris 1670.

[12] A.Prékopa, On Probabilistic constrained programming, Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical programming, Princeton University Press, Princeton,N.J.,1970,113-138.

[13] Prékopa A., Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról, Akadémiai doktori értekezés,Budapest,1970.

[14] A.Prékopa, Logarithmic concave measures with application to stochastic programming, Acta.Math.Acad,Sci.Hung.32(1971)301-316.

[15] A.Prékopa, Contributions to the theory of stochastic programming, Mathematical Programming 4(1973)202-221.

[16] Prékopa A.,Stochastic programming models for inventory control and water storage, Inventory Control and Water Storage, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 7,1973 229-245.

[17] Prékopa A., Optimális szintszabályozás sztochasztikus programozá felhasználásával, Mérés és Automatika 22(1974) 203-207.

[18] Prékopa A.,Ganczer S.,Deák I.,Patyi K., A STABIL sztochasztikus programozási modell és annak kisérleti alkalmazása a magyar villamosenergia-iparra, Alk.Mat.Lapok 1(1975)3-22.

[19] A.Prékopa,T.Rapcsák,I.Zsuffa, Egy új módszer sorbakapcsolt tározórendszer tervezésére sztochasztikus programozás felhasználásával, Alk.Mat.Lapok 2(1976)189-201.

[20] Prékopa A., A statisztikai döntéselméleti gondolkodás fejlődése napjainkig, Statisztikai Szemle 56(1978)893-903.

[21] A.Prékopa,T.Szántai, On optimal regulation of a storage level with application to the water level regulation of a lake , European Journal pf Operations Research 3(1979)175-189.

[22] Prékopa A., Az optimalizáláselmélet kialakulásának történetéről, Alk. Mat.Lapok, megjelenés alatt.

[23] A.Prékopa, Dynamic type stochastic programming models, Studies on Mathematical Programming (Proceedings of the Fourth Conference on Mathematical Programming,Mátrafüred 1975), Akadémia Kiadó, 127-145.

[24] A.Prékopa, Network planning using two-stage programming under uncertainty, Proceedings of the International Conf. on Stochastic Programming,Oberwolfach 1979, megjelenés alatt.

[25] G.J.Stigler, The cost of subsistence, Journal of Farm Economics 27 (1945) 303-314.

[26] G.Tintner, Stochastic linear programming with applications to agricultural economics, Second Symposium on Linear Programming, National Bureau of Standard, Washington, 1955.

[27] A.Wald, Sequential Analysis, Wiley, New York, 1947.

[28] A.Wald, Statistical Decision Functions, Wiley,New York, 1950.

[29] J.A.M.Wolters, European trends in OR, Applications and Software Support, Third European Congress on Operations Research, Amsterdam, 1979.

A TANULMÁNYOK sorozatban 1979-ben megjelentek:

88/1979 Renner G. - Gaál B. - Hermann Gy. - Horváth L. - Várady T.: Szoborszerü felületek tervezése és megmunkálása

89/1979 Ruda Mihály: A SIS77 statisztikai információs rendszer /a felhasznált számitástechnikai eszközök, a rendszer szerkezete és programjai/

90/1979 Bányász Cs. - Keviczky L.: Optimum Insensitivity of the Linear-continuous Transformation

91/1979 Téli iskola /Szentendre/

92/1979 Bolla M. - Csáki P. - Fischer J. - Herodek S. - Hoffman Gy. - Kutas T. - Telegdi L. - Wittmann I.: A balatoni ökoszisztéma modellezése

93/1979 Andor László: Kisgépes adatbázis kezelő rendszer

94/1979 Gertler János: Egy statisztikus szürési eljárás számitógépes folyamatirányitásához

95/1979 Báthory M. - Galló V. - Kovács E. - Mérő L. - Siegler A. - Vajta L.: Festőrobot vezérlésére alkalmas alafelsimerési berendezés

96/1979 Mérő László: Konturkeresés zajos digitalizát képekben

97/1979 Pásztorné - Matavovszky T.: Boole-függvény kezelőrendszer

98/1979 Kecskés Zsuzsa: Három dimenziós tárgyak drótvázának ábrázolása vonalrajzoló grafikus berendezésekkel

1980-ban jelent meg:

99/1980 Dokladü szimpoziumov
Szerkesztő: Ivics József

100/1980 IV. Visegrádi Operációs rendszerek elmélete
Téli Iskola

101/1980 Gerencsér László - Hangos Katalin:
Diszkrét lineáris sztochasztikus rendszerek önhangoló szabályozása.

102/1980 Pásztorné Varga Katalin:
Rekurziv eljárás

103/1980 Gerencsér P. - Szász P. - Zilahi F. - Marton Zs.:
Robotmegfog0k adaptivitása I.

104/1980 Knuth Előd - Radó Péter - Tóth Árpád:
Az SDLA előzetes ismertetése

105/1980 E. Knuth, P. Radó, Á. Tóth:
Preliminary description of SDLA

SZÁMOK Repró 1980/073