A KÚPSZELETEN FEKVŐ HAT PONT

FELTÉTELI EGYENLETÉNEK

KÜLÖNBÖZŐ ALAKJAIRÓL.

(Folytatása a IV. kötetben ugyane czím alatt megjelent értekezésnek.)

HUNYADY JENŐTŐL.

(Előadta a III-ik osztály ülésén 1877. február 5.)

BUDAPEST, 1877.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1877. Nyomatott az A t h e n a e u m r. társ. nyomdájában.

A KÚPSZELETEN FEKVŐ HAT PONT FELTÉTELI EGYENLETÉNEK KÜLÖNBÖZŐ ALAKJAIRÓL.

(Folytatása a IV. kötetben ugyan-e czim alatt megjelent értekezésnek.)

HUNYADY JENŐTŐL.

(Előadta a III-ik osztály ülésén 1877. febr. 5.)

Ez értekezés folytatását képezi a szerző ugyanezen czím alatt közzétett értekezésének, mely a magyar tudományos akadémiai értekezések a mathematikai tudományok köréből IV. kötetében jelent meg.

A jelen értekezés czélja részint az előbbi értekezés további kifejtése, részint pedig azon feltételt, mely kifejezi, hogy hat pont ugyanazon kúpszeleten fekszik, egy új alakban adni, és azután kifejezni azon összefüggést, a mely az említett föltétel ezen új alakja között és a már előbb tárgyalt alakok között létezik.

IV.

16. A további kifejtésekre nézve czélszerűnek mutatkozik a Pascal-féle idomnak azon tulajdonságait, legalább eredményeiben fölemlíteni, melyek német Geométerektől lettek felfedezve.

Hat pont által ugyanis hatvan egyszerű hatszög lévén meghatározva, ha pedig e hat pont ugyanazon kúpszeleten fekszik, úgy a Pascal-féle tétel szerint mindegyik hatszöghöz egy egyenes tartozik, a mely egyenesben a hatszög átellenes oldalpárai találkoznak. Ezen egyenes a mai terminologiában Pascal-féle egyenesnek neveztetik.

A hat pont által meghatározott hatvan egyszerü hatszögnek megfelelő hatvan Pascal-féle egyenes egy nevezetes idomot képez, melyre első ízben Steiner [1]) figyelmeztetett. A Steiner értekezésében előforduló tévedések később Plückertől[2]) lettek kijavítva, mig végre Steiner [3]) azokat ujból, — Plücker javitásainak tekintetbe vételével — korszakot alkotó munkájában tette közzé.

Az itt fölemlitendő tulajdonságai a Pascal-féle idomnak a következőkben foglalhatók össze:

»A hatvan Pascal-féle egyenes hármanként húsz pontban találkozik, mely pontok Steiner-féle pontoknak neveztetnek.«

»A húsz Steiner-féle pont a kúpszeletre nézve tiz conjugált harmonikus pontpárt képez.«

»A húsz Steiner-féle pont közül 15-ször négy fekszik egy egyenesben; az utóbbi tizenöt egyenes Steiner-féle egyenesnek neveztetik.«

Az előbb fölemlitett tulajdonságai a Pascal-féle idomnak leginkább szembetünnek, ha az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok által meghatározott hatszögöket a következő táblázatban állitjuk össze:

$$p\left\{\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\\1&4&3&6&5&2\\1&6&3&2&5&4\end{array}\right.$$

$$a_1\left\{\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&6&5\\1&4&3&5&6&2\\1&5&3&2&6&4\end{array}\right. \quad b_1\left\{\begin{array}{cccccc}1&4&6&3&2&5\\1&3&6&5&2&4\\1&5&6&4&2&3\end{array}\right. \quad c_1\left\{\begin{array}{cccccc}1&6&5&4&2&3\\1&4&5&3&2&6\\1&3&5&6&2&4\end{array}\right.$$

$$a_2\left\{\begin{array}{cccccc}1&2&4&3&5&6\\1&3&4&6&5&2\\1&6&4&2&5&3\end{array}\right. \quad b_2\left\{\begin{array}{cccccc}1&4&2&5&3&6\\1&5&2&6&3&4\\1&6&2&4&3&5\end{array}\right. \quad c_2\left\{\begin{array}{cccccc}1&6&2&3&4&5\\1&3&2&5&4&6\\1&5&2&6&4&3\end{array}\right.$$

$$a_3\left\{\begin{array}{cccccc}1&2&4&3&6&5\\1&3&4&5&6&2\\1&5&4&2&6&3\end{array}\right. \quad b_3\left\{\begin{array}{cccccc}1&4&6&3&5&2\\1&3&6&2&5&4\\1&2&6&4&5&3\end{array}\right. \quad c_3\left\{\begin{array}{cccccc}1&6&3&2&4&5\\1&2&3&5&4&6\\1&5&3&6&4&2\end{array}\right.$$

---

[1]) Gergonne: Annales de math. XVIII. köt. 319. l.

[2]) Crelle Journal f. d. r. u. a. M. V. köt. 268. l.

[3]) Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. 311. l.

$$\pi\left\{\begin{matrix}1\,2\,5\,4\,3\,6\\1\,4\,5\,6\,3\,2\\1\,6\,5\,2\,3\,4\end{matrix}\right.$$

$$\alpha_1\left\{\begin{matrix}1\,2\,6\,4\,3\,5\\1\,4\,6\,5\,3\,2\\1\,5\,6\,2\,3\,4\end{matrix}\right. \quad \alpha_2\left\{\begin{matrix}1\,6\,4\,3\,5\,2\\1\,3\,4\,2\,5\,6\\1\,2\,4\,6\,5\,3\end{matrix}\right. \quad \alpha_3\left\{\begin{matrix}1\,2\,6\,3\,4\,5\\1\,3\,6\,5\,4\,2\\1\,5\,6\,2\,4\,3\end{matrix}\right.$$

$$\beta_1\left\{\begin{matrix}1\,4\,2\,3\,6\,5\\1\,3\,2\,5\,6\,4\\1\,5\,2\,4\,6\,3\end{matrix}\right. \quad \beta_2\left\{\begin{matrix}1\,6\,3\,4\,2\,5\\1\,4\,3\,5\,2\,6\\1\,5\,3\,6\,2\,4\end{matrix}\right. \quad \beta_3\left\{\begin{matrix}1\,2\,6\,3\,5\,4\\1\,3\,6\,4\,5\,2\\1\,4\,6\,2\,5\,3\end{matrix}\right.$$

$$\gamma_1\left\{\begin{matrix}1\,4\,2\,3\,5\,6\\1\,3\,2\,6\,5\,4\\1\,6\,2\,4\,5\,3\end{matrix}\right. \quad \gamma_2\left\{\begin{matrix}1\,6\,4\,3\,2\,5\\1\,3\,4\,5\,2\,6\\1\,5\,4\,6\,2\,3\end{matrix}\right. \quad \gamma_3\left\{\begin{matrix}1\,2\,3\,6\,4\,5\\1\,6\,3\,5\,4\,2\\1\,5\,3\,2\,4\,6\end{matrix}\right.$$

E táblázatban, a mely Schröter [1]) kitünő munkájából vétetett, a hatszögök olyképen vannak összeállitva hármankénti csoportokban, a miként az illető hatszögökhöz tartozó Pascal-féle egyenesek ugyanazon Steiner-féle pontban találkoznak. A húsz Steiner-féle pont a következő: p, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, π, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 ,ezek közöl, amint látni, a fele latin, a másik fele pedig görög betűkkel jelöltettek. A jelölés úgy választatott, hogy az egymásnak megfelelő latin és görög betűvel jelölt pontpár a kúpszeletre nézve conjugált harmonikus pontpárt képez, így p. a p és π Steiner-féle pontok a kúpszeletre nézve conjugált harmonikus pontpárt képeznek, valamint az a_1 és α_1 pontok szintén conjugált harmonikus pontok s. a. t.

Azon Steiner-féle pontok, melyek négyenként egy-egy Steiner-féle egyenesben fekszenek, a következők:

$$\begin{matrix} p, & a_1, & a_2, & a_3, \\ p, & b_1, & b_2, & b_3, \\ p, & c_1, & c_2, & c_3, \\ \pi, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1. \\ \pi, & \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2. \\ \pi, & \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3. \end{matrix}$$

---

[1]) Jacob Steiner Vorles. über synth. Geometrie, II. Bd. bearb. v. H. Schröter p. 135.

$a_1, b_1, \gamma_2, \gamma_3.$
$b_1, c_1, \alpha_2, \alpha_3.$
$c_1, a_1, \beta_2, \beta_3.$
$a_2, b_2, \gamma_3, \gamma_1.$
$b_3, c_3, \alpha_3, \alpha_1.$
$c_3, a_3, \beta_3, \beta_1.$
$a_3, b_3, \gamma_1, \gamma_2.$
$b_3, c_3, \alpha_1, \alpha_2.$
$c_3, a_3, \beta_1, \beta_2.$

V.

17. A 7-dik szám végén tett megjegyzés azon háromszögök számára nézve, melyeknek oldalai mind a hat ponton keresztül mennek, további megfontolások által némileg módositandó.

Ha ugyanis a nevezett háromszögök számának kipuhatolásánál az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok által meghatározott különböző hatszögöket választjuk kiindulási pontúl, úgy találjuk, hogy minden hatszögben három nem egymás mellett fekvő oldal vezet két oly háromszögre, melynek oldalai mind a hat ponton keresztül mennek; így tehát mind a hatvan hatszög 120 ily háromszögre vezetne, ámde az ily módon nyert háromszögök közül többen azonosak lesznek és így a háromszögök száma tetemesen reducálódik.

Látjuk, hogy oly három hatszög, a melyeknek Pascal-féle egyenesei egy Steiner-féle pontban találkoznak, hat háromszög helyett csak háromra vezet, így p. a p Steiner-féle pontban találkozó

$$p\begin{cases}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\\1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2\\1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4\end{cases}$$

hatszögök, a következő háromszögökre vezetnek:

12, 34, 56.	45, 61, 23.
14, 36, 52.	65, 21, 43.
16, 32, 54.	25, 41, 63.

Ámde látni, hogy a második három háromszög az első háromtól nem különbözik. Mivel pedig ez minden hatszög csoportra áll, melynek Pascal-féle egyenesei ugyanazon Steiner-féle pontban találkoznak, úgy a háromszögök számát, vagyis a 120-at 2-vel el kell osztani, a mi által a háromszögök száma hatvanra reducálódik.

$$p\left\{\begin{array}{l}12,\ 34,\ 56.\\14,\ 36,\ 52.\\16,\ 32,\ 54.\end{array}\right.$$

$$a_1\left\{\begin{array}{l}12,\ 34,\ 65.\\14,\ 35,\ 62.\\15,\ 32,\ 64.\end{array}\right.\quad b_1\left\{\begin{array}{l}14,\ 63,\ 25.\\13,\ 65,\ 24.\\15,\ 64,\ 23.\end{array}\right.\quad c_1\left\{\begin{array}{l}16,\ 54,\ 23.\\14,\ 53,\ 26.\\13,\ 56,\ 24.\end{array}\right.$$

$$a_2\left\{\begin{array}{l}12,\ 43,\ 56.\\13,\ 46,\ 52.\\16,\ 42,\ 53.\end{array}\right.\quad b_2\left\{\begin{array}{l}14,\ 25,\ 36.\\15,\ 26,\ 34.\\16,\ 24,\ 35.\end{array}\right.\quad c_2\left\{\begin{array}{l}16,\ 23,\ 45.\\13,\ 25,\ 46.\\15,\ 26,\ 43.\end{array}\right.$$

$$a_3\left\{\begin{array}{l}12,\ 43,\ 65.\\13,\ 45,\ 62.\\15,\ 42,\ 63.\end{array}\right.\quad b_3\left\{\begin{array}{l}14,\ 63,\ 52.\\13,\ 62,\ 54.\\12,\ 64,\ 53.\end{array}\right.\quad c_3\left\{\begin{array}{l}16,\ 32,\ 45.\\12,\ 35,\ 46.\\15,\ 36,\ 42.\end{array}\right.$$

$$\pi\left\{\begin{array}{l}12,\ 54,\ 63.\\14,\ 56,\ 32.\\16,\ 52,\ 34.\end{array}\right.$$

$$\alpha_1\left\{\begin{array}{l}12,\ 64,\ 35.\\14,\ 65,\ 32.\\15,\ 62,\ 34.\end{array}\right.\quad \alpha_2\left\{\begin{array}{l}16,\ 43,\ 52.\\13,\ 42,\ 56.\\12,\ 46,\ 53.\end{array}\right.\quad \alpha_3\left\{\begin{array}{l}12,\ 63,\ 45.\\13,\ 65,\ 42.\\15,\ 62,\ 43.\end{array}\right.$$

$$\beta_1\left\{\begin{array}{l}14,\ 23,\ 65.\\13,\ 25,\ 64.\\15,\ 24,\ 63.\end{array}\right.\quad \beta_2\left\{\begin{array}{l}16,\ 34,\ 25\\14,\ 35,\ 26\\15,\ 36,\ 24.\end{array}\right.\quad \beta_3\left\{\begin{array}{l}12,\ 63,\ 54.\\13,\ 64,\ 52.\\14,\ 62,\ 53.\end{array}\right.$$

$$\gamma_1\left\{\begin{array}{l}14,\ 23,\ 56.\\13,\ 26,\ 54.\\16,\ 25,\ 43.\end{array}\right.\quad \gamma_2\left\{\begin{array}{l}16,\ 43,\ 25.\\13,\ 45,\ 26.\\15,\ 46,\ 23.\end{array}\right.\quad \gamma_3\left\{\begin{array}{l}12,\ 36,\ 45.\\16,\ 35,\ 42.\\15,\ 32,\ 46.\end{array}\right.$$

de ezen háromszögek közül ismét négy egymással egyenlő, igy p. a p, a_1, a_2 és a_3 alatti első háromszögök s. a. t., ennélfogva tehát csak a következő tizenöt egymástól különböző háromszögöt nyerjük:

12, 34, 56.
14, 36, 52.
16, 32, 54.

14, 35, 62.
15, 32, 64.
13, 46, 52.
16, 42, 53.
13, 45, 62.
15, 42, 63.
13, 65, 24,
15, 26, 34.
12, 64, 53.
12, 54, 36.
14, 56, 32.
16, 52, 34.

18. Miután tehát hat pont által tizenöt háromszög van meghatározva, melyek oldalai mind a hat ponton mennek keresztül, azért a Carnot-féle tétel tizenöt alakilag egymástól különböző egyenletben fejezi ki azt a feltételt, hogy hat pont ugyanazon kúpszeleten fekszik. E szerint tehát a 7. és 8. alatti számokban előforduló megjegyzések, melyek szerint száztúsz Carnot-féle egyenlet létezik, annyiban kijavitandók, hogy csak tizenöt Carnot-féle egyenlet létezik.

Az [12, 34, 56] háromszögöt tekintetbe véve, a Carnot-féle tétel a következő egyenlet által van kifejezve:

$$(125)\,(126)\,(134)\,(234)\,(356)\,(456)\,-$$
$$-\,(123)\,(124)\,(156)\,(256)\,(345)\,(346)=0\;\ldots\;(1.)$$

(l. az 1-ső ért. 17. a. egyenl.)

ezen egyenletből pedig a 2, 4 és 6 számok cyclicus felcserélése által a következő kettőt nyerjük :

$$(124)\,(136)\,(145)\,(235)\,(256)\,(346)\,-$$
$$-\,(125)\,(134)\,(146)\,(236)\,(245)\,(356)=0\;\ldots\;(2.)$$
$$(123)\,(146)\,(156)\,(236)\,(245)\,(345)\,-$$
$$-\,(126)\,(136)\,(145)\,(234)\,(235)\,(456)=0\;\ldots\;(3.)$$

Ha továbbá az (1) alatti egyenletben a 4, 5 és 2, azután a 3, 6 és 2, végre pedig az 5, 2 és 3 számokat cseréljük fel cyclicusan, úgy a következő hat egyenletet nyerjük:

$$(124)\,(135)\,(146)\,(236)\,(256)\,(345)\,-$$
$$-\,(126)\,(134)\,(145)\,(235)\,(246)\,(356)=0\;\ldots\;(4.)$$

$$(123)(145)(156)(235)(246)(346) -$$
$$-(125)(135)(146)(234)(236)(456)=0 \quad \ldots \text{(5.)}$$
$$(123)(135)(146)(245)(256)(346) -$$
$$-(125)(134)(136)(235)(246)(456)=0 \quad \ldots \text{(6.)}$$
$$(124)(136)(156)(235)(246)(345) -$$
$$-(126)(135)(146)(234)(245)(356)=0 \quad \ldots \text{(7.)}$$
$$(123)(136)(145)(246)(256)(345) -$$
$$-(126)(134)(135)(236)(245)(456)=0 \quad \ldots \text{(8.)}$$
$$(124)(135)(156)(236)(245)(346) -$$
$$-(125)(136)(145)(234)(246)(356)=0 \quad \ldots \text{(9.)}$$

Továbbá a (2) alatti egyenletben a 4, 3, 5 számokat a 3, 5, 4-gyel, a 4, 5, 6 számokat az 5, 6, 4-gyel, végre pedig a 4, 3, 2 számokat a 2, 4, 3 számokkal felcserélve, a következő három egyenletet nyerjük:

$$(123)(134)(156)(245)(246)(356) -$$
$$-(124)(135)(136)(234)(256)(456) \quad \ldots\ldots \text{(10.)}$$
$$(125)(134)(156)(236)(246)(345) -$$
$$-(126)(135)(145)(234)(256)(346) \quad \ldots\ldots \text{(11.)}$$
$$(123)(125)(146)(246)(345)(356) -$$
$$-(124)(126)(135)(235)(346)(456) \quad \ldots\ldots \text{(12.)}$$

Ha végre pedig az (1), (2) és (3) alatti egyenletekben a 3 és 5 számokat egymással fölcseréljük, úgy a következő három egyenletet nyerjük:

$$(123)(126)(145)(245)(346)(356) -$$
$$-(124)(125)(136)(236)(345)(456) \quad \ldots\ldots \text{(13.)}$$
$$(124)(134)(156)(235)(236)(456) -$$
$$-(123)(145)(146)(234)(256)(356) \quad \ldots\ldots \text{(14.)}$$
$$(125)(136)(146)(234)(256)(345) -$$
$$-(126)(134)(156)(235)(245)(346) \quad \ldots\ldots \text{(15.)}$$

Ezen egyenletek a fentebbi háromszögöknek megfelelő Carnot-féle egyenletek.

19. Azon összefüggést, a mely egyrészt az (1)—(15) alatti egyenletek első tagjai, másrészt pedig a Pascal-féle egyenletek első tagjai között létezik, úgy nyerjük, ha a

$$\varDelta_{123456},\quad \varDelta_{143652},\quad \varDelta_{163254},$$
$$\varDelta_{143562},\quad \varDelta_{153264},\quad \varDelta_{134652},$$
$$\varDelta_{164253},\quad \varDelta_{134562},\quad \varDelta_{154263},$$
$$\varDelta_{136524},\quad \varDelta_{152634},\quad \varDelta_{126453},$$
$$\varDelta_{125436},\quad \varDelta_{145632},\quad \varDelta_{165234}$$

mennyiségeket rendre a következő determinánsokkal

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{52} & \eta_{52} & \zeta_{52} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \xi_{16} & \eta_{16} & \zeta_{16} \\ \xi_{32} & \eta_{32} & \zeta_{32} \\ \xi_{54} & \eta_{54} & \zeta_{54} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{35} & \eta_{35} & \zeta_{35} \\ \xi_{62} & \eta_{62} & \zeta_{62} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \xi_{15} & \eta_{15} & \zeta_{15} \\ \xi_{32} & \eta_{32} & \zeta_{32} \\ \xi_{64} & \eta_{64} & \zeta_{64} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46} \\ \xi_{52} & \eta_{52} & \zeta_{52} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{16} & \eta_{16} & \zeta_{16} \\ \xi_{42} & \eta_{42} & \zeta_{42} \\ \xi_{53} & \eta_{53} & \zeta_{53} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{62} & \eta_{62} & \zeta_{62} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \xi_{15} & \eta_{15} & \zeta_{15} \\ \xi_{42} & \eta_{42} & \zeta_{42} \\ \xi_{63} & \eta_{63} & \zeta_{63} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \xi_{65} & \eta_{65} & \zeta_{65} \\ \xi_{24} & \eta_{24} & \zeta_{24} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \xi_{15} & \eta_{15} & \zeta_{15} \\ \xi_{26} & \eta_{26} & \zeta_{26} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{64} & \eta_{64} & \zeta_{64} \\ \xi_{53} & \eta_{53} & \zeta_{53} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{54} & \eta_{54} & \zeta_{54} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{32} & \eta_{32} & \zeta_{32} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \xi_{16} & \eta_{16} & \zeta_{16} \\ \xi_{52} & \eta_{52} & \zeta_{52} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \end{vmatrix},$$

megszorozzuk.

Az eredő determinánsban előforduló elemek további átalakitása után, a szorzások eredményei a következők lesznek:

$$\varDelta_{123456}\cdot\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix} = (125)(126)(134)(234)(356)(456) - (123)(124)(156)(256)(345)(346) \quad \text{...(16.)}$$

$$-\varDelta_{143652}\cdot\begin{vmatrix} \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{52} & \eta_{52} & \zeta_{52} \end{vmatrix} = (124)(136)(145)(235)(256)(346) - (125)(134)(146)(236)(245)(356) \quad \text{...(17.)}$$

$$\varDelta_{163254}\cdot\begin{vmatrix} \xi_{16} & \eta_{16} & \zeta_{16} \\ \xi_{32} & \eta_{32} & \zeta_{32} \\ \xi_{54} & \eta_{54} & \zeta_{54} \end{vmatrix} = (123)(146)(156)(236)(245)(345) - (126)(136)(145)(234)(235)(456) \quad \text{...(18.)}$$

$$\varDelta_{143562}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14}\\ \xi_{35} & \eta_{35} & \zeta_{35}\\ \xi_{62} & \eta_{62} & \zeta_{62}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(124((135)(146)(236)(256)(345)\\ &-(126)(134)(145)(235)(246)(356)\ldots(19.)\end{aligned}$$

$$-\varDelta_{153264}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{15} & \eta_{15} & \zeta_{15}\\ \xi_{32} & \eta_{32} & \zeta_{32}\\ \xi_{64} & \eta_{64} & \zeta_{64}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(123)(145)(156)(235)(246)(346)\\ &-(125)(135)(146)(234)(236)(456)\ldots(20.)\end{aligned}$$

$$\varDelta_{134652}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13}\\ \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46}\\ \xi_{52} & \eta_{52} & \zeta_{52}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(123)(135)(146)(245)(256)(346)\\ &-(125)(134)(136)(235)(246)(456)\ldots(21.)\end{aligned}$$

$$-\varDelta_{164253}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{16} & \eta_{16} & \zeta_{16}\\ \xi_{42} & \eta_{42} & \zeta_{42}\\ \xi_{53} & \eta_{53} & \zeta_{53}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(124)(136)(156)(235)(246)(345)\\ &-(126)(135)(146)(234)(245)(356)\ldots(22.)\end{aligned}$$

$$-\varDelta_{134562}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13}\\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45}\\ \xi_{62} & \eta_{62} & \zeta_{62}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(123)(136)(145)(246)(256)(345)\\ &-(126)(134)(135)(236)(245)(456)\ldots(23.)\end{aligned}$$

$$\varDelta_{154263}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{15} & \eta_{15} & \zeta_{15}\\ \xi_{42} & \eta_{42} & \zeta_{42}\\ \xi_{63} & \eta_{63} & \zeta_{63}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(124)(135)(156)(236)(245)(346)\\ &-(125)(136)(145)(234)(246)(356)\ldots(24.)\end{aligned}$$

$$-\varDelta_{136524}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13}\\ \xi_{65} & \eta_{65} & \zeta_{65}\\ \xi_{24} & \eta_{24} & \zeta_{24}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(123)(134)(156)(245)(246)(356)\\ &-(124)(135)(136)(234)(256)(456)\ldots(25.)\end{aligned}$$

$$\varDelta_{152634}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{15} & \eta_{15} & \zeta_{15}\\ \xi_{26} & \eta_{26} & \xi_{26}\\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(125)(134)(156)(236)(246)(345)\\ &-(126)(135)(145)(234)(256)(346)\ldots(26.)\end{aligned}$$

$$-\varDelta_{126453}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12}\\ \xi_{64} & \eta_{64} & \zeta_{64}\\ \xi_{53} & \eta_{53} & \zeta_{53}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(123)(125)(146)(246)(345)(356)\\ &-(124)(126)(135)(235)(346)(456)\ldots(27.)\end{aligned}$$

$$-\varDelta_{125436}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12}\\ \xi_{54} & \eta_{54} & \zeta_{54}\\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(123)(126)(145)(245)(346)(356)\\ &-(124)(125)(136)(236)(345)(456)\ldots(28.)\end{aligned}$$

$$\varDelta_{145632}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14}\\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56}\\ \xi_{32} & \eta_{32} & \zeta_{32}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=(124)(134)(156)(235)(236)(456)\\ &-(123)(145)(146)(234)(256)(356)\ldots(29.)\end{aligned}$$

$$\Delta_{165234}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{16} & \eta_{16} & \zeta_{16}\\ \xi_{52} & \eta_{52} & \zeta_{52}\\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34}\end{vmatrix}\begin{matrix}=(125)(136)(146)(234)(256)(345)\\ -(126)(134)(156)(235)(245)(346)\ldots(30.)\end{matrix}$$

a mely egyenletek kimutatják azon összefüggést, a mely egyrészt a Δ mennyiségek között, másrészt pedig az (1)—(15) alatti egyenletek első tagjai között létezik.

20. Ki nem kerülhette figyelmünket, amint egyrészt az (1)—(15) alatti Carnot-féle egyenletek, másrészt pedig az 1-ső ért. (1)—(15) alatti egyenletei egymást bizonyos értelemben véve kiegészitik.

Ha ugyanis a Carnot-féle egyenleteket tekintjük, úgy látjuk, hogy azok mindegyikében az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számoknak húsz hármankénti összeköttetéseiből tizenkettő fordul elő, míg ellenben az 1-ső ért. (1)—(15) alatti egyenleteiben az előbb emlitett összeköttetésekből nyolcz jelenik meg. További figyelmetes megtekintésből látni, hogy egy Carnot-féle és egyike az 1-ső ért. (1)—(15) alatti egyenleteknek mindég az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számoknak mind a húsz hármankénti összeköttetését tartalmazzák. Tehát ezen értelemben egészíti ki két ily egyenlet egymást. Az említett egyenletek a következőképen egészitik ki egymást:

Carnot-féle egyenletek:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Az 1. ért.(1)—(15) a. egyenletek:

14, 11, 10, 3, 6, 2, 5, 4, 1, 9, 8, 7, 15, 13, 12.

Az egymás alatt álló egyenletek azok, a melyek egymást az előbb felemlitett értelemben kiegészitik, így példáúl a Carnot-féle egyenletek közül az 1-ső és az 1-ső ért. (14) alatti egyenlete s. a. t.

Ezen észrevételek segitségével vagyunk képesek kifejteni, hogy miként következnek az 1-ső ért. (1)—(15) alatti egyenletek egymásból csupán csak a számok felcserélése által.

Válaszszuk e czélra kiindulási pontúl az 1-ső ért. (14) alatti egyenletét, úgy ha abban a 2, 4 és 6 számokat cyclicusan felcseréljük, nyerjük az 1-ső ért. (11) és (10) alatti egyenleteit, ha pedig az 1. ért. (14) alatti egyenletében a 4, 5, 2, azután a 3, 6 és 2, végre az 5, 2 és 3 számokat cseréljük fel cyclicusan, úgy az 1-ső ért. (3), (6), (2), (5), (4) és (1) alatti egyenleteit nyerjük. Ha továbbá az 1-ső ért. (11) alatti egyenletében a 4, 3 és 5 számokat a 3, 5, 4-gyel; a 4, 5, 6 számokat az 5, 6, 4-gyel, végre pedig a 4, 3, 2 számokat a 2, 4, 3 számokkal felcseréljük, úgy az 1-ső ért. (9), (8, és (7) alatti egyenleteit nyerjük. Végre pedig az 1-ső ért. (14), (11) és (10) alatti egyenleteiben a 3 és 5 számokat egymással felcserélvén, jövünk az 1-ső ért. (15), (13) és (12) alatti egyenleteire.

VI.

21. Hogy hat pont a kúpszelet kerületén fekszik, azt még más alakban is fejezhetjük ki, a következő megfontolások segitségével.

Hogy ha

$$u=0,\quad v=0,\quad w=0\;.\;.\;.\;.\;(31.)$$

egyenletek három egyenes egyenleteit jelentik, úgy ismeretes, hogy azon kúpszelet egyenlete, a mely a (31) alatti egyenesek által meghatározott háromszög három csúcsán megy keresztül, a következő:

$$\lambda uv+\mu uw+\nu vw=0\;.\;.\;.\;.\;(32.)$$

a mely egyenletben λ, μ és ν tetszőleges állandókat jelentenek.

22. Ha tehát az 1, 2, 3, 4, 5. 6 pontok közül az 1, 2, 3 pontokat egyenesek által kötjük össze, úgy az 12, 13, 23 egyenesek egyenletei a következők:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0$$

és így az előbbiek szerint azon kúpszelet egyenlete, a mely az 1, 2, 3 pontokon keresztül megy, a következő:

$$\lambda\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}+$$

$$+\nu\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}=0\ldots(33.)$$

Azon feltételeket, a melyek kifejezik, hogy a 4, 5, 6 pontok szintén a (33) alatti kúpszeleten fekszenek, a (33) alatti egyenletből nyerjük, ha abban x, y, z helyett rendre a 4, 5 és 6 pontok összrendezőit helyettesitjük; e feltételi egyenletek tehát, az 1-ső ért. (B) alatti jelöléseit használva, a következők lesznek:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(124)(134)+\mu(124)(234)+\nu(134)(234)=0 \\ \lambda(125)(135)+\mu(125)(235)+\nu(135)(235)=0 \\ \lambda(126)(136)+\mu(126)(236)+\nu(136)(236)=0 \end{array}\right\}\ldots(34.)$$

Ha végre ezen egyenletekből a λ, μ, ν mennyiségeket kiküszöböljük, úgy a következő egyenletet nyerjük:

$$\begin{vmatrix} (124)(134) & (124)(234) & (134)(234) \\ (125)(135) & (125)(235) & (135)(235) \\ (126)(136) & (126)(236) & (136)(236) \end{vmatrix}=0\ldots(35.)$$

a mely szintén azon feltételt fejezi ki, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

23. Mivel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok közül 20-szor választhatunk ki hármat és mindegyik esetben adhatunk azon feltételeknek kifejezést, melyeknél fogva a még hátra levő három pont az első három ponton keresztülmenő kúpszeleten fekszik, úgy összesen húszszor három a (34) alatti egyenletekhez hasonló feltételi egyenletet nyerünk; ha végre e csoportok mindegyikéből a benne előforduló határozatlan állandókat kiküszöböljük, úgy összesen húsz a (35) alatti egyenlethez hasonló feltételi egyenletet nyerünk, a melyek mindnyájan azt fejezik ki, hogy az 1, 2, . . . 6 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek; így tehát a (35) alatti egyenletet ismét 20 egyenlet képviselőjének tekinthetjük.

A (35) alatti egyenlet, valamint az 1-ső ért. (16) alatti egyenleteinek egymás közötti összefüggésének kipuhatolását tűzzük ki jelenleg feladatunkul.

24. A 9. szám alatti jelölésnél fogva

$$\varDelta_{142536}=\begin{vmatrix} \eta_{14}\zeta_{53}-\eta_{53}\zeta_{14} & \zeta_{14}\xi_{53}-\zeta_{53}\xi_{14} & \xi_{14}\eta_{53}-\xi_{53}\eta_{14} \\ \eta_{25}\zeta_{61}-\eta_{61}\zeta_{25} & \zeta_{25}\xi_{61}-\zeta_{61}\xi_{25} & \xi_{25}\eta_{61}-\xi_{61}\eta_{25} \\ \eta_{36}\zeta_{42}-\eta_{42}\zeta_{36} & \zeta_{36}\xi_{42}-\zeta_{42}\xi_{36} & \xi_{36}\eta_{42}-\xi_{42}\eta_{36} \end{vmatrix},$$

mely kifejezést a jelen esetben kiindulási pontúl választjuk.

Ha ugyanis a Δ_{142536} determinánst a következő determinánssal:

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

szorozzuk, úgy ered:

$$\Delta_{142536} \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} \quad \ldots \ (36.)$$

a hol

$$r_1 = \xi_{12}(\eta_{14}\zeta_{53} - \eta_{53}\zeta_{14}) + \eta_{12}(\zeta_{14}\xi_{53} - \zeta_{53}\xi_{14}) + \\ + \zeta_{12}(\xi_{14}\eta_{53} - \xi_{53}\eta_{14}) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{53} & \eta_{53} & \zeta_{53} \end{vmatrix}$$

$$r_2 = \xi_{12}(\eta_{25}\zeta_{61} - \eta_{61}\zeta_{25}) + \eta_{12}(\zeta_{25}\xi_{61} - \zeta_{61}\xi_{25}) + \\ + \zeta_{12}(\xi_{25}\eta_{61} - \xi_{61}\eta_{25}) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{25} & \eta_{25} & \zeta_{25} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$r_3 = \xi_{12}(\eta_{36}\zeta_{42} - \eta_{42}\zeta_{36}) + \eta_{12}(\zeta_{36}\xi_{42} - \zeta_{42}\xi_{36}) + \\ + \zeta_{12}(\xi_{36}\eta_{42} - \xi_{42}\eta_{36}) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{42} & \eta_{42} & \zeta_{42} \end{vmatrix}$$

$$s_1 = \xi_{13}(\eta_{14}\zeta_{53} - \eta_{53}\zeta_{14}) + \eta_{13}(\zeta_{14}\xi_{53} - \zeta_{53}\xi_{14}) + \\ + \zeta_{13}(\xi_{14}\eta_{53} - \xi_{53}\eta_{14}) = \begin{vmatrix} \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{53} & \eta_{53} & \zeta_{53} \end{vmatrix}$$

$$s_2 = \xi_{13}(\eta_{25}\zeta_{61} - \eta_{61}\zeta_{25}) + \eta_{13}(\zeta_{25}\xi_{61} - \zeta_{61}\xi_{25}) + \\ + \zeta_{13}(\xi_{25}\eta_{61} - \xi_{61}\eta_{25}) = \begin{vmatrix} \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \xi_{25} & \eta_{25} & \zeta_{25} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$s_3 = \xi_{13}(\eta_{36}\zeta_{42} - \eta_{42}\zeta_{36}) + \eta_{13}(\zeta_{36}\xi_{42} - \zeta_{42}\xi_{36}) + \\ + \zeta_{13}(\xi_{36}\eta_{42} - \xi_{42}\eta_{36}) = \begin{vmatrix} \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{42} & \eta_{42} & \zeta_{42} \end{vmatrix}$$

$$t_1 = \xi_{23}(\eta_{14}\zeta_{53} - \eta_{53}\zeta_{14}) + \eta_{23}(\zeta_{14}\xi_{53} - \zeta_{53}\xi_{14}) +$$

$$+ \zeta_{23}(\xi_{14}\eta_{53} - \xi_{53}\eta_{14}) = \begin{vmatrix} \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{53} & \eta_{53} & \zeta_{53} \end{vmatrix}$$

$$t_2 = \xi_{23}(\eta_{25}\zeta_{61} - \eta_{61}\zeta_{25}) + \eta_{23}(\zeta_{25}\xi_{61} - \zeta_{61}\xi_{25}) +$$

$$+ \zeta_{23}(\xi_{25}\eta_{61} - \xi_{61}\eta_{25}) = \begin{vmatrix} \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \xi_{25} & \eta_{25} & \zeta_{25} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$t_3 = \xi_{23}(\eta_{36}\zeta_{42} - \eta_{42}\zeta_{36}) + \eta_{23}(\zeta_{36}\xi_{42} - \zeta_{42}\xi_{36}) +$$

$$+ \zeta_{23}(\xi_{36}\eta_{42} - \xi_{42}\eta_{36}) = \begin{vmatrix} \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{42} & \eta_{42} & \zeta_{42} \end{vmatrix}$$

25. A (36) alatti egyenlet jobb oldalán álló determinánsban az r, s, t elemek, melyek maguk is determinánsok, még továbbá reducálhatók.

Ha t. i. az

$$\begin{matrix} r_1, & r_2, & r_3 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ t_1, & t_2, & t_3 \end{matrix}$$

elemeket rendre a következő determinánsokkal szorozzuk:

$$\begin{matrix} (124), & (125), & (124) \\ (134), & (136), & (136) \\ (235), & (235), & (236) \end{matrix}$$

úgy ezen elemek értékei a következők lesznek:

$$\begin{matrix} r_1 = -(124)(135), & r_2 = (125)(126), & r_3 = (124)(236) \\ s_1 = -(134)(135), & s_2 = (125)(136), & s_3 = (136)(234) \\ t_1 = -(134)(235), & t_2 = (126)(235), & t_3 = (234)(236) \end{matrix}$$

a mely értékeket a (36) alatti egyenletbe helyettesítve, az a következőbe megy át:

$$\varDelta_{142536} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \zeta_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} (124)(135) & (125)(126) & (124)(236) \\ (134)(135) & (125)(136) & (136)(234) \\ (134((235) & (126)(235) & (234)(236) \end{vmatrix} \quad (37.)$$

26. Az ezen egyenlet jobb oldalán lévő determináns még további átalakitások által a (35) alatti egyenletben előforduló determináns alakjára hozható.

A végrehajtandó átalakitások könnyebb áttekintése miatt czélszerűnek mutatkozik a következő jelölések használata:

$$(234)=\alpha_1,\quad (235)=\alpha_2,\quad (236)=\alpha_3.$$
$$(134)=\beta_1,\quad (135)=\beta_2,\quad (136)=\beta_3.$$
$$(124)=\gamma_1,\quad (125)=\gamma_2,\quad (126)=\gamma_3.$$

melyeknél fogva az átalakitandó determináns a következő alakot veszi fel:

$$\begin{vmatrix} \beta_2\gamma_1 & \gamma_2\gamma_3 & \gamma_1\alpha_3 \\ \beta_1\beta_2 & \gamma_2\beta_3 & \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\gamma_3 & \alpha_1\alpha_3 \end{vmatrix}$$

Ha ez utóbbi determinánsban az 1-ső, 2-dik és 3-dik oszlopot rendre β_3, γ_1 és α_2-vel szorozzuk és azután az 1-ső 2-dik és 3-dik sort γ_1, β_3 és α_2-vel elosztjuk, úgy az a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 & \alpha_2\alpha_3 \\ \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \alpha_1\alpha_2 \\ \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 & \alpha_1\alpha_3 \end{vmatrix}$$

Ha továbbá az 1-ső, 2-dik és 3-dik sort rendre $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ és $\alpha_2\beta_2\gamma_2$-vel szorozzuk és azután az 1-ső, 2-dik és 3-dik oszlopot $\beta_1\beta_2\beta_3$; $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ és $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$-mal elosztjuk, úgy az a következő alakot veszi fel:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 & \alpha_1\beta_1 & \beta_1\gamma_1 \\ \alpha_3\gamma_3 & \alpha_3\beta_3 & \beta_3\gamma_3 \\ \alpha_2\gamma_2 & \alpha_2\beta_2 & \beta_2\gamma_2 \end{vmatrix},$$

ha pedig ez utóbbi determinánsban a 2-dik és 3-dik sort egymással, valamint az 1-ső oszlopot a 3-dikkal és azután a 2-dikat a 3-dikkal felcseréljük, úgy az a következőbe megy át:

$$-\begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1 & \alpha_1\gamma_1 & \alpha_1\beta_1 \\ \beta_2\gamma_2 & \alpha_2\gamma_2 & \alpha_2\beta_2 \\ \beta_3\gamma_3 & \alpha_3\gamma_3 & \alpha_3\beta_3 \end{vmatrix},$$

mely determinánst a (37) alatti egyenlet jobb oldalán lévő determináns helyébe téve és az α, β, γ mennyiségek értékeit helyettesitve, a (37) alatti egyenlet a következőbe megy át:

$$\Delta_{142536}\cdot\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (124)(134) & (124)(234) & (134)(234) \\ (125)(135) & (125)(235) & (135)(235) \\ (126)(136) & (126)(236) & (136)(236) \end{vmatrix} \qquad (38.)$$

mely egyenlet által azon összefüggés van kifejezve, mely a $\varDelta_{142536}$ mennyiség és a (35) alatti egyenlet első tagja között létezik.

27. Szorozzuk továbbá a $\varDelta_{142536}$ determinánst a következővel:

$$\begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{36} \end{vmatrix},$$

úgy találjuk, hogy:

$$\varDelta_{142536} \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r'_1 & r'_2 & r'_3 \\ s'_1 & s'_2 & s'_3 \\ t'_1 & t'_2 & t'_3 \end{vmatrix} \ldots (39.)$$

a hol a r′, s′, t′ mennyiségeknek a következő értékek felelnek meg:

$$r'_1 = \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{53} & \eta_{53} & \zeta_{53} \end{vmatrix}, \quad r'_2 = \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{25} & \eta_{25} & \zeta_{25} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}, \quad r'_3 = \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \zeta_{42} & \eta_{42} & \zeta_{42} \end{vmatrix},$$

$$s'_1 = \begin{vmatrix} \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46} \\ \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{53} & \eta_{53} & \zeta_{53} \end{vmatrix}, \quad s'_2 = \begin{vmatrix} \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46} \\ \xi_{25} & \eta_{25} & \zeta_{25} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}, \quad s'_3 = \begin{vmatrix} \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{42} & \eta_{42} & \zeta_{42} \end{vmatrix},$$

$$t'_1 = \begin{vmatrix} \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{53} & \eta_{53} & \zeta_{53} \end{vmatrix}, \quad t'_2 = \begin{vmatrix} \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{25} & \eta_{25} & \zeta_{25} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}, \quad t'_3 = \begin{vmatrix} \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{42} & \eta_{42} & \zeta_{42} \end{vmatrix}.$$

Ha pedig a

$$\begin{matrix} r'_1, & r'_2, & r'_3 \\ s'_1, & s'_2, & s'_3 \\ t'_1, & t'_2, & t'_3 \end{matrix}$$

mennyiségeket rendre a következő determinánsokkal szorozzuk:

$$\begin{matrix} (145), & (245), & (245), \\ (146), & (146), & (346), \\ (356), & (256), & (356), \end{matrix}$$

úgy végre találjuk, hogy

$$\begin{matrix} r'_1 = -(145)(345), & r'_2 = -(156)(245), & r'_3 = (245)(346) \\ s'_1 = -(146)(345), & s'_2 = -(146)(256), & s'_3 = (146)(346) \\ t'_1 = -(145)(356), & t'_2 = -(156)(256), & t'_3 = (246)(356), \end{matrix}$$

a mely értékeket a (39) alatti egyenletbe helyettesítve találjuk, hogy

$$\Delta_{142536}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45}\\ \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46}\\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(145)(345) & (156)(245) & (245)(346)\\ (146)(345) & (146)(256) & (246)(346)\\ (145)(356) & (156)(256) & (246)(356)\end{vmatrix} \quad (40.)$$

28. A jobb oldalon álló determináns átalakitása miatt ismét a következő jelöléseket használjuk:

$$(561)=\alpha'_1,\quad (562)=\alpha'_2,\quad (563)=\alpha'_3.$$
$$(461)=\beta'_1,\quad (462)=\beta'_2,\quad (463)=\beta'_3.$$
$$(451)=\gamma'_1,\quad (452)=\gamma'_2,\quad (453)=\gamma'_3.$$

melyeknél fogva az a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix}\gamma'_1\gamma'_3 & \alpha'_1\gamma'_2 & \beta'_3\gamma'_2\\ \beta'_1\gamma'_3 & \alpha'_2\beta'_1 & \beta'_2\beta'_3\\ \alpha'_3\gamma'_1 & \alpha'_1\alpha'_3 & \alpha'_3\beta'_2\end{vmatrix}$$

ha pedig ebben az 1-ső, 2-dik és 3-dik oszlopot rendre γ'_2, α'_3, β'_1-gyel szorozzuk és az 1-ső, 2-dik és 3-dik sort γ'_2, β'_1 és α'_3-mal elosztjuk, úgy az a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix}\gamma'_1\gamma'_3 & \alpha'_1\alpha'_3 & \beta'_1\beta'_3\\ \gamma'_2\gamma'_3 & \alpha'_2\alpha'_3 & \beta'_2\beta'_3\\ \gamma'_1\gamma'_2 & \alpha'_1\alpha'_2 & \beta'_1\beta'_2\end{vmatrix}$$

ha továbbá ez utóbbi determinánsban az 1-ső, 2-dik és 3-dik sort rendre $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2$, $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$ és $\alpha'_3\beta'_3\gamma'_3$-mal szorozzuk és az 1-ső 2-dik és 3-dik oszlopot $\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3$, $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ és $\beta'_1\beta'_2\beta'_3$-mal elosztjuk úgy annak a következő alakot adhatjuk:

$$\begin{vmatrix}\alpha'_2\beta'_2 & \beta'_2\gamma'_2 & \alpha'_2\gamma'_2\\ \alpha'_1\beta'_1 & \beta'_1\gamma'_1 & \alpha'_1\gamma'_1\\ \alpha'_3\beta'_3 & \beta'_3\gamma'_3 & \alpha'_3\gamma'_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\beta'_1\gamma'_1 & \alpha'_1\gamma'_1 & \alpha'_1\beta'_1\\ \beta'_2\gamma'_2 & \alpha'_2\gamma'_2 & \alpha'_3\beta'_2\\ \beta'_3\gamma'_3 & \alpha'_3\gamma'_3 & \alpha'_3\beta'_3\end{vmatrix}$$

29. Ha tehát a (40) alatti egyenlet jobb oldalán álló determináns helyébe ez utóbbit és abban a $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$ mennyiségek értékeit helyettesitjük, úgy az a következőbe megy át:

$$\Delta_{142536}\cdot\begin{vmatrix}\xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45}\\ \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46}\\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}(451)(461) & (451)(561) & (461)(561)\\ (452)(462) & (452)(562) & (462)(562)\\ (453)(463) & (453)(563) & (463)(563)\end{vmatrix} \quad (41.)$$

mely egyenlet azon összefüggést fejezi ki, mely a Δ_{142536} determináns és a következő egyenlet:

$$\begin{vmatrix} (451)(461) & (451)(561) & (461)(561) \\ (452)(462) & (462)(562) & (462)(562) \\ (453)(463) & (453)(563) & (463)(563) \end{vmatrix} = 0 \ldots (42.)$$

első tagja között létezik.

A (42) alatti egyenlet azon egyenletek közül, a melyek a kúpszeleten fekvő hat pont közötti összefüggést kifejezik, a (35) alatti egyenlet által képviselt egyenletek sorába tartozik, és azzal egymást mintegy kiegészitik, miután ezen egyenletet a (35) alattiból úgy nyerjük, ha abban az 1, 2, 3 számokat a 4, 5, 6 számokkal felcseréljük.

30. Láttuk, hogy a (38) és (40) alatti egyenletekre a $\varDelta_{142536}$ determinánsból a következő tényezők:

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{13} & \eta_{13} & \zeta_{13} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix}$$

szorzása által jövünk, ámde ugyanazon egyenletekre jövünk, ha a $\varDelta_{142536}$ determináns helyett egyikét a következőknek

$$\begin{array}{cc} & \varDelta_{163425} \\ \varDelta_{152634} & \varDelta_{143526} \\ \varDelta_{162435} & \varDelta_{153624} \end{array}$$

választjuk kiindulási pontúl és azokat ismét az előbbi determinánsokkal szorozzuk, ha csak megjegyezzük, hogy az első három $\varDelta$ mennyiség az utóbbi három $\varDelta$ mennyiségtől jelben különbözik.

Az előbbiek szerént tehát, ha az

$$\left.\begin{array}{c} 142536 \\ 152634 \\ 162435 \end{array}\right\} \text{ és } \left.\begin{array}{c} 163425 \\ 143526 \\ 153624 \end{array}\right\}$$

hatszögökhöz tartozó $\varDelta$ mennyiségeket, vagyis azon hatszögökhöz tartozó $\varDelta$ mennyiségeket, melyeknek megfelelő Pascal-féle egyenesei a b_2 és β_2 conjugált Steiner-féle pontokban találkoznak, a fentebbi determinánsokkal szorozzuk, úgy a (35) és (42) alatti egyenletek első tagjait nyerjük.

Innét világosan látni, hogy miként nyerjük azon 10 hatszög csoportból, a melyeknek megfelelő Pascal-féle egyenesei két conjugált Steiner-féle pontban találkoznak, a (35) és (42) alatti egyenletek által képviselt tíz egyenlet-párnak első tagjait.