tanulmányok 101/1980

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

DISZKRÉT LINEÁRIS SZTOCHASZTIKUS RENDSZEREK ÖNHANGOLÓ SZABÁLYOZÁSA

Tanulmányok 101/1980.

A kiadásért felelős:
DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 098 X
ISSN 0324-2951

Technikai szerkesztő:
Szigetvári Istvánné

7910989 MTA KESZ Sokszorosító, Budapest. F. v.: dr. Héczey Lászlóné

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

ALMÁSY GEDEON

A hatvanas évtized az irányitáselmélet gyors és nagyarányu fejlődését hozta. Ebben az időszakban jelentek meg Kalman és Åström iskolájának alapvető publikációi és ezeken kivül értékes publikációk százai folyóiratokban és szimpóziumokon. Mégis, a hetvenes években /lassanként már beszélhetünk róla multidőben/ bizonyos csalódott hangulat alakult ki az elmélet eredményeivel kapcsolatban. Hiába jelentek meg elméleti tanulmányok napról-napra, sikeres gyakorlati alkalmazásokról csak elvétve lehetett hallani.

Feltételezzük jóhiszemüen, hogy az elmélet kutatói részéről a gyakorlattól való elszakadás - legalábbis többségüket illetően - nem volt tudatos. Az elszakadás okait igy alighanem objektiv okoknak tulajdonithatjuk. Az elmélettel foglalkozók

- a konkrét eredmények többségét a valóságban közelitőleg is csak ritkán megengedhető egyszerüsitő feltevésekre alapozták és nem foglalkoztak kellőképpen a kiindulási feltételektől való eltérésből adódó hiba kérdésével,
- nem forditottak kellő figyelmet az eredmények alkalmazásának gyakorlati, ill. még kevésbé gazdasági korlátaira, vagy tulságosan biztak a számitógépek teljessitőképességének fejlődésében. Tény, hogy az esetek döntő többségében az alkalmazáshoz még ma is drága nagy, vagy közepes teljesitményü számitógép volna szükséges.

A felsorolt okok ellentmodásossága mutatja, hogy az alapvető probléma nem az elmélet müvelőinek hozzáállása, hanem az objektiv nehézségek: a gazdaságosan megoldható feladatok a gyakorlat számára legtöbbször tulságosan primitivek, a valóságos helyzetet jobban megközelitő feladatmegfogalmazás pedig az ismert módszerekkel megengedhetetlenül drága.

Ilyen előzmények és feltételek mellett joggal tehető fel az a kérdés, hogy miért foglalkoznak mégis a szerzők irányitáselmélettel. Ennyi előzetes munka és ilyen nehézségek esetén várható-e gyakorlatilag hasznositó uj eredmény? Ugy véljük, hogy a felsorolt nehézségek nem csökkentik az elmélettel való foglalkozás jelentőségét, hanem éppen aláhuzzák annak szükségességét. Ámbár nyilvánvaló, hogy egy adott feladat előirt pontosságu megoldásának müveletigénye alulról korlátos, meggyőződésünk, hogy a reális feladatok megoldására ma ismert módszerek müveletigénye a minimumot még sokszorosan - talán több nagyságrenddel is - meghaladja. Ebben a hitben kezdtük meg az olyan algoritmusok kidolgozását, ill. alkalmazási lehetőségeinek elméleti és szimulációs vizsgálatát, amelyek eléggé egyszerüek, ahhoz, hogy reálisan elérhető eszközökkel realizálhatók legyenek. /Itt elsősorban mikroprocesszoros megvalósitásokra gondolunk./

Ez a kötet két, témájánál fogva egymáshoz kapcsolódó dolgozatot tartalmaz. Mindkettőnek az a célja, hogy elméletileg is jól megalapozott és a gyakorlatban is lehetőség szerint széles körben realizálható önhangoló szabályozó algoritmust adjon. Mind a kettő Peterka ismert, többé-kevésbé heurisztikus módszeréből indul ki, de azt a szokásos "mérnöki" és "matematikus" tárgyalásmód egyesitésével kritikusan elemzi, egyértelmüvé téve annak alkalmazási feltételeit.

Az első - Gerencsér László által kidolgozott - tanulmány tisztázott elméleti háttérre alapozva a Peterka féle algoritmus matematikailag korrekt elemzését adja és Ljung konvergenciatételeiből kiindulva eléggé reális feltételek mellett bizonyitottan konvergens önhangoló szabályozót javasol.

A második - Hangos Katalin által kidolgozott - tanulmány a Peterka algoritmus szimulációs vizsgálatával foglalkozik. Nagyszámu szimulációs kisérlet alapján elemzi a szabályozás stabilitását és a minőségét befolyásoló tényezőket. Vizsgálja a rendszer szabályozhatóságának feltételeit, azok befolyását a szabályozás minőségére, stabilitására és paraméterérzékenységére.

Valamennyien tudatában vagyunk annak, hogy erőink - mind létszámunkat, mind tapasztalatainkat illetően - világviszonylatban csekélyek, és aligha fogjuk tudni a fennálló sulyos problémákat gyökeresen megoldani. Mégis, reméljük, hogy megkezdett munkánkkal előkészithetünk néhány hasznos hazai megvalósitást, egy kevéssel egyidejüleg az irányitáselmélet eredményeinek összességéhez is hozzájárulva.

KONVERGENCIAVIZSGÁLATOK

GERENCSÉR LÁSZLÓ

BEVEZETÉS

Ebben a dolgozatban egy, a müszaki szakirodalomban sokat tárgyalt feladatkörrel foglalkozunk, azzal a célkitüzéssel, hogy az ott matematikailag nem mindig teljesen megalapozott javaslatokból az értékes gondolatokat kiszürjük és a témakörnek ezáltal egy igényesebb, uj tárgyalását adjuk.

A dolgozatnak gyakorlatilag két vonzási pontja van. Elsőként a Peterka-féle önhangoló szabályozó köré csoportosuló problémákat tárgyaljuk, majd az igen erőteljesnek bizonyult Ljung-sémára koncentrálunk. A Peterka-féle algoritmust tudomásunk szerint először sikerült egzakt módon megalapozni. /3.1. Tétel/, a Ljung-séma alapján pedig egy uj, bizonyos értelemben konvergens önhangoló szabályozót terveztünk /7. pont/.

A dolgozatban több olyan technikai jellegü tétel szerepel, amely a szakirodalomban hibásan, nem kellőképpen preciz bizonyitással, téves hivatkozással, vagy egyáltalán nem szerepel. Ezeket a tételeket önállóan megfogalmaztuk és bebizonyitottuk. /1.2., 4.5., 5.1. és 5.2. Tétel/.

A témakörhöz kapcsolódó matematikai vizsgálati módszerek párhuzamosan más diszciplinákban is fejlesztés alatt állnak. A vizsgálatoknak uj impulzust adott a sztochasztikus programozás fejlődése. Az elméleti eredmények között első helyen emlitendők a hazai vonatkozásu konvexitási tételek, amelyek globálisan konvergens numerikus eljárások kidolgozását teszik lehetővé /Prékopa [18]/.

A numerikus módszerek vonatkozásában legérdekesebbek azok a kisérletek, amelyek sztochasztikus approximációs módszerek kidolgozását tüzik ki célul. /Ivankov [9], Kushner [12]/

Végül köszönettel tartozom Almásy Gedeonnak, aki a témára ráirányitotta a figyelmemet, és az előrehaladást termékeny eszmecserékkel segitette, valamint Hangos Katalinnak, aki a kézirat gondos átolvasásával segitett.

1. A MINIMÁLIS SZÓRÁSU SZABÁLYOZÓ MEGHATÁROZÁSA

Ebben a pontban a diszkrét dinamikus rendszerekre vonatkozóan levezetünk egy szabályozót, amelynek az a célja, hogy a rendszer kimenetét a 0 érték környezetében tartsa. A levezetés Åström [5] könyvére támaszkodik. Meg kell jegyeznünk, hogy Åström levezetése matematikailag kifogásolható. Az itt közölt tárgyalásban uj vonás az, hogy a tisztázatlan kérdéseket pontosan megfogalmazza, és a megoldáshoz vezető utat is jelzi. Itt elsősorban diszkrét differenciaoperátorok invertálásával kapcsolatos problémákra gondolunk. Megmutatjuk továbbá, hogyan lehet fehér rendszerzaj esetén egzakt levezetést adni.

Legyen adott egy

$$(1.1)\quad \begin{aligned} &y(t)+a_1y(t-1)+\dots+a_ny(t-n) = \\ &= b_0u(t-k)+\dots+b_mu(t-k-m)+c_0e(t)+\dots+c_ne(t-n) \\ &\qquad b_0 \neq 0, \qquad c_0 \neq 0 \end{aligned}$$

egyenlettel leirt rendszer. Itt $u(t)$ a rendszer bemenete, $y(t)$ a kimenete. Ez tömörebb alakban igy irható:

$$(1.2)\quad A(q^{-1})y(t) = q^{-k}\, B(q^{-1})u(t)+ C(q^{-1})e(t),$$

ahol az A,B,C differnciaoperátorokat az alábbi polinomokkal definiáljuk:

$$(1.3)\quad \begin{aligned} A &= A(q^{-1}) = 1+a_1q^{-1}+\dots+a_nq^{-n} && \\ B &= B(q^{-1}) = b_1q^{-1}+\dots+b_mq^{-m} && b_0 \neq 0 \\ C &= C(q^{-1}) = c_0+c_1q^{-1}+\dots+c_nq^{-n} && c_0 \neq 0 \end{aligned}$$

A q^{-1} shift operátor a diszkrét időpontokban értelmezett függvényre ugy hat, hogy

$$(q^{-1}y)(t) = y(t-1).$$

A fenti modellben k a holtidőt jelenti.

A rendszerrel kapcsolatban a következő feltétellel élünk:

(1.4) Az $e(t)$ valószinüségi változók független, normális eloszlásu, 0 várható értékü, 1 szórásu valószinüségi változók. Más szóval: $e(t)$ fehér zaj. Továbbá: $e(t)$ független a t időpont előtti $u(t)$, ill. $y(t)$ jelektől.

Szabályozási feladatok megoldása kapcsán fontos a fenti modellt ugy átalakitani, hogy a beavatkozást megelőző zajokat, ill. a beavatkozást követő kimenőjeleket $y(t)$ kivételével elimináljuk. Igy a beavatkozás hatását közvetlenül vizsgálhatjuk.

Az alábbi levezetés vázlatosan szerepel Åström [5] könyvében, az ott közölt gondolatmenet azonban több ponton hiányos.

Az egyenletet át kell alakitani ugy, hogy először az $y(t-1)$, $y(t-2)$ értékeket (1.1) alapján rekurziv módon elimináljuk. Igy $y(t)$-nek egy olyan előállitását kapjuk, amelynek tagjai $u(s)$-ek, ill. $e(s)$-ek. Ezt követően az (1.1) rendszeregyenlet ismételt felhasználásával az $e(t-k)$, $e(t-k-1)$... zajokat is rekurziv módon elimináljuk. Igy $y(t)$-nek egy uj előállitását kapjuk, amelyben a $t-k$ időpontot megelőző $u(s)$, $y(s)$ jelek, ill. a $t-k$ időpont utáni zajok szerepelnek különválasztva. A következőkben leirt levezetésről hangsulyozzuk, hogy az formális, a végeredmény helyességét valószinüsiti, de nem bizonyitja. Egzakt megalapozás adható a generátorfüggvény módszerrel.

Az (1.2) operátoregyenletből A-val való osztás után az

$$y = q^{-k}\frac{B}{A}u + \frac{C}{A}e \tag{1.5}$$

egyenletet kapjuk.

A $t-k$ előtti, ill. utáni zajokat ugy választhatjuk szét, hogy C-t előállitjuk a

$$(1.6)\qquad C = AF + q^{-k} G$$

alakban, ahol F egy $(k-1)$-edfoku polinom, G pedig $(n-1)$-edfoku polinom:

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} F &= f_o + f_1 q^{-1} + \ldots + f_{k-1} q^{-(k-1)} \\ G &= g_o + g_1 q^{-1} + \ldots + g_{n-1} q^{-(n-1)} . \end{aligned}$$

Ezt az előállitást felhasználva az

$$(1.8)\qquad y = q^{-k} \frac{B}{A} u + Fe + q^{-k} \cdot \frac{G}{A} e$$

előállitást kapjuk. Végül a $t-k$ időpont előtti zajokat ugy küszöbölhetjük ki, hogy e-t az (1.1) rendszeregyenletből kifejezzük:

$$(1.9)\qquad e = \frac{A}{C} y - q^{-k} \frac{B}{C} u .$$

Ezt a kifejezést behelyettesitve (1.8)-ba:

$$(1.10)\qquad y = Fe + q^{-k} \frac{B}{A} u + \frac{G}{C} y - q^{-k} \frac{GB}{AC} u .$$

Rendezés után az

$$(1.11)\qquad y = Fe + q^{-k} \frac{G}{C} y + \frac{BF}{C} u = Fe + z$$

alakot kapjuk.

A szabályozás célja az, hogy az $y(t)$ kimenőjelet a 0 szint közelében tartsuk. A 0 szinttől való eltérés mértékéül az $y(t)$ változó $\sigma y(t)$ szórását vehetjük, ha egyébként biztositjuk, hogy $y(t)$ várható értéke, $E\ y(t) = 0$.

Az (1.11) előállitás jobboldalán két független valószinüségi változó összege áll. Ezért

(1.12) $$\sigma^2(y(t)) = \sigma^2(Fe(t)) + \sigma^2(z(t)).$$

Az $y(t)$ kimenet szórása tehát legalább $\sigma^2(Fe(t))$. Ez az alsó határ el is érhető, ha $z(t) = 0$, és ekkor $E\, y(t) = 0$ is teljesül.

A $y(t)$ kimenet szórása minden t-re a minimális értéket veszi fel, ha $z(t) = 0$ minden t-re. Ennek elégséges feltétele, hogy minden t-re teljesüljön a

(1.13) $$G\, y(t) + BF\, u(t) = 0$$

egyenlőség. Tudjuk, hogy $b_o \neq 0$ és könnyü belátni, hogy $c_o \neq 0$ miatt $f_o \neq 0$. Ezért az (1.13) egyenlőségből $u(t)$ kifejezhető az $y(t),\ldots y(t-n+1)$, $u(t-1),\ldots u(t-m-k+1)$ jelek függvényében.

Vezessük be az

(1.14) $$x(t) = (-y(t),\ldots -y(t-n+1), u(t-1),\ldots u(t-m-k+1)$$

továbbá a

(1.15) $$P = -G \qquad\qquad Q = BF$$

jelöléseket. A P, Q polinomok együtthatóit jelölje p_i, q_i tehát

$$P(q^{-1}) = p_o + \ldots + p_{n-1}q^{-(n-1)}$$

$$Q(q^{-1}) = q_o + \ldots + q_{m+k-1}q^{-(m+k-1)}$$

Az (1.13) egyenlet tehát

(1.16) $-Py + Qu = 0$

alakban irható.

A

(1.17) $$\Theta = \frac{1}{q_o}(p_o, \ldots, p_{n-1}, q_1, \ldots, q_{m+k-1})$$

vektor bevezetésével a visszacsatolást leiró (1.13) egyenlet

(1.18) $\Theta' x(t) + u(t) = 0$

alakban irható fel.

Definició: Megengedett szabályozónak nevezzük az olyan beavatkozásokat, amelyek során az $u(t)$ jelet az $y(t)$ ill. t előtti $y(s)$, $u(s)$ jelek függvényében számitjuk ki.

Definició: Minimális szórásu szabályozónak nevezzük az olyan megengedett szabályozót, amelyre $\sigma^2 y(t)$ minden t-re a minimális értéket veszi fel.

Az eddigi heurisztikus gondolatmenet precizzé tehető, ha a generátorfüggvény módszerrel kellőképpen megalapozzuk a differenciaoperátorokkal való müveletek szabályait. Ezen az uton bizonyitható a következő.

1.1. Tétel Legyen adott egy (1.1) dinamikus rendszer, melyre teljesül az (1.9) zajfeltétel. Ekkor az (1.6), (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) számitásokkal definiált szabályozó minimális szórásu.

Ez a tétel pontatlanul és hiányos bizonyitással szerepel Åström [5] könyvében is.

Minimális szórásu szabályozó alkalmazása esetén

$$y(t) = Fe(t). \tag{1.19}$$

Ez az összefüggés döntő fontosságu lesz a későbbiekben a Θ paraméter meghatározásához.

A fenti levezetés teljesen egzakt abban az esetben, ha a rendszerzaj fehér, azaz $C \equiv 1$. Ez azon mulik, hogy az $y(t)$ jelnek a t-k előtti beavatkozásoktól való függése korlátos tagszámu összeg alakjában kifejezhető. Ez a gondolat más összefüggésben a [7], [13] dolgozatban is szerepel. Az

$$\begin{aligned} y(t+1)+a_1y(t) +\ldots+ a_ny(t-n+1) &= \\ = b_ou(t-k+1) +\ldots+ b_mu(t-k-m+1)&+e(t+1) \end{aligned} \tag{1.20}$$

rendszeregyenlet alapján az $y(t+1),\ldots,y(t+k)$ kimenőjelek rekurziv módon kifejezhetőek ugy, hogy egy véges

$$\begin{aligned} y(t+k) + \alpha_oy(t) +\ldots+ \alpha_{n-1}y(t-n+1) &= \\ = \beta_ou(t) +\ldots+ \beta_{m+k-1}u(t-k-m+1) &+ \varepsilon(t+k) \end{aligned} \tag{1.21}$$

előállitást kapunk, ahol

$$\varepsilon(t+k) = d_oe(t+k) +\ldots+ d_{k-1}e(t+1) \tag{1.22}$$

valamilyen d_i konstansokkal. Az $\varepsilon(t+k)$ zaj tehát független az $y(t)$, $u(t)$, ill. az ezeket megelőző jelektől. Az $y(t+k)$ jel szórása tehát akkor minimális, ha

$$-\alpha_oy(t)\ldots-\alpha_{n-1}y(t-n+1)+\beta_ou(t)+\ldots+\beta_{m+k-1}u(t-k-m+1)=0. \tag{1.23}$$

Igaz tehát a következő

1.2. Tétel Legyen adott egy (1.1) dinamikus rendszer, melyre teljesül az (1.4) zajfeltétel, továbbá $C \equiv 1$. Ekkor az (1.23) képlettel definiált szabályozóra $\sigma^2 y(t)$ eléri minimumát minden t-re.

2. A LEGKISEBB NÉGYZETES BECSLÉSI MÓDSZER

Ebben a pontban röviden összefoglaljuk a paraméterbecslés klasszikus módszerével, a legkisebb négyzetes becslési módszerrel kapcsolatos eredményeket. Az ismertetést szükre fogtuk, részletesebb leirás található a [3] tanulmányban. A bemutatott eredmények többnyire az irodalomban fellelhetők. Uj eredmény azonban a véletlen együtthatós modellekre javasolt vizsgálati módszer, amelynek segitségével a becslés aszimptotikus torzitatlan volta egyszerübben és általánosabb keretek között állapitható meg.

Tekintsük az

$$(2.1) \qquad y_i = \sum_{j=i}^{k} x_{ij}\,\Theta_j + \varepsilon_i \qquad i=1,\dots,n$$

lineáris regressziós modellt. Az ismeretlen paraméterek: Θ_j, a Θ_j komponensekből alkotott vektort Θ jelöli. Az ε_i zajról feltesszük, hogy független, 0 várható értékü, 1 szórásu normális eloszlásu valószinüségi változók sorozata. A klasszikus statisztikai elméletben x_{ij} konstansnak tekintendő. A modell vektoralakban irva:

$$(2.2) \qquad Y = X\Theta + \varepsilon.$$

A minimális szórásu torzitatlan becslést legkisebbnégyzetes módszerrel kapjuk, amely az

$$(2.3) \qquad X'X\Theta = X'Y$$

un. normálegyenletre vezet.

A legkisebb négyzetes /röviden LKN/ módszer aszimptotikusan torzitatlan becslést ad akkor is, ha x_{ij} valószinüségi változó, de ε_i független a vele egy sorban lévő x_{ij}-ktől, és néhány további feltétel teljesül X-re (ld. [1] dolgozat).

Konstans X mátrix esetén a Θ becslés kovarianciamátrixa

$$(2.4) \qquad \mathrm{cov}(\hat{\Theta}) = (X'X)^{-1} ,$$

feltéve, hogy X teljes rangu.
A becslést konzisztensnek mondjuk, ha $\sigma^2(\Theta_i)$ nullához tart minden i-re. Ezzel ekvivalens a

$$(2.5) \qquad \mathrm{tr}(X'X)^{-1} \to 0$$

feltétel.

A (2.5) feltétel akkor is teljesülhet, ha X aszimptotikusan elfajul a következő értelemben: alkalmas, egyszer s mindekorra rögzitett koordinátatraszformáció után

$$(2.6) \qquad X = (U, V)$$

alaku, ahol U, V korlátos elemü mátrixok és $V \approx 0$. Ilyenkor $X'X$-re az

$$(2.7) \qquad X'X = \begin{pmatrix} U'U & U'V \\ V'U & V'V \end{pmatrix}$$

felbontás érvényes. Könnyü belátni, hogy

$$(2.8) \qquad \begin{array}{l} \mathrm{tr}(U'U)^{-1} \to 0 \\ \mathrm{tr}(V'V)^{-1} \to 0 \end{array}$$

esetén Θ becslése továbbra is konzisztens.

Legyen az X mátrix elfajuló oly módon, hogy valamennyi sora beleesik egy

$$(2.9) \quad \eta' x = 0$$

altérbe. Ilyenkor az LKN becslés nem egyértelmü, $\hat{\Theta}$-pal együtt valamennyi $\hat{\Theta}+\lambda\eta$ /λ valós skalár/ vektor is az LKN becslési probléma megoldása. Egy partikuláris megoldást kaphatunk a modell transzformációjával, ugy, hogy X az

$$(2.10) \quad X = (U,0)$$

alakba menjen át /lásd még Plackett [11] könyvét/.

Az LKN becslés rekurziv alakját egy, a lineáris algebrából jól ismert mátrixinvertálási eljárásból kaphatjuk meg. Vezessük be a t-dik lépésre vonatkozóan az

$$(2.11) \quad A(t) = X'X$$

mátrixot. Nyilván

$$(2.12) \quad A(t+1) = A(t) + h(h'),$$

ahol h az X mátrix $t+1$-edik sora. Az A^t mátrix inverzét B^t jelöli. Ekkor

$$(2.13) \quad B(t+1) = B(t) - \frac{B(t)\ hh'\ B(t)}{1+h'\ B(t)\ h}$$

Maguk a becslések a

$$(2.14) \quad \hat{\Theta}(t+1) = \hat{\Theta}(t)+B(t+1)h(y(t+1)-h'\hat{\Theta}(t))$$

rekurzió alapján számitandók.

A normálegyenlet numerikus megoldásának egyik ajánlott módszere a következő. Az X mátrixokra alkalmazzunk egy un.

Householder-triangulációt, azaz egy Q ortogonális mátrixxal hozzuk

(2.15) $QX = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$

alakra, ahol R felsőháromszög-mátrix. A Q mátrixot tükrözések szorzataként állitjuk elő

(2.16) $G = P_k \dots P_1$

alakban. A P_1 tükrözést ugy választjuk, hogy az X mátrix v_1 első oszlopára a

(2.17) $P_1 v_1 = \begin{pmatrix} r_{11} \\ 0 \end{pmatrix} = f_1$

összefüggés legyen igaz. Vagyis v_1-et az első koordinátavektor irányába transzformáljuk. Mivel P_1 tükrözés,

(2.18) $f_1' f_1 = r_{11}^2 = v_1' v_1$,

tehát f_1 ismert. A tükrözés sikjának ismeretlen normálvektora legyen u_1. Ekkor

(2.19) $P_1 = I - 2\, u_1 u_1' / u_1' u_1$.

A

(2.20) $$\begin{aligned} v_1 &= \lambda u_1 + v \quad , \qquad u_1' v = 0 \\ f_1 &= -\lambda u_1 + v \end{aligned}$$

egyenlőségekből

(2.21) $u_1 = (v_1 - f_1)/2$

adódik, igy a P_1 tükrözést megkaptuk. A továbbiakban a $P_1 X$ mátrix első sorát elhagyjuk és az eljárást megismételjük a második oszlopra s.i.t.

A normálegyenletet irjuk át az

$$X'Q'QX\Theta = X'Q'Y \tag{2.22}$$

alakban. Innen R-rel való egyszerüsités után

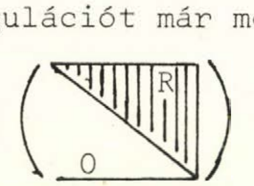
$$R\Theta = Q_1 Y \tag{2.23}$$

adódik, ahol Q_1 a Q mátrix első k sorából képzett mátrixot jelöli. /lásd még Gerencsér [9] jegyzetét/.

Uj eredményünk a Householder-trianguláció rekurziv alakjának a kifejlesztése. /ld. még: Peterka, V. /1970/ - Adaptive Digital Regulation of Noisy Systems. 2-nd Prague IFAC Symposium on Identification and Process Parameter Estimation/. Ez a következő észrevételen alapul: ha a

$$QX = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

triangulációt már megvalósitottuk, a következő lépésben egy

(2.25) 

alaku mátrixot kell triangularizálni, ahol az utolsó sor az X mátrix utolsó $t+1$ -edik sora.

A P_1 tükrözés meghatározása ugy történik, hogy a (2.25) mátrix első oszlopára, v_1-re, teljesüljön a

$$P_1 v_1 = \lambda e_1 \tag{2.26}$$

összefüggés, ahol e_1 az első koordinátavektor. Az u_1 tükrözési normálvektor kijelölése egy kétdimenziós altérben történik, hiszen v_1-nek csak két nem-nulla komponense van. A (2.25) mátrix triangularizációja tehát k-számu négyzetgyökvonást és $2k^2$ szorzást igényel.

3. EGY ÖNHANGOLÓ SZABÁLYOZÓ LEVEZETÉSE

Ebben a pontban egy Peterkától származó önhangoló szabályozót ismertetünk ([17]). Magyar nyelvü leirást ad Hethéssy és Keviczky dolgozata ([7]). Az algoritmust számos dolgozat tárgyalja, kisebb-nagyobb experimentációs eredmények kiséretében. A témában érdemi előrelépés azonban hosszu ideig nem történt, egészen Ljung munkáinak megjelenéséig ([11] - [14]).

Az itt közölt levezetés különbözik az irodalomban szokásostól, amely még heurisztikus leveztésnek sem fogadható el. A mi levezetésünk egy konvergencia-bizonyitási kisérletből született, és a Ljung-féle gondolatkörhöz vezetett el.

Önálló eredményünk a 3.1. Tétel. Hasonló állitások pontatlanul és teljesen téves formában a szakirodalomban is találhatók. Igy hangsulyozzuk, hogy a 3.1. Tételt szines rendszerzaj esetére kiterjeszteni nem lehet, az ilyen irányu megfontolások még heurisztikus értelemben is hibásak.

Legyen a rendszerzaj fehér, ekkor az $y(t+1)\ldots y(t+k)$ változók szukcessziv kifejezésével a rendszeregyenlet az

$$(3.1)\qquad y(t+k) = \alpha_o y(t) + \ldots + \alpha_{n-1} y(t-n+1) + \\ + \beta_o u(t) + \ldots + \beta_{m+k-1} u(t-k-m+1) + \varepsilon(t+k)$$

alakba megy át, ahol $\varepsilon(t+k)$ a t időpont utáni zajok lineáris kombinációja. /Szines zaj esetén ez nem igaz/. Röviden

$$(3.2)\qquad y(t+k) = \eta^{*'} x(t) + \beta_o u(t) + \varepsilon(t+k)$$

Világos, hogy a minimális szórásu $y(t+k)$-t ugy kapjuk, ha a

$$(3.3)\qquad \eta^{*'} x(t) + \beta_o u(t) = 0$$

visszacsatolást alkalmazzuk. Vezessük be a

(3.4) $\vartheta^* = (\eta^*, \beta_0)$ $\quad \Theta^* = \frac{1}{\beta_0}\eta^*$

jelölést.

A minimális szórásu szabályozó paramétereit közvetlenül a (3.1) rendszeregyenletből meghatározhatjuk az α_i, β_i paraméterek identifikálásával. Az identifikáció teljes mértékben nem valósitható meg, ha az

$$(x(t),\ u(t))$$

vektorok nem feszitik ki az egész teret. Ez a helyzet ha a rendszer már eleve szabályozott.

Tekintsünk egy tetszőleges Θ paraméterrel jellemzett

(3.5) $\Theta' x(t) + u(t) = 0$

szabályozást. Vezessük be a $\vartheta = (\Theta, 1)$ jelölést. Ekkor a (3.1) modell jobboldalán valamennyi vektor ortogonális ϑ-ra. Ezért a LKN módszer nem vezet egyértelmü eredményre, a megoldások

(3.6) $\vartheta^* + \lambda\vartheta$

alakuak, ahol λ tetszőleges skalár.
Határozzunk meg egy partikuláris megoldást, mondjuk amelyre az utolsó komponens 1. Ezt a

(3.7) $\lambda = 1 - \beta_0$

választással érhetjük el. A partikuláris megoldásból az utolsó komponenst elhagyva egy $\psi(\Theta)$ vektort kapunk, tehát

(3.8) $\psi(\Theta) = \eta^* + \lambda\Theta$.

Világos, hogy Θ^* kielégiti a

$$(3.9) \qquad \psi(\Theta^*) = \Theta^*$$

egyenletet.

Ugyanakkor a $\psi(\Theta)$ vektor a (3.1) modellből LKN módszerrel becsülhető. A (3.5) visszacsatolás esetén ugyanis (3.1) az

$$(3.10) \qquad y(t+k,\Theta) = \eta^{*\prime}x(t,\Theta) + \lambda\Theta' x(t,\Theta) + \beta_0 u(t,\Theta) + \\ + \lambda u(t,\Theta) + \varepsilon(t+k)$$

alakban is irható, és innen a $\psi(\Theta) = \eta^* + \lambda\Theta$ vektor rekurziv módon becsülhető:

$$(3.11) \qquad \hat{\psi}(t+1,\Theta) = \hat{\psi}(t,\Theta) + S(t-k,\Theta)x(t-k,\Theta)\cdot \\ \{y(t,\Theta) - \hat{\psi}(t,\Theta)x(t-k,\Theta) - u(t-k,\Theta)\}$$

ahol

$$(3.12) \qquad S^{-1}(t-k,\Theta) = \sum_{i=1}^{t-k} x(s,\Theta)x'(s,\Theta).$$

A $\psi(\Theta)$ vektornak ez az előállitása egyfajta sztochasztikus approximációs módszer kidolgozása felé mutat. A módszer determinisztikus hátterében a (3.9) egyenletnek a

$$(3.13) \qquad \Theta(t+1) = \psi(\Theta(t))$$

iterációval történő megoldása áll. A $\psi(\Theta(t))$ értéket pedig (3.11) alapján rekurzivan becsüljük.

Igy kapjuk a következő algoritmust:

$$(3.14) \qquad \Theta(t+1) = \hat{\psi}(t),$$

$$(3.15)\qquad \hat{\Phi}(t+1) = \hat{\Phi}(t) + \hat{S}(t-k)x(t-k)\{y(t)-\hat{\Phi}(t)x(t-k) - u(t)\},$$

$$(3.16)\qquad \Theta(t+1)\,x\,(t+1) + u(t+1) = 0.$$

Az algoritmus konvergenciája a Ljung-féle eredmények alapján elemezhető.

A $\hat{\Phi}(t,\Theta)$ becslés konvergál $\psi(\Theta)$-hoz 1 valószinüséggel, ha teljesülnek a következő feltételek /ld. Arató, Benczur, Krámli, Pergel [1] dolgozata/

(3.17) Az $x(t,\Theta)$ folyamat Θ-nak Θ^*-hoz

elég közel eső rögzitése esetén beágyazható egy aszimptotikusan elemi Gauss-folyamatba /ld. 4. pont/

(3.18) az $x(t,\Theta)$ folyamat aszimptotikusan nem elfajuló

azaz

$$R(\Theta) = \lim_{t\to\infty} E\, x(t,\Theta)x'(t,\Theta)$$

nem szinguláris.

Összefoglalva a következőt kaptuk.

3.1. Tétel A (3.1) rendszer minimális szórásu szabályozását megvalósitó paraméter legyen Θ^*. Ekkor Θ^* kielégiti a

$$\psi(\Theta) = \Theta$$

egyenletet, és itt a (3.17), (3.18) feltételek mellett a $\psi(\Theta)$ függvény az $x(t,\Theta)$ sztochasztikus folyamatból a (3.11), (3.12) képletek alapján kiszámitható.

A szabályozási problémának ez az átfogalmazása lehetővé teszi a Ljung-féle eredmények közvetlen alkalmazását /ld. 6. pont/.

4. A SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ELMÉLETÉNEK NÉHÁNY EREDMÉNYE

A szabályozási feladatok mélyebb elemzéséhez egy kitérőt kell tennünk. Ebben a pontban összefoglaljuk az elemi Gauss-folyamatok elméletével összefüggő kérdéseket. Az összefoglalást Arató--Benczúr-Krámli-Pergel [1] dolgozatát követve készitettük el. A felsorolt tételek nem szerepelnek mind az idézett dolgozatban, de az ott bemutatott elvek alapján közvetlenül adódnak. Az ott közölt gondolatokat néhány ponton egyszerüsitettük, ahol céljainkhoz egyéb gyengébb eredmény is elégségesnek bizonyult. Ez a megjegyzés a beágyazási tételekre vonatkozik.

Legyenek $\varepsilon(t)$ azonos, normális eloszlásu, független N-dimenziós valószinüségi változók, továbbá legyen

$$(4.1) \qquad E(\varepsilon(t)) = 0 \quad \text{és} \quad E(\varepsilon(t))\, \varepsilon(t)') = B_\varepsilon \,.$$

Feltesszük, hogy $\varepsilon(t)$ nem azonosan 0, azaz $B_\varepsilon \neq 0$. Legyen továbbá adott egy Q NxNméretü valós mátrix, amely stabil, azaz valamennyi karakterisztikus értéke 1-nél kisebb abszolut értékü.

Tekintsük a

$$(4.2) \qquad \zeta(t) = Q\, \zeta(t-1) + \varepsilon(t)$$

rekurzióval definifált sztochasztikus folyamatot. Az $\varepsilon(t)$ valószinüségi vektorváltozóról feltesszük, hogy független a $\zeta(0), \ldots, \xi(t-1)$ valószinüségi változók együttesétől. Ha a $\zeta(t)$ folyamat stacionárius, akkor (4.2)-ből a $\zeta(t)$ kovarianciamátrixára, $B(0)$-ra a

$$(4.3) \qquad B(0) = Q\, B(0) Q' + B_\varepsilon$$

egyenletet kapjuk. Megmutatható, hogy ennek az egyenletnek a

Q-ra tett feltétel mellett egyetlen pozitiv szemidefinit $B(0)$ megoldása van.

Igaz a következő tétel:

4.1. Tétel A (4.2) sztochasztikus differenciaegyenlettel definiált sztochasztikus folyamatra teljesüljön, hogy $\xi(0)$ normális eloszlásu és

$$(4.4) \qquad E\,\xi(0) = 0, \qquad E\,\xi(0)\,\xi(0)' = B(0).$$

Ekkor $\xi(t)$ a (4.2) sztochasztikus differenciaegyenlet egyetlen stacionárius megoldása. A $\xi(t)$ folyamat Gauss-Markov folyamat és

$$(4.5) \qquad E(\xi(t+\ell)\,\xi(t)') = Q^{\ell}\,B(0).$$

Definició: A (4.2) sztochasztikus differenciaegyenlettel definiált stacionárius Gauss-folyamatot, elemi Gauss folyamatnak, röviden EG folyamatnak nevezzük.

4.2. Tétel A $\zeta(t)$ sztochasztikus folyamat elégitse ki a (4.2) sztochasztikus differenciaegyenletet, $\zeta(0)$ tetszőleges. Ekkor a $\zeta(t)$ folyamat tart (4.2) egyetlen $\zeta^{*}(t)$ stacionárius megoldásához.

A konvergencia Gihman - Szkorohod [10] müve értelmében értendő.

Definició: A (4.2) sztochasztikus differenciaegyenletnek eleget tévő sztochasztikus folyamatot, ($\zeta(0)$ tetszőleges) aszimptotikusan elemi Gauss folyamatnak, röviden AEG folyamatnak nevezzük.

A következőkben gyakran találkozunk majd olyan folyamatokkal, ahol a zaj mozgóátlag.
Legyenek Q, $\varepsilon(t)$ ugyanazok, mint korábban.

Tekintsük a

$$(4.6)\qquad \zeta(t+1) = Q\,\zeta(t)+c_1\varepsilon(t) + \dots + c_q\varepsilon(t-q)$$

sztochasztikus vektordifferenciaegyenletet. Ennek a vizsgálatát ugy lehet elvégezni, hogy beágyazzuk őt egy AEG folyamatba. Könmyü belátni, hogy

$$(4.7)\qquad \eta(t) = \begin{pmatrix} \zeta(t) \\ \zeta(t) \\ \vdots \\ \zeta(t-q) \end{pmatrix}$$

AEG folyamat.

Igaz tehát a következő

4.3. Tétel A (4.6) sztochasztikus differenciaegyenlettel definiált folyamat beágyazható egy AEG folyamatba.

Végül olyan skalárfolyamatokkal foglalkozunk, amelyek kielégitik a

$$(4.8)\qquad \zeta(t) + a_1\zeta(t-1) +\dots+ a_n\zeta(t-n) = e(t)+c_1e(t-1) + \dots$$

$$\dots+c_ne(t-n)$$

sztochasztikus differenciaegyenletet, ahol $e(t)$ egy független, azonos, standard normális eloszlásu valószinüségi változókból álló sorozat. Operátoralakban (4.8) igy irható:

$$A(q^{-1})\,\zeta(t) = C(q^{-1})e(t),$$

ahol

$$(4.9)\qquad A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} +\dots+ a_nq^{-n},$$

és

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \ldots + c_n q^{-n} .$$

Az ilyen folyamatok vizsgálata ugy történhet, hogy (4.8) helyett az

$$(4.10) \quad \eta(t) = \begin{pmatrix} \zeta(t-n) \\ \vdots \\ \zeta(t) \end{pmatrix}$$

vektorfolyamatot vizsgáljuk. Az $\eta(t)$ folyamat nyilván beágyazható egy AEG folyamatba, melynek együtthatómátrixa

$$(4.11) \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & & \\ & & 0 & 1 \\ a_n & & & a_1 \end{pmatrix}$$

A Q mátrix karakterisztikus polinomjára

$$(4.12) \quad \det(Q-\lambda z) = A(z)$$

teljesül. Igaz tehát a következő tétel:

4.4. Tétel Ha az $A(z)$ polinom valamennyi gyöke 1-nél kisebb abszolut értékü, akkor a (4.8) sztochasztikus differenciaegyenlettel definiált folyamat beágyazható egy AEG foyamatba.

Végül tekintsünk egy

$$(4.13) \quad \zeta(t,\Theta) = Q(\Theta)\, \zeta(t-1, \Theta) + \varepsilon(t)$$

AEG folyamatot. A $Q(\Theta)$ függvény legyen folytonosan differenciálható. Differenciálással a

$$(4.14)\qquad \zeta_{\Theta_i}(t,\Theta) = Q_{\Theta_i}\,\zeta(t-1,\Theta) + Q\zeta_{\Theta_i}(t-1,\Theta)$$

egyenletet kapjuk. Az

$$(4.15)\qquad \eta(t) = \begin{pmatrix} \zeta \\ \\ \zeta_{\Theta_i} \end{pmatrix}$$

folyamat nyilván AEG folyamat, melynek együtthatómátrixa:

$$(4.16)\qquad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ \\ Q_{\Theta_i} & Q \end{pmatrix}.$$

Mivel Q karakterisztikus értékei 1-nél kisebb abszolut értéküek, ugyanaz igaz $\tilde{Q}$ -ra is. Igaz tehát a következő

4.5. Tétel Legyen $\zeta(t,\Theta)$ egy AEG folyamat, mely a (4.13) sztochasztikus differenciaegyenlet megoldása, és legyen a $Q(\Theta)$ függvény folytonosan differenciálható. Ekkor az

$$\eta(t) = (\xi,\ \xi_{\Theta_i})$$

folyamat is AEG folyamat.

A (4.5) Tétel értelemszerüen kiterjeszthető a többi folyamattipusra és több változó szerinti deriválásra.
Közvetlenül látható a következő tétel is:

4.6. Tétel Legyen $\zeta(t,\Theta)$ egy AEG folyamat, amelyet a (4.13) sztochasztikus differenciaegyenlet definiál, ahol $Q(\Theta)$ folytonosan differenciálható. Ekkor

$$r_{ij\ell}(\Theta) = \lim_{t\to\infty} E(\zeta_i(t+\ell,\Theta)\ \zeta_j(t,\Theta)')$$

Θ-nak folytonosan differenciálható függvénye.

5. A MINIMÁLIS SZÓRÁSU SZABÁLYOZÓ PERTURBÁCIÓJA

Ebben a pontban megvizsgáljuk, hogyan viselkednek az $y(t)$, $u(t)$ folyamatok, ha Θ^* helyett egy közeli, de tetszőleges Θ paraméter segitségével valósitjuk meg a visszacsatolást.

E pont fő eredménye annak megmutatása, hogy Θ^* meghatározása egy

$$f(\Theta) = 0$$

algebrai egyenlet megoldására vezethető vissza. Ez az átfogalmazás Ljungtól származik ([13] dolgozat) .

A vizsgálatoknak ebben a fázisában ismét lényeges nehézséget okozott az, hogy az x, u folyamat tulajdonságait matematikailag hibásan és hiányosan tárgyalja a szakirodalom. Ebben a vonatkozásban ujra át kell gondolnunk a folyamat minden egyes vonását, és meg kell találni azokat a feltételeket, amelyek mellett a további konstrukciók lehetségesek. Ezeket az eredményeket tételszerüen is összefoglaljuk.

Tekintsünk egy tetszőleges

$$(5.1) \qquad \Theta' x(t) + u(t) = 0$$

visszacsatolást. A minimális szórásu szabályozót leiró (1.18) egyenlet paraméterét megkülönböztetésül most Θ^*-gal jelöljük.

Az (5.1) visszacsatolással szabályozott folyamat bemenő, ill. kimenőjeleit $u(t,\Theta)$, ill. $y(t,\Theta)$ jelöli. A $t = 0$ időpontot megelőző értékeket tetszőlegesen rögzitjük. Megvizsgáljuk, mi a feltétele annak, hogy az $y(t,\Theta)$, ill. $u(t,\Theta)$ sztochasztikus folyamatok beágyazhatók legyenek egy AEG folyamatba.

Irjuk át az (5.1) egyenletet operátoralakba:

$$(5.2) \qquad -P(q^{-1})\, y(t) + Q(q^{-1})\, u(t) = 0.$$

Ez az átirás megfelel az (1.13) egyenletnek, azzal a különbséggel, hogy a P, Q polinomok tetszőlegesek és $q_o = 1$. A folyamatot visszacsatolás esetén az

$$(5.3) \qquad Ay = q^{-k} B \frac{P}{Q} y + Ce$$

differenciaegyenlet definiálja, ami átrendezve

$$(5.4) \qquad (A\,Q - q^{-k} BP)y = QCe$$

alakra hozható. Felmerül a kérdés, mikor ágyazható be egy AEG folyamatba ez a folyamat. A P, Q operátorok a minimális szórású szabályozót megvalósitó P^*, Q^* értékek körül variálhatók, egymástól függetlenül. Az (5.4) egyenlet tehát általában nem egyszerüsithető. AEG folyamatba beágyazható folyamatot akkor kapunk, ha a baloldalon álló operátornak megfelelő polinom stabilis, azaz a polinom minden gyöke 1-nél kisebb abszolut értékü.

Számitsuk ki a baloldalon álló polinomot a Θ^*-nak megfelelő $P = \frac{1}{q_o} P^*$, $Q = \frac{1}{q_o} Q^*$ helyettesitési értékek mellett:

$$(5.5) \qquad S^* = \frac{1}{q_o} (A\,Q^* - q^{-k}BP^*).$$

A

$$(5.6) \qquad P^* = -G \qquad\qquad Q^* = BF$$

és

$$(5.7) \qquad C = AF + q^{-k}\, G$$

összefüggések felhasználásával

$$(5.8)\qquad S^{*} = \frac{1}{q_o}(ABF + q^{-k}BG) = \frac{1}{q_o}BC$$

adódik. S^{*} tehát stabil, ha a B, C polinom stabil. Kimondhatjuk tehát a következő tételt:

5.1. Tétel Ha a B, C polinom stabil, akkor a Θ^{*} kis környezetében fekvő bármely Θ-ra az $y(t,\Theta)$ folyamat beágyazható egy AEG folyamatba.

Ami az $u(t,\Theta)$ folyamatot illeti, ahhoz a

$$(5.9)\qquad Q\,u = P\,y$$

összefüggésre kell támaszkodni. Az $y(t,\Theta)$ folyamatról megmutattuk, hogy beágyazható egy AEG folyamatba. Ismét hivatkozva Arató-Benczur-Krámli-Pergel dolgozatára azt mondhatjuk, hogy $u(t,\Theta)$ beágyazható egy AEG folyamatba, ha a Q polinom stabil. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha a B polinom mellett az F polinom is stabil. Igaz tehát a következő

5.2. Tétel Ha a B, C, F polinom stabil, akkor a Θ kis környezetében fekvő bármely Θ-ra $u(t,\Theta)$ beágyazható egy AEG folyamatba.

Ez a tétel magyarázatot ad arra a kisérletileg tapasztalt jelenségre, hogy egyes esetekben a minimális szórásu szabályozó egyre szeszélyesebb bemenőjeleket állit elő. Ilyen eset fordul elő, ha F nem stabil. Ezt a tényt a legtöbb idézett dolgozat figyelmen kivül hagyja.

Az $y(t,\Theta)$, $u(t,\Theta)$ folyamat együttes vizsgálatához tekintsük az (5.1),(5.4) sztochasztikus differenciaegyenletekkel leirt folyamatot.

A $\Theta = \Theta^{*}$ paraméterválasztás mellett (5.4) helyettesithető a

$$(5.10) \qquad BC\, y(t) = QC\, e(t)$$

sztochasztikus differenciaegyenlettel.

Irjuk fel (5.1)-et a

$$(5.11) \qquad BF\, u(t) - P\, y(t) = 0$$

alakban. Az

$$(5.12) \qquad \begin{aligned} Y(t) &= (y(t), \dots, y(t-n+1)) \\ U(t) &= (u(t), \dots, u(t-m-k+1)) \end{aligned}$$

vektorok bevezetésével (5.11) és (5.12) elsőrendü folyamattal helyettesithető:

$$(5.13) \qquad \begin{aligned} Y(t) &= Q_{YY}\, Y(t-1) + E_Y(t) \\ U(t) &= Q_{UY}\, Y(t-1) + Q_{UU} U(t-1) + E_U(t) \end{aligned}$$

A Q_{YY}, ill. Q_{UU} mátrixok karakterisztikus polinomjai azonosak a BC, ill. BF polinomokkal. Ha tehát B, C, F stabil, akkor a Q_{YY}, Q_{UU} mátrixok valamennyi sajátértéke 1-nél kisebb abszolut értékü. Igy ugyanez érvényes a

$$(5.14) \qquad Q = \begin{pmatrix} Q_{YY} & 0 \\ Q_{UY} & Q_{UU} \end{pmatrix}$$

mátrixra is. Az E_Y, E_U zajfolyamat mozgóátlag. Innen már következik az

5.3. Tétel Ha a B, C, F polinomok stabilak, akkor az (Y, U) vektorfolyamat beágyazható egy AEG folyamatba.

Az (5.3) Tétel alapján értelmezhető az

$$f(\Theta) = \lim_{t\to\infty} Ex(t-k,\Theta)\, y(t,\Theta) \tag{5.15}$$

autokovariancia-vektor, $\Theta = \Theta^*$ esetén

$$y(t) = Fe(t) \tag{5.16}$$

tehát $y(t)$ független a $t-k+1$ előtti jelektől. Ily módon

$$f(\Theta^*) = 0. \tag{5.17}$$

A Θ^* meghatározását tehát egy algebrai egyenlet megoldásával hoztuk kapcsolatba. Ennek az egyenletnek több gyöke is lehet, az (5.18) egyenlet megoldása tehát nem ekvivalens a minimális szórásu szabályozó paraméterének meghatározásával. A következőkben részletesen megvizsgáljuk a (5.18) egyenlet általános vonásait.

6. SZTOCHASZTIKUS REKURZIV BECSLÉSEK KONVERGENCIÁJA

A Peterka-féle önhangoló szabályozási algoritmus vizsgálatához kézenfekvő elgondolás volna a sztochasztikus approximáció eszköztárához nyulni. Sajnos ez az ut nem járható eredményesen. Hosszu évek stagnálása után először Ljungnak sikerült olyan uj fajta általános sémát találnia ([16]) amely jól megragadja az önhangoló szabályozási algoritmus lényeges elemeit. Ennek a sémának a segitségével sikerült a konvergencia feltételeit praktikus formában megfogalmazni. A Ljung-féle eredmények alapján egyébként valamennyi közismert identifikációs algoritmus konvergenciája egységes módon vizsgálható.

Az itt adott leirás Ljung 1977-ben megjelent [16] dolgozatára épül. A leirásban Ljung bonyolult feltételrendszerét egy többet kivánó, de áttekinthetőbb feltételrendszerrel helyettesitettük. Az általános séma leirása után megmutatjuk, hogy alkalmazható az a Peterka-féle algoritmus vizsgálatára, és ismertetjük az idevonatkozó két legfontosabb tételt.

Az önhangoló minimális szórásu szabályozó paraméterének a meghatározását egy

$$f(\Theta) = 0 \tag{6.1}$$

algebrai egyenlet megoldására vezetjük vissza, ahol azonban az $f(\Theta)$ függvényt explicit formában nem ismerjük. Ebben a pontban a feladatot átalános keretek között fogjuk kezelni.

Feltesszük, hogy Θ tetszőleges rögzitése mellett realizálható egy $x(t,\Theta)$ sztochasztikus vektorfolyamat, amely eleget tesz az

$$x(t,\Theta) = A(\Theta)x(t-1,\Theta) + B(\Theta)\, e(t) \tag{6.2}$$

sztochasztikus differenciaegyenletnek. Az $A(\Theta)$, $B(\Theta)$ mátrixfüggvények folytonosan differenciálhatók. Az $e(t)$ zajra vonatkozó feltételük:

(6.3) $e(t)$ független, azonos normális eloszlásu, 0 várható értékü valószinüségi vektor változók sorozata, és $e(t)$ független az $x(t',\Theta)$ $(t'<t)$ változók együttesétől.

Az $x(t,\Theta)$ folyamatot megfigyelési folyamatnak nevezzük. Feltesszük, hogy a (6.1) egyenletnek eleget tevő Θ^* megoldás mellett /és igy annak egy kis környezetében is/ teljesül a következő feltétel:

(6.4) Az $A(\Theta^*)$ mátrix minden karakterisztikus értéke 1-nél kisebb abszolut értékü.

A (6.4) feltételnek eleget tevő Θ-k egy Θ^*-ot belsejében tartalmzó kompakt halmazát D-vel jelöljük. Minden $\Theta \in D$ esetén az $x(t,\Theta)$ folyamat AEG folyamat.

Definició: Egy $Q(x,\Theta)$ függvényt lassan növekvőnek nevezünk, ha kétszer folytonosan differenciálható és Q, Q_{x_i}, ill. $Q_{x_i x_j}$ egy $C + \|x\|^p$ alaku függvénnyel majorálhatók valamilyen pozitiv p-vel.

Legyen adott egy $Q(x,\Theta)$ függvény. Könnyen látható, hogy ha $Q(x,\Theta)$ lassan növekvő, akkor létezik az

(6.5) $$f(\Theta) = \lim_{t\to\infty} E\, Q(x(t,\Theta),\Theta)$$

határérték, minden $\Theta \in D$ esetén.

A (6.1) feladatnak e meglehetősen bonyolult részletezése után most már olyan megoldási módszert keresünk, amely egyszerüen realizálható adatokra épül és megkerüli $f(\Theta)$ komplikált előállitását.

A Θ becslés közelitése a t időpillanatban legyen $\Theta(t)$. Kézenfekvő a következő heurisztikus algoritmus:

Algoritmus:

$$\Theta(t+1) = \Theta(t) + \gamma(t)Q(x(t),\, \Theta\,(t))$$

(6.6)

$$x(t+1) = A(\Theta(t))x(t-1) + B(\Theta(t))\, e(t).$$

Itt $\gamma(t)$ egy alkalmas lépéshosszt jelent, amelynek lehetséges értéke:

$$\gamma(t) = C\, t^{-1}\,, \qquad 1 \geq \alpha > 0.$$

Továbbra is feltesszük, hogy:

(6.7) $e(t)$ független az $x(t)$ $(t' < t)$ változók együttesétől.

Az elmult évtized egyik legkiemelkedőbb teljesitménye Ljung eredménye, amely a (6.6) algoritmus konvergenciájára ad praktikus feltételt.

6.1. Tétel Tegyük fel, hogy Θ^* a

(6.8) $\Theta = f(\Theta)$

differenciálegyenletnek aszimptotikusan stabilis egyensulyi pontja. Legyen D a Θ^* egy elég kicsi kompakt környezete, és tegyük fel, hogy a (6.6) algoritmussal definiált $\Theta(t)$ sorozat végtelen sokszor beleesik D-be. Pontosabban valamely véletlen t_i sorozatra teljesüljön:

(6.9) $\Theta(t_i) \in D$ és $\| x(t_i) \| < C$

ahol C véges értékü valószinüségi változó.
Ekkor

(6.10) $\Theta(t) \rightarrow \Theta^*$

egy valószinüséggel.

A tétel megforditása is érvényes a következő értelemben. Legyen Θ^o egy tetszőleges D-beli pont. A Θ^o r-sugaru környezetét $S(\Theta^o, r)$ jelöli. Igaz a következő

6.2. Tétel Tegyük fel, hogy bármely pozitiv r-re

(6.11) $\Theta(t) \rightarrow S(\Theta^o, r)$

pozitiv valószinüséggel. Legyen továbbá a

(6.12) $Q(\Theta^*, x(t, \Theta^*))$

valószinüségi változó kovarianciamátrixának aszimptotikus értéke pozitiv definit. Ekkor:

(6.13) $f(\Theta^o) = 0$

stabil, azaz $f_\Theta(\Theta^o)$ valamennyi λ_i karakterisztikus értékére $Re\lambda_i \leq 0$.

A 6.1. Tétel alkalmazásakor legkényelmetlenebb a (6.9) un. korlátossági feltétel ellenőrzése. Ezt megkerüli a következő szintén Ljungtól származó tétel ([18] dolgozat):

6.3. Tétel Tegyük fel, hogy a

(6.14) $\dot{\Theta} = f(\Theta)$

differenciálegyenlet globálisan aszimptotikusan stabilis Θ^*-ban. Ekkor

(6.15) $\Theta(t) \rightarrow \Theta^*$

1 valószinüséggel.

A Ljung-féle séma a Peterka-féle önhangoló szabályozási problémára igy alkalmazható: Tekintsük a 3. pont jelöléseivel a

$$
(6.16)\qquad
\begin{aligned}
\Theta(t+1) &= \Theta(t) + S^{-1}(t)x(t-k)(y(t)-\Theta(t)'x(t-k) - u(t))\\
S(t+1) &= S(t) - x(t-k)x(t-k)'
\end{aligned}
$$

algoritmust. Az

$$
(6.17)\qquad R(t) = \frac{S(t)}{t}
$$

$$
\varepsilon(t) = y(t) - \Theta(t)'x(t-k) - u(t)
$$

jelöléssel ez a

$$
(6.18)\qquad
\begin{aligned}
\Theta(t+1) &= \Theta(t) + \frac{1}{t} R^{-1}(t)\ x(t-k)\ \varepsilon(t)\\
R(t+1) &= R(t) - \frac{1}{t+1}\ (R(t) + x(t-k)\ x(t-k)')
\end{aligned}
$$

algoritmusba megy át. Az ismeretlen paraméterek Θ és R a megfigyeléseket az $x(t,\Theta)$ vektor jelenti, ahogy azt az 5. pontban bevezettük. Az $x(t,\Theta)$ folyamat AEG folyamat, az 5.3. Tétel feltételei mellett. A (6.18) algoritmus jobb oldalán álló korrekciók megfelelnek az általános sémában álló $Q(x(t),\ \Theta(t))$ korrekciónak. Számitsuk ki a várható értékeket rögzitett (Θ,R) mellett:

$$
(6.19)\qquad E\ R^{-1}(t)x(t-k,\Theta)\varepsilon(t,\Theta) = ER^{-1}(t)x(t-k,\Theta)y(t,\Theta).
$$

Mivel $R^{-1}(t)$ a $t-k$ időpont előtti jelekből alkotott mátrix, azért $\Theta = \Theta^{*}$ esetén független $y(t,\Theta^{*})$-tól. A (6.19) egyenlőség tehát igy folytatható:

$$
(6.20)\qquad E\ R^{-1}(t)x(t-k,\Theta^{*})\ y(t,\Theta^{*}) =
$$

$$
ER^{-1}(t)x(t-k,\Theta^{*})\ \ Ey(t,\Theta^{*}) \to 0
$$

ha $t \to \infty$.

A másik korrekciós taggal kapcsolatban vezessük be a

$$(6.21) \qquad P(\Theta) = -\lim_{t\to\infty} E\, x(t,\Theta)x(t,\Theta)'$$

és

$$(6.22) \qquad R^* = P(\Theta^*)$$

jelöléseket. Mivel $x(t,\Theta^*)$ az 5.3. Tétel feltételei mellett AEG folyamat, a $P(\Theta)$, P^* mátrixok korrektül vannak értelmezve. Nyilvánvaló, hogy a Ljung-sémában szereplő nemlineáris egyenlet most

$$(6.23) \qquad g(\Theta,R) = \begin{pmatrix} R^{-1} f(\Theta) \\ \\ -R + P(\Theta) \end{pmatrix} = 0,$$

ahol

$$(6.24) \qquad f(\Theta) = \lim_{t\to\infty} E\, x(t-k,\Theta)\; y(t,\Theta).$$

Ahhoz, hogy az algoritmus értelmezve legyen minden t-re, meg kell követelnünk a következő feltétel teljesülését:

(6.25) Az $x(t,\Theta)$ folyamat nem elfajuló, azaz $R^* = P(\Theta^*)$ nem szinguláris.

Ennek alapján uj nézőpontról értékelhetjük a Peterka-féle algoritmust. Az optimális Θ^* paramétert (5.18) alapján az

$$(6.26) \qquad f(\Theta^*) = 0$$

egyenlet határozza meg. A Θ^* paramétert a

(6.27) $\dot{\Theta}(t) = Rg(\Theta(t))$

differenciálegyenlet integrálásával próbálhatjuk meghatározni. Itt azonban az R mátrixot ugy kell megválasztani, hogy

(6.28) $R\, g_{\Theta}\, (\Theta^{*})$

stabilis legyen. A Peterka-féle algoritmus értelmezhető ugy, mint egy (6.26)-ot megoldó algoritmus, amely azonban R-et Θ-val egyidejüleg ujitja fel. Ez az értelmezés mint majd látni fogjuk igen termékeny.

Következő feladatunk az lenne, hogy a (6.23) függvénnyel definiált differenciálegyenlet stabilitását megvizsgáljuk. Itt most csak néhány tétel megemlitésére szoritkozunk.

6.4. Tétel Tekintsük a (6.16) Peterka-féle algoritmust, és legyen $C \equiv 1$. Ekkor a Ljung-séma szerint hozzárendelt differenciálegyenlet a (Θ^{*}, R^{*}) pontban aszimptotikusan stabilis, hacsak R^{*} nem-szinguláris. /lásd Ljung [15] dolgozatát/

Szines zaj esetére a következő tétel igaz:

6.5. Tétel Tekintsük a (6.16) Peterka-féle algoritmust, és legyen $k = 1$. Vezessük be a

$$\varphi(z) = \frac{1}{C(z)} - \frac{1}{2}$$

jelölést. Tegyük fel, hogy φ szigoruan pozitiv-valós, azaz

$$\mathrm{Re}\ \varphi(e^{i\omega}) > 0 \quad \text{minden } \omega\text{-ra.}$$

Ekkor a Ljung-séma szerint hozzárendelt differenciálegyenlet a (Θ^{*}, R^{*}) pontban aszimptotikusan stabilis, feltéve, hogy R^{*} nem szinguláris. /lásd Ljung [15] dolgozata/ Ezeknek az eredményeknek a részletes kifejtése egy későbbi dolgozat témája.

7. EGY KONVERGENS ÖNHANGOLÓ SZABÁLYOZÓ

Ebben a pontban egy uj adaptiv szabályozót vezetünk le, amelyre teljesül a Ljung-féle konvergenciatétel leglényegesebb (6.8) feltétele, a szabályozó ebben az értelemben konvergens. A szabályozó kialakitása során eltekintettünk a szokásos identifikáció-kontrol kétlépéses megközelitéstől, közvetlenül az $f(\Theta)=0$ algebrai egyenlet megoldását tartjuk szem előtt.

Az itt közölt uj algoritmus a dolgozat fő eredménye. A konstrukció kiterjeszthető az általános Ljung-sémára is.

Láttuk, hogy az önhangoló szabályozó konvergenciája lényegében attól függ, hogy a hozzárendelt differenciálegyenlet a Θ^* pontban aszimptotikusan stabil-e. Ebben a pontban egy olyan uj algoritmust dolgozunk ki, amely első közelitésben

$$\text{(7.1)}\qquad \begin{aligned} \Theta(t+1) &= \Theta(t) + \gamma(t)R(t)x(t-k)y(t) \\ x(t+1) &= A(\Theta(t))x(t) + B(\Theta(t))e(t) \end{aligned}$$

alaku, az $R(t)$ sulymátrix felujitását pedig ugy próbáljuk megoldani, hogy az

$$\text{(7.2)}\qquad R^* f_\Theta(\Theta^*)$$

mátrix stabil legyen, azaz valamennyi λ_i karakterisztikus értékére $Re\lambda_i<0$ teljesüljön. Ehhez vizsgáljuk meg közelebbről az $f_\Theta(\Theta)$ mátrixot. Definició szerint

$$\text{(7.3)}\qquad f(\Theta) = \lim_{t\to\infty} E\, x(t-k,\Theta)\, y(t,\Theta).$$

Innen a deriválásra vonatkozó itt nem részletezett mellékfeltételek teljesülése esetén

$$f_\Theta(\Theta) = \lim_{t\to\infty} E\,\Theta\,(t-k,\Theta)\;y(t,\Theta) + x(t-k,\Theta)\;y_\Theta(t,\Theta) \tag{7.4}$$

adódik.

Az $y(t,\Theta)$, $u(t,\Theta)$ folyamatok Θ szerinti deriváltjait kell tehát meghatároznunk. Idézzük fel a folyamatot leiró egyenleteket: a rendszeregyenlet

$$y(t+1,\Theta) = \psi'\,x(t,\Theta)+u(t,\Theta)+Ce(t) \tag{7.5}$$

alakban irható fel, ahol

$$\psi' = (a_1,\ldots,a_n,\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},\ b_1,\ldots,b_m). \tag{7.6}$$

A visszacsatolást pedig a

$$\Theta'\,x(t,\Theta) + u(t,\Theta) = 0 \tag{7.6}$$

egyenlet irja le.

A (7.5) (7.7) egyenletek deriválásával

$$y_\Theta(t+1,\Theta) = \psi'\,x_\Theta(t,\Theta) + u_\Theta(t,\Theta) \tag{7.8}$$

és

$$x(t,\Theta) + \Theta' x_\Theta(t,\Theta) + u_\Theta(t,\Theta) = 0 \tag{7.9}$$

adódik. A (7.5) (7.7) (7.8) (7.9) egyenletek együttesen egy autoregresszív vektorfolyamatot irnak le. Ennek a folyamatnak a realizációjához a Θ,ψ paraméter ismerete szükséges /(7.7) és (7.9)-ben/.

Ezt a vektorfolyamatot az 5. pontban megfogalmazott eredmények alapján vizsgáljuk. A (7.5), (7.7) egyenletekkel leirt folyamat beágyazható az (5.14) egyenletekkel leirt folyamatba, amelynek együtthatómátrixát Q-val jelöltük.

A Q mátrix elemei lineárisan függenek Θ-tól és ϕ-től. Tekintsük a

(7.10) $$Z(t,\Theta) = (x(t,\Theta),\ x_\Theta(t,\Theta))$$

folyamatot. Az 5. pont tételei alapján tudjuk, hogy $Z(t,\Theta)$ beágyazható egy AEG folyamatba. A $Z(t,\Theta)$ vektor viszont tartalmazza mindazokat a mennyiségeket, amelyeket az algoritmus t-edik lépésében használni fogunk.

A $Z(t,\Theta)$ folyamat autokovarianciáinak aszimptotikus értékét $p_{ijl}(\Theta)$-val jelöljük. Tehát

(7.12) $$p_{ij\ell}(\Theta) = \lim_{t\to\infty} E\, Z_i(t,\Theta)\, Z_j'(t-\ell,\Theta)$$

A $Z(t,\Theta)$ folyamatot nem tudjuk realizálni, hiszen a folyamategyütthatók között szerepel ϕ is és a rendszer által produkált u, y jelekből a többi u_Θ, y_Θ jel nem származtatható le. Ezért fel kell tételeznünk, hogy ~ ismert ϕ-nek egy $\hat{\phi}$ becslése.

A $\hat{\phi}$ paraméter felhasználásával egy uj, már realizálható $\hat{Z}(t,\Theta)$ folyamatot kapunk ugy, hogy (7.8)-ban ϕ helyére $\hat{\phi}$-t irunk. A $\hat{Z}(t,\Theta)$ folyamat elégitse ki a

(7.13) $$\hat{Z}(t+1,\Theta) = K(\Theta)\,\hat{Z}(t,\Theta) + L(\Theta)\,e(t)$$

sztochasztikus differenciaegyenletet. A $\hat{Z}(t,\Theta)$ folyamat autokovarianciáinak aszimptotikus értékét $\hat{p}_{ijl}(\Theta)$-val jelöljük. Rátérünk az $f(\Theta)$ függvény deriváltjának a kiszámitására.

$$f_\Theta(\Theta) = \lim_{t\to\infty} E\{y_\Theta(t,\Theta)\, x(t-k,\Theta) + \tag{7.14}$$

$$+ y(t,\Theta)\, x_\Theta(t-k,\Theta)\} = \sum_{ij\ell \in I} p_{ij\ell}(\Theta) = P^T(\Theta),$$

ahol I a zárójelben álló kifejezés által érintett autokovarianciák indexhalmazát jelöli.

A Jacobi-mátrix közelitő értékét az

$$\hat{P}^T(\Theta) = \sum_{ij\ell \in I} \hat{p}_{ij\ell}(\Theta) \tag{7.15}$$

képlettel definiáljuk.

Az $\hat{p}_{ijl}(\Theta)$ autokovarianciát empirikusan ugy közelithetjük, hogy egy folyamat-realizációra a $\hat{Z}_i(t+l,\Theta)\ \hat{Z}_j(t,\Theta)'$ empirikus autokovarianciát átlagoljuk. A $t-1$ időpillanatig történő átlagolás eredményét $\hat{r}_{ijl}(t,\Theta)$-val jelölve érvényes az

$$\hat{r}_{ij\ell}(t+1,\Theta) = \hat{r}_{ij\ell}(t,\Theta) + \tag{7.16}$$

$$+ \frac{1}{t+1}\,(\hat{Z}_i(t+1+\ell-k,\Theta)\hat{Z}_j(t+1-k,\Theta) - \hat{r}_{ij\ell}(t,\Theta))$$

rekurzió. Az I indexhalmazon végigfutva az $\hat{r}_{ijl}(t,\Theta)$ elemekből egy $\hat{R}(t,\Theta)$ mátrixot, az $\hat{Z}_i(t+l,\Theta)\hat{Z}_j(t,\Theta)'$ elemekből pedig egy $\hat{\Pi}(t,\Theta)$ mátrixot alkotunk. Igy a (7.16) rekurziv összefüggés kompakt alakban igy irható:

$$\hat{R}(t+1,\Theta) = \hat{R}(t,\Theta) + \frac{1}{t+1}(\hat{\Pi}(t,\Theta) - \hat{R}(t,\Theta)). \tag{7.17}$$

Uj algoritmusunk kiindulópontja a

$$\dot{\Theta} = -\hat{P}(\Theta)\ f(\Theta)$$

differenciálegyenlet, amely Θ^*-ban aszimptotikusan stabilis. A Ljung-féle algoritmust próbaképpen a következő alakban irjuk fel:

$$(7.18)\qquad \Theta(t+1) = \Theta(t) - \frac{\alpha}{t+1}\hat{R}(t)x(t-k)\,\varepsilon(t) \qquad \alpha > 0$$

$$(7.19)\qquad \hat{Z}(t+1) = K(\Theta(t))\hat{Z}(t) + L(\Theta(t))e(t)$$

$$(7.20)\qquad \hat{R}(t+1) = \hat{R}(t) + \frac{1}{t+1}(\hat{\Pi}(t) - \hat{R}(t))$$

ahol $\hat{\Pi}(t)$ a $\hat{Z}(t)$ folyamatból $\hat{\Pi}(t,\Theta)$ -hoz hasonlóan képződik. A $\hat{Z}(t)$ megfigyelési folyamatot nem kell az itt felirt alakban realizálni, valójában a (7.5) - (7.9) folyamatokat realizáljuk. Az $\varepsilon(t)$ hiba lehetséges értékei: $\varepsilon(t) = y(t)$ vagy $\varepsilon(t) = y(t)-$ $-\Theta(t)x(t-k)-u(t)$.

Az algoritmus részletesebben a következő:

$$(7.21)\qquad \Theta(t+1) = \Theta(t) - \frac{\alpha}{t+1}\hat{R}(t)x(t-k)\,\varepsilon(t) \qquad \alpha > 0$$

$$(7.22)\qquad y(t+1) = \psi' x(t) + u(t) + Ce(t)$$

$$(7.23)\qquad u(t+1) = -\Theta'(t)x(t)$$

$$(7.24)\qquad \hat{y}_\Theta(t+1) = \hat{\psi}\,\hat{x}_\Theta(t) + \hat{u}_\Theta(t)$$

$$(7.25)\qquad \hat{u}_\Theta(t+1) = -\Theta'(t)\,\hat{u}_\Theta(t) - x(t)$$

$$(7.26)\qquad \hat{R}(t+1) = \hat{R}(t) + \frac{1}{t+1}(\hat{\Pi}(t) - \hat{R}(t))\,.$$

Itt $\hat{\Pi}(t)$-t a fentebb leirt módon az y, u jelekből ill. annak becsült deriváltjaiból kell képezni. A $\hat{\Pi}(t)$ mátrix az (y, u, y_Θ, u_Θ), folyamat autokovarianciáinak becslése egyelemü mintavétellel. A $\hat{\Pi}(t)$ mátrixban a $t-k$ időponttól kezdődően visszamenőleg szerepelnek a jelek különféle szorzatai.
Fő eredményünk a következő:

7.1. Tétel A (7.18) - (7.20) algoritmushoz hozzárendelt differenciálegyenlet $(\Theta^*\ \hat{R}^*)$-ban aszimptotikusan stabilis, ha $\hat{R}^*$ nem szinguláris, a $\hat{\psi}$ közelités elég jó, és α elég kicsiny. /Itt $\hat{R}^* = \hat{P}(\Theta^*)$/

Bizonyitás: Azt már beláttuk, hogy a $\hat{Z}(t,\Theta)$ ill. $e(t)$ megfigyelési-, ill. zajfolyamat eleget tesz a Ljung-séma követelményeinek. Számitsuk ki a hozzárendelt differenciálegyenlet jobboldalát. Rögzitet $(\Theta,\hat{R})$ mellett

$$\lim_{t\to\infty} E\,(\hat{R}\,x(t-k,\Theta)\,\varepsilon(t,\Theta)) = \hat{R}^T f(\Theta). \tag{7.27}$$

(7.20)-ra vonatkozóan rögzitett $(\Theta,\hat{R})$ paraméter mellett

$$\lim_{t\to\infty} E\,(\hat{\Pi}(t,\Theta) - \hat{R}) = \hat{P}(\Theta) - \hat{R}. \tag{7.28}$$

A hozzárendelt differenciálegyenlet tehát

$$\dot{\Theta} = -\alpha\hat{R}f(\Theta) \tag{7.29}$$

$$\dot{\hat{R}} = \hat{P}(\Theta) - \hat{R}. \tag{7.30}$$

Rögzitett Θ mellett a (7.28) egyenlet aszimptotikusan stabilis $\hat{P}(\Theta)$-ban. Aszimptotikusan stabilis Θ^*-ban a

$$\dot{\Theta} = -\hat{R}(\Theta)f(\Theta) \tag{7.31}$$

differenciálegyenlet is. A (7.29), (7.30) differenciálegyenletrendszerre alkalmazható Jevtushenko észrevétele [10], mely szerint elég kicsiny pozitiv α mellett a differenciálegyenletrendszer aszimptotikusan stabilis $(\Theta^*,\ \hat{R}(\Theta^*))$-ban. Ezzel a 7.1. Tételt bebizonyitottuk.

Összefoglalva a következő algoritmust javasljuk:

1. Legyen $\hat{\phi}$ a rendszeregyenlet paramétereiből alkotott ϕ vektor egy jó közelitése. /ld. 7.6./.

2. Válasszunk egy α lépéshosszt.

3. A (7.14) deriváltmátrix kiszámitásához rendezzük el egy $\hat{\Pi}(t)$ mátrixba a

$$\hat{\Pi}_{ij}(t) = y_{\Theta_i}(t)\, x_j(t-k) + y(t) x_{j\Theta_i}(t-k) \tag{7.32}$$

deriváltakat.

4. A $t = 0$ időpont előtti jeleket és annak deriváltjait 0-nak tekintve alkalmazzuk a (7.21) - (7.26) algoritmust. Ebben (7.22)-t a fizikai rendszer realizálja.

Az algoritmus implementálásával kapcsolatban fölmerül néhány általános probléma, amelyekre az irodalomban megalapozott megoldási kisérletet nem találtunk. Az első probléma a $\hat{\phi}$ kezdőérték meghatározása. Ez a probléma már a legegyszerübb becslési ill. gyökkeresési problémáknál is felmerül, és egy-két kivételes, konvexitással összefüggő esettől eltekintve globálisan konvergens eljárás nem ismert.

A másik hasonló sulyu probléma a konvergenciakritériumok megfogalmazása. Az algoritmus során értékelnünk kell a megoldáshoz való közeliséget kiszámitható mennyiségek alapján. Egy szokványos módszer a becslések változásának sebességéből következtetni a megoldás közeliségére. Ez azonban csődöt mondhat.

Ha már a konvergencia milyenségét elbiráltuk és rossznak találjuk, akkor az α paraméter csökkentésével ill. a $\Theta(t)$ becslések csonkitásával /korlátozásával/ próbálhatjuk meg a konvergenciát javitani.

IRODALOMJEGYZÉK

DOLGOZATOK

1 Arató M., Benczur A., Krámli A. and Pergel J. /1975/:
Statistical Problems of the Elementary Gaussian Processes, I-II.
MTA-SzTAKI Tanulmányok sorozat, 22, 41.

2 Åström, K.J. and Eykhoff, P. /1971/:
System Identification - A Survey.
Automatica, 7, 123-162.

3 Åström, J.J. and Wittenmark, B. /1971/:
Problem of Identification and Control.
J. Math. Anal. 34, 90-113.

4 Åström, K.J. and Wittenmark, B. /1973/:
On Self Tuning Regulators.
Automatica, 9, 185-199.

5 Åström, K.J., Borisson, U., Ljung, L. and Wittenmark, B. /1975/:
Theory and Applications of Adaptive Regulators Based on Recursive Parameter Estimation. Proceeding of the 6-th World Congress,
IFAC, Boston, 50.1.

6 Åström, K.J., Borisson, U., Ljung, L. and Wittenmark, B. /1977/:
Theory and Applications of Self-Tuning Regulators

7 Hethéssy J. és Keviczky L. /1974/:
Lineáris diszkrét idejü rendszerek minimális szórásu irányitása, I-II.
Mérés és Automatika, XXII, 266-269, ill. 438-411.

8 Hethéssy J. és Keviczky L. /1977/:
A minimális szórásu önbeállitó szabályozó tulajdonságairól
Mérés és Automatika, XXV, 326-332

9 Ivankov, Sz.A. Iterációs módszerek általános alakja /oroszul/ Megjelent: Belenkij, V.T., Volkonszkij, V.A., Ivankov., Sz.A., Pomanszkij, A.B. Shapiro, A.D: Ityeratyivnüje metodii v tyeorii igr i programmirovanyii. Nauka, Moszkva, 1974.

10 Yevtushenko, Yu.J. Zhadan, V.M. /1973/:
Numerical methods for the solution of some problems of operation research /in Russian/ I. Computational Math. and Math. Phys. 13,3.

11 Keviczky L. és Hethéssy J. /1976/:
Többváltozós, diszkrét idejü rendszerek minimális szórásu irányitása.
Elektronika, 69, 170-175.

12 Kushner, H.J. and Clark, D.S. /1978/:
Stochastic approximation methods for constrained and Unconstrained systems. Applied Math. Sci. Series, 26, Springer, Berlin.

13 Ljung, L. and Wittenmark, B. /1974/:
Asymptotic Properties of Self-Tuning Regulators. Report 7404, Dept. Aut. Control, Lund. Inst. Techn.

14 Ljung, L., Södeström, T. and Gustavsson, I. /1975/:
Counterexamples to General Convergence of a Commonly Used Identification method. IEEE Trans. Aut. Control, 20, 643-652.

15 Ljung, L. /1977/:
On Positive Real Transfer Functions and the Convergence of Some Recursive Schomes. IEEE Trans. Aut. Control, 22, 539-551

16 Ljung, L. /1977/:
Analysis of Recursive Stochastic Algorithms. IEEE Trans. Aut. Control, 22, 551-575

17 Peterka, V. /1970/:
Adaptive Digital Regulation of Noisy Systems. 2-nd Prague IFAC Symposium on Identification and Process Parameter Estimation

18 Prékopa András: Logarithmic concave measures with application to stochastic programming. Acta Sci. Math. /Szeged/ 32 /1971/ 301-316.

19 Södeström, T., Ljung, L. and Gustavsson I. /1978/:
A Theoretical Analysis of Recursive Identification Methods.
Automatica, 14, 231-244.

20 Wieslander, J. and Wittenmark, B. /1971/:
An approach to adaptive control using real time identification.
Automatica, 7, 211-217.

KÖNYVEK, TANULMÁNYOK

1 Albert, A.E. and Gardner L.A. /1976/:
Stochastic Approximation and Nonlinear Regression
Research Monograph No. 43 The M.I.T. Press,
Cambridge, Massachusetts.

2 Albert, A. /1972/:
Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse
Academic Press, New York and London

3 Almásy Gedeon, Gerencsér László, Kósa András /1977/:
Az adaptiv szabályozás korszerü módszerei
OMFB Tanulmány

4 Aoki, M. /1976/:
Optimization of Stochastic System
Academic Press New York and London

5 Åström, K.J. /1970/:
Introduction to Stochastic Control Theory.
Academic Press, New York and London

6 Bányász Csilla és Keviczky László /1978/:
Discrete-time identification of linear dynamic
process.
MTA SzTAKI Tanulmányok, 84.

7 Eykhoff, P. /1974/:
System Identification
J. Wiley, London and New York

8 Fox, L. /1964/:
Numerical Linear Algebra
Clarendon Press, Oxford.

9 Gerencsér László /1978/:
Optimalizálás /jegyzet/
Budapesti Müszaki Egyetem Továbbképző Intézete

10 Gihman, I.I., Szkorohod, A.V. /1965/:
Vvegyenyije v tyeoriju szlucsjnüh processzov.
Nauka, Moszkva

11 Plackett, R.L. /1960/:
Principle of Regression Analysis.
Clarendon Press, Oxford.

12 Sage, A.P. and Melsa, I.L. /1971/:
System Identification.
Academic Press, New York and London.

13 Wasan, M.T. /1969/:
Stochastic Approximation.
Cambridge University Press.

SZIMULÁCIÓS VIZSGÁLATOK

HANGOS KATALIN

BEVEZETÉS

Az irodalomban ismertetett digitális önhangoló, illetve adaptiv szabályozó algoritmusok közül a sztochasztikus lineáris bemenet-kimenet modellt feltételező Peterka-féle minimális varianciára szabályozó algoritmust [3] tartottuk alaposabb vizsgálatra érdemesnek. Ezt az alábbiak indokolják:

a/ A kiindulásként feltételezett sztochasztikus lineáris rendszermodell a feladatok elég nagy osztályára alkalmazható.
b/ A modell sztochasztikus volta lehetővé teszi explicite ki nem fejezett vagy gyakorlatilag más módon számitásba nem vehető zavaró hatások figyelembevételét.
c/ A modell diszkrét volta megfelel annak az igénynek, hogy számitógépes szabályozáshoz alkalmazzuk.
d/ A szabályozó algoritmus számitástechnikai szempontból igen kedvező. Csak a minimálisan szükséges számu együttható meghatározását igényli - szemben egy adaptiv identifikációból és egy azt követő szabályozástervezésből álló megoldással.
e/ Ugy véljük, hogy némi továbbfejlesztéssel az általa szabályozható rendszerek köre bővithető.
f/ Az algoritmussal kapcsolatban már némi hazai tapasztalatról is volt tudomásunk [4], [5].

A szimulációs vizsgálatot az alábbiak miatt tartottuk szükségesnek:

a/ Az irodalomban eddig ismertetésre került vizsgálatokat csak viszonylag kevés, szabályozási szempontból problémát nem okozó rendszerre végezték.
b/ Az elméleti vizsgálatok és gyakorlati tapasztalatok arra mutatnak, hogy a szabályozás sok esetben instabillá válhat; ezt az instabilitást azonban előre, a modell ismeretében nem tudjuk egyértelműen megállapitani.

Ezek miatt ugy véltük, hogy a szabályozó algoritmus gyakorlati bevezetése előtt alaposabb elemzésre van szükség. A felvetett kérdéseket szimulációval vizsgáltuk, éspedig egyrészt azért, mert megválaszolásuk elméleti uton nem biztatott sikerrel, másrészt azért, mert a szimulációs vizsgálatok során olyan problémák is felvetődhetnek, amiket e viszgálatok nélkül nem is láttunk előre.

A dolgozat 3. részében célkitüzésünknek megfelelően beszámolunk a szimulációs vizsgálatok tapasztalatairól, ezt megelőzően azonban néhány olyan elvi kérdést tárgyalunk, ami a szimulációs számitások értékelése során vetődött fel.

1. AZ ALGORITMUS LEIRÁSA

Az ismert, állandó paraméterü, lineáris

(1) $A(z^{-1})y(t) = z^{-d}B(z^{-1})u(t) + \lambda C(z^{-1})e(t), \quad t = 0,1,2,\ldots$

$$z^{-1}\, y(t) = y(t-1)$$

$$A(z^{-1}) = 1+a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_o+b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}$$

$$C(z^{-1}) = 1+c_1 z^{-1} + \ldots + c_k z^{-k}$$

λ a rendszer forrás-zajának szórása,
d a holtidő

rendszer minimális szórásu szabályozására /MVC/, ahol a szabályozási kritérium

(2) $\min\limits_{u(t)} E[(y(t+d)-y_r)^2 | y(t), y(t-1), \ldots, u(t-1), u(t-2), \ldots]$ (a $t = 0,1,2,\ldots,\ldots$ értékekre)

régóta kidolgoztak és használnak algoritmusokat. /Lásd. pl. Åström [1]/.

Ha a rendszer paramétereit nem ismerjük, kézenfekvő megoldás, hogy a paramétereket megbecsüljük, és a becsült paraméterértékek alapján tervezett szabályozóval számitjuk a beavatkozást. Problémát jelent azonban az, ha az identifikációt és a szabályozást egyidejüleg végezzük. Ekkor ui. a bemenet és az előző bemenetek, valamint kimenetek között determinisztikus kapcsolat van /állandó visszacsatolást feltételezve/, és ennek következtében nem becsülhető egymástól függetlenül valamennyi kivánt paraméter. Ez a probléma megoldható un. duális szabályozási algoritmusok használatával /az identifikációt és a szabályozást felváltva, időben elkülönitve végezzük/, vagy ugy, hogy valamelyik paraméter értékét a priori ismertnek tételezzük fel, stb. Hasonló nehézségekkel kell szembenéznünk akkor is, ha az /1/ rendszert nem a /2/ kritériumnak, hanem más, pl. a sulyozott bemenetü minimális szórásu kritériumnak /WIMVC/

$$(3) \quad \min_{u(t)} E[(y(t+d)-y_r)^2 + wu^2(t) \mid y(t),(y-1),\dots,u(t-1),\dots] \quad t = 0,1,2,\dots,$$

megfelelően kivánjuk szabályozni. Kurz, Iserman és Shuman [2] összehasonlitották különböző adaptiv becslő algoritmusok becslései alapján különböző szabályozási kritériumnak megfelelő szabályozó algoritmusok tulajdonságait. Az általuk vizsgált stabil, minimumfázisu lineáris rendszerre /az $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ polinomok valamennyi gyöke* az egységkörbe esett, a d holtidő 1 volt/, a rekurziv legkisebb négyzetes becsléssel kombinált MVC és WIMVC algoritmus egyaránt jó szabályozást biztositott, egy másik, nem stabil rendszer esetében /az $A(z^{-1})$ polinom egyik gyöke az egységkörön kivül esett, a $B(z^{-1})$ és $C(z^{-1})$ polinomok gyökei az egységkörön belül voltak/, csak a WIMVC algoritmussal sikerült stabil szabályozást elérni. Megjegyezzük, hogy a rekurziv legkisebb négyzetes becsléssel az $A(z^{-1})$ és $B(z^{-1})$ polinomok együtthatóit becsülték, a beavatkozás számitásához szükséges $C(z^{-1})$ polinomot a $C(z^{-1}) = 1$ polinommal helyettesitették.

Az ismeretlen, állandó paraméterü, lineáris rendszerek vizsgálatánál az is felmerült, hogy ne a rendszer $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ polinomegyütthatóit, hanem közvetlenül magukat a beavatkozáshoz szükséges együtthatókat becsüljük /Peterka, [3]/.

---

* egy $P(z^{-1}) = p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}$ polinom gyökén a $P^*(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n$ polinom gyökeit értjük.

Az /1/ rendszer /2/ kritériumnak megfelelő MVC szabályozónak megfelelő beavatkozójel /ha az y_r értéket 0-nak irjuk elő/

$$(4)\qquad u(t) = -\frac{G(z^{-1})}{B(z^{-1})F(z^{-1})}\, y(t)$$

ahol

$$(5)\qquad G(z^{-1}) \text{ és } F(z^{-1}) \text{ a}$$

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d}\, G(z^{-1})$$

amelyben

$$F(z^{-1}) = 1+f_1 z^{-1} + \ldots + f_{d-1} z^{-d+1}$$

$$G(z^{-1}) = g_o+g_1 z^{-1} + \ldots + g_{n-1} z^{-n+1}$$

polinomegyenletből egyértelmüen meghatározhatók. Az egyenletet átrendezve, és bevezetve $Q(z^{-1}) = B(z^{-1})\, F(z^{-1})/b_o$, valamint a $P(z^{-1}) = G(z^{-1})/b_o$ jelölést a

$$(6)\qquad P(z^{-1})y(t) + Q(z^{-1})u(t) = 0$$

MVC visszacsatoláshoz jutunk. Itt

$$P(z^{-1}) = p_o+p_1 z^{-1} + \ldots + p_{n-1} z^{-n+1}$$

$$Q(z^{-1}) = 1+q_1 z^{-1} + \ldots + q_{m+d-1} z^{-m-d+1}$$

A felirt egyenletekből látható, hogy ha sikerült $P(z^{-1})$ és $Q(z^{-1})$-et közvetlenül becsülnünk, akkor

1/ nincs szükség az /5/ polinomegyenlet megoldására és a /4/ nevezőjében kijelölt polinomszorzás elvégzésére minden szabályozási lépésben, 2/ $d<k+1$ esetén kevesebb együtthatót kell becsülnünk /$m+n+d-3 < m+n+k-2$/.

A most definiált $P(z^{-1})$ és $Q(z^{-1})$ polinomok segitségével az /1/ rendszeregyenlet fehérzaj esetén, azaz a $C(z^{-1})= 1$ esetben a következő alakban is irható /[1], [4]/:

$$(7) \qquad y(t+d) = P(z^{-1})y(t) + Q(z^{-1})u(t) + \varepsilon(t+d)$$

ahol

$$\varepsilon(t+d) = \lambda F(z^{-1})e(t+d)$$

A /7/ egyenlet alapján az $y(t+d)$, $y(t),\dots,y(t-n+1)$, $u(t),\dots,u(t-m-d+1)$ értékek ismeretében a $P(z^{-1})$ és $Q(z^{-1})$ polinomok együtthatói rekurziv módon is, pl. a rekurziv legkisebb négyzetes becslési módszerrel becsülhetők. Ha feltesszük, hogy az /1/ eredeti rendszer állandó paraméterü, akkor az $y(t)$, $y(t-d),\dots,y(t-d-n+1)$, $u(t-d),\dots,u(t-2d-m+1)$ értékek segitségével becsült $\hat{P}$, $\hat{Q}$ polinomegyütthatókat használhatjuk fel arra, hogy $u(t)$-t meghatározuuk a /6/ egyenlet segitségével.

Szineszaj esetén /azaz a $k \geq 1$ esetben/ a rendszeregyenlet a

$$(7a) \qquad C(z^{-1})y(t+d)=P(z^{-1})y(t)+Q(z^{-1})u(t)+C(z^{-1})\varepsilon(t+d)$$

alakra hozható, amelyből $y(t+d)$ a következő, végtelen sor alakjában állitható elő:

$$(7b) \qquad y(t+d) = \frac{P(z^{-1})}{C(z^{-1})}\,y(t) + \frac{Q(z^{-1})}{C(z^{-1})}\,u(t) + \varepsilon(t+d)$$

A /7b/ egyenlet alapján nem végezhető becslés, mert végtelen sok együtthatót kellene becsülni, a /7a/ egyenletben pedig a $C(z^{-1})\varepsilon(t+d)$ zaj nem független a jobboldal első két tagjától, ezért a becslés torzitott lenne. Ezen nehézségek alapján érthető az az irodalomban is használt, de nem teljesen korrekt eljárás, hogy a $P(z^{-1})$ és $Q(z^{-1})$ polinomok együtthatóit - szineszaj esetén is - a /7/ egyenlet segitségével becsüljük. Tisztában kell lennünk ugyanakkor azzal, hogy a becsült együtthatók torzitottak lesznek, vagy esetleg nem is a kivánt értékekhez konvergálnak.

Az algoritmus müködését a következő ábra szemlélteti /1. ábra/. A P, Q polinomegyütthatókat azon

$$y(t),\ y(t-d),\ y(t-d-1),\dots,u(t-d),\ u(t-d-1),\dots,$$

értékek segitségével becsüljük, amelyekből az ábrán folytonos nyil mutat a $\hat{P}$, $\hat{Q}$ irányába. A $\hat{P}$, $\hat{Q}$ becsült értékek segitségével, az

$$[y(t),\ y(t-1),\dots,u(t-1),\ u(t-2),\dots]$$

értékekből számoljuk az $u(t)$ beavatkozást /szaggatott nyilak/ és ebből adódik a megvalósult kimenet /eredményvonal/.

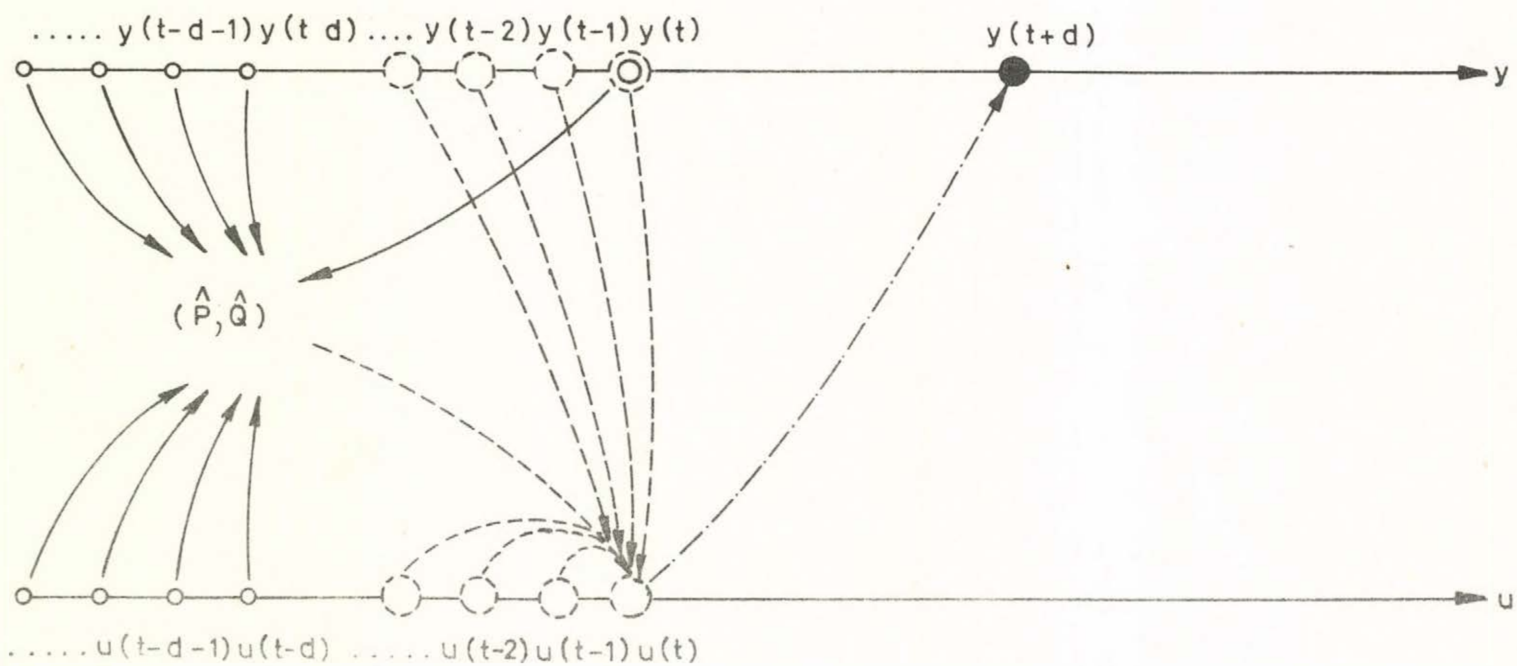
A /6/, /7/ egyenletekkel meghatározott algoritmus adaptációs képességét részletesen vizsgálta hazánkban Hetthéssy és Keviczky [5] egy konkrét stabil, minimálfázisu modellrendszeren. /Mind az A, mind a B, valamint a C polinom gyökei az egységkörön belül estek./ A szerzők az algoritmust némiképpen módositva, alkalmassá tették arra, hogy egy $y_r \neq 0$ értékre szabályozzon minimális szórással. A /6/ egyenlet helyett az

$$(8)\qquad P(z^{-1})y(t)+\overline{Q}(z^{-1})u(t)= y_r$$

visszacsatolást alkalmazták és a $\overline{Q}(z^{-1})$ polinom

$$\overline{Q}(z^{-1}) = \overline{q}_o+\overline{q}_1 z^{-1} +\dots+ \overline{q}_{n-1} z^{-n+1}$$

$\overline{q}_o$ együtthatóját is becsülték /7/ egyenlettel. Az adaptációs készség vizsgálatához megvárták, mig az algoritmus stacioner állapotba jut, majd különböző modellparaméterek /λ, b_o, y_r/



1. ábra.

INFORMÁCIÓÁRAMLÁS AZ ALGORITMUS MŰKÖDÉSE KÖZBEN értékét ugrásszerüen megváltoztatták. Megállapitották, hogy az algoritmus jól követi a változásokat. Vizsgálták a konvergencia sebességét a szokásos exponenciális felejtési tényező függvényében. Felejtés nélküli becslésnél a konvergencia sebességet kicsinek találták /felejtés nélküli becslésnél az adaptációs készség a mérések számának növekedésével csökken/, kis /0.95/ felejtési tényezőnél viszont a paraméterértékek ingadozása számottevő. Az $u(t)$ beavatkozójelet a szokásos módon korlátozták, azaz ha a /8/ egyenlet alapján számolt $u(t)$ beavatkozás egy u_{min}, u_{max} határon kivül esett, a korlát értékével avatkozunk be. Vizsgálták a korlát nagyságának hatását a kimenet szórására - kisebb korlát értékhez nagyobb kimeneti szórás tartozik - ugyanakkor megjegyzik, hogy a szabályozás kezdeti szakaszában, amikor még a P, Q paraméterek értékei nem jók, a beavatkozójel igen nagy abszolut értékü is lehet.

Åström és Wittenmark [6] vizsgálta azt a kérdést, hogy mi történik, ha a /6/ egyenletbeli P, Q polinomok helyett ezek fokszámától eltérő $\tilde{P}(z^{-1})$, $\tilde{Q}(z^{-1})$

$$\tilde{p} = \deg\tilde{P}(z^{-1}) \neq n-1$$

$$\tilde{q} = \deg\tilde{Q}(z^{-1}) \neq m+d-1$$

fokszámu polinomokat használunk, amelyek együtthatóit a /7/ egyenlet segitségével /P helyett $\tilde{P}$-t, Q helyett $\tilde{Q}$-t irva/ becsüljük. Az ott bebizonyitott tétel értelmében, ha az algoritmus konvergál és a $\tilde{P}(z^{-1})$, $\tilde{Q}(z^{-1})$ polinomoknak nincs közös gyöke, akkor a $\tilde{P}(z^{-1})$, $\tilde{Q}(z^{-1})$ polinomok megfelelő együtthatói a $G(z^{-1})$ ill. $B(z^{-1}).F(z^{-1})$ polinomok megfelelő együtthatóihoz konvergálnak, a többi $\tilde{p}_i, \tilde{q}_i$ együtthatók pedig nullához tartanak. Igy ha $\tilde{p}=n-1$, ill. $\tilde{q}=m+d-1$ akkor a valódi paraméterértékeket kapjuk. Ha $\tilde{q}>m+d-1$ és $\tilde{p}=n-1$, akkor $\tilde{P}(z^{-1})$ a $G(z^{-1})$, $\tilde{Q}(z^{-1})$ pedig a

$$\tilde{Q}(z^{-1}) = q_o + q_1 z^{-1} + \dots + q_{m+d-1} z^{-n-d+1} + 0.z^{-m-d} + \dots + 0.z^{-\tilde{q}}$$

polinomhoz konvergál. Hasonló a helyzet, ha $\tilde{p} > n-1$ és $\tilde{q} = m+d-1$. Ha azonban $\tilde{q} > m+d-1$ és $\tilde{p} > n-1$, akkor a tétel csak közös gyöktényezők elhagyásával keletkezett $\tilde{\tilde{P}}(z^{-1})$, $\tilde{\tilde{Q}}(z^{-1})$, polinomokra alkalmazható.

A szerzők ezen tulmenően azt is megmutatják, hogy ha a paraméterbecslés konvergál és a zárt kör kimenete a második momentumokig ergodikus, akkor - az ismert állandó paraméterü lineáris rendszerek minimális szórásu szabályozásához hasonlóan - a zárt szabályozási kör kimenete a következő tulajdonságu /$y_r=0$ feltevéssel/

$$\lim_{t\to\infty} E[y(t+\tau)y(t)] = r_y(\tau) = 0 \qquad \tau = d, d+1, \dots, d+n-1 \tag{9}$$

$$\lim_{t\to\infty} E[y(t+\tau)u(t)] = r_{yu}(\tau) = 0 \qquad \tau = d, d+1, \dots, 2d+m-1$$

2. AZ ALGORITMUS ALKALMAZÁSA SORÁN FELLÉPŐ NEHÉZSÉGEK

2.1. BEAVATKOZÁS NÉLKÜL IS KÖZEL MINIMÁLIS SZÓRÁSU KIMENET

A /6/ egyenlettel visszacsatolt zárt szabályozási kör kimenete egy ARMA folyamat, amelynek leirásához helyettesitsük a /6/ egyenletet az /1/-be [1]. /Feltételezzük, hogy /6/ egyenletbeli P, Q polinomok együtthatói pontosak és állandóak./

$$(10) \qquad [A(z^{-1})-z^{-d}B(z^{-1})\frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}]\, y(t) = \lambda C(z^{-1})e(t)$$

E folyamat y változójának szórásnégyzetét a következő komplex integrál kiszámitásával kaphatjuk meg:

$$(11) \qquad \sigma^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\lambda^2\, C(z^{-1})C(z)}{\left[A(z^{-1})-z^{-d}B(z^{-1})\frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}\right]\left[A(z)-z^{d}B(z)\frac{P(z)}{Q(z)}\right]}\frac{dz}{z}$$

A kimenet szórását minimalizáló $P(z^{-1}) = G(z^{-1})/b_o$, $Q(z^{-1}) = B(z^{-1})F(z^{-1})/b_o$ beavatkozással /az /5/ polinomegyenletet is figyelembe véve/ a /10/ összefüggés az

$$(12) \qquad y(t) = \lambda F(z^{-1})e(t)$$

a /11/ összefüggés pedig a

$$(13) \qquad \sigma^2_{MVC} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \lambda^2 F(z^{-1})F(z)\frac{dz}{z} =$$

$$= \sum_{i=o}^{d-1} \lambda^2\, f_i^2, \quad f_o = 1$$

alakra egyszerüsödik.

Számitsuk ki most a beavatkozás nélküli /azaz az azonosan nulla beavatkozójelü $u(t)\equiv 0$ $\forall t$-re/ rendszer kimenetének szórásnégyzetét. Ez esetben a kimenet a

$$(14) \qquad A(z^{-1})y(t) = \lambda C(z^{-1})e(t)$$

ARMA folyamattal irható le, amelynek szórása

$$(15) \qquad \sigma_{BN}^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\lambda^2 C(z^{-1})C(z)}{A(z^{-1})A(z)} \frac{dz}{z}$$

Most az irodalomból nem ismert becslést adunk a beavatkozás nélküli rendszer kimenetének szórásnégyzete /σ_{BN}^2/ és a minimális szórásnégyzet /σ_{MVC}^2/ közötti eltérésre. Ehhez először megjegyezzük, hogy a /14/ összefüggés a /10/-ből, illetve a /15/ összefüggés a /11/-ből formálisan is származtatható a

$$(16) \qquad \begin{aligned} &P(z^{-1}) \equiv 0 = 0+0.z^{-1}+\ldots+0.z^{-n+1} \\ &Q(z^{-1}) \not\equiv 0 \end{aligned}$$

visszacsatolással. Ugyanis, ha $u(t_o) = 0$ választással élünk, a /6/ egyenlet a /16/ szerinti P-vel és tetszőleges Q-val $u(t) = 0$-t ad minden t-re.

1. Lemma:

Az $A(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ polinomokból az /5/ polinomegyenlettel meghatározott $G(z^{-1})$ polinom együtthatóit g_i-vel /$i=0,\ldots,n-1$/ jelölve

$$(17) \qquad \lim_{|g_i| \to 0} \sigma_{BN}^2 = \sigma_{MVC}^2$$

midőn $A(z^{-1})$ rögzitett

$i = 0,1,\ldots,n-1;$

feltéve, hogy $A(z^{-1})$ polinomoknak nincs egységnyi abszolut értékü gyöke.

Bizonyitás: Helyettesitsük az /5/ polinomegyenletet a /15/ összefüggésbe:

$$(18) \qquad \sigma_{BN}^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{[A(z^{-1})F(z^{-1})+z^{-d}G(z^{-1})][A(z)F(z)+z^{d}G(z)]}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z}$$

A határérték számitásánál - tekintve, hogy nem az integrációs változó szerinti határátmenetről van szó és az integrandus az egységkör mentén folytonos - az integrálás és a határértékképzés felcserélhető, igy

$$\lim_{\substack{|g_i|\to 0\\ i=1,\dots,n-1}} \sigma_{BN}^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \lim_{|g_i|\to 0} \frac{[A(z^{-1})F(z^{-1})+z^{-d}G(z^{-1})][A(z)F(z)+z^{d}G(z)]}{A(z^{-1})A(z)} \frac{dz}{z}$$

Elvégezve a határátmenetet kapjuk, hogy

$$\lim_{\substack{|g_i|\to 0\\ i=1,\dots,n-1}} \sigma_{BN}^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \oint_{z=1} \frac{A(z^{-1})F(z^{-1})A(z)F(z)}{A(z^{-1})A(z)} \frac{dz}{z}$$

Figyelembe véve, hogy az $A(z^{-1})$ polinomnak nincs gyöke az egységkörön, igy $A(z)$-nek sincs, ez utóbbi összefüggésben $A(z)A(z^{-1})$-gyel egyszerüsithetünk, igy

$$\lim_{|g_i|\to 0} \sigma_{BN}^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} F(z)F(z^{-1})\frac{dz}{z} = \sigma_{MVC}^2$$

$i = 1,\ldots,n-1$

Megjegyzés:

Könnyen találhatunk olyan, a valóságban is előforduló esetet, amikor $G(z^{-1}) \equiv 0$. Ha a rendszer d holtideje 1 és a rendszerfüggetlen zajösszetevő /mérési hiba/, akkor $A(z^{-1}) = C(z^{-1})$ és az /5/ egyenletből $G(z^{-1}) = 0$.

A σ_{BN}^2 és σ_{MVC}^2 szórásnégyzetek közötti eltérésre ad becslést a következő

1. Tétel: Jelöljük valamely $X(z) = x_0+x_1z+\ldots+x_nz^n$ valós együtthatós, komplex változós polinom abszolut értékének a $|z|=1$ egységkör mentén felvett maximális, ill. minimális értékét

$$\max_{|z|=1} |X(z)| \quad \text{ill.} \quad \min_{|z|=1} |X(z)|\text{-vel}$$

és tételezzük fel, hogy $A(z^{-1})$-nek nincs egységnyi abszolut értékü gyöke. Ekkor

$$|\sigma_{BN}^2-(\sigma_{MVC}^2+\sigma_{GA}^2)| \leq \frac{2.\lambda^2 \max\limits_{|z|=1} |G(z)| \max\limits_{|z|=1}|F(z)|}{\min\limits_{|z|=1} |A(z)|}$$

ahol a $G(z^{-1})$ és $F(z^{-1})$ polinomok az /1/ rendszeregyenlet $A(z^{-1})$ és $C(z^{-1})$ polinomjaiból az /5/ egyenlettel nyerhetők, és

$$(20) \qquad \sigma^2_{GA} = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{G(z)G(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z}$$

vagyis az $A(z^{-1})y(t) = \lambda G(z^{-1})e(t)$ ARMA folyamat y változójának szórásnégyzete, igy $\sigma^2_{GA} \geq 0$.

Bizonyitás: Végezzük el a /18/ összefüggésben a beszorzásokat és a tagokban a lehetséges egyszerüsitéseket. Ekkor

$$\sigma^2_{BN} = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \left[F(z^{-1})F(z) + \frac{G(z^{-1})G(z)}{A(z)A(z^{-1})} + \right.$$

$$\left. + \frac{z^{-d}\, G(z^{-1})A(z)F(z) + z^d G(z)\, A(z^{-1})F(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \right] \frac{dz}{z}$$

Tagonként végezve az integrálást és figyelembe véve a /20/, valamint a /13/ összefüggést kapjuk, hogy

$$(21) \qquad \begin{aligned} &\sigma^2_{BN} - \sigma^2_{MVC} - \sigma^2_{GA} = \\ &= \frac{\lambda^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{-d}G(z^{-1})A(z)F(z) + z^d G(z)A(z^{-1})F(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

A jobb oldalon álló integrál /amelynek értéke a bal oldalon álló mennyiség valós voltából következően valós/ abszolut értékének becsléséhez megadjuk az integrandus egy felső korlátját az egységkör mentén.

$$|I(z)| = \left| \frac{z^d A(z^{-1})F(z^{-1})G(z) + z^{-d} A(z)F(z)G(z^{-1})}{z\ A(z)A(z^{-1}).i} \right|$$

$$= \frac{|z^d A(z^{-1})F(z^{-1})G(z) + z^{-d} A(z)F(z)G(z^{-1})|}{|z|\ |A(z)|\,|A(z^{-1})|}$$

De az egységkör mentén $|z^{\ell}| = 1$ /ℓ egész szám/, és $|i| = 1$, továbbá

$$\max_{|z|=1} |X(z^{-1})| = \max_{|z^{-1}|=1} |X(z^{-1})| = \max_{|z|=1} |X(z)|$$

/ugyanez igaz értelemszerüen a minimumára is/, valamint alkalmazva az összeg abszolut értékére vonatkozó egyenlőtlenséget

$$|I(z)|_{|z|=1} \le \frac{|A(z^{-1})||F(z^{-1})||G(z)| + |A(z)||F(z)||G(z^{-1})|}{|A(z)||A(z^{-1})|} \le$$

(22)

$$\le \frac{2 \max\limits_{|z|=1} |F(z)| \, . \max\limits_{|z|=1} |G(z)|}{\min\limits_{|z|=1} |A(z)|}$$

Figyelembe véve az integrálértékre vonatkozó közismert felső becslési formulát a /22/ és /21/ egyenletekből a bizonyitandó

$$|\sigma_{BN}^2 - \sigma_{MVC}^2 - \sigma_{GA}^2| = \left| \frac{\lambda^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} I(z) dz \right| \le$$

$$\le \frac{2\lambda^2 \max\limits_{|z|=1} |F(z)| . \max\limits_{|z|=1} |G(z)|}{\min\limits_{|z|=1} |A(z)|}$$

állitáshoz jutunk.

1. Megjegyzés:

A $\max\limits_{|z|=1} |G(z)|$ értéket becsüljük meg felülről ugy, hogy a becslés a gyakorlatban jobban használható legyen. Ehhez irjuk fel $|G(z)|$-t:

$$|G(z)| = |g_o + g_1 z + \ldots + g_{n-1} z^{n-1}|$$

Felhasználva, hogy $|z|=1$, továbbá alkalmazva az összeg abszolut értékére vonatkozó egyenlőtlenséget

$$|G(z)| \leq |g_o| + |g_1|\,|z| +\ldots+ |g_{n-1}|\,|z^{n-1}|$$

és

$$(23) \qquad \max_{|z|=1} |G(z)| \leq |g_o| + |g_1| +\ldots+ |g_{n-1}|$$

Ilymódon a /19/ becslés a következő módon alakul:

$$(24) \qquad |\sigma^2_{BN}-\sigma^2_{MVC}-\sigma^2_{GA}| \leq \frac{2\max\limits_{|z|=1}|F(z)|}{\min\limits_{|z|=1}|A(z)|} \sum_{i=o}^{n-1} |g_i|$$

2. Megjegyzés:

Az 1. tétel bizonyitásában követett módon becsülhetjük a σ^2_{GA} értéket is. A /20/ integrál integrandusa

$$J(z) = \frac{G(z)G(z^{-1})}{z.i.A(z)A(z^{-1})}$$

ennek abszolut értékére pedig felirható a következő becslés:

$$(25) \qquad |J(z)|_{|z|=1} \leq \left(\frac{\max\limits_{|z|=1} |G(z)|}{\min\limits_{|z|=1} |A(z)|} \right)^2$$

Ilymódon

$$\sigma^2_{GA} \leq \lambda^2 \left(\frac{\max\limits_{|z|=1} |G(z)|}{\min\limits_{|z|=1} |A(z)|} \right)^2$$

Ez a becslés is a gyakorlatban jobban használható formára hozható az 1. Megjegyzésben foglaltak szerint

$$\sigma_{GA}^2 \leq \lambda^2 \frac{\left(\sum_{i=o}^{n-1} |g_i|\right)^2}{\left(\min_{|z|=1} |A(z)|\right)^2} \tag{26}$$

3. Megjegyzés:

Mivel σ_{BN}^2 is egy speciális /16/ alaku visszacsatolással szabályozott rendszer kimenetének szórásnégyzete, azért

$$\sigma_{BN}^2 \geq \sigma_{MVC}^2$$

és igy

$$|\sigma_{BN}^2 - \sigma_{MVC}^2| = \sigma_{BN}^2 - \sigma_{MVC}^2$$

A /24/ és /26/ összefüggéseket felhasználva

$$\sigma_{BN}^2 - \sigma_{MVC}^2 \leq \lambda^2 \frac{2 \max\limits_{|z|=1} |F(z)|}{\min\limits_{|z|=1} |A(z)|} \sum_{i=o}^{n-1} |g_i| + \lambda^2 \frac{\left(\sum_{i=o}^{n-1} |g_i|\right)^2}{\left(\min\limits_{|z|=1} |A(z)|\right)^2}$$

Ebből látható, hogy a

$\sigma_{BN}^2 - \sigma_{MVC}^2$ eltérés a $\sum_{i=o}^{n-1} |g_i|$ mennyiség konstans tagot nem tartalmazó másodfoku függvényével majorálható, igy ha $\sum_{i=o}^{n-1} |g_i| \to 0$, akkor $\sigma_{BN}^2 \to \sigma_{MVC}^2$, ami összhangban van az 1. Lemma állitásával.

1. *Definició:*

Egy valós együtthatós, n-edfoku $X(z) = x_0+x_1z+...+x_nz^n$ polinom A-normájának nevezzük a

$$\|X(z)\|_A = \sum_{i=o}^{n} |x_i|$$

összeget. Könnyen belátható, hogy az ilymódon definiált norma eleget tesz a norma tulajdonságoknak a $O(z) = 0+0.z+...+0.z^n$ nulla-polinommal.

4. *Megjegyzés:*

Az e pontban ismertetett eredmények széleskörü alkalmazhatósága és általánosithatósága érdekében meg kell vizsgálnunk azt a kérdést, hogy a szereplő polinomok együtthatói közül melyek függenek és melyek függetlenek a be-, illetve kimeneti változók mértékegységének megválasztásától /léptékfüggőség, illetve léptékfüggetlenség/. Induljunk ki az /1/ rendszeregyenletben szereplő $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ polinomokból. Mivel az /1/ összefüggés homogén lineáris, ezért az egyik polinom együtthatóit, esetünkben az $A(z^{-1})$ polinomét, léptékfüggetlennek tekinthetjük. A rendszerzaj λ szórását /amely léptékfüggő/ különválasztottuk a $C(z^{-1})$ polinomtól, igy az is léptékfüggetlen lett, a $B(z^{-1})$ polinom azonban léptékfüggő. Az $A(z^{-1})$ és $C(z^{-1})$ polinomok léptékfüggetlenségét felhasználva az /5/ egyenletből az $F(z^{-1})$ és $G(z^{-1})$ polinomok is léptékfüggetlenek. Ugyanigy könnyen belátható, hogy a /6/ visszacsatolásban szereplő $P(z^{-1})$ és $Q(z^{-1})$ polinomok közül csak az egyik - esetünkben a $Q(z^{-1})$ polinom lehet léptékfüggetlen.

Mindezek alapján azt mondhatjuk, hogy mivel a $G(z^{-1})$ polinom léptékfüggetlen, igy a becslésekben kulcsszerepet játszó $\|G(z^{-1})\|_A$ mennyiség is a rendszerek belső tulajdonságait jellemzi és nem függ a be-, illetve kimenet mértékegységének megválasztásától. Ugyanakkor a $\sigma^2_{BN}-\sigma^2_{MVC}$ eltérés becslésében szereplő λ^2 tényező /amely léptékfüggő/ az eltérés léptékfüggőségét is biztositja.

Összefoglalva az e pontban leirtaknak az önhangoló minimális szórásu szabályozó alkalmazása szempontjából fontos állitásait, azt mondhatjuk, hogy ha a $\|G(z^{-1})\|_A$ igen kicsiny, akkor az $u(t_o) = 0$ választással a /6/ egyenlet a /16/ szerinti P-vel és Q-val közel az $u(t) \equiv 0$ beavatkozást javasolja, ugyanakkor a

$$\sigma^2_{BN} - \sigma^2_{MVC}$$

eltérés az 1. Tétel szerint igen kicsi lesz.

Vizsgáljuk most meg azt az esetet, amikor a /16/ szerinti /P, Q/ visszacsatolás helyett egy becsült /$\hat{P}$, $\hat{Q}$/ visszacsatolást alkalmazunk. A /10/ egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$[Q(z^{-1})A(z^{-1})+z^{-d}P(z^{-1})B(z^{-1})]y(t)=\lambda Q(z^{-1})C(z^{-1})e(t) \tag{27}$$

Ennek az ARMA folyamatnak a karakterisztikus polinomja:

$$A(z^{-1}) = \hat{Q}(z^{-1})A(z^{-1})-z^{-d}\hat{P}(z^{-1})B(z^{-1})$$

amelynek gyökei a $P(z^{-1})$ becsléstől függően még az egységkörön kivül is kerülhetnek, azaz az eredetileg stabil rendszer még instabillá is válhat.

Ha a $\|G(z^{-1})\|_A$ kicsi, azaz a $|p_i|$ értékek kicsik és a $\hat{p}_i$ becslésének szórása magához a p_i értékhez viszonyitva nagy, akkor $\hat{P}(z)$ várható értéke $E(\|\hat{P}(z)\|_A) >> \|G(z)\|_A$. Ez pedig, ha a rendszer érzékeny a $\hat{P}(z^{-1})$ polinom változásaira /ennek feltételeit a következő pontban tárgyaljuk/, azt eredményezi, hogy a /27/ rendszer kimenetének szórása nagy lesz a minimálishoz képest, és nagyobb lehet, mint σ^2_{BN}. /Ha $\|G(z^{-1})\|_A$ kicsi, akkor $\sigma^2_{BN} - \sigma^2_{MVC}$ kicsi./ Tehát ez esetben beavatkozás nélkül kisebb szórást érhetünk el a kimeneten, mint az önhangoló minimális szórásra szabályozó algoritmussal.

Megjegyezzük, hogy erre a jelenségre számos példát találtunk a szimuláció során.

2.2. *PARAMETRIKUSAN ÉRZÉKENY RENDSZEREK*

A minimális szórásu szabályozást megvalósitó $P(z^{-1})= G(z^{-1})/b_o$, $Q(z^{-1})= B(z^{-1})\ F(z^{-1})/b_o$ állandó és pontos együtthatóju visszacsatolást alkalmazva a jelen tanulmányban szereplő másik közleményben Gerencsér László megadta annak szükséges feltételét, hogy a visszacsatolt rendszer kimenete a szabályozó együtthatók /$P(z^{-1})$, $Q(z^{-1})$/ kis zavarásai mellett beágyazható legyen egy AEG folyamatba. Ha ezek a feltételek nem teljesülnek, akkor a rendszer kimenetének szórása a $P(z^{-1})$, $Q(z^{-1})$ együtthatók kis megváltozása hatására $t\to\infty$ esetén a végtelenhez tart a rendszer "parametrikusan érzékeny" lesz.

Megjegyezzük, hogy ha az $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ polinomok valamennyi gyöke az egységkörön belül van is, könnyen előfordulhat, hogy az emlitett szükséges feltételek között szereplő $F(z^{-1})$ polinom gyökei nem esnek az egységkör belsejébe. Például, ha az /1/ egyenletben $n=k=1$, $d=2$, akkor $F(z^{-1}) = 1 +(c_1-a_1)z^{-1}$. Az $A(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ polinomok stabilak lévén $|c_1| < 1$, $|a_1| < 1$, de az $F(z^{-1})$ polinom x_F gyökének abszolut értékére ebből csak a

$$|x_F| = |c_1 - a_1| < 2$$

egyenlőség következik /pl. $c_1=0.7$, $a_1=-0.7$ választással $|x_F|=1.4$/.

A /P, Q/ visszacsatolást alkalmazva, annak szükséges feltétele, hogy a rendszer "parametrikusan érzékeny" legyen az, hogy a $Q(z^{-1})$ polinom gyökei ne legyenek valamennyien 1-nél kisebb abszolut értéküek.

Megjegyezzük, hogy a visszacsatolt rendszer "parametrikus érzékenységét" a visszacsatolás paramétereire célszerü mennyiségileg is jellemezni /pl. a kimenet, szórásnégyzetének a visszacsatolás paraméterei szerinti parciális deriváltjai segitségével/. Ennek a kérdésnek a vizsgálatát tekintjük egyik következő feladatunknak. Ha a visszacsatolás paramétereinek kis megváltoztatása azt eredményezi, hogy a kimenet szórása $t\to\infty$ esetén a végtelenhez tart, akkor extrém nagy /végtelen/ parametrikus érzékenységről beszélhetünk. Ilyen esetekben kevésbé érzékeny, un. szuboptimális vagy kvázi-optimális stratégiák alkalmazására lenne szükség. A továbbiakban ismertetünk két ilyen, az irodalomból ismert kvázi-optimális szabályozási stratégiát.

2.2.1. *Åström-féle szuboptimális szabályozó nem-minimál-fázisu rendszerekre* [1]

Ha a $B(z^{-1})$ polinom olyan, hogy m_1 számu gyöke az egységkörön belül, m_2 számu pedig a határon vagy azon kivül esik, akkor szuboptimális visszacsatolás /SOMVC/ konstruálható a következő módon. Bontsuk fel $B(z^{-1})$-t két polinom szorzatára

(28) $$B(z^{-1}) = B_1(z^{-1})B_2(z^{-1})$$

ahol

$\deg B_1 = m_1$	minimálfázisu rész
$\deg B_2 = m_2$	az egységkör hatására vagy azonkivül eső gyököket tartalmazó rész /az érzékenységet okozó rész/

Határozzuk meg $F'(z^{-1})$, $G'(z^{-1})$ polinomokat a

(29) $$C(z^{-1}) = A(z^{-1})F'(z^{-1})+z^{-d}B_2(z^{-1})G'(z^{-1})$$

$$\deg G' = n-1$$
$$\deg F' = m_2+d-1$$

polinomegyenletből. Ekkor a

$$(30) \qquad B_1(z^{-1})F'(z^{-1})u(t)+G'(z^{-1})y(t) = 0$$

visszacsatolással parametrikusan érzéketlen, de a σ_{MVC}-nél nagyobb szórásu rendszert kapunk. Valóban a /27/ egyenletben a /30/ visszacsatolást helyettesitve, a /28/ és /29/ egyenleteket is felhasználva a

$$[B_1(z^{-1})C(z^{-1})]y(t)=\lambda[C(z^{-1})B_1(z^{-1})F'(z^{-1})]\ e(t)$$

egyenlethez jutunk, amiből látható, hogy a parametrikus érzékenység a

$$B_1(z^{-1})C(z^{-1})$$

~~polinom~~ gyökeitől függ, azaz, ha az érzékenységet a $B(z^{-1})$ polinom egynél nem kisebb abszolut értékü gyökei okozták, akkor az érzékenység ilymódon megszüntethető, $C(z^{-1})$ 1 abszolut értékü gyökeinek hatása viszont megmarad. A kimenet szórásnégyzete pedig:

$$\sigma^2_{SOMVC} = \sum_{i=o}^{m_2+d-1} \lambda^2 f'_i \ , \ f'_o = 1$$

/a $d=1$ esetben $\sigma^2_{SOMVC} \geq \sigma^2_{MVC}$/.

A módszerrel kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy ebben a formájában a gyökmeghatározás számitásigényessége miatt önhangoló algoritmusokban nem alkalmazható és nem ismerjük e módszer kis számitásigényü, rekurziv változatát. Másrészt - figyelembe véve, hogy egy rendszer 1-nél kisebb abszolut értékü gyökökkel rendelkező $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ polinom esetén is lehet parametrikusan érzékeny, ebben a formájában önhangoló algoritmusként meglehetősen megbizhatatlan is.

Felhivjuk a figyelmet arra az eredeti Åström-féle levezetésben nem szereplő tényre, hogy akkor is, ha a rendszer parametrikusan érzékeny voltát az $F(z^{-1})$ polinom 1-nél nagyobb abszolut értékü gyökei okozzák, egy /28/ alaku felbontással és /30/ alaku visszacsatolással parametrikusan nem-érzékeny rendszerhez juthatunk.

2.2.2. *Peterka módszere*

Peterka már idézett cikkében [3] az algoritmus bemutatásával együtt tett javaslatot arra az esetre, ha a zárt szabályozási kör /parametrikus érzékenység miatt/ instabillá válna. Eszerint növeljük meg az algoritmus holtidejét a rendszer valóságos holtidejénél nagyobbra, mondjuk $d' := d+h$, $h > 0$, alkalmazzunk a visszacsatolásnál egy az eredeti Q polinomnál nagyobb $/d+h+m-1/$ fokszámu Q'' polinomot, a Q'' együtthatóit pedig a /7/ egyenletből becsüljük, de d helyett $d' = d+h$-t irva. Ez a módszer önhangoló algoritmusoknál jól, számitási többletmunka nélkül alkalmazható, de a szerző tudomásunk szerint nem közölt arra vonatkozó eredményeket, hogy az ilymódon módositott visszacsatolással előállitott zárt szabályozási kör milyen tulajdonságokkal rendelkezik.

Ismert, állandó paraméterü rendszerek szabályozása esetében a Q'' polinomot a

$$(31) \qquad C(z^{-1}) = A(z^{-1})F''(z^{-1})+z^{-d-h}G''(z^{-1})$$

$deg\ F'' = d+h-1$
$deg\ G'' = n-1$
polinomegyenlet segitségével a

$$(32) \qquad \begin{aligned} &P''(z^{-1}) = G''(z^{-1}) && deg\ P'' = n-1 \\ &Q''(z^{-1}) = B(z^{-1})F''(z^{-1}); && deg\ Q'' = n+d+h-1 \end{aligned}$$

összefüggésekből számolhatjuk ki. A visszacsatolt rendszer tulajdonságainak vizsgálatához helyettesitsük a /27/ egyenletbe az

$$F''(z^{-1})B(z^{-1})u(t) + G''(z^{-1})y(t) = 0$$

visszacsatolást. A /31/ egyenletet is figyelembe véve a

$$B(z^{-1})[F''(z^{-1})A(z^{-1})(1-z^{h}) + z^{h}C(z^{-1})]y(t) = \lambda B(z^{-1})C(z^{-1})F''(z^{-1})e(t) \tag{33}$$

összefüggést kapjuk. A jelen tanulmányban szereplő másik közleményben Gerencsér László bebizonyitotta, hogy /33/ beágyazható egy AEG folyamatba, ha a

$$B(z^{-1}),\ F''(z^{-1}),\ [F''(z^{-1})A(z^{-1})(1-z^{h}) + z^{h}C(z^{-1})]$$

polinomok gyökei egynél kisebb abszolut értéküek. Ebből látható, hogy ha a rendszer parametrikus érzékenységét az $F(z^{-1})$ polinom egynél nagyobb abszolut értékü gyökei okozták, akkor a módszer stabil rendszert eredményezhet, ellenkező esetben hatástalan. A /33/ folyamat szórása a

$$\sigma_P^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{C(z^{-1})F''(z^{-1})C(z)F(z)}{[F''(z^{-1})A(z^{-1})(1-z^{h})+z^{h}C(z^{-1})][F''(z)A(z)(1-z^{-h})+z^{-h}C(z)]} \frac{dz}{z}$$

integrál, ami kedvezőtlen esetben nagyon nagy is lehet.

2.3. NEM STABIL RENDSZEREK

Ha az $A(z^{-1})$ polinom gyökei között van egynél nem-kisebb abszolut-értékü, akkor - bár a beavatkozás nélküli rendszer kimenetének szórása $t\to\infty$ esetén végtelenhez tart, létezik a kimenet szórását minimalizáló $P(z^{-1})$, $Q(z^{-1})$ visszacsatolás [1], igy ha a rendszer parametrikusan nem tul érzékeny, az algoritmussal véges /és σ_{MVC}-hoz közeli/ szórásu, stabil szabályozás hozható létre [2].

3. SZIMULÁCIÓS EREDMÉNYEK

3.1. A VIZSGÁLT LINEÁRIS RENDSZEREK

Mint azt már a dolgozat elején leirtuk, a szimulációs vizsgálatok célja az volt, hogy az algoritmussal sok különböző, véletlenszerüen megválasztott lineáris állandó paraméterü szabályozott rendszert vizsgáljunk, és ezáltal az MVC szabályozásról minél több tapasztalatot szerezzünk. A lineáris rendszereket ugy választottuk meg, hogy köztük nem stabilak, nem-minimálfázisuak és egynél nagyobb holtidejüek egyaránt előforduljanak. A vizsgálatokat a következő paramétertartományban végeztük:

$1 \leq d \leq 4$

$1 \leq m \leq 3$

$1 \leq n \leq 3$

$0 \leq k \leq 3$ /k=0 fehérzajnak megfelelő eset/

$\lambda = \{0.1,\ 1.0,\ 3.0,\ 23.2\}$.

Az $A(z^{-1})$ polinomok x_A, a $B(z^{-1})$ polinomok x_B és a $C(z^{-1})$ polinomok x_C gyökeit véletlenszerüen választottuk meg ugy, hogy nagy gyakorisággal egyhez közeli abszolut értéküek legyenek. Az $|x_A|$ és $|x_B|$ értékek 1-nél nagyobbak is lehettek, $|x_C| \leq 1$. A szimulált rendszereket 500 lépésig vizsgáltuk, és az $y_r = 0$ választással éltünk. A szabályozás minőségének értékeléséhez a következő segédmennyiségeket számoltuk ki:

$$s_y^2 = \frac{\sum_{t=0}^{500} y_2(t)}{500}$$

$$s_u^2 = \frac{\sum_{t=0}^{500} u^2(t)}{500}$$

$$r_{y,\nu} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{500-\nu} y(t)y(t+\nu)}{(500-\nu)s_y^2}, \quad \nu = 1,\ldots,15$$

σ^2_{MVC}

σ^2_{BN}

$P(z^{-1})$ és $Q(z^{-1})$ polinomoknak az állandó paraméterü lineáris rendszer minimális szórásu visszacsatolásához tartozó értékeit /P_{MVC}, Q_{MVC}/.

A szimulációs vizsgálatokat a MTA CDC 3300-as számitógépére készitett SIMULA-nyelvü program segitségével végeztük.

3.2. *AZ ALGORITMUS VISELKEDÉSE A deg P = n-1, deg Q = m+d-1 ESETBEN*

A szimulációs eredményeket korlátozott bemenőjel $/-10 \leq u(t) \leq 10/$ esetében a 2. ábrán, nem korlátozott bemenőjel esetén a 3. ábrán mutatjuk be. Az ábrákon a szabályozás minőségét jellemző

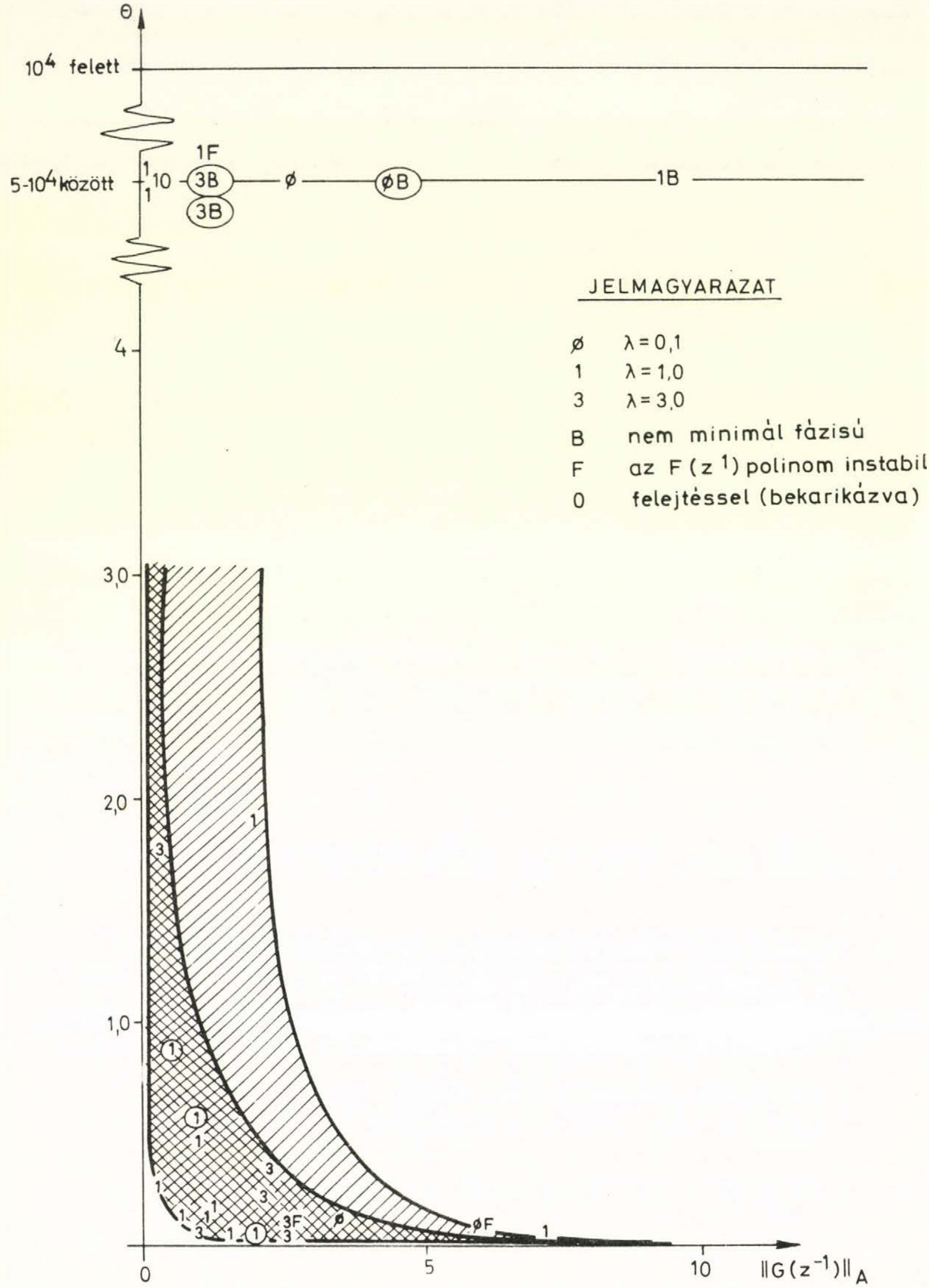
$$\Theta = \frac{s_y^2 - \sigma_{MVC}^2}{\sigma_{BN}^2 - \sigma_{MVC}^2} \qquad /\Theta \geq 0/$$

mennyiséget /amely a rendszer "szabályozhatóságának" léptékfüggetlen mértéke/ ábrázoltuk $\|G(z^{-1})\|_A$ függvényében. Jónak minősitettük a szabályozást, ha Θ igen kicsi $/\Theta < 0.1/$, elfogadhatónak, ha $\Theta < 1$ végül instabilnak, ha $\Theta > 10^4$. Az olyan rendszereket, amelyek szabályozás szempontjából nehezen kezelhetők, külön betüjellel jelöltük /nem-minimálfázisu rendszer, az $F(z^{-1})$ polinom gyökei között van egynél nagyobb abszolut értékü/. A nem-stabil rendszereknél σ_{BN}^2 nem értelmezhető, ezért a nem-stabil rendszereken végzett vizsgálatok eredményeit nem tartalmazzák az ábrák.

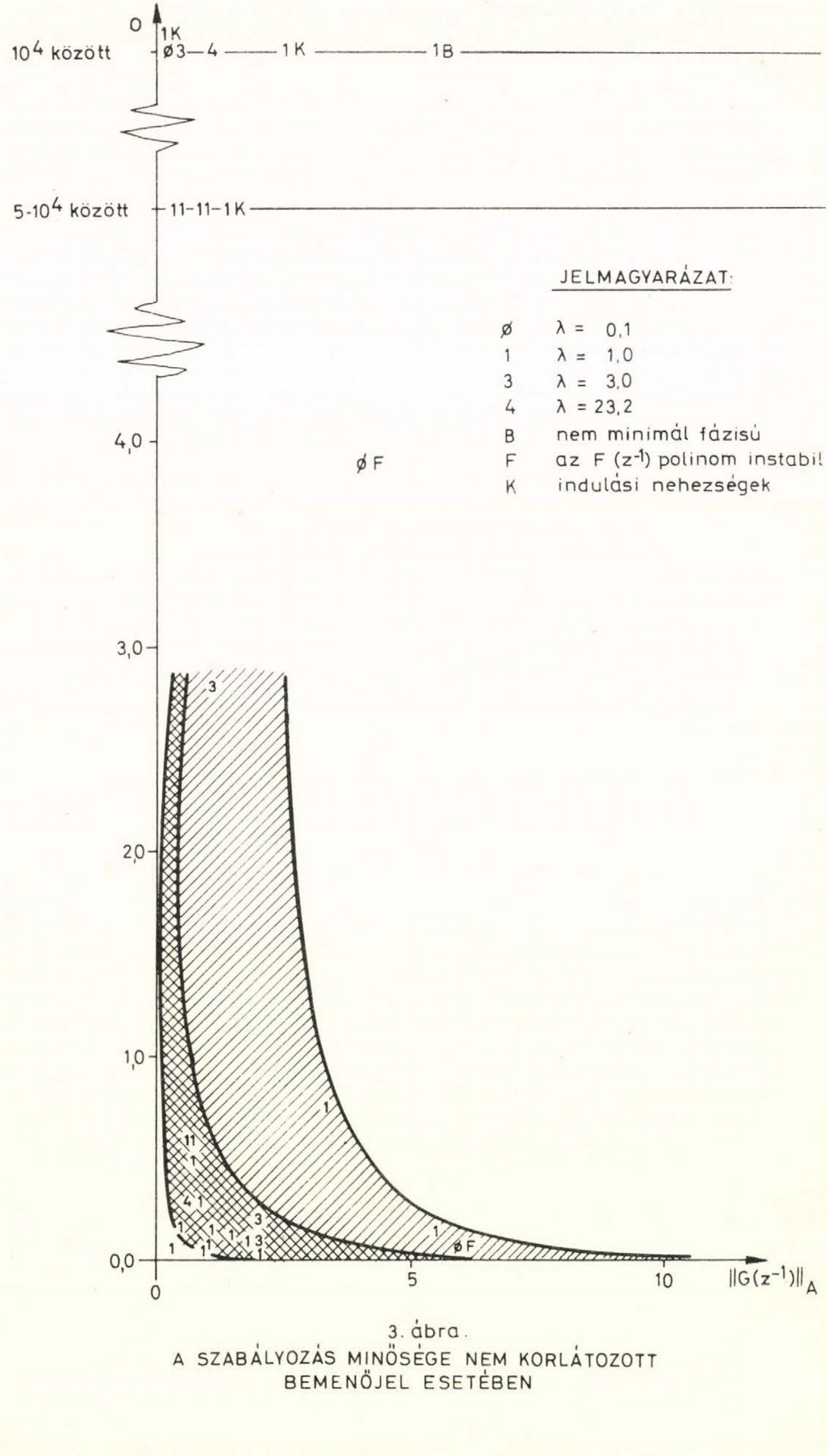
A szimulációs vizsgálatok során szerzett tapasztalatainkat az alábbiakban foglalhatjuk össze:

a/ Kis $\| G \|_A$-ju rendszerek $/\| G \|_A < 1.5/$

Az ilyen rendszereknél a legtöbb esetben nem kapunk jó vagy elfogadható szabályozást. Ennek a $P(z^{-1})$, $Q(z^{-1})$ együtthatók nem kielégitő becslése az oka, a becsült $\hat{p}_i$, $\hat{q}_i$ értékek a várt értékekkel $/p_{iMVC}$, $q_{iMVC}/$ sokszor még előjelben sem egyeznek meg. A jelenséget részletesebben tárgyaltuk a 2. fejezetben.



2. ábra.
A SZABÁLYOZÁS MINŐSÉGE $-10 \leq u \leq 10$ KORLÁTOZOTT BEMENŐJEL ESETÉN



3. ábra.
A SZABÁLYOZÁS MINŐSÉGE NEM KORLÁTOZOTT BEMENŐJEL ESETÉBEN

b/ A bemenőjel korlátozásának hatása

A bemenőjel korlátozásának hatása kettős. Egyrészt ha a korlátot tul kicsire választjuk, akkor a bemenőjel a számitott érték helyett gyakran lesz a korláttal egyenlő, igy a szabályozó egy egyszerü bang-bang elvü szabályozóvá válik, a kimenet szórása pedig ennek következtében megnő. Ha azonban a korlátot elég nagyra választjuk /az általunk használt 10.0 érték az előzetes vizsgálatok szerint ilyen/, akkor a bemenőjel javasolt értéke /a kezdeti ingadozásokat kivéve/ végig a korlátok közé esik. A korlátozás másik fontos hatása a 2. és 3. ábrák összehasonlításakor szembetünik. Ha a bemenőjel - mint sztochasztikus folyamat - nem aszimptotikusan stabilis, vagy lassan csillapodik /ami az $F(z^{-1})$ polinom gyökeinek abszolut értékétől függ/, akkor a korlát általában megakadályozza a szabályozott rendszer instabillá válását /azáltal, hogy a szabályozó bang-bang elven müködik/. A korlát megadása a kezdeti lépések alatt esetenként előforduló és csak lassan csillapodó, nagyon nagy abszolut értékü bemenőjeleket is "levágja", ezáltal megjavitja a szabályozás minőségét.

c/ Indulási nehézségek

Az induláskor előforduló nagy abszolut értékü bemenőjelek a kezdeti $\hat{p}_i$, $\hat{q}_i$ együttható becslés nagy hibájának tulajdonithatók [2]. Annak ellenére, hogy a $P(z^{-1})$, $Q(z^{-1})$ polinomok együtthatóinak becslését egy, az elfajulásokra nem érzékeny, viszonylag kevés lépés után jó becslést szolgáltató algoritmussal végeztük, ilyen esetben is tapasztaltunk korlátozás nélküli bemenőjel esetén indulási nehézségeket. /Egy ilyen rendszer futásának protokollját a Mellékletben közöljük./ Elkerülésükre az *MVC*-kritérium helyett /(2) célfüggvény-egyenlet/ a *WIMVC*-kritériumot javasolták /(3) célfüggvény-egyenlet/.

d/ A rendszerzaj szórásának hatása

Mint az ábrákon is megfigyelhető, ha a rendszerzaj szórása kicsi /$\lambda = 0.1$/, az rontja a szabályozás minőségét. Ez a /24/ és /26/ összefüggések ismeretében könnyen megérthető, ugyanis a $\sigma_{B\cdot N}^2 - \sigma_{MVC}^2$ eltérés a $\|G(z^{-1})\|_A$-n kivül a szórásnégyzettől /λ^2/ is függ. Kis rendszerzaj szórás esetén a $P(z^{-1})$, $Q(z^{-1})$ polinomok együtthatóinak becslése nem megfelelő, illetve igen sok esetben 500 lépésen belül nem ért el stacioner értéket. Megfigyeléseink szerint néhány esetben nagyobb konvergencia-sebességet kapunk, ha exponenciális felejtést alkalmazunk valamely ρ felejtési tényezővel /$0.95 < \rho \leq 1.0$/.

e/ Egyéb tényezők

Az exponenciális felejtés alkalmazása nagyobb szórásu /λ = 3.0 vagy 23.2/ esetekben rontja a szabályozást azáltal, hogy a becsült együtthatók bizonyos ingadozását eredményezi.

A rendszer holtidejének szerepe a szabályozás minősége szempontjából másodrendü fontosságu, de $d=4$ esetében már egy esetben sem tapasztaltunk elfogadható szabályozást.

Az ábrákból látható, hogy nem-minimálfázisu szabályozott rendszerek lehetnek ugyan stabilak /attól függően, hogy a maximális $|x_B|$ mennyivel nagyobb egynél/, de elfogadható szabályozást nem sikerült előállitani.

Nem-stabil rendszereknél - a tapasztalatok szerint - akkor van remény σ_{MVC}-hez közeli szórásu, stabil szabályozott rendszerre, ha a következő feltételek együttesen teljesülnek:

- az instabilitást okozó maximális abszolut értékü gyök abszolut értéke 1-nél nem sokkal nagyobb /tapasztalataink szerint ha 1.1-nél kisebb/

- $\| G(z^{-1}) \|_A \geq 3$
- a holtidő nem tul nagy és a rendszer minimálfázisu;
- az $F(z^{-1})$ polinomnak egynél kisebb abszolut értékü gyökei vannak.

4. KÖVETKEZTETÉSEK ÉS TOVÁBBI FELADATOK

A szimulációs vizsgálatok eredményeinek ismeretében megállapítható, hogy nem tudjuk - még az $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ polinomok ismeretében sem - előre eldönteni, hogy az önhangoló algoritmus elfogadhatóan fog-e szabályozni, illetőleg, hogy az önhangoló algoritmussal szabályozott rendszer stabil lesz-e. Az általunk vizsgált lineáris rendszerek - mint eléggé kis elemü statisztikai minta - alapján azonban azt mondhatjuk, hogy az esetek nagy hányadában elfogadható szabályozást kapunk, ha

- a rendszer stabil és minimálfázisu
- a rendszer forrászajának szórása elég nagy /$\lambda >> 0.1$/
- a rendszer holtideje elég kicsi /$d \leq 3$/
- a $\| G(z^{-1}) \|_A$ elég nagy /$\| G(z^{-1}) \|_A \gtrsim 1.5$/
- a bemenőjelet alkalmas módon korlátozzuk.

/Ezeket a feltételeket a 2. és 3. ábrák alapján szabhatjuk. Az ábrákon vonalkázás jelöli azt a tartományt, ahová az általunk vizsgált rendszer-minta elemei estek, és keresztirányu vonalkázással jelöltük azt a tartományt, ahová a rendszerek nagy többsége esett./

Tapasztalataink szerint a nem megfelelő szabályozás az együttható-becslések nem kielégitő voltára vezethető vissza /a becslés csak lassan konvergál vagy nagyon ingadozik, esetleg nem is a várt p_{iMVC}, ill. q_{iMXC} értékhez tart/. A becslés hibája pedig főként a visszacsatolás /P, Q/ paramétereinek kis megváltozásaira is érzékeny rendszereknél okoz nagy hibát. Ezért szükséges lenne további elméleti és szimulációs vizsgálatokat végezni ilyen, parametrikusan nagy érzékenységü rendszerekkel kapcsolatban. Ezen tulmenően célszerü lenne megvizsgálni azt, hogy ez az önhangoló algoritmus optimálisan használja-e ki a mérések nyujtotta információt. Ha nem, akkor a vizsgálatok alapján olyan módositott algoritmust kellene kidolgozni, amely az érzékenység szempontjából kényes együtthatókat becsüli optimálisan.

A parametrikus érzékenységgel kapcsolatos munka mellett elméleti és szimulációs vizsgálatokat is tervezünk a sulyozott bemenetü minimális szórásu kritériumnak /*WIMVC*/ megfelelő szabályozó algoritmussal.

IRODALOMJEGYZÉK

1 Åström, K.J.: Introduction to Stochastic Control Theory.
Academic Press, New York, 1970.

2 Kurz, H. - Iserman, R.I. - Schuman, R.: Development, Comparison and Application of Various Parameter--adaptive Digital Control Algorithms
7th Triennal World Congress of IFAC, Helsinki, 1978

3 Peterka, V.: Adaptive Digital regulation of Noisy Systems
IFAC Symposium on Identification, Prague, 1970.

4 Hetthésy J. - Keviczky L.: Lineáris diszkrét rendszerek minimális szórásu irányitás
Mérés és Automatika 22 /1974/. I. rész: 7.266-270, II. rész: 11. 438-442.

5 Hetthésy J., - Keviczky L.: A minimális szórásu önbeállitó szabályozó tulajdonságairól
Mérés és Automatika, 25, /1977/ 326-332.

6 Åström, K.J. - Wittenmark, B.: On Self-tuning Regulators
Automatica, 9 /1973/ 185-199.

M E L L É K L E T

INDULÁSI NEHÉZSÉGEKKEL SZABÁLYOZOTT RENDSZERE

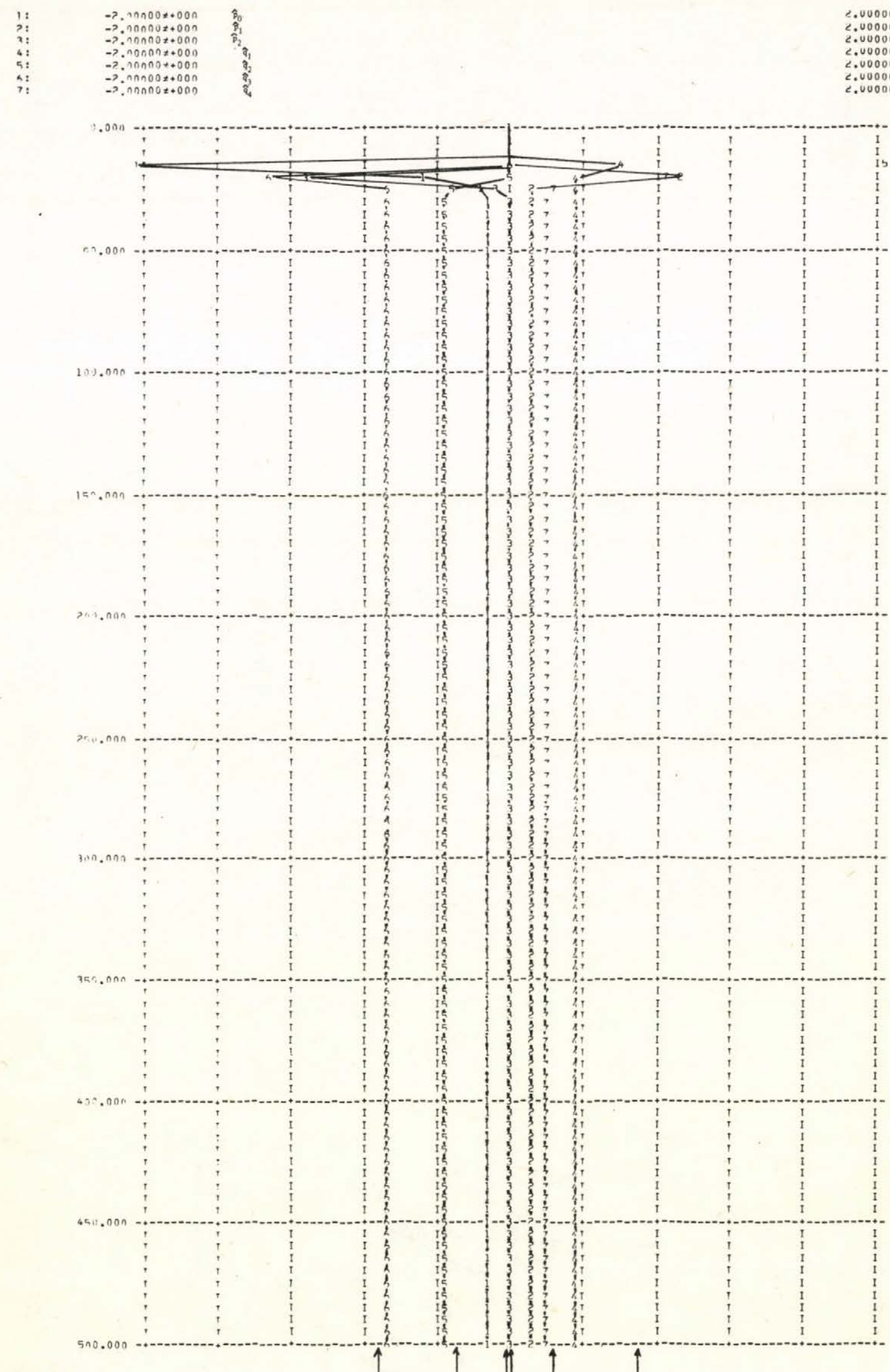
$\|G(z^{-1})\|_A = 0.383$

$\Theta > 10^4$

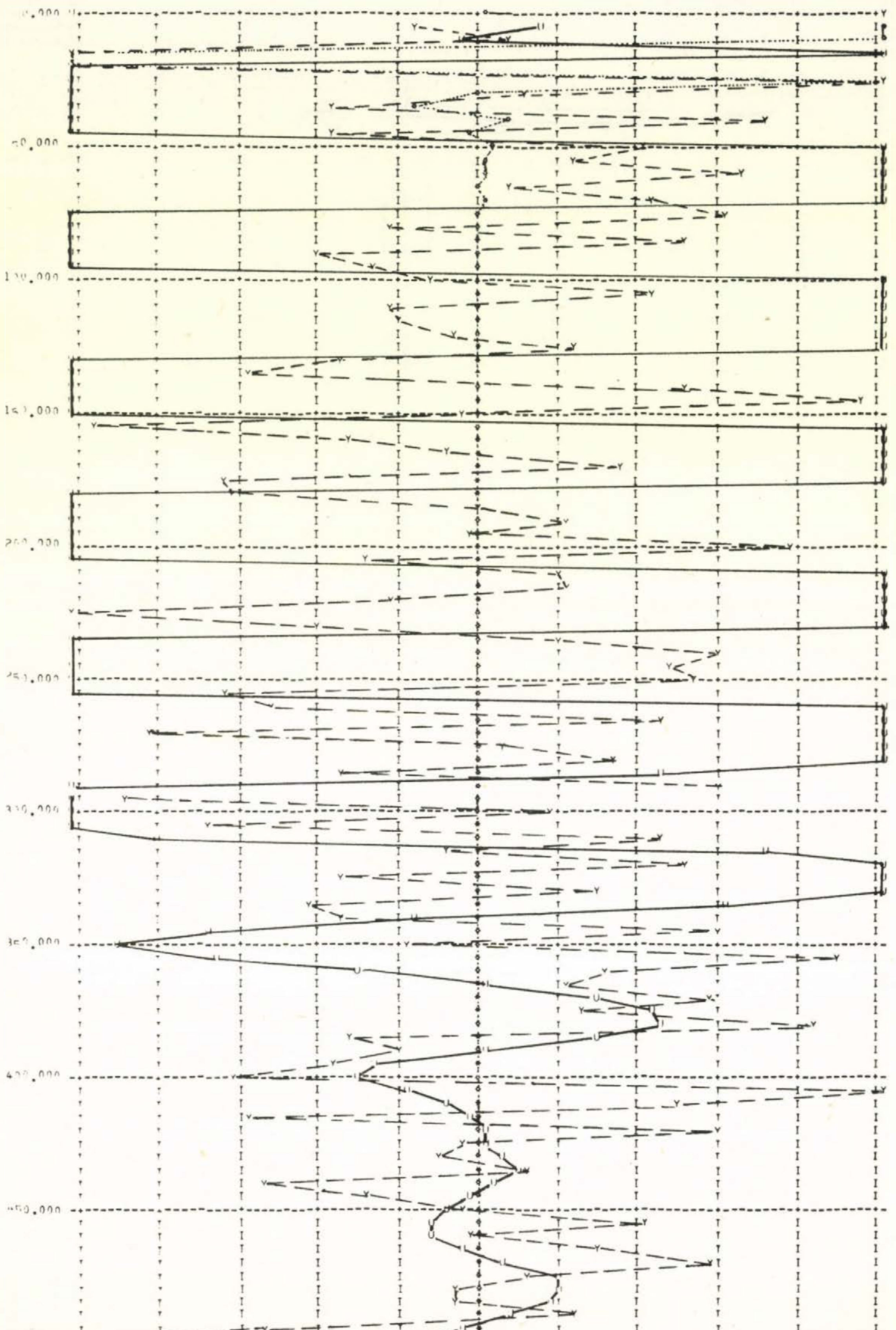
$F(z^{-1}) = 1 - 0.930z^{-1}$

```
TMAX=   500HOLTIDO=      2
A ZAJ SZORASA=        1.000000
A BEAVATKOZAS ALSO ES FELSO KORLATJA -1.000000≠+052  1.000000≠+052
B0=         1.000000

  B[0:3]          1.000000  6.437063≠-001 -1.739872≠-001 -7.409354≠-001
 A VALOS RESZ[0:3]          0.000000  7.839228≠-001 -7.138145≠-001 -7.138145≠-001
   IMAG. RESZ[0:3]          0.000000       0.000000 -6.600246≠-001  6.600246≠-001
   ABSZ.ERTEK[0:3]          0.000000  7.839228≠-001  9.721953≠-001  9.721953≠-001


  A[0:3]          1.000000  2.902215≠-001  1.929524≠-001 -6.526308≠-002
 A VALOS RESZ[0:3]          0.000000 -2.530748≠-001 -2.530748≠-001  2.159282≠-001
   IMAG. RESZ[0:3]          0.000000 -4.880548≠-001  4.880548≠-001       0.000000
   ABSZ.ERTEK[0:3]          0.000000  5.497676≠-001  5.497676≠-001  2.159282≠-001


  C[0:1]          1.000000 -6.395724≠-001
 A VALOS RESZ[0:1]          0.000000  6.395724≠-001
   IMAG. RESZ[0:1]          0.000000       0.000000
   ABSZ.ERTEK[0:1]          0.000000  6.395724≠-001


 A MIN. SZORAS2:          1.864517
A KONSTANS BEMENETU RENDSZER KIMENETENEK SZORAS2-E:          1.941680

  PETERKA-P(EL'") [0:2]  7.689374≠-002  2.446690≠-001 -6.068121≠-002
  PETERKA-Q(EL'") [0:4]        1.000000 -2.860876≠-001 -7.725014≠-001 -5.791631≠-001  6.889172≠-001

 A FELEJTESE TENYEZO=          2.000000
AZ ALGORITMUS MARADEKSZORAS2-E      113.502155

A KIMENET BECSULT STATISZTIKAI JELLEMZOI
 SZORAS2    6.698752≠+007
 AZ 1,...,15-RENDU AUTOKORRELACIOS EGYUTTHATOK
 -1.596318≠-003 -8.819467≠-003 -5.352546≠-002  5.241021≠-002 -2.011921≠-002 -1.995558≠-002 -3.047094≠-002  2.060739≠-002 -1.059973≠-004
 -4.764396≠-004 -8.184318≠-005  6.409950≠-005  1.579704≠-005  1.674786≠-006 -1.556521≠-005
A BEMENET 0 KORULI SZORASNEGYZETE:  2.874185≠+008
```

A becsült együtthatók



U: -1.00000*+001 —— a rendszer bemenete 1.00000*+001
Y: -2.73095*+000 — — a rendszer kimenete 2.73095*+000
: -2.00000+000 ······ a p_1, q_1 együtthatókkal becsült kimenet 2.00000*+000



A TANULMÁNYOK sorozatban 1979-ben megjelentek:

88/1979	Renner G. - Gaál B. - Hermann Gy. - Horváth L. - Várady T.: Szoborszerü felületek tervezése és megmunkálása
89/1979	Ruda Mihály: A SIS77 statisztikai információs rendszer /a felhasznált számitástechnikai eszközök, a rendszer szerkezete és programjai/
90/1979	Bányász Cs. - Keviczky L.: Optimum Insensitivity of the Linear-continuous Transformation
91/1979	Téli iskola /Szentendre/
92/1979	Bolla M. - Csáki P. - Fischer J. - Herodek S. - Hoffman Gy. - Kutas T. - Telegdi L. - Wittmann I.: A balatoni ökoszisztéma modellezése
93/1979	Andor László: Kisgépes adatbázis kezelő rendszer
94/1979	Gertler János: Egy statisztikus szürési eljárás számitógépes folyamatirányitásához
95/1979	Báthory M. - Galló V. - Kovács E. - Mérő L. - Siegler A. - Vajta L.: Festőrobot vezérlésére alkalmas alafelsimerési berendezés
96/1979	Mérő László: Konturkeresés zajos digitalizát képekben
97/1979	Pásztorné - Matavovszky T.: Boole-függvény kezelőrendszer
98/1979	Kecskés Zsuzsa: Három dimenziós tárgyak drótvázának ábrázolása vonalrajzoló grafikus berendezésekkel

99/1979 Ivics József: KGST Riga

100/1979 Téli iskola