tanulmányok 11/1973

MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

Az optimum-számítás egy új módszeréről

Írta:
MATOLCSI TAMÁS

Lektorálta:
dr. KÓSA ANDRÁS

TANULMÁNYOK 11/1973

736357 MTA KESZ Sokszorosító. F. v.: Szabó Gyula

BEVEZETÉS

A szélsőérték-problémák igen korán megjelentek a matematikai kutatásokban. Az idők folyamán meglehetősen változatos feladatok bukkantak elő; ezeknek egy-egy csoportját a matematika fejlődése során sikerült közös elv alapján tárgyalni. Igy született meg, mint a matematika többé-kevésbé önálló ága, az egyváltozós függvények szélsőérték-feladatai után a variációszámitás, a nem lineáris programozás és az optimális irányitás. Csak az utóbbi években sikerült, a funkcionálanalizis eszközeinek felhasználásával, egységesen tárgyalni ezeket a különálló területeket. E nagy szintézis alapja A.J.Dubovickij és A.A.Miljutyin tétele [1] funkcionálok extrémumának szükséges feltételéről.

Szemináriumi összefoglalónkban bebizonyitjuk a Dubovickij-Miljutyin-féle tételt, majd egy-egy feladaton keresztül bemutatjuk, hogyan alkalmazható ez a tétel a különféle klasszikus problémára. Mindehhez egy kivétellel csak egyszerü eszközökre lesz szükségünk, amelyek szinte minden bevezető jellegü funkcionálanalizis könyvében megtalálhatók.

A dolgozat a Valószinüségszámitási és Matematikai Statisztika Osztályon, a 3.11.7. "Irányitáselmélet" c. intézeti alapkutatási témában készült.

Jelölések

$\exists$	létezik
$:=$	definiáló egyenlőség
$\leadsto$	úgy, hogy
$\Longrightarrow$	/ebből/ következik
$\forall$	minden
$\mathring{\forall}$	mértéktéren "majdnem minden"
$\mathbb{C}$	a komplex számok testje
$\mathbb{R}_n$	az n dimenziós euklideszi tér
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_1$
$\emptyset$	az üres halmaz
$\mathring{H}$, $\bar{H}$, $\langle H \rangle$	a H halmaz belseje, lezártja és konvex burka
$H_1 \setminus H_2$	a H_1 és a H_2 halmaz "halmazelméleti" különbsége
D_F	az F leképezés értelmezési tartománya
$F:X \to Y$	F leképezés az X halmazról az Y halmazba
$F \in X \to Y$	$F: X \supset D_F \to Y$
$\mathcal{L}/X,Y/$	az X topologikus vektortérről az Y topologikus vektortérbe ható folytonos lineáris leképezések halmaza
X'	$\mathcal{L}/X,C/$, az X duálisa
$\langle \, , \rangle$	leképezés a duális elemei által; azaz, ha $x \in X$ és $f \in X'$, akkor $\langle f,x \rangle = f/x/$. Ha hangsulyozni akarjuk, mely térről van szó, indexszel jelöljük, pl: $\langle \, , \rangle_{\mathbb{R}_n}$
$C^{/n/}(T)$	$\{x : T \to \mathbb{R}_n,\ T = \bar{T} \subset \mathbb{R},\ x \text{ folytonos}\}$
$L_{\infty}^{/m/}(T)$	$\{u : T \to \mathbb{R}_m,\ T \subset \mathbb{R},\ \Vert u/t/ \Vert_{\mathbb{R}_m} \leqq c_u \ \mathring{\forall} t \in T\}$

Felhivjuk a figyelmet még egy jelölésre: $x/\cdot/$ és $u/\cdot/$ jelöli a $C^{/n/}(T)$, illetve az $L_{\infty}^{/m/}(T)$ elemeit, ha hangsulyozni akarjuk, hogy függvényekről van szó, vagy meg akarjuk őket különböztetni $\mathbb{R}_n$, illetve $\mathbb{R}_m$ elemeitől; $x/t/$ és $u/t/$ az adott függvénynek a $t \in T$ pontban felvett értéke. Viszont a variációszámitásnál a segédváltozó ψ esetében $\psi/t/$ magát a függvényt jelöli.

I. A Dubovickij - Miljutyin-féle tétel

Legyen X lokálisan konvex topológikus vektortér és $F\in X\to\mathbb{R}$ funkcionál; legyen adott továbbá egy $Q\subset D_F$ halmaz és keressük a funkcionál minimumát /minimumait/ ezen a halmazon. Tegyük fel, hogy $x_0\in Q$ minimum-hely, azaz létezik x_0-nak egy U környezete úgy, hogy

$$F/x_0/\leqq F/x/ \qquad (x\in U\cap Q).$$

Kérdés, milyen feltételeknek kell teljesülnie ehhez?

Nyilvánvalóan megköveteliink a funkcionáltól és a korlátozó halmaztól bizonyos jó tulajdonságokat, hogy melyeket, azt az alábbi vizsgálódások alapján nyert meghatározásokból fogjuk látni.

1.1 Definició: $h_0\in X$ $(h_0\neq 0)$ az F funkcionál csökkenési iránya az $x_0\in D_F$ pontban, ha $\exists$ h_0-nak U környezete, továbbá $\alpha=\alpha/F,x_0,h_0/<0$ és $\varepsilon_0=\varepsilon_0/F,x_0,h_0/>0$ szám $\rightsquigarrow$ $\forall$ $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ és $h\in U$ esetén

$$F/x_0+\varepsilon h/\leqq F/x_0/+\varepsilon\alpha.$$

1.2 Állitás: az F funkcionál egy adott pontbeli csökkenési irányai nulla-csucsu nyilt kupot alkotnak /csökkenési kup/.*

*Természetesen előfordulhat, hogy ez a "kup" az üres halmaz.

Bizonyitás: az 1.1 definició jelöléseit alkalmazva:

a/ λh_0 is csökkenési irány, ha $\lambda > 0$, mert λU, $\lambda\alpha$ és ε_0/λ mennyiségekkel kielégiti a definició követelményeit; következésképp a szóban forgó halmaz nulla-csucsu kup.

b/ $\forall\, h \in U$ csökkenési irány, mert U, α, ε_0 mennyiségekkel maga is eleget tesz a definició feltételeinek; tehát a halmaz nyilt.

Bizonyos értelemben hasonló fogalmakat célszerü bevezetni a Q "korlátozó" halmazzal kapcsolatban is.

1.3 Definició: $h_0 \in X$ $(h_0 \neq 0)$ az $x_0 \in Q$ pontban lehetséges irány a Q halmazra vonatkozóan, ha $\exists$ h_0-nak U környezete és $\varepsilon_0 = \varepsilon_0/Q$, $x_0, h_0/ > 0$ szám $\leadsto \forall h \in U$ és $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esetén

$$x_0 + \varepsilon h \in Q.$$

1.4 Állitás: a Q halmazra vonatkozóan egy adott pontbeli lehetséges irányok nulla-csucsu nyilt kupot alkotnak /lehetséges irányok kupja/.

Bizonyitás: teljesen hasonlóan, mint 1.2-nél.

Nyilvánvalóan, ha $\mathring{Q} = \emptyset$, a lehetséges irányok kupja üres. A következő fogalmak már tartalmasak erre az esetre is.

1.5 Definició: $h_0 \in X$ az $x_0 \in Q$ pontban a Q halmaz érintője, ha

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0 \leadsto \forall\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \text{ esetén } \exists\ x/\varepsilon/ \in Q \leadsto$$

$$x/\varepsilon/ = x_0 + \varepsilon h_0 + r/\varepsilon/,$$

ahol $r(\varepsilon)\in X$ olyan, hogy az origónak $\forall$ U környezetéhez

$$\exists\ \varepsilon_u>0 \ \rightsquigarrow\ r(\varepsilon)/\varepsilon \in U, \text{ ha } 0<\varepsilon<\varepsilon_u .$$

<u>1.6 Állitás:</u> a Q halmaz egy-adott-pontbeli érintői nulla-csucsu kupot alkotnak /érintési kup/.

<u>Megjegyzés:</u> a/ az érintési kup már nem feltétlenül nyilt;
b/ minden lehetséges irány egyben érintő is, de a forditott állitás nem igaz.

A csökkenési irányok és a lehetséges irányok igen szemléletesen, természetes módon kapcsolódnak a funkcionál minimumának kereséséhez; az is látszik, hogy a minimum létezésének szükséges feltétele az, hogy a csökkenési kup és a lehetséges irányok kupja diszjunkt legyen, s ez szemlélteti, miért foglalkozik majd az 1.10 lemma kupos közös részével.

Mint láttuk, mind a három esetben a minket érdeklő irányok kupot alkotnak. A továbbiakban lényeges szerepet játszanak a kupok és az ugynevezett adjungált kupok, ezért ezek elméletéből az idevágó részt a Függelékben közöljük.

Mielőtt továbbmennénk, megemlitjük még, hogy a gyakorlati alkalmazásokban általában több mellékfeltétel adja a megszoritást, azaz

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i ,$$

és az egyes Q_i-k közül némelyeknek van belső pontja, némelyeknek nincs; ha $\overset{o}{Q}_i = \emptyset$, egyenlőség tipusu mellékfeltételről szokás beszélni, ugyanis ilyenkor általában valamely G_i funkcionál adja meg a halmazt $Q_i = \{ x: G_i/x/ = 0 \}$ alakban; ugyanigy, ha $\overset{o}{Q}_i \neq \emptyset$, akkor a mellékfeltétel egyenlőtlenség tipusu.

Ismeretesek a konvex halmazok "jó" tulajdonságai; ezért a továbbiakban mindig megköveteljük, hogy az előzőekben definiált kupok konvexek legyenek; ez a kikötés azonban még mindig gyengébb, mint a klasszikus elméletekben a szokásos differenciálhatósági feltételek.

És most következik a Dubovickij - Miljutyin-féle tételhez egyenes utat mutató

<u>1.7 Lemma:</u> legyenek $K_i \subset X$ $\left(i = 1,2,\ldots,n+1\right)$ nulla-csucsu konvex kupok, $\overset{o}{K}_j \neq \emptyset$ $\left(j = 1,\ldots,n\right)$; ilyen feltételek mellett

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i = \emptyset$$

akkor és csak akkor, ha $\exists$ $f_i \in K_i^*$ $\left(i = 1,\ldots,n+1\right)$, nem mind nulla, melyekre

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = 0$$

$/K_i^* \subset X'$ a megfelelő adjungált kupok, $i = 1,\ldots,n+1/$.

Bizonyitás; szükségesség:

$$K := \bigcap_{j=1}^{n} K_j$$

a/ ha $K \neq \emptyset$, lévén nyilt és konvex, diszjunkt K_{n+1}-től, a Hahn - Banach tétel szerint $\exists\, 0 \neq f \in X' \leadsto$

$$\langle f,x\rangle \geqq \alpha \quad x \in K \quad \text{és} \quad \langle f,x\rangle \leqq \alpha \quad x \in K_{n+1}$$

Könnyen belátható, hogy $\alpha = 0$ vehető; szemléletesen: ha egy kup egy hipersik egyik oldalán van, akkor ugyancsak egyik oldalára esik a csucsán átmenő, az adott hipersikkal párhuzamos hipersiknak is. Tehát $f \in K^*$ és igy F.11 szerint

$$f = \sum_{j=1}^{n} f_j, \text{ ahol } f_j \in K_j^*, \quad j = 1,\dots,n.$$

Ezután $f_{n+1} := -f$, nyilván $f_{n+1} \in K_{n+1}^*$ és $\sum_{i=1}^{n+1} f_i = 0$.

b/ ha $K = \emptyset$, akkor $\exists\, 1 \leqq m < n \leadsto \sum_{i=1}^{m} K_i \neq \emptyset$.

Alkalmazzuk az előző gondolatmenetet n helyett m-re, nyerünk $f_i \in K_i^*$, $i = 1,\dots,m+1$ funkcionálokat, $f_{m+1} \neq 0$ és $\sum_{i=1}^{m+1} f_i = 0$. Ezután $f_{m+2} := \dots := f_{n+1} := 0$, és ezzel a szükségesség bizonyitását befejeztük.

Elégségesség:

Tegyük fel, hogy $\exists\, 0 \neq x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n+1} K_i$; az eredeti feltétel szerint $\exists\, 1 \leqq k \leqq n \leadsto f_k \neq 0$, mert különben f_{n+1} is, azaz mind nulla lenne; igy, lévén K_k nyilt és $f_k \in K_k^*$, $f_k/x_o/ > 0$, azaz

$$0 = (f_1 + f_2 + \dots + f_{n+1})(x_o) \geqq f_k/x_o/ > 0$$

ellentmondást ad, tehát a feltevésünk hamis.

<u>1.8 Tétel:</u> /Dubovickij - Miljutyin/ legyen x_o az X lokálisan konvex vektortéren értelmezett F funkcionálnak lokális minimumhelye, a $Q = \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i$ halmazon, ahol $\mathring{Q}_j \neq \emptyset$ $(j = \ ,\dots,n)$ és $\mathring{Q}_{n+1} = \emptyset$. Jelölje K_o az F csökkenési kupját x_o-ban, K_j a Q_j-re vonatkozó lehetséges irányokat x_o-ban $(j = 1,\dots,n)$ és K_{n+1} a Q_{n+1} érintési kupját x_o-ban. Legyen K_i konvex $(i = 0, 1,\dots,n+1)$.

Ekkor $\exists$ nem mind nulla $f_i \in K_i^*$ $(i = 0,1,\dots,n+1)$ úgy, hogy

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i = 0.$$

<u>Bizonyitás:</u> azt látjuk be, hogy $\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \emptyset$, s ez az 1.10 lemmával azonnal adja a kivánt eredményt.

Tegyük fel, hogy a kupok metszete nem üres, vagyis $\exists$ $h_o \in \bigcap_{i=0}^{n+1} K_i$; ekkor a csökkenési, illetve a lehetséges irányok definiciója szerint $\exists$ h_o-nak olyan U környezete és olyan $\alpha < 0$, $\varepsilon_o > 0$ számok, hogy $\forall h \in U$ és $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$ esetén

$$x_0 + \varepsilon h \in Q_i \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \circledast$$

és

$$F/x_0 + \varepsilon h/ \leqq F/x_0/ + \varepsilon\alpha$$

/az U környezet az egyes Q_i-k szerint lehetséges irányok környezetének és az F csökkenési kupjához tartozó környezetnek a metszete; $\varepsilon_0 : = \min \left\{ \min\limits_{1 \leqq i \leqq n} \varepsilon_0/Q_i, x_0, h_0/, \ \varepsilon_0/F, x_0, h_0/ \right\}$/.

Lévén h_0 a Q_{n+1} érintője, tudjuk, hogy

$$\exists \quad x/\varepsilon/ = x_0 + \varepsilon h_0 + r/\varepsilon/ \in Q_{n+1},$$

és $\exists \ \varepsilon_1 > 0 \rightsquigarrow r(\varepsilon)/\varepsilon \in U - h_0$, ha $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$,

azaz $h/\varepsilon/ : = h_0 + r(\varepsilon)/\varepsilon \in U$

Ekkor viszont $\circledast$ szerint, ha $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$,

$$x/\varepsilon/ = x_0 + \varepsilon h/\varepsilon/ \in Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

vagyis $x/\varepsilon/ \in \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} Q_i$ kielégiti a mellékfeltételeket, s emellett

$$F(x(\varepsilon)) \leqq F/x_0/ + \varepsilon\alpha < F/x_0/,$$

és ez ellentmond annak, hogy x_0 lokális minimumhely; igy a tétel állitásával ellentétes feltevésünk helytelennek bizonyult.

Megjegyzések: a/ úgy tünik, a tétel általánosságát csökkenti, hogy egyenlőség-tipusu mellékfeltételt csak egyet engedtünk meg. Azonban, ha Q_k $k = 1,\dots,m$ ilyenek, elég a $\bigcap_{k=1}^{m} Q_k$ halmazt tekintenünk, s a gyakorlatban ennek a halmaznak az érintési kupját megtalálni általában nem nehezebb, mint az egyes Q_k-ét.

b/ Bizonyos alkalmazásokban fontos tudni, hogy éppen $f_0 \neq 0$. Jól láthatólag ehhez elegendő, hogy $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i \neq \emptyset$ teljesüljön.

c/ A tétel feltevései kizárják azt a lehetőséget, hogy ugynevezett "csücsök-pontokat" is számitásba vehessünk. A csücsök-pont tipikus példája: Q két kivülről érintkező kör belsejének komplementere, x_0 a közös érintkezési pont. Jelölje h_0 a két kör közös érintőjének irányvektorát: ez az x_0 pontban "majdnem lehetséges" irány:

$$x_0 + \varepsilon h_0 \in Q \qquad \varepsilon > 0$$

de nincs a h_0-nak egyetlen környezete sem, hogy az abban levő pontokra is teljesülne ez. A tétel bizonyitásából azonban kitünik, hogy ha $Q_{n+1} = X$ /nincs egyenlőség tipusu megszoritás/, akkor az ilyen "majdnem lehetséges" és a hasonlóan értelmezett "majdnem csökkenési" irányokat is meg lehet engedni és igaz marad a tétel.

II. Segédeszközök a Dubovickij - Miljutyin-tétel alkalmazásához

Az 1.11 tételnek az egyes konkrét feladatokra való alkalmazásánál a következőket kell tehát meghatároznunk:

1/ a minimalizálandó funkcionál csökkenési kupját az értelmezési tartománya pontjaiban;

2/ az egyenlőtlenség tipusu mellékfeltételeket adó halmazok pontjaiban a lehetséges irányok kupját;

3/ az egyenlőség tipusu halmazok pontjaiban az érintési kupot;

4/ az 1 - 3/ pontban leirt kupokhoz az adjungált kupot.

A Dubovickij - Miljutyin-tétel alkalmazásának nagy előnye, hogy külön lehet vizsgálni az egyes mellékfeltételeket és a funkcionált: ha egy bizonyos mellékfeltételre, illetve funkcionálra megtaláltuk a kivánt kupot és az adjungált kupot, ez közvetlenül alkalmazható minden olyan feladatban, amelyben ugyanez a mellékfeltétel vagy funkcionál szerepel.

A következőkben megadunk néhány összefüggést, amelyek bizonyos feltételek teljesülése mellett lehetőséget nyujtanak ahhoz, hogy a vázolt feladatot megoldjuk.

1. Csökkenési irányok

Bevezetőben emlékeztetünk a Gateaux -és a Fréchet-féle derivált definiciójára, mert ezek a fogalmak alapvetően fontosak a továbbiakban.

2.1 Definició: legyen X lineáris vektortér, $F : X \to \mathbb{C}$; az F funkcionál differenciálható a $h \in X$ irány mentén az $x_0 \in X$ pontban, ha létezik az

$$F'/x_0,h/ := \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{F/x_0 + \varepsilon h/ - F/x_0/}{\varepsilon}$$

ugynevezett Gateaux-féle derivált.

2.2 Definició: legyen X és Y Banach-tér, $P : X \to Y$; a P leképezés differenciálható az $x_0 \in X$ pontban, ha létezik $P'/x_0/ \in \mathcal{L}/X,Y/$ ugynevezett Fréchet-féle derivált úgy, hogy $\forall\, h \in X$-re

$$P/x_0 + h/ = P/x_0/ + P'/x_0/\, h + r/x_0,h/,$$

ahol $\| r/x_0,h/\| = o/\|h\|/$ ("kis ordó" $\|h\|$).

Megjegyzés: ha $Y = \mathbb{C}$, azaz P funkcionál, akkor természetesen $P'/x_0/ \in X'$

Ezután rátérhetünk a csökkenési irányok kupjának tanulmányozására; jelölje K_{cs} a minimalizálandó F funkcionál csökkenési kupját az $x_0 \in X$ pontban.

2.3 Állitás: ha $h \in K_{cs}$ és $\exists F'/x_0,h/$, akkor $F'/x_0,h/ < 0$.

Bizonyitás: a csökkenési irányok és a Gateaux-derivált definiciójából közvetlenül adódik.

2.4 Állitás: ha X Banach-tér és F Lipschitz-feltételnek tesz eleget $x_0 \in X$ egy környezetében, azaz $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ és $\beta > 0$
$|F/x_1/ - F/x_2/| \leq \beta \| x_1 - x_2\|$ $\forall$ olyan x_1 és $x_2 \in X$-re, hogy $\| x_1 - x_0\| \leq \varepsilon_0$, $\| x_2 - x_0\| \leq \varepsilon_0$, továbbá, ha $F'/x_0,h_0/ < 0$, akkor $h_0 \in K_{cs}$.

Bizonyitás:

$$\xi := F'/x_o, h_o/.$$

Az iránymenti derivált definiciójából következik, hogy

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \rightarrow F/x_o + \varepsilon h_o/ \leq F/x_o/ - \frac{\varepsilon\xi}{2}, \text{ ha } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1 .$$

Legyen $h \in X$ olyan, hogy $\| h - h_o \| \leq \frac{\xi}{4\beta}$; ekkor, ha

$$0 < \varepsilon < \min \{\varepsilon_o, \varepsilon_1\},$$

akkor

$$F/x_o + \varepsilon h/ \leq F/x_o + \varepsilon h_o/ + \beta \| \varepsilon h - \varepsilon h_o \| \leq$$

$$\leq F/x_o/ - \frac{\varepsilon\xi}{2} + \beta\varepsilon \frac{\xi}{4\beta} = F/x_o/ - \frac{\varepsilon\xi}{4},$$

vagyis h_o egy teljes környezetére fennáll a kivánt egyenlőtlenség, s igy $h_o \in K_{cs}$.

2.5 Tétel: ha X Banach-tér, F Lipschitz-feltételnek tesz eleget $x_o \in X$ egy környezetében, $\exists F'/x_o, h/ \ \forall h \in X$-re és $F'/x_o, h/$ mint h függvénye konvex funkcionál, akkor

$$K_{cs} = \{ h: F'/x_o, h/ < 0 \}. \quad ⊛$$

Bizonyitás: a 2.3 és 2.4 állitásból azonnal következik; továbbá igen egyszerü meggyőződni arról, hogy tetszőleges C konvex funkcionálra az $\{x: C/x/ < \alpha\}$ halmaz konvex.

2.6 Tétel: legyen F konvex és folytonos;

ekkor $\exists F'/x_0,h/ \; \forall h\in X$ és $\forall x_0\in X$,

$F/x_0 + h/ \geq F/x_0/ + F'/x_0,h/$,

$K_{cs} = \{h: F'/x_0,h/ < 0\}$ és K_{cs} konvex halmaz.

Bizonyitás: rögzitsük az x_0 és h elemeket, és vizsgáljuk a

$$\varphi/\varepsilon/ := F/x_0 + \varepsilon h/$$

egyváltozós függvényt. F tulajdonságai miatt φ folytonos és konvex; a konvexségből következik, hogy $0<\lambda<1$ és $\varepsilon>0$ esetén

$$\frac{\varphi/\lambda\varepsilon/ - \varphi/0/}{\lambda\varepsilon} \leq \frac{\varphi/\varepsilon/-\varphi/0/}{\varepsilon} =: \phi/\varepsilon/ \qquad \circledast$$

A fenti egyenlőtlenségben $\delta := \lambda\varepsilon < \varepsilon$ mellett rögtön látható, hogy $\phi/\varepsilon/$ monoton csökken ε csökkenésével. Továbbá a

$0 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(-1) + \frac{1}{1+\varepsilon}\varepsilon$ kombinációval kifejtve $\varphi/0/$-t a konvexitás szerint, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\varphi/\varepsilon/-\varphi/0/}{\varepsilon} \geq \varphi/-1/-\varphi/0/$$

vagyis $\phi/\varepsilon/$ alulról korlátos, igy

$$\exists \quad F'/x_0,h/ = \lim_{\varepsilon\to 0} \phi/\varepsilon/.$$

Ha $\circledast$.-ban $\varepsilon=1$ és $\lambda\to+0$, nyerjük:

$$F'/x_0,h/ \leq F/x_0 + h/ - F/x_0/.$$

A funkcionál differenciálhatóságára vonatkozó állításokat tehát beláttuk.

Legyen egy $h_o \in X$-re $F'/x_o,h_o/ < 0$; ez a definició szerint azt jelenti, hogy $\exists\, \varepsilon_o > 0$, amelyre

$$-\delta := F/x_o + \varepsilon_o h_o/ - F/x_o/ < 0.$$

Lévén F folytonos, $\exists\, h_o$-nak olyan U környezete, hogy

$$\left| F/x_o + \varepsilon_o h_o/ - F/x_o + \varepsilon_o h/ \right| \leq \frac{\delta}{2} \qquad (h \in U),$$

$$\Longrightarrow F/x_o + \varepsilon_o h/ \leqq F/x_o/ - \frac{\delta}{2}.$$

Ezután F konvexségéből, ha $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$, következik, hogy

$$F/x_o + \varepsilon h/ \leqq \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}\right) F(x_o) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} F/x_o + \varepsilon_o h/ \leqq F/x_o/ - \frac{\varepsilon\delta}{2\varepsilon_o},$$

azaz $h_o \in K_{cs}$; a 2.3 állitásból már adódik az ellentétes irányu tartalmazás, vagyis végül $K_{cs} = \{ h: F'/x_o,h/ < 0\}$.

Végezetül F konvex voltát kihasználva, ha felirjuk az iránymenti deriváltat a definiciója szerint, azonnal látszik, hogy $F'/x_o,h/$ konvex h-ban, s igy a 2.5 tétel bizonyitásában szereplő indoklással K_{cs} is konvex.

<u>2.7 Tétel:</u> ha X Banach-tér és F Fréchet-deriválható az $x_o \in X$ pontban, akkor $K_{cs} = \{h: \langle F'/x_o/,h \rangle < 0\}$ és K_{cs} konvex halmaz.

<u>Bizonyitás:</u> a 2.3 és 2.4 állitás következményeként adódik K_{cs} alakja, s ez a halmaz vagy féltér, vagy üres, tehát mindenképpen konvex.

2. Lehetséges irányok

Jelölje K_1 az $x_0 \in Q$ pontban a Q-ra vonatkozóan lehetséges irányok kupját. Mint már megjegyeztük, csak a $\overset{o}{Q} \neq \emptyset$ esetet érdemes vizsgálni, mert különben a szóban forgó kup üres; továbbá világos az is, hogy csak az az eset érdekes, amikor x_0 a Q határának eleme, egyébként ugyanis $K_1 = X$.

Vizsgáljunk először olyan halmazokat, amelyek

$$Q = \{ x: G/x/ \leq \lambda \}$$

alakban vannak megadva, ahol G valamely folytonos funkcionál; ekkor nyilván $G/x_0/ = \lambda$ a határ $\forall x_0$ elemére.

Jelölje K_G a funkcionál csökkenési kupját az x_0 pontban.

2.8 Állitás: $K_G \subset K_1$.

Bizonyitás: ha $h_0 \in K_G$, akkor a definició szerint $\exists$ U környezete a h_0-nak és $\exists \varepsilon_0 > 0 \leadsto$

$$G/x_0 + \varepsilon h/ < G/x_0/ \quad (\forall h \in U \quad \text{és} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0),$$

vagyis

$$x_0 + \varepsilon h \in Q.$$

2.9 Állitás: ha $\exists G'/x_0, h/$ $(\forall h \in X)$ és konvex h-ban, továbbá $\exists h_0 \in X \leadsto G'/x_0, h_0/ < 0$, akkor

$$K_1 \subset \{h: G'/x_0, h/ < 0\}.$$

Bizonyitás: legyen $h \in K_1$; ekkor $\exists \varepsilon_0 > 0 \rightsquigarrow$

$$x_0 + \varepsilon h \in Q \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0),$$

azaz

$$G/x_0 + \varepsilon h/ \leqq G/x_0/ \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0),$$

és ebből

$$G'/x_0,h/ \leqq 0.$$

Továbbá lévén K_1 nyilt, $\exists$ h-nak U környezete $\rightsquigarrow U \subset K_1$; válasszunk olyan $\lambda > 0$ számot, hogy

$$h_\lambda := h - \lambda /h_0 - h/ \in U$$

teljesüljön. Ekkor

$$G'/x_0,h_\lambda / \leqq 0,$$

és az iránymenti derivált konvexségéből:

$$G'/x_0,h/ = G'(x_0, \frac{1}{1+\lambda} h_\lambda + \frac{\lambda}{1+\lambda} h_0) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{1+\lambda} G'/x_0,h/ + \frac{\lambda}{1+\lambda} G'/x_0,h_0/ < 0.$$

2.10 Tétel: teljesüljön a következő három feltétel közül valamelyik:

a/ X Banach-tér, G Lipschitz-feltételnek tesz eleget x_0 egy környezetében, $\exists\, G'/x_0,h/$ $(\forall h \in X)$ és konvex h-ban, $\exists\, h_0 \in X$ úgy, hogy $G'/x_0,h_0/ < 0$;

b/ G folytonos konvex funkcionál és $\exists x \in X \nearrow G/x/ < G/x_0/$;

c/ X Banach-tér, G differenciálható x_0-ban és $G'/x_0/ \neq 0$, ekkor

$$K_1 = K_G = \{h: G'/x_0, h/ < 0\}.$$

Bizonyitás: azonnal következik az előző két állitásból, valamint a 2.5, 2.6 és 2.7 tételekből.

Végül nézzünk meg egy esetet, amikor a mellékfeltételt nem funkcionál irja elő:

2.11 Tétel: legyen Q konvex halmaz, ekkor

$$K_1 = \{h: h = \lambda/x - x_0/, \; x \in \overset{o}{Q}, \; \lambda > 0\}.$$

A bizonyitás magától értetődik.

3. Érintési irányok

Jelölje $K_é$ az $x_0 \in Q$ pontban a Q halmaz érintési kupját.

Bizonyitás nélkül közlünk egy tételt, amely igen jól használható az érintési kup meghatározásánál. A tétel bizonyitása nem tulságosan egyszerü: ez az a pontja az elméletnek, amely elemi eszközökkel hozzáférhetetlen. A bizonyitással kapcsolatban az irodalomra utalunk [2].

2.12 Tétel: legyen X és Y Banach-tér, $P \in X \to Y$, $P/x_0/ = 0$; legyen P folytonosan differenciálható az x_0 egy környezetében és legyen $P'/x_0/$ ráképezés /szürjekció/. Tekintsük a $Q = \{x: P/x/ = 0\}$ halmazt. Ekkor

$$K_é = \{h: \langle P'/x_0/, h\rangle = 0\}.$$

4. Adjungált kupok

Az adjungált kupok általános tulajdonságai, amelyeket ebben a részben igen sokszor idézünk, az A. Függelékben találhatók meg. A továbbiak tanulmányozása előtt célszerü legalábbis átfutni a függeléket.

2.13 Állitás: Legyen $K \subset X$ lineáris altér.
Ekkor $K^* = \{ f \in X' : \langle f,x \rangle = 0 \ \ \forall x \in K \}$ /K^* a K annullátora/.

Bizonyitás: legyen $f \in X'$ és tegyük fel, hogy $\exists x \in K \sim$
$\langle f,x \rangle > 0$; mivel $-x \in K$ szintén, $\langle f,-x \rangle = - \langle f,x \rangle < 0$
$\Longrightarrow f \notin K^*$

2.14 Állitás: legyen $f \in X'$;

a/ $K_1 := \{x \in X : \langle f,x \rangle = 0\}$, ekkor $K_1^* = \{\lambda f, \ -\infty < \lambda < \infty\}$;

b/ $K_2 := \{x \in X : \langle f,x \rangle \geq 0\}$, ekkor $K_2^* = \{\lambda f, \ 0 \leq \lambda < \infty\}$;

c/ $K_3 := \{x \in X : \langle f,x \rangle > 0\}$, ekkor $K_3^* = \begin{cases} X', & \text{ha } f = 0 \\ K_2^*, & \text{ha } f \neq 0. \end{cases}$

Bizonyitás:

a/ ha $g \in K_1$, akkor a 2.13 állitás szerint $\langle g,x \rangle = 0$ $(\forall x \in K_1)$
$\Longrightarrow g = \lambda f, \ -\infty < \lambda < \infty$

b/ lévén $K_1 \subset K_2$, $K_2^* \subset K_1^*$ /ld. F.4./ igy ha $\lambda f \in K_2$ és
$\lambda \langle f,x \rangle \geq 0 \Longrightarrow \lambda \geq 0$;

c/ ha $f = 0$, akkor $K_3 = \emptyset$ és igy $K_3 = X'$;
ha $f \neq 0$, akkor $\overline{K_3} = K_2$ és igy $K_3^* = K_2^*$ /ld. F.6./.

A konvex halmazok jelentős szerepet játszanak az egész elméletben. A konvex halmazokkal kapcsolatos következő tétel is fontos alkalmazást nyer a későbbiekben.

2.15 Tétel: X lokálisan konvex vektortér, $Q \subset X$ zárt konvex halmaz; jelölje, mint korábban, $K_é$ illetve K_l az $x_o \in Q$ pontban a halmaz érintési kupját, illetve lehetséges irányainak kupját; továbbá

$Q^* := \{ f \in X' : \langle f,x\rangle \geq \langle f,x_o\rangle \ , \ \forall x \in Q \}$ /vagyis Q^* az x_o-beli

támasztósikok funkcionáljainak halmaza/.

Ekkor $K_é^* = Q^*$, és ha $\overset{o}{Q} \neq \emptyset$, akkor $K_l^* = Q^*$.

Bizonyitás: legyen $f \in Q^*$ és $h \in K_é$; az érintési irány definiciója szerint $\exists \ \varepsilon_o > 0 \rightsquigarrow$

$$x/\varepsilon/ := x_o + \varepsilon h + r/\varepsilon/ \in Q \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_o),$$

ahol $r/\varepsilon/ \in X$ olyan, hogy a nullának $\forall U$ környezetéhez $\exists \varepsilon_U > 0 \rightsquigarrow r(\varepsilon)/\varepsilon \in U \quad \forall \, 0 < \varepsilon < \varepsilon_u$ esetén, Igy tehát, lévén $\langle f,x/\varepsilon/\rangle \geq \langle f,x_o\rangle$,

$$\langle f,h\rangle = \frac{\langle f,x/\varepsilon/\rangle - \langle f,x_o\rangle}{\varepsilon} - \frac{\langle f,r/\varepsilon/\rangle}{\varepsilon} \geq - \langle f, \frac{r/\varepsilon/}{\varepsilon}\rangle .$$

Könnyü belátni $r/\varepsilon/$ tulajdonságaiból, hogy $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \langle f, \frac{r/\varepsilon/}{\varepsilon}\rangle =$

$= 0$, s igy $\langle f,h\rangle \geq 0$, azaz $f \in K_é^*$.

Viszont, ha $f \in K_é^*$ és $x \in Q$, akkor $h := x - x_o$ érintő x_o-ban, mert

$$x/\varepsilon/ := x_o + \varepsilon h = (1 - \varepsilon)x_o + \varepsilon x \in Q$$

a konvexség miatt; igy tehát

$$0 \leq \langle f,h \rangle = \langle f,x \rangle - \langle f,x_o \rangle ,$$

ami épp azt jelenti, hogy $f \in Q^*$, s ezzel beláttuk, hogy $K_é^* = Q^*$.

Továbbá, ha $\overset{o}{Q} \neq \emptyset$, akkor a 2.11 tétel szerint

$$K_1 = \{ h : h = \lambda/x - x_o/, \ \lambda \geq 0, \ x \in \overset{o}{Q} \}$$

s igy, ha $f \in K_1^*$, akkor $\lambda = 1$ értékhez tartozó érintőket tekintve

$$\langle f,x \rangle \geq \langle f,x_o \rangle \qquad (x \in \overset{o}{Q})$$

adódik. Mivel $\overline{\overset{o}{Q}} = \overline{Q}$ /ez a konvex halmazok elemi tulajdonsága/, f folytonosságából azt kapjuk, hogy

$$\langle f,x \rangle \geq \langle f,x_o \rangle \qquad (x \in Q),$$

azaz $f \in Q^*$; tehát beláttuk, hogy $K_1^* \subset Q^*$.

Viszont $K_1 \subset K_é$ /ld. 1.8 állitás/, igy $K_1^* \supset K_é^*$ /ld. F.4./, s a tétel első részéből már következik, hogy $K_é^* = Q^*$, igy $K_1^* \supset Q^*$, és ez az előzővel együtt megadja a kivánt eredményt.

III. Az általános elmélet alkalmazása speciális esetekre

1. A klasszikus feltételes szélsőérték-feladat és a nem lineáris programozás

A probléma megfogalmazása:

adott R_n-en az F és a G_i $(i = 1,\dots,m)$ valós függvény.

$$Q_i := \{ x \in R_n : G_i/x/ \leqq 0 \} \ (i = 1,\dots,k),$$

$$Q_i := \{ x \in R_n : G_i/x/ = 0 \} \ (i = k+1,\dots,m).$$

Keresendő az F minimuma a $Q := \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ halmazon.

Ez az általánosabb megfogalmazás k = 0 esetén a feltételes szélsőérték, k = m esetén a nem lineáris programozás feladatát adja vissza. A klasszikus feladatoknak megfelelően tegyük fel, hogy F és $G_i (i = 1,\dots,m)$ folytonosan differenciálhatók valamely T tartományban.

Az általános program szerint először meg kell találnunk az F csökkenési kupját és ennek adjungáltját $\forall x_o \in T$ pontban; egyelőre zárjuk ki az $F'/x_o/ = 0$ esetet. Ekkor

$$K_{cs} = \{ h \in R_n : \langle F'/x_o/, h \rangle < 0 \} \quad \text{/ld. 2.7 tétel/},$$

$$K^*_{cs} = \{ -\lambda_o F'/x_o/ , \lambda_o \geqq 0 \} \quad \text{/ld. 2.14 tétel/}.$$

A következő teendő az egyenlőtlenség-tipusu mellékfeltételek lehetséges irányainak és a megfelelő adjungált kupoknak a meghatározása. Jelölje K_i a Q_i $(i = 1,\dots,k)$ halmaz lehetséges irányainak kupját az $x_o \in Q_i \cap T$ pontban.

Igy, ha

$G_i/x_o/ < 0$, akkor $K_i = \mathbb{R}_n$ $/x_o$ belső pont!/

és $K_1^* = \{0\}$;

ha $G_i/x_o/ = 0$ és $G_i'/x_o/ \neq 0$, akkor

$$K_i = \{ h \in R_n : \langle G_i'/x_o/, h\rangle < 0 \} \; (i = 1,\dots,k, \text{ ld. } 2.10),$$

$$K_i^* = \{ -\lambda_i G_i'/x_o/ \; , \; \lambda_i \geqq 0 \} \qquad /\text{ld. } 2.14/,$$

és egyelőre tekintsünk el a $G_i/x_o/ = G_i'/x_o/ = 0$ lehetőségtől.

Végezetül az egyenlőség tipusu mellékfeltételek érintőirányai: mint tudjuk, együttesen kell néznünk az ilyen feltételeket, azaz

a $Q_o := \bigcap_{i=k+1}^{m} Q_i$ halmaz érintési kupját kell megtalálnunk

$\forall x_o \in Q_o \cap T$ pontban. Ezt a 2.12 tételből kapjuk meg, ha feltesszük, hogy $G_i'/x_o/$ $(i = k+1,\dots,m)$ lineárisan függetlenek. Az idézett tétel jelöléseit alkalmazva a mostani esetre $Y = \mathbb{R}_m$, $P = \{ G_i, \; i = k+1,\dots,m\}$ és a $G_i'/x_o/$-k lineáris függetlensége jelenti azt, hogy $P'/x_o/$ szürjekció. Igy tehát

$$K_é = \{ h \in R_n : \langle G_i'/x_o/, h\rangle = 0, \quad i = k+1,\dots,m\}.$$

Az adjungált kup meghatározásához irjuk $K_é = \bigcap_{i=k+1}^{m} K_i$,

ahol

$$K_i := \{ h \in R_n : \langle G_i'/x_o/, h\rangle = 0\} \; (i = k+1,\dots,m),$$

és, mint a 2.14 tételből tudjuk,

$$K_i^* = \{ \lambda_i G_i'/x_o/, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \}.$$

Nyilvánvalóan K_i $(i = k+1,\dots,m)$ zárt halmazok, és

$\bigcap_{i=k+1}^{m} K_i^*$ m- dimenziós altér, igy szintén zárt $\mathbb{R}_n$-ben, ennélfogva alkalmazható F.9 következménye, s ezzel nyerjük:

$$K_é^* = \{ f \in R_n : f = \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i G_i'/x_o/, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

Összevetve eredményeinket, a Dubovickij - Miljutyin-tétel szerint annak szükséges feltétele, hogy F az $x_o \in Q \cap T$ pontban minimumot érjen el az, hogy létezzen λ_i $(i = 0,1,\dots,m)$ nem mind nulla, $\lambda_i \geq 0$ $(i = o,1,\dots,k)$ úgy, hogy

$$\lambda_o F'/x_o/ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i'/x_o/ = 0. \qquad ⊛$$

A kapott egyenlet jól ismert, λ_i-k az ugynevezett Lagrange-féle szorzók.

Vizsgáljuk meg azokat az eseteket, amelyeket eddig kizártunk:

ha $F'/x_o/ = 0$, akkor $\lambda_o = 1$ és $\lambda_i = 0$;

ha $G_i'/x_o/ = G_i'/x_o/ = 0$ $(i = 1,\dots,k)$, akkor $\lambda_i = 1$, $\lambda_j = 0$ $(j \neq i)$;

ha $G_i'/x_o/$-k lineárisan összefüggők $(i = k+1,\dots,m)$ akkor $\lambda_j = 0$ $(j \neq i)$

és λ_i olyan, hogy $\sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i G_i'/x_o/ = 0$

választással ugyancsak fennáll a ⊛ egyenlet, tehát a szükséges feltételnek ez a formája általános érvényü.

2. A variációszámitás mint optimális irányitás

A feladat megfogalmazása:

Vezessük be ebben a részben a rövidség kedvéért a $C := C^{/n/}[t_0,t_1]$ és $L_\infty := L_\infty^{/m/}[t_0,t_1]$ jelölést, és legyen $X := C \times L_\infty$, melynek elemeit $/x,u/$ formában jelöljük. Szokásos elnevezés: $x(t)$ a fázistrajektória, $u(t)$ az irányitás és $x(t)$, $u(t)$ a folyamat, a t paraméter pedig az idő.

Legyen az X-en értelmezett F funkcionál a következő:

$$F/x,u/ := \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x/t/,u/t/,t)\, dt,$$

ahol $\Phi \in R_n \times R_m \times R \rightarrow R$ adott függvény. A mellékfeltételt az alábbi halmazok adják meg:

$$Q_1 := C \times \{u \in L_\infty : u/t/ \in M \subset R_m \quad \overset{\circ}{\forall} t \in [t_0,t_1]\},$$

ahol M megadott halmaz R_m-ben.

$$Q_2 := \{/x,u/ : \dot{x} = \varphi/x,u,t/,\ x/t_0/ = c_0,\ x/t_1/ = c_1\},$$

ahol $\varphi \in R_n \times R_m \times R \rightarrow R_n$ adott függvény.

Keresendő az F minimuma a $Q_1 \cap Q_2$ halmazon.

Ha $n = m = 1$, $\varphi/x,u,t/ \equiv u$ és $M = \mathbb{R}$, akkor a klasszikus variációszámitás legegyszerübb feladatát kapjuk; ennek megfelelően tegyük fel a következőket:

a/ M zárt konvex halmaz, $\overset{o}{M} \neq \emptyset$;

b/ Φ és φ folytonosan differenciálható az első két változójukban;

c/ Φ és φ mérhető a harmadik változójukban.

Járjunk el az általános séma szerint, s ennek megfelelően bontsuk lépésekre a feladatot.

A funkcionál csökkenési kupja

A Φ-re kirótt feltételek mellett F differenciálható és

$$\langle F'/x_o,u_o/,/\bar{x},\bar{u}/\rangle = \int_{t_o}^{t_1} [\langle \Phi_x(x_o/t/,u_o/t/,t),\bar{x}/t/\rangle_{\mathbb{R}_n} + \langle \Phi_u,\bar{u}\rangle_{\mathbb{R}_m}]dt, \circledast$$

ahol az integrandus második tagjában ugyanazok az argumentumok szerepelnek, mint az elsőben, s igy a rövidség kedvéért elhagytuk őket; a későbbiek során is alkalmazzuk majd ezt a röviditést. A formula bizonyitása roppant egyszerü:

$$F/x_o + \bar{x},u_o + \bar{u}/ - F/x_o,u_o/ = \int_{t_o}^{t_1} [\Phi(x_o/t/ + \bar{x}/t/,u_o/t/ + \bar{u}/t/,t) - \Phi(x_o/t/,u_o/t/,t)]\,dt.$$

Az integrandus Φ differenciálhatósága következtében felirható mint $\circledast$ integrandusának és egy $o\,(|x/t/| + |u/t/|)$ tagnak összszege, ahol $|\ |$ az euklideszi normát jelöli mind $\mathbb{R}_n$-ben, mind $\mathbb{R}_m$-ben. Ebből a 2.2 definiciót figyelembe véve szinte azonnal adódik a kivánt eredmény. Igy 2.10 tételből tudjuk a csökkenési kupot, s ennek megfelelően 2.14 szerint, ha $K_{cs} \neq \emptyset$

$K_0^* := \dot{K}_{cs}^* = \{-\lambda_0 F'/x_0, u_0/ \; ; \; \lambda_0 \geq 0\}$.

A Q_1 halmaz lehetséges irányai

Jelölje $\hat{Q}_1$ a Q_1 definiciójában szereplő halmazt, azaz $Q_1 = C \times \hat{Q}_1$. $\hat{Q}_1$ zárt konvex halmaz L_∞-ben és $\mathring{\hat{Q}}_1 \neq \emptyset$ /M tulajdonságai miatt/, igy Q_1 zárt konvex halmaz X-ben és $\mathring{Q}_1 = C \times \mathring{Q}_1 \neq \emptyset$.

Igy a lehetséges irányok kupja az $/x_0, u_0/$ pontban $K_1 := K_1 = C \times \hat{K}_1$ alaku, ahol $\hat{K}_1$ a $\hat{Q}_1$ lehetséges irányainak kupja az u_0 pontban. Ezek szerint

$$K_1^* = \{0\} \times \hat{K}_1^*.$$

Egyelőre elhalasztjuk $\hat{K}_1^*$ meghatározását; a későbbiekben visszatérünk rá, s meglátjuk, hogy egy kissé módositott feladattal helyettesithetjük.

A Q_2 halmaz érintőirányai

Vezessük be a $P: X \to Y$, $Y := C \times \mathbb{R}_n$ leképezést úgy, hogy $P/x,u/ := \left(x/\cdot/ - c_0 - \int_{t_0}^{\cdot} (x/t/,u/t/,t)\, dt ; \; x/t_1/ - c_1 \right)$.

A feladat megfogalmazásában szereplő differenciálegyenletet integrálegyenletté átirva rögtön látszik, hogy

$$Q_2 = \{ /x,u/ : P/x,u/ = 0\}.$$

A P leképezés a φ-re tett kikötés miatt folytonosan differenciálható és

$$P'/x_0,u_0/ \,/\bar{x},\bar{u}/ =$$

$$=\left(\dot{\bar{x}}/./ - \int_{t_0}^{\cdot}[\langle\varphi_x(x_0/t/,u_0/t/,t),\bar{x}/t/\rangle_{\mathbb{R}_n} + \langle\varphi_u,\bar{u}\rangle_{\mathbb{R}_m}]\,dt;\ \bar{x}/t_1/\right).$$

Erről teljesen hasonlóan lehet meggyőződni, mint azt az 1/ pontban tettük. Ahhoz, hogy a 2.12 tételt alkalmazhassuk, azt kell tudnunk, $P'/x_0,u_0/$ milyen feltételek mellett szürjekció. Ha az, akkor a tétel szerint az $/\bar{x},\bar{u}/$ érintőirányok, $P'/x_0,u_0/$ fenti alakjából jól láthatóan, kielégitik az ugynevezett variációs differenciálegyenletet:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\bar{x}} = \varphi_x/x_0,u_0,t/\ \bar{x} + \varphi_u/x_0,u_0t/\ \bar{u} \\ \bar{x}/t_0/ = 0\end{array}\right\}, \qquad 2.1$$

s ezen felül még

$$\bar{x}/t_1/ = 0 \qquad 2.2$$

is teljesül.

Jelölje D azt a halmazt $\mathbb{R}_n$-ben, amelyet a variációs differenciálegyenlet megoldásai a t_1 paraméterértéknél elérnek az összes lehetséges irányitás mellett, azaz

$$D := \{\bar{x}/t_1/ : \bar{x}/./ \text{ kielégiti } (2.1)\text{-t, } u \in L_\infty\}.$$

$P'/x_o,u_o/$ akkor ráképezés, ha $D = \mathbb{R}_n$ /"teljes irányithatóság" feltétele/. Ennek igazolásához vegyünk egy tetszőleges $(a/./, b) \in Y$ elemet; ekkor

$$z/./ := a/./ + \int_{t_o}^{\cdot} \rho_x(x_o/\tau/,u_o/\tau/,\tau)\; z/\tau/\; d\tau \quad \in C,$$

és a teljesen irányithatóság miatt $\exists\, \bar{u} \in L_\infty$ és $y \in C$

$$\dot{y}/t/ = \rho_x(x_o/t/,u_o/t/,t)\; y/t/ + \rho_u\, \bar{u},$$

$$y/0/ = 0\,,$$

$$y/t_1/ = b - z/t_1/;$$

ezután, ha $\bar{x} := y + z$, egyszerü behelyettesitéssel látható, hogy

$$P/x_o,u_o/\; /\bar{x},\bar{u}/ = (a/./,\, b).$$

Tegyünk egy kis kitérőt, amely hasznos lesz a későbbiekben. Elégséges feltételt találunk arra, hogy a variációs differenciálegyenlet teljesen irányitható legyen.

3.1 Állitás: ha $\forall \psi\, /t/$-re, amely a

$$\dot{\psi} = - \overset{*}{\rho}_x(x_o/t/,u_o/t/,t)\psi \qquad (2.3)$$

differenciálegyenlet nem nulla megoldása,

$$\rho_u^*(x_o/t/,u_o/t/,t)\; \psi/t/ \neq 0$$

teljesül, akkor az (1.1) rendszer teljesen irányitható.

<u>Bizonyitás:</u> $\varphi_x(x_o/t/,u_o/t/,t) =: A/t/,$

$$\varphi_u(x_o/t/,u_o/t/,t) =: B/t/.$$

Tegyük fel, hogy az állitás nem igaz, vagyis $D \neq R_n$. Mivel D lineáris altér /a differenciálegyenlet linearitásából/, igy $\exists\, 0 \neq a \in R_n$

$$\langle a, x/t_1/\rangle_{R_n} = 0 \qquad (\forall x/t_1/ \in D).$$

Legyen $\psi/t/$ az (2.3) rendszer megoldása $\psi/t_1/ = a$ feltétellel. Mivel $a \neq 0$, $\psi/t/ \not\equiv 0$. Ekkor (2.1) $\forall \bar{x}/t/$ megoldására

$$0 = \int_{t_o}^{t_1} \langle \dot{\psi}/t/ + A^*/t/\psi/t/, \bar{x}/t/\rangle_{R_n} dt =$$

$$= - \int_{t_o}^{t_1} \langle B^*/t/\psi/t/, \bar{u}/t/\rangle_{R_m} dt,$$

amint arról parciális integrálással könnyü meggyőződni. Lévén a jobb oldalon $\bar{u} \in L_\infty$ tetszőleges, ez azt jelenti, $B^*/t/\psi/t/ =$ $= 0 \quad (\overset{o}{\forall}\, t \in [t_o, t_1])$, s ez ellentmond az eredeti feltevésnek.

A most kapott eredmény igen jól kezelhető módszert is ad annak eldöntésére, teljesen irányitható-e a rendszer vagy sem: meg kell keresni az (2.3) differenciálegyenlet-rendszer $\Psi/t/$ megoldás-alaprendszerét, azután képezni a $B^*/t/\Psi/t/$ mátrixot, s ha ennek az oszlopai lineárisan függetlenek, akkor a rendszer teljesen irányitható.

Ezek után visszatérhetünk eredeti feladatunk folytatására.

Az adjungált kup megtalálásához irjuk az érintési kupot $K_é = K_2 \cap K_3$ alakba, ahol K_2 elemei (2.1) -nek tesznek eleget, K_3 elemei pedig (2.2) -nek. Mind K_2, mind K_3 lineáris altér X-ben, igy a 2.13 állitás szerint a hozzájuk tartozó adjungált kupok a megfelelő annullátorok. $K_3 = K \times L_\infty$ alaku, ahol $K := \{x \in C : x/t_1/ = 0\}$. Ennek megfelelően $K_3^* = K^* \times \{0\}$ és $K^* = \mathbb{R}_n$, mert C-ben az egy ponton eltünő függvények alterének annullátora a kérdéses pontra koncentrált mértékek /funkcionálok/ halmaza, azaz, ha $x \in K$ és $f \in K^*$, akkor

$$\langle f,x\rangle = \langle a,x/t_1/\rangle_{\mathbb{R}_n} \qquad (a \in \mathbb{R}_n)$$

Az eddig elmondottakból következően K_3^* véges dimenziós, továbbá lévén K_2^* gyenge* zárt /ld. F.5./, $K_2^* + K_3^* \subset X'$ gyenge* zárt /zárt altér és véges dimenziós altér összege mindig zárt/. Ezek szerint F.9. alapján

$$K_é^* = K_2^* + K_3^*.$$

A minimum szükséges feltételének vizsgálata

A Dubovickij - Miljutyin-tétel szerint annak szükséges feltétele, hogy az F funkcionál a $Q_1 \cap Q_2$ halmazon minimumot érjen el az $/x_o,u_o/$ pontban az, hogy létezzen $f_i \in K_i^*$ ($i = 0,1,2,3$) nem mind nulla funkcionál úgy, hogy $f_o + f_1 + f_2 + f_3 = 0$. Ebből egyelőre azonban még nem sok látszik. Alkalmazzuk az előző egyenletet olyan $/\bar{x},\bar{u}/$ elemre, melyben $\bar{u}$ tetszőleges, $\bar{x}$ pedig a variációs egyenlet hozzá tartozó megoldása; vagyis, röviden, $/\bar{x},\bar{u}/ \in K_2$. Ekkor $\langle f_2,/\bar{x},\bar{u}/\rangle = 0$, s igy

$$\left.\begin{aligned} -\lambda_o \int_{t_o}^{t_1} [\langle \Phi_x(x_o/t/,u_o/t/,t), \bar{x}/t/\rangle_{\mathbb{R}_n} + \langle \Phi_u,\bar{u}\rangle_{\mathbb{R}_m}]\,dt \\ + \langle \hat{f}_1,\bar{u}\rangle + \langle a,\bar{x}/t_1/\rangle_{\mathbb{R}_n} = 0, \end{aligned}\right\} \quad 2.4$$

ahol, emlékeztetünk, $\hat{f}_1 \in \hat{K}_1^* \subset L'_\infty$ még nem ismert.

Alakitsuk át ezt a kifejezést; ehhez uj mennyiséget vezetünk be, amely szoros kapcsolatban van a teljesen irányithatósággal /ld. 3.1 állitás/. Legyen $\psi/t/$ a

$$\dot{\psi} = -\varphi_x^*(x_o/t/,u_o/t/,t)\psi + \lambda_o \Phi_x \qquad (A)$$

differenciálegyenlet megoldása a

$$\psi/t_1/ = a$$

feltétellel. Fejezzük ki (A)-ból Φ_x-t és helyettesitsük (2.4)-be; parciális integrálással, rövid számolás után nyerjük:

$$\langle \hat{f}_1, \bar{u} \rangle = \int_{t_o}^{t_1} \langle -\varphi_u^*(x_o/t/,u_o/t/,t)\psi/t/ + \lambda_o \Phi_u, \bar{u}/t/ \rangle_{R_m} dt \quad (2.5).$$

Most már csak $\hat{f}_1$-ről kellene valami közelebbit tudnunk. Azt használjuk ki, hogy $\hat{f}_1 \in L_1^{/m/}[t_o,t_1] \subset L'_\infty$, amint ez látszik abból, hogy integrál alakban reprezentálható. Sajnos meglehetősen hosszadalmas uton juthatunk eredményre, s ezért közbevetőleg külön egységként adjuk meg:

<u>3.2 Lemma:</u> $Q := \{u \in L_\infty^{/m/}(T),\ T \subset R : u/t/ \in M \subset R_m \ \ \overset{o}{\forall} t \in T\}$.

Ha a $z \in L_1^{/m/}(T)$ a Q halmaz u_o pontjában támasztósikot meghatározó funkcionál, azaz $\langle z, u - u_o \rangle \geq 0$ $(\forall u \in Q)$, akkor $z/t/$ az M halmaz $u_o/t/$ pontjában támasztósik vektora $\overset{o}{\forall} t \in T$, azaz $\langle z/t/, u - u_o/t/ \rangle_{R_m} \geq 0$ $\ \forall u \in M$ és $\overset{o}{\forall} t \in T$.

Bizonyitás: Jelölje μ a Lebesgue-mértéket a számegyenesen. Tegyük fel, hogy a lemma állitása nem igaz, vagyis

$$\exists A_o \quad T, \mu/A_o/ = \varepsilon > 0, \text{ és } \bar{u} \in M \rightsquigarrow \langle z/t/, \bar{u} - u_o/t/\rangle_{\mathbb{R}_m} < 0, \forall t \in A_o.$$

Luzin ismert tételéből viszont

$\exists A_z \subset T, \mu/A_z/ \leq \frac{\varepsilon}{3} \rightsquigarrow z/./$ folytonos a $T \setminus A_z$ halmazon,

$\exists A_u \subset T, \mu/A_u/ \leq \frac{\varepsilon}{3} \rightsquigarrow u_o/./$ folytonos a $T \setminus A_u$ halmazon.

Mivel $\mu/A_z/ + \mu/A_u/ < \mu/A_o/$, $\exists t_o \in A_o$, $t_o \notin A_z \cup A_u$;

a $z/./$ és $u_o/./$ függvények t_o-beli folytonossága miatt

$$\exists A \subset T, \mu/A/ > 0 \rightsquigarrow \langle z/t/, \bar{u} - u_o/t/\rangle_{\mathbb{R}_m} \leq \frac{\langle z/t_o/, \bar{u} - u_o/t_o/\rangle_{\mathbb{R}_m}}{2}, \ (t \in A)$$

/ugyanis a vizsgált skaláris szorzat értéke a $t_o \in A_o$ pontban A_o definiciója szerint negativ/.

$$u_1/t/ := \begin{cases} \bar{u} & \text{ha } t \in A, \\ u_o/t/, & t \in T \setminus A. \end{cases}$$

Ekkor $u_1 \in Q$ és

$$\langle z, u_1\rangle = \int_T \langle z/t/, u_1/t/\rangle_{\mathbb{R}_m} dt = \int_T \langle z/t/, u_o/t/\rangle_{\mathbb{R}_m} dt +$$

$$+ \int_A \langle z/t/, \bar{u} - u_o/t/\rangle_{\mathbb{R}_m} dt.$$

A jobb oldal második tagja határozottan negativ, igy

$$\langle z, u_1\rangle < \langle z, u_o\rangle$$

adódik, és ez ellentmond annak, hogy z támasztósik funkcionálja u_o-ban.

Ennek a lemmának a birtokában, figyelembe véve, hogy 2.15 szerint a lehetséges irányokat, lévén $\hat{Q}_1$ konvex és a belseje nem üres, épp a támasztósikok adják meg, (2.5) igy irható át:

$$\langle -f_u^*(x_o/t/,u_o/t/,t)\psi/t/ + \lambda_o \Phi_u,\ u - u_o/t/\rangle_{\mathbb{R}_m} \geq 0$$
$$(\forall u \in M \text{ és } \overset{o}{\forall}\, t \in [t_o,t_1]) \qquad (B)$$

A $\lambda_o = 0$ és $\psi/t/\equiv 0$ egyszerre nem következhet be, mert akkor $f_o = 0$, továbbá a $=\psi/t_1/ = 0 \Rightarrow f_3 = 0$, de ekkor már $f_1 = 0$ is, azaz minden funkcionál nulla lenne.

Vizsgáljuk meg azokat az eseteket, amelyeket eddig kizártunk:

ha $K_o = \emptyset$, akkor

$$\int_{t_o}^{t_1}[\langle \Phi_x(x_o/t/,u_o/t/,t),\bar{x}/t/\rangle_{\mathbb{R}_n} + \langle \Phi_u,\bar{u}\rangle_{\mathbb{R}_m}]dt = 0\ (\forall/\bar{x},\bar{u}/),$$

s igy $\lambda_o = 1$ és $\psi/t_1/ = 0$ választással az előzőhöz hasonló parciális integrálás után azt kapjuk, hogy teljesül (B).

ha $D \neq \mathbb{R}_n$, akkor $\lambda_o = 0$ választással $\exists \psi/t/\not\equiv 0$ (A) megoldása, ugy, hogy $f_u^*(x_o/t/,u_o/t/,t)\psi/t/\equiv 0$ /ld. 3.1 állitás/, s igy ismét teljesül (B).

Foglaljuk össze eredményeinket: a fejezet elején megfogalmazott feladatnak az ott leirt feltételek mellett az $/x_o,u_o/$ pont csak akkor lehet megoldása, ha $\exists\ \lambda_o \geq 0$ szám és az (A) differenciálegyenletet kielégitő $\psi/t/$ függvény úgy, hogy fennáll a (B) összefüggés, s emellett $\lambda_o = 0$ és $\psi/t/\equiv 0$ egyszerre nem következhet be.

Megjegyzés:

a/ (2.4)-ből látszik, hogy ha $\lambda_0 \neq 0$, akkor $\lambda_0 = 1$ választható; viszont (B)-ből az következik, hogy $\lambda_0 = 0$ nem lehet, ha a rendszer teljesen irányitható.

b/ igen érdekes, hogy mind az előző fejezetben, a feltételes szélsőértékszámitásnál, mind itt, a variációszámitásnál az 1.8 tétel alkalmazhatósága érdekében kizárt eseteknél a tétel végső formájában szereplő konstansokat illetve függvényeket úgy választottuk meg - és választhattuk meg - hogy az összes funkcionál nulla legyen, azonban a konstansok illetve függvények nem azonosan nullák.

Végezetül a későbbiek szempontjából célszerü egy kissé átfogalmazni eredményünket; vezessük be a következő függvényt:

$$H/x,u,\psi,t/ := -\langle \varphi/x,u,t/,\psi\rangle_{\mathbb{R}_n} + \lambda_0 \Phi/x,u,t/;$$

ekkor $-\varphi_u^*/x,u,t/\psi + \lambda_0 \Phi_u/x,u,t/ = H_u/x,u,\psi,t/$, s igy (B) azt jelenti, hogy, ha $/x_0,u_0/$ a feladat megoldása, akkor

$$\left.\begin{aligned} &H(x_0/t/,u,\psi/t/,t) \geq H(x_0/t/,u_0/t/,\psi/t/,t) \\ &\qquad \forall u\in M, \quad \overset{o}{\forall} t\in[t_0,t_1] \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$

Befejezésül nézzük meg, hogyan adja vissza eredményünk a legegyszerübb variációszámitási feladatban az ismert egyenletet. Itt tehát $\varphi_u \equiv 1$, $\varphi_x \equiv 0$ és jól láthatóan a variációs differenciálegyenlet $\dot{x} = u$, ami teljesen irányitható, igy $\lambda_0 = 1$ választással (B)-ből azt kapjuk, hogy

$$\langle -\psi/t/ + \phi_u(x_0/t/,u_0/t/,t),\ u - u_0/t/\rangle_{\mathbb{R}_n} \geq 0$$
$$(\forall u\in\mathbb{R}_n \text{ és } \overset{o}{\forall} t\in[t_0,t_1]),$$

ebből

$$-\psi/t/+\Phi_u(x_o/t/,u_o/t/,t)=0 \qquad (\overset{\circ}{\forall} t\in[t_o,t_1]).$$

Ha (A)-ból behelyettesitjük $\psi/t/$-t, nyerjük a végeredményt, az Euler - Lagrange-féle egyenletet:

$$\Phi_u(x_o/t/,u_o/t/,t)-\int_{t_o}^{t}\Phi_x(x_o/\tau/,u_o/\tau/,\tau)\,d\tau=\text{const}$$
$$(\overset{\circ}{\forall} t\in[t_o,t_1]).$$

3. Az optimális irányitás; Pontrjagin minimum-elve

A klasszikus variációszámitás azonkivül, hogy meglehetősen erős feltételek teljesülését követeli meg a feladatban szereplő függvényektől, nem alkalmazható igen kézenfekvő, természetes módon előforduló esetekben; ilyen például az, amikor $\overset{o}{M}=\emptyset$.

Tekintsük ugyanazt a feladatot, mint az előző fejezetben, azonban a benne szereplő mennyiségekre kirótt feltételek legyenek a következők:

a/ $M\subset\mathbb{R}_m$ tetszőleges halmaz,

b/ Φ és φ folytonosan differenciálhatók az első, folytonosak a második változójukban,

c/ Φ és φ folytonosan differenciálhatók a harmadik változójukban.

Az első két feltétel gyengébb, a harmadik erősebb az előzőeknél. Ez az erősebb harmadik feltétel lehetővé teszi, hogy az $(n+1)$ -ik fáziskoordináta

$$\dot{x}_{n+1}=1\ ,\quad x_{n+1}/t_o/=t_o,\quad x_{n+1}/t_1/=t_1$$

bevezetésével a feladat autonóm lesz, azaz olyan, amelyben Φ és φ explicite nem függ az időtől. Harmadik feltételként tehát ezt is megkövetelhettük volna, s a továbbiakban ilyen alakban használjuk, vagyis csak autonóm feladattal foglalkozunk.

Ezek mellett a feltételek mellett közvetlenül nem alkalmazható a Dubovickij - Miljutyin-féle tétel: M tetszőleges volta például azt is megengedi, hogy mindössze két pontból álljon, s ekkor nem lehet szó sem lehetséges irányokról, sem érintő irányról. Az optimális irányitás ebben az általános keretben úgy tárgyalható, hogy visszavezetjük a variációszámitásra. Érdekessége ennek a megoldásnak, hogy a Pontrjagin-féle minimum-elvet a szokásostól egészen eltérő módon bizonyitja. Mi nem részletezzük ezt a felépitést, hiszen ennek az összefoglalónak a célja csak az, hogy megmutassa, miként gyüjti egységbe a Dubovickij - Miljutyin-tétel a szerteágazó feladatokat, hogyan alkalmazható a tétel az egyes speciális esetekre. A Pontrjagin-féle minimum-elv ilyen formáju teljes bizonyitását, valamint az elmélet alkalmazásait más, igen változatos módon megfogalmazott feladatokra /nem rögzitett t_1 végső idő, különféle megszoritások a fáziskoordinátákra, más alaku funkcionálok, stb/ [3]-ben lehet megtalálni.

Mielőtt a variációszámitásra való visszavezetést megcsinálnánk, visszaidézzük a feladat megfogalmazását, hogy jobban előttünk álljon a későbbiekben összehasonlitás céljából /I. feladat/.

$X = C^{/n/}[t_0,t_1] \times L_\infty^{/m/}[t_0,t_1]$, elemei az /x,u/ párok;

a minimalizálandó funkcionál X-en:

$$F/x,u/ = \int_{t_o}^{t_1} \Phi(x/t/,u/t/)\,dt,$$

a következő megszoritásokkal:

$$\dot{x} = \varphi/x,u/, \quad x/t_o/ = c_o, \quad x/t_1/ = c_1 \qquad (3.1)$$

$$u/t/\in \overset{o}{M} \quad (\forall t\in [t_o,t_1]) . \qquad (3.2)$$

Ezután rátérhetünk az emlitett program ismertetésére, melynek első részét, hogyan vezetjük vissza feladatunkat a variációszámitásra, teljes egészében végig csináljuk.

Legyen a

$$T : [0,1]\ni\tau \rightarrow t \in[t_o,t_1]$$

leképezés /az idő "transzformációja"/ olyan, hogy

$$T/\tau/ := t_o + \int_0^{\tau} v/\tau'/\, d\tau' , \qquad (3.3)$$

$$T/1/ = t_1, \qquad (3.4)$$

$$v/\tau/ \geqq 0 \qquad \tau\in[0,1] . \qquad (3.5)$$

Világos, hogy egyrészt $v/\tau/$ nincs egyértelmüen meghatározva, másrészt T akkor és csak akkor egy-egyértelmü, ha $v/\tau/ > 0$ $\forall\tau\in[0,1]$. Definiáljuk az inverz függvényt erre való tekintettel úgy, hogy

$$\Upsilon/t/ := \inf\{\tau: T/\tau/ = t\}. \qquad (3.6)$$

Fogalmazzunk meg egy uj feladatot, amely mint látni fogjuk ekvivalens az eredetivel /II. feladat/.

$$\hat{X} := C^{/n/}[0,1] \times L_{\infty}^{/m/}[0,1] \times L_{\infty}[0,1],$$

melynek elemeit $/\hat{x},\hat{u},v/$-vel jelöljük.

$$\hat{F}/\hat{x},\hat{u},v/ := \int_0^1 v/\tau/\, \Phi(\hat{x}/\tau/,\hat{u}/\tau/)\, d\tau.$$

Keresendő az $\hat{F}$ minimuma az alábbi mellékfeltételekkel:

$$\frac{d\hat{x}/\tau/}{d\tau} = v/\tau/\, \varphi(\hat{x}/\tau/,\hat{u}/\tau/), \quad \hat{x}/0/ = c_0, \quad \hat{x}/1/ = c_1 \qquad (3.7)$$

$$\hat{u}/\tau/ \in \overset{\circ}{M} \quad (\forall \tau \in [0,1]), \qquad (3.8)$$

$$v/\tau/ \geq 0 \quad (\tau \in [0,1]). \qquad (3.9)$$

<u>3.3 Tétel:</u>

$$A_+ := \{\tau \in [0,1] : v/\tau/ > 0\},$$

$$A_0 := \{\tau \in [0,1] : v/\tau/ = 0\}.$$

Ha $/x,u/$ eleget tesz a (3.1) - (3.2) feltételeknek, és ha $v/\tau/$ a (3.4) - (3.5) feltételeket kielégitő tetszőleges függvény, amely $T/\tau/$-t (3.3) szerint határozza meg, akkor a $v/\tau/$ és az

$$\hat{x}/\tau/ := x(T(\tau)), \qquad (3.10)$$

$$\hat{u}/\tau/ := \begin{cases} u(T(\tau)) & (\tau \in A_+), \\ \text{tetszőleges} & \tau \in A_0 \end{cases} \qquad (3.11)$$

függvények eleget tesznek a (3.7) - (3.9) feltételeknek és

$$\hat{F}/\hat{x},\hat{u},v/ = F/x,u/$$

Forditva, ha $/\hat{x},\hat{u},v/$ kielégiti a (3.7) - (3.9) feltételeket és ha $T/t/$-t 3.6 adja meg, akkor az

$$x/t/ := \hat{x}(T(t)),$$

$$u/t/ := \hat{u}(T(t))$$

függvények eleget tesznek a (3.1) -(3.2) feltételeknek és

$$F/x,u/ = \hat{F}/\hat{x},\hat{u},v/.$$

A bizonyitás szinte magától értetődő, lévén

$$\frac{d\hat{x}/\tau/}{d\tau} = \frac{dx/t/}{dt}\, v/\tau/,$$

és ha $v/\tau/ > 0$, akkor ez megforditható, $\frac{dx/t/}{dt}$ is kifejezhető, ha pedig $v/\tau/ = 0$ egy egész intervallumon, akkor ott $T/\tau/$ és $\hat{x}/\tau/$ konstans, s ezt visszatükrözi az $x/t/ = \hat{x}/T/t//$ egyenlőség $T/t/$ definiciója szerint.

A tétel következményeként, ha $/x_o,u_o/ \in X$ az I. feladat megoldása, akkor a (3.4) - (3.5) feltételeknek eleget tevő tetszőleges v_o esetén a (3.3) és (3.1o) - (3.11) által meghatározott $/\hat{x}_o,\hat{u}_o,v_o/ \in \hat{X}$ megoldása a II. feladatnak. Természetesen ugyanezek a függvények adják a III. feladat megoldását is, ha a III. feladat abban különbözik a II. feladattól, hogy $\hat{u}_o$-t rögzitjük és keressük $\hat{F}/\hat{x},\hat{u}_o,v/$ minimumát csak $\hat{x}$-ben és v-ben. Ezzel már el is értük a célunkat, hisz $v\Phi$ és $v\varphi$ a feladatot meghatározó függvények folytonosan differenciálhatók a minimalizáló változójukban, továbbá a $v/\tau/ \geq 0$ $\tau \in [0,1]$ feltétel azt jelenti, hogy az irányitás szerepét játszó függvény nem üres belsejü konvex halmazon veszi fel értékeit, tehát alkalmazható a variációszámitásnál nyert eredményünk. Természetesen a végeredményig hosszu utat kell még bejárni, amelyen kihasználva, hogy $v/\tau/$ nem egyértelmüen meghatározott, továbbá, hogy $u/\tau/$ $\tau \in A_0$ esetén tetszőleges ügyes de egyáltalán nem szembetünő választások után nyerjük a variációszámitás eredményének (C) megfogalmazásából a Pontrjagin-féle minimum-elvet, amely alakját tekintve pontosan ugyanilyen.

FÜGGELÉK

F.1 Definició: Az X lineáris vektortér esetében $K \subset X$ nulla-csucsu kup, ha

$$\lambda K = K \qquad (\forall \lambda > 0).$$

(Ha K nulla-csucsu kup, akkor valamely $x_0 \in X$ esetében $x_0 + K$ olyan kup, amelynek csucsa az x_0 pontban van).

F.2 Állitás: Ha X topológikus vektortér és $K \subset X$ kup, akkor $\overset{\circ}{K}$, $\overline{K}$ és $\langle K \rangle$ szintén kup.

F.3 Definició: Az X lokálisan konvex vektortér és $K \subset X$ nulla-csucsu kup esetében a $K^* := \{ f \in X' : \langle f,x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K \}$ halmaz a K adjungált kupja.

A definició azonnali folyományai az alábbiak:

F.4 Állitás:

a/ K^* nulla-csucsu konvex kup X'-ben;

b/ ha $K_1 \subset K_2$, akkor $K_1^* \supset K_2^*$;

c/ ha A tetszőleges indexhalmaz, akkor $\left(\bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha \right)^* = \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha^*$.

Ugyancsak igen egyszerüek a következő állitások; felhivjuk a figyelmet, hogy a továbbiakban X mindig lokálisan konvex vektortér és a felülhuzás az adott halmaz gyenge, illetve gyenge* lezárását jelzi /X-ben, illetve X'-ben/.

F.5 Állitás: K^* gyenge* zárt, azaz $\overline{K^*} = K^*$.

Bizonyitás: a $K_x^* := \{f \in X' : \langle f,x\rangle \geq 0,\ x \in K$ rögzitett$\}$ halmaz nyilvánvalóan gyenge* zárt, és igy $K^* = \bigcap_{x \in K} K_x^*$ szintén gyenge* zárt.

F.6 Állitás: $K^* = (\overline{K})^* = (\langle\overline{K}\rangle)^*$.

Bizonyitás: nyilvánvalóan $K^* \supset (\overline{K})^* \supset (\langle\overline{K}\rangle)^*$ /ld. F.4./;
másrészt viszont, ha $\langle f,x\rangle \geq 0 \quad x \in K$, akkor
f linearitása miatt $\langle f,x\rangle \geq 0 \quad (x \in \langle K\rangle)$, és
f folytonossága miatt $\langle f,x\rangle \geq 0 \quad (x \in \overline{\langle K\rangle})$.

F.7 Állitás: $\overline{\langle K\rangle} = K^{**} := \{x \in X : \langle f,x\rangle \geq 0 \quad \forall f \in K^*\}$.

Bizonyitás: $Q := \overline{\langle K\rangle}$; F.6 szerint $Q^* = K^*$, s igy K^{**} definiciójából rögtön adódik, hogy $Q \subset K^{**}$; tegyük fel, hogy $Q \neq K^{**}$ és legyen $x_0 \in K^{**} \setminus Q$; ekkor a Hahn - Banach-tétel szerint x_0 elválasztható Q-tól egy hipersikkal, azaz $\exists f \in X' \curvearrowright \langle f,x_0\rangle < 0$ és $\langle f,x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in Q$ /a hipersik választható úgy, hogy átmenjen a kup csucsán/, $\Longrightarrow f \in Q^* = K^*$, $\Longrightarrow x_0 \notin K^{**}$, és ez ellentmond a feltevésünknek, tehát $Q = K^{**}$.

Igen fontos az alkalmazásokban az F.4/c állitáshoz hasonló összefüggés kupok közös részére vonatkozóan; ez azonban már valamivel bonyolultabb.

Vezessük be a következő jelölést: legyen A tetszőleges indexhalmaz, K_α^* $(\alpha \in A)$ adjungált kupok,

$$\sum_{\alpha \in A} K_\alpha^* := \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_{\alpha_i} \ , \ n = 1,2,\dots,\ f_{\alpha_i} \in K_{\alpha_i},\ \alpha_i \in A,\ i = 1,2,\dots,n \right\}.$$

A definícióból azonnal következik:

F.8 Állitás:

a/ $\langle \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha^* \rangle = \sum_{\alpha\in A} K_\alpha^*$,

b/ $\left(\bigcap_{\alpha\in A} K\right)^* \supset \sum_{\alpha\in A} K_\alpha^*$.

F.9 Állitás: $\left(\bigcap_{\alpha\in A} \overline{\langle K_\alpha \rangle}\right)^* = \overline{\langle \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha^* \rangle}$.

Bizonyitás: $Q := \overline{\langle \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha^* \rangle}$,

$$Q^* = \left(\bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha^*\right)^* \qquad \text{/F.6-ból/,}$$

$$= \bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha^{**} \qquad \text{/F.4-ből/,}$$

$$= \bigcap_{\alpha\in A} \overline{\langle K_\alpha \rangle} \qquad \text{/F.7-ből/,}$$

és végül, lévén Q gyengén zárt és konvex, F.7 szerint $Q^{**} = Q$ s ezzel el is jutottunk célunkhoz.

Következmény: lévén $\overline{\langle \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha^* \rangle} = \overline{\sum_{\alpha\in A} K_\alpha^*}$, ha K_α $\alpha\in A$ gyengén zárt és konvex, $\sum_{\alpha\in A} K_\alpha^*$ pedig gyenge* zárt, akkor

$$\left(\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha\right)^* = \sum_{\alpha\in A} K_\alpha^*$$

F.10 Állitás: legyen K nulla-csucsu konvex kup, L lineáris altér és $\overset{o}{K} \cap L \neq \emptyset$.

Ekkor $(K \cap L)^* = K^* + L^*$.

Bizonyitás: a Hahn - Banach-tétel következményeként, ha $f \in L'$ és $\langle f,x\rangle \geq 0$ $\forall x \in K \cap L$, akkor $\exists \bar{f} \in \bar{X}'$ az f-nek kiterjesztése /azaz $\langle \bar{f},x\rangle = \langle f,x\rangle$ ha $x \in L$/ $\rightsquigarrow$ $(\bar{f},x) \geq 0$ $\forall x \in K$. Igy, ha $f \in (K \cap L)^*$, $\exists \bar{f} \in K^* \rightsquigarrow \langle \bar{f},x\rangle = \langle f,x\rangle$ $\forall x \in L$, azaz $f - \bar{f} \in L$ és ily módon $f = \bar{f} + /f-\bar{f}/ \in K^* + L^*$; tehát $(K \cap L)^* \subset K^* + L^*$, az ellentétes irányu tartalmazás pedig F.8-ból következik.

F.11 Állitás: legyenek K_i $(i = 1,\dots,n)$ nyilt konvex kupok, $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \emptyset$.

Ekkor

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i\right)^* = \sum_{i=1}^{n} K_i^*.$$

Bizonyitás: $\tilde{X} := \underset{/1/}{X} \times \underset{/2/}{X} \times \dots \times \underset{/n/}{X}$; ekkor $\tilde{X}' = \underset{/1/}{X'} \times \underset{/2/}{X'} \times \dots \times \underset{/n/}{X'}$

és ha $\tilde{f} = /f_1,\dots,f_n/ \in \tilde{X}$, $\tilde{x} = /x_1,\dots,x_n/ \in \tilde{X}$, akkor

$$\langle \tilde{f},\tilde{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i,x_i\rangle$$

A $\tilde{K} := \bigtimes_{i=1}^{n} K_i$ halmaz konvex és nyilt $\tilde{X}$-ben,

az $\tilde{L} := \{\tilde{x} \in \tilde{X} : x_i = x \in X \quad i = 1,\dots,n\}$ halmaz pedig lineáris altér és $\tilde{K} \cap \tilde{L} \neq \emptyset$.

Legyen $f \in \bigcap_{i=1}^{n} K_i$ és definiáljuk az $\tilde{f} \in \tilde{L}'$ funkcionált úgy, hogy $\langle \tilde{f},\tilde{x}\rangle := \langle f,x\rangle$, $\tilde{x} = /x,x,\dots,x/ \in \tilde{L}$. Nyilvánvalóan

$\tilde{f} \in (\tilde{K} \cap \tilde{L})^*$ s igy a Hahn - Banach-tételnek F.9-ben emlitett következményeként $\exists\, \bar{f} = /\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n/ \in \tilde{X}$ $\rightsquigarrow$

$$\bar{f} \in \tilde{K}^*, \qquad \otimes$$

$$\text{és} \quad \langle \bar{f}, \tilde{x} \rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{x} \rangle \qquad (\text{ha } \tilde{x} \in \tilde{L}).$$

Ez utóbbi azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{n} \langle \bar{f}_i, x \rangle = \langle f, x \rangle, \ \forall x \in X,$

vagyis $f = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i$; továbbá $\otimes$ szerint

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \bar{f}_i, x_i \rangle \geq 0 \quad (x_i \in K_i, \quad i = 1, \ldots, n)$$

$$\Longrightarrow \langle \bar{f}_i, x_i \rangle \geq 0 \qquad (x_i \in K_i, \quad i = 1, \ldots, n)$$

$$\Longrightarrow \bar{f}_i \in K_i^* \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

azaz beláttuk, hogy $\left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i \right)^* \subset \sum_{i=1}^{n} K_i^*$; az ellentétes irányu tartalmazás F.8-ból következik.

IRODALOM

[1] Dubovickij A.J. - Miljutyin A.A ДАН СССР, 149/1963/759
Zs.vücsiszl. mat. 5/1965/395

[2] Luszternik L.A. - Szoboljev V.I. Elementü funkcionalnogo alaliza, 1965, Nauka

[3] Girszanov I.V. Lekcii po matematicseszkoj teorii eksztremalnüch zadacs, 1970, Izd. Moszk.Univ.

[4] Hestenes M.R. Calculus of variations and optimal control theory, 1966. J.Wiley, N.Y.

TARTALOMJEGYZÉK

A TANULMÁNYOK sorozatban eddig megjelentek:

1/1973 Pásztor Katalin: Módszerek Boole-függvények minimális vagy nem redundáns, $\{\wedge, \vee, \neg\}$ vagy {NOR} vagy {NAND} bázisbeli, zárójeles vagy zárójel nélküli formuláinak előállítására

2/1973 Вашкеви Иштван: Расчленение многосвязных промышленных процессов с помощью вычислительной машины

3/1973 Ádám György: A számitógépipar helyzete 1972 második felében

4/1973 Bányász Csilla: Identification in the presence of drift

5/1973* Gyürki J.-Laufer J.-Girnt M.-Somló J.: Optimalizáló adaptiv szerszámgépirányitási rendszerek

6/1973 Szelke Erzsébet-Tóth Károly: Felhasználói Kézikönyv /USER MANUAL/ a Folytonos Rendszerek Szimulációjára készült ANDISIM programnyelvhez

7/1973 Legendi Tamás: A CHANGE nyelv/multiprocesszor

8/1973 Klafszky Emil: Geometriai programozás és néhány alkalmazása

9/1973 R.Narasimhan: Picture Processing Using Pax

10/1973 Dibuz Ágoston-Gáspár János-Várszegi Sándor: MANU-WRAP hátlaphuzalozó, MSI-TESTER integrált áramköröket mérő, TESTOMAT-C logikai hálózatokat vizsgáló berendezések ismertetése

---

*-gal jelölt kivételével a TANULMÁNYOK megrendelhetők az Intézet Könyvtáránál /Budapest, I. Uri u. 49./

A kiadásért felelős:

Dr. Vámos Tibor

az

MTA Számitástechnikai és Automatizálási
Kutató Intézet
igazgatója