tanulmányok

46/1976

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

EGYLÉPÉSES MÓDSZEREK LOKÁLIS HIBABECSLÉSEI

Irta:

Galántai Aurél

Doktori értekezés

Tanulmányok 46/1976

A kiadásért felelős:

Dr Vámos Tibor

ISBN: 963 311 019

Készült az Országos Müszaki Könyvtár és Dokumentációs Központ
házi sokszorositójában
F.v.: Janoch Gyula

Tartalomjegyzék

B E V E Z E T É S

A numerikus módszerek alkalmazásakor szükséges a felmerülő hibák ismerete. Akár közelitő, akár elvileg pontos módszerrel is dolgozunk, a kerekitési hibák felhalmozódása következtében csak közelitő megoldásokhoz jutunk. Az igy nyert megoldások "jóságának" eldöntése teszi szükségessé a felmerülő hibák becslését.

A módszerhibákat becslő eljárásokat két nagy csoportra oszthatjuk. Előzetes hibabecslésről akkor beszélünk, amikor a módszerrel való konkrét számolások elvégzése előtt becsüljük meg a hibát. Az utólagos hibabecsléseket a módszerek alkalmazásakor, a számitások elvégzése közben használjuk. Segitségükkel az éppen kiszámitott közelitések pontosságára tudunk következtetni. Az utólagos hibabecslések egy gyakran alkalmazott fajtája az, amikor több különböző módszerrel egyszerre dolgozunk, és az igy nyert közelitések eltérésének segitségével becsüljük a hibát, szerencsés esetben javithatjuk a közelitő megoldásokat.

Az egyes módszerekre alkalmazható hibabecslési eljárások közül a konkrét feladatra legalkalmasabb módszer kiválasztása sokszor igen nehéz elméleti probléma megoldását igényli.

Értekezésemben a közönséges differenciálegyenletek közelitő megoldására szolgáló egylépéses módszerek hibaformuláival illetve hibabecslő eljárásaival foglalkozom. Az értekezés négy részből áll. Az első részben néhány alapfogalmat ismertetek, a második részben pedig a globális és lokális hibaformulák elvi alapjaival foglalkozom. Ugyanitt ismertetem a leggyakrabban alkalmazott eljárásokat: analitikus hibabecsléseket, a lépésfelezést, automatikus hibaformulákat. Itt igyekeztem kitérni az egyes eljárások előnyeinek, hátrányainak a bemutatására is. A harmadik részben optimalitási kritériumok alapján kimutatom, hogy egy igen széles módszerosztályra a lépésfelezési eljárás az optimális. Az értekezés függelékében a számitási eredményeket és a felhasznált programokat mutatom be.

Az értekezés II. és III. fejezetének eredményei a 2.1 Tétel és a konkrét módszerek kivételével saját eredményeim, és ezek a [6] , [7] , [8] dolgozataimban kerültek közlésre.

Végül köszönetemet fejezem ki témavezetőmnek Szidarovszky Ferencnek értékes segitségéért és tanácsaiért. Köszönetemet fejezem ki továbbá a munkámhoz nyujtott támogatásért Strehó Máriának és az MTA SzTAKI Numerikus Módszerek Osztályának.

I. ALAPFOGALMAK

A következőkben röviden összefoglaljuk a vizsgálatainkhoz szükséges alapismereteket.

Legyen $\|\,.\,\| : R^{\ell} \to R^{+}$ valamilyen norma[1] $(\ell \geq 1)$, $I = [a,b] \subset R$ véges intervallum, valamint $x_k \in I$ és $x_{k+1} - x_k = h_k > 0$ $(k = 0,1,2,\ldots)$. Az

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

kezdetiérték-probléma pontos megoldását jelölje $y : I \to R^{\ell}$, az x_k pontbeli közelitő megoldását pedig y_k. Ekkor az egylépéses explicit módszerek

$$(1.2)\qquad y_{n+1} = y_n + h_n\,\phi\,(x_n, y_n, h_n) \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

alakuak, ahol $\phi \in I \times R^{\ell} \times R \to R^{\ell}$ egy adott függvény.

Például az m-pontos explicit Runge-Kutta módszerek esetén

$$(1.3)\qquad \phi\,(x,y,h) = \sum_{i=1}^{m} c_i\,k_i\,,$$

ahol

$$k_1 = f(x,y)$$

---

(1) R^{+} a $[0, +\infty)$ intervallumot jelöli, az R^{1} -et pedig röviden R.

(1.4) $$k_i = f(x + a_i h,\ y + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}\, k_j) \qquad (i=2,3,\dots,m).$$

Az (1.2) módszer (1.1) problémára vonatkozó x pontbeli képlethibáját a

(1.5) $$T(x,h) = y(x) + h\,\phi\,(x,y(x),\,h) - y(x+h)$$

kifejezéssel definiáljuk, rendjét pedig az a maximális p természetes szám adja meg, amelyre fennáll, hogy

(1.6) $$T(x,h) = O(h^{p+1}).$$

Az (1.3) - (1.4) módszer rendje és m paramétere között az alábbi összefüggés érvényes.

<u>1.1 TÉTEL</u> ([10], [14]): Ha $p^*(m)$ azt a legmagasabb rendet jelöli, amely egy m-pontos Runge-Kutta módszerrel a $C^{m+2}\,(I \times R^\ell)$ függvényosztályra elérhető, akkor igaz, hogy

$$p^*(m) = m\,, \qquad m=1,2,3,4$$

(1.7) $$p^*(5) = 4,\quad p^*(6) = 5,\quad p^*(7) = 6,\quad p^*(8) = 6,\quad p^*(9) = 7,$$

$$p^*(m) \le m-2\,, \qquad m=10,11,\dots .$$

Jelölje $\mathcal{L}$ azon folytonos $f \in I \times R^\ell \to R^\ell$ függvények osztályát, amelyekhez létezik $L \ge 0$ (csak az f-től függő) konstans ugy, hogy

(1.8) $$\|f(x,y) - f(x,y^*)\| \le L\|y-y^*\|$$

minden (x,y), $(x,y^*) \in \mathcal{D}(f)$ esetén.

Az (1.2) egylépéses módszert konvergensnek nevezzük, ha minden rögzitett $x \in I$ $(x > x_o)$, $x_{i+1} - x_i = h > 0$ és tetszőleges $f \in \mathcal{L}$ és $(x_o, y_o) \in \mathcal{D}(f)$ esetén

$$\lim y_n = y(x) \qquad (nh = x - x_o). \tag{1.9}$$

A konvergenciára Henrici adott szükséges és elégséges feltételt.

1.2 TÉTEL ([11]): Legyen a $\phi(x,y,h)$ folytonos mind a három változójában a

$$\mathcal{H} = \{(x,y,h) |\ x \in I,\ y \in R^{\ell},\ 0 \leq h \leq h^{*}\} \tag{1.10}$$

tartományon $(h^{*} > 0)$ és létezzen olyan $K \geq 0$ konstans, amelyre

$$||\phi(x,y,h) - \phi(x,y^{*},h)|| \leq K||y - y^{*}|| \tag{1.11}$$

minden (x,y,h), $(x,y^{*},h) \in \mathcal{H}$ esetén. Akkor a

$$\phi(x,y,0) = f(x,y) \tag{1.12}$$

reláció a szükséges és elégséges feltétele az (1.2) módszer konvergenciájának.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a Henrici-tétel feltételei teljesülnek és $f \in \mathcal{L}$.

Megjegyezzük, hogy az (1.3) Runge-Kutta módszer esetén az utóbbi feltevésből már következnek az 1.2 Tétel feltételei, ha $\mathcal{D}(f) = I \times R^{\ell}$ és $\sum_{i=1}^{m} c_i = 1$.

Végül kimondunk két egyszerü lemmát, amelyeket a továbbiakban fel fogunk használni.

1.1 LEMMA ([11]): Ha a $\{c_n\} \subset R$ számsorozatra

$$|c_{n+1}| \le A\,|c_n| + B \tag{1.13}$$

teljesül minden $n=0,1,2,\dots$ esetén $(A,B \ge 0)$, akkor

$$|c_n| \le A^n\,|c_o| + \begin{cases} \dfrac{A^n - 1}{A - 1}\,B & (A \ne 1) \\ n\,B & (A = 1) \end{cases} \tag{1.14}$$

1.2 LEMMA ([13]): Legyenek φ_1 és φ_2 az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet megoldásai az I intervallumon. Akkor

$$||\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|| \le ||\varphi_1(x^*) - \varphi_2(x^*)||\; e^{L|x-x^*|} \tag{1.15}$$

teljesül minden $x,\ x^* \in I$ esetén.

A fenti két lemmához a következő megjegyzéseket füzzük.

1. Megjegyzés: Az 1.2 Lemma a Peano-egyenlőtlenség speciális esete [13].

2. Megjegyzés: Az 1.1 Lemma állitása lineáris differenciaegyenletek általános megoldásának alakjából közvetlenül leolvasható, valamint indukcióval is könnyen belátható.

II. A HIBABECSLÉS ELVI ALAPJAI ÉS MÓDSZEREI

Ebben a fejezetben először a hibabecslés elvi alapjait vizsgáljuk [8] alapján, majd röviden áttekintjük az ismert képlethibabecslési eljárásokat.

1. A hibabecslés elvi alapjai

Az (1.2) módszer (1.1) problémára vonatkozó globális hibája az $x_n \in I$ pontban

(2.1) $$e_n = y_n - y(x_n).$$

A Cauchy-probléma ε^* pontossággal való numerikus megoldása azt jelenti, hogy

(2.2) $$||e_n|| \leq \varepsilon^* \qquad (x_n \in I),$$

ahol ε^* tetszőleges előre megadott pozitiv hibakorlát.

A (2.2) feltétel ellenőrzését általában az alábbi feltevés alapján végezzük (lokális hibabecslés elve).

I. HIPOTÉZIS: Ha az (1.2) egylépéses módszer képlethibájára teljesül a

(2.3) $$||T(x_n, h_n)|| \leq \varepsilon \qquad (n=0,1,\dots ;\ x_n \in I)$$

reláció és $\gamma h \leq h_n \leq h$ $(x_n \in I,\ 0 < \gamma \leq 1$ fix), akkor létezik olyan $c = c(f, h) \geq 1$ konstans, amelyre

$$(2.4) \qquad ||e_n|| \leq c\,\varepsilon \qquad (x_n \in I)$$

és $c\,\varepsilon \to 0$, ha $\varepsilon = O(h^s)$, $s \geq 2$ és $h \to 0$.

Az I. Hipotézist igazolja Henrici ismert eredménye:

<u>2.1 TÉTEL</u> ([11]): Tegyük fel, hogy létezik $D \geq 0$ konstans ugy, hogy

$$(2.5) \qquad ||T(x, h)|| \leq D\,h^{s+1} \qquad (x \in I, \quad s \geq 1)$$

és $\gamma h \leq h_n \leq h$ $(x_n \in I, \quad 0 < \gamma \leq 1 \text{ fix})$, akkor

$$(2.6) \qquad ||e_n|| \leq D\,E_L\left(\frac{b-a}{\gamma}\right) h^s \qquad (x_n \in I),$$

ahol

$$(2.7) \qquad E_L(x) = \frac{e^{Lx} - 1}{L} \qquad (L > 0).$$

A tétel az 1.1 Lemma egyszerü következménye. Megjegyezzük, hogy $f \in C^{p+2}$ esetén (2.5) $s = p$ -vel teljesül [11].

A tétel eredményeként csak a képlethibát kell becsülni, minthogy az I. Hipotézis alkalmazásával a (2.2) feltétel kielégithető $(c\,\varepsilon \leq \varepsilon^*)$. A diszkretizációs hiba miatt azonban egy adott M képlethibabecslési eljárás nem az (1.2) módszer (1.1) problémára vonatkozó $T(x_n, h_n)$ képlethibáját becsüli meg, hanem az

$$y' = f(x, y)$$

(2.8)

$$y(x_n) = y_n$$

problémára vonatkozó $T_n(x_n, h_n)$ képlethibát $(n \geq 1)$. Ez a tény az I. Hipotézist a következőképpen módositja.

<u>II. HIPOTÉZIS:</u> Ha az (1.2) egylépéses módszer képlethibájára fennáll, hogy

(2.9) $$||T_n(x_n, h_n)|| \leq \varepsilon \qquad (n=0,1,\ldots;\ x_n \in I)$$

és $\gamma h \leq h_n \leq h$ $(x_n \in I,\ 0 < \gamma \leq 1$ fix), akkor van olyan $c = c(f, h) \geq 1$ konstans, amelyre

(2.10) $$||e_n|| \leq c\,\varepsilon \qquad (x_n \in I)$$

és $c\,\varepsilon \to 0$, ha $\varepsilon = O(h^s)$, $s \geq 2$ és $h \to 0$.

Az alábbiakban igazoljuk a II. Hipotézist.

<u>2.2 TÉTEL:</u> Tegyük fel, hogy van olyan $c_1 \geq 0$ konstans, amelyre

(2.11) $$||T(x, h)|| \leq c_1\, h^{p+1} \qquad (x \in I,\ p \geq 1)$$

és $\gamma h \leq h_n \leq h$ $(x_n \in I,\ 0 < \gamma \leq 1$ fix), akkor létezik $c_2 > 0$, ugy, hogy

(2.12) $$||T_n(x_n, h)|| \leq c_2\, h^{p+1} \qquad (x_n \in I),$$

és ha a II. Hipotézis feltételei teljesülnek $(\varepsilon = c_2\, h^{p+1})$, akkor van olyan $c_3 > 0$ konstans, hogy

$$(2.13)\qquad ||e_n|| \le c_3\, h^p \qquad (x_n \in I).$$

Bizonyitás:

Először belátjuk, hogy

$$(2.14)\qquad T(x_n, h) - T_n(x_n, h) = O(h^{p+1}) \qquad (x_n \in I).$$

A definiciók alapján

$$T_n(x_n, h) - T(x_n, h) = y_n - y(x_n) + h[\phi(x_n, y_n, h) -$$
$$- \phi(x_n, y(x_n), h)] - [\tilde{y}_n(x_n + h) - y(x_n + h)],$$

ahol $\tilde{y}_n : I \to R^{\ell}$ a (2.8) probléma elméleti megoldását jelöli.

Az (1.11) feltételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$(2.15)\qquad ||T_n(x_n, h) - T(x_n, h)|| \le h\, K\, ||e_n|| +$$
$$+ \left|\left|\left[y_n - y(x_n)\right] - \left[\tilde{y}_n(x_n + h) - y(x_n + h)\right]\right|\right|.$$

Minthogy

$$\left[\tilde{y}_n(x_n + h) - y(x_n + h)\right] - \left[y_n - y(x_n)\right] =$$
$$= \int_{x_n}^{x_n+h} \left[f(x, \tilde{y}_n(x)) - f(x, y(x))\right] dx,$$

az 1.2 Lemma, 2.1 Tétel és az (1.8) reláció felhasználásával

$$\|[\tilde{y}_n(x_n + h) - y_n(x_n + h)] - e_n\| \le L \int_{x_n}^{x_n+h} \|\tilde{y}_n(x) - y(x)\|\, dx \le$$

$$\le L \int_{x_n}^{x_n+h} \|e_n\|\, e^{L|x-x_n|}\, dx \le L\, e^{Lh} \int_{x_n}^{x_n+h} \|e_n\|\, dx \le c_2^{*}\, h^{p+1}.$$

Ebből és a (2.15) egyenlőtlenségből a (2.14) reláció már következik.

Ha a II. Hipotézist $\varepsilon = c_2\, h^{p+1}$ választással alkalmazzuk, akkor

$$e_{n+1} = y_n + h_n\, \phi(x_n, y_n, h_n) - \tilde{y}_n(x_{n+1}) + [\tilde{y}_n(x_{n+1}) - y(x_{n+1})] =$$

$$= T_n(x_n, h_n) + [\tilde{y}_n(x_{n+1}) - y(x_{n+1})]$$

miatt az 1.2 Lemma alapján

$$\|e_{n+1}\| \le \|T_n(x_n, h_n)\| + \|e_n\|\, e^{Lh} \le \varepsilon + e^{Lh}\, \|e_n\| \quad (n=0,1,2.$$

Az 1.1 Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|e_n\| \le \frac{e^{Lnh} - 1}{e^{Lh} - 1}\, \varepsilon \le \frac{e^{L(\frac{b-a}{\gamma})} - 1}{e^{Lh} - 1}\, \varepsilon \qquad (e_o = 0)$$

(az $f(x, y) \equiv f(x)$ speciális esetben kis pozitiv L választható).

Az ε megválasztása miatt világos, hogy létezik $h^* > 0$, $c_3 > 0$ ugy, hogy

$$(2.16) \qquad \|e_n\| \le c_3\, h^p \qquad (x_n \in I,\ h \le h^*),$$

amivel állitásunkat és igy a II. Hipotézist igazoltuk.

2. Ismert hibabecslési eljárások

Az I-II. Hipotézis és az első jogosságát igazoló 2.1 Tétel alapján az irodalomban számos konkrét képlethibabecslési eljárást publikáltak. Ezeknek az eljárásoknak a kritikáját az egyes módszerek továbbiakban részletezésre kerülő fogyatékosságain kivül az a tény is adja, hogy a II. Hipotézis pontos megfogalmazása és bizonyitása az irodalomban szereplő ködös magyarázkodásoktól eltekintve csak a [8] dolgozatban került közlésre.

A továbbiakban három csoportra bontva a legismertebb eljárásokkal foglalkozunk

a/ Analitikus hibabecslések

Az analitikus hibabecslések a képlethiba olyan felső becslései, amelyekben a megoldásra, a megoldás különböző rendü deriváltjaira vonatkozó apriori korlátok szerepelnek. Ilyen hibabecsléseket a Runge-Kutta tipusu módszerekkel kapcsolatban Bieberbach [2], Lotkin [15] , Carr [3], Galler és Rosenberg [9], valamint ujabban G.J. Cooper [4] állitottak elő.

Példaképpen bemutatjuk a következő Bieberbachtól származó becslést.

Tekintsük az ismert

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$(2.17) \qquad \begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2} k_1), \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2} k_2), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + h\, k_3) \end{aligned}$$

negyedrendü Runge-Kutta módszert. Az eljárás képlethibájára $\ell = 1$ esetén igaz a

$$(2.18) \qquad |T(x_o, h)| < 6h^5 Q \left(\sum_{i=1}^{5} N^i \right)$$

becslés, ahol Q és N olyan konstansok, amelyekre

$$|f(x, y)| < Q, \qquad \left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \, \partial y^j} \right| \leq \frac{N}{Q^{j-1}} \qquad (i+j \leq 4),$$

$$|x - x_o|\, N < 1 \qquad \text{és} \qquad A\, Q < B$$

fennáll minden $(x, y) \in \{(x, y) \mid |x - x_o| < A, \ |y - y_o| < B\}$ esetén.

Minthogy az (1.1) probléma általában ismeretlen megoldására vonatkozó apriori korlátokat a legritkább esetben ismerünk, és ha egyáltalán ismerünk is ilyeneket, azok is erősen felülbecsülik a hibát, ezért az analitikus hibabecslések a gyakorlatban nem használhatóak.

b/ A lépésfelezés

A lépésfelezés vagy Richardson féle extrapoláció a legismertebb és legegyszerübb hibabecslési eljárás. Az eljárás elve a következő:

Legyen $x_{n+1} = x_n + h$, $x_{n+2} = x_n + 2h$, $f \in C^{p+2}$ és jelölje $\bar{\bar{y}}_{n+2}$ az x_n pontból 2h lépéshosszal számitott közelitő megoldást. Ekkor igazak a

$$(2.19) \qquad T_n(x_n, h) = \frac{\bar{\bar{y}}_{n+2} - y_{n+2}}{2^{p+1} - 2} + O(h^{p+2}),$$

$$(2.20) \qquad T_n(x_{n+1}, h) = \frac{\bar{\bar{y}}_{n+2} - y_{n+2}}{2^{p+1} - 2} + O(h^{p+2})$$

és

$$(2.21) \qquad e_{n+2}^{(n)} = \frac{\bar{\bar{y}}_{n+2} - y_{n+2}}{2^{p} - 1} + O(h^{p+2})$$

relációk, ahol $e_{n+2}^{(n)}$ az (1.2) egylépéses módszer (2.8) problémára vonatkozó globális hibáját jelöli az $x_{n+2} \in I$ pontban.

Az állitás igazolásához előrebocsátjuk, hogy $f \in C^{p+2}$ esetén a képlethiba

$$(2.22) \qquad T(x, h) = \Psi(x, y(x))h^{p+1} + O(h^{p+2}) \qquad (x \in I)$$

alakban irható fel, ahol $\Psi \in C^1$ [11].

Minthogy

$$(2.23) \qquad y_{n+2} - \tilde{y}_n(x_{n+2}) = y_{n+1} + h\,\phi(x_{n+1}, y_{n+1}, h) - \tilde{y}_n(x_{n+2}),$$

egyszerü átalakitásokkal adódik, hogy

$$y_{n+2} - \tilde{y}_n(x_{n+2}) = \left[y_{n+1} - \tilde{y}_n(x_{n+1})\right] + h\left[\phi(x_{n+1}, y_{n+1}, h) - \right.$$
$$\left. - \phi(x_{n+1}, \tilde{y}_n(x_{n+1}), h)\right] +$$
$$+ \left[\tilde{y}_n(x_{n+1}) + h\ \phi(x_{n+1}, \tilde{y}_n(x_{n+1}), h)\right] - \tilde{y}_n(x_{n+2}).$$

Innen a definiciók figyelembevételével

$$(2.24) \qquad y_{n+2} - \tilde{y}_n(x_{n+2}) = T_n(x_n, h) + T_n(x_{n+1}, h) + O(h^{p+2}),$$

ugyanis

$$\|h[\phi(x_{n+1}, y_{n+1}, h) - \phi(x_{n+1}, \tilde{y}_n(x_{n+1}), h)]\| \le$$
$$\le h\ L\ \|y_{n+1} - \tilde{y}_n(x_{n+1})\| = h\ L\ \|T_n(x_n, h)\| \le c\ h^{p+2}$$

miatt a második tagban szereplő mennyiség $O(h^{p+2})$ nagyságrendü.

A (2.22) és $\Psi(x_{n+1}, \tilde{y}_n(x_{n+1})) = \Psi(x_n, \tilde{y}_n(x_n)) + O(h)$

egyenlőségekből

$$(2.25) \qquad y_{n+2} - \tilde{y}_n(x_{n+2}) = \Psi(x_n, y_n)\ h^{p+1} +$$
$$+ \Psi(x_{n+1}, \tilde{y}_n(x_{n+1}))\ h^{p+1} + O(h^{p+2}) = 2\Psi(x_n, y_n))\ h^{p+1} +$$
$$+ O(h^{p+2})$$

és

$$(2.26) \qquad \bar{\bar{y}}_{n+2} - \tilde{y}_n(x_{n+2}) = \Psi(x_n, y_n)\ (2h)^{p+1} + O(h^{p+2})$$

adódik. A (2.25) és (2.26) egyenlőségekből rendezéssel kapjuk, hogy

$$(2.27) \qquad \Psi(x_n, y_n)\, h^{p+1} = \frac{\bar{\bar{y}}_{n+2} - y_{n+2}}{2^{p+1} - 2} + O(h^{p+2})$$

amelyből a (2.22), (2.24) és $e_{n+2}^{(n)} = y_{n+2} - \tilde{y}_n(x_{n+2})$ relációk alapján a bizonyitandó (2.19) - (2.21) összefüggések már könnyen adódnak.

Végül igazoljuk a következő tételt.

2.3 TÉTEL: Ha $f \in C^{p+2}$, akkor igaz, hogy

$$(2.28) \qquad T_{n+1}(x_{n+1}, h) = \frac{\bar{\bar{y}}_{n+2} - y_{n+2}}{2^{p+1} - 2} + O(h^{p+2}).$$

Bizonyitás:

A (2.19) és (2.21) relációk alapján

$$\frac{\bar{\bar{y}}_{n+2} - y_{n+2}}{2^{p+1} - 2} = \frac{\bar{\bar{y}}_{n+2} - y_{n+2}}{2^{p} - 1} - \frac{\bar{\bar{y}}_{n+2} - y_{n+2}}{2^{p+1} - 2} =$$

$$= e_{n+2}^{(n)} - T_n(x_n, h) + O(h^{p+2}) = y_{n+1} + h\,\phi(x_{n+1}, y_{n+1}, h) -$$

$$- \tilde{y}_n(x_{n+2}) - \left[y_{n+1} - \tilde{y}_n(x_{n+1})\right] + O(h^{p+2}).$$

Minthogy definició szerint

$$T_{n+1}(x_{n+1}, h) = y_{n+1} + h\,\phi(x_{n+1}, y_{n+1}, h) - \tilde{y}_{n+1}(x_{n+2}),$$

ezért

$$T_{n+1}(x_{n+1}, h) - \frac{\bar{\bar{y}}_{n+2} - y_{n+2}}{2^{p+1} - 2} = \left[\tilde{y}_n(x_{n+2}) - \tilde{y}_{n+1}(x_{n+2})\right] -$$

$$- \left[\tilde{y}_n(x_{n+1}) - y_{n+1}\right].$$

E kifejezést a 2.2 Tétel bizonyitásában látott módon becsülve azt kapjuk, hogy

$$\left\| T_{n+1}(x_{n+1}, h) - \frac{\bar{\bar{y}}_{n+2} - y_{n+2}}{2^{p+1} - 2} \right\| = \left\| \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} \left[f(x, \tilde{y}_n(x)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(x, \tilde{y}_{n+1}(x))\right] dx \right\| \le L\, e^{Lh} \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} \| T_n(x_n, h) \| \, dx \le c\, h^{p+2},$$

ami állitásunkat igazolja.

A tétel és (2.19) alapján a lépésfelező eljárással $O(h^{p+2})$ pontossággal becsülhetjük meg a /lokális hibabecslési elv szempontjából fontos/

$$(2.29) \qquad \{T_n(x_n, h_n)\}_{n=0}^{N_1}$$

sorozat tagjait a

$$(2.30) \qquad \{T_{2k}(x_{2k}, h^{(k)}), T_{2k+1}(x_{2k+1}, h^{(k)})\}_{k=0}^{N_2}$$

speciális esetben, ahol $h^{(k)}$ az ekvidisztans lépésköz az x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2} pontok között.

A módszer alkalmazása a számitási időt mintegy 50 %-kal megnöveli.

Az eljárással kapcsolatban megjegyezzük, hogy a Richardson-féle extrapolációs elv a numerikus analizis számos más területén is igen hasznosnak bizonyult, Igy például a kvadraturaelméletben /hibabecslés, Romberg-féle integrálási eljárás/ vagy az iterációs eljárások /pl. hurmódszer/ gyorsitásánál ([17], [20], [25]).

c/ Ismert automatikus hibabecslések

Az (1.3) - (1.4) Runge-Kutta módszerek esetén a számitási időt a függvénybehelyettesitések számával jellemezhetjük (m). Ily módon a lépésfelezés számitási idejét a lépésenkénti $\frac{m-1}{2}$ függvénybehelyettesités határozza meg. A függvénybehelyettesitések általában nagy müveletigénye /nagy gépidő/ miatt számos olyan eljárást dolgoztak ki, amely a k_i értékek valamilyen - általában lineáris - függvényével becsüli a $T_n(x_n, h_n)$ képlethibát és lépésenként kevesebb függvénybehelyettesitést igényel mint a lépésfelezés.

Az első ilyen módszert Merson publikálta 1957-ben [16]. Eljárása a következő:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6}(k_1 + 4k_3 + k_5),$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{h}{3}, y_n + \tfrac{h}{3} k_1), \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{h}{3}, y_n + \tfrac{h}{6}(k_1 + k_2)), \\ k_4 &= f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{8}(k_1 + 3k_3)), \\ k_5 &= f(x_n + h, y_n + \tfrac{h}{2}(k_1 - 3k_3 + 4k_4)), \end{aligned} \tag{2.31}$$

ahol a $T_n(x_n, h)$ képlethiba becslését a

$$B_M = \frac{h}{30}(-2k_1 + 9k_3 - 8k_4 + k_5) \tag{2.32}$$

kifejezés adja.

Merson módszeréről az [1] dolgozatban kimutatták, hogy a becslés csak az

$$y' = c\,x + d\,y + e \tag{2.33}$$

differenciálegyenlet esetén pontos és általában $B_M = O(h^4)$, szemben a $T(x, h)$ képlethiba $O(h^5)$ nagyságrendjével, azaz B_M erősen felülbecsüli a tényleges hibát.

Mersont követve más szerzők is közöltek hasonló képleteket [5], [18], [24].

Zonneveld [24] munkájában különböző rendü (1-5) Runge--Kutta hibabecsléseket vezet le, amelyek közül a negyedrendü a következő:

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + h\,k_3), \\ k_5 &= f(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{h}{32}(5k_1+7k_2+13k_3-k_4)), \end{aligned} \tag{2.34}$$

és a hibabecslési formula

$$B_Z = \frac{2h}{3}(-k_1 + 3(k_2 + k_3 + k_4) - 8k_5). \tag{2.35}$$

England negyedrendü módszere ([5], [14], [25])

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4), \tag{2.37}$$

ahol

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1),\\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{4}(k_1 + k_2)),\\
k_4 &= f(x_n + h, y_n - h(k_2 - 2k_3)),\\
k_5 &= f(x_n + \tfrac{2}{3}h, y_n + \tfrac{h}{27}(7k_1 + 10k_2 + k_4)),\\
k_6 &= f(x_n + \tfrac{h}{5}, y_n + \tfrac{h}{625}(28k_1 - 125k_2 + 546k_3 +\\
&\quad + 54k_4 - 378k_5)).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

A hibabecslés

$$B_E = \frac{h}{336}(-42k_1 - 224k_3 - 21k_4 + 162k_5 + 125k_6) \tag{2.39}$$

alaku és

$$B_E(x, h) - T(x, h) = O(h^6). \tag{2.40}$$

Az előbb ismertetett hibabecslések mind a k_i értékek lineáris függvényei voltak. Az egyetlen nemlineáris becslést R.E.Scraton közölte 1964-ben ([18]). Csak az $y : I \to R$ függvényekre értelmezett negyedrendü képlete a következő:

$$y_{n+1} - y_n = h\left(\frac{17}{162} k_1 + \frac{81}{170} k_3 + \frac{32}{135} k_4 + \frac{250}{1377} k_5\right),$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{2}{9} h, y_n + \tfrac{2}{9} h k_1), \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{h}{3}, y_n + \tfrac{h}{12} (k_1 + 3k_2)), \\ k_4 &= f(x_n + \tfrac{3}{4} h, y_n + \tfrac{3h}{128} (23k_1 - 81k_2 + 90k_3)), \\ k_5 &= f(x_n + \tfrac{9}{10} h, y_n + \tfrac{9h}{10000} (-345k_1 + 2025k_2 - \\ &\quad -1224k_3 + 544k_4)). \end{aligned} \tag{2.50}$$

A képlethiba becslése:

$$B_S = -h \frac{q\,r}{s}, \tag{2.51}$$

ahol

$$q = -\frac{1}{18} k_1 + \frac{27}{170} k_3 - \frac{4}{15} k_4 + \frac{25}{153} k_5,$$

$$r = \frac{19}{24} k_1 - \frac{27}{8} k_2 + \frac{57}{20} k_3 - \frac{4}{15} k_4,$$

$$s = k_4 - k_1.$$

Dolgozatában Scraton bizonyitás nélkül azt állitja, hogy

$$B_S(x, h) - T(x, h) = O(h^6). \tag{2.52}$$

A következőkben a [6], [7] dolgozatok alapján kimutatjuk, hogy ez nem igaz.

Ha (2.52) igaz, akkor az

$$y' = c\,x^3\;; \quad y(0)= 0 \qquad (c \neq 0) \tag{2.53}$$

Cauchy-feladat esetén $T(x,\ h) = 0$ miatt teljesülnie kell a

$$(2.54)\qquad B_S(x,\ h) = O(h^6)$$

feltételnek. Mivel $k_1=0,\ k_i = c\ h^3\ a_i^3 \quad (i=2,3,4,5)$, azért

$$q = c\ h^3\ (\frac{27}{170}\ \frac{1}{3^3} - \frac{4}{15}\ \frac{3^3}{4^3} + \frac{25}{153}\ \frac{9^3}{10^3}) = \frac{c\ h^3}{80},$$

$$r = c\ h^3\ (\frac{27}{8}\ \frac{2^3}{9^3} + \frac{57}{20}\ \frac{1}{3^3} - \frac{4}{15}\ \frac{3^3}{4^3}) = -\frac{19}{432}\ c\ h^3,$$

$$s = \frac{27}{64}\ c\ h^3$$

és végül $B_S(0,\ h) = \frac{19}{14580}\ c\ h^4$. Minthogy $B_S \neq 0$, ellentmondásra jutottunk. Tehát Scraton állitása, azaz a (2.52) reláció nem igaz.

A bemutatott eljárások az England módszer kivételével lépésenként kevesebb függvénybehelyettesitést igényelnek mint a lépésfelezés. Tekintettel azonban a Merson és a Scraton módszerrel kapcsolatos negativ eredményekre ([1], [6], [7]) és tapasztalatokra /Függelék/, valamint arra, hogy a függvénybehelyettesitések számának csökkentése alapvető fontosságu, szükséges az ilyen eljárások elméleti vizsgálata. Ezt a vizsgálatot a III. Fejezetben fogjuk elvégezni.

III. OPTIMÁLIS RUNGE-KUTTA HIBABECSLÉSEK

E fejezetben először az automatikus hibabecslések osztályát és a vizsgálatához szükséges fogalmakat definiáljuk, majd optimalitási kritériumokat adunk meg. Végül a lépésfelezés optimalitására vonatkozó tételt igazoljuk. A fejezetben feltesszük, hogy $f \in C^{p^*(m)+2}$.

1. Automatikus hibabecslések

Jelölje $\mathcal{R}_m$ az m-pontos Runge-Kutta módszerek halmazát, A_m pedig az $\mathcal{R}_m$ osztály egy elemét.

3.1 DEFINICIÓ: A $\mathcal{G}_f^{A_m} \in I \times R^\ell \times R \to R^\ell$ leképezést az $A_m \in \mathcal{R}_m$ módszer automatikus hibabecslésének nevezzük, ha

$\mathcal{G}_f^{A_m} \in C^{r+1}$,

$$(3.1) \qquad \mathcal{G}_f^{A_m}(x,\ y(x),\ h) = O(h^r) \qquad (1 \le r \le p+1)$$

és a $\mathcal{G}_f^{A_m}(x,\ y,\ h)$ érték kiszámitásának müveletigényét az f függvénybe való behelyettesitések száma $(k(\mathcal{G}_f^{A_m}))$ határozza meg.

A II. Fejezet 3.c/ pontjában látott B_M, B_Z, B_E hibabecslések az (1.3) - (1.4) módszer

$$(3.2) \qquad \mathcal{G}_f^{A_m} = h \sum_{i=1}^{m} d_i\, k_i$$

alaku lineáris, a B_S becslés pedig a

$$(3.3)\qquad \mathcal{G}_f^{A_m} = h\,\frac{(\Sigma\, d_{1i}\, k_i)\,(\Sigma\, d_{2i}\, k_i)}{\Sigma\, d_{3i}\, k_i} \qquad (\ell = 1)$$

alaku nemlineáris hibabecsléseinek osztályába tartoznak.

Jelölje $G(A_m)$ az $A_m \in \mathcal{R}_m$ módszer automatikus hibabecsléseinek osztályát, S_{A_m} pedig a hozzátartozó lépésfelezési eljárást. Legyen továbbá

$$(3.4)\qquad \mathcal{M}_m = \{(A_j,\, S_{A_j}) \cup (A_j,\, G(A_j)) \mid A_j \in \mathcal{R}_j\ ;\ j=1,\dots,m\},$$

azaz $\mathcal{M}_m$ a legfeljebb m-pontos Runge-Kutta módszerek automatikus hibabecsléseiből és a lépésfelezésből álló módszerosztály. Az $M \in \mathcal{M}_m$ módszert egy $(p,\, r)$ számpárral jellemezhetjük, ahol $p = p(M)$ a Runge-Kutta módszer rendje, $r = r(M)$ pedig az automatikus hibabecslés vagy a lépésfelezés rendje. (A lépésfelezés esetén $r=p+1$.)

<u>3.2 DEFINICIÓ:</u> Ha az $M \in \mathcal{M}_m$ módszer használata lépésenként $K(M)$ számu függvénybehelyettesitést igényel, akkor a $K(M)$ számot az eljárás költségfüggvényének nevezzük.

Megjegyezzük, hogy $M = (A_m,\, \mathcal{G}_f^{A_m})$ esetén

$$(3.5)\qquad m \le K(M) \le m + k(\mathcal{G}_f^{A_m}),$$

a (3.2) - (3.3) alaku becslésekre speciálisan

$$(3.6)\qquad K(M) = m$$

és ha $M = (A_m, S_{A_m})$, akkor

(3.7) $$K(M) = m + \frac{m-1}{2}$$

Tekintsük most a következő problémát (II. Hipotézis).

<u>PROBLÉMA ($\mathcal{P}$):</u> Számitsuk ki egy adott $x > x_o$ $(x \in I)$ pontban az (1.1) probléma közelitő megoldását a

(3.8) $$||T_n(x_n, h_n)|| \le \varepsilon \qquad (x_n \in [x_o, x])$$

feltétel mellett.

A (3.8) feltevés a $\mathcal{G}_f^{A_m} \in G(A_m)$ becslés használata esetén a

(3.9) $$||\mathcal{G}_f^{A_m}(x_n, y_n, h_n)|| \le \varepsilon \qquad (x_n \in [x_o, x])$$

feltétel, S_{A_m} használata esetén pedig a

(3.10) $$||T_n(x_n, h_n)|| \le \varepsilon(1 + O(h))$$

perturbált feltétel kirovását jelenti ($\varepsilon = c_2\, h^{p+1}$). A (3.10) perturbáció a II. Hipotézis

(3.11) $$||e_n|| \le c\, \varepsilon(1 + O(h))$$

alaku perturbációját vonja maga után, amely azonban alkalmas $c^* > c$ konstanssal

(3.12) $$||e_n|| \le c^* \varepsilon$$

alakra hozható. Igy a (3.10) perturbáció hatásától eltekinthetünk, mert a II. Hipotézisben nem okoz szerkezeti változást.

Jelölje $n(M, \varepsilon)$ azt a minimális lépésszámot, amely az $M \in \mathcal{M}_m$ módszer használata esetén a $\mathcal{P}$ probléma megoldásához szükséges.

Célunk a számitási összköltségek minimalizálása, azaz

(3.13) $$n(M, \varepsilon)\, K(M) \to \min.$$

Ezért az $\mathcal{M}_m$ halmazon a $C^{p^*(m)+2}$ függvényosztályra nézve a következő "rendezést" definiáljuk.

<u>3.3 DEFINICIÓ:</u> Azt mondjuk, hogy az $M_1 \in \mathcal{M}_m$ módszer jobb, mint az $M_2 \in \mathcal{M}_m$ módszer ($M_1 \succ M_2$), ha az (A) feltétel és fontossági sorrendben a (D), (B), (C) feltételek valamelyike teljesül, ahol

(A) $M_1 = (A^{(1)}_{j_1}, \mathcal{G}_f^{A^{(1)}_{j_1}})$ esetén

$$\mathcal{G}_f^{A^{(1)}_{j_1}}(x, y(x), h) - T^1(x, h) \ne O(h^{p_1+1})\,(p_1 = p(M_1)).$$

(B) $$||\mathcal{G}_f^{A^{(2)}_{j_2}}(x, y(x), h)|| \ge q\, h^{r_2} \quad (||T^2(x, h)|| \ge q\, h^{p_2+1}), q>0$$

esetén létezik $\delta > 0$ ugy, hogy

$$n(M_1, \varepsilon)\ K(M_1) = O(\varepsilon^{\delta})\ n(M_2, \varepsilon)\ K(M_2) \qquad (0<\varepsilon\leq\varepsilon_o)^{(2)}.$$

(C) $K(M_1) \leq K(M_2)$

(D) Ha $M_2 = (A_{j_2}^{(2)}, \mathcal{G}_f^{A_{j_2}^{(2)}})$, akkor

$$\mathcal{G}_f^{A_{j_2}^{(2)}}(x, y(x), h) - T^2(x, h) = O(h^{p_2+1}).$$

Ha az M_2 becslés a lépésfelezéssel azonos, akkor a (B) feltétel értelemszerüen a zárójelben levő kikötéssel módosul. A definició megindokolását a következő szakaszban végezzük el.

2. Optimalitási kritériumok

Először a $\mathcal{G}_f^{A_m}$ leképezés nagyságrendi viszonyait vizsgáljuk. Minthogy $\mathcal{G}_f^{A_m} \in C^{r+1}$, a leképezés előáll a

(3.14) $$\mathcal{G}_f^{A_m}(x, y, h) = \varphi(x, y)\ h^r + O(h^{r+1}) \qquad (x \in I)$$

alakban, ahol $\varphi \in C^1$.

A (2.22) reláció figyelembevételével világos, hogy $r > p+1$, $\varphi, \psi \neq 0$ és $h \leq h^*$ esetén

---

(2) $T^i(x, h)$ az $A_{j_i}^{(i)}$ módszerhez tartozó képlethibát jelöli.

(3.15) $$\left\|\mathcal{G}_f^{A_m}(x, y(x), h)\right\| < \left\|T(x, h)\right\|,$$

illetve $r < p+1$, $\varphi \neq 0$ és $h \leq h^*$ esetén

(3.16) $$\left\|\mathcal{G}_f^{A_m}(x, y(x), h)\right\| > \left\|T(x, h)\right\|.$$

Ha pedig $r = p+1$ és

(3.17) $$\mathcal{G}_f^{A_m}(x, y(x), h) - T(x, h) = O(h^{p+1}),$$

akkor a $T - \mathcal{G}_f^{A_m}$ kifejezés az

(3.18) $$y_{n+1} = y_n + h_n \left[\sum_{i=1}^{m} c_i k_i - \varphi(x_n, y_n) h_n^{r-1} + O(h_n^r)\right]$$

p-ed rendü egylépéses módszer ismeretlen képlethibájával egyenlő, amely tetszőleges nagy is lehet.

Ezzel a 3.3 Definició (A), (D) feltételeit megindokoltuk.

<u>3.1 LEMMA:</u> Legyenek $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_m$ olyanok, hogy $r_1 > r_2$ és teljesül

(3.19) $$\left\|\mathcal{G}_f^{A_{j_2}^{(2)}}(x, y(x), h)\right\| \geq q\, h^{r_2} \qquad \left(\left\|T^2(x, h)\right\| \geq q\, h^{p_2+1}\right)$$

pozitiv q számmal az I intervallumon. Akkor létezik $\delta > 0$ ugy, hogy

(3.20) $$n(M_1, \varepsilon)\, K(M_1) = O(\varepsilon^{\delta})\, n(M_2, \varepsilon)\, K(M_2) \qquad (0<\varepsilon\leq\varepsilon_0).$$

Bizonyitás:

Az állitást csak az automatikus hibabecslésekre igazoljuk, a lépésfelezés esetére ezzel analóg módon végezhető el. Tegyük fel, hogy léteznek c, $d_1, d_2 > 0$ számok ugy, hogy

$$(3.21) \qquad \| \mathcal{G}_f^{A_{j_1}^{(1)}}(x_n, y_n, h_n) \| \leq c\, h^{r_1}$$

és

$$(3.22) \qquad d_1\, h^{r_2} \leq \| \mathcal{G}_f^{A_{j_2}^{(2)}}(x_n, y_n, h_n) \| \leq d_2\, h^{r_2} \quad (x_n \in I,\ h \leq h^*).$$

A (3.8) illetve (3.9) feltételek alapján a maximális megengedett lépéshosszakra a

$$(3.23) \qquad h^1_{max} = \sqrt[r_1]{\frac{\varepsilon}{c}}$$

és a

$$(3.24) \qquad h^2_{max} = \sqrt[r_2]{\frac{\varepsilon}{d_1}}$$

korlátokat kapjuk, ahol h^i_{max} az M_i módszerhez tartozó maximális lépéshosszt jelöli $(i=1,2)$.
Figyelembevéve hogy a (3.23) korlátot felső becslésből kaptuk, a valóságban $h^1_{max} \geq \sqrt[r_1]{\frac{\varepsilon}{c}}$. Ennek megfelelően

$$(3.25) \qquad n(M_1, \varepsilon) \leq \left[\frac{x - x_0}{\sqrt[r_1]{\frac{\varepsilon}{c}}} \right] + 1,$$

illetve

$$(3.26) \qquad n(M_2, \varepsilon) \geq \left[\frac{x - x_o}{r_2\sqrt{\frac{\varepsilon}{c}}}\right] + 1 .$$

Innen

$$\frac{n(M_1, \varepsilon)}{n(M_2, \varepsilon)} \leq \frac{\left[\frac{x - x_o}{r_1\sqrt{\frac{\varepsilon}{c}}}\right] + 1}{\left[\frac{x - x_o}{r_2\sqrt{\frac{\varepsilon}{d_1}}}\right] + 1} \leq \frac{\frac{x - x_o}{r_1\sqrt{\frac{\varepsilon}{c}}} + 1}{\frac{x - x_o}{r_2\sqrt{\frac{\varepsilon}{d_1}}}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{a_1}{r_1\sqrt{\varepsilon}} + a_2\right) \, r_2\sqrt{\varepsilon} = \left(a_1 \, \varepsilon^{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} + a_2 \, r_2\sqrt{\varepsilon}\right).$$

A $\delta = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} > 0$ választással az

$$n(M_1, \varepsilon) \, K(M_1) = O(\varepsilon^{\delta}) \, n(M_2, \varepsilon) \, K(M_2)$$

reláció nyilvánvalóan teljesül. A továbbiakban belátjuk, hogy a mondott tulajdonságu $c, d_1, d_2 > 0$ létezik.

Minthogy

$$(3.27) \qquad \mathcal{G}_f^{A_{j_1}^{(1)}}(x, y(x), h) = \varphi(x, y(x)) \, h^{r_1} + O(h^{r_1+1})$$

és

$$(3.28)\qquad \mathcal{G}_f^{A_{j_2}^{(2)}}(x,\ y(x),\ h) = \varphi_2(x,\ y(x))\ h^{r_2} + O(h^{r_2+1}),$$

ahol $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^1$, azért a 2.1 Tétel alapján

$$\|\varphi_i\ (x_n,\ y(x_n)) - \varphi_i(x_n,\ y_n)\| < \varepsilon < \frac{q}{2}\qquad (i=1,2)$$

elég kicsiny h esetén. Innen már következik, hogy

$$\|\mathcal{G}_f^{A_{j_1}^{(1)}}(x_n,\ y_n,\ h_n)\| \le 2\max_{x\in I}(\|\varphi_1(x,\ y(x))\| + \varepsilon)\ h^{r_1}$$

és

$$\|\mathcal{G}_f^{A_{j_2}^{(2)}}\ (x_n,\ y_n,\ h_n)\| \ge \frac{\gamma^{r_2}}{2}\min_{x\in I}(\|\varphi_2(x,\ y(x)) - \varepsilon)\ h^{r_2}$$

minden $x_n \in I$ és $h \le h^*$ esetén. A megfelelő

$$c = 2\max_{x\in I}(\|\varphi_1(x,\ y(x))\| + \varepsilon)$$

$$d_1 = \frac{\gamma^{r_2}}{2}\min_{x\in I}(\|\varphi_2(x,\ y(x))\| - \varepsilon)$$

$$d_2 = 2\max_{x\in I}(\|\varphi_2\ (x,\ y(x))\| + \varepsilon)$$

választásokkal (3.21) és (3.22) nyilván teljesül.

<u>3.2 LEMMA:</u> Ha $M_1,\ M_2 \in \mathcal{M}_m$ olyanok, hogy $r_1 = r_2 (=r)$ és létezik $q_1,\ q_2 > 0$ ugy, hogy

$$(3.29) \qquad \left\| \mathcal{G}_f^{A_{j_i}^{(i)}}(x, y(x), h) \right\| \geq q_i\, h^r (\|T^i(x, h)\| \geq q_i\, h^r)$$

$(i=1,2)$, akkor találhatók olyan $A, B > 0$ konstansok, amelyekre

$$(3.30) \qquad B \leq \frac{n(M_1, \varepsilon)\, K(M_1)}{n(M_2, \varepsilon)\, K(M_2)} \leq A \qquad (0<\varepsilon\leq\varepsilon_0)$$

<u>Bizonyitás:</u>

Ismét csak az automatikus hibabecslésekre igazoljuk az állítást. Az előző lemma bizonyitásában már láttuk, hogy léteznek $c_1, c_2, d_1, d_2 > 0$ számok ugy, hogy

$$(3.31) \qquad c_i\, h^r \leq \left\| \mathcal{G}_f^{A_{j_i}^{(i)}}(x_n, y_n, h_n) \right\| \leq d_i\, h^r \qquad (x_n \in I,\ h \leq h^*)$$

$i=1,2$ esetén. Innen a (3.9) feltétel alapján adódik, hogy

$$\left[\frac{x - x_0}{r\sqrt{\frac{\varepsilon}{c_i}}}\right] + 1 \leq n(M_i, \varepsilon) \leq \left[\frac{x - x_0}{r\sqrt{\frac{\varepsilon}{d_i}}}\right] + 1 \qquad (i=1,2).$$

Az egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

$$\frac{\dfrac{x - x_0}{\sqrt[r]{\frac{\varepsilon}{c_1}}}}{\dfrac{x - x_0}{\sqrt[r]{\frac{\varepsilon}{c_2}}} + 1} \leq \frac{n(M_1, \varepsilon)}{n(M_2, \varepsilon)} \leq \left(\frac{x - x_0}{\sqrt[r]{\frac{\varepsilon}{d_1}}} + 1\right) \frac{\sqrt[r]{\frac{\varepsilon}{d_2}}}{x - x_0},$$

ahonnan látható, hogy léteznek alkalmas $A', B' > 0$ konstansok, amelyekre

$$A' \leq \frac{n(M_1, \varepsilon)}{n(M_2, \varepsilon)} \leq B'$$

teljesül. Q.e.d.

A most igazolt lemmák alapján már könnyen megindokolhatjuk a 3.3 Definició (B) és (C) feltételeit.
A (B) feltétel lényegében azt jelenti, hogy a két módszer számitási összköltségére

$$n(M_1, \varepsilon)\, K(M_1) \ll n(M_2, \varepsilon)\, K(M_2) \qquad (0<\varepsilon\leq\varepsilon_0), \tag{3.32}$$

pontosabban

$$\frac{n(M_1, \varepsilon)}{n(M_2, \varepsilon)} \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{3.33}$$

teljesül. Világos, hogy ilyen esetben az M_1 módszert tekintjük jobbnak.

Amennyiben a két becslés rendje azonos $(r_1 = r_2)$, és ezek összehasonlithatók /teljesül rájuk a (3.29) feltétel/, akkor a két módszer számitási összköltsége - egy konstans szorzótól eltekintve - lényegében azonos. Az, hogy adott ϱ esetén melyik módszerre kisebb $n(M_i, \varepsilon)\, K(M_i)$, csak akkor dönthető el, ha mindkét módszerrel megoldjuk a ϱ problémát. Ezért a két módszer közül azt részesitjük előnyben, amelyikre $K(M_i)$ kisebb. Ez a választás olyan konvenció, amelyet a [12] dolgozat eredményei, a gyakorlati tapasztalatok, valamint a

II. Fejezet 3.c/ pontjában vázolt törekvések kellően megindokolnak.

Megjegyezzük azonban, hogy a skalár esetben ($\ell = 1$) az $m = p = 1, 2, 3, 4$ paraméterekhez léteznek minimális képlethibafőtaggal rendelkező Runge-Kutta képletek ([17]). Ezekre a fenti kérdés, csak a lépésfelezést tekintve, nyilván eldönthető.

Amennyiben $K(M_1) = K(M_2)$, $r_1 = r_2$ és mindkettőre teljesül az (A) feltétel, a két módszert azonosnak tekintjük.

3.1 TÉTEL: Legyen $M^* \in \mathcal{M}_m$ olyan becslés, amelyre $M^* = (A_m^*, S_{A_m^*})$ és $p(M^*) = p^*(m)$. Akkor tetszőleges $M \in \mathcal{M}_m$ becslés akkor és csak akkor jobb, mint az M^* módszer, ha

(I) $M \in (A_j, \mathcal{G}_f^{A_j})$ esetén

$$\mathcal{G}_f^{A_j}(x, y(x), h) - T(x, h) = O(h^{p(M)+2}),$$

(II) $K(M) \leq m + \frac{m-1}{2}$

és

(III) $p(M) = p^*(m)$.

Bizonyitás:

A feltételek szükségességét az (A) feltétel, a 3.1 Lemma, a 3.2 Lemma és a (C) feltétel adják. Az elégségesség a 3.3 Definició alapján nyilvánvaló.

Az $m^{*} = \min \{j \mid p^{*}(j) = p(M)\}$ és $m^{**} = \min \{j \mid p^{*}(j) = p^{*}(m)\}$ jelölésekkel a fenti tételt a következőképpen élesithetjük.

3.2 TÉTEL: Legyen $M^{**} \in \mathcal{M}_m$ olyan, hogy $M^{**} = (A^{**}_{m^{**}}, S_{A^{**}_{m^{**}}})$ és $p(A^{**}_{m^{**}}) = p^{*}(m)$. Akkor tetszőleges $M \in \mathcal{M}_m$ becslés akkor és csak akkor jobb, mint az M^{**} módszer, ha az

(I), (III) és

(II^{*}) $$K(M) \leq m^{*} + \frac{m^{*}-1}{2}$$

feltételek teljesülnek.

Bizonyitás:

Az állitás az előzőhöz hasonlóan látható be.

Megjegyezzük, hogy a (III) feltétel miatt $m^{*} = m^{**}$.

A feltételek egymáshoz való viszonyát vizsgáljuk.

3.3 TÉTEL: Az (I), (II^{*}) és (III) feltételekre fennáll, hogy

$(I) \not\Rightarrow (II^{*})$, $(II^{*}) \not\Rightarrow (I)$, $(I) \not\Rightarrow (III)$, $(III) \not\Rightarrow (I)$.

Bizonyitás:

England képleténél $m = 6$, $p(M) = 4$, $K(M) = 6$ és teljesül (I). Merson módszerénél $m = 5$, $p(M) = 4$, $K(M) = 5$ és (I) nem teljesül. Ezért England módszere az első és harmadik, Mersoné pedig a másik két relációt igazolja.

3.4 TÉTEL: Ha $M \in (A_m, G(A_m))$ valamely $A_m \in \mathcal{R}_m$ módszerre és $K(M) = m$, akkor $1 \le m \le 9$ esetén

(3.34) $\qquad (III) \not\Rightarrow (II^*)$.

Bizonyitás:

Tekintsük az alábbi táblázatot, amelynek alapján az állitás könnyen ellenőrizhető.

m = K(M)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p^*(m)$	1	2	3	4	4	5	6	6	7
$K(M^{**})$	1	2,5	4	5,5	5,5	8,5	10	10	13

3.5 TÉTEL: Ha $M \in (A_m, G(A_m))$ $(A_m \in \mathcal{R}_m)$ és $K(M) = m$, akkor a (II^*) feltétel fennállásából a

(3.35) $\qquad p(M) = p^*(m) \qquad (m=1,2,3,5,6)$

és

(3.36) $\qquad p^*(m) - 1 \le p(M) \le p^*(m) \qquad (m=4,7,8,9)$

relációk fennállása következik.

Bizonyitás:

Az állitás a fenti táblázat alapján könnyen ellenőrizhető.

A 3.4 - 3.5 Tételek egyszerü következménye a

3.6 TÉTEL: Ha $M \in (A_m, G(A_m))$ valamely $A_m \in \mathcal{R}_m$ Runge-Kutta módszerre és $K(M) = m$, akkor $m=1,2,3,5,6$ esetén a (II^*) és (III) feltételek ekvivalensek.

Ha az egész $\mathcal{M}_m$ módszerosztályt a természetes módon adódó

$$(3.37) \qquad K(M) \leq K(M^{**})$$

költségkorlát mellett vizsgáljuk, akkor kapjuk, hogy $M \succcurlyeq M^{**} \Leftrightarrow \{(I), (III)\}$. Ha pedig az

$$(3.38) \qquad \mathcal{M}_m(p) = \{M \in \mathcal{M}_m \mid p(M) = p\}$$

módszerosztályt vizsgáljuk rögzitett p rend mellett, akkor az (I) és (II^*) feltételekhez jutunk el.

A most igazolt tételek lényegében azt mondják ki, hogy $M \in (A_m, G(A_m))$, $K(M) = m$ esetén a két felfogás azonos, ha $m = 1,2,3,5,6$ és általában a második felfogás enyhébb megszoritásokat jelent mint az első.

3. Optimalitási tételek

Jelölje $G^L(A_m)$ az $A_m \in \mathcal{R}_m$ módszer (3.2) alaku lineáris hibabecsléseinek a halmazát és legyen

$$\mathcal{M}_m^L = \{(A_j, S_{A_j}) \cup (A_j, G^L(A_j)) \mid A_j \in \mathcal{R}_j, \ j=1,\ldots,m\}.$$

A továbbiakban kimutatjuk, hogy a most definiált $\mathcal{M}_m^L$ módszerosztályban a lépésfelezés optimális eljárás abban az értelemben, hogy minden $M \in \mathcal{M}_m^L$ módszerre

$$(3.39) \qquad M \preccurlyeq M^{**}$$

és

$$(3.40) \qquad M \succcurlyeq M^{**} \Rightarrow \{M = (A_{m^{**}}, S_{A_{m^{**}}}),\ p(M) = p^{*}(m)\}$$

valamely $A_{m^{**}} \in \mathcal{R}_{m^{**}}$ módszerre.

<u>3.7 TÉTEL:</u> Az $\mathcal{M}_m^L$ módszerosztályban az M^{**} módszer optimális.

<u>Bizonyitás:</u>

Az állitást a 3.2 Tétel alapján igazoljuk. Állitásunkkal ellentétben tegyük fel, hogy létezik $M \in \mathcal{M}_m^L$, $M = (A_j, h \sum_{i=1}^{j} d_i k_i)$ becslés ugy, hogy $m^{**} \le j \le m$, $p(M) = p^{*}(m)$ és teljesül (I). Akkor az

$$(3.41) \qquad y_{n+1} - y_n = h_n \sum_{i=1}^{j} (c_i - d_i) k_i$$

módszer rendje legalább $p^{*}(m) + 1$, ami ellentmondás. Másrészt az m^{**} definiciója miatt nincsen olyan $\tilde{M} = (\tilde{A}_j, S_{\tilde{A}_j}) \in \mathcal{M}_m^L$ lépésfelezés, amelyre

$$(3.42) \qquad K(\tilde{M}) < K(M^{**}),\ p(\tilde{M}) = p^{*}(m)$$

teljesül. Ezzel az állitást igazoltuk.

A most bizonyitott állitásnál egy lényegesen erősebb állitás igaz az $\mathcal{M}_m^L \setminus \mathcal{M}_{m-1}^L$ módszerosztályra ($\mathcal{M}_o^L$ az üreshalmazt jelöli).

3.8 TÉTEL: Az $\mathcal{M}_m^L \setminus \mathcal{M}_{m-1}^L$ módszerosztályban $1 \leq m \leq 6$ esetén az

$$M_1 \succcurlyeq M_2 \iff \{(I), (II^*)\}$$

rendezésre nézve a lépésfelezés optimális.

Bizonyitás:

Minthogy $K(M) = m$, a 3.6 Tétel alapján az állitás az előző tétel következménye $m=1,2,3,5,6$ esetén.
Az $m = 4$ esetben a 3.5 Tétel a $3 \leq p(M) \leq 4$ korlátot adja meg. A 3.7 Tétel miatt $p(M) = 3$ kell, hogy legyen.
Ha tehát létezik a lépésfelezésnél jobb lineáris M becslés, akkor az

$$(3.43) \qquad y_{n+1} - y_n = h_n \sum_{i=1}^{4} c_i k_i$$

módszer harmadrendü, az

$$(3.44) \qquad y_{n+1} - y_n = h_n \sum_{i=1}^{4} (c_i - d_i) k_i$$

negyedrendü módszer volna. Kis Ottó kimutatta [27] -ben, hogy ez nem áll fenn. A tételt ezzel igazoltuk.

A most igazolt tételek következményeképpen kimondhatjuk, hogy a lépésfelezés jobb, mint a Merson, Zonneveld és England féle módszerek. A Scraton módszerről már korábban kimutattuk, hogy nem teljesiti az (I) feltételt.

FÜGGELÉK

1. Numerikus példák

Zonneveld (2.35), England (2.39) és Scraton (2.51) módszerét számitógépen (ODRA 1304, CDC3300) is vizsgáltuk az

(a) $y' = x^3 \quad , \quad y(6) = 0 \; ;$

(b) $y' = y \quad , \quad y(o) = 1 \; ;$

(c) $y' = -\frac{(xy)^2}{3} \; , \quad y(2) = 1;$

(d) $y' = 28\cos 2x - 42\sin 42x - \cos x - 22x^{21} \; , \quad y(o) = 0 \; ;$

(e) $y' = \cos x(y + \sin y) \; , \quad y(o) = 1 \; ;$

(f) $y' = \frac{x^4 + y^4}{xy^3} \; , \quad y(1) = 1;$

próbafeladatok segitségével. Állandó $h = 0{,}1$ lépésköz mellett kapott eredményeinket a következő táblázatok tartalmazzák

Módszer	Feladat	A mutatott hiba: $\mathcal{G}_f^{A_m}(x_o, y_o, h)$	A tényleges hiba: $T(x_o, h)$
	(a)	0.0000250000	0.0000000000
	(b)	0.0000045833	0.0000000847
	(c)	0.0000133660	-0.0000022760
Zonneveld	(d)	-7.3688987238	0.3166208209
	(e)	-0.0001302841	-0.0880196772
	(f)	-0.0004881191	-0.0000033444

Módszer	Feladat	A mutatott hiba: $\mathcal{G}_f^{A_m}(x_o, y_o, h)$	A tényleges hiba: $T(x_o, h)$
England	(a)	0.0000000000	0.0000000000
	(b)	0.0033090458	-0.0035874153
	(c)	0.0640368637	-0.0000029258
	(d)	-0.3463401627	0.3166208209
Scraton	(a)	0.0000001303	0.0000000000
	(b)	0.0000000183	-0.0000000194
	(c)	-0.0000011511	0.0000009808
	(d)	-25.7214927797	0.0190249966
	(e)	0.0000003134	-0.0880216967
	(f)	-0.0000005393	0.0000000701

A mutatott és a tényleges hiba közti eltérések az eddigiek alapján nem tul meglepőek. Megjegyezzük azonban, hogy az (e) feladat arra a ritka esetre példa, amikor $r \leq p$ esetén $||\mathcal{G}_f^{A_m}|| < ||T||$ teljesül.

2. Programok

Közöljük az előző pontban vizsgált algoritmusok FORTRAN programjait.

Az eljárások paraméterei:

XO az x_o kezdőpont

YO az y_o kezdeti érték

H a h lépésköz

Y1 az y_1 közelitő megoldás az $x_1 = x_o + h$ pontban

G az eljárás mutatott hibája

Az f függvény szubrutinját FGV(X,Y) jelöli.

A programok a következők:

```
SUBROUTINE ZONNEVELD (XO, YO, Y1, H, G)
A1 = FGV(XO, YO)
A2 = FGV(XO+O.5*H,Y+O.5*H*A1)
A3 = FGV(XO+O.5*H,Y+O.5*H*A2)
A4 = FGV(XO+H,Y+H*A3)
A5 = FGV(XO+O.75*H,Y+H*(5.*A1+7.*A2+13.*A3-A4)/32.
Y1 = YO+H*(A1+2.*(A2+A3)+A4)/6.
G  = 2.*H*(-A1+3.*(A2+A3+A4)-8.*A5)/3.
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE ENGLAND (XO, YO, Y1, H, G)
A1 = FGV(XO,YO)
A2 = FGV(XO+O.5*H,YO+O.5*H*A1)
A3 = FGV(XO+O.5*H,YO+O.25*(A1+A2))
A4 = FGV(XO+H,YO-H*(A2-2.*A3))
A5 = FGV(XO+O.66666666666*H,YO+H*(7.*A1+10.*A2+A4)/27.
A6 = FGV(XO+O.2*H,YO+H*(28.*A1-125.*A2+546.*A3+54.*A4-378.*A5)/
                                                        /625.)
Y1 = YO+H*(A1+4.*A3+A4)/6.
G  = H*(42.*A1+224.*A3+21.*A4-162.*A5-125.*A6)/336.
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE SCRATON (XO,YO,Y1,H,G)

A1 = FGV(XO,YO)

A2 = FGV(XO+O.22222222222*H,YO+O.22222222222*H*A1)

A3 = FGV(XO+O.33333333333*H,YO+H*(A1/12.+O.25*A2))

A4 = FGV(XO+O.75*H,YO+H*(69.*A1-243.*A2+270.*A3)/128.)

A5 = FGV(XO+O.9*H,YO+H*(-O.3105*A1+1.8225*A2-1.1016*A3+
                                       +O.4896*A4))

Y1 = YO+H*(17.*A1/162.+81.*A3/170.+32.*A4/135.+250.*A5/1377.)

Q  = -A1/18.+27.*A3/170.-4.*A4/15.+25.*A5/153.

R  = 19.*A1/24.-27.*A2/8.+57.*A3/20.-4.*A4/15.

S  = A4-A1

G  = -H*Q*R/S

RETURN

END
```

JELÖLÉSEK

R^ℓ	az ℓ-dimenziós euklideszi tér
$\|\|.\|\|$	norma az R^ℓ téren
ϕ	az (1.2) egylépéses módszert meghatározó növekményfüggvény
y	az (1.1) probléma elméleti megoldása
$T(x, h)$	az (1.2)módszer (1.1) problémára vonatkozó képlethibája
$p^*(m)$	az m-pontos RK módszerek maximális rendje
C^k	a k-szor folytonosan differenciálható függvények osztálya
L, K	lipschitz konstansok
$\mathcal{D}(f)$	az f függvény értelmezési tartománya
x_n	alappont
y_n	az (1.1) probléma közelitő megoldása az x_n pontban
h_n, h	lépéshossz
e_n	az (1.2) módszer (1.1) problémára vonatkozó globális hibája az x_n pontban
$\tilde{y}_n$	a (2.8) probléma elméleti megoldása
$T_n(x, h)$	az (1.2) módszer (2.8) problémára vonatkozó képlethibája
$e_{n+k}^{(n)}$	az (1.2) módszer (2.8) problémára vonatkozó globális hibája az x_{n+k} pontban

ψ	a T(x, h) képlethiba főtagja (főhibafüggvény)
$\mathcal{R}_m$	az m-pontos RK módszerek halmaza
A_m	az $\mathcal{R}_m$ osztály eleme
$\mathcal{G}_f^{A_m}$	az A_m módszer automatikus hibabecslése
$k(\mathcal{G}_f^{A_m})$	a $\mathcal{G}_f^{A_m}$ hibabecslés költsége
$G(A_m)$	az A_m módszer automatikus hibabecsléseinek halmaza
$\mathcal{M}_m$	automatikus hibabecsléssel és lépésfelezéssel ki - egészitett legfeljebb m-pontos RK módszerek osztálya
M	az $\mathcal{M}_m$ osztály eleme
p(M)	az M eljáráshoz tartozó RK módszer rendje
r(M)	az M eljáráshoz tartozó hibabecslés rendje
K(M)	az M eljárás lépésenkénti költsége
$\mathcal{P}$	probléma
$n(M, \varepsilon)$	minimális lépésszám
φ	a hibabecslés főtagja
$T^i(x, h)$	az i-edik módszer (1.1) problémára vonatkozó képlethibája
$\mathcal{M}_m^L$	az $\mathcal{M}_m$ osztály részhalmaza

IRODALOM

[1] BÉKÉSSY A., KIS O., TARNAY GY.: "Tanulmány R.H.Merson módszeréről", MTA Automat. Kutató Int. Közl., 4./1969/3-31.

[2] L. BIEBERBACH: "On the remainder of the Runge-Kutta formula in the theory of ordinary differential equations", Z. angew. Math. Physik, 2. /1951/ 233-248.

[3] J.W.CARR: "Error bounds for the Runge-Kutta singlestep integration processes", J. Assoc. Comp. Mach., 5. /1958/ 39-44.

[4] G.J.COOPER: "Error bounds for some Single step methods", Conference on the numerical solution of differential equations, Lecture Notes in Math., 109., 140-147, Springer 1969.

[5] R. ENGLAND: "Error estimates for Runge-Kutta type solutions to systems of ordinary differential equations", Computer J., 12. /1969/ 166-170.

[6] GALÁNTAI A.: "Közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó egylépéses módszerek automatikus hibabecsléseiről", Alkalmazott Matematikai Lapok /megjelenés alatt/

[7] A. GALÁNTAI: "On the automatic error estimates of the Runge-Kutta methods", Beiträge zur Num. Math. /megjelenés alatt/

[8] A. GALÁNTAI: "Local error estinate of one-step methods", MTA SZTAKI Közlemények /megjelenés alatt/

[9] B.A.GALLER, D.P.ROZENBERG: "A generalization of a theorem of Carr on error bounds for Runge-Kutta procedures", J. Assoc. Comput. Mach., 7. /1960/ 57-60.

[10] C.W.GEAR: Numerical initial value problems in ordinary differential equations, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[11] P. HENRICI: Discrete variable methods in ordinary differential equations, John Wiley and Sons, Inc., New-York, 1962.

[12] T.E.HULL, W.H. ENRIGHT, B.H. FELLEN, A.E. SEDGWICK: "Comparing numerical methods for ordinary differential equations", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 9, No.4. /1972/

[13] KÓSA A. - SCHIPP F. - SZABÓ D.: Közönséges differenciálegyenletek I., Kézirat, Budapest, 1970.

[14] J.D. LAMBERT: Computational methods in ordinary differential equations, John Wiley and Sons, Inc, London,1973.

[15] M.LOTKIN: "On the accuracy of Runge-Kutta's method", Math. Tables Aids Comput., 5 /1951/ 128-133.

[16] R.H. MERSON: "An operational method for the study of integration processes", Proceedings of conference on data processing and Automatic Computing Machines,

[17] A. RALSTON: Bevezetés a numerikus analizisbe, Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.

[18] R.E. SCRATON: "Estimation of the truncation error in Runge-Kutta and allied processes", Computer J., 7. /1964/ 246-248.

[19] H. SHINTANI: "Two-step processes by one-step methods of order 3 and of order 4", J. Sci. Hiroshima Univ. Ser A-1. 30 (1966) 183-195.

[20] SZIDAROVSZKY F.: Bevezetés a numerikus módszerekbe, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[21] VARGA GY.: Numerikus módszerek programgyüjteménye I., MTA Számitástechnikai Központ, Budapest, 1971.

[22] VARGA GY.: Numerikus módszerek programgyüjteménye II., MTA SZTAKI, Budapest, 1973.

[23] VARGA L.: Közönséges differenciálegyenletek numerikus módszerei, Kézirat, Budapest, 1973.

24 J.A. ZONNEVELD: Automatic numerical integration,
Matematisch Centrum Amsterdam, 1970.

25 Н.С. Бахвалов: Численные методы I,
Издательство Наука, 1973. Москва.

26 О.Киш: "Об оценке погрешности метода
Рунге-Кутта"
Studia Sci. Math. Hung:, 5./1970/ 427-432

27 О.Киш: "О методе Рунге-Кутта",
Studia Sci. Math. Hung., 5./1970/ 433-435

A TANULMÁNYOK sorozatban eddig megjeletek:

18/1974 Pikler Gyula: MINI-számitógépes interaktiv alkatrész-programiró rendszer NC szerszámgépek automatikus programozásához

19/1974 Gertler,J.-Sedlak,J.: Software for process control

20/1974 Vámos,T.-Vassy,Z.: Industrial Pattern Recognition Experiment - A Syntax Aided Approach

21/1974 A KGST I. -15-1.: "Diszkrét rendszerek automatikus vezérlése" c. témában 1973. februárban rendezett szeminárium előadásai

22/1974 Arató,M.-Benczur,A.-Krámli,A.-Pergel,J.: Stochastic Processes, Part I.

23/1974 Benkó S.-Renner G.: Erősen telitett mágneses körök számitógépes tervezési módszerei

24/1974 Kovács György-Franta Lászlóné: Programcsomagok elektronikus berendezések hátlaphuzalozásának tervezésére

25/1973 Járdán R. Kálmán: Háromfázisu tirisztoros inverterek állandosult tranziens jelenségei és belső impedanciája

26/1974 Geregely József: Numerikus módszerek sparse mátrixokra

27/1974 Somló János: Analitikus optimalizálás

28/1974 Vámos Tibor: Tárgyfelismerési kisérlet nyelvi módszerekkel

29/1974 Móricz Péter:Vegyészmérnöki számitási módszerek fázisegyensulyok és kémiai egyensulyok vizsgálatára

30/1974 Vassy, Z.-Vámos,T.: The Budapest Robot - Pragmatic Intelligence

31/1975 Nagy István: Frekvenciaosztásos középfrekvenciás inverterek elmélete

32/1975 Singer D.,Borossay Gy.,Koltai T.: Gázhálozatok optimális irányitása különös tekintettel a Fővárosi Gázmüvek hálózataira

33/1975 Vámos, T.-Vassy,Z.: Limited and Pragmatic Robot Intelligence
Mérő,L.-Vassy,Z.: A Simplified and Fastened Version of the Hueckel Operator for Finding Optimal Edges in Pictures
Галло В.: Программа для распознавания геометрических образов, основанная на лингвистическом методе описания и анализа геометрических структур

34/1975 László Nemes: Pattern Identification Method for Industrial Robots by Extracting the Main Features of Objects

35/1975 Garádi-Krámli-Ratkó-Ruda:Statisztikai és számitástechnikai módszerek alkalmazása kórházi morbiditás vizsgálatokban

36/1975 Renner Gábor: Elektromágneses tér számitása nagyhőmérsékletü anyagban

37/1975 Edgardo Felipe: Specification problems of a process control display

38/1975 Hajnal Andrásné: Nemlineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei

39/1975* A.Abd El-Sattar: Control of induction motor by three phase thyristor connections in the secondary circuit

40/1975 Gerhardt Géza: QDP Grafikus interaktiv szubrutinok a CDC 3300 - GD'71 grafikus konfigurációra

41/1975 Arató,M.-Benczur,A.-Krámli,A.-Pergel,J.: Stochastic Processes, Part II.

42/1975 Arató M.: Fejezetek a matematikai statisztikából számitógépes alakalmazásokkal

43/1975 Matavovszky Tibor- dr.Pásztorné, Varga Katalin: Programrendszer Boole-függvény együttes egyszerüsitésére vagy minimalizálására

44/1975 Bacsó Nándorné: Pneumatikus áramköri hazardok

45/1975 Varga András: Ellenpárhuzamos félvezetőpárokkal vezérelt aszinkronmotoros hajtások számitási módszerei

A *-gal jelölt kivételével a sorozat kötetei megrendelhetők az Intézet könyvtáránál /Budapest XIII. Victor Hugo u. 18-22./

Jelen dolgozat az 5.9.3 sz. intézeti
téma keretében került kidolgozásra.