APOLLONIUS FELADATA

A GÖMBFELÜLETEN.

HUNYADY JENŐ

L. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1877. márczius 5.)

BUDAPEST, 1877.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Pergaios

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

APOLLONIUS FELADATA A GÖMB-FELÜLETEN.

Hunyady Jenő l. tagtól.

(Előadta a III. osztály ülésén 1877. márczius 5.)

Apollonius feladata a következő:

Ha a sikban három kör adva van, úgy kerestetik azon kör, a mely a három adott kört érinti.

E feladat már Apolloniustól egy reánk fenn nem maradt értekezésében más hasonló feladatokkal együtt lett megoldva, úgy szintén Viète Apollonius Gallus czimű művében találjuk e feladatnak az előbbitől egészen független megoldását.

Viète megoldása óta számosan foglalkoztak Apollonius feladatának megoldásával, mint nevezetesen Descartes [1]), Newton [2]), Lambert [3]), L. Oberreit [4]), Euler [5]), Fusz [6]), Car-

---

1) Renati Descartes epistolae, pars tertia Amstel. 1683. p. 296—301. Descartes, ki Erzsébet herczegnővel (Frigyes, a Pfalz választó fejedelmének leányával) e feladat felett levelezett, e levelekben Erzsébet herczegnőnek megoldásáról nagy elismeréssel nyilatkozik.

2) Arithmetica universalis T. I. Amstel. 1741. p. 273. Probl XLVII. Valamint szintén Philosophiae naturalis principia mathematica. Editio Leseur et Jaquier T. I., Genevae 1739. p. 184., Lemma XVI.

3) Joh. Heinrich Lambert's deutscher gelehrter Briefwechsel. Herausgegeben von Johann Bernoulli I. Bd. p. 308—314. A feladatot Hollandnak Skorzewska lengyel grófnő adta fel, Holland pedig Lambertnek. Lásd szintén Lambert G. R. von Davissonhoz czimzett levelét. Ugyanezen levél-gyüjtemény IV. kötetében 424—426. ll.

4) Ugyanazon levelezés V. kötetében 254—256. ll.

5) Nova acta Acad. Petropolitanae VI. köt. 95—102. ll.

6) Ugyanott 102—113. ll.

not [1]), Gauss [2]), Binet [3]), Gergonne [4]), Plücker, Poncelet [5]), Stoll [6]) és Mertens. [7])

E sorok czélja Apollonius feladatát a gömbfelületen megoldani, azaz a következő feladat megfejtése :

»Ha a gömbfelületen három tetszőleges kör adva van, úgy keressük a három adott kört érintő kör sugarát.«

1. A gömbfelületen ugyanazt a kört két különböző középpontból két különböző sphärikus sugárral képzelhetjük leírva. Ha az egyik középponthoz tartozó sugár r, úgy a másik középponthoz tartozó sugár $180-r$ és ezért ha az egyik középponthoz tartozó sugár <90 foknál úgy a másik középponthoz tartozó sugár >90 foknál. A következőkben a körnek sphaerikus sugara alatt azt a sugarát értjük, a mely kisebb 90 foknál. Továbbá az ezen sugárnak megfelelő középpontját értjük, ha a kör középpontjáról szólunk.

A feladat megfejtésére nézve czélszerűnek mutatkozik, hogy az adott köröket egy bizonyos helyzetben elképzeljük. Vegyük fel tehát az adott köröket úgy, hogy azok közől egyik se messe a másikát, valamint szintén úgy, hogy egyik se kerítse be a másikát.

Az adott körök e helyzetét szem előtt tartva, látjuk,

---

1) Géométrie de Position Art. 257.

2) Lásd Geometrie der Stellung von L. N. M. Carnot, übersetzt von Schumacher. II. Theil 377. l., valamint Gauss Werke IV. Bd. 399. l.

3) Journal de l'école polytechnique XVII-iéme Cahier 115—119. ll.

4) Applications d'analyse et de Géométrie, qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures T. I. 30—41. ll.

5) Zum Problem des Apollonius czimű értekezésben. Clebsch : Mathemat. Annalen VI. köt. 613—632. ll.

6) Auszug aus einem Schreiben des Herrn Mertens an dem Herausgeber (Borchardt) Crelle-Borchardt Journal für die rein. u. angew. Math. 77. köt. 102, l.

Az általunk nem idézett eredeti forrásokra és a probléma további történetére nézve a következő munkákat idézzük : Klügel : Mathematisches Wörterbuch 134. l. és tovább, valamint szintén »Supplemente zu Klügels Wörterbuch« von J. A Grunert. I. Abth. 28. l. és tovább, Chasles : Aperçu historique Chap. II. 52. Montuela : Histoire des mathématiques T. I. 263. l.

hogy több kör fog megfelelni a feladat követelményeinek. Nevezetesen látjuk, hogy

a) Egy kizárólag érintő kört nyerünk.

b) Egy bezárólag érintő kört.

c) Három érintő kört, a melyek az adott körök közől az egyiket bezárólag a másik kettőt pedig kizárólag érintik.

d) Három érintő kört, a melyek az adott körök közől az egyikét kizárólag a másik kettőt bezárólag érintik.

Igy tehát a kiszemelt esetben összesen véve nyolcz érintő kört nyerünk.

2. Jelöljük az ugyanazon gömbön fekvő három adott kör középpontjait 1, 2, 3-mal, sugarait r_1, r_2, r_3-mal, a kizárólag érintő kör középpontját O-val, sugarát ϱ-val, végre az 1, 2, 3 pontok által képezett gömb háromszög 23, 31, 12 oldalait a, b, c-vel, úgy ha az 1, 2, 3 és O pontokat legnagyobb körök által összekötjük a gömbfelületen az $O123$ teljes gömbnégyszögöt nyerjük, a melynek O csúcsában találkozó oldalai a következők:

$$O1 = r_1 + \varrho, \quad O2 = r_2 + \varrho, \quad O3 = r_3 + \varrho$$

és

$$a \qquad b \qquad c$$

az ezeknek szemben fekvő oldalak. [1])

Az $O123$ teljes gömbnégyszög hat oldala között egy ismeretes összefüggés létezik, [2]) mely ez esetben a következő egyenlet által nyer kifejezést:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(\varrho + r_1) & \cos(\varrho + r_2) & \cos(\varrho + r_3) \\ \cos(\varrho + r_1) & 1 & \cos c & \cos b \\ \cos(\varrho + r_2) & \cos c & 1 & \cos a \\ \mathrm{crs}(\varrho + r_3) & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

mely, ha az összegek cosinusait kifejtjük és a determinans első sorát és oszlopát $\cos\varrho$-val elosztjuk, ezt az alakot veszi fel:

---

[1]) Rövidség kedvéért feltesszük, hogy a gömb sugara egyenlő a mérték-egységgel.

[2]) Lásd p. a szerző következő czimű értekezésében »A determinánsok alkalmazása a mértanban« (Müegyetemi lapok I. köt. 237. l.) a (8) alatti egyenletet.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\cos^2\varrho} & \cos r_1 - \sin r_1 \operatorname{tg}\varrho & \cos r_2 - \sin r_2 \operatorname{tg}\varrho & \cos r_3 - \sin r_3 \operatorname{tg}\varrho \\ \cos r_1 - \sin r_1 \operatorname{tg}\varrho & 1 & \cos c & \cos b \\ \cos r_2 - \sin r_2 \operatorname{tg}\varrho & \cos c & 1 & \cos a \\ \cos r_3 - \sin r_3 \operatorname{tg}\varrho & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

vagy még továbbá :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\operatorname{tg}^2\varrho & \cos r_1 - \sin r_1 \operatorname{tg}\varrho & \cos r_2 - \sin r_2 \operatorname{tg}\varrho & \cos r_3 - \sin r_3 \operatorname{tg}\varrho \\ 0 & \cos r_1 - \sin r_1 \operatorname{tg}\varrho & 1 & \cos c & \cos b \\ 0 & \cos r_2 - \sin r_2 \operatorname{tg}\varrho & \cos c & 1 & \cos a \\ 0 & \cos r_3 - \sin r_3 \operatorname{tg}\varrho & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

és ha az ezen egyenletben előforduló determinánsban az első sort és a $\cos r_1$, $\cos r_2$, $\cos r_3$-mal szorzott első sort a 2-dik, 3-dik, 4-dik és 5-dik sorból kivonjuk és azután a $\cos r_1$, $\cos r_2$, $\cos r_3$-mal szorzott első oszlopot a 3-dik, 4-dik és 5-dik oszlophoz hozzáadjuk, úgy az előbbi egyenlet a következőbe megy át :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos r_1 & \cos r_2 & \cos r_3 \\ -1 & \operatorname{tg}^2\varrho & -\operatorname{tg}\varrho \sin r_1 & -\operatorname{tg}\varrho \sin r_2 & -\operatorname{tg}\varrho \sin r_3 \\ -\cos r_1 & -\operatorname{tg}\varrho \sin r_1 & 1-\cos^2 r_1 & \cos c - \mathrm{cas}\, r_1 \cos r_2 & \cos b - \cos r_1 \cos r_3 \\ -\cos r_2 & -\operatorname{tg}\varrho \sin r_2 & \cos c - \cos r_1 \cos r_2 & 1-\cos^2 r_2 & \cos a - \cos r_2 \cos r_3 \\ -\cos r_3 & -\operatorname{tg}\varrho \sin r_3 & \cos b - \cos r_1 \cos r_3 & \cos a - \cos r_2 \cos r_3 & 1-\cos^2 r_3 \end{vmatrix} = 0$$

és ha itt még az első oszlopot —1-gyel szorozzuk, a második sort és oszlopot pedig tgϱ-val osztjuk, úgy az a következő jelölések:

$$\left.\begin{array}{l} \cos a - \cos r_2 \cos r_3 = \alpha \\ \cos b - \cos r_1 \cos r_3 = \beta \\ \cos c - \cos r_1 \cos r_2 = \gamma \end{array}\right\} \quad (2).$$

$$\cot g\varrho = x \quad (3)$$

használata mellett ezt az alakot veszi fel:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & \cos r_1 & \cos r_2 & \cos r_3 \\ x & 1 & -\sin r_1 & -\sin r_2 & -\sin r_3 \\ \cos r_1 & -\sin r_1 & \sin^2 r_1 & \gamma & \beta \\ \cos r_2 & -\sin r_2 & \gamma & \sin^2 r_2 & \alpha \\ \cos r_3 & -\sin r_3 & \beta & \alpha & \sin^2 r_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

a mely egyenletet x szerént rendezve, a következő alakú lesz:

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0 \quad (5).$$

vagy ha x helyett tgϱ-ban kifejezett értékét helyettesítjük, úgy tgϱ a következő négyzetes egyenlet által van meghatározva:

$$P\mathrm{tg}^2\varrho + 2N\mathrm{g}\varrho + M = 0 \quad (6).$$

mely egyenlet a kizárólag érintő kör sugarának meghatározására szolgál.

3. A (6) alatti egyenletben előforduló M, N és P együtthatók értékeit a (4) és (5) alatti egyenletek összehasonlításából nyerjük.

Ha a (4) alatti egyenletben x-t egyenlőnek tesszük zérussal, úgy P értékét nyerjük és azért

$$P = \begin{vmatrix} e & f & \cos r_1 & \cos r_2 & \cos r_3 \\ f & g & -\sin r_1 & -\sin r_2 & -\sin r_3 \\ \cos r_1 & -\sin r_1 & \sin^2 r_1 & \gamma & \beta \\ \mathrm{cor} r_2 & -\sin r_2 & \gamma & \sin^2 r_2 & \alpha \\ \cos r_3 & -\sin r_3 & \beta & \alpha & \sin^2 r_3 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

a hol $e = -1, f = o, g = 1$. E mennyiségeket azért írjuk a nékiök megfelelő számértékek helyett, hogy a P determinánst szeréntök differenciálhassuk.

Továbbá ugyancsak a (4) és (5) alatti egyenletek összehasonlitásából a determináns elmélet ismeretes tételei szerént találjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} M &= -\frac{\partial^2 P}{\partial e\,\partial g} \\ N &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial f} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

A (6) alatti egyenlet feloldásaiban az $N^2 - MP$, az egyenletnek negativ discriminánsa szerepel. E mennyiséget a következő megfontolások által fogjuk átalakítani:

Ha a P determinánsból indulunk ki, úgy a determinánselmélet ismeretes tétele szerént a következő azonos egyenlet áll. [1])

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial e} & \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial P}{\partial f} \\ \tfrac{1}{2}\dfrac{\partial P}{\partial f} & \dfrac{\partial P}{\partial g} \end{vmatrix} = P\frac{\partial^2 P}{\partial e\,\partial g}$$

a mely a (8) alatti egyenletek tekintetbe vételével a következőbe megy át

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial e} & N \\ N & \dfrac{\partial P}{\partial g} \end{vmatrix} = -MP,$$

mely egyenletből végre következik, hogy

$$N^2 - MP = \frac{\partial P}{\partial e}\,\frac{\partial P}{\partial g} \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

4. $P, N, \dfrac{\partial P}{\partial e}, \dfrac{\partial P}{\partial g}$ mennyiségek értékei még továbbá redukálhatók.

Nevezetesen, ha a (7) alatti egyenlet előforduló determinánsában a $\sin r_1$, $\sin r_2$, $\sin r_3$-mal szorzott második sort a 3-dik, 4-dik és 5-dik sorhoz adjuk, úgy a következő jelölések mellett

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \sin r_2 \sin r_3 &= \cos a - \cos(r_2 - r_3) = A \\ \beta - \sin r_1 \sin r_3 &= \cos b - \cos(r_1 - r_3) = B \\ \gamma - \sin r_1 \sin r_2 &= \cos c - \cos(r_1 - r_2) = C \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

---

[1]) Lásd p. Baltzer: »Theorie und Anwendung der Determinanten« czimű munkájának 3-dik kiadásában §. 6, 3.

$$P=\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cos r_1 & \cos r_2 & \cos r_3 \\ 0 & 1 & -\sin r_1 & -\sin r_2 & -\sin r_3 \\ \cos r_1 & 0 & 0 & C & B \\ \cos r_2 & 0 & C & 0 & A \\ \cos r_3 & 0 & B & A & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & C & B & \cos r_1 \\ C & 0 & A & \cos r_2 \\ B & A & 0 & \cos r_3 \\ \cos r_1 & \cos r_2 & \cos r_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{11}$$

Ha továbbá N-ben a $\sin r_1$, $\sin r_2$ és $\sin r_3$-mal szorzott első sort a 2-dik, 3-dik és 4-dik sorhoz adjuk, úgy a (10) alatti jelölések megtartása mellett találjuk, hogy

$$N=-\begin{vmatrix} \sin r_1 & \sin r_2 & \sin r_3 & 0 \\ 0 & C & B & \cos r_1 \\ C & 0 & A & \cos r_2 \\ B & B & 0 & \cos r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & C & B & \cos r_1 \\ C & 0 & A & \cos r_2 \\ B & A & 0 & \cos r_3 \\ \sin r_1 & \sin r_2 & \sin r_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{12}$$

és $\frac{\partial P}{\partial e}$ determinánsnak ugyanily átalakítása által, ered

$$\frac{\partial P}{\partial e}=\begin{vmatrix} 1 & -\sin r_1 & -\sin r_2 & -\sin r_3 \\ 0 & 0 & C & B \\ 0 & C & 0 & A \\ 0 & B & A & 0 \end{vmatrix} = 2ABC \tag{13}$$

Végre ha $\frac{\partial P}{\partial g}$-ben a $\cos r_1$, $\cos r_2$, $\cos r_3$-mal szorzott utolsó sort az első három sorhoz adjuk, úgy a (2) alatti jelölések tekintetbe vételével találjuk, hogy

$$\frac{\partial P}{\partial g}=\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b & 0 \\ \cos c & 1 & \cos a & 0 \\ \cos b & \cos a & 1 & 0 \\ \cos r_1 & \cos r_2 & \cos r_3 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

vagy ha még rövidség kedvéért a következő jelölést használjuk :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}=\Delta \tag{14}$$

úgy

$$\frac{\partial P}{\partial g}=-\Delta \tag{15}$$

Ha tehát a (9) alatti egyenletben $\frac{\partial P}{\partial e}$ és $\frac{\partial P}{\partial g}$ a (13) és a (15) alatti egyenletekben talált értékeit helyettesítjük, úgy a (6) alatti egyenlet negativ discriminánsát D-vel jelölvén, találjuk, hogy :

$$D=N^2-MP=-2\Delta ABC$$

és ha még az A, B, C mennyiségeket tényezőkre felbontjuk, úgy végre lesz :

$$D=16\Delta\sin\tfrac{1}{2}[a+r_2-r_3]\sin\tfrac{1}{2}[a-(r_2-r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[b+r_1-r_3]\sin\tfrac{1}{2}[b-(r_1-r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[c+r_1-r_2]\sin\tfrac{1}{2}[c+(r_1-r_2)] \tag{16}$$

5. A (6) alatti egyenletből a kizárólag érintő kör sugarát nyerjük, ha abban az N, P és $D=N^2-MP$ mennyiségeknek a (11), (12) és (16) alatti egyenletekben nyert redukált értékeit helyettesítjük.

A bezárólag érintő kör sugarának meghatározására szolgáló egyenletet a (6) alatti egyenletből nyerjük, ha abban r_1, r_2, r_3 helyett $-r_1$, $-r_2$, $-r_3$-at helyettesítünk. Lássuk tehát, hogy miként változnak az M, P és N mennyiségek e helyettesítések által.

A (8) alatti egyenletek elseje szerént kivehetni, hogy M értéke a nevezett helyettesítések által nem változik; hasonlóan találjuk a (10) alatti egyenletekből, hogy az A, B, C mennyiségek sem változnak és így a (11) alatti egyenletből következik, hogy P sem változik, holott a (12) alatti egyenletből látjuk, hogy N annyiban változik, a mennyiben e mennyiség az előjelét megváltoztatja. Mindezeknél fogva tehát az előbbi jelölések megtartásával a bezárólag érintő kör sugara a következő egyenlet által van meghatározva:

$$P\operatorname{tg}^2\varrho - 2N\operatorname{tg}\varrho + M = 0 \qquad (17)$$

A (6) és (17) alatti egyenleteket, melyektől a kizárólag és bezárólag érintő körök sugarai függnek, egymással összehasonlítva találjuk, hogy:

a) A két egyenletnek a gyökei egyeidejüleg valósak, ha t. i. az egyik egyenletnek a gyökei egyáltalán valósak, mivel a két egyenletnek a discriminánsai egyenlők.

b) A kérdésben forgó egyenletek gyökeinek absolut értékei egyenlők és előjelben ellenkezők, olyképen, hogy ha a (6) alatti egyenletnek gyökei $\operatorname{tg}\varrho_1$ és $\operatorname{tg}\varrho_2$, úgy a (17) alatti egyenletnek a gyökei $-\operatorname{tg}\varrho_1$ és $-\operatorname{tg}\varrho_2$.

c) Az 1. számban tett megállapítások következtében ϱ_1 és ϱ_2-nek csak is azon értékeit vesszük tekintetbe, melyek $\leqq 90^0$, azért tehát az előbbiekből következik, hogy ha a (6) alatti egyenletnek ϱ_1 és ϱ_2 felel meg, úgy a (17) alatti egyenletnek $-\varrho_1$ és $-\varrho_2$ fog megfelelni. Igy tehát, ha az első egyenlethez $+\varrho_1$ és $+\varrho_2$ tartozik, úgy a másodiknak $-\varrho_1$ és $-\varrho_2$ felel meg, ha pedig az első egyenlethez $+\varrho_1$ és $-\varrho_2$ tartozik, úgy a másodiknak $-\varrho_1$ és $+\varrho_2$ felel meg, és ha végre az első egyenletnek $-\varrho_1$, $-\varrho_2$ felel meg, úgy a második egyenlethez $+\varrho_1$ és $+\varrho_2$ tartozik.

d) A feladat természeténél fogva a negativ megoldásnak nincsen értelme, úgy tehát az előbb megkülönböztetett három esetben vagy két kizárólag érintő kört, vagy egy kizárólag és egy bezárólag érintő kört, vagy pedig végre két bezárólag érintő kört nyerünk.

e) A két egyenlet említett tulajdonságai miatt elégséges, ha azok közül csak az egyiket oldjuk meg tényleg, miután annak netaláni negativ gyökei, a másik egyenletben, mint positiv gyökök szerepelnek.

6. A (6) alatti egyenletből nyerjük szintén azon érintő körök sugarát is, melyek az 1-ső szám *c*) és *d*) alatti pontjaiban vannak felsorolva. Ha nevezetesen azon érintő kört keressük, a mely az i-dik kört érinti bezárólag, a többi kettőt pedig kizárólag, úgy csak kell, hogy a (6) alatti egyenletben az i-dik kör sugarát, azaz r_i—t (i=1, 2, 3) nemleges előjellel vegyük. Ha pedig azon kör sugarát keressük, a mely az i-dik kört érinti kizárólag, úgy a (6) alatti egyenletben az utóbbi két körhöz tartozó sugarat vesszük — előjellel.

Ezen eljárás szerént tehát a (6) alatti egyenletből két új egyenletet nyerünk, melyek közül az első azon érintő körhöz tartozik, a mely az i-dik kört érinti bezárólag, a másik kettőt kizárólag, a másik egyenlet pedig tartozik azon körhöz, a mely az i-dik kört kizárólag a másik kettőt pedig bezárólag érinti.

Az említett két egyenletnek ugyanazon tulajdonságai vannak, mint a (6) és (17) alatti egyenleteknek, ennélfogva az előbbi szám *c*) alatti pontja szerint ismét elégséges, ha e két egyenlet közől csak az elsőt oldjuk meg.

Miután pedig i egyenlő lehet 1, 2 vagy 3-mal, úgy az előbb felsorolt eseteket három egyenletből nyerjük.

Mindezeknél fogva látjuk, hogy a probléma teljes megfejtése négy másodfokú egyenlettől függ, a mely másodfokú egyenletekre nézve még ismernünk kell azon feltételeket, melyek mellett azok gyökei valósak vagy képzetesek lesznek, mely feltételek felkeresésével a következő számokban foglalkozunk.

7. A kitüzött feladat teljes megfejtésére szolgáló hátralevő egyenleteket az előbbi szám szerint a (6) alatti egyenletből nyerjük, ha abban

$$+r_1,\quad +r_2,\quad +r_3,$$

helyett rendre

$$\begin{array}{ccc} -r_1, & +r_2, & +r_3, \\ +r_1, & -r_2, & +r_3, \\ +r_1, & +r_2, & -r_3, \end{array} \qquad (18)$$

helyettesítünk.

Az ilyképen eredő egyenletek negativ discriminánsait is ezen helyettesítések segítségével nyerjük a (6) alatti egyenlet negativ discriminánsából, melynek értékét a (16) alatti egyenletben találtuk. Legyenek D_1, D_2, D_3, a még hátralevő három négyzetes egyenlet negativ discriminánsai, úgy a (18) alatti helyettesítéseknél fogva találjuk, hogy:

$$
\begin{aligned}
D_1 = 16\,\Delta\, & \sin\tfrac{1}{2}[a+r_2-r_3]\sin\tfrac{1}{2}[a-(r_2-r_3)] \\
& \sin\tfrac{1}{2}[b-(r_1+r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[b+r_1+r_3] \\
& \sin\tfrac{1}{2}[c-(r_1+r_2)]\sin\tfrac{1}{2}[c+r_1+r_2] \\
D_2 = 16\,\Delta\, & \sin\tfrac{1}{2}[a-(r_2+r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[a+r_2+r_3] \\
& \sin\tfrac{1}{2}[b+r_1-r_3]\sin\tfrac{1}{2}[b-(r_1-r_3)] \qquad (19) \\
& \sin\tfrac{1}{2}[c-(r_1+r_2]\sin\tfrac{1}{2}[c+r_1+r_2] \\
D_3 = 16\,\Delta\, & \sin\tfrac{1}{2}[a+r_2+r_3]\sin\tfrac{1}{2}[a-(r_2+r_3)] \\
& \sin\tfrac{1}{2}[b+r_1+r_3]\sin\tfrac{1}{2}[b-(r_1+r_3)] \\
& \sin\tfrac{1}{2}[c+r_1-r_2]\sin\tfrac{1}{2}[c-(r_1-r_2)]
\end{aligned}
$$

A (16) és (19) alatti egyenletekben előforduló Δ tényező értékét a (14) alatti egyenlet adja, ámde másrészt ismeretes, hogy

$$
\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos a & \cos b & 1 \end{vmatrix} = \sin^3 a \sin^2 b \sin^2 C \;^{1)}
$$

és így

$$
\Delta = \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 C
$$

ha az a, b, c oldalak által képezett gömbháromszögben a c oldalnak szemben fekvő szögöt C-vel jelöljük. Δ-nak ez utóbbi értékéből látjuk, hogy annak határ-értékei 0 és $+1$, a miből következik, hogy a (16) és (19) alatti egyenletekben előforduló: $16\,\Delta$ közös tényező, mindig tevőleges.

A (16) és (19) alatti egyenletekben még hátralevő hat tényező közül három mindég tevőleges. Feltéve, hogy

$$
r_1 > r_2 > r_3 \qquad (20)
$$

úgy látjuk, hogy p. a (16) alatti egyenletben előforduló

$$
\sin\tfrac{1}{2}(a+r_2-r_3),\quad \sin\tfrac{1}{2}(b+r_1-r_3),\quad \sin\tfrac{1}{2}(c+r_1-r_2)
$$

tényezők tevőlegesek. Jelöljük tehát a (16) és (19) alatti egyenletekben előforduló tevőleges tényezők szorzatát rendre

1) Lásd p. a szerző értek. »a determ. alkalm. a mértanban.« Műegyetemi lapok I. köt. 234. l. (3) alatti egyenlet.

λ, λ_1, λ_2, λ_3-mal, úgy a kérdésben forgó egyenleteket a következőképen írhatjuk:

$$\left.\begin{aligned} D&=\lambda \sin\tfrac{1}{2}[a-(r_2-r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[b-(r_1-r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[c-(r_1-r_2)] \\ D_1&=\lambda_1 \sin\tfrac{1}{2}[a-(r_2-r_3)][\sin\tfrac{1}{2}[b-(r_1+r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[c-(r_1+r_2)] \\ D_2&=\lambda_2 \sin\tfrac{1}{2}[a-(r_2+r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[b-(r_1-r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[c-(r_1+r_2)] \\ D_3&=\lambda_3 \sin\tfrac{1}{2}[a-(r_2+r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[b-(r_1+r_3)]\sin\tfrac{1}{2}[c-(r_1-r_2)] \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

A kitüzött feladatot megoldó négy négyzetes egyenletben a gyökök természete a D, D_1, D_2, D_3 mennyiségek előjelétől függ; ha ezek mindnyájan tevőlegesek, úgy nyolcz érintő kört nyerünk, valahányszor pedig a nevezett mennyiségek közől egy nemleges lesz, mindannyiszor két valós megoldás helyébe két képzetes lép.

A D, D_1, D_2. D_3 mennyiségeknek előjele az adott körök egymáshozi helyzetétől függ, a miért most áttérünk azon felvételekre, a melyeket az adott körökre nézve tehetünk.

8. Két kör egymáshozi helyzete lehet olyan, hogy azok egymást nem metszik és egymást kizárják, vagy olyan hogy a két kör egymást kizárja és egymást érinti, vagy pedig, hogy a két kör egymást metszi, vagy továbbá, hogy a két kör közől az egyik a másikát magában foglalja és egymást érinti, vagy végre, hogy a két kör egymást nem metszi, de az egyik a másikát magában foglalja.

A két kör egymáshozi helyzetére nézve az előbbiek szerént ötféle eset lehetséges, így ha a 2 és 3 pontokból, mint középpontokból az r_2 és r_3 sugarakkal leírt köröket vesszük figyelembe, mely körök középpontjainak távolsága a, úgy találjuk

a) E két kör nem metszi egymást és az egyik a másikát kizárja, ha

$$a > r_2 + r_3$$

b) A két kör egymást kizárja és érinti, ha

$$a = r_2 + r_3.$$

c) A két kör egymást metszi, ha

$$r_2 - r_3 < a < r_2 + r_3.$$

d) A (2) kör a (3) kört magában foglalja és azok egymást érintik, ha

$$r_2 - r_3 = a$$

e) A két kör egymást nem metszi és a (3) kör a (2) körben fekszik, ha

$$a < r_2 - r_3$$

Ha tehát a (b) és (d) alatti esetektől, azaz az érintéstől eltekintünk, a melyek az átmenetet az a) és c) alatti esetekből a c) és e) alatti esetekre képezik, úgy a két kör egymáshozi helyzetére nézve három esetet különböztetünk meg.

A három adott kör három kör-párt képez, mindegyik körpár egymáshozi helyzetére nézve pedig az előbbiek szerént három esetet különböztetünk meg, s ezért ha a különféle körpáraknak megfelelő eseteket egymással egybevetítjük, úgy a három adott kör egymáshozi helyzetére nézve 27 esetet kell megkülönböztetnünk, ámde ezen esetek közől többen ugyanazt az esetet adják, így a három kör egymáshozi helyzetére nézve csak a következő tizenkét esetet különböztetjük meg.

E 12 esetet a következőkben állítjuk össze, megjegyezvén, hogy az egyes eseteknek megfelelő feltételei mellé még a D, D_1, D_2 és D_3 mennyiségek előjeleit irjuk, valamint a feladat valós megoldásainak számát.

				D	D_1	D_2	D_3	felold. száma
1)	$a>r_2+r_3$	$b>r_1+r_3$	$c>r_1+r_2$	+	+	+	+	8
2)	$r_2-r_3<a<r_2+r_3$	$b>r_1+r_3$	$c>r_1+r_2$	+	+	—	—	4
3)	$a<r_2-r_3$	$b>r_1+r_3$	$c>r_1+r_2$	—	—	—	—	0
4)	$r_2-r_3<a<r_2+r_3$	$r_1-r_3<b<r_1+r_3$	$c>r_1+r_2$	+	—	—	+	4
5)	$a<r_2-r_3$	$b>r_1+r_3$	$r_1-r_2<c<r_1+r_2$	—	+	+	—	4
6)	$r_2-r_3<a<r_2+r_3$	$r_1-r_3<b<r_1+r_3$	$r_1-r_2<c<r_1+r_2$	+	+	+	+	8
7)	$a<r_2-r_3$	$r_1-r_3<b<r_1+r_3$	$r_1-r_2<c<r_1+r_2$	—	—	+	+	4
8)	$a<r_2-r_3$	$b<r_1-r_3$	$r_1-r_2<c<r_1+r_2$	+	—	—	+	4
9)	$r_2-r_3<a<r_2+r_3$	$r_1-r_3<b<r_1+r_3$	$c<r_1-r_2$	—	+	+	—	4
10)	$a>r_2+r_3$	$b<r_1-r_3$	$c<r_1-r_2$	+	+	+	+	8
11)	$r_2-r_3<a<r_2+r_3$	$b<r_1-r_3$	$c<r_1-r_2$	+	+	—	—	4
12)	$a<r_2-r_3$	$b<r_1-r_3$	$c<r_1-r_2$	—	—	—	—	0.

E felsorolásból látjuk, hogy az 1-ső, 6-dik és 10-dik esetben, a mikor a három kör egymást nem metszi és kizárja, vagy mikor mind a három kör egymást metszi, vagy végre két kör a harmadikban fekszik és egymást nem metszi, a feladatnak nyolcz megoldása van; ezzel ellentétben látjuk, hogy a 3-dik és 12-dik esetben, a mikor az egyik kör a másik kettőt nem metszi és kizárja, de ez utóbbiak közől az egyik a másikát magában foglalja, vagy mikor az első körben a második és ebben ismét a harmadik fekszik, úgy a feladatnak nincsen valós megoldása. A hátralevő hét esetben mindegyiknek négy valós megoldás felel meg.

9. Mélyen fekvő algebrai oka van azon különös körülménynek, hogy noha a feladat megoldása négy négyzetes egyenletfől függ, úgy a valós megoldások száma mégis csak 0 4 és 8-ra szorítkozik. A nevezett ok kiderítésével fejezzük be ez értekezést.

Képzeljük e czélból a négy négyzetes egyenletet, melytől a feladat megoldása függ, egymással megszorozva, úgy az ilyként eredő nyolczad fokú egyenletnek discriminánsa a felsőbb algebrának ismeretes tétele szerént, egyenlő a négy másod fokú egyenlet discriminánsainak szorzatával. Ha tehát a kérdésben forgó nyolczad fokúegyenlet discriminánsát $\bigtriangledown$-val jelöljük, a másod fokú egyenletek discriminánsaira nézve pedig az előbbi jelöléseket megtartjuk, úgy az előbbi megjegyzés szerént·

$$\bigtriangledown = D\, D_1\, D_2\, D_3$$

vagy ha D, D_1 D_2 D_3 helyett az értékeket a (21) alatti egyenletekből helyettesítjük, úgy végre ered, hogy

$$\begin{aligned}\bigtriangledown = \lambda\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \sin^2\tfrac{1}{2}[a-(r_2-r_3)]\sin^2\tfrac{1}{2}[b-(r_1-r_3)]\sin^2\tfrac{1}{2}[c-(r_1-r_2)] \\ \sin^2\tfrac{1}{2}[a-(r_2+r_3)]\sin^2\tfrac{1}{2}[b-(r_1+r_3)]\sin^2\tfrac{1}{2}[c-(r_1+r_2)]\end{aligned} \qquad (22)$$

a mely egyenletből látni, miután λ, λ_1, λ_2, λ_3 positiv szorzókat jelentenek, hogy $\bigtriangledown$ azaz a kérdésben forgó nyolczad fokú egyenlet discriminánsa mindig tevőleges, ámde ebből a felsőbb algebrának egy általános tétele szerint az következik, hogy akkor a kérdéses egyenletnek csak páros számú képzetes gyökpárai lehetnek, azaz vagy 8, vagy 4, vagy 0 képzetes gyöke lehet, tehát 0, vagy 4, vagy 8 valós gyöke, amint azt a kitűzött feladat teljes megoldásában találtuk.

Budapesten 1877-diki február 26-án.