tanulmányok 98/1979

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

HÁROM DIMENZIÓS TÁRGYAK DRÓTVÁZÁNAK ÁBRÁZOLÁSA VONALRAJZOLÓ GRAFIKUS BERENDEZÉSEKKEL

Irta:

KECSKÉS ZSUZSANNA

Tanulmányok 98/1979.

A kiadásért felelős:

DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 094 7

ISSN 0324-2951

7910852 MTA KESZ Sokszorosító, Budapest. F. v.: dr. Héczey Lászlóné

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS

A grafikus berendezéseken megjelenitendő tárgyak kettő, vagy három dimenziósak. A három dimenziós tárgyak megjelenitése számos akadályba ütközik, hisz megjelenitő eszközeink két dimenziósak. A három dimenziós tárgyak képeinek előállitásakor figyelembe kell vennünk a mélység információt is. Problémát jelent az ábrázolandó tárgy görbült felületeinek leirása, megjelenitése. Ezen nehézségek ellenére a három dimenziós tárgyak megjelenitésére számos módszert fejlesztettek ki.

A modellezés szempontjából a három dimenziós tárgyak megadására háromféle módszert alkalmazhattunk. Ezek: a tárgy térfogat elemes megadása, a felület elemes megadása és a drótvázas megadása. A térfogat elemes megadás azt jelenti, hogy a tárgyat elemi térfogat elemekből épitjük fel, pl.: kocka, hasáb, gula, henger, kup, gömb. Felület elemes megadásról akkor beszélünk, ha a tárgyat határoló felületeket elemi felület elemek segitségével adunk meg. A tárgy drótvázát a tárgy csucspontjait összekötő egyenesek alkotják.

A megjelenités szempontjából a három dimenziós tárgyak leirására alapvetően két módszer használható. Ezek a tárgyat alkotó felületek megjelenitése, a másik a tárgy drótvázának megjelenitése. Az első módszer megvalósitása nehezebb, de ott lehetőség van takartvonalas eljárások megvalósitására is. A tárgy drótvázának megjelenitése egyszerübb feladat, de bonyolult, sok egyenesből álló tárgy esetén a kép áttekinthetetlen.

A tárgyak megjelenitésére kiválasztott módszer nagymértékben függ attól, hogy milyen hardware eszköz áll rendelkezésünkre. Pont rajzoló grafikus berendezésnél - raszteres display - érdemes a nehezebb utat járni. A vonalrajzoló eszközök lehetőségeikhez a drótvázas ábrázolás igazodik jobban.

A mélység érzékeltetésére több módszert dolgoztak ki. Ezek közül legelterjedtebb a perspektiv ábrázolás, vagyis a tárgy középpontos vetitéssel kapott képének megjelenitése. A perspektiva megpróbálja kiküszöbölni a drótvázas ábrázolás kétértelmüségeit. Hardware függő lehetőség a mélységnek intenzitásváltozással való érzékeltetése. Ami a megfigyelőtől messzebb van, azt halványabb vonallal ábrázoljuk, mint a közelieket.
További lehetőség például sztereoszkóp kép. Ez azt jelenti, hogy a tárgyról kétféle képet készitünk, egyet ahogy jobb szemmel látjuk, és egyet ahogy bal szemmel látjuk. A sztereoszkóp kép nézésére két módszer van. Az egyik, amikor a grafikus display-en másodpercenként 20-szor váltogatjuk a jobb és a bal képet. A másik módszer az, amikor az egyik képet zölddel, a másikat pirossal rajzoljuk egymás mellé szem távolságban. Az igy kapott képet egy piros-zöld szemüvegen keresztül kell nézni.

A dolgozatban drótvázával leirt három dimenziós tárgyak megjelenitésével foglalkozunk. A tárgyak mélységének érzékeltetésére a perspektivát - középpontos vetitést -, valamint a párhuzamos vetitést használtuk. A dolgozatban leirt eljárások a GSS8Ø grafikus rendszer keretein belül kerültek megvalósitásra.

A GSS8Ø vonalalrajzoló grafikus szubrutinrendszer három fő részből áll:

- grafikus output,
- képmanipuláció,
- interaktiv input.

A grafikus output filozófiája a következő:

- először megadjuk a világ leképzéseinek paramétereit,
- majd sorban megadjuk az ábrázolandó tárgyak drótvázát a világ koordinátarendszerben.

A leképzés paramétereit a tárgyhoz, vagyis tárgy egy kitüntetett pontjához (reference point) viszonyitva adjuk meg. A leképési paraméterek a következőek:

- a vetületi sik normálisa (normal),
- a vetületi sik távolsága a hivatkozási ponttól (distancia)
- a felfele vektor (up vector)
- a vetités iránya paralell)
- a vetitési középpont (eye coordinates).

A dolgozat első része a három dimenziós tárgyak ábrázolásának elméletét tartalmazza, a második rész ennek egy lehetséges megvalósitását irja le.
A különböző vetitések szemléltetésére egy kockának az adott vetitéssel előállitott képét használtam, ami tartalmazza a vetitési paramétereket is.

2. HÀROM DIMENZIÒS TÀRGYAK ÀBRÀZOLÀSA

Ez a fejezet a három dimenziós tárgyak két dimenziós képének előállitási módszereit tárgyalja.

2.1 A LEKÉPZÉSI MÓDSZEREK ÁTTEKINTÉSE

Egy három dimenziós tárgy két dimenziós képét ugy kapjuk, hogy a tárgy pontjain vetitő vonalakat bocsátunk keresztül és a vetületi felülettel megkeressük a metszéspontjait. Ebben a dolgozatban olyan vetitésekkel foglalkozunk, amikor a vetitő vonal egyenes, és a vetületi felület sik. Van olyan vetités is, ahol a vetületi felület nem sik, hanem henger vagy kup, például a kartográfiában.

A vetitési középpont az a pont, ahonnan a vetitő egyenesek indulnak. A leképzéseket a vetitési középpontnak a vetületi sikhoz viszonyitott helyzete alapján osztályozzuk.

Ha a vetitési középpont végtelen távol van, akkor párhuzamos vetitésről beszélünk, hisz a vetitő egyenesek párhuzamosak. Ellenkező esetben középpontos vetitésről beszélünk. Középpontos vetités esetén a tárgyról szemléletes, párhuzamos vetitéskor mérethelyes képet kapunk.

A párhuzamos vetitéseket a vetületi sik helyzete alapján osztályozhatjuk. Ha a vetületi sik merőleges a vetités irányára, akkor a vetitést merőlegesnek, ellenkező esetben ferdének nevezzük.

A merőleges vetitésen belül a további osztályozás a vetitendő tárgy és a vetités irányának kapcsolata alapján történik. Ha a vetitendő tárgy valamelyik főtengelye, azaz a tárgyhoz rögzitett koordinátarendszer egyik tengely párhuzamos a vetités irányával, akkor merőleges vetületet kapunk. Ha a vetitendő tárgy egyik főtengelyével sem párhuzamos a vetités iránya, akkor axonometrikus vetitésről beszélünk.

Az axonometrikus vetitéseket a tárgy helyzete alapján tovább osztályozhatjuk. Ha a tárgy mindhárom főtengelye azonos szöget zár be a vetületi sikkal, akkor isometriáról, ha két tengelye akkor dimetriáról, ha pedig a három főtengely különböző szögeket zár a vetületi sikkal, akkor trimetriáról beszélünk.

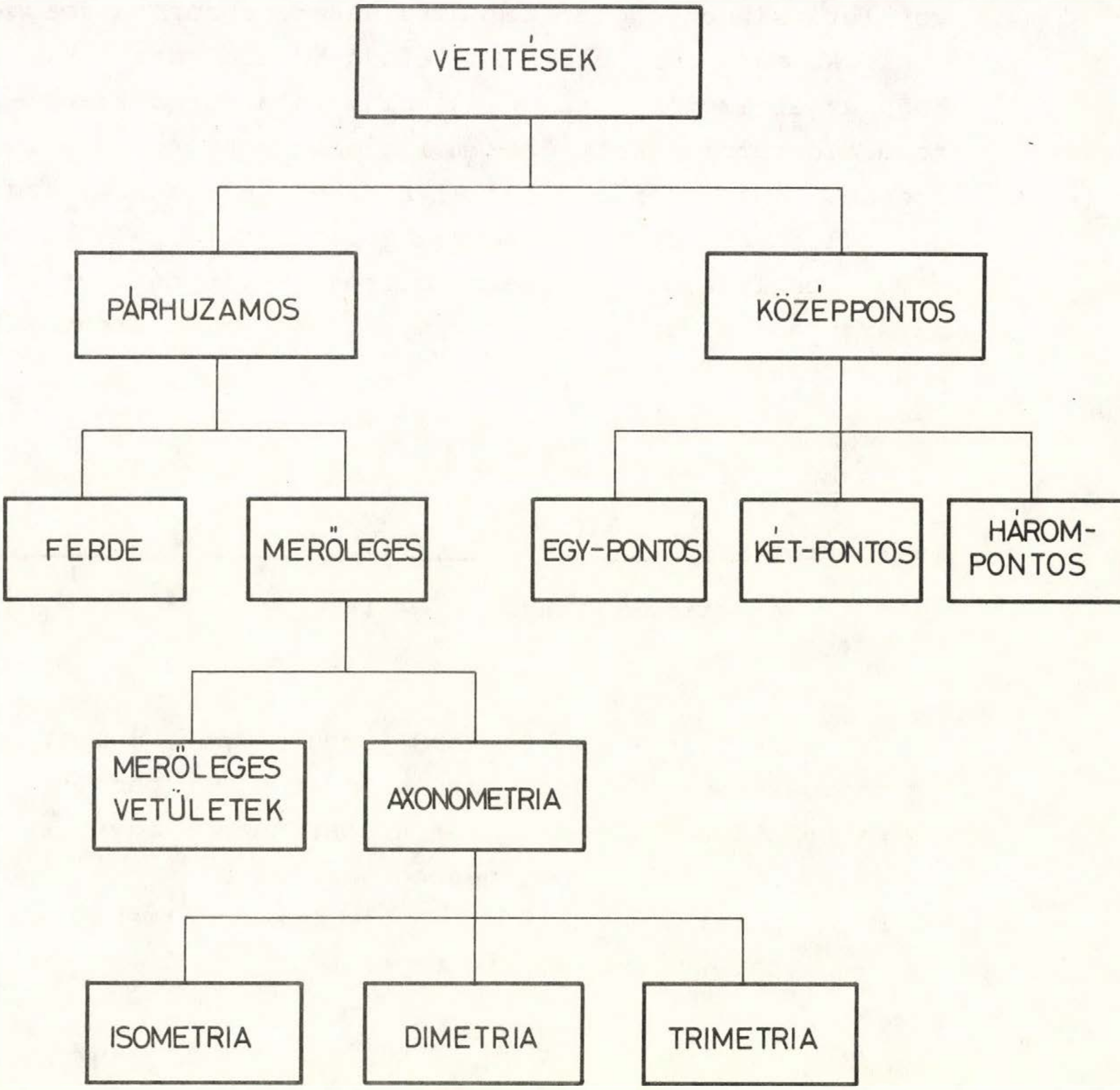
A ferde vetitések közül kétféle vetitésnek van kitüntetett szerepe. Mindkettőnél a vetületi sik párhuzamos a tárgy két főtengelyével. Ha a vetités iránya 45^{o} -os szöget zár be a vetületi sikkal, a vetitést cavalier-nek, ha 64^{o} -os szöget zár be, akkor cabinetnek nevezzük.

Áttérve a középpontos vetitésre, itt a vetületi sik és a tárgy helyzete alapján osztályozhatunk. Ha a vetületi sik a tárgy főtengelyei közül csak egyet metsz, akkor egy-pontos perspektiváról, ha két tengelyt metsz, akkor két-pontos perspektiváról, s ha mindhárom tengelyt metszi, akkor három-pontos perspektiváról beszélünk.

A vetitésekről az összefoglaló táblázatot az 1. ábra tartalmazza.

Egy tárgy képének az előállitásakor kétféle stratégiát követhetünk. Az egyik az, hogy a tárgyat forgatjuk, és a vetületi sik, valamint a vetités iránya, illetve a vetitési középpont rögzitett. A másik az, hogy a tárgy rögzitett, és körüljárjuk, azaz a vetületi sikot valamint a vetités irányát, illetve a vetitési középpontot változtatjuk. A két stratégia között az elkészült kép szempontjából semmi különbség nincs. Különbség csak a paraméterek megadása szempontjából van. Mi a második esetet alkalmazzuk, azaz a tárgy mozdulatlan és a kivánt képnek megfelelően változtatjuk a vetületi sikot és a vetités irányát, illetve a vetitési középpontot.

A transzformációk tárgyalása, és megvalósitása során különféle koordinátarendszerek jöhetnek szóba. A tárgyak és az adatok a világ koordinátarendszerben adottak. A tárgy koordinátarendszer a tárgyhoz rögzitett koordinátarendszer. Ennek jelentősége az axonometriánál és a középpontos vetitésnél van. Beszélhetünk a vetületi sikhoz rögzitett koordinátarendszerről, melynek két tengelye a vetületi sikban van, harmadik tengelye a vetületi sik normál vektorával párhuzamos. Párhuzamos vetitéskor a vetületi sokhoz rögzitett koordinátarendszerrel azonos állásu, de a vetitési középpontba eltolt koordinátarendszert szemkoordinátarendszernek nevezzük.



1. ábra

Összefoglaló táblázat a vetítésekről

2.2 A VETÜLET MEGHATÁROZÁSA AZ EGYES LEKÉPZÉSEKNÉL

Mind a párhuzamos, mind a középpontos vetitéskor a vetületi sikhoz rögzitett koordinátarendszerben dolgozunk. Az már a megvalósitás feladatkörébe tartozik, hogy az ábrázolandó tárgy adatait, valamint a transzformáció paramétereit átszámolja ebbe a koordinátarendszerbe. Tehát ezen geometriai részben feltesszük, hogy a vetületi sik a z tengelyre merőleges (x,y) sik, és a vetités iránya, illetve a vetitési középpont, valamint a tárgy adatai ebben az (x,y,z) koordinátarendszerben adottak.

2.2.1 Párhuzamos vetités

Adott a vetületi sik: $z = 0$

a vetités iránya: $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$.

Keressük $P = (p_x, p_y, p_z)^T$ pont képét, melyet párhuzamos vetitéssel kapunk. Azaz a P ponton keresztül a vetités irányával párhuzamos egyenes és a vetületi sik metszéspontját, ez a $P' = (p'_x, p'_y, p'_z)^T$ pont. A P ponton átmenő $\underline{v}$-vel párhuzamos egyenes egyenlete:

$$\underline{e} = P + \lambda\underline{v} \qquad \text{ahol} \qquad \lambda \in R$$

Az egyenlet koordinátákra kiirva:

$$x = p_x + \lambda\, v_x$$
$$y = p_y + \lambda\, v_y$$
$$z = p_z + \lambda\, v_z$$

Keressük ezen egyenes és $z = 0$ sik metszéspontját.

$$p_z + \lambda v_z = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{p_z}{v_z}.$$

Tehát:

$$p'_x = p_x - p_z \frac{v_x}{v_z}$$

$$p'_y = p_y - p_z \frac{v_y}{v_z}$$

$$p'_z = 0$$

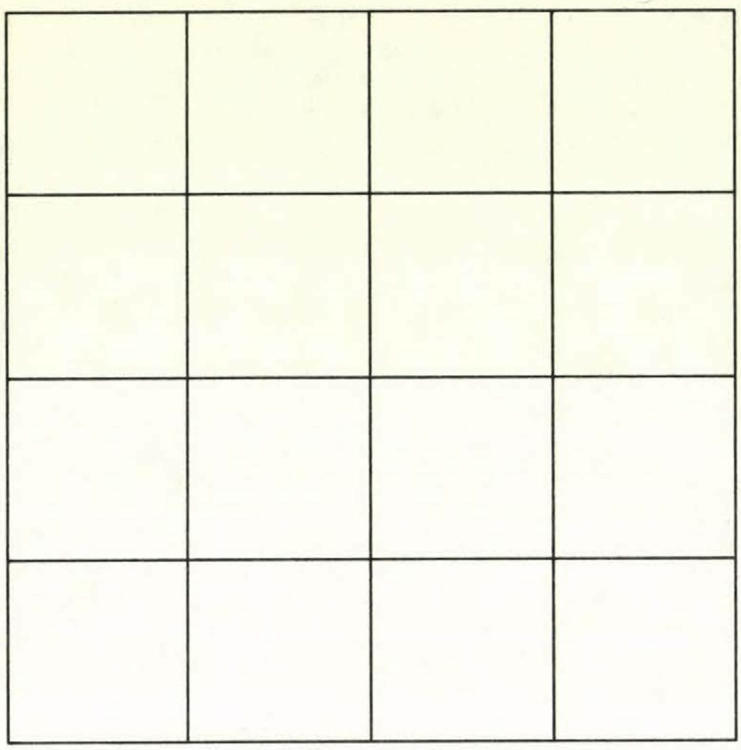
A párhuzamos vetitéseket először a vetités irányának a vetületi sikhoz viszonyitott állása alapján osztályozhatjuk. Igy beszélhetünk merőleges és ferde vetitésekről.

MERŐLEGES VETITÉS

A merőleges vetités még tovább osztályozható aszerint, hogy a vetületi sik merőleges-e a tárgy valamelyik főtengelyére. Ha igen, akkor a tárgyról merőleges vetületet kapunk, különben a vetitést axonometriának nevezzük.

MERŐLEGES VETÜLET

Egy tárgy képei közül a merőleges vetület előállitása a legegyszerübb. Egy tárgynak hatféle merőleges vetülete van.
Előnye, hogy a tárgy egy oldalának mérethelyes képét adja, a tárgy megszerkesztése ezekből a legegyszerübb. Hátránya, hogy a tárgy térbeli képe igen nehezen képzelhető el ezekből a nézetekből. Elsősorban mérnöki rajzoknál használják.



REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 - 1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
0 0 0 0 1 0

A leképzés paramétereinek beállitása:

	vetületi sik egyenlete	vetités iránya
elölnézet:	$z = 0$	$\underline{v} = -\underline{z}$
oldalnézet:	$x = 0$	$\underline{v} = -\underline{x}$
felülnézet:	$y = 0$	$\underline{v} = -\underline{y}$
hátulnézet:	$z = 0$	$\underline{v} = \underline{z}$
oldalnézet:	$x = 0$	$\underline{v} = \underline{x}$
alulnézet:	$y = 0$	$\underline{v} = \underline{y}$

ahol $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ a tárgy főtengelyei.

AXONOMETRIA

Az axonometria a vetületi sik, és a tárgy főtengelyei által bezárt szögek alapján osztályozható. Ha ez a három szög megegyezik, akkor a vetités isometria, ha két szög megegyezik dimetria, ha mindhárom szög különböző, akkor trimetria.

A vetületi siknak a tárgy főtengelyeivel bezárt szögei ekvivalenciába hozhatók a levetititett tengelyeken lévő rövidülésekkel, abban az értelemben, hogy az egyik a másikból számolható.
Az axonometria előnye, hogy egyszerre három szomszédos oldalnak a képét adja, ezzel a térbeli szemléletet elősegiti. A térbeli tárgy könnyen szerkeszthető axonometrikus rajz alapján.

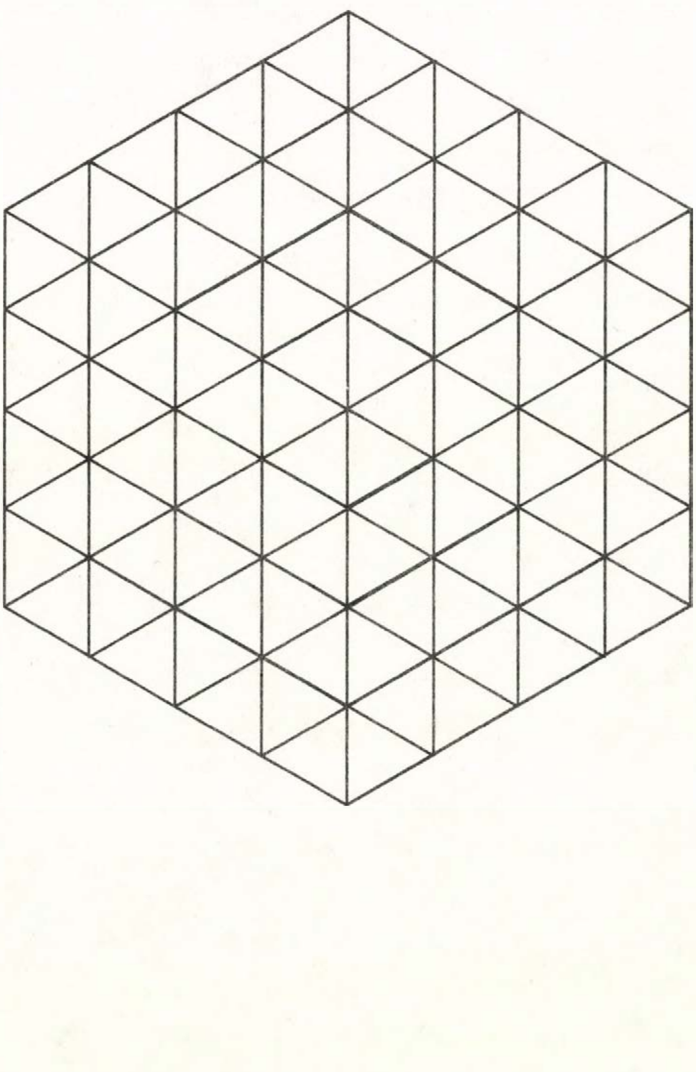
A vetités hátránya, hogy nem ad egyetlen oldalról sem mérethelyes képet.
Elsősorban katalógus illusztrációkra, géptervezésnél a merőleges vetületek mellett használják.

F e l a d a t: a tárgy főtengelyeinek és a rövidülési tényezőknek az ismeretében a vetületi sik meghatározása.

ISOMETRIA

A vetületi sik a tárgy főtengelyeivel azonos szöget zár be, azaz a vetités után mindhárom tengelyen azonos a rövidülés.

Meghatározzuk a három főtengely irányába eső egységvektorok végpontjâit.
A vetületi sik ezen három ponton keresztül menő sik lesz, a vetités iránya pedig ezen sik normál vektora.



REF POINT

0 0 0 0 0 0

NORMAL

-0 5 -0 5 -0 5

DISTANCE

0 0

UP VECTOR

0 0 1 0 0 0

PARALELL

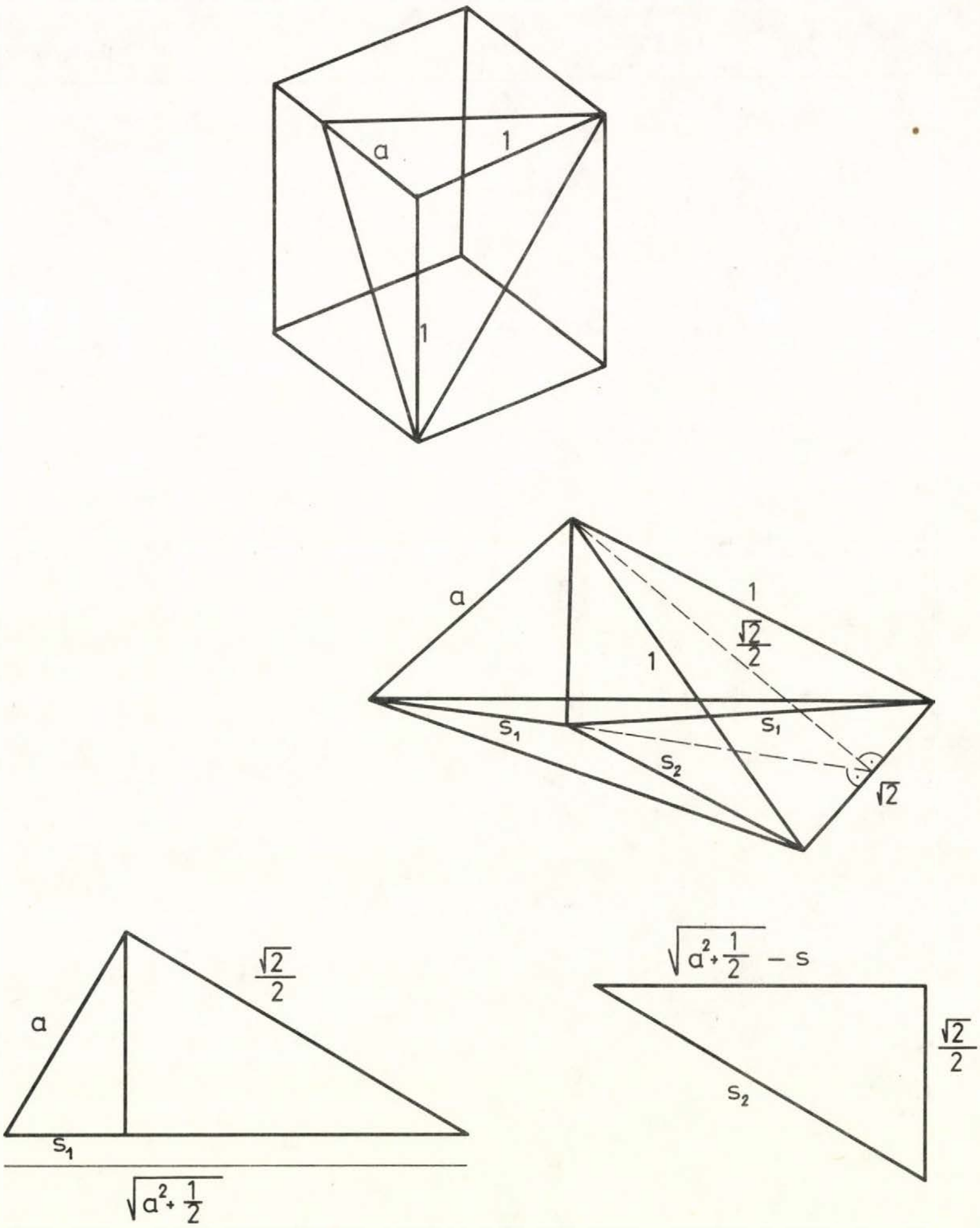
1 0 1 0 1 0

DIMETRIA

A vetületi sikkal a tárgy két főtengelye azonos szöget zár be, azaz a vetités után két tengelyen azonos lesz a rövidülés.
A tárgy három főtengelyének és a rövidülési tényezőnek az ismeretében szeretnénk meghatározni a vetületi sikot és a vetités irányát. Bevezetünk egy segédábrát. (2. ábra) A vetületi sik egyenletét most is három pontja ismeretében akarjuk felirni.
A feladatot először nézzük visszafelé. Ha azt a sikor tekintjük, amelyiket ugy kapjuk, hogy két főtengelyen egységet, a harmadikon pedig $\underline{a}$-t megyünk előre, akkor az erre a sikra való merőleges vetités során $\frac{s_1}{a}$, s_2, s_2 lesznek a rövidülési tényezők.
A derékszögü háromszögekből nagyon egyszerüen adódnak:

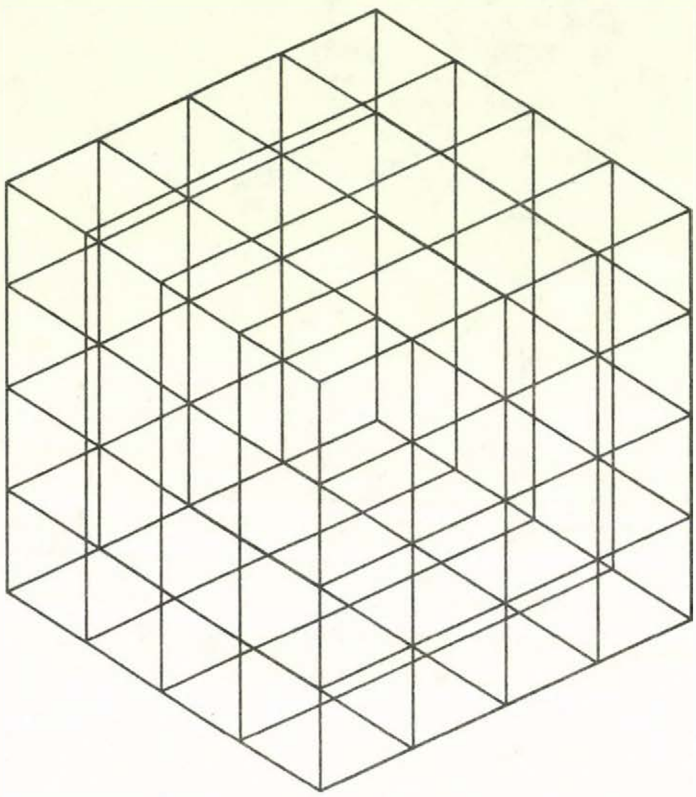
$$\frac{s_1'}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 0,5}} \qquad s_2 = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2a^2 + 1}}$$

Tehát az eredeti feladatra visszatérve, akár az egyik, akár a másik rövidülési tényező ismeretében $\underline{a}$ meghatározható. $\underline{a}$-ból számolható a sikot meghatározó három pont. A vetületi sik és vetités irányának meghatározása ezek után ugyanugy történik, mint az isometriánál.



2. ábra

A vetületi sík meghatározása dimetriával



REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
-0 6 -0 5 -0 5

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
1 0 0 8 0 8

TRIMETRIA

A vetületi sikkal a tárgy főtengelyei különböző szögeket zárnak be, azaz a vetités után a rövidülés más és más mindhárom tengelyen.
A tárgy főtengelyeinek és a rövidülési tényezők ismeretében a vetületi sik egyenletét és vetitési irányát kell meghatározni.
Az előzőekhez hasonló segéd ábrát használunk fel megint. (3. ábra)

a és b meghatározásánál az a probléma, hogy nem az ábrán szereplő s_2, s_3 rövidüléseket ismerjük, hanem s_x, s_y-t.
Kapcsolat köztük:

$$\frac{a}{s_2} = \frac{1}{s_x} \qquad \frac{b}{s_3} = \frac{1}{s_y}$$

Először számoljuk ki a harmadik rövidülési tényezőt, majd a tetraéder magasságát.

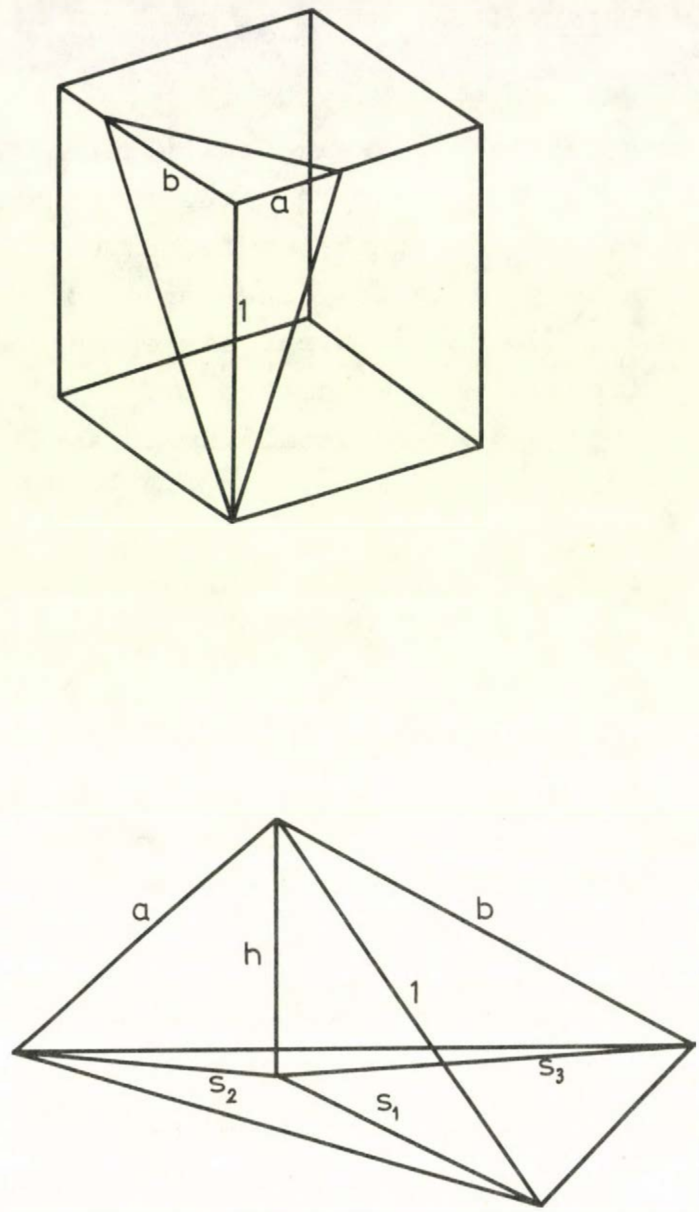
$$s_z = \sqrt{2 - s_x^2 - s_y^2}$$

$$h = \sqrt{1 - s_z^2}$$

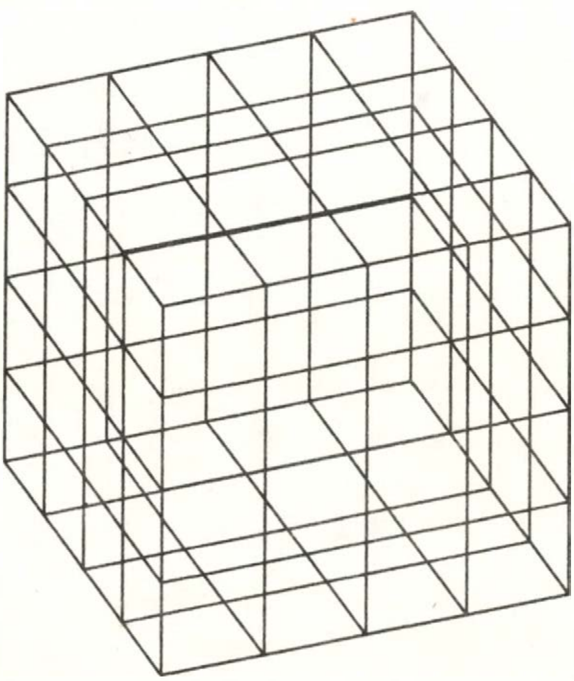
Visszatérve az előző képletre, és azt továbbrendezve megkapjuk s_2-t, majd a-t.

$$s_x = \frac{s_2}{a} = \frac{s_2}{\sqrt{s_2^2 + h^2}} \Rightarrow \quad s_2 = \sqrt{\frac{s_x^2\, h^2}{1 - s_x^2}}$$

$$a = \sqrt{s_2^2 + h^2}$$



3. ábra
A vetületi sík meghatározása trimetriánál



REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
-0 7 -0 5 -0 3

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
0 5 0 3 0 2

Hasonlóan a másikra is.

$$s_y = \frac{s_3}{b} = \frac{s_3}{\sqrt{s_3^2 + h^2}} \Rightarrow \quad s_3 = \sqrt{\frac{s_y^2 \; h^2}{1 - s_y^2}}$$

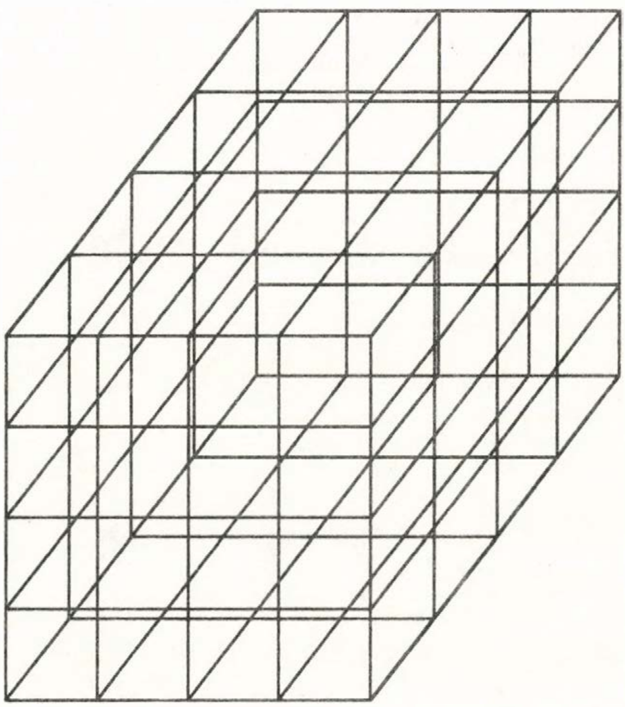
$$b = \sqrt{s_3^2 + h^2}$$

FERDE VETITÉS

A ferde vetités lényege, hogy a vetités iránya nem merőleges a vetületi sikra, viszont a tárgy egyik főtengelye merőleges a vetületi sikra. Igy ez a vetités egyesiti a merőleges vetületek és az axonometria jó tulajdonságait.
A ferde vetités előnye, hogy a tárgynak egyszerre három szomszédos oldaláról kapunk képet, méghozzá ugy, hogy az egyik oldal mérethelyes.
Például várostérképek készitésénél használják.

F e l a d a t: a tárgy főtengelyeinek ismeretében a vetületi sik meghatározása.
A vetületi sik normálisa bármely főtengely lehet.

A ferde vetitések közül kettőnek van kitüntetett szerepe.
Cavalier a vetités, ha egyik tengelyen sincs rövidülés, cabinet, ha azon tengelyen, amelyre merőleges a vetületi sik, egy-kettedes a rövidülés.



REF POINT

0 0 0 0 0 0

NORMAL

0 0 0 0 -1 0

DISTANCE

0 0

UP VECTOR

0 0 1 0 0 0

PARALELL

1 0 1 3 1 4

2.2.2 Középpontos vetités

Adott a vetületi sik: $z = 0$,

a vetitési középpont: $C = (0, 0, -a)$.

Keressük $P = (p_x, p_y, p_z)$ pont képét a vetületi sikon, melyet középpontos vetitéssel kapunk.
A P pont képe az a $P' = (p'_x, p'_y, p'_z)$ pont lesz, amely a P pontot a vetitési középponttal összekötő egyenes és a vetületi sik metszéspontja.

Két adott ponton P^{-n} és C-n átmenő egyenes egyenlete: $\underline{e} = C + \lambda(P - C) \quad \lambda \in R$
Ez az egyenlet koordinátákra kiirva:

$$x = \lambda\, p_x$$

$$y = \lambda\, p_y$$

$$z = -a + \lambda\,(p_z + a)$$

Az egyenes $z = 0$ sikkal való metszéspontjának meghatározása:

$$z = -a + \lambda(p_z + a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a}{p_z + a}$$

$$p'_x = \frac{a}{p_z + a}\, p_x$$

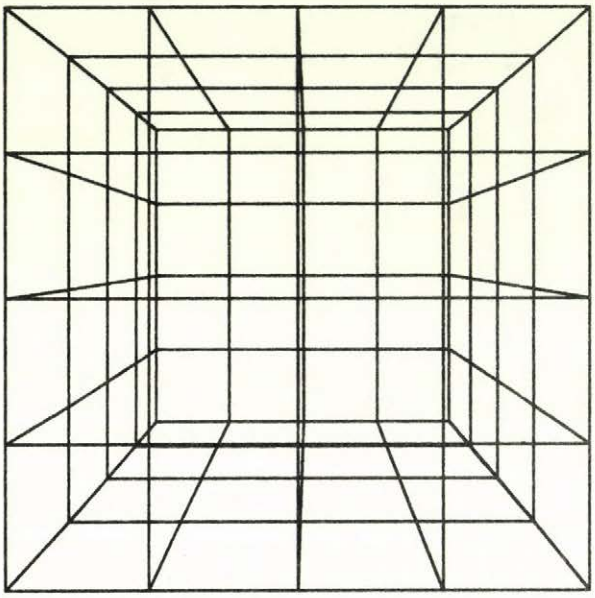
$$p'_y = \frac{a}{p_z + a}\, p_y$$

$$p'_z = a$$

A középpontos vetités adja az ember számára legszemléletesebb képet.
A középpontos vetités képét az különbözteti meg egy párhuzamos vetités során kapott képtől, hogy a párhuzamos vonalak összetartanak, nem egyforma a

rövidülés, ami távolabb van a vetitési középponttól az kisebb. Csak azok az egyenesek maradnak párhuzamosak, melyek a vetületi sikkal párhuzamosak. A többi párhuzamos egyenes metszi egymást, ezeket a pontokat eltünési pontoknak nevezzük.

A középpontos vetitéseket aszerint osztályozzùk, hogy hogy a vetületi sik a tárgy főtengelyei közül hányat metsz. Igy beszélhetünk egy-, kettő-, és három-pontos perspektiváról.



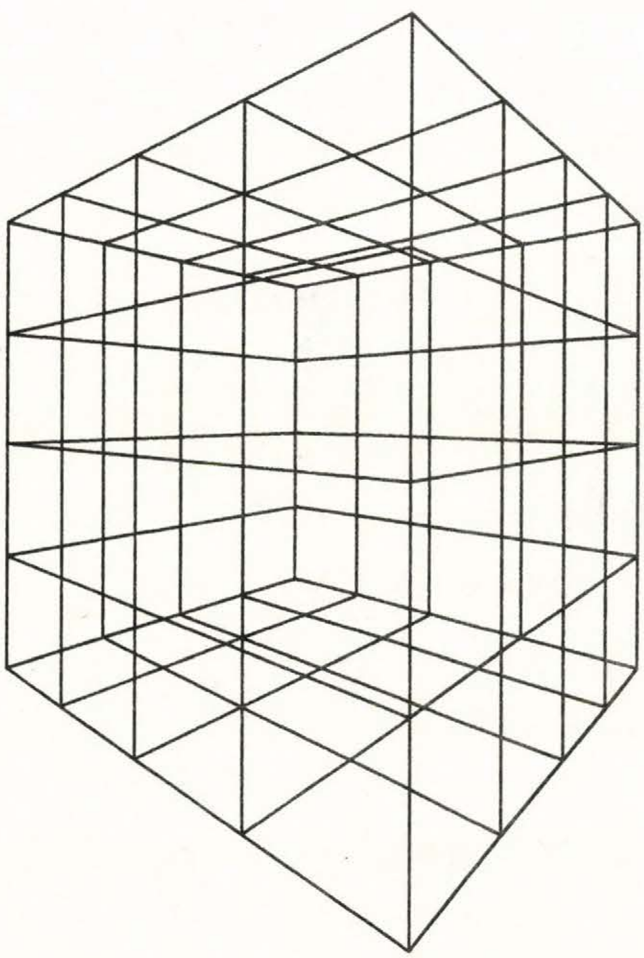
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 -1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
2 0 -1 6 8 0



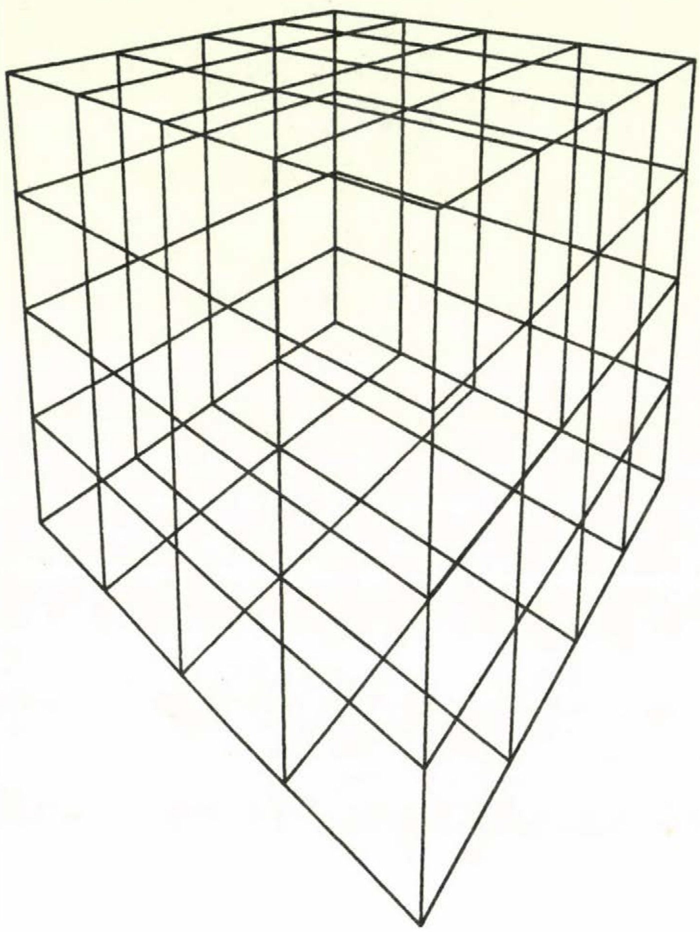
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
-0 7 0 0 -0 7

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
5 2 -1 6 6 2



REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
-0 6 -0 1 -0 7

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
5 6 1 4 6 6

2.3 HOMOGÉN KOORDINÁTÁK ÉS HOMOGÉN LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

Egy lineáris térből lineáris térbe képező f operátort, homogén lineáris leképzésnek nevezzük, ha

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathrm{L}$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in \mathrm{L}, \quad \lambda \in \mathrm{R}$$

Tetszőleges n dimenziós térben értelmezett homogén lineáris leképezés megfeleltethető egy $n \times n$ -es mátrixszal való szorzásnak.
A geometriai transzformációk - a nagyitás, forgatás, tükrözés - az eltolás kivételével homogén lineáris leképzések. Tehát ezeknek megfeleltethetünk egy-egy mátrixot. De az egységes tárgyalás és kezelés miatt szeretnénk az eltolást is mátrixszal beirni. Ez n dimenziós térben csak $(n+1) \times (n+1)$ -es mátrixszal lehetséges. Ahhoz, hogy az n dimenziós pontokon végre tudjuk hajtani a mátrixszal leirt geometriai transzformációkat, a pontokat $n + 1$ koordinátával kell jellemezni. Ezt nevezzük homogén koordinátának.
Egy $P = (X, Y, Z)$ három dimenziós pont homogén koordinátás megfelelője.

$$Q = (W \cdot X, W \cdot Y, W \cdot Z, W) \qquad \forall W \in R.$$

2.3.1 Homogén koordináták használata

PONT

megadása: $P = (x, y, z)^T$

1. két pont $P = (p_x, p_y, p_z)^T$
és
$Q = (q_x, q_y, q_z)^T$

távolsága: d

$$d^2 = (p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2 + (p_z - q_z)^2$$

Ugyanez homogén koordinátákkal felirva, ha

$P = (p_w p_x, p_w p_y, p_w p_z, p_w)$

és

$Q = (q_w q_x, q_w q_y, q_w q_z, q_w)$

$$d^2 = \left[\frac{p_x}{p_w} - \frac{q_x}{q_w}\right]^2 + \left[\frac{p_y}{p_w} - \frac{q_y}{q_w}\right]^2 + \left[\frac{p_z}{p_w} - \frac{q_z}{q_w}\right]^2 =$$

$$= \frac{(q_w p_x - p_w q_x)^2 + (q_w p_y - p_w q_y)^2 + (q_w p_z - p_w q_z)^2}{q_w^2\ p_w^2}$$

Hasonlóan irható fel a többi képlet homogén koordinátás megfelelője is.

VEKTOR

megadása:

végpontjával $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$

iránycosinusaival és hosszával

$$\underline{v} = (r\cos\alpha, r\cos\beta, r\cos\gamma)^T$$

1. két vektor által bezárt szög:

legyen adott a két vektor az iránycosinusai által

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{bmatrix}$$

jelöljünk ki egy-egy pontot az egyeneseken

$$P_1 \in \underline{v}_1 \quad P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos\alpha_1 \\ y_1 &= r_1 \cos\beta_1 \\ z_1 &= r_1 \cos\gamma_1 \end{aligned}$$

$$P_2 \in \underline{v}_2 \quad P_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_2 &= r_2 \cos\alpha_2 \\ y_2 &= r_2 \cos\beta_2 \\ z_2 &= r_2 \cos\gamma_2 \end{aligned}$$

a két pont távolsága: d

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

A cosinus tétel alapján kiszámolható a két vektor által bezárt szög

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\omega$$

$$\cos\omega = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2} =$$

$$= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

2. két vektor egymásra merőleges:

ha skalárszorzatuk 0

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

$$v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z = 0$$

3. két vektor párhuzamos egymással:

ha vektorális szorzatuk $\underline{0}$

$$\underline{v} \times \underline{w} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \underline{x} & \underline{y} & \underline{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0$$

$$v_y\, w_z - v_z\, w_y = 0$$

$$v_x\, w_z - v_z\, w_x = 0$$

$$v_x\, w_y - v_y\, w_x = 0$$

EGYENES

megadása: két pontjával P_1 , P_2

$$\underline{e} = P_1 + t(P_2 - P_1) \qquad t \in R$$

$$[P_1, P_2 - P_1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

az egyenes paraméteres egyenlete

megadása: egy pontjával és irányvektorával P, $\underline{v}$

$$\underline{e} = P + t\,\underline{v}$$

$$[P, \underline{v}] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

az egyenes paraméteres egyenlete

1. egyenes normálvektorának meghatározása:
   - felveszzünkegy pontot az egyenesen kivül, jelöljük ezt P-vel,
   - meghatározzuk a ponton átmenő, egyenesre merőleges sikot, jelöljük $\underline{m}$-el,
   - kiszámoljuk $\underline{m}$ sik és az egyenes metszéspontját, jelöljük Q-val,
   - az egyenes normálvektora a P és Q pontokon átmenő egyenes irányvektora lesz.

2. két egyenes által bezárt szög:
   az egyenes irányvektorai által bezárt szög

3. két egyenes párhuzamos egymással:
   ha irányvektoraik párhuzamosak

4. két egyenes merőleges egymásra:
   ha irányvektoraik merőlegesek

5. adott $P = (x, y, z)$ pont eleme az egyenesnek:

ha a $[P_1, \underline{v}] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = P$ egyenletrendszernek

létezik megoldása

6. két egyenes metszéspontját

$a[P_1, \underline{v}_1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = [P_2, v_2] \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ egyenletrendszer

megoldása szolgáltatja.

7. pont és egyenes távolságát
a pont és az egyenes normálvektorának skalár szorzata szolgáltatja.

S I K

ábárzolása: általános egyenletének együtthatóival

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

megadása:

/i/ egy pontjával $P = (x_o, y_o, z_o)$ és normál-

vektorával $\underline{n} = (n_x, n_y, n_z)$

jelöljük $Q = (x, y, z)$ -val a sik futó pontját akkor a sik egyenlete:

$$\underline{n}\ (Q - P) = 0$$

$$n_x\ (x-x_o) + n_y(y-y_o) + n_z\ (z-z_o) = 0$$

$$n_x x + n_y y + n_z z + (n_x x_o + n_y y_o + n_z z_o) = 0$$

/ii/ három pontjával $P = (p_x, p_y, p_z)$,
$Q = (q_x, q_y, q_z)$,

$R = (r_x, r_y, r_z)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \\ q_x & q_y & q_z & 1 \\ r_x & r_y & r_z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$a = p_y\ (q_z-r_z) + q_y(r_z-p_z) + r_y\ (p_z-q_z)$$

$$b = -\ p_x\ (q_z-r_z) - q_x\ (r_z-p_z) - r_x\ (p_z-q_z)$$

$$c = p_x\ (q_y-r_y) + q_x\ (r_y-p_y) + r_x(p_y-q_y)$$

/iii/ tengelymetszeteivel (A, B, C)

az egyenes tengelymetszetes egyenlete:

/iii/ tengelymetszeteivel (A, B, C)

az egyenes tengelymetszetes egyenlete:

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

$$BCx + ACy + ABz - ABC = 0$$

1. a sik általános egyenletéből a sik normál vektorának meghatározása:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\underline{n} = (a, b, c)$$

2. két sik által bezárt szög:

a két sik normálvektorai által bezárt szög

3. pont illeszkedik a sikra:

ha a pont és a sik normálvektorának skalárszorzata 0.

4. pont távolsága a siktól:

a pont és a sik normálvektorának skalár szorzata

5. sik és egyenes által bezárt szög:

az egyenes irányvektora és a sik normálvektora által bezárt szög 90°ra kiegészitő szöge.

6. három sik metszéspontja:

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \underline{s}_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

egyenletrendszer megoldása

7. egyenes és sik metszéspontja:

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \qquad \underline{e} = P + t\underline{v}$$

$$a\ (p_x + tv_x) + b(p_y + tv_y) + c(p_z + tv_z) + d = 0$$

egyenlet megoldása

8. adott ponton átmenő egyenesre merőleges sik:

az egyenes irányvektora lesz a sik normálvektora

2.3.2 Három dimenziós transzformációk leirása mátrixszal.

A három dimenziós transzformációk egy-egy négyszer négyes mátrixszal reprezentálhatók. Transzformációk sorozata összekapcsolható, a transzformációs mátrixok összeszorozhatók egyetlen mátrixszá.
Egy tetszőleges három dimenziós pont homogén koordinátás megfelelője egy négy elemü oszlopvektor. Egy pont transzformálása tehát egy mátrixvektor szorzás.

ELTOLÁS

pont eltolása $\underline{t} = (t_x, t_y, t_z)$ vektorral

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SKÁLÁZÁS

pont skálázása x irányban s_x, y irányban s_y, z irányban s_z skalárra.

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

FORGATÁS

1. pont elforgatása x tengely körül α szöggel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & sin\alpha & 0 \\ 0 & -sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. pont elforgatása y tengely körül β szöggel

$$\begin{bmatrix} cos\beta & 0 & -sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin\beta & 0 & cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. pont elforgatása z tengely körül γ szöggel

$$\begin{bmatrix} cos\gamma & sin\gamma & 0 & 0 \\ -sin\gamma & cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. pont elforgatása adott egyenes körül ρ szöggel

ahol a = egyenes irányvektorának irány cosinusai

$(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$

- koordinátarendszer transzformálása ugy, hogy x tengely fedésbe kerüljön az egyenes irányvektorával: ez elérhető

  egy olyan eltolással, hogy az egyenes az origón menjen keresztül

  egy y tengely körüli ω szöggel való elforgatással

$$\cos\omega = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\gamma}}$$

és egy z tengely körüli Ψ szöggel való elforgatással

$$\cos\Psi = \cos\beta$$

- x tengely körül ρ szöggel való elforgatás.
- végül a koordinátarendszer visszatranszformálása eredeti helyére

TÜKRÖZÉS

1. origóra való középpontos tükrözés:

   ez ekvivalens egy x tengely, és egy y tengely körüli 180^o-os elforgatásokkal.

2. adott pontra való középpontos tükrözés:

   ez ekvivalens az adott pontba való eltolással, ott egy origóra való középpontos tükrözéssel, és egy origóba való visszatolással.

3. adott koordinátatengelyre való tökrözés:

   ez ekvivalens az adott koordinátatengely körüli 180^o-os elforgatással.

4. adott egyenesre való tükrözés:

   ez ekvivalens egy olyan transzformációval, ami a koordinátarendszer x tengelyét fedésbe hozza az adott egyenessel, az x tengelyre tükröz, és végül a koordinátarendszert visszatranszformálja az eredeti helyére.

5. koordináta sikokra való tükrözés:

/i/ x tengelyre merőleges sikra való vetités:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

/ii/ y tengelyre merőleges sikra való vetités:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

/iii/ z tengelyre merőleges sikra való vetités:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. adott sikra való tükrözés:

ez ekvivalens egy olyan transzformációval, mely a koordinátarendszer egyik tengelyét feledésbe hozza a sik normálvektorával, az adott koordinátasikra tükröz, valamint a koordinátarendszert visszatranszformálja eredeti helyére.

PÁRHUZAMOS VETITÉS

a z tengelyre merőleges sikra, a vetités iránya $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{v_x}{v_z} & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{v_y}{v_z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

KÖZÉPPONTOS VETITÉS

a z tengelyre merőleges sikra, a vetitési középpontot $C = (0, 0, c)$

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

KÉT DERÉKSZÖGÜ KOORDINÁTARENDSZER EGYMÁSSAL FEDÉSBE HOZÁSA

1. Adott: három pontnak a koordinátái mindkét rendszerben

$$P_x = (p_x, p_y, p_z) \qquad P_u = (p_u, p_v, p_w)$$
$$Q_x = (q_x, q_y, q_z) \qquad Q_u = (q_u, q_v, q_w)$$
$$R_x = (r_x, r_y, r_z) \qquad R_u = (r_u, r_v, r_w)$$

Keressük azt a háromszor hármas mátrixot, T -t, amelyre igaz

$$T\,P_x = P_u$$

$$T\,Q_x = Q_u$$

$$T\,R_x = R_u$$

Ez kilenc egyenletet és kilenc ismeretlent jelent, tehát a feladat egyértelmüen megoldható.

2. Adott: az u, v, w rendszer egységvektorai az x, y, z rendszerben.
Ekkor a T transzformációs mátrix, mely az x, y, z rendszerből az u, v, w rendszerbe való áttérést biztositja a következő:

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

3. Adott: az uj rendszer tengelyei rendre mekkora szöget zárnak be a régi rendszer x,y illetve z tengelyével

az u, v, w tengelynek x tengellyel α_u, α_v, α_w, az y tengellyel β_u, β_v, β_w, a z tengellyel pedig γ_u, γ_v, γ_w szöget zárnak be.

az áttérés mátrixa:

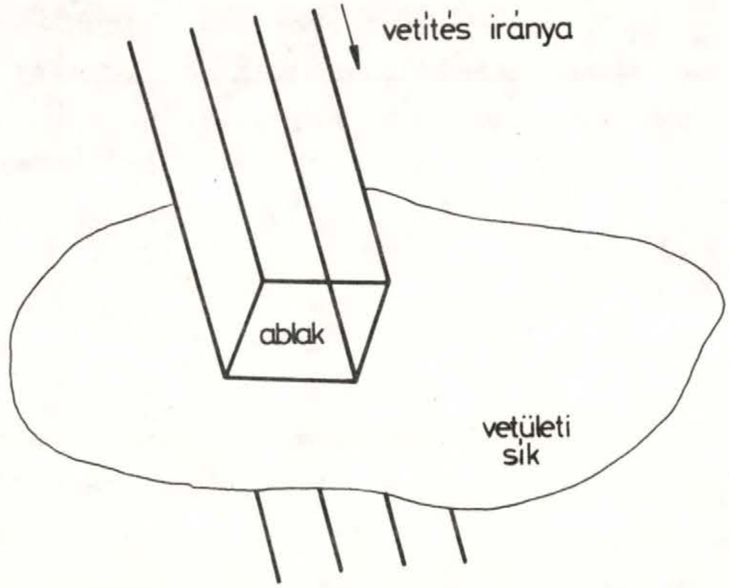
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_u & \cos\beta_u & \cos\beta_u \\ \cos\alpha_v & \cos\beta_v & \cos\gamma_v \\ \cos\alpha_w & \cos\beta_w & \cos\alpha_w \end{bmatrix}$$

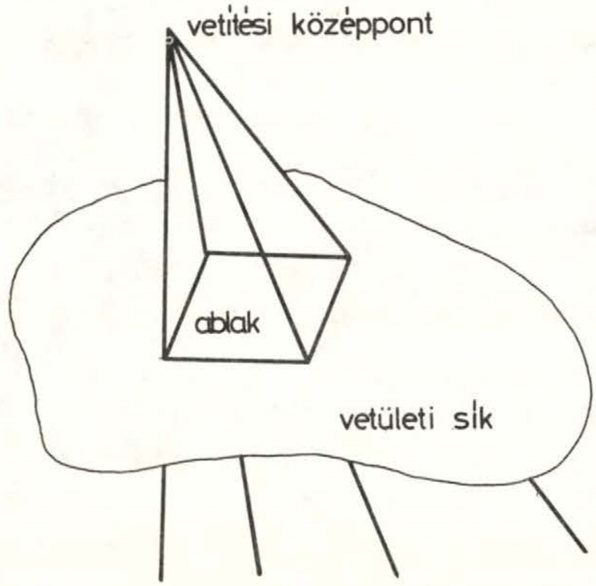
3. KÈPKIVÀGÀSI ALGORITMUSOK

A három dimenziós tárgyak grafikus megjelenitő eszközön való előállitásának csupán egy lépése a tárgy képének előállitása a vetületi sikon. Még azt is meg kell mondani, hogy a tárgy képének mely részét kivánjuk látni. Ennek megadására szolgál a vetületi sikon kijelölt téglalap, az ugynevezett ablak.

A képkivágási algoritmusnak az a célja, hogy csak azoknak a tárgyaknak a képeit jelenitsük meg, amelyek valóban láthatók. Mit jelent az, hogy egy tárgy látható? Két dimenziós esetben azt, hogy a tárgy az ablak által határolt területen belül helyezkedik el. Három dimenziós esetben pedig azt jelenti, hogy a tárgy a képtéren belül van. A képteret a vetületi sikon kijelölt ablak és a vetités iránya, illetve a vetitési középpont határozza meg. A képtér tehát egy végtelen hasáb, vagy egy végtelen gula.
Három dimenziós esetben beszélhetünk mélység vágásról is, amikor a képteret két, a vetületi sikkal párhuzamos sikkal elmetszük. Ekkor véges tartományra, a vetitéstől függően egy paralellepipedonra, illetve csonka gulára vágunk.
Három dimenziós esetben még egy, az előzőektől teljesen eltérő vágás létezik. Ennél a módszernél egy téglatest segitségével adjuk meg a tárgy ábrázolandó részét. Azaz a tárgynak azon részét jelenitjük meg, ami ebbe a téglatestbe esik.

Három dimenziós tárgyak ábrázolásánál miért kell két dimenziós vágásról is beszélnünk? Azért, mert a vágási algoritmust elvégezhetjük a három dimenziós tárgyon a transzformáció előtt, de elvégezhetjük a már három dimenzióból két dimenzióba transzformált képén is. Az első eljárás előnye az, hogy a transzformációt csak a ténylegesen látható pontokra kell elvégezni, hátránya viszont az, hogy sokkal számitásigényesebb.





4. ábra

A képtér párhuzamos illetve középpontos vetítésnél

A vágási algoritmusok lényegében két részből állnak. Először meg kell határozni, hogy az adott szakasz teljesen látható, teljesen láthatatlan, vagy részben látható. A második lépés a részben látható szakaszok látható részeinek meghatározása.

3.1 KÉT DIMENZIÓS KÉPKIVÁGÁS

Adott a sikon egy téglalap (az ablak) a határoló egyeneseivel. Feladat: meghatározni tetszőleges, két végpontjával megadott szakasz téglalapba eső részét.

Hosszabitsuk meg a téglalap éleit! Igy a sikot kilenc sikrészre bontottuk. A téglalapon kivüli részek megkülönböztetésére a metszéspontok kiszámitása miatt van szükség.
Rendeljünk a sikrészekhez egy-egy négy bites kódot.
A kód első bitje jelölje azt, hogy a téglalaptól balra, második bitje, hogy jobbra van. Hasonlóan a harmadik bit jelölje azt, hogy a sikrész a téglalap alatt, negyedik bitje, hogy fölötte van.

Egy szakaszt teljesen láthatónak nevezünk, ha mindkét végpontja a téglalapba esik. Az ilyen szakaszokat jelenitsük meg!

Egy szakaszt teljesen láthatatlannak nevezünk, ha mindkét végpontja ugyanazon - téglalapon kivüli - sikrészbe esik, vagy a téglalapnak ugyanazon oldalán kivül fekszik. Az ilyen szakaszokat dobjuk el!

Ha egy szakasz nem tartozik bele egyik osztályba sem, akkor nem tudunk biztosat mondani a láthatóságáról. Lehet, hogy van látható része, lehet hogy nincs. Ebben az esetben meg kell keresnünk a szakasz és a téglalap metszéspontjait.

Tehát az algoritmus a következő:

1: a két végpont kódjának kiszámolása

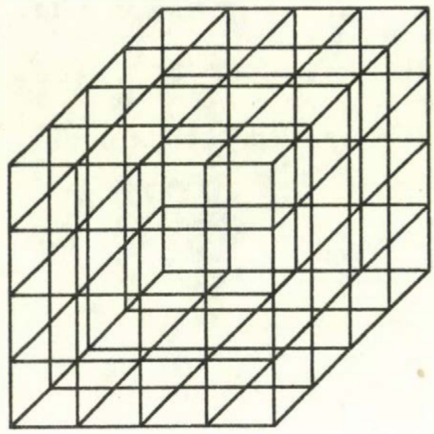
2: ha a szakasz látható, akkor jelenitsük meg, és vége.

3: ha a szakasz nem látható, akkor vége.

4: számoljuk ki a téglalap és a szakasz metszéspontjait

5: számoljuk ki az uj kódot

6: menj 2.



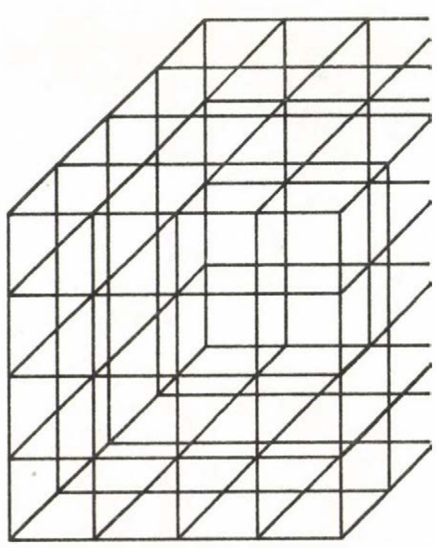
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 -1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
1 0 1 0 1 6



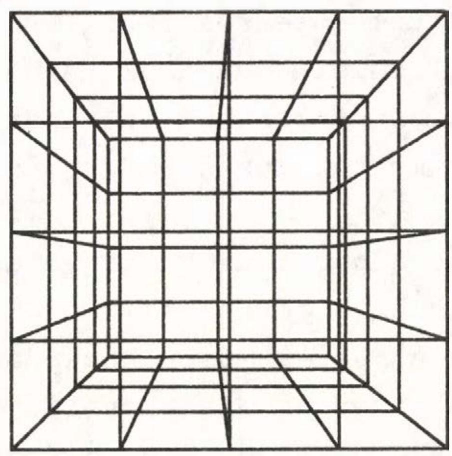
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
1 0 1 0 1 6



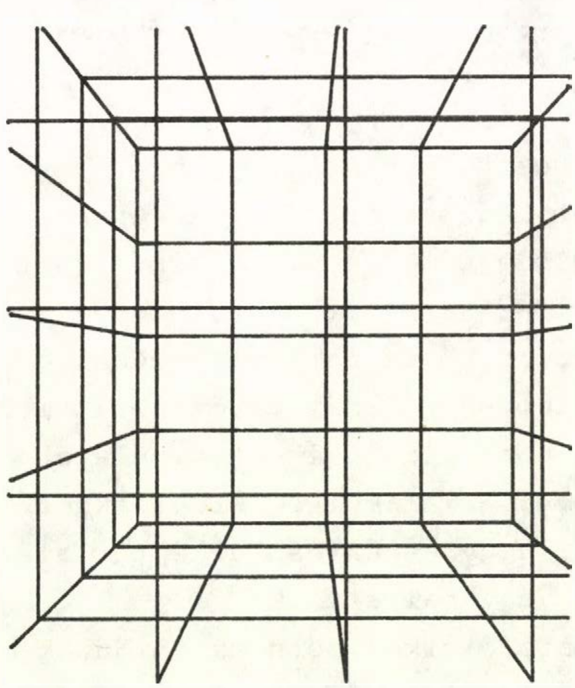
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 -1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
1 8 -2 3 8 0



REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 -1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
1 8 -2 3 8 0

3.2 HÁROM DIMENZIÓS ABLAK KÉPKIVÁGÁS

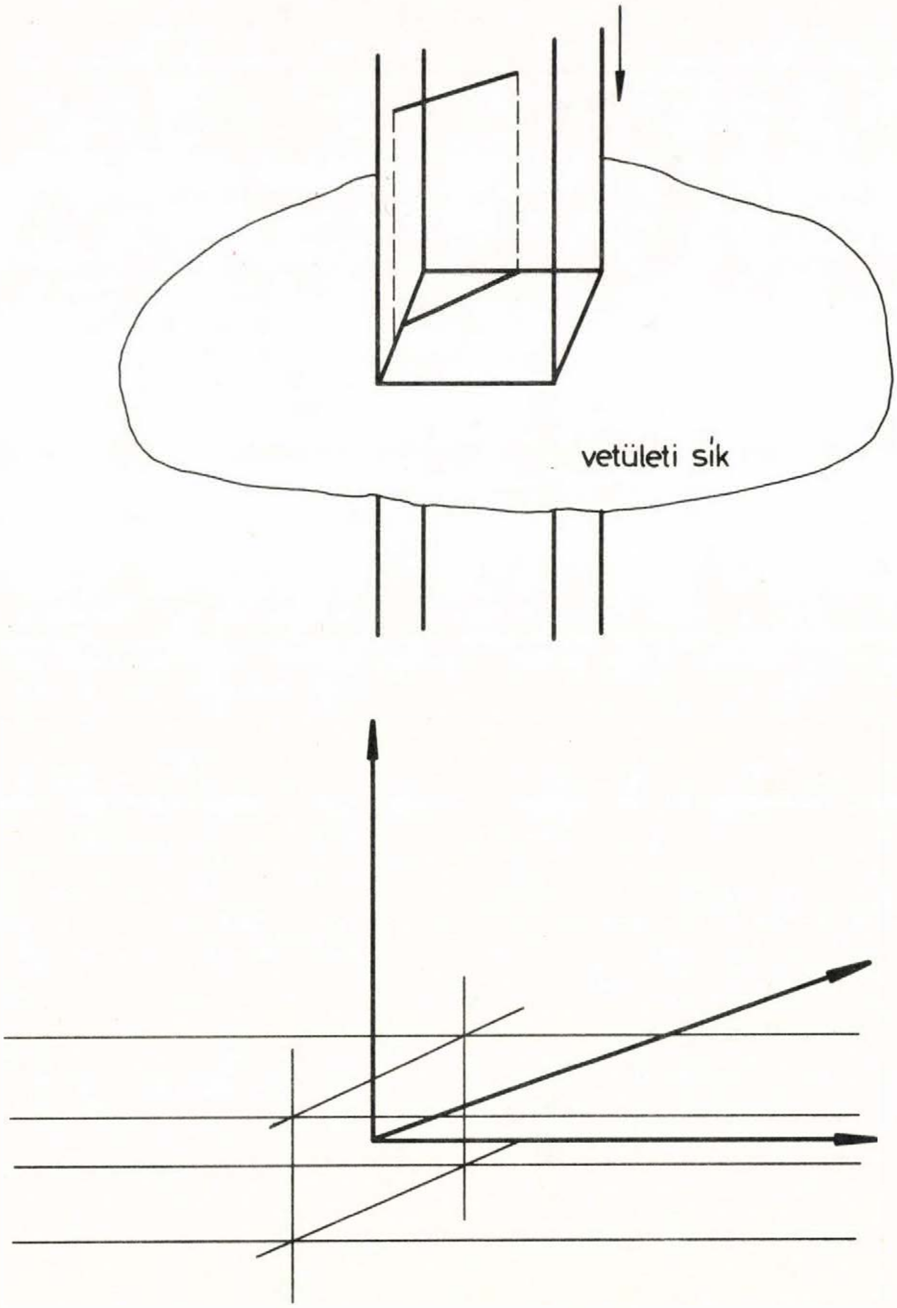
A három dimenziós képkivágási algoritmus lényegében ugyanaz, mint a két dimenziós algoritmus. Ugyanugy, mint a sikot, most a teret osztjuk 9, illetve 27 részre, és egy-egy kódot rendeljünk a térrészekhez. A láthatóság és a láthatatlanság feltételei ugyanazok. A határoló sikok kiszámitása, valamint a szakasz és a határoló sikok metszéspontjainak meghatározása már nehezebb feladat.

A három dimenziós vágási algoritmusok tárgyalásakor külön kell választanunk a különböző ábrázolási módokat. Erre azért van szükség, mert a képtér más a középpontos, és más a párhuzamos vetités esetén. Ujabb osztályozási lehetőség az, hogy mélység vágásról van szó, vagy sem, mert egyszer végtelen, máskor véges tartományt kell vizsgálnunk. Osztályozhatunk még aszerint is, hogy a képtér középvonala merőleges a vetületi sikra, vagy sem. Ez az osztályozás azért célszerü, mert az első eset nagyon egyszerü, a második sokkal számitásigényesebb.

1. Párhuzamos vetités a vetités irányára merőleges sikra

A három dimenziós képkivágási algoritmusok közül ez a legegyszerübb.

A teret kilenc térrészre bontjuk ugy, hogy a képteret határoló siklapokat meghosszabitjuk. A képtér most egy hasáb, mely merőleges a vetületi sikra. A továbbiakban is követjük azt a stratégiát, hogy a vetületi sikon rögzitett x, y, és erre merőleges z koordinátarendszerben dolgozunk. Tehát a vetületi sikra való merőlegesség miatt a határoló sikok egyenlete $x = konst$ $y = konst$ alaku. A térrészekhez kódot rendelünk aszerint, hogy a térrész a képtér alá, fölé, a képtértől jobbra vagy balra esik.
A szakasz és a határoló sikok metszéspontjának meghatározása a homogén koordinátákkal foglalkozó fejezetben leirt módon történik.



5. ábra

Képkivágás végtelen, merőleges képtér esetén

2. Párhuzamos vetités a vetités irányára nem merőleges sikra

Az alap algoritmus ugyanaz, mint eddig volt, csak egyes dolgok kiszámitása kicsit bonyolultabb. Melyek azok a feladatok, amiket meg kell oldanunk:

- a képtér határlapjainak kiszámolása,
- a láthatósági kritériumok felirása,
- a szakasz és a határoló sikok metszéspontjainak kiszámolása.

A képteret határoló sikok egyenletét igen könnyen fel tudjuk irni, hisz ismerjük két pontját - a vetületi sikon kijelölt ablak két csucspontja -, és irányvektorát - vetités iránya -. A két sikbeli pont és a vektor segitségével meghatározunk még egy sikbeli pontot. Három pontból a sik egyenletét a homogén koordinátákkal foglalkozó fejezetben leirt módon kapjuk.

A láthatósági kritériumok felirása a legnehezebb feladat. Mi is az a láthatósági kritérium? A láthatósági kritérium az egy a pontok halmazán értelmezett olyan predikátum, amely igaz értéket ad, ha a pont látható, és hamisat, ha nem látható. Ez tovább fejleszthető ugy, hogy megmondja azt is, ha a pont nem látható, akkor melyik térrészbe esik. A láthatósági kritérium eddig nagyon egyszerü volt, hisz két, adott intervallumba való esést kellett vizsgálni. Most bonyolultabb a dolog, mert azt kell vizsgálnunk, hogy egy pont, illetve egy szakasz két végpontja négy, adott sik által határolt tartományba esik, vagy sem. A feladat megoldásához azt az állitást használjuk fel, miszerint egy pont és egy sik skalárszorzata a pontnak a siktól vett előjeles távolságát adja meg. Előjeles távolság azt jelenti, hogy pozitiv, ha a pont a sik egyik oldalán, negativ, ha a pont a sik másik oldalán van. Azt pedig, hogy egy adott sik mikor ad pozitiv és mikor negativ értéket egy próba ponttal eldönthetjük. Ezeket a tulajdonságokat felhasználva definiáljuk a láthatósági kritérium függvényét ugy, hogy adja meg annak a térrésznek a sorszámát, vagy kódját, amelyikbe a pont esik.

A pont és a határoló sikok metszéspontjainak meghatátozása az előző fejezetben leirt módon történik.

3. Középpontos vetités, a vetitési középpont a z tengelyen van.

Ebben az esetben a képtér egy, a vetületi sikra merőleges végtelen gula.

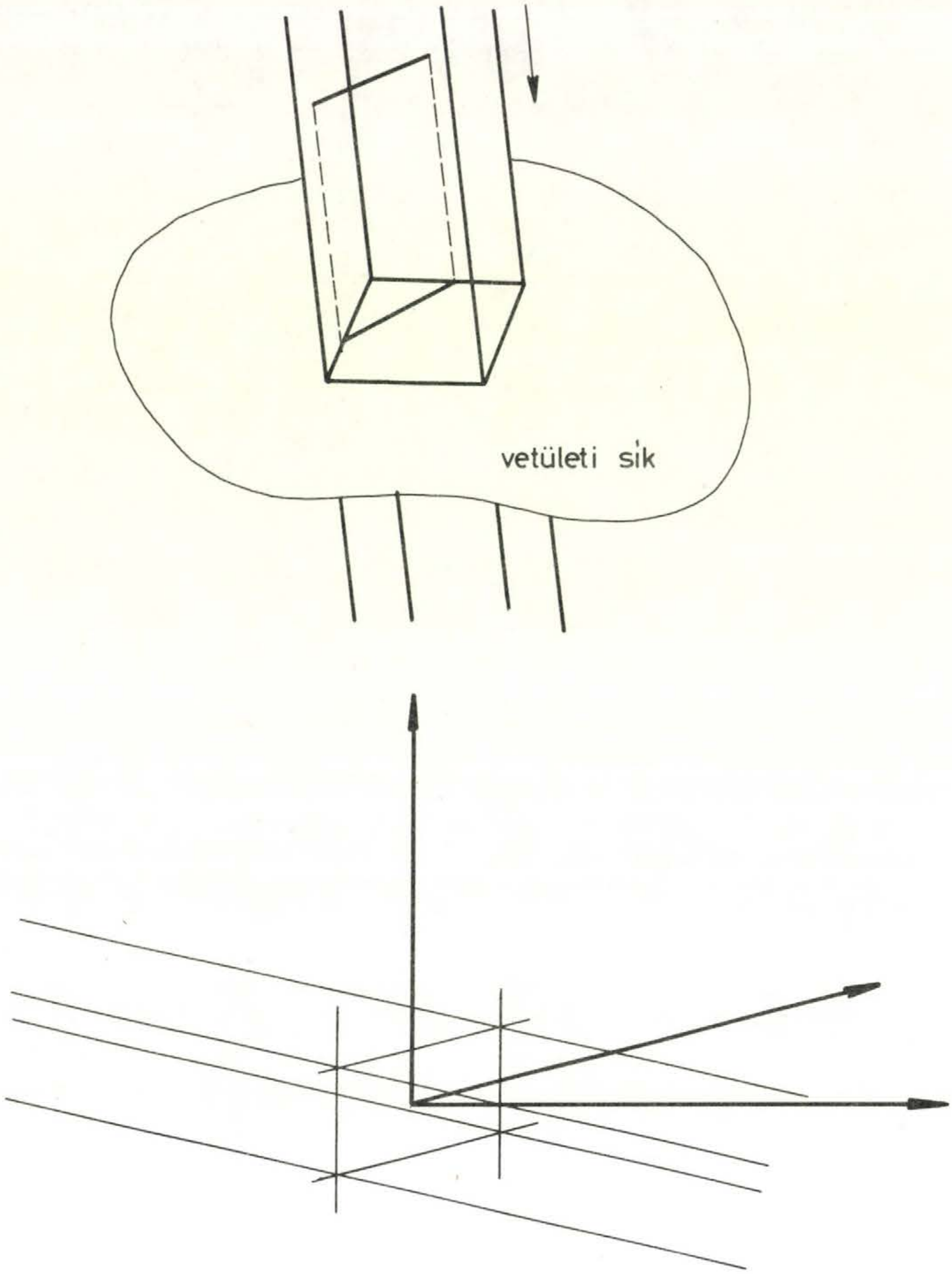
A határoló sikok és a láthatósági kritérium meghatározása igen egyszerü, a középpontos vetités képletéből adódik.

Nézzük a láthatósági kritériumot! Legyenek a vetületi sikon kijelölt ablak határai AX, BX illetve AY, BY. A középpontos vetités után egy pont látható, ha képe az ablakba esik. Azaz igaz rá a két egyenlőtlenség pár:

$$AX \leq X' \leq BX \quad \text{és} \quad AY \leq Y' \leq BY$$

Tudjuk, hogy a középpontos vetités képlete:

$$X' = \frac{cX}{c + z} \quad , \quad Y' = \frac{cY}{c + z}$$



6. ábra

Képkivágás végtelen nem merőleges képtér esetén

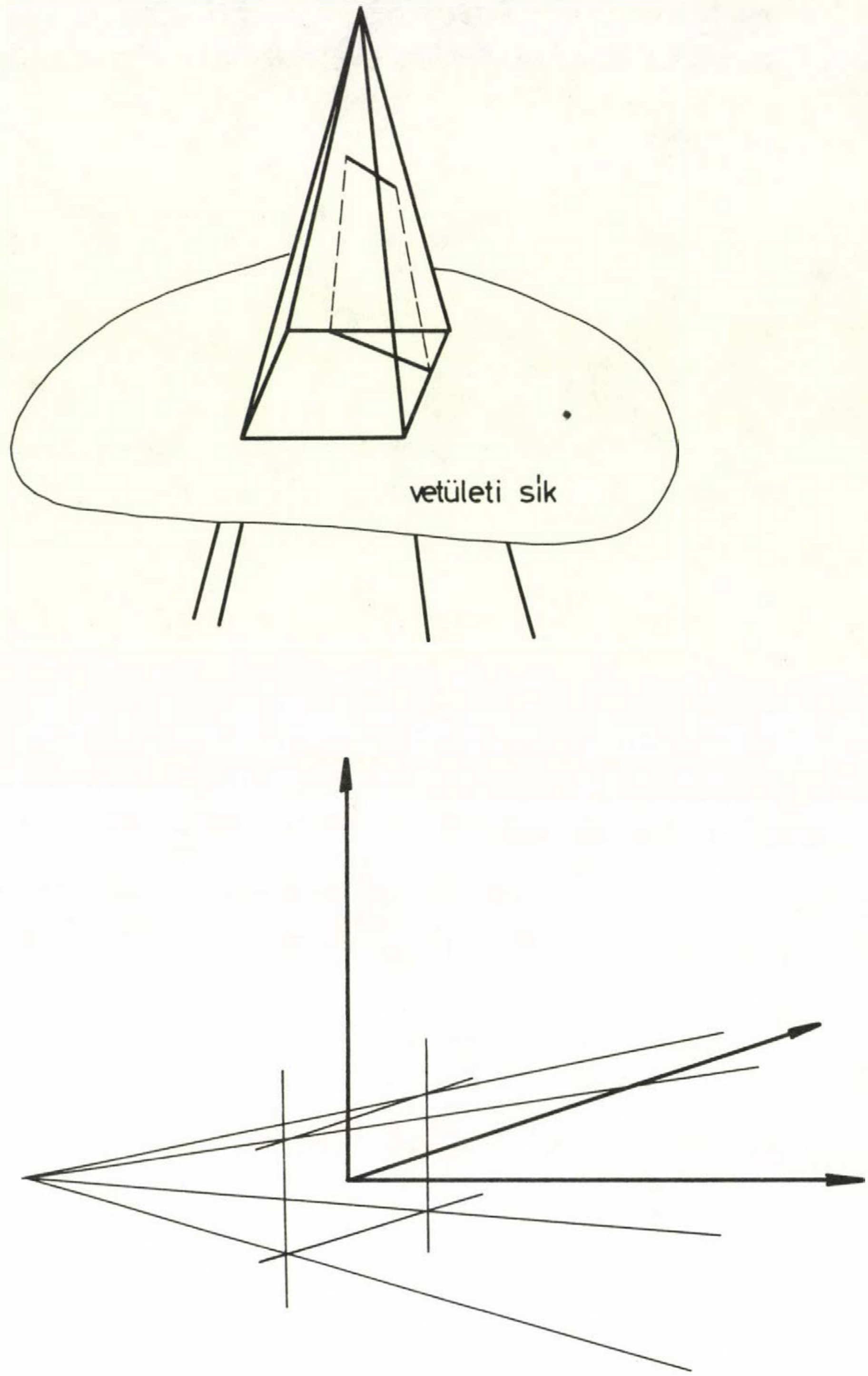
ha a vetitési középpont $C = (0, 0, -c)$.
Ezt behelyettesitve az előző egyenlőtlenségekbe és azokat rendezve

$$\frac{AX\ (c + z)}{c} \leq X \leq \frac{BX\ (c + z)}{c}$$

$$\frac{AY\ (c + z)}{c} \leq Y \leq \frac{BY\ (c + z)}{c}$$

láthatósági kritériumot kapjuk. És egyben megvannak a határoló sikok egyenletei is.

A szakasz és a határoló sikok metszéspontjának a meghatározása ugyanaz, mint eddig. A részletes algoritmust ugy kapjuk, hogy az alap algoritmusba értelem szerint behelyettesitjük az adott eset adott módszereit.

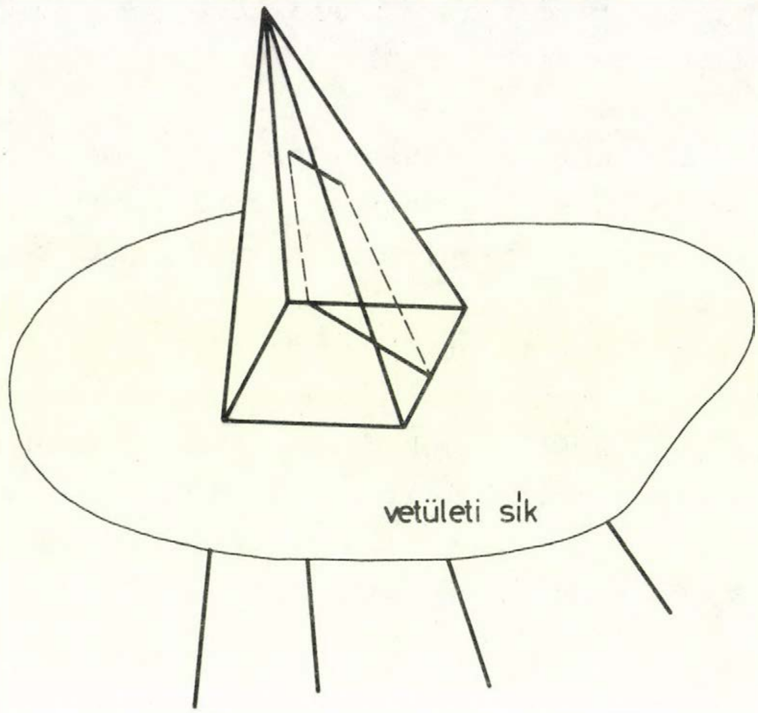


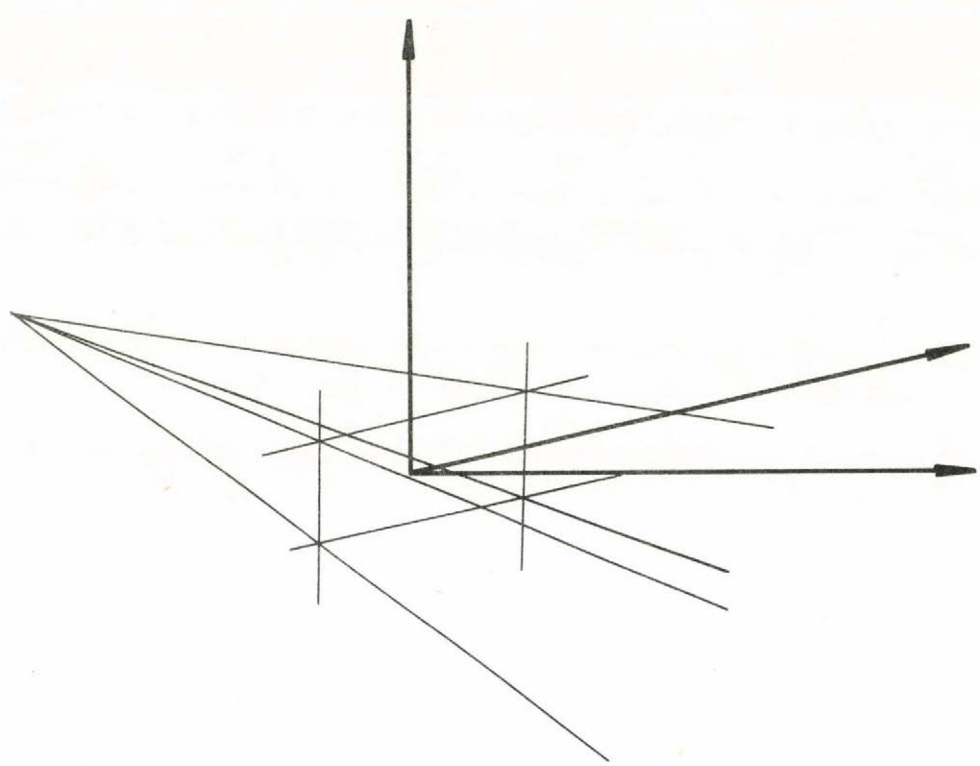
7. ábra

Képkivágás végtelen, merőleges képtér esetén

4. Középpontos vetités, a vetitési középpont nem a z tengelyen helyezkedik el.

A képtér most egy olyan végtelen gula, melynek középvonala nem merőleges a vetületi sikra. Feladatunk tehát nem lesz egyszerü, mint az előző esetben volt. A képtér határoló sikjait három pontjának - a vetitési középpont, a vetületi sikon kijelölt ablak két csucspontja - ismeretében meg tudjuk határozni. A láthatósági kritériumok felirása a párhuzamos vetités nem merőleges esetnél leirtak alapján történik. A szakasz és a határoló sikok metszéspontjainak meghatározása sem okoz problémát.





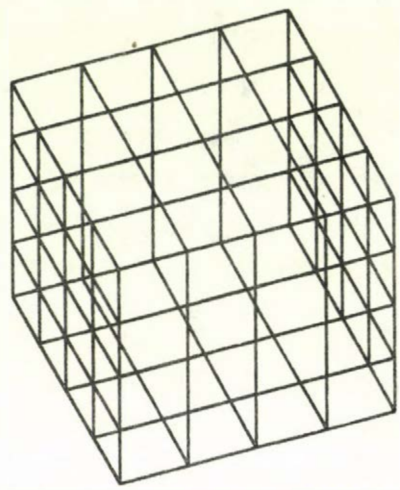
8. ábra

Képkivágás végtelen, nem merőleges képtér esetén

3.3 HÁROM DIMENZIÓS MÉLYSÉG KÉPKIVÁGÁS

Mélység képkivágás esetén a transzformáció módjától függő végtelen képteret két, a vetületi sikkal párhuzasmo sikkal elmetszük.
Igy párhuzamos vetitéskor egy paralelleepipedont, középpontos vetitéskor pedig egy csonka gulát kapunk. Ezután ezeket a véges tartományokat kell vizsgálnunk.

Képkivágási algoritmusainkat mennyiben kell módositani?
Még két határoló sikot hozzá kell vennünk, ami merőleges esetben egy intervallumba való esés, nem merőleges esetben pedig két sik közé esés vizsgálatát jelenti. Ezzel a két plusz sikkal a teret már nem 9, hanem 27 térrészre osztottuk, tehát 6 bites kódot kell a térrészekhez rendelnünk.
A láthatósági kritériumok felirása és a metszéspontok meghatározása nem jelent uj problémát.



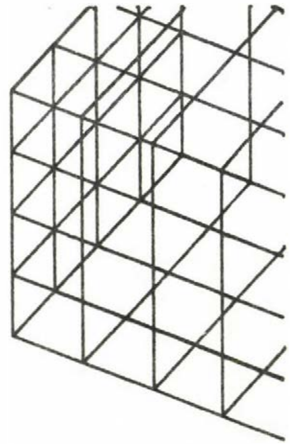
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
-0 2 -0 6 -0 6

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
1 0 2 6 2 6



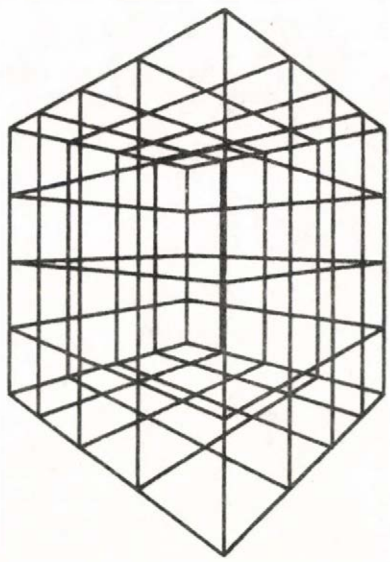
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
-0 3 -0 6 -0 6

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
1 0 1 6 1 6



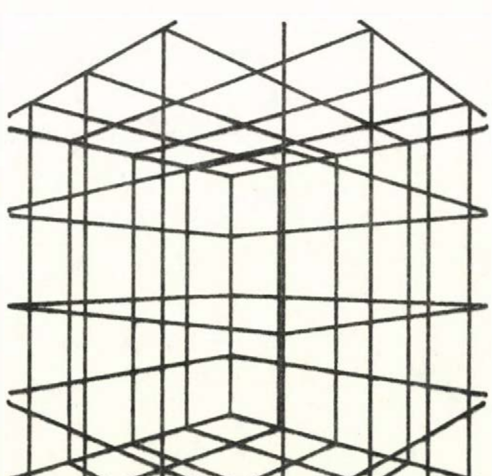
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
-0 7 0 0 -0 7

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
5 5 -1 6 6 1



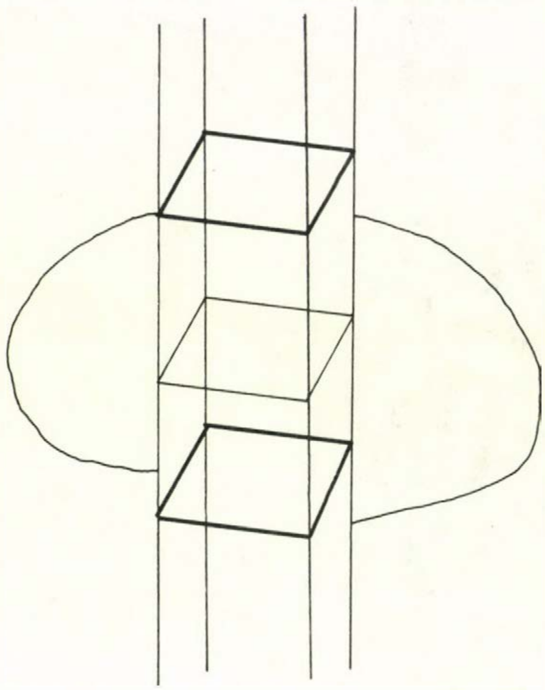
REF POINT
0 0 0 0 0 0

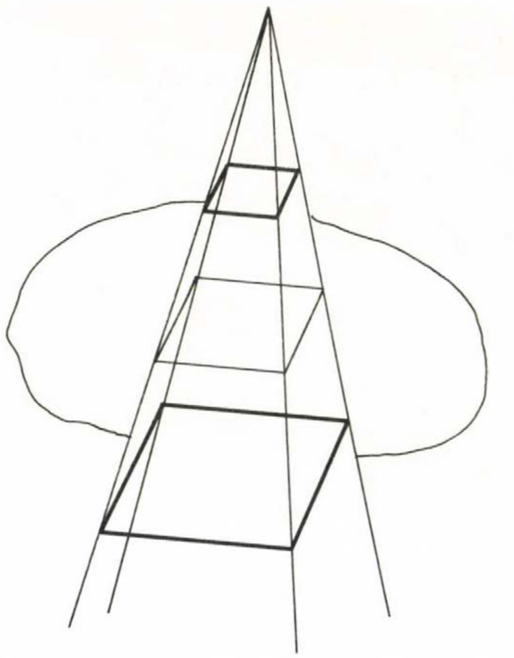
NORMAL
1 0 0 0 1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
5 5 -1 6 6 1



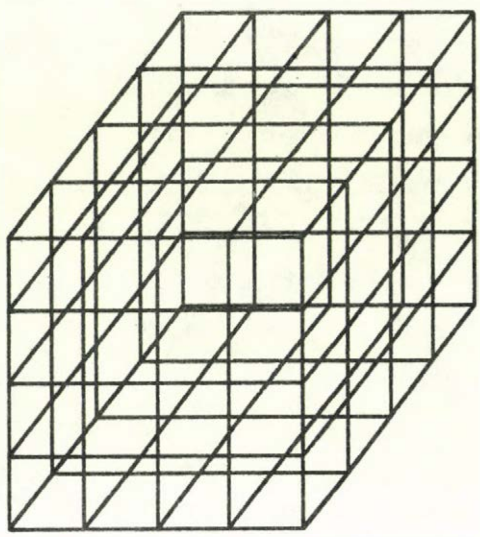


9. ábra
Képkivágás véges képtér esetén

3.4 HÁROM DIMENZIÓS DOBOZ KÉPKIVÁGÁS

Ez a képkivágási eljárás teljesen más szemlélet módot tükröz, mint az előzőek. Az előző eljárásoknál ugy adtuk meg egy objektum láthatóságát, hogy azt mondhattuk, az látható, aminek a képe a vetületi sikon kijelölt ablakbe esik. Az algoritmus kidolgozásánál tehát visszafelé jártunk el, az objektum képének láthatósága alapján vágtuk az objektumot. Ennél a doboz képkivágásnál, éppen ellenkezőleg, azt mondjuk meg, hogy a három dimenziós objektum mely része látható. Majd ezt a látható részt levetitjük a vetületi sikra, és ez után számolunk ki egy ablakot, vagyis egy olyan téglalapot a vetületi sikon, amibe belefér az objektum látható részének a képe. Azt, hogy az objektum mely része látható, ugy adjuk meg, hogy az objektum egy része köré definiálunk egy téglatestet - egy dobozt -. Az objektumnak azt a részét jelenitjük meg, ami ezen a dobozon belül van.

Az algoritmus megvalósitása nagyon egyszerü. Hat, a koordináta tengelyekkel párhuzamos sik közé esést kell vizsgálni. Ez ekvivalens három intervallumba való esés vizsgálatával. Ennek megvalósitásához egy hat bites kód definiálására van szükség. Ez a kód megmutatja, hogy egy adott pont ezen intervallumokhoz képest hol helyezkedik el. Ezzel már a láthatósági kritériumot is megkaptuk. A szakasz és a határoló sikok metszéspontjainak meghatározása nagyon egyszerü.



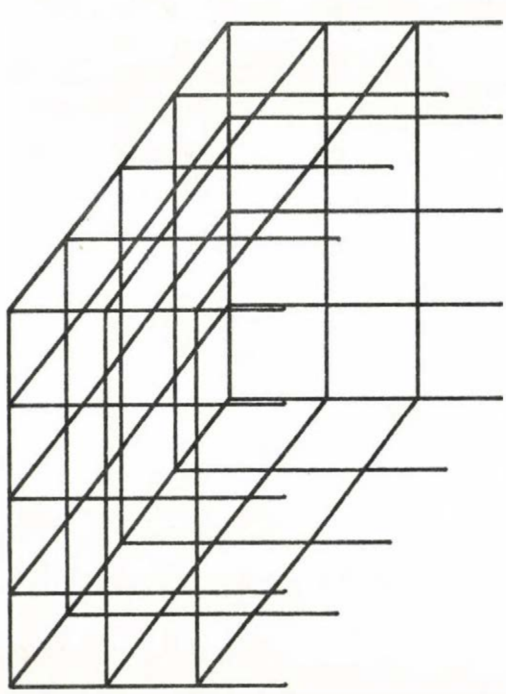
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 -1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
1 0 1 3 1 6



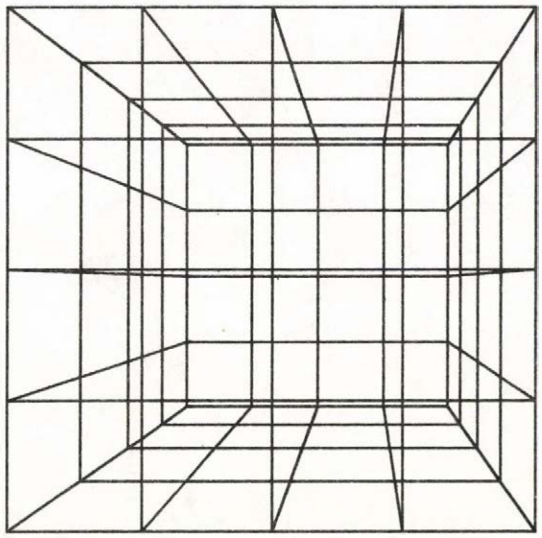
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
1 0 1 3 1 6



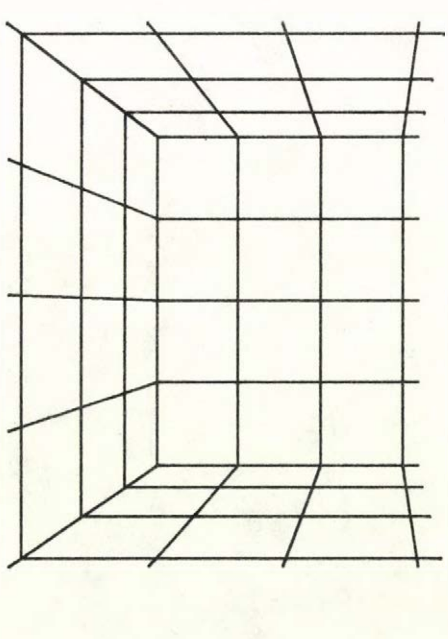
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 -1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
2 6 -2 0 8 0



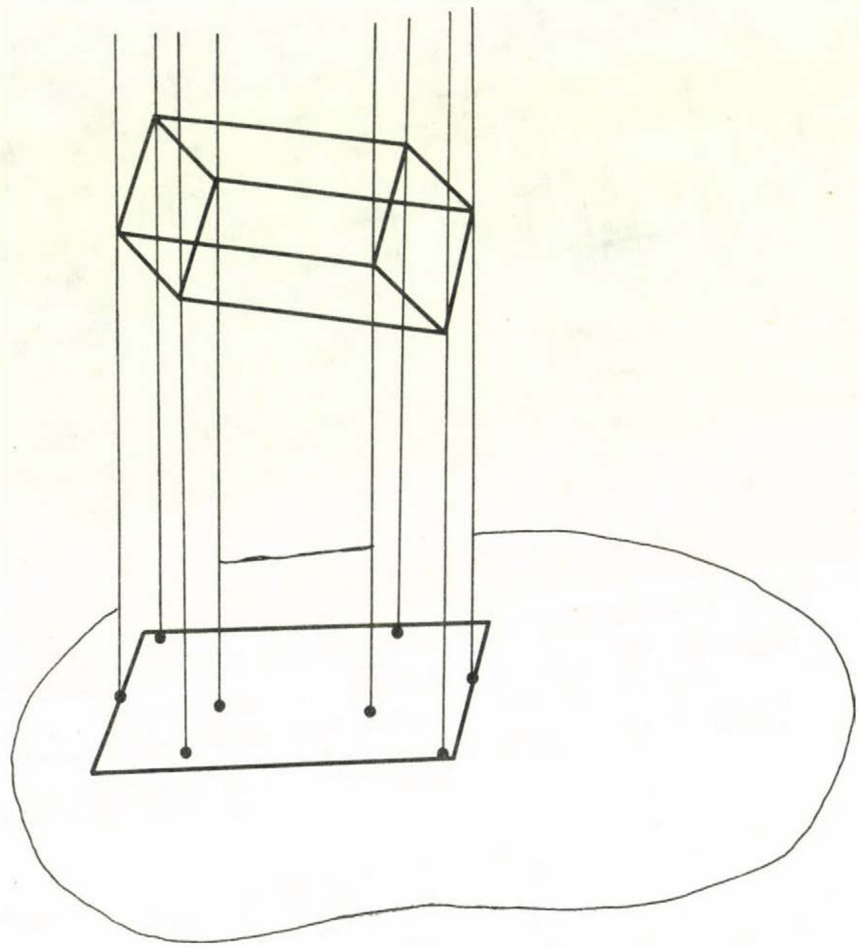
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 -1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
2 6 -2 0 8 0



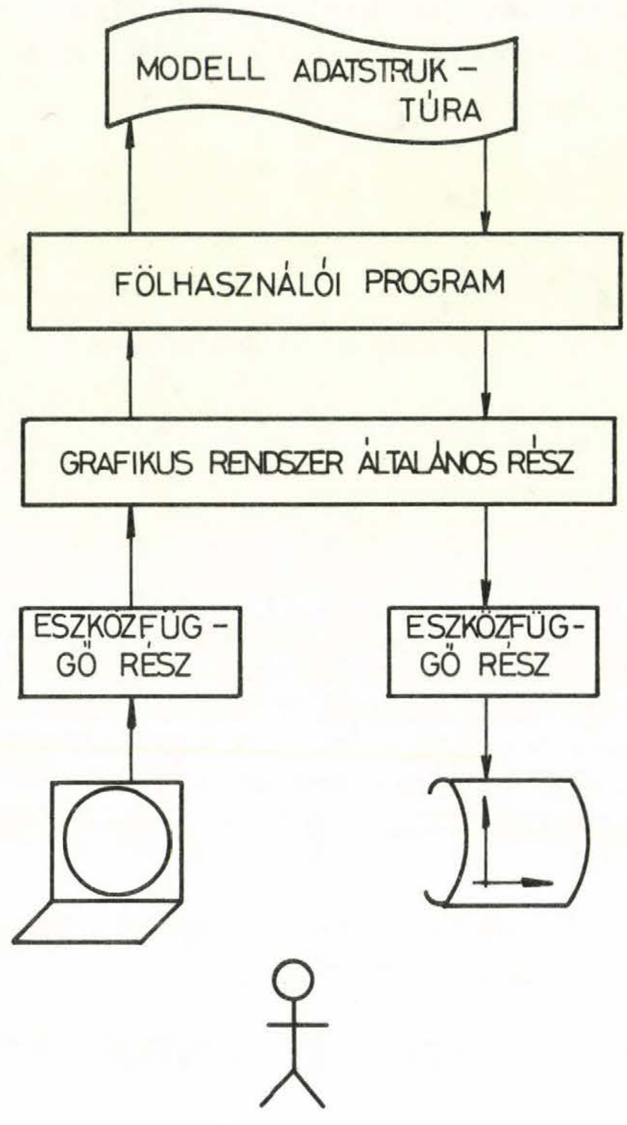
10. ábra
Doboz képkivágás

4. HÁROM DIMENZIÓS TÁRGYAK ÁBRÁZOLÁSÁNAK MEGVALÓSITÁSA

Ez a fejezet az MGSS8O (Minimal graphic subsystem for GD'8O) keretein belül megvalósitott három dimenziós tárgyak ábrázolási módszereivel foglalkozik.

Ez a grafikus rendszer a drótvázával megadott tárgyakat képes ábrázolni. Egy tárgy megjelenitése ugy történik, hogy a kivánt leképzési módnak megfelelően kialakitott transzformációs mátrixszal előállitjuk a drótok végpontjainak képeit, és ezeket összekötjük. A grafikus rendszer szolgáltatásai közé tartoznak a képkivágási eljárások. Ha kérünk valamilyen képkivágást, akkor még a megjelenités előtt megvizsgálja, hogy az adott drót két végpontja közötti szakasz látható vagy sem. Csak a látható részetek jelenitjük meg.

Egy grafikus rendszer felépitését a 11. ábra tartalmazza. Egy grafikus rendszer a grafikus input/output müveletekkel foglalkozik, nem célja az adatok tárolása és az adatokon végzett modell transzformáció végrehajtása.
A felhasználói program létrehozza a megjelenitendő tárgyak definicióját, ezt a definiciót tartalmazza a modell adatstruktura. A megjelenitendő tárgyakat a világ koordinátarendszerben kell leirni. Lehetnek olyan esetek, amikor a felhasználónak megfelelőbb, ha az ábrázolandó tárgyait egy neki megfelelő, ugynevezett modell koordinátarendszerben irja le. Modell transzformációnak a modell koordinátarendszer világ koordinátarendszerbe való transzformálását nevezzük. Ezt nem tekintjük a grafikus rendszer részének. A világ koordinátarendszerben leirt adatokat a leképzési transzformáció a konkrét grafikus berendezés fizikai eszközkoordinátarendszerébe képezi. A leképzési transzformáció összekapcsolódik a képkivágási eljárásokkal.



11. ábra

Grafikus rendszer felépitése

A leképzési transzfromációnak kettős célja van: meghatározni a világnak azt a részét, amely látható és meghatározni azt a matematikai transzformációt, amely a világot a grafikus berendezés képernyőjére képezi.
A világban kettő és három dimenziós tárgyak vannak, ezek leképzését teljesen külön kezeljük.

Az ábrázolandó tárgyak a három dimenziós világ koordinátarendszerben adottak. Ahhoz, hogy a tárgy képét ábrázolni tudjuk a képernyőn, a világ koordinátákat fizikai eszköz koordinátákká kell transzformálni. Ez a koordinátarendszer eszközönként más és más. A leképzési transzformációt egységes tárgyalása és megvalósitása érdekében két részre kell vágnunk, és egy közbülső, logikai szintet kell definiálnunk. Ezt a logikai szintet nevezzük logikai kép felületnek. A leképzési transzformáció igy két részből áll, az első az eszközfüggetlen része: a világ leképezése a logikai kép felületre, a másik az eszközfüggő része: a logikai kép felület leképezése a fizikai eszköz koordinátarendszerbe. Ezentul csak az első, eszközfüggetlen részről beszélünk.

Egy három dimenziós tárgy két dimenziós képének az előállitásához először is meg kell adnunk a vetületi sikot és a vetités irányát, illetve a vetitési középpontot. Ezek ismeretében előállitható a tárgy képe a vetületi sikon. Ezután meg kell mondanunk, hogy a vetületi siknak mely részét, mely téglalapját akarjuk megjeleniteni. Ezt a téglalapot nevezzük ablaknak. Szükségünk van még egy adatra, méghozzá arra, hogy ez a kép a megjelenitő eszközön hol legyen. Ezt a téglalapot képmezőnek nevezzük.

A három dimenziós leképezési transzformáció eszközfüggetlen része tehát két lépésre bontható:

1. a három dimenziós tárgy vetitése a vetületi sikra,
2. a vetületi sikon megadott ablak komponenseinek leképezése a képmezőre.

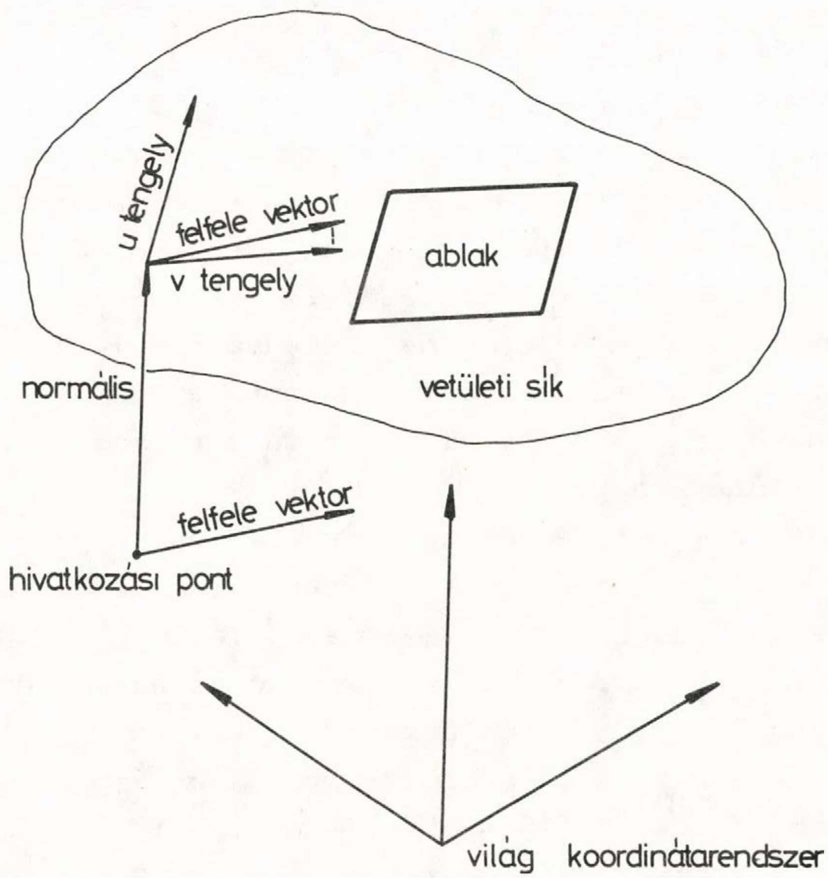
Az MGSS80 grafikus szubrutinrendszer a három dimenziós transzformációnak csak egy alapszintjét tartalmazza. Az alapszint azt jelenti, hogy az adatokat világ koordinátarendszerben várja, és egy tárgynak párhuzamos vagy középpontos vetitéssel készült képét tudja előállitani. Erre az alapszintre épül egy magasabb szint, amely már nem része az MGSS80-nak. Ebben lehetőség van tárgy koordinátarendszer használatára és a transzformációk speciális eseteit is magába foglalja.

Nézzük először az alapszint megvalósitását. Mint már emlitettük, a három dimenziós transzformáció megvalósitásához szükség van a

- vetületi sik,
- vetités iránya ill. vetitési középpont,
- ablak,
- képmező

ismeretére.

Ezen leképzési paraméterek megadásánál azt a gondolatmenetet követjük, hogy először megadunk egy pontot, a hivatkozási pontot, majd minden adatot ehhez viszonyitva adunk meg.
Egy sik megadható egy pontjával és a normálvektorával.
A vetületi sikot normálvektorával, későbbiekben normális, és a hivatkozási ponttól mért távolságával adjuk meg.
A vetités irányát a hivatkozási pontból kiinduló vektorral definiálhatjuk.
A vetületi sikon lévő ablak meghatározásához egy koordinátarendszert kell definiálnunk. Ez a vetületi sikhoz rögzitett koordinátarendszer, amelyet gyakran UV rendszernek is nevezünk. A koordinátarendszer V tengelye az ugynevezett "felfele" vektor merőleges vetülete a vetületi sikra. A koordinátarendszer U tengelye a V tengely -90°-os elforgatottja lesz. Az ablakot ebben a koordinátarendszerben kell megadni két szemközti csucspontjával.
A képmező megadásának leirása előtt még egy ujabb koordinátarendszert kell definiálni. Ez a logikai képfelületen adott,



12. ábra

Leképezési paraméterek

és normalizált eszköz koordinátarendszernek nevezzük. Ez egy két dimenziós Descartes koordinátarendszer, mely mind x, mind y irányba a $[0, 1]$ intervallumba esik. A képmezőt ebben a koordinátarendszerben kell megadni két szemközti csucspontjával.

Definiáljuk pontosan a feladatot!
Adott egy koordinátarendszer, a világ koordinátarendszer, és ebben a koordinátarendszerben a leképzési paraméterek. Feladat a világban megadott tárgy párhuzamos vagy középpontos vetités utáni képének előállitása normalizált eszköz koordinátarendszerben. Vágjuk két részre a feladatot! Első feladat a tárgy kivánt vetités utáni képének előállitása a vetületi sik koordinátarendszerében. A második és lényegesen egyszerübb feladat ennek a képnek megfelelő kép előállitása a normalizált eszköz koordinátarendszerben.
Mind a párhuzamos, mind a középpontos vetitést olyan esetben tudjuk számolni, amikor a vetitendő tárgy is a vetületi sik koordinátarendszerében adott. Tehát első lépés a világ koordinátarendszerből áttérni a vetületi sik koordinátarendszerébe. Ezután már csak a kivánt vetitést kell elvégezni.
Második feladatunk igen egyszerü, ez tulajdonképpen az ablak, képmező leképzés. Egyik téglalapról a másik téglalapra nagyitás és eltolás segitségével lehet áttérni.

A három dimenziós leképzési transzformáció formális leirása:

Adott:

hivatkozási pont:	$H = (VRP1, VRP2, VRP3)$
normális:	$\underline{n} = (VPN1, VPN2, VPN3)$
távolság:	$d = VPD$
felfele vektor:	$\underline{u} = (VUP1, VUP2, VUP3)$
vetités iránya:	$\underline{i} = (VI1, VI2, VI3)$
vetitési középpont:	$C = (EYE1, EYE2, EYE3)$
ablak:	XMI, XMA, YMI, YMA
képmező:	UMI, UMA, VMI, VMA

1. áttérés a világ koordinátarendszerből a vetületi sik koordinátarendszerébe, az U, V, W rendszerbe

- U, V, W rendszer origója

$$P = H + d\,\underline{n}$$

- W tengely

$$\underline{wt} = \underline{n}$$

- V tengely

α: az $\underline{u}$ és $\underline{n}$ hajlásszögének cosinusa

$$\cos\alpha = \underline{u}\,\underline{n}$$

$$\underline{vt} = \underline{u} + \cos\ \underline{n}$$

- U tengely

$$\underline{ut} = \underline{vt}\quad \underline{wt}$$

Ezekkel a jelölésekkel a világ koordinátarendszerből az U, V, W rendszerbe való áttérés mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \underline{ut} \\ \underline{vt} \\ \underline{wt} \end{bmatrix}$$

2. párhuzamos illetve középpontos vetités

Most már minden a vetületi sik koordinátarendszerében adott, tehát a transzformáció a három dimenziós transzformációkkal foglalkozó fejezetben leirtak alapján végezhető.

3. ablak leképzése a képmezőre

$$A = \frac{UMA - UMI}{XMA - XMI}$$

$$B = \frac{VMA - VMI}{YMA - YMI}$$

$$C = UMI - A\ XMI$$

$$D = VMI - B\ YMI$$

$$X' = A\ X + C$$

$$Y' = B\ Y + D$$

Az alap szintre épülő magasabb szintü modulok feladata kettős. Részben a tárgy koordinátarendszerből a világ koordinátarendszerbe való áttérés, részben a speciális transzformációk visszavezetése párhuzamos illetve középpontos vetitésre.
A tárgy koordinátarendszert origójával és két tengelyével adjuk meg. Igy a harmadik az előző kettő vektoriális szorzatából adódik. Tehát megvan a tárgy koordinátarendszer három tengelye a világban, igy az áttérés mátrixa is.
A speciális transzformációk megvalósitása pedig ugy történik, hogy a vetületi sikot és a vetités irányát a 2.2.1. fejezetben leirtak alapján számoljuk ki, és ezen paraméterekkel végezzük el a párhuzamos vetitést.

5. KÉPKIVÁGÁSI ELJÁRÁSOK MEGVALÓSÍTÁSA

Az MGSS80 grafikus rendszer a két dimenziós primitivekre értelmezett két dimenziós képkivágást, a három dimenziós primitivekre értelmezett két dimenziós képkivágást, és három dimenziós doboz képkivágást tartalmazza. Ehhez csatlakozható magasabb szintü rutinokként a három dimenziós ablak képkivágás és a három dimenziós mélység képkivágás. Az MGSS80 grafikus rendszer csak egyenes vonalak előállitásával, igy csak egyenes vonalak vágásával foglalkozik.

A vágás mindig egy szakaszra vonatkozik, a rajzolás pillanatnyi poziciójától az aktuális elmozdulás végpontjáig. Éppen ezért a grafikus rendszernek vannak pillanatnyi pozició regiszterei a világ koordinátarendszerben és képernyő koordinátarendszerben. Erre a kettősségre amiatt van szükség, mert bizonyos esetekben a világ koordinátarendszerben vágunk - 3D doboz, 3D mélység, 3D ablak vágás -, és bizonyos esetekben képernyő koordinátarendszerben vágunk -2D képkivágás-.

A grafikus rendszerek ugynevezett output primitiv funkciói közül az elmozdulás - MOVE -, és a vonal-LINE - a legfontosabb. A MOVE csak a pillanatnyi poziciót változtatja meg, ez a felemelt tollal való rajzolás. A tényleges rajzolást a LINE végzi, mely a pillanatnyi poziciótól az adott pontig rajzol egy egyenes szakaszt.

A képkivágási eljárások feladata az output primitiveknél az, hogy azokat a szakaszokat, melyeknek legalább az egyik végpontja kilóg a látható részből, a látható rész méretére vágja. Ennek megvalósitásához arra van szükség, hogy a MOVE primitivbe beépitsünk egy ellenőrző funkciót, amely 1 bitet 1-be állit, ha pillanatnyi pozició kilóg. Ehhez hasonló funkciót kell a LINE primitivbe is beépitenünk, csakhogy ez a kivánt elmozdulás végpontját ellenőrzi. A LINE primitivből a képkivágó eljárást csak akkor kell hivni az ábrázolandó szakaszra, ha legalább egyik végpontjához rendelt bit 1.

A képkivágási eljárások alapgondolata ugyanaz, a különbségek a határok egyenleteiben, a metszéspontok és láthatóságok képleteiben vannak.

5.1 KÉT DIMENZIÓS KÉPKIVÁGÁS

Az alapgondolatot a 3.1 fejezet tartalmazza, ez a fejezet annak egy megvalósitását ismerteti.

A kilenc sikrészhez rendeljük a következő négy bites kódot.

	ablak	

1001	1000	1010
0001	0000	0010
0101	0100	0110

Egy szakasz teljesen látható, ha mindkét végpontjának a kódja 0000.
Egy szakasz teljesen láthatatlan, ha a két végpont kódjának logikai AND-je nem azonosan 0.

Egy szakasz és az ablak éleinek metszéspontját nagyon egyszerü meghatározni.

A hasonló háromszögek alapján:

$$\frac{X}{XL - X1} = \frac{Y2 - Y1}{X2 - X1}$$

Tehát a metszéspont koordinátái:

$$P = \left(XL,\ Y1 + (Y2 - Y1)\ \frac{XL - X1}{X2 - X1}\right)$$

A metszéspontot a többi élhez hasonlóan kell kiszámolni.

Az algoritmus részletesen a következő:

jelölje: XL, XR, YB, YT a vágási határokat,
X1, Y1, X2, Y2 a vágandó szakasz végpontjait.

```
real   XL, XR, YB, YT;
proc   CODE (real X, Y)    integer KODE:
       if   X ≤ XL  then KODE='0001' else KODE='0000';fi
       if   X ≥ XR  then KODE=KODE+ '0010'; fi;
       if   Y ≤ YB  then KODE=KODE+ '0100'; fi;
       if   Y ≥ YT  then KODE=KODE+ '1000'; fi;
end

proc   CSERE (real A,B):
       real  C;
       C = A;
       A = B;
       B = C;
end;

proc   CLIP (real X1, Y1, X2, Y2):
       integer K1, K2;
       K1 = CODE (X1, Y1);
       K2 = CODE (X2, Y2);
```

```
while   (K1=K2=0) do
    if  K1  K2     then goto  L1; fi;
    if  K1='0000' then  CSERE  (X1, X2);
                        CSERE  (Y1, Y2);
                       MCSERE  (K1, K2); fi;
    if  K1 '0001'  then
                     Y1=Y1+(Y2-Y1)*(X1-X1)/(X2-X1);
                     X1+XL;    fi;
    if  K1  '0010'  then
                     Y1=Y1+(Y2-Y1)*(XR-X1)/(X2-X1);
                     X1=XR;    fi;
    if  K1  '0100'  then
                     X1=X1+ (X2-X1)*(YB-Y1)/(Y2-Y1);
                     Y1=YB;    fi;
    if  K1  '1000'  then
                     X1=X1+ (X2-X1)*(YT-Y1)/(Y2-Y1);
                        Y1=YT;    fi;
    K1 = CODE (X1, Y1)
od;
L1: ;
end;
```

5.2 HÁROM DIMENZIÓS DOBOZ KÉPKIVÁGÁS

Jelölje a vágási hatásokat:

XMI, XMA, YMI, YMA, ZMI, ZMA.

A térrészek kódolásához 6 bites küdra van szükség.

Legyen

1. bit 1 ha $X \leq XMI$,
2. bit 1 ha $X \geq XMA$,
3. bit 1 ha $Y \leq YMI$,
4. bit 1 ha $Y \geq YMA$,
5. bit 1 ha $Z \leq ZMI$,
6. bit 1 ha $Z \geq ZMA$.

Egy szakasz teljesen látható, ha mindkét végpontjának a kódja '000000'.
Egy szakasz teljesen láthatatlan, ha a két végpont kódjának logikai AND-je nem azonosan nulla.

A szakasz és a láthatósági határok metszéspontjainak meghatározásánál a szakasz paraméteres egyenletét alkalmazzuk:
Nézzük az $X = XMI$ sik és a $P1 = (X1, Y1, Z1)$ valamint $P2 = (X2, Y2, Z2)$ pontok által meghatározott szakasz metszéspontját.

$$P = \begin{bmatrix} X1 + T*(X2-X1) \\ Y1 + T*(Y2-Y1) \\ Z1 + T*(Z2-Z1) \end{bmatrix} \qquad X1 + T*(X2-X1) = XMI \qquad T = \frac{XMI - X1}{X2-X1}$$

$$P = \begin{bmatrix} XMI \\ X1 + (XMI-X1)/(X2-X1)(X2-Y1) \\ Z1 + (XMI-X1)/(X2-X1)(Z2-Z1) \\ \end{bmatrix}$$

Az algoritmus részletes leirása:

```
proc CODE (real X, Y, Z) integer K:
  if  X<XMI  then  K='000001'  else K='000000'  fi;
  if  X>XMA  then  K='K+'000010';  fi;
  if  Y<YMI  then  K=K+'000100';   fi;
  if  Y>YMA  then  K=K+'001000';   fi;
  if  Z<ZMI  then  K=K+'010000';   fi;
  if  Z>ZMA  then  K=K+'100000';   fi;
end;

proc CLIP (real X1, Y1, Z1, X2, Y2, Z2):

  integer  K1, K2;

  K1 = CODE (X1, Y1, Z1);
  K2 = CODE (X2, Y2, Z2);

  while    (K1=K2='000000')  do
      if  K1  K2  then goto  L1;
      if  K1='000000'  then   CSERE (X1, X2);
                              CSERE (Y1, Y2);
                              CSERE (Z1, Z2);
                             MCSERE (K1, K2);   fi;

  if  K1  '000001'  then  T = (XMI-X1)/(X2-X1);
                          X1= XMI;
                          Y1= Y1 + T*(Y2-Y1);
                          Z1= Z1 + T*(Z2-Z1);  fi;

  if  K1  '000  0'  then  T = (XMA-X1)/(X2-X1);
                          X1= XMA ;
                          Y1= Y1 + T*(Y2-Y1);
                          Z1= Z1 + T*(Z2-Z1);

  if  K1  '00  00'  then  T = (YMI-Y1)/(Y2-Y1);
                          X1+X1 + T*(X2-X1);
                          Y1= XMI;
                          Z1= Z1 + T*(Z2-Z1);  fi;
```

```
if   Kl '001000' then  T = (YMA-Y1)/(Y2-Y1);
                       X1= X1 + T*(X2-X1);
                       Y1= YMA ;
                       Z1= Z1 + T*(Z2-Z1);    fi;

if   Kl '010000' then  T = (ZMI-Z1)/(Z2-Z1);
                       X1= X1 + T*(X2-X1);
                       Y1= Y1 + T*(Y2-Y1);
                       Z1= ZMI ;

if   Kl '100000' then  T = (ZMA-Z1)/(Z2-Z1);
                       X1= X1 + T*(X2-X1);
                       Y1= Y1 + T*(Y2-Y1);
                       Z1= ZMA ;

     Kl = CODE (X1, Y1, Z1) ;
od ;
L1:     ;
end ;
```

5.3. HÁROM DIMENZIÓS ABLAK KÉPKIVÁGÁS

A képkivágási eljárás végrehajtásakor szükségünk van a képtér határlapjainak és a láthatósági kritériumok ismeretére. Ezért, a grafikus rendszernek az a része, amelyik a leképzési paraméterből előállitja a transzformációs mátrixot, az kiszámitja ezeket az adatokat, és átadja a képkivágó résznek. A képkivágási eljárás megirásakor tehát feltehetjük, hogy ismerjük a határsikok egyenletét, és a láthatósági kritériumokat.

Jelöljük a határsikok paramétereit:

A1, B1, C1, D1;
A2, B2, C2, D2;
A3, B3, C3, D3;
A4, B4, C4, D4;

Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll négy olyan eljárás, amely egy mintapont alapján az adott sik és pont skalárszorzatának segitségével előállit egy négy bites kódot. Ezek:

```
proc SIK1 (real X, Y, Z) integer K ;
proc SIK2 (real X, Y, Z) integer K ;
proc SIK3 (real X, Y, Z) integer K ;
proc SIK4 (real X, Y, Z) integer K ;
```

Paramétereivel adott sik $\underline{s} = (A, B, C, D)$ és két végpontjával $P1 = (X1, Y1, Z1)$ $P2 = (X2, Y2, Z2)$ adott szakasz metszéspontjának meghatározása a következő:

A metszéspont $P = P1 + T*(P2-P1)$, ahol T ismeretlen paraméter. A pont kielégiti a sik egyenletét is, innen kapjuk meg T-t.

$$A*(X1+T*(X2-X1))+ B*(Y1 + T*(Y2-Y1))+$$
$$+ C*(Z1 + T*(Z2-Z1)) + D = 0$$

$$T = \frac{-D - AX1 - BY1 - CZ1}{A*(X2-X1)+B*(Y2-Y1)+C*(Z2-Z1)}$$

Az algoritmus részletes leirása:

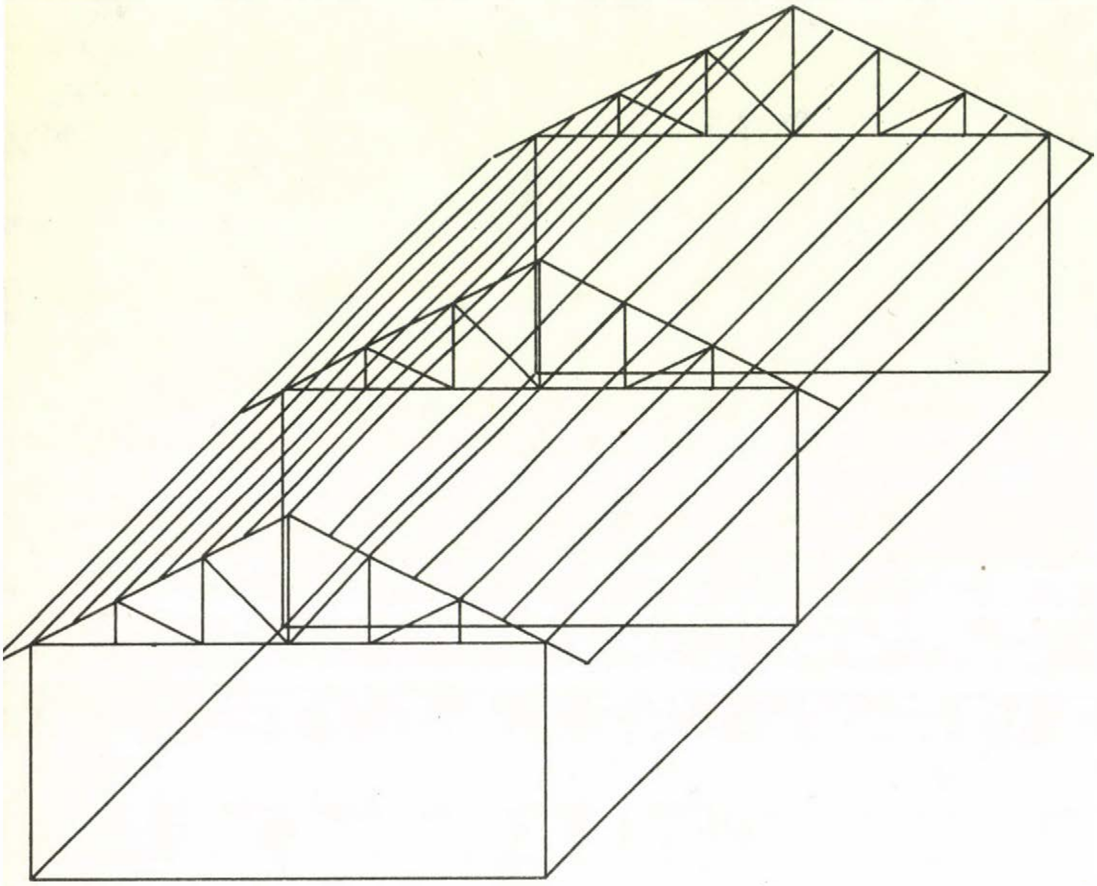
```
proc CODE (real X, Y, Z) integer K :
     K = SIKI (X, Y, Z) + SIK2 (X, Y, Z) +
         + SIK3 (X, Y, Z) + SIK4 (X, Y, Z) ;
end ;

proc CLIP (real Xl, Yl, Zl, X2, Y2, Z2) :
     integer Kl, K2 ;
     Kl = CODE (Xl, Yl, Zl) ;
     K2 = CODE (X2, Y2, Z2) ;
```

```
while   (K1=K2='0000'    do
   if   K1  K2          then      goto  L1 ; fi;
   if   K1 = '0000'     then      CSERE (X1, X2);
                                  CSERE (Y1, Y2);
                                  CSERE (Z1, Z2);
                                 MCSERE (K1, K2);    fi;

   if   K1  '0001'         then
        T = - (D1+A1*X1+B1*Y1+C1*Z1)/ (A1*(X2-X1) +
            + B1*(Y2-Y1) + C1*(Z2-Z1) );
        X1= X1 + T*(X2-X1)  ;
        Y1= Y1 + T*(Y2-Y1)  ;
        Z1= Z1 + T*(Z2-Z1)  ;                        fi;

   if   K1  '0010'     then
        T = - (D2+A2*X1+B2*Y1+C2*Z1)/(A2*(X2-X1) +
            + B2*(Y2-Y1) + C2*(Z2-Z1) );
        X1= X1 + T*(X2-X1) ;
        Y1= Y1 + T*(Y2-Y1) ;
        Z1= Z1 + T*(Z2-Z1) ;                         fi;

   if   K1  '0100'     then
        T = - (D3+A3*X1+B3*Y1+C3*Z1)/ (A3*(X2-X1) +
            + B3*(Y2-Y1) + C3*(Z2-Z1) );
        X1= X1 + T*(X2-X1) ;
        Y1= Y1 + T*(Y2-Y1) ;
        Z1= Z1 + T*(Z2-Z1) ;

   if   K1  '1000'     then
        T = - (D4+A4*X1+B4*Y1+C4*Z1)/(A4*(X2-X1) +
            + B4*(Y2-Y1) + C4*(Z2-Z1) );
        X1= X1 + T*(X2-X1) ;
        Y1= Y1 + T*(Y2-Y1) ;
        Z1= Z1 + T*(Z2-Z1) ;                         fi;

    K1 = CODE (X1, Y1, Z1) ;
    od ;
    L1 :    ;
    end ;
```

5.4. HÁROM DIMENZIÓS MÉLYSÉG KÉPKIVÁGÁS

Teljesen hasonló a három dimenziós ablak képkivágáshoz, csak itt nem négy, hanem hat sik közé esést kell vizsgálni. Igy hat bites kód van, és hat sikkal való metszéspontot kell számolni.

6. RAJZOK



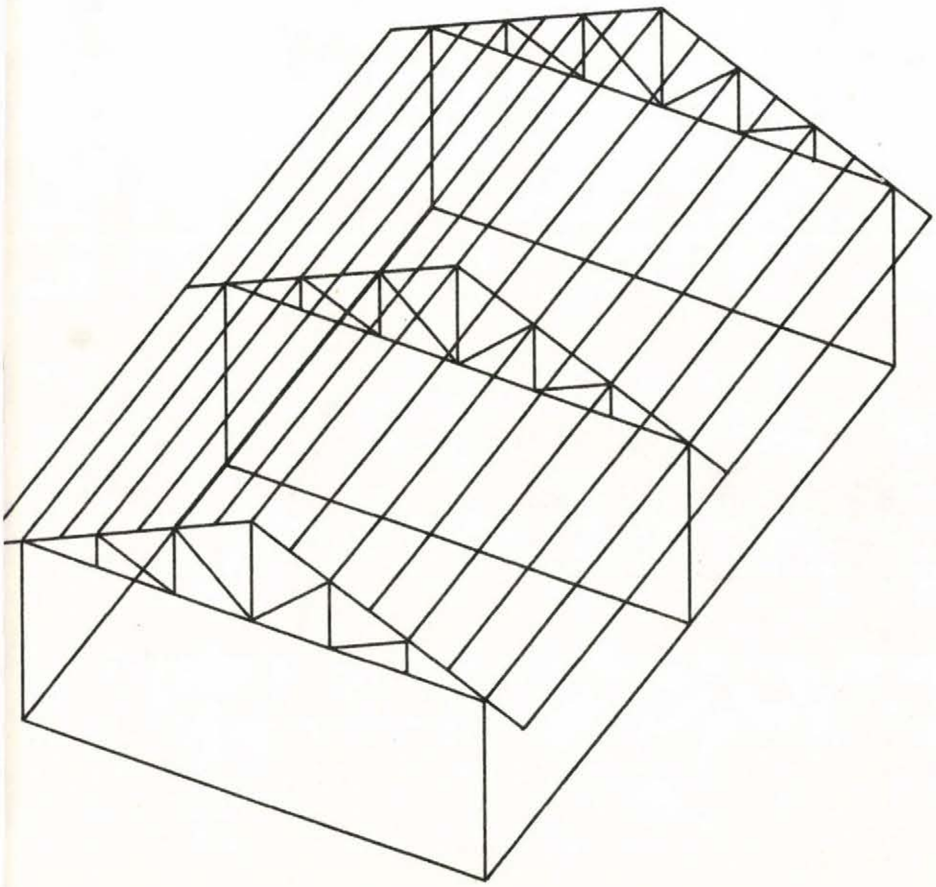
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 -1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
1 0 1 0 1 6



REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
1 0 1 8 1 8

DISTANCE
0 0

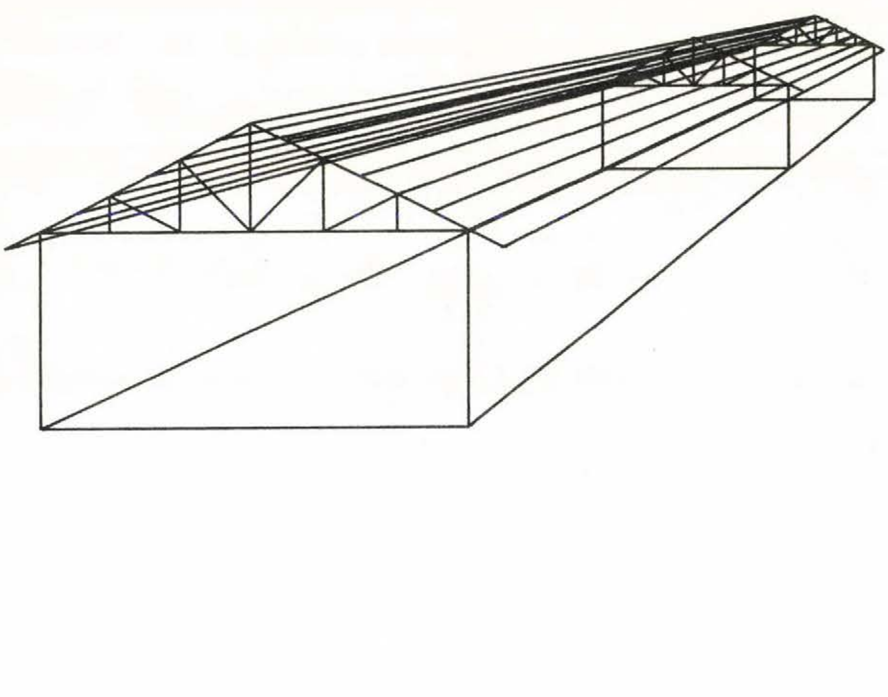
UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

PARALELL
1 0 1 8 1 8

REF POINT
0 0 0 0 0 0

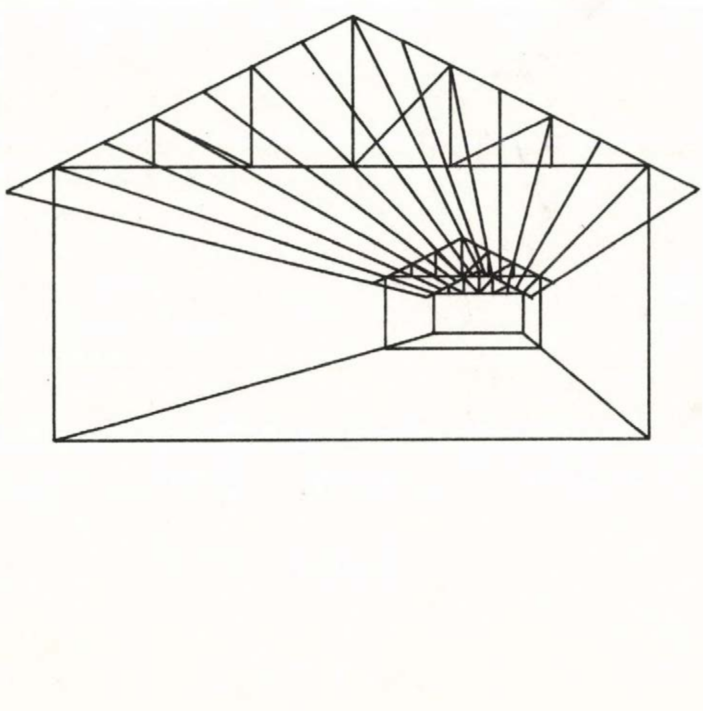
NORMAL
0 0 0 0 1 0

DISTANCE
0 0



UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
55 025 015 0



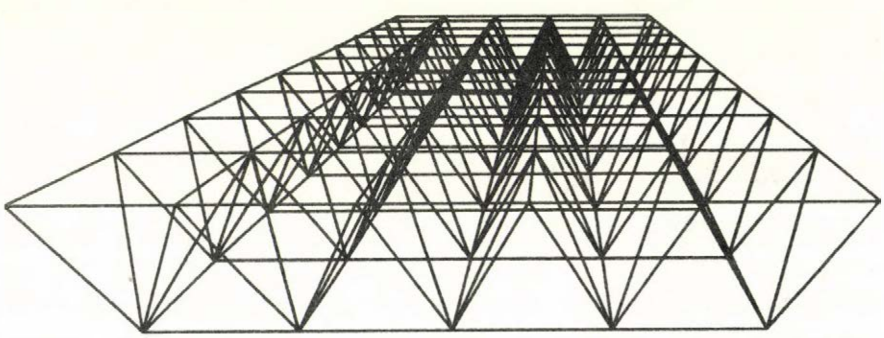
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 0 0 -1 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 1 0 0 0

EYE COORD
18 0 5 0 7 0



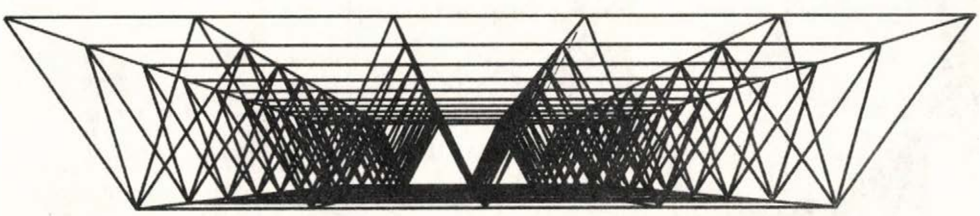
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 1 0 0 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 0 0 1 0

EYE COORD
6 2 -8 0 13 0



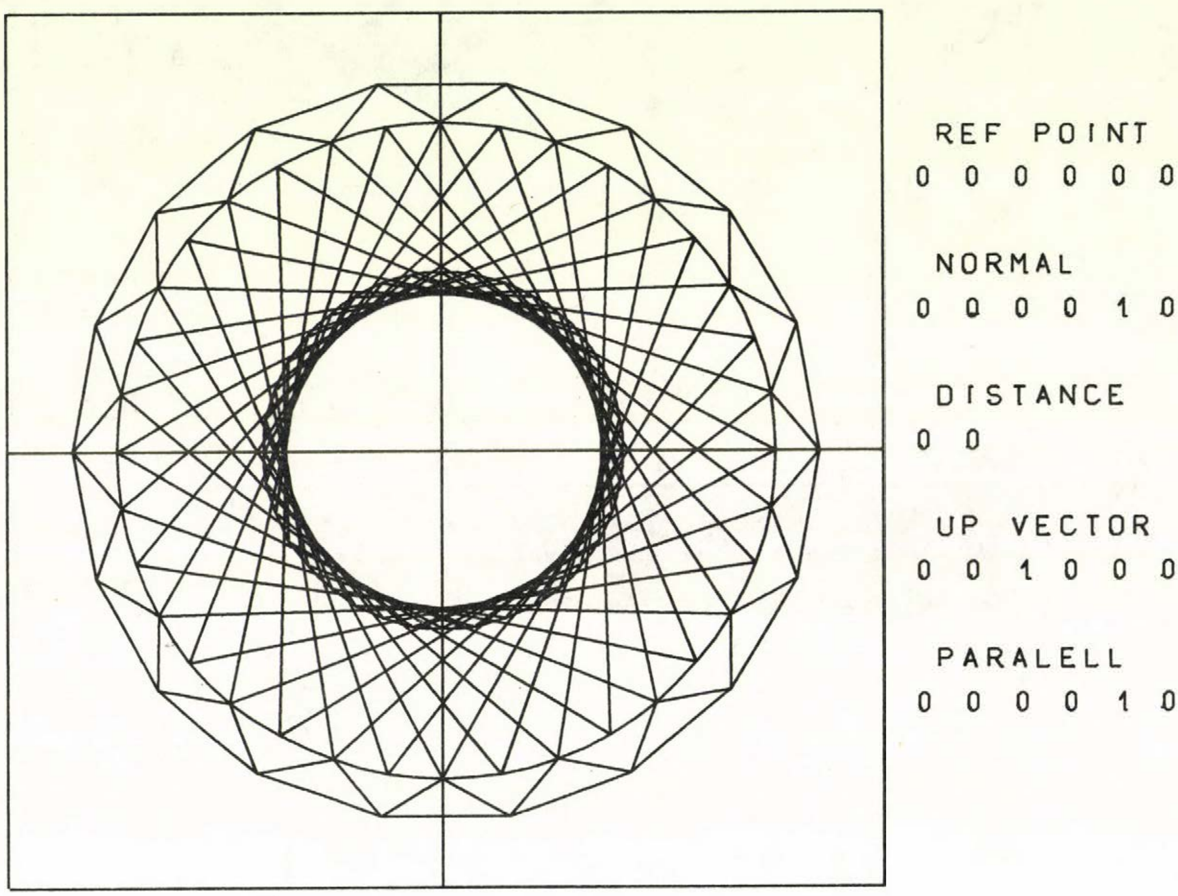
REF POINT
0 0 0 0 0 0

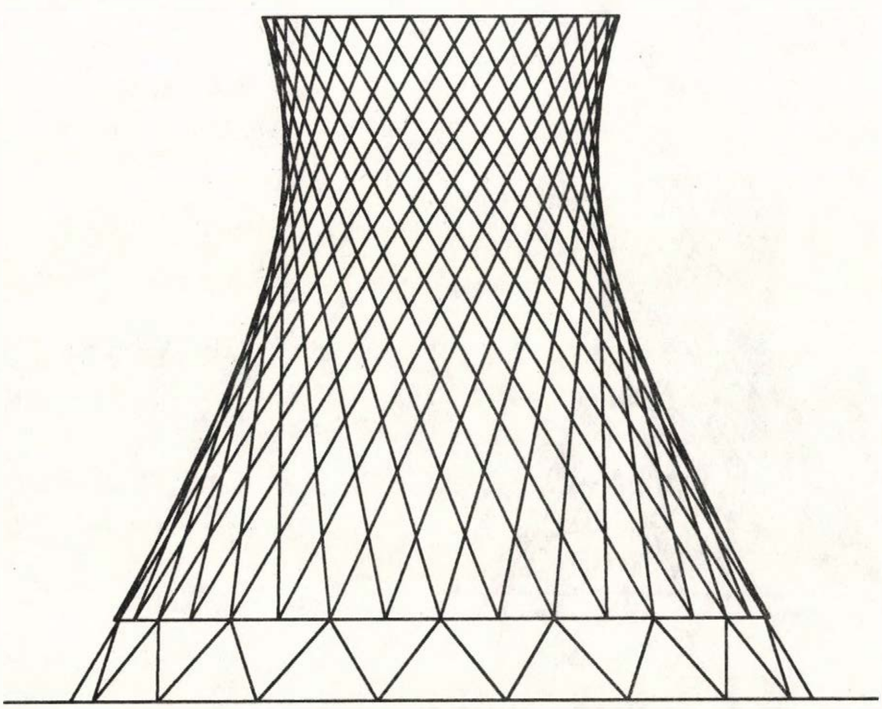
NORMAL
0 0 1 0 0 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 0 0 1 0

EYE COORD
4 6 -9 0 8 3


REF POINT
0 0 0 0 0 0
NORMAL
0 0 0 0 1 0
DISTANCE
0 0
UP VECTOR
0 0 1 0 0 0
PARALELL
0 0 0 0 1 0



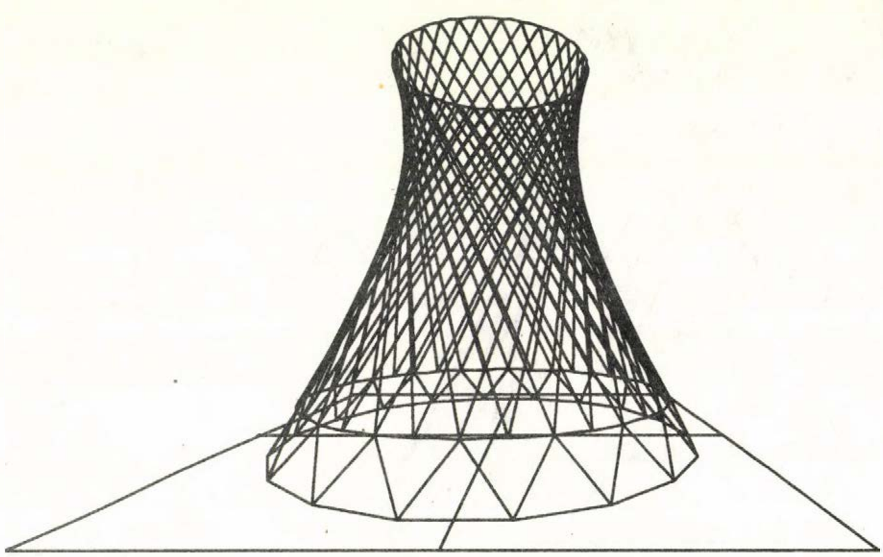
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 1 0 0 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 0 0 1 0

PARALELL
0 0 1 0 0 0



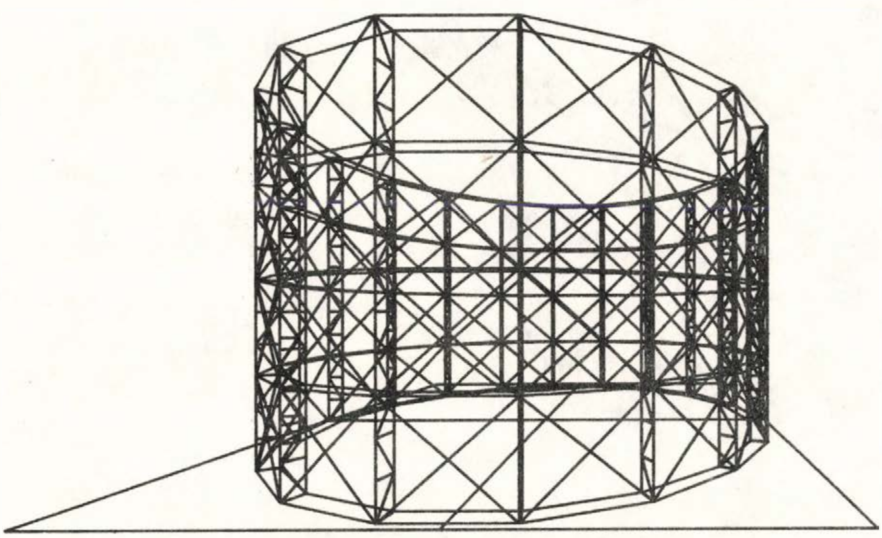
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 1 0 0 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 0 0 1 0

EYE COORD
********45 0



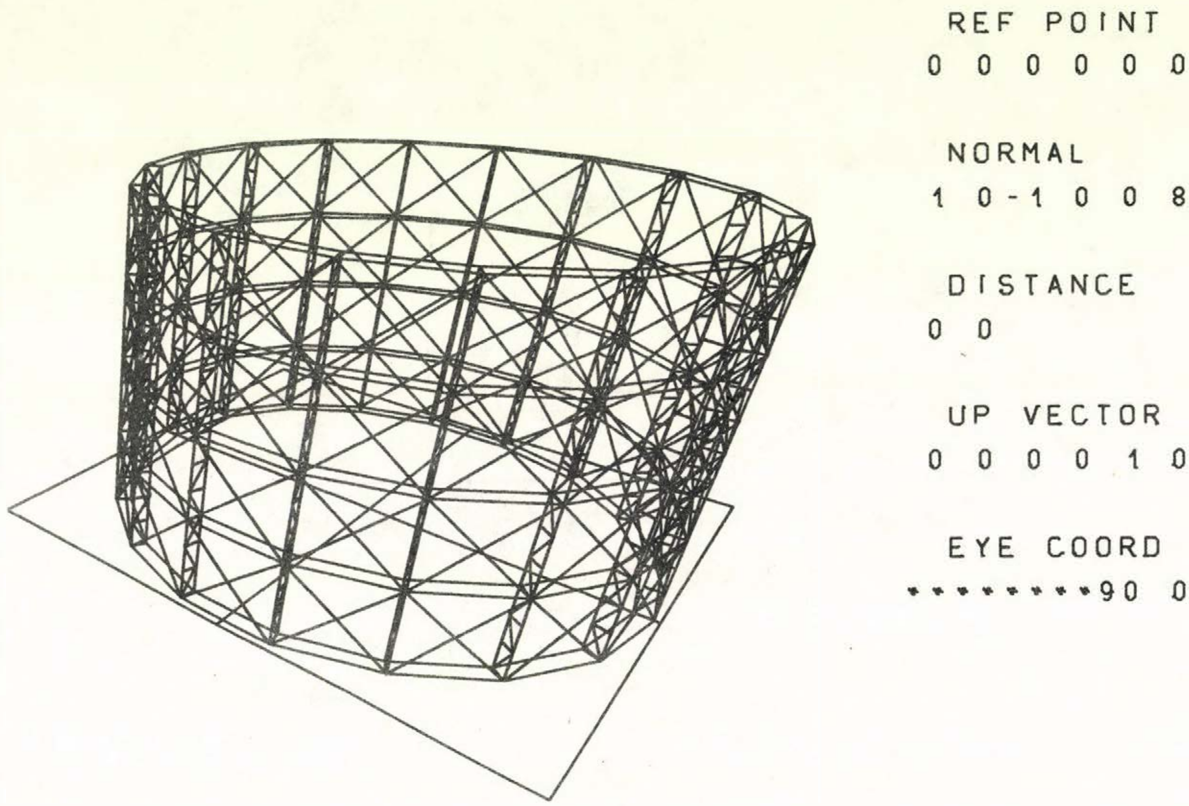
REF POINT
0 0 0 0 0 0

NORMAL
0 0 1 0 0 0

DISTANCE
0 0

UP VECTOR
0 0 0 0 1 0

EYE COORD
74 0****25 0


REF POINT
0 0 0 0 0 0
NORMAL
1 0 -1 0 0 8
DISTANCE
0 0
UP VECTOR
0 0 0 0 1 0
EYE COORD
********90 0

7. IRODALOMJEGYZÉK:

[1] GSPC "Status report of the Graphics Standards Planning Committee of ACM/SIGGRAPH"
Computer Graphics, 11, 3, 1977

[2] Newman-Spriull: Principles of interactive computer graphics
Mc Graw-Hill, Inc. New York 1973

[3] Rogers-Adams: Mathematical elements for computer graphics
Mc Graw-Hill, Inc. New York 1976

[4] Carlbom-Paciorek: Planar Geometric Projections and viewing transformation
Computing Surveys 11, 4, 1978

[5] Steve Coons: Transformations and matrices

[6] Roberts: Homogeneous matrix representation and manipulation of N-dimensional constructs
MIT Lincoln Laboratory, MS 1405, May 1965

[7] Maxwell: General Homogeneous coordinates in space of three dimensions
Cambridge University Press 1951

[8] Krammer Gergely: MGSS80
BM. KG. 79.01.31. MTA SzTAKI

[9] Hajós György: Bevezetés a geometriába

A T A N U L M Á N Y O K sorozatban 1978-ban megjelentek:

86/1978 Ruda Mihály:A SIS77 statisztikai információs rendszer kialakitásának szempontjai, alkalmazásának és továbbfejlesztésének lehetőségei

87/1978 Téli iskola - Operációs rendszerek elmélete

A T A N U L M Á N Y O K sorozatban 1979-ben megjelentek:

88/1979 Renner Gábor - Gaál Balázs - Hermann Gyula - Horváth László - Várady Tamás: Szoborszerü felületek tervezése és megmunkálása

89/1979 Ruda Mihály: A SIS77 statisztikai információs rendszer /a felhasznált számitástechnikai eszközök, a rendszer szerkezete és programjai/

90/1979 Bányász Csilla - Keviczky László: Optimum Insensitivity of the Linear-continuous Transformation

91/1979 Téli iskola /Szentendre/

92/1979 Bolla M., Csáki P., Fischer J., Herodek S., Hoffmann Gy., Kutas T., Telegdi L., Wittman I.: A balatoni ökoszisztéma modellezése

93/1979 Andor László: Kisgépes adatbázis kezelő rendszer

94/1979 Gertler János: Egy statisztikus szürési eljárás számitógépes folyamatirányitásához

95/1979 Báthory M.; Galló V.; Kovács E.; Mérő L.; Siegler A.; Vajta L.: Festőrobot vezérlésére alkalmas alakfelismerési berendezés

96/1979 Mérő László: Konturkeresés zajos digitalizált képekben

97/1979 Pásztorné Varga Katalin - Matavovszky Tibor: Boole függvény