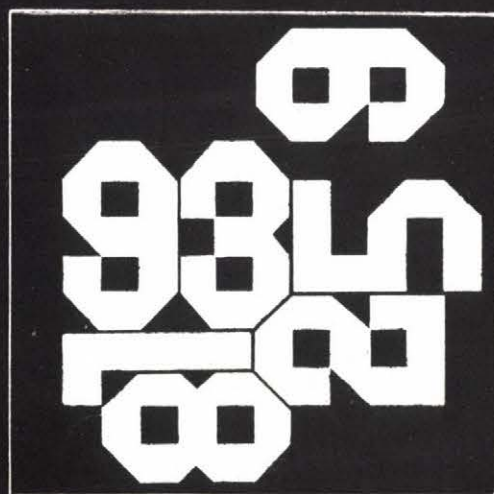
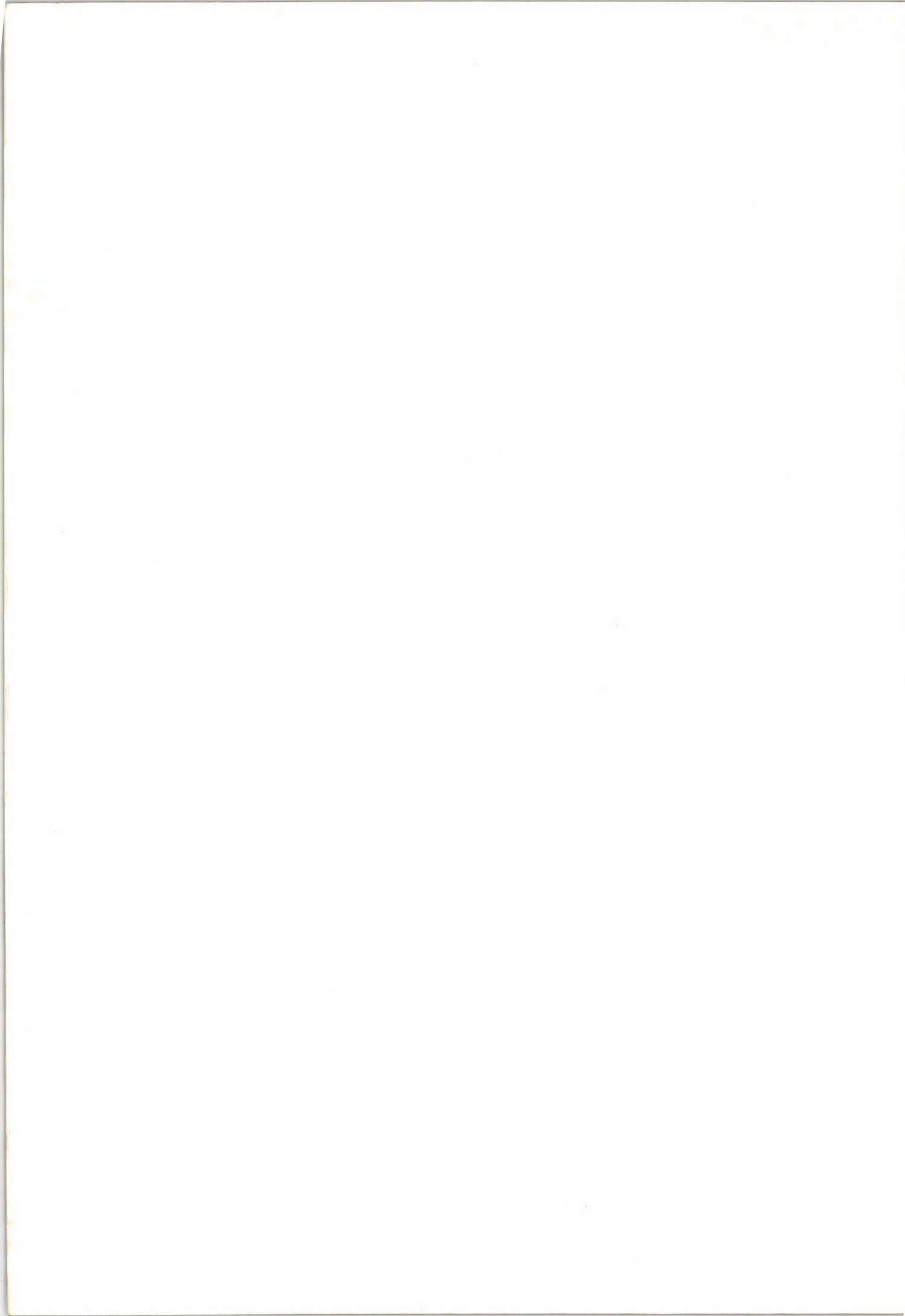


MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest





MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET

Renner Gábor  
ELEKTROMÁGNESES TÉR SZÁMITÁSA NAGYHŐMÉRSÉKLETŰ ANYAGBAN

Egyetemi doktori disszertáció

Tanulmányok 36/1975.

A kiadásért felelős:

Dr. Vámos Tibor

Jelen dolgozat az 5.8.1. "Mágneses terek nomografikus és digitális szimulációja" c. intézeti alapkutatói téma keretében készült.

---



TARTALOMJEGYZÉK

	Oldal
Bevezetés .....	5
ÁLTALÁNOS RÉSZ .....	9
I. Alapegyenletek .....	9
1. Kvázistacionárius elektromágneses tér .....	9
a./ Maxwell egyenletek inhomogén nemlineáris közegben .....	9
b./ Határfeltételek .....	12
c./ Integrális mennyiségek .....	13
2. Hőmérsékleti tér .....	15
a./ A hővezetés differenciálegyenlete inhomogén nemlineáris esetben .....	15
b./ Határfeltételek .....	16
c./ Hőáram, hőtartalom .....	17
d./ Halmazállapotváltozások .....	17
II. Differenciaegyenletek módszere .....	19
1. A rácsháló feltételének szempontjai .....	19
2. Differenciaegyenletek felírása .....	21
3. Határfeltételek érvényesítése .....	30
4. Az egyenletrendszerek megoldása .....	32
a./ Pont iteráció .....	33
b./ Csoport iteráció .....	35
5. A megoldás konvergenciája .....	37
a./ A konvergencia feltétele .....	37
b./ Konvergenciagyorsítás .....	40
6. Hibabecslés .....	47
SPECIÁLIS RÉSZ .....	49
1. A probléma megfogalmazása .....	49
2. Fizikai jellemzők .....	53
a./ Villamos vezetőképesség .....	53
b./ Hővezetési tényező .....	53
3. Hőmérsékleteloszlás .....	56

	Oldal
4. Örvényszámítás .....	59
a./ Differenciál-differenciaegyenlet .....	59
b./ Határfeltételek .....	63
c./ Iteráció .....	65
5. Az összetett hővezetési és elektromágneses prob- léma .....	68
6. Numerikus eredmények .....	71
Irodalom .....	77
Melléklet .....	79

## BEVEZETÉS

A stacionárius és kvázistacionárius elektromágneses teret leíró Maxwell egyenletek megoldása zárt alakban csak igen speciális feltételek mellett sikerül. Általában ki kell kötnünk, hogy a vizsgált tartomány határvonala geometriailag egyszerű alakzat, e határon a térjellemzők változása matematikailag egyszerűen írható le, és a tartomány belsejében vagy résztartományonként az anyagjellemzők /vezetőképesség, permeabilitás/ állandók. Mivel ezek a feltételek a gyakorlatban korántsem teljesülnek, a zárt alakú megoldásokról legtöbbször le kell mondani, illetve ezek a valóságnak csak sok egyszerűsítést tartalmazó közelítését adják.

Még inkább így áll a helyzet, ha a vizsgált anyagban az elektromágneses jelenségekkel együtt másfajta fizikai jelenségek is lejátszódnak, amelyek azonban valamilyen uton visszahatnak az elektromágneses jelenségekre. Ez az eset áll fenn pl. akkor, amikor a térben folyó áramok jelentősen növelik az anyag hőmérsékletét, miáltal annak minden fizikai paramétere megváltozik. A hőfejlődés mértéke a kialakuló áramoktól függ, az áramok viszont a hőfejlődés mértékétől függően megváltozó anyagjellemzőktől. Így tehát a két jelenség-csoport anyagjellemzőkön keresztül megvalósuló kölcsönös egymásra hatásában alakul ki az elektromágneses és hőmérsékleti tér, amelyet most már nemlineáris, inhomogén, másodrendű, parciális differenciálegyenletek rendszere ír le. Ezek zárt, analitikus megoldása még egyszerűbb peremfeltételek és anyagjellemező függvények esetén is reménytelen. A térszámítási problémák között viszont sok olyan létezik, amelyeknél valóban jelentős hőmérséklet-emelkedés jön létre, esetleg épp ez a cél, mint pl. az indukciós hevítésnél, vagy a zónás olvasztásnál.

Nemlineáris problémák megoldására már régebben kidolgoztak olyan matematikai módszereket, amelyek a zárt analitikus meg-



oldást lehetővé tevő feltételeknél jóval általánosabb feltételek mellett alkalmazhatók. Ezek a módszerek viszont nagy mennyiségű számolási munkát igényelnek, ezért kiterjedt alkalmazásuk a nagy sebességű elektronikus számítógépek megjelenésével vált időszerűvé. Másrészt a gépi számítástechnika új problémákat vetett fel, sok esetben a már meglévő módszerek megváltozásához, tökéletesedéséhez és általában e számítástechnika sajátos szempontjaihoz való alkalmazkodáshoz vezetett. Mindezekben nagy szerepet játszik a numerikus analízis utóbbi években végbement fejlődése.

A térszámításoknál előforduló matematikai problémák számítógépes megoldása szempontjából szóba jövő eljárásokat alapvetően két csoportra oszthatjuk:

- nem zárt alaku analitikus módszerek, és
- diszkrét módszerek

Az analitikus módszerek esetében - ide tartoznak a sorfejtések, integrálrepresentációk - a megoldást jelentő függvényt analitikus függvényekkel kifejezve kapjuk meg.

A diszkrét módszerek - a véges differencia módszer, a variációszámítási módszerek - a megoldást a tér kijelölt diszkrét pontjaiban numerikus eredmény formájában szolgáltatják. Ebből következik, hogy ez utóbbi esetben, bár a numerikus eredményt megkapjuk, általánosabb következtetések levonása többnyire nem lehetséges. Analitikus tárgyalásnál általában áttekinthető a paraméterek változásának hatása, az eredmények pedig felhasználhatók hasonló feladatok tárgyalására, egyszerűsítési lehetőségekre utalhatnak. Mindezek következtében a problémakör mélyebb ismeretére vezetnek, míg a diszkrét módszerek csak a konkrét problémát oldják meg. Ehhez járul még, hogy diszkrét módszerek esetében a hibabecslés, konvergencia és a megoldás stabilitásának kérdései nemlineáris esetben még nem tisztázottak kellőképpen, analitikus módszereknél pedig a megoldás pontosságát általában tetszőleges és előre megadható.

Mindezek mellett van egy szempont, amely a diszkrét módszereket, és ezen belül különösen a véges differenciaegyenlet módszerét előtérbe helyezi. Nevezetesen az, hogy míg analitikus módszerek speciális feladattípusokra adhatók, a véges differenciaegyenletek módszerével csaknem valamennyi probléma tárgyalható, illetve csak technikai feltételek /idő, memóriakapacitás/ korlátozzák a megoldható problémák körét.

Általában tehát maga a probléma dönt, hogy melyik módszert célszerű alkalmazni. De az alapvető módszereken belül is több eljárást lehet használni. A véges differenciaegyenleteket például meg lehet oldani szimultán módon, iterációval, Monte-Carlo módszerrel. Ezen eljárások tekintetében igen sokszor külső körülmények döntenek /pl. hányszor kell hasonló problémát megoldani és milyen változtatásokkal/.

Az említett numerikus módszerek alkalmazása elvileg ugyan egyszerű, a bonyolultabb fizikai problémák megoldásánál mégis olyan kérdések merülnek fel, amelyekre pontos feleletet adni sokszor nem tudunk. Ezért a numerikus analízis eredményeinek ismerete mellett sok ötletre és fantáziára van szükség a gyakorlatban előforduló feladatok megoldásánál /pl. a rácsháló felvételének módja, konvergenciagyorsítás, hibák megbecslése és általában az iterációs folyamat megtervezése tekintetében/.

Jelen disszertáció általános részében összefoglaljuk a kvázistacionárius elektromágneses teret nagyhőmérsékletű anyagban leíró differenciálegyenleteket és peremfeltételeiket, majd a figyelmet az ezen egyenletek számítógépi megoldásánál leginkább szóba jövő módszerre, a differenciaegyenletek módszerére irányítjuk. Itt sorra jönnek a speciális kérdések, amelyeket az adott fizikai problémakör vet föl a módszer alkalmazásánál. Ezekre részben a meglévő elmélet kiterjesztése, részben az elvégzett számítások közben szerzett tapasztalatok alapján igyekeztünk választ kapni. A speciális rész egy, a félvezető-technológiában felmerülő térszámítási probléma megoldását ismer-



teti; a mikrokristályos szilícium rud indukációs hevítése közben kialakuló elektromágneses és hőmérsékleti tér meghatározását. Itt kerül tárgyalásra néhány eljárás is, amely az adott problémakörben általánosan használható, de bemutatása e konkrét példán látszott célszerűnek.



ÁLTALÁNOS RÉSZ

I. ALAPEGYENLETTEK

1. Kvázistacionárius elektromágneses tér

a./ Maxwell egyenletek inhomogén nemlineáris közegben;

Térben eloszló váltakozó áramok elektromágneses terének számítására a kvázistacionárius esetre érvényes Maxwell egyenletek szolgálnak. Ezek az általános Maxwell egyenletekből az eltolási áram és a tértöltéssűrűség elhagyásával nyerhetők:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad /1/$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad /2/$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad /3/$$

A térjellemezők között fennállnak még a közeg tulajdonságait figyelembe vevő  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ,  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$  egyenletek, ahol általános esetben a  $\mu$ ,  $\gamma$  anyagjellemezők a helytől és a térjellemezőktől függenek. Mivel  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , az elektromos és a mágneses térjellemezők kiszámítása visszavezethető a

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad /4/$$

egyenlettel bevezetett vektorpotenciál számítására. Ezzel a /2/ Maxwell egyenlet így alakul:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} \quad /5/$$

Mivel tetszőleges szerinti  $\varphi / \vec{r} /$  skalártérre:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = 0$$

/5/-ből a következőt kapjuk:

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) \quad /6/$$

$$\vec{J} = -\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \gamma \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = -\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_0 \quad /7/$$

ahol

$$\vec{J}_0 = -\gamma \text{grad } \varphi$$

A /4/, /6/, /7/ egyenletek megadják a térjellelmezők kiszámítását, ha az  $\vec{A}$  vektorpotenciál már ismert.

Vezessük be az /1/ Maxwell egyenletbe is az  $\vec{A}$  vektorpotenciált. A mágneses térerősséget a vektorpotenciállal kifejezve, a  $\vec{J}$  áramsűrűséget pedig /7/-ből helyettesítve, a

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = -\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \gamma \text{grad } \varphi \quad /8/$$

egyenlethez jutunk, amely az  $\vec{A}$  vektorpotenciál meghatározására szolgál. / $\varphi$  előre tetszés szerint megadható skalártér./

A /8/ egyenlet teljes általánosságban írja le a kvázistacionárius elektromágneses terek viselkedését; benne az anyagjellemzők változására semmiféle kikötés sincs.  $\mu$  és  $\gamma$  változhat térben, vagy időben, függhet maguktól a térjellelmezőktől vagy egyéb fizikai mennyiségektől. Mindezen tulajdonságai alapján a továbbiak számára kiindulási egyenletként szolgál.

Sok esetben a vizsgált tér egyes résztartományai vagy a jelenségek időbeli lefolyása speciális tulajdonságokat mutatnak. Ez esetben a /8/ egyenlet is egyszerűbb alakot ölt.

A gyakorlatban leginkább előforduló esetek a következők:

Nem vezető résztartományban:  $\gamma = 0$

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A} \right) = 0 \quad /9/$$

Színuszus időbeli változás esetén:  $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} \right) = -j\omega\gamma\bar{A} - \gamma \operatorname{grad} \varphi \quad /10/$$

ahol  $\bar{A}$  komplex térvektor

Térben állandó permeabilitású résztartományban:

$\mu = \text{állandó}$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = -j\omega\mu\gamma\bar{A} - \mu\gamma \operatorname{grad} \varphi \quad /11/$$

Ezt az egyenletet a

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \Delta \bar{A} \quad /12/$$

vektoranalitikai összefüggés segítségével egyszerűbben is írhatjuk. Válasszuk az  $\bar{A}$  vektor divergenciáját nullának;

igy /11/-ből /12/ felhasználásával:

$$\Delta \bar{A} = j\omega\mu\gamma\bar{A} + \mu\gamma \operatorname{grad} \varphi \quad /13/$$

Itt azonban  $\varphi$  már nem tetszőleges. Vegyük ugyanis /7/ mindkét oldalának divergenciáját:

$$\operatorname{div} \bar{J} = -\gamma \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{A}) - \gamma \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \quad /14/$$

Mivel azonban kvázistacionárius esetben az áramsűrűség forrásmentes / $\operatorname{div} \bar{J} = 0$ /, valamint az előbbieket szerint  $\operatorname{div} \bar{A} = 0$ ,

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = 0, \quad /15/$$

tehát  $\varphi$ -nek ki kell elégítenie a Laplace egyenletet.

Numerikus számításokban célszerű lehet a /8/ alap-egyenlet integrális alakjából kiindulni. Ehhez úgy jutunk, hogy vesszük az egyenlet mindkét oldalának felület menti integrálját, majd a bal oldalon a felületi integrált vonalintegrállá alakítjuk a Stokes tétel segítségével:

$$\oint_{\bar{F}} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} \cdot d\bar{l} = - \int_{\bar{F}} \gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \cdot d\bar{F} - \int_{\bar{F}} \gamma \operatorname{grad} \varphi \cdot d\bar{F} \quad /16/$$



b./ Határfeltételek

Az alapvető /8/, illetve /16/ egyenletek megoldásához ismernünk kell az  $\bar{A}$  vektorpotenciál változását a vizsgált térrész határán. Mivel azonban a vektorpotenciál nem szemléletes jelentéssel bíró fizikai mennyiség, csak az indukció, a térerősség, esetleg az áram-sűrűség kerületmenti változásából következtethetünk  $\bar{A}$ -ra. Ez is meglehetősen nehéz feladat, mert a téreloszlás legalább is kvalitatív ismeretét tételezi fel.

Bizonyos esetekben járható ut, hogy a vizsgált tartomány határát a végtelenig terjesztjük ki, ahol a térjellelmezők természetesen zérus értéket vesznek fel. Ezután felvesszünk egy zárt belső határt és a külső, végtelenbe nyuló teret alkalmas transzformáció segítségével a belső térbe transzformáljuk. A felvett határ az egész vizsgált tér szempontjából belső határ, így itt a térjellelmezők változása folytonos, vagy az ismert töréstörvényeket követi.

Ha a végtelen teret a végesbe átvivő transzformációt az adott feladatnál nem sikerül megtalálni és a probléma az örvényáramok elhanyagolásával megoldható, alkalmazhatjuk a következő módszert. Olyan távol vesszük fel a határt, ahol az örvényáramok hatása már elhanyagolható. Itt meghatározzuk a térjellelmezők eloszlását a stacionárius esetre, és ezt tekintjük a kvázistacionárius eset peremfeltételének.

Nagymértékben egyszerűsödik a helyzet, ha a véges tartományt úgy vehetjük fel, hogy határán ismerjük valamelyik térjellelmező változását. Ez az eset áll fenn, amikor pl. igen nagy permeabilitású anyag határolja a teret, vagy amikor a szimmetria-feltételek

írják elő a térjellemezők viselkedését.

A térjellemezők kerületmenti változásának ismeretében a /8/, ill. /16/ egyenletek megoldásához meg kell határoznunk a vektorpotenciál eloszlását a peremen. Erre szolgálnak elvileg a /4/, /6/, /7/ egyenletek. A /4/ egyenletre tekintve azonban láthatjuk, hogy a  $\bar{E}$  indukció egyszerű változása, vagy még állandó volta is bonyolult összefüggést ad a vektorpotenciál komponensei között. Ennél egyszerűbb a /6/ és /7/ összefüggés  $\bar{A}$  és  $\bar{E}$  valamint  $\bar{J}$  között, ezért jelen problémakörnél előnyös, ha a villamos térerősség vagy az áramsűrűség kerületmenti változását adhatjuk meg. A sokszor előforduló kétdimenziós téreloszlás esetében az indukcióeloszlásból is könnyen következtethetünk a vektorpotenciál eloszlásra, mert bizonyítható [1], hogy ekkor az állandó vektorpotenciálu vonalak egyuttal indukcióvonalak is.

### c./ Integrális mennyiségek

A társzámítás eredményeként a /8/, illetve /16/ egyenletekkel és a peremfeltételek által meghatározott vektorpotenciált nyerjük. Mérnöki számításokban azonban többnyire integrális mennyiségekre van szükségünk mint pl. a fluxus, áram, feszültség, energia, stb. A meghatározásukra szolgáló összefüggésekben a villamos és mágneses térjellemezők szerepelnek, de a /4/, /6/, /7/ kifejezések segítségével közvetlenül a vektorpotenciálból számíthatjuk ezen integrális mennyiségeket. A következőkben megadjuk a vektorpotenciállal kifejezett alakokat.

F felületen átfolyó áram:

$$I = \int_F \bar{J} d\bar{F} = \int_F \left( -\gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \gamma \text{grad} \varphi \right) d\bar{F} = \int_F -\gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} d\bar{F} + I_0 \quad /17/$$

ahol

$$I_0 = \int_F -\gamma \text{grad} \varphi d\bar{F}$$

A és B pont közötti potenciálkülönbség:

$$U_{AB} = \int_A^B \bar{E} d\bar{l} = \int_A^B \left( -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \right) d\bar{l} = \int_A^B -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} d\bar{l} + (\varphi_B - \varphi_A) \quad /18/$$

F felület fluxusa:

$$\phi = \int_F \bar{B} d\bar{F} = \int_F \text{rot} \bar{A} d\bar{F} = \oint_l \bar{A} d\bar{l} \quad /19/$$

ahol az  $l$  görbe az F felület határvonala  
 $l$  zárt görbe által körülfogott gerjesztés:

$$\Theta = \oint_l \bar{H} d\bar{l} = \oint_l \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{A} d\bar{l} \quad /20/$$

V térfogat mágneses energiája:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \bar{A} \bar{J} dv + \frac{1}{2} \oint (\bar{A} \times \bar{H}) d\bar{F} = \\ = \frac{1}{2} \int_V \bar{A} \left( -\gamma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \gamma \text{grad} \varphi \right) dv + \frac{1}{2} \oint \left( \bar{A} \times \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{A} \right) d\bar{F} \quad /21/$$

V térfogatban hővé váló energia:

$$W_J = \int_V \frac{\bar{J}^2}{\gamma} dv = \int_V \gamma \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi \right)^2 dv \quad /22/$$

Szinuszos változás esetén  $\frac{\partial}{\partial t}$  helyébe mindenütt  $j\omega$ -t helyettesíthetünk.



## 2. Hőmérsekleteti tér

### a./ A hővezetés differenciálegyenlete inhomogén nem-lineáris esetben

A hővezetés differenciálegyenlete általánosságban azt mondja ki, hogy a hőáramvonalak az időben változó hőmérsékletű anyagi részekben és a hőforrások helyén keletkeznek, illetve tűnnek el:

$$\operatorname{div} \bar{F} = - mc \frac{\partial T}{\partial t} + q(\bar{r}, t) \quad /23/$$

Itt  $m$  az anyag tömegsűrűsége,  $c$  a fajhő,  $q$  az általános esetben helytől és időtől függő hőforrások sűrűsége.

Az  $\bar{F}$  hőáramsűrűség /hőfluxus/ viszont a hőmérséklet gradienseivel arányos:

$$\bar{F} = - K \operatorname{grad} T$$

ahol  $K$  a hővezetési tényező.

$\bar{F}$  kifejezését a kiinduló /23/ egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$\operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) = mc \frac{\partial T}{\partial t} - q(\bar{r}, t) \quad /24/$$

Mivel a hővezetőképesség általában éppen hőmérséklet-függése miatt függ a helytől:  $/K(T(\bar{r})) /$ ,

$$\operatorname{grad} K = \frac{\partial K}{\partial T} \operatorname{grad} T$$

és a /24/ egyenlet így alakul:

$$\frac{\partial K}{\partial T} (\operatorname{grad} T)^2 + K \Delta T = mc \frac{\partial T}{\partial t} - q(\bar{r}, t), \quad \text{vagy}$$

$$\Delta T + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial T} (\operatorname{grad} T)^2 + \frac{q(\bar{r}, t)}{K} = \frac{mc}{K} \frac{\partial T}{\partial t} \quad /25/$$

A hővezetési differenciálegyenlet ezen alakja igen általános, mert a fentiek szerint figyelembe veszi a hővezetőképesség hőfokfüggését, a hőforrások jelenlétét, az  $m$  és  $c$  anyagjellemzők változását, és alkalmas

a hővezetési folyamat időbeli vizsgálatára. Ha a stacionárius állapotot vizsgáljuk, a jobb oldalon nulla áll, állandó hővezetési tényező esetén elmarad a bal oldal második, hőforrásmentes térben pedig a harmadik tagja.

Ha kvázistacionárius térproblémákhoz kapcsolódó hővezetési problémát vizsgálunk "állandosult" állapotban, akkor általában használhatjuk a stacionárius esetre vonatkozó hővezetési differenciálegyenletet, mert bár a  $q$  hőforrássűrűség az időben szinuszosan változik, ezt a változást nem tudja követni a hőmérsékleteloszlás /a hővezetési időállandó nagyságrendekkel nagyobb az elektromágneses periódusidőnél/.

$$\Delta T + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial T} (\text{grad } T)^2 + \frac{q(\bar{r})}{K} = 0 \quad /26/$$

b./ Határfeltételek

A /25/ hővezetési differenciálegyenlet megoldásához is meg kell adnunk a hőmérséklet viselkedését a vizsgált térrész határán. A határoló felület fizikai viszonyinak megfelelően a következő esetek fordulnak elő:

1./ ismerjük a felület hőmérsékletét annak minden pontjában,

2./ adott a felületen a hőgradiens:  $\frac{\partial T}{\partial n} = f$

Ekkor a differenciálegyenlet egyértelmű megoldásához meg kell még adni a felület egy pontjának hőmérsékletét, valamint teljesülnie kell az

$$\oint_F \frac{\partial T}{\partial n} dF = \int_V q dV$$

feltételnek.

3./ hőelvezetés van a felületen;

$$- K \frac{\partial T}{\partial n} = H(T - T_0)$$

Itt H a felületi hővezetési tényező,  $T_0$  pedig a környezet hőmérséklete.

4./ a felület sugárzással ad le hőt a környezetébe:

$$- K \frac{\partial T}{\partial n} = \sigma \epsilon (T^4 - T_0^4) \quad /27/$$

ahol  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-12} \text{ W/cm}^2 \text{ K}^04$ ,  $\epsilon$  pedig az emissziós tényező.

5./ a felület érintkezik egy tőle különböző hővezetőképességű felülettel:

$$K_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \quad \text{és}$$

$$T_1 = T_2$$

### c./ Hőáram, hőtartalom

A hőmérsékleteloszlás ismeretében közvetlenül meghatározhatjuk az itt szóba jövő integrális mennyiségeket. Valamely felületen átmenő hő mennyiségét időegységenként az

$$\dot{Q} = \int_F -K \text{ grad } T d\bar{F}$$

összefüggés adja,

a V térfogat hőtartalmának megváltozása az időegység alatt pedig a

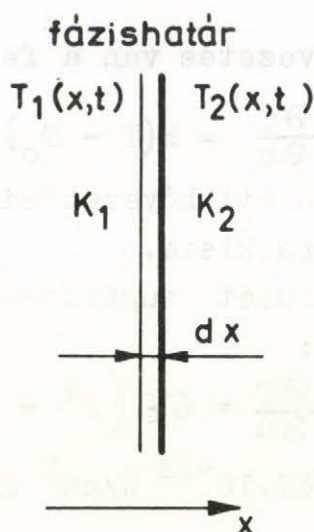
$$Q = \int_V mc \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

képletből számítható.

### d./ Halmazállapotváltozások

Két különböző fázist /pl. folyékony és szilárd/ tartalmazó problémáknál a megoldásnak a fázishatáron ki kell elégítenie a fázishatár hőegyensúlyát kifejező egyenletet [2].





1. ábra

Az 1. ábrán látható egydimenziós esetben a fázishatárhoz felületegységenként és időegységenként érkező, illetve távozó hőmennyiségek különbsége az ott felszabaduló /vagy elnyelt/ hőmennyiséget adja:

$$K_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - K_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = Lm \frac{dx}{dt} \quad /28/$$

ahol  $L$  a halmazállapotváltozás látens hője, és  $m$  a tömegsűrűség.

Mivel a fázishatáron a hőmérséklet nem változik és  $T_1 = T_2$ , itt

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} dx + \frac{\partial T_1}{\partial t} dt = 0; \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} dx + \frac{\partial T_2}{\partial t} dt = 0$$

$$K_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - K_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = -Lm \frac{\partial T_1 / \partial t}{\partial T_1 / \partial x} = -Lm \frac{\partial T_2 / \partial t}{\partial T_2 / \partial x}$$

/29/

Általános esetben /29/ a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned} K_1 |\text{grad } T_1| - K_2 |\text{grad } T_2| &= \pm Lm \frac{\partial T_1 / \partial t}{|\text{grad } T_1|} = \\ &= \pm Lm \frac{\partial T_2 / \partial t}{|\text{grad } T_2|} \end{aligned} \quad /30/$$

ahol a gradienseket a fázishatáron kell venni.

A jelen megítélésünk szerint számítástechnikailag még követhető esetben, amikor a fázishatár görbült, de alakját megtartva  $v$  sebességgel halad tovább, a következő egyenletet kapjuk:

$$K_1 |\text{grad } T_1| - K_2 |\text{grad } T_2| = Lmv \quad /31/$$

## II. DIFFERENCIAEGYENLETEK MÓDSZERE

Az elektromágneses és hőmérsékleti teret leíró /8/, /16/, illetve /25/ egyenletek általános esetben inhomogén nemlineáris másodrendű parciális differenciálegyenletek. Ilyen jellegű egyenletek megoldásának hatékony módszere a differenciaegyenletek módszere. E módszer alkalmazásakor először elkészítjük a szóbanforgó tartomány koordinátavonalakból, illetve koordinátafelületekből álló beosztását. Így a tartomány belsejében és határán metszéspontokat kapunk. A differenciálegyenletet ezen pontokban felírt differenciaegyenletekkel helyettesítjük, aminek eredményeként algebrai egyenletrendszer nyerünk. Ezen egyenletrendszer megoldásai szolgáltatják a keresett függvény értékét a kijelölt pontokban. A módszer bár elvileg egyszerű, alkalmazása mégis több problémát vet fel, amelyek közül a legtöbb általánosságban nem is oldható meg. A következőkben vizsgáljuk azokat a problémákat, amelyek a módszernek kvázis-tacionárius elektromágneses terek számítására való alkalmazásakor felmerülnek, ismertetjük ezek megoldásának lehetőségét az elméleti eredmények és a számítások közben szerzett tapasztalatok alapján.

### 1. A rácsháló felvételének szempontjai

A módszer alkalmazásakor a rácspontok és az azokat összekötő rácsvonalak hálózatát teljesen szabadon választhatjuk meg. A számítás technikáját tekintve azonban, /különösen számítógépek alkalmazásakor/ igen előnyös, ha ez a pont- illetve vonalrendszer valamilyen



szabályosságot követ. Ez a szabályosság legcélszerűbben azt jelenti, hogy a hálórendszer valamely ortogonális koordinátarendszer koordinátavonalainak felel meg. Hogy melyik legyen ez a koordinátarendszer /Descartes, polár, henger, gömbi stb/ abban rendszerint maga a feladat dönt, mert a feladat jellegéhez alkalmazkodó koordinátarendszer használata természetesen a numerikus számításokban is előnyt jelent. Ebből a szempontból különösen a határvonalak lényegesek; úgy kell felvenni a koordinátarendszert, hogy annak hálónalai, illetőleg csomópontjai a határoló vonalakra essenek, vagy jól megközelítsék azt. Természetesen nem szükséges a szóbanforgó koordinátarendszer koordinátavonalaival egyenletesen behálózni a teret, hanem ebből a szempontból is célszerű alkalmazkodni a feladat jellegéhez; ahol a tér erős változása várható, vagy valamilyen szempontból lényeges a térszerkezet pontos ismerete ott sűrűbb, ahol nagyjából állandó vagy előre ismert a tér, ott ritkább beosztást készítünk. Bonyolultabb geometriájú feladatok megkövetelhetik, hogy egy problémán belül több különböző koordinátarendszert használjunk. Ez esetben azonban a koordinátarendszerek találkozásánál a differenciaegyenletek alakja eltér a koordinátarendszereken belüli alakjától.

Fontos kérdés a rácshálótávolságok helyes megválasztása. Egyrészt a pontosság növeléséhez minél sűrűbb hálóra van szükség, mert a differenciálhányadosoknak a differenciahányadosokkal való helyettesítésekor elkövetett hiba a rácstávolsággal csökken. Így tehát a megoldás kívánt pontossága adja meg a választható legnagyobb hálótávolságot. A diszkretizációs hiba rácstávolságtól való függése a vizsgált esetben jó közelítéssel meg is adható /lásd később/, úgyhogy ennek segítségével kiszámíthatjuk a rácstávolságok felső korlátját. Másrészt a pontok sűrítése növeli azok számát, ami nemcsak a számítási idő nagymértékű megnövekedését jelenti,

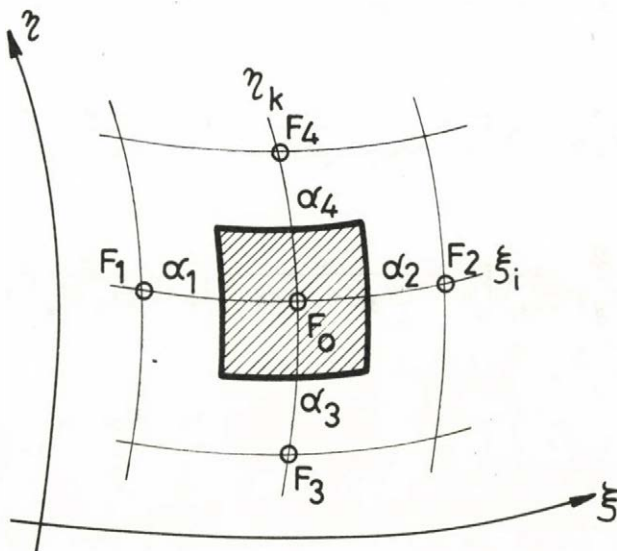


hanem számítógépi számításnál a kerekítési hibák halmozódása miatt még rontja is az eredmény pontosságát.

Általában tehát e két szempontra való tekintettel gondos mérlegelés tárgyát kell hogy képezze a hálórendszer felvétele. A jól felvett hálórendszer pontos megoldást szolgáltat, a pontok száma mégis ésszerű korlátok között van. Ennek megszerkesztéséhez a fenti határok kiszámításán és korlátok betartásán kívül ismerni kell az alkalmazott számítási eljárás tulajdonságait, az igénybevett számítógép bizonyos jellemzőit, sőt a probléma megoldásáról is kvalitatív képpel kell rendelkezünk.

## 2. Differenciaegyenletek felírása

Tételezzük fel, hogy elkészítettük az előzőekben leírt szempontok figyelembevételével a tartomány koordinátavonalakból álló felosztását. Általános koordinátarendszert figyelembevéve a vizsgált 0 pont környezetét a 2. ábrán láthatjuk.



2. ábra

Az 0 pont általános koordinátái  $\xi_i ; \eta_k$  a függvény értéke itt  $F_0$ . A koordináták megváltozását  $\alpha$ -val jelöltük, tehát a környező négy pont koordinátái:

$$F_1 (\xi_i - \alpha_1 ; \eta_k)$$

$$F_2 (\xi_i + \alpha_2 ; \eta_k)$$

$$F_3 (\xi_i ; \eta_k - \alpha_3)$$

$$F_4 (\xi_i ; \eta_k + \alpha_4)$$

Ha felírjuk az  $F$  függvény Taylor sorát a 0 pontban, ebből a 0 pontbeli differenciálhányadosokat kifejezhetjük a 0 pont környezetében felvett függvényértékek  $F_1, F_2, F_3, F_4$  segítségével [3]. A Taylor sor első három tagjának felhasználásával:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)} F_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)} F_1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} F_0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4(\alpha_3 + \alpha_4)} F_4 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4)} F_3 - \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{\alpha_3 \alpha_4} F_0$$

/32/

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \frac{2}{\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)} F_2 + \frac{2}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)} F_1 - \frac{2}{\alpha_1 \alpha_2} F_0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{2}{\alpha_4(\alpha_3 + \alpha_4)} F_4 + \frac{2}{\alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4)} F_3 - \frac{2}{\alpha_3 \alpha_4} F_0$$

Tekintsük továbbá a nagyhőmérsékletű elektromágneses teret állandó permeabilitás esetén leíró /13/ és /26/ differenciálegyenleteket. Ezek a Laplace operátort és a változó első deriváltjait tartalmazzák. Mivel a Laplace operátor is minden koordinátarendszerben a függvény első és második deriváltjait, valamint a változó meghatározott függvényeit tartalmazza, a /32/ összefüggések segítségével megszerkeszthetjük a differenciálegyenletnek megfelelő differenciaegyenletet. Az 0 pontra vonatkozó differenciaegyenletet úgy kapjuk, hogy a differenciáhányadosok helyébe a /32/ differenciahányadosokat írjuk, a  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $K$  anyagjellemzőket, valamint a  $q$ ,  $J$  függvényeket pedig a 0 pontban felvett értékkel vesszük számításba. Ily módon  $F_0$  és a környező négy függvényérték között algebrai összefüggést kapunk, amely az adott differenciálegyenletet közelítőleg helyettesíti.

Tekintsük például a /13/ egyenletet. Mivel a jelenlegi legmodernebb számítógépek kapacitása és gyorsasága általában a háromdimenziós tér tárgylását nem teszi lehetővé, a differenciaegyenletet is a kétdimenziós mágneses tér esetére vezetjük le. A mágneses térerősség vektora fekszik tehát az  $x$ - $y$  síkban. A rá merőleges villamos térerősség és áramsűrűség vektorának ekkor csak egy,  $z$  irányú összetevője van, és bebizonyítható [1], hogy ekkor  $\bar{A}$  vektorpotenciál is  $z$  irányú. Ez viszont azt jelenti, hogy e vektorok egyetlen skalár mennyiséggel jellemezhetők, amelynek az  $x$ - $y$  síkon való eloszlását kell meghatározni. Descartes koordinátarendszert alkalmazva az  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , koordinátaváltozások közvetlenül a hálónonalak távolságát adják meg, amit  $h_1, h_2, h_3, h_4$ -el jelölünk. A /32/ differenciahányadosokat a /13/ egyenletbe helyettesítve a következő algebrai összefüggést kapjuk:



$$\frac{2A_1}{h_1/h_1+h_2/} + \frac{2A_2}{h_2/h_1+h_2/} + \frac{2A_3}{h_3/h_3+h_4/} + \frac{2A_4}{h_4/h_3+h_4/} -$$

$$- \left( \frac{2}{h_1 h_2} + \frac{2}{h_3 h_4} \right) A_0 = j\omega \mu_0 \gamma_0 A_0 - \mu_0 J_0 \quad /33/$$

Hasonlóképpen írhatjuk át a /26/ hővezetési egyenletet is:

$$\frac{2T_1}{h_1/h_1+h_2/} + \frac{2T_2}{h_2/h_1+h_2/} + \frac{2T_3}{h_3/h_3+h_4/} + \frac{2T_4}{h_4/h_3+h_4/} -$$

$$- \left( \frac{2}{h_1 h_2} + \frac{2}{h_3 h_4} \right) T_0 + \frac{1}{K_0} \left( \frac{\partial K}{\partial T} \right)_0 \left[ \left( \frac{h_1 T_2}{h_2/h_1+h_2/} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{h_2 T_1}{h_1/h_1+h_2/} - \frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2} T_0 \right)^2 +$$

$$+ \left( \frac{h_3 T_4}{h_4/h_3+h_4/} - \frac{h_4 T_3}{h_3/h_3+h_4/} - \frac{h_3 - h_4}{h_3 h_4} T_0 \right)^2 \Big] +$$

$$+ \frac{q_0 / x_0 y_0 /}{K_0} = 0 \quad /34/$$

Más koordinátarendszerekben is teljesen hasonló módon lehet megszerkeszteni a differenciaegyenleteket. /A hengerkoordinátarendszer esetét a speciális rész tartalmazza./

Ha az inhomogenitások és a tartomány alakja lehetővé teszik, igen előnyös minden irányban egyenlő rácstávolságu hálót felvenni, mert ekkor a /33/ egyenlet a következő alakra egyszerűsödik:  $h_1=h_2=h_3=h_4=h/$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 = j\omega \mu_0 \gamma_0 h^2 A_0 - \mu_0 h^2 J_0$$

Fokozhatjuk a differenciaegyenlet pontosságát, ha a differenciahányadosok felírásánál a 0 ponttól egyre távolabb levő pontok függvényértékeit is figyelembe vesszük. Descartes koordinátarendszer és ekvidisztáns háló esetén pl. a következő sémákat írhatjuk fel [3] :

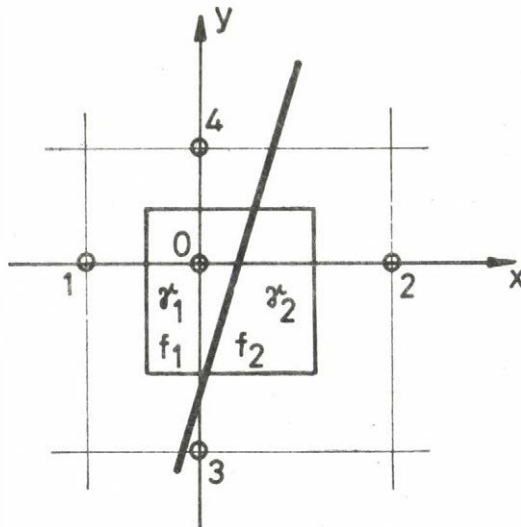
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{12h} \left( \begin{array}{ccccc} \circ & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \circ \\ & & h & & & \\ & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{12h^2} \left( \begin{array}{ccccc} \circ & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \circ \\ & & h & & & \\ & -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \end{array} \right)$$

$$\Delta u = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 4 & & & \\ & & -20 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

A Laplace operátort, vagy a /26/-beli grad kifejezést görbevonalu koordinátarendszerben felírva olyan kifejezésekhez juthatunk, amelyek a tér bizonyos pontjaiban nem értelmezhetők /pl. az  $1/r$  függvény az  $r = 0$  helyen/. Mivel ezek a kifejezések a differenciaegyenletben is szerepelni fognak, az szintén szingularitást fog mutatni az említett helyeken. E szingularitások kiküszöbölése az adott esetben rendszerint külön megfontolást igényel, és általában a differenciaegyenlet megváltoztatását jelenti. Egy példát a speciális rész mutat be hengerszimmetrikus esetre.

Mint említettük, a differenciaegyenlet a 0 pont közelében helyettesíti a differenciálegyenletet, és alkalmas térben változó vezetőképesség és hővezetés, valamint változó  $J_0$  és  $q$  figyelembevételére. Definiáljuk a vizsgált pont /0/ környezetét, mint az  $\alpha_1/2$   $\alpha_2/2$   $\alpha_3/2$   $\alpha_4/2$  "távolságokban" haladó koordinátavonalakból álló tartományt / az 1 ábrán vonalkázva/. Ekkor a differenciaegyenletben szereplő  $\gamma_0$ ,  $K_0$ ,  $J_0$  és  $q_0$  a térben folytonosan változó függvényeknek a vizsgált pontban, illetve annak környezetében felvett értékeit jelenti. A rácsháló mérete éppen akkor van helyesen megállapítva, ha e függvények változása a rajzolt területen elhanyagolható. Ez a feltétel azonban semmiképpen sem teljesül, ha a szóbanforgó függvényeknek a 0 pont környezetében ugrásszerű változása van. Ilyen esetben a differenciaegyenletbe a 0 pontban esetleg nem is értelmezhető függvényérték helyett / ha az elválasztó határ épp a 0 ponton megy át/ a függvények 0 pont környezetére vett átlagát kell helyettesíteni:



3. ábra



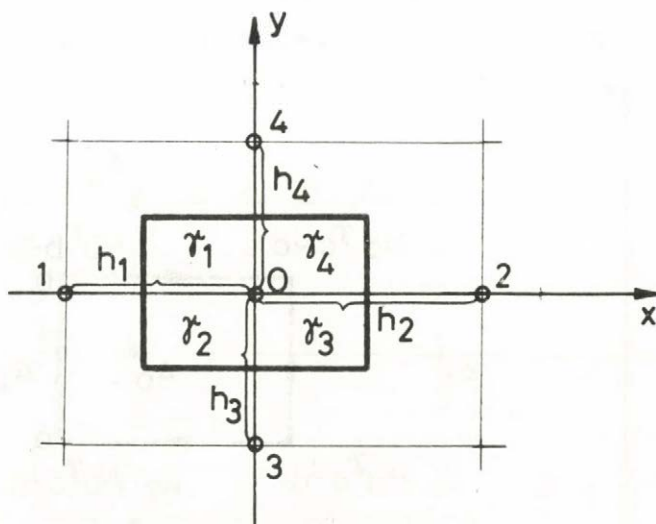
Pl. a  $\gamma$  függvényre, ha a 3. ábrán látható módon halad a határ:

$$\gamma_0 = \frac{1}{f} \int_f \gamma(xy) df = \frac{\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2}{f_1 + f_2} \quad /35/$$

Az eljárást célszerű alkalmazni akkor is, ha pl. a  $\gamma/xy/$  függvénynek nincs ugrásszerű változása, de valamilyen ok miatt nem célszerű vagy nem lehet a rács-távolságokat olyan kicsire választani, hogy a 0 pont környezetében  $\gamma/xy/$  már ne változzék. Ebben az esetben:

$$\gamma_0 = \frac{1}{f} \int_f \gamma/xy/ df = \frac{4}{h_1 h_3 + h_3 h_2 + h_2 h_4 + h_4 h_1} \left( \frac{h_1 h_4}{4} \gamma_1 + \frac{h_1 h_3}{4} \gamma_2 + \frac{h_3 h_2}{4} \gamma_3 + \frac{h_2 h_4}{4} \gamma_4 \right) \quad /36/$$

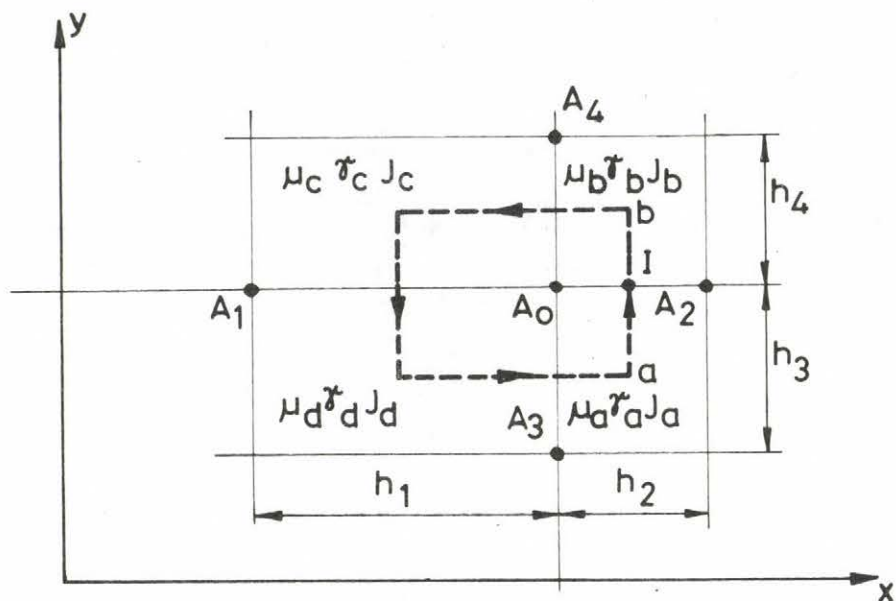
ahol  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  a 0 pont környezetében megadott négy vezetőképesség /ld. a 4. ábrát/.



4. ábra

Ha minden ponthoz az előbbi módon négy különböző értéket rendelünk, ez megfelel annak, hogy a vezetőképesség szempontjából a teret egy feleakorra rácstávolságu hálóval hálóztuk be, ami az előbbinél még akkor is pontosabb eredményt ad, ha a csomópontok száma nem is változott, mert az inhomogenitásokat jobban figyelembe vettük. A tapasztalatok azt mutatják, hogy az inhomogenitás figyelembevétele még akkor is javul, ha az állandó anyagjellemzővel bíró tartományok számát ugyan nem növeljük, de a  $\gamma_0$ ,  $K_0$ ,  $J_0$ ,  $q_0$  számítására a /36/-nak megfelelő képleteket alkalmazzuk. Ekkor azonban az előbbi függvények értékeit nem a 0 pont környezetében hanem a hálónalokból alkotott tartományokban kell megadni.

Külön kell foglalkoznunk a változó permeabilitás esetével. Az ekkor érvényes /8/ differenciálegyenlet bal oldalának átírása a fenti /32/ differenciahányadosok segítségével most nagyon körülményes és áttekinthetetlen, ezért a /16/ integrális alakot használjuk fel [5]. Állandó permeabilitású tartománynak most célszerű nem a 0 pont környezetét, hanem a rácsvonalak határolta tartományokat venni. Az ezekhez tartozó anyagjellemzőket, valamint a 0 pontot körülvevő zárt vonalat /ℓ/ amire a /16/-ban szereplő integrált számítjuk, a 4.a. ábra tartalmazza.



4.a. ábra

Mivel jelen esetben  $\bar{A} = A\bar{k}$

$$\text{rot } \bar{A} = \frac{\partial A}{\partial y} \bar{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \bar{j} .$$

Az a és b pontok közti integrálásnál csak  $\frac{\partial A}{\partial x}$  szerepel, amiről feltesszük, hogy e kis szakasz mentén nem változik, és az I pontban számított értékével vehető figyelembe.

Igy e szakaszra vonatkozó integrál:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{\mu} \text{rot } \bar{A} d\bar{\ell} &= \int_a^b -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} d\ell = - \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_I \int_a^b \frac{dy}{\mu} = \\ &= \frac{A_0 - A_2}{h_2} \left( \frac{h_3}{2\mu_a} + \frac{h_4}{2\mu_b} \right) \end{aligned}$$

Hasonlóképpen végezhető el az integrálás az ab, bc és a cd szakaszokra. A /16/-ban szereplő integrált  $\ell$  mentén ezekkel felírva, a jobb oldalon szereplő  $\gamma_0^{-t}$  pedig a már részletezett módon figyelembevételével, végül a következő differenciaegyenlethez jutunk:

$$D_1 A_1 + D_2 A_2 + D_3 A_3 - D_0 A_0 = j\omega G_0 A_0 - I_0 \quad /37/$$

ahol

$$D_1 = \frac{1}{2h_1} \left( \frac{h_4}{\mu_c} + \frac{h_3}{\mu_d} \right)$$

$$D_2 = \frac{1}{2h_2} \left( \frac{h_4}{\mu_b} + \frac{h_3}{\mu_a} \right)$$

$$D_3 = \frac{1}{2h_3} \left( \frac{h_1}{\mu_d} + \frac{h_2}{\mu_a} \right)$$

$$D_4 = \frac{1}{2h_4} \left( \frac{h_2}{\mu_b} + \frac{h_1}{\mu_c} \right)$$



$$D_0 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$$

$$G_0 = \frac{h_2 h_3 \gamma_a + h_2 h_4 \gamma_b + h_1 h_4 \gamma_c + h_1 h_3 \gamma_d}{4}$$

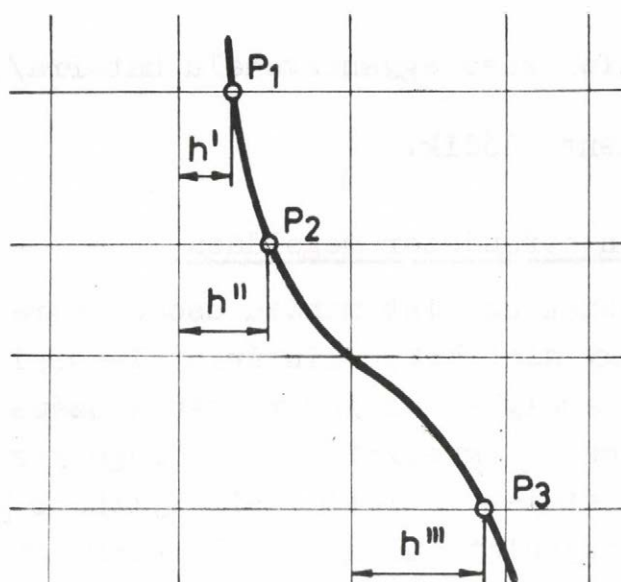
$$I_0 = \frac{h_2 h_3 J_{oa} + h_2 h_4 J_{ob} + h_1 h_4 J_{oc} + h_1 h_3 J_{od}}{4}$$

A differenciaegyenlet másfajta ortogonális koordináta-rendszerben is ugyanilyen felépítésű csak a  $D_i$  együtthatók mások; levezetése ugyancsak az integrális alakból célszerű.

### 3. Határfeltételek érvényesítése

Az eddig tárgyalt differenciaegyenletek a vizsgált tér belső pontjaira vonatkoznak, és összefüggéseket állapítanak meg egy belső pont és a környező pontok függvényértékei között. A vizsgált tér határán azonban legalább az egyik irányban nem találunk "szomszédos" pontot itt tehát az előbbiektől eltérő egyenleteket kell felírni, amelyek a határoló felületek vagy vonalak fizikai viszonyait is tükrözik. Ezeknek az ún. peremfeltételeknek a figyelembevétele annál jobb, minél több rácspont van a peremen, ami az eddigi felépítésű hálóknál azt jelenti, hogy minél finomabb a háló a perem közelében. Másrészt azonban az inhomogenitások és a kívánt pontosság nem feltétlenül teszik indokolttá a finomabb háló használatát. Ezért itt követhetjük azt az utat, hogy megtartjuk az eredeti rácshálót és a határon kiegészítő pontokat veszünk fel /az 5. ábrán  $P_1, P_2, P_3$ /.

A határ melletti pontokban való számolásakor a /33/, /34/, /37/ képletekben a módosított rácstávolságokat / $h', h'', h'''$ / vesszük figyelembe, a határfeltételeket pedig az utóbb felvett pontokban / $P_1, P_2, P_3$ / érvényesítjük.

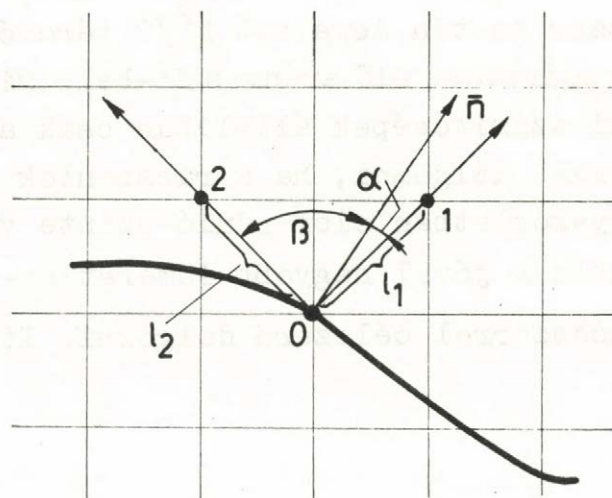


5. ábra

Ahogy ezt az 1.b/és 2.b/ fejezetekben láttuk, a határ-feltételek matematikai szempontból algebrai egyenletek amelyek a térjellemezőt /A,T/, illetve a peremgörbe normálisának irányában vett deriváltját tartalmazzák.

- Az első esetben igen egyszerű a helyzet, mert a megadott peremérték ismert mennyiségként fog szerepelni az egyenletekben, míg a második esetben ismeretlenként, de kapcsolata a többi /belső/ pont függvényértékeivel megállapítható, ha a peremfeltételt leíró egyenletben a derivált numerikus kifejezését írjuk. Ez görbült határ esetén a 6. ábra jelöléseivel:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{\sin / \alpha + \beta /} \left[ \frac{T_1 - T_0}{l_1} \sin \beta + \frac{T_2 - T_0}{l_2} \sin \alpha \right] \quad /38/$$



6. ábra



$\frac{\partial T}{\partial n}$  kifejezése egyenesvonalu határra/38/ speciális esetenként adódik.

#### 4. Az egyenletrendszer megoldása

Az előbbiek szerint minden csomópontra felírva a differenciaegyenleteket, lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk, amelyben az ismeretlenek száma / a csomópontok száma/ és az egyenletek száma megegyezik. Igen általános feltételek mellett bebizonyítható [3], hogy az így kapott egyenletrendszernek létezik egyetlen megoldása, és ez a differenciálegyenlet megoldásához tart, ha a rácstávolságot minden határon túl csökkentjük. Az algebrai egyenletrendszer megoldása azonban számítás-technikailag nehézséget jelent. Ugyanis a pontosság fokozása érdekében a rácstávolságokat célszerű minél kisebbre választani ami a rácspontok számának növekedését jelenti. De ezt követeli az inhomogenitások megfelelő figyelembevétele, és a határgörbe jó megközelítése is. Így végeredményben az ismeretlenek száma nagyon megszorodik, nemritkán eléri az ezres nagyságrendet. Ilyen sokismeretlenes egyenletrendszerek direkt megoldása még nagysebességű számítógépeken is nehézségekbe ütközik.

A Cramer szabállyal vagy a Gauss-féle eliminációs módszerrel történő megoldásoknál ugyanis igen sok adatot kell tárolni a számítás során későbbi felhasználásra, és a műveletek száma is óriási. N ismeretlenes egyenletrendszer esetén legalább  $N^2/2$  tárolóhelyre van szükség és a számítási idő arányos  $N^3$ -bel. Mindezek miatt a jelenlegi számítógépek általában csak akkor tudnak direkt módszerekkel dolgozni, ha a rácspontok száma kisebb százánál. A gyakorlatban előforduló szinte valamennyi esetben azonban a jóval nagyobb ismeretlen-szám miatt iterációs módszerrel célszerű dolgozni. Itt a szükséges



memóriakapacitás a rácspontok számával lineárisan, a számítási idő pedig négyzetesen arányos, ami az előbbinél lényegesen kedvezőbb értéket ad, és lehetővé teszi bonyolult nemlineáris /bár többnyire csak kétdimenziós/ problémák megoldását a modern számítógépeken.

Az iterációs módszereknél a számítani kívánt térjellemzőre /A, vagy T/ először kiinduló értékeket veszünk fel. /Bebizonyítható, hogy ez tetszés szerint történhet, de sokkal gyorsabban elérjük a kívánt eredményt, ha a megoldáshoz közelebb eső értékeket sikerül felvenni./ Ezután a kiinduló értékeket a differenciaegyenletekbe helyettesítve kiszámítjuk az első közelítést, majd ebből a másodikat és így tovább. Aszerint, hogy egy számítási lépésben csak egy pontban végezzük el a koorekciót, vagy a pontok egy csoportjában, pont vagy csoport-iterációt különböztetünk meg.

a./ Pont iteráció

Rendezzük át a /33/, /34/, /37/ differenciaegyenleteket úgy, hogy a bal oldalon az ismeretlen /A, T/ lineáris kifejezése álljon:

$$\beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3 + \beta_4 U_4 - \beta_0 U_0 = M \quad /39/$$

Itt  $\beta_i$  a /33/ és /37/ differenciaegyenletben  $A_i$  együtthatója, a /34/ hővezetési differenciaegyenletben pedig az elsőfoku  $T_i$ -k együtthatója, M a /33/, /37/ egyenletek  $A_0$ -t nem tartalmazó tagja, illetve a /34/ hővezetési differenciaegyenlet  $\frac{\partial K}{\partial T}$ -t és másodfoku  $T_i$ -t, valamint  $q_0$ -t tartalmazó tagja.

/39/-ből  $U_0$ -t kifejezve:

$$U_0 = \frac{\beta_1}{\beta_0} U_1 + \frac{\beta_2}{\beta_0} U_2 + \frac{\beta_3}{\beta_0} U_3 + \frac{\beta_4}{\beta_0} U_4 - \frac{M}{\beta_0} \quad /40/$$

A legegyszerűbb pontiterációs módszernél a Jakobi módszernél  $U_0$  első közelítését úgy kapjuk, hogy a /40/ egyenlet jobb oldalába a felvett kiindulóértékeket behelyettesítjük. A pontokon valamilyen rögzített rendszer szerint végighaladva ezt a számítást pontról pontra elvégezzük, és ennek eredményeit ismét behelyettesítjük /40/ jobb oldalába; így kapjuk  $U_0$  második közelítését. Általában a  $k$ -adik iterációt  $U_0^{/k/}$ -val jelölve:

$$U_0^{/k/} = \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i}{\beta_0} U_i^{/k-1/} - \frac{M}{\beta_0} \quad /41/$$

Ha, mint a /37/ egyenletnél, az együtthatók maguk is függenek a térjellelmezőtől, egy újabb iteráció számítása előtt kiszámítjuk a megváltozott térjellelmezőnek megfelelő új együtthatókat, és az iterációs egyenlet a következő alakú lesz:

$$U_0^{/k/} = \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i^{/k-1/}}{\beta_0^{/k-1/}} U_i^{/k-1/} - \frac{M^{/k-1/}}{\beta_0^{/k-1/}} \quad /42/$$

A Jakobi módszernél valamivel hatásosabb - kb. feleannyi iteráció szükséges ugyanolyan pontosság eléréséhez - az ugynevezett Gauss-Seidel módszer, amelynél a  $k$ -adik iteráció számításakor felhasználjuk az ezen iterációban már korrigált értékeket. Ha a számítást soronként balról-jobbra haladva végezzük:

$$U_0^{/k/} = \frac{\beta_1^{/k-1/}}{\beta_0^{/k-1/}} U_1^{/k/} + \frac{\beta_2^{/k-1/}}{\beta_0^{/k-1/}} U_2^{/k-1/} + \frac{\beta_3^{/k-1/}}{\beta_0^{/k-1/}} U_3^{/k-1/} +$$

$$+ \frac{\beta_4^{/k-1/}}{\beta_0^{/k-1/}} U_4^{/k/} - \frac{M^{/k-1/}}{\beta_0^{/k-1/}}$$

A számítás iránya tetszés szerint választható meg, anélkül, hogy ez az eredményt befolyásolná. Erősen eltérő tulajdonságu  $\mu$  résztartományokat tartalmazó tereken végzett numerikus számítások mégis azt mutatták, hogy a módszer konvergenciája akkor a legjobb, ha egymás után váltakozó irányban végezzük a fent leírt korrekciót. Ha pedig a program egyszerűsége miatt az egyirányu számolás mellett döntünk, akkor ennek célszerű a permeabilitásváltozására merőleges irányt választani.

#### b./ Csoport iteráció

A pontiterációs módszereknél mindig egy-egy pontban  $U$ -t, a körülötte levő pontokhoz tartozó, már előzőleg kiszámolt értékek felhasználásával. A csoportiterációs módszereknél egy előre kijelölt ponthalmazon hajtjuk végre egyidejűleg a korrekciót.

Legyen például ez a halmaz az egy koordinátavonalon fekvő pontok összessége; tekintsük ismeretlennek az ezen pontokhoz tartozó  $U$  értékeket. Ekkor a szóbanforgó pontokra /39/-ből a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\beta_1 U_1^{/k/} + \beta_2 U_2^{/k/} - \beta_0 U_0^{/k/} = M - \beta_3 U_3^{/k-1/} - \beta_4 U_4^{/k-1/}$$



Itt  $U_1, U_2, U_0$  ismeretlenek,  $U_3, U_4$  az előző iterációból vett, ismert mennyiségek. A vonalon levő összes pontra felírva ezeket az egyenleteket, olyan egyenletrendszerhez jutunk, amelyben minden egyenlet legfeljebb három ismeretlent tartalmaz és a következő formájú:

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2$$

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$a_m x_{m-1} + b_m x_m = d_m$$

azaz együtthatómátrixa tridiagonális. Ennek szimultán megoldása a következő algoritmussal könnyen elvégezhető:

$$g_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad g_i = \frac{c_i}{b_i - a_i g_{i-1}} \quad i = 2, 3 \dots m$$

$$p_1 = \frac{d_1}{b_1} \quad p_i = \frac{d_i - a_i p_{i-1}}{b_i - a_i g_{i-1}} \quad i = 2, 3 \dots m$$

$$x_m = p_m \quad x_i = p_i - g_i x_{i+1} \quad i = m-1, m-2, \dots, 1$$

Miután így kiszámítottuk az egy koordinátavonalon levő pontokhoz tartozó  $U$  értékeket az előző és a következő vonal meglévő  $U$  értékeiből a következő vonal számítására térhetünk át, és így tovább. Természetesen mint a pontiterációs Gauss-Seidel módszernél, itt is felhasználhatjuk az előző vonal folyamatban lévő iterációban már korrigált értékeit.

Elméleti megfontolások [4] azt mutatják, hogy a bemutatott "vonalliteráció" nagyobb konvergenciasebességgel rendelkezik, mint a ponliterációs módszerek. Számító-

gépen való alkalmazásakor azonban figyelembe kell venni, hogy a számítási idő a konvergencia gyorsaságán kívül az egy iterációhoz szükséges számítási műveletek számától is függ, ami az egyenletmegoldás miatt a vonaliterációnál nagyobb. Ezért nem minden esetben előnyös a vonaliteráció használata. Legkülönbözőbb problémák numerikus vizsgálata azt mutatta, hogy e módszer akkor célszerű előnyben részesíteni, ha a rácspontok száma nagy /ezer körüli/, vagy a ráctávolságok igen különbözőek.

## 5. A megoldás konvergenciája

### a./ A konvergencia feltétele

A differenciaegyenletekből álló lineáris egyenletrendszert a

$$\underline{\beta} \underline{U} = \underline{M}$$

mátrixalakba foglalhatjuk össze, amelynek bármelyik sora, mint láttuk, a következő alakú:

$$\beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3 + \beta_4 U_4 - \beta_0 U_0 = M$$

az egyenletrendszernek létezik egyértelmű megoldása, ha teljesülnek a következő feltételek: [4]

1./ a  $\underline{\beta}$  együtthatómátrix irreducibilis

$$2./ |\beta_0| \geq |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| + |\beta_4|$$

Az első feltétel azt jelenti, hogy nem lehet kiválasztani  $N_1$  ismeretlent  $/N_1 < N/$  úgy, hogy azokat  $N_1$  számú  $M$  érték teljesen egyértelműen meghatározza. Ez nyilvánvalóan teljesül, mert az  $M$  oszlopvektor a peremfeltételeket és a gerjesztéseket tartalmazza, és a helyesen megfogalmazott térszámítási feladatnál bármely pont térjellemezője függ az összes peremfeltételtől és gerjesztéstől. Az együtthatókra vonatkozó

második feltétel teljesüléséről meggyőződhetünk, ha a /32/ /34/ /37/ egyenletek együtthatóit összehasonlítjuk. Végeredményben tehát megállapítható, hogy a /33/ /34/ /37/ differenciaegyenletekből álló egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.

Az iterációs folyamat konvergenciavizsgálatát Young alapján [6] csak a lineáris, stacionárius iteráció esetére tudjuk elvégezni, amikor is a fizikai paraméterek az iteráció folyamán nem változnak, vagyis az iterációs egyenletek együtthatói állandók. Mégis a levont következtetések támpontot adnak a változó együtthatók esetére, illetve a kidolgozott konvergenciagyorsító módszerek jó eredményre vezetnek.

A fenti lineáris stacionárius iteráció esetében az iterációs folyamatot a következő mátrixegyenlet írja le:

$$\underline{u}^{/k/} = \underline{G}\underline{u}^{/k-1/} + \underline{v} \quad /44/$$

Ahol  $\underline{G}$  az egyes iterációs módszereknek megfelelő iterációs mátrix. Az iteráció konvergál, ha bármely kiinduló vektor  $\underline{u}^0$  mellett az

$$\underline{e}^{/k/} = \underline{u}^{/k/} - \underline{u}^{/k-1/} \quad /45/$$

különbségvektor a zérushoz tart, miközben  $k \rightarrow \infty$ . A /45/ egyenletet /44/-be helyettesítve

$$\underline{e}^{/k/} = \underline{G}\underline{e}^{/k-1/} \quad /46/$$

vagyis az iterációs folyamat lefolyására  $\underline{v}$  nincs semmiféle hatással.

Állítsuk elő az  $\underline{e}^{/0/} = \underline{u}^{/0/}$  kiinduló vektort a  $\underline{G}$  mátrix sajátvektorainak lineáris kombinációjaként.



$$\underline{e}^{/0/} = \sum_{i=1}^m a_i \underline{z}_i \quad /47/$$

ahol  $\underline{z}_i$  a  $\underline{G}$  mátrix sajátvektorait,  $\lambda_i$  a hozzá tartozó sajátértékeket jelöli:

$$\underline{G}\underline{z}_i = \lambda_i \underline{z}_i \quad /48/$$

Ha most az  $\underline{e}^{/0/}$  kiindulóvektort  $k$ -szor megszorozzuk a  $\underline{G}$  mátrix-szal, /46/ szerint  $\underline{e}^{/k/}$ -hoz jutunk:

$$\underline{e}^{/k/} = \underline{G}^k \underline{e}^{/0/} = \underline{G}^k \sum_{i=1}^m a_i \underline{z}_i = \sum_{i=1}^m a_i \lambda_i^k \underline{z}_i \quad /49/$$

A /49/ egyenletből levonhatjuk a következtetést, hogy a stacionárius lineáris iteráció akkor konvergál, ha a  $\underline{G}$  iterációs mátrix minden sajátértéke egynél kisebb abszolút értékű.  $\underline{G}$  legnagyobb sajátértékét az iterációs mátrix spektrális sugarának nevezik:

$$\lambda / \underline{G} / = \max \lambda_i$$

amivel a konvergencia feltétele:

$$|\lambda / \underline{G} /| < 1 \quad /50/$$

$\lambda / \underline{G} /$  pontos kiszámítása igen nehéz feladat. Azonban bebizonyítható [4], hogy a /33/ /34/ egyenleteknek megfelelő differenciaegyenletrendszer megoldása lineáris esetben a Jakobi és a Gauss-Seidel módszerrel olyan iterációs mátrixhoz vezet, amelynek spektrális rádiuszára  $|\lambda / \underline{G} /| < 1$ , tehát az iteráció konvergál.

A spektrális rádiusz ismeretére mindezek ellenére szükség van, mert  $\lambda$  egyúttal azt is megmutatja, hogy milyen gyors a konvergencia, milyen gyorsan csökkennek a hibák. Ha ugyanis /49/-ben a legnagyobb sajátérték dominál, írhatjuk, hogy

$$\frac{\| e^{/k/} \|}{\| e^{/k-1/} \|} = \frac{\| u^{/k/} - u^{/k-1/} \|}{\| u^{/k-1/} - u^{/k-2/} \|} \approx \underline{\underline{\kappa}} / \underline{\underline{G}} / \quad /51/$$

ahol bármilyen Euklédés-i normát vehetünk.

Az /51/ egyenletből látható, hogy annál gyorsabb a konvergencia minél kisebb  $\underline{\underline{\kappa}} / \underline{\underline{G}} /$ .

Másrészt a spektrális rádiusz /továbbiakban  $\underline{\underline{\kappa}} /$  meghatározására elméleti uton a számítás előtt, csak igen speciális körülmények között van lehetőség. Nevezetesen Laplace egyenlet Dirichlet feladatának Gauss-Seidel módszerrel való megoldása esetén, amikor a tartomány téglalap alakú [6]:

$$\underline{\underline{\kappa}} = \frac{1}{2} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{R} + \cos \frac{\pi}{S} \right) \right]^2 \quad /52/$$

/R és S a csomópontok száma a két irányban/. Az /51/ összefüggés azonban módot ad  $\underline{\underline{\kappa}}$  kísérleti meghatározására. E szerint nem kell mást tenni, mint az iterációs folyamat elején /a tapasztalat szerint néhányszor 10 iterációban/ képezni az  $\| u^{/k/} - u^{/k-1/} \|$  mennyiségek két egymásutáni iterációban vett hányadosát. E hányados határértéke adja  $\underline{\underline{\kappa}}$  közelítő értékét /az a feltételezésünk, hogy  $\underline{\underline{\kappa}} / \underline{\underline{G}} /$  dominál/. A numerikusan megállapított  $\underline{\underline{\kappa}}$  -ből bonyolultabb esetben is megítélhető, hogy konvergál-e az eljárás és milyen gyorsan, illetve erre támaszkodva tehetünk intézkedéseket az eljárás stabilizálására, illetve a konvergenciasebesség növelésére.

#### b./ A konvergencia gyorsítása

Az /52/ képletre tekintve azt látjuk, hogy a csomópontok számának növelésével  $\underline{\underline{\kappa}}$  erősen tart az egységhez, vagyis a konvergencia egyre lassabb lesz. De erre utal általánosabb esetekben is a numerikus tapasztalat, mely

szerint az itt előforduló problémáknál az 1%-ra pontos megoldás eléréséhez kb. a pontok számával megegyező számú iterációra van szükség. Ez pedig a néhány ezer pontot tartalmazó tereknél a modern számítógépeket is figyelembevéve már órás nagyságrendű számítási időt igényel a fenti iterációs eljárásokkal. Ezért rendszerint szükség van a konvergencia gyorsítására.

A konvergenciasebesség hatékonyan növelhető a szukceszsziv hiperrelaxáció módszerével [6]. E módszer alkalmazásakor - úgy mint a Gauss-Seidel módszernél - először meghatározzuk  $u^{/k/}$  értékét, de a további számítás számára nem ezt tartjuk meg, hanem  $u$ -nak egy relaxált értékét:

$$u_{\text{relaxált}}^{/k/} = u^{/k-1/} + \omega [u^{/k/} - u^{/k-1/}] \quad /53/$$

Az  $\omega$  relaxációs tényező helyes megválasztása a konvergenciagyorsítás központi problémája.

Varga [7] bebizonyította, hogy az /53/ szerinti iteráció csak akkor konvergál, ha  $0 \leq \omega \leq 2$ , mert ekkor lesz a szukcessziv hiperrelaxáció spektrális rádiusza  $/\kappa_{\omega}/$  egynél kisebb.

A következőkben lényeges szerepet játszik a  $\underline{\beta} \underline{U} = \underline{M}$  differenciaegyenletrendszer  $\underline{\beta}$  mátrixának egy bizonyos tulajdonsága, amit az irodalom [6], [7]. "A tulajdonság" néven jelöl /Property A/. Ez azt jelenti, hogy a  $\underline{\beta}$  együtthatómátrix az oszlopok és a sorok megfelelő cseréjével a következő alakra hozható:



$$\begin{bmatrix}
 D_1 & S_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 Z_1 & D_2 & S_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & Z_2 & D_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & Z_{p-2} & D_{p-1} & S_{p-1} \\
 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & Z_{p-1} & D_p
 \end{bmatrix} \quad /54/$$

ahol  $\underline{D}_i$  diagonálmátrix /rendje:  $r_i$ /,  $\underline{S}_i$  és  $\underline{Z}_i$  téglalap-  
mátrixok, amelyek mérete  $r_i \times r_{i+1}$ , illetve  $r_{i+1} \times r_i$ .

Ha  $\underline{\beta}$  -ra teljesül az /A/ feltétel,  $\omega$ ,  $\kappa_\omega$ , valamint a  
Jakobi módszer spektrális rádiusza ( $\kappa_3$ ) között a követ-  
kező összefüggés áll fenn:

$$(\lambda_\omega + \omega - 1)^2 = \kappa_\omega \omega^2 \kappa_3^2 \quad /55/$$

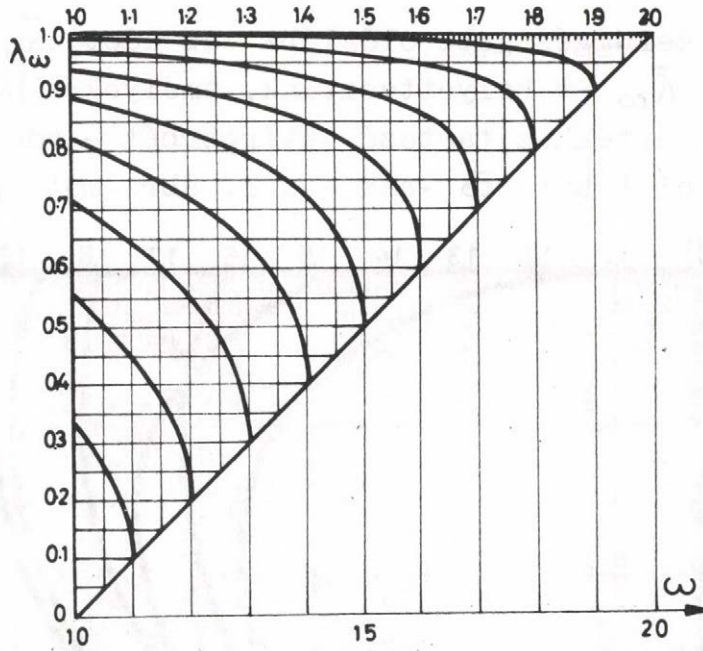
Ebből meghatározható a konvergenciagyorsító tényező  
optimális értéke, amely mellett  $\kappa_\omega$  a legkisebb. A  
számításokat elvégezve kapjuk, hogy

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \kappa_3^2}} \quad /56/$$

és

$$\min(\kappa_\omega) = \omega_{opt} - 1$$

A  $\kappa_\omega$  spektrális sugár  $\omega$ -tól való függését különböző  
 $\kappa_3^2$  mellett a 7. ábra mutatja / $\omega = 1$  esetén /53/  
szerint a Gauss-Seidel iterációt kapjuk, amelyre /55/-  
ből  $\kappa_{\omega=1} = \kappa_{Gs} = \kappa_3^2$  /



7. ábra

Ha  $\omega_{opt} \leq \omega \leq 2$ ; akkor  $\lambda_\omega = \omega - 1$  és  $\omega_{opt}$  közelében  $\lambda_\omega$  gyorsabban nő  $\omega_{opt}$  alatt, mint fölötté. Ezért  $\omega_{opt}$  közelítő meghatározásánál  $\omega_{opt}$  alulbecsülése jobban csökkenti a konvergenciasebessége mint  $\omega_{opt}$  felülbecsülése.

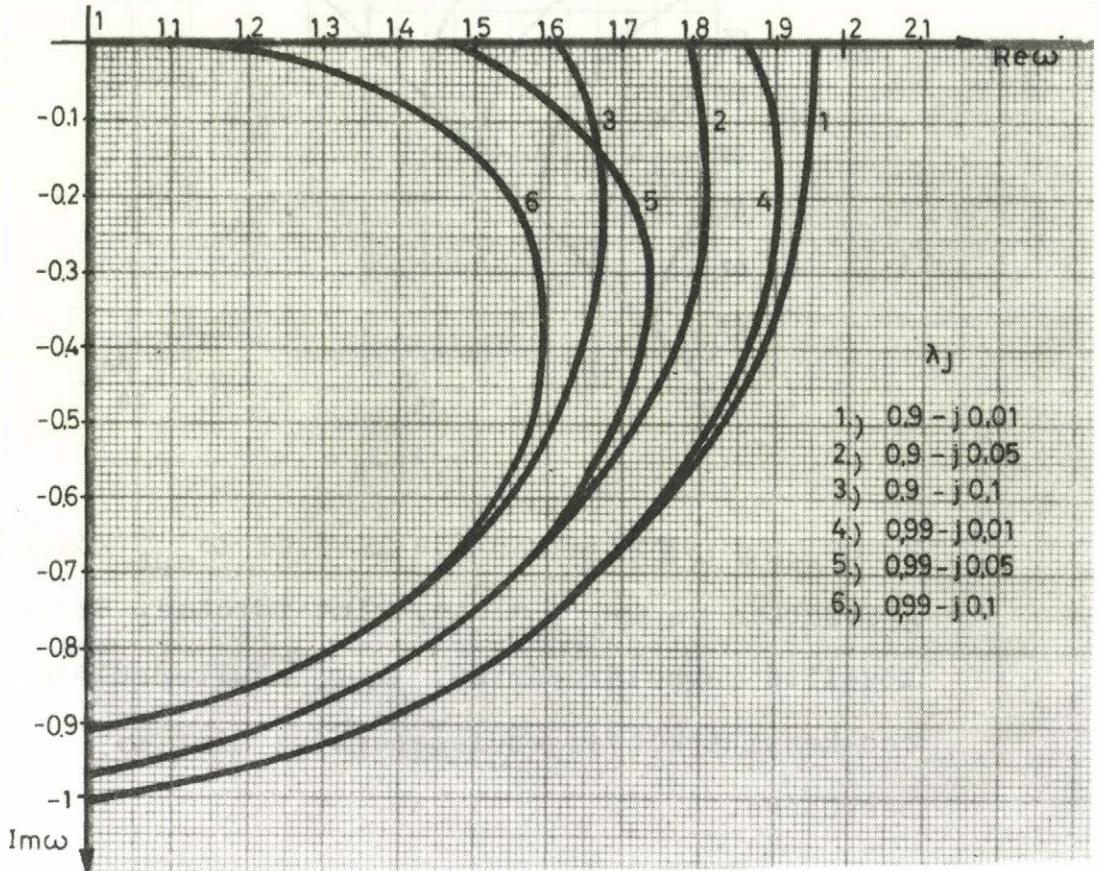
Az előbbi megfontolások valós relaxációs paraméterre vonatkoztak. Kézenfekvőnek látszik, hogy a /33/, /37/ komplex változóju differenciáegyenletek esetében a konvergenciagyorsító tényező is komplex legyen. A  $0 < |\bar{\omega}| < 2$  feltétel azonban ez esetben még nem biztosítja a konvergenciát. Adott  $\bar{\kappa}_3$  mellett /ami független  $\bar{\omega}$ -tól/ ugyanis csak olyan  $\bar{\omega}$  értékeket engedhetünk meg, amelyekkel az /55/-ből kiszámítható  $\bar{\kappa}_\omega$ -ra  $|\bar{\kappa}_\omega| < 1$  fennáll.

A megengedhető  $\omega$ -k tartományának határait tehát úgy kapjuk, hogy az /55/ képletből nyert

$$\bar{\omega} = \frac{1 - \bar{\kappa}_\omega}{1 - \bar{\kappa}_3 \sqrt{\bar{\kappa}_\omega}} \quad /57/$$



összefüggés jobb oldalába az adott  $\bar{\kappa}_j$  -t és különböző  $\bar{\kappa}_\omega$  -t helyettesítünk, amelyekre  $|\bar{\kappa}_\omega| = 1$ . Néhány  $\bar{\kappa}_j$  értékhez tartozó határgörbét - amelyen belül kell lenni tehát  $\bar{\omega}$  -nak - a 8. ébra mutat:



8. ábra

A megfelelően hatásos konvergenciagyorsító eljárás alkalmazásának elengedhetetlen feltétele, hogy a Jakobi iterációs mátrix spektrális sugarát  $|\kappa_j|$  ismerjük. Ez határozza meg  $\omega_{opt}$  értékét az /56/ képlet szerint, de ettől függ komplex  $\omega$  esetén is, hogy milyen  $\bar{\omega}$ -ig konvergál az eljárás.

$\kappa_j$  pontos meghatározása azonban a legtöbb gyakorlati térszámítás esetében nem sikerül, közelítő kiszámítása pedig sok tapasztalatot, körültekintést és intuiciót igényel, és leginkább a feladat jellegétől függ.



Ha például nem kritikus a számítás időszükséglete, alkalmazni lehet az /52/ képletet egy a tartományt befoglaló téglalagra, majd az így adódó  $\lambda$ -ból számítjuk  $\omega$ -t az /56/ képlet szerint.  $\omega$  így nagyobb lesz a valószínűleg optimális értéknél, aminek eredményeként egy gyorsított, bár nem optimálisan gyorsított iterációs folyamatot kapunk.

Ha a feladatot sokszor kell megoldani változó peremfeltételekkel, ésszerű lehet az is, hogy néhány próba-futást végzünk különböző  $\omega$  értékkel, és figyeljük az adott pontosság eléréséhez szükséges iterációk számát.  $\omega$  optimális értékét ott kapjuk, ahol ez a szám minimumot mutat. Más kiinduló feltételek esetén természetesen  $\omega_{opt}$  értéke nem változik, a geometria kismértékű változása is csak kevéssel befolyásolja, a nemlineárisítások változására azonban érzékenyen reagál.

Meghatározhatjuk  $\lambda_j$ -t közelítőleg az iterációs folyamat közben is az /51/ képlet szerint, majd ebből  $\omega$ -t /56/ szerint. Így végeredményben egy változó  $\omega$ -ju iterációs folyamathoz jutunk, amit ha megfelelően irányítunk,  $\omega$  értéke  $\omega_{opt}$ -hoz konvergál. A módszer részleteivel a speciális részben foglalkozunk.

Elméleti vizsgálatok [9] és numerikus tapasztalatok igazolják, hogy a fenti konvergenciagyorsítás akkor is alkalmazható, ha az  $\omega_{opt}$  kiszámítása előtt tett feltevések nem teljesülnek, így például nemlineáris esetekben is. Ekkor - ha egyáltalán konvergál az eljárás - az iterációs folyamat gyorsul, ha nem is abban a mértékben, mint ahogy az elméletből az várható volna. Ez azonban komoly veszteséget jelent, ha a Gauss-Seidel iteráció spektriális sugara nagy  $\lambda_{GS} > 0,9$ . mert az

ábrából láthatóan a szukcesszív hiperrelaxáció spektrális rádiust csökkentő hatása  $\kappa_{GS}$  növekedésével erősen csökken / $\kappa_{GS} = 0,8$ -nál  $\kappa_{\omega_{opt}} = 0,38$ , míg  $\kappa_{GS} = 0,98$ -nál  $\kappa_{\omega_{opt}} = 0,76$ /

Ilyen esetben hatékonyan lehet alkalmazni a fizikai kritériumok alapján végzett konvergenciagyorsítást.

A gerjesztési törvény szerint bármely zárt görbére

$$\oint_L \bar{H} \, d\bar{l} = \int_F \bar{J} d\bar{F} \quad /58/$$

ahol  $F$  a görbe által bezárt felületet jelenti. Így tehát a pontos megoldásnál a

$$C = \frac{\int_F \bar{J} d\bar{F}}{\oint_L \bar{H} d\bar{l}} \quad /59/$$

együttható értéke tetszőleges görbére kiszámítva egység, míg az iterációs folyamat közben  $C$  értéke eltér egytől. A valóságos megoldáshoz közelebb eső értékeket kapunk, ha a vektorpotenciálokat az iteráció közben úgy módosítjuk, hogy az /58/ egyenlőség teljesüljön.

A  $C$  együttható értéke a /7/ és /20/ képletek felhasználásával:

$$C = \frac{\int_F (-\gamma_j \omega \bar{A} + \bar{J}_0) d\bar{F}}{\int_L \frac{1}{\mu} \text{rot } \bar{A} d\bar{l}}$$

tehát a vektorpotenciálnak a görbén felvett, illetve görbén belüli értékeiből kiszámítható. Mivel  $C$  nevezőjében a térerősség görbementi összetevője, tehát  $\bar{A}$

gürbeirányra merőleges változása:  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial n}$  szerepel, az

/58/ egyenlőség teljesüléséhez a vektorpotenciálokat úgy változtatjuk meg, hogy  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial n}$  értéke a görbe mentén C szeresére növekedjék.

## 6. Hibabecslés

Elektromágneses és hőmérsékleti terek számítógépes számításakor a megoldást jelentő függvényt csak bizonyos pontossággal kapjuk meg. A számítás jellegéből következő hibák ismerete két szempontból igen fontos; egyrészt ismerni kell hogy mitől és milyen mértékben függenek a hibák, hogy a számítást úgy tervezzük meg, hogy lehetőleg kis hiba adódjék, másrészt az iterációs folyamat lépéseinek a számát is csak a hibákra vonatkozó valamilyen becslés birtokában tudjuk megállapítani.

A differenciálegyenlet differenciaegyenlettel való helyettesítésekor adódó hibát homogén rácsháló esetén az egész tartományra vonatkozóan megbecsülhetjük. E célból a tartományt befoglaló ellipszis tengelyeit;  $t$ ,  $s$  kell ismerni. Ezekkel [3]

$$r \leq \frac{M_4 / h^2 + k^2 / s^2 t^2}{24 / s^2 + t^2 /}$$

ahol  $h$  és  $k$  az  $x$  és  $y$  irányu rácstávolság,  $M_4$  pedig a megoldásfüggvény negyedik deriváltja abszolút értékének maximuma a vizsgált tartományban. Mint ilyen előre nem ismeretes, de pl.  $\bar{A}$  kiszámított csomópontbeli értékei alapján meghatározható [3]. Így utólag tudjuk ellenőrizni, hogy a felvett rácstávolságok megfelelőek-e. Másrészt viszont ha valamilyen kézenfekvő feltevésünk van a megoldásfüggvényre /pl. örvényáram területen

$$|\bar{A}| = A_0 e^{-z/\delta}$$



ahol  $\delta$  a behatolási mélység  $z$  irányban/, akkor ebből az adott pontossághoz szükséges átlagos rácstávolság előre meghatározható.

Ha az utólagos kiértékelésnél a diszkretizációs hiba túl nagyra adódik, célszerű megoldani a feladatot feleakkora rácstávolságokkal. A két megoldásból egy mindkettőnél pontosabb megoldás szerkeszthető Richardson módszerével [10].

A differenciaegyenletrendszer iterációs megoldásánál adódó hibát nehéz becsülni. Ha egyenletesen konvergál az eljárás, a pontosság mértéke lehet

$$\max_i |A_i^{/k/} - A_i^{/k-1/}|$$

vagy a következő normák:

$$\sum_i |A_i^{/k/} - A_i^{/k-1/}|$$

$$\sum_i |(A_i^2)^{/k/} - (A_i^2)^{/k-1/}|$$

Az iteráció befejezésének a feltétele ekkor az, hogy e mennyiségek egy előre megadott hibakorlát alá csökkenjenek.

A térszámításokban előforduló igen sok művelet miatt számítógépi számításnál a kerekítési hibákkal is számolni kell, amely itt nagy lehet, sőt bizonyos esetben az egyébként stabil eljárást instabillá teheti. Mivel e hibák nagysága az adott számítógép számaábrázolási pontosságától függ, a kerekítési hibák jelentőségét minden esetben külön-külön kell mérlegelni.

## SPECIÁLIS RÉSZ

### 1. A probléma megfogalmazása

A félvezető anyagok technológiájában lép fel a következő probléma:

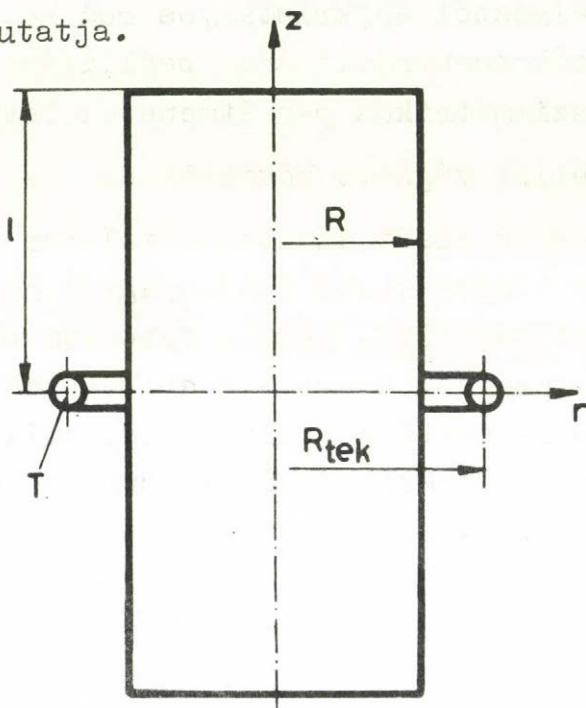
Adva van egy félvezető rud /pl. szilícium/, amelyen a belső anyagstruktúra és így a fizikai paraméterek megváltoztatása céljából helyi melegítést kell létrehozni. Ilyen esetek pl. a polikristályosból egykristályos rud készítése, a félvezető-rud szennyezőkoncentrációjának beállítása zónás olvasztással, hengerszimmetrikus p-n átmenetek létrehozása, vagy a különböző céllal végzett hőkezelések. Az igen nagy tisztasági követelmények miatt azonban általában nem járható ut, hogy a nagy hőmérsékletű fűtőanyagról hővezetéssel vigyük át a hőt a félvezetőre, mert a fűtőelem párolgása beszennyezné a félvezetőt. Ezért a fenti esetekben az indukciós hevítés a célravezető hőközlési mód, amikor is magában a félvezetőben keletkezik a hő, a környezetében lévő indukciós tekercs pedig alacsony hőmérsékletű /általában átfolyó vízzel hűtött/, így számottevő párolgása nincs.

Indukciósan hevített félvezetők hőmérsékleteloszlásának számítása több problémát vet fel. A hőmérsékleteloszlás meghatározásához ismerni kell a hőforrás-sűrűség eloszlását a félvezetőben. Ez viszont a kialakuló örvényáramoktól függ, amit adott gerjesztő mennyiségek mellett a villamos vezetőképesség befolyásol. Félvezetőanyagok villamos vezetőképessége azonban erősen függ a hőmérséklettől, tehát előre nem ismert. Ha ehhez még hozzávesszük, hogy e hőmérsékletfüggés nemlineáris jellegű, akkor könnyen megállapíthatjuk, hogy a probléma megoldása analitikusan reménytelen. Viszont a kialakuló hőmérsékleteloszlás ismerete igen fontos, mert ettől függenek az anyagban létrejövő strukturális változások; a diffúziós profil alakja, a diszlokációs hibahe-

lyek sűrűsége és eloszlása, valamint a félvezető számos fizikai tulajdonsága a szóbanforgó művelet után.

A fenti nehézségek miatt a problémakör vizsgálata csak numerikus módszerekkel lehetséges, és az igen nagy számítási munkák miatt gyakorlatilag csak számítógéppel lehet kivitelezni.

Félvezető rud indukciós melegítését vázlatosan a 9. ábra elrendezése mutatja.



9. ábra

A  $T$  tekercsben nagyfrekvenciás áram folyik, amely változó fluxust hoz létre maga körül, így a félvezető rudban is. Ennek hatására a rudban örvényáramok alakulnak ki, amelyek a rud melegedését idézik elő. Célunk az egyensúlyi állapotban kialakuló hőmérsékleteloszlás meghatározása.

Shaskov [16] analitikusan számítja ki a  $z$  irányú hőmérsékleteloszlást annak feltételezésével, hogy a felület sugárzással ad le hőt, radiális irányban nincs változás és a hővezetési tényező állandó. Billig [17] kétirányu



hőmérsékletváltozást vesz figyelembe, a hővezetési tényező azonban nála is független a hőmérséklettől.

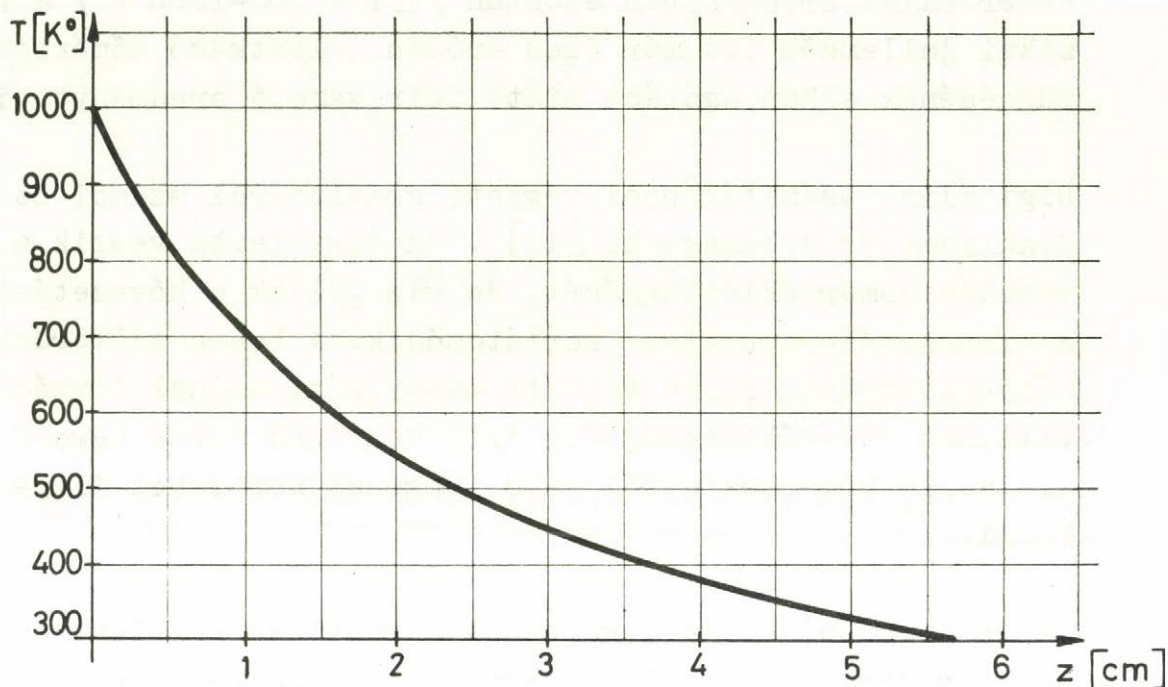
Kis hőmérséklettartományban ezek a megoldások jó közelítést adnak. A félvezetőtechnológiában gyakran előforduló hőmérséklettartományban azonban  $\Delta T = 700-1200 \text{ C}^\circ$  a fizikai jellemzők itt már igen erősen jelentkező hőmérsékletfüggésének elhanyagolása miatt félrevezető eredményt adnak.

Digitális számítógéppel végzett számításról számol be K.Akiyama és J.Yamaguchi [18]. Ők figyelembe veszik a hővezetés hőmérsékletfüggését, de vizsgáltuk a hővezetési differenciálegyenletre korlátozódik. A benne előforduló hőforrassűrűség előre felvett mennyiség, aminek ilymódon a villamos vezetőképességtől, illetve végső soron magától a kialakuló hőmérséklettől való függését nem lehet figyelembe venni.

Jelen dolgozat célja a kapcsolt hővezetési és elektromágneses térszámítási probléma megoldása, miközben mindkét fizikai jellemző /hő és villamos vezetés/ nemlineáris hőmérsékletváltozását tekintetbe vesszük.

Az elektromágneses teret egyértelműen meghatározzák a 9. ábrán látható elrendezés geometriai adatai, az anyagjellemzők, és a tekercsben folyó áram jellemzői. A hőmérsékleti tér számításakor a felület hőmérsékleteloszlását vesszük adottnak, hogy a félvezető és a környezet bonyolult termodinamikai kölcsönhatásától eltekinthessünk, és a számítást magára a rudra végezhessek. Mérési szempontból is ez a leg-  
hozzáférhetőbb kiinduló adat, sőt jó közelítéssel ki is számítható [16], mert a z irányban a tekercs síkjától gyorsan csökkenő felületi hőmérsékleteloszlást csak igen kevésbé befolyásolják a rudon belüli radiális hőmérsékletváltozások.

Ennek megfelelően egy adott kísérletnél  $I = 73,5\text{A}$ ,  $f = 1,8\text{MHz}$  az elmélet és a mérési eredmények összevetésével adódó felületi hőmérsékleteloszlást a 10. ábra szemlélteti, ami tehát a továbbiak számára kiinduló adatul szolgál.



10.ábra

A rud végén  $z = l$  / külső körülmények /rendszerint vizhűtési befogó/ biztosítják az állandó hőmérsékletet.

Az elrendezés szimmetriájából következik, hogy a tekercs síkjától felfelé és lefelé ugyanolyan magasságban egymással megegyező hőmérsékletek vannak. Ezért elég a rúd-nak csak az egyik felét vizsgálni.

## 2. Fizikai jellemzők

Vizsgálatainkhoz a félvezető szilícium anyagot vettük alapul. A számítások elvégzéséhez szükség van ezen anyag hő- és villamos vezetőképességének ismeretére.

### a./ Villamos vezetőképesség

Mivel vizsgálatunk a nagy hőmérsékletek tartományába esik /10. ábra/ a villamos vezetőképesség számításánál eltekinthetünk már a szennyezések hatásától, és az intrinsic vezetést vehetjük alapul. Szilárdtestfizikai megfontolásokból le lehet vezetni a villamos vezetőképesség hőmérsékletfüggését, de az adódó kifejezés nehezen meghatározható állandókat és mennyiségeket tartalmaz. Ezért kiindulásul az irodalomban megtalálható mérési eredményeket [12] tekintettük, és az elmélet szerinti függvény együtthatóját úgy határoztuk meg, hogy e függvény a legkisebb négyzetes hibával a kísérleti értékeket adja. Az ilyen módon kapott villamos vezetőképesség-hőmérséklet függvény a következő:

$$\gamma/T/ = 2958,6e^{-\frac{E}{2kT}} (\Omega\text{cm})^{-1} \quad /61/$$

Itt T az abszolút hőmérséklet, k a Boltzmann állandó

/k = 8,69 · 10<sup>-5</sup> eV/K<sup>0</sup>/, E pedig a sáv szélesség, ami szintén hőmérsékletfüggő [12] :

$$E = (1,21 - 3,6 \cdot 10^{-4}T) \text{ eV} \quad /62/$$

### b./ Hővezetőképesség

Szilícium esetében feltehető, [13] hogy a hővezetési folyamatban résztvevő hő-hordozók /fononok, elektronok, fotonok/ egymással csak igen gyenge kölcsönhatásban vannak, úgyhogy a hővezetési tényezőhöz való hozzájárulásuk additive vehető figyelembe:



$$K = K_f + K_e + K_s \quad \text{[63]}$$

ahol  $K_f$  a hővezetés fononos,  $K_e$  az elektronos és  $K_s$  a sugárzási összetevője, és mindegyik más és más hőmérsékletfüggést mutat.

Az elmélet és a kísérletek [14] továbbá azt adják, hogy  $K_s$  még az olvadáspont közelében is  $K$ -nak legfeljebb 2%-a lehet; ettől tehát eltekintünk. A fononos hővezetés hőmérsékletfüggését I. Glassbrenner és G. Slack [13] mérték ki, és az elméletileg is alátámasztott félempirikus formulát kapták:

$$\frac{1}{K_f} = 1,56 \cdot 10^{-3} T + 1,65 \cdot 10^{-6} T^2 + 0,03 \quad \frac{\text{cmK}^0}{\text{W}} \quad \text{[64]}$$

Az elektronos hővezetés  $/K_e/$  hőmérsékletfüggését, bár sok egyszerűsítő feltevéssel vezették le [15], mégis jó egyezést mutat a mérési eredményekkel. E szerint

$$K_e = K_{ep} + K_{eb} \quad \text{[65]}$$

$$K_{ep} = 2 \left( \frac{k}{e} \right)^2 \gamma T \quad \text{[66]}$$

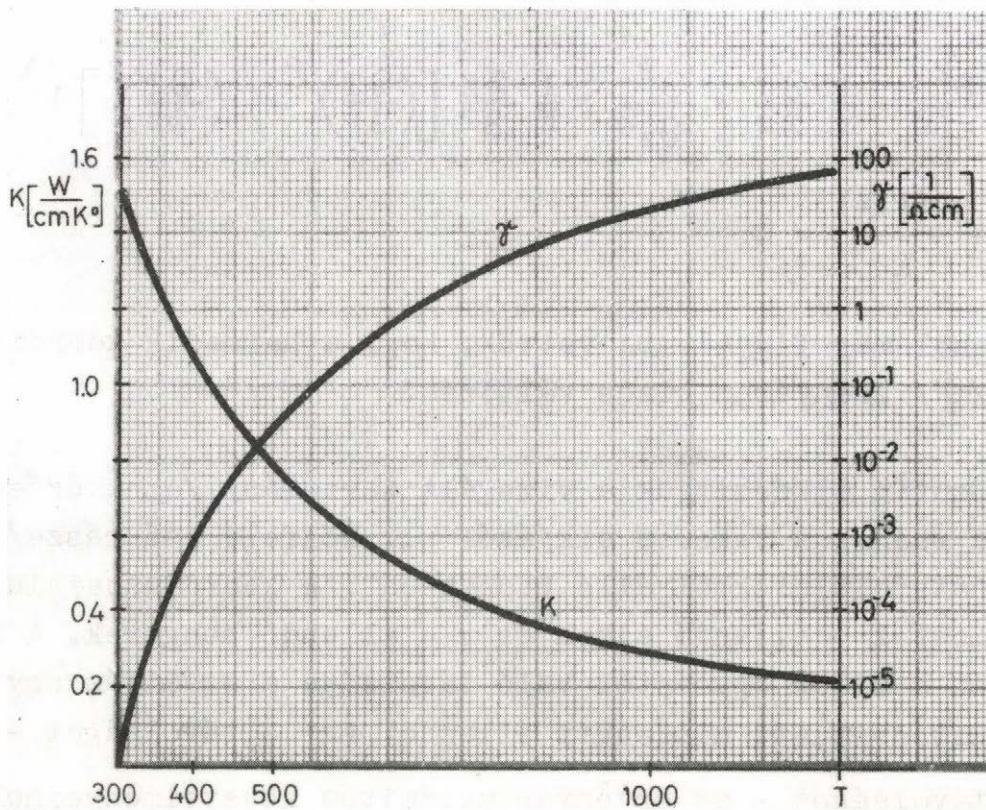
$$K_{eb} = \frac{b}{(1+b)^2} \left[ \frac{E}{kT} + 4 \right]^2 \left( \frac{k}{e} \right)^2 \gamma \cdot T \quad \text{[67]}$$

ahol a  $K_{ep}$  poláris összetevő a Wiedemann-Franz törvénynek felel meg, a  $K_{eb}$  bipoláris összetevő pedig az elektronlyuk párok diffúziójának. A képletekben  $k$  a Boltzmann állandó,  $e$  az elektron töltése,  $b$  pedig az elektron és lyukmozgékonyosság aránya;  $b = 2,6$ . Szerepel még a  $\gamma / T$  villamos vezetőképesség, amit [61] szerint számítottunk.

Meg kell még jegyezni, hogy az olvadáspont  $/T = 1685 \text{ K}^0/$  fölött a rácsszerkezet összeomlása miatt  $K_f$  és  $E_G$  nulla

lesz,  $K_e$ -nak pedig csak  $T > 800 \text{ K}^0$  felett van észrevehető hozzájárulása  $K$ -hoz.

A fizikai jellemzők /61/ illetve /63/, /66/, /67/ képleteknek megfelelő hőmérsékletfüggését a 11. ábrán láthatjuk.



11. ábra



### 3. Hőmérsékleteloszlás

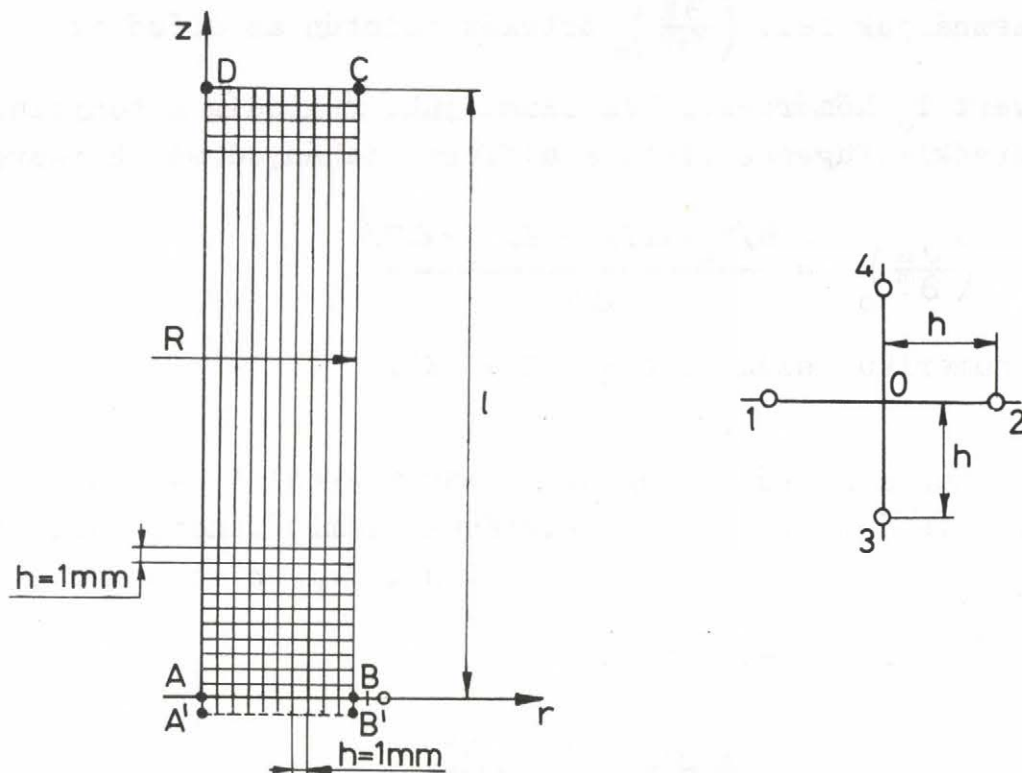
A szilícium rudban létrejövő hőmérsékleteloszlást az 1. pontban leírt feltételek mellett számítjuk ki. A számítás alapjául a /26/ differenciálegyenlet szolgál, amely mint láttuk figyelembe veszi a hővezetőképesség hőfokfüggését, és a hőforrássűrűség térbeli változását. Mivel elrendezésünk hengersizmetrikus, a differenciálegyenletet hengerkoordinátákban írjuk fel:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial T} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{q(r,z)}{K} = 0 \quad /68/$$

ahol már figyelembe vettük, hogy a harmadik koordináta / $\varphi$ / irányában nincs változás.

Ezután elkészítjük a vizsgált tartomány /az előzőek szerint a rudnak a tekercs síkjától pl. fölfelé eső része/ koordinátafelületekből álló beosztását. A koordinátafelületek most  $z =$  állandó síkok és  $r =$  állandó hengerek. A hengerek és a síkok egymástól való távolsága a számítás egyszerűsítése miatt mindenütt állandó. Ezt a távolságot - a rácstávolságot - az örvényáramszámítás követelményeinek megfelelően állapítottuk meg / $h = 1$  mm/ és megtartottuk a hőmérsékleteloszlás számításához is. A rácshálórendszert, illetve egy pont környezetét a 12. ábra szemlélteti.





12. ábra

A hőmérséklet számítását a differencia módszer szerint az ábrán látható hálónonalak metszéspontjaiban végezzük.

Ehhez a /68/ differenciálegyenletet differenciaegyenletté kell alakítani. A /68/-ban levő első és második deriváltak helyébe a /32/ differenciákifejezéseket írva a differenciaegyenlet iteráció számára alkalmas következő alakját nyerjük:

$$T_0 = \frac{1}{4} \left\{ T_1 \left( 1 - \frac{h}{2r_0} \right) + T_2 \left( 1 + \frac{h}{2r_0} \right) + T_3 + T_4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{K_0} \left( \frac{\partial K}{\partial T} \right)_0 \left[ \frac{(T_2 - T_1)^2 + (T_4 - T_3)^2}{4} \right] + \frac{h^2 q_0}{K_0} \right\} \quad /69/$$

Mivel a \$K\$ hővezetési tényező függ az ismeretlen hőmérséklettől, az iteráció nemlineáris. \$K\$ értékét a számítás alatt folyamatosan korrigáljuk úgy, hogy minden iterációban a megfelelő iteráció \$T\_0\$ értékéhez tartozó hővezetőképességet

használjuk fel.  $\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_0$  értékét szintén az előző iterációban nyert  $T_0$  hőmérséklethez számítjuk, mégpedig  $K$  bonyolult hőmérsékletfüggése miatt a differenciáhányadost képezve:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_0 = \frac{K/T_0 + \Delta T - K/T_0 - \Delta T}{2\Delta T} \quad /70/$$

A numerikus számításban  $\Delta T = 1K^0$ .

Nem használható a /69/ differenciaegyenlet a tengelyben /AD/ levő pontok hőmérsékletének számításához, mert itt  $r_0 = 0$ . Másrészt a /68/ differenciálegyenletben az

$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$  tag  $r \rightarrow 0$  esetén;

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

tehát az első taggal összevonható. Ennek megfelelően szerkeszthetjük meg a tengely pontjaiban érvényes differenciaegyenletet, figyelembevéve azt, hogy a tengelyszimmetria miatt itt  $T_1 = T_2$ :

$$T_0 = \frac{1}{6} \left[ 4T_2 + T_3 + T_4 + \frac{1}{K_0} \left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_0 \left(\frac{T_4 - T_3}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{K_0} q_0 \right] \quad /71/$$

A határfeltételek érvényesítése jelen esetben azt jelenti, hogy a DC vonalon minden hőmérséklet állandó és előre megadott  $/T = 300K^0/$ , a palástfelületen pedig /BC vonal/ szintén előre ismert és a 10. ábrának felel meg. Az AB vonal /a tekercs síkja/az elrendezés szimmetriavonala. Ezért egy itt levő csomópontra /O pont/ a 12. ábra jelöléseivel:

$$T_3 = T_4 \quad /72/$$

ahol  $T_3$  az AB vonallal párhuzamosan  $h$  távolságban haladó A' B' vonal  $T_4$  oszlopában levő pontjának hőmérséklete. A

szimmetriafeltételt tehát úgy érvényesíthetjük, hogy fel-  
veszünk egy potlólagos A'B' vonalat, amelynek hőmérsékletei  
az AB-t megelőző sornak az iterációban már kiszámított  
hőmérsékleteivel egyeznek meg. Az A'B' vonal hőmérsékle-  
teinek segítségével az AB határvonal hőmérsékletei már  
/69/-ből számíthatók.

Az iterációs folyamat alapjául a pontiterációt választot-  
tuk, és a viszonylag jó konvergenciatulajdonságok miatt  
állandó relaxációs tényezőt alkalmaztunk. A számítás ered-  
ményeit a 6. fejezet tárgyalja.

#### 4. Örvényáramszámítás

##### a./ Differenciál-differencia egyenletek

A szilícium rudban és környezetében kialakuló elektro-  
mágneses teret a vektorpotenciálra vonatkozó

$$\text{rot rot } \bar{A} = -j\omega\mu\gamma\bar{A} + \mu J_0 \quad /73/$$

differenciálegyenlet alapján számítjuk. Az egyenletben  
szereplő  $\gamma$  villamos vezetőképesség a rudon belül vál-  
tozik, a rudon kívül nulla, a  $\mu$  permeabilitás - szil-  
íciumról lévén szó - mindenütt a vákum permeabilitá-  
sával egyenlő, és a külső gerjesztő áramsűrűség  $J_0$   
csak a tekercs helyén különbözik nullától.

Elrendezésünk hengerszimmetrikus, a gerjesztőáramnak  
és a kialakuló örvényáramoknak csak egy,  $\varphi$  irányu  
komponensük van, a mágneses térerősség azonban kétirá-  
nyu /r és z/. Mindezekből következik [1], hogy a vek-  
torpotenciálnak csak  $\varphi$  irányu összetevője van. Ennek  
meghatározására /73/ hengerkoordinátákban felírt alak-  
ja szolgál, amely az előbbieket figyelembevételével a  
rudon belül:



$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial z^2} = j\omega\mu\gamma \bar{A} \quad /74/$$

és a külső térben:

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} - \frac{\bar{A}}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial z^2} = -\mu J_0 \quad /75/$$

/A /74/ és /75/ egyenletekben  $\bar{A}$  komplex értéket jelöl/

A /75/ által meghatározott elektromágneses tér a rudon kívül a végtelenig terjed, és elvben a számítást is a végtelenig kellene végezni, ahol is  $\bar{A}$  már eltűnik. Numerikus számításokban azonban végtelenbe nyúló tartományt nem tudunk kezelni, ezért azt egy végesben fekvő tartományba transzformáljuk.

Tekintsük tehát az

$$r = \frac{R^2}{\varrho} \quad /76/$$

transzformációt, ahol R a rud sugara,  $\varrho$  pedig az új változó.

E transzformáció a rudon kívüli tartományt  $/R < r < \infty/$  a rud belsejében  $/0 < \varrho < R/$  viszi át, miközben a párlástfelület helye nem változik, a végtelen pedig a tengelybe kerül.

A /76/ transzformációs egyenletből:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial r} = - \frac{\partial \bar{A}}{\partial \varrho} \frac{\varrho^2}{R^2} \quad /77/$$

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} = \left( \varrho^2 \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \varrho^2} + 2\varrho \frac{\partial \bar{A}}{\partial \varrho} \right) \frac{\varrho^2}{R^4} \quad /78/$$

A /77/, /78/ deriváltakat /75/-be helyettesítve, megkapjuk a transzformált külső tartományra vonatkozó alapegyenletet:

$$\left( \frac{\varrho}{R} \right)^4 \left[ \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \varrho} - \frac{\bar{A}}{\varrho^2} \right] + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial z^2} = -\mu \bar{J}_0 \quad /79/$$

és itt  $0 < \varrho \leq R$ .

Mivel ily módon a végtelenben levő felület a végesbe került, itt határfeltételeket is megadhatunk, majd az eredményként adódó  $\bar{A}/\varrho$  / függvény változóját visszatranszformálva a külső térben kialakuló vektorpotenciáleloszlást nyerjük.

A /74/ és /79/ differenciálegyenleteknek megfelelő differenciaegyenleteket a /32/ képletek segítségével szerkesztjük meg. Az iteráció számára alkalmas alakok a következők:

a rudon belül:

$$\bar{A}_0 = \frac{1}{4 + \frac{h^2}{r_0^2} + j \frac{2h^2}{\sigma^2}} \left[ \bar{A}_1 \left( 1 - \frac{h}{2r_0} \right) + \bar{A}_2 \left( 1 + \frac{h}{2r_0} \right) + \bar{A}_3 + \bar{A}_4 \right] \quad /80/$$

és a rudon kívül:

$$\bar{A}_0 = \frac{1}{2/1+b/ + \frac{bh^2}{\varrho_0^2}} \left[ b \left\{ \bar{A}_1 \left( 1 - \frac{h}{2\varrho_0} \right) + \bar{A}_2 \left( 1 + \frac{h}{2\varrho_0} \right) \right\} + \bar{A}_3 + \bar{A}_4 + \mu h^2 J_0 \right] \quad /81/$$

ahol

$$\sigma^2 = \frac{2}{\omega \mu \gamma} \quad \text{és} \quad b = \left( \frac{\varrho_0}{R} \right)^4$$

Az itt szereplő mindkét irányban azonos rácstávolságot  $h$  a következő gondolatmenet alapján állapítottuk meg.

Feltételezhetjük, hogy a vektorpotenciál a rudban a palástfelület mellett közelítőleg az

$$|A| = A_0 e^{-(R-r)/\delta} \quad /82/$$

függvény szerint változik, ahol  $\delta$  a "behatolási mélység" ezen a helyen. Másrészt amikor /32/ alapján a differenciálegyenletben szereplő deriváltakat differencia kifejezésekkel helyettesítjük, az elkövetett hiba  $\bar{A}$  Taylor sorának első elhagyott tagja /a negyedik deriváltat tartalmazó tag/:

$$H \leq \frac{1}{24} \frac{\partial^4 A}{\partial r^4} h^4 \quad /83/$$

Ez a hiba még a differenciaegyenletrendszer exakt megoldása esetén is fennáll, mert a függvény diszkrét és nem folytonos kezeléséből következik, ezért diszkretizációs hibának nevezzük. Mivel nagysága elsősorban a rácstávolságtól függ, ismeretében az alkalmazható rácstávolságok felső korlátját kapjuk.

A vektorpotenciálra tett /82/ feltevés felhasználásával

$$\frac{H}{|A|} \leq \frac{1}{24} \left( \frac{h}{\delta} \right)^4 \quad /84/$$

ami a kívánt pontosságtól függően a következő rácstávolságokat adja:

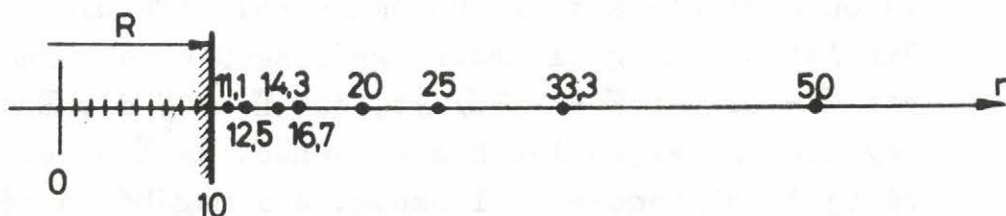
$$\frac{H}{|A|} = 0,01 \text{ esetén } h \leq 0,7\delta \quad /85/$$

$$\frac{H}{|A|} = 0,001 \text{ esetén } h \leq 0,32\delta$$



A legnagyobb hőmérsékletű helyen, ahol a behatolási mélység a legkisebb,  $\sigma = 8,3$  mm adódik, és így ezrelékes pontosságot választva /85/ szerint h-ra a  $h < 2,66$  korlátot nyerjük. Számítva még az iteráció hibájára a  $h = 1$  mm rácstávolság választása látszott célszerűnek.

Ezt a rácstávolságot tartottuk meg a transzformált külső tér számításánál is a  $\varrho$  koordinátában. A 13. ábra a csomópontok elhelyezését mutatja sugár irányban, a /76/ transzformáció figyelembevételével



13. ábra

Amint az ábrán is látható a külső térben nem egyenletesen helyezkednek el a pontok, mert hiszen az ezeknek megfelelő transzformált pontok a  $\varrho$  tartományában  $0 < \varrho \leq R$  helyezkednek el egyenletesen.

#### b./ Határfeltételek

A tekercs síkjában a szimmetria folytán  $\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} = 0$ , ami azt jelenti, hogy itt  $\bar{A}_2 = \bar{A}_4$  /ugy a külső, mint a belső térre/. A tengelyben  $r = 0$  /  $\bar{A} = 0$  mert általában

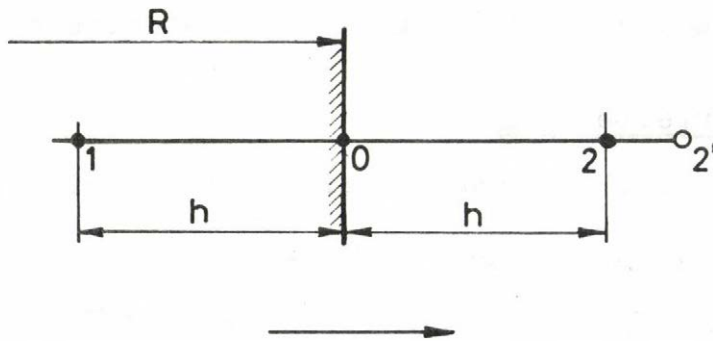
$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mu \bar{J}}{r} dv$$

és így hengerszimmetrikus térben minden áramelemhez található egy megfelelő másik, amely a vektorpotenciál előbbivel megegyező nagyságu, de ellentétes előjelű járulékát adja.

Másrészt a transzformált térben is a  $\varphi = 0$  helyen  $A = 0$ , mert a transzformáció folytán a tengely a végtelenbe kerül, ahol természetesen a vektorpotenciál eltűnik.

Az elektromágneses teret tengelyirányban a rud magasságában határoljuk le /DC vonal a 12. ábrán/, vagyis az ezen magasságon kívül eső erővonalakat elhanyagoljuk. Ez azt jelenti, hogy a DC vonalon, és meghosszabításán a külső térben  $\bar{A} = 0$ .

Külön megfontolást igényelnek a palástfelület viszonyai. Bár itt az anyagjellemzők ugrásszerűen változnak, a  $\text{rot } \bar{H} = 0$ ,  $\text{rot } \bar{E} = -\partial \bar{B} / \partial t$ ,  $\text{div } \bar{H} = 0$ ,  $\text{div } \bar{E} = 0$  egyenletek teljesüléséhez elegendő, ha  $\bar{A}$  és első deriváltjai folytonosan változnak, ami magából a módszerből már következik. Az a tény azonban, hogy a paláston található a külső és a belső tér, a következő problémát veti fel. /lásd a 14. ábrán/



14. ábra

Ha például a nyíl irányában számolunk /80/ szerint, a 0 pontban szükség lenne növekvő  $r$  irányban is egy pontra  $h$  távolságban - 2 -. Azonban mint láttuk, a transzformáció miatt, csak valamivel nagyobb távolságban áll rendelkezésre pont - 2' -. Ezért azt a megoldást választjuk, hogy a 0 pont vektorpotenciálljának számítása előtt lineáris interpolációval határozzuk meg  $A_2$  értékét. Ehhez a 0 és 2' pontban az előző iterációban felvett értékeket használjuk fel.

Megjegyezzük még azt is, hogy mivel a palástnál a villamos vezetőképességének ugrásszerű változása van, a /80/ egyenletben  $\gamma$ -t a /35/ képlet szerint kell figyelembe venni.

### c./ Iteráció

A differenciálegyenleteket pontiterációval oldjuk meg. Ennek során sugárirányban haladva először a rudban számolunk /80/ szerint, majd a rudon kívül /81/ szerint. Ez utóbbi a transzformáció miatt természetesen azt jelenti, hogy a  $Q$  változót tekintve ugyancsak a rudon belül számolunk.

A tapasztalatok azt mutatták, hogy a villamos vezetőképesség hely szerinti változása - a hely szerint változó hőmérsékleteknek megfelelően - igen kedvezőtlen hatást gyakorol az iterációra; az /51/ alapján számolt spektrális rádiusz ingadozik, a konvergencia nem kielégítő. Ezért az eljárás stabilizálására és a konvergencia gyorsítására a következő módszert alkalmaztuk:

A normák hányadosa /51/ szerint akkor adja  $\Lambda$  helyes értékét - amivel  $\omega_{opt}$ -t számíthatjuk - ha az iterációs mátrix  $/\underline{Q}(\omega)/$  legnagyobb sajátértéke dominál, vagyis ha a legnagyobb és az utánakövetkező sajátér-



ték hányadosának maximuma van. Az az  $\omega$  érték, amelynél ez bekövetkezik  $/\omega_s/$ , és  $\omega_{opt}$  között Carré a következő összefüggést találta [8] :

$$\omega_s = \omega_{opt} - \frac{2 - \omega_{opt}}{4} \quad /86/$$

Ennek megfelelően az iterációs folyamatot úgy befolyásoljuk, hogy először  $\omega_s$ -nek minél pontosabb értéke álljon elő, majd az ekkor kapott  $\omega$ -ból számítjuk  $\omega_{opt}$  tényleges értékét.

Mindezek kivitelezéséhez a program minden iteráció végén kiszámítja  $\kappa$  közelítő értékét /51/ szerint, de kiértékelése előre megadott számú  $N_1$  iteráció után történik. Ekkor kiszámítjuk  $\kappa_j$ ,  $\omega_{opt}$  feltételezett értékeit, majd ebből /86/-nak megfelelően  $\omega_s$ -t. Az iteráció ezzel a relaxációs tényezővel folytatódik, aminek eredményeként újabb  $N_1$  iteráció után a normák hányadosaként / /51/ képlet/  $\kappa_\omega$ -nak a valósághoz közelebb eső értékét nyerjük. Ez az eljárás folytatódik addig, amíg  $\omega_s$  változása elfogadhatóan kicsiny nem lesz, amikor is  $\kappa_\omega$  a normák hányadosaként,  $\kappa_j$  és  $\omega_{opt}$  pedig az /55/ illetve /56/ képletekből pontosan meghatározható.

Az eljárás folyamatábráját a 15. ábra szemlélteti.



A vektorpotenciáleloszlás ismeretében minden pontban meg lehet határozni a hővé váló elektromágneses energia sűrűségét, ami a hőmérsékleteloszlás számításához szükséges:

$$p = \gamma \omega^2 \left[ (\operatorname{Re}\bar{A})^2 + (\operatorname{Im}\bar{A})^2 \right] \quad /87/$$

Itt  $\gamma$  a villamos vezetőképesség az illető pontban,  $\omega = 2\pi f$  pedig a generátorfeszültség körfrekvenciáját jelenti.

A módszerek alkalmazása során szerzett numerikus tapasztalatokat, valamint az eredményeket a 6. fejezet ismerteti.

#### 5. Az összetett hővezetési és elektromágneses probléma

Az eddigiek ismeretében meg lehet tervezni a nagyhőmérsékletű sziliciumban kialakult elektromágneses és hőmérsékleti tér számításának folyamatát.

A számítás egy kezdeti hőmérsékleteloszlásból indul ki, amelyet az egyszerűség kedvéért úgy választunk, hogy a rudon belül sugár irányban nem változik a hőmérséklet, tehát minden pontban az adott magassághoz tartozó palásthőmérséklettel egyezik meg. A kezdeti hőmérsékleteloszláshoz kiszámítjuk a 2.b/ fejezet szerint a kezdeti hővezetőképességeloszlást. Ezekkel a kiinduló értékekkel és a hőforrás sűrűségét mindenütt nullának véve történik a hőmérsékleteloszlás számítása a rudon belül a 3./ fejezetben leirtaknak megfelelően. Az eredmény egy minden pontban változó hőmérséklet, amelyhez tartozó hő és villamos-vezetőképességeket a 2./ fejezet összefüggései adják.

Ezután következik a vektorpotenciáleloszlás számítása a 4./ fejezet szerint, miközben felhasználjuk az előbbi villamos vezetőképesség eloszlást. A vektorpotenciálok ki-

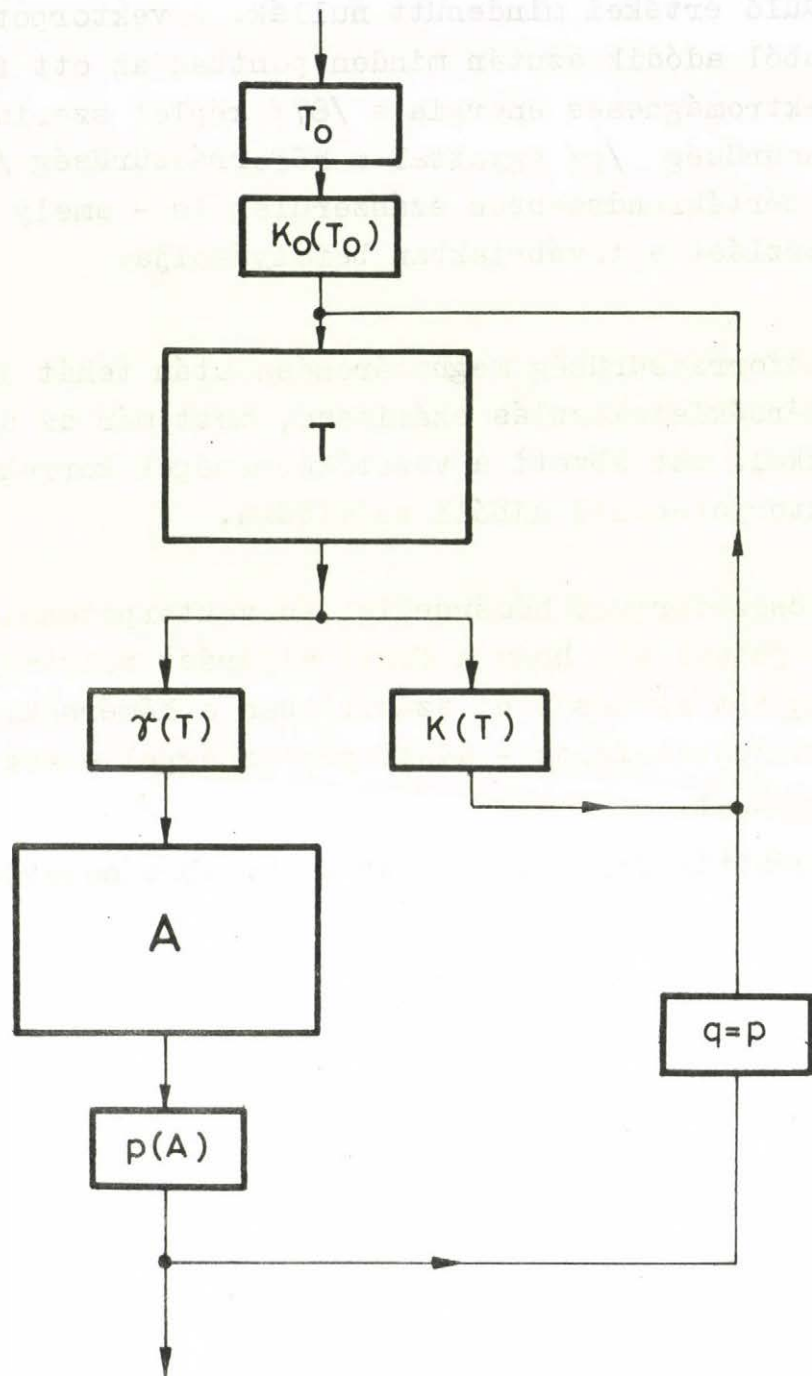


induló értékei mindenütt nullák. A vektorpotenciálszámításból adódik azután minden pontban az ott felszabaduló elektromágneses energia a /87/ képlet szerint. Ez az energiasűrűség  $/p/$  egyuttal a hőforrások sűrűsége  $/q/$ , - megfelelő mértékrendszerben szászerüleg is - amely a hőmérsékleteloszlást a továbbiakban befolyásolja.

A hőforrások sűrűsége meghatározása után tehát újra indul a hőmérsékleteloszlás számítása, most már az új  $p$ ,  $K$  értékekkel. Ezt követi a vezetőképességek korrekciója és a vektorpotenciál újabb számítása.

Az összetartozó hőmérséklet és vektorpotenciáloszláshoz úgy jutunk el, hogy a fenti eljárást folytatjuk addig, amíg két egymásutáni számításban a hőmérsékletek és a vektorpotenciálok - adott pontossággal - meg nem egyeznek egymással.

A számítás folyamatábráját a 16. ábra mutatja.



16. ábra

## 6. Numerikus eredmények

Az előző fejezetben leírtak alapján megszerkesztett számítógép programot FORTRAN nyelven a melléklet tartalmazza. A konvergencia sajátságok megismerésére, és így a megfelelő iterációs eljárás meghatározására numerikus kísérleteket végeztünk. A tapasztalatok azt mutatták, hogy a nemlineáris hőmérsékleteloszlás számításánál egyenletes és elegendően gyors konvergenciát biztosít az állandó relaxációs tényezővel végzett pontiteráció.  $\omega = 1,2$ -t alkalmazva a spektrális rádiusz  $0,96$ -nak adódik. Az iteráció befejezésére azt a feltételt választottuk, hogy a hőmérsékletek átlagos változása tizedfokon belül legyen:

$$\frac{\sum_i |T_i^{/k/} - T_i^{/k-1/}|}{N} < 0,1$$

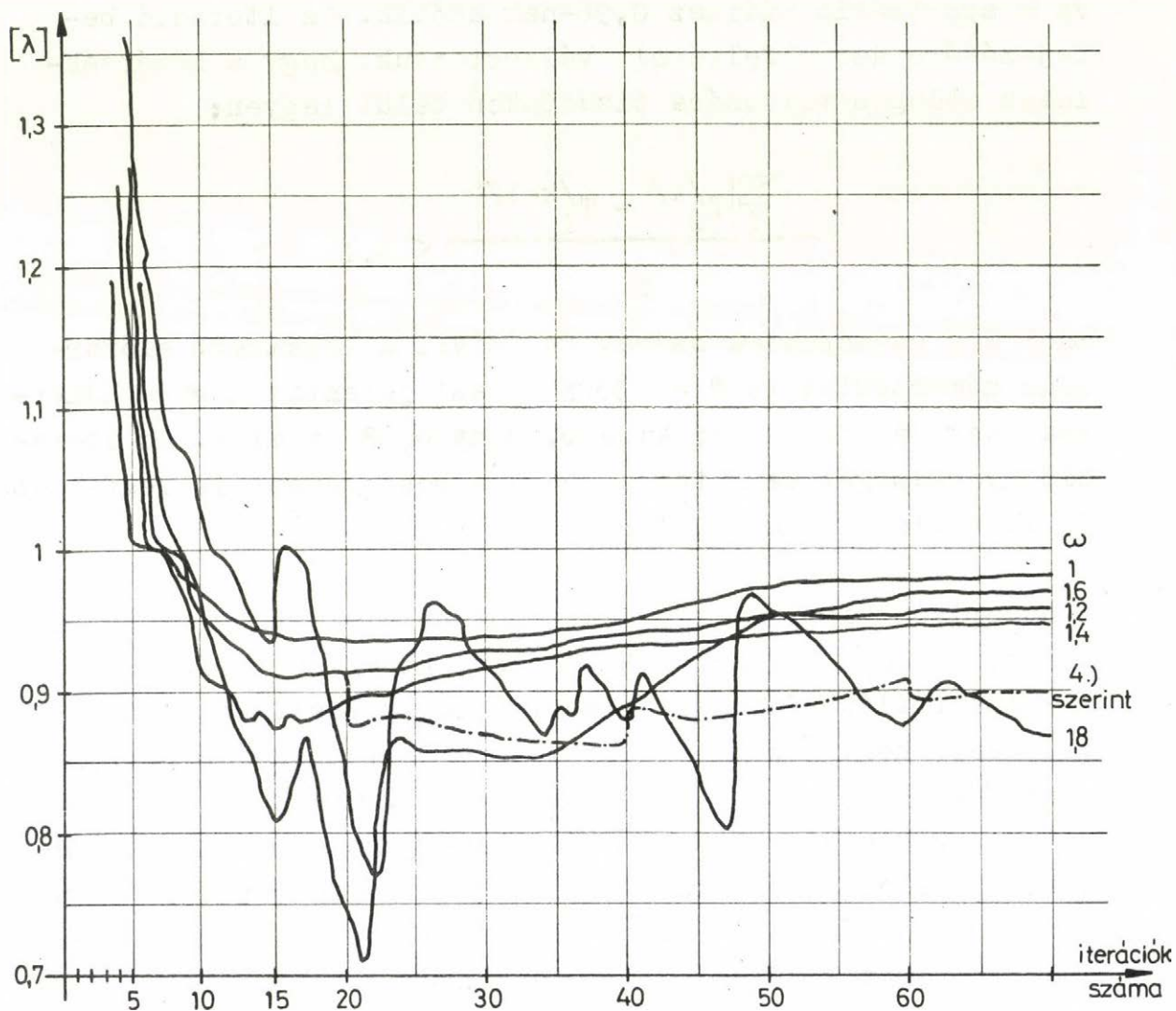
ahol  $N$  a csomópontok száma. Ez, mivel a legkisebb előforduló hőmérséklet is  $T = 300K^0$ , azt jelenti, hogy a hőmérsékletek változása már kisebb, mint  $0,33$  ezrelék. Az iteráció gyorsaságát az mutatja, hogy e pontosságot is legfeljebb  $32$  iterációs lépésben elérte a számítás.

A numerikus kísérletek a vektorpotenciáleloszlás esetében arra a meglepő eredményre vezettek, hogy az iterációs mátrix spektrális rádiusza gyakorlatilag valós szám, annak ellenére, hogy  $\bar{A}$  komplex értékeiből lett számolva az /51/ összefüggés alapján.  $\omega = 1$  esetében pl.  $\kappa = 0,982 - j 0,0005$ . Ennek megfelelően az optimális konvergenciagyorsító tényezőt is a valós számok közt kerestük. A különböző konvergenciagyorsító tényezővel végzett kísérletek szerint az iterációs folyamat konvergencia tulajdonságai az előbbinél rosszabbak. Kis  $\omega$  esetén a konvergencia lassu / $\kappa$  túl nagy/ nagyobb  $\omega$ -nál pedig egyre erőteljesebb ingadozások lépnek fel. Mindez jól látható a 17. ábrán ahol a



$$\frac{\sum_i |\bar{A}_i^{/k/} - \bar{A}_i^{/k-1/}|}{\sum_i |A_i^{/k-1/} - A_i^{/k-2/}|} \cong \lambda_\omega$$

tört viselkedését ábrázoltuk az iteráció számának (k) függvényében, különböző  $\omega$  mellett.



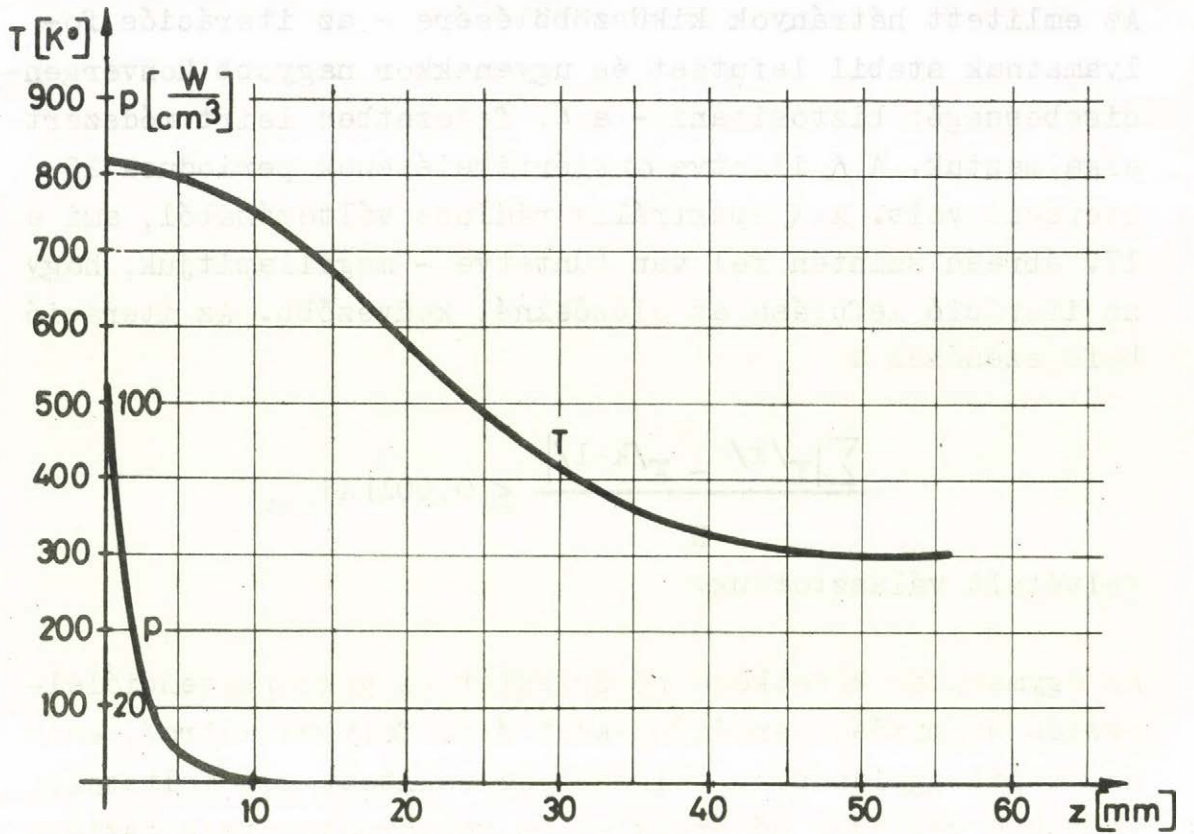
17. ábra

Az említett hátrányok kiküszöbölésére - az iterációs folyamathoz stabil lefutást és ugyanakkor nagyobb konvergenciasebbségét biztosítani - a 4. fejezetben leírt módszert alkalmaztuk. A  $\lambda$  illetve  $\omega$  kiértékelésének periodusa 20 iteráció volt. A  $\lambda$  spektrális rádiusz változásából, ami a 17. ábrán szintén fel van tüntetve - megállapítjuk, hogy az iteráció lefutása az előzőeknél kedvezőbb. Az iteráció befejezéséhez a

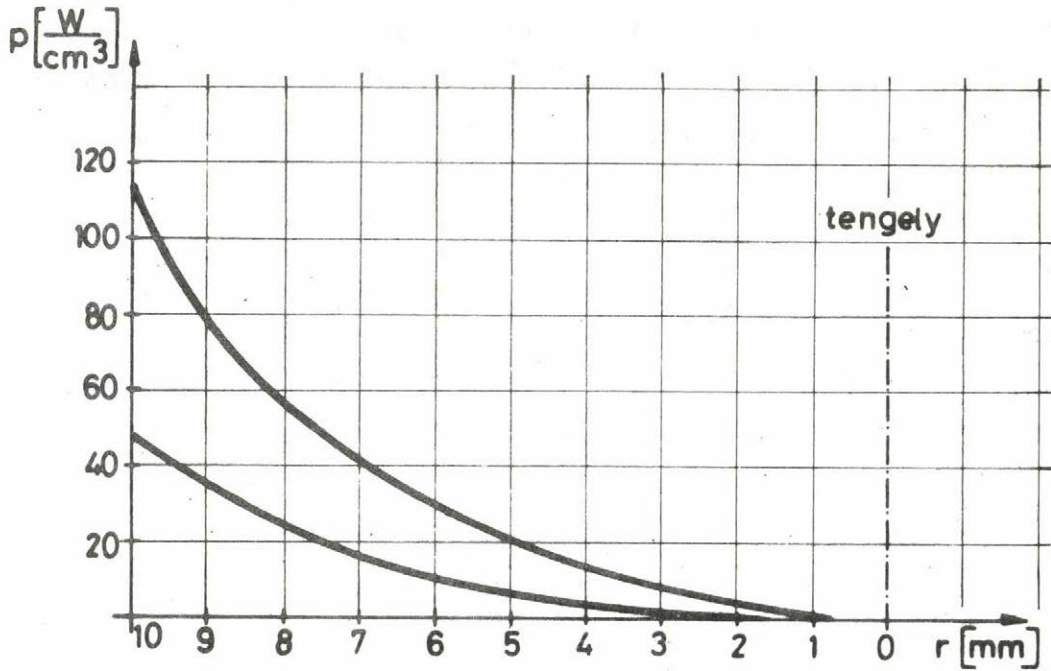
$$\frac{\sum_{N} |\bar{A}^{/k/} - \bar{A}^{/k-1/}|}{N} \leq 0,001 |A|_{\max}$$

feltételt választottuk.

Az egymásután következő hőmérséklet és vektorpotenciáeloszlás számítások eredményeként /16. folyamat-ábra/, amikor tehát egyidejűleg teljesül az említett két feltétel, kapjuk a végleges hőmérséklet és vektorpotenciáeloszlást /kiszámításához CDC 3300-as számítógépnek 17 percre van szüksége/. Ennek jellemzésére a 18. ábra a fizikai kiértékelés szempontjából lényeges, tengelyben adódó hőmérsékleteloszlást mutatja, valamint a rúdha hatoló elektromágneses energia sűrűségét a felületen. A 19. ábrán ugyancsak az energiasűrűség látható a tekercs síkjában sugárirányban, és a tekercs síkjától 2 mm távolságban szintén sugárirányban.



18. ábra



19. ábra



A 18. és 19. ábrán bemutatott függvények jól jellemzik a rudban kialakuló elektromágneses és hőmérsékleti viszonyokat. A kiértékelés szempontjából mégis az bir különös jelentőséggel, hogy az elrendezés konstrukciós adatai /geometriai méretek, áramerősség, frekvencia/ a programban könnyen változtatható bemenő adatok, így a végeredményt jelentő eloszlások ezek függvényében vizsgálhatók. Meg kell jegyeznünk, hogy ez az összefüggés nem olyan szemléletes mint egy analitikus megoldás esetében, ahol is függvénykapcsolatokkal lehet leírni, míg a számítógépes módszernél új kiindulóadatok esetén az egész számítást meg kell ismételni. Ezt azonban ellensúlyozza az a tény, hogy számítógépes módszerekkel a tárgyalható problémák köre jelentősen kibővül az analitikusan tárgyalhatókhöz képest.

Befejezésül utalni szeretnék arra, hogy a bemutatott fizikai probléma két irányban is általánosítható.

Egyrészt a hőmérsékletelhatároknak az olvadáspont fölé való emelésével a fázisátalakulás viszonyait is figyelembe lehet venni az I.2/d fejezet szerint, másrészt a környezet és a rud termodinamikai kölcsönhatásának figyelembevételével /I.2/b/ a palást hőmérsékleteloszlásának mérése /ami az olvadáspont környékén már sok nehézséget vet fel/ elhagyható.

Az anyagjellemzők olvadáspont környékén történő változása azonban mélyebb vizsgálatot igényel.



IRODALOMJEGYZÉK

- [ 1 ] Simonyi: Elméleti Villamosságtan. Tankönyvkiadó 1960
- [ 2 ] Carslaw: Conduction of Heat in Solids. New York 1959
- [ 3 ] Kantrovics-Krilov: A felsőbb analízis közelítő módszerei. Akadémiai Kiadó 1953.
- [ 4 ] Ames: Numerical Methods for Partial Differential Equations. N.Y. 1969
- [ 5 ] Reichert: Über ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Magnetfeldern und Wirbelströmen in elektrischen Maschinen. Dissertation 1968
- [ 6 ] Young: Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type. Trans. Amer. Math. Soc. 76 p. 92 /1954/
- [ 7 ] Varga: Matrix Iterative Numerical Analysis. New York 1962
- [ 8 ] Carré: The Determination of the Optimum Accelerating Factor for Successive overrelaxation. Comput. J. 4 p. 73 /1961/
- [ 9 ] Garabedian: Estimation of the Relaxation Factor for Small Mesh Size. Math. Tabl. Aids Comput. 10 p. 183 /1956/
- [10] Berezin: Computing Methods. New York 1966
- [11] Smith: Semiconductors. Camb. Univ. Press 1959
- [12] Morin and Maita: Phys. Rev. 96 p. 28 /1954/
- [13] Glasbrenner and Slack: Phys. Rev. A. 134 p. 1058 /1964/
- [14] Slack and Glasbrenner: Phys. Rev. 120 p. 782 /1960/
- [15] Drabble and Goldsmid: Thermal Conduction in Semiconductors Pergamon Press. London 1961
- [16] Shaskov: The Metallurgy of Semiconductors N.Y. /1961/



- [17] Billig: Proc. Roy. Soc. /London/ A235 p. 37 /1956/
- [18] Akiyama and Yamaguchi: Journ. of Appl. Phys. p. 1899  
/1962/

M E L L É K L E T

ANSI FORTRAN(2.2)/MASTER      INTEGER WORD SIZE = 1 , \* OPTION IS   ON , 0 OPTION IS   OFF      05/14/75

```
LN 0001    C A PROGRAM A KAPPA ES A VEKTOR PROGRAMOKBOL IRODOTT
LN 0002    DIMENSION P(21,106),A(21,106),S(106),O(11,106)
LN 0003    COMMON/1/ AV(21,106),AI(21,106),GAM(21,106)
LN 0004    READ(60,1) TMU,R,H,AKEZD,F,K,CJ
LN 0005    1    FURMAT(F9.0,F3.1,F2.1,F2.1,F6.0,I3,F4.1)
LN 0006    CJ=72.5
LN 0007    WRITE(61,399) TMU,R,H,AKEZD,F,K,CJ
LN 0008    399    FORMAT(1H1,1X,F12.4,1X,F0.1,1X,F5.1,1X,F5.1,1X,F11.3,1X,I3,1X,F8.3
LN 0009    -)
LN 0010    SG=3.14159*0.001
LN 0011    G1=3.14159*1.00E-5
LN 0012    OGA=1.2
LN 0013    OM=2.0*3.1415926*F
LN 0014    AKEZD=0.0
LN 0015    OMJ=1.0
LN 0016    RAMDA=0.0
LN 0017    ROMS=0.0
LN 0018    OMOPT=0.0
LN 0019    DO 35 J=48,105
LN 0020    DO 35 I=1,21
LN 0021    AV(I,J)=AKEZD
LN 0022    35    AI(I,J)=AKEZD
LN 0023    DO 12 J=48,104
LN 0024    DO 42 I=1,11
LN 0025    42    O(I,J)=0.
LN 0026    12    CONTINUE
LN 0027    RX=1.0
LN 0028    F19=5.07E-12
LN 0029    YK2=1685.15
LN 0030    DO 74 L=48,104
LN 0031    READ(60,73) OS
LN 0032    WRITE(61,800) OS
LN 0033    800    FORMAT(3X,F11.4)
LN 0034    73    FORMAT(F4.1)
LN 0035    DO 100 I=1,11
LN 0036    100    A(I,L)=OS
LN 0037    74    CONTINUE
LN 0038    RHVA=1.0
LN 0039    RSA=1.0
LN 0040    RSZA=1.0
LN 0041    DO 1000 NAGY=1,10
LN 0042    WRITE(61,114) NAGY
LN 0043    114    FORMAT(1H1,////15X,13,11H-DIK CIKLUS////)
LN 0044    KSIZ=1.0
LN 0045    RS=1.
LN 0046    RSI=1.0
LN 0047    RS2=1.0
LN 0048    RH=1.0
LN 0049    RHI=1.0
LN 0050    LA=
LN 0051    140    CONTINUE
LN 0052    LA=LA+1
LN 0053    DO 4 I=1,11
LN 0054    4    A(I,105)=A(I,103)
```



ANSI FORTRAN(2.2)/MASTER INTEGER WORD SIZE = 1 , \* OPTION IS ON , 0 OPTION IS OFF 05/14/75

```
LN 0055      LO=LA
LN 0056      HVA=0.
LN 0057      SUMMAA=.
LN 0058      SUMMA2A=.
LN 0059      IP=0
LN 0060      KST=0
LN 0061      GYUJT=0.0
LN 0062      DO 10 J=49,104
LN 0063      DO 11 I=1,10
LN 0064      SV4=A(I,J)
LN 0065      KST=KST+1
LN 0066      IP=IP+1
LN 0067      R1=I-1
LN 0068      SV4=A(I,J)
LN 0069      IF (I-1) 48,99,48
LN 0070      9. SV2=+.1*A(I+1,J)+A(I,J+1)+A(I,J-1)
LN 0071      CALL KAPPA(A(I,J),DER,CK,EPS)
LN 0072      SV3=1.0/CK*DER*((A(I,J+1)-A(I,J-1))/2.0)**2+.01/CK*Q(I,J)
LN 0073      A(I,J)=(SV2+SV3)/6.0
LN 0074      A(I,J)=SV4+OGA*(A(I,J)-SV4)
LN 0075      GYUJT=GYUJT+A(I,J)
LN 0076      CALL HIBA(SV4,A(I,J),HVA,SUMMAA,SUMMA2A)
LN 0077      GOTO 11
LN 0078      48 H=1.0
LN 0079      X=A(I-1,J)*(1.0-1.0/(2.0*R1))+A(I+1,J)*(1.0+1.0/(2.0*R1))+A(I,J+1
LN 0080      -)+A(I,J-1)
LN 0081      CALL KAPPA(A(I,J),DER,CK,EPS)
LN 0082      Y=1.0/CK*DER*((A(I+1,J)-A(I-1,J))**2+(A(I,J-1)-A(I,J+1))**2)/
LN 0083      -(4.0)
LN 0084      SV7=0.01/CK*Q(I,J)
LN 0085      A(I,J)=(X+Y+SV7)/4.0
LN 0086      A(I,J)=SV4+OGA*(A(I,J)-SV4)
LN 0087      GYUJT=GYUJT+A(I,J)
LN 0088      CALL HIBA(SV4,A(I,J),HVA,SUMMAA,SUMMA2A)
LN 0089      11 CONTINUE
LN 0090      1 CONTINUE
LN 0091      SUMS=0.0
LN 0092      DO 13 M=49,104
LN 0093      IF (M-105) 14,15,14
LN 0094      14 H=0.1
LN 0095      GOTO 16
LN 0096      15 H=0.05
LN 0097      16 CALL KAPPA(A(11,M),DER,CK,EPS)
LN 0098      S(M)=2.0*EPS*F19*A(11,M)**4*3.14159*M
LN 0099      13 SUMS=SUMS+S(M)
LN 0100      HVRA=HVA/RHVA
LN 0101      SURA=SUMMAA/RSA
LN 0102      SUR2A=SUMMA2A/RS2A
LN 0103      LA1=LA
LN 0104      ST=FLOAT(KST)
LN 0105      IF (ABS(SUMMAA).LE.0.1*ST)      GOTO 8
LN 0106      RSA=SUMMAA
LN 0107      RS2A=SUMMA2A
LN 0108      RHVA=HVA
```



ANSI FORTRAN(2.2)/MASTER INTEGER WORD SIZE = 1 , \* OPTION IS ON , 0 OPTION IS OFF 05/14/75

```
LN 0109      5 GOTO 140
LN 0110      8 WRITE(61,580) L0
LN 0111      580 FORMAT(/,/,X,I3,12H-DIK T-TOMB//)
LN 0112      00 600 J=98,105
LN 0113      00 WRITE(61,601) J,(A(I,J),I=1,11)
LN 0114      6 1 FORMAT(1X,I3,11(1X,F9.4)/)
LN 0115      WRITE(61,614) (O(I,104) ,I=1,11)
LN 0116      614 FORMAT (///11(1X,E11.4)////)
LN 0117      WRITE(61,602) L0,HVA,SUMMAA,HVRA,SUNA,GYUJT, SUMS
LN 0118      602 FORMAT(///1X,1H,8X,I3,4X,5(1X,E11.4),8X,E11.4////)
LN 0119      DO 174 L=48,100
LN 0120      DO 173 I=1,11
LN 0121      C1=1.21*3.6E-4*A(I,L)
LN 0122      C2=17.38E-5*A(I,L)
LN 0123      C1=C1/C2
LN 0124      RO=3.38E+4*EXP(C1)
LN 0125      GAM(I,L)=1.0/RO
LN 0126      DELTA=10.0/(OH*TMU*GAM(I,L))
LN 0127      173 CONTINUE
LN 0128      174 CONTINUE
LN 0129      L=0
LN 0130      DO 20 NJ=1,1
LN 0131      1+1 CONTINUE
LN 0132      L=L+1
LN 0133      SUMV=J.0
LN 0134      ENER=J.0
LN 0135      LL=L
LN 0136      HV=0.0
LN 0137      H1=L.0
LN 0138      SUMMA=J.0
LN 0139      SUMMA2=J.0
LN 0140      SUMMA1=J.0
LN 0141      SUMMAI2=J.0
LN 0142      DO 6 I=2,20
LN 0143      AV(I,100)=AV(I,103)
LN 0144      6 AI(I,105)=AI(I,103)
LN 0145      SV=J.0
LN 0146      IA=0
LN 0147      DO 7 J=49,100
LN 0148      DO 58 I=2,20
LN 0149      IA=IA+1
LN 0150      SV4=AV(I,J)
LN 0151      SV5=AI(I,J)
LN 0152      IF(I4LT.11)GOTO 888
LN 0153      IF(I.EQ.11)GOTO 110
LN 0154      RI=I-1
LN 0155      B=(RI/R)**4
LN 0156      H=1.0
LN 0157      SAV=AI(I-1,J)*(B-(H*B)/(2.0*R1))+AV(I+1,J)*(B+(H*B)/(2.0*R1))+AV(I
LN 0158      -,J+1)+AV(I,J-1)
LN 0159      SAI=AI(I-1,J)*(B-(H*B)/(2.0*R1))+AI(I+1,J)*(B+(H*B)/(2.0*R1))+AI(I
LN 0160      -,J+1)+AI(I,J-1)
LN 0161      IF(J.EQ.104.AND.I.EQ.10) GOTO 30
LN 0162      G=0.0
```



ANSI FORTRAN(2.2)/MASTER INTEGER WORD SIZE = 1 , \* OPTION IS ON , 0 OPTION IS OFF 05/14/75

```
LN 0163      GOTO 31
LN 0164      31 S=TMU*DJ
LN 0165      32 SV2=-G+SAV
LN 0166      SV3=SAI
LN 0167      OSZT1=2.0*(1.0+D)+(B*H*H)/(R1*R1)
LN 0168      AV(I,J)=SV2/OSZT1
LN 0169      AI(I,J)=SV3/OSZT1
LN 0170      AI(I,J)=SV5+OMV*(AI(I,J)-SV5)
LN 0171      AV(I,J)=SV4+OMV*(AV(I,J)-SV4)
LN 0172      HG=SQRT((AV(I,J)*AV(I,J))+(AI(I,J)*AI(I,J)))
LN 0173      SV=SV+HG
LN 0174      CALL HIB(SV5,SV4,AI(I,J),AV(I,J),HV,SUMMA,SUMMAZ)
LN 0175      P(I,J)=GAM(I,J)*OM*OM*(AV(I,J)*AV(I,J)+AI(I,J)*AI(I,J))
LN 0176      Q(I,J)=P(I,J)
LN 0177      GO TO 33
LN 0178      11 R1=I-1
LN 0179      AXI=AI(I,J)+AI(I+1,J)-(AI(I,J))*0.9
LN 0180      AXV=AV(I,J)+AV(I+1,J)-(AV(I,J))*0.9
LN 0181      GA=GAM(I,J)/2.0
LN 0182      H=1.0
LN 0183      D=100.0/(OM*TMU*GA)
LN 0184      SV2=AV(I-1,J)*(1.0-H/(2.0*R1))+AXV*(1.0+H/(2.0*R1))+AV(I,J+1)+AV(
LN 0185      -1,J-1)
LN 0186      SV3=AI(I-1,J)*(1.0-H/(2.0*R1))+AXI*(1.0+H/(2.0*R1))+AI(I,J+1)+AI(
LN 0187      -1,J-1)
LN 0188      OSZT1=4.0+(H*H)/(R1*R1)
LN 0189      OSZT2=(H*H)/D
LN 0190      OL=OSZT1*OSZT1+OSZT2*OSZT2
LN 0191      AV(I,J)=(SV2*OSZT1+SV3*OSZT2)/OL
LN 0192      AI(I,J)=(SV3*OSZT1-SV2*OSZT2)/OL
LN 0193      AI(I,J)=SV5+OMV*(AI(I,J)-SV5)
LN 0194      AV(I,J)=SV4+OMV*(AV(I,J)-SV4)
LN 0195      HG=SQRT((AV(I,J)*AV(I,J))+(AI(I,J)*AI(I,J)))
LN 0196      SV=SV+HG
LN 0197      CALL HIB(SV5,SV4,AI(I,J),AV(I,J),HV,SUMMA,SUMMAZ)
LN 0198      P(I,J)=GAM(I,J)*OM*OM*(AV(I,J)*AV(I,J)+AI(I,J)*AI(I,J))
LN 0199      Q(I,J)=P(I,J)
LN 0200      IF(J.EQ.1.4) GO TO 115
LN 0201      V=1.01*3.14159
LN 0202      SUMV=SUMV+V
LN 0203      ENERG=ENERG+P(I,J)*V
LN 0204      GO TO 33
LN 0205      115 V=0.005*3.14159
LN 0206      SUMV=SUMV+V
LN 0207      ENERG=ENERG+P(I,J)*V
LN 0208      GO TO 33
LN 0209      995 R1=I-1
LN 0210      D=100.0/(OM*TMU*GAM(I,J))
LN 0211      SV2=AV(I-1,J)*(1.0-H/(2.0*R1))+AV(I+1,J)*(1.0+H/(2.0*R1))+AV(I,J+1
LN 0212      -)+AV(I,J-1)
LN 0213      SV3=AI(I-1,J)*(1.0-H/(2.0*R1))+AI(I+1,J)*(1.0+H/(2.0*R1))+AI(I,J+1
LN 0214      -)+AI(I,J-1)
LN 0215      OSZT1=4.0+(H*H)/(R1*R1)
LN 0216      OSZT2=(H*H)/D
```



ANSI FORTRAN(2.2)/MASTER INTEGER WORD SIZE = 1 , \* OPTION IS ON , 0 OPTION IS OFF 05/14/75

```
LN 0217 OL=OSZT1*OSZT1+OSZT2*OSZT2
LN 0218 AV(I,J)=(SV2*OSZT1+SV3*OSZT2)/OL
LN 0219 AI(I,J)=(SV3*OSZT1-SV2*OSZT2)/OL
LN 0220 AV(I,J)=SV4+OMV*(AV(I,J)-SV4)
LN 0221 AI(I,J)=SV5+OMV*(AI(I,J)-SV5)
LN 0222 HG=SQRT((AV(I,J)*AV(I,J))+(AI(I,J)*AI(I,J)))
LN 0223 SV=SV+HG
LN 0224 CALL HIB(SV5,SV4,AI(I,J),AV(I,J),MV,SUMMA,SUMMAZ)
LN 0225 P(I,J)=GAH(I,J)*OM*OM*(AV(I,J)*AV(I,J)+AI(I,J)*AI(I,J))
LN 0226 O(I,J)=P(I,J)
LN 0227 IF(J.EQ.104) GO TO 110
LN 0228 R1=R1/10.0
LN 0229 V=J.02*R1*3.14159
LN 0230 SUMV=SUMV+V
LN 0231 ENERG=ENERG+P(I,J)*V
LN 0232 GO TO 39
LN 0233 110 R1=R1/10.0
LN 0234 V=J.31*R1*3.14159
LN 0235 SUMV=SUMV+V
LN 0236 ENERG=ENERG+P(I,J)*V
LN 0237 39 CONTINUE
LN 0238 504 FORMAT(1X,I3,11(1X,F9.4)/)
LN 0239 7 CONTINUE
LN 0240 IF(L.LT.51.AND.NAGY.EQ.1) GOTO 999
LN 0241 OSSZ3=0.
LN 0242 DO 34 J=49,151
LN 0243 DO 34 I=2,10
LN 0244 R5=I-1
LN 0245 34 OSSZ3=OSSZ3+P(I,J)*R5*GG
LN 0246 DO 36 J=49,151
LN 0247 R5=19
LN 0248 36 OSSZ3=OSSZ3+P(11,J)*G1*R5
LN 0249 DO 37 I=2,10
LN 0250 R5=I+1
LN 0251 37 OSSZ3=OSSZ3+P(L,152)*G1*R5
LN 0252 GOTO 999
LN 0253 ROMV=OMV
LN 0254 AMDA=SUMMA/RS
LN 0255 GMU=((AMDA+OMV-1.0)**2)/(AMDA*OMV)
LN 0256 IF((OMV-1.0).LE.AMDA) GOTO 304
LN 0257 OMV=AMDA+1.0
LN 0258 IF(OMV.LT.OMOPT)GOTO 357
LN 0259 OMV=OMOPT
LN 0260 GOTO 357
LN 0261 304 IF(ABS(AMDA-RAMDA).GT.0.001.OR.L.LT.20) GO TO 300
LN 0262 OMOPT=2.0/(1.0+SQRT(1.0-GMU))
LN 0263 OMS=OMOPT-((2.-OMOPT)/4.0)
LN 0264 IF((OMS-ROMS).LE.0.01) GOTO 302
LN 0265 GOTO 303
LN 0266 302 OMV=OMOPT
LN 0267 GOTO 355
LN 0268 303 OMV=OMS
LN 0269 355 IF(OMV.GT.ROMV.AND.OMV.LT.2.0)GOTO 357
LN 0270 OMV=ROMV
```



ANSI FORTRAN(2.2)/MASTER INTEGER WORD SIZE = 1, \* OPTION IS ON, 0 OPTION IS OFF 05/14/75

```
LN 0271      GOTO 357
LN 0272      30. 0MV=0MV
LN 0273      357 WRITE(61,373) L,HV,AMDA,GMU,OMUPT,QMS,SUMMA,0MV,OS,Z3
LN 0274      373 FORMAT(2X,13,2X,E11,4,4(2X,F10,4),2X,E11,4,1X,E11,4,1X,E11,4)
LN 0275      QMS=0MS
LN 0276      RAMDA=AMDA
LN 0277      999 RS=SUMMA
LN 0278      RS2=SUMMA2
LN 0279      RSI=SUMMA1
LN 0280      RSIZ=SUMMA2
LN 0281      RHV=HV
LN 0282      RHI=HI
LN 0283      LI=L
LN 0284      IF(LI.LT.51.AND.NAGY.EQ.1) GOTO 119
LN 0285      IF((.9981*SV.GE.SUMPA) GO TO 769
LN 0286      119 GOTO 141
LN 0287      2. CONTINUE
LN 0288      769 WRITE(61,998)EL
LN 0289      450 FORMAT(//5X,13,9H-ITERAG10//)
LN 0290      DO 440 J=100,105
LN 0291      WRITE(61,445) J,(AV(I,J),I=1,11)
LN 0292      445 FORMAT(1X,13,11(1X,E11,4))
LN 0293      WRITE(61,447) (AI(I,J),I=1,11)
LN 0294      447 FORMAT(4X,11(1X,E11,4)/)
LN 0295      WRITE(61,449) (AV(I,J),I=12,21)
LN 0296      449 FORMAT(4X,10(1X,E11,4))
LN 0297      446 WRITE(61,447) (AI(I,J),I=12,21)
LN 0298      WRITE(61,500)
LN 0299      500 FORMAT(//5X,7HP IQMS//)
LN 0300      DO 501 J=100,105
LN 0301      501 WRITE(61,504) J,(P(I,J),I=1,11)
LN 0302      WRITE(61,998) L,HV,SUMMA,SV,ENERG,SUMV
LN 0303      998 FORMAT(///1X,1HA,8X,13,4X,3(1X,E11,4),15X,2(2X,E11,4)///)
LN 0304      IF(LI.EQ.1.AND.LAI.EQ.1) STOP 43
LN 0305      100 CONTINUE
LN 0306      END
```

ANSI FORTRAN(2.2)/MASTER      INTEGER WORD SIZE = 1 , \* OPTION IS    ON , 0 OPTION IS    OFF      05/14/75

```
LN 0 01            SUBROUTINE HIBA(REGI,UJ,H,SUMMA,SUMMA2)
LN 0002            SV8=ABS(UJ-REGI)
LN 0003            SUMMA=SUMMA+SV8
LN 0004            SUMMA2=SUMMA2+SV8**2
LN 0005            IF (ABS(SV8).GT.ABS(H))GO TO 5
LN 0006            RETURN
LN 0007            5 H=SV8
LN 0008            RETURN
LN 0009            END
```

USASI FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS FOR HIBA

NO ERRORS



```

ANSI FORTRAN(2.2)/MASTER      INTEGER WORD SIZE = 1 , * OPTION IS  ON , 0 OPTION IS  OFF      09/14/75

LN 0001      SUBROUTINE KAPPA(T,DER,CK,EPS)
LN 0002      TKR=1689.15
LN 0003      ZK=8.09E-5
LN 0004      D=1.0
LN 0005      F1=T-D
LN 0006      F2=T+D
LN 0007      IF (T.LT.1689.15.AND.F2.GE.1689.15)GOTO 22
LN 0008      GOTO 23
LN 0009      22 D=1689.15-T-0.01
LN 0010      F2=T+D
LN 0011      23 IF (T.GT.1689.15.AND.F1.LT.1689.15)GOTO 24
LN 0012      GO TO 25
LN 0013      24 D=T-1689.15-0.01
LN 0014      F1=T-D
LN 0015      25 IF (T-TKR)Z1,20,20
LN 0016      21 E=0.
LN 0017      E1=0.
LN 0018      E2=0.
LN 0019      GO TO 33
LN 0020      21 E=1.21-3.6E-4*T
LN 0021      E1=1.21-3.6E-4*F1
LN 0022      E2=1.21-3.6E-4*F2
LN 0023      33 IF (T-TKR)2,3,3
LN 0024      2 X0=3.38E-4*(EXP(E/(2.0*ZK*T)))
LN 0025      R1=3.38E-4*(EXP(E1/(2.0*ZK*F1)))
LN 0026      R2=3.38E-4*(EXP(E2/(2.0*ZK*F2)))
LN 0027      GO TO 6
LN 0028      3 R0=81E-6*(1.0+0.0014*(T-TKR))
LN 0029      R1=81E-6*(1.0+0.0014*(F1-TKR))
LN 0030      R2=81E-6*(1.0+0.0014*(F2-TKR))
LN 0031      6 IF (T-TKR) 5,4,4
LN 0032      5 SV1=1.56E-3*T+1.65E-6*T+0.03
LN 0033      SV4=1.56E-3*F1+1.65E-6*F1+0.03
LN 0034      SV5=1.56E-3*F2+1.65E-6*F2+0.03
LN 0035      Y1=1/SV4
LN 0036      Y2=1/SV5
LN 0037      CKPF=1/SV1
LN 0038      GO TO 8
LN 0039      4 CKPF=0.
LN 0040      Y1=0.0
LN 0041      Y2=0.0
LN 0042      8 IF (T-9.0)10,9,9
LN 0043      10 CKEL=0.0
LN 0044      SV6=0.0
LN 0045      SV7=0.0
LN 0046      GO TO 11
LN 0047      9 CKEL=1.49E-8*(T/R0)*(1.0+0.105*((E/(ZK*T))+4.0)**2)
LN 0048      SV6=1.49E-8*(F1/R1)*(1.0+0.105*((E1/(ZK*F1))+4.0)**2)
LN 0049      SV7=1.49E-8*(F2/R2)*(1.0+0.105*((E2/(ZK*F2))+4.0)**2)
LN 0050      11 CK=CKPF+CKEL
LN 0051      Y1=Y1+SV6
LN 0052      Y2=Y2+SV7
LN 0053      DER=(Y2-Y1)/(2.0*D)
LN 0054      IF (T.LT.1200.0) GOTO 26

```

```
ANSI FORTRAN(2.2)/MASTER      INTEGER WORD SIZE = 1 ; * OPTION IS ON , 0 OPTION IS OFF      09/14/75

LN 0055      EPS=0.0-0.03*(I-1200.)/100.
LN 0056      RETURN
LN 0057      26 EPS=0.0+0.02*(1200.-I)/100.
LN 0058      RETURN
LN 0059      END
```

```
ANSI FORTRAN(2.2)/MASTER      INTEGER WORD SIZE = 1 , * OPTION IS  ON , 0 OPTION IS  OFF      05/14/75

LN 0001      SUBROUTINE HIB (SV5,SV4,A,AV,H,SUMMA,SUMMA2)
LN 0002      IF(SV5.EQ.0.0.GR.SV4.EQ.0.0) RETURN
LN 0003      SV3=SQRT((AV-SV4)**2+(AI-SV5)**2)
LN 0004      SUMMA=SUMMA+SV3
LN 0005      SUMMA2=SUMMA2+SV3**2
LN 0006      IF(SV3.GT.H)GOTO 5
LN 0007      RETURN
LN 0008      5 H=SV3
LN 0009      RETURN
LN 0010      END

USASI FORTRAN-DIAGNOSTIC RESULTS FOR HIB

NO ERRORS

LIA,LGO
```



A TANULMÁNYOK sorozatban eddig megjelentek:

- 1/1973 Pásztor Katalin: Módszerek Boole-függvények minirális vagy redundáns,  $\{\wedge, \vee, \neg\}$  vagy  $\{\text{NOR}\}$  vagy  $\{\text{NAND}\}$  bázisbeli, zárójeles vagy zárójel nélküli formuláinak előállítására
- 2/1973 **Вашкеви Иштван: Расчленение многосвязных промышленных процессов с помощью вычислительных машины**
- 3/1973 Ádám György: A számítógépipar helyzete 1972 második felében
- 4/1973 Bányász Csilla: Identification in the Presence of Drift
- 5/1973<sup>\*</sup> Gyürki J.-Laufer J.-Girnt M.-Somló J.: Optimalizáló adaptív szerszámgepirányítási rendszerek
- 6/1973 Szelke Erzsébet-Tóth Károly: Felhasználói Kézikönyv /USER MANUAL/ a Folytonos Rendszerek Szimulációjára készült ANDISIM programnyelvhez
- 7/1973 Legendi Tamás: A CHANGE nyelv/multiprocesszor
- 8/1973 Klafszy Emil: Geometriai programozás és néhány alkalmazása
- 9/1973 R.Narasimhan: Picture Processing Using Pax
- 10/1973 Dikuz Ágoston-Gáspár János-Várszegi Sándor: MANU-WRAP hátlap-huzalozó. MSI-TESTER integrált áramköröket mérő, TESTOMAT-C logikai hálózatokat vizsgáló berendezések ismertetése
- 11/1973 Matolcsi Tamás: Az optimum-számítás egy új módszeréről
- 12/1973 Makroprocesszorok, programozási nyelvek. Cikkgyűjtemény az NJSZT és SZTAKI közös kiadásában. Szerkesztette: Legendi Tamás

A \* -gal jelölt kivételével a sorozat kötetei az Intézet könyvtáránál megrendelhetők /Budapest, I. Uri u. 49./

- 13/1973 Jedlovszky Pál: Uj módszer bonyolult rektifikáló oszlopok vegyészmérnöki számítására
- 14/1973 Bakó András: MTA Kutatóintézeteinek bérszámfejtése számítógéppel
- 15/1973 Ádám György: Kelet-nyugati kapcsolatok a számítógépiparban
- 16/1973 Fidrich Ilona-Uzsoky Miklós: LIDI-72 Listakezelő rendszer a Digitális Osztályon, 1972. évi változat
- 17/1974 Gyürki József: Adaptív termelésprogramozó rendszer /APS/ termelő műhelyek irányítására
- 18/1974 Fikler Gyula: MINI-Számítógépes interaktív alkatrészprogramíró rendszer NC szerszámgépek automatikus programozásához
- 19/1974 Gertler, J.-Sedlak, J.: Software for process control
- 20/1974 Vámos, T.-Vassy, Z.: Industrial Pattern Recognition Experiment-A Syntax Aided Approach
- 21/1974 A KGST I.-15-1.: Diszkrét rendszerek automatikus tervezése c. témában 1973. februárban rendezett szeminárium előadásai
- 22/1974 Arató, M.-Benczúr, A.-Krámli, A.-Pergel, J.: Stochastic Processes, Part I.
- 23/1974 Benkó Sándor-Renner Gábor: Erősen telített mágneses körök számítógépes tervezési módszere
- 24/1974 Kovács György-Franta Lászlóné: Programcsomag elektronikus berendezések hátlaphuzalozásának tervezésére
- 25/1974 Járdán R. Kálmán: Háromfázisú tirisztoros inverterek állandosult tranziens jelenségei és belső impedanciája
- 26/1974 Gergely József: Numerikus módszerek sparse mátrixokra
- 27/1974 Somló János: Analitikus optimalizálás
- 28/1974 Vámos Tibor: Tárgyfelismerési kísérlet nyelvimódszerekkel

- 29/1974 Mórítz Péter: Vegyész-mérnöki számítási módszerek fázis-egyensúlyok és kémiai egyensúlyok vizsgálatára
- 30/1974 Vámos, T.-Vassy, Z.: THE BUDAPEST ROBOT -Pragmatic intelligence-
- 31/1975 Nagy István: Frekvenciásos, középfrekvenciás inverter elmélete
- 32/1975 Singer Dénes-Borossay Gyöngyi-Koltai Tamás: Gázhálózatok optimális irányítása különös tekintettel a Fővárosi Gázművek hálózataira
- 33/1975 Vámos, T.-Vassy, Z.: Limited and Pragmatic Robot Intelligence
- Mérő, L.-Vassy, Z.: A Simplified and Fastened Version of the Hueckel Operator for Finding Optimal Edges in Pictures
- Галло В.:Программа для распознавания геометрических образов, основанная на лингвистическом методе описания и анализа геометрических структур**
- 34/1975 Nemes László: Pattern Identification Method for Industrial Robots by Extracting the main Features of Objects
- 35/1975 Garádi János-Krámli András-Ratkó István-Ruda Mihály: Statisztikai és számítástechnikai módszerek alkalmazása kórházi morbiditás vizsgálatokban



