tanulmányok 58/1976

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

MÁTRIXOK ÁLTALÁNOSITOTT INVERZE

Irta:

DR VARGA GYULA

Tanulmányok 58/1976.

A kiadásért felel:

DR VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 032 7

768290 MTA KESZ Sokszorosító. F. v.: Szabó Gyula

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

Az alábbiakban valós elemü mátrixok Moore-Penrose-féle általánositott inverzével foglalkozunk. Összefoglalást adunk ezek fontosabb alapvető tualjdonságairól, majd néhány számitástechnikai eljárást ismertetünk ezek numerikus előállitására. A közölt állitások egy részének a bizonyitását is megadjuk.

1. A MOORE-PENROSE-FÉLE ÁLTALÁNOSITOTT INVERZ FOGALMA, ELŐÁLLITÁSA

Nemszinguláris négyzetes mátrixu $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyetlenrendszer egyértelmü megoldását adja az $\underline{x} = A^{-1}.\underline{b}$ vektor, ahol A^{-1} az A mátrix inverze.

Téglalapmátrixu lineáris egyenletrendszereknek általában nincs egyértelmü megoldásuk, hanem alulhatározott esetben (kevesebb független és egymásnak nem ellentmondó egyenlet, mint ahány ismeretlen) általában végtelen sok megoldásuk van, tulhatározott esetben (több - egymásnak ellentmondó - egyenlet, mint ahány ismeretlen) pedig egy sincs. Az ilyen egyenletrendszerek mátrixának közönséges értelemben vett inverzéről nem beszéhetünk. Definiálhatjuk azonban az A téglalapmátrix általánositott inverzét A^{+}-et ugy, hogy az az $A\underline{x} = \underline{b}$ téglalapmátrixu lineáris egyetlenrendszer un. normál megoldását adja meg $\underline{x} = A^{+}.\underline{b}$ alakban. Normál megoldásnak nevezzük azt az $\underline{x}$ vektort, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1./ Alulhatározott egyenletrendszer esetén minimalizálja $\underline{x}^{T}.\underline{x}$ -et az $A\underline{x} = \underline{b}$ feltétel teljesülése mellett.

2./ Tulhatározott egyenletrendszer esetén minimalizálja $(A\underline{x}-\underline{b})^{T}.\ (A\underline{x}-\underline{b})$-t.

Az igy definiált Moore-Penrose-féle általánositott inverz [1],[2] eleget tesz az

$$AA^+A = A \qquad (AA^+)^T = AA^+$$
$$A^+AA^+ = A^+ \qquad (A^+A)^T = A^+A$$

összefüggéseknek (Penrose-lemma).

Egy mxn-es A mátrixot maximális rangunak nevezünk, ha a rangja $r(A)=\min(m,n)$.

Először az ilyen mátrixokra számitjuk ki az általánositott inverzet explicit alakban az előbbiekben leirt minimalizálási feltételek alapján.

1./ Legyen A mxn -es mátrix, $m<n$ és $r(A) = m$.
A fenti feltételes szélső értéket az
$f(\underline{x}) = \underline{x}^T.\underline{x}+\underline{z}^T(A\underline{x}-\underline{b})$ függvény szélső értéke adja meg, ahol $\underline{z}$ a Lagrange-féle multiplikátor.
A $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ $(i=1,\dots,n)$ és $\frac{\partial f}{\partial z_j} = 0$ $(j=1,\dots,m)$
feltételekből kapjuk a

$$2\underline{x}+A^T\underline{z} = 0$$
$$A\underline{x}-\underline{b} = 0$$

egyenletrendszert. Az első egyenletet balról A-val, a második 2-vel beszorozva és a két egyenletet egymásból kivonva kapjuk az

$$AA^T\underline{z} + 2\underline{b} = 0$$

egyenletet. Mivel A maximális rangu, ezért AA^T mxm-es nemszinguláris mátrix, tehát $\underline{z}$ kifejezhető ez utóbbi egyenletből:

$$\underline{z} = -2(AA^T)^{-1}.\underline{b}$$

Visszahelyettesitve ezt az első egyenletbe kapjuk $\underline{x}$ -et:

$$\underline{x} = A^T(AA^T)^{-1}.\underline{b}$$

A kapott $\underline{x}$ a normál megoldás, az A mátrix általánositott inverze tehát $A^{+} = A^{T}(AA^{T})^{-1}$.
Az $\underline{x}$ -et az f függvénybe behelyettesitve kapjuk $\underline{x}^{T}.\underline{x}$ minimumát az $A\underline{x}=\underline{b}$ feltétel teljesülése mellett:

$$f(\underline{x}) = \underline{b}^{T}(AA^{T})^{-1}\,\underline{b}.$$

2./ Legyen A mxn -es mátrix $m>n$ és $r(A) = n$. Minimalizálni akarjuk $A\underline{x}$ $\underline{b}$ -től való eltérése normájának négyzetét, az $f(\underline{x}) = (A\underline{x}-\underline{b})^{T}.(A\underline{x}-\underline{b})$ függvényt.

A $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ $(i=1,\dots, n)$ feltételből adódik az

$A^{T}A\underline{x}-A^{T}\underline{b} = 0$ egyenlet, amelyből, kihasználva, hogy A maximális rangu, tehát $A^{T}A$ nemszinguláris, $\underline{x}$ kifejezhető:

$$\underline{x} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}\underline{b}.$$

Ez az eredeti egyenletrendszer normál megoldása, az A mátrix Moore-Penrose-féle általánositott inverze tehát

$$A^{+} = (A^{T}A)^{-1}.A^{T}.$$

Behelyettesitve kapjuk f minimumát:

$$f(\underline{x}) = \underline{b}^{T}(E_m-AA^{+})\underline{b} = b^{T}[E_m-A(A^{T}A)^{-1}\,A^{T}]\underline{b}.$$

Tetszésszerinti téglalapmátrix azonban nem maximális rangu, de bizonyitás nélkül közöljük, hogy két maximális rangu mátrix szorzatára bontható valamilyen rangszámmeghatározó eljárással.

Megmutatjuk, hogy ha az A mxn-es téglalapmátrix rangja $k<\min(m,n)$, és $A=B.C$, ahol B és C maximális rangu mxk -s ill. kxn -es mátrixok, akkor $A^+=C^+.B^+$ vagyis $A^+=C^T(CC^T)^{-1}.(B^TB)^{-1}B^T$.

<u>B i z o n y i t á s :</u>

A Penrose-lemma alapján

$$A^+ = A^+BCA^+$$

Megmutatható, hogy $A^+B = C^T(CC^T)^{-1}$ és $CA^+ = (B^TB)^{-1}B^T$.

Bizonyitsuk be pl. az utóbbi egyenlőséget.

Fennáll:

$$BCA^+ = AA^+ = (A^{T+}A^T)^T = A^{T+}A^T = A^{T+}C^TB^T$$

(L. a következő fejezetben a 3.sz. pontot).

C^TB^T -vel balról beszorozva

$$C^TB^TBCA^+ = C^TB^TA^{T+}C^TB^T = C^TB^T$$

$(B^TB)^{-1}.C^{T+}$ -tel balról beszorozva

$$\underbrace{(B^TB)^{-1}.\underbrace{C^{T+}C^T}B^TB}CA^+ = (B^TB)^{-1}C^{T+}C^TB^T$$

Ez azonban éppen az állitás bizonyitását adja, ugyanis $C^{T+}C^T = E_k$, továbbá $B^+B = E_k$, hiszen ezek maximális rangu mátrixok, és az általánositott inverzük explicit felirásából a két utóbbi egyenlőség következik.

Szinguláris nxn -es négyzetes mátrixok általánositott inverzét szintén az előbb látott módon állithatjuk elő. Legyen A ilyen mátrix, rangja $k<n$. Ekkor A felbontható $A = B.C$ alakban, ahol B nxk-s, C kxn -es maximális rangu mátrix. A fentiek alapján $A^+ = C^+B^+$.

2. A MOORE-PENROSE-FÉLE ÁLTALÁNOSITOTT INVERZ NÉHÁNY ALAPVETŐ TULAJDONSÁGA

A továbbiakban, mielőtt rátérnénk az általánositott inverz kiszámitására szolgáló numerikus eljárások ismertetésére, néhány alapvető, egyszerü összefüggést ismertetünk bizonyitás nélkül, amelyek mátrixok általánositott inverzére vonatkoznak.

1./ Az általánositott inverz rangja megegyezik az eredeti mátrix rangjával: $r(A^+) = r(A)$.

2./ Négyzetes, reguláris mátrix általánositott inverze megegyezik közönséges értelemben vett inverzével:
$$A^+ = A^{-1}.$$

3./ A traszponálás és az általánositott inverz képzésének sorrendje felcserélhető: $(A^T)^+ = (A^+)^T$. (Ezt a fentiekben már kihasználtuk).

4./ Az általánositott inverz általánositott inverze az eredeti mátrix: $(A^+)^+ = A$.

5./ Skalár (1x1 -es mátrix) általánositott inverze a következő:

$$a^+ = \begin{cases} 0 & \text{ha } a=0 \\ \frac{1}{a} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

6./ Oszlopvektor (nx1 -es mátrix) általánositott inverzét a következőképpen kapjuk meg:

$$\underline{r}^+ = \begin{cases} 0 \quad \text{ha } ||\underline{r}|| = 0 \\ \dfrac{1}{||\underline{r}||^2} \cdot \underline{r}^T \quad \text{egyébként.} \end{cases}$$

A képletben szereplő $||\ ||$ euklidesi normát jelent.

7./ Legyen $B = \begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}$ (O a zérusmátrixot jelenti)

akkor $B^+ = [A^+, O]$.

8./ Legyen $C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ (O a zérusmátrix, C blokkokra van bontva),

akkor $C^+ = \begin{bmatrix} A^+ & O \\ O & B^+ \end{bmatrix}$.

9./ Ha a mátrix elemeit ugy változtatjuk, hogy közben a mátrix rangja megváltozik, az általánositott inverz elemei nemfolytonosan változnak [3].
(Legyen pl.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{; ha } x \neq 0, \quad \text{akkor}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 \\ \frac{1}{x} & -\frac{0.4}{x} & -\frac{0.2}{x} \end{bmatrix},$$

ha $x \to 0$, akkor A^+ -nek nincs véges határértéke, $x=0$ -nál pedig

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

10./ Minden (valós vagy komplex elemü) mátrixnak létezik Moore-Penrose-féle általánositott inverze, és az egyértelmü.

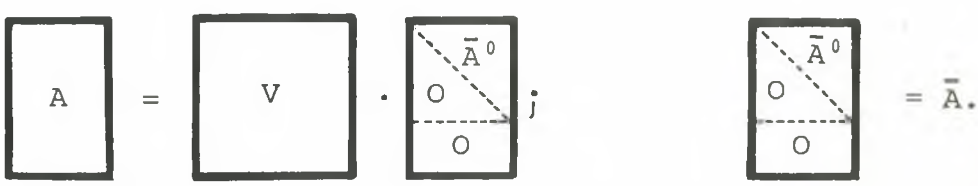
3. NUMERIKUS ELJÁRÁSOK A MOORE-PENROSE-FÉLE ÁLTALÁNOSITOTT INVERZ KISZÁMITÁSÁRA

A továbbiakban a Moore-Penrose-féle inverz kiszámitására néhány numerikus eljárást ismertetünk. Csak direkt eljárásokkal foglalkozunk. Ezek az eljárások kihasználják a Moore-Penrose-féle inverznek az előzőkben leirt tulajdonságait, illetve azokon alapulnak.

Tekintsük először a maximális rangu téglalapmátrixokat.

1./ Az előző pontban ismertetett 3. számu tulajdonság miatt elegendő pl. a tulhatározott esetre szoritkozni. Az erre az esetre vonatkozó $A^+ = (A^T A)^{-1}.A^T$ képlet egyszerüen kezelhető, $A^T A$ szimmetrikus pozitiv definit mátrix, inverze egyszerüen megkapható bármelyik mátrix invertáló eljárással, és A^T -vel jobbról szorozva máris megkaphatjuk A^+ -et.

2./ Egy másik lehetőség a Householder-féle ortogonalizálási eljárással [4] történő mátrix felbontás. Ez esetben az A mátrixot $A=V.\bar{A}$ alakban bontjuk fel, ahol V ortogonális mátrix, $\bar{A}$-nak pedig a "főátlója" alatt csupa O eleme van, tehát a nemzérus része trianguláris. A felbontást egy ábrával bemutatva



A felbontás alapján $A^+ = \bar{A}^+.V^T$, ámde az előző pontban emlitett 2. és 7. tulajdonság alapján $\bar{A}^+ = [\bar{A}^{o-1}, O]$, $\bar{A}^{o-1}$ kiszámitása pedig nem okoz problémát, mert $\bar{A}^o$ trianguláris.

Az előbb emlitett Householder-féle ortogonalizálási eljárás az adott $m \times n$ -es A mátrixnak balról sorozatosan olyan $m \times m$ -es $Q_k = E - \frac{1}{h} \cdot \underline{u}\,\underline{u}^T$ $(k=1,\dots,n)$ mátrixokkal való beszorzását jelenti, ahol

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \dots = u_{k-1} = 0 \\
u_k &= a_{k,k} - t.\sigma^{1/2} \\
u_{k+1} &= a_{k+1,k} \\
&\vdots \\
u_m &= a_{m,k} \\
\sigma &= a_{k,k}^2 + \dots + a_{m,k}^2 \\
h &= t.\sigma^{1/2}(t.\sigma^{1/2} - a_{k,k}) = -U_k . t\sigma^{1/2} \\
t &= -\mathrm{sign}(a_{k,k})
\end{aligned}
$$

Kiindulva az $A_o = A$ mátrixból, az $A_k = Q_k . A_{k-1}$ mátrix k -adik oszlopának k-adik eleme $a_{k,k} = t.\sigma^{1/2}$, az alatta lévő elemek mind zérussal egyenlők. Az egymás utáni lépések az előző lépések által kapott "főátló alatti" zérusokat nem rontják el. Az n-edik lépés után kapott $A_n = Q_n . A_{n-1} = Q_n . Q_{n-1} \dots Q_1 A_o$ -ból $Q^T = Q_n . Q_{n-1} \dots Q_1$ -et véve, az $A_n = Q^T . A_o$ -ból $A_o = Q . A_n$ a kivánt felbontást adja.

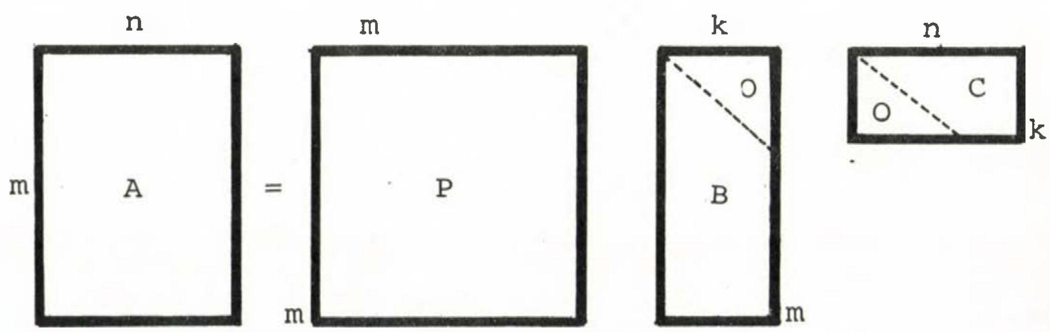
Maximális rangu mátrixok általánositott inverzének kiszámitásánál a rangszámmeghatározás nem okoz problémát, a fenti ortogonalizálási eljárás stabilitásának növelése érdekében mégis célszerü oszlopkiválasztást alkalmazni a k-adik $k+1$-edik, stb. n-edik oszlopok közül olyan szempont szerint, hogy σ maximális legyen. Igy az $A = V\bar{A}P$ felbontást kapjuk, ahol P permutációs mátrix /amelyet természetesen csak egy vektor segitségével tárolunk/. Ebből $A^+ = P\bar{A}^+ V^T$.

Nem maximális rangu mátrixok esetén első lépés a rangszám meghatározása, amely egyben egy maximális rangu mátrixok szorzatára való felbontást is ad. /Minden esetre olyan rangszámmeghatározó algoritmus alkalmazása célszerü, amely egyben a kivánt faktorizációt is szolgáltatja/.

Ezzel az általánositott inverz kiszámitásának a problémáját elvileg megoldottuk, hiszen a felbontásban kapott tényezők általánositott inverzének forditott sorrendben vett szorzata éppen a keresett általánositott inverz mátrixot adja.

Tekintsük át a feladat gyakorlati megoldásának néhány lehetőségét.

1./ Bontsuk tényezőkre az A mátrixot a Gauss-féle elimináció segitségével, főelemkiválasztással. A ténylegesen végrehajtott eliminációs lépések száma éppen a k rangszámot adja meg, ahol $k \leq \min(m,n)$, igy tehát az $A=PBC$ felbontás tényezői egy permutációs mátrix, továbbá egy $m \times k$ -s és egy $k \times n$ -es trapézmátrix.
A felbontást egy ábrán bemutatva:



$B = \begin{bmatrix} E \\ S \end{bmatrix} . Q$ és $C = U.[E,W]$ ahol

$S = R.Q^{-1}$ ill. $W = U^{-1}. V$

Könnyen belátható, hogy B és C általánositott inverzét az alábbi alakban kaphatjuk meg:

$$B^{+} = Q^{-1}.(E+S^{T}.S)^{-1}.[E,S^{T}] \qquad \text{ill.}$$

$$C^{+} = \begin{bmatrix} E \\ W^{T} \end{bmatrix} .(E+W.W^{T})^{-1}. U^{-1}.$$

Mármost Q és U trianguláris, $E+S^{T}S$ és $E+WW^{T}$ pedig szimmetrikus pozitiv definit mátrixok, igy közönséges értelemben vett inverzüket egyszerüen megkaphatjuk. A felbontás alapján $A^{+}=C^{+}B^{+}P$.

2./ Egy másik lehetőség az első lépésnek, a rangszámmeghatározásának a végrehajtása a fentiekben már ismertetett Householder-féle eljárással. Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy $m<n$. Most is oszlopkiválasztással dolgozunk, a Householder-féle eljárás ismertetése során megadott szempont figyelembevételével. A sikeresen végrehajtott lépések száma, k, éppen a mátrix rangját adja meg, és igy egy A=QCP alaku felbontást kapunk eredményül, ahol Q mxm-es ortogonális mátrix. $C = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ O \end{bmatrix}$, ahol $\bar{C}$ kxn -es trapézmátrix, O (m-k)xn -es zérusmátrix, P pedig nxn -es permutációs mátrix.

A 2. pontban ismertetett 7. tulajdonság alapján $C^+ = [\bar{C}^+, 0]$, $\bar{C}^+$ pedig, az előző módszer ismertetésénél használt jelöléseket alkalmazva ($\bar{C} = [U,V] = U.[E,W]$, ahol $W = U^{-1}.V$) az ottani képlet alapján $\bar{C}^+ = \begin{bmatrix} E \\ W^T \end{bmatrix}.(E+WW^T)^{-1}.U^{-1}$. A felbontás alapján $A^+ = PC^+Q^T$.

3./ Arra az esetre, mikor az $m \times n$ -es ($m \leq n$) A mátrix eleve particionálva van $A = [R,S]$ alakban, ahol R a független oszlopvektorokat foglalja magában, S pedig R oszlopvektorainak lineáris kombinációit, [5] ad egy eljárást a Moore-Penrose inverz kiszámitására. A felirásból következik, hogy létezik egy egyértelmü $S = R.U$ faktorizáció. Az A mátrix tehát $A = R.[E,U]$ alakban irható, s az ebből adódó $A^+ = \begin{bmatrix} E \\ U^T \end{bmatrix}.(E+UU^T)^{-1}.R^+$ képletet

$$A^+ = \begin{bmatrix} [E-(UP)(UP)^T].ZQ^T \\ P(UP)^T ZQ^T \end{bmatrix}$$

alakban átirva, a benne szereplő Q,Z,U mátrixokat az $A = [R,S]$-en végrehajtott (módositott) Gram-Schmidt féle ortogonalizálási eljárással kapjuk meg, a P-t pedig az U -n végrehajtott hasonló eljárással. A módositás az ortogonalizáló eljárás lényegét nem érinti. Az invertáló eljárás rangszámmeghatározást nem igényel, hiszen a rangszám a kezdeti particionált felirással eleve adva van. Ez egyben rámutat a módszer alkalmazhatóságának feltételeire is.

4./ A Gauss-féle eliminációhoz hasonló un. "báziscserélő" algoritmussal végzi az mxn -es ($m \geq n$) A mátrix rangszámmeghatározását Chen [6], de nem közvetlenül A -ra, hanem a szimmetrikus pozitiv szemidefinit $A^T A$ -ra alkalmazva az algoritmus egy speciális, szimmetrikus mátrixokra kidolgozott változatát, amely jelentős időmegtakaritást eredményez. Ha az algoritmus során kénytelen teljes főelemkiválasztást és ennek megfelelően oszlopcserét végezni, akkor az általános báziscserélő algoritmust alkalmazza, de egy ujabb alkalmas főelemkiválasztással 2 lépésben visszaállitja a szimmetriát. A sikeresen végrehajtott lépések száma megadja a mátrix rangját és egyben az A mátrix független oszlopvektorait is. Az általánositott inverz kiszámitására a Gauss-féle eljárással kapott képlethez hasonlót használ, és a szükséges közönséges invertálásokat is a báziscserélő algoritmussal végzi el.

5./ Greville [7] olyan algoritmust adott, amely az mxn-es A mátrix általánositott inverzét rekurziv uton, kiindulva az A mátrix valamely A_{k-1} mx(k-1) -es ismert inverzü részéből, egy-egy ujabb oszlopvektor hozzávételével számitja ki.
Legyen $A_k = [A_{k-1}, \underline{a}_k]$, az $\underline{a}_k$ oszlopvektort ortogonális projekció segitségével felbontjuk $\underline{a}_k = \underline{a}_k^{(1)} + \underline{a}_k^{(2)}$ alakban ugy, hogy $A_{k-1}^+ \cdot \underline{a}_k^{(2)} = 0$ teljesüljön. Legyen $\underline{d}_k = A_{k-1}^+ \cdot \underline{a}_k = A_{k-1}^+ \cdot \underline{a}_k^{(1)}$, akkor

$$\underline{a}_k^{(1)} = A_{k-1} A_{k-1}^+ \underline{a}_k = A_{k-1} \underline{d}_k$$

$$\underline{a}_k^{(2)} = \underline{a}_k - \underline{a}_k^{(1)}$$

Legyen továbbá

$$\underline{b}_k^T = \begin{cases} \underline{a}_k^{(2)+} & \text{ha } \underline{a}_k^{(2)} \neq 0 \\ (1+\underline{d}_k^T\underline{d}_k)^{-1}\underline{d}_k{}^{+}A_{k-1}^{+} & \end{cases}$$

egyébként, akkor

$$A_k^+ = \begin{bmatrix} A_{k-1}^+ - \underline{d}_k\underline{b}_k^T \\ \underline{b}_k^T \end{bmatrix} \qquad k=2,\dots,n \text{ -re.}$$

Ez az egyenlőség az általánositott inverz definiciója alapján egyszerüen belátható. Az utolsó lépésben $A_n = A = [A_{n-1}, \underline{a}_n]$, igy $A^+ = A_n^+$.

6./ A Greville féle eljárást az alábbi módon alakithatjuk át ill. fejleszthetjük tovább: Kiindulva egy mxn-es A mátrix első oszlopából kivett m-n+2 elemü oszlopvektorból, ill. ezt tekintve A_1-nek és hozzávéve a mátrix második oszlopából ugyanannyi elemet $\underline{a}_2$-nek, alkalmazhatjuk a Greville-féle algoritmust A_2^+ kiszámitására. Majd hozzávéve A_2-höz A (m-n+3)- adik sorának első két elemét, ill. ezt tekintve $\underline{f}_2{}^T$-nek, felépithetjük a Greville-féle algoritmus "transzponáltját" a következőképpen:

$$\underline{f}_k^T = \underline{f}_k^{(1)T} + \underline{f}_k^{(2)T}$$

$$\underline{d}_k^T = \underline{f}_k^T \cdot A_{k-1}^+$$

$$\underline{f}_k^{(1)T} = \underline{d}_k^T \cdot A_{k-1}$$

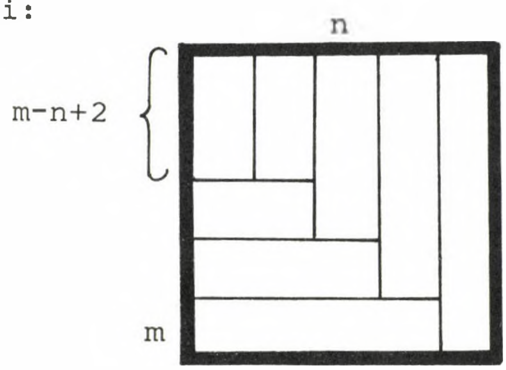
$$\underline{f}_k^{(2)T} = \underline{f}_k{}^T - \underline{f}_k^{(1)T}$$

$$\underline{b}_k = \begin{cases} \underline{f}_k^{(2)T+} & \text{ha } \underline{f}_k^{(2)T} \neq 0 \\ A_{k-1}^+ \cdot \underline{d}_k \cdot (1+\underline{d}_k^T\, \underline{d}_k)^{-1} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen $A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} \\ f_k^T \end{bmatrix}$, akkor

$$A_k^+ = [A_{k-1}^+ - \underline{b}_k.\underline{d}_k^T,\ \underline{b}_k].$$

Ezután a Greville-algoritmust és az algoritmus transzponáltját felváltva alkalmazzuk addig, amig a teljes A mátrix Moore-Penrose-féle inverzét meg nem kapjuk. Az algoritmus alkalmazásához kiindulásul választott oszlopvektor Moore-Penrose-inverzét a 2. fejezet 6. pontja alapján számithatjuk ki.
Az invertálás végrehajtását az alábbi ábra szemlélteti:



Ha az invertálandó mátrix particionált alaku felirásban valamelyik blokk általánositott inverzét ismerjük, a szükséges Greville-algoritmus lépéseit magunk tervezhetjük meg, célszerüen, a mátrix particionált alakjának megfelelően.
Ebből láthatjuk, mikor célszerü ezt a módszert alkalmazni.

Az általánositott inverz kiszámitására szolgáló eljárások ismertetése során a legcsekélyebb mértékben sem törekedtünk a teljességre, csupán számitástechnikailag könnyen kezelhető eljárásokat igyekeztünk bemutatni. Egyéb eljárások megismeréséhez a felhasznált cikkekre és az azok végén található irodalomjegyzékre utalunk. Az ismertetett módszerek közül többnek a FORTRAN programja az MTA CDC 3300 programkönyvtárában megtalálható. Az egyes módszerek számitási időigényét, helyfoglalását nem ismertettük, ezekre az idézett müvekben utalások találhatók, annyit azonban megjegyzünk, hogy egy $m \times n$ -es mátrix Moore-Penrose-féle inverzének kiszámitásához legkevesebb k^2 számu munkarekesz szükséges, ahol $k = \min(m,n)$.
Az egyes eljárások az általánositott inverz transzponáltját az eredeti mátrix helyén tárolják.

Hasonlóképpen nem ismertettük az egyes módszerek tárgyalása során szóba kerülő alapvető eljárások többségét, ezek ismeretét feltételeztük, ill. az idézett irodalomban ezek megtalálhatók [8].

Az általánositott inverz kiszámitására szolgáló iterációs eljárásokkal sem foglalkoztunk, ezek lokális jellegük és lassu konvergenciájuk miatt inkább csak a véges eljárásokkal kapott inverzek pontositására használhatók [10] , [11] .

Az alábbiakban mellékeljük az ismertetett eljárások közül azoknak a programjait használati utasitással együtt, amelyek az MTA CDC 3300 gépének programkönyvtárában megtalálhatók.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] E. H. Moore: General Analysis Part I, Mem.Amer.Phil. Soc. vol.1, 197-209 (1935)

[2] R. Penrose: A Generalized Inverse for Matrices Proc. Camb. Phil. Soc. 51, 406-413 (1955)

[3] G. W. Steward: On the Continuity of the Generalized Inverse, SIAM Journal on Applied Mathematics vol. 17. 33-45 (1967)

[4] A. S. Householder: Unitary Triangularization of a Non-Symmetric Matrix (J. Assoc. Comp. Mach. 5. 339-342 (1958)).

[5] B. Rust, W.R. Burrus, C. Schneeberger: A Simple Algorithm for Computing the Generalized Inverse of a Matrix, CACM vol.9. Nr. 5. 381-387 (1966).

[6] Richard M. - M. Chen: New Matrix Inversion Algorithms Based on Exchange Method IEEE Transactions on Computers, 1973. okt. 885-890.

[7] T. N. E. Greville: Some Applications of the Pseudo Inverse of a Matrix SIAM Rev.2, 15-22 (1960).

[8] Nobuo Shinozaki, Masaaki Sibuya, Kunio Tanabe: Numerical Algorithms for the Moore-Penrose Inverse of a Matrix: Direct Methods (Annals Inst. Statist. Math.24. 193-203 (1972)).

[9] C. R. Rao, S. K. Mitra: Generalized Inverse of Matrices and its Applications New York, Wiley 1971.

[10] V. N. Joshi: Remarks On Iterative Methods for Computing the Generalised Inverse (Studia Sci. Math. Hung. 8 457-461 (1973)).

[11] Galántai Aurél - dr Varga Gyula: Relaxációs módszer általánositott mátrixinverz kiszámitására (Az Alkalmazott Matematikai Lapok részére leadva)

```
COSY/MASTER VER 2.4     05/11/76
   GENINV    DECK/       I=VGY1.L
         SUBROUTINE GENINV(A,N,M,EPS,IER)
   C LEIRAS
   C     AZ N*M-ES VALOSELEMU A MATRIX  AXA=A  ES  XAX=X  EGYENLOSEGEKNEK
   C     TOVABBA A TRANSP(AX)=AX ES A TRANSP(XA)=XA FELTETELEKNEK
   C     ELEGET TEVO MOORE-PENROSE-FELE ALTALANOSITOTT INVERZENEK A KISZA-
   C     MITASA
   C EREDET
   C     VARGA GYULA
   C IRODALOM  -
   C MODSZER
   C     HOUSEHOLDER-FELE ORTHOGONALIS MATRIXFELBONTAS. (A MATRIX RANGJA
   C     OSZLOPAINAK SZAMAVAL EGYEZIK MEG.)
   C HIVAS
   C     CALL GENINV(A,N,M,V,EPS,IER)
   C PARAMETEREK
   C     A    - AZ INVERTALANDO MATRIX TOMBJE
   C     N    - AZ A MATRIX SORAINAK SZAMA
   C     M    - AZ A MATRIX OSZLOPAINAK SZAMA
   C     V    - AZ ORTOGONALIS MATRIX TOMBJE (N*N-ES), ENNEK HELYEN KEPZO-
   C              DIK AZ INVERZ MATRIX
   C     EPS  - ABSZOLUT HIBAHATAR
   C     IER  - HIBAKOD
   C HIBAJELZES
   C     IER=0  NORMALIS BEFEJEZES ESETEN
   C     IER=1  HA AZ ORTHOGONALIS TRANSZFORMACIO VALAMELYIK LEPESEBEN AZ
   C     A(JELZETT) FOATLOJABAN EPS-NAL KISEBB ABSZOLUT ERTEKU MENNYISEG
   C     LEP FEL (VAGYIS R(A)<M).
   C MEGJEGYZES
   C     1.  N=M, R(A)=N  ESETEN AZ ELJARAS AZ A MATRIX KOZONSEGES ERTELEM-
   C         BEN VETT INVERZET ADJA MEG.
   C     2.  N<M  ESETEN, HA  R(A)=N,  A  HELYETT A TRANSPONALTJA INVERTAL-
   C         HATO A FENTI MODSZERREL, MAJD A KAPOTT INVERZ VISSZATRANSZ-
   C         PONALHATO.
   C     3.  AZ A*X=B LINEARIS EGYENLETRENDSZER NORMAL MEGOLDASAT ADJA MEG.
         DIMENSION A(30,1),V(30,30),C(30),U(30)
         IER=0
         DO 1 I=1,N
         DO 1 J=1,N
         V(I,J)=0.
         IF(I.EQ.J) V(I,J)=1.
       1 CONTINUE
         DO 2 IR=1,M
         IR1=IR+1
         SIGMA=0.
         DO 3 I=IR,N
         U(I)=A(I,IR)
       3 SIGMA=SIGMA+U(I)*U(I)
         IF(SIGMA.GT.EPS) GO TO 4
         IER=1
         RETURN
       4 S=SQRT(SIGMA)
         U(IR)=U(IR)-S
         H=SIGMA-A(IR,IR)*S
         DO 6 K=IR1,M
         F=0.
         DO 5 J=IR,N
       5 F=F+U(J)*A(J,K)
       6 C(K)=F/H
         A(IR,IR)=S
         DO 7 I=IR,N
         DO 7 K=IR1,M
       7 A(I,K)=A(I,K)-U(I)*C(K)
         DO 8 K=1,N
         F=0.
         DO 9 J=IR,N
       9 F=U(J)*V(J,K)+F
```

```
    8 C(K)=F/H
      DO 10 I=IR,N
      DO 10 K=1,N
   10 V(I,K)=V(I,K)-U(I)*C(K)
    2 CONTINUE
      DO 11 J=1,M
      L=M+1-J
      A(L,L)=1./A(L,L)
      L1=L-1
      DO 12 KI=1,L1
      K=L-KI
      K1=K+1
      F=0.
      DO 13 I=K1,L
   13 F=F-A(K,I)*A(I,L)
   12 A(K,L)=F/A(K,K)
   11 CONTINUE
      DO 14 K=1,N
      DO 14 I=1,M
      F=0.
      DO 15 J=I,M
   15 F=F+A(I,J)*V(J,K)
   14 V(I,K)=F
      DO 16 I=1,N
      DO 16 J=1,M
   16 A(I,J)=V(J,I)
      RETURN
      END
GENINV2  DECK/      I=VGY1,L
      SUBROUTINE GENINV2(A,N,M,EPS,IER)
C LEIRAS
C     AZ N*M-ES VALOSELEMU A MATRIX AXA=A ES XAX=X EGYENLOSEGEKNEK
C     TOVABBA A TRANSP(AX)=AX ES A TRANSP(XA)=XA FELTETELEKNEK
C     ELEGET TEVO MOORE-PENROSE-FELE ALTALANOSITOTT INVERZENEK A KISZA-
C     MITASA
C EREDET
C     VARGA GYULA
C IRODALOM  -
C MODSZER
C     HOUSEHOLDER-FELE ORTOGONALIS MATRIXFELBONTAS.
C HIVAS
C     CALL GENINV2(A,N,M,EPS,IER)
C PARAMETEREK
C     A     - A MATRIX TOMBJE,UGYANOTT KAPJUK MEG AZ ALTALANOSITOTT
C               INVERZ TRANSPONALTJAT
C     N     - AZ A MATRIX SORAINAK SZAMA
C     M     - AZ A MATRIX OSZLOPAINAK SZAMA
C     EPS   - A HIBAHATAR AZ ORTOGONALIS FELBONTASHOZ
C     IER   - HIBAKOD, ZERUSMATRIX ESETEN ERTEKE 1, EGYEBKENT 0.
C HIBAJELZES
C     L.AZ IER HIBAKODOT
C MEGJEGYZES
C     1.  N=M, R(A)=N  ESETEN AZ ELJARAS AZ A MATRIX KOZONSEGES ERTELEM-
C          BEN VETT INVERZET ADJA MEG.
C     2.  AZ A*X=B LINEARIS EGYENLETRENDSZER NORMAL MEGOLDASAT ADJA MEG.
      DIMENSION A(30,1),V(30,30),C(30),U(30),JEL(30),W(30,30)
      MIN=M
      IF(N.LT.M) MIN=N
      IM=0
      IER=0
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      V(I,J)=0.
      IF(I.EQ.J) V(I,J)=1.
    1 CONTINUE
      DO 38 I=1,M
      DO 38 J=1,M
      W(I,J)=0.
```

```
      IF(I.EQ.J) W(I,J)=1.
   38 CONTINUE
      DO 2 IR=1,MIN
      IR1=IR+1
      IS=IR
   16 SIGMA=0.
      DO 3 I=IR,N
      U(I)=A(I,IS)
    3 SIGMA=SIGMA+U(I)*U(I)
      IF(SIGMA.GE.EPS) GO TO 4
      IS=IS+1
      IF(IS.LE.MIN) GO TO 16
      GO TO 17
    4 JFL(IR)=IS
      IF(IR.EQ.IS) GO TO 18
      DO 19 I=1,N
      F=A(I,IR)
      A(I,IR)=A(I,IS)
   19 A(I,IS)=F
   18 IM=IM+1
      S=SQRT(SIGMA)
      U(IR)=U(IR)-S
      H=SIGMA-A(IR,IR)*S
      DO 6 K=IR1,M
      F=0.
      DO 5 J=IR,N
    5 F=F+U(J)*A(J,K)
    6 C(K)=F/H
      A(IR,IR)=S
      DO 14 I=IR1,N
   14 A(I,IR)=0.
      DO 7 I=IR,N
      DO 7 K=IR1,M
    7 A(I,K)=A(I,K)-U(I)*C(K)
      DO 8 K=1,N
      F=0.
      DO 9 J=IR,N
    9 F=U(J)*V(J,K)+F
    8 C(K)=F/H
      DO 10 I=IR,N
      DO 10 K=1,N
   10 V(I,K)=V(I,K)-U(I)*C(K)
    2 CONTINUE
   17 IF(IM.GT.0) GO TO 20
      IER=1
      RETURN
   20 DO 25 IR=1,IM
      IR1=IR+1
      U(IR)=A(IR,IR)
      F=0.
      DO 26 I=IR1,M
      U(I)=A(IR,I)
   26 F=F+U(I)*U(I)
      IF(F.LT.EPS) GO TO 25
      F=F+U(IR)*U(IR)
      S=SQRT(F)
      U(IR)=U(IR)-S
      H=-U(IR)*S
      DO 28 I=IR1,IM
      F=0.
      DO 29 K=IR,M
   29 F=F+A(I,K)*U(K)
   28 C(I)=F/H
      A(IR,IR)=S
      DO 15 I=IR1,M
   15 A(IR,I)=0.
      DO 30 I=IR1,IM
      DO 30 K=IR,M
```

```
   30 A(I.K)=A(I.K)-C(I)*U(K)
      DO 31 I=1.M
      F=0.
      DO 32 K=IR.M
   32 F=F+W(I.K)*U(K)
   31 C(I)=F/H
      DO 33 I=1.M
      DO 33 K=IR.M
   33 W(I.K)=W(I.K)-C(I)*U(K)
   25 CONTINUE
      DO 11 I=1.IM
      A(I.I)=1./A(I.I)
      I1=I+1
      DO 12 L=I1.IM
      L1=L-1
      F=0.
      DO 13 J=I.L1
   13 F=F-A(L.J)*A(J.I)
   12 A(L.I)=F/A(L.L)
   11 CONTINUE
      DO 34 I=1.M
      DO 34 J=1.IM
      F=0.
      DO 35 K=J.IM
   35 F=F+W(I.K)*A(K.J)
   34 W(I.J)=F
      DO 36 I=1.M
      DO 36 J=1.N
      F=0.
      DO 37 K=1.IM
   37 F=F+W(I.K)*V(K.J)
   36 A(J.I)=F
      IF(IM.EQ.MIN) GO TO 24
      DO 22 IJ=1.IM
      I=IM+1-IJ
      K=JEL(I)
      IF(I.EQ.K) GO TO 22
      DO 23 J=1.N
      U(J)=A(J.I)
      A(J.I)=A(J.K)
   23 A(J.K)=U(J)
   22 CONTINUE
   24 RETURN
      END
GINV2     DECK/       I=VGY1.L
      SUBROUTINE GINV2(A.NR.NC)
C LEIRAS
C     VALOS ELEMU TEGLALAPMATRIXOK MOORE-PENROSE-FELE ALTALANOSITOTT
C     INVERZENEK KISZAMITASA
C EREDET
C     L.IRODALOM
C A PROGRAMOT USASI FORTRANRA ATIRTA
C     VARGA GYULA
C IRODALOM
C     B.RUST.W.R.BURRUS. C.SCHNEEBERGER:
C     A SIMPLE ALGORITHM FOR COMPUTING THE GENERALIZED INVERSE OF A
C     MATRIX
C     /COMM. OF THE A.C.M./1968/ VOL.9.NR.5. 381-387
C MODSZER
C     A GRAM-SCHMIDT-FELE ORTHOGONALIZALO ELJARAS ALKALMAZASA
C HIVAS
C     CALL GINV2(A.NR.NC)
C PARAMETEREK
C     A    - A MATRIX TOMBJE. KIMENETNEL AZ ALTALANOSITOTT INVERZ
C            TRANSZPONALTJAT TARTALMAZZA
C     NR   - AZ A MATRIX SORAINAK SZAMA
C     NC   -  AZ A MATRIX OSZLOPAINAK SZAMA
C HIBAJELZES -
```

```
C MEGJEGYZES
C      AKKOR ALKALMAZHATO, HA A MATRIX ELEVE PARTICIONALHATO EGY FUGGET-
C      LEN OSZLOPVEKTOROKBOL ES EGY AZOK LINEARIS KOMBINACIOIBOL ALLO
C      RESZRE.
       DIMENSION A(30,1),U(30,30),AFLAG(30),ATEMP(30)
       DO 10 I=1,NC
       DO 5 J=1,NC
     5 U(I,J)=0.
    10 U(I,I)=1.
       FAC=DOT(NR,A,1,1)
       FAC=1./SQRT(FAC)
       DO 15 I=1,NR
    15 A(I,1)=A(I,1)*FAC
       DO 20 I=1,NC
    20 U(I,1)=U(I,1)*FAC
       AFLAG(1)=1.
       N=27
       TOL=(10.*0.5**N)**2
       DO 100 J=2,NC
       DOT1=DOT(NR,A,J,J)
       JM1=J-1
       DO 50 L=1,2
       DO 30 K=1,JM1
    30 ATEMP(K)=DOT(NR,A,J,K)
       DO 45 K=1,JM1
       DO 35 I=1,NR
    35 A(I,J)=A(I,J)-ATEMP(K)*A(I,K)*AFLAG(K)
       DO 40 I=1,NC
    40 U(I,J)=U(I,J)-ATEMP(K)*U(I,K)
    45 CONTINUE
    50 CONTINUE
       DOT2=DOT(NR,A,J,J)
       IF(DOT2/DOT1-TOL) 55,55,70
    55 DO 60 I=1,JM1
       ATEMP(I)=0.
       DO 60 K=1,I
    60 ATEMP(I)=ATEMP(I)+U(K,I)*U(K,J)
       DO 65 I=1,NR
       A(I,J)=0.
       DO 65 K=1,JM1
    65 A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*ATEMP(K)*AFLAG(K)
       AFLAG(J)=0.
       FAC=DOT(NC,U,J,J)
       FAC=1./SQRT(FAC)
       GO TO 75
    70 AFLAG(J)=1.
       FAC=1./SQRT(DOT2)
    75 DO 80 I=1,NR
    80 A(I,J)=A(I,J)*FAC
       DO 85 I=1,NC
    85 U(I,J)=U(I,J)*FAC
   100 CONTINUE
       DO 130 J=1,NC
       DO 130 I=1,NR
       FAC=0.
       DO 120 K=J,NC
   120 FAC=FAC+A(I,K)*U(J,K)
   130 A(I,J)=FAC
       RETURN
       END
       FUNCTION DOT(NR,A,JC,KC)
       DIMENSION A(30,1)
       DOT=0.
       DO 5 I=1,NR
     5 DOT=DOT+A(I,JC)*A(I,KC)
       RETURN
       END
GREVIL    DECK/     I=VGY1.L
```

```
      SUBROUTINE GREVIL(M,N,A,Z,EPS)
C LEIRAS
C     AZ N*M-ES VALOS A MATRIX MOORE-PENROSE-FELE ALTALANOSITOTT
C     INVERZET SZAMITJA KI (M≥N).
C MODSZER
C     A GREVILLE-FELE ELJARAS: EGY OSZLOPVEKTORBOL KIINDULVA UJABB OSZ-
C     LOPOK HOZZAVETELEVEL SZAMITJA KI  A  ALTALANOSITOTT INVERZET.
C EREDET
C     VARGA GYULA
C IRODALOM
C     T.N.E. GREVILLE: SOME APPLICATIONS OF THE PSEUDOINVERSE OF A
C     MATRIX (SIAM.REV.2,15-22. 1960.)
C HIVAS
C     CALL GREVIL(M,N,A,Z,EPS)
C PARAMETEREK
C     M    - AZ INVERTALANDO MATRIX SORAINAK SZAMA
C     N    - AZ INVERTALANDO MATRIX OSZLOPAINAK SZAMA
C     A    - AZ INVERTALANDO MATRIX TOMBJE
C     Z    - AZ INVERZ MATRIX TOMBJE
C     EPS  - ABSZ. HIBAHATAR
C HIBAJELZES  -
C MEGJEGYZES  -
      DIMENSION A(30,1),Z(30,1),B(30),C(30),D(30),E(30)
      S=0.
      DO 1 I=1,M
      T=A(I,1)
    1 S=S+T*T
      IF(S.LT.EPS) GO TO 3
      DO 2 I=1,M
    2 Z(1,I)=A(I,1)/S
      GO TO 5
    3 DO 4 I=1,M
    4 Z(1,I)=0.
    5 DO 17 K=2,N
      L=K-1
      DO 6 I=1,L
      S=0.
      DO 7 J=1,M
    7 S=S+Z(I,J)*A(J,K)
    6 D(I)=S
      R=0.
      DO 9 I=1,M
      S=0.
      DO 8 J=1,L
    8 S=S+A(I,J)*D(J)
      C(I)=S
      E(I)=A(I,K)-S
      T=E(I)
    9 R=R+T*T
      IF(R.LT.EPS) GO TO 11
      DO 10 J=1,M
   10 B(J)=E(J)/R
      GO TO 15
   11 T=1.
      DO 12 I=1,L
      S=D(I)
   12 T=T+S*S
      DO 13 J=1,M
      S=0.
      DO 14 I=1,L
   14 S=S+D(I)*Z(I,J)
   13 B(J)=S/T
      DO 15 J=1,M
      DO 16 I=1,L
   16 Z(I,J)=Z(I,J) -D(I)*B(J)
   15 Z(K,J)=B(J)
   17 CONTINUE
      RETURN
```

```
      END
GREVIL2 DECK/    I=VGY1,L
      SUBROUTINE GREVIL2(M,N,A,Z,EPS)
C LEIRAS
C     AZ N*M-ES VALOS A MATRIX MOORE-PENROSE-FELE ALTALANOSITOTT
C     INVERZET SZAMITJA KI (M≥N).
C MODSZER
C     A GREVILLE-FELE ELJARAS MODOSITASA; EGY OSZLOPVEKTORBOL KIINDULVA
C     UJABB OSZLOPOK ES SOROK HOZZAVETELEVEL SZAMITJA KI AZ ALTALANOSI-
C     TOTT INVERZET.
C EREDET
C     VARGA GYULA
C IRODALOM
C     T.N.E. GREVILLE: SOME APPLICATIONS OF THE PSEUDOINVERSE OF A
C     MATRIX (SIAM.REV.2.15-22. 1960.)
C HIVAS
C     CALL GREVIL2(M,N,A,Z,EPS)
C PARAMETEREK
C     M    - AZ INVERTALANDO MATRIX SORAINAK SZAMA
C     N    - AZ INVERTALANDO MATRIX OSZLOPAINAK SZAMA
C     A    - AZ INVERTALANDO MATRIX TOMBJE
C     Z    - AZ INVERZ MATRIX TOMBJE
C     EPS  - ABSZ. HIBAHATAR
C HIBAJELZES  -
C MEGJEGYZES  -
      DIMENSION A(30,1),Z(30,1),B(30),C(30),D(30),E(30)
      M1=M-N+2
      N1=1
      S=0.
      DO 1 I=1,M1
      T=A(I,1)
    1 S=S+T*T
      IF(S.LT.EPS) GO TO 3
      DO 2 I=1,M1
    2 Z(1,I)=A(I,1)/S
      GO TO 50
    3 DO 4 I=1,M1
    4 Z(1,I)=0.
   50 L=N1
      N1=N1+1
      DO 6 I=1,L
      S=0.
      DO 7 J=1,M1
    7 S=S+Z(I,J)*A(J,N1)
    6 D(I)=S
      R=0.
      DO 9 I=1,M1
      S=0.
      DO 8 J=1,L
    8 S=S+A(I,J)*D(J)
      C(I)=S
      E(I)=A(I,N1)-S
      T=E(I)
    9 R=R+T*T
      IF(R.LT.EPS) GO TO 11
      DO 10 J=1,M1
   10 B(J)=E(J)/R
      GO TO 5
   11 T=1.
      DO 12 I=1,L
      S=D(I)
   12 T=T+S*S
      DO 13 J=1,M1
      S=0.
      DO 14 I=1,L
   14 S=S+D(I)*Z(I,J)
   13 B(J)=S/T
    5 DO 15 J=1,M1
```

```
      DO 16 I=1,L
   16 Z(I,J)=Z(I,J)-D(I)*B(J)
   15 Z(N1,J)=B(J)
      IF(M1.EQ.M) GO TO 100
      L=M1
      M1=M1+1
      DO 17 I=1,L
      S=0.
      DO 18 J=1,N1
   18 S=S+A(M1,J)*Z(J,I)
   17 D(I)=S
      R=0.
      DO 19 I=1,N1
      S=0.
      DO 20 J=1,L
   20 S=S+D(J)*A(J,I)
      C(I)=S
      F(I)=A(M1,I)-S
      T=F(I)
   19 R=R+T*T
      IF(R.LT.EPS) GO TO 22
      DO 21 J=1,N1
   21 B(J)=F(J)/R
      GO TO 26
   22 T=1.
      DO 23 I=1,L
      S=D(I)
   23 T=T+S*S
      DO 24 J=1,N1
      S=0.
      DO 25 I=1,L
   25 S=S+Z(J,I)*D(I)
   24 B(J)=S/T
   26 DO 28 J=1,N1
      DO 27 I=1,L
   27 Z(J,I)=Z(J,I)-D(I)*B(J)
   28 Z(J,M1)=B(J)
      GO TO 50
  100 RETURN
      END
         ENDCOSY/
```

A TANULMÁNYOK sorozatban eddig megjelentek:

1/1973 Pásztor Katalin: Módszerek Boole-függvények minimális vagy nem redundáns, $\{\wedge, \vee, \neg\}$ vagy {NOR} vagy {NAND} bázisbeli, zárójeles, vagy zárójel nélküli formuláinak előállitására

2/1973 Вашкеви Иштван: Расчленение многосвязных промышленных процессов с помощью вычислительных машин

3/1973 Ádám György: A számitógépipar helyzete 1972 második felében

4/1973 Bányász Csilla: Identification in the Presence of Drift

5/1973* Gyürki J.-Laufer J.-Girnt M.-Somló J.: Optimalizáló adaptiv szerszámgépirányitási rendszerek

6/1973 Szelke E.-Tóth K.: Felhasználói Kézikönyv /USER MANUAL/ a Folytonos Rendszerek Szimulációjára készült ANDISIM programnyelvhez

7/1973 Legendi Tamás: A CHANGE nyelv/multiprocesszor

8/1973 Klafszky Emil: Geometriai programozás és néhány alkalmazása

9/1973 R. Narasimhan: Picture Processing Using Pax

10/1973 Dibuz Á.-Gáspár J.-Várszegi S.: MANU-WRAP hátlaphuzalozó, MSI- TESTER integrált áramköröket mérő, TESTOMAT-C logikai hálózatokat vizsgáló berendezések ismertetése

11/1973 Matolcsi Tamás: Az optimum-számitás egy uj módszeréről

12/1973 Makroprocesszorok, programozási nyelvek. Cikkgyüjtemény az NJSzT és SzTAKI közös kiadásában. Szerkesztette: Legendi Tamás

13/1973 Jedlovszky Pál: Uj módszer bonyolult rektifikáló oszlopok vegyészmérnöki számitására

14/1973 Bakó András: MTA kutatóintézeteinek bérszámfejtése számitógéppel

15/1973 Ádám György: Kelet-nyugati kapcsolatok a számitógépiparban

16/1973 Fidrich I.-Uzsoky M.: LIDI-72 listakezelő rendszer a Digitális Osztályon, 1972. évi változat

17/1974 Gyürki József: Adaptiv termelésprogramozó rendszer /APS/ termelőmühelyek irányitására

18/1974 Pikler Gyula: MINI-számitógépes interaktiv alkatrészprogramiró rendszer NC szerszámgépek automatikus programozásához

19/1974 Gertler J.-Sedlak J.: Software for process control

20/1974 Vámos T.-Vassy Z.: Industrial Pattern Recognition Experiment - A Syntax Aided Approach

21/1974 A KGST I. - 15-1.: "Diszkrét rendszerek automatikus vezérlése" c. témában 1973. februárban rendezett szeminárium előadásai

22/1974 Arató M.-Benczur A.-Krámli A.-Pergel J.: Stochastic Processes, Part I.

23/1974 Benkő S.-Renner G.: Erősen telitett mágneskörök számitógépes tervezési módszere

24/1974 Kovács György-Franta Lászlóné: Programcsomag elektronikus berendezések hátlaphuzalozásának tervezésére

25/1974 Járdán R. Kálmán: Háromfázisu tirisztoros inverterek állandósult tranziens jelenségei és belső impedanciája

26/1974 Gergely József: Numerikus módszrek sparse mátrixokra

27/1974 Somló János: Analitikus optimalizálás

28/1974 Vámos Tibor: Tárgyfelismerési kisérlet nyelvi módszerekkel

29/1974 Móricz Péter: Vegyészmérnöki számitási módszerek fázisegyensulyok és kémiai egyensulyok vizsgálatára

30/1974 Vassy Z. - Vámos T.: The Budapest Robot - Pragmatic Intelligence

31/1975 Nagy István: Frekvenciaosztásos középfrekvenciás inverterek elmélete

32/1975 Singer D., Borossay Gy., Koltai T.: Gázhálózatok optimális irányitása különös tekintettel a Fővárosi Gázmüvek hálózataira

33/1975 Vámos T.-Vassy Z.: Limited and Pragmatic Robot Intelligence

Mérő L.-Vassy Z.: A Simplified and Fastened Version of the Hueckel Operator for Finding Optimal Edges in Pictures

Галло В.: Программа для распознавания геометрических образов, основанная на лингвистическом методе описания и анализа геометрических структур

34/1975 László Nemes: Pattern Identification Method for Industrial Robots by Extracting the Main Features of Objects

35/1975 Garádi-Krámli-Ratkó-Ruda: Statisztikai és számitástechnikai módszerek alkalmazása kórházi morbiditás vizsgálatokban

36/1975 Renner Gábor: Elektromágneses tér számitása nagyhőmérsékletü anyagban

37/1975 Edgardo Felipe: Specification problems of a process control display

38/1975 Hajnal Andrásné: Nemlineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei

39/1975 A.Abd El-Sattar: Control of Induction motor by three phase thyristor connections in the secondary circuit

40/1975 Gerhardt Géza: QDP Grafikus interaktiv szubrutinok a CDC 3300-GD'71 grafikus konfigurációra

41/1975 Arató M.-Benczur A.-Krámli A.-Pergel J.: Stochastic Processes, Part II.

42/1975 Arató Mátyás: Fejezetek a matematikai statisztikából számitógépes alkalmazásokkal

43/1975 Matavovszky Tibor - dr Pásztorné Varga Katalin: Programrendszer Boole-függvényrendszer együttes egyszerüsitésére vagy minimalizálására

44/1975 Bacsó Nándorné: Pneumatikus áramköri hazardok

45/1975 Varga András: Ellenpárhuzamos félvezetőpárokkal vezérelt aszinkronmotoros hajtások számitási módszerei

46/1976 Galántai Aurél: Egylépéses módszerek lokális hibabecslései

47/1976 Abaffy József: A feltétel nélküli függvényminimalizálás kvadratikus befejezésü módszerei

48/1976 Strehó Mária: Stiff tipusu közönséges differenciálegyenletek megoldásáról

Jelen dolgozat az 5.9.1 számu intézeti témában került kidolgozásra

A x-gal jelölt kivételével a sorozat kötetei megrendelhetők az Intézet könyvtáránál /Budapest, XIII. Victor Hugo u. 18-22/