tanulmányok

71/1977

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

PARTICIÓFEDÉSEK ÉS LEFOGÓHALMAZOK HIPERGRÁFOKBAN

Irta:

Gyárfás András

Kandidátusi értekezés

Tanulmányok 71/1977.

A kiadásért felel:

DR. VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 053 X
ISSN 0324-2951

Készült:
az Országos Műszaki Könyvtár és Dokumentációs Központ
házi sokszorositójában
F.v.: Janoch Gyula

Tartalom

Bevezetés 5

1. Partícióféedések hipergráfokon 9

    1. Alapvető definiciók 9

    2. Összefüggő részhipergráfok 10

    3. s osztályu hipergráfok 11

    4. Feloldható blokkrendszerek 13

2. Teljes uniform hipergráfok partícióféedései 14

    1. Példák partícióféedésekre 14

    2. K_n^s s-rétü partícióféedéséről 16

    3. K_n^2 3-rétü partícióféedéséről 18

    4. K_n^2 4-rétü partícióféedéséről 23

    5. K_n^2 s-rétü partícióféedéséről 26

    6. K_n^r partícióféedései r-nél nem sokkal többrétüen 28

3. Teljes r osztályu hipergráfok partícióféedései 36

    1. Két tétel r osztályu hipergráfokra 36

    2. Teljes páros gráfok partícióféedései 40

4. γ_k és τ kapcsolatáról hipergráfok összegében 47

    1. γ_k és τ hipergráfok t-szerezésében 47

    2. γ_k és τ hipergráfok diszjunkt összegében 52

5. Nem csökkenthető lefogóhalmazok számáról 57

6. Fogalmak, jelölések 59

Bevezetés

Ezen értekezés a kombinatorika egy jelentős, viszonylag uj, és dinamikusan fejlődő ágához, a hipergráfok elméletéhez kapcsolódik. A hipergráfok a gráfok általánositásai. Az első monográfia, melyben a hipergráfoknak külön fejezetek vannak szentelve, C.Berge könyve [3]. E könyv megjelenésétől /1970/ általános a hipergráf elnevezés, az elmélet alapjai azonban régebbre nyulnak vissza, halmazrendszerek, r-gráfok, általánositott gráfok elnevezéssel sok dolgozat foglalkozott olyan kérdésekkel, melyeket ma a hipergráfok elméletéhez sorolunk.

Értekezésünk hipergráfok éleinek csucspartíciókkal történő lefedéseivel, továbbá hipergráfok éleinek lefogóhalmazaival foglalkozik, és e két kérdés összefüggéseivel. Az előbbit azért tartjuk érdekesnek, mert több ismert problémához kapcsolódik - ezt későbbiekben részletezzük - az utóbbira pedig a kombinatorika számos kérdése visszavezethető. Lefogóhalmazokkal kapcsolatos eredmények és problémák sokasága található [3] és [13] müvekben.

Az értekezés nagyobb része /1.,2.,3. fejezet/ egy problémakörrel, teljes és s-osztályu teljes hipergráfok partíciófedéseivel foglalkozik. Egy hipergráf partíciófedésén a csucsok olyan particióit értjük, melynél minden él benne van valamelyik partició valamelyik osztályában. Egy s számu particióból álló particiófedést s-rétü particiófedésnek nevezünk. Érdeklődésünk főleg olyan problémák felé irányul, hogy egy s-rétü particiófedés esetén mekkora fedőhalmaznak kell léteznie, illetve hány fedőhalmazzal fedhetők le a hipergráf csucsai. Kiderül, hogy e kérdéseknek több arculata van. A következő tételt három ekvivalens alakban is kimondjuk, ezzel érzékeltetve ezt a többarcuságot:

1.tétel: K_n^s /a teljes s rangu uniform n pontu hipergráf, $s \leqq n$/ s-rétü particiófedése csak triviális lehet, azaz valamelyik partició egyetlen fedőhalmazból áll.

1'.tétel: K_n^s éleinek minden s szinnel való szinezésében valamelyik szin élei összefüggő, n csucsu részhipergráfot alkotnak.

1''.tétel: Ha egy s osztályu hipergráfban bármely s élnek van közös csucsa, akkor az összes élnek van közös csucsa. /Feltételezve, hogy létezik legalább s számu él./

Általában H hipergráf s-rétü particiófedéseire vonatkozó kérdéseket H duális hipergráfjára átfogalmazva s-osztályu hipergráfokra vonatkozó problémákat nyerünk – ezek közül az egyik H.Ryser egy sejtése, mely szerint egy s osztályu hipergráfra $\tau \leqq (s-1)\nu$, ahol ν a független élek maximális számát, τ pedig az éleket lefogó csucsok minimális számát jelenti. E sejtésnek két speciális esetét bizonyitjuk be, a $\nu = 1$, s=3 és a $\nu = 1$, s=4 eseteket/ 2.tetel és 4.tétel/. ν =1 esetére minden s-re bebizonyitjuk e sejtés egy következményét, hogy egy s osztályu e élü hipergráf $\nu = 1$ esetén tartalmaz $\left[\frac{e}{s-1}\right]^*$ foku csucsot / 5.tétel/. A Ryser sejtés s=2 -re Kőnig Dénes ismert tételét adja [11] , mely szerint páros gráfban a független élek maximális száma és az éleket lefogó pontok minimális száma megegyezik. Az s $\geq$ 3 esetben a nehézség éppen az, hogy a lefogóhalmazokat és az élpakolásokat nem tudjuk célszerüen kapcsolatba hozni.

A particiófedések témája egy másik megfogalmazásban általánositott Ramsey-tipusu problémákhoz kapcsolódik: azt kérdezzük, hogy egy teljes /vagy s osztályu teljes/ hipergráf éleit szinezve, mekkora összefüggő monokromatikus részhipergráf létezik? Ezt a kérdést gráfok esetére Gerencsér László és a szerző [6] dolgozatában vetette fel. Itt hipergráfokra vetjük fel ugyanezt a kérdést. Megjegyezzük, hogy ebből az irányból kezdtük vizsgálni a particiófedések kérdését. A 3.tétel általánositja a [6] ill. [1] -ben szereplő eredményt, mely szerint egy teljes gráf éleinek 3-szinezésében mindig van egy, kb. a pontszám fele nagyságu összefüggő egyszinü részgráf. Az 5.tétel megjavitja [6] becslését s szinnel való szinezés esetére, lényegében a lehető legjobb becslést kapjuk: n pontu teljes gráf éleit s szinnel szinezve, mindig van egy legalább $\left[\frac{n}{s-1}\right]^*$ pontu egyszinü összefüggő részgráf. A 6. és 7.tétel "valódi" hipergráf-tétel, olyan értelemben, hogy gráfokra nem érvényesek. A 7.tétel igy szól: s $\geq$ 3 esetén K_n^s éleit s+1 szinnel szinezve, valamelyik szinben van egy legalább $\left[\frac{n\cdot s}{s+1}\right]^*$ pontu összefüggő egyszinü részhipergráf -

és ez a lehető legjobb eredmény. A 6.tétel ezt s+1 -ről s+j szinre általánositja, ahol j kicsi s-hez képest. Ebben az esetben az eredmény csak asszimptotikusan pontos.

Egy hipergráf lefogóhalmazán csucsainak olyan részhalmazát szokás érteni, melynek minden éllel van közös csucsa. Az eddig vázolt problémák legtöbbje kapcsolatban van lefogóhalmazokkal, ez az oka annak, hogy további két fejezetben foglalkozunk velük. A 4. fejezet hipergráfok összegének lefogóhalmazaival foglalkozik – ezek a vizsgálatok Lehel Jenő és a szerző korábbi / [7] és [8] / dolgozataihoz kapcsolódnak, itt azonban elsősorban hipergráfelméleti szempontból vizsgáljuk a kérdést. Bebizonyitjuk C.Berge egy sejtését /12.tétel/ továbbá, hogy kiegyensulyozott /balanced/ hipergráfok összegében ν korlátossága τ korlátosságát vonja maga után. A fejezet néhány negatív eredményt is tartalmaz. Az 5. fejezet egy minimális lefogóhalmazok számára vonatkozó becslést ismertet egy következményével: egy r rangu hipergráfnak legfeljebb r^k legfeljebb k elemü minimális lefogóhalmaza lehet.

A szokásostól eltérően a használt fogalmakat és jelöléseket a disszertáció végére helyeztük el.

1. Particiófedések hipergráfokon.

1. Legyen H = /V,E/ egy hipergráf. H csucsainak particióján V diszjunkt, nem üres osztályozását értjük. Legyen adva H csucsainak néhány, mondjuk s számu particiója. Azt mondjuk, hogy ezen s partició lefedi H éleit, ha E minden elemét tartalmazza valamelyik partició valamelyik osztálya. A particiók osztályait fedőhalmazoknak fogjuk nevezni. H éleinek lefedését s particióval az s-rétü particiófedés kifejezéssel is helyettesiteni fogjuk a rövidség kedvéért. Ha nem lényeges az, hogy hány partició szerepel, egyszerüen particiófedésről beszélünk.

Legyen P és Q két partició H hipergráfon. Azt mondjuk, hogy P finomabb Q-nál, ha P minden fedőhalmaza része Q valamely fedőhalmazának. Egy hipergráf particióin ez nyilván részben rendezést definiál. Ha P és Q particiófedések H hipergráfon, akkor P-t finomabbnak mondjuk Q-nál, ha minden P-beli partició finomabb valamely Q-belinél.

Egy partició triviális, ha egyetlen fedőhalmazból áll. Egy particiófedés triviális, ha van triviális particiója. Nyilvánvaló, hogy egy triviális particiófedésnél minden más particiófedés finomabb.

Legyen P particiófedés H = /V,E/ hipergráfon. Tekintsük azt a hipergráfot, melynek csucshalmaza V, élei pedig P particióinak fedőhalmazai. Ha egy fedőhalmaz több particióban is szerepel, akkor ezt megfelelő multiplicitással vesszük. Az igy definiált hipergráfot <u>P fedéshipergráfjának</u> nevezzük, és H/P/-vel jelöljük. Jegyezzük meg, hogy H/P/ hipergráf nem mindig egyszerü hipergráf. H/P/ azon részhipergráfjait, melyek egy partició fedőhalmazaiból állnak, a partició <u>párhuzamos osztályának</u> nevezzük. Egy párhuzamos osztály nyilván H/P/ csucsait lefedő független élrendszer. A H/P/ hipergráf élei természetesen lefedik H éleit.

Sokszor fog szerephez jutni H/P/-nek az a részhipergráfja, mely H/P/ /tartalmazásra/ maximális éleiből áll – egy élt csak egyszeres multiplicitással számolva. Ezt a hipergráfot <u>P particiófedés bázishipergráfjának</u> nevezzük és H/Pmax/-al jelöljük. Beszélhetünk H/Pmax/ párhuzamos osztályairól is – ezek H/Pmax/ azon részhipergráfjai, melyek élei egy particióhoz tartoznak. Egy párhuzamos osztály H/Pmax/-ban független élrendszer – H/Pmax/ csucsait azonban nem biztos, hogy lefedi egy párhuzamos osztály. Jegyezzük meg, hogy H/Pmax/ bármely két különböző élére $e \not\subseteq f$. <u>Két particiófedés hasonló</u>, ha bázishipergráfjaik izomorfak, és a párhuzamos osztályok is egymásba mennek át az izomorfizmusnál. A hasonlóság nyilván ekvivalencia reláció egy hipergráf particiófedései között.

<u>2</u>. Tekintsük most a H=/V,E/ hipergráf egy élszinezését s szinnel. H maximális egyszinü részhipergráfjainak összefüggő komponensei s-rétü particiófedést definiálnak H-n. Ezt a particiófedést az <u>élszinezés által generált parti-</u>

ciófedésnek nevezzük. Másrészt, ha kiindulunk H egy s-rétü particiófedéséből, akkor ebből kaphatunk élszinezést ugy, hogy azokat az éleket, melyek az i. partició egy fedőhalmazába esnek, az i. szinnel szinezzük, minden $1 \leq i \leq s$ -re. Ilymódon persze egy él több szint kaphat, ezért a többször szinezett élekről hagyjunk el szineket izlés szerint, amig végül minden élhez csak egy szin lesz rendelve. Egy élszinezést, mely a fenti módon adódik, particiófedés által generált élszinezésnek nevezzük. A definiciók közvetlen folyományai a következő állitások:

A1: H hipergráfon egy s-rétü particiófedés olyan élszinezéseket generál, melyekben legfeljebb s szin van.

A2: Ha egy élszinezést H hipergráfon P particiófedés generálja, akkor ez az élszinezés olyan Q particiófedést generál H-n, mely P-nél finomabb.

A3: Az élek s szinnel való szinezése s-rétü particiófedést generál.

3. Legyen P particiófedés H hipergráfon és tekintsük ennek H/P/ fedéshipergráfját. H/P/ duális hipergráfjára mondunk ki két állitást, melyek a definiciók következményei:

A4: Ha P s-rétü particiófedés H-n, akkor H/P/ duálisa s-osztályu hipergráf, melyben nincs izolált csucs.

A5: H hipergráf egy élének H/P/ duálisában élhalmaz felel meg - ezen élhalmaznak van közös csucsa.

Egy s osztályu, izolált csucsot nem tartalmazó hipergráfból kiindulva, a duális hipergráf segitségével s-rétü particiófedést konstruálhatunk. Vegyünk egy s osztályu, izolált csucsot nem tartalmazó hipergráfot, melyben élhalmazok vannak kijelölve, ugy , hogy minden egyes élhalmaznak van közös csucsa. Tekintsük ennek duális hipergráfját, és legyen

V a duális hipergráf csucsainak halmaza

E az s osztályu hipergráf kijelölt élhalmazainak megfelelő ponthalmazok V-ben

P particiófedés egyes particióit az s osztályu hipergráf csucsosztályai definiálják – azaz a duális hipergráf élei alkotják a particiófedést.

A6: A fenti módszerrel kapott H = /V,E/ hipergráfon P s-rétü particiófedés.

Erdemes kiemelni azt az esetet, amikor P particiófedést egy teljes, uniform hipergráfon definiáljuk. Ebben az esetben ugyanis az A4.,A5.,A6. állitásokban megfogalmazott párhuzam az s osztályu hipergráfok és a particiófedések között egyszerüsödik:

A7: Ha K_n^r -en P egy s-rétü particiófedés, akkor K_n^r fedéshipergráfjának duális hipergráfja olyan s osztályu, n élü hipergráf, melyben bármely r élnek van közös csucsa. Forditva, egy n élü, s osztályu hipergráf, melyben bármely r élnek van közös csucsa, és nincs izolált pontja, definiál egy s-rétü particiófedést K_n^r hipergráfon.

Jegyezzük meg, hogy az s-rétü particiófedések és a megfelelő s osztályu hipergráfok ekvivalens fogalmak. Ez azt jelenti, hogy az A4.,A5.,A6. és A7.-ben kifejezett leképezések az s-rétü particiófedések és bizonyos s osztályu hipergráfok között egymás inverzei. Ennek átgondolásához csak az kell, hogy egy hipergráf duálisának duálisa az eredeti hipergráffal izomorf.

4. Tekintsük azt az esetet, amikor H-t teljes uniform hipergráfnak választjuk, azaz $H = K_n^t$ /A későbbi tételek nagy részénél igy fogjuk H-t megválasztani/. Ebben az esetben a particiófedéseknek kapcsolatuk van az u.n. feloldható /resolvable/ t-design-okkal. [5]. Minden feloldható t-design $\lambda = 1$ -el egy particiófedést ad, amelyben egy paralell osztály felel meg egy particiónak, a blokkok pedig a fedőhalmazoknak. A particiófedés a feloldható t-designoknál "szabadabb" struktura, hiszen itt azt akarjuk csupán, hogy H minden éle legalább egy fedőhalmazban legyen benne. Bizonyos "kritikus" esetekben azonban egy particiófedés léte vagy nemléte pontosan a megfelelő feloldható t-design létezésén mulik.

2. Teljes, uniform hipergráfok particiófedései.

1. Néhány példát adunk particiófedésekre.

P1. Legyen $n \geq r$ és osszuk fel K_n^r csucsait egyenletesen $r+1$ részre, jelölje A_i az i. részt. K_n^r $r+1$ -rétü particiófedését definiáljuk igy: az i. partició egyik fedőhalmaza A_i, a másik $V/K_n^r/ - A_i$. A fedéshipergráf és bázishipergráf rangja $\left[\frac{n \cdot r}{r+1}\right]^*$, és a bázishipergráfban minden pont foka r.

P2. $j,u \geq 1$ és $n = /r-1/ju + /j+1/u$ választással bontsuk fel K_n^r csucsait $A_1, A_2, \dots, A_j, A_{j+1}$ diszjunkt u elemü halmazukra, továbbá $B_1, B_2, \dots, B_{r-1}$ diszjunkt ju elemü halmazokra. K_n^r $r+j$ -rétü particiófedésének bázishipergráfját definiáljuk: az élek az $\bigcup_{k=1}^{r-1} B_k \cup A_i$ halmazok /i=1,2,.. ..,j,j+1/ és az $\bigcup_{k=1}^{j+1} A_k \cup \bigcup_{k \neq i} B_k$ halmazok /i=1,2,...r/. Az ilymódon kapott bázishipergráf uniform, rangja $/r-1/ju + u$. Minden pont foka r vagy r+1. Megjegyezzük, hogy j=1 esetén az első példát, P1-et adja P2 is.

P3. Legyen r páratlan és 3-al osztható. Tekintsünk $r/r+1/$ pontot egy M mátrixban elhelyezve, melynek r sora és r+1 oszlopa van. A mátrix elemei lesznek hipergráfunk pontjai. Definiáljuk $E_1, E_2, \dots, E_k$ éleket $k=\frac{3/r+1/}{2}$ -re a következő módon:

a. $1 \leq i \leq r+1$ -re, páratlan i-re E_i -t ugy kapjuk, hogy M-ből elhagyjuk az i. oszlopot és az i+1-ik oszlop felső $\frac{r}{3}$ elemét.

$1 \leq i \leq r+1$ -re, páros i-re E_i-t ugy kapjuk, hogy M-ből elhagyjuk az i. oszlopot és az i-1 -ik oszlop felső $\frac{r}{3}$ elemét.

b. $1 \leq i \leq \frac{/r+1/}{2}$ -re E_{r+1+i} -t ugy kapjuk, hogy M-ből elhagyjuk a 2i -edik és 2i-1 -edik oszlop alsó $\frac{2 \cdot r}{3}$ elemét.

Könnyü belátni, hogy az E_i élek $/1 \leq i \leq k/$ lefedik M összes r elemü részhalmazát, ezért az E_i, $M - E_i$ élek egy k-rétü particiófedést alkotnak $K^r_{r/r+1/}$ -en. A bázishipergráf uniform és rangja $r/r-\frac{1}{3}/$.

Megjegyzés: a fenti konstrukció kiterjeszthető minden r/r+1/u alaku n számra $/u \geq 1$,egész/, ugy, hogy egy pont helyébe u pontot teszünk. Ekkor továbbra is k-rétü particiófedést kapunk, a bázishipergráf /és fedéshipergráf/ rangja pedig $u \cdot r \cdot /r-\frac{1}{3}/$ lesz.

P4. Legyen n ponton adva egy feloldható t-design, $\lambda = 1$ paraméterrel, r párhuzamos osztállyal, melyben b nagyságu blokkok vannak. /Például n=8, t=3, r=7, b=4 esetén az 1234-5678, 1256-3478, 3456-1278, 1457-2368, 2357-1468, 2458-1367, 1358-2467 egy ilyen 3-design/

Tekintsük most a fenti adatokkal K^t_n r-rétü fedését. Ha ezt ugy akarjuk megcsinálni, hogy a fedéshipergráf rangja a lehető legkisebb legyen, akkor ez a rang nyilván b, és a feloldható t-design egy ilyen r-rétü fedést szolgáltat.

Baranyai Zsolt szép eredménye szerint [2] , ha n osztható t-vel, akkor az n elemü halmaz összes t elemü részhalmazából álló t-design $/\lambda = 1/$ feloldható, ezért igaz a következő tétel:

Tétel: Ha n osztható t-vel, akkor K_n^t -nek van olyan $t \cdot \binom{n}{t} \cdot \frac{1}{n}$ -rétü particiófedése, melyben a fedéshipergráf rangja t.

Egy másik, szép eredmény D.K.Ray-Chaudhuri és R.M.Wilson tétele [5] , mely a t=2 esetre vonatkozik, és azt mondja ki, hogy minden $k \geq 2$ -höz van olyan C/k/ konstans, hogy $n \geq C/k/$ és $n \equiv k \mod k/k-1/$ esetén létezik /n,k,1/ feloldható blokkrendszer. Ez példát ad particiófedésre is.

2. K_n^s s-rétü particiófedése.

Irjunk fel egy egyszerü állitást, mely Erdős Páltól származik:

A8: Ha K_n^2 éleit két szinnel szinezzük, akkor tartalmaz n pontu egyszinü, összefüggő részgráfot.

Ezzel ekvivalens állitásokat irhatunk fel az első fejezet fogalmait és apró állitásait használva:

A9: K_n^2 2-rétü particiófedése csak triviális lehet.

A10: Ha egy 2-osztályu hipergráfban /páros gráf/ bármely két élnek van közös pontja, akkor az összesnek is van.

Megjegyezzük, hogy A8 és A9 ekvivalenciája A1,A2 és A3-ból, A9 és A10 ekvivalenciája pedig A7-ből következik. Az állitások közül A10 az, melynek igazsága a legnyilvánvalóbb.

A továbbiakban előforduló tételek esetében is fennáll a lehetőség, hogy e három tálalás között válasszunk. Az első beállitásban általánositott Ramsey-problémák, a másodikban hipergráfok éleinek fedése, a harmadikban s osztályu hipergráfok tulajdonságai cimszavakkal lehetne jelezni a tétel hovatartozását. Igyekszünk mindig kiemelni azt a változatot, mely a leginkább kifejező.

Az A8. állitás tetszetős, de nem mély általánositása a következő:

<u>1. tétel</u>: K_n^s éleit s szinnel szinezve, valamelyik szinben van egyszinü n pontu összefüggő részhipergráf.

<u>1. következmény</u>: K_n^s s-rétü particiófedése mindig triviális.

<u>2. következmény</u>: Ha egy s osztályu hipergráfban bármely s élnek van közös pontja, akkor az összes élnek van. Ugy is kifejezhető ez, hogy $\nu_{s-1} = s-1$ -ből $\tau = 1$ következik. /Itt, és a továbbiakban feltesszük, hogy a "bármely s élnek van közös pontja" kifejezés használata feltételezi, hogy legalább s él van./

<u>1.tétel bizonyitása</u>: A szinek és a pontok számára vonatkozó indukciót alkalmazunk. s=2 esetére a tétel A8.-ból következik minden n-re. n=s esetén a tétel nyilvánvalóan igaz minden s-re. E két dolog biztositja, hogy az indukció müködik. Legyen $s \geq 3$, $n > s$ és p tetszőleges pont K_n^s -ből. Hagyjuk el a p pontot K_n^s -ből, a kapott K_{n-1}^s hipergráfnak az indukciós feltevés értelmében van egyszinü, pl. piros n-1 pontu, összefüggő H részhipergráfja. Ha p-re illeszkedik K_n^s -ben piros él, akkor ezt H-hoz hozzávéve n pontu összefüggő piros részhipergráfot kapunk, és ezt akartuk bizonyitani. Ha p-re nem illeszke-

dik piros él, akkor vágjuk le p-t K_n^s -ből. Igy a K_{n-1}^{s-1} hipergráfhoz jutunk, az indukciós feltevés értelmében ennek van egyszinü, pl. kék n-1 pontu összefüggő H' részhipergráfja. H' minden éléhez p pontot visszatéve K_n^s kék, n pontu, összefüggő részhipergráfját kapjuk. □□□

3. K_n^2 3-rétü fedéseiről.

Láttuk, hogy K_n^2 2-rétü particiófedése csak triviális lehet. Nézzük meg K_n^2 3-rétü particiófedéseinek strukturáját. K_n^2 hipergráfon speciális 3-rétü particiófedéseket definiálunk. Legyen $V/K_n^2/ = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, ahol A_i -k diszjunkt halmazok és A_4 üres is lehet, a többi azonban nem üres. A particiófedés bázishipergráfjának élei az $A_i \cup A_j$ halmazok $i \neq j$ -re. Megadjuk a párhuzamos osztályokat:

$PO_1 = \{A_1 \cup A_2 , A_3 \cup A_4\}$ $\qquad$ $PO_1 = \{A_1 \cup A_2\}$

$PO_2 = \{A_1 \cup A_3 , A_2 \cup A_4\}$ ha $A_4 \neq \emptyset$ $\qquad$ $PO_2 = \{A_1 \cup A_3\}$ ha $A_4 = \emptyset$

$PO_3 = \{A_1 \cup A_4 , A_2 \cup A_3\}$ $\qquad$ $PO_3 = \{A_2 \cup A_3\}$

A definiált bázishipergráfokat B_1 -el és B_2 -vel jelöljük. Megjegyezzük, $A_4 \neq \emptyset$ esetén a párhuzamos osztályok megadásával már particiófedést kaptunk, $A_4 = \emptyset$ esetén azonban még nem.

2.Tétel: K_n^2 3-rétü, nem triviális particiófedésének bázishipergráfja izomorf a fent megadott hipergráfok valamelyikével. /Az izomorfiába a párhuzamos osztályok megfelelkezését is beleértve/.

1.Következmény: K_n^2 3-rétü nem-triviális P particiófedésénél ϱ /H/P// = 2.

2.Következmény: K_n^2 éleinek minden 3-szinezésében van egy legalább $\left[\frac{n}{2}\right]^*$ pontu egyszinü, összefüggő részgráf.

A 2.Tétel segitségével a 2.Következménynél erősebb állitást is kimondhatunk, mely az ugynevezett általánositott Ramsey elméletbe is beleillik. Ehhez vezessük be a következő jelölést: $r/k_1,k_2,k_3/$ jelölje azt a legkisebb természetes számot, melyre igaz a következő: n = = $r/k_1,k_2,k_3/$ -re K_n^2 gráf éleit tetszőlegesen három szinnel szinezve, valamely i-re /i=1,2,3/ K_n^2 tartalmaz egy legalább k_i pontu összefüggő, egyszinü részgráfot.

3.Tétel: legyen $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3$, ekkor

$$r/k_1,k_2,k_3/ = \begin{cases} 4m - 2 & \text{ha } k_1=k_2=k_3=2m \\ \max \ / \ 2k_1 - 1 \ , \ \left[\frac{k_1+k_2+k_3-1}{2}\right] \ , k_3 \ / & \end{cases}$$

Megjegyzés: A tétel speciális esete, a $k_1=k_2=k_3=k$ u.n. diagonális eset szerepel [6]-ban, k=2m esetére hibásan, ezt Andrásfai javitotta [1].

2.Tétel bizonyitása: legyen P $H=K_n^2$ nem triviális 3-rétü fedése. Tekintsük P bázishipergráfját, ebben minden párhuzamos osztályban van él - ellenkező esetben K_n^2 -t P két particiója is lefedi, ekkor A9. állitás miatt ez csak triviális particiófedés lehet, ami ellentmond annak, hogy P nem triviális. Legyen e és f H/Pmax/ két éle különböző párhuzamos osztályokból. e-f és f-e nem üres, a közöttük futó éleket H/Pmax/ harmadik párhuzamos osztályából való g él fedheti csak le. $e \cap f \neq \emptyset$, különben $g \supseteq e$ /és $g \supseteq f$/ lenne, ami H/Pmax/-ban lehetetlen. Két eset lehet: a./ ha $e \cup f = V/H/$ akkor könnyü látni, hogy e,f,g élek alkotják H/Pmax/ éleit, ekkor H/Pmax/ nyilván izomorf B_2-vel. /$e \cap f$, $e \cap g$ és $f \cap g$ alkotják A_1, A_2, A_3 halmazokat/. b./ ha $e \cup f$ valódi része V/H/-nak, akkor $e \cap f$ és $V/H/ - /e \cup f/$ közötti éleket H/Pmax/ valamely g_1 éle fedheti csak, mely e-t és f-et tartalmazó párhuzamos osztályban nincs benne. $g \cap g_1 = \emptyset$, hiszen g és g_1 ugyanabban a párhuzamos osztályban van. Az előzőhöz hasonló érvelés mutatja, hogy $V/H/ - /e \cup f/$ és e-f közötti éleket olyan f_1, $V/H/ - /e \cup f/$ és e-f közötti éleket olyan e_1 él fedheti csak, melyre e, e_1 ill. f, f_1 ugyanabban a párhuzamos osztályban van. e, e_1, f, f_1, g, g_1 éleken kivül több él nem is lehet H/Pmax/-ban, ezt könnyü ellenőrizni, ilymódon H/Pmax/ izomorf B_1-el.□□□

<u>3.Tétel bizonyitása</u>: jelölje $f = f/k_1, k_2, k_3/$ a tételben szereplő függvényt. Belátjuk először, hogy

$$r/k_1, k_2, k_3/ \leqq f \qquad /i/$$

Tekintsük e célból K_f^2 -nek tetszőleges 3-szinezését, és nézzük a szinezés által generált particiófedést K_f^2 -n. Ha ez triviális, akkor valamely szinben van egy összefüggő, egyszinü részgráf és f definiciója olyan, hogy $max/k_1, k_2, k_3/ \leqq f$. Feltehetjük ezért, hogy a particiófedés nem triviális. Alkalmazzuk a 2.Tételt, e szerint a particiófedés bázishipergráfja izomorf B_1 -el, vagy B_2 -vel. a. Ha B_1-el izomorf, válasszuk ki azt az A_i, A_j párt, melyre $|A_i| + |A_j|$ a legnagyobb. $k_1 = k_2 = k_3 = 2m$

esetén f=4m-2, ezért $|A_i| + |A_j| \geqq 2m-1$, de ha itt egyenlőség áll, akkor pl. $|A_i| \geqq m$. Mivel a másik két halmaz is 2m-1 elemü együttesen, ezért pl. $|A_k| \geqq m$, ahol k különbözik i-től és j-től. $|A_i| + |A_k| \geqq 2m$, ami ellentmond A_i és A_j választásának. Azt találtuk tehát, hogy $|A_i| + |A_j| \geqq 2m=k_1=k_2=k_3$. $A_i \cup A_j$ azonban a partició-fedéshez tartozó fedőhalmaz, ezért összefüggő.egyszinü részgráfnak felel meg, ezzel a $k_1=k_2=k_3=2m$ esetet elintéztük. Minden más esetben $f \geqq 2k_1-1$ és az első szinnek megfelelő párhuzamos osztály két diszjunkt éle közül valamelyik legalább k_1 elemü, ami egy legalább k_1 pontu, összefüggőösszefüggő egyszinü részgráfot jelent az első szinben.

b./ Ha K_f^2 3-szinezése által generált particiófedés bázishipergráfja B_2-vel izomorf, akkor az

$$f \geqq \left[\frac{k_1+k_2+k_3-1}{2}\right]$$

egyenlőtlenséget használjuk ki, melyhez csak a $k_1=k_2=k_3=2m$ esetben férhet kétség, azonban ekkor is $f=4m-2 \geqq \left[\frac{6m-1}{2}\right]$ minden $m \geqq 1$ -re.

A B_2 definiciójában szereplő A_1,A_2,A_3 halmazokra feltehetjük, hogy $|A_1| + |A_2| \leqq k_1-1$, $|A_1| + |A_3| \leqq k_2-1$ és $|A_2| + |A_3| \leqq k_3-1$, különben nincs mit bizonyitani. Ezen egyenlőtlenségeket összeadva $2f \leqq k_1+k_2+k_3-3$ adódik, ahonnan

$$f \leqq \frac{k_1+k_2+k_3-3}{2} < \left[\frac{k_1+k_2+k_3-1}{2}\right]$$

ami ellentmondás, ezzel /i/-t igazoltuk.

Hátra van még annak igazolása, hogy

$$r/k_1,k_2,k_3/ \geqq f \qquad /ii/$$

Definiálnunk kell ehhez K_{f-1}^2 alkalmas 3-szinezését. Ha

$k_1=k_2=k_3=2m$, akkor $f-1=4m-3$. B_1 -ben $|A_1| = |A_2| = |A_3| = m-1$, $|A_4| = m$ választással a bázishipergráf által generált szinezésben legfeljebb $2m-1$ nagyságu egyszinü összefüggő rész lesz. Ha $f=2k_1-1$ és k_1 páros, pl. $k_1=2m$, akkor B_1-ben legyen $|A_1| = |A_4| = m$, $|A_2| = |A_3| = m-1$. Ekkor az 1-es és a 2-es szinben legfeljebb $2m-1$, a hármas szinben $2m$ nagyságu összefüggő részt generál B_1. $k_2 \geq k_1$ és $k_3 > k_1$ miatt ez megfelel. /$k_3 = k_1$ nem lehet, mert ekkor $k_1=k_2=k_3=2m$ lenne, amit már előzőleg elintéztünk/. Ha $f=2k_1-1$ és k_1 páratlan, pl. $k_1=2m+1$, akkor $f-1=4m$, és B_1-ben valamennyi A_i-t /$i=1,2,3,4$/ m-elemünek választva, mindhárom szinben legfeljebb $2m=k_1-1$ nagyságu összefüggő részt generál B_1.

Ha $\sum_{i=1}^{3} k_i$ páratlan, és $f = \left[\frac{k_1+k_2+k_3-1}{2}\right]$, akkor B_2-ben

$$|A_1| = \frac{k_1+k_2-k_3-1}{2}, \quad |A_2| = \frac{k_1+k_3-k_2-1}{2}, \quad |A_3| = \frac{k_2+k_3-k_1-1}{2}$$

választással egész számok a törtek, továbbá nem negativok, ezt elég A_1 esetén ellenőrizni: $k_3 < f$, mert különben k_3 lett volna a maximum /$k_3=f$ esetet ott intézzük el, ahol k_3 a maximum/.

$$k_3 < f = \frac{k_1+k_2+k_3-1}{2}, \text{ ahonnan } 0 < k_1+k_2-k_3-1$$

adódik. A B_2 által generált szinezésben k_1-1, k_2-1, k_3-1 nagyságu összefüggő részek vannak az egyes szinekben, és $\sum_{i=1}^{3} |A_i| = f-1$.

Ha $\sum_{i=1}^{3} k_i$ páros, akkor A_i-k elemszámát csöppet módositani kell:

$$|A_1| = \frac{k_1+k_2-k_3}{2}, \quad |A_2| = \frac{k_1+k_3-k_2-2}{2}, \quad |A_3| = \frac{k_2+k_3-k_1-2}{2}$$

Ebben az esetben k_1-1, k_2-1, k_3-2 nagyságu összefüggő egyszinő részgráfok vannak legfeljebb a B_2 által generált szinezésben.

Végezetül, ha $f=k_3$, akkor K^2_{f-1} valamennyi élét a harmadik szinnel szinezhetjük ki. Ezzel /ii/-t igazoltuk. □□□

4. K^2_n 4-rétü fedéseiről.

K^2_n 4-rétü fedései esetében a 2.Tételhez hasonló strukturatételt nem mondunk ki, mert nem érné meg a vesződséget. Kimondjuk azonban a 2.Tétel 1. Következményének analógiájára a következőt:

4.Tétel: $H=K^2_n$ 4-rétü P particiófedésénél ϱ /H/P// $\leq$ 3.

4A.Tétel: Ha K^2_n gráf éleit 4 szinnel szinezzük, akkor pontjai lefedhetők legfeljebb három egyszinü, összefüggő részgráf pontjaival.

Következmény: K^2_n éleinek minden 4-szinezésében van egy legalább $\left[\frac{n}{3}\right]^*$ pontu összefüggő egyszinü részgráf.

Megjegyezzük, hogy ezen következmény általánositását a következő pontban fogjuk tárgyalni. A 4.Tétel lényegében pontos, amint azt a $t=2,r=4,b=3,n=9$ paraméterekkel rendelkező feloldható blokkrendszer mutatja. Ebből kiindulva minden 9-el osztható n-re konstruálható olyan 4-rétü particiófedés, melynek fedéshipergráfjára $\varrho = 3$. A konstrukció egyben a Következmény pontosságát is mutatja.

A 4.Tételt a 4A. alakjában fogjuk bizonyitani. A bizonyitáshoz szükség lesz az alábbi lemmára:

<u>Lemma</u>: legyen $G=K_n^2$ csucsainak halmaza három diszjunkt, nem-üres részre felbontva: $V/G/=\bigcup_{i=1}^{3} V_i$. Tegyük fel, hogy G élei 4 szinnel vannak kiszinezve, olymódon, hogy V_i-re nem illeszkedik él, melynek szine i és csak az egyik végpontja van V_i-ben. /i=1,2,3/. Ekkor igaz a következő két állitás valamelyike:

1. G csucsai lefedhetők legfeljebb két, a 4. szinben összefüggő részgráf csucsaival.

2. $G-V_i$ csucsai lefedhetők egy egyszinü összefüggő részgráf csucsaival valamely i-re. /i=1,2,3/.

<u>Bizonyitás</u>: A V_i és V_j közötti élek két szinnel vannak szinezve, igy a 9.Tétel, ill. annak 9A. megfogalmazása alapján $V_i \cup V_j$ lefedhető legfeljebb két összefüggő egyszinü részgráf csucsaival. Feltehető, hogy pontosan kettővel fedhető le minden V_i, V_j pár, ellenkező esetben nincs mit bizonyitani - a lemma 2. állitása teljesül. Ha valamelyik V_i, V_j pár, például V_1 és V_2 uniója lefedhető két, a negyedik szinben összefüggő részgráffal, akkor osszuk V_3 pontjait két osztályba: A legyen azon pontok halmaza, melyekből indul 4. szinü él V_1 vagy V_2 felé, B pedig legyen V_3-A. Ha $A=\emptyset$, akkor teljesül a lemma 2. állitása, ha $B=\emptyset$, akkor a lemma 1. állitása igaz. Feltehető ezért, hogy A és B nem üres. Ha A minden pontjából indul V_1 felé a 2. szinben él, akkor a $V_1 \cup V_3$ lefedhető a 2. szinben összefüggő részgráffal, hiszen B és V_1 között minden él szine 2-es. Ebben az esetben teljesül a lemma 2. állitása. Ha viszont A-ban van egy p pont, melyből V_1 minden pontjába 4. szinü él fut, akkor a $V_1 \cup V_2 \cup$

$\cup \{p\}$ pontok közötti 4. szinü élek egy összefüggő gráfot határoznak meg, ezért teljesül a lemma 2. állitása.

A fentiek alapján feltehetjük, hogy bármely két V_i és V_j egyesitése csak két különböző szinü összefüggő részgráffal fedhető le. Könnyü belátni, hogy ekkor a fedés csak olyan lehet, melyben mindkét szinü összefüggő részgráf pontjai lefedik V_i-t vagy V_j-t. Egyszerüen adódik / két esetet kell csak megnézni/ ebből, hogy $G-V_i$ valamely i-re lefedhető a 4. szinben összefüggő részgráf csucsaival, azaz a 2. állitás igaz. ⊓⊔

A 4. Tétel bizonyitása: legyenek $G=K_n^2$ élei négy szinnel kiszinezve, és tekintsünk tetszőleges p pontot G-ből. Legyen A_1, A_2, A_3 a p pontot tartalmazó, az 1.,2.,3. szinekben összefüggő, maximális részgráfok ponthalmazai. Ezen halmazok által kapott diszjunkt felbontását V/G/-nek X-el fogjuk jelölni, és indexként az X-hez azt irjuk, ahányadik A halmazban vannak egy halmaz pontjai a felbontásból. X_0 -al azon pontok halmazát jelöljük, melyek egyik A_i-ban sincsenek benne. Pl. X_{23} jelöli az A_2-ben és A_3-ban lévő, de A_1 -ben nem lévő pontok halmazát.

1. Ha $X_0 = \emptyset$, akkor A_i-k lefedik V/G/-t, azaz $V/G/ = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$ és ezt akartuk bizonyitani. Tegyük fel ezért, hogy $X_0 \neq \emptyset$.

2. $X_{123} \neq \emptyset$, hiszen $p \in X_{123}$. X_{123} és X_0 között nyilván minden él 4. szinü A_i-k maximalitása miatt, ezért az $X_{123} \cup X_0$ halmaz által 4. szinben feszitett részgráf összefüggő.

3. Ha $X_i = \emptyset$ valamely i-re /i=1,2,3/ pl. $X_1 = \emptyset$,

akkor A_2, A_3 és $X_{123} \cup X_o$ halmazok által a 2.,3.,4. szinekben feszitett részgráfok csucsai lefedik G csucsait és a tétel igaz.

4. Feltehetjük tehát 3. miatt, hogy $X_i \neq \emptyset$ i=1,2,3 esetén. Alkalmazhatjuk a lemmát ezen halmazokra, hiszen X_i és X_j között nem mehet sem i. szinü sem j. szinü él A_i és A_j maximalitása miatt. A lemmából két dolog következhet:

A; X_i lefedhető két, a 4. szinben összefüggő részgráf pontjaival, ekkor ezekhez a kettősmetszetek is hozzávehetők, hiszen X_1 és X_{23} , X_2 és X_{13}, X_3 és X_{12} között minden él 4. szinü. $X_o \cup X_{123}$ adja a harmadik halmazt G csucsainak fedéséhez.

B; $X_i \cup X_j$ lefedhető egy összefüggő egyszinü részgráf pontjaival. Tegyük fel pl. azt, hogy $X_1 \cup X_2$ lefedhető igy. Ha $X_{12} = \emptyset$, akkor $X_1 \cup X_2$, A_3 és $X_{123} \cup X_o$ halmazok szolgáltatják a kivánt fedést. Ha $X_{12} \neq \emptyset$ és van X_o és X_{12} között 4. szinü él, akkor $X_{123} \cup X_o \cup X_{12} \cup X_3$ összefüggő a 4. szinben, ehhez $X_1 \cup X_2$ fedőhalmazát és A_3-at hozzávéve kapjuk a kivánt fedést. Végül, ha X_o és X_{12} között nincs 4. szinü él, akkor közöttük minden él 3. szinü. Ekkor $X_1 \cup X_2$ fedőhalmazához A_3 -at és $X_o \cup X_{12}$ -t véve kapjuk a keresett fedést. □□□

5. K_n^2 s-rétü particiófedéseiről.

s=2,3,4 esetén az előző szekciókban már kaptunk eredményeket. Az A8 állitás, a 2.Tétel 1.Következménye és a 4.Tétel általánositása lenne H.Ryser következő sejtése:

Sejtés: K_n^2 s-rétü particiófedésénél a fedéshipergráf fedési száma legfeljebb s-1.

A sejtés másik alakja:

Sejtés: K_n^2 minden s-szinezésénél K_n^2 pontjai lefedhetők legfeljebb s-1 összefüggő egyszinü részgráf pontjaival.

A sejtés harmadik alakja:

Sejtés: Ha egy s osztályu hipergráfban $\gamma = 1$, akkor $\tau \leq s-1$.

Ryser sejtése a fentinél általánosabb, a harmadik alakban elmondva igy szól: egy s osztályu hipergráfban $\tau \leq \gamma/s-1/$. Ez s=2 esetén lényegében a Kőnig tétel [12]. Érdekes megfogalmazni ezt a sejtést a második alakban is:

Sejtés: Ha egy gráf éleit, melyben a független pontok maximális száma α, s szinnel szinezzük, akkor a gráf csucsai lefedhetők legfeljebb $\alpha \cdot s$ számu összefüggő egyszinü részgráf csucsaival. /$\alpha=2$ esetén a Kőnig tétellel ekvivalens/.

Ebben a részben a Ryser sejtés egy következményét igazoljuk, nevezetesen a 2.Tétel 2.Következményének és a 4A.Tétel következményének általánositását:

5.Tétel: K_n^2 s-rétü particiófedésénél a fedéshipergráf rangja legalább $\left[\frac{n}{s-1}\right]^*$.

Az előzőkhöz hasonlóan ezt a tételt is kimondjuk még két ekvivalens formában:

5A.Tétel: K_n^2 éleinek minden s-szinezésében van egy legalább $\left[\frac{n}{s-1}\right]^*$ pontu összefüggő egyszinü részgráf.

5B.Tétel: Egy s osztályu n élü hipergráfban $\gamma=1$ esetén van egy legalább $\left[\frac{n}{s-1}\right]^*$ foku pont.

Megjegyzés: $n=/s-1/^2u$ és $n=/s-1/^2u+1$ -re a tételek élesek, ha létezik $v=/s-1/^2$, $k=s-1$, $r=s$, $\lambda=1$ paraméterü feloldható blokkrendszer. Ebben az esetben minden n-re feloszthatjuk K_n^2 pontjait $/s-1/^2$ részre egyenletesen, és ezen részekből, mint atomokból elkészitve a fenti blokkrendszert, a párhuzamos osztályok definiálják a particiófedést. Könnyü belátni, hogy a fedéshipergráf rangja $\left[\frac{n}{s-1}\right]^*$ -el osztva 1-hez tart. Kérdés azonban, hogy olyan s-re, melyre a blokkrenszer nem létezik, pl. s=7-re, hogyan lehet olyan s-rétü particiófedést késziteni, hogy a fedéshipergráf rangja közelitse az $\left[\frac{n}{s-1}\right]^*$ értéket.

5.Tétel bizonyitása: a tétel következik a páros gráfokra vonatkozó 10.Tételből. Legyen ugyanis K_n^2 tetszőleges s-szinezésében X egy tetszőleges egyszinü összefüggő komponens. Ha X K_n^2 összes pontját tartalmazza, nincs mit bizonyitani. Ellenkező esetben az X és K_n^2 -X közötti teljes páros gráf élei s-1 szinnel vannak szinezve. A 10.Tétel szerint ekkor $\left[\frac{n}{s-1}\right]^*$ nagyságu összefüggő egyszinü részgráf létezik, ezzel a tételt igazoltuk.□□□

6. K_n^r particiófedései r-nél nem sokkal több rétüen.

Az 2. szekcióban igazoltuk, hogy K_n^r r-rétü particiófedésének fedéshipergráfja n rangu. Most azt vizsgáljuk, amikor r-nél többrétü particiófedésünk van K_n^r-en.

6.Tétel: Legyen $r \leq s < \frac{3r+1}{2}$ és $r \geq 3$. Ekkor K_n^r s-rétü particiófedésénél a fedéshipergráf csucsai lefedhetők s éllel, melyek közül minden csucs legalább r-et tartalmaz.

Ekvivalens alakban:

<u>6A.Tétel</u>: Ha $r \leq s < \frac{3r+1}{2}$ és $r \geq 3$, akkor egy s osztályu hipergráfban, melyben bármely r élnek van közös pontja, $\tau_r \leq s$.

<u>1.Következmény</u>: Ha $r \leq s < \frac{3r+1}{2}$ és $r \geq 3$, akkor K_n^r s-rétü particiófedésének fedéshipergráfja legalább $\left[\frac{rn}{s}\right]^*$ rangu.

Élszinezésre elmondva a következmény igy szól:

<u>1A.Következmény</u>: $r \leq s < \frac{3r+1}{2}$ és $r \geq 3$ esetén K_n^r éleinek minden s-szinezésében van egy legalább $\left[\frac{rn}{s}\right]^*$ pontu egyszinü, összefüggő részhipergráf.

Az 1A.Következmény s=1 esetén az 1.Tételt adja. s=r+1 -re a becslés minden $r \geq 3$-ra pontos, ezért ezt külön kiemeljük:

<u>7.Tétel</u>: K_n^r -nek $r \geq 3$ esetén minden r+1 -rétü particiófedésében a fedéshipergráf rangja legalább $\left[\frac{rn}{r+1}\right]^*$. K_n^r -nek van olyan r+1 -rétü particiófedése, melyben a rang pontosan $\left[\frac{rn}{r+1}\right]^*$.

<u>7A.Tétel</u>: K_n^r -nek $r \geq 3$ esetén az élek minden r+1 -szinezésében van egy legalább $\left[\frac{rn}{r+1}\right]^*$ pontu egyszinü, összefüggő részhipergráf, és van olyan r+1-szinezés, amelyben pontosan ennyi a legnagyobb összefüggő, egyszinü részhipergráf mérete.

<u>1.Megjegyzés</u>: Az $r \geq 3$ lényeges megszoritás, r=2-re a fenti tételek nem igazak. Ebben az esetben a 3.Tétel érvényes. Azt, hogy a 7. és 7A. Tétel pontos, az 1. szekció P1. példája mutatja.

<u>2.Megjegyzés</u>: A 6.Tétel nagyságrendileg a lehető legjobb,

ezt a P2. példa mutatja az 1. szakaszból, itt ugyanis a bázishipergráf rangja $/r-1/ju+u$ és $s=r+j$, ezért

$$\frac{\frac{rn}{r+j}}{/r-1/ju+u} = \frac{\frac{r/ /r-1/ju+/j+1/u/}{r+j}}{/r-1/ju+u} = \ldots = \frac{\frac{1}{1+\frac{j}{r}}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{j}}}$$

és ez 1-hez tart, ha $\frac{j}{r}$ 0-hoz és r végtelenhez tart. Speciálisan tehát minden fix j-re $/1 \leq j < \frac{r+1}{2}$ / asszimptotikusan pontos a tétel, de pl. $j = [\sqrt{r}]$ esetén is.

3.Megjegyzés: A 6.Tétel $\frac{3r+1}{2}$ -nél kisebb rétü particiófedésekkel foglalkozik. Az 1. szakasz P3. példája azt mutatja, hogy $\frac{3r+3}{2}$ -rétü particiófedés esetén a 6. Tétel már nem asszimptotikusan pontos. Ennél a példánál ugyanis

$$\frac{\frac{rn}{s}}{r/r-\frac{1}{3}/} = \frac{\frac{r.r/r+1/}{\frac{3r+3}{2}}}{r/r-\frac{1}{3}/} = \frac{2r}{3r-1} \quad \text{és ez } \frac{2}{3} \text{-hoz tart}$$

ha r végtelenhez.

6.Tétel bizonyitása: $r=s$ esetén igaz a tétel, ezt az 1. Tétel biztositja. Legyen $r < s < \frac{3r+1}{2}$. Feltehetjük, hogy K_n^r -nek olyan s-rétü particiófedése van adva, melyben egyik párhuzamos osztály sem felesleges, azaz minden i-re van olyan C_i fedőhalmaz az i. párhuzamos osztályból, hogy $j \neq i$ esetén $C_i \nsubseteq C_j$, ahol C_j a j. párhuzamos osztály egy fedőhalmaza. /Ellenkező esetben indukciót alkalmazhatunk/. Válasszuk ki tehát $C_1, C_2, \ldots, C_s$ fedőhalmazokat különböző párhuzamos osztályokból, ugy, hogy ezek a fedéshipergráf maximális élei legyenek. Jelölje L/H/ a $C_1, C_2, .., C_s$ élekből /és K_n^r pontjaiból/ álló H hipergráf élgráfját, tehát L/H/-nak s pontja van, és két pont között pontosan akkor van él, ha a megfelelő H-beli éleknek van közös pontja. Legyen j=s-r, ekkor feltételünk szerint $j < \frac{r+1}{2}$.

Bebizonyitjuk, hogy a H hipergráfban minden pont foka legalább r. Ebből a tétel már következik. Először egy lemmát bizonyitunk:

<u>Lemma</u>: L/H/-ban a független élek maximális száma legalább j+1.

<u>Lemma bizonyitása</u>: Ha $x_1y_1, ..., x_ky_k$ egy maximális független élrendszer L/H/-ban, akkor ezen élek végpontjainak elhagyásával visszamaradó X ponthalmaz üres és minden x_iy_i pár teljesiti a következő két tulajdonság valamelyikét:

1. x_i-ből vagy y_i-ből nem fut él X-be
2. x_i-ből és y_i-ből egyetlen él fut X ugyanazon pontjához.

Válasszuk ki minden x_iy_i párból azt a pontot, melyből legfeljebb egy él fut X felé, ezen pontok alkossák az Y halmazt. Az Y-beli pontoknak megfelelő H-beli éleknek van olyan reprezentánsrendszere V/H/-ban, mely idegen az X-nek megfelelő H-beli élektől, hiszen ha Y egy pontja nincs X-el összekötve, akkor ezen pontnak megfelelő H-beli él tetszőleges pontja megfelel, ha pedig Y egy y pontja egyetlen X-beli x ponttal van összekötve, akkor az y-nak megfelelő H-beli élből kivonva az x-nek megfelelő H-beli élt, a különbség /nem üres, mert nincsenek tartalmazkodó élek H-ban/ tetszőleges pontja megfelel. A C_i-k átszámozásával elérhető, hogy az X-nek megfelelő H-beli élek legyenek $C_1,..,C_u$, az Y-nak megfelelő H-beli élek $C_{u+1},...,C_v$ és az utóbbiakból választott reprezentáns rendszer pedig $p_{u+1},...,p_w$. /$w \leqq v$/. Ha $w < r$, akkor $\bigcup_{i=1}^{u} C_i$ -től idegen pontokkal egészitsük ki a p_i pontok halmazát, ha $w > r$, akkor hagyjunk el néhány p_i pontot, esetleg C_i halmazt is, ha $u > r$ – olymódon, hogy az uj indexhatárokra $\max/u',w'/=r$ legyen. Tekintsük azt az r osztályu teljes T hipergráfot, melynek osztályai a $C_1,C_2,...,C_{u'}$ halmazok és a $p_{u'+1},...,p_{w'}$ pontok. /$u' < u$ esetén a pontok nem szerepelnek/. Ezen T hipergráf élei nem lehetnek az $1,2,...,u'$ -edik párhuzamos osztályba tartozó fedőhalmazzal lefedve, mert T egy éle tartalmaz pontot C_i-ből $1 \leqq i \leqq u'$ -re és C_i-n kivülről is. Nem lehet T egy éle olyan párhuzamos osztályból sem fedve, melyben az a C_i van, melyet p_i reprezentál $u'+1 \leqq i \leqq w'$ -re, mert C_i-ből tartalmaz pontot /p_i-t magát/, de tartalmaz C_i-n kivüli pontot is, hiszen feltevésünk szerint C_i legfeljebb egy élt metsz $C_1,...,C_{u'}$ élek közül és $u' \geqq 2$ mivel $u' \geqq r-j > \frac{r-1}{2}$ /$j < \frac{r+1}{2}$ / és $r \geqq 3$. Ilyen módon T éleit legalább v párhuzamos osztály nem fedi, ha $w < r$ és legalább r párhuzamos osztály nem fedi, ha $w \geqq r$. Miután azonban $v=r+j-|Y|$ és $j-|Y| \geqq 0$, ezért $v \geqq r$, igy elmondhatjuk, hogy T éleit legalább r számu párhuzamos osztály fedőhalmazai nem fedik, azaz legfeljebb $r+j-r=j$ számu párhuzamos osztály fedőhalmazai fedhetik. Alkalmazzuk a 3.Fejezet 8.Tételét, mely szerint $r+1-j$ számu osztályát lefedi T-nek a T éleit fedő j számu párhuzamos osztály valamelyik F fedőhalmaza. Ha $|Y| \leq j$, akkor felhasználva, hogy $r+1-j > j$ / $\frac{r+1}{2} > j$ ekvivalens $s < \frac{3r+1}{2}$ -vel/ F tartalmaz egy C_i élt valamely $1 \leq i \leq u$-ra, ami ellentmondás, hiszen ez a C_i maximális volt, azaz önmagán kivül más él nem fedheti. Igy $|Y| = k > j$, tehát legalább $j+1$ független él van L/H/-ban.□

Folytatva a 6.Tétel bizonyitását, válasszunk ki $j+1$ független élt L/H/-ból. Indirekt módon bizonyitunk. Tegyük fel, hogy H-ban van olyan pont, melynek foka r-nél kisebb, legyen ez x_1. Jelöljük I_1-el azon i indexek halmazát, melyre $x_1 \in C_i$, I_2-vel azon i indexek halmazát, melyre $x_1 \notin C_i$. $|I_1| < r$ feltevésünk szerint. Két esetet különböztetünk meg:

A. ha $|I_1| \leq j+1$, akkor $j+1-|I_1|$ független él van L/H/-ban melyek végpontjainak megfelelő élek H-ban az x_1-et tartalmazó élektől különbözők. Ezen élekből kiválasztható $j+1-|I_1|$ számu pont, melyek az x_1-et nem tartalmazó élekből $2/j+1-|I_1|$ / számut lefognak, ezen pontok halmaza legyen X_1. Az X_1 halmaz és az x_1 pont által le nem fogott H-beli élek száma legfeljebb $s-2/j+1-|I_1|$ /- $-|I_1|$, ezért

$$\max /|I_1|,\ s-2/j+1-|I_1|\ / - |I_1|/ \qquad /i/$$

számu pont kiválasztható H-ból, melyek az I_1-beli indexü élek egyikében sincsenek benne, továbbá az x_1 és X_1 által le nem fogott élek mindegyikét metszik. Ezt az X_2 halmazt ugy konstruáljuk, hogy az x_1 és X_1 által le nem fogott élekből kivonjuk az I_1-beli indexü éleket és a különbséghalmazokból választunk pontokat. /A különbség nem üres, mivel H-ban nincsenek tartalmazkodó élek/. Ha /i/-ben a két szám, melynek maximumát vesszük, nem egyenlő, akkor bizonyos x_1 ill. X_1 által le nem fogott élekből nem kell kivonni I_1-beli indexü élt /ha a második mennyiség a nagyobb/ vagy bizonyos I_1-beli indexü élekhez külső pontot kell választani, nem törődve azzal, hogy ez milyen x_1 és X_1 által le nem fogott halmazban van benne /ha az első mennyiség nagyobb /i/-ben/. Az $\{x_1\} \cup X_1 \cup X_2 = X$ halmaz H összes élét lefogja és "elkerüli" azaz minden H-beli e élhez van olyan $x \in X$, hogy $x \notin e$. Ha belátjuk, hogy $|X| \leqq r$, akkor ez ellentmondás, hiszen ekkor X-et tetszőlegesen r elemü halmazzá egészitve ez az éle K_n^r-nek nem lehet lefedve egyetlen fedőhalmazzal sem. Valóban:

$|X| \leqq 1+j+1-|I_1|+s-2/j+1-|I_1|/ - |I_1| = s-j = r$,amennyiben /i/-ben a 2. tag adja a maximumot, és

$|X| \leqq 1+j+1-|I_1|+|I_1| = j+2 \leqq r$, ha /i/-ben az 1. tag adja a maximumot. $j+2 \leqq r$ $r \geqq 3$ -ból és $j < \frac{r+1}{2}$-ből következik.

B. $|I_1| > j+1$ esetén az A. esethez hasonlóan járunk el, csak ekkor a független élekre / és az X_1 halmazra/ nincs szükség. X_2 halmazt V/H/-ban ekkor ugy konstruáljuk, hogy az I_1 -beli indexü halmazokat és az I_2 -beli indexüeket párositjuk /amig lehet/ ugy, hogy mindig egy I_1-beli indexü élből vonunk ki egy I_2-beli indexü élt, és a különbségből választunk pontot. Ekkor az X_2 halmaz

$$\max /|I_1|, |I_2|/ \qquad /ii/$$

számosságu lesz, ezért az $X = \{x_1\} \cup X_2$ számosságára $|X| \leqq 1 + |I_1| \leqq r$, ha /ii/-ben az első tag a nagyobb, mivel $|I_1| < r$ feltevés volt és $|X| \leqq 1 + |I_2| = 1 + s - |I_1| < 1 + s - /j+1/ = s - j = r$, ha a második tag adja a maximumot /ii/-ben. /Itt $|I_1| > j+1$ -et használtuk fel./

Mind az A., mind a B. esetben ellentmondásra jutottunk, ezért $|I_1| < r$ feltevésünk helytelen volt, ezzel a 6.Tételt igazoltuk. □□□

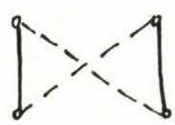
3. Teljes r osztályu hipergráfok particiófedései.

1. Ebben a részben néhány, r osztályu hipergráfokra vonatkozó eredményt vizsgálunk, melyek önmagukban is érdekesek, de felhasználásra kerülnek más tételek bizonyitására is.

8.Tétel: Legyen H egy r osztályu teljes hipergráf és H-n egy s-rétü particiófedés. Tegyük fel, hogy $1 \leq s \leq r+1$ és $r \geq 3$. Ekkor van olyan fedőhalmaz, mely H-nak legalább r+1-s osztályát lefedi.

Megjegyzés: A tétel a következő alakban is megfogalmazható: ha egy H r osztályu /$r \geq 3$/ teljes hipergráf éleit s szinnel szinezzük, akkor valamelyik szinben van egy összefüggő, legalább r+1-s osztályt tartalmazó részgráf.

Következmény: Ha egy r osztályu teljes hipergráf éleit ugy fedjük particiókkal, hogy minden fedőhalmaz valódi módon kettévágja a hipergráf minden osztályát, akkor legalább r+1 particióra van szükség $r \geq 3$ esetén. r=2 re két partició is elég, mint ezt az alábbi ábra mutatja:



Megjegyzés: A 8.Tétel éles, abban az értelemben, hogy minden $1 \leq s \leq r+1$, $r \geq 3$ esetén van olyan H r osztályu teljes hipergráf és H-n olyan s-rétü particiófedés, melyben minden fedőhalmaz H-nak legfeljebb r+1-s osztályát tartalmazza. Ilyen H-t a következőképpen konstruálhatunk:

H pontjait egy r sorból és s oszlopból álló mátrixban ábrázoljuk, a sorok felelnek meg H osztályainak. Az i. partició az i. oszlop felső s-1 eleméből és ennek komplementer halmazából áll.

8.Tétel bizonyitása: Legyenek $C_1, C_2, .., C_s$ olyan fedőhalmazok a particiófedés 1.,2.,..,s. particiójából, melyek mindegyike H legalább egy élét lefedi./Ha ilyen C_i-ket nem tudunk választani, akkor indukcióval s-1 partició is lefed/. Tegyük fel, hogy ezen fedőhalmazok egyike sem teljesiti a tétel követelményét, azaz H-nak legfeljebb r-s osztályát tartalmazzák. Ebben az esetben minden C_i halmaz legalább s osztályt metsz H-ban valódi módon. Feltehető, hogy $s \geq 2$, hiszen s=1 esetén állitásunk evidens. Válasszunk ki két különböző osztályt H-ból, melyek egyikét C_1, másikát C_2 metszi valódi módon. Válasszunk ki egy ezen osztályoktól különböző harmadik osztályt H-ból és ebből egy a pontot./$r \geq 3$ /. Tegyük fel, hogy pl. $a \in C_1$ és $a \notin C_2$ - látni fogjuk, hogy egyéb illeszkedés esetén is hasonlóan megy a bizonyitás. A C_1-et valódi modon metsző osztályból vegyünk egy b pontot ugy, hogy $b \notin C_1$, a C_2-t valódi módon metsző osztályból pedig c pontot, ugy, hogy $c \in C_2$. Könnyü látni, hogy a,b,c pontok között van kettő, melyek C_1-re és C_2-re ellenkezően illeszkednek, hiszen $b \in C_2$ esetén a és b, $c \notin C_1$ esetén a és c, $b \notin C_2$ és $c \in C_1$ esetén b és c megfelel. Ezt a két pontot x_1-el és x_2-vel jelöljük. Megjegyezzük, hogy x_1 és x_2 különböző osztályból való. Ha $x_1, x_2, .., x_j$ már ki van választva és $j < s$, akkor x_{j+1} -et válasszuk ki ugy, hogy

x_{j+1} H egy ujabb osztályában legyen az előző x_i-k osztályaihoz képest, továbbá C_{j+1}-ben való tartalmazkodásra x_1-hez képest ellenkezően viselkedjen. Ez elérhető, mert feltevésünk szerint C_{j+1} legalább s osztályt metsz valódi módon, és $x_1,x_2,..,x_j$ $j<s$ miatt nem "ronthatja el" ezek mindegyikét. A fenti eljárással kiválasztott $x_1,..,x_s$ pontokat szükség esetén egészitsük ki további pontokkal ugy, hogy H egy E élét kapjuk. Ez az él nem lehet lefedve egyik particióval sem, hiszen, ha a j. partició lefedi, akkor $x_1,x_j \in E$ miatt $x_1,x_j \in C_j$, konstrukciónk azonban ennek ellentmond. Ezzel beláttuk, hogy $C_1,C_2,...,C_s$ valamelyike legalább r+1-s osztályt tartalmaz H-ból.□□□

9.Tétel: Legyen H r-osztályu teljes hipergráfon P r-rétü particiófedés. Ekkor $\varrho/H/P// \leq r$.

9A.Tétel: Ha H teljes r osztályu hipergráf éleit r szinnel szinezzük, akkor H pontjai lefedhetők legfeljebb r számu egyszinü összefüggő részhipergráf pontjaival.

9.Tétel bizonyitása: r szerinti indukcióval bizonyitunk. Legyen r=2 és tekintsük az első particiót. Ha ebben valamely F fedőhalmaz belemetsz a páros gráf mindkét osztályába, X-be és Y-ba, akkor a kivánt fedést adja

a. F ha $X\cap F=X$ és $Y\cap F=Y$

b. F és $/X-/X\cap F//\cup Y$ -t tartalmazó fedőhalmaz a második particióból, ha $X\cap F\neq X$ és $Y\cap F=Y$.

c. F és $/Y-/Y\cap F//\cup X$ -et tartalmazó fedőhalmaz a második particióból, ha $X\cap F=X$ és $Y\cap F\neq Y$.

d. $/X-/X\cap F//\cup/Y\cap F/$ -et és $/Y-/Y\cap F//\cup/X\cap F/$ -et tartalmazó fedőhalmazok a második particióból, ha $X \cap F \neq X$ és $Y \cap F \neq Y$.

Ha az első particióban nincs olyan fedőhalmaz, mely a páros gráf mindkét osztályába belemetsz, akkor a második partició triviális, azaz egyetlen fedőhalmaza lefed, ezzel az r=2 esetet elintéztük.

Legyen most $r \geq 3$ és tekintsük H r osztályu teljes hipergráf r-rétü particiófedését. A 8.Tétel alapján van olyan F fedőhalmaz, mely H egy osztályát tartalmazza. H' r-1 osztályu teljes hipergráf pontjait definiáljuk ugy, hogy H-ból hagyjuk el az F által lefedett osztályt, más osztályokból pedig válasszunk F által le nem fedett pontokat, ha ilyen nincs, akkor tetszőleges pontot. Ha F H' minden élét lefedi, akkor nincs mit bizonyitani. H particiófedése H'-n r-1 rétü particiófedést indukál, mert H F-et tartalmazó particiójában csak F fed élt. Az indukciós feltevés alapján H' pontjai legfeljebb r-1 fedőhalmazzal lefedhetők, ezek kibővitései és F adják H kivánt fedését. □□□

<u>Megjegyzés</u>: A 9.Tétel pontos, abban az értelemben, hogy minden H r osztályu teljes hipergráfnak, melyben van egy legalább r pontu osztály, van olyan r-rétü particiófedése, melynél a fedési szám pontosan r. Ezt ugy definiálhatjuk, hogy a legalább r pontu osztályt r nem üres diszjunkt részre bontjuk, és az i. partició az i. rész pontjaiból és többi osztályokból és ennek komplementeréből áll.

2. Teljes páros gráfok partíciófedései.

A következő tétel teljes páros gráfokra /r=2/ vonatkozik és Lehel Jenővel bizonyitottuk az 5.Tételhez segédtételként, de önmagában is érdekes:

10.Tétel: Ha egy n pontu teljes páros gráfon adott egy t rétü particiófedés, akkor a fedéshipergráf rangja legalább $\left[\frac{n}{t}\right]^*$.

10A.Tétel: Ha G n pontu teljes páros gráf éleit t szinnel szinezzük, akkor van G-nek egy egyszinü, összefüggő, legalább $\left[\frac{n}{t}\right]^*$ pontu részgráfja.

Megjegyzés: a tétel "nagyjából" pontos. Ha G egy teljes páros gráf, akkor mindkét kromatikus osztályát osszuk fel egyenletesen t részre és ezen részek közötti éleket szinezzük ki a t-t teljes páros gráf egy 1-faktorokra bontása szerint - egy 1-faktornak egy szin feleljen meg. Ebben a szinezésben minden szinben "nagyjából" $\left[\frac{n}{t}\right]^*$ az összefüggő komponensek pontszámának maximuma. Ha G valamelyik osztályának pontszáma osztható t-vel, akkor pl. pontosan $\left[\frac{n}{t}\right]^*$ ez a maximum.

Megemlitjük ezzel kapcsolatban a következő sejtést: /Lehel Jenővel sejtjük/

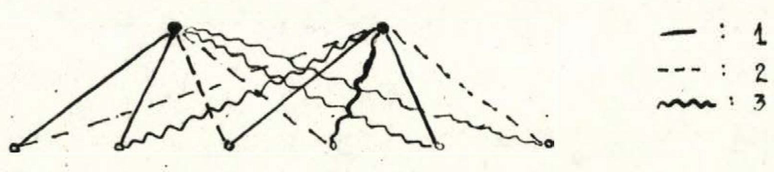
Sejtés: Ha G teljes páros gráf éleit t szinnel szinezzük, akkor G csucsai lefedhetők 2/t-1/ egyszinü összefüggő részgráf csucsaival.

1.Megjegyzés: a t=2 eset a 9.Tétel speciális esete.

2.Megjegyzés: t=3-ra könnyü igazolni a sejtést: elég valamely szinben egy komponenst tekinteni, ha ez A és B halmazokból tevődik össze, akkor A és Y-B ill. B és X-A közötti teljes páros gráfok két szinnel vannak szinezve, igy ezek 2-2 egyszinü összefüggő részgráffal lefedhetők a $t=2$ eset alapján. /X és Y a páros gráf két osztályát jelöli./

3.Megjegyzés:2/t-1/ helyett 2t-1 -et irva a sejtés igaz, ez triviális: legyen pq egy piros él. A p-re és q-ra illeszkedő piros élek és a p-ből ill. q-ból induló nem piros csillagok által meghatározott részgráfok adják a kivánt fedést. Ugy tünik, hogy ez a sejtés is hasonlit Ryser már emlitett sejtéséhez / mely szerint teljes gráf éleit t szinnel szinezve t-1 összefüggő egyszinü részgráf csucsaival lefedhetők a teljes gráf csucsai/ abból a szempontból, hogy t-1 helyett t-t irva triviális állitást kapunk.

4.Megjegyzés: 2/t-1/ nél kisebb számra a sejtés nem igaz, ezt a következő példa mutatja: Tekintsük azt a páros gráfot, melynek felső osztályában t-1 pont, az alsóban t! pont van. A t! pontot fogjuk fel ugy, mint t elem t-1 osztályu ismétlés nélküli variációit. A fenti i. pont és a lenti $a_1 a_2 \ldots a_{t-1}$ permutáció közötti él szine a_i. Ezt a gráfot $t=3$-ra az alábbi ábra mutatja:



11.Tétel: A fent definiált páros gráf csucsait 2/t-1/ - nél kevesebb összefüggő egyszinü részgráf csucsaival nem lehet lefedni.

Bizonyitás: Feltehetjük, hogy a fedés a felső pontokra illeszkedő csillagokból áll. Rendezzük ugy el a fenti pontokat, hogy az i. pontra x_i számu egyszinü csillag illeszkedjen a fedésből és $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{t-1}$ teljesüljön. Belátjuk azt, hogy valamely i-re $x_i \geq i+1$. Ha ugyanis $x_i \leq i$ minden $1 \leq i \leq t-1$ esetén, akkor válasszunk egy olyan szint, mely a t-1 -edik pontra illeszkedő fedőcsillagok szinétől különböző, ezután olyat, mely a t-2. pontra illeszkedő fedőcsillagok szinétől és a már választott szintől különböző, és igy tovább. $x_i \leq i$ feltételünk biztositja, hogy ez az eljárás folytatható. Igy t-1 szint választottunk ki, és az az alsó pont, mely az i. felső ponttal éppen az ahhoz választott szinnel van összekötve, nem lehet lefedve - ez ellentmondás.

Van tehát egy olyan i, hogy $x_i \geq i+1$. Ekkor

$$\sum_{j=1}^{t-1} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} x_j + \sum_{j=i}^{t-1} x_j \geq /i-1/+/i+1//t-i/$$

Belátjuk, hogy a jobboldal 2/t-1/-nél nem kisebb, azaz

$$/i-1/+/i+1//t-i/ \geq 2/t-1/$$ ami i=1 esetén egyenlőség, különben átrendezve és i-1 el leosztva $t \geq i+1$ egyenlőtlenségbe megy át, ami igaz, hiszen t-1 pont van felül. Azt kaptuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{t-1} x_j \geq 2/t-1/$$ és ezt akartuk belátni.

5.Megjegyzés: A sejtést elég olyan szinezésekre bebizonyitani, amelyben minden szinben minden összefüggő egyszinü részgráf teljes páros gráf. Ha ugyanis H egy olyan egyszinü pl. piros összefüggő részgráf, amely nem teljes, akkor legyen ennek ab egy hiányzó, azaz másszinü, pl. kék éle. Ekkor felbontásunk a következő lehet: H-hoz vegyük hozzá az a és b pontból induló összes piros élt - ez lesz az első részgráf. ab élhez vegyük hozzá az a-ból és b-ből induló összes kék élt - ez lesz a második részgráf. A felbontás többi részgráfját az a-ból és b-ből induló egyszinü, pirostól és kéktől különböző csillagok alkotják. Ezek száma legfeljebb 2/t-2/ és ehhez jön még a már definiált két részgráf. Igy legfeljebb 2/t-1/ számu egyszinü összefüggő részgráf csucsaival lefedtük a teljes páros gráf összes csucsát.

<u>10.Tétel bizonyitása</u>: A tételt a 10A. alakjában bizonyitjuk. A bizonyitás lényege annak kimutatása, hogy a keresett $\left[\frac{n}{t}\right]^*$ pontu összefüggő egyszinü részgráfot abban a szinben megtaláljuk, amely szinben a legtöbb éle van G-nek.

Tekintsük a következő szélsőérték feladatot: adott m,n,M természetes számokhoz keresendők olyan r, $x_1,\dots,x_r$ és $y_1,\dots,y_r$ nem negativ egészek /r-ről feltesszük, hogy pozitiv/, hogy

/i/ $\sum_{i=1}^{r} x_i=m$, $\sum_{i=1}^{r} y_i=n$, $x_i+y_i \leq M$ minden $1 \leq i \leq r$-re,

és az $f=\sum_{i=1}^{r} x_i y_i$ a lehető legnagyobb. Az /i/-nek eleget tevő x_i és y_i sorozatokat egyszerüen <u>megoldásnak</u> fogjuk nevezni. Egy megoldásban x_i,y_i párt telitettnek nevezzük, ha $x_i+y_i=M$, mig $x_i+y_i < M$ esetén telitetlennek. Bebizonyitjuk a következő lemmát:

<u>Lemma</u>:Az /i/ feladatnak van olyan $a_1,,a_k$; $b_1,\dots,b_k$ optimális megoldása, melyre

A. Egyetlen telitetlen pár van /ez lehet a 0,0 pár/.

B. Ha a_k,b_k jelöli a telitetlen párt, akkor $a_i \geq a_k$ és $b_i \geq b_k$ minden $1 \leq i < k$ -ra.

<u>Bizonyitás</u>: legyen $a_1,\dots,a_k$; $b_1,\dots,b_k$ a feladatnak olyan

optimális megoldása, melyben a lehető legtöbb pár telitett és ezeken belül a lehető legkevesebb párból áll. Belátjuk, hogy ezzel a választással a lemma állitásai teljesülnek.

Ha lenne két telitetlen pár, a_1, b_1 és a_2, b_2, akkor legyen pl. $a_1 \leqq a_2$. Ha $b_1 \leqq b_2$, akkor a_1-et és b_1-et csökkentve, mig a_2-t és b_2-t megfelelően növelve továbbra is optimális megoldást kapunk, de e növelések során vagy az a_2, b_2 pár telitetté válik, vagy az a_1, b_1 párból lesz a 0,0 pár, és ekkor ezt elhagyjuk. Mindkét esetben ellentmondásba kerülünk a választott megoldás definiciójával. Ha $a_1 \leqq a_2$ de $b_1 > b_2$, akkor b_1-et csökkentsük és b_2-t növeljük ugyanannyival, ekkor a célfüggvény nem csökken, tehát továbbra is optimális megoldást kapunk. E müvelet során $b_1' = b_1 - b$, $b_2' = b_2 + b$, ezért vagy az a_2, b_2' telitett lesz, vagy $b_1' \leqq b_2'$ bekövetkezik. Az első eset ellentmondás, a második esetben viszont az a_1, b_1' és a_2, b_2' párra $a_1 \leqq a_2$ és $b_1' \leqq b_2'$ - azaz a már tárgyalt esetre jutunk, mely ellentmondáshoz vezetett. Ezzel A.-t igazoltuk, hiszen ha egyáltalán nincs telitett pár, azt ugy fogjuk fel, hogy a 0,0 párt telitetlen párként hozzávesszük a megoldáshoz.

B. bizonyitásához tegyük fel, hogy a telitetlen a,b párra és a telitett a',b' párra pl. $a' < a$. Definiáljuk e párok helyett az $a'+1, b'-1$ és $a-1, b+1$ párokat. Azt állitjuk, hogy e cserével a célfüggvény értéke nő./Az, hogy továbbra is megoldást kapunk, nyilvánvaló./ Ehhez azt kell belátni, hogy

$/a'+1//b'-1/+/a-1//b+1/ > a'b'+ab$ azaz $a-a'+b'-b-2>0$.

$a+b < a'+b'$, mivel a,b telitetlen és a',b' telitett, azaz

$a-a' < b'-b$. Másrészt $a-a' \geqq 1$ feltevésünk szerint, ezért $b'-b$ legalább 2, ami bizonyitja a kivánt egyenlőtlenséget. Ellentmondásra jutottunk azzal, hogy megoldásunk optimális volt. □

Folytatva a tétel bizonyitását, tegyük fel, hogy G gráfunknak piros szinben van a legtöbb éle. G piros szinü élei komponenseket határoznak meg, legyenek $x_1,\dots,x_r$ és $y_1,\dots,y_r$ a komponensek pontszámai G alsó ill. felső osztályában. Jelöljük továbbá m-el és n-el G alsó és felső osztályának pontszámát. Nyilván $\sum_{i=1}^{r} x_i = m$, $\sum_{i=1}^{r} y_i = n$. Tegyük fel, hogy állitásunk nem teljesül, ami azt jelenti, hogy

$x_i+y_i \leqq \left[\frac{m+n}{t}\right]^* -1 = M$ minden i-re. Az itt definiált M-el /m és n-el/ az $x_1,\dots,x_r$; $y_1,\dots,y_r$ megoldásai a lemmában szereplő feladatnak, ezért a lemma által biztositott optimális megoldásra a célfüggvény nem kisebb, azaz

$$\sum_{i=1}^{r} x_i y_i \leqq \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \qquad /ii/.$$

/ii/ jobboldala a következőképpen irható:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} /a_i+b_i/^2 - \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 - \sum_{i=1}^{k-1} b_i^2\right) + a_k b_k =$$

$= M/m-a_k/ - \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 + a_k b_k$. $\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2$-et alulról becsülhetjük, felhasználva, hogy négyzetösszeg adott összeg mellett akkor a legkisebb, ha egyenletes a felbontás. Ezért

$$\sum_{i=1} a_i b_i \leqq M/m-a_k/ - \frac{/m-a_k/^2}{k-1} + a_k b_k \qquad /iii/$$

Felhasználva, hogy G-nek legalább $\left[\frac{mn}{t}\right]^*$ piros éle van, /ii/ és /iii/-ből kapjuk:

$$\left[\frac{mn}{t}\right]^* \leqq \sum_{i=1}^{r} x_i y_i \leqq \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \leqq M/m-a_k/ - \frac{/m-a_k/^2}{k-1} + a_k b_k$$

Felhasználva, hogy $k-1=\frac{m+n-a_k-b_k}{M}$, $M/m-a_k/$-t kiemelve

$$\left[\frac{mn}{t}\right]^* \leqq \frac{M/m-a_k//n-b_k/}{m+n-a_k-b_k}+a_k b_k$$

Belátjuk, hogy ennek pontosan az ellenkezője igaz:

$$\left[\frac{mn}{t}\right]^* > \frac{M/m-a_k//n-b_k/}{m+n-a_k-b_k}+a_k b_k \quad \text{ami ellentmondás.}$$

Felhasználva a $p \leqq [p]^* < p+1$ egyenlőtlenséget, a felső egész részt elhagyhatjuk, $M=\left[\frac{m+n}{t}\right]^*-1$ helyett pedig $\frac{m+n}{t}$ -t irhatunk, azaz elég belátni az

$$\frac{mn}{t} \geqq \frac{m+n}{t} \cdot \frac{/m-a_k//n-b_k/}{m+n-a_k-b_k}+a_k b_k \quad \text{egyenlőtlensé-}$$

get. Megfelelő átrendezés után ez igy irható:

$a_k n^2+b_k m^2-a_k b_k/t+1//m+n/+t a_k b_k/a_k+b_k/ \geqq 0$. Ha a_k vagy b_k 0, akkor ez nyilván igaz, egyébként $a_k b_k$-val leosztva és átrendezve

$$\frac{m^2}{a_k}-/t+1/m+\frac{n^2}{b_k}-/t+1/n+t/a_k+b_k/ \geqq 0 \quad \text{adódik. Belát-}$$

juk, hogy

$m \geqq a_k/t+1/$ és $n \geqq b_k/t+1/$ /iv/

és ebből már az egy sorral feljebb lévő egyenlőtlenség következik. Mivel

$$M=\left[\frac{m+n}{t}\right]^*-1 \text{ és } M=\left[\frac{m+n}{k-1}\right] \text{ ezért } k-1 \geqq t,$$

azaz $k \geqq t+1$. A lemma B. állitása szerint a_k és b_k -nál a többi a_i-k ill. b_i-k nem nagyobbak, ezért

$m=\sum_{i=1}^{k} a_i \geqq k \cdot a_k \geqq /t+1/a_k$ és $n=\sum_{i=1}^{k} b_i \geqq k \cdot b_k \geqq /t+1/b_k$.

Ezzel /iv/-et igazoltuk, és egyben a 10. Tételt is. [III]

4. γ_k és τ kapcsolatáról hipergráfok összegében.

1. γ_k és τ kapcsolata hipergráfok t-szerezésében.

Legyen H egy egyszerü hipergráf, ennek t-szerezését, H^t hipergráfot a következő módon definiáljuk /t természetes szám/: H^t csucsai H csucsai, élei pedig H t számu, különböző élének egyesitéseként irhatók, azaz

$V/H^t/=V/H/ \quad E/H^t/=\left\{ \bigcup_{k=1}^{t} E_k \ : \ E_k \in E/H/,\ E_i \neq E_j \text{ ha } i \neq j \right\}$

A következő tétel C.Berge sejtése volt/[4]278.oldal/:

12.Tétel: [9] Ha H Helly tulajdonságu és $\gamma_t/H^t/ \leq t$, azaz H^t bármely t+1 élének van közös pontja, akkor $\tau/H^t/ \leq t$.

A 12.Tétel éles a következő értelemben:

13.Tétel: [9] Minden $t \geq 2, u \geq 1$ -hez létezik H Helly tulajdonságu hipergráf, melyre $\gamma_{t-1}/H^t/ \leq t-1$, azaz H^t bármely t élének van közös pontja és $\tau/H^t/ \geq u$.

Természetes kérdés az, hogy ne csak H^t -re, hanem H^t részhipergráfjaira is bizonyitsunk a 12.Tételben szereplő tulajdonságot. Ehhez azonban nem elég az, hogy H Helly tulajdonságu, amint ezt a következő tétel mutatja:

14.Tétel: 9 Minden $t \geq 2, u, k \geq 1$ esetén van olyan H Helly tulajdonságu hipergráf és H^t-nek olyan H' részhipergráfja, hogy $\gamma_{k-1}/H'/ \leq k-1$, azaz bármely k élnek van közös pontja és $\tau/H'/ \geq u$.

Kérdés azonban, hogy H normalitása nem biztositja e a 12. Tétel analogonját H^t minden részhipergráfjára:

Kérdés: Ha H normális hipergráf és H' H^t olyan részhipergráfja, melyre bármely t+1 él metszi egymást, azaz

$\nu_t/H'/ \leqq t$, igaz-e, hogy $\tau/H'/ \leqq t$?

Könnyü belátni, hogy a válasz igenlő, ha H intervallumrendszer a számegyenesen, vagy pl. ha H páros gráf. Ha H egy fa részfarendszere, akkor a válasz csak $t \leqq 3$ esetben ismert [7].

Ha H^t részhipergráfjairól csak azt tesszük fel, hogy bármely t élnek van közös pontja, azaz $\nu_{t-1} \leqq t-1$, akkor H normalitása mellett is csak negativ eredményt tudunk állitani:

15.Tétel: Minden $t \geqq 2$, $u \geqq 1$ -hez van olyan H normális hipergráf és H' részhipergráfja H^t-nek, melyre H' bármely t élének van közös pontja, azaz $\nu_{t-1}/H'/ \leqq t-1$ és $\tau/H'/ \geqq u$.

A t=2 speciális esetben a 15.Tétel még erősebb formában is igaz:

16.Tétel: Minden $u \geqq 1$-hez van olyan H páratlan kört nem tartalmazó hipergráf és H' részhipergráfja H^2-nek, hogy $\nu/H'/=1$ és $\tau/H'/ \geqq u$.

12.Tétel bizonyitása: Jelölje G L/H/ komplementerét. Tekintsük az

$$A = \{ x: x \in V/G/, d/x/ \geqq t \}$$ halmazt, ahol d/x/ x pont fokát jelöli. Belátjuk, hogy $|A| < t$. Tegyük fel ugyanis, hogy $|A| \geqq t$ -ekkor választhatunk $x_1, x_2, \ldots, x_t$ különböző csucsokat G-ből, ugy, hogy $d/x_i/ \geqq t$ minden i-re $/1 \leqq i \leqq t/$. Az $Y_1, \ldots, Y_t$ csucshalmazokat definiáljuk ugy, hogy $|Y_i|=t$ és Y_i minden pontja legyen x_i-vel szomszédos

Legyen $Y_o = \{x_1,..,x_t\}$. Tekintsük H^t azon E_i éleit, melyek Y_i pontjainak megfelelő H-beli élek egyesitéseként irhatók $i=0,1,..,t$-re. Igy t+1 élt definiáltunk H^t-ben, és könnyü látni, hogy ezeknek nincs közös pontja - ez ellentmondás. Beláttuk tehát, hogy $|A| < t$, ebből Tomescu egy tétele szerint/ [3], 430. oldal/ következik, hogy G kromatikus száma legfeljebb t, azaz L/H/ csucsai lefedhetők legfeljebb t teljes gráffal. H Helly tulajdonságu, ezért a teljes gráfok pontjainak megfelelő éleknek van közös pontjuk, igy $\tau/H/ \leq t$ - ebből $\tau/H^t/ \leq t$ adódik.□□□

<u>13.Tétel bizonyitása:</u> E tétel bizonyitásánál és a többi negativ eredmény bizonyitásánál felhasználjuk a következő lemmát:

<u>A.Lemma</u>: Minden G gráfhoz van olyan H Helly tulajdonságu hipergráf, melyre L/H/ izomorf G-vel.

<u>Bizonyitás</u>: Könnyü ellenőrizni, hogy G maximális teljes gráfjaiból álló hipergráf duálisa megfelel H-nak.

Legyen G olyan gráf, melyben bármely kör t^2-nél hosszabb és kromatikus száma legalább u+t. Ilyen gráf létezése [11]-ből következik. Legyen H olyan Helly tulajdonságu hipergráf, hogy L/H/ izomorf G komplementerével. Ilyen H létezését az A.Lemma biztositja. Belátjuk, hogy $\tau/H^t/ \geq u$. Ha $\tau/H^t/ < u$ lenne, akkor van egy legfeljebb u-1 elemü lefogóhalmaza - ettől a lefogóhalmaztól csak t-1 H-beli él lehet idegen legfeljebb, ezért H-ban van egy u-1+t-1 elemü lefogórendszer, azaz $\tau/H/ < u+t-1$, ez azonban ellentmond annak, hogy L/H/ teljes gráfokkal való fedéséhez legalább u+t teljes gráfra van szükség.

Megmutatjuk, hogy H^t bármely t élének van közös pontja. Legyen $E_1' = \bigcup_{j=1}^{t} E_{1j}$, $E_2' = \bigcup_{j=1}^{t} E_{2j}, \dots, E_t' = \bigcup_{j=1}^{t} E_{tj}$ H^t-ben t számu él, ahol E_{ij} -k H-beli éleket jelölnek. y_{ij} jelölje az E_{ij} élnek megfelelő csucsot L/H/-ban. Az $Y = \{y_{ij} ; 1 \leq i,j \leq t\}$ csucsok által feszitett részgráf komplementere nem tartalmaz kört, mivel $|Y| \leq t^2$. Ebből kifolyólag az Y halmaz pontjai elrendezhetők ugy, hogy bármely $y \in Y$-hoz legfeljebb egy olyan $y' \in Y$ van melyre $y < y'$ és y, y' él nincs benne L/H/-ban. Válasszunk ki csucsokat Y-ból a következő algoritmus szerint: kezdetben legyen $Y' = \emptyset$. Ha van olyan $y_{ij} \in Y - Y'$, hogy y_{ij} össze van kötve Y' minden pontjával és $y_{km} \in Y'$-ből $i \neq k$ következik, akkor a legkisebb ilyen y_{ij} -t vegyük be Y'-be. /A legkisebb a fenti rendezésben értendő/. Ezen uj Y'-vel folytassuk az eljárást, egészen addig, mig nem tudunk már további y_{ij} pontot választani.

Belátjuk, hogy Y' minden $1 \leq i \leq t$ -re tartalmaz olyan csucsot, melynek első indexe i. Ha ez nem lenne igaz, akkor valamely i-re az $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{it}$ csucsok egyike sem lenne Y'-ben. Minden k-ra és y_{ik}-ra van olyan $y^k \in Y'$ hogy $y^k < y_{ik}$ és y, y_{ik} él nincs L/H/-ban. /Ellenkező esetben y_{ik} bekerült volna Y'-be/. Mivel $|Y'| < t$, ezért van olyan k és k', melyre $y^k = y^{k'}$, ami ellentmond Y rendezésének.

Y' ezért minden E_i' élet reprezentál – azonban Y' teljes gráf, ezért H Helly tulajdonsága miatt $\bigcap_{i=1}^{t} E_i' \neq \emptyset$. Ezzel a bizonyitást befejeztük. □□□

<u>14. Tétel bizonyitása:</u> G gráfot a következő módon definiál-

juk: Legyen G_1 gráf minden köre k-nál hosszabb és kromatikus száma 2u-nál nagyobb. G csucsait mátrix-alakban képzeljük el, melynek t sora és $V/G_1/$ oszlopa van. G éleit az első két sor definiálja: G_1 komplementerét helyezzük el az első két sorba, még pedig ugy, hogy az egymás feletti pontok egymásnak feleljenek meg egy izomorfizmusnál. Az első sor és a második sor közötti összes élt még hozzávesszük a gráfhoz. Tekintsünk egy olyan H Helly tipusu hipergráfot, melyre L/H/ izomorf G-vel. H' részhipergráf álljon G oszlopainak megfelelő élek unióiból. Könnyü igazolni, hogy H' eleget tesz a tétel követelményeinek.□□□

<u>15. Tétel bizonyitása</u>: Tekintsünk egy ut+2/t-1/ sorból és t oszlopból álló mátrixot, melyből a jobb fölső és bal alsó sarokelemeket elhagyjuk. Ezen csonkitott mátrix elemei legyenek G gráf csucsai. G két csucsa legyen éllel összekötve pontosan akkor, ha különböző oszlopban vannak, és a kisebb oszlopindexü csucs "magasabban" van, azaz sorindexe kisebb. Az igy definiált G gráf maximális teljes részgráfjaiból képezett hipergráf duális hipergráfja H legyen. Ekkor H Helly tulajdonságu hipergráf, és L/H/ izomorf G-vel. H' hipergráf álljon G t-edik,t+1-edik,.. ,ut-edik sorának megfelelő élek egyesitéséből. Ekkor H' H^t részhipergráfja lesz.

A. H normális hipergráf - ehhez azt kell igazolni, hogy G maximális teljes gráfjaiból, mint élekből álló hipergráfban a pontok bármely V részhalmazára $\varrho/V/ = \alpha/V/$, azaz a V pontjait lefedő teljes gráfok minimális száma megegyezik a V-ben lévő maximális üres gráf pontszámával./Ha V-t, mint G pontjainak részhalmazát tekintjük/. Ha a G gráf éleit ugy irányitjuk, hogy minden él "lefelé" mutasson, akkor G parciálisan rendezett halmaz lesz - igy V által feszitett részgráf is az. Dilworth ismert tételét alkalmazva $\varrho/V/=\alpha/V/$ adódik.

B. H'-ben bármely t élnek van közös pontja. Valóban, H' t számu élének G t elemü sorai felelnek meg. A legkisebb indexü sor első eleme, a következő sor második eleme, ...,a legnagyobb indexü sor t. eleme teljes gráfot definiál G-ben, ezért H Helly tulajdonsága miatt ezen pontoknak megfelelő H-beli éleknek van közös pontja.

C. $\tau/H'/\geqq u$, mivel H^t-nek legfeljebb t számu élét lehet egy ponttal lefogni, tekintve, hogy G-ben t-nél nagyobb teljes gráf nincs.□□□

<u>16.Tétel bizonyitása</u>:ehhez elég azt észrevenni, hogy t=2 esetén az előző bizonyitásban szereplő G gráf páros gráf, ezért makimális teljes részgráfjaiból álló hipergráf önmaga, ennek duális hipergráfja nem tartalmaz páratlan kört, hiszen egy h hosszuságu körnek a duálisban is megfelel egy h hosszuságu kör.

2. γ_k és τ kapcsolata diszjunkt hipergráfok összegében.

Hipergráfok t-szerezésének mintájára bevezethetjük diszjunkt hipergráfok összegét is. Az összeg definiciója megfelel egyéb strukturákon szokásos összeg-definicióknak: ha $H_1,H_2,..,H_t$ olyan hipergráfok, melyek csucshalmazai páronként diszjunktak, akkor az összeg-hipergráf csucsai a komponensek csucsainak, élei pedig a komponensek éleinek egyesitéseként irhatók, azaz

$V/\sum_{i=1}^{t} H_i/ = \bigcup_{i=1}^{t} V/H_i/$ és $E/\sum_{i=1}^{t} H_i/ = \{\bigcup_{i=1}^{t} E_i : E_i \in E/H_i/\}$.

A 12.Tétel megfelelője itt már minden részhipergráfra igaz:

17.Tétel: Ha t diszjunkt Helly tulajdonságu hipergráf összegében H' olyan részhipergráf, melyben bármely t élnek van közös pontja, akkor $\tau/H'/ \leq t$ és van olyan t elemü lefogóhalmaz, melynek minden komponensben van egy-egy pontja.

Ha az összegről csak annyit teszünk fel, hogy bármely két élnek van közös pontja, ebből még nem lehet τ-ra becslést adni /mely csak t-től függ/, még akkor sem ha H-ról feltételezzük, hogy normális.

18.Tétel: Minden u természetes számhoz van olyan H_1 és H_2 normális hipergráf, melyek diszjunktak és H összegükre $\nu/H/=1$ de $\tau/H/ \geq u$.

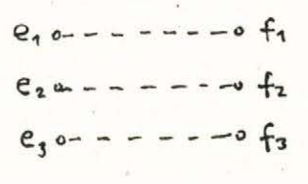
Érdekes, hogy normális hipergráf helyett kiegyensulyozott /balanced/ hipergráfokat véve már pozitiv eredményt tudunk állitani, sőt pozitiv eredményt tudunk mondani azokra a hipergráfokra is, melyek Helly tulajdonságuak, továbbá minden három hosszuságu körükben van olyan él, mely a kör mindhárom pontját tartalmazza. Mint arra Frank András rámutatott, ezen hipergráfok pontosan azok, melyekben minden alhipergráf részhipergráfjai Helly tulajdonságuak. Ennek a megjegyzésnek alapján ezeket a hipergráfokat erősen Helly tulajdonságuaknak nevezhetjük. Erösen Helly tulajdonságu hipergráfok osztályába tartoznak a kiegyensulyozott /balanced/ hipergráfok.

19.Tétel: Minden t-hez és k-hoz van olyan f/t,k/ szám, hogy amennyiben t diszjunkt erősen Helly tulajdonságu hipergráf összegének H' részhipergráfjára ν/H'/$\leq$ k, akkor τ/H'/$\leq$ f/t,k/.

Ez az eredmény a szerző egy régebbi tételéből következik /[10] 4.Tétel/ a következő, talán önmagában is érdekes lemma felhasználásával:

Lemma: Erősen Helly tulajdonságu hipergráf line-gráfja nem tartalmazhatja a három független élből álló gráf komplementerét. /Normális hipergráfra ez nem áll, hiszen ez a gráf perfekt/. Nevezzük el ezt a gráfot Q_3 -nak.

Lemma bizonyitása: Indirekt módon okoskodunk. Tegyük fel, hogy Q_3 gráf benne van feszitett részgráfként H erősen Helly tulajdonságu hipergráf line gráfjában. Jelöljük Q_3 csucsait az alábbi ábra szerint: /e_1f_1,e_2f_2,e_3f_3 élek hiányoznak a gráfból, a többi él megvan/



Tekintsük az e_1,X,e_2,Y,e_3,Z kört, ahol $X\in e_1\cap e_2\cap f_3$, $Y\in e_2\cap e_3\cap f_1$ és $Z\in e_3\cap e_1\cap f_2$. X,Y,Z pontok kiválaszthatók igy, hiszen H Helly tulajdonságu. A kiválasztott pontok mind különbözők, hiszen, ha pl. X=Y akkor $X\in e_1$ és $X\in f_1$, ami nyilván lehetetlen, hiszen e_1 és f_1 diszjunktak. Ezen kör egyik éle sem tartalmazza X,Y,Z mindegyikét: $Y\notin e_1$, $Z\notin e_2$ és $X\notin e_3$. Az ellentmondás a lemmát bizonyitja.□

17.Tétel bizonyitása: H' éleinek számára vonatkozó indukcióval bizonyitunk. Legyenek $H_1,..,H_t$ diszjunkt Helly tulajdonságu hipergráfok és H' az összegük egy részhipergráfja. Tegyük fel, hogy igaz a tétel, ha H'-nak k-nál kevesebb éle van, és legyen $|E/H'/|=k$. Legyen $e \in E/H'/$ és $e=\bigcup_{i=1}^{t} e_i$ ahol $e_i \in E/H_i/$. H'-e hipergráfnak indukciós feltevés szerint van t pontu lefogóhalmaza, $x_1,..,x_t$, olyan, hogy $x_i \in V/H_i/$. Feltehető, hogy minden x_i-hez van olyan éle H'-e -nek, melyet csak x_i fog le - ellenkező esetben x_i csucsot hagyjuk el és helyette vegyünk tetszőleges csucsot e_i -ből, igy H'-nek a kivánt lefogóhalmazát kapjuk. Rendeljük a csak x_i-ben lefogott H'-e -beli élek H_i-be eső komponenseit x_i-hez, ez legyen F_i részhipergráfja H_i-nek. H'-e esetleges maradék éleinek komponenseit osszuk be tetszőlegesen különböző F_i-kbe. Ilymódon egy-egy értelmü megfeleltetésünk van H'-e élei és $\bigcup_{i=1}^{t} F_i$ között.

Ha valamely i-re e_i metszi F_i minden élét, akkor H_i Helly tulajdonsága miatt $F_i \cup \{e_i\}$ -nek van közös pontja, ezzel x_i-t kicserélve H'-nek a kivánt lefogóhalmazát kapjuk. Ellenkező esetben minden e_i-hez van olyan $f_i \in F_i$ hogy $e_i \cap f_i = \emptyset$. Ezekhez az az f_i élekhez tartozó H'-e-beli élek halmaza legyen E'. $|E'| = t$, ezért az $E' \cup e$ élhalmaz t+1 elemü. Feltétel szerint ezen élhalmaznak van közös pontja, ez azonban lehetetlen, mert $e_i \cap f_i = \emptyset$ az i. komponensben. ⊡

18.Tétel bizonyitása: G két szinnel szinezett teljes gráfot definiáljuk a következő módon: pontjai egy u soru és u oszlopu mátrix elemei, és két pont közötti él piros, ha a két pont nincs egy sorban, kék, ha a két pont nincs egy oszlopban. Ilymódon egy él több szint is kaphat. Legyen G_p és G_k a piros ill. kék élek által meghatározott gráf. G_p és G_k perfekt gráfok /legegyszerübb módon ugy látható ez, hogy komplementerük perfekt cf. [13]/ ezért maximális teljes gráfjaikból képzett hipergráf duálisa normális [13]. Ezen hipergráfok összegét nézve $\gamma=1$, hiszen G-ben bármely két pont között van piros vagy kék él. Másrészt $\tau \geq u$ az összegre, hiszen G csucsai nem fedhetők le u-nál kevesebb egyszinü teljes részgráffal, tekintve, hogy egy egyszinü teljes részgráfnak legfeljebb u pontja van. ☐☐☐

5. Nem csökkenthető lefogóhalmazok számáról.

Vizsgáljuk meg, hogy egy hipergráfnak hány, legfeljebb k elemü lefogóhalmaza lehet, pontosabban, hogy milyen felső becslés adható erre, mely csak k-tól és a hipergráf rangjától függ. A kérdés csak olyan lefogóhalmazokra érdekes, melyek nem csökkenthetők, azaz melyekből tetszőleges pontot elhagyva már nem kapunk lefogóhalmazt. Nevezzük az ilyen nem csökkenthető lefogóhalmazokat minimálisnak.

20.Tétel: Egy r rangu H hipergráfban legfeljebb r^k minimális, k-nál nem nagyobb elemszámu lefogóhalmaz lehet.

A tételt $k=\tau/H/$ ra alkalmazva adódik:

1.Következmény: Egy r rangu H hipergráfban legfeljebb $r^{\tau/H/}$ számu $\tau/H/$ elemü lefogóhalmaz lehet.

2.Következmény: / [13],53.oldal 2.tétel/ r rangu τ-kritikus H hipergráfban legfeljebb $/\tau r/^r$ él lehet. /Egy hipergráf τ-kritikus, ha bármely élét bármely pontjával csökkentve τ megnő./

Bizonyitás: tekintsük azt a H' hipergráfot, melynek pontjai H pontjai, élei pedig H-ból vett τ számu él egyesitéseként irhatók. H' rangja legfeljebb τr és H minden éle egy minimális, legfeljebb r elemü lefogóhalmaz. /A minimalitás H τ -kritikusságából következik./ A 20. tételt alkalmazva a következményt kapjuk.□

20.Tétel bizonyitása: k szerinti indukció. k=1-re a tétel igaz. Legyen $k > 1$ és válasszuk ki H tetszőleges e élét. H-nak minden minimális lefogóhalmaza metszi e-t és e egy x pontját legfeljebb r^{k-1} ilyen lefogóhalmaz metszheti, hiszen egy ilyen T lefogóhalmaz esetén $T-\{x\}$ lefogóhalmaza $H-x$ -nek, még pedig minimális és legfeljebb $k-1$ elemü. Miután e-nek legfeljebb r eleme van, ezért $r \cdot r^{k-1} = r^k$ lefogóhalmaz lehet legfeljebb. □□□

6. Fogalmak, jelölések.

Ebben a fejezetben felsoroljuk a legfontosabb fogalmakat és jelöléseket.

Hipergráfnak nevezünk egy H=/V/H/,E/H// párt, ahol V/H/ egy véges halmaz, E/H/ pedig V/H/ részhalmazainak egy véges rendszere. Rendszert mundtunk halmaz helyett, mert egy részhalmaz többször is szerepelhet E/H/-ban. Ha minden részhalmaz legfeljebb egyszer szerepel E/H/-ban, akkor egyszerü hipergráfról beszélünk. V/H/ halmazt H csucsainak, vagy pontjainak, E/H/-t pedig H éleinek mondjuk.

Mindig feltételezzük, hogy egy hipergráf éleinek egyesitése a csucsok halmaza.

H' hipergráfot H részhipergráfjának nevezzük, ha H' élei H élei közül valók és H' pontjait H' éleinek egyesitése adja. H' hipergráfot H hipergráf alhipergráfjának nevezzük, ha pontjai V/H/ egy részhalmaza, élei pedig H éleinek ezzel a részhalmazzal való metszetei.

Egy hipergráf rangja egy maximális sok csucsból álló elemszáma. Egy csucs foka a csucsra illeszkedő élek száma. Két hipergráf izomorf, ha csucsaik között egy-egy értelmü éltartó megfeleltetés létesithető. q hosszuságu láncnak nevezzük az $x_1,E_1,x_2,E_2,..,x_q,E_q,x_{q+1}$ sorozatot, ahol x_i-k különböző csucsok, E_i-k különböző élek és $x_k,x_{k+1} \in E_k$ $k=1,2,..,q$ esetén. Ha $x_{q+1}=x_1$, akkor q hosszuságu körről beszélünk.

Egy hipergráf összefüggő, ha bármely két különböző pontja lánccal összeköthető. Könnyü igazolni, hogy minden hipergráf egyértelmüen felbontható összefüggő komponensekre.

H=/V,E/ hipergráf duális hipergráfja, H' a következő: H' élei H csucsainak, H' csucsai H éleinek felelnek meg és H'-ben csucs élre /él csucsra/ pontosan akkor illeszkedik, ha H-ban a megfelelő él csucsra /csucs élre/ illeszkedik.

Egy hipergráf uniform, ha minden éle ugyanannyi csucsból áll. Egy hipergráf s osztályu, ha csucsai s diszjunkt nem üres osztályban vannak és minden éle minden osztályból egyetlen pontot tartalmaz. Teljes s osztályu hipergráf az, mely s osztályu és minden lehetséges él egyszeres multiplicitással benne van. K_n^r jelöli a teljes n csucsu r rangu uniform hipergráfot, melynek élei n csucs összes r elemü részhalmazaiból állnak. Mindig feltesszük, hogy $r \leqq n$.

ν_k -val jelöljük egy hipergráf azon részhipergráfjának maximális elemszámát, melyben minden csucsra legfeljebb k él illeszkedik e részhipergráfból. τ_k-val jelöljük azon csucsrendszer minimális elemszámát, melyre minden él legalább k számu csucsot tartalmaz ezen csucsrendszerből. Egy csucs többször is kiválasztható. ν_1 és τ_1 helyett a ν és τ jelölést szokásos használni. ν a független élek maximális száma, τ pedig az éleket lefogó csucsok minimális száma. Általában, ha egy élhalmaz páronként diszjunkt élekből áll, akkor független élekről beszélünk, és egy csucshalmazt lefogóhalmaznak nevezünk, ha minden él tartalmaz legalább egy csucsot e halmazból. Megjegyezzük, hogy ν-nek és τ-nak a duális hipergráfon α /erős stabilitási szám/ és ρ /fedési szám/ felel meg.

H hipergráf élgráfjának, vagy line-gráfjának nevezzük, és L/H/-val jelöljük azt azt a gráfot, melynek csucsai H éleinek felelnek meg és két csucs pontosan akkor van összekötve L/H/-ban, ha a megfelelő H-beli éleknek van közös pontjuk.

Ha H egy hipergráf és $x \in V/H/$, akkor x elhagyását V/H/-ból és minden x-et tartalmazó élből x levágásának nevezzük. Ha x-et elhagyjuk V/H/-ból és E/H/-ból elhagyjuk az összes x-et tartalmazó élt, akkor x elhagyásáról beszélünk. Ezt a müveletet H-x -el jelöljük.

Egy hipergráf Helly tulajdonságu, ha bármely részhipergráfjára $\nu=1$ -ből $\tau=1$ következik. Egy hipergráf normális, ha bármely részhipergráfjára $\nu = \tau$. Egy hipergráf kiegyensulyozott, vagy balanced, ha bármely páratlan körében van olyan él melya kör legalább három pontját tartalmazza. Ismeretes, hogy balanced hipergráf normális és normális hipergráf triviálisan Helly tulajdonságu.

Szögletes zárójel egész részt jelöl, $*$ -al a jobbsarkában felső egész részt.

Hivatkozások

[1] B.Andrásfai:Remarks on a paper of Gerencsér and Gyárfás, Annales Univ. Sci. Bud. de Rol. Eötvös,Sect. Math. XIII. 1970. 103-107.

[2] Zs.Baranyai: On the factorization of the complete uniform hypergraph. Coll.Math. Soc. J.Bolyai 10. Infinite and Finite sets. 91.

[3]. C .Berge, Graphs and Hypergraphs, North Holland,1973

[4] C.Berge-D.Ray-Chaudhuri /editors/ Hypergraph Seminar, Lecture notes in Math. 411.

[5] d.Ray-Chaudhuri - R.M.Wilson: The existence of resolvable block designs. In A Survey of Comb. Theory, North Holland, 1973

[6] L.Gerencsér -A.Gyárfás: On Ramsey type problems. Annales Univ.Sci Bud. de Rol. Eötvös S.Math. X. 1967, 167-170.

[7] A.Gyárfás -J.Lehel: A Helly type problem in trees. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 4. Combinatorial Theory and its Applications, 1969 571-584

[8] A.Gyárfás: On Ramsey covering numbers. Coll. Math. Soc. J.Bolyai, 10. Infinite and Finite sets,1973 801-816.

[9] A.Gyárfás: A note on Hypergraphs having the Helly property. Submitted to Discrete Mathematics.

[10] A.Gyárfás: A Ramsey type theorem and its applications to Relatives of Helly's theorem. Periodica Math. Hung. Vol. 3. 1973. 261-270

[11] A.Hajnal-P.Erdős: On chromatic number of graphs and set systems, Acta Math. Acad.Sci. Hung.17.1966.61-99.

[12] Kőnig Dénes: Gráfok és mátrixok, Mat.Fiz. Lapok,38 1931, 116-119.

[13] Lovász László: Doktori értekezés, 1977