Elemi Arithmologia. Arithmographia. 2. Elemi Algebra. Számirás különséges jegyekkel

Rohrmann és Schweigerd
Bécs; Wien 1837

ELEMI ALGEBRA.

ELEMI

ARITHMOLOGIA.

ARITHMOGRAPHIA.

MÁSODIK RÉSZ:

SZÁMÍRÁS KÖZÖNSÉGES JEGYEKKEL.

ÍRTA

NAGY KÁROLY,

M. T. T. Am. Ph. T. T.

BÉCS.

ROHRMANN ÉS SCHWEIGERDNÁL.

MDCCCXXXVII.

ELEMI

ALGEBRA.

SZÁMÍRÁS KÖZÖNSÉGES JEGYEKKEL.

ÍRTA

NAGY KÁROLY.

BÉCS.

ROHRMANN ÉS SCHWEIGERD

CS. K. UDVARI KÖNYVÁROSOKNÁL.

MDCCCXXXVII.

SOLLINGER J. P. SAJTÓJI ALÓL BÉCSBEN.

E L Ő S Z Ó.

Mindazon tulajdonokat, mellyekkel a' mennyiségek bírnak, általok változásokat szenvedhetnek, 's viszonyokba hozhatók, az algebra tulajdon nyelvével kifejezi, jegyeivel kijelöli, felírja 's különböző alakjaiba foglalja. Egyszersmind nyelv és rajz, hathatósan segélli gondolataink fejlését. Míveletei és szabállyai megbecsülhetlen segédjei az elmének.

Mint tudomány, a' mathesisi igazságok' könnyü elismerésére vezet, mert ezeknek úgyszólván egyedüli mozdítója. Tekintetei, valamint eszközei, közönségesek, 's változatlanul alkalmazhatók minden különös esetre.

Jelen kötet, mint czíme mutatja, a' számírásnak egészítője, és egyszersmind bevezető az Analyisisba. Előadja a' tudomány' legbecsesb és leghasznosabb tárgyait, foglalván azt, mi az ujabb előmenet' és vizsgálatok' következése, kizárván, mi régibb vagy inkáb történeti 's mit, a' tudományt 's annak utját nyomozó tanuló, több nyelveken írt számos könnyvekben megtalál.

Bécs, 1. Martius 1837.
1004 Karinti út.

Nagy Károly.

FOGLALAT.

Előző Ismeretek.

I. SZAKASZ.

Alapmíveletek.

1 §. *Rendbehozás, öszveadás és levonás.*

2 §. *Sokszorozás.*

3 §. *Elosztás.*

II. SZAKASZ.

Factorok és osztók.

III. SZAKASZ.

Törtek.

1 §. *Közönséges törtek.*

2 §. *Láncztörtek.*

3 §. *Tizedes törtek.*

IV. SZAKASZ.

Emelések és gyökerek.

1 §. *Emelések.*

2 §. *Gyökerek.*

V. SZAKASZ.

Többtaguak emelései. Gyökérvevés.

Szám. Lap.

VI. SZAKASZ.

Arányok, Progressiok és Sorok.

1 §. *Arányok.*

2 §. *Progressiók.*

3 §. *Sorok.*

4 §. *Arithmetikai sorok.*

5 §. *Geometri sorok.*

6 §. *Kevert sorok.*

VII. SZAKASZ.

Logarithmok.

1 §. *Logarithmok, sorban fejtve.*

VIII. SZAKASZ.

Egyenletek.

Pénzbeli kamatok' viszonyai.

AZ ALGEBRA ELEMEI.

ELŐZŐ ISMERETEK.

1. Az Algebra közönséges jegyekkel ír, és mivel, ezek a' betük.

Az Arithmetika' jegyei bizonyosak és különösek.

Az Arithmetika szabályokat ád a' bizonyos következések' megtalálására, de ezen következései, szabályokat többé nem adhatnak.

Az Algebra mindkét czélt eléri az által hogy, jegyeinek azon értelmét adja, mellyet a' kérdés' természete kíván.

Jegyei semmi egybeköttetésben nincsenek a' számokkal, valamint nincsenek más egyébb tárgyal különösen, de csupa képviselői akaratunknak vagy megegyezésünknek.

Szemelőtt lévén ezen jegyek, a' számítás' minden nemein keresztül, a' miveletek' nyomát is fenntartják, 's ez által a' legrövidebb utat, leg egyszerűbb módot kíjelölik a' következésekre; 's igy nemcsak a' mennyiségeket képviselik, de az ezekközt álló viszonyokat, egybefüggéseket, és a' rajtok elkövetendő miveleteket is, más más formákba, alakokba öltöztetvén kifejezéseiket.

2. Az Algebra' jegyei a' betük, bár melly nyelvből vevén azokat.

Szemelőtt tartván, melly czélra használtatnak, külső formájok nem jöhet tekintetbe, valamint nagyságuk sem.

Mindegy tehát, akar valamelly nyelv' betüit akar melly más képzelt jegyeket válosztunk, akar nagy (kezdő) akar apróbb betükkel jelöljükmeg kérdésben forgó mennyiségeinket; 's mindegy végre akar megtartjuk az Alphabet sorát akar nem.

Van azonban egy olly halgatolagi egyetértés ezen tudomány' előadóji közt, mellyszerént a' tekintetek' és visgálatok' természetéhez képest, rendesen ugyan azon nemü jegyek vétetnek.

A' nagy (kezdő) betűk p. o.: vagy közönséges és kiterjedett példák' vagy mennyiségek' képviselőji; vagy több egymáshoz hasonló esetet vagy mennyiséget foglalnak magukban.

A' kisbetűk, egyszersmind egyszerűbb 's kisebb mennyiségekre is mutatnak. Az elsőbb betűk az Alphabet' sorában isméreteseknek vétetnek megegyezőleg a' kérdés' természetével; a' közép betűk mint m, n, o, p, q, r 's a' t. kiterjedettebb értelműek és közönséges tekintetekre válosztatnak; az utolsó betűket végre mint v, w, x, y, z, az isméretlen és keresendő mennyiségek' képviselőivé tesszük.

Hogy ezen megkülönböztetés sem törvény nem lehet, sem arra a' tudománynak szüksége nincs, azt a' tanuló nyilván beláthatja, de az ártatlan műszer csak segéllni kivánja a' szemet 's ez által az elmét.

Az Algebrának mivelet és tulajdonsági külön jegyei nincsenek; ezeket már az Arithmetikából ismerjük, 's itt meg is tartjuk.

Szinte közösek az Algebra' alapmiveletei, az Arithmetikaikkal.

3. Hasznos lesz némely kifejezéseket és alakokat elöre megismerni hogy ezáltal az előadás' folytában időt és helyet nyerhessünk.

Egytagúnak, Monomnak nevezzük mindazon kifejezést vagy mennyiséget, melly vagy egy vagy több betűből és csak magában áll, nem tekintvén miveleti vagy tulajdoni jegyét.

$$A,\ a,\ \beta,\ ax,\ \beta y,\ ac^2,\ abcx^2,\ Ax^m,\ \text{'s a' t.}$$

$$+\sqrt{ab},\quad -\sqrt[m]{ax^2-y},\quad \frac{ab}{c},\ \frac{x^2}{\sqrt{ab}},\ \text{'s a' t.}$$

mind egytagúak.

Kéttagúknak, Binomoknak nevezzük azon kifejezéseket mellyek két egytagúból állanak, öszvekötve a' + vagy — jeggyel.

$$a+b,\quad a+x,\quad \beta x^2-y^2,\quad Aa\beta x-Baby,$$

$$Cx^2+\sqrt{x^2-y},\quad \sqrt[m]{A}-\frac{\sqrt{ax+1}}{\sqrt{1-x}},\ \text{'s a' t.}$$

A' háromtagú vagy *trinom*, három egyestagból áll. *A' négytagún* felül a' kifejezést *polynomnak többtagúnak* nevezzük.

Velejáróknak nevezzük azon jegyeket, mellyek az ismeretlennel vannak egybekötve, és igy azoknak factorai. Ha ezek számok, akkor *számi velejárok*, ha betűk, *betűi velejárok*.

$$3a,\ 15x,\ 23\sqrt[3]{x^2},\ 7\sqrt[m]{A},\ 1059x^2+38y^2,\ \text{'s a' t.}$$

a' 3, 15, 23, 7, 1059 és 38 számok, velejároji a' betűmennyiségeknek.

ax, αy, $a\sqrt{x^3}$, $ab\sqrt[m]{x}$, $A\sqrt{x^2-y}$, 's a' t.

a, α, ab, A, betüvelejárói a' mennyiségeknek.

Az első esetben mindaz ismeretlen mi a' számok mellett van, a' másodikban csak az x és y tartatnak ismeretleneknek.

A' különbféle emeléseket az Algebrában *hatóságoknak* nevezhetjük, 's mondhatjúk példánakokáért A^mben, a' helyett hogy A az $m$dik emelésen, Anak $m$dik hatósága; vagy $m$dik hatósága Anak.

Az emelési *mutatók* hatóságjegyek, és az emelést vagy hatóságot mutatják vagy jelölik. A' példákban a^2, x^4, x^m, y^n, 2, 4, m és n mutatók.

A' gyökérmennyiségeknél ezen mutatók, vagy gyökérmutatóknak vagy gyökérjegyeknek neveztethetnek.

$$\sqrt{a},\quad \sqrt[4]{x},\quad \sqrt[m]{ax},\quad \sqrt[m+n]{xy},$$

a' 2, 4, m, és $m+n$ gyökermutatók vagy gyökérjegyek.

A' mutatók törtszámok is lehetnek, 's ekkor törtmutatóknak neveztetnek.

$$a^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{m}},\ y^{\frac{m}{n}}\text{ben } {}^1/_2,\ {}^1/_m \text{ és } \frac{m}{n}$$

törtmutatók.

A' mutató nevezet alatt mi tehát mindenkor azt értjük mit a' latán *exponens*, a' franç. *exposant*, az Angoly *exponent*'nek 's a' t.: nevez, az az a' *hatoság* és *gyökér* jegyeket, és mindenkor ha a' szónak más értelmire lesz szükségünk, azt kijelöljük, ha p. o.: a' betük alá vagy felibe tett vonalokat,

A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV} 's a' t.

B_{I}, B_{II}, B_{III}, B_{IV} 's a' t.

mutatóknak nevezzük, ott ezek alatt sor vagy rend mutatókat, sor vagy rend jegyeket értünk.

Az emeléseket, a' mennyiségek' hatóságát *terjedtségnek* (dimensionak) is lehet nevezni, a^5, p. o.: 5 terjedségü, vagy öt fokú. Közönségesen terjedségnek neveztetik a' factorok' száma is, ha ezen factorok egytagúak; így p. o.: ab, két, abc, három a^2bc négy a^2x^2y öt, $a^2x^2y^2$, hat, $a^4b^2cx^3y^2$ végre 12 terjedségünek mondatik, hol mint látjuk az egyes mutatók öszveadatván teszik a' terjedséget.

Ha utolsó példánk' 5féle betűit egymásközt egyenlővé tesszük, az az

$a=b=c=x=y$ nak, lesz $a^4a^2a^1a^3a^2$,

vagy is a 12szer téve mint factor.

Ha több olly mennyiség jön tekintetbe melly egyenlő emelésen, fokon, hatóságon, vagy terjedségen van, akkor ezek *egyneműknek* (homogen) neveztetnek; a' kifejezések

$abcd$, a^2ba, ab^2c, a^3b, a^2b^2, x^2y^2, x^3y, x^4

egyneműek, mert terjedségük általánosan 4.

Ha ugyanazon mennyiségek vagy betűk különböző emeléseken vannak, és az egyes tagok vagy kifejezések egymásközt elszórva állanak, szükséges azokat olly sorba állítani hogy, mutatójok szerint jöjjenek rendesen egymás után. Ezen sorba-állítást *elrendelésnek* nevezzük.

P. o.: $a^5+a+a^3+a^4+a^2$

$=a+a^2+a^3+a^4+a^5$

vagy $=a^5+a^4+a^3+a^2+a$

hol az első esetben *a*, *felmenő*, a' második esetben pedig *lemenő* hatoságai szerint van rendelve.

Ha a' kifejezést

$$x^6+a^4x^2+ax^5+a^5x+a^3x^3+a^2x^4+a^6$$

elrendeljük lesz

$$1)\quad x^6+ax^5+a^2x^4+a^3x^3+a^4x^2+a^5x+a^6$$

$$2)\quad a^6+a^5x+a^4x^2+a^3x^3+a^2x^4+ax^5+x^6$$

és az első esetben *x*, lemenő, *a* felmenő hatoságai szerént a' másodikban pedig megforditva van elrendelve.

Mindazon kérdésekre, mellyek a' számírásnál támodhatnak, bizonyos felelet kivántatik. Minden kérdés, bármelly miveleteken kellessék a' mennyiségeknek keresztül menni, bizonyos következéseket kiván. A' kérdés tehát, vagy feladás, *egyenlő* a' felelettel vagy a' következéssel.

Ha p. o.: több mennyiség őszveadandó, ezekkel bizonyosan egyenlő az öszves, ha egyikből a' másik levonandó, ezek egyenlők a különbséggel, ha valamelly mennyiség más által osztandó, ezek egyenlők a' részessel 's a' t. 's írva

$$a+b+c+d+e+f+\ldots=\text{Öszves}=\textit{Ő}$$

$$a-b=\text{ különbség}=\text{k}$$

$$\frac{a}{b}=\text{ részes}=r$$

Az illy öszvetevését a' kérdésnek következésével, *egyenletnek* nevezzük. Az egyenletek e' szerint mint látjuk legbecsesb műszerei az Algebrának, mert ha két tökélletesen egyenlő mennyiséget, vagy akarmelly dolgot, egyenlőképen változtatunk, legyenek a' változtatások bármellyek, az egyenlöség köztök mindég fenn marad.

Ha p. o.:

$$A=B \text{ ugy } A-x=B-x,\ A+y=B+y$$
$$\frac{A}{x}=\frac{B}{x},\qquad Ax=Bx\,,\qquad A^m=B^m$$
$$\sqrt[m]{A}=\sqrt[m]{B},\ \log A=\log B \qquad \text{'s a' t.}$$

mint az egyenletek' tanánál ezt bővebben fogjuk látni.

ELSŐ SZAKASZ.

ALAP MIVELETEK.

1 §. Rendbehozás, Öszveadás és Levonás.

4. Ha több kifejezések vagy tagok adatnak, szükséges hogy a' kijelölt mívelet előtt megvisgáljuk azokat, vallyon nincsenek é közöttök hasonlók, egyformák vagy egyenlők; figyelmezni kell a' jegyekre, vallyon nincs é ugyan azon kifejezés előtt egyszer + másszor —, melly esetben, a' két tag természetesen egymást semmivé tészi. Az egynemű kifejezések végre jegyeikkel adatnak öszve 's így már az Algebra' első lépéséhez is megkívántatik az öszveadás és levonás, valamint láttuk az Arithmetikánál hogy ezen két alapmivelet a' számok' természetivél egybefüggő.

Példák a' rendbehozásra:

1) $a+2b+4a-c+3x-4b+2c-5a-2x.=$
$=a+4a-5a+2b-4b+2c-c+3x-2x$
$= \quad -2b+c \quad +x.$
$=5a-5a-2b+c+x.=x-2b+c$

2) $5bx^2y+4cxy^2-6axy-7cxy^2-15bx^2y+$
$+8cxy^2+7axy=$
$=5bx^2y-15bx^2y+4cxy^2+8cxy^2-7cxy^2-$
$-6axy+7axy$
$=-10bx^2y+5cxy^2+axy$
$=axy-10bx^2y+5cxy^2.$

3) $2ax^{m-n}+4bx^{m}-ax^{m-n}+5\sqrt[m]{a}-3\sqrt[n]{b}-$

$$-4\sqrt[m]{a}+6\sqrt[n]{b}$$

$$=ax^{m-n}+4bx^{m}+\sqrt[m]{a}+3\sqrt[n]{b}$$

melly példákban már a' betű és hatóság-rendre is figyelem adatott.

4) *Az algebrai öszveadás*, ha a' mennyiségek egyneműek, semmit sem különbözik az arithmetikai öszveadástól, mert ekkor a' mennyiségek szintugy megvannak nevezve, mint a' különös számjegyek. p. o.:

$$5a+4a+8a-3a-2a+16a$$

nem egyébb mint

$$(5+4+8-3-2+16)\,a \text{ vagy } 28a$$

de ha a' mennyiségek különböző betűk által adatnak, az öszveadás csak kijelöltetik, az az: a' mennyiségek tulajdon + vagy — jegyeikkel csatoltatnak össze; p. o. öszve adandók

$$a^2,\ bc,\ 5a^3,\ 12b^2c,\ 3a^4$$

lesz az öszves

$$=a^2+bc+5a^3+12b^2c+3a^4$$

és $+a, -b, +a^2, +a^3, -a^4, +5b^2, -10b^3$ öszvese

$$=a+a^2+a^3-a^4-b+5b^2-10b^3.$$

A' tanulónak itt csupán csak figyelme szükséges valamint az Algebra' több alap miveleteinél, itélő ereje vagy elméssége nemis kivántatik.

Az egynemű kifejezések öszveadatnak mint láttuk, a' különbözők pedig + vagy — jeggyel, mellyet hordoznak, egyszerűen öszvekapcsoltatnak; az elrendelés mindegyik esetben főfeltétel.

Tudjuk hogy $a^2+a^2=2a^2$ szinte mint $1+1=2$, de azt is tudjuk hogy a^2+a^3 sem $2a^2$ sem $2a^3$ nem lehet, hanem csak a^2+a^3 mert a nak harmadik emelése más mint a' második, 's így $a^2+a^3 =$ egyszer a^2+ egyszer a^3; így különböznek ab^2c^2d és a^2bcd^2 egymástól noha ugyan azon betűkkel vannak írva, és ugyan azon térjedségűek. Tudjuk továbbá hogy $a+(-b)=a-b$, 's hogy tagadó mennyiséget álítóhoz adni annyi mint álító mennyiséget állitóból levonni; épen így $-a+(-b)=-a-b$, az az a' tagadó mennyiséghez tagadót adni annyi mint a' tagadót nagyobítani.

5. *A' levonás* semmi különös észrevételt nem kiván; ha valamelly mennyiség egy másikból levonandó, *a' levonás eszközölhető akkor, ha a' mennyiségek egyneműek*

$$12a^2b-8a^2b=4a^2b$$

ha pedig különböző jegyekkel vagynak irva, akkor csak a' — jeggyel kapcsoltatnak öszve

levonandó a ból b lesz $a-b$.

Itt feltétetett hogy, mind a' kisebbitendő mind a' levonandó, álitó mennyiségek, az az a' $+$ jeggyel illettek, és azért lett $a-(+b)$ből $a-b$ a' levonás által, vagyis a' levonandónak $+$ jegye $-$jegybe változott a' mivelet természete szerint; szinte így fog tehát változni ezen jegy, ha álító mennyiségből tagadót kell levonnunk 's lesz

$a-(-b)$ből $a+b$

mert tudjúk (Arith. 256) tagadó mennyiséget levonni annyi mint álítót hozzá adni.

Ha az eseteket öszvevesszük, az öszveadási szinte mint a' levonásiakat lesz

$$\pm A\pm(+B) = \pm A\pm B \quad \text{és}$$
$$\pm A\pm(-B) = \pm A\mp B.$$

Példák.

1) A ból levonandó

$$ab+ac-ab^2+ac^2-a^2b^2$$

lesz $A-(ab+ac-ab^2+ac^2-a^2b^2)=$

$$=A-ab-ac+ab^2-ac^2+a^2b^2.$$

2) Levonandók valamelly adott mennyiségből,

$$(x^2+3x^3y-5x^4y^2+8x^5y^3-x^6y^4)$$

a' jegyek egyszerűen felcseréltetvén, $+$ hellyett $-$ és megforditva, a' tagok egybecsatoltatnak 's lesz

$$- \quad - \quad + \quad - \quad +$$

a' megforditott 5 jegy.

3) $3ax+5bx^2+12cx^3-8dx^4-4x^5+8a^2bc$ ből levonandó

$$(6x^5-3a^2bc+5ax-9dx^4+11cx^3+5bx^2-x^6)$$

a' jegyeket felcserélvén lesz a' kifejezések' elrendelése után,

$$-5ax-5bx^2-11cx^3+9dx^4-6x^5+x^6+3a^2bc$$

és a' két sort mostani jegyeivel öszve tévén, lesz

$$2ax+cx^3+dx^4-10x^5+x^6+11a^2bc.$$

$$=11a^2bc-2ax+cx^3+dx^4-10x^5+x^6 \text{ *)}.$$

2 §. Sokszorozás.

6. ***Az algebrai sokszorozás*** egyszerű szabályok szerint eszközöltetik.

---

*) *Jegyzék.* Valamelly többtagú kifejezésben az első tagnak szokás és helyes álító vagy a' $+$ jegyel iletett kifejezést venni, példánkban az utolsó tagot ($11a^2bc$) jegynélkül tehetjük elsőnek, tudván, hogy minden jegynélkül álló mennyiség, álító.

Ha a' factorok egytagúak és különböző betűkkel irattak, a' mivelet nem egyéb mint ezen factorok' egymás mellé-irása

$$a \times b = ab,\ ac \times d = acd,\ ac \times bd = acbd$$

$$axcy \times bzdw = axcybzdw,\ a^2xy^3 \times b^2d^3c = \\ = a^2xy^3b^2d^3c$$

bárhány betűből álljanak, vagy bármelly terjedségűek legyenek a' factorok.

A' betűk bármelly rendben írassanak egymásközt mindegy, tudjuk hogy

$$abc = acb = bac = cab = abc,$$

de csinosabb és egyszersmind a' tekintetrenézve alkalmasabb is, a' betűket alphabeti rendjükbe írni egymásmellé, 's p. o.:

$c^2yd^2xa^3z^2b^3$ helyett rendesen írni $a^3b^3c^2d^2xyz^2$.

7. *Ha a' factorok egynemüek, az emelésekre jutunk*; ekkor valamennyi factor hellyett csak egyet írunk, *de a' mutató által jelöljük ki hány illy factor volt adva,*

ha $ab \times cd = abcd$ben $b = c = d = a$

mindegy akar $aaaa$, $bbbb$, $cccc$ vagy $dddd$ írunk, és ekkor a' mennyiség 4szer van mint factor téve 's lesz

$$aaaa = a^4.$$

Ha az egynemű factorok más mutatókat is hordoznak, ismét csak egyszer iratik a' betű, 's mutatója lesz valamenyi factor' mutatójinak öszvese

$$a^2 \times a^3 = a^5 \quad „ \quad a^2a^4 \times a^5a^3 = a^6 \times a^8 = a^{14}$$

és $A^m \times A^n = A^{m+n}$ közönségesen.

Példa

$$ab^2xy \times bx^2y \times a^3cy^2 \times a^mb^nz^3 \times x^{m-n}.$$

Rendbeszedvén az egynemű betűket látjuk hogy van

$$aa^3a^m,\ b^2bb^n,\ c,\ xx^2x^{m-n},\ yyy^2,\ z^3$$

a' factorok közt, ezeket egybe vevén lesz a' sokszorozott = származat

$$=a^{m+4}\,b^{n+3}\,cx^{m-n+3}\,y^4z^3.$$

8. *Ha az egyik factor kéttagú, a' másikkal mindkét tagja rendesen sokszoroztatik egymásután*, 's a' talált származat természetesen ismét kéttagú.

$$(a+b)c=ac+bc=c(a+b).$$

Hogy a' mivelet helyes, azon tekintet is bizonyitja ha az egyik factornak c nek bizonyos értéket adunk, p. o.: 10 et, így lenne

$$(a+b)10=(a+a+a+a+a+a+a+a+a+a)$$
$$+(b+b+b+b+b+b+b+b+b+b),$$

's ez bizonyosan $10a+10b$, vagy pedig vennők $(a+b)$ egészen 10 szer 's lenne $10(a+b)=$

$$=(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)$$
$$+(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)$$

's így bármelly számot képviseljen c.

Példák.

$$(ax+by)ax=a^2x^2+abxy$$
$$(abc+bcx)abx=a^2b^2cx+ab^2cx^2$$
$$(dx^2yz+ax^3y)ab^2x^3y^2z^3=ab^2dx^5y^3z^4$$
$$+a^2b^2x^6y^3z^3.$$

Bárhány tagú legyen az egyik factor, mindegyik tagja külön sokszoroztatik a' másik factor által 's az őszves tagok teszik a' származatot.

Példák.

$$(x+y+z)a=ax+ay+az.$$
$$(a+b+c+d)e=ae+be+ce+de$$
$$(a+ax+ax^2+ax^3)abx=a^2bx+a^2bx^2+a^2bx^3$$
$$+a^2bx^4.$$
$$(1+x+x^2+x^3+x^4)ax^2y^2=ax^2y^2+ax^3y^2+ax^4y^2$$
$$+ax^5y^2+ax^6y^2.$$

9. A' jegyek szabállyát az Arithmetikából már ísmervén, tudjuk hogy egyenlő jegyek + vagy álító következést, különböző jegyek pedig — vagy (tagadót) levonandót adnak, és hogy

$$\pm A \times \pm B = +AB$$
$$\pm A \times \mp B = -AB.$$

's így $(a-b+c-d)x = ax-bx+cx-dx.$

$$(a-b+c-d)(-x) = -ax+bx-cx+dx.$$

és $(x+y-z-a+b)\times(-1) = -x-y+z+a-b.$

$$(-a+b+x+y-z)\times(+1) = -a+b+x+y-z.$$

Ha ezen két mennyiséget öszveadjuk, lesz

$$+a-a+b-b+x-x+y-y+z-z=0$$

és valóban a' két sokszorozott $+1-1=0$, szinte az elsőbb példában is $x-x=0$

és $(a-b+c-d)(x-x)=0.$

10. *Ha a' másik factor is két vagy több tagú*, mindegyik tagjával külön kell az elsőbb factor' egyes tagjait sokszorozni, öszveadván az egyes származatokat jegyeikkel. $(a+b)\,(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$
's vissza vittük a' kéttagú sokszorozást egytagúra; a' sokszorozás pedig lesz

$$ac+bc+ad+bd.$$
$$(a+b)\,(c-d)=ac+bc-ad-bd.$$
$$(a-b)\,(c+d)=ac-bc+ad-bd$$
$$(a-b)\,(c-d)=ac-bc-ad+bd.$$

hol a' jegyek ' változásai foglalva vannak.

Ha ezen példában a' két factort egyenlő betűkkel írjuk, vissza térünk azon tekintetekre mellyeket az Arithmetikában már érintettünk.

1) $(a+b)\,(a+b)$ tudjuk$=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ és szinte

2) $(a-b)\ (a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
de 3) $(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$.
Ezen három eset megérdemli közelebbi figyelmünket.

Az első
$$(a+b)\ (a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$
a' kéttagú mennyiségek' második emelésére $(a+b)^2$ ra vezet, 's itt látjuk hogy az három tagból áll, melly három tagnak ketteje az *egyes betűk négyszeg emelését, harmadika pedig ezeknek kettős származatát adja.*

A' második eset, a' két mennyiségközti különbségnek adja négyszegét
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
hol a' *három tag közt ismét a' két külön mennyiség' négyszegit találjuk, de levonván belöllök kettős származotokat.*

A' harmadik esetben végre $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ *ugyan ezen két négyszegnek különbségét találjuk.*

Ha a' 3 esetet öszve vesszük lesz.
$$(a\pm b)\ (a\pm b)=(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2\ *).$$
$$(a\pm b)\ (a\mp b)=a^2-b^2.$$

Ezen következéseket figyelemmel tekintvén, mindazon szabályokat feltaláljuk bennek, mellyeket a' jegyekre nézve ísmerünk.

Hogy a' $+$ jegyel iletett factorok ugyanazon jegyel iletett szármozatot adnak, semmi különös bizonyítást nem kiván, 's mint láttuk:

---

*) *Jegyzék.* Mindenütt hol kettös jegyekkel élünk, vagy a' felsők vagy az alsók vétetnek egyiránt minden tagnál, ha p. o.: az első tagnál a' felsőt vesszük, a' többinél is azt kell vennünk.

$$(a+b)\ (a+b)=(a+b)a+(a+b)b$$

hol egyszer $(a+b)$ annyiszor van véve hány egységet foglal magában a, azután pedig annyiszor hány egyből áll b, 's az öszves lesz a' keresett származat.

Ha p. o.: b tagadó vagy — jegyel iletett, láttuk

$$(a+b)\ (a-b)=(a+b)a-(a+b)b=$$
$$=(a^2+ab)-(ab+b^2)$$

és a' levonás által

$$a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$$

szóval, az öszvest különbségével sokszoroztuk, és a' négyszegek különbségére találtunk.

Az algebrának semmi szüksége nincs arra hogy, szabályait különös jegyekkel bizonyitsuk, de ha a' tanulónak könyebbséget nyujt a' különözés, az itt mondottat számokkal fejezheti ki. Legyen p. o.:

$$a=9 \text{ és } b=4$$

1) lesz $a+b=9+4=13$ „ és $(a+b)\ (a+b)$

$$=(9+4)\ (9+4)=13\times13$$
$$=(9+4)^2=13^2=9^2+2.4.9+4^2=169.$$

2) $(a+b)(a-b)=(9+4)\,(9-4)=(9+4)9-(9+4)4$

$$=9^2+4.9-4.9-4^2$$
$$=9^2-4^2=81-16=65. \quad \text{mert}$$

$(9+4)\ (9-4)=13.5=65.$

Ha a' különbséget különbséggel vagy magamagával sokszorozzuk, láttuk hogy a' négyszegekből lekell vonnunk a' két jegy' dupla származatát, és hogy

$$(a-b)\ (a-b)=a^2-2ab+b^2\,;$$

ez annyi mint $(a-b)a-(a-b)b$, vagy is hogy elöször $(a-b)$ annyiszor vegyük mennyi egyest foglal magában a, ebből pedig levonjuk ugyan ezen $(a-b)$ származatát b vel.

Megtartván különös jegyeinket, lesz

$(a-b)^2=(9-4)(9-4)=(9-4)^2=5.5=5^2$ és

$(9-4)9-(9-4)4=(81-36)-(36-16)$

$=(45)-(20)=25.$

vagy végre $a^2-2ab+b^2=9^2-2.9.4+4^2$

$=81-72+16=25.$

s' minden tekintet bizonyitja a' helyes míveletet.

11. Mint láttuk hogy a' betűvelejárók egymással sokszoroztatnak, ugy sokszoroztatnak a' számivelejárók is egymásközt ha illyenek vannak, p. o.:

1) $11a^2bx^2\times12ab^2x=132a^3b^3x^3=11.12a^3b^3x^3$

2) $(6x+5x^2)\times(3x^2-12x)=18x^3+15x^4-72x^2$

$-60x^3=15x^4-42x^3-72x^2.$

12. *Bárhány tagú legyen a' két factor*, a' sokszorozás mindegyik taggal külön történhetik, 's az elrendelés által adatik a' származat.

Tudjuk hogy mindegy, akarmelly rendbe vegyük a' factorokat vagy azoknak tagjait, csak arra figyeljünk az elrendelésnél hogy az egynemű tagok öszvétessenek, a' mennyiségek pedig ollysorba állitassanak, hogy a' betűk alphabeti rendben legyenek, a' mutatókkal illettek pedig, vagy felmenő vagy lemenő sorba jöjjenek.

Példák.

1) $(a+bx+cx^2+dx^3)\,(a+bx+cx^2)$

mellypéldát így lehet írni és venni

$$\begin{array}{l|l}
(a+bx+cx^2+dx^3)a & =a^2+abx+acx^2+adx^3 \\
+(a+bx+cx^2+dx^3)bx & +abx+b^2x^2+bcx^3+bdx^4 \\
+(a+bx+cx^2+dx^3)cx^2 & +acx^2+bcx^3+c^2x^4+cdx^5
\end{array}$$

's ezt rendbehozván lesz a' következés

$k=a^2+2abx+2acx^2+b^2x^2+adx^3+2bcx^3+bdx^4$

$+c^2x^4+cdx^5$

2) $(5by—8cy^2+12dy^3—3y^4)(3b—5y+6y^2)$
az első tag származata $15b^2y—24bcy^2+36bdy^3—9by^4$
másodiké $—20by^2+40cy^3—60dy^4+15y^5$
harmadiké $+30by^3—48cy^4+72dy^5—18y^6$
elrendelvén y mutatóji szerint felmenő sorba, lesz

$$k=15b^2y—20by^2—24bcy^2+30by^3+36bdy^3$$
$$+40cy^3—9by^4—48cy^4—60dy^4$$
$$+15y^5+72dy^5—18y^6.$$

3) $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x—1)=x^5+x^4+x^3+x^2$
$$+x—x^4—x^3—x^2—x—1$$
$$=x^5—1.$$

4) $(a+b)(c+d)(e+f)=[(a+b)c+(a+b)d](e+f)$
először a' két első factort sokszorozván lesz
$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$
ezt a' harmadik factorral $(e+f)$el lesz a' következés
$$k=ace+bce+ade+bde+aef+bef+adf+bdf.$$

5) $(x+a)(x+b)(x+e)(x+d)=k$,
a' két első factor származata $=x^2+ax+bx+ab$
a' 3 elsőé
$$x^3+ax^2+bx^2+abx+cx^2+acx+bcx+abc.$$
mindnégyé
$$x^4+ax^3+bx^3+abx^2+cx^3+acx^2+bcx^2+abcx$$
$$+dx^3+adx^2+bdx^2+abdx+cdx^2+acdx$$
$$+bcdx+abcd.$$

Ha itt az x mutatójit elrendeljük lesz
$$x^4+x^3(a+b+e+d)+x^2(ab+ac+bc+ad+bd$$
$$+cd)+x(abc+abd+acd+bcd)+abcd.$$
hol már mindazon külön factorokat mellyek az x^3, x^2 és x mellett mint betű velejárók állottak a' korlát közzé vettük.

Ha ezen példában a' 4féle betüt egyenlővé tesszük $a=b=c=d$ vagyis csak egyet veszünk a' 4 helyett, p. o.: a't lesz

6) $(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)=$
$$=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$$
$(x+a)^4=x^4+x^3(a+a+a+a)$ vagy$=4ax^3$
$+x^2(a^2+a^2+a^2+a^2+a^2+a^2)$vagy$=6a^2x^2$
$+x(a^3+a^3+a^3+a^3)$ vagy$=4a^3x$
$+aaaa$ vagy$=a^4$.

7) Ha $a=1$ lesz
$$(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$
's ezen 5, 6, és 7 példáknak jövőben hasznukat fogjuk venni.

8) Sokszorozandók gyakorlatul
$$(1+a-a^2+a^3-a^4)\ (1-a+a^2+a^3+a^4)$$
$$(ax^2y+15bx^3y^2-6cx^4y^3)\ (axy^3-3bx^2y^2+5cx^3y)$$
és $(3abx^5-4ab^2x^4+5a^26^2x^3-6a^2b^3y^2)\ (8b^3c$
$-7b^2cx+2bcx^2)$.

3 §. Elosztás.

13. *Adva lévén valamelly származat 's az egyik factor, kivántatik a' másik.* Tudjuk hogy ez az elosztás által található.

Ha tehát A az osztandó B az osztó (hol A az említett származatot képviseli B pedig az adott factor) kerestetik x a' másik factor, vagy az mit az osztásnál részesnek nevezünk: lesz tehát
$$A:B=\frac{A}{B}=x$$
's innen $Bx=A$ vagy is a' két factor származata (a' két factor, az osztó és részes) egyenlő az adott osztandóval.

2 *

Az algebrai kifejezések' ósztása egyszerűbb mint a' számoké, mert itt figyelmünk a' számjegyek kétféle értéke által nem vétetik számba.

14. *Az egytagú mennyiségekközti osztás nem egyéb mint azon factorok' egyszerű elhagyása mind az osztandóból mind az osztóból, mellyek egyenlően megvannak mindkettőben*

$$ab:a=\frac{ab}{a}=b$$

hol a meglévén mindkettőben, kimaradt, szinte

$$aa:a=a=\frac{a^2}{a}=a^{2-1}=a^1$$

$$\frac{a^2b^2c}{a^2b}=a^{2-2}b^{2-1}c.=a^0b^1c=1.b^1c=bc$$

tudjuk hogy minden mennyiség a' 0 mutatóval $=1$;

és hogy $\frac{a}{a}=1=a^{1-1}=a^0=1.$

és $\frac{a^1}{a^1}=\frac{1.a^1}{1.a^1}=\frac{1}{1}=1,$

az az, hogy *valamelly mennyiség maga magával osztatván az egységet adja-részesnek.*

Ha az osztónak minden factora megtaláltatik az osztandóban, akkor, tudjuk, az osztás véget ér, és a' részes egész kifejezés minden maradék nélkül.

$$a^2x^2y^3:a^2xy^2=xy.$$

Valamint a' sokszorozásnál a' mutatók az egynemű kifejezésekben öszveadattak, ugy vonatnak le egymásból az elosztásnál 's mint láttuk

$$b^3c^2x^my^n:bc^4x^ny^m=b^{3-1}c^{2-4}x^{m-n}y^{n-m}$$

vagy közönségesen

$$A^m:A^n=A^{m-n}$$

Ha számi velejárók vannak mint factorok, természetes hogy ezek is elosztatnak egymásközt

$$15a^2x^5 : 5a^2x^4 = 3x.$$

$$144a^2bc^3x^4y^m : 12a^2bc^2x^3y^m = 12cx.$$

15. *Ha az osztónak olly factorai vannak, mellyek az osztandóban nem találtatnak*, akkor az osztás nem végezhető de csak kijelöltetik:

$$a : b = \frac{a}{b}$$

mert a' két mennyiségben nincs egyenlő factor

$$ab : ac = \frac{b}{c}$$

itt az egyenlő factor a ki maradt

$$\frac{a^2x^2y}{axz} = \frac{axy}{z}$$

kihagyván az egyenlő factorokat meg maradnak azok, mellyek egyikben 's a' másikban külön állanak, a' további osztás pedig jelölve van.

Ha a' tanúló eleinten a' mutatók egymásbóli levonását nehéznek találná, könnyen elválaszthatja a' factorokat p. o.:

$$\frac{9a^3b^2x^4y^2z}{3a^2b^2x^3yz^3} \text{ helyett írhatja } \frac{3.3aaabbxxxxyyz}{3.aabbxxxyzzz}$$

elhagyván mindkét mennyiségből az egyenlő factorokat egyenlő számmal, oda irja a' meg maradottakat, ezek itt

$$\frac{3axy}{zz} = \frac{3axy}{z^2}$$

Ha az osztandónak minden factora megvan az osztóban, 's ennek ezen felül több más factora is van, akkor természetesen az egység jön elő, osztandónak továbbá a' megmaradott osztó factorok által,

$$\frac{ab}{abc}=\frac{1}{c}\ ,\quad \frac{5x^2y}{20x^3y^2}=\frac{1}{4xy},$$

itt a' tanuló nyilván látja, hogy a' mivelet nem egyéb mint valamelly törtszámnak legrövidebb kifejezésére vitele, hol az osztandó 's osztó ugyan azon factor által osztatnak; példánkat így is írhatjuk

$$\frac{ax^2y^3}{ax^3y^4}=\frac{ax^2y^3:ax^2y^3}{ax^3y^4:ax^2y^3}=\frac{1}{xy}.$$

16. *Ha az osztandó két vagy többtagú*, a' mivelet nem változik, és mindegyik külön tagból elhagyatnak azon factorok mellyek az osztó factoraival közösek és egyenlők.

1) $$\frac{ax^2y+a^2xy^2}{axy}=x+ay$$

hol mindkét tagban tökéletesen megvan az osztó. Ezen példát így is lehet irni

$$\frac{ax^2y}{axy}+\frac{a^2xy^2}{axy}=x+ay$$

2) $$\frac{abx+a^2x^2+a^3cx^3}{abx}=\frac{b+ax+a^2cx^2}{b}$$

hol az egyes tagokban a és x találtatik de b csak egytagban, ha ezen példát az előbbi szerint irjuk, más alakjára találunk a' kifejezésnek, és lesz

$$\frac{abx}{abx}+\frac{a^2x^2}{abx}+\frac{a^3cx^3}{abx}=1+\frac{ax}{b}+\frac{a^2cx^2}{b}$$

3) $$\frac{ax^2y^3z^4+15x^3y^2z^2+6xy^4z^3}{3ax^2y^2z^4}=$$

$$=\frac{axyz^2+15x^2+6y^2z}{3axz^2}$$

ezen példából nyilván látjuk, hogy ha minden tagból az egyenlő factorokat kivesszük, a' tekintet egyszerűbb lesz, 's hogy ha mindég könnyü lenne a' közös factorokat meglelni a' mivelet sokat nyerne. A' szemes számító egytekintetre meglátja hogy az itt kérdésben forgó 4 tagközt, a' számvelejárok csak 3 tagban, a csak egytagban de x, y és z mindnégy tagban találtatnak, de szükség hogy ezen betük egyszersmind ugyan azon emelésen legyenek, vagy is az osztandó tagjaiból ugyan azon mutatók hagyassanak ki mellyek az osztójiból hagyattak el.

Példánkban az x csak első emelésén közös minden taggal, az $y$nak második, $z$nek is második emelései minden tagban egyenlően megvannak. Közös factorok tehát mindnégytagban xy^2z^2, ha ezeket ki tesszük a' mivelet egyszerűbb tekintetet ád 's lesz

$$\frac{ax^2y^3z^4+15x^3y^2z^2+6xy^4z^3}{3ax^2y^2z^4}=$$

$$=\frac{xy^2z^2(axyz^2)+xy^2z^2(15x^2)+xy^2z^2(6y^2z)}{xy^2z^2(3axz^2)}$$

a' közös factort egyszer téve $=$

$$=\frac{xy^2z^2(axyz^2+15x^2+6y^2z)}{xy^2z^2(3axz^2)}$$

's most már az egyenlő factort mindkét mennyiségből elhagyván lesz mint eléb

$$\frac{axyz^2+15x^2+6y^2z}{3axz^2}.$$

Ha' szükség lenne a' három tagot elkülönözni, irnánk

$$\frac{axyz^2}{3axz^2}+\frac{15x^2}{3axz^2}+\frac{6y^2z}{2axz^2}$$

és az egyes tagoknak még egyszerűbb alakokat adhatnánk, 's lenne

$$\frac{y}{3}+\frac{5x}{az^2}+\frac{2y^2}{axz}$$

de ezen elkülönzés ritkán nyujt könnyebséget a' végszámitásra.

17. *Bárhány tagúak legyenek az osztandó és osztó, a' kimondott szabály változatlanul marad, 's azon factorok, mellyek minden tagban egyenlően meg vannak, elhagyatnak, a' megmaradott mennyiség a' keresett részes, akar végződik az osztás akar nem.*

Bajos azonban több esetben ezen közösfactorokat feltalálni 's azért nyujtja az Algebra osztási miveletét, melly nem különbözik semmiben az arithmetikaitól.

Következő példák bővebben magyarázzák a' mivelet' tulajdonságát.

Ha p. o.: el kellene osztani

1) $(15a^4+9a^3+12a^2+6a):3a$ által

bizonyosan egyszerre odaírhatnánk a' részest minden különös keresés nélkül, mert a' $3a$ minden tagjában megtaláltatik az osztandónak, a' részes pedig

$$=5a^3+3a^2+4a+2$$

és az adott osztandó egyenlő a' részessel sokszorozván azt az osztóval, vagyis=

$$(5a^3+3a+4a+2)3a.$$

2) Adva van

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=(a^3-b^3):(a-b)$$

$(a-b)$ bizonyosan factora (a^3-b^3)nek, de az elébbi rövidítésnek itt többé nincs helye, mert sem a nem factora b^3nak sem b nem factora a^3nak.

Az osztási mivelethez kell tehát folyamodnunk, 's az fudjuk abból áll, hogy a' tagok elrendelése után az osztó első tagját az osztandó első 's legnagyobb tagjában keressük, a' talált részessel pedig az osztót sokszorozván, a' származatot levonjuk az osztandóból 's így fojtatjuk a' miveletet még vagy végét érjük az osztásnak, vagy a' feltételnek eleget tettünk. A' mivelet mint emlitének semmiben sem különbözik az arithmetikai osztástól.

Megtartván példánkat keressük először a^3ban at 's megtaláljuk a^2 részest, evvel sokszorozván $(a-b)$t lesz levonandó a^3-b^3ből, a^3-a^2b, marad a^2b-b^3 ezen maradványban keressük ismét at 's meg találjuk részesnek abt, evvel sokszorozván $(a-b)$ levonandó a^2b-b^3ből a^2b-ab^2 's marad ab^2-b^3, ebben végre megleljük at b^2szor 's vele sokszorozván $(a-b)$t lesz végső levonandó ab^2-b^3, 's a' miveletnek vége, részes $= a^2+ab+b^2$; a' mivelet pedig igy íratik $(a^3-b^3):(a-b)$ részes a^2+ab+b^2

$(a-b)a^2$sokszorozván a^3-a^2b

a' jegyek változtatása után $-a^3+a^2b$

lehozván a' második tagot $+a^2b-b^3$

$(a+b)ab$ sokszorozván $+a^2b-ab^2$

levonván változtatva — $+ab^2-b^3$

$(a-b)b^2$ sokszorozván $+ab^2-b^3$

a' jegyek változtatása után $-ab^2+b^3$

" "

2) $(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3):(x+a)$

x találtatik x^3ban, x^2szor, első tagja a' részesnek x^2, x^2 sokszoroztatván $(x+a)$val ád x^3+ax^2, levonatván x^3+ax^2, x^3+3ax^2ból lesz

$$x^3+3ax^2$$
$$-x^3-ax^2=2ax^2$$

most ebben kerestetvén x találtatik $2ax$, a' részes második tagja $2ax$.

Sokszorozván $2ax$et $(x+a)$val, lesz $2ax^2+2a^2x$ levonandó

$2ax^2+3a^2x$ből, és $2ax^2+3a^2x-2ax^2-2a^2x$

marad $+a^2x$, ebben kerestetik x 's találtatik a^2, sokszoroztatván a^2 al $(x+a)$ lesz a^2x+a^3 levonandó a' meg maradott a^2xből és a' lehozandó a^3 utolsó tagjából az osztandónak, $a^2x+a^3-a^2x-a^3=0$ az osztásnak vége, a' részes 3 tagja pedig

$$x^2+2ax+a^2 \text{ és}$$
$$(x^2+2ax+a^2)\,(x+a)=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3.$$

3) $(15a^4x+37a^3x^2+29a^2x^3+15ax^4):(3a+5x)$
$+15a^4x+25a^3x^2 \qquad =5a^3x+4a^2x^2+3ax^3$
$-\quad -$

$-$,, $+12a^3x^2+29a^2x^3$
$12a^3x^2+20a^2x^3$
$-\quad -$

,, ,, $+9a^2x^3+15ax^4$
$9a^2x^3+15ax^4$
$-\quad -$

$-$,, $-$,, $-$,,

18. *Az elosztásnál a' jegyekre nézve szinte azon szabályok állanak mellyeket a' sokszorózásnál tanultunk*, az az egyenlő jegyek állitó vagy $+$, különböző jegyek pedig tagadó vagy $-$ jeggyel illetett következéseket adnak.

$$+a : +b = +\frac{a}{b} \qquad \pm a : \pm b = \frac{\pm a}{\pm b} = +\frac{a}{b}$$

$$+a : -b = -\frac{a}{b} \quad \text{vagy} \quad \text{öszvéve}$$

$$-a : +b = -\frac{a}{b} \qquad \mp a : \pm b = \frac{\mp a}{\pm b} = -\frac{a}{b}$$

$$-a : -b = +\frac{a}{b}$$

hol a' felső vagy alsó jegyek vétetnek együve. Minden kétséget elhárít azon törvény, mellyszerint a' *részes sokszoroztatván az osztóval, az osztandót adja.*

4) Példa: osztassék

$5x^7 - 22x^6y + 12x^5y^2 - 6x^4y^3 - 4x^3y^4 + 8x^2y5$

$5x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2$ által,

írjuk a' példát ugy mint az arithmetikában, és mivel-jünk minden hasonló eset nyilván értése kedviért kiterjedetten.

Az osztandó már úgy van elrendelve hogy az egyik betű (x) legmagosabb emelése elől áll 's utánna egyel egyel kisebb emelései jönnek, a' sor tehát x lemenő hatósága szerint van elrendelve, szinte így az osztó.

Keressük az osztandó legfőbb tagjában, az osztónak legfőbb tagját, az az $5x^7$ben, $5x^4$et, megtaláljuk x^3at melly x^3 a' részesnek első tagja.

Sokszorozzuk ezen talált első résztaggal az egész osztót,
$(5x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2)$ot x^3al, ez$=5x^7 - 2x^6y + 4x^5y^2$
ezen származat levonatik az osztandóból, szükséges tehát hogy onnan is 3 tagot hozzunk le, a' levonásnál

a' jegyek elváltoztatnak 's lesz

$$\begin{array}{r} 5x^7-22x^6y+12x^5y^2 \\ \underline{-5x^7+\ 2x^6y-\ 4x^5y^2} \\ =-,,-20x^6y+\ 8x^5y^2 \end{array}$$

keressük ezen maradvány első tagjában ismét az osztónak első tagját, és

$$\frac{-20x^6y}{5x^4}=-4x^2y$$

a' részes második tagja, sokszorozván evvel az egész osztót, lesz a' levonandó származat

$$\begin{array}{r} (5x^4-2x^3y+4x^2y^2)\times-4x^2y=-20x^6y \\ +8x^5y^2-16x^4y^3 \end{array}$$

a' jegyeket elváltoztatván, ezen számozat levonatik az elébbi megmaradott két tagból hozzájuk adván az osztandónak még egy tagját 's lesz

$$\begin{array}{r} -20x^6y+8x^5y^2-\ 6x^4y^3 \\ \underline{+20x^6y-8x^5y^2+16x^4y^3} \\ =\ -,,\ \ -,,\ \ +10x^4y^3. \end{array}$$

Ezen maradványban kerestetik végre az osztó legfőbb tagja 's lesz

$$\frac{+10x^4y^3}{5x^4}=+\ 2y^3$$

sokszorozván az osztót, lesz

$$\begin{array}{r} (5x^4-2x^3y+4x^2y^2)2y^3= \\ =10x^4y^3-4x^3y^4+8x^2y^5 \end{array}$$

's ezt levonván változtatott jegyekkel a' maradványból, lehozván az osztandó utolsó két jegyét

$$\begin{array}{r} 10x^4y^3-4x^3y^4+8x^2y^5 \\ \underline{-10x^4y^3+4x^3y^4-8x^2y^5} \\ -,,\ \ -,,\ \ -,, \end{array}$$

a' mivelet végét érte 's a' részesnek talált 3 tagja $x^3-4x^2y+2y^3$, 's ha ezen részessel az osztó sokszoroztatik, az osztandó ísmét előjön.

Irjuk mégegyszer ezen példát szokásszerénti alakjában.

Osztó $5x^4-2x^3y+4x^2y^2$

Osztandó $5x^7-22x^6y+12x^5y^2$
$-6x^4y^3-4x^3y^4+8x^2y^5$

Első részes tag x^3; $-5x^7+2x^6y-4x^5y^2$
első származat, levonandó

—„ $-20x^6y+8x^5y^2-6x^4y^3$
első maradvány

2dik részes $-4x^2y$. $+20x^6y-8x^5y^2+16x^4y^3$
masódik származat

—„ —„ $+10x^4y^3$
$-4x^3y^4+8x^2y^5$
vég maradvány

3dik tag $+2y^3$. harmadik származat $-10x^4y^3$
$+4x^3y^4-8x^2y^5$

a' különbség semmi —„—

---

*) *Jegyzék.* Gyakorlásul a' tanuló x és y helyett bár melly számot vehet; utmutatásul szolgáljon egy példa.

Legyen $x=2$ és $y=3$. példánkban pedig így az osztandó $=5.2^7-22.2^6.3.+12.2^5 3^2-6.2^4.3^3-4.2^3.3^4+8.2^2 3^5$.

az osztó $=5.2^4-2.2^3.3+4.2^2.3^2$.

a' részes $=2^3-4.2^2.3+2.3^3$.

természetes hogy a' tanulónak ezen példát szinte úgy kell osztania mint azt a' közönséges jegyekkel tettük; ha a' kijelölt emeléseket feloldjuk, lesz

az osztandó

$=5.128-22.64.3+12.32.9-6.16.27-4.8.81+8.4.243$
$=640-4224+3456-2592-2592+7776$
$=2464$

Osztási példák, gyakorlásul:

1) $(-x^4y^2+y^2z^4-x^2z^4-x^6+2x^4z^2+y^6$
$+2y^4z^2+x^2y^4)$

osztandó $(x^2-y^2-z^2)$ által.

2) $(-20x^4+13x^3y+19x^2y^2-5xy^3-10xy^3z$
$-6x^2yz+2xy^2z)$

osztandó $(-5x^2-3xy+y^2)$ által.

19. Gyakorta könnyitünk az elosztáson mint említénk ha az osztandó és osztóbá egyenlő factorokat vevén észre azokat elis hagyjuk, ha p. o.: adva lenne

$$8x^6-4x^3y^2+4x^3+2x^3-y^2+1,$$

és osztója $2x^3-y^2+1$.

Az osztó az osztandónak három utolsó tagjával egyenlő, azt kell tehát tekinteni vallyon megvan e' ezen factor, az osztandónak három első tagjában is: hogy ezen három első tagban $4x^3$ csakugyan megvan látnivaló, 's ha ezt ki vesszük marad

$$8x^6-4x^3y^2+4x^3 \text{ hellyett } 4x^3(2x^3-y^2+1)$$

az adott osztandó pedig lesz

$$4x^3(2x^3-y^2+1+(2x^3-y^2+1)$$

ez pedig egyenlő $(2x^3-y^2+1)$ $(4x^3+1)$al, a' példa pedig lesz $(2x^3-y^2+1)$al elosztva $= 4x^3+1$ a' keresett részes.

20. Az algebrai osztás némely nevezetes tekintetekre vezet, 's noha szabályai minden esetre alkalmazhatók, mégis úgy látszik mintha kivételek is helyt

---

az osztó $=5.16-2.8.3+4.4.9.$
$=80-48+144=176.$

a' részes $=8-48+54.=14$

és csakugyan $\frac{2464}{176}=14$ és $176.14=2464.$

találhatnának, ha alakjait különös jegyekre a' számokra visszük. Közelebbi figyelem semmi kétséget nem hagy azonban, valódi helyeslétek íránt.

1) Ha (x^3-1), mi mindegy és egyenlő (x^3-1^3)el $(x-1)$el elosztjuk lesz

$$(x^3-1) : (x-1) = x^2+x+1$$
$$x^3-x^2$$
$$- \quad +$$
$$= x^2-1$$
$$x^2-x$$
$$- \quad +$$
$$= x-1$$
$$x-1$$
$$- \quad +$$
$$,,= \quad ,,=$$

szinte így $(x^4-1):(x-1)=x^3+x^2+x+1$

$(x^5-1):(x-1)=x^4+x^3+x^2+x+1.$

bármelly mutatója legyen $x$nek, és p. o.:

2) $(x^n-1):(x-1)=x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+x^{n-4}$
$+\ldots\ldots x^2+x^1+1.$

Legyen tehát $x$nek bármelly mutatója, vagyis legyen n bármelly szám (x^n-1) mindenkor osztható $(x-1)$ által.

---

*) *Jegyzék.* Itt az n mutató alatt, vagy akarhol is ha jövőben illy közönséges kifejezést adunk, valamelly nagy számot lehet érteni melly az osztás törvénye szerint egyel egyel kisebbedvén végre eléri a' 4.3.2 és egyet: vagy ha megfordítva vesszük lesz n ig

$$1+2+3+4+5.\ldots.n-4+n-3,\ +n-2+n-1+n,$$

a' közép tagokra, elismervén egyszer az alkotási törvényt szükségünk nincs és akarmellyik kívánttagot kifejezhetünk mint azt jövőben látni fogjuk.

Egészen másként van (x^n+1)el, mert ezt nem lehet $(x-1)$ által úgy elosztani hogy maradék ne támadna, bár végtelenig fojtassuk is az osztást, p. o.:

3) $(x^2+1):(x-1)=x+1+\frac{2}{x-1}$, hol $\frac{2}{x-1}$

a' maradék 's ha az osztást fojtatjuk jön 1 után

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^4}+ \text{ 's a't.}$$

$$(x^3+1):(x-1)=x^2+x+1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}..\text{'s a't.}$$

$$(x_n+1):(x-1)=x^{n-1}+x^{n-2}+.......+x$$
$$+1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\text{'s a't.}$$

Ha (x^3+1), (x^5+1), (x^7+1) vagy illy nemü kifejezés hol az x mutatója párotlan szám $(x+1)$al osztatik, szinte végét érjük az osztásnak, de nem érjük maradék nélkül ha x mutatója páros szám: tudjuk hogy a' páros számok alakja $= 2n$ hol n bár melly számot képviseljen, szükséges tehát hogy az x mutatója $2n+1$ legyen, az az párotlan szám, 's ekkor

$$(x^{2n+1}+1):(x+1)=x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-x^{2n-3}+..$$
$$...-x^3+x^2-x+1$$

hol a' párotlan mutatojú x mindenkor —, a' páros mutatojú mindenkor + jegyel van illetve.

4) Hasonló kifejezések mint

$$(x^2-1),\ (x^4-1),\ (x^6-1),\ \text{'s a't.}$$

mellyeknél $x$nek mutatója párosszám, tökéletesen oszthatók $(x+1)$ által; tehát közönségesen $(x^{2n}-1)$ osztható $(x+1)$ által 's véget ér maradék nélkül, lesz pedig a' részes

$(x^{2n}-1):(x+1)=x^{2n-1}-x^{2n-2}+x^{2n-3}-\ldots$'s a' t.
$+x^3-x^2+x-1$

hol mindegyik x mellynek mutatója páros szám, tagadó vagy — jeggyel illetett.

A' példákban a' tanuló x és n helyett bármelly számokat tehet gyakorlásul.

5) Ha ezen kifejezésekben elöl tesszük az egyet, a' részes alakja nem változik, csak hogy x emelései felmenő sorban fognak állani, p. o.:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6- \text{'s a' t.} \ldots\ldots$$

Mint látjuk a' sor végnélküli 's bárhol hagyjuk el az osztást mindenütt marad valami: p. o.: ha csak egy tagot veszünk lesz

$$\frac{1}{1+x}=1-\frac{x}{1+x}$$

ka' két tagot lesz $=1-x+\frac{x^2}{1+x}$, ha hármat

$$=1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x}$$

's így tovább, hol minden páros mutatója $x$nek $+$, páratlan pedig — jeggyel van illetve.

Ha a' tanuló ezen alakokat különös jegyekkel írja figyelemmel legyen a' maradékra, különben ellenmondásokra akad. Azt mondánk p. o.: hogy (x^4+1) nem osztható $(x-1)$ által maradék nélkül, és p. o:

$$(x^4+1):(x-1)=x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}$$

hol $\frac{2}{x-1}$ a' maradék. Ha azonban x helyett hármat irunk vagyis $x=3$ tesszük, lesz

$$(x^4+1)=3^4+1=82 \text{ és } (x-1)=3-1=2$$

82 pedig osztható 2 által maradék nélkül és a' részes 41, 's itt úgylátszik hogy az algebrai alak nem közönséges, de ha x mostani értékét a' sorba tesszük vagy az osztást csakugyan algebrai módon végezzük, lesz

$$(3^4+1):(3-1)=3^3+3^2+3+1+\frac{2}{3-1}$$

mint felyebb, e' pedig nem egyéb mint

$$27+9+3+1+\frac{2}{2} \text{ hol } \frac{2}{2}$$

a' maradék itt történetből egészszám és $=1$, és az egész részes $=41$.

6) Ha felsőbbi példánkban x et tagadóan vesszük lesz

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\text{'s a't...}$$

végnélkül.

7) Ha ugyan a' felsőbbi példában x helyett egyet teszünk lesz

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-1+1+1+1-1+1-\text{s' a't...}$$

végnélkül és bármelly tagnál hagyjuk el az osztást, az osztási érték $^1/_2$, vagy $=0$ vagy $=+1$ és egyik sem igaz, de ha a' maradékot figyelemben tartjuk és a' talált résztagokhoz adjuk kétségen kivül meg kell találnunk $^1/_2$nek valódi értékét. Ezen maradék vagy

$$-\frac{1}{1+1}, \text{ vagy } +\frac{1}{1+1} \text{ az az vagy } -{}^1/_2 \text{ vagy } +{}^1/_2$$

mint páros vagy párotlan tag következik, bárhány tagot vegyünk tudniillik, ha páros számú tagot veszünk, p. o.: 2, 4, 6, 8 vagy 10 tagot, ezen páros számú tagok' öszvese mindég $=0$, hozzájuk adván a' következő páratlan helyen álló maradékot melly

$$+{}^1/_2, \text{ lesz } \frac{1}{1+1}=0+{}^1/_2={}^1/_2,$$

és szinte igy, bárhány tagot vegyünk párotlan számmal 1, 3, 5, 7, 9, 'sa' t., öszvesük mindenkor +1, hozzá adván a' páros helyen álló maradékot melly mindenkor $-{}^1/_2$ lesz ismét

$$\frac{1}{1+1}=+1-\frac{1}{1+1}={}^1/_2.$$

Álmélkodni lehet hogy ezen környülállás több igen jeles író elől mintegy elszökött, 's hogy okát inkáb elméskedéssel akarták bizonyítni, mintsem a' maradékra jutottak volna egyszerüen. Igy eszmélkedtek p. o.: a' többek közt. A' sor végnelküli, felváltván jegyeiket a' tagok + és — követik egymást 's bárhol hagyjuk el ezen végnélküli sort vagy +1 vagy 0 lesz ${}^1/_2$nek értéke, de mivel a' változások minden két egymásmellett álló tagközt ismételve vannak, az egész tagnak is a' kettő közt kell lennie, mint hogy tehát ${}^1/_2$ sem +1 sem 0 nem lehet, szükségesképpen a' két érték' közepiben kell lennie, ez pedig $={}^1/_2$. Mennyire lehetne az illy okoskodás meggyőző, azt kiki általlátja.

8) Ha a' kifejezésben

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+ \text{'s a' t.....}$$

x helyett 2öt teszünk lesz

$$\frac{1}{1-2}=1+2+4+8+16+32+64+ \text{'s a' t....}$$

ismét végnélküli sor, és

$$-1=1+2+4+8+16+32+64+ \text{'s a' t.....}$$

valami vegnélküli nagy mennyiség; de ha a' maradékra figyelmezünk, melly bárhol hagyjuk el az osztást az utolsó tagban — jeggyel illetett, p. o.: az 5 dik tag lesz

$$\frac{16}{-1}=-16, \text{ a' 6 dik } \frac{32}{-1}=-32 \text{ 's a' t.}$$

és sorunk

$$-1=1+2+4+8+16+32+64-128=-1.$$

9) A' kifejezésnek $\frac{1}{1-x}$ következő közönséges alakját adhatjuk

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots+x^{n-1}$$
$$+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

hol $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ a' közönséges maradék 's belőlle bármelly tag megtaláltatik.

10) Ha ezen kifejezésben $x<1$, (x kisebb mint az egység), akkor a' tagok mindég kisebbek kisebbek, és a' sor öszvehajló vagy közelitő (convergens).

11) Ha p. o.: $x={}^1/_2$, lesz $\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-{}^1/_2}=\frac{1}{{}^1/_2}=2$

és $\frac{1}{1-{}^1/_2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+$'s a' t.... vagy

$$2=1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16}+{}^1/_{32}+{}^1/_{64}+\text{'s a' t.}$$

12) Ha $x={}^1/_3$, lesz $\frac{1}{1-{}^1/_3}=\frac{1}{{}^2/_3}={}^3/_2$ és

$$\frac{1}{1-{}^1/_3}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\text{ 's a' t.....}$$

$${}^3/_2=1+{}^1/_3+{}^1/_9+{}^1/_{27}+{}^1/_{81}+{}^1/_{243}+\text{ 's a' t.}$$

13) Az illy öszvehajló soroknál, ha csak 5 vagy 6 tagot veszünk is öszve, a' maradék nagy hiba nélkül elhagyathatik, mert mindég kisebb kisebb lesz. De ha $x>1$ (nagyobb mint az egység), akkor a' sor mint láttuk, széthajló, távozó (divergens), és ekkor a' maradék $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ elnem hagyathatik.

14) Ha az x et megfordítva az 1 eleibe tesszük, akkor

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}+\text{ 's a' t....}$$

és a' sor *öszvehajló* ha $x>1$, *széthajló ha* $x<1$.

$$15)\quad \frac{a}{x\pm b}=\frac{a}{x}\mp\frac{ab}{x^2}+\frac{ab^2}{x^3}\mp\frac{ab^3}{x^4}+\frac{ab^4}{x^5}\mp\frac{ab^5}{x^6}$$
$$+\text{'s a' t......}$$

közönséges kífejezés, mellyben, a' betük helyett bármelly mennyiség tétethetik, ha a' felső jegy áll az osztóban, akkor a' sorban is a' felső jegyek maradnak meg, és megforditva.

$$16)\quad \frac{1}{1-2x+x^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5$$
$$+\text{ 's a' t......}$$

melly sorban, a' természetes számok' sora jön elő velejáró gyanánt.

$$17)\quad \frac{1}{1-3x+3x^2-x^3}=1+3x+6x^2+10x^3$$
$$+15x^4+21x^5+\ldots\ \ldots$$

hol a' velejárók öszveseit képzelik a' természetes számoknak sorban véve azokat 1, 2, 3, 4, 5, 6 tával 's a' t. egymásután (Arithmetik 248)

$$\frac{1}{1-x+x^2}=1+x-x^3-x^4+x^6+x^7-x^9-x^{10}$$
$$+x^{12}+x^{13}-\text{'s a' t.}\ldots.$$

hol a' törvény szembetűnő.

$$18)\quad \frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}$$
$$+a^4x^{m-5}+\text{'s a' t.}\ldots+a^{m-3}x^2+a^{m-2}x+a^{m-1}$$

melly közönséges alakban, a' betük helyett bármelly számok tételhetnek. Sokszorozván ezen részest $(x-a)$ val, minden középtagok elmaradnak mert kettesivel jönnek a' $+$ és $-$ jegyel öszve; nem fog egyéb maradni mint az első és utolsó tag 's ez x^m-a^m.

Mindezen kifejezéseknek jövőben jó hasznokat vesszük.

II. SZAKASZ.

FACTOROK ÉS OSZTOK.

21. *Az egytagú mennyiségek' első factorai* a' betük magok mint látánk, *abc*nek egyes factorai a, b, és c.

Ha számi velejárója van valamelly kifejezésnek, tudjuk miként találjuk meg azoknak első factorait, p. o.:

$15ax^2$nak első factorai 3, 5,a, x, x.

$105a^2bxy^2$ factorai $3.5.7.a.a.b.x.y.y.$'s a' t.

22. *A' két vagy többtagú mennyiségek' factorait* nemlehet illy könnyen megtalálni, 's némellykor elmés fogásokra kell vetemednünk. Ha az alakok' ismeretiben előmentünk gyakorta tudjuk már egy pillanatra, melly factorokból származhatott némelly kifejezés, így p. o. ha adva lenne $a^2+2ab+b^2$ mindjárt tudnánk hogy ez $=(a+b)^2$ és hogy a' factorok $(a+b)$ és $(a+b)$; szinte így ha adva lenne $a^2-2ab+b^2$ ezt is tudnánk hogy

$$=(a-b)^2=(a-b)\ (a-b)$$

és továb a^2-b^2nak factorai $(a+b)$ $(a-b)$ (lásd 10).

Ha ezen 3 kifejezést jól megtartjuk emlékünkben, gyakorta találván olly mennyiségekre mellyek egyik vagy a' másikkal hasonlók, könnyen czélt érünk.

Az elsőhöz tartoznak p. o.:

1) $16x^2+24xy+9y^2=(4x+3y)\ (4x+3y)$

2) $a^2b^2+2abxz+x^2z^2=(ab+xz)\ (ab+xz)$

3) $1+2x+x^2+2y+2xy+y^2=$
$=(1+x+y)\ (1+x+y)$

A' másodikhoz tartoznak.

4) $9a^2-30ab+25b^2=(3a-5b)\ (3a-5b)$

5) $a^2x^2-2abxy+b^2y^2=(ax-by)\ (ax-by)$

6) $2x-x^2+2y-y^2-2xy-1=$
$=(x+y-1)\ (1-x-y)$

7) $1-x^2-2xy-y^2=(1+x+y)\ (1-x-y)$

a' harmadikhoz

8) $4x^4-9y^4=(2x^2+3y^2)\ (2x^2-3y^2)$

9) $9a^2x^4z^2-46b^2y^4x^2=$
$=(3ax^2z+4by^2x)(3ax^2z-4by^2x)$

A' két elsö esetben a' közép tagot kétfelé lehet venni könnyebb tekintet kedviért, mint p. o. ha adva lenne.

$$36a^3x^2\pm84axby+49b^2y^2$$

kétfelé vevén a' közép tagot lesz

$$36a^2x^2\pm42axby\pm42axby+49b^2y^2$$

minthogy a' számoknak is négyszegeknek kell lenniök a' két végső tagban, lesz

$$6^2a^2x^2\pm2.42axby+7^2b^2y^2$$

's itt már azonnal reá ismerünk $(6ax\pm7by)$ négyszegére.

A' harmadik esetben helyes ugyanazon mennyiséget hozzáadni és egyszersmind leis-vonni, hol csak azon tagokat pótoljuk mellyek a' $+$ és $-$ által elmaradtak, így p. o.: a' kifejezésben $(3^2x^4-4^2y^4)$ látjuk, hogy a' két tag hibázik 's hogy ezen két tag $3.4.x^2.y^2$ az az a' két tagnak dupla származata különböző jegyekkel, ha ezt hozzá adjuk és le is vonjuk $3^2x^4-4^2y^4$ ból lesz a' kifejezés

$$3^2x^4+3.4x^2y^2-3.4.x^2y^2-4^2y^4=$$
$$=(3x^2+4y^2)\ (3x^2-4y^2).$$

23. ***Ha az adott mennyiségnek minden tagjában ugyanazon factor jön elő***, tudjuk hogy akkor azt kivevén mindegyikből, egyszer írhatjuk, hozzátevén a' megmaradott factorokat korlátok közzé. Igy:

1) $ax+bx^2+cx^3$ ben az x minden tagban megvan 's lesz $x(a+bx+cx^2)$

2) $(y+xy^2-ay^3+by^4)=y(1+xy-ay^2+by^3)$

3) $3z-6xz^2+15x^2z^3y=3z(1-2xz+5x^2z^2y)$

4) $8x^2y^2z-4x^3y^3z^2+12xy^4z^3=$
$=4xy^2z\,(2x-x^2yz+3y^2z^2)$

5) $5ax^2-15a^2x^2y=5ax^2(1-3ay)$

6) $3ax^2y-3axy^2=3axy(x-y)=-3axy\,(y-x)$

7) $a^2bz^2-ab^2z+a^3bz^4=abz\,(az-b+a^2z^3)$

8) $6x^2y^3z^5-18x^3y^3z^6-24x^4y^5z^7=$
$=6x^2y^3z^5\,(1-3xz-4x^2y^2z^2)$
$=-6x^2y^3z^5\,(3xz+4x^2y^2z^2-1)$.

A' 6 és 8 példában a' jegyeket megfordítottuk, mi mindegy de gyakorta alkalmas.

Még néhány példa segélje a' tanulót.

1) x^3+3x^2+2x első tekintetre lenne
$$=x(x^2+3x+2)$$
de másként írván a' példát lesz
$$x^3+3x^2+2x=x^3+x^2+2x^2+2x$$
hol két kéttagú factorra találunk, melly
$$x^2(x+1) \text{ és } 2x(x+1)$$
és egyszerűbben lesz a' következés
$$(x^2+2x)\,(x+1)$$

2) $y^3-3y^2+2y=y(y^2-3y+2)=y(y^2-y-2y+2)$
ezt ismét kétfelé vehetjük 's lesz
$$y\,[y(y-1)-2(y+1)]=y(y-2)\,(y-1)$$

3) $2x+3x^2y+3xy-2x.=x(2x^2+3xy+3y-2)$
$=x(2x^2-2+3xy+3y)=x[2(x^2-1)+3y(x+1)]$
$=x[2(x+1)(x-1)+3y(x+1)]$
$=x(x+1)[2(x-1)+3y]$
$=x(x+1)(2x-2+3y)$

24. ***Ha valamelly kifejezésben a' betűnek olly értékét adhatjuk hogy az egész mennyiség semmivé lesz, akkor a' betű és ezen érték közti különbség, factora az adott mennyiségnek, a' másik factor pedig azon részes melly ezen factor általi elosztásból ered.***

p. o.: $x^5-5x^4+5x^3+5x^2-6x$
$=x(x^4-5x^3+5x^2+5x-6)$

ha az utóbbi 5 tagú factorban $x=1$ tesszük az egész kifejezés $=0$, tehát $x-1$ factora

$(4^4-5x^3+5x^2+5x-6)$nek,

és ha ezt elosztjuk lesz a' másik factor

$=x^3-4x^2+x-6.$

de ezen factor még összitett és semmivé válik ha $x=-1$, lesz tehát ennek factora $x+1$ és

$$\frac{x^3-4x^2+x-6}{x+1}=x^2-5x+6$$

és ezis még összitett, de

$$x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6$$
$$=x(x-2)-3(x-2) \text{ az az } =(x-3)(x-2)$$

és ehez adván a' fellyebb talált factorokat lesz

$$x^5-5x^4+5x^3+5x^2-6x$$
$$=x(x+1)(x-1)(x-2)(x-3).$$

Leggyakoriabbak olly kifejezések mellyeknek utolsó tagja (ha a' sor valamelly betű mutatóji szerint elvan rendelve) különös jegy a' vagy szám, az illy kifejezésekben, mint jövőben az egyenleteknél bővebben fogjuk látni és megbizonyítani, csak ezen utolsó szám tagnak kell keresnünk egyes factorait, 's azokat tenni az isméretlen, vagy a' betű helyett: ha a' kifejezés ezen felváltás által semmívé lesz, akkor mint láttuk a' betű és szám kőzti különbség, factora a' mennyiségnek. p. o.: ha factorait keresnénk

$(2y^2-7y-15)$nek, lesz belőle ha $y=5$

$(50-35-15)=(50-50)=0$.

és $y-5$; factora $(2y^2-7y-15)$nek, a' másik pedig

$(2y^2-7y-15):(y-5)=(2y+3)$

a' kettő öszvesen $(y-5)\,(2y+3)$.

Ha a' kifejezésben $x^3-19x+30x$ et 2tőnek vesszük lesz

$2^3-19.2+30=8-38+30=0$; és $(x-2)$

factora $(x^3-19x+30)$nak, ezt elosztván $(x-2)$al lesz a' másik factor $x^2+2x-15$, melly azonban még öszves, de minthogy $x=-5$ által semmivé válík, az az $25-10-15=0$ lesz ennek factora $(x+5)$'s általa a' harmadik $(x-3)$ és

$(x^3-19x+30)=(x+5)\,(x-2)\,(x-3)$.

25. *Az egyes és öszvetett factorait valamelly közönséges kifejezésnek szinte úgy találjuk meg, valamint a' számokét* (Arithmetika 99): keresendők $9ax^2z^2$ nek minden factorai.

Függő sorba íratván egyes factorai

$3.3.a.x.x.z.z.$

mindegyik következő, mindegyik előtte állóval sokszoroztatik.

Minden osztójinak száma

$=2.3.3.3.=54.$

az egységgel együtt (Arithmetika 100).

3	
3	9
a	$3a,\ 9a.$
x	$3x,\ 9x,\ ax,\ 3ax,\ 9ax.$
x	$3x^2,\ 9x^2,\ ax^2,\ 3ax^2,\ 9ax^2,\ x^2$
z	$3z, 9z, az, 3az, 9az, xz, 3xz, 9xz, axz, 3axz, 9axz$
	$3x^2z,\ 9x^2z,\ ax^2z,\ 3ax^2z,\ 9ax^2z,\ x^2z$
z	$z^2,\ 3z^2,\ 9z^2,\ az^2,\ 3az^2,\ 9az^2,\ xz^2,\ 3xz^2,\ 9xz^2,$
	$axz^2,\ 3axz^2,\ 9axz^2$
	$x^2z^2,\ 3x^2z^2,\ 9x^2z^2,\ ax^2z^2,\ 3ax^2z^2,\ 9ax^2z^2.$

$(a+x)\ (a-x)\ (a+y)\ (a-y)$ osztóji keresendők

$(a+x)$	
$(a-x)$	$(a+x)\ (a-x)$
$(a+y)$	$(a+x)\ (a+y),\ (a-x)\ (a+y),$
	$(a+x)\ (a-x)\ (a+y),$
$(a-y)$	$(a+x)\ (a-y),\ (a-x)\ (a-y),\ (a+x)\ (a-x)$
	$(a-y),\ (a+x)\ (a+y)\ (a-y),\ (a+y)\ (a-y)$
	$(a-x)\ (a+y)\ (a-y), (a+x)\ (a-x)\ (a+y)$
	$(a+y).$

26. ***A' legnagyobb közös osztó*** is szinte úgy kerestetik mint a' számoknál kerestetett (Arithmetika 83. 101).

Ha a' két vagy több adott mennyiséget factoraiba változtattuk, első tekintetre láthatjuk a' köztök levő legnagyobb osztót.

Ha a' factorok felkeresése bajos, az osztás miveletéhez folyamodunk, 's egyiket a' másikkal elosztjuk, a' maradékkal az elébbi osztót 's így míg véget érünk.

Tekintsük itt rövideden azt mit az arithmetikában előadtunk.

$\frac{a}{b}=c$ azt mutatja hogy a, b által elosztatván c 't adja részesül: ebből következik $a=bc$, ha míndkét kifejezést bármelly számmal sokszorozzuk az egyenlőség köztük megmarad és $ma=mbc$: ha tehát a osztható b által bizonyosan osztható annak sokszorosa is ma.

Ha két mennyiséget egy harmadik eloszt, *elosztja ezeknek öszvesét és különbségét is*; ha

$$a=bc \text{ és } a'=b'c \text{ lesz}$$

$$a+a'=c(b+b') \text{ és } a-a'=c(b-b'),$$

hol c mindkét mennyiséget elosztja.

Ha a és b, oszthatók c által, és b, p. o.: nem osztja meg tökélletesen a't az az valami maradék támad, ezen maradékot is (legyen m) szükségeseképen elosztja c, az az legyen

$$\frac{a}{b}=r+\frac{m}{b} \text{ lesz } a=rb+m.$$

$$\text{és } a-rb=m.$$

Igy tehát ha c at és rbt elosztja, bizonyosan elosztja ezeknek különbségét is melly $a-rb$, de ez egyenlö m mel a' maradékkal, tehat c a' maradékot is elosztja.

Ha tehát a' közönséges mivelet szerint először at b'vel elosztjuk marad m, most m mel kell bt elosztani, 's ha itt is marad valami p. o.: m', $m$et m$'$el kell osztaní 's így mig az osztás véget ér, és c vagy bizonyos factora a és $b$nek vagy nem, az első esetben az osztás véget ér, másodikban tudjuk hogy az egységre jutunk.

A' mivelet közönségesen következendő,

(a' részes)

a osztatik b által és marad m ekkor $a=rb+m$

b „ m „ marad m' „ $b=r'm+m'$

m „ m' „ marad m'' „ $m=r''m'+m''$

m' „ m'' „ marad m''' „ $m'=r'''m''+m'''$

's így tovább míg az osztásnak vége: azon m melly az előtte jövő osztót tökélletesen megosztja, lesz legnagyobb közösosztója a és b nek.

Vegyük fel hogy m''' ezen keresett legnagyobb közös osztó az az

$$\frac{m''}{m'''}=r^{\mathrm{IV}} \text{ és } m''=r^{\mathrm{IV}}m''';$$

bizonyos hogy m''' elosztja mint m'', m', m, b és a t mint a' feljebbi kifejezések bizonyitják: de legnagyobb osztó is egyszersmind mert nálánal nincs nagyobb melly m'' t elosztaná 's így feljebb.

Természetes hogy az m ek mindég kisebbek kisebbek lesznek, 's ha az adott két vagy több mennyiségnek nincs közös osztója végre az egységet találjuk.

Példa. Kerestetik

$$x^4-y^4 \text{ és } x^3-x^2y-xy^2+y^3$$

közt a' legnagyobb közös osztó?

Elosztván (x^4-y^4) a' második mennyiség által lesz az első részes $r=(x+y)$ a' maradvány

$$\begin{array}{rl} m= & x^3y+x^2y^2-xy^3-y^4 \\ & -x^3y+x^2y^2+xy^3-y^4 \\ \hline = & +2x^2y^2 \qquad -2y^4. \end{array}$$

Minekelőtte ezen maradvánnyal osztanók az elébbi osztót, látjuk hogy factora $2y^2$, melly az első osztónak nem factora, és $2y^2(x^2-y^2)$ ból $2y^2$ ot elhagyhatjuk. Megtaláljuk pedig

$(x^3-x^2y-xy^2+y^3)$ben (x^2-y^2)ot $(x-y)$ szor maradék nélkül, legnagyobb osztója tehát az adott két mennyiségnek $(x-y)$.

Noha a' legnagyobb közös osztónak felkeresése, az algebrában ritkán talál practikai haszonvétre, mégis jó ha a' tanuló, némely példákat elővesz gyakorlatul.

27. *Ha a' számok oszthatását* (Arithmetika 72, 73, etc.) *közönséges tekintetre visszük*, bármelly számot N, mellynek alapja A, sokszorosai pedig a, a_1, a_2, a_3, 's a' t. következő alakba irhatjuk

1) $N=a+a_1A+a_2A^2+a_3A^3+a_4A^4+a_5A^5+$'s a' t. ezt ismét következőképen irhatjuk

2) $N=a+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+$'s a' t.
$+a_1(A-1)+a_2(A^2-1)+a_3(A^3-1)$
$+a_4(A^4-1)+a_5(A^5-1)+$'s a' t.

és ismét

3) $N=a+a_2+a_4+a_6+$'s a' t.
$(a_1+a_3+a_5+$'s a' t.$)+a_1(A+1)+a_2$
$(A^2-1)+a_3(A^3+1)+a_4(A^4-1)+$'s a't.

Mindegyik szám tehát melly elosztja At, elosztja annak sokszorosát is, az az aA, a_2A^2, a_3A^3 's a' t. az első kifejezésben tehát minden factora Anak melly at megméri vagy elosztja, elosztja, a' számot Nnet is.

Mindegyik szám melly elosztja $(A-1)$ et, elosztja
$a(A-1)$, $a_2(A^2-1)$, $a_3(A^3-1)$'s a' t.
's így a' második kifejezésben minden factora (A^2-1) nak melly $a+a_1+a_2+a_3$'s a' t. elosztja, elosztja magát a' számot is.

Minden szám végre, melly elosztja $(A+1)$et, elosztja $a(A+1)$, $a_2(A^2+1)$, $a_3(A^3+1)$'s a' t. is, 's így minden factora $(A+1)$nak melly

$$(a+a_2+a_4+a_6 \text{ 's a' t.})-(a_1+a_3+a_5+ \text{ 's a' t.})$$

elosztja, elosztja Nnet is, a' 3dik kifejezésben.

Ha ezen kifejezésben A helyett r^net írunk lesznek felsőbbi kifejezéseink

1) $N=a+a_1r^n+a_2r^{2n}+a_3r^{3n}+a_4r^{4n}+$'s a' t.

2) $N=a+a_1+a_2+a_3+$'s a' t. $+ a(r^n-1)$
$+a_2(r^{2n}-1)+a_3(r^{3n}-1)+$'s a' t.

3) $N=a+a_2+a_4+$'s a't. $-(a_1+a_3+a_5+$'s a't.)
$+a_1(r^n+1)+a_2(r^{2n}-1)+a_3(r^{3n}+1)$
$+a_4(r^{4n}-1)+$'s a' t.

's szinte mint előbb Nnet elosztja elöször r^nnek minden factora melly at, másodszor minden factora

(r^n-1)nek, melly

$a+a_1+a_2+$'s a' t.

's végre minden factora (r^n+1)nak melly

$$(a+a_2+a_4+ \text{'s a' t.})-(a_1+a_3+a_5+ \text{ 's a' t.})$$

elosztja.

Mint emliténk ezen alakok minden szám alapra alkalmazhatok; ha 10es számalapunkat vesszük például, lesz ha

$r=10$ és $n=2$

$N=a+a_1r^n+a_2r^{2n}+a_3r^{3n}+$'s a't.

$r^n=10^2=100$, $r^{2n}=10000$'s a' t.

$N=a+a_1100+a_210000+a_31000000$'s a' t.

melly kifejezésben azt tesszük fel, hogy az adott szám N két két jegybe van osztva, megfordidott rendben ugy hogy a, az egyeseket és tizeseket, a_1, a' százasokat és ezreseket 's a' t. foglalja magában.

Az első kifejezés szerint N mindazon factorai által osztható 100nak, melly egyszersmind at is elosztja, 100nak factorai pedig 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 (Arithmetika 72, 73).

A' második kifejezésben N osztható 3, 9, 11, 33, mint 99nek factorai által, ha $a+a_1+a_2$'s a' t. oszthatók általok, és a' harmadikban végre 101 által ha, általa

$$a+a_2+a_4+ \text{ 's a' t.} \quad -(a_1+a_3+a_5+ \text{ 's a' t.})$$

osztható.

Mindezen alakokat változtatni és bármelly esetekre vagy osztókra alkalmazni lehet.

III. SZAKASZ.

TÖRTEK.

1 §. Közönséges törtek.

28. *A' törtszám közönséges alakja* $\frac{A}{B}$ vagy elnemvégzett osztásra mutat, vagy az osztás miveletét jelöli.

A és B helyett eszerint bármelly jegyek álhatnak, legyenek azok egyvagy többtagú kifejezésben; 's így

$$\frac{a}{b}, \frac{a+b}{c-d}, \frac{a^2x-ax^2}{bx-cy}, \frac{ax^3-\sqrt{3}}{a-y^2}, \frac{ax+bx^2-cx^3-x^4}{a-b+x}$$

hasonlóképen törtszámok.

29. *A' valódi törtszámnál* tudjuk hogy $A<B$, mert ha $A>B$ akkor B találtatik Aban p. o.:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{a^1}{B}$$

hol a^1 a' maradék.

Ha a' tört alak' két részében, vagyis a' számláló és nevezőben ugyanazon factor jön elő, akkor a' tört nincs legegyszerübb kifejezésen, és mint tudjuk ezen factor elhagyathatik, $\frac{ab}{ac}$ben p. o.: az a mindkét részben meglévén elhagyható és a' törtnek legrövidebb kifejezése $\frac{b}{c}$: szint így

$$\frac{ax^2y}{axy^2}=\frac{x}{y},\ \frac{6x-9x^2}{3xz}=\frac{2-3x}{z}$$

$$\frac{6a^3-6a^2y+2ay^2-2y^3}{12a^2-15ay+3y^2}=\frac{6a^2+2y^2}{12a-3y}.$$

30. Ezen okból a' *törtek' értéke nem változik bármelly számmal sokszoroztassék számlálójok és nevezőjök egyszersmind, vagy osztassék általa.*

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}=\frac{ax^2}{bx^2}=\frac{a(1+x)}{b(1+x)}=\frac{a(x-x^2+y^2)}{b(x-x^2+y^2)}\text{ 's a' t.}$$

Ezáltal különbféle nevezőn levő törtet egyenlő és ugyanazon nevezőre viszünk, ha nevezőjét szinte mint számlálóját is, a' többinek nevezőjével sokszorozzuk, p. o.: $\frac{a}{b}$ és $\frac{a_{,}}{b_{,}}$ egynevezőre viendő, lesz

$$\frac{a}{b}=\frac{ab_{,}}{bb_{,}} \text{ és } \frac{a_{,}}{b_{,}}=\frac{a_{,}b}{b_{,}b} \text{ szinte így}$$

$$\frac{a}{b},\ \frac{a_{,}}{b_{,}},\ \frac{a_{,,}}{b_{,,}},\ \frac{a_{,,,}}{b_{,,,}}$$

egyenlő nevezőre viendők, lesz egymásután a' 4 tört

$$\frac{ab_{,}b_{,,}b_{,,,}}{bb_{,}b_{,,}b_{,,,}},\ \frac{a_{,}bb_{,,}b_{,,,}}{b_{,}bb_{,,}b_{,,,}},\ \frac{a_{,,}bb_{,}b_{,,,}}{b_{,,}bb_{,}b_{,,,}},\ \frac{a_{,,,}bb_{,}b_{,,}}{b_{,,,}bb_{,}b_{,,}}$$

melly példában a' törvény szembetűnő; minden négy nevező 's a' t., sokszoroztatik egymással 's támad az újnevező, a' számláló pedig mindenkor csak a' három más nevezővel sokszoroztatik.

$$\frac{(a+x)}{(b+y)},\ \frac{(a-x)}{(b-y)},\ \frac{(a+x^2)}{(b+y^2)},$$

egynevezőre viendők, lesz a' 3 tört

$$\frac{(a+x)\,(b-y)\,(b+y^2)}{(b+y)\,(b-y)\,(b+y^2)},\ \frac{(a-x)\,(b+y)\,(b+y^2)}{(b-y)\,(b+y)\,(b+y^2)}$$

$$\frac{(a+x^2)\,(b+y)\,(b-y)}{(b+y^2)\,(b+y)\,(b-y)}.$$

Emlitők hogy bármelly mennyiséggel sokszoroztassék a' tört számlálója és nevezője, értéke nem változik, nem változik tehát ha a' factor $=-1$, és csakugyan

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b},\ \frac{a+b}{c-d}=\frac{-a-b}{-c+d}$$

vagy $\frac{a-b}{c-d}=\frac{b-a}{d-c}$, 's ha valamelly törtszám minden tagja ellenkező jegyekkel íratik értéke nem változik.

31. *Törtek öszveadhatók vagy levonhatók* egymásközt ha ugyan azon nevezőn vannak, különben a' miveletek csak kijelölhetők: ha ugyan azon nevezőjök van vagy arra vitettek, *számlálójok adatik öszve, vagy vonatik le egymásból.*

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}=\frac{2a}{b},\ \frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{ac+ab}{bc}$$

$$\frac{1+x}{a-z}+\frac{1-x}{a+z}=\frac{(1+x)\,(a+z)+(1-x)\,(a-z)}{(a-z)\,(a+z)}$$

$$=\frac{2a+2xz}{a^2+z^2},\ \text{és}$$

$$\frac{1+a}{x}+\frac{1-a}{x}=\frac{2}{x}\ \text{és}\ \frac{1+a}{x}-\frac{1-a}{x}=\frac{2a}{x}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{a}{c}=\frac{ac-ab}{bc},\ \frac{a-3b}{c}+\frac{5a-b}{2c}=\frac{7a-7b}{2c}$$

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a^2+2ab+b^2)}{a^2-b^2}-\frac{(a^2-2ab+b^2)}{a^2-b^2}$$
$$=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Ha a' számlálóban a' nevező mint factor jön elő akkor a' tört színlett és nem valódi p. o.:

$$\frac{ab}{b},\ \frac{ac+b}{c},\ \frac{x^2-ax}{x},\ \frac{a^4-x^4}{a+x}\ \text{'s a' t.}$$

színlett törtek, mellyeket az osztás által egyszerübb alakokba lehet vinni. A' kevertszám tudjuk egész és tört. Minden kevertszámot tört alakra lehet vinni, *ha az egész sokszoroztatik a' tört nevezőjével ez pedig alá iratik*, p. o.:

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$$

$$(a+x)-\frac{z}{a-x}=\frac{a^2-x^2-z}{a-x}.$$

32. *Az algebrai törtek' sokszorozása* nem különbözik a' különös számtörtek sokszorozásától.

Egész számmal sokszoroztatik a' tört, ha ennek számlálója sokszoroztatik.

$$\frac{a}{c}.x=\frac{ax}{c},\ \frac{(a+x)}{c-z}.a+x=\frac{(a+x)^2}{c-z}$$

$$\frac{1}{1+2x+x^2}.(1+x)^2=1;\ \frac{(1+x)}{(1-2x+x^2)}(1+x)=\frac{1+x}{1-x}.$$

A' jegyek a' kimondott törvényt követik.

$$\frac{a+b-c}{x-z}.(a-b+c)=\frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{x-z}$$

Ha törtek sokszoroztatnak egymásközt, a' számlálók a' számlálókkal, nevezők nevezőkkel sokszoroztatnak

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}\times\frac{a_{,}}{b_{,}}\times\frac{a_{,,}}{b_{,,}}\times\frac{a_{,,,}}{b_{,,,}}=\frac{aa_{,}a_{,,}a_{,,,}}{bb_{,}b_{,,}b_{,,,}}$$

$$\frac{x+1}{x-1}\times\frac{x+2}{x-2}=\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2},$$

$$\frac{2ax-5x^2}{x^2-y-z^2}\times\frac{3bx-4a}{1-y}$$

$$=\frac{6abx^2-15bx^3-8a^2x+20ax^2}{-x^2y+y^2+z^2y+x^2-y-z^2}$$

33. *Az algebrai törtek' elosztása* szintúgy történik mint a' különös törteké.

Egész számmal osztatik valamelly tört, ha ennek nevezője sokszoroztatik az adott osztóval, ez nem egyéb mint osztófactorrá tétele az adott osztónak

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b.c}\ \text{mert}\ a:c=\frac{a}{c}\ \text{és}\ \frac{a}{1}:c=\frac{a}{1.c}=\frac{a}{c}$$

$$\frac{(x^2-1)}{(x+1)}:x^2=\frac{(x^2-1)}{x^2(x+1)}\ \text{'s a' t.}$$

Ha egész szám osztatik törtszám által, szinte sokszoroztatik az osztandó a' törtnek nevezőjével, de a' származat számlalóvá, az előbbi számláló pedig nevezővé válik.

$$a:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}\ \text{mert}$$

ha mindkét tagot sokszorozzuk c által lesz

$$a:\frac{b}{c}=ac:b=\frac{ac}{b}$$

$$(a+x-x^2):\frac{(x^2-z)}{(1-x)}=\frac{(a+x-x^2)(1-x)}{(x^2-z)}.$$

Ha tört törtel osztandó, az egyik factor megfordittatik 's vele a' másik sokszoroztatik

$$\frac{a}{b}:\frac{a_{,}}{b_{,}}=\frac{ab_{,}}{ba_{,}}=\frac{a}{b}\times\frac{b_{,}}{a_{,}}$$

tudjuk hogy a' részes nem változik ha az osztandó és osztó ugyanazon szám által sokszoroztatik vagy elosztatik, sokszorozzuk tehát

$$\frac{a}{b} : \frac{a_{\prime}}{b_{\prime}}\text{et } b\text{vel, lesz } \frac{a}{b} : \frac{a_{\prime}}{b_{\prime}} = \frac{ab_{\prime}}{b} : a_{\prime} = \frac{ab_{\prime}}{ba_{\prime}}$$

Azon tekintetekhez mellyeket az Arithmetikában (117) adtunk tehetjük még következőt.

Elosztván $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ által lesz a' mondott szerint részes $\frac{ad}{bc}$

Ha az osztónak csak számlálóját tekintjük, bizonyos hogy ha az egész szám lenne, véle kellene $\frac{a}{b}$t elosztani 's ez $\frac{a}{bc}$ mintha ezen példában $d = 1$ lenne, de minthogy $\frac{a}{b}$ nem $c$vel hanem $c$nek d részével kellett csak osztani, a' részes bizonyosan d szerte kicsi, szükségesképen sokszorozni kell tehát a' részest $d$vel, 's lesz $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ mi bizonyitandó.

Végre $\frac{a}{b} : \frac{a_{\prime}}{b_{\prime}} = \frac{ab_{\prime}}{ba_{\prime}}$ mert a' részest sokszorozván az osztóval az osztandónak ismét elő kell jönnie és

$$\frac{a}{b} = \frac{a_{\prime}}{b_{\prime}} \times \frac{ab_{\prime}}{ba_{\prime}} = \frac{a_{\prime}ab_{\prime}}{b_{\prime}ba_{\prime}} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a+x}{a-x} : \frac{a-x}{a+x} = \frac{(a+x)^2}{(a-x)^2}, \quad \frac{1+x}{1-x} : \frac{1+x}{1-x} = 1.$$

$$\frac{1-x+x^2}{x-x^2} : \frac{1+x}{1-x} = \frac{(1-x+x^2)\,(1-x)}{(x-x^2)\,(1+x)}, \text{'s a' t.}$$

2 §. Láncztörtek.

34. Ha valamelly nagyobb számmokkal írt, de már többé nem rövidithető törtszámot kisebb számokkal akarunk a' lehető közelitéssel írni, a' láncztörtekhez kell folyamodnunk.

Tudjuk hogy a' haszonba vett láncztörtek számlálója az egység, tudjuk továbbá (Arithmetika 139) miként jutunk a' láncztörtekre elosztván a' számlálót a' nevező által, ezt a' maradék által, a' második maradékot a' harmadik által 's így tovább, és hogy

$$\frac{A}{B}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\cfrac{1}{\zeta+1 \text{ 's a' t.}}}}}}$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \text{'s a' t.}$$

egész számok lévén és hol az első tagban

$$\frac{A}{B}=a+\frac{m}{B}$$

m az első maradék és $B > m$, a' második

$$\frac{B}{m}=\beta+\frac{m'}{m}$$

hol m' a' második maradék és $m > m'$, a' harmadik

$$\frac{m}{m'}=\gamma+\frac{m''}{m'},\ \frac{m'}{m''}=\delta+\frac{m''}{m'''},\ \frac{m'''}{m''}$$

$$=\varepsilon+\frac{m'''}{m^{\text{IV}}}\text{ 's a't.}$$

és ha $\frac{A}{B}=x$ lesz $x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\cfrac{1}{\zeta+1}}}}}$'s a' t.

Tudjuk továbbá hogy mentül több tagot veszünk együvé annál inkább közelitünk x valódi értékéhez, de hogy egyszersmind a' tagok nagyobb számával, nagyobb számokra is érünk.

Ha visszavisszük ezen törteket a' közönséges mivelet szerint, lesz az első tag

$$x=\alpha$$

első és második $x=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$

3 tag $x=\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}$

4 első tag $x=\frac{[(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha]\,\delta+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta}$

's így tovább.

Ha ezen öszves tagoknak számlálójokat sorjában

a, b, c, d, e, f, 's a' t.

nevezőjöket pedig

$a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, $d_{,}$, $e_{,}$, $f_{,}$, 's a' t.

által jelöljük hol $a'=1$, $b'=\beta$'s a' t., lesznek az egymásután álló öszves tagok.

$$\frac{a}{a_{,}},\ \frac{b}{b_{,}},\ \frac{c}{c_{,}},\ \frac{d}{d_{,}},\ \frac{e}{e_{,}},\ \frac{f}{f_{,}}\ \text{'s a't.}$$

Ebből látszik hogy valamint az öszves tagok ugy a, b, c, d, 's a' t., és $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, $d_{,}$, 's a' t. nőnek mentül eléb megyünk. Mert ha a' részesek α, β, γ, δ 's a' t. — állítók akkor a, b, c, d 's a' t. is állítók és $b>a$, $c>b$, $d>c$'s a' t.

Kifejezésinkben

$$\frac{b}{a}=\beta+\frac{1}{\alpha},\quad \frac{c}{b}=\gamma+\frac{a}{b},\quad \frac{d}{c}=\delta+\frac{b}{c}$$

ha tehát α, β, γ, δ, 's a' t. nagyobbak az egységnél ugy $\frac{b}{a}>1$, $\frac{c}{b}>1$'s a' t. és $\frac{a}{b}<1$.

Ha két egymásmellett álló tagját sorunknak

$$\frac{a}{a'},\ \frac{b}{b'},\ \frac{c}{c'},\ \frac{d}{d'},\text{ 's a' t.}$$

sokszorozzuk egymással mintha egy nevezőre akarnánk őket vinni, lesz

$$a'b-ab'=bc'-b'c=c'd-cd'=de'-d'e\text{ 's a' t.}=1$$

vagy is lesz

$$\begin{aligned}ab'-a'b&=-1\\ bc'-b'c&=+1\\ cd'-c'd&=-1\\ de'-d'e&=+1\\ ef'-e'f&=-1\quad\text{'s a' t.}\end{aligned}$$

honnan következik hogy a' törtek

$$\frac{a}{a'},\ \frac{b}{b'},\ \frac{c}{c'}\ \text{'s a' t.}$$

már legrövidebb kifejezésekre vannak vive.

Ha ezen utolsó kifejezésnek következő alakjukat adjuk és irjuk

$$\frac{b}{b'}-\frac{a}{a'}=\frac{1}{a'b'}$$

$$\frac{c}{c'}-\frac{b}{b'}=-\frac{1}{b'c'}$$

$$\frac{d}{d'}-\frac{e}{c'}=\frac{1}{c'd'}$$

$$\frac{e}{e'}-\frac{d}{d'}=-\frac{1}{d'e'} \text{ 's a' t.}$$

látjuk hogy a' két egymástkövető tagok

$$\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'} \text{ 's a't.}$$

közti különbség mindég kisebb kisebb mert

a', b', c', d', 's a' t. nőnek.

Ezen különbségek e' mellett a' lehető legkisebbek is, és nem lehet 2 tag közzé olly törtet beiktatni, mellynek nevezője kisebb számmal legyen írva mint a' két tagé.

Ha p. o.: azt mandanók hogy $\frac{c}{c'}$'s a' t. $\frac{d}{d'}$ közzé esik valamelly tört $\frac{m}{n}$ és n kisebb mint c' vagy d', akkor $\frac{m}{n}$ és $\frac{c}{c'}$ közt a' különbségnek kisebbnek kellene lenni mint $\frac{1}{c'd'}$. Ezen különbség pedig $\frac{mc'-nc}{nc'}$ de legkisebb értéke ezen kifejezésnek nem lehet egyéb mint $\frac{1}{nc'}$ és eszerint $\frac{1}{nc'}$-nek kisebbnek kellene lennie mint $\frac{1}{c'd'}$ mi azt tenné hogy $n>d'$, mi nem ugy van, mert azt mondánk hogy kisebb legyen: épen ugy nem kisebb $\frac{1}{nd'}$ mint $\frac{1}{c'd'}$ ha n kisebb mint c'.

A' mint ezen tagok $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$'s a' t. változtatva nagyobbak és kisebbek mint x, $x$nek valódi értéke mindenkor két egymásmelett álló tagközt van, és semmi más tört $x$nek értékét közelebb nem adja kisebb nevezővel mint valamellyik közüllök. Ezen tulajdonukban áll a' láncztörteknek nagy becse.

3 §. Tizedes Törtek.

35. *A' tizedes törtek közönséges alakja* ha a' mennyiség

$$M=a+\frac{b}{10}+\frac{c}{10^2}+\frac{d}{10^3}+\frac{e}{10^4}+\ldots\frac{m}{10^{n-1}}+\frac{n}{10^n}.$$

hol a bármelly égesz számot, b, c, d, e, f, 's a' t. pedig bármelly egyes számjegyeket képviselnek.

Legyen egy más tizedes szám

$$M'=a'+\frac{b'}{10}+\frac{c'}{10^2}+\frac{d'}{10^3}+\frac{e'}{10^4}+\ldots\frac{m'}{10^{n-1}}+\frac{n'}{10^n}$$

és a' kettő öszveadandó, lesz

$$M+M'=a+a'+\frac{b+b'}{10}+\frac{c+c'}{10^2}+\frac{d+d'}{10^3}+\text{'s a' t.}\ldots$$
$$+\frac{m+m'}{10^{n-1}}+\frac{n+n'}{10^n}$$

hol 10^n az utolsó jegyet jelenti a' kifejezésben.

Lesz levonása a' két mennyiségnek

$$M-M'=a-a'+\frac{b-b'}{10}+\frac{c-c'}{10^2}+\frac{d-d'}{10^3}+\ldots.$$
$$+\frac{m-m'}{10^{n-1}}+\frac{n-n'}{10^n}.$$

A' sokszorozás pedig $M.M'$, hol az egyik sor a' másiknak minden tagjával külön sokszoroztatik, és közönségesen

$$\frac{a}{10^m}\cdot\frac{b}{10^n}=\frac{ab}{10^{m+n}}.$$

Az elosztásnál pedig lesz mint láttuk

$$\frac{a}{10^m}:\frac{b}{10^n}=\frac{a.10^n}{b.10^m}=\frac{a}{b}.10^{n-m}$$

vagy ha $\quad m=n\ \frac{a}{10^m}:\frac{b}{10^m}=\frac{a}{b}.$

Jegyzék. Jó haszonnal fordíthatja a' tanuló üres oráit arra, ha a' különös jegyekkel írt számokat algebrai alakba írja és így a' különböző miveleteket visgálja, kivált a' sokszorozás és elosztásnál. Adunk utmutatásul egykét példát.

7508×694. sokszorozás példája egész számokkal. $7508=8+0+5.10^2+7.10^3$ és $694=4+9.10+6.10^2$ ha a' kifejezést 10nek lemenő mutatóji szerint rendeljük lesz

$$(7.10^3+5.10^2+8)\,(6.10^2+9.10+4)=7.6.10^5$$
$$+5.6.10^4+6.8.10^2+9.7.10^4+5.9.10^3$$
$$+9.8.10+4.7.10^3+5.4.10^2+4.8.$$
$$=42.10^5+(30+63)10^4+(45+28)10^3+(48+20)10^2$$
$$+72.10+32.$$
$$=42.10^5+93.10^4+73.10^3+68.10^2+72.10+32.$$
$$=4200000+930000+73000+6800+720+32=5210552.$$
$$=5000000+200000+10000+500+50+2.$$

$0{\cdot}573\times0{\cdot}0864.$

tizedes törtek sokszorozása.

1ső alak

$$\left(\frac{5}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{3}{10^3}\right)\left(\frac{8}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{4}{10^4}\right)=$$

$$\frac{5.8}{10^3}+\frac{7.8}{10^4}+\frac{3.8}{10^5}+\frac{5.6}{10^4}+\frac{6.7}{10^5}+\frac{3.6}{10^6}+\frac{5.4}{10^5}+\frac{7\ 4}{10^6}$$

$$+\frac{3.4}{10^7}=\frac{5.8}{10^3}+\frac{7.8+5.6}{10^4}+\frac{3.8+6.7+5.4}{10^5}$$

$$+\frac{3.6+7\ 4}{10^6}+\frac{3.4}{10^7}$$

$$=\frac{40}{10^3}+\frac{86}{10^4}+\frac{86}{10^5}+\frac{46}{10^6}+\frac{12}{10^7}$$

$$=\frac{4}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{14}{10^4}+\frac{10}{10^5}+\frac{7}{10^6}+\frac{2}{10^7}$$

$$=\frac{4}{10^2}=\frac{9}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{7}{10^6}+\frac{2}{10^7}=0\cdot0495072.$$

10^5 nem jövén elő 0 iratik helyibe.

2dik alak. $0\cdot573\times0\cdot0864=$

$$=(5.10^{-1}+7.10^{-2}+3.10^{-3})(8.10^{-2}+6.10^{-3}+4.10^{-4})=$$

$$40.10^{-3}+56.10^{-4}+24.10^{-5}$$

$$+30.10^{-4}+42.10^{-5}+18.10^{-6}$$

$$+20.10^{-5}+28.10^{-6}+12.10^{-7}$$

$$=40.10^{-3}+86.10^{-4}+86.10^{-5}+46.10^{-6}+12.10^{-7}$$

$$=4.10^{-2}+9.10^{-3}+5.10^{-4}+7.10^{-6}+2.10^{-7}=0\cdot0495072.$$

Osztás egész számmal. $38988 : 684=$

$$(3.10^4+8.10^3+9.10^2+9.10+8.):(6.10^2+8.10+4)=5.10+7$$

$$-30.10^3\pm40.10^2\pm20.10.$$

$$—\ \text{,,}\ \ 4.10^3+7.10^2+8.10+8.$$

$$—\ \left\{\begin{array}{l} 4.10^3+5.10^2+6.10. \\ \qquad +2.10^2+2.10. \\ \qquad\qquad\quad +8. \end{array}\right.$$

— — ,, — ,, — ,,

Osztás tizedes törtek közt.

$$0{\cdot}00903 : 0258 = 0{\cdot}035$$

$$0{\cdot}00903 = 9.10^{-3}+3.10^{-5} = \frac{903}{10^{-5}}$$

$$0{\cdot}258 = 2.10^{-1}+5.10^{-2}+8.10^{-3} = \frac{2.10^{2}+5.10+8}{10^{3}}$$

$$= \frac{258}{10^{3}}$$

$$0.00903 : 0{\cdot}258 = \frac{{\cdot}00903}{0{\cdot}258} = \frac{903}{10^{5}} : \frac{258}{10^{3}} =$$

$$= \frac{903.10^{3}}{258.10^{5}} = \frac{903}{258\ 10^{2}} = \frac{35}{10^{3}} = 35.10^{-3} = 0{\cdot}035\,.$$

és $(9.10^{-3}+3.10^{-5}) : (2.10^{-1}+5.10^{-2}+8.10^{-3})$

$$= 3.10^{-2}+5.10^{-3} = 0{\cdot}035$$

$-7.10^{-3}+7.10^{-4}+4.10^{-5}$

$-\quad\quad -\quad -$

$2.10^{-3}-7.10^{-4}-10^{-5} =$

$= \quad 13.10^{-4}-10^{-5}$

$12.10^{-4}+9.10^{-5}. =$

$= \quad 13.10^{-4}-1.10^{-5}.$

$-\quad\quad +$

— „ — „ 's így más példák is.

IV. SZAKASZ.

EMELÉSEK VAGY HATÓSÁGOK. GYÖKEREK.

1 §. Emelések.

36. *Az emeléseknek közönséges alakja* a^m, bármelly számot jelentsen m.

Vegyük p. o.: m et egész számnak. Támadott m azáltal hogy az egység m szer adatott maga magához és $m = 1+1+1+1+1+1+1+1+$'s a' t. származnak pedig az emelések mint tudjuk az adott mennyiségek' viszonti sokszorozása által, 's a' t. azon emelésen lenni mondjuk a' mennyiséget hányszor vétetett mint factor vagy sokszorozó, a' mutatót pedig az írás kíméllésé végett írjuk kis jeggyel a' mennyiség felibe.

a^m tehát $= aaaaaaaaaaaa\ldots\ldots$'s a' t. hol a, m szer van mint factor téve, mi nem egyéb mint a t az m dik hatóságra emelni, szinte így

$$a^n = aaaaaaaaaaaa\ldots\ldots$$

n szer mint factor, tehát

$$(a)^m = a^m \quad \text{és} \quad (a)^n = a^n,$$

az első kifejesés az emelést jelöli, a' másikban már ez megtörtént.

Tudjuk továbbá hogy minden mennyiség az első emelésen lenni tekintetik, mert valóban egyszer áll mindegyik maga magában véve és $a=a^1$ hol a' mutatót odaírni sem szükséges, lesz elébbi kifejezésünk

$$a^m=a^{1+1+1+1+1+1+1+1+}\ \text{'s a' t.}$$

m szer véve egyet és

$$a^n=a^{1+1+1+1+1+1+1+1+1+}\ \text{'s a' t.}$$

egyet *n* szer véve, ebből következik hogy

$$a^1.a^1.a^1.a^1.a^1.a^1.a^1.a^1\ldots\ldots\ldots$$
$$=a^{1+1+1+1+1+1+1}\ldots\ldots=a^m$$

vagyis *hogy ha a' factor egyszer íratik, a' factoroknak öszves mutatójok lesz az új mutató*

$$\text{és}\quad a^m.a^n=a^{m+n}$$

$$\text{és}\quad a^m.a^n.a^p.a^q.a^r=a^{m+n+p+q+r}$$

bármelly számok legyenek m, n, p, q és r, mert

$$a^m=a^{1+1+1+1+1+1+1+1+1}\ \text{'s a' t.}$$

$$\text{és}\ a^p=a^{1+1+1+1+1+1+1+1+1}\ \text{'s a' t.}$$

és ha a' két kifejezést egymással sokszorozzuk lesz

$$a^m.a^p=a^{m+p}.$$

37. Az emeléseknek emelései sem különböznek az eddigi mivelettől ha a' mutatók egész számok, és $(a^m)^n$ azt mutatja hogy a^m az *n* dik emelésre vitessék, vagyis hogy *n* szer álljon mint factor, ez pedig tudjuk

$$(a^m)^n=a^m.a^m.a^m.a^m.a^m.a^m.a^m.a^m\ldots\ldots\ \text{'s a' t.}$$

hol a^m *n* szer áll mint sokszorozó, 's ekkor

$$a^{mn}=a^{m+m+m+m+m+m+m+m+m+m}\ldots\ldots$$

m et *n* szer véve $\quad(a^m)^n=a^{m.n}=a^{mn}$

ebből következik, hogy.

Ha valamelly emelésen lévő mennyiség ismét más emelésre vitetik, régi mutatója az ujjal sokszoroztatik 's a' származat lesz a' kivánt hatósági mutató.

$$(a^{mn})^{pq}=a^{mnpq}\text{, és } \left(((a^m)^n)^p\right)^q=a^{mnpq}$$

hol a' mivelet' sora van kijelölve. Mindegy tehát akar írjuk $\left(((a^m)^n)^p\right)^q$ akar $((a^{mn})^p)^q$ vagy $(a^{mnp})^q=a^{nmpq}$.

Ha különböző factorok állanak egymás mellett, a' mivelet nem változik, és mindegyiknek mutatója külön sokszoroztatik az új emelési mutatóval, p. o.:

$$(a^3.b^m.c^n x^{p+q})^r=a^{3r}b^{mr}c^{nr}x^{(p+q)r}.$$

38. ***Ha különböző emelései valamelly mennyiségnek egymás által elosztatnak, a' származat mutatója lesz, a' két adott mutatóközti különbség***, és

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

mi annyit tesz, az osztandó factoraiból az osztó factorait le vonni, mint p. o.:

$$\frac{aaaaaaaa}{aaaaaa}=\frac{a^8}{a^6}=a^{8-6}=a^2.$$

A' közönséges kifejezésben 3 eset jő tekintetben

1) ha $m>n$, p. o.: legyen $m=n+x$

lesz $\frac{a^m}{a^n}$ ből $\frac{a^{n+x}}{a^n}=a^{n+x-n}=a^x$;

2) ha $m=n$ lesz $\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0=1$;

3) ha $m<n$, p. o.: $n-x=m$ vagy $m+x=n$

lesz $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+x}}=a^{m-m-x}=a^{-x}$ de

$$\frac{a^m}{a^{m+x}}=\frac{1.a^m}{a^m.a^x}=\frac{1}{a^x}\text{ tehát } a^{-x}=\frac{1}{a^x}.$$

A' második eset azt mutatja ***hogy minden mennyiség a' null emelésen egyenlő az egységgel***, mi közönségesen az elosztás tananál azt teszi, hogy valamelly mennyiség maga által elosztatván az egységet adja részesül.

A' harmadik eset pedig, hogy *minden mennyiség valamelly tagadó mutatóval, egyenlő az egységgel, elosztván ezen egységet magával a' mennyiséggel, de tagadó mutatóját állitóba változtatván.*

Ezen utóbbi tekintetre azáltal is érünk, ha a^mt közel $\pm m$ mutatójú $a$val osztjuk egymásután 's így lesz

$$\frac{a^m}{a^{m-2}}=a^2, \text{ mi egyenlő } \frac{a^3}{a}\text{-val}$$

$$\frac{a^m}{a^{m-1}}=a^1=\frac{a^2}{a^1}, \text{''} \frac{a^m}{a^m}=\frac{a^1}{a^1}=1=a^{1-1}=a^0$$

$$\frac{a^m}{a^{m+1}}=\frac{a^1}{a^2}=\frac{1}{a} \text{ és ez } =a^{1-2}=a^{-1}$$

$$\frac{a^m}{a^{m+n}}=a^{m-m-n}=a^{0-n}=a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

39. ***Ha tagadó mutatókkal álló mennyiségeket kell emelésre vinni***, a' mivelet nem változik, de a' jegyek viszonira figyelmezni kell.

$$(a^{-m})^n=a^{-m}.a^{-m}.a^{-m}.a^{-m}.a^{-m},$$

$n$szer mint factor $=a^{-mn}$

valamint $a^{-m}.a^{-m}=a^{-2m}$.

$(a^{-m})^{-n}=a^{-m}.a^{-m}.a^{-m}.a^{-m}.a^{-m}\ldots\ldots-n$ szer véve

$=a^{+mn}$.

40. Mert tudjuk hogy *törtszámok emelésre vitetnek ha számlálójok és nevezőjök vitetik egyszersmind a' kivánt emelésre*, és hogy

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\cdot$$

$m$szer sokszorozva 's valamint

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2} \text{ szintugy}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}=\frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}$$

bármelly legyen az új emelési mutató, és szinte így

$$\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p=\frac{a^{mp}}{b^{np}},$$

ezt előre bocsájtván lesz

$$(a^{-m})^{+n}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn} \text{ és}$$

$$(a^{-m})^{-n}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n}=\frac{1}{a^{-mn}}=a^{+mn}$$

ismervén a' törtek' megforditott értékét, és hogy az egység' bármelly emelése is$=1$.

Közönségesen

$$(a^3c^{-m}x^ny^{-p})^q=a^{3q}c^{-mq}x^{nq}y^{-pq}$$

$$(a^m b^{-n}x^{-q}y^p)^{-r}=a^{-mr}b^{nr}x^{qr}y^{-pr}$$

's mindkét esetet öszvevéve

$$(A^{\pm m})^{\pm n}=A^{mn},, (A^{\pm m})^{\mp n}=A^{-mn}$$

41. ***A' tört mutatók,*** szoros egybeköttetésben vagynak a' győkér mennyiségekkel vagy gyökérjegyekkel, és közönségesen

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}. \text{ valamint } a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}.$$

Ha közelebről tekintjük $a^{\frac{1}{n}}$ értelmét, azt látjuk hogy ha a t akarjuk származtatni (melly $a^{\frac{1}{n}}$ itt a nak n dik gyökere) szükségesképpen annyiszor kell azt mint factort tenni, hány egységet foglal magában n és lesz

$$a=a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n}}.a^{\frac{1}{n}}\ldots$$
$$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+}\text{ 's a' t.}\ldots$$
$$=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a.$$

Ha ezen factorokból csak m et veszünk (annyit mennyi egységet foglal magában m, 's hol mi m és n et egész számoknak vesszük) támad $a^{\frac{m}{n}}$ feljebbi közönséges alakunk $=\sqrt[n]{a^m}$.

A' tört mutató' számlálója (m) *azt jelöli tehát, hányszor vétetett* (n)*dik gyökere* (a)*nak mint factor, számlálója pedig a' veendő gyökeret magát.* Más szóval: *a' tört mutató' számlálója a' gyökérnek emelését, nevezője pedig veendő gyökerét jelöli.*

42. *A' tört mutatókkali sokszorozás* e' szerint nem mutat nehézséget és

$$a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{n}}=a^{\frac{m+p}{n}},$$

az az a' mutatók szinte ugy adatnak öszve mint az egész számoknál, csak hogy a' nevezők vagy egyneműekre viendők vagy csak egyszerüen odaírandók.

$$a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=\sqrt[nq]{a^{nq+np}}$$

szinte különösen

$$a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$$
$$a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}=a^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{a^5}\text{ 's a' t.}$$

43. ***Ha tört mutatókkal ellátott mennyiségek osztatnak egymás által, a' mutatók egymásból levonatnak.***

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{n}}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{n}}=a^{\frac{m-p}{n}}=\sqrt[n]{a^{m-p}}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}}=a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=a^{\frac{n-m}{nm}},\text{ és ha } m=n,\ \frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}}=a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{m}}$$
$$=a^0=1.$$

44. ***Ha tört mutatókkal ellátott mennyiségek, emelésekre vitetnek, a' mivelet nem változik, és az adott mutató az ujjal sokszoroztatik, bármelly számok legyenek ezek.***

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p=a^{\frac{mp}{n}}=\sqrt[n]{a^{mp}},\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{mn}{n}}=a^m$$
$$\left(a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{n}{p}}\right)^q=a^{\frac{mq}{n}}b^{\frac{nq}{p}},,\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^m=a^{\frac{m^2}{n}}=\sqrt[n]{a^{m^2}}.$$

Ha az új emelési mutató is tört, tudjuk miként sokszoroztatnak törtek törtekkel.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mp}{nq}}.\text{ és }\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{mn}{nm}}=a^1=a$$

$$\text{minthogy } a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\text{ tehát}$$

$$\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^p=a^{-\frac{mp}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{mp}{n}}}$$

$$\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{-p}=\left(\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\right)^{-p}=\frac{1}{a^{-\frac{mp}{n}}}=a^{\frac{mp}{n}}$$

$$\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{-\frac{mp}{nq}}\text{ és }\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}}=a^{\frac{mp}{nq}}$$

különösen.

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}$$

$$\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}.$$

45. ***Ha az emelésre viendő mennyiség' jegye tagadó***, az emelésnek jegye a' mutató minéműségétől függ.

Vegyük a' kérdést közönségesen.

1. *Eset.* Legyen a' mutató állító és égeszszám $=m$; tudjuk bármelly értéke legyen $m$nek $(+a)^m$ mindenkor $=+a^m$ az az legyen m páros vagy páratlan,

$$(+a)^{2n}=+a^{2n} \text{ és } (+a)^{2n+1}=+a^{2n+1}$$

de ha a előtt tagadó jegy áll akkor

$$(-a)^{2n}=+a^{2n} \text{ és } (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$$

szóval: *a' tagadó mennyiség' páros emelése állító, páratlan emelése pedig tagadó következést ád.*

Tudjuk az Arithmetikából hogy

$$(-a).(-a)=+a^2$$
$$(-a).(-a)\,(-a)=-a^3$$
$$(-a).(-a)\,(-a)\,(-a)=+a^4 \text{ 's a' t.}$$

vagyis

$$(-a)^2=+a^2,\ (-a)^4=+a^4\ \text{,,}\ (-a)^6=+a^6 \text{ 's a' t.}$$
$$(-a)^3=-a^3,\ (-a)^5=-a^5\ \text{,,}\ (-a)^7=-a^7 \text{ 's a' t.}$$

tehát $(-a)^{2n}=+a^{2n}$ és $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$.

2*dik Eset.* Legyen m egész és tagadó szám; tudjuk $(a)^{-m}=a^{-m}$ bármelly legyen m értéke és

$$(+a)^{-2n}=+a^{-2n},\ (+a)^{-(2n+1)}=+a^{-(2n+1)}$$

de $(-a)^{-2n}=+a^{-2n}$ és $(-a)^{-(2n+1)}=-a^{-(2n+1)}$

és a' feljebb kimondott tulajdon itt is áll.

3 *dik Eset.* Legyen m törtszám, p. o.: $\frac{m}{n}$ és tekintsük előlegesen a' mutatót $\frac{1}{n}$, mert mindenkor adhatunk $(a)^{\frac{m}{n}}$ nek illy alakot $(a^m)^{\frac{1}{n}}$.

Tekintsük továbbá azon eseteket ha n páros vagy párotlan. Ha $\frac{1}{n}$ nek nevezője n párotlan vagyis $(2n+1)$, ugy $(+a)^{\frac{1}{2n+1}}$ szükségesképen állító és $=+a^{\frac{1}{2n+1}}$ mert annyiszor kell vennünk $+\frac{1}{a^{2n+1}}$ mint factort, hány egység van $(2n+1)$ben, és szinte így

$$(+a)^{\frac{1}{2n}}=+a^{\frac{1}{2n}}$$

$$(-a)^{\frac{1}{2n}}=+a^{\frac{1}{2n}}\text{ ,, }(-a)^{+\frac{1}{2n+1}}=-a^{\frac{1}{2n+1}}$$

$$(+a)^{-\frac{1}{2n}}=a^{-\frac{1}{2n}},\ (+a)^{-\frac{1}{2n+1}}=a^{-\frac{1}{2n+1}}$$

$$(-a)^{-\frac{1}{2n}}=a^{-\frac{1}{2n}},\ (-a)^{-\frac{1}{2n+1}}=-a^{-\frac{1}{2n+1}}.$$

---

*) *Jegyzék.* $(-a)^{\frac{1}{2n}}$ azt is mutatja, hogy olly mennyiséget keressünk melly $2n$szer téve mint factor $-a$t, adjon következésül.

Ezen tekintete az esetnek azon mennyiségekre vezet, mellyeket képzeletieknek nevezünk, mert $(-a)^{\frac{1}{2n}}$ lenne, $=\sqrt[2n]{-a}$; de minthogy nem gondolható olly mennyiség, mellynek páros factorai tagadó következést adnának, valamint nem lehet valamelly tagadó mennyiségnek páros gyökere, tehát $\sqrt[2n]{-a}$ közönséges kifejezése a' képzeleti mennyiségeknek.

2 §. Gyökerek.

46. *A' gyökérmennyiségek közönséges kifejezése* $\sqrt[m]{A}$, hol m és A bármelly számokat képviselnek. Különös kifejezések

$$\sqrt{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt{a^4},\ \sqrt[3]{a^m},\ \sqrt[p]{a^n},\ \text{'s a' t.}$$

Láttuk hogy a' hatóságok és gyökerek szoros egybefüggésben állnak egymásközt, 's mint az emeléseknél a' hatóságot visgáltuk, ugy keressük itt valamelly mennyiségnek gyökerét. $\sqrt[m]{A}$ vagy $A^{\frac{1}{m}}$ nem egyébb mint azon mennyiség melly m szer sokszoroztátván maga magával At származtat, az az ha $\sqrt[m]{A}$ $m$szer tesszük mint factort, lesz

$$\sqrt[m]{A}.\sqrt[m]{A}.\sqrt[m]{A}.\sqrt[m]{A}.\sqrt[m]{A}\ldots\ldots$$
$$=\sqrt[m]{A^m}=A^{\frac{m}{m}}=A.$$

ebből tüstént következik, hogy.

47. *Ha gyökérmennyiségek sokszoroztatnak egymással, csak a' gyökér alatt lévő mennyiségek sokszoroztatnak, a' gyökèrjegy pedig a' származat felett változtatlan megmarad*: valamint tehát

$$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a \text{ és } \sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^2}$$

szinte közönségesen

Példáinkban mindenütt eddig csak az egytagu kifejezéseket a' monomokat visgáltuk, de később látni fogjuk, hogy az itt kimondott elvek és tekintetek minden többtaguakra is alkalmazhatók.

$$\sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{AB} \text{ és } \sqrt[m]{A^n} \times \sqrt[m]{A^p}$$
$$= \sqrt[m]{A^{n+p}}.$$

Ha egész számokkal sokszoroztatik a' gyökér kifejezés, akkor azon factor természetesen a' gyökérjegyen kívül íratik oda, p. o.:

$$\sqrt{a} \times 2 = 2\sqrt{a},\ \sqrt[m]{a} \times a^2 = a^2 \sqrt[m]{a} \text{ és } (a+b)\sqrt[n]{a}$$
$$= a\sqrt[n]{a} + b\sqrt[n]{a} \text{ 's a' t.}$$

48. Ha a' gyökerek nem egynevüek, az az mutatójok különböző, akkor a' mivelet csak kijelöltetik és

$$\sqrt[m]{A} \times \sqrt[n]{A} \text{ csak } = \sqrt[m]{A} \times \sqrt[n]{A}.$$

49. Az elébbiből következik, hogy *ha valamelly gyökérmennyiség valamelly hatoságra emeltetik, csak a' gyökérjegy álatt álló mennyiség emeltetik, a' gyökérjegy pedig változatlan marad.*

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n} \text{ és ha } m = n \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = \sqrt[m]{a^m}$$
$$= a^{\frac{m}{m}} = a \text{ és } \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a.$$

szinte $\left(\sqrt[m]{a^n b^p c^q}\right)^n = \sqrt[m]{a^{nn} b^{pn} c^{qn}}.$

50. Valamint hogy a' törtszámnak értéke nem változik, ha számlálója és nevezője ugyanazon sámmal sokszoroztatik vagy elosztatik és

$$\frac{m}{n} = \frac{mp}{np} = \frac{m:q}{n:q}$$

szinte ugy nem változik valamelly mennyiség, *ha egyszersmind valamelly hatóságra emeltetik és ugyan azon gyökere vétetik, vagy más szóval, ha* *a' gyökérjegy' és alatta lévő mennyiségnek mutatója ugyan azon számmal sokszoroztatik vagy elosztatik.*

Valamint tehát

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} \text{ szintugy } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

$$\text{és mint } a^{\frac{m:q}{n:q}} = a^{\frac{m}{n}} \text{ szintugy } \sqrt[n:q]{a^{\frac{m}{q}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ezen tulajdona a' gyökérmennyiségeknek könnyű módot nyujt a' gyökérjegyeket egynevüekre vinni, valamint a' törteket egynevezőre visszük.

51. Ha tehát *különböző gyökérjegyek adandók öszve, levonandók, sokszorozandók vagy elosztandók, szükséges hogy egynevüekre vitessenek*, ez pedig az által történik, ha a' gyökérjegy és mutató egyszersmind ugyanazon számmal sokszoroztatik vagy elosztatik.

Egy nevezőre viendők $\sqrt[m]{a^p}$ és $\sqrt[n]{a^q}$.

Az elsőnél m a' másiknál n gyökérjegy áll, sokszorozzuk az elsőt n el a' másikat m el, lesz a' két kifejezés

$$\sqrt[mn]{a^{pn}} \text{ és } \sqrt[nm]{a^{qm}}.$$

Ezen két kifejezéssel most bármelly miveletet végbe lehet hajtani.

Közönségesen, ha több gyökérmennyiség viendő egynevűre a' különböző mutatók származata lesz az új nevű gyökér, p. o.: adva vannak

$$\sqrt[m]{a}, \quad \sqrt[n]{a}, \quad \sqrt[p]{a}, \text{ és } \sqrt[q]{a}$$

egynevüre vitetnek ha $mnpq$ új neve lesz a' gyökérnek és a' 4 mennyiség

$$\sqrt[mnpq]{a^{npq}},\ \sqrt[mnpq]{a^{mpq}},\ \sqrt[mnpq]{a^{mnq}},\ \sqrt[mnpq]{a^{mnp}}.$$

Ha m, n, p és q számok, akkor tudjuk rövidebb úton is következésre jutunk, ha némellyeknek közöttük közös factorai vannak, így p. o.: $\sqrt{a}$ és $\sqrt[4]{a}$ közt könnyen megtaláljuk az egynevüséget 's lesz $\sqrt[4]{a^2}$ és $\sqrt[4]{a}$, szinte $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{a}$ és $\sqrt[8]{a}$ között tudván hogy 2, 3, 4, 6 és 8nak legkisebb sokasa 24, lesz az 5 gyökérmennyiség neve 24, az $a$nak emelései pedig sorban 12, 8, 6, 4 és 3, 's ha ezen egynévre vitt 5 gyökérmennyiséget sokszorozni kellene, lenne a' származat $=\sqrt[24]{a^{33}}$.

52. Ha a' mutatók ugyanazon szám által oszthatók, a' kifejezést egyszerűbb alakba lehet írni

$$\sqrt[m]{a^{mn}}=a^{\frac{mn}{m}}=a^n\quad \sqrt[np]{a^{mn}}=\sqrt[p]{a^m}$$

$$\sqrt[6]{a^9}=\sqrt[2]{a^3},\ \sqrt[4]{a^6}=\sqrt{a^3},\ \sqrt[12]{a^8}=\sqrt[3]{a^2}\text{ 's a't.}$$

53. Hogy minden kifejezést a' mondottak szerint gyökér alá lehet vinni látjuk, és hogy közönségesen

$$A=\sqrt[m]{A^m},$$

ha a' gyökérnek és a' mennyiségnek ugyanazon mutatót adjuk, ki is vehetjük eszerint a' gyökér alul mindazon mennyiségeket mellyeknek mutatójában a' gyökér mutató találkozik: ha

$$\sqrt[m]{A^n}\text{ben } n>m,\ \text{p. o.: } n=m+x$$

lesz $\sqrt[m]{A^n} = \sqrt[m]{A^m . A^x} = A\sqrt[m]{A^x}$
de ha $n<m$ és p. o.: $m=n+x$ vagy $n=m-x$, még akkor is kivehetjük a' mennyiség egy részét, ha valami röviditést nyerünk a' számitás folytában általa, lesz pedig akkor

$$\sqrt[m]{A^n} = \sqrt[m]{A^m . A^{-x}} = \sqrt[m]{A^{m-x}} = A^{\frac{m-x}{m}}$$

$$= A . A^{-\frac{x}{m}} = A.\sqrt[m]{A^{-x}} = A\sqrt[m]{\frac{1}{A^x}},$$

és szinte $\sqrt[m]{a^{m-1}} = a\sqrt[m]{\frac{1}{a}}$.

54. *Ha különös jegyekkel mivelünk* (mi a' közönséges elemi haszonvétben csaknem mindenkor történik), figyelemmel kell lennünk hogy a' gyökér alatt lévő számot olly factorokba vegyük szét, mellyeknek mutatójok egyenlő legyen a' gyökérmutatóval; ekkor mindazon factorok gyökereit kivehetjük a' jegy alól.

Példák.

$$\sqrt{24} = \sqrt{2.12} = \sqrt{2.2.6} = \sqrt{2^2.6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{54} = \sqrt{9.6} = \sqrt{3^2.6} = 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3} \text{ „ } \sqrt{75} = \sqrt{5^2 3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{1458.} = \sqrt[3]{3^3.54} = 3\sqrt[3]{54} = 9\sqrt[3]{2} \text{ „ } \sqrt[3]{432} = \sqrt[3]{3^3.16}$$

$$= 3\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{3^3 2^3.2} = 6\sqrt[3]{2}$$

és így

$$\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{6}$$

$$= (2+3-1)\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

és $\sqrt[3]{1458}-\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{432}=9\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}$

$$=(9-9)\sqrt[3]{2}=0\text{'s a' t.}$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{2^6.3^4.5^3}=\sqrt[12]{648000}.$$

$$5\sqrt{3}\times7\sqrt{\frac{8}{3}}\times\sqrt{2}=35\sqrt{3.2.\frac{8}{3}}=35\sqrt{4^2}$$

$$=4.35=140.$$

55. *A' gyökérmennyiségek' osztása* következő közönséges alakban foglaltatik.

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}}=\frac{\sqrt[mn]{a^n}}{\sqrt[mn]{a^m}}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}} \text{ (és ha } a=b)$$

$$=\sqrt[m]{a^{n-m}}\text{ ,, } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ tudjuk}=\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{n}}} \text{ (és ha } a=b)$$

$$\frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}}=a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=a^{\frac{n-m}{mn}}=\sqrt[mn]{a^{n-m}}$$

mint előbb; különös példák

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}}=\sqrt[5]{a^{3-4}b^2c^{-1}}=\sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}$$

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^5}}=\frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{5}{n}}}=\frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}-\frac{r}{n}}}{c^{\frac{5}{n}}}=\sqrt[mn]{\frac{a^{pn}b^{qn}}{b^{rm}c^{5m}}}$$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{18}{6}}=\sqrt{3}\text{ ,, }\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}={}^2/_3\sqrt{\frac{3}{2}}\text{ ,,}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{\frac{3^3}{3^2}}=\sqrt[6]{3} \;,, \; \frac{\sqrt{36-4x^2}}{\frac{\sqrt{3-x}}{2}}$$

$$=\sqrt{36-4x^2}\times\sqrt{\frac{2}{3-x}}=\sqrt{\frac{(36-4x^2)2}{3-x}}$$

$$=\sqrt{\frac{2^2.2(3^2-x^2)}{3-x}}=2\sqrt{2(3+x)},$$

$$\frac{a}{\sqrt{a}}=a^{1-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}\,.$$

Gyökérmennyiségek elosztatnak tehát (ha egyneműek) ha a' gyökérjegyek alatti mennyiségek osztatnak el, a' részesből pedig a' kijelött gyökér vétetik,

az az $\quad \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A}{B}}$

56. ***Ha gyökérmennyiségnek ismét gyökerét kell venni***, a' két gyökér mutatójának származata lesz az uj gyökérjegy.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$. és közönségesen

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}}=\sqrt[mnpq]{a}$. bárhány gyökér vétessék egymásután a' gyökérből

p. o.: $\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$ és $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$

$\sqrt[8]{256}=2$,, és $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}}=\sqrt[12]{2^{12}}=2.$

57. Gyakorta szükséges valamelly kifejezésben, mint nevező vagy számláló előjövő gyökérmennyiséget kiírtani, ezen mivelet, a' mérhetlen nevezőt mérhetővé teszi 's a' következöből látható.

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\sqrt[m]{\frac{a.b^{m-1}}{b.b^{m-1}}}$$

$$=\sqrt[m]{\frac{a\,b^{m-1}}{b^m}}=\frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{b}.$$

Ha a' kifejezés $\frac{A}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ szabaditandó mérhetlen nevezőjétől, szűkséges hogy mindkét része sokszoroztassék $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ által, 's mivel

$$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})=a-b$$

lesz kifejezésünk $\frac{A(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}$.

1) $$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{2}}{3}=\frac{\sqrt[6]{3^3}.\sqrt[6]{2^2}}{3}=\frac{\sqrt[6]{3^3.2}}{3}$$

2) $$\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{4\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a^2}}{a}=\frac{4\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{a^4}}{a}$$

$$=\frac{4\sqrt[6]{a^7}}{a}=\frac{4a\sqrt[6]{a}}{a}=4\sqrt[6]{a}$$

3) $$\frac{5}{3+\sqrt{7}}=\frac{5(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}=\frac{5(3-\sqrt{7})}{9-7}$$

$$=\frac{5(3-\sqrt{7})}{2}.$$

Szükséges tehát *hogy olly mennyiséggel sokszoroztassék a' gyökér melly mutatóját vagy egyenlővé teszi a' gyökérjegyel, vagy annak többszörösévé, és hogy végre az egyenlő emelés által az egyenlő gyökér-mutató ellenyésszék.* A' mivelet változatlan, ha a' nevező hellyett a' számlálót akarjuk gyökérkifejezésétől megszabadítani.

58. Tudjuk hogy $-a$nak második emelése $=a^2$, negyedik $=a^4$, hatodik $=a^6$'s a' t. Tehát a^2, a^4, a^6 's a' t. 2, 4 és 6 dik gyökere szintugy $-a$ mint $+a$. Épen így van minden mennyiségnek két második, két negyedik, két hatodik 's a' t. gyökere, melly két gyökér csak jegye által különbözik egymástól. Ha illy gyökereket kell irnunk, és nincs különösen kíjelölve mellyiket vegyük, mindkettöt felírjuk a' kettős jegyet használván.

Igy $\sqrt{9}=\pm3$, $\sqrt{a^2}=\pm a$'s a' t.;

és szinte lesz $a$nak negyedik gyökere p. o.: $\pm\sqrt[4]{a}$.

Egyenlő jegyek a' sokszorozás által állító kifejezést adnak, nincs tehát olly tagadó vagy állító mennyiség melly magamagával sokszoroztatván tagadó származatot adna. Ebből következik hogy tagadó mennyiségnek sem állító sem tagadó második gyökere nemlehet, és eszerint $\sqrt{-a}$ p. o.: *képzeleti* vagy *lehetetlen* mennyiség. Ha illy kifejezés támad a' számírásnál, bizonyos hogy a' kérdésben valami ellenkező vagy képtelen fekszik. Szinte így, mivel a' tagadó mennyiségek páros hatóságai állítók, minden tagadó mennyiség' páros gyökere lehetetlen, és $\sqrt[2n]{-a}$ mindenkor képzeleti.

Mivel $\sqrt{-a}=\sqrt{a\times(-1)}$ tehát $=\sqrt{a}\sqrt{-1}$ is, és ha $\sqrt{a}$ p. o.: $=m$ lesz $\sqrt{-a}=m\sqrt{-1}$, 's így minden lehetetlen gyökér ezen alakban írathatik hol m lehető.

$\sqrt{-1}$ olly mennyiséget jelöl melly maga magával sokszoroztatván -1 ád, 's így

$$(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\,.\,(\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^3\,.\,(\sqrt{-1})=$$
$$=-\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=+1$$

's így továb; megjegyzendő itt, hogy $\sqrt{-1}$ és $\sqrt[4]{-1}$ tetemesen különböznek egymástól, mert ha mindegyikét a' 4 dik hatalomra visszük, lesz az egyik $+1$ a' másik -1.

Hasonlóképen

$$(m\sqrt{-1})^2=-m^2$$
$$(m\sqrt{-1})^3=-m^3\sqrt{-1}$$
$$(m\sqrt{-1})^4=+m^4$$
$$(m\sqrt{-1})^5=+m^5\sqrt{-1}$$
$$(m\sqrt{-1})^6=-m^6$$
$$(m\sqrt{-1})^7=-m^7\sqrt{-1} \quad \text{'s a' t.}$$

's így a' négyszeg gyökér minden emeléseit $n\sqrt{-1}$ alakban lehet adni, mellyben n mindenkor lehető; és szintugy lehet megmutatni, hogy $\sqrt[4]{-a}$, vagy valamelly emelését is $n\sqrt[4]{-1}$ által lehet írni, hol n lehető.

Ha a' kifejezést

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a \text{ vagy } \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}a,$$

a' harmadik emelésre visszük, a' következés mindkét esetben a^3. Tehát mindezen két kifejezés, szinte mint a is harmadik gyökerei a^3nak.

Hogy a^2nak két gyökere van $+$ és $-$ a láttuk. Későbben fogjuk látni hogy minden mennyiségnek 4 negyedik, 5 ötödik 's a' t. gyökere van. De minden páratlan gyökér közt csak egy valódi van és a' többi képzeleti. Igy képzeleti minden páros gyökér kettőn kivül, és ezen kettő csak jegyiben különbözik egymástól.

A' képzeleti kifejezésekkel szinte ugy mivelünk mint bármelly egyebekkel; ezek gyakorta csak látszólag lehetetlenek és a' következésben bizonyos alakot nyernek.

Tudjuk hogy $(\sqrt{-a})^2 = -a$ és közönségesen

$$(\sqrt[2n]{-a})^{2n} = -a.$$

A' két kifejezés $a+\sqrt{-b^2}$ és $a-\sqrt{-b^2}$ képzeleti, de ha azt egymással sokszorozzuk, lesz

$$(a+\sqrt{-b^2})\,(a-\sqrt{-b^2}) = a^2-(\sqrt{-b^2})^2,$$

de minthogy $(\sqrt{-b^2})^2 = -b^2$

$$(a+\sqrt{-b^2})\,(a-\sqrt{-b^2}) = a^2-(-b^2) = a^2+b^2$$

és a' következés valódi.

Igy lehet minden valódi kifejezést is képzeleti alakra vinni p. o.:

$$a = -(\sqrt{-a})^2 = \frac{a\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{a\sqrt{-a}+a}{\sqrt{-1}+1} \text{ s' a' t.}$$

Néhány számirási példa.

1) $\sqrt{+a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab} . \sqrt{-1}$

2) $(1-\sqrt{-1})^2 = -2\sqrt{-1}$

3) $(2\sqrt{3}-\sqrt{-5})\ (4\sqrt{3}-2\sqrt{-5}) =$
$= 14-8\sqrt{-15}$

4) $(\sqrt{-1})^{4n} = +1$
$(\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$
$(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$

A' negyedik példából láthatni miként lehessen minden különös esetre a' közönséges kifejezéseket alkalmaztatni; legyen p. o.: $n=1$ lesz

$(\sqrt{-1})^{4n+1} = (\sqrt{-1})^5 = +\sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^{4n+2} = (\sqrt{-1})^6 = -1$
$(\sqrt{-1})^{4n+3} = (\sqrt{-1})^7 = -\sqrt{-1}$ s' a' t.

5) $\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1.$

3 §. Mutatói számirás.

59. Az előadottakból tudjuk hogy

1. Ha a' *mutató állitó és egész szám*, a' mennyiségnek, melly felett áll, ugyan azon hatóságát jelöli hány egyest foglal magában. $A^m = (A)^m$.

2. Ha a' *mutató egész szám és tagadó*, a' mennyiség' mellyet képvisel, osztója az egységnek.

$$A^{-m} = \frac{1}{A^m}.$$

3. Ha a' *mutató törtszám*, mindenkor azon gyökerét jelenti a' mennyiségnek hány egyest foglal magában a' tört mutatónak nevezője. Ha állító, akkor egyszerű gyökér, ha tagadó, osztója az egységnek

$$A^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{A^m} \text{ ,, } A^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{A^m}}.$$

Ha ezen észrevételeket a' számokra akarjuk alkalmazni, következő szabályokat találjuk.

1. *Ha valamelly hatóságok vagy gyökerek' származatát keressük* (legyenek a' kifejezések egyenesek vagy visszáltak), *és a' kifejezések egynemüek, az egyes factorok mutatóji öszveadatnak, egyszer iratván öszvesek az egyik factor' felibe.*

Példa. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times 2^3\times\frac{1}{2^2}\times\sqrt{2^3}$

ez tudjuk

$$=2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{3}}.2^3.2^{-2}.2^{\frac{3}{2}}$$

és a' mutatók' öszvese

$$={}^1/_2+{}^1/_3+3-2+{}^3/_2=\frac{14}{6}+1={}^{20}/_6,$$

és a' kifejezés vagy származat

$$2^{20/6}=\sqrt[6]{2^{20}}=\sqrt[3]{2^{10}}=1024^{1/3}.$$

2. *Ha hatóságok vagy gyökerek, szinte hatóságokkal és gyökerekkel osztatnak, az osztó factorok' mutatóji az osztandó factorok' mutatojiból levonatnak.*

$$\sqrt[3]{3} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}} = 3^{1/3} : 3^{1/2} = 3^{1/3 - 1/2}$$

$$= 3^{-1/6} = \frac{1}{3^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}.$$

3or. *Ha valamelly hatóságnak hatóságát vagy gyökerét keressük, a' mennyiség mutatója' sokszoroztatik a' kivánt hatóság' vagy gyökérnek mutatójával.*

$5^{2/3}$nek 3dik emelése $=(5^{2/3})^3 = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2$

$3^{1/2}$nak 3 dik gyökere $= (3^{1/2})^{1/3} = 3^{1/2 \times 1/3} = 3^{1/6}$

$a^{-4/5}$nek második gyökere $= a^{-4/5 \times 1/2} = a^{-4/10}$

$$= a^{-2/5} = \frac{1}{a^{2/5}}.$$

Ha tehát *ugyanazon mennyiség jön elő különböző mutatókkal*, látjuk hogy a' mivelet egyszerű. Ha a' mennyiségek vagy factorok is különbözők, a' legtöbb esetben a' miveletet csak jelöljük de nem végezhetjük. Vannak azonban esetek, mellyekben tetemes könnyebségekre találunk a' visgálatnál.

60. Valamelly számot tekintvén ha p. o.. N egész szám, tudjuk hogy ezen szám N vagy tökélletes emelés vagy nem; az első esetben tökélletes gyökere is van, másikban mérhetetlen.

Nem következés azonban hogy ha N valamelly tökéletes emelés, többféle tökéletes gyökér is legyen, mert emelés is csak egyféle lehet egyszere.

Szükséges tehát, hogy Nnek factora vagy factorai ha illyenek vannak ugyanazon emelésen legyenek melly gyökere Nnek kerestetik.

Akar tökélletes gyökér N akarnem, felváltható, ha nem első szám mint mondánk, vagy egy vagy több illy factoraiba, 's lesz

$$N = a^m \text{ vagy } N = a^m . a_{\prime}^{m'}, \text{ vagy}$$
$$N = a^m . a_{\prime}^{m'} . a_{\prime\prime}^{m''} \text{ 's a' t.}$$

hol a, $a_{\prime}$, $a_{\prime\prime}$'s a' t. bármelly factorait Nnek m, m', m'', pedig valamelly emelését $a$nak mutatják.

Ha p. o.:

$$N = a^m . a_{\prime}^{m'} . a_{\prime\prime}^{m''} . a_{\prime\prime\prime}^{m'''} \ldots\ldots \text{ 's a' t.}$$

és $n$dik gyökerét keressük, szükségesképen oszthatónak kell lenni

$$m,\ m',\ m'',\ m''' \text{ 's a' t. nak}$$

n által, különben Nnek n gyökere mérhetetlen.

Igy p. o.: $360^{1/2} = \sqrt{360}$ mérhetlen mert factorainak mutatóji $2^3.3^2.5$ nem oszthatók 2 által. Ezen mutatók mint látjuk 3, 2 és 1.

Az itt mondottat következőképen bizonyitjuk.

Tegyük fel hogy $N^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{N}$ egész szám és p. o.:

$$N^{\frac{1}{n}} = b^p . b_{\prime}^{p'} . b_{\prime\prime}^{p''} \ldots \text{ 's a' t.}$$

ha mindkét kifejezést $n$dik emelésre visszük lesz

$$N = b^{pn} . b_{\prime}^{p'n} . b^{p''n} \ldots \text{ 's a' t.}$$

hol minden factora Nnek, n mutatóval bír, de feltettük hogy Nnek némelly factor mutatója

$$m,\ m',\ m'', \text{ 's a' t.} -$$

nem osztható n által, 's igy Nnek kétféle factoraira akadtunk, mi nem lehet, tehát $N^{\frac{1}{n}}$ nem lehet egész szám.

Ha $m_{,}$, $m_{,}$, $m_{,,}$'s a't. nem többesei n nek, akkor

$$N^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \,.\, a_{,}^{\frac{m'}{n}} \,.\, a_{,,}^{\frac{m''}{n}} \ldots\ldots \text{ s' a' t.}$$

's ha itt

$$m=qn+r, \quad m_{,}=q_{,}n+r', \quad m_{,,}=q_{,,}n+r'' \text{ 's a' t.}$$

az az ha m csakugyan osztható de nem mérhető n által vagy is máradék támad, akkor

$$N^{\frac{1}{n}}=a^{q}.a_{,}^{q'}.a_{,,}^{q''}\ldots a^{\frac{r}{n}}.a_{,}^{\frac{r'}{n}}.a_{,,}^{\frac{r''}{n}}\ldots$$

és olly 2 részre váloszthatjuk $N^{\frac{1}{n}}$ et, hogy egyike csakugyan egészszám, másika pedig mérhetetlenné válik: igy

$$360^{1/2}=2^{1}.3^{1}.2^{1/2}.5^{1/2}=6.10^{1/2}=6\sqrt{10}$$

szinte így irhatjuk a' számoknak legegyszerübb kifejezését és megláthatjuk vallyon mérhetők e' vagy mérhetlenek, ha a' sokszorozásnál vagy elosztásnál is megtartjuk az itteni miveletet. P. o.: $216^{1/6}.108^{1/4}$ találjuk hogy

$$108=2^{2}.3^{3} \text{ és } 108^{1/4}=2^{2/4}.3^{3/4}=2^{1/2}.3^{3/4},$$

és $$216=2^{3}.3^{3} \text{ 's így } 216^{1/6}=2^{1/2}.3^{1/2},$$

a' keresett származat tehát

$$2.^{2/4}.3^{3/4}.2^{1/2}.3^{1/2}=2.3^{5/4}=2.3.3^{1/4}=6.3^{1/4}.$$

Hasonlóképen elosztván $48^{1/2}$et $72^{1/4}$ által, látjuk hogy

$$48=2^{4}.3 \text{ és } 48^{1/2}=2^{2}.3^{1/2},, \; 72=2^{3}.3^{2} \text{ és } 72^{1/4}=2^{3/4}.3^{1/2}$$

a' részes pedig

$$\frac{2^{2}\,.\,3^{1/2}}{2^{3/4}.3^{1/2}}=\frac{2^{2}}{2^{3/4}}=2^{2-3/4}=2^{5/4}=2.2^{1/4}.$$

61. **Mutatatóknak a' közönséges törtszámok helyett, tízedeseket váloszthatunk gyakorta nagy haszonnal,**

$$a^{5/10}=a^{1/2}=a^{\cdot 5} \text{ és } a^{1/8}=a^{\cdot 125} \text{ és } a^{5/7}=a^{\cdot 714295}.$$

Ha a' tizedes tört ismételő nem hibázunk nagyot ha vagy elhagyjuk a' hatodik vagy 7 dik jegyet vagy az utolsót (ha az elhagyott után a' következő nagyobb mint 5) az egységgel megtoldjuk; ha p. o.: $\cdot\dot{7}1428\dot{5}$ helyett, melly értéke $^5/_7$ nek ismételő, vagy $\cdot 714285$ vagy 714286 ot veszünk, egyik esetben sem követünk el nagy hibát, mert a' különbség a' valódi érték közt 's köztök nem nagyobb $\cdot 00000029$ nél közel, és lesz kifejezése, p. o.:

$$a^{\cdot 714286} = a^{5/7 + \cdot 00000029}$$

vagy $$= a^{5/7} . a^{\cdot 00000029}.$$

De tudjuk hogy $a^0 = 1$ és itt $a^{\cdot 00000029}$ igen csekélyel különböz az egységtől, tehetjük tehát különös hiba nélkül

$$a^{5/7} . a^{\cdot 00000029} = a^{5/7} . 1 = a^{5/7}.$$

V. SZAKASZ.

A' TÖBBTAGUAK' EMELÉSEI. GYÖKÉRVEVÉS.

1 §. A' Binomi tan.

62. A' kéttagú mennyiségek' emelései legegyszerűbbek az egytaguak után, 's ha az emelési mutató nem nagy, az emelést sokszorozásba fordithatjuk; de ha a' mutató nagyobb szám vagy közönséges jegy, akkor az emelés részszerint bajos a' gyakori sokszorozás által, részszerint pedig olly tulajdonokat mutat mellyek által könnyebb úton jutunk következésre.

Tudjuk hogy

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ és}$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$$

és hogy

$$(a+b)^2=(a+b)\,(a+b) \text{ és}$$
$$(a+b)^3=(a+b)\,(a+b)\,(a+b)$$

és közönségesen

$$(a+b)^m=(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(\ldots\ldots)$$

hol $(a+b)$ m szer van mint factor téve.

A' két első példából már látjuk hogy a' betük előtt számok állanak az az számivelejárok, és hogy ezen vélejárok bizonyos törvényt követnek.

Tekintsük közelebbről, a' binomok emeléseinek származását.

Vegyünk egymásután több több olly factorokat, mellyeknek egyik tagja egyenlő, másik pedig különböző, és végezzük a' sokszorozást.

1) $(x+a)\ (x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

2) $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)=x^3+(a+b+c)x^2$ $+(ab+ac+bc)x+abc.$

3) $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d)=x^4$ $+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+$ $+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$

4) $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+e)=x^5$ $+(a+b+c+d+e)x^4+(ab+ac+ad+ae+$ $+bc+bd+be+cd+ce+de)x^3+(abc+abd$ $abe+bcd+bce+acd+ace+ade+cde+$ $bde)x^2+(abcd+abde+acde+abce+bcde)x$ $abcde.$

Irjuk ezen példákat más rendben, 's lesz

$$1)\quad (x+a)(x+b)=x^2+\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}x+ab$$

$$2)\quad (x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\left.\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}ab\\ac\\bc\end{matrix}\right\}x+abc$$

$$3)\quad (x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d)=$$

$$=x^4+\left.\begin{matrix}a\\b\\c\\d\end{matrix}\right\}x^3+\left.\begin{matrix}ab\\ac\\ad\\bc\\bd\\cd\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}abc\\abd\\acd\\bcd\end{matrix}\right\}x+abcd.$$

4) $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)\,(x+e) =$

$$=x^5+\left.\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\end{matrix}\right\}x^4+\left.\begin{matrix}ab\\ac\\ad\\ae\\bc\\bd\\be\\cd\\ce\\de\end{matrix}\right\}x^3+\left.\begin{matrix}abc\\abd\\abe\\acd\\ace\\ade\\bcd\\bce\\bde\\cde\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}abcd\\abce\\abde\\acde\\bcde\end{matrix}\right\}x+abcde$$

Ha példáinkat nem sokasitjuk is többé, már ezekből is észrevehető azon törvény, mellyszerint alakitatnak az illy származatok.

4dik példánkat vevén tekintetünk alá p. o.: látjuk hogy a' kéttagú factorok száma 5, a' származat' tagja pedig 6.

Az x betü 5ször jön elő az 5 factorban, 's ezen felül 5ször különböző más betü, az az egyszer

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \text{és}\ e,$$

Ötször sokszoroztatik tehát x magamagával egymásután és adja x^5, x^4, x^3, x^2 és $x$et, a' többi betű felváltva áll mint factora $x$nek, egyesben kettősben hármosban és négyesben, míg végre az 5betü származata x nélkül áll az utolsó tagban.

Az első tagban csupán x^5 áll mert x a' factoroknak első tagja és ha p. o.: $(a+x)$... írtunk volna $(x+a)$.... helyett az első tag $abcde$ az utolsó pedig x^5 lenne, az az megforditva. Az első tagtól kezdve $x$nek mutatója mindég kisebb egyel míg végre az utolsó tagnál egészen elenyészik.

Hogy ha az itt adott példát bármelly és bárhány factorral fojtatjuk, a' származati törvény változatlan így marad.

Legyen p. o.:

$$(a+b+c+d+e)=A$$
$$(ab+ab+ad+ae+ \text{'s a' t.})=B$$
$$(abc+abd+abc+acd+ \text{'s a' t.})=C$$
$$(abcd+abcc+abde+ \text{'s a' t.})=D$$

és $\qquad abcde \qquad =E,$

lesz előbbi 4dik példánk kifejezése

$$=x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

ha ezen sort ismet egy más kéttagú hasonló factorral sokszorozzuk p. o.: $(x+g)$vel lesz a' 6 factor származata S.

$$\begin{aligned}S&=x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Fx\\&+gx^5+gAx^4+gBx^3+gCx^2+gDx^2+gE\\&=x^6+(A+g)x^5+(B+gA)x^4+(C+gB)x^3\\&+D+gC)x^2+(E+gD)x+gE,\end{aligned}$$

és ha $\qquad A, B, C, D, E$

értékét vissza adjuk lesz p. o.: a' 4dik tag

$$(C+gB)x^3=\left\{\begin{matrix}abc+abd+abe+acd+ace+ade\\+bcd+bde+bce+cde\\+abg+acg+adg+aeg+bcg\\+bdg+beg+edg+ceg+deg\end{matrix}\right\}x^3$$

és így mindegyik tag, sokszoroztatván a' kijelölt mennyiséggel.

Közönségesen, ha m factor van és

$$A, B, C, D, E, F.....X, Y, Z,$$

ezen factorok' második tagjait képviselik, az A az egyeseket, B a' kettőseket, C a' hármosakat 's a' t.... és Z végre az m factor második tagjai származatát

lesz $S = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} Cx^{m-3} + \ldots$
$+ Xx^{m-m+2} + Yx + Z.$

63. Ha előbbeni példákban

$$a = b = c = d = e = \text{ 's a' t.}$$

lesz a' két factor $= (x+a)^2 = (a+x)^2$
a' 3 „ $= (x+a)^3 = (a+x)^3$
a' 4 „ $= (x+a)^4 = (a+x)^4$
és m „ $= (x+a)^m = (a+x)^m$,
és harmadik példánk, p. o.:

$$= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4,$$

melly példát hasonlóul írván az emlitetthez lesz

$$(x+a)^4 = x^4 + \left.\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} aa \\ aa \\ aa \\ aa \\ aa \\ aa \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} aaa \\ aaa \\ aaa \\ aaa \end{matrix}\right\} x + aaaa.$$

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

's így tovább.

Ha figyelemmel tekintjük az itt mutatkozó törvényt, és at ugy vesszük mínt $x$nek velejároját, nyilván látjuk hogy ezen velejárok nem egyebek mint a nak öszveilletései, unio, binio, ternío, quaternioba 's a' t. a' szám velejárók pedig azt mutatják hányszor jönnek a nak ezen különböző combinalásai $x$el, $x$nek hatóságaival együttvéve.

64 A' Binomi tan tehát, a' combinálásban találja fő alapját.

Ha az arithmetikában előadott öszveilletésekre megyünk vissza, emlékezünk hogy m elem, m uniot

$\frac{m(m-1)}{1.2}$ biniot, $\frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.2.3}$ terniot

$\frac{m(m-1)\ (m-2)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$

quaterniot 's a' t. és közönségesen

$$\frac{m\,(m-1)\ (m-1)\ \ldots\ldots\ (m-(r-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ldots.r}$$

r iot ád, legyen bár m és r akarmelly szám.

Ha m nek különös értéket adunk, megtaláljuk mindazon öszveilletéseket mellyek 1 től m ig lehetők, és ezen különbféle öszveilletések velejáróji lesznek $(a+x)^m$ tagjainak; az az m mennyiségnek minden lehető öszvélletei, *binomi velejárók*, egytől m ig vevén az öszveilletési sort, p. o.: $m=6$.

6 mennyiség ád $\frac{6}{1}=6$ uniot, $\frac{6.5}{2}=15$ biniót

$\frac{6.5.4}{1.2.3}=20$ terniot $\frac{6.5\ 4.3}{1.2\ 3.4}=15$ quaterniot,

$\frac{6.5.4.3.2}{1.2.2.4.5}=6$ quinterniot és $\frac{6\ 5\ 4\ 3.2\ 1}{1\ 2.3\ 4.5\ 6}$

$=1$ sexterniot

's így lenne valamelly kéttagú mennyiség hatodik emélése' tagjainak velejárója

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Ha tehát $(x+a)^6$ lenne adva, tudván hogy az első tag x^6 's minden következő tagban mutatója egyel kisebb még $x^0=1$ következik, és hogy a' második tagban kezdő a (ez is $a^0=1$ lévén az elsőben) mutatója minden következő tagban egyel nagyobb míg

a^6 eléri kívánt legnagyobb hatóságát; könnyen oda írhatjuk hozzájok tartozó velejárójokkal: a' két említett sor

$$x^6,\ x^5,\ x^4,\ x^3,\ x^2,\ x^1 \text{ és } x^0$$
$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \text{ és } a^6.$$

a' kettőt öszve illetvén lesz

$$x^6+ax^5+a^2x^4+a^3x^3+a^4x^2+a^5x+a^6$$

a' velejárókat odaírván lesz

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3$$
$$+15a^4x^2+6a^5x+a^6.$$

A' közönséges kifejezés pedig

$$(x+a)^m = x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2.}a^2x^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.}a^3x^{m-3}+\ldots\ldots\text{'s a't.}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\ldots r}a^rx^{m-r}$$
$$+\ \text{'s a' t.}\ldots+\ldots ma^{m-1}x+a^m.$$

65. Ezen közönséges kifejezés' tulajdoni következő fő észrevétekre adnak alkalmat.

1) $(x+a)^m$nek kifejtése $m+1$ tagot ád.

2) x és $a$nak mutatóji öszvese mindenkor $=m$.

3) a' velejárók mint láttuk, m elem minden lehető őszevilletései egyestől $m$esig véve, és egyenlők mindazon két két tag előtt mellyek a' sor kezdeditől vagy végitől egyenlőtávoliak, ugy hogy $x^{m-r}a^r$ nek szinte azon velejárója van mint x^ra^{m-r}nek; mint példánkban x^3a^2nak és x^2a^3nak egyenlően 10 velejárója szintigy x^4a^2 és x^2a^4nek, 15.

4. Mindegyik következő velejáró könnyen megtaláltatik az előttevalóból azáltal, ha ezen elöttevaló sokszoroztatik a' következő $x$nek mutatójával, $a$nak pedig az egységgel nagyobbitott mutatójával, vagy mi mindegy a' keresendő tagot megelőző tagok' számával elosztatik.

Az itt mondott, felteszi hogy a' sor $x$nek legfőbb hatóságával kezdődik, mert ha $a$val kezdődik, akkor megforditva lesz a' kérdés: tudjuk pedig hogy $a$nak mutatója mindenkor egyel kisebb mint azon tagnak száma mellyben helyt foglal, ha növő hatóságai szerint van elrendelve; így a' hatodik tagban álló $a$nak mutatója 5.

Ezen törvény tetemes hasznot nyujt, mert segédével bármelly tagjait felírhatjuk a' sornak a' nélkül hogy a' közönséges kifejezésre szorulnánk. P. o.: mellyik $(x+a)^m$ben a' 8 dik tag?

A' 8dik tagban $x$nek mutatója $=m-7$

$a$nak pedig $=7$

legyen a' 7 dik tag velejárója G, lesz a' nyolczadiké $=\frac{G(m-6)}{7}$ vagyis ha a' 7 dik tag $Gx^{m-6}a^6$ lesz a'

$$8\,\text{dik} = \frac{(m-6)}{7}\, Gx^{m-7}a^7.$$

Láttuk hogy az $(r+1)$ dik vagy közönséges tag

$$=\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots.(m-r+2)\,(m-r+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\ldots\ldots\quad (r-1)..r\ldots}$$

$$x^{m-r}a^r$$

vagy

$$=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)..-(m-(r-2))(m-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\ 4....\ r-1.\ r}\times x^{m-r}a^{r}$$

kivántatik a' következő tag, az $(r+2)$ dik tag?

Sokszoroztatik mint emlitének az $(r+1)$ dik tag $(m-r)$ el és elosztatik $(r+1)$ al, 's lesz

$$=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3).(m-r+2)(m-r+1)(m-r)}{1.\ 2.\ 3.\ 4...\ r-1.\ r.\ r+1.}\times x^{m-(r+1)}a^{r+1}.$$

5) Ha ezen közönséges tagban r nek 0tól $m$ig különös értéket adunk mindegyik külön tagot felírhatjuk.

P. o.: legyen $m=12$ és $r=7$ lesz a' közönséges tagból

$$\frac{12.11.10.9.8.7.6}{1.\ 2.\ 3.4.5.6.7}x^{12-7}a^{7}=792x^{5}a^{7}$$

nyolczadik tagja $(x+a)^{12}$ nek.

6) Ha m páros szám, természetes hogy akkor a' tagok száma $m+1$ páratlan, és egy közép tag van

melly $$\frac{m(m-1)\ (m-2)\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\ \frac{m}{2}},$$

ha pedig m páratlan, akkor a' tagok száma $m+1$ páros és két közép tag van, ezek

$$\frac{m(m-1)\ (m-2)\ldots\left(\frac{m+1}{2}+1\right)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ \frac{m-1}{2}}.$$

66. A' combinálási tanból tudjuk, hogy ha m elem közt némellyek egyenlők, a' lehető öszveilletésnek száma kisebb, és hogy az egyenlő elemek száma osztó factorrá válik.

Ha p. o.: m elem minden lehető változtatása

$$=m(m-1)(m-2)(n-3)\ldots 3.2.1$$

és az m elem közt n, p, q, r, s egyenlő van, a' kifejezés

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\ldots\ldots 3.\ 2.\ 1.}{1.2\ldots n..1.2.3.p\ldots 1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots r.1.2\ldots s}.$$

Tudjuk továbbá hogy mindegyik esetben egyenlő számú változtatásokra találunk, ha p. o.: m elemet r öszvesre combinálunk határok között, az az egyszerűen, hol az m elem mind különböző, vagy ha m elemet határnélkül combinálunk r be, de melly m elemközt $m-r$ egyenlő és r egyenlő van, és a' két kifejezés

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ r}$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)..(m-r+1)(m-r)..3.2.1}{1.\ 2.\ 3.\ldots(m-r)..1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\ r.}$$

és csakugyan, a' második kifejezésnél a' nevezőből és számlálóból egyenlően elhagyhatjuk

$1.2.3.4\ldots.(m-r)$ et 's marad az első.

Különös például vegyük $m=9$ és $r=4$ lesz a' két kifejezés minthogy $m-r=5$

$$\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}=\frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1\ 2.3.4.5.1.2.3.4}$$

hol látjuk a' másodikban 1.2.3.4.5 elhagyatnak.

Az első esetben tehát azt kerestük, hány quaterniot ád 9 elem szoros értelemben, a' másikban pedig, hány változtatást enged 9 elem ha közötte 5 egyenlő és 4 egyenlő van.

67. Előre bocsájtván ezt, könnyen általlátjuk hogy a' binomok emeléseinél és azoknak velejáróiknál nem az a' kérdés csupán, hány uniot, biniot, terniot 's a' t. *r* iot 's a' t. ád *m* elem, hanem az, melly és hányféle állásba jöhet öszve a' binomnak két tagja bármelly emelésen, az az hányféle változtatás lehető bizonyos számú elemek közt?

Ha az itt kimondott elvet előbbi példáinkra alkalmazzuk, más tekintetek és más irásmód által ugyan azon következésre jutunk, és mindenkor

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}a^2 + \ldots\ldots$$

$$\frac{m(m-1)}{2}x^2a^{m-2} + mxa^{m-1} + a^m$$

hol az elöl és hátul vett harmadik tagok p. o.: egyenlőképen $\frac{m(m-1)}{1.2}$ velejáróval állanak, melly kifejezést helykimélésből irtuk egyenlő alakban; szorosan véve tudjuk hogy a' hátulrol számlált 3 dik tag' velejárója

$$= \frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)..(m-m+4)\,(m-m+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\ldots\ (m-4)\,(m-3)\,(m-2)}$$

$$= \frac{m(m-1)}{1.\ 2}.$$

A' mint tehát $(x+a)^m$ *m* egyenlő $(x+a)$ factorbul áll, és mindegyik factor' tagja *m* szer van adva, az az *m* szer x és *m* szer a, ha ezen *m* factor' két tagja sorjában egymással sokszoroztatik, nem teszünk egyebet a' kétféle elemnek öszveilletésénél, ugy pedig hogy sorjában minden lehető combinálást megtaláljunk.

Tudjuk hogy az egyes tagok mutatója öszvesen $=m$ és mindenkor csak m, sem nem több sem nem kevesebb; 's ha p. o.: $x$nek mutatója m, a mutatója $m-m=o$, ha x mutatója $m-r$, a mutatója r 's a' t., vagyis a' két factor mindenkor egyenlő terjedségű, és ezen terjedsége m.

A' kérdés eszerint nem egyéb mint; adva van kétféle elem, mindegyik elemből van m egynemű 's így öszvesen $2m$, az az mx és ma: kívántatík ezen elemeknek minden lehető öszveilletése ugy, hogy az elemek öszvese soha sem legyen nagyobb $m$nél, és hogy felváltva mx, $(m-1)x$, $(m-2)x$'s a' t. vétessék öszve $0, 1, 2, 3 \ldots m$ $a$val, bétöltvén mindenkor x híjánját $m$íg $a$val.

Ezen miveletet tudjuk, egyszerű permutálásnak vagy helyváltoztatásnak nevezzük, 's ha minden tag eleibe P—t: teszünk jeléül hogy a' kétféle elem változtandó, lesz sorunk.

$$1)\ (x+a)^m = Pmx + P(m-1)x.1a + P(m-2)x.2a + P(m-3)x.3a + P(m-4)x.4a + \ldots P(m-r)x.ra + \ldots P(m-m+1).x(m-1)a + Pma$$

és ezen sor ismét.

$$2\ (x+a)^m = Px^m + Px^{m-1}a + Px^{m-2}a^2 + Px^{m-3}a^3 + Px^{m-r}a^r + \ldots Px^{m-m+2}a^{m-2} + Pxa^{m-1} + Pa^m.$$

Az első sorban x és a'nak velejárói, a' másodikban mutatóji jelölik ki, a' permutálások számát, 's ezeket mindkét módon könnyen megtaláljuk.

Keressünk például néhány tagot: az első tag m egyféle elem, változtatás nem lehet és

$$\frac{m(m-1)\ (m-2)\ldots\ldots(m-m+2).1}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ (m-2)(m-1)m}=1.$$

x^m velejárója tehát$=1$.

A' második tagban $m-1$ egyféle és 1 másféle elem van.

Előre is tudjuk hogy az 1 elem az $(m-1)$ között m különböző helyet foglalhat el, az az ád m változtatást, és csakugyan

$$\frac{m(m-1)\ (m-2)\ldots\ldots\ 3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3.\ldots(m-3)(m-2)(m-1).1}=\frac{m}{1}$$

a' változtatása m elemnek mellyközt $(m-1)$ egyenlő.

A' másodiktag $x^{m-1}a$ velejárója tehát$=m$. így találjuk meg a' 3 dik tag velejáróját

$$\frac{m(m-1)\ (m-2)\ (m-3)\ldots\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots\ldots\ (m-2)(m-3)\,1.2}=\frac{m(m-1)}{1.2}$$

és közönségesen az $(r+1)$ dik tagnak lehető változásai hol m elem közt $(m-r)$ és más r egyenlő van

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-r+1)(m-r)\ldots4.3.2.1.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots(m-r)\ldots\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\ r.}$$

$$=\frac{m(m-1)\ (m-2)\ (m-3)\ldots\ldots}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ldots}$$

$$\times\frac{(m-r+2)\ (m-r+1)\ (-r)\ldots\ldots4.3.2.1.}{(m-r)\ 1\ \ 2.\ 3.\ 4.\ldots(r-2)\ (r-1)r}.$$

$$=\frac{m(m-1)\ (m-2)\ldots(m-r+2)\ (m-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ldots\ (r-1)r}$$

's a' t. hozzá való ezen változtatásokat kijelelő két factor$=x^{m-r}a^r$.

68. Az itt közönségesen kimondott elv szerint könnyű lesz különös példákát irnunk, p. o.:

1) $(x+a)^2 = xx+ax+xa+aa.$

2) $(x+a)^3 = xxx+xxa+xax+axx+xaa$
$+axa+aax+aaa,$

hol a' lehető változtatások megvannak téve.

3) Ha $(x+a)^4$ nél az előbbi írást megtartjuk lesz

$$(x+a)^4 = P4.x+P(4-1)x.1a+P(4-2)x.2a$$
$$+P(4-3)x.3a+P(4-4)x.4a$$
$$=Px^4+Px^3a+Px^2a^2+Pxa^2+Pa^4$$

mivel $x^{4-4}=1$.

Ha pedig a' permutálás utján keressük a' velejárókat vagyis a' változtatások számát, lesz hol $m=4$.

$$Px^4 \left\{ \text{mivel } \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 1 \right\} = x^4$$

$$Px^3.a \left\{ \text{mivel } \frac{4.3.2.1}{1.2.3.1} = \frac{4}{1} \right\} = 4x^3a$$

$$Px^2a^2 \left\{ \text{mivel } \frac{4.3.2.1}{1.2.1.2} = \frac{4.3}{1.2} \right\} = 6x^2a^2$$

$$Pxa^3 \left\{ \text{mivel } \frac{4.3.2.1}{1.1.2.3} = \frac{4}{1} \right\} = 4xa^3 \text{ és végre}$$

$$Pa^4 \left\{ \text{mivel } \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = 1 \right\} = a^4 \text{ és az 5 tag}$$

$$(x+a)^4 = x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4.$$

4) Vegyük utolsó például $(x+a)^5$, lesz szintígy

$$(x+a)^5 = P5x+P4xa+P3x2a+P2x3a$$
$$+Px4a+P5a.$$

1ső tag $P5x = Px^5 = \dfrac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}x^5 = xxxxx = x^5.$

2 dik tag $P4xa = Px^4a = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.1} x^4a = \frac{5}{1} x^4 a$

és ez $= xxxxa, + xxxax, + xxaxx, + xaxxx$

és $+ axxxx = 5x^4a.$

3 dik tag $P3x2a = Px^3a^2 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.1.2} x^3a^2 =$

$= \frac{5.4}{1.2} x^3a^2 = 10x^3a = xxxaa + xxaxa + xxaax$

$+ xaxax + xaaxx + xaxxa + axxxa + axxax.$

$+ axaxx + aaxxx$

's mivel valamennyi kifejezés külön külön $= x^3a^2$ minden lehető változtatásiban, tehát

$$Px^3a^2 = 10x^3a^2.$$

4 dik tag $P2x3a = Px^2a^3 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.1.2.3} x^2a^3$

$= \frac{5.4}{1.2} x^2a^3 = 10x^2a^3 = aaaxx + aaxax + aaxxa$

$+ axaxa + axaax + axxaa + xaaax + xaaxa$

$+ xaxaa + xxaaa = 10x^2a^3.$

5 dik tag $Px4a = Pxa^4 = \frac{5.4.3.2.1}{1.1.2.3.4} xa^4 = \frac{5}{1} xa^4$

$= 5xa^4 = xaaaa + axaaa + aaxaa + aaaxa$

$+ aaaax. = 5xa^4$

's az utolsó $P5a = Pa^5 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} a^5 = 1.a^5$

$= aaaaa. = a^5.$

Ezen tulajdona a' binomi tannak legrövidebb úton vezet minden taghoz tartozó velejáró meglelésére, mert mihelyest megpillantjuk valamely adott tagot azonnal fel is irjuk lehető változtatásait 's így velejáróját is.

Adva van p. o.: x^8a^9 azon megjegyzéssel hogy x^8a^9 binomi kifejtés' egyik tagjának factora,, kérdés hanyadik tag x^8a^9 a' sorban és melly a' hozzá tartozó szám?

A' mutatók öszvese $8+9=17$; x^8a^9 tehát $(x+a)^{17}$ valamelyik tagja. A' sor x nek lemenő hatóságai szerint van elrendelve x^8 pedig$=x^{17-9}$; kilencz egyest vevén el az első x mutatójából, x^8a^9 a' 10dik taghoz tartozik valamint a^9 is azt jelöli.

x^8a^9 permútálási száma pedig 17 elem közt 8 egyenlő és 9 egyenlő $P8x9x=$

$$=\frac{17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.1.2.3.4.5.6.7.8.9}x^8a^9$$

elhagyván a' számláló 's nevezőből a' factorokat 1től 9íg marad

$$\frac{17.16.15.14.13.12.11.10}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}x^8a^9=17.13.11.5.2x^8a^9$$

$$=24310x^8a^9.$$

A' tanuló, az illy példákat sokasithatja.

69. Könnyen felírhatjuk tehát eszerint a' binomok' bármelly hatóságihoz tartozó velejárókat, szemben tartván hogy az első és utolsó tagnak velejárója $=1$. Igy lesz a' 20 első hatóság' velejárója.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1
1 17 136 680 2380 6188 12376 19448 24310 24310 19448 12376 6188 2380 680 136 17 1
1 18 153 816 3060 8568 18564 31824 43758 48620 43758 31824 18564 8568 3060 816 153 18 1
1 19 171 969 3876 11628 27132 50388 75582 92378 92378 75582 50388 27132 11628 3876 969 171 19 1
1 20 190 1140 4845 15504 38760 77520 125970 167960 184756 167960 125970 77520 38760 15504 4845 1140 190 20 1

Az első tekintet is mutatja már míként támadnak a' következő, egységgel nagyobb hatóság' velejárói, az előtte levő velejárókbul; p. o.: az m dik emelés velejárói támadnak az $(m-1)$ hatóság velejáróiból a' mint ezen utóbbinak két két egymásmellett álló tagja öszveadatik, így lesz a' 6 dik emelés 3 dik tagja = az 5 dik emelés második és harmadik tagjának öszvese: a' 12 dik emelés 9 dik tagja, a' 11 dik emelés 8 dik és 9 dik tagjának öszvese

$$495 = 330 + 165 \text{ 's a' t.}$$

Ha a' függő sorban álló második 3 dik 's a' t. tagokat fekvő sorba irjuk lesz

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12
1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	55.	66.	78
1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	165.	220.	286.	364
1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	330.	495.	715.	1001.	1365
1.	6.	21.	56.	126.	252.	462.	792.	1287.	2002.	3003.	8008
1.	7.	28.	84	210.	462.	924.	1716.	3003.	5005.	8008.	12376
1.	8.	36.	120.	330.	792.	1716.	3432.	6435.	11440.	19448.	31824

's a' t. ezek egymásután az alakitott számok' rendjei, 's valamint a' második sor támad a' természetes számok sorából (a' tagok öszveséből ezeket kettesivel 3 ával, 4 ével 's a' t. vevén) ugy támad mindegyik következő sor az előtte valóból.

Ezen tekintet bővebben mutatja miként támadnak ismételt sokszorozás által a' velejárók.

70. Eddig csak az egyes tagok' lehető változásait tekintettük a' permutálás által, figyelmet nem vetvén ezeknek öszvesére, vagyis csak azt tekintének hogy támadnak a' számi velejárók az egynemű tagok' öszveadása által.

Ha tudni akarjuk hány külön tagot ád a' binomnak valamelly emelése (bár legyenek ezen tagok közt számos egyenlők is), erre a' várialás felel meg.

Tudjuk az arithmetikából hogy két elem váriálási száma különböző csoportokba, egyenlő kettővel azon emelésen melly csoportba váriáltatott; két elem p. o.: 3 asba váriálva $=2^3$, 4 esbe 2^4 és m be $=2^m$, és $(x+b)^m$ nem mutat valóban egyebet mint hogy a' két elem x és a minden lehető variálásait m csoportba megtaláljuk, a' száma pedig minden lehető váriátionak 2^m és $(x+a)^m$ annyi tagból áll hány egyest foglal magában 2^m,

Igy $(x+a)^3$ öszves tagja$=2^3=\ 8$
$(x+a)^4$ . . . $=2^4=16$
$(x+a)^5$ . . . $=2^5=32$

vegyük például mind három esetet, mert a' binomi tan olly fontosságú hogy minden oldali visgálatot meg érdemel.

A' váriálás egyszerű miveletét ismerjük, 's tudjuk p. o.: hogy $(x+a)^2=(x+a)\ (x+a)$ két elem x és a váriáltatván adnak a' második csoportban

$$xx,\ aa,\ xa \text{ és } ax \text{et}=2^2=4.$$

A' harmadik csoportot megtaláljuk ha azt az elsővel öszverakjuk és lesz

$$\begin{array}{c|l} & xx,\ aa,\ xa,\ ax \\ \hline x & xxx\ aax\ xax\ axx \quad =2^3=8 \text{ váriálás} \\ a & axx\ aaa\ axa\ aax \end{array}$$

és $\qquad (x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3.$

Ha a' második csoportot a' másodikkal rakjuk öszve, a' 4 dik rendre jutunk és lesz.

	xx,	xa,	ax,	aa
xx	$xxxx$	$xxxa$	$xxax$	$xxaa$
xa	$xxxa$	$xxxa$	$xaax$	$xaaa$
ax	$axxx$	$axxa$	$axax$	$axaa$
aa	$aaxx$	$aaxa$	$aaxa$	$aaaa$

$=2^4=16$

$(x+a)^4=x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$,

's végre a' negyedik rendet az elsővel tevén öszve lesz.

$xxxx\ xxxa\ xxax\ xxaa\ xaxa\ xaxa$
$xaax\ xaaa\ axxx\ axxa\ axax\ axaa$
$aaxa\ aaxx\ aaxa\ aaaa$

x	
a	

vagy a' harmadikat a' másodikkal

$xxx\ aax\ xax\ axx\ axx\ axa\ aax\ aaa$

xx	$xxxxx$	$xxaax$	$xxxax$	$xxaxx$
	$xxaxx$	$xxaxa$	$xxaax$	$xxaaa$
xa	$xaxxx$	$xaaax$	$xaxax$	$xaaxx$
	$xaaxx$	$xaaxa$	$xaaax$	$xaaaa$
ax	$axxxx$	$axaax$	$axxax$	$axaxx$
	$axaxx$	$axaxa$	$axaax$	$axaaa$
aa	$aaxxx$	$aaaax$	$aaxax$	$aaxax$
	$aaxax$	$aaaxa$	$aaaax$	$aaaaa$

$2^5=32.$

és $(x+a)^5=x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3$
$+5xa^4+a^5$.

's bármelly példában, a' velejárók öszvese egyenlő a' 2-tőnek azon emelésével melly emelésen van a' binom.

$(x+a)^2$ tagjainak velejáróji öszvese$=1+2+1=4=2^2$
$(x+a)^3 \ldots\ldots =1+3+3+1=8=2^3$
$(x+a)^4 \ldots\ldots =1+4+6+4+1=16=2^4$
$(x+a)^5 \ldots\ldots =1+5+10+10+5+1=32=2^5$ és

$$(x+a)^m \ldots\ldots = m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots r}$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{m(m-1)}{1.2.} + m = 2^m$$

bármelly szám legyen m.

A' kettőnek sorbeli emelései, tehát öszvesei az egymást követő binomi emelések velejárójinak.

Következő táblácska, a' 40 első emelés velejáróji öszvesét adja a' binomoknak, vagyis a' 2tőnek 40 sorban következő emelését.

$m=$	2^m	$m=$	2^m	$m=$	2^m	$m=$	2^m
1	2	11	2048	21	2097152	31	2147483648
2	4	12	4096	22	4194304	32	4294967296
3	8	13	8192	23	8388608	33	8589934592
4	16	14	16384	24	16777216	34	17179869184
5	32	15	32768	25	33554432	35	34359738368
6	64	16	65536	26	67108864	36	68719476736
7	128	17	131072	27	134217728	37	137438953472
8	256	18	262144	28	268435456	38	274877906944
9	512	19	524288	29	536870912	39	549755813888
10	1024	20	1048576	30	1073741824	40	1099511627776

71. Az it mondottat egyenesen is bizonyithatjuk a' kifejezés által

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}a^2 + ..$$

mert ez nem változik akarmelly betüt írunk x és a helyett 's lesz

$$(p+q)^m = p^m + p^{m-1}q + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}p^{m-2}q^2 + ...$$

$$.... + \frac{m(m-1)(m-2)..(m-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ ..\ r}p^{m-r}q^r$$

's a' t. és ha $x=1$ és $a=1$

$$(1+1)^m = 1^m + m1^{m-1}.1 + \frac{m(m-1)}{1.2}1^{m-2}1^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3.}1^{m-3}1^3 + \text{'s a' t.}$$

de 1 minden hatósága $=1$'s marad egyedül

$$(1+1)^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.} + \frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$+ \text{'s a' t.} .... = 2^m.$$

legyen p. o.: $m=6$. lesz

$$(1+1)^6 = 2^6 = 1 + 6 + \frac{6\ .\ 5}{1\ .\ 2} + \frac{6.5.4}{1.2\text{-}3} + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}$$

$$+ \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} + \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{6.5.4.8.2.1.0}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{'s a' t.}$$

hol a' 8 dik tag már 0 factort hordván valamint minden következő, magában is $=0$ és

$$2^6 = 1+6+15+20+15+6+1 = 64$$

szinte ha $x=2$ és $a=0$

lesz $(x+a)^m = (2+0)^m = (2)^m = 2^m$

ez első tag egyedül, a' többi elenyészvén, mert 0 jön közibök mint factor.

72. Ha tehát példánkban m egész szám, szükségképen a' tagok velejárói is egész számok.

Bizonyitsuk meg hogy a' tan ígaz és való, ha m akarmelly tagadó állító egész vagy törtszám.

Ha p. o.:

$$x=1 \text{ és } a=z \text{ lesz } (x+a)^m=(1+z)^m \text{ és},$$

$$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}z^3$$

$$+ \text{ 's a' t.}$$

szinte így lesz

$$(1+z)^n=1+nz+\frac{n(n-1)}{1.2}z^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}z^3+$$

's a' t. ha ezen két sort sokszorozzuk egymással, lesz

$$\left(1+mz+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}z^2+\frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3}z^3\ldots\right)$$

$$\left(1+nz+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}z^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}z^3+\text{ 's a' t.}\right)$$

$$=1+(m+n)z+\frac{(m+n)\ (m+n-1)}{1.\ \ 2.}z^2$$

$$+\frac{(m+n)\ (m+n-1)\ (m+n-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3.}x^3+$$

's a' t. de tudjuk hogy

$$(1+z)^m(1+z)^n=(1+z)^{m+n} \text{ tehát}$$

$$(1+z)^{m+n}=1+(m+n)z+\frac{(m+n)\ (m+n-1)}{1.\ \ 2.}z^2$$

$$+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3.}z^3+\text{'s a' t.}$$

Itt látjuk miként áll bé n mint factor az m factorok közzé, 's ezen törvény változatlanul marad, legyenek m és n egész, tört állító vagy tagadó számok.

További tekinteteink könnyebbitésére röviditsük meg ezen velejárók írásat és ha p. o.: a' mutató m, legyen az első tag $\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}$ a' második $\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}$ a' harmadik $\begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}$'s a' t. ugy hogy m el a' mutatót, az alatta levő kis szám által pedig a' tagok számát jelöljük; így lesz p. o.:

$$\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-r+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ (r-1)}$$

és $(x+a)^m = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} x^m + \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} x^{m-1}a + \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix} x^{m-2}a^2 +$

$$+ \begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} x^{m-r}a^r + \text{'s a' t.}$$

$$(1+z)^n = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} z^3 + \ldots$$

$$+ \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} z^r + \text{'s a' t.}$$

Ha eddigi sorainkat megtartjuk és $(m+n)=p$ nek vesszük lesz

$$(1+z)^p = (1+x)^{m+n} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix} z^2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} p \\ 3 \end{bmatrix} z^3 + \begin{bmatrix} p \\ 4 \end{bmatrix} z^4 + \ldots \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} z^r + \text{'s a' t.}$$

$$= \begin{bmatrix} m+n \\ 0 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} m+n \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} m+n \\ 2 \end{bmatrix} z^2 +$$

$$+ \begin{bmatrix} m+n \\ 3 \end{bmatrix} z^3 + \ldots \begin{bmatrix} m+3 \\ r \end{bmatrix} z^r + \text{'s a' t.}$$

melly törvény magában is nyilván mert m nek mindég adhatunk olly értéket hogy p. o.: két számból áljon szintugy n nek és p nek valamint

$$(1+z)^3 \times (1+z)^3 = (1+z)^6$$

és akar fejtjük ki a' sorokat $(1+z)^3$ és $(1+z)^3$ akarnem, a' sokszorozás következése mindenkor

$$(1+z)^{3+3}=(1+z)^6.$$

Vegyük elé ismét két elébbi sorunkat és legyen

$$x=1+\begin{bmatrix}m\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}m\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}m\\3\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}m\\4\end{bmatrix}z^4+\ldots A)$$

$$y=1+\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}n\\4\end{bmatrix}z^4+\ldots. B)$$

hol nem tudunk egyebet x és y felől mint hogy egyenlők a' sorokkal, sokszorozván a' két sort egymással lesz mint eléb ha $p=m+n$

$$xy=1+\begin{bmatrix}p\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}p\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}p\\3\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}p\\4\end{bmatrix}z^4+\text{'s a't.} C)$$

Ha tehát m egész szám, A sorunk bisonyosan $(1+z)^m$nek kifejlése és $x=(1+z)^m$.

73. Ha $-m=n$ akkor $m+n=0$ és $p=m+n=0$, és C sorunk $=1$ vagy is $xy=1$, ebből következik

$$y=\frac{1}{x}.$$

Ha $x$nek elébbi értékét megadjuk lesz

$$y=\frac{1}{(1+z)^m}=(1+z)^{-m}.$$

Ha itt y értékét B sorunkba tesszük, lesz

$$(1+z)^{-m}=1+\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}n\\4\end{bmatrix}z^4+$$

's a' t. 's ha ebben végre $n$nek értékét $-m$et írjuk lesz

$$(1+z)^{-m}=1+\begin{bmatrix}-m\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}-m\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}-m\\3\end{bmatrix}z^3+$$
$$+\begin{bmatrix}-m\\4\end{bmatrix}z^4+\ldots\ldots..$$

és minthogy a' páratlan tagadó factorok tagadó származatokat adnak

$$(1+z)^{-m}=1-\begin{bmatrix}m\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}m\\2\end{bmatrix}z^2-\begin{bmatrix}m\\3\end{bmatrix}z^3+$$

$$+\begin{bmatrix}m\\4\end{bmatrix}z^4-\begin{bmatrix}m\\5\end{bmatrix}z^5+ \text{'s a' t.}$$

74. Legyen AB soraikban $m=n$, lesz

$$m+n=2m.=2n=p \text{ és } x=y,$$

és $xy=x^2$, $x^2y=x^3$, $x^3y=x^4$'s a' t. és

$$x^2=1+\begin{bmatrix}2m\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}2m\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}2m\\3\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}2m\\z\end{bmatrix}z^4+..$$

$$=1+\begin{bmatrix}p\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}p\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}p\\3\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}p\\4\end{bmatrix}z^4+..$$

$$x^3=1+\begin{bmatrix}3m\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}3m\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}3m\\3\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}3m\\4\end{bmatrix}z^4+..$$

$$x^4=1+\begin{bmatrix}4m\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}4m\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}4m\\3\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}4m\\4\end{bmatrix}z^4+..$$

és bármely szám legyen r,

$$x^r=1+\begin{bmatrix}rm\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}rm\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}rm\\3\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}rm\\4\end{bmatrix}z^4+$$

's a' t. tegyük fel hogy m bármely törtszám p. o.: $\frac{a}{n}$ lesz A)

$$x^n=1+\left(\begin{matrix}\frac{na}{n}\\1\end{matrix}\right)z+\left(\begin{matrix}\frac{na}{n}\\2\end{matrix}\right)z^2+\left(\begin{matrix}\frac{na}{n}\\3\end{matrix}\right)z^3+$$

$$+\left(\begin{matrix}\frac{na}{n}\\4\end{matrix}\right)z^4+ \text{'s a' t.}$$

$$=1+\begin{bmatrix}a\\1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}a\\2\end{bmatrix}z^2+\begin{bmatrix}a\\3\end{bmatrix}z^3+\begin{bmatrix}a\\4\end{bmatrix}z^4+\text{'s a't.}$$

$=(1+z)^a$ mivel a egész szám,

ha a' kifejezésben $x^n=(1+z)^a$ mind két felől $n$dik gyökeret veszünk, lesz $x=(1+z)^{\frac{a}{n}}$.

Ha itt x helyett A) értékét tesszük lesz

$$(1+z)^{\frac{a}{n}}=1+\left[\begin{matrix}m\\1\end{matrix}\right]z+\left[\begin{matrix}m\\2\end{matrix}\right]z^2+\left[\begin{matrix}m\\3\end{matrix}\right]z^3+\left[\begin{matrix}m\\4\end{matrix}\right]z^4$$

és végre itt m helyett utóbbi értékét $\frac{a}{n}$ et

$$(1+z)^{\frac{a}{n}}=1+\left[\begin{matrix}\frac{a}{n}\\1\end{matrix}\right]z+\left[\begin{matrix}\frac{a}{n}\\2\end{matrix}\right]z^2+\left[\begin{matrix}\frac{a}{n}\\3\end{matrix}\right]z^3+\left[\begin{matrix}\frac{a}{n}\\4\end{matrix}\right]z^4+$$

s a' t. és a' közönséges írás szerint

$$(1+z)^{\frac{a}{n}}=1+\frac{a}{n}z+\frac{\frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}-1\right)}{1.\ 2.}z^2+$$

$$+\frac{\frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}-1\right)\left(\frac{a}{r}-2\right)}{1\ \ 2.\ 3.}z^3+\text{ 's a' t.}$$

74. Meglévén eszerint bizonyitva bármelly szám legyen m állító vagy tagadó egész vagy tört, mindenkor

$$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}z^2+$$

$$+\frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}z^3+\text{ 's a' t.}$$

egyszerre meglelhetjük $(x+a)^m$nek közönséges kifejezését.

$$x+a=x\left(1+\frac{a}{x}\right)\text{ és }(x+a)^m=x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$$

tudjuk pedig hogy

$$(1+\frac{a}{x})^m = 1 + m\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\,\frac{a^2}{x^2} +$$

$$+\frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3}\,\frac{a^3}{x^3} + \text{'s a' t.}$$

$$= 1 + \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}\frac{a}{x} + \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}\frac{a^2}{x^2} + \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix}\frac{a^3}{x^3} +$$

$$+\begin{bmatrix} m \\ 4 \end{bmatrix}\frac{a^4}{x^3} + \text{'s a' t.}$$ lesz tehát

$$(x+a)^m = x^m\,[1 + \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}\frac{a}{x} + \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}\frac{a^2}{x^2} + \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix}\frac{a^3}{x^3} +$$

$$+\begin{bmatrix} m \\ 4 \end{bmatrix}\frac{a^4}{x^4} + \text{'s a' t.}\,.\,.\,.\,.]$$

és sokszorozván a' sor belsejét x^m el lesz végre.

$$(x+a)^m = x^m + \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}x^{m-1}a + \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}x^{m-2}a^2 +$$

$$+\begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix}x^{m-3}a^3 + \begin{bmatrix} m \\ 4 \end{bmatrix}x^{m-4}a^4 + \text{'s a't.}$$

A' binomi tannak' nagyszámú bizonyitási modjai vannak, mert figyelmét gerjeszté mindenkinek ki a' mathesissal foglalatoskodik. Az itteni bizonyitványok, mint leg egyszerübbek, ujabb visgálatoknak következései és reményleni érthetőleg és megfoghatólag felelnek meg a' kívánatnak.

75. Megtartván elménkben a' binomok közönséges kifejlését, bármelly kérdésre könnyen felelhetünk. Némelly példák fegélljenek hogy még inkább tulajdonunká tehessük az alakokat.

1) $\left(\frac{1}{1+x}\right) = (1+x)^{-1}$ hol $m = -1$,

lesz a' sor

$$(1+x)^{-1}=1+\left[\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right]x+\left[\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right]x^2+\left[\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right]x^3+$$
$$+\left[\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right]x^4+\text{ 's a' t.}$$
$$=1+\frac{-1}{1}x+\frac{-1(-1-1)}{1.\ 2}x^2+$$
$$+\frac{-1(-1-1)\ (-1-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3+\text{ 's a' t.}$$
$$=1+(-1)x+\left(\frac{+2}{2}\right)x^2+\left(\frac{-6}{2.3}\right)x^3+$$
$$+\frac{+24}{2.3.4}x^4+\text{ 's a' t.}$$
$$=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-\text{ 's a' t.}$$

A' páros helyen álló velejárókban a' $-m$ páratlan factorai tagadó következést adnak 's megfordítva.

2) Ha $(1+x)$nek gyökerét keressük lesz

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}\text{ hol } m={}^1/_2,$$

és a' binomi velejárók rendesen lesznek egymásután

$$m={}^1/_2,\ \frac{m(m-1)}{2}=\frac{{}^1/_2({}^1/_2-1)}{2}=-{}^1/_8\text{ 's a' t.}$$

$$\text{vagy } m=\frac{1}{2},\ m(m-1)=-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2},\ m(m-1)(m-2)$$
$$=+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2}\ \frac{3}{3}\text{ 's a' t.}$$

A' sornak eszerint többféle alakot adhatunk a' nélkül hogy értékét változtatnók, 's lesz

$$\text{a)}\quad (1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1\ .\ 1}{1^2.\ 2}x^2+\frac{1.1.3}{2^3 2.3}x^3-$$
$$-\frac{1.1.3.5}{2^4.2.3.4}x^4+\frac{1.1.3.5.7}{2^5 2.3.4.5}x^5-\text{'s a't.}$$

b) $=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1.3}{2.3}\left(\frac{x}{2}\right)^3$

$-\frac{1.3.5}{2.3.4}\left(\frac{x}{2}\right)^4+$'s a' t.

c) $(1-x)^{1/2}=1-\frac{x}{2}-{}^1/_2\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1.3}{2.3}\left(\frac{x}{2}\right)^3$

$-\frac{1.3.5}{2.3.4}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1.3.5.7}{2.3.4.5}\left(\frac{x}{2}\right)^5-$

d) $(1+x)^{1/2}=1-\frac{1.x}{1.2}+\frac{1.3}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1.3.5}{1.2.3}\left(\frac{x}{2}\right)^3$

$+\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\left(\frac{x}{2}\right)^4-$'s a' t.

e) $(1-x)^{-1/2}=1+\frac{1.x}{1.2}+\frac{1.3}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1.3.5}{1.2.3}\left(\frac{x}{2}\right)^3$

$+\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}\left(\frac{x}{2}\right)^4+$'s a' t.

's így találhatjuk egyenes vagy megforditott gyökerét bármelly binomnak.

Ha a' velejárókat külön tekintjük, olly számokat váloszthatunk, mellyek legalkalmasabbak.

Az egymást követő törtek ha $m={}^1/_2$

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{5}{128}$, $\frac{35}{1280}$, $\frac{21}{1024}$, $\frac{231}{14336}$,

$\frac{3003}{229376}$, $\frac{45045}{4128768}$, $\frac{17017}{1835008}$, $\frac{323323}{40370176}$,

$\frac{2263261}{322961408}$, 's a' t. 's ezeknél figyelemmel kell lenni jegyeikre, 's a' haszonvétnél tizedes törtekre változtatni.

76. Közönséges sorunk

$$(x+a)^{-m}=x^{-m}+(-m)ax^{-m-1}+$$
$$+\frac{-(m)\ (-m-1)}{1\ \ 2}x^{-m-2}a^2+\text{'s a' t.}$$

következőbe fordul

$$(x+a)^{-m}=\frac{1}{x^m}-m\frac{a}{x^{m-1}}+\frac{m(m+1)}{2}\frac{a^2}{x^{m-2}}$$
$$-\frac{m(m+1)\ (m+2)}{2.3}\frac{a^3}{x^{m-3}}+\text{'s a't.}$$

ezen sor végnélküli 's a' velejárók mind egész számok.

Ha a tetemesen kisebb mint x, a' tagok sebesen kisebbülnek az az a' sor közelitő, és az első tagok öszvese csekélyben különbözik az egész sor' öszvesétől, ugyannyira hogy néhány tag elég az elsők közzűl 's a' többi elhagyható.

77. Közönséges sorunk

$$(x+a)^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{m}{n}}+\binom{\frac{m}{n}}{1}x^{\frac{m}{n}-1}a+\binom{\frac{m}{n}}{2}x^{\frac{m}{n}-2}a^2$$

következőbe fordul.

$$(x+a)^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}a+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m-m}{n}\right)x^{\frac{m-2n}{n}}}{2}a^2+$$
$$=x^{\frac{m}{n}}+\frac{1}{n}max^{\frac{m-n}{n}}+\frac{1}{n^2}\frac{m(m-n)}{2}a^2x^{\frac{m-2n}{n}}$$
$$+\frac{1}{n^3}\frac{(m)\ (m-n)\ (m-2n)}{2.\ \ 3}a^3x^{\frac{m-3n}{n}}$$
$$+\frac{1}{n^4}\frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)}{2.\ .3.\ \ 4}a^4x^{\frac{m-4n}{n}}$$

's a' t. és ezen sor is végnélküli ha m nem többese n nek p. o.: $m=np$. Ezen esetben $m-np=o$ lesz valamelly tagnak factora 's tőlle kezdve valamennyi elesik, de egyszersmind ekkor a' sor csak képzelt tört alakot visel, és nem különböz attól mellynek mutatója egész szám, és ha $m=np$ lesz

$$\frac{m}{n}=\frac{np}{n}=p.$$

Ha közönségesen feltesszük hogy az m mutató után kifejtett sor végnélküli, bármelly szám legyen m, tört egész vagy tagadó, nem hibázunk, mert ha m egész szám, akkor olly tagokat adunk a' sorhoz mellyek magokban $=0$ léven elenyésznek.

2 §. A' Binomok' gyökerei.

78. Soraink segédek által, sebességgel vehetjük a' számoknak bármelly gyökerét, bármelly kívánható közelitéssel.

Legyen p. o.: N olly szám mellynek gyökere kívántatik.

Vegyük olly két részbe Net hogy egyik része tökéletes négyszég p. o.: a^2 legyen a' másik pedig y a' maradék.

Ha tehát $N=a^2+y$

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+y}=a\sqrt{1+\frac{y}{a^2}}$$

és mivel

$$\sqrt{1+\frac{y}{a^2}}=\left(1+\frac{y}{a^2}\right)^{1/2} \text{ lesz sorunk}$$

$$\left(1+\frac{y}{a^2}\right)^{1/2}=1+\frac{y}{2.a^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2a^2}\right)^2+\frac{1.3}{2.3}\left(\frac{y}{2a^2}\right)^3-$$

és $$\sqrt{N}=a\sqrt{1+\frac{y}{a^2}}=a\left\{1+\frac{y}{2a^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2a^2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1.3}{2.3}\left(\frac{y}{2a^2}\right)^3-\text{'s a' t.}\right\}$$

Ha y sokkal kisebb a^2 nál, már a' sornak néhány tagja elég, 's a' többit elhagyhatjuk.

Ha y, a^2 hoz képest nagy lenne, alkalmasabb olly négyszeget venni melly egy kissé nagyobb Nnél 's elkor y a' b^2 és N közti különbséget jelöli.

Legyen p. o.: a' négyszeg b^2 és nagyobb Nnél $y$nal.

Lesz $N=b^2-y$ és $\sqrt{N}=\sqrt{b^2-y}=b\sqrt{1-\frac{y}{b^2}}$

's változik előbbi sorunk következőbe

$$\sqrt{N}=b\left(1-\frac{y}{b^2}\right)^{1/2}=b\left[1-\frac{y}{2b^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2b^2}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1.3}{2.3}\left(\frac{y}{2b^2}\right)^3-\text{'s a' t.}\right]$$

Példák.

1) Kerestetik $\sqrt{10}$, az első eset szerint

$$10=3^2+1 \text{ és } \sqrt{10}=\sqrt{3^2+1}=3\sqrt{1+\frac{1}{3^2}}$$

és $$\sqrt{10}=3\left[1+\frac{1}{2.9}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2^2.9^2}+\frac{1.3}{2.3}\,\frac{1}{2^3.9^3}-\right]$$

$$=3\left[1+\frac{1}{18}-\frac{1}{648}+\frac{1}{11664}-\text{'s a' t.}\right]$$

's ha itt csak a' két első tagot vesszük lesz

$$\sqrt{10}=3(1+{}^1/_{18})=3+{}^3/_{18}=3+{}^1/_6=3\cdot1666$$

a' három tag ád

$$\sqrt{10}=3(1+{}^1/_{18}-{}^1/_{648})=3.166\dot{6}-0\cdot0046=3\cdot1620$$

's a' t.

2) Kerestessék $\sqrt{8}$.

$8=9-1=3^2-1$ a' második eset és

$$\sqrt{8}=\sqrt{3^2-1}=3\sqrt{1-\frac{1}{3^2}}$$

$$=3\left\{1-\frac{1}{18}-\frac{1}{648}-\frac{1}{11664}-\text{'s a' t.}\right\}$$

's ha csak a' 2 első tagot vesszük lesz

$\sqrt{8}=3-{}^1/_6=2{\cdot}8334$, a' 3 tag ád

$\sqrt{8}=2\cdot8288.$

3) Igy lenne $\sqrt{6}=\sqrt{2^2+2}$, de mivel 2 négyhez képest nagy, a' sor csak lassan közelit, vegyük 6 tot

$$=\frac{25}{4}-\frac{1}{4}=6$$

és $\sqrt{6}=\sqrt{\frac{5^2}{2^2}-\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{1-\frac{1}{25}}$,

's így sebes közelitést érünk.

Itt a' két első tagot vettük különbségével $\sqrt{2^2+2}$ ból, 's lett

$$\sqrt{6}=\frac{5}{2}\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{25}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{25}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{25}\right)^3-\ldots\right\}$$

hol a' két első tag $\frac{5}{2}-\frac{1}{20}=\frac{49}{20}$, ha a' közelitést még szorosabban kívánjuk, vegyük $\left(\frac{49}{20}\right)^2$ ót á' 6 első részének 's lesz $\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}=6$, és

$$\sqrt{6}=\frac{49}{20}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2401}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2401}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2401}\right)^3-\text{'s a' t.}\right\}$$

79. ***Bármelly gyökérnek közönséges kifejezése,***

tudjuk $=(1+n)^{\frac{1}{n}}$ és a' sort is ismerjük

$$=1+\frac{1}{n}x+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}x^2+$$
$$+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{2.\ 3}x^3+\text{'s a' t.}$$

Tegyük fel tehát hogy a' számot N olly két tagba válosztjuk hogy egyik tökélletes emelése legyen N-nek, a' másik pedig nem, p. o.:

$N=a^n+y$, lesz $\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{a^n+y}=a\sqrt[n]{1+\frac{y}{a^n}}$

és $\sqrt[n]{N}=a\left\{1+\frac{1}{n}\frac{y}{a^n}-\frac{1}{n}\frac{(n-1)}{2n}\frac{y^2}{a^{2n}}+\right.$

$$\left.+\frac{1}{n}\frac{(n-1)\ (2n-1)}{2n.\ 3n}\frac{y^3}{a^{3n}}-\text{'s a' t.}\right\}$$

1) Keressük 31 nek harmadik gyökerét?

$31=27+4=3^3+4$ és $\sqrt[3]{31}=\sqrt[3]{3^3+4}=3\sqrt[3]{1+\frac{4}{27}}$

's így

$$\sqrt[3]{31}=3\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2\ 4^2}{6.27^2}+\frac{1.2.5\ 4^3}{3.6.9.27^3}-\right\}$$

$$=3+\frac{4}{27}-\frac{16}{2187}+\frac{320}{531441}-\text{'s a' t.}$$

2) A' második eset ha a' szám és egyik része' emelése-közti különbség tagadó, és p. o.:

$$N=a^n-y \text{ és } \sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{a^n-y},$$

csak a' tagok' jegyét de nem valóságát változtatja.

Fejtse ki a' tanuló gyakorlásul következő kérdéseket

1) $\sqrt[5]{30}=\sqrt[5]{32+7}=\sqrt[5]{2^5+7}=2\sqrt[5]{1+\frac{7}{32}}.$

2) $\sqrt[5]{33}$ hol $33=2^5+1.$

3) $\sqrt[7]{131}=\sqrt[7]{2^7+3}$'s a' t.

Gyakorta hasznos az adott számot, olly mással sokszorozni, hogy ezáltal helyes két részbe vevést lehessen eszközleni.

Ha p. o.: 2 ből kellene gyökeret venni, sokszorozzuk kettőt 5^2 al 's lesz

$$\frac{49+1}{25}=\frac{49+1}{5^2} \text{ és } \sqrt{2}=\frac{\sqrt{49+1}}{5}=\frac{\sqrt{7^2+1}}{5}$$

$$=\frac{7\sqrt{1+\frac{1}{49}}}{5}$$

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left\{1+{}^1/_2\left(\frac{1}{49}\right)-{}^1/_8\left(\frac{1}{49}\right)^2+{}^1/_{16}\left(\frac{1}{49}\right)^3-\right\}$$

$$=1\cdot41421356 \text{ 's a' t.}$$

2) $\sqrt[3]{2}$ ben p. o.: $2.64=128$ és $125+3$ $=5^3+3$, és $64=4^3$

$$\sqrt[3]{2}=\frac{\sqrt[3]{5^3+3}}{4}=\frac{5\sqrt[3]{1+\frac{3}{125}}}{4}=\frac{5}{4}\sqrt[3]{1+\frac{3}{125}}$$

$$=\frac{(5^3+3)^{1/3}}{4}=\frac{1}{4}(5^3+3)^{1/3}.$$

3) $\sqrt[10]{58}$ ban $58.2^{10}=58.1024=59392$ és $3^{10}=59049$, 's igy $58\times 2^{10}=3^{10}+343$, tehát

$$\sqrt[10]{58}=\frac{\sqrt[10]{3^{10}+343}}{2}=\frac{1}{2}(3^{10}+343)^{1/10}.$$

4) $\sqrt[7]{610}$ ben $2^7.610=5^7-45$, és $\sqrt[7]{610}$

$$=\frac{\sqrt[7]{5^7-45}}{2}=\frac{1}{2}(5^7-45)^{1/7}.$$

Mind az illy példákban csak a' tizedes törtek ajánlhatók könnyebb számítás végett.

80. Ha valamelly gyökeret némi közelitéssel megtaláltuk, könnyen jutunk vagy nagyobb közelitésre, vagy a' tizedes törtek több jegyeire, azon alak által mellyet Lambert adott.

Ez következő. Ha p. o.: $\sqrt[n]{N}$ nek megleltük némi közelitéssel gyökerét a' fent érintett mivelet szerint, ugy hogy noha ezen gyökér a nem épen tökéletes de a' különbség mellyet x nek nevezhetünk magában csekély, és $\sqrt[n]{N}=a+x$.

$$N \text{ tehát } =(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2+ \text{ 'sa' t.}$$

feltételünk szerint x csekély, még csekélyebb tehát x^2, 's ha sorunkban x^2ot már elhagyjuk, kis hibával tesszük $N=a^n+nb^{n-1}x$, 's itt $x=\frac{N-a^n}{na^{n-1}}$ ha pedig x^2ot is ide vesszük még, kifejezesünk lesz

$$=\frac{N-a^n}{na^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x}$$

's ha az elöbbení értékét $x$nek, itt a' nevezőbe helyezzük lesz a' második talált közelités

$$x=\frac{2a(N-a^n)}{(n+1)a^n+(n-1)N}=B$$

és $\sqrt[n]{N}=a+B$.

Ha $n=2$ lesz a' négyszeg gyökér kifejezése

$$\sqrt{N}=a+\frac{2a(N-a^2)}{3a^2+N}$$

$n=3$, lesz $\sqrt[3]{N}=a+\frac{2a(N-a^3)}{4a^3+2N}=\frac{(aN-a^3)}{2a^3+N}$

Ha p. o.: $\sqrt{6}$ értékéhez szorosan akarnánk közelíteni, tudván hogy némi közelitéssel

$$\sqrt{6}=2\cdot449489=a \text{ és } N=6.$$

Keressük x értékét 's lesz

$$x=\frac{2a(N-a^2)}{3a^2+N}=\frac{2\cdot449489\,(6-2\cdot449489^2)}{3(2.449489)^2+6}$$

$$\sqrt{6}=2\cdot449489+\frac{4\cdot898978(0\cdot000003638878)}{23\cdot999989083363}$$

$$=2\cdot449489742782,$$

'S ezen mivelet által még egyszer annyi tizedes jegyet nyerünk mint mennyit vettünk első közelitésül.

$\sqrt[5]{2}$ p. o.: 1·1 által közelítve van adva mert $\sqrt[5]{2}$ 1·1 és 1.2 közt van. Ha miveletünk szerint ezt vesszük a nak lesz

$$x = \frac{2\cdot 2.(0\cdot 38949)}{6.1\cdot 61051+8} = +0\cdot 0485 \text{ és}$$

$$\sqrt[5]{2} = 1\cdot 1 + 0\cdot 0485 = 1\cdot 1485.$$

Ha több helyet akarunk, 's biztosan mivelünk, ne vegyünk 3 helynél többet a' második közelitésre,

$$\sqrt[5]{2} = 1\cdot 148 + \frac{2\cdot 296\,(0\cdot 0060721458)}{19\cdot 9635671252} = 1\cdot 1486983544$$

hol a' 9 első hely tökélletes.

81. Tekintsünk végre némelly alakokat, minekelötte ezen fontos czikkelyt béfejeznénk; ezeknek is gyakorta jó hasznát vehetni.

$$1)\quad (a+x)^n = a^n\left(\frac{a+x}{a}\right)^n = a^n\left(\frac{a}{a+x}\right)^{-n}$$

$$= a^n\left(1 - \frac{x}{a+x}\right)^{-n} = a^n\left[1 + n\frac{x}{a+x}\right.$$

$$+ \frac{n(n+1)}{1.2}\,\frac{x^2}{(a+x)^2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}\,\frac{x^3}{(a+x)^3}$$

$$\left. + \quad \text{'s a' t.}\right]$$

$$2)\quad 1 - \frac{a-x}{a+x} = \frac{2x}{a+x} \text{ és megforditva } \frac{a+x}{2x}$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \dfrac{a-x}{a+x}}\right) \text{ lesz}$$

$$(a+x)=\left(\frac{2x}{1-\frac{a-x}{a+x}}\right) \text{ és ebből}$$

$$(a+x)^n=2^n x^n\left(\frac{1}{1-\frac{a-x}{a+x}}\right)^n=2^n x^n\left(1-\frac{a-x}{a+x}\right)^{-n}$$

$$=2^n x^n\left\{1+n\frac{a-x}{a+x}+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)\ (n+2)}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3+\text{'s a't.}\right\}$$

és ezen két sor' segéde által is sebesen közelitünk a' gyökerek valódi értékéhez.

3 §. Polynomok' emelései.

82. Eddigi ismereteink által könnyen megtalálhatjuk bárhány tagból álló kifejezés' bármelly emelését.

Ha három tagu kifejezést kellene valamelly m emelésre, p. o.: $(a+b+a)^m$ vinni, mindenkor két tagúra vihetjük vissza, 's irhatjuk

$$b+c=x \text{ 's lesz } (a+b+c)^m=(a+x)^m,$$

hol a' sorban x helyett ismét tehetjük értékét, a' sor pedig

$$a^m+ma^{m-1}(b+c)+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(b+c)^2+$$

$$+\frac{m\,(m-1)\ (m-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}(b+c)^3+\text{ 's a' t.}$$

hol a' két tagú hatóságokat kifejteni már ugyis tudjuk.

Szinte így tennénk ha négy vagy többtagú kifejezés lenne adva, 's mindazokat mellyek az első után következnek, egy tagnak vennénk. Legyen p. o.:

$$(a+b+c+d+e+f+\ldots\ldots k)^m$$

nevezzük az egész kifejezést Anak, a'n kívül a' többit

$b+c+d+e+\ldots k$. Bnek.
$c+d+e+\ldots k$ Cnek.
$d+e+\ldots k$. Dnek. 's a' t.

lesz $A^m=(a+B)^m=a^m+\begin{bmatrix}m\\1\end{bmatrix}a^{m-1}B+$

$$+\begin{bmatrix}m\\2\end{bmatrix}a^{m-2}B^2+\begin{bmatrix}m\\3\end{bmatrix}a^{m-3}B^3+$$

's a' t. legyen ezen sornak közönséges tagja

$$\begin{bmatrix}m\\p\end{bmatrix}a^{m-p}B^p.$$

Itt már csak B^p értékét kell keresni, 's ez

$$B^p=(b+C)^p=b^p+\begin{bmatrix}p\\1\end{bmatrix}b^{p-1}C+\begin{bmatrix}p\\2\end{bmatrix}b^{p-2}C^2+$$

$$+\begin{bmatrix}p\\3\end{bmatrix}b^{p-3}C^3+ \text{ 's a' t.}$$

ennek közönséges tagja $\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}b^{p-q}C^q$.

Szinte $C^q=(c+D)^q=c^q+\begin{bmatrix}q\\1\end{bmatrix}c^{q-1}D+$

$$+\begin{bmatrix}q\\2\end{bmatrix}c^{q-2}D^2+\begin{bmatrix}q\\3\end{bmatrix}c^{q-3}D^3+$$

's a' t. közönséges tagja $\begin{bmatrix}q\\r\end{bmatrix}c^{q-r}D^r$.

$$D^r=\&+\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}d^{r-s}E^s \text{ 's a' t.}$$

's így mig végre az utolsó kifejezésre jutunk melly csak a' két megmaradott tagot foglalja 's ez

$$H^u = (h+k)^u = h^u + \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} h^{u-1}k + \begin{bmatrix} u \\ 2 \end{bmatrix} h^{u-2}k^2 +$$
$$+ \begin{bmatrix} u \\ 3 \end{bmatrix} h^{u-3}k^3 + \text{ 's a' t.}$$

's közönséges tagja $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} h^{u-v}k^v$.

Öszvevevén mindezen külön közönséges tagokat lesz A^m közönséges tagja $\begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \ldots\ldots$

$$\ldots\ldots \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} a^{m-p} b^{p-q} c^{q-r} d^{r-s} \ldots k^{u-v} k^v$$

hol a' velejárókat ismerjük és
$$p+q+r+s+\ldots\ldots+u+v=m.$$

Ezen közönséges tag kifejtve
$$\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,.\;.\;.\;.\;.}{1.2.3(n-p)1.2.3\ldots(p-q)1.3.3\ldots(q-r)1.2.3}$$
$$\frac{.\;.\;.\;.4.3.2.1}{(r-s)1.2.(..).1.2.3.v}$$
ismeretes kifejezése a' váriálásnak.

83. Mint a' binomoknál láttuk, a' tagok' velejárójok öszvese a' kéttőnek emelései, ez nem egyéb mint a' kéttagú factorok annyiszori vétele hányszor kívánja a' mutató és ha egy binómot p. o.: m szer teszünk mint factort, bizonyosan a' két tag a' kettös számot képviseli 's épen annyi mintha a' kettőst tettük volna factor gyanánt m szer. De valamint kettönek emelései egyszérsmind azt mutatják hányszor lehet két mennyiséget bizonyos öszvesbe változtatni, a' sokszorozási származatok tagjainak mennyiségét is kijelöli.

P. o.: két tag két tag által sokszoroztatván 4 tagot ád, a' 4 tag 2 tag által 8at, a' 8 kettő által 16ot 's így tovább; hogy pedig az öszves velejárók az egyes tagok' számát jelölik azt tudjuk, és hogy a' nagyobb velejárók, több egyenlő tagok öszvehuzásából támadnak.

Előre bocsájtván ezt, nyilván látjuk hogy 3 tagnak emelései annyi tagot adnak hány egyest foglal magában 3 számnak ugyanazon emelése, p. o.:

$$(a+b+c)^3 \;\;,,\;\; 3^3=27 \text{ tagot},$$

és a' trinóm m dik emelése 3^m tagot ád,

Szinte így lesz a' 4 tagú mennyiség bármelly m emelésének tagszáma vagy a' tagok velejáróinak öszvese $=4^m$, az öt tagúnak 5^m és közönségesen az n tagúnak n^m.

A' kimondott' valóságáról bármelly külön példa meggyőz.

$$(a+b+c)\,(a+b+c)=aa+ab+ac+ba+$$
$$+bb+bc+ca+cb+cc,$$

's ha ezt ísmét $a+b+c$ vel sokszorozzuk lesz.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 \quad & aaa+aab+aac+aba+abb+abc\\ & +aca+acb+acc\\ & +baa+bab+bac+bba+bbb+bbc\\ & +bca+bcb+bcc\\ & +caa+cab+cac+cba+cbb+cbc\\ & +cca+ccb+ccc,\end{aligned}$$

az elsőben 9, a' másikban 3.9=27 tag van, 's ha az egyenlő kifejezéseket öszve vesszük, megleljük a' nagyobb velejárókat.

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2.$$

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3b^2a+3a^2c+b^3+$$
$$+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6.abc+c^3.$$

Hogy a' polynomok emeléseit csupa öszveilletés által is megtaláljuk, tán emliteni is szükségtelen. Az egész mivelet abban fog állani, hogy szorosan megtartsuk a' rendet és egy tag sem maradjon el, mit egy kis figyelem által könnyen elérhetní.

Tudjuk hogy a' kérdés a' váriálásra vezetvén vissza, minden adott elem mind magában legnagyobb mutatójával mind valamennyi más elemmel minden mutatóikkal megkívántatik.

Miként találjuk meg a' mutatók által a' tagok eleibe tartozó velejárókat, tudjuk. Vegyünk egy példát, de a' hely kiméllés kedviért egy kicsit, a' tanuló gyakorolhatja magát nagyobbon.

Kivántatík $(a+b+c+d)^4$ kifejlése, melly ha az elébbi inditvány szerint eszközöltetik $4^4=256$ tagot ád, keressük csak azon tagokat mellyek egymástól különböznek, 's a' velejárókra neis tekintsünk.

A' mivelet vissza vitetvén a' váriálásra, a' lenne, hogy négy négyféle elem lévén adva minden lehető öszverakás kivántatik 4 öszvesre 's a' 4 elem

$$aaaa,\ bbbb,\ cccc \text{ és } dddd.$$

Minden tagban tehát a' mutatóknak öszvese $=4$, és elemeink

$$a^4,\ a^3,\ a^2,\ a,\quad b^4,\ b^3,\ b^2,\ b,$$
$$c^4,\ c^3,\ c^2,\ c,\quad d^4,\ d^3,\ d^2,\ d.$$

Ha mindazon factorokat keressük mellyek a val jönek érintésbe megtaláljuk

$$a^4+a^3(b+c+d)+a^2(b^2+c^2+d^2+bc+bd+cd)$$
$$+a(b^3+c^3+d^3+b^2c+b^2d+c^2b+c^2d+$$
$$+d^2b+d^2c+bcd)$$

és szinte így találnánk meg a' többihez is a' factorokat, de minthogy csak egyszer akarjuk mindegyik tagot, következik

$$b^4+b^3(c+d)+b^2(c^2+d^2+cd)+b(c^3+d^3+c^2d+d^2c)$$
$$+c^4+c^3d+c^2d^2+cd^3+d^4.$$

'S valamennyi külön tag megvan, velejárója nélkül.

84. Ha p. o.: adva lenne

$$(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\ldots\ldots)^m$$
$$bx,\ cx^2,\ dx^3,\ ex^4,\ \text{'s a' t.}$$

könnyen felcserélhető elébbi, b, c, d, e, 's a' t. betüinkel, és kifejezésünknek mindenkor illy alakot adhatunk

$$(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\ldots)^m$$
$$=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots\ \text{'s a' t.}$$

hol A, B, C, D, 's a' t. velejárók 's mindazon jegyeket képviselik mellyekben x elő nem fordul, szinte így lesz

$$(a+by+cy^2+dy^3+ey^4+\ldots\ldots)^m$$
$$=A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4\ldots\ldots\ \text{'s a' t.}$$

's ha a' könnyeb tekintet okáért

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots.)=u \text{ és}$$
$$(a+by+cy^2+dy^2+\ldots.)=v$$

tesszük, lesz $\dfrac{u^m-v^m}{u-v}=$

$$=\frac{B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-y^3)+E(x^4-y^4)+}{b(x-y)+c(x^2-y^2)+d(x^3-y^3)+e(x^4-y^4)+}$$

's a' t. hol a' számláló és nevező $(x-y)$ által osztható 's lesz

$$=\frac{B+C(x-y)+D(x^2-y^2)+E(x^3-y^3)}{b+c(x-y)+d(x^2-y^2)+e(x^3-y^3)}$$

ha $x=y$ akkor $u=v$ és $\frac{u^m-v^m}{u-v}$ vissza vitetik mu^{m-1} ra, bármelly szám legyen m, és az előbbeni kifejezés lesz

$$m(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots.)^{m-1}=$$

$$=\frac{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+}{b+2cx+3dx^2+4ex^3+} \text{ 's a' t.}$$

de $$(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots..)^{m-1}$$

$$=\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+}{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+} \text{ 's a' t.}$$

tehát

$$\frac{m(A+Bx+Cx^2+Dx^3+ \text{ 's a' t.})}{a+bx+cx^2+dx^3+ \text{ 's a' t.}}=$$

$$=\frac{B+2Cx+3Dx^2+ \text{ 's a' t.}}{b+2cx+3dx^2+ \text{ 's a' t.}}$$

és a' nevezőket elenyésztetvén lesz.

$$m(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{'s a't.})(b+2cx+3dx^2+)=$$
$$=B+2Cx+3Dx^2+ \text{ 's a' t.})(a+bx+cx^2+dx^3+..)$$

Ha a' sokszorozást megtesszük következni fog

$$mbA+\left.\begin{matrix}mbB\\+2mcA\end{matrix}\right\}x\left.\begin{matrix}+mbC\\+2mcB\\+3mdA\end{matrix}\right\}x^2\left.\begin{matrix}+mbD\\+2mcC\\+3mdB\\+4meA\end{matrix}\right\}x^3\left.\begin{matrix}+mbE\\+2mcD\\+3mdC\\+4meB\\+5mfA\end{matrix}\right\}x^4$$

$$+ \text{ 's a' t. 's a' t.}$$

$$=\left.\begin{matrix}aB+2aC\\+bB\end{matrix}\right\}x\left.\begin{matrix}+3aD\\+2bC\\+cB\end{matrix}\right\}x^2\left.\begin{matrix}+4aE\\+3bD\\+2cC\\+dB\end{matrix}\right\}x^3\left.\begin{matrix}+5aF\\+4bE\\+3cD\\+2dC\\+eB\end{matrix}\right\}x^4 \text{'sa't.}$$

's ha az egyenlő hatóságon levő $x$ek velejáróját hasonlitjuk, lesz

$$aB=mbA.$$
$$2aC=(m-1)bB+2mcA.$$
$$3aD=(m-2)bC+(2m-1)cB+3mdA.$$
$$4aE=(m-3)bD+(2m-2)cC+(3m-1)dB+4meA.$$
$$5aF=(m-4)bE+(2m-3)cD+(3m-2)dC+$$
$$+(4m-1)eB+5mfA \text{ 's a' t.}$$

A' törvény könnyen észrevehető. Mindegyik velejáró B, C, D 's a' t. ismeretes ha A ismeretes; de látjuk hogy a' kifejlés értékét meg adhatjuk $x=6$ tevén; ekkor

$$(a+bx+cx^2+dx^3+ \text{ 's a' t.})^m=a^m \text{ és } A=a^m.$$

Ha ezen érték szerint számitjuk B, C, D, E, 's a' t. értékét,

$$(a+bx+cy^2+dx^3+ \text{ 's a' t.})^m$$

következő kifejezésbe válik.

$$a^m+ma^{m-1}bx+\left.\begin{array}{l}\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2\\ +\quad\frac{m}{1}a^{m-1}c\end{array}\right\}x^2 \text{ 's a' t.}$$

$$\left.\begin{array}{l}+\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.\,2.\,3}a^{m-3}b^3\\ +\quad\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}bc\\ +\quad\frac{m}{1}a^{m-1}d\end{array}\right\}x^3 \text{ 's a't.}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{m-4}b^4 \\
+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^2c \\
+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^{m-2}bd \\
+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^{m-2}c^2 \\
+\frac{m}{1}a^{m-1}e
\end{array}\right\} x^4\text{'s a't.}$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{m-5}b^5 \\
+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{m-4}b^3c \\
+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^2d \\
+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}bc^2 \\
+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}be \\
+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}cd \\
+\frac{m}{1}a^{m-1}f
\end{array}\right\} x^5\text{ 's a't.}$$

Ezen alakot Moivre adta először, 's általa minden külön tagot meglelhetni.

Az algebrában nincs olly viszon az ismeretlen közt, nincs olly kifejezés mellyet fejteni nem lehetne az által mit ezen szakaszunk foglal magában- mert a' legközönségesebbek nem lehetnek egyebek monom vagy polynomoknál, állító, tagadó, egész vagy tört hatóságokra víve.

VI. SZAKASZ.

ARÁNYOK. PROGRESSIOK ÉS SOROK.

1 §. Arányok.

85. Az arithmetikai vagy különbségi arányoknak haszonvétek láttuk korántsem olly kiterjedett mint a' geometrí vagy származatiaké.

Azonban semmi ollyas tulajdoní az arányoknak nincsenek mellyekkel az egyenletek nem bírnának; és a' mellett hogy a' sok szóbeli magyarázását azon viszonyoknak, mellyben az arányok' tagjai állanak egymasközt különböző változtatásaik által, meg kiméljük, sokkal világósabban és tisztábban adhatjuk elö mindazt, mi az arányokra nézve nevezetes, az egyenleteknél.

Kiterjedett értelemben véve az arányok is csak egyenletek, valamint mind - olly kétféle alak vagy kifejezés melly az egyenlet jegyével öszvecsatoltatik, az az minden két kifejezés mellyet öszve hasonlitunk. Hogy az egyenletekkel az egész könyv folytában, valamint az arithmetikában is folyvást széltire miveltünk, bizonyosan észrevette minden tanuló, 's nem fog így nehezére lenni ha az egyenletek tanához érvén csak egyedül az egyenletek feloldásával foglalatoskodunk, tulajdonává tevén már eddig majd mind azt, mi a' különböző miveleteket és alakokat illeti. Fussunk tehát sebesen keresztül, mindazon, mi az arányok' közönséges tekintetéhöz tartozik.

Legyen az arithmetikai arányok 4 tagja A, B, C, D, a' geometraiké a, b, c, d, 's legyenek (arithmetika 213, 214)

$$A \div B = C \div D \quad „ \quad a : b = c : d.$$

A' különbségi és származati viszony által a' kifejezés $\quad B - A = D - C \quad „ \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

ez ád $\quad A + D = B + C \quad „ \quad ad = bc.$

Az egyik arányban az külső tagok öszvese egyenlő a' belsők öszvesével, a' másikban szint így egyenlők a' származatok.

Ha $B = C$ és $b = c$, vagyis ha a' közép tagok egyenlők, akkor

$$A + D = 2B, \quad ad = b^2$$

a' két külső tag' öszvese vagy származata, egyenlő á' belső tag kettesével, vagy négyszegével.

Ebből következik $B = \frac{A+D}{2}$ „ $b = \sqrt{ad}$ honnan a' harmadik tag megtaláltatik.

Az eredeti aránylatok

$$B - A = D - C \quad „ \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

következőre vezetnek

$$C - A = D - B \quad „ \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

az az a' belső tagokat fellehet cserélni

$$A \div C = B \div D, \quad a : c = b : d,$$

és közönségesen minden felcserélése a' tagoknak helyt talál, melly megegyez

$$A+D=B+C,\ ad=bc\text{ vel.}$$

86. Elhagyván az arithmetikai arányt, tekintsük egyedül a' származatit.

Az egyenlet $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ mindkét tagjához bármely mennyiséget adhatunk vagy belöle levonhatunk, 's lesz

$$\frac{b}{a}\pm m=\frac{d}{c}\pm m$$

a' tagokat egyenlő számlálóra vivén lesz

$$\frac{b\pm am}{a}=\frac{d\pm cm}{c}\text{ 's ebből}$$

$$\frac{c}{a}=\frac{d\pm mc}{b\pm ma},\text{ ebből pedig az arány}$$

$$b\pm ma:d\pm mc=a:c$$

és $\frac{d\pm mc}{b\pm ma}=\frac{d}{b}$ vagy $b\pm ma:d\pm mc=b:d,$

az itt álló viszonyok könnyen észrevehetők.

Ha az öszvest és különbséget hasonlitjuk, lesz

$$\frac{d+mc}{b+ma}=\frac{c}{a},\ \frac{d-mc}{b-ma}=\frac{c}{a}$$

következik belőlök $\frac{d+mc}{b+ma}=\frac{d-mc}{b-ma}$

az az $b+ma:d+mc=b-ma:d-ma$

's ha a' belső tagok helyét felcseréljük

$$b+ma:b-ma=d+mc:d-mc,$$

's ha $m=1$, marad $b+a:b-a=d+c:d-c,$

$a:c=b:d$ből következik szinte így

$$\frac{c}{a}\pm m=\frac{d}{b}\pm m\ \text{,,}\ \frac{c\pm ma}{a}=\frac{d\pm mb}{b}$$

$c \pm ma : d \pm mb = a : b = c : d$ „ $c \pm a : d \pm b = a : b = c : d$
$c \pm a : c - a = d + b : d - b$

87. Legyen közönségesen több egyenlő tört vagy arány

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{h}{g} = q$'s a' t. hol $\frac{b}{a} = q$'s igy

$\frac{d}{c} = q, \ \frac{f}{e} = q, \ \frac{h}{g} = q$'s a' t. melly ád

$b = aq, d = cq, f = eq, h = gq$'s a' t.

's öszve adván valamenyit lesz

$$b + d + f + h + \text{'s a' t.} = aq + cq + eq + gq + \text{'s a' t.}$$
$$= q(a + c + e + g + \text{'s a' t.})$$

ebből következik

$$\frac{b + d + f + h + \text{'s a' t,}}{a + c + e + g + \text{'s a' t.}} = q = \frac{b}{a}$$

'S az illy egyenlő arányok sorában azt mondjuk, hogy bárhány tag öszvese ugy áll ugyan annyi utánna következő tag öszveséhez mint akarmelyik egyes tag, az utánna következő egyes taghoz.

Ha két egyenlő kifejezést veszünk, mint

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ és } \frac{f}{e} = \frac{h}{g}$$

az első és második tagokat mindegyikben sokszoroz hatjuk 's lesz

$\frac{bf}{ae} = \frac{dh}{cg}$, 's ez ád $ae : bf = cg : dh$.

melly arányra ugyis akadunk ha a' két külön arányok

$a : b = c : d$ és $e : f = g : h$

hasonló tagjait egymással sokszorozzuk: 's az illy öszvetett arány, az ereditiekből származik.

Természetes hogy a' tagbeli vagy sorbeli elosztás által ismét arányra találunk.

Ha, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ bizonyosan $\frac{b^m}{a^m} = \frac{d^m}{c^m}$ is, 's ez adja

$$a^m : b^m = c^m : d^m$$

tehát az arány négy tagja bármelly egyenlő emelésen is arányban marad; és szinte igy van ha a' mutató törtszám és

$$\frac{b^{-m}}{a^{-m}} = \frac{d^{-m}}{c^{-m}} \text{ vagy } \sqrt[m]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}} \text{ lévén}$$

$$\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}} \text{ vagy } \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

az egyenlő györekerek is arányban maradnak.

§ 2. Progressiok.

88. Az arithmetikai progressiokban, két egymás mellett álló tagközti különbség mindenkor egyenlő, 's azért neveztetnek különbségi progressioknak.

Legyen a' sor $a+b+c+d+d+f+g+h+$'s a' t. és a' különbség δ lesz

$b=a+\delta$, $c=a+2\delta$, $d=a+3\delta$, $e=a+4\delta$'s a' t.

és közönségesen ha m az n dik tag, $m=a+(n-1)\delta$, hol ha a' sor lemenő, δ tagadó.

A' különbségi progressioban a' kezdettöl és végtől egyenlő távolyban álló tagok öszvese mind egyenlő; 's ha az első tag a, az utolsó m, a' második b az utolsó elött való l, $a+m=b+l$'s igy mindegyik két két egyenlő távolyú tag, ha tehát az egyes tagok' száma n, lesz a' dupla vagyis kettös összitett tagok' száma $\frac{n}{2}$, egész sornak pedig öszvese

$$S = \frac{n}{2}(a+m) = \frac{n}{2}(b+l) = \frac{n}{2}(c+k) \text{ 's a' t.}$$

ha az utolsó tag' kifejezését melly $m=a+(n-1)\delta$ a' tagok öszvese kifejezésével öszvevesszük, az itt kérdésben forgó 5 mennyiség külön külön értékét könnyen megtaláljuk, 's ezek, a, a' kezdő tag; δ a' különbség n a' tagok' száma m az utolsó tag és S a' tagok' öszvese.

89. A' geometriai sorban a' különbség helyett részes áll, 's ha a' sor $a+b+c+d+e+f+g+$'s a' t.

és a' részes q

$$\frac{b}{a}=q, \frac{c}{b}=q, \frac{d}{c}=q, \frac{e}{d}=q \text{ 's a' t.}$$

vagy $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$'s a' t.

és $b=aq$, $c=aq^2$, $d=aq^3$, $e=aq^4$'s a' t.

az utolsó n dik tag pedig $m=aq^{n-1}$, melly egyszer smind közönséges tag is és általa akarmellyik megtalálható.

A' sor' öszvese $S=\frac{qm-a}{q-1}$

's ha m helyett ertékét aq^{n-1} tesszük

$$S=\frac{a(q^n-1)}{(q-1)}$$

ebből 's a' közönséges tag értékéből minden a' kérdésben forgó 5 mennyiség könnyen meglelhetö.

Ha q nagyobb mint 1, q^n annál nagyobb mentül több a' tagok' száma, és S nek értéke nagyobb lehet mint bármelly kigondolható szám. Deha q kisebb mint 1 és p. o. törtszám

$$\frac{1}{m} \text{ akkor,}$$

$$S=\frac{a\left(\frac{1}{m^n}-1\right)}{\frac{1}{m}-1}=\frac{am\left(1-\frac{1}{m^n}\right)}{m-1}=\frac{am-\frac{a}{m^{n-1}}}{m-1}$$

's mentül nagyobb n annál kisebb $\frac{a}{m^{n-1}}$ és S közeledik $\frac{am}{m^{n-1}}$ hoz, 's csak $\frac{a}{(m-1)\,m^{n-1}}$ közte a' különbség; vagyis a' különbség S és $\frac{am}{m^{n-1}}$ közt csekélyeb lehet mint bármelly csekély szám. A' mennyiség $\frac{am}{m-1}$ tehát azon határ mellyhez S nek tagjai szünetlenül közelítnek, nevezzük ezen határt H nak; példánkban

$$1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16}+{}^5/_{32}+{}^1/_{64} \text{ 's a' t.}$$

$$a=1,\ q=\frac{1}{m}={}^1/_2\ m=2 \text{ és } H=\frac{am}{m^{n-1}}=2$$

's mentül több tagot veszünk a' sorból annyival közelebb esünk 2 höz.

A' kifejezésböl $S=\frac{aq^{n-1}}{q-1}$ mindazon tagokat kifejthetjük mellyeket képvisel; tudván hogy

$$\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+q^2+q^3+q^4+\text{'s a' t.}\ldots q^{n-1} \text{ és}$$

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots aq^{n-1}$$

H nak értéke szintezen tulajdonokkal bír, és

$$\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m^3} + \frac{a}{m^4} + \ldots$$

$$\text{és } \frac{am}{m-1} = a + \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \text{'s a' t.}$$

m pedig $= \frac{1}{q}$ tehát megleljük elébbi sorunkat $= S$.

Ha itt egymásután $m=2$, $m=1$ és $m={}^1/_2$ lesz

$$1)\ \frac{m}{m-1} = 2 = 1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + \ldots$$

$$2)\ \frac{m}{m-1} = \frac{1}{0} = 1+1+1+1+1+1+1+\text{'s a' t.}$$

's tudjuk hogy ha ezen sorban, a' maradékot elhagyjuk, helytelenségre akadunk és

$$1 = (1+1+1+1+1+1+\ldots)0$$

az az mivel az osztandònak elő kell jönni, ha az osztó sokszoroztatik a' részessel, ezen esetben $1=0$ lenne.

$$3)\ \frac{m}{m-1} = \frac{{}^1/_2}{{}^1/_2 - 1} = \frac{{}^1/_2}{-{}^1/_2}. = -1$$

$$= 1+2+4+8+16+32+\ldots\text{'s a' t.}$$

melly eset szinte hamis ha a' maradék figyelembe nem vétetik.

Ha $m=-n$, a' kifejezés $\frac{n}{n+1}$ ba válík, 's ennek kifejtése

$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^5} + \text{'s a' t.}$$

Ha itt $n=1$. a' sor

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-\text{ 's a' t}$$

ha $n=2$. a' sor

$1-{}^1/_2+{}^1/_4-{}^1/_8+{}^1/_{16}-$'s a' t... $={}^2/_3$

Mindenkor végtelen sorra találunk tehát ha $\frac{m}{m-1}$ értékét kifejtjük.

3 §. Sorok.

90. Mind olly több tagból álló kifejezést, mellynek tagjai valamelly törvény szerint rendesen következnek egymásután, sornak nevezünk.

Ha a' tagokat különbség nélkül $t$vel jelöljük lesz illy közönséges sor

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5,\ t_6,\ t_7,\ t_8,\ t_9,\ldots t_n$$

hol az alsó számok azt jelölik mellyik tag hanyadik a' sorban.

Ha két tagközti különbséget $k$val jelölünk lesz p. o.:

$$kt_1=t_2-t,\ kt_2=t_3-t_2,\ kt_3=t_4-t_3 \text{ 's a' t.}$$

és közönségesen $kt_n=t_{n+1}-t_n$.

Ezen talált különbségek, ismét uj sort képzelnek magok közt, 's ez

$$kt_1,\ kt_2,\ kt_3,\ kt_4,\ kt_5,\ldots kt_n$$

és szinte így lehet a' tagokközti különbséget k^2al jelölni 's lesz

$$k^2t_1=kt_2-kt_1,\quad k^2t_2=kt_3-kt_2$$
$$k^2t_3=kt_4-kt_3\ldots\ k^2t_n=kt_{n+1}-t_n$$

's ezeket második különbségeknek nevezzük; szinte így következik az uj sorból

$$k^2t_1,\ k^2t_2,\ k^2t_3,\ k^2t_4,\ k^2t_5,\ k^2t_n$$

$$k^3t_1=k^2t_2-k^2t_1\ \ k^3t_2=k^2t_3-k^2t_2 \text{ 's a' t.}$$

$$k^3t_n=k^2t_{n+1}-k^2t_n$$

's így továb míg, a' 4 dik 5 dik 's a' t. n dik különbségre akadtunk.

Az első fő sort, nemző sornak, a' következőket pedig első, másodík, harmadík, n dik különbségi sornak, valamint k, k^2, k^3, k^4, k^n első, másodík, harmadík és n dik különbségnek nevezzük.

Az egymást követő különbségí sorokból könnyen reátalálunk a' nemző sor' akarmelyik tagjára, 's ha $t_1=t$ nek tesszük, lesz;

$t_1=t$

$t_2=t+kt$

$t_3=t+2kt+k^2t$

$t_4=t+3k+3k_2t+k^3t$

....

$t_6=t+5kt+10k^2t+10k^3t+5k^4t+k^5t$

és így tovább, valamint

$$t_n=a+(n-1)kt+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}k^2t+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.}k^3t+\text{ 's a' t.}$$

hol a' binomi kifejlésekre jutunk.

Legyenek S_2, S_3, S_4, S_5 's a' t. S_n két három, négy 's a't. n tagnak öszvesei, lesz értékek

$S_2=t_1+t_2=2t+kt.$

$S_3=t+t_2+t_3=3t+3kt+k^2t.$

$S_4=t+t_2+t_3+t_4=4t+6kt+4k^2t+k^3t$'s a' t. és

$$S_n=nt+\frac{n(n-1)}{1.2}kt+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}k^2t+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}k^3t+\text{ 's a' t.}$$

hol S_n öszvesitő tagja t_1, t_2, t_3, t_4, $t_5 \ldots t_n$ sornak.

Végre a' különbsegekét kifejezhetjük, a' nemző sor tagjai által 's lesz

$kt = t_2 - t_1$

$k^2 t = t_3 - 2t_2 + t_1$

$k^3 t = t_4 - 3t_3 + 3t_2 - t_1$

$k^4 t = t_5 - 4t_4 + 6t_3 - 4t_2 + t_1$ és közönségesen

$$k^n t = t_{n+1} - nt_n + \frac{n(n-1)}{2} t_{n-1} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \,.\, 3} t_{n-2} - \ldots \text{ 's a' t.}$$

4 §. Arithmetikai sorok.

91. Ha valamelly sornak tagjai közt a' különbség *állandó*, az az minden két egymásmelletti tagközt egyenlő; akkor a' sor arithmetikai; és csakugyan, az első-rendü; p. o.: a' természetes szám sorban a' tagokközti különbség $= 1$ és mindenütt$=1$ és a' sor

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...

első rendü arithmetikai sor.

Ha következendö sornak tagjai közt egymásután a' különbséget vesszük, lesz

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17...

különbség 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, egyenlően $=2$

szinte 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42...

5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...$=5$.

és mind az illyen sorok, elsőrendű arithmetikaiak.

A' sor, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81...

második rendű mert első különbsége

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17...

második pedig 2, 2, 2, 2, 2, 2, 's a' t.

A' sor 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, szinte 2 dik rendű de 1, 8, 27, 64, 125, 316, 343, 512, 729 's a' t. harmadik rendű mert első különbsége

$k^1=7$, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217 's a' t.

$k^2=12$, 18, 24, 30, 36, 42, 48 's a' t.

$k^3=$ 6, 6, 6, 6, 6, 6 's a' t.

'S így mellyik és hanyadik különbségek egyenlők és állandók ugyan annyi rendűnek neveztetik a' sor.

92. Az első rendű arithmetikai sorokban tudjuk,

$$kt=kt_2=kt_3 \text{ 's a' t.}$$

és k^2t_1 k^2t_2 .. k^3t_1 $k^3t_2 \ldots = 0$. 'S így a' közönséges tag $t_n = t+(n-1)kt$ (88)

$$\text{és } S_n = nt + \frac{n(n-1)}{2} kt = \frac{n}{2}(t+t_n) \text{ (88).}$$

1) A' természetes számsorban $t=1$ és $kt=1$.

2) a' páros számok sorában 2, 4, 6, 8, 10 's a' t.

$$t=kt=2, \; S_n = n(n+1)$$

3) a' páratlanokban 1, 3, 5, 7, 9, 11 's a' t.

$$t=1 \text{ és } kt=2, \; S_n = n^2$$

's mint látjuk, ezen sor' tagjainak öszveséből a' természetes sámok minden négyszegét megtaláljuk.

4) A' sorban

a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$, $a+5b+$'s a' t.

$t_1=a$ és $kt_1=b$ tehát $t_n=a+(n-1)b$ és

$$S_n = \frac{n}{2}(a+a+(n-1)b) = \frac{n}{2}(2a+(n-1)b)$$

5) A' sorban

$$\frac{1}{a}, \frac{b+a}{ab}, \frac{b+2a}{ab}, \frac{b+3a}{ab}, \frac{b+4a}{ab} \text{ 's a' t.}$$

$$t_1=\frac{1}{a},\ kt_1=\frac{1}{b} \text{ és } t_n=\frac{1}{a}+\frac{n-1}{b}=\frac{b+(n-1)a}{ab} \text{ és}$$

$$S=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a}+b+\frac{(n-1)a}{ab}\right)=\frac{n}{2}\frac{(2b+(n-1)a)}{ab}$$

6) A' sorban 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 's a' t.

$$t_1=1,\ kt_1=3.\ t_n=3n-2 \text{ és } S_n=\frac{(3n-1)n}{2}$$

7) Tudjuk hogy ha a' sornak tagjai páratlanok, egy közép tag van, melly kétszer véve akkora mint a' két melette lévő (bal és jobb) tag öszvese, és hogy a' két egyenlő távolú tagok, a' kezdet és végtől öszvesen véve egyenlők, p. o. közönségesen

$$t_n+t_1=t_{n-2}+t_2=t_{n-3}+t_3=t_{n-4}+t_4 \text{ 's a' t.}$$

és $t_{n-r}+t_r=t_n+t_1$.

A' középső tagra nézve, ha a' tagok' száma páratlan, legyen

$$n=2m+1 \text{ lesz}$$

$$t_{2m+1-r}+t_r=t_1+t_{2m+1}$$

és ha $r=m+1$

$$t_{2m+1-(m+1)}+t_{m+1}=t_1+t_{2m+1}=t_{m+1}+t_{m+1}$$
$$=t_1+t_{2m+1}=2t_{m+1}=t_1+t_{2m+1}.$$

93. A' másodrendű arithmet: sorokban k^3t, k^4t 's a' t. $=0$ vagy is a' második különbségen felül nincs más; és

$$t_n=t_1+(n-1)kt+\frac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 3}k^2t_1 \text{ és}$$

$$S_n=nt+\frac{n(n-1)}{2}kt+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}k^2t$$

de $kt=t_2-t_1$ és $k^2t=t_3-t_2+t_1$ és a' két kifejezést a' három első tag által adhatjuk, 's lesz

$$t_n = (3t - 3t_2 + t_3) - \frac{n}{2}(5t - 8t_2 + 3t_3) + \frac{n^2}{2}(t - 2t_2 + t_3)$$

$$S_n = \frac{n}{6}(11t - 7t_2 + 2t_3) - \frac{n^2}{2}(2t - 2t_2 + t_3) +$$

$$+ \frac{n^3}{6}(t - 2t_2 + t_3)$$

A' poligonál vagy szegletes számokat ismerjük (Arithm. 248) és hogy

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 a' három
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 négy
1, 5, 12, 22, 35, 57, 70, 92, 117 öt
1, 6, 15, 25, 45, 66, 91, 120, 153 hat
1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189 hétszegü
számok sora.

's a' t. . . . .

's az elsőnél $t=1$, $kt=2$ és $k^2t=1$

$t_n = {}^1/_2 n(n+1)$ „ $S_n = {}^1/_6 [n(n+1)(3+n-1)]$

a' másodiknál $t_n = n^2$

és $S_n = {}^1/_6 [n(n+1)(3+2(n-1)]$

az 5 szegnél $t_n = \frac{3n^2 - n}{2}$

és $S_n = {}^1/_6 [n(n+1)(3+3(n-1)]$

a' hatszegnél $t_n = \frac{4n^2 - 2n}{2}$

$S_n = {}^1/_6 [n(n+1)(3+4(n-1)]$

a' hétnél $t_n = \frac{5n^2 - 3n}{2}$

$S_n = {}^1/_6 [n(n+1)(3+5)(n-1)]$

hol a' törvény szembetünő, és bármely x szegletben lesz

$$t_n = \frac{(x-2)n^2-(x-4)n}{2}$$

$$\text{és } S_n = {}^1/_6 [n(n+1)(3+(x-2)(n-1))]$$

94. A' harmadrendű Arithm. soroknál,

$$t_n = t+(n-1)kt+\frac{(n-1)(n-2}{2}k^2t+$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3}k^3t \text{ és}$$

$$S_n = nt+\frac{n(n-1)}{1.2}kt+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}k^2t+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}k^3t.$$

A' pyramisi számok' sorai harmadrendüek 's ezek.

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165...három
1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285...négy
1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, 288, 405...öt
1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, 372, 525...hat és
1, 8, 26, 60,115, 196, 308, 456, 645...hétszegü
pyramisi számok' sora.

Minthogy ezen sorok' tagjai az előbbeni tagok öszveséből vannak öszvetéve, így mi elöbb S_n volt, most itt t_n és közönségesen x szegü pyramis számok n dik tagja

$$t_n = {}^1/_6 [n(n+1)(3+(x-2)(n-1))]$$

Az öszvítő tag meglelésére lesz

	kt_1	k^2t_1	k^3t
a' háromszegünél	3	3	1
négy	4	5	2
öt	5	7	3

	kt_1	k^2t_1	k^3t
hat	6	9	4
hét	7	11	5
's a' t.			

x szegűnél . . . . x,, $(2x-3)$,, $(x-2)$ és

$$S_n = n + \frac{xn(n-1)}{2} + (2x-3)\frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3} +$$
$$+ (x-2)\left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{2\ .\ 3.\ 4}[4+(x-2)(n-1)]$$

95. Az illy sorokat, mellyek más sorok öszveadásából támadnak alakított soroknak, valamínt tagjait alakitott számoknak nevezzük. Ha $(x-2)(n-1)$ hellyett, melly kifejezés mindegyik rendben előjön $=A$ tesszűk, lesz ez alakitott számok' másodrendjiben

$$t_n = \frac{n}{2}(2+A) \text{ és}$$
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2.\ 3}(3+A)$$

harmadrenben $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2.\ 3}(3+A)$,,

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3.\ 4}(4+A)$$

negyedikben $t_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3.\ 4}(4+A)$,,

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\ .\ 3.\ 4.\ 5}(5+A)$$

's így sorban, valamint az r dik rendben, (hol az r dik különbség állandó)

$$t_n = \frac{[n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+(r-2)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ r}(r+A)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+(r-1))}{2.\ 3.\ 4\ \ldots\ r(r+1)}(r+1+A)$$

Ha p. o. innen az ötödik rendü négyszegű számokat keresnénk lenne

$$r=5 \text{ és } x=4, \text{ és } A=2n-2$$

$$t_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$$

Ha, itt n helyett egymásután a' tagok' számát vagy helyét tesszük $n_1=1$, $=2$, $=3$, $=4\ldots$ lesz a' sor

1, 7, 27, 77, 182, 378, 714 's a' t.

's a' tagok' öszvesei

1, 8, 35, 112, 294, 672, 1386 's a' t.

5 §. Geometriai sorok.

96. A' Geometriai sorban, minden tag, az elötteállóval elosztatván ugyanazon részest adja, tehát minden az első után következő tag a' részes valamely hatóságával van sokszorozva.

Legyen az első tag a, a' részes r, lesz a' sor

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ar^5, \ldots ar^n$$

hol tudjuk az $n$dik tag vagy utolsó elöttvaló $=a_{n-1}=ar^{n-2}$ és $a_n=ar^{n-1}$ a' sor öszvese pedig

$$S = \frac{ar^n - a}{r-1} = \frac{ra_n - a}{r-1} \text{ (Arithm. 246)}.$$

Ha az öszves, részes és a' tagok' száma vannak adva, megtaláltatik az utolsó tag

$$a_n = \frac{r^{n-1}(r-1)S_n}{r^n - 1} \text{ és } a = a_n\, r^{n-1} \text{ és}$$

$$r^n = \frac{ra_n}{ra_n - (r-1)S_n}.$$

Ha r kisebb mint az egység, a' sor közelit, és A_n mindég kisebb mentül nagyobb n. Ha p. o.:

$$S_n = \frac{a}{1-r} \text{ban, } a = \frac{1}{2} \text{ és } r = \frac{1}{2}$$

a' sor $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$'s a' t.

és $S_n = \frac{{}^1/_2}{1-{}^1/_2} = 1.$

Ha $a = \frac{1}{2}$ és $r = -\frac{1}{2}$ épen ugy lesz a' sor

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \text{'s a' t.} = \frac{1}{3}$$

Jegyzék. Szám rendszerünk a' geometriai sorok alapján épült, és különösen, a' szakaszos tizedes törtek (nevezőji állandóak lévén) tiszta geometriai sorokat képviselnek, 's p. o.:

$$0\cdot33\dot{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \text{'s a' t.}$$

$$0\cdot030\dot{3}0\dot{3} = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^4} + \frac{3}{10^6} + \text{'s a' t.}$$

$$= \frac{3}{100} + \frac{3}{100^2} + \frac{3}{100^3} + \text{'s a' t.}$$

$$0\cdot126126\dot{1}2\dot{6} = \frac{126}{1000} + \frac{126}{1000^2} + \frac{126}{1000^3} + \text{'s a' t.}$$

$$9\cdot71126126\dot{1}2\dot{6} = 9\cdot71. + \frac{126}{10^5} + \frac{126}{10^8} + \frac{126}{10^{11}} + \text{'s a't.}$$

az első $0\cdot33\dot{3}=\dfrac{{}^3/_{10}}{1-{}^1/_{10}}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

$$0\cdot0\dot{3}030\dot{3}=\frac{{}^3/_{100}}{1-{}^1/_{100}}=\frac{3}{99}=\frac{1}{33}$$

$$0\cdot\dot{1}26126\dot{1}2\dot{6}=\frac{{}^{126}/_{1000}}{1-{}^1/_{1000}}=\frac{126}{999}=\frac{14}{111}$$

és $9\cdot711261\dot{2}612\dot{6}=9\cdot71+\dfrac{\frac{126}{10^5}}{1-\frac{1}{10^3}}=\dfrac{971}{10^2}+\dfrac{14}{10^2.111}$

$$=\frac{107795}{11100}\text{, így}$$

$$0\cdot575757=\frac{{}^{57}/_{100}}{1-{}^1/_{100}}=\frac{57}{99}=\frac{19}{33}.$$

6 §. Kevert sorok.

97. Ha valamelly arithmetikai sor

$$a,\ a+k,\ a+2k,\ a+3k,\ a+4k,\ \text{'s a' t.}$$

tagjait (hol k a' különbség) egy geometria sor tagjaival $1,\ r,\ r^2,\ r^3,\ r^4 \ldots.$ egyenként sokszorozzuk következő sor támad

$$a,\ (a+k)r,\ (a+2k)r^2,\ (a+3k)r^3,\ (a+4k)r^4\ \text{'s a' t.}$$

$$[a+(n-1)k]\,r^{n-1}\ \text{hol } n \text{ tag van öszvesen.}$$

Ha az egyes tagokat kifejtjük lesz

$$a$$
$$ar+kr$$
$$ar^2+kr^2+kr^2$$
$$ar^3+kr^3+kr^3+kr^3$$

$$ar^4+kr^4+kr^4+kr^4+kr^4$$

. . . .

$$ar^{n-1}+kr^{n-1}+kr^{n-1}+kr^{n-1}+kr^{n-1}+\text{'s a' t.}$$

A' függő sorokban álló tagok öszvesei pedig sorjában

$$\frac{ar^n-a}{r-1},\ \frac{kr^n-kr}{r-1},,\ \frac{kr^n-kr^2}{r-1},,\ \frac{kr^n-kr^3}{r-1}\ \text{'s a' t.}$$

és ha mindezen egyes tagokat öszvevesszük lesz az egész kevert sornak öszvese

$$S_n=\frac{ar^n-a}{r-1}+(n-1)\frac{rk^n}{r-1}-$$

$$-\frac{rk}{r-1}(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^{n-2})$$

tehát $$S_n=\frac{a(r^n-1)+nkr^n}{r-1}-\frac{rk(r^n-1)}{(r-1)^2}.$$

VII. SZAKASZ.

LOGARITHMOK.

1 §. A' logarithmok, sorban kifejtve.

98. Minekelőtte a' logarithmok' kifejtésére lépnénk, megkell bizonyitnunk, hogy két sorban, melly két sor valamelly ismeretlennek hatóságaiból áll, és ezen hatóságok töllük független velejárokat hordanak, mindazon velejárók a' két sorban, mellyek az ismeretlen, vagy változónak egyenlő hatóságai melett állanak, egyenlők egymáshoz. Legyen a' két egyenlő sor:

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+..$$
$$=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+ \text{'s a't.}$$

azt mondjuk hogy, ha a' velejárók

$$A, B, C, D, E.....a, b, c, d, e \text{ 's a' t.}$$

xtől függetlenek, bármelly értéke legyen $x$nek mindenkor

$$A=a, \ B=b, \ C=c, \ D=d, \ E=e \text{ 's a' t.}$$

Ha két sorunkban $x=o$, bizonyosan mindkét sorban valamennyi tag elenyészik melly A és a után áll és $A=a$, mi már a' feltételből is nyilván foj, mert A és a, x értékétől függetlenek

Ha tehát $A=a$, két sorunkból mindkettőt elhagyjuk 's marad mindenkor

$$Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots\ldots$$
$$=bx+cx^2+dx^3+ex^4+ \text{ 's a' t.}$$

De a' két sort most 2 által eloszthatjuk 's lesz

$$B+Cx+Dx^2+Ex^3+\ldots\ldots$$
$$=b+cx+dx^2+ex^3+ \text{ 's a' t.}$$

és előbbi tekinteteink szerínt, szinte $B=b$.

Hasonlóképen találjuk meg

$$C=c,\ D=d,\ E=e, \text{ 's a' t.}$$

Ezen tan az algebrában olly fontosságu, hogy egy a' legerösb eszközei közül való az analitikai tekinteteknek.

99. Tudjuk (Arithmetika 266) hogy ha

$$y=a^x \quad x=\log y$$

az az hogy x logarithmája y nak, a pedig a' logarithma' valamelly alapja.

Tekintsük a' kifejezést a^x, és keressük kifejlését olly sorban melly x felmenő hatóságait foglalja magában.

Tudjuk hogy

$$(1+y)^n=1+ny+\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}y^2+\begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix}y^3+\begin{bmatrix}n\\4\end{bmatrix}y^4+\ldots\ldots$$
$$+\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}y^r+ \text{ 's a' t.}$$

Ha ezen sorban $1+y$ helyett at és n helyett $x$et írunk, lesz $y=a-1$, és sorunk.

$$a^x=1+x(a-1)+\begin{bmatrix}x\\2\end{bmatrix}(a-1)^2+\begin{bmatrix}x\\3\end{bmatrix}(a-1)^3+$$
$$+\begin{bmatrix}x\\4\end{bmatrix}(a-1)^4+\ldots\ldots\begin{bmatrix}x\\r\end{bmatrix}(a-1)^r+\text{'s a' t.}$$

$$a^x = 1 + x(a-1) + \frac{x(x-1)}{2}(a-1)^2 +$$
$$+ \frac{x(x-2)(x-2)}{1.\ 2.\ 3}(a-1)^3 + \ldots.$$
$$+ \frac{x(x-1)\ (x-2)\ldots(x-r+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ldots\ .\ r}(a-1)^r$$

és ezen sorban x lévén az ismeretlen vagy változó, csupán csak felmenő hatóságait tekinthetjük $x$nek, minden egyéb mennyiség pedig $x$nek velejárója; és sorunk bizonyosan következő alakba írathatik

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ 's a' t.} \quad (1)$$

hol A, B, C, D, 's a' t.

határozandók. Szinte illy sorra akadunk ha x helyett z et írunk, 's lesz

$$a^z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ 's a' t.} \ (2).$$

100. Ezen két sorból különböző uton megtaláljuk

A, B, C, D, 's a' t.

értékét, tekintsük a' két legegyszerübbet.

I) Ha a' második sort az elsőből levonjuk (mi tagonként történik) lesz

$$a^x - a^z = B(x-z) + C(x^2-z^2) + D(x^3-z^3) +$$
$$+ E(x^4-z^4) + \text{ 's a' t.}$$

Itt a' második rész tagjainak közös factorát $(x-z)$ kivévén írhatjuk

II) $$a^x - a^z = (x-z)\ [B + C(x+z) +$$
$$+ D(x^2+xz+z^2) + \text{ 's a' t.}]$$

Tudjuk hogy

$$a^x - a^z = a^z\,(a^{x-z}-1)$$

és ha feljebbi sorunkban x helyett $x-z$ et írunk lesz.

$$a^{x-z}=A+B(x-z)+C(x-z)^2$$
$$+D(x-z)^3+ \text{'s a' t.}$$
$$=A+(x-z)[B+C(x-z)$$
$$+D(x-z)^2+E(x-z)^3+ \text{'s a' t.}]$$

lesz pedig

$$a^x-a^z=a^z(a^{x-z}-1)\text{ból}$$
$$=a^z(x-z)[A+B(x-z)+C(x-z)^2$$
$$+D(x-z)^3+ \text{'s a' t.}]$$

Ha ezen kifejezést 2) be tesszük, 's mindkét részben $(x-z)$ el osztunk lesz

$$B+C(x+z)+D(x^2+xz+z^2)+ \text{'s a' t.}$$
$$=a^z(B+C(x-z)+D(x-z)^2+ \text{'s a' t.}$$

Ha ezen kifejezésben, melly x és z minden értékével megáll, $x=z$ tesszük, a' második részben csupán csak B marad, minden többi tag elenyészik és lesz

$$B+C2x+D3x^2+E4x^3+\ldots\ldots=a^x.B.$$

Ha ezen kifejezésben a^x helyett a' neki megfelelő sort $\quad A+Bx+Cx^2+$'s a' t.

tesszük, lesz mivel $A=1$.

$$B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+ \text{'s a' t.}$$
$$=B+B^2x+BCx^2+ \text{'s a' t.}$$

's mivel végre ezen két sorban x egyenlő hatóságainak velejáróji egyenlők

$$2C=B^2,\ 3D=BC \quad \text{'s a' t.}$$

lesz $C=\frac{B^2}{2}$, $D=\frac{BC}{3}=\frac{B^3}{2.3}$ szinte

$$E=\frac{B^4}{2.3.4} \quad \text{'s a' t.}$$

és sorunk

$$a^x = A + Bx + \frac{B^2x^2}{1.2} + \frac{B^3x^3}{1.2.3} + \frac{B^4x^4}{1.2.3.4} + \text{'s a't.}$$
$$= 1 + Bx + \frac{B^2x^2}{1.2} + \frac{B^3x^3}{1.2.3} + \frac{B^4x^4}{1.2.3.4} + \text{'s a't.}$$

Ha ezen sorban $B=1$, B értékének megfelelő értéke a' nak legyen e, változik sorunk.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} +$$
$$+ \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} \text{ 's a' t.}$$

ha itt tovább $x=1$ lesz

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{'s a' t.}$$

ezen sorból annyi tagot vehetünk öszve mennyit akarunk, és p. o.: tizenegy tag' öszvese már a' tizedes tört' hetedik helyére bé nem folyik 's lesz tizenegytag öszvesével $e=2\cdot7182818$.

Ezen számot Napier híres mathemata találta előre, 's alapjává tette azon logarithmi rendszernek, melly nevét viseli.

Ezen logarithmokat hyperboli logarithmoknak is nevezzük, mert a' hyperbola némelly tulajdonival megegyeznek.

101. Tekintsük ezen számnak másik kifejtését.

Legyen ismet két sorunk

$$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{'s a' t.}$$
$$a^z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{'s a' t.}$$

szinte mint elébb lesz.

$$\frac{a^x - a^z}{x - z} = B + C(x-z) + D(x^2 + xz + z^2)$$
$$+ E(x^3 + x^2 z + xz^2 + z^3) +$$

ha a' kifejezésben

$$a^x - a^z = a^z(a^{x-z} - 1),\ a = 1 + b$$

tesszük lesz

$$(1+b)^{x-z} = 1 + \left(\frac{x-z}{1}\right)b + \frac{(x-z)(x-z-1)}{1.2}b^2 +$$

's a' t. és

$$a^z(a^{x-z} - 1) = a^x\left(\frac{x-z}{1}b + \frac{(x-z)(x-z-1)}{1.2}b^2 +\right)$$

és szinte

$$a^z(b + \frac{x-z-1}{2}b^2 + \frac{(x-z-2)\ (x-z-2)}{2.3}b^3 +$$
$$= B + C(x+z) + D(x^2 + xz + z^2) + \text{ 's a' t.}$$

's ha ezen kifejlésben $z = x$ lesz

$$a^x(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{ 's a' t.})$$

ha a^x factorát $\quad b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} +$'s a' t.

rövidités okáért α nak vesszük lesz

$$a^x\alpha = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{ 's a' t.}$$

's itt a^x helyett első kifejlését

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ 's a' t.}$$

vévén találjuk

$$A\alpha + B\alpha x + C\alpha x^2 + D\alpha x^3 + E\alpha x^4 + \text{ 's a' t.}$$
$$= B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{ 's a' t.}$$

's ebből következnek

$$B = A\alpha,\ C = \frac{B\alpha}{2},\ D = \frac{C\alpha}{3},\ E = \frac{D\alpha}{4}, F = \frac{E\alpha}{5}$$

's a' t. kivévén A t mindegyik velejárót megleljük, de tudván hogy ha $x=0$ akkor $A=1$,

$$\text{és } B=\frac{\alpha}{1},\ C=\frac{\alpha^2}{1.2},\ D=\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\text{ 's a' t.}$$

és következésképen

$$y=a^x=1+\frac{\alpha x}{1}+\frac{\alpha^2 x^2}{1.2}+\frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^4 x^4}{1.2.3.4}+\text{'s a't.}$$

Megjegyzendő az, hogy bármelly értéke legyen $x$nek a' sor mindenkor közelitő, mert ha p. o.: a' sor közönséges tagja $\frac{\alpha^n x^n}{1.2.\ldots.n}$, utána fog következni $\frac{\alpha^{n+1}x^{n+1}}{1.2..n(n+1)}$ és a' két tagközti részes $\frac{\alpha x}{n+1}$ bizonyos pedig, hogy a' tagok száma szaporodásával $n+1$ nagyobb lesz αx nél, az az értéke kisebb mint az előtte álló tagé, nyilván tehát hogy az értékek kisebbedése folytában következik a' tagok számával, vagyis hogy a' sor közelitő.

Előbbi sorunkban még α értékét kell keresnünk; ez tudjuk volt $b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+$'s a' t., ha itt b értékét visszaadjuk melly $a-1$ lesz

$$\alpha=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{ 's a' t.}$$

melly sor csak akkor közelit ha $a-1$ kisebb az egységnél.

De látni fogjuk hogy olly közelitő lehet mint akarjuk, mert a és α közt függés van, melly következendő: ha feltesszük hogy $x=\frac{1}{\alpha}$; sorunkból

$$a^x = 1 + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{1.2} + \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3} + \text{'s a' t.}$$

lesz $a^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} +$

's a' t. és ha itt $a^{\frac{1}{\alpha}} = e$ lesz a' 11 első tag öszvesével $e = 2{\cdot}7182818$ mint feljebb.

Megleltük tehát mindkét uton Napier logarithmainak alapját. Tekintsük további alkalmaztatását.

102. A' kifejezésből $a^{\frac{1}{\alpha}} = e$ következik $a = e^{\alpha}$ és mindegyik, logarithmaját vevén

$$\log a = \alpha \log e$$

ha a' log alapja a, lesz $\alpha = \frac{1}{\log e}$ és következésképen ezen feltétel által

$$y = a^x = 1 + \frac{x}{1 \log e} + \frac{x^2}{1.2\,(\log e)^2} + \frac{x^3}{1.2.3(\log e)^3} +$$

's a' t. és ez $y$nak kifejezése, logarithmája által.

Ha $a = e$ akkor $\alpha = 1$'s innen

$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{'s a' t.}$$

Kérdésünk eszerint felvan oldva mert y értéke x-ben van adva; vagy is, ha x valamelly e számnak logarithmája adva van a alapra nézve, akkor y értékét megleljük.

De a' kifejezés által, ha α értékét $a$ban adjuk a' második kérdésre is megfelelünk, melly, *adva lévén valamelly szám, kerestetik logarithmája?*

Legyen a bármelly szám, 's tegyük α helyibe, lesz a' kifejezés szerint

$$\alpha \log e = \log a$$

$$\log a = \log e \left\{\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \right\}$$

's a' t. 's így bármelly szám logarithmája adva a' szám által egyedül és valamelly e szám logarithmája által.

Ezen sor csak akkor közelít ha a ígen közel áll egyhez, de mivel $\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a$ (arithmetika 287) lesz sorunk

$$\log a = m \log e \left\{\frac{\sqrt[m]{a}-1}{1} - \frac{\sqrt[m]{(a-1)^2}}{2} + \frac{\sqrt[m]{(a-1)^3}}{3} - \frac{\sqrt[m]{(a-1)^4}}{4} + \text{'s a' t.}\right\}$$

's ha m et elég nagyra vesszük $\sqrt[m]{a}$ olly kevéssé fog 1 től különbözni mint akarjuk.

Ezen sor által már a számnak logarithmaját meglelhetjük de nálánál még alkalmasabbakat is fogunk látni.

102. Feltettük a független a' logarithmi alaptól, tehát a' sor akarmelly más számra is alkalmazható 's lesz szinte így

$$\log y = \log e \left\{\frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{2.3} - \frac{(y-1)^4}{2.3.4} + \text{'s a' t.}\right\}$$

's ha itt y helyett $1+u$ írunk lesz

$$\log(1+u)=\log e\left\{\frac{u}{1}-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\text{ 's a' t.}\right\}$$

's ha ut tagadó jeggyel vesszük lesz

$$\log(1-u)=\log e\left\{-\frac{u}{1}-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}-\text{ 's a' t.}\right\}$$

s' ha a' második kifejezést az elsőbül levonjuk, lesz

$$\log(1+u)-\log(1-u)=\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$$

$$=2\log e\left\{\frac{u}{1}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}+\text{ 's a' t.}\right\}$$

melly sor sebesebben közelit.

Egy méginkáb közelítő sorra akadunk ha

$$\frac{1+u}{1-u}=1+\frac{z}{n}$$

mellyből következik $u=\dfrac{z}{2n+z}$ és

$$\log\left(1+\frac{z}{n}\right)=\log\frac{n+z}{n}=\log(n+z)-\log n$$

$$=2\log e\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\right\}$$

és $\log(n+z)=\log n+2\log e\left\{\dfrac{z}{2n+z}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{z}{2n+z}\right)^3\right.$

$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\text{ 's a' t.}\right\}$$

S' ezen utolsó sorunk valamelly $n+z$ számnak logarithmaját adja n által, 's annyival ínkáb közelít mentül nagyobb n.

Ha p. o.: $z=1$, a' kifejezés ígen egyszerü és

$$\log(n+1)=\log n+2\log e\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5}+\text{'s a' t.}\right\}$$

melly akkor is közelit ha $n=1$, melly esetben

$$\log 2=2\log e\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\text{'s a' t.}\right\}$$

's ha a' sor belső tagjaiból 8 at veszünk lesz

$$\log 2=\log e.0\cdot6931472$$

hol látjuk log 2 értéke még log e értékétűl függ. Legegyszerübb lesz ha, log $e=1$ nek tesszük, ekkor

$$\log 2=0\cdot6931472,$$

's tudjuk hogy e, előbbi visgálataink szerint Napier logarithmanak alapja.

103. Ha a' binomi tan szerint $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ et kifejtjük, lesz

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{1.2}\frac{1}{n^2}+$$
$$+\frac{(nx)(nx-1)(nx-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{1}{n^3}+\text{'s a' t.}$$
$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{1.2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{2.\ 3}+$$

$+$'s a' t. de minthogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{x}$ és

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{2.\ 3}+$$

's a' t. tehát

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left[1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{2.\ 3}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{2.\ 3.\ 4}+\right]^{x}$$

melly kifejezésben, ha n végnélküli nagy, tudjuk a' tagok $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$'s a' t. ... mind semmivé válnak és

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\text{'s a' t.}$$

's ha több tagot öszveveszünk, lesz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ értéke mint már ismerjük $=e=2{\cdot}718281828359055.....$ közelítve, az az ha $n=\infty$, lesz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=e^{x}$, Napier logarithmi alapja.

Mivel ezen értéke e nek olly szoros öszveköttetésben van a' számok természetével, és különböző visgálatok reá vezetnek, helyesen nevezzük őt természetes alapnak és a' rajtok épült logarithmokat természetes logarithmoknak.

104. Ha kifezésünkben

$$a^{x}=1+Ax+\frac{A^{2}x^{2}}{1.2}+\frac{A^{3}x^{3}}{1.2.3}+\text{'s a' t.}\quad x=1 \text{ lesz}$$

$$a=1+A+\frac{A^{2}}{1.2}+\frac{A^{3}}{1.23}+\text{'s a' t.}$$

és ha kifejezésünkben

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+ \text{'s a' t. } x=A$$

lesz $a=e^A$ (1)

Elébbi értéke A nak volt

$$(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+\text{'s a' t.}$$

ha most a t olly alapul vesszük, mellyszerint logarithmi táblát akarnók szerkeztetni, irjunk helyette n et 's legyen A értéke, ha p lenne e mutatója

$$(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\frac{1}{4}(n-1)^4+\text{'s a' t.}$$

és $n=e^p$ (2)

's itt p, n nek logarithmaja e alapon: mit írunk

$$\log n=p$$

Minthogy most más logarithmi alapot visgálunk írjuk megkülönböztetésül a' természetes logarithmokat L, el és a' többit mind eddig jelöltük log: al, mint $Ln=p$.

Ha p értékét melly

$$=n-1-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\text{ 's a' t.}$$

itt használjuk lesz

$$\log n=n-1-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\frac{1}{4}(n-1)^4+$$
$$+\frac{1}{5}(n-1)^5-\text{ 's a' t.} \qquad (3)$$

's minthogy $\log n=\log e^p=p\log e$, lesz

$$\log n=\log e\left\{(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1'}{3}(n-1)^3-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}(n-1)^4+\text{'s a' t.}\right\} (4)$$

Itt tehát log e, a alapra van víve, és ugy látszik hogy meg sem találjuk értékét, de (1) kifejezés segélni fog bennünket, abban $a=e$ mutatja hogy log. $a=A$ log e, de mivel minden alapnak logarilhmája $=1$, szintugy lesz A log $e=1$'s így $\frac{1}{A}=$ log e. 'S így lesz e logarithmája a alapon.

Ismervén A értékét melly

$$=a-1-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{ 's a' t.}$$

ez pedig csakugyan a' természetes logarithmája a nak, használván itt a' megkülönböztetést lesz

$$\frac{1}{La}=\log e \text{ és a' (4) kifejezés}$$

$$\log n=\frac{1}{La}\left\{n-1-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}(n-1)^4+\text{ 's a' t.}\right\}$$

hol a' korlátokközti mennyiség n nek természetes logarithmája.

A' kifejezés $\frac{1}{La}$, mellyel ezen természetes log. sokszorozva van, hogy általa ugyanazon szám logarithmaját a alapra meglelhessük, ezen rendszer *modulájának* neveztetik, és nyilván n bármelly értékére nézve ugyanaz, és csupán csak a' rendszer alapjától függ.

Lesz tehát bármelly számnak logarithmája, ha ezen modulát M el jelöljük

$$\log n = M\Big(n-1-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-$$

$$-\frac{1}{4}(n-1)^4+\text{'s a' t.}\Big\} \qquad (5)$$

105. Noha ezen kifejezés, tökéletes algebrai feloldását foglalja magában a' kérdésnek, mégís adhatunk neki olly alakot, melly a' mindennapi haszonvétre alkalmasabb; mert ha itt p. o.: n nagyobb 2nel, már sorunk nem közelitő, de minden következő tagja nagyobb nagyobb lévén sebesen távozó vagy szélledő. Változtassuk tehát a' sor alakját 's tegyük n helyett $1+\alpha$, ugy hogy $n-1=\alpha$ legyen, sorunk pedig

$$\log(1-\alpha) = M\Big\{\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha^4+\text{'s a' t.}\Big\}$$

ha pedig $a=1-\alpha$ lesz

$$\log(1-\alpha) = M\Big\{-\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha^4-\text{'s a' t.}\Big\}$$

Levonván az utolsób sort az előbbiből és szemelőtt tartván hogy

$$\log(1+\alpha)-\log(1-\alpha) = \log\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \text{ lesz}$$

$$\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = 2M\Big\{\alpha+\frac{\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^5}{5}+\frac{\alpha^7}{7}+\text{'s a' t.}\Big\} \quad \text{(lásd 102)}$$

ezen sorunknak még egyszerübb alakot adhatunk ha

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{b}{c}\text{nek tesszük ekkor } \alpha = \frac{b-c}{b+c}, \text{ és}$$

$$\log\frac{b}{c} = 2M\Big\{\frac{b-c}{b+c}+\frac{1}{3}\Big(\frac{b-c}{b+c}\Big)^3+\frac{1}{5}\Big(\frac{b-c}{b+c}\Big)^5+$$

$$+\text{'s a' t.}\Big\} \qquad (6)$$

melly sor annál sebesebben közelít mentül kisebb a' b és c közti különbség.

Igen alkalmas a' haszonvétben a' két számot úgy venni hogy $b-c=1$, vagyis olly két számot venni melly a' természetes számsorban egymás melett áll, tudván hogy $\log\frac{b}{c}=\log b-\log c$

$$\text{és hol } \log b=\log\frac{b}{c}+\log c,$$

minden számnak sorban megleljük logarithmaját.

106. Hatodik sorunkból (6) tüstént megleljük M értékét melly $=\frac{1}{La}$ mint tudjuk; ha tehát M et abból elhagyjuk vagyis a' természetes logarithmokra visszatérünk lesz

$$\left.\begin{array}{l} L\frac{b}{c}=2\left(\frac{b-c}{b+c}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^5+ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \text{'s a' t.} \end{array}\right\} \quad (7)$$

Tudjuk hogy Briggi vagy közönséges logarithmaink alapja 10 vagyis $a=10$, ha tehát M et akarjuk megtalálni melly eszerint $M=\frac{1}{L10}$ szükséges hogy 10 nek természetes logarithmaját felkeressük.

Minthogy $L10=L(2.5)=L2+L5$
a' 7 dik sorban $b=2$ és $c=1$ tévén lesz

$$L2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\text{'s a' t.}\right)$$

's ez tudjuk

$$L2=\cdot 69314718,\ \text{ebből } L4=2L2.$$

Sorunkban ismét legyen $b=5$ és $c=4$ lesz

$$L\frac{5}{4}=2\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5}+\text{'s a' t.}\right\}$$

melly sor sebesen közelítvén ád, ha $L4$ hozzá adjuk

$$L5=1\cdot60943191 \text{ és } L5+L2=L10=2\cdot30258509$$

tehát $M=\dfrac{1}{L10}=\cdot43429448.$

Ha tehát a' természetes logarithmokról a' közönségésekre megyünk által, azokat 0·43429448 al sokszorozzuk, ha pedig közönséges logarithmokat természetiekbe akarunk változtatni, azokat 2·30258509-al kell sokszorozni.

Az illy változtatások gyakorta szükségesek.

Igy lesz p. o.

$L2.M=\cdot69314718\times\cdot43429448=\log2=\cdot3010300$

és $L5.M=1\cdot60943791\times\cdot43429448=\log5=0\cdot6989700$

mint a' közönséges táblákban.

107. Hatodik sorunk (6) segéde által tehát bármelly számnak logarithmaját könnyen megtaláljuk tudván hogy M nek értéke ·43429448 és $2M=$ ·86858896 's így

$$\log\frac{b}{c}=\cdot868588964\left\{\frac{b-c}{b+c}+\frac{1}{3}\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{b-e}{b+c}\right)^5\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7}\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^7-\text{'s a' t.}\right\}$$

A' miveletet szóval magyarázván, következő szabályokra találunk valamelly szám' logarithmaja keresésénél *).

---

*) Az itt elöhozott példák és magyarázat Hutton tabelláiból vannak véve.

Legyen b azon szám mellynek logarithmája kerestetik c a' b hez legközelebb, nálánál eggyel kisebb szám és nevezzük a' két szám öszvesét $(a+b) = m$ nek.

'S változik sorunk következőbe

$$\log \frac{b}{c} = \cdot 868588964 \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{3}\frac{1}{m^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{m^5} + \frac{1}{7}\frac{1}{m^7} + \text{'s a' t.} \right\}$$

1) Osztassék ·868588964 m által, 's a' részes irassék oda

2) a' részes osztassék m^2 vagyis az öszves szám négyszege által

3) ezen második részes osztassék ismét m^2 által, és csakugyan mindegyik uj részes m^2 által mig részesre akadunk.

4) Irassanak mindezen külön részesek elsőtől fogva végig egymás alá, és osztassanak el sorjában a' páratlan számok 1, 3, 5, 7, 9 's a't. által.

5) Adassanak öszve mindezen utolsó külön részesek és az öszves lesz $\frac{b}{c}$ nek logarithmája.

6) Ha ehez c nek a' kisebbik számnak logarithmája adatik, megleljük log b t.

1) Kerestessék 2 tőnek logarithmája, $b=2$, $c=1$ és $m=3$ és sorunk

$$\log 2 = \cdot 868588964 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \text{'s a't.} \right\}$$

a' mivelet pedig.

3) ·868588964	1)	·289529654.	(	·289529654.
9) ·289529654.	3)	32169962	(	10723321
9) 32169962.	5)	3574440	(	714888
9) 3574440	7)	397160	(	56737
9) 397160	9)	44129	(	4903
9) 44129	11)	4903	(	446
9) 4903	13)	545	(	42
9) 545	15)	61	(	 4
9) 61				

$$\log\frac{2}{1} = \cdot 301029995$$
$$+ \log 1 = 000000000$$
$$\log 2 = \cdot 301029995$$

2) Kerestessék log 3,

itt $b=3$, $c=2$ és $m=3+2=5$

5) ·868588964		
25) 173717793 :	1)	·173717793
25) 6948712 :	3)	2316237
25) 277948 :	5)	55590
25) 11118 :	7)	1588
25) 445 :	9)	50
18 :	11)	2.

$$\log {}^3/_2 = \cdot 176091260$$
$$+ \log 2 = 301029995\cdot$$
$$\log 3 = \cdot 477121255.$$

S' így bármelly szám logarithmája könnyen meglelhető.

108. Ha az első számok logarithmait keressük, még ezen sornál is inkáb közelitő következendő;

$$\log x = {}^1/_2 \log (x+1) + {}^1/_2 \log (x-1) +$$
$$+ M \left\{ \frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \frac{1}{5(3x^2-1)^5} + \text{'s a' t.} \right\}$$

hol x a' szám melynek logarithmaját keressük, M pedig a' modula 's mint tudjuk a' természeti logarithmoknál $=1$, a' közönségeseknél $=0{\cdot}4342941819$'s a' t.

Ha p. o.: ismerjük 2, 3 és 5 nek logarithmaját már ismerjük ezeknek minden sokasai, származatai, emelései, részesei és gyökerei logarithmait (Arithm. 282 és 283) mert p. o.:

$\log 6 = 4 \log 2 + \log 3$, $\log 8 = 3 \log 2$, $\log 16 =$
$= 4 \log 2$,

$\log 12 = \log 3 + 2 \log 2$, $\log 18 = \log 2 + 2 \log 3$,
$\log 20 = 1 + \log 2$,

$\log {}^3/_5 = \log 3 - \log 5$, $\log \sqrt{3} = \frac{\log 3}{2}$, 's a' t.

sorunk szerint lesz

$$\log 7 = \frac{1}{2} \log 6 + \frac{1}{2} \log 8 +$$
$$+ M\left(\frac{1}{97} + \frac{1}{3.97^3} + \frac{1}{5.97^5} + \text{'s a' t.}\right)$$

hol $2x^2 - 1 = 2.7^2 - 1 = 2.49 - 1 = 98 - 1 = 97$'s a' t.

$$\log 11 = \frac{1}{2} \log 10 + \frac{1}{2} \log 12 +$$
$$+ M\left\{\frac{1}{241} + \frac{1}{3.241^3} + \frac{1}{5.241^5} + \text{'s a' t.}\right\}$$

$$\log 13 = \frac{1}{2} \log 12 + \frac{1}{2} \log 14 +$$
$$+ M\left\{\frac{1}{337} + \frac{1}{3.337^3} + \frac{1}{5.337^5} + \text{'s a' t.}\right\}$$

$$\log 17 = \frac{1}{2} \log 16 + \frac{1}{2} \log 18 +$$
$$+ M\left\{\frac{1}{577} + \frac{1}{3.577^3} + \frac{1}{5.577^5} + \text{'s a' t.}\right\}$$

$$\log 19 = \frac{1}{2}\log 18 + \frac{1}{2}\log 20 +$$
$$+ M\left\{\frac{1}{721} + \frac{1}{3.721^3} + \frac{1}{5.721^5} + \text{'s a' t.}\right\}$$
$$\log 23 = \frac{1}{2}\log 22 + \frac{1}{2}\log 24 +$$
$$+ M\left\{\frac{1}{1057} + \frac{1}{3.1057^3} + \frac{1}{5.1058^2} + \text{'s a' t.}\right\}$$

---

109. Ha a' kérdést megforditjuk, 's a' helyett hogy valamely szám $y = 10^x$ közönséges logarithmaját x et fejeznők ki y által, x et vesszük bizonyosnak, vagyis valamelly bizonyos logarithmahoz tartozó számot keresünk, akkor ezeket antilogarithmoknak nevezzük; de mivel ezen nevezetben semmi különös nincs, szükségtelen is azt használni 's mi mindenkor csak számokról és hozzájok tartozó logarithmokról vagy megforditva, fogunk beszélni.

Ha p. o.: $x$nek bizonyos értéket adunk p. o.:

$$x = 0{\cdot}1 \text{ akkor } y = 10^{1/10} = 10^{0\cdot 1}$$

és $x$nek további értékei 0·1 és 1 közt lesznek, $10^{1/10}$ emelései, p. o.:

$$10^{2/10},\ 10^{3/10},\ 10^{4/10},\ \text{'s a' t.}$$

tudjuk $\sqrt{10} = 10^{1/2} = 3{\cdot}162277660 = 10^{5/10}$

ennek 5 tödik gyökere pedig

$$\sqrt[5]{10^{5/10}} = 10^{1/10} = 1{\cdot}258925412$$

ebből vehetjük

$$\sqrt{10^{1/10}} = 10^{1/20} = 10^{5/100} = 1{\cdot}122018454$$

's ismét $\sqrt[5]{10^{5/100}} = 10^{1/100} = 1{\cdot}023292992.$

’S ennek egymásutáni emeléseit vevén 1től 9 ig megtaláljuk y értékét, ha x 0·01 től 0.09.

Látszik hogy hasonlóképen találjuk meg azon számokat mellyek x értékéhez tartoznak ·001 től ·009 ig, ·0001 töl 0009 ig s’ a’ t.

Következő tábla Dodson’ ból van véve rövideden ’s általa minden log: hoz tartozó számot megtalálunk.

log	Term. számok	log	Term. számok
0·9	7·943282347	0·00009	1·000207254
0·8	6·309573445	8	1·000184224
0·7	5·011872336	7	1·000161194
0·6	3·981071706	6	1·000138165
0·5	3·162277660	5	1·000115136
0·4	2·511886432	4	1·000092108
0·3	1·995262315	3	1·000069080
0·2	1·584893192	2	1·000046053
0·1	1·258925412	1	1·000023026
0·09	1·230268771	0·000009	1·000020723
·08	1·202264435	8	1·000018421
·07	1·174897555	7	1·000016118
·06	1·148153621	6.	1·000013816
·05	1·122018454	5	1·000011513
·04	1·096478196	4	1·000009210
·03	1·071519305	3	1·000006908
·02	1·047128548	2	1·000004605
·01	1·023292992	1	1·000002303
0·009	1·020939484	0·0000009	1·000002072
008	1·018591388	8	1·000001842
007	1·016248693	7	1·000001612
006	1·013911386	6	1·000001382
005	1·011579454	5	1·000001151
004	1·009252886	4	1·000000921
003	1·006931669	3	1·000000691
002	1·004615790	2	1·000000461
001	1·002305238	1	1·000000230
0.0009	1·002074475	0·00000009	1·000000207
0008	1·001843766	8	1·000000184
0007	1·001613109	7	1·000000161
0006	1·001382506	6	1·000000138
0005	1·001151956	5	1·000000115
0004	1·000921458	4	1·000000092
0003	1·000691014	3	1·000000069
0002	1·000460623	2	1·000000046
0001	1·000230285	1	1·000000023

A' kis tábla által bármelly szám logarithmaját megtaláljuk, ha azt a' legnagyobb emelésével 10nek elosztjuk melly benne foglaltatik.

P. o.: kerestessék 2549 logarithmája.

$$2549=10^3\times 2.549.$$

2·549 hez a' táblában legközelebb álló logarithma

$$10^{0.4}=2{\cdot}511886432$$

's ha 2·549 et ezáltal elosztjuk lesz

$$2{\cdot}549=10^{0\cdot 4}\times 1{\cdot}014775177$$

ehez legközelebb a' táblában

$$10^{0.006}=1{\cdot}013911386$$

az előbbi részest elosztván általa lesz 1·000851742 harmadik részesünk 's hozzávaló log = ·0004; melly keresést addig fojtathatjuk míg az egyesre jutunk, 's a' talált öszves logarithmok lesznek 2549 logarithmája. Ha a' 3dik részesnél megállunk lesz $2549=10^3\times 10^{0\cdot 4}\times 10^{\cdot 006}\times 10^{\cdot 0004}$ és log $2549=3{\cdot}4064$.

Valamelly logarithmahoz tartozó számot még könnyebben megtalálunk, legyen p. o.: adva 3·456789, kerestetik a' hozzá tartozó szám. Tudjuk hogy

ez $=10^{3\cdot 456789}=n$

és $n=10^3\times 10^{\cdot 4}\times 10^{\cdot 05}\times 10^{\cdot 006}\times 10^{\cdot 0007}\times 10^{\cdot 00008}\times$
$\times 10^{\cdot 000009}$

az egyes tagokhoz tartozó számokat felkeresvén

$$\left.\begin{array}{ll} 10^{\cdot 3} & =1000 \\ 10^{\cdot 4} & =2{\cdot}511886432 \\ 10^{\cdot 05} & =1{\cdot}122018454 \\ 10^{\cdot 006} & =1{\cdot}013911386 \\ 10^{\cdot 0007} & =1{\cdot}001513109 \\ 10^{\cdot 00008} & =1{\cdot}000184224 \\ 10^{\cdot 0000009} & =1{\cdot}000020723 \end{array}\right\}$$ ezen számok származata $=2862{\cdot}79$ és log $2862{\cdot}79=3{\cdot}456789$.

Jegyzék. Hogy azon számok logarithmai mellyek 5 vagy több jegyből állanak, közel arithmetikai irányban vannak (Arithmetika 293) következőkép bizonyithatjuk.

Legyen valamelly 5 jegyből álló szám a, a' nállánál egyel nagyobb tehát $a+1$, tudjuk

$$\log(a+1)-\log a=\log\frac{a+1}{a}$$

és utánnok következő két szám

$$\log(a+2)-\log(a+1)=\log\frac{a+2}{a+1}$$

az első két logarithma közti különbség legyen, K a' másik kettő közti k, lesz

$$K-k=\log\frac{a+1}{a}-\log\frac{a+2}{a+1}=\log\frac{\frac{a+1}{a}}{\frac{a+2}{a+1}}$$

$$=\log\frac{(a+1)^2}{a(a+2)}=\log\frac{a^2+2a+1}{a(a+2)}$$

$$=\log\left\{1+\frac{1}{a(a+2)}\right\}$$

ha ezt sorba fejtjük ki lesz

$$K-k=M\left\{\frac{1}{a(a+2)}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{a^2(a+2)^2}+\text{'s a' t.}\right\}$$

hol tudjuk M kisebb félnél. $\left(M<\frac{1}{2}\right)$.

Ha tehát mint feltettük a 5 jegyű, már az első tag nevezője is legaláb 8 jegyű, 's így $K-k$nak nem-lehet a' nyolczadik tizedes helyen jelentő jegye, és következésképen közönséges logarithmi táblánkban hol a'log. csak 7 jeggyel vannak adva $K-k=0$, vagy is $K=k$, az az, *az egymást követő számok' logarithmi különbségei* (az 5 jegyüeknél) egyenlők.

110. Gyakorta szükséges közönséges logarithmokat természetesekbe 's megforditva változtatni, következő kis tábla segéllni fog bármelly változást eszközölhetni.

Ezen kis táblában egyszázad résztől 1ig a' közönséges logarithmok állanak, mellettök pedig a' nekik meg felelő természetesek.

K log	Term log.	K log	Term. log
.01	·02302585	·26	·59867212
.02	·04605170	·27	·62169798
·03	·06907755	·28	·64472383
·04	·09210340	·29	·66774968
·05	·11512925	·30	·69077553
·06	·13815511	·31	·71380138
·07	·16118096	·32	·73682723
·08	·18420681	·33	·75985308
·09	·20723266	·34	·78287893
·10	·23025851	·35	·80590478
·11	·25328436	·36	·82893063
·12	·27631021	·37	·85195648
·13	·29933606	·38	·87498234
·14	·32236191	·39	·89800819
·15	·34538776	·40	·92103404
·16	·36841362	·41	·94405989
·17	·39143947	·42	·96708574
·18	·41446532	·43	·99011159
·19	·43749117	·44	1·01313744
·20	·46051702	·45	1·03616329
·21	·48354287	·46	1·05918914
·22	·50656872	·47	1·08221499
·23	·52959457	·48	1·10524084
·24	·55262042	·49	1·12826670
·25	·57564627	·50	1·15129255

K log	Term. log	K log	Term. log
·51	1·17431840	·76	1·74996467
·52	1·19734425	·77	1·77299052
·53	1·22037010	·78	1·79601637
·54	1·24339595	·79	1·81904222
·55	1·26642180	·80	1·84206807
·56	1·28944765	·81	1·86509393
·57	1.31247350	·82	1·88811978
·58	1·33549935	·83	1·91114563
·59	1·35852520	·84	1·93417148
·60	1·38155106	·85	1·95719733
·61	1·40457691	·86	1·98022318
·62	1·42760276	·87	2·00324903
·63	1·45062861	·88	2·02627488
·64	1·47365446	·89	2·04930073
·65	1·49668031	·90	2·07232658
·66	1·51970616	·91	2·09535243
·67	1·54273201	·92	2·11837829
·68	1·56575786	·93	2.14140414
·69	1·58878371	·94	2·16442999
·70	1·61180957	·95	2·18745584
·71	1·63483542	·96	2·21048169
·72	1·65786127	·97	2·23350754
·73	1·68088712	·98	2·25653339
·74	1·70391297	·99	2·27955924
·75	1·72693882	1·00	2·30258509

A' táblácska haszonvéte következő.

Kerestetik azon térmeszetes log. melly 0.9542425 közönséges log. megfelel? két két jegybe osztatik az adott köz log. balról kezdve, hozzá vévén a' tizedes jegyet is. Mindegyik két jegyből álló ósztályhoz kerestetik a' neki megfelelő természetes log. ugy, hogy minden következő osztályhoz két két jeggyel kevesebb vétetik a' táblából, a' mivelet így áll.

közöns. log	termész. log
0·9.	.2·0723266
54.	1243396
24.	5526
25.	58
k log 0·9542425	=term.log 2·1972256 felelet.

Megforditva, természetes log. 2·1972246 hoz melly közönséges log. tartozik?

Itt az adott számból mindenkor a' kisebb vonatik le' mellé jegyezvén a' neki megfelelő köz. log. a' maradékból ismét az új talált legkisebb log. vonatik le, míg valami marad, az öszves talált tagok a' keresett közöns. logarithmok

adva van term. log	
2·1972246	
—2·0723266	. . 0·9
1248980	
—1243396	54
5584	
—5526	24
58	
58	25
	0·9542425 felelet.

111. Gyakorta szükség van a' számok természetes logarithmájokra, azért adunk itt néhanyat.

TERMÉSZETES LOGARITHMOK.

Sz.	Term. log.	Sz.	Term. log.
1.01	0·0099503	2·8	1·0296194
1·02	0·0198026	2·9	1·0647107
1·03	0·0295588	3·0	1·0986123
1·04	0·0392207	3·1	1·1314021
1·05	0·0487902	3·2	1·1631508
1·06	0·0582689	3·3	1·1939225
1·07	0·0676586	3·4	1·2237754
1·08	0·0769610	3·5	1·2527630
1·09	0·0861777	3·6	1·2809338
1·1	0·0953102	3·7	1·3083328
1·2	0·1823216	3 8	1·3350011
1·3	0·2623643	3·9	1·3609766
1·4	0·3364722	4 0	1·3862944
1·5	0·4054651	4·1	1·4109870
1·6	0 4700036	4·2	1·4350845
1·7	0·5306283	4·3	1·4586150
1·8	0·5877867	4·4	1·4816045
1·9	0·6418539	4·5	1·5040774
2·0	0·6931472	4·6	1·5260563
2·1	0·7419373	4·7	1·5475625
2·2	0·7884574	4·8	1·5686159
2·3	0·8329091	4.9	1·5862353
2·4	0·8754687	5·0	1·6094379
2·5	0·9162907	5·1	1·6292405
2·6	0·9555114	5·2	1·6486586
2·7	0·9932518	5·3	1·6677568

TERMÉSZETES LOGARITHMOK.

Sz.	Term. log.	Sz.	Term. log.
5·4	1·6863990	8·0	2· 0694415
5·5	1·7047481	8·1	2· 0918641
5·6	1·7227666	8·2	2· 1041342
5·7	1·7404662	8·3	2· 1162555
5·8	1·7578579	8·4	2· 1282317
5·9	1·7749524	8·5	2· 1400662
6·0	1·7917595	8·6	2· 1517622
6·1	1·8082888	8·7	2· 1633230
6·2	1·8245493	8·8	2· 1747517
6·3	1·8405496	8·9	2· 1860513
6·4	1·8562980	9·0	2· 1972246
6·5	1·8718022	9·1	2· 2082744
6·6	1·8870696	9·2	2· 2192035
6·7	1·9021075	9·3	2· 2300144
6·8	1·9169226	9·4	2· 2407097
6·9	1·9315214	9·5	2· 2512918
7·0	1·9459101	9·6	2· 2617631
7·1	1·9600948	9·7	2· 2721259
7·2	1·9740810	9·8	2· 2823824
7.3	1·9878743	9·9	2· 2925348
7·4	2·0014800	10·0	2· 3025851
7·5	2·0149030	100·0	4· 6051702
7·6	2·0281482	1000·0	6· 9077553
7·7	2·0412203	10000·0	9· 2103404
7·8	2·0541237	100000·0	11·51292546
7·9	2·0668628		

VIII. SZAKASZ.

EGYENLETEK.

1 §. Egyenletek közönségesen.

113. A' számírásban mindolly kifejezést *egyenletnek* nevezünk kiterjedett értelemben, mellyben két mennyiség hasonlítatik; vagyis, az egyenlőség' jegyivel íratik.

Igy előttünk az egyenletek újak többé nem lehetnek mert, valamint Algebránk' elemeiben, szinte Arithmetikánkban is, kezdettől fogva eddig, szünetlenül használtuk az egyenlőség jegyét, 's következéskép, egyenletekkel míveltünk.

Az egyenlőség' értelme minden elme előtt olly tiszta hogy, bármelly magyarázat azt világosbá nem teheti.

Ha eddigi egyenleteink közt, 's azok közt, mellyeket folyó visgálatink tárgyául kitűzünk, valamelly különbség van, ez csak a' tekintetek különböző léte által támadhat.

Az egyenletek' czélja, *kifejezni az ismeretlen mennyiségeket az ismertek által, a' kérdést pedig az eddig előadott miveletek' segéde által feloldani.*

A' feladások vagy kérdések, kezdvén ezeket a' leg egyszerübbeken, gyakorta őszvetett 's némellykor fonákos tekintetekre vezetnek.

A' tanuló főbb műve abban fog állani, hogy a' szóval kimondott viszonyait a' kérdésben forgó mennyiségeknek tisztán felfogja és írásba tegye. Eszközöltetvén a' felírás, a' felelet természetesen következik, mert mindazon szereket, mellyek feloldására szükségesek t. i.: a' különbféle miveleteket, már tökélletesen bírjuk.

A' számírás legjelentőbb értelme itt tünik elönkbe egész hatalmával.

A' mathesisi tudomány, tekinteteivel, tanaival, előadásával egyedüli tulajdonosa egy bizonyos és elkülönzött nyelvnek. A' nyelv egyszerü, tiszta, kiterjedett és közönséges levén, kifejezésére hasonló írást kíván. Jegyeit és írását már ismerjük.

Valamint az író, költő, festő vagy szobrász, gondolatját, képzetét vagy ideálját alkotja 's létesíti, szintigy testesíti a' Mathemata minden visgálatait alakjai által.

E' hasonlitás az utolsó lépésre vezet bennünket.

A' mathesis nem a' gondolat, sem a' képzet vagy idea következése, de a' munkálódó ész legnagyobb erejének foglalatja, 's így törzsöke az elme' minden ágazatinak. Nincs tudomány, melly annyira kirekesztőleg és szorosan kívánná az emberi tehetség legbecsesb részét, annak legtisztább kifejlését, és annyira számba-venné tartós és erős munkáját, mint a' Mathesis; nincs tehát tudomány melly, a' visgáló ész vágyainak fontosabb és érdekesb tárgya lenne.

Meglévén erről győződve, 's a' meggyőződés csak hamar következik az előmentel, szembetűnő, hogy a' szabájoknak azonnal vége, mihelyst a' tudomány' eszközeit, műszereit megismertük, 's utjokat kijelöltük; következik a' műszerek és gyűjtemények használata, az építés.

Ez az elme körébe tartozik, az elme pedig szabájokat nem szenved meg.

Az elme munkálódása végtelen nuancokban mutatkozik, de a' végtelen különböző utakon ugyanazon egy czélra törekszik. Kérdés, nem hátráljuk e' előmentét, ha más utat mutatunk neki a' helyett mellybe lépett? Való hogy igen, és a' Mathesis, melly tudományt nem ok nélkül nevezhetnők elmemérőnek, óvja magát minden erőszakos utmutatástól, 's mit tesz csak abban áll, hogy kijelöli, miként juthatunk és jutottunk különböző utakon a' czélhoz; mit annyival inkább tehet, mert raktára telve van tapasztalással, de az utválosztást szabadon átengedi.

Az egyenletek legnevezetesb műszerei a' tudománynak, 's leginkább is számba veszik figyelmünket. Mindaz mi itt elönkbe fordul, szünetleni haszonvéte mindannak mit eddig tekintettünk, visgáltunk, tanultunk. Ezen tekintetből hagyám az egyenletek' szakaszát a' többi után, noha tetemes része bátran következhetett volna az alap-miveletek után, mert elemi és szemlátomást könnyebb és egyszerübb, mint némelly ezt megelőző. Javaslom is hogy a' tanuló, miután ezen szakaszon kezesztül ment, visszatérjen az előbbiekkez. így könnyen tulajdonává teszi mindazt, mi eleinten tán szokatlan lévén előtte, nem gerjeszté eléggé figyelmét.

114. Azon egyenletek, vagy inkább egyenlitések, mellyeket eddig megismertünk a' legegyszerübbek mert, ezeknél a' kérdést mindenkor feleletivel egyenlítettük; vagy más szóval, a' kijelölt de el nem végzett míveletet, következésével.

Elég alkalmunk volt látni, milly rövid az algebrai írás, nyelve milly nyilván, 's hogy a' szóbeli magyarázat semmit sem tód értelméhez, sőt azt homályosítja; kivált ha hoszas mi gyakorta elkerülhetlen, mert nyelvünk 's szavaink csak alkalmaztatva vannak, s' nem fejezhetik kirekesztőleg a' kérdés természetét, és csaknem lehetlen szavaink értelmét elvonva egyetlen egy tárgyhoz kötnünk, mint ezt az algebrai nyelv tökéletesen megteszi.

Igy p. o. a' kifejezés $A \pm B = x$ magában igen egyszerű, 's azt teszi, x egyenlő A és B öszvesével vagy különbségével, mint a' felső vagy alsó jegyet vesszük, de hány szó kellett erre?

Ha az illy algebrai írás csak egy kissé több jegyeket foglal, a' szóbeli magyarázat alkalmatlan, így p. o.:

$$a^3 + \sqrt[4]{b-c} = x$$

szóval; adva van három mennyiség a, c és b, ha az elsö harmadik emeléséhez adjuk a' másik kettő különbségének negyedik gyökerét, megleljük a' kérdésben forgó ismeretlen x értékét. Igy bármelly algebrai irás sok szót kiván 's mi több, a' leg-egyszerübb legérthetöbb 's leglogicusabb magyarázatot. Gyakorta, mint említők, ezen magyarázatok elégtelenek 's az algebrai jegyek tiszta értelme általok szenved. Ki ki érezteti ezt már csak p. o.: azon változhatásoknál is, mellyeket az arithmetikai vagy geometriai aránylatok négy tagjai engednek, 's melly változások által a' viszonyok változatlanul megmaradnak. Mennyi beszéd és szószaporitás van itt a' jegyek egyszerű helyváltoztatások miatt? Melly hoszas beszéd adná világosan a' kifejezést?

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2 +$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}a^{m-3}x^3 +$$
$$+\ldots\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.\,2.\,3\;\ldots r}a^{m-r}x^r + \ldots + x^m$$

Bőven lesz alkalmunk ezen észrevétet példák által támosztanunk.

Minden egyenlet két részből áll, elválosztva az egyenlőség jegye által.

A' két részt tagoknak is lehetne nevezni, de ezen nevezet azért nem ajánlható mert mindegyik rész több tagból állhat.

Igy p. o.; $A=B$ ben az egyenlet két része, két egyes tag is, de p. o. az egyenlet kétrésze

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\ldots$$
$$=\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4+\ldots$$

számtalan tagból állhat.

Mint emlitők, az egyenletek czélja, kifejezni az ismertek által az ismeretlent; így ha egyenletünk

$$x-x^2+cx^3=a^2-b^2$$

x az ismeretlen, 's kifejezve van a, b és c által.

Szükséges hogy azon tag vagy tagok, mellyekben az ismeretlen áll, az egyenlet egyik részét tegyék, másik részében pedig mindazon tagok legyenek, mellyekben ismeretlen többé nincs. Szokás, az ismeretlent foglaló tagokat az egyenlöség jegyén innen balra tenni, 's a' többi tagokat jobbra, mert ezen elrendelés által a' számító könnyebséget talál az által, hogy a' miveletek közönségesen az egyenlet jobb szárnyán, az az, az ismeretes mennyiségeken történnek; feltévén itt hogy a' számitó jobb kezivel ír.

Igy ha egyenletünk $a+c=x-x^2$, írhatjuk $x-x^2=a+c$.

Ha valamelly egyenletben az ismeretlen többféle emelésen jön elö, azokat rendbe kell írni. Az elrendelés lemenő hatóságok szerint történik.

P. o.: $ax+bx^3-cx^2+dx^4+ex^6+fx^5=A$ helyett írjuk

$$ex^6+fx^5+dx^4+bx^3-cx^2+ax=A.$$

115. Az egyenletek *különböző rendűek* a' szerint, melly emelésen vannak benne az ismeretlenek; és csakugyan, ha az ismeretlen nincs magamagával sokszorozva, vagyis az első emelésen van, akkor az egyenlet *első rendű* vagy *egyszerű*.

$$x+ax+bx+cx=A$$

egyszerü egyenlet, mert x mindegyik tagjában csak az első emelésen van.

Ha az ismeretlen, második, harmadik, negyedik 's a' t. emelésen van, az egyenlet a' szerint második, harmadik, negyedik 's a' t. rendű.

$$x^2-ax=A$$
$$x^3-x^2+c=B$$
$$x^4-1=C$$
$$x^5-x^2+ax=D \text{ 's a' t.}$$

második, harmadik, negyedik és ötödik rendű egyenletek, és közönségesen

$$x^m \pm ax = M \text{ és } a^p \pm 1 = N$$

m és *p* rendű egyenletek.

Mindezen egyenletekben csak x vétetik ísmeretlennek, tehát az egyenletek, *egyismeretleni egyenleteknek* neveztetnek.

Ha két, három, négy vagy több ismeretlen jön elé az egyenletben, akkor annyi ismeretleni egyenletnek neveztetik, hány illy ismeretlent foglal magában. Az egyenletek,

1) $x+y=a$,, $\alpha x-\beta y=\gamma$
2) $x+y+z=S$, $ax-by+cz=D$
3) $x+y+z+v=K$, $\alpha x-\beta y+\gamma z\delta-v=\Sigma$

két, három és négy ismeretlent foglalnak sorjában.

Ha az ismeretlenek egyike vagy másika valamelly hatóságon van, az egyenlet is azon hatóságú vagy rendű egyenletnek neveztetik, mellyik az ismeretlen legnagyobb emelése.

1) $x^2-z^2=A$
2) $x^3-y+v=B$
3) $x^2-z^2+y^4=C$
4) $x^m-y^{m-3}+z^3=D$'s a' t.

ben az 1) egyenlet másodrendű, a' 2) harmadrendű, a' 3) negyedik és a' 4) *m* rendű egyenlet.

Ha az ismeretlenek egymás által sokszorozva vannak, ekkor tudjuk a' terjedség egyértelmű az emeléssel, 's az egyenlet azon rendű, mekkora ezen terjedség.

$xy+x-y=A$, másodrendű egyenlet
$x^2y+\alpha=B$, harmadrendű
$xyz\pm xz=C$ és $xz^2-zy^2=D$ egyenlően harmadrendűk és
$xyzv+x^3y-y^3z=B$ negyedrendű egyenlet.

116. Említők hogy két egyenlő valami elem, anyag vagy mennyiség, mindenkor egyenlő marad bármelly változás történjék mindkettőn ha a' változások egyenlők. Ezen tekintet vezet bennünket a' mathesisi egyenlőség értelmére, melly egyenlőség tökéletes és tellyes, a' visgálatba vett tárgyak tulajdonira nézve. Bármelly értéke legyen az egyiknek, bárhogy változzék növés vagy fogyasztás által az egyik, a' másiknak szükségesképen ugyanazon értéke van, 's épen ugy kell változnia

$x=a$ ban p. o.:

bármelly értéke legyen $x$nek a' két végtelenség közt, állító, tagadó, egész vagy tört, szintazon értéke van $a$nak.

Bizonyos tehát hogy két egyenlő mennyiséggel minden kigondolható változásokat tehetünk a' nélkül, hogy a' köztük lévő egyenlőséget zavarnók; alkazmazhatjuk tehát valamelly egyenlet két részére minden kivétel és különbség nélkül, mindazon míveleteket, mellyek eddigi visgálatinkban műszerül szolgáltak 's a' számírásnak hatalmas fegyverei.

Tudjuk hogy, egyenlőt egyenlőhöz adni, egyenlőt egyenlőből levonni lehet a' nélkül, hogy az egyenlőség zavartatnék, 's hogy ha

$$A=B \text{ ugy } A\pm a=B\pm a.$$

1) Ha tehát valamelly egyenlet' két részihez bármelly mennyiséget adunk, vagy azokból levonunk, az egyenlet változatlan marad.

Ez által mindazon tagok, mellyek az egyenlet két részíben egyenlő jeggyel 's ugyan azon mennyiséggel állanak, egyszerűen elhagyhatók, mert bizonyosan ha,

$$x+a-2b+c=A+a-2b+c$$

alkor $x=A$. mert a' többi tagok egymást semmivé teszik azáltal, ha mindkét részből $(+a-2b+c)$ levonatik.

Ha egyenletünkben $x+2a=A$, mindkét részből levonunk $2a$'t lesz $x=A-2a$, 's innen következik hogy, mindegyik tagot átvihetünk az egyenlet egyik részéből a' másikba, ha azt ellenkező jeggyel írjuk oda, ha p. o.: egyenletünkben

$$x^2-2a^2+b^2=A$$

mindkét részhez $-2a^2$ ot adunk b^2 ot pedig levonunk, lesz, $x^2-2a^2+2a^2+b^2-b^2=A+2a^2-b^2$

és $x^2=A+2a^2-b^2$.

Természetesen következik, hogy a' jegyek elváltoztása, mindkét rész valamennyi tagján egyszerre eszközölhető, 's ekkor az egyenlet értékét állítóból tagadóba, vagy megforditva, változtatjuk.

P. o.: ha egyenletünkben

$$x+x^2-ax^3=a+b^2-c$$

valamennyi tag jegyét változtatjuk, lesz

$$-x-x^2+ax^3=-a-b^2+c$$

mi azáltal is történhetik, ha p. o.: minden az egyenlet jöbb szárnyán álló tagokat, balszárnyára tesszük, a' balszárnyán levőket pedig túl. 's lesz

$$c-a-b^2=ax^3-x^2-x$$

vagy $a+b^2-c=x+x^2-ax^3$ mint eléb.

Ha valamelly egyenlet egyik részét minden tagjaival a' másikhoz tesszük változtatott jegyekkel, az egyenlőség jegye után semmi sem marad, és p. o.: ha

$$ax^3-bx^2+cx=a^2+b^2-c$$

ugy, $ax^3-bx^2+cx-a^2-b^2+c=0$

mi szóval azt teszi hogy (a^2+b^2-c) az egyenlet mindkét részéből levonassék, de

$$(a^2+b^2-c)-(a^2+b^2-c)=0 \text{ tehát}$$
$$ax^3-bx^2+cx-(a^2+b^2-c) \text{ is } =0.$$

2) Ha valamelly egyenletnek két részét ugyanazon mennyiséggel sokszorozzuk vagy elosztjuk, az egyenlőség nem változik, mert ha

$$A=B \text{ ugy } Aa=Ba \text{ és } \frac{A}{a}=\frac{B}{a}$$

bármelly szám legyen a.

Természetes hogy itt az egyenlet két része értetik valamennyi tagjával, nem pedig valamelly egyes és külön tag, vagyis, ha valamelly egyenlet bármelly mennyiséggel sokszoroztatik vagy elosztatik, szükséges hogy mindkét részének mindegyik külön tagja sokszoroztassék vagy osztassék ezen mennyiség által.

Ha valamelly egyenlet' tagjaiközt törtszámok állanak, ezeket a' sokszorozás által egészekre vihetjük, vagy is megszabadíthatjuk nevezőjöktől, p. o.: ha

$$\frac{x}{4}-\frac{a}{3}+\frac{1}{2}=A.$$

a' törteket egészekre visszük, ha az egyenletet 12vel sokszorozzuk, melly 12 tudjuk a' 4, 3 és 2 közti legkisebb sokas, 's lesz

$$\frac{12x}{4}-\frac{12a}{3}+\frac{12}{2}=12A \text{ vagy}$$

$$3x-4a+6=12A.$$

Az elosztás által valamelly tagot vagy tagokat, vele járójoktul szabadítunk, ha p. o.:

$$3x=A, \quad x=\frac{A}{3}$$

és ha $ax-a^2+b=A$ „ $x-a+\frac{b}{a}=\frac{A}{a}$.

az egyenletet

$$x^2a^2-x^2b^2=a^2+2ab+b^2,$$

tudjuk egyszerűbben írhatjuk kivevén ez egyenlő factort, mert ez egyenlő

$$x^2(a^2-b^2)=(a+b)^2 \text{al}$$

most pedig ha x^2 ot magában akarjuk írni, az egyenletet (a^2-b^2) által elosztjuk 's lesz

$$x^2=\frac{(a+b)^2}{(a^2-b^2)}=\frac{(a+b)\ (a+b)}{(a+b)\ (a-b)}=\frac{a+b}{a-b}$$

's hasonlóképen mívelünk bármelly más példán is.

3) Ha valamelly egyenlet' két része ugyanazon emelésre vitetik, vagy abból bármelly ugyanazon gyökér vétetik, az egyenlőség megmarad, mert ha

$$A=B,\ A^m=B^m \text{ és } \sqrt[m]{A}=\sqrt[m]{B}$$

Az emelést ott használjuk ha valamelly tagot gyökérjegyétől akarunk szabadítani, p. o.:

$$\sqrt{x}=a-b \text{ változik } x=(a-b)^2\text{ba.}$$

A' gyökérvevést pedig ott, ha a' hatóság-mutatókat akarjuk elenyésztetni, p. o.:

$$x^m=A\text{ban } x=\sqrt[m]{A}.$$

117. *Az egyenlet feloldva van, ha egyik részén az ismeretlen egyedül áll első emelésén, minden más egyébb, ismeretlent' többé nemfoglaló tag pedig a' másik részén.*

Minden visgálatink, tekinteteink 's míveleteink egyedülí czélja tehát az lesz, hogy az ismeretlen vagy ismeretlenek értékét megleljük.

Mint emlitők, az egyenleteket semmivé tenni lehet az által, ha egyik részt a' másikból levonjuk, vagy mi mindegy ha egyik rész' tagjait változtatott jegyekkel a' másik részbe tesszük, és csakugyan ezért minden egyismeretlent foglaló egyenlet' közönséges kifejezése lehet $x^m \pm A = 0$, hol x^m, bármelly emelésű 's bárhány, x el egybekötött tagot képviselhet, A pedig magában foglalja mindazon tagokat, mellyekben az ismeretlen többé elő nem jön, legyenek azok bármelly alakban adva; mi végre A nak kétféle jegyét ($\pm$) illeti, ez x értékével szoros egybefüggésben van, mint az, állító vagy tagadó.

Ha több egyenlet van adva; 's mindegyik $=0$ értékre víve, természetes hogy azonnal egyenlők egymásközt, 's ekkor egyiket a' másik helyett lehet tenni, mert ha p. o.: $A=o$ és $B=o$ szükségesképen $A=B$ mi szóval, *egyenlő értékű mennyiségek, egyenlők.*

2 §. Egyszerű egyenletek egy ismeretlennel.

118. Alkalmazzuk eddigi észrevételeinket példákra.

1) Kívántatik azon szám, mellynek négyszerese háromhoz adatván annyi, mennyi háromszorosa 12 hőz adva?

A' kérdésben levő ismeretlen legyen x, ennek 4 szerese $=4x$, hármosa pedig $3x$, a' kérdés szerint pedig egyenlő legyen $(4x+3)$, $(3x+12)$ vel, 's így felírhatjuk egyenletünket, melly,

$$4x + 3 = 3x + 12.$$

Egybe vévén az ismeretlent mindkét részből, 's szinte az ismereteseket a' másik részbe tévén, lesz

$$4x - 3x = 12 - 3$$

's ebből azonnal következik az egyenlet feloldása, mert $4x - 3x = x$ és $12 - 3 = 9$, hol az ismeretlen egyedül áll egyenlítve értékével. Ezen értékét $x$nek (*a'* 9et) egyenletünkbe tevén, annak valósága nyilván, és

$$4.9 + 3 = 3.9 + 12 \text{ vagyis } 39 = 39.$$

2) Két ember öszvesen 100 éves, egyik 40 évvel ifjabb a' másiknál.

Kérdés mennyi idős egyik egyik?

Ha az egyiknek korát ismernénk: ebből a' másiké természetesen következne, mert a' köztük lévő különbség 40.

Ha az öregbiknek évei száma x, az ifjabbiké $x - 40$, ha az ifjabbik kora x, az öregebbiké $x + 40$, 's mind kettő öszvesen $= 100$.

Ha az öregbik kora x, lesz egyenletünk

$$x + (x - 40) = 100.$$

Ha pedig az ifjabbik kora x, akkor

$$x + (x + 40) = 100.$$

Az első egyenlet adja $2x = 100 + 40$ és $x = 70$ az öregbik idejét, mellyből következik

$$x - 40 = 70 - 40 = 30$$

az ifjabbiké; a' második egyenletből jő

$$2x = 100 - 40 \text{ és } x = 30$$

az ifjabbik kora, 's belőle

$$x + 40 = 30 + 40 = 70$$

az öregbiké, öszvesen pedig $70 + 30 = 100$.

Ezen kérdés látjuk nincs kirekesztőleg a' számokhoz kötve és közönséges tekintetet enged, vagyis a' számok bármellyek lehetnek. Tegyük a' kérdést következőleg.

3) Legyen két számnak öszvese a, különbsége b, kivántatik a' két szám? Vagy mondjuk; ismervén két szám' öszvesét és különbségét, megtálalni belőlök a' két számot?

Ha a' nagyobbik szám x, a' kisebbik $x-b$, a' kettő pedig együtt a, 's így egyenletünk

$$x+x-b=a, \text{ és } 2x=a+b$$

ebből
$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$$

mint a' nagyobbik szám; ebből következik tüstént a' kisebbik melly $x-b$ vagy is

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-b \text{ és } =\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=\frac{a-b}{2}.$$

Szóval pedig a' felelet. Ha két számnak öszvese és különbsége adva van, a' nagyobbik egyenlő a' fél-öszves és fél különbség öszvesével, a' kisebbik pedig egyenlő a' fél öszvessel levonván ebből a' fél különbséget, vagy egyenlő a' fél öszves és fél különbség közti különbséggel. Ezen közönséges kifejezésre valamint azokra mellyeket jövőben fogunk megismerni, bármelly külön kérdést alkalmazhat a' tanuló.

4) Két forrás önti vizét valamelly edénybe, ha az egyik $2^1/_2$ óráig foly, egyedül megtölti az edényt, de a' másik által egyedül csak $3^3/_4$ óra alatt telik. Kérdés mennyi idő alatt telik meg az edény ha mindkét forrásból egyszerre foljik a' viz?

Itt az idő ismeretlen, 's legyen x, de mivel ezen kérdés is közönséges tekintetet enged, legyen az első forrás óráinak száma a, a' másodiké b; így fog az első forrásból egy óra alatt folyni $\frac{1}{a}$, a' másodikból $\frac{1}{b}$, mindegyik forrás foljni fog x ideig, az az $x \times \frac{1}{a}$ és $x \times \frac{1}{b}$ ideig, 's két mennyiségünk $\frac{x}{a}$ és $\frac{x}{b}$ kifejezi mindegyik forrás idejét; ezeknek öszvese megtölti az edényt, 's csakugyan megtölti egyszer, és egyenletünk

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$$

sokszorozván ab vel az egyenletet jön

$$bx + ax = ab \text{ 's innen } x(a+b) = ab$$

$$\text{és } x = \frac{ab}{a+b}$$

x ezen értéke közönségesen felel minden különös-kérdésre, és szóval következően; *sokszoroztassék az adott két idő, és a' szármozat osztassék el ugyan ezen két időnek öszvesével; a' talált részes azon idő, melly alatt az edény megtelik*:

Alkalmazván ezt különös példánkra, lesz, mivel

$$2^1/_2 \times 3^3/_4 = \frac{5}{2} \times \frac{15}{4} = \frac{75}{8} \text{ és } 2^1/_2 + 3^3/_4 = \frac{50}{8}$$

$$x = \frac{2^1/_2 \times 3^3/_4}{2^1/_2 + 3^3/_4} = \frac{75}{8} : \frac{50}{8} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2}$$

Az illy kifejezést *symetrikainak* nevezzük, mert itt mindegy bármellyik betüt vagy időt tesszük egyik vagy másik forrás helyibe, a' következés változatlanul ugyan-az. (Arithm. 203).

5) Az atya 40 esztendős, fija 8; hány év lefojta után lesz az atya háromszor annyi idős mint fija?

Legyen az ismeretlen idő x, ennek lefojta után lesz az atya $40+x$, fija pedig $8+x$, mivel pedig az atya kora 3 szorta nagyobb mint a' fiué, lesz egyenletünk

$$x+40=3(x+8)=3x+24 \text{ és tovább}$$
$$3x-x=40-24,\ 2x=16 \text{ és } x=8$$

's 8 év mulva lesz az atya 48, a' fiu 16 éves, mert $40+8=3(8+8)$.

Legyen közönségesen az atya' kora a, a' fiué b, 's lesz előbbi kérdésünkhöz hasonlóul

$$x+a=3(x+b) \text{ és } x=\frac{a-3b}{2},$$

's ezen kifejezés minden értéknek megfelel.

Tegyük fel hogy az atya 40., a' fiu 18 éves vagy legyen $a=40$ és $b=18$, kifejezésünk adja

$$x=\frac{40-54}{2}=-7$$

tagadó értékét.

Az illy kifejezésekre gyakorta fogunk jutni ha a' kérdésben valami ellenmondás fekszik: de nem lehet azonnal következtetni hogy a' feladás helytelen, mert az algebrai feloldás a' valóra igazit bennünket. Csakugyan itt $x=-7$ tagadó értéke ád az atyának $40-7=33$, a' fiunak pedig $18-7=11$ évet, 's azt mutatja hogy 7 évvel *ezelőtt* volt az atya éppen 3 szorta annyi éves mint fija.

Ha a' közönséges kifejezésben $a=3b$, akkor $x=0$ és sem jövendő sem elmult idő nincs, de az atya épen most háromszor annyi idős mint fija.

Még közönségesb kérdésünk, ha az atya' ideje bárhány-szorta nagyobb mint fiájé, p. o.: *m* szer nagyobb, és ekkor

$$a+x=m(b+x)=mb+mx \text{ és}$$

$$mx-x=a-mb, \text{ és } x=\frac{a-mb}{m-1}$$

mert $\dot{m}\dot{x}-\dot{x}=x(m-1)$

6) Az erszényben bizonyos számu aranyok vannak, *A* kivesz belőlle kettőt és hatodrészét annak mi megmaradott, ezután *B* vesz ki hármat 's hatodrészét a' megmaradott daraboknak, igy *A* szintanyit vett ki mennyit *B*; kérdés hány darab volt az erszényben 's mennyit vett ki *A* és *B*?

Ha az erszény tartalma x darab, kivevén belöle *A* kettöt, marad $x-2$, ennek hatodrésze $\frac{x-2}{6}$, a' maradék természetesen ötször ennyi, az az

$$\frac{5}{6}(x-2) \text{ mi } \frac{5x-10}{6}$$

ha ebből *B* hármat elvesz, marad

$$\frac{5x-10}{6}-3=\frac{5x-28}{6}$$

ennek hatodrésze pedig mellyet *B* ismet elvesz

$$\frac{5x-28}{36}$$

Kivett tehát *A*, $2+\frac{x-2}{6}$ ot

B, $3+\frac{5x-28}{36}$ ot,

's minthogy feltételünk szerint ezen két mennyiség egyenlő, tehát

$$2+\frac{x-2}{6}=3+\frac{5x-28}{36}$$

sokszorozván az egyenletet 36 tal jön,

$72+6x-12=108+5x-28$, elrendelve

$6x-5x=108-72-28+12$'s ebből $x=20$

vagyis az erszényben 20 darab arany volt, 's mindegyik 5 öt vett ki, mert

$$2+\frac{18}{6}=5 \text{ és } 3+\frac{72}{36}=5.$$

7) Egy bizonyos kétjegyű számban a' jegyek öszvese 6. Ha a' számhoz 18 adatik, a' két jegy megfordítva áll de öszvese mégis 6 marad. Kérdés mellyik szám ez?

Ha a' tizes jegyet $x$nek nevezzük, az egyesek jegye $6-x$, (mert a' tizes és egyes jegyek ösvese 6) megadván $x$nek helyértékét lesz $10x+6-x$, a' keresett szám.

Ha ezen számhoz 18at adunk, lesz megforditva az egyesek jegye x, a' tizeseké $6-x$, és az uj szám $10(6-x)+x$, 's mivel a' két kifejezés egyenlő ha az előbbihöz 18 adatik, egyenletünk

$10x+6-x+18=10(6-x)+x$ és öszvevéve

$18x=36$ vagy $x=2$

a' tizes helyen álló jegy tehát $x=2$, az egyes pedig $6-2=4$ a' keresett szám 24, 's változtatva $24+18=42$.

8) Válosszuk el 720 at olly három részbe, hogy a' legnagyobbik 80 nal, a' közepső 40 el legyen nagyobb a' legkisebb számnál.

Szembetünő hogy, ha a' legkisebbik szám x, a' második $x+40$, az első pedíg $x+80$

az egyenlet $3x+120=720$ és $x=200$

a' három rész 200, 240, 280.

Közönségesen véve a' kérdést, legyen a azon szám, mellynek három része következöképen álljon egymásközt, a' nagyobbik 's kisebbik közt legyen a' különbség b, a' közép és kisebbik közt c; 's lesz a' különös példával megegyezőleg, a' kis szám x, a' nagy $x+b$'s a' közép $x+c$, a' szám pedig és egyenletünk

$$3x+b+c=a \text{ 's innen } x=\frac{a-b-c}{3}$$

honnan a' másik kettő következik.

9) Osztassék el 14250 három részre, 's ezen részek azon arányban álljanak egymásközt mellyben a' számok 3, 5, és 11 állnak, vagyis legyen az első rész a' másodikhoz mint 3 az 5 höz a' harmadikhoz pedig mint 3 a' 11 hez.

Ha az első rész x, lesz a' második $3:5\,x=x:=\frac{5x}{3}$

a' harmadik pedig

$$3:11=x:=\frac{11x}{3}, \text{ 's a' három rész}$$

$$x+\frac{5x}{3}+\frac{11x}{3}=14250, \text{ innen}$$

$$3x+16x=19x=14250 \text{ és } x=\frac{14250}{19}=2250$$

az első rész tehát $x=2250$

a' második $\frac{5x}{3}=\frac{5.2250}{3}=3750$

a' harmadik $\frac{11x}{3}=\frac{11.2250}{3}=8250$

Közönségesen. A, mennyiség olly három részre osztandó, melly m, n és p arányban áll egymásközt: lesz az egyenlet

$$A=x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}, \text{ 's mivel}$$

$$x+\frac{nx+px}{m}=mx+nx+px=x(m+n+p)=mA.$$

$$x=\frac{mA}{m+n+p}$$

(Arithm. társasági szabály.)

Emlékezni fog a' tanuló, hogy mindezen eddig előfordult kérdéseket csupa arithmetikai tekintetek által is feloldottuk, 's csak azért ismételjük itt azokat, hogy az Algebra közönséges mívelete inkább szembetünjék.

10) Adva van az egyenlet

$$\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}=\frac{7}{10}-\frac{(3-2x)}{6}$$

kerestetík x értéke?

A' nevezők 3, 5, 10 és 6 közt, 30 a' legkisebb sokas, sokszorozván 30 al az egyenletet, lesz

$$\frac{30x}{3}+\frac{60x}{5}=\frac{210}{10}-\frac{90+60x}{6} \text{ és}$$

$$10x+12x=21-15+10x$$

$$12x=6 \text{ és } x=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

és ezen értéke x nek az egyenletnek eleget tesz, ha azt x helyibe irjuk, 's lesz

$$\frac{{}^1/_2}{3}+\frac{2.{}^1/_2}{5}=\frac{7}{10}-\frac{3-2.{}^1/_2}{6}$$

vagy $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}-\frac{2}{6}$, mi $\frac{11}{30}=\frac{22}{60}$

Vegyünk a' számok helyett betüket, 's irjuk az egyenletet szinte ezen alakba: 's legyen p. o. az egyenlet

$$\frac{x}{a}+\frac{bx}{c}=\frac{d}{e}-\frac{(f-gx)}{h}$$

hol elébbeni példánkal megegyezőleg

$a=3$, $b=2$, $c=5$, $d=7$, $e=10$. $f=3$, $g=2$ és $h=6$.

Az egyenletet $aceh$ val sokszorozzuk, mint a' nevezőkközti legkisebb sokassal, 's lesz először is

$$x\left(\frac{aceh}{a}+\frac{abceh}{c}\right)=\frac{acdeh}{e}-\frac{(acefh-aceghx)}{h}$$

vagy $x(ceh+abeh-aceg)=acdh-acef$

's ebből $x=\dfrac{acdh-acef}{ceh+abeh-aceg.}$

Ezen mível et tökéletesen ugyan az, melly volt különös példánknál, de a' betük tisztábban mutatják, miként jőnek egybekötésbe a' mennyiségek.

14 *

Ha a' betük helyett felvett szám értéküket teszük, jön

$$x=\frac{3.5.7.6-3.5.10.3}{5.10.6+3.2.10.6-3.5.10.2}=$$

$$=\frac{3.5.12}{3.2.10.6}=\frac{180}{360},\ x=\frac{1}{2}$$

mint elébb.

11) Melly számhoz kell 56 ot adni, hogy akkora legyen mint 200 ha ebből a' számot kétszer levonjuk?

Ha a' szám x, $x+56=200-2x$ és

$3x=144$ vagy $x=48$.

A' számok helyett betüket tevén, lesz kérdésünk

$$x+a=b-cx$$

bármelly legyen a, b és c értéke 's innen

$$x=\frac{b-a}{c+1}$$

12) Négyen fizetnek öszvesen 5214 forintot. B kétszer annyit mennyit A, C pedig annyit mennyit A és B öszvesen, D végre annyit, mennyit B és C öszvesen. Mennyit fizet egyik egyik?

Ha A fizetése x, lesz B fizetése $2x$, C fizetése $x+2x$ és D fizetése $2x+3x=5x$, az öszves fizetés pedig

$$x+2x+3x+5x=5214,\ 11x=5214,\ x=474.$$

13) Ha férfiak és asszonyok, vagy közönségesen kétféle munkások különbözően részesülnek valamelly bérben.

Szinte ha, kétféle tagjai valamelly társaságnak nem egyenlően részesülnek a' nyereség vagy veszteségben.

Adva van a' személlyek' öszvese, adva van a' felosztandó mennyiség és egyes része a' kétféle nem' vagy tagnak, ismeretlen tehát egyedül hány személy van egyik vagy másik nemben vagy hány tag, a' kétféle részesűlők közt.

Legyen a' személlyek öszvese A.

A' felosztandó pénzmennyiség B.

Az egyik osztozó fél' száma a.

A' másik félé ....b.

Kérdés mennyi volt A ban egyik és másik osztófélbül?

Ha az egyik osztályt x el jelöljük, a' másik $A—x$.

Osztozik tehát B ben az egyik fél ax el, a' másik $b(A—x)$ el 's az egész pénz mennyiség

$$B=ax+b(A-x)$$

$$\text{és } x=\frac{B-Ab}{a-b},\ A-x=\frac{Aa-B}{a-b}$$

hol a' betük helyibe bármelly számokat írhatunk, mert ha a' feltételnek eleget nem teszünk, a' feloldás megmutatja.

Alkalmazzuk erre következő kérdésünket.

45ember volt a' vadászaton, fejér és színes, lőttek együtt 327 vadat, mindegyik fejér hatot lőtt mindegyik szines kilenczet. Kérdés hány fejér és hány szines volt a' vadászaton?

Legyen a' fejérek száma x, lesz a' szineseké $45—x$,

és $327=6x+9(45-x)=6x+405-9x$

$3x=405-327=78$'s ebből

$x=26$ a' fejérek', $45-26=19$

a' szinesek' száma.

Alakunk szerint pedig egyenesen

$$x=\frac{327-45.9}{6-9}=\frac{327-405}{6-9}=\frac{-78}{-3}=26$$

$$A-x=45-x=\frac{45.6-327}{6-9}=\frac{270-327}{6-9}=\frac{-57}{-3}=19$$

Természetes hogy a' 4 mennyiség között bármellyik lehet az ismeretlen, 's két egyenletünkből

$$x(a-b)=B-Ab \text{ és}$$
$$(A-x)(a-b)=Aa-B$$

mindegyiket megleljük; tegyünk itt x helyett Ct lesz többi értékünk sorjában

$$A=\frac{B-C(a-b)}{b}$$

$$B=C(a-b)+Ab$$

$$a=\frac{B-Ab+Cb}{C}$$

$$b=\frac{aC-B+Ab}{C}$$

14) Veszünk valamelly portékának több mázsáját, fontját vagy rőfét; vagy valamelly baromnak vagy bármelly tárgynak számát vagy darabját, és ismet eladjuk. Kerestetik vagy az öszves árr, vagy a' nyereség, vagy a' darabok' száma.

Tegyük fel hogy a' darabok száma ismeretlen.

Veszünk pedig a darabot a^1 forinton, és eladunk b darabot b^1 forintért, nyerünk c forintot az egész számon, kérdés hány darab volt x?

egy darab vevőárra $\frac{a^1}{a}$, öszvesen volt $\frac{xa^1}{a}$

„ „ eladásiárra $\frac{b^1}{b}$, jött bé öszvesen $\frac{xb^1}{b}$

az utolsó c vel nagyobb 's egyenletünk,

$$\frac{xa^1}{a}+c=\frac{xb^1}{b} \text{ és } x=\frac{abc}{ab^1-a^1b}$$

15) Bizonyos mennyiségű pénzt kétféle apróbb pénznemivel kell kifizetni. Legyen a' mennyiség $=1$. Az egyik nemből a darab a' másikból b darab teszi az egészet; de kivántatik hogy öszvesen a' kétféle c darab legyen. Kérdés hány kell mindegyik nemből?

Ha az egyíkféle x, a' másik $c-x$, az elsőbül kell $\frac{x}{a}$ a' másikból $\frac{c-x}{b}$'s a' két rész együtt $=1$; egyenletünk pedig,

$$\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b}=1,\ x=\frac{a(b-c)}{b-a} \text{ és } c-x=\frac{b(c-a)}{b-a}$$

16) 80 lépést tett már A, midőn B utánna indul; A három lépést tesz míg B kettőt, de B lépései mégegyszer akkorák. Kérdés, hány lépést tett A addig míg B elérte?

Ha A lépései száma x, B lépései száma ${}^2/_3x$ mert csak két harmadát teszi A lépéseinek, de minthogy B minden lépése kétszer akkora mint A lépése, értéke kétszer ${}^2/_3x$ vagy $=\frac{4x}{3}$'s ekkor elérvén At kí $x+80$ lépést tett, egyenletünk

$$x+80=\frac{4x}{3} \text{ adja } x=240$$

tett e' szerint *A* 80 lépés után 240't 's öszvesen 320 lépést, *B* pedig 160 at, ennek felét.

Legyen p. o.: *B* lépéseiből m annyi, mennyi *A* lépéseiből n, így *B* nek $^2/_3x$ lépése annyi, mennyi *A* nak $\frac{n}{m}\cdot\frac{2x}{3}$ lépése, és

$$\frac{2n}{3m}x=80+x,\ x(2n-3m)=240m$$

$$\text{és } x=\frac{240m}{2n-3m}$$

Tegyük fel most hogy $m=3$ és $n=4$ lesz

$$x=\frac{3.240}{8-9}=-720$$

tagadó szám. Értelme ezen kifejezésnek szembetűnő. *A* elől van 80 lépéssel, 's három lépést tesz míg *B* kettőt, azen felül három lépése *B* nek akkora mekora 4 lépése *A* nak, tehát *A* sebesebben halad 's *B* őt soha el nemérheti.

Ha tehát itt kérdezzük mikor éri el *B*, *A*t ha ez sebesebben megy, tagadó kifejezésünk arra visz vissza, mikor volt *A* és *B* együtt, 's megmutatja hogy egyhelyről indulván 720 lépés után *A* 80 at nyert *B*'n.

Ha példánkban $m=2$ és $n=3$, *A* két lépést tesz azalatt míg *B* hármat, de mivel feltétünk szerint *A* nak három lépése akkora, mekkora *B* nek két lépése, sebességek egyenlő, az az, *A* és *B* örökké egyenlő távolban lesz egymástul, mert itt

$$x=\frac{240}{2.3-2.3}=\frac{240}{6-6}=\frac{240}{0}=\infty, \text{ végtelen},$$

's ezen végtelenség jegye azt mutatja, hogy soha *B* el nemérheti *A*t ha ez előtte indult meg.

Azon kérdéseket, mellyeket az egyszerű egyenletek által oldunk, az arithmetikai miveletek által is feloldhatjuk. De mint említők a' közönséges tekintetek csak itt találhatnak helyt, 's azért vegyünk még egyet; a' tanuló ezek után könnyen szerkezhet különböző példákat.

17) Visgáljuk előlegesen, miként lépnek az ismert mennyiségek jegyeikkel valamelly kérdésbe.

Ha a' két kifejezést

$$\frac{a^2}{b}+ax=\frac{a^2x}{b}+a-b \text{ és}$$

$$\frac{a^2}{b}-ax=\frac{a^2x}{b}-a-b \text{ tekintjük}$$

látjuk hogy a' másodikban $+a$ helyett $-a$ van téve a^2 pedig természetesen állító marad.

Az első egyenlet feloldva, adja

$$x=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2-ab}$$

a' másik $$x=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab}$$

's itt is $+a$ helyett egyszerüen $-a$t írunk.

Szinte igy ha az egyenletben

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2 \text{ ban}$$

$+b$ helyett $-b$ t írunk, lesz

$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$, mit az elosztás egyenesen bizonyít: és közönségesen ha, három mennyiséget a, b, c bizonyos jegyekkel p. o. $+a$, $+b$, $+c$ vel veszünk 's ezek $x$nek következő értékét adják

$$x=\frac{b^2-4ac}{a+c-b}$$

a' jegyek változtatása által, következő értékeket vesz fel x

ád pedig $+a+b+c$, $x=\frac{b^2-4ac}{a+c-b}$

$+a+b-c$, $x=\frac{b^2+4ac}{a-c-b}$

$+a-b-c$, $x=\frac{b^2+4ac}{a-c+b}$

$-a+b-c$, $x=-\frac{b^2-4ac}{b+a+c}$

$x=\frac{4ac-b^2}{b-a-c}$

$-a-b-c$, $x=\frac{b^2-4ac}{b-a-c}$

$x=-\frac{4ac-b^2}{a+c-b}$

hol a' kifejezések helyes létéről a' tanúló biztosíthatja magát.

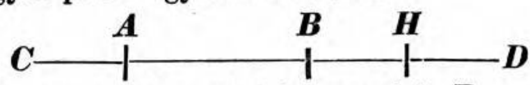
Forduljunk példánkhoz.

18) Két utazó ugyan azon időben indul különböző helybül, valamelly két város közt vevén útjokat, sebességek különböző, kérdés mikor, 's az útnak mellyik pontján találkoznak?

Szembetűnő hogy a' kérdés attól függ melly írányban haladnak, egyenlöben e' vagy ellenkezőben, 's mellyik megy sebesebben 's mennyivel 's a' t. de látni fogjuk hogy mindezen tekintetek ugyan azon egy közönséges kérdésben foglaltatnak, 's hogy csak a' mennyiségek jegyei változnak.

Hogy kérdésünk tiszta és egészen közönséges legyen, adjuk fel az útazókat is, 's vegyünk két mozgó pontot valamelly úton.

Legyen p. o.: egyenes vonalunkon



CD azon ut, mellyen a' két pont ***A*** és ***B*** mozog, a' két pontnak induló helye ott hol ***A*** és ***B*** a' vonalon állnak, ***H*** pedig azon pont mellyben ***A*** és ***B*** találkoznak, legyen továbba p. o.: egy óra alatt ***A*** sebessége m, ***B*** sebessége n, és végre azon tér melly ***A*** és ***B*** közt van a, vagyis $AB=a$.

1-ö eset. Mindkét pont egyenlő írányban mozog ***C***-től ***D*** felé, és $m>n$: így ***B*** és ***D*** közt p. o.: ***H***ban a' két mozgó pont öszveüt. Legyen ***A*** útja $AH=x$, 's mivel ***A*** ugyanazon idő alatt ér ***A***tól ***H***ig, melly alatt ér oda ***B***, lesz ***B*** útja $BH=x-a$; minthogy pedig ***A*** sebessége 1 óra alatt m, egész idejét $\frac{x}{m}$ óra fejezi ki, szinte ***B*** idejét $\frac{x-a}{n}$ óra, vagyis a' két egyenlő idő $\frac{x}{m}=\frac{x-a}{n}$, így

$$x=\frac{ma}{m-n} \text{ mint elébb } =AH, \text{ és}$$

$$x = \frac{na}{m-n} = BH,$$

az elmult idő pedig $\frac{x}{m} = \frac{a}{m-n}$.

2-dik eset. Az irány maradjon, de B sebessége legyen nagyobb mint A e'. Ekkor ha különböző helyből indulnak és A, B után van, soha sem találkozhatnak, mert B inkáb inkáb távozik A tól, de van előttök olly egy pont mellynél csakugyan együtt voltak. Legyen ezen pont A és mint elöbb

C——|——|——|————D
H A B

$AH = x$, 's mivel B ugyan azon idő alatt HB útat teszi, $HB = x+a$ lesz szint így

$$\frac{x}{m} = \frac{x+a}{n}, \text{ vagy } x = \frac{ma}{n-m} = AH.$$

és $x+a = \frac{na}{n-m}$, 's a' lefojt idő $\frac{a}{n-m}$.

3-dik eset. Ha A és B megforditott irányban D től C felé mozognak, és B sebesebben megy mint A, a' találkozás helye ugyan az melly eléb volt, és a' kifejezések változatlan megmaradnak.

4-dik eset. Ha az irány DC és A megy sebesebben mint B, az első esetre jövünk vissza, mert csak az út' íránya változott.

5-dik eset. Ha a' két pont ellenkező utat vesz p. o.: A megy D, B pedig C felé

C————|——|————|———D
A H B

Itt bármellyik haladjék sebesebben, *H* mindenkor *A* és *B* közzé esik, 's ha ismet

$$AH = x \text{ és } HB = a - x$$

azért $\frac{x}{m} = \frac{a-x}{n}$ és $x = \frac{ma}{m+n}$

$$a - x = \frac{na}{m+n} \text{ 's a' lefojt idő } \frac{a}{m+n}.$$

6-dik eset. Ha az utat itt megforditjuk, és *A* indul *C*nek, *B* pedig *D*nek, egymástul eltávozván, együtt létök az elött volt *H*nál *A* és *B* közt. 'S ezen eset szintugy ellenese az 5-dik esetnek, mint ellenese a' negyedik az elsőnek, a' harmadik pedig a' másodiknak.

Ha ezen 6 esetet öszvevesszük, következő különbségekre találunk.

	Feltét.	*H* állása.	*AH* értéke.	*BH* értéke.	Találkoz. ideje.
1	*C* től *D* felé *A* sebessebb *B* nél	*B* és *D* közt	$\frac{ma}{m-n}$	$\frac{na}{m-n}$	$\frac{a}{m-n}$ utánna.
2	*C* től *D* felé *A* lasabb mint *B*,	*A* és *C* közt	$\frac{ma}{n-m}$	$\frac{na}{n-m}$	$\frac{a}{n-m}$ előtte.
3	*D* től *C* felé *A* lasabb mint *B*,	*A* és *C* közt	$\frac{ma}{n-m}$	$\frac{na}{n-m}$	$\frac{a}{n-m}$ utánna.
4	*D* től *C* felé *A* sebessebb mint *B*,	*B* és *D* közt	$\frac{ma}{m-n}$	$\frac{na}{m-n}$	$\frac{a}{m-n}$ előtte.
5	*A* megy *D* felé *B*, *C* felé	*A* és *B* közt	$\frac{ma}{m+n}$	$\frac{na}{m+n}$	$\frac{a}{m+n}$ utánna.

6 $\begin{cases} A \text{ megy } C \text{ felé} \\ B, D \text{ felé} \end{cases}$	A és B közt	$\frac{ma}{m+n}$	$\frac{na}{m+n}$	$\frac{a}{m+n}$ előtte.

De minthogy p. o.: $\frac{a}{m-n}$ és $\frac{a}{n-m}$ ugyan azon mennyiségek változtatott jeggyel, mert

$$n-m=-(m-n), \text{ így } \frac{a}{n-m}=-\frac{a}{m-n}$$

és szinte $\frac{ma}{n-m}=-\frac{ma}{m-n}$'s a' t. látjuk hogy az első és második eset csak abban különböznek, hogy az elsöben AH jobbra, a' másodikban pedig balra esik, 's igy AHnak alakja különböző és az elsőben $\frac{ma}{m-n}$, a' másodikban $-\frac{ma}{m-n}$, szinte mivel az öszveütés vagy találkozás ideje az indúlás után, a' másodikban előtte volt, az első $\frac{a}{m-n}$, a' másik $-\frac{a}{m-n}$ vagy $\frac{a}{n-m}$.

Szintezen észrevétek alkalmazhatók a' harmadik és negyedik esetre. Igy leljük meg mindegyik különös esetből valamennyit a' jegyek egyszerű változtatása által, mint a' sebességek és az írányok változnak. Ha p. o.: valamellyik felelet tagadó, mint $\frac{ma}{n-m}$ hol ekkor $n>m$ és a' kifejezés $-\frac{ma}{n-m}$ be változik, jele hogy a' mennyiség mellyet képvisel, írányában ellenkező a' felvett esettel; ha p. o.: AH vonalat képviseli, jele hogy ez most baloldalra esik, ha az előtt a' jobbon volt; ha az öszveütés idejét adja, az egyik esetben ez, az indulás előtt, a' másikban, utánna történt.

Ha $m=n$, vagy is a' két pont' sebessége egyenlő $x=\frac{ma}{o}=\infty$ a' két pont soha nem találkozhat; ha $a=o$ és $m=n$ a' két pont mindenkor együtt van, 's itt $\frac{ma}{m-n}=\frac{o}{o}$ kifejezés mellynek értelmét, jövőben megismerni fogjuk.

3 §. Egyszerű egyenletek két ismeretlennel.

119. Az egyenletek' felírása, két vagy több ismeretlennel, szinte ugy történik mint eggyel, 's erre semmi különös szabály nincs.

Két ismeretlen közti egyenlet' közönséges kifejezése lehet

$$ax+by=c \text{ vagy } ax+by+c=o.$$

Egyenletünkben $ax+by=c$ szembetűnő hogy x és $y$nak végnelküli értéket adhatunk, és a 's b sokasaik' öszvese mindég c lesz.

Példánkat különözvén, a, b és $c$nek szám értékeket adhatunk 's közelebbről tekinthetjük az esetet: legyen egyenletünk

$$5x+7y=43.$$

Bármelly értéket adjunk itt az egyik ismeretlennek, szüksegeskép olly értéket kell a' másiknak felvennie hogy az egyenletnek eleget tegyen, az az hogy $5x$ és $7y$ öszvese 43 legyen.

Hogy pedig p. o.: $x$nek minden kigondolható egész, tört, állító a' vagy tagadó értéket adhatunk természetes, mert hozzá képest fog y érteke változni.

Ha az illy két ismeretleni egyenletben az egyiknek valamelly értéket adunk, a' másiké is következík, 's ekkor az egyenlet feloldva van.

Tegyünk példánkban x helyibe némely értéket, 's lássuk miként változik y értéke.

ha $x=1$ az egyenlet $5+7y=43$ és $y=\frac{43-5}{7}$

$x=2$ „ $10+7y=43$ és $y=\frac{43-10}{7}$

$x=3$ „ $15+7y=43$ és $y=\frac{43-15}{7}$

$x=4$ „ $20+7y=43$ és $y=\frac{43-20}{7}$

's a' t. 's a' t.

$x=-1$ „ $-5+7y=43$ és $y=\frac{43+5}{7}$

$x=-2$ „ $-10+7y=43$ és $y=\frac{43+10}{7}$

$x=-3$ „ $-15+7y=43$ és $y=\frac{43+15}{7}$

$x=-4$ „ $-20+7y=43$ és $y=\frac{43+20}{7}$

's a' t. 's a' t.

$x=\ ^1/_4$ az egyenlet $^5/_4+7y=43$ és $y=\frac{43-^5/_4}{7}$

$x=\ ^1/_2$ „ $^5/_2+7y=43$ és $y=\frac{43-^5/_2}{7}$

$x=\ ^3/_4$ „ $^{15}/_4+7y=43$ és $y=\frac{43-^{15}/_4}{7}$

$x=\cdot 001$ „ $\cdot 005+7y=43$ és $y=\frac{43-\cdot 005}{7}$

$x=\cdot 0001$ „ $\cdot 0005+7y=43$ és $y=\frac{43-\cdot 0005}{7}$

's a' t. 's a' t.

's mindezen értéke y nak megfelel az egyenletnek, ha x értéke előre, mint itt, felvétetik.

De látnivaló hogy az illy egyenlet két ismeretlennel *bizontalan*, mert végnélküli sok feloldást enged, szükséges tehát, hogy a' kérdés vagy szorosabb körök közzé vétessék, vagy olly feltételek adassanak, mellyek bizonyos és *csak egy* feloldást következtessenek.

Legyen egy más hasonló egyenletünk

$$12x-8y=4$$

és ennél is ugyan azon esetben vagyunk mint az előbbinél, mert ez is végtelen feloldást enged. De ha az előbbenit ezzel hasonlítjuk és öszvevesszük, találunk az egyikben olly értékére x és y nak, melly a' másik egyenletnek is megfelel, és csakugyan *csupán csak egy* és nemtöbb értékére x és y nak.

Ha tehát az ismeretlenek' száma kettő, szükségesképen két egyenlet kívántatik értékek meglelésére, különben a' kérdés bizontalan.

A' feladás tehát, *olly értékét találni egyik vagy másik ismeretlennek, egyik egyenletben, melly a' másik egyenletnek is megfelel.* Az út erre különböző lehet, de szükséges hogy a' két ismeretlent foglaló egyenlet, egy ismeretlenűre vitessék vissza, 's ekkor ezen egy ismeretlen értéke a' másik egyenletbe tétetik. A' mivelet e' szerint, *két egyszerű, egy isméretleni egyenlet feloldása.*

Irjuk mégegyszer két elébbi egyenletünket, ezek,

1) $5x+7y=43$ és

2) $12x-8y=4$

x értéke az első egyenletben $x=\frac{43-7y}{5}$,

ha azt a' másodikba tesszük, lesz

$12\frac{(43-7y)}{5}-8y=4$'s itt csak egy ismeretlen az y van, 's ennek értéke $y=4$.

Meglelvén igy egyik ismeretlen értékét, ezt bármellyik egyenletbe tehetjük és a' másik' értéke természetesen következik, az első egyenletbe tevén y értékét a' 4 et, lesz,

$5a+28=43$ a' másikba $12x-32=4$

mindegyikböl következik $x=3$.

Gyakorta elesik egyik vagy másik ismeretlen, ha a' két egyenlet öszveadatik, vagy egymásból levonatik; 's csakugyan egyszerüen ha valamellyik ismeretlen mindkét egyenletben ugyan akkora, vagy is ugyan azon valejáróval van; ha pedig a' velejárók nem egyenlők, sokszorozás vagy elosztás által könnyen egyenlőkké tehetjük azokat.

Ha elébbi két egyenletünkben

$$5x+7y=43 \text{ és } 12x-8y=4$$

p. o.: yt akarjuk elejteni, sokszorozzuk az elsöt 8al a' másodikat 7el, mivel az elsőben y velejárója 7 a' másodikban pedig 8) 's lesz két egyenletünk

$$40x+56y=344$$
$$84x-56y=28-$$

's a' kettőnek öszvese $124x=372$, $x=3$.

Ha pedig x et akarjuk kiírtani sokszorozzuk az elsőt 12 vel a' másodikat 5 tel, 's jön a' két egyenlet,

$$60x+84y=516$$
$$60x-40y=20$$

levonván egyiket a' másikból, marad

$$124y=496 \text{ 's ebből } y=4.$$

120. 1) Legyen a' két egyenlet

$$2x+y=24 \text{ és } 5x+3y=65$$

az elsőből $x=\frac{24-y}{2}$, a' másodikbul $x=\frac{65-3y}{5}$

's a' két kifejezése x nek $\frac{24-y}{2}=\frac{65-3y}{5}$, egyismeretlenű egyenletre vezet, mellyből $y=10$. Ezen értéke $y$nak mindkét egyenletből egyenesen következteti x értékét: 's lesz az elsőbül

$$2x+y=2x+10=24 \text{ és } x=\frac{14}{2}=7$$

a' másikból $\quad 5x+30=65$ és $x=\frac{35}{5}=7$.

2) Legyen a' két egyenlet

$$\frac{4x}{5}-\frac{5y}{6}=2 \text{ és } \frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y=19.$$

a' nevezők kiírtása után lesz két egyenletünk

$$24x-25y=60 \text{ és } 8x+9y=228$$

az egyikből $x=\frac{60+25y}{24}$, a' másikból $x=\frac{228-9y}{8}$

's innen $480+200y=5472$, és $y=12$

$$x=\frac{60+25.12}{24}=\frac{228-9.12}{8}=15.$$

3) Legyen a' két egyenlet $\frac{2}{5}x=\frac{1}{4}x+\frac{3}{7}y-9$

és $\frac{4}{5}x-\frac{2}{7}y=\frac{1}{2}y-6$

kiírtván a' nevezőket lesz

$$56x=35x+60y-1260 \text{ és}$$

$$56x-20y=35y-420$$

innen $x=\frac{60y-1260}{21}=\frac{55y-420}{56}$ és $y=28$

$$x=\frac{60.28-1260}{21}=\frac{55.28-420}{56}=\frac{420}{21}=20$$

4) Legyen a' két egyenlet

$$ax+by=c \text{ és } dx+ey=f$$

az elsőből $x=\frac{c-by}{a}$, a' másikból $x=\frac{f-ey}{d}$

x két értékéből $\frac{c-by}{a}=\frac{f-ey}{d}$ jön,

$$d(c-by)=a(f-ey)$$

vagy $dc-dby=af-aey$, és $dc-af=(db-ae)y$

$$y=\frac{dc-af}{db-ae}=\frac{af-dc}{ae-db}$$

y ezen értékét valamellyik egyenletbe tévén, jön,

$$x=\frac{c-b\left(\frac{af-dc}{ac-bd}\right)}{a}=\frac{1}{a}\left\{c-b\left(\frac{af-dc}{ae-bd}\right)\right\}=\frac{ce-bf}{ae-bd}$$

Ezen közönséges feloldás nyilván mutatja alakjai által, miként adják az ismeretlenek értékét, egyedül a' velejárók és számok, és bármellyik példánkat alkalmazhatjuk reájok figyelemmel lévén a' jegyekre. Vegyük a' két értéket;

$$y=\frac{af-dc}{ae-db},\text{ és } x=\frac{ce-bf}{ae-bd}$$

első példánk volt $5x+7y=43$ és $12x-8y=4$ itt tehát, $a=5$, $b=7$, $c=43$, $d=12$, $e=-8$, $f=4$, 's lesz

$$y=\frac{5.4-12.43}{-5.8-12.7}=\frac{12.43-5.4}{12.7+5.8}=\frac{496}{124}=4,\text{ és}$$

$$x=\frac{43.(-8)-7.4}{5.(-8)-7.12}=\frac{28+344}{84+40}=\frac{372}{124}=3$$

Második példánk volt, $2x+y=24$ és $5x+3y=65$'s itt $a=2$, $b=1$, $c=24$, $d=5$, $e=3$ és $f=65$

$$y=\frac{2.65-5.24}{2.3-1.5}=\frac{130-120}{6-5}=10$$

$$x=\frac{24.3-1.65}{2.3-1.5}=\frac{72-65}{1}=7$$

Harmadik példánk volt,

$$\frac{45}{5}-\frac{5y}{6}=2,\text{ és }\frac{2x}{3}+\frac{3y}{4}=19$$

hol $a={}^4/_5$, $b=-{}^5/_6$, $c=2$, $d={}^2/_3$, $e={}^3/_4$, és $f=19$

$$y=\frac{{}^4/_5.19-{}^2/_3.2}{{}^4/_5.{}^3/_4+{}^2/_3.{}^5/_6}=\frac{{}^{76}/_5-{}^4/_3}{{}^{12}/_{20}+{}^{10}/_{18}}=\frac{208.90}{104.15}=12$$

$$x=\frac{2.{}^3/_4+{}^5/_6.19}{{}^4/_5.{}^3/_4+{}^2/_3.{}^5/_6}=\frac{{}^{208}/_{12}}{{}^{104}/_{90}}=\frac{208.90}{104.12}=15$$

121. Nem mulhatlan szükséges hogy mindkét ismeretlen egyszersmind mindkét egyenletben meglegyen, 's elég ha csak egyikbe van foglalva.

P. o.: $3ax=b$ és $cx-3y=d$

az elsőből és másodikból

$$x=\frac{b}{3a} \text{ és } =\frac{d+3y}{c},\ y=\frac{cb-d}{9a}$$

122. Két szám' öszvese a, különbsége b; kivántatik a' két szám?

$x+y=a$, $x-y=b$ feltévén hogy $x>y$

az elsőből $x=a-y$, a' másikból $x=b+y$

és $a-y+y=a$ az első egyenletből, melly érték magában semmit sem mond, mert $a=a$ nem feloldás, szinte nem mutatja a' második egyenletben egyik ismeretlennek is valódi értékét; szükséges tehát y értékét keresni xből, 's minthogy

$a-y=b+y$

lesz $a-b=2y$, $y=\frac{a-b}{2}$

$$x=a-\frac{a-b}{2}=\frac{2a-a+b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

előttünk már ismeretes kifejezések, hol $y+b$ a' nagyobbik ha y a' kisebbik.

2) 12nap dolgozik A, 's 7 nap vele B, öszves díjok 74 forint.

Máskor A 8 napi, B pedig 5 napi munkáért nyertek öszvesen 50 forintot. Kérdés mennyi A és B egynapi dijja?

Legyen A 12 napja $12x$, B 7 napja $7y$'s a' t. 's a' két egyenlet

$12x+7y=74$, és $8x+5y=50$

$x=5$ és $y=2$.

3) Ha itt a' 74 és 50 helyett két egyenletünkben 46 és 30 at teszünk meghagyván a' többi adatokat, lesz $12x+7y=46$ és $8x+5y=30$

az elsőből $y=\frac{46-12x}{7}$, a' másikból

$$8x=5\frac{(46-12x)}{7}=30$$

vagy, $56x-60x=210-230$, és $-4x=-20$, $x=5$

x' értékét $y$ba tévén, $y=\frac{46-60}{7}=\frac{-14}{7}$, tagadó szám.

Szinte ha az első egyenletbe tesszük $x=5$ értékét, lesz

$5.12+7y=46$ vagy $60+7y=46$

a' másikba $40+5y=30$

's mindkét egyenlet az első tekintetre mutatja hogy a' kérdésben valami ellenmondás vagy képtelen fekszik, mert sem 60 hoz nemlehet valamit adni hogy 40 legyen, sem 40 hez hogy 30 váljék. $7y$ és $5y$ tehát csak tagadó mennyiségek lehetnek, mert $12x$ és $8x$ ***A*** nak dijját mutatják, szinte mint $7y$ és $5y$ ***B*** díjját: de minthogy 46 és 30 a' két munkás' öszves napszám díjja, következik hogy ***B*** nemcsak semmit sem nyer, de ***A***-nak költségébe kerül. Csakugyan a' kérdés következőbe fordul. ***A*** dolgozik 12 nap 46 forintért de 7nap ***B***t kitartja, szinte 8 napi dolog által nyer 30 forintot de ***B***nek 5 nap fizetett élelmet; 's a' kérdés, mennyit szerzett ***A*** és mennyibe került neki ***B***?

Az egyenletek' második tagja tagadóba válik 's lesz

$13x-7y=46$ és $8x-5y=30$

's innen $x=5$ és $y=2$.

Ha előbbi tagadó értékét hagyjuk meg y nak, az egyenlet ekkor is eleget tesz kérdésünknek, mert

$$y=\frac{-14}{7}=-2$$

's a' két egyenlet 60—14=46, és 40—10=30,

4) Ha egyismeretlenneli egyenletünk' utolsó példáját (18) két ismeretlenire alkalmazzuk, lesz azon tér ismét a melly a' két indulás A és B pontja közt van, a' kétféle sebesség vagy egyórai ut m és n; x, A nak' és y, V nek egész útja.

Ha a' két pont, indulási helyéből egymás ellen megy, a' kérdésnek ottani 5dik esetére jutunk, és $x+y=a$.

Az indulás és összeütés ideje mindkét pontra nézve egyenlö, 's csak a' sebességek különbözők; 's valóban, tesz A ugyanazon idő alatt $\frac{x}{m}$, és B $\frac{x}{n}$ útat, tehát második egyenletünk $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$, honnan $x=\frac{my}{n}$, x ezen értékét az első egyenletbe tevén jön,

$$\frac{my}{n}+y=a \text{ és } y=\frac{an}{m+n}, \text{ és } x=\frac{am}{m+n}$$

's mint tudjuk ezen kifejezések a' 6dik esetet is foglalják.

Ha a' két pont' iránya egyenlő, szükségeskép nagyobb az utóbbinak sebessége hogy az öszveütés megtörténjék. Ha tehát A az utóbbi pont, $m>n$ s' ekkor $x-y=a$, és $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$ mint minden esetben;

innen $x=\dfrac{am}{m-n}$ és $y=\dfrac{an}{m-n}$

ha $n>m$ az eset megfordított és tagadó, hol,

$$y-x=a,\text{ és }\frac{x}{m}=\frac{y}{n},\ x=a,\ y=2a;$$

ha $m=n$, ekkor $x=y$ és $\dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{m}$, $x-x=a$, $0=a$

valamelly képtelen kifejezés, melly bizonyos mennyiséget (a' két pont távolyát a) semmivel egyenlíti. Ezen képtelenség inkáb szembetűnő az ismeretlenek' értékében, mellyek ekkor

$$x=\frac{am}{m-n}\text{ és }y=\frac{an}{m-n}$$

de minthogy $m=n$, $m-n=0$

$$\text{'s így } x=\frac{am}{0}\text{ és }y=\frac{an}{0}$$

Tudjuk (arithmetika 265) hogy ezen kifejezés végtelenség jegye, de a' mathesisi végtelenség tagadó idea, mert nemlehet olly mennyiséget mutatni melly a' feltetélnek megfelelne: csak azt tudjuk mentül kisebb az osztó annál nagyobb a' részes, 's itt mentül kisebb m és n közti különbség annál nagyobb idő kívántatik hogy a' két pont találkozzék. Ha x és y ezen értéküket az egyenletekbe tesszük lesz,

$$\frac{am}{o}-\frac{an}{o}=a,\text{ vagy }\frac{am-an}{o}=a$$

vagy $am-an=a=o$ vagy $o=o$. A' második egyenlet szintígy adja $\dfrac{am}{o.m}=\dfrac{am}{o}$.

Ha az egyenletben $x-y=a$, a' két tagot $x$el elosztjuk, lesz

$1 - \frac{y}{x} = \frac{a}{x}$ és mivel $x = y$, $1 - 1 = \frac{a}{x} = o$

's így x értéke nagyobb mint bármelly mennyiség.

Ha a' két pont ugyan azon helyből indul egyenlő sebességgel haladván egy irányban, akkor $a = o$ és $m = n$, x pedig $\frac{o}{o}$ és $y = \frac{o}{o}$, melly alak a' kérdés bizontalan létét jelöli, mert $x = y$ és $\frac{x}{m} = \frac{y}{m}$ egyértelmű kifejezések: 's tudjuk a' két pont örökké együtt marad.

123. Az algebrai feloldások, tökéletesen megfelelnek a' kérdésnek akkor, ha az lehető és az adatok helyesek; ha ezekben valamelly ellenkező feltét foglaltatik, megmutatják melly módosításokat kelessék tenni; ha pedig az adatokkal a' feloldásnak semmi helye nincs, 's azt semmi hasonló kérdésre visszavinni nemlehet, akkor a' tellyes lehetlenséget bizonyítják.

A' kifejezésből $\frac{o}{o}$ nemlehet mindenkor következtetni értéke bizontalanságát, mert gyakorta van 'a tört alaku kifejezések' nevezője és számlálója közt olly közös factor, melly maga is$=o$ levén, az egész kifejezést semmivé teszi; de ha ezen közös factor kivétetik, a' kifejezésnek bizonyos értéke következik.

Illyen kifejezés a' többek közt $\frac{m(m^2 - n^2)}{n(m - n)}$, melly $\frac{o}{o}$ ha $m = n$; de ha legegyszerübb alakjára vitetik,

$(m-n)$ közös factora kivétele által, lesz

$\frac{m(m+n)}{n}$, 's ha most $m=n$ a' kifejezés $=2m$.

Vannak azonban esetek, mellyek ezen visgálat alól mintegy kicsusznak, de mostani visgálatink' körébe nem tartoznak.

124. Vegyünk elé még egykét példát.

1) Két zsacskóban bizonyos számu pénz, koczka, golyó vagy bármi van. A' jobbfelen fekvőbe teszek a' balból 10 et, 's ott két annyi lett mennyi maradott a' balban, ha megfordítva teszek 10 et a' balfelen fekvőbe, ebben háromszor annyi lesz, mennyi maradott az elsőben.

Kérdés hány volt eleinten egyik egyikben?

Ha az elsőben x, a' másodikban y van, bármellyikből veszünk el tizet 's a' másikhoz adjuk, itt 10 el kevesebb ott 10 el több lesz, és a' két eset

$$x+10,\ y-10, \text{ és } x-10,\ y+10.$$

Két egyenlitésünk pedig a' feltét szerint

$$x+10=2(y-10) \text{ és } y+10=3(x-10)$$

$$x=22,\ y=26.$$

2) Kétféle pénznemünk van, 7 darab a' nagyobbikból és 12 a' kisebbikből 288 forint öszvesen; 12 nagy és 7 kicsi 358 forint. Kérdés mennyit ér a' nagyobikból és kisebbikből egy egy?

$$7x+12y=288 \text{ és } 7y+12x=358$$

$$x=24 \text{ és } y=10.$$

3) Ezüstöt és aranyot olvasztunk öszve, az egész tömeg 12 köbhüvely és 100 uncia nehéz; egy köbhüvely arany $12^2/_3$ uncia, egy köbhüvely ezüst $6^8/_9$

uncia. Kérdés mennyi arany és mennyi ezüst van a' rudban?

A' két ércz együtt 12 köbhüvely 's első egyenletünk $x+y=12$, az arany $12^2/_3 x$, az ezüst $6^8/_9 y$ unci és öszvesen

$$\frac{38}{3}x+\frac{62}{9}y=100$$

második egyenletünk.

A' kettőből $x=3$ és $y=9$. Sokszorozván ezen köbhüvelyeket sújjokkal, lesz az arany 38 az ezüst 62, és öszvesen 100 uncia.

4) Mindezen kérdéseket a' tanuló közönséges tekintetekre 's így közönséges alakokra viheti, 's ezekből minden hasonló kérdésnek feloldását huzhatja. Ha itt p. o.: arany és ezüst helyett, bármelly érczet vagy tömeget értünk, legyen ennek bármelly tulajdon sújja, terjedsége, 's az öszvesnek nyomata, az írás nem változik, és közönségesen minden ide tartozható kérdést egyszerre foglalunk.

Legyen p. o.: a' keveréknek vagy olvasztványnak tartalma köbhüvelyben vagy más bizonyos mértékben kitéve $=a$, az egész tömegnek nehézsége$=b$, az egyik test tulájdonsújja c, a' másiké ugyan azon mértékben kifejezve$=d$; akkor is az egyiket $x$el a' másikat $y$al jelölvén, lesz kifejezések tartalmokban

$$x+y=a$$

sújjokban $cx+dy=b$. A' két egyenletből

$$x=\frac{b-ad}{c-d} \text{ és } y=\frac{ac-b}{c-d}$$

Szóval mondván a' kifejezést, x értéke p. o.: azt teszi, hogy az egész nehézségből levonandó, az olvasztvány származata a' másik test sullyával, 's osztandó a' két test' sújja különbségével; szinte így y értéke is.

A' kérdés vissza-vezet bennünket az arithm. (200) adott szabállyokra.

5) De más, az első tekintetre különböző kérdéseket is, ugyan azon neműre lehet gyakorta alkalmazni, p. o.: fizessünk 522 forintot, 42 darab, 24 és 6 forintossal; szint olly kérdés mint 42 köbhüvely keverék 522 uncia, 's két alkotó részének egyike 24, másika 6 unciát nyom egy köbhüvelyben; amott kerestetik a' kétféle pénznem darabja, itt a' két ércznek köbhüvelye, 's mindegyik kérdés szerint

$$x=15 \text{ és } y=27.$$

6) Szinte hasonló kérdés; a' tengervizéből egy köbláb 74 az esővízből pedig 70 fontot nyom; mennyi kell mindkettőből, hogy a' keverék 73 fontot nyomjon.

124. Említők (119) hogy mindenkor lehet olly sokszorozót találni melly által egyik vagy másik ismeretlen elesik, ha a' két egyenlet öszvadatik vagy egymásból levonatik.

Legyen a' két egyenlet

$$ax+by=c \text{ és } a'x+b'y=c'.$$

Ha $x$et akarjuk kiírtani, sokszorozzuk az első egyenletet a' al masikat a val; ha $y$nt, az elsőt b' a' másikat $b$vel. Vegyük az első esetet, 's lesz a' két sokszorozott egyenlet

$$aa'x+a'by=a'c$$
$$aa'x+ab'y=ac'$$

levonván a' másodikat az elsőből lesz

$$y(a'b-ab')=a'c-ac'$$

vagy a' jegyeket megfordítva

$$y(ab'-a'b)=ac'-a'c, \text{ 's innen}$$
$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

honnan x következik.

125. Bezout egyszerű mívelete szerint azonnal elesik az ismeretlenek' egyike.

Legyen elébbi két egyenletünk

$$ax+by=c \text{ és } a'x+b'y=c'$$

sokszorozzuk az elsőt m által, lesz

$$max+mby=mc,$$

levonván ebből a' másodikat, marad

$$max-a'x+mby-b'y=mc-c' \text{ vagy}$$
$$x(am-a')+y(bm-b')=mc-c'$$

Természetes hogy m értékét tetszésünk szerint vehetjük, ha tehát $am=a'$, x factora $=o$, következéskép x elesik, és ha $bm=b'$, y factora $=o$, és y esik el.

Példánkban legyen y kiírtandó, tehát vegyük $bm=b'$ marad egyenletünkben

$$x(am-a')=mc-c'$$

's innen $$x=\frac{mc-c'}{am-a'}$$

de minthogy $bm=b'$, $m=\frac{b'}{b}$, 's ha ezen értékét m nek x értékébe tesszük, lesz

$$x = \frac{\frac{cb'}{b} - c}{\frac{ab'}{b} - a'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'};$$

ha x et írtjuk ki, lesz mivel ekkor $m = \frac{a'}{a}$

$$y = \frac{cm - c'}{bm - b'} = \frac{\frac{ca'}{a} - c'}{\frac{ba'}{a} - b'} = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} =$$

$$= \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

mint eléb.

Noha ezen mivelet (vagy inkáb fogás) nagyobb hasznot és könnyebbítést nyújt azon egyenletekben, mellyek kettőnél több ismeretlent foglalnak; jó lesz egy példára alkalmazni.

Legyen a' két egyenlet

$$4x + 3y = 65, \text{ és } 5x + 8y = 111.$$

Sokszorozván a' másodikat m el 's az elsőhöz adván lesz

$$5mx + 4x + 8my + 3y = m111 + 65, \text{ vagy}$$
$$x(5m + 4) + y(8m + 3) = 111.m + 65.$$

Ha x et akarjuk kiirtani (eliminálni) $5m = -4$ ha y t $8m = -3$. Az első esetben

$$5m + 4 = 0 \text{ és } m = -\frac{4}{5}$$

$$y(8m + 3) = 111.m + 65 \text{ és } y = \frac{111.m + 65}{8m + 3} = 7$$

a' második esetben

$$8m+3=0 \text{ és } m=-{}^3/_8$$

$$x=\frac{65+111.m}{4+5m}=11;$$

's látjuk hogy akar levonjuk egyik egyenletet a' másikból, akar öszveadjuk a' kettőt, mindenkor czélt érünk.

126. Láttuk [120. (3)ban], hogy az ismeretlenek értékét közönséges alakban lehet adni, kifejezve az ismertek által.

Legközönségesb alakja a' két ismeretlent foglaló egyenleteknek következő;

$$ax+by+c=o, \text{ és } a'x+b'y+c'=o.$$

mert minden egyenlet ezen alakra vihető.

Gyakorlatból is tudjuk már, hogy:

1-ször, a és b az első egyenletben velejárók, 's a' közönséges alkalmazásban szükségesképen számok, vagyis az ismeretlenek' sokszorozói, legyenek ezek egész, tört állító vagy tagadó számok.

2-szor, a' és b' szinte illyen számok a' második egyenletben de mivel az előbbeniektől különböznek, vonalokkal vannak ellátva.

3-szor, c és c' mindkét egyenletben azon mennyiséget jelölik, mellyben ismeretlen többé nincs, 's mellyet eddig az egyenlőség jegye' jobbfelire tettünk.

4-szor, A' $+$ jegy semmi béfojású nem-lehet, mert tudjuk hogy a' kérdés természetét nem változtatja, 's tőlle függetlenül bármellyik tag' értéke állító vagy tagadó lehet.

5-ször, Hogy végre az egyenlet $=0$, ha minden tag a' jegy egyik felin áll, magában is nyilván.

Ezen két egyenletből a' két ismeretlen értékei,

$$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\ y=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b},$$

ismeretes közönséges alakok, mellyek által minden külön kérdés feloldva van.

4 §. Egyenletek, több ismeretlennel.

127. Bárhány legyen az ismeretlenek' száma, szükséges, *hogy ugyanannyi külön, nyilván és a' többitől független egyenlet addassék, mennyi az ismeretlen*, különben a' feloldás lehetetlen, a' feladat pedig bizontalan, nem mulhatlanul szükséges azonban mint már emlitők, hogy mindegyik egyenletben *valamennyi ismeretlen foglalva legyen*, de szükséges hogy mindegyik ismeretlen egyik vagy másik egyenletben meglegyen, akar egyedül akar a' többivel.

Az illy több ismeretlenek-közti egyenletek feloldása következő miveleteket kívánja.

Bármellyik ismeretlen' értéke az egyik vagy másik egyenletből kerestetik, úgy tekintvén kivülte a' többi ismeretlent mint ismert mennyiséget. Ezen talált érték mindegyik külön egyenletbe tétetik, mellyben a' keresett ismeretlen előjön, 's így valamennyi egyenlet egy ismeretlennel kevesebbet foglal mint eleinten. Ezután egy másik ismeretlen értéke kerestetik szintígy, 's tétetik helyette az egyenletekbe; igy fojtatván a' míveletet, minden helyettezés után egy ismeretlennel kevesebb lesz az egyenletekben, míg végre valamenyiben csak egy marad, mellyet megtalálni tudjuk.

1) Vegyünk például három ismeretlent 's legyen 3 egyenletünk $3x+5y+7z=179$

$$9x+3y-2z=64$$

$$5x-y+3z=75.$$

Keressük mindhárom egyenletből x értékét, 's lesz

az elsőbül $x=\frac{179-5y-7z}{3}$

a' másodikbul $x=\frac{64-3y+2z}{8}$

a' harmadikból $x=\frac{75+y-3z}{5}$

's ezen három értéke $x$nek egyenlő egymásközt.

Egyenlitsük első értékét elöször a' másodikkal 's azután a' harmadikkal elhárítván a' nevezőket, lesz

$$1432-40y-56z=192-9y+6z$$

$$895-25y-35z=225+3y-9z$$

két egyenlet mellyben csak két ismeretlen maradott.

Ha mindegyikből keressük y értékét, lesz

$$y=\frac{1240-62z}{31}=\frac{670-26z}{28}$$

's ebből $z=15$, melly 15, y értékébe tétetvén adja

$$y=\frac{1240-62.15}{31}=\frac{310}{31}=10$$

innen pedig, ha 10et y helyibe tesszük valamellyik egyenletünkbe

$$x=\frac{179-5.10-7.15}{3}=\frac{197-155}{3}=\frac{24}{3}=8$$

2) Legyen a' 3 egyenlet,

$$5x+3y=65,\ 2y-z=11 \text{ és } 3x+4z=57$$

az elsőből $x=\frac{65-3y}{5}$,

a' harmadikból $x=\frac{57-4z}{3}$

's két uj egyenletünk $\frac{65-3y}{5}=\frac{57-4z}{3}$

ebből jön az elébbi utmutatás szerint $z=9$, $y=10$ és $x=7$.

3) *A*, *B* és *C*, játékhoz ülnek. *B* és *C* annyi forintot nyernek *A* tól mennyi van a' kettőnek. Ezután *B* veszt annyit mennyi volt *A* és *C*nek az első játék után, 's végre *C* veszt a' harmadik játékban annyit mennyi volt *B* és *A*nak a' 2dik játék végével. Elhagyván a' játékot mindegyiknek 16 forintja volt; kérdés mennyi volt mindegyiknek a' játék előtt, (Arithm. 203, 51.)

Legyen a' 3 játzó pénze a' játék előtt, x, y és z.

Az első játék után

$$A=x-y-z,\ B=2y \text{ és } C=2z.$$

A' második játék után

$$A=2(x-y-z),\ B=2y-(x-y-z)-2z \text{ és } C=4z,$$

A' harmadik játék után pedig

A nak van $4(x-y-2)$

B nek $2(2y-(x-y-z)-2z))$

C nek, $4z-2(x-y-z)-2y-(x-y-z)-2z$

's minthogy ekkor mindegyiknek 16 forintja van, az egyenletek is egyenlők 16al, vagy

$$4x-4y-4z=16 \text{ és } x-y-z=5$$
$$6y-2x-2z=16 \quad ,, \quad 3y-x-z=8$$
$$7z-x-y=16 \quad ,, \quad 7z-x-y=16$$

a' két elsőt öszve adván jön, $2y-2z-12$, $y-z=6$

az első és harmadikból $6z-2y=20$, $3z-y=10$

's a' két utolsóból $4z=32$ vagy $z=8$,

$y=14$, $x=26$.

4) Háromszor vesz valaki, háromféle bármelly tárgyat; vesz először az elsőből 230 forintért 30 fontot, másat, köblöt vagy bármelly mértéket, a' másikból 20, a' harmadikból 10 et; vesz másodszor 138 forintért 15, 6 és 12 illy mértékűt a' háromféléből sorjában, 's végre 75 forintért 10, 5 és 4 et. Kérdés mi árú volt egyik és másik tárgy?

A' 3 egyenlet rendiben $30x+20y+10z=230$

$$15x+6y+12z=138$$
$$10x+5y+4z=75.$$

mindenkor helyes a' kifejezéseket legegyszerűbb alakra vinni 's lesz 3 egyenletünk

$$3x+2y+z=23,\quad 5x+2y+4z=46,$$
$$10x+5y+4z=75.$$

Természetes hogy azon ismeretlen értékét keressük először melly legkevesb bajjal következik, x értéke az elsőbül

$x=\frac{23-2y-z}{3}$ nem olly egyszerű mint z é, 's azért válosszuk inkáb ugyan az első egyenletből

$$z=23-3x-2y$$

értékét, mellyet a' másik kettőbe tévén jön,

$$5x+2y+92-12x-8y=46$$
$$10x-5y+92-12x-8y=75 \quad \text{vagy}$$
$$92-7x-6y=46$$
$$92-2x-3y=75$$

's ezekből $x=4$, $y=3$ és $z=5$.

128. Bezout míveletét alkalmazván legyen 3 egyenletünk; $3x+5y+7z=179$

$$8x+3y-2z=64$$
$$5x-y+3z=75$$

sokszorozzuk a' másodikat m el, a' harmadikat n el és adjuk öszve a' három egyenletet: lesz

$$3x+5y+7z+8mx+3my-2mz+5nx-ny+3nz=$$
$$=179+64m+75n$$

kivevén a' factorokat,

$$x(3+8m+5n)+y(5+3m-n)+z(7-2m+3n)=$$
$$=179+64m+75n.$$

Itt egyszerre két tagot és két ismeretlent írtunk ki, ha,

$$3+8m+5n=0 \text{ és } 5+3m-n=0 \qquad \text{(a)}$$

's marad $z(7-2m+3n)=179+64m+75n$, honnan

$$z=\frac{179+64m+75n}{7-2m+3n}$$

de (a) egyenletből $m=-\frac{28}{23}$ és $n=\frac{31}{23}$

ezen értékeket $z$be tevén lesz $z=15$, 's ebből a' többi egyenesen következik.

Ebből nyilván hogy bármellyik ismeretlen lehet az első, főczél lévén, e' három ismeretlent foglaló egyenleteket, két ismeretlenire vinni, ezt ismét egyre. Ezen mivelet változatlan marad bárhány legyen az ismeretlen, és sokszoroznók p. o.: az egyenleteket m, n, p 's a' t. vel egymásután, 's keresnők sorjában az ismeretleneket. Miveletünket közönséges alakra alkalmazván, legyen 3 egyenletünk

$$ax+bz+cz=d$$
$$a'x+b'y+c'z=d'$$
$$a''x+b''y+c''z=d''$$

sokszorozván a' másodikat $m$el, a' harmadikat $n$el, 's a' helyett hogy öszveadnók a' 3 egyenletet, vonjuk le az elsőt a' másik kettőbül. Ez által semmit nem változtatunk, de azt nyerjük hogy m és n értékei gyakorta állítók és ritkán tagadók lesznek; de tudjuk, akar öszve adassék a' 3 egyenlet, akar levonassék egymásból, sem a' mivelet nem változik sem az ismeretlenek értéke, és legfeljebb csak némelly jegy.

Lesz a' fentebbi indítvány szerint,

$$x(a'm-a''n-a)+y(b'm-b''n-b)+z(c'm+c''n-$$
$$-c)=d'm+d''n-d$$

Ha kettőt a' korlátokban álló factorok közzül $=0$ teszünk, a' hozzájok tartozó két ismeretlen elesik; 's marad a' harmadik egyedül.

Példánkban, mivel az első egyenletet a' kettőbül levontuk, elesnek az ismeretlenek, ha,

$$\left.\begin{array}{l} a'm+a''n=a \\ b'm+b''n=b \\ c'm+c''n=c \end{array}\right\} \quad (1)$$

's csakugyan ha x es y t egyszerre kiírtjuk lesz

$$z=\frac{d'm+d''n-d}{c'm+c''n-c}$$

(1) egyenleteinkből pedig

$$m=\frac{ab''-ba''}{a'b''-b'a''} \text{ és } n=\frac{a''b-b''a}{a'b''-b'a''}$$

ezen értékeket z be tévén, jön

$$z=\frac{d''(b''a-a''b)+d'(a'b-b'a)-d(a'b''-b'a'')}{c''(b''a-a''b)+c'(a'b-b'a)-c(a'b''-b'a'')}$$

szintigy kiírtható 4 ismeretlenközt egyszerre három.

Tekintsük végre a' három ismeretlenközti egyenletek közönséges alakját és feloldását, három egyenletünk

$$ax+by+cz+d=o$$
$$a'x+b'y+c'z+d'=o$$
$$a''x+b''y+c''z+d''=o$$

a' három ismeretlen értéke

$$z=\frac{-ab'd''+a'bd''-a''bd'+ab''d'-a'b''d+a''b'd}{ab'c''-a'bc''+a''bc'-ab''c'+a'b''c-a''b'c}$$

$$y=\frac{-ad'c''+a'dc''-a''dc'+ad''c'-a'd''c+a''d'c}{ab'c''-a'bc''+a''bc'-ab''c'+a'b''c-a''b'c}$$

$$x=\frac{-b'c''d+bc''d'-bc'd''+b''c'd-b''cd'+b'cd''}{ab'c''-a'bc''+a''bc'-ab''c'+a'b''c-a''b'c}$$

Négy ismeretlen és négy egyenlet hasonló kifejezeseket ád, 's csakugyan négy törtet, mellynek számlálója és nevezője 24, 24 tagból áll. Ezen értékek 5 ismeretlennel 120, hattal 720 's a' t. tagot foglalnak, mennyit a' természetes számok származatai sorjában adnak, hármával, négyivel, ötivel 's a' t. véve hol tudjuk

1.2.3=6,, 1.2.3.4=24,, 1.2.3.4.5=120,,
1.2.3.4.5.6=720 és 1.2.3.4.5.6.7.8...*m*,'s a' t.

bárhány ismeretlen legyen a' kérdésben.

Gyakorolhatja magát a' tanuló, mind a' betük' mind a' jegyek' változtatásában, 's keresse fel melly szoros egybekötésben vannak ezen alakok, (mint mindazok, mellyek bizonyos törvény szerint symetrikai elrendelésnek vannak alája vetve, 's mellyekből már többet ismér) a' combinálás tanával.

Első tekintetre észreveheti, hogy a' törtek' számlálójinak tagjai, minden lehető öszveilletését foglalják három betünek, és hogy csak azon betü marad ki a' kifejezett ismeretlen értékéből, mellyik tulajdon factora, e' helyett pedig azon mennyiség áll, mellyben az ismeretlen tőbbé nincs. A' törtek' nevezőji pedig mindhárom értékben ugyanazok és egyenlők, 's csak az ismeretlenek factoraiból vannak öszvetéve. Ezt tudván, könnyen felírhatjuk x, y és z értékét, lesz az elsőnek tört számlálójához tartozó három betü bcd, a' másodiknak acd 's a' harmadiknak abd, mindegyik nevezőhöz pedig abc, lehető 6 változásaiban. Itt a' betük felett levő vonalokra előre nem is figyelünk, és ha 6 változtatott tagjainkat felírtuk, egyszerüen ellátjuk azokat vonalokkal is: lesznek pedig a' változások vonalok nélkül;

$x$re nézve bcd, bdc, cbd, cdb, dbc és dcb
$y$ra » acd, adc, cad, cda, dac és dca
$z$re » abd, adb, bad, bda, dab és dba.

Mint igy rendeltük a' változásokat, a' vonalkák 0, 1, 2 sorban következnek mindegyik tagban. A' tagok pedig felváltva, állítók és tagadók. Eszerint lesz a' három tört számlálója, 's csakugyan

x száml. $bc'd''-bd'c''+cb'd''-cd'b''+db'c''-dc'b''$
y » $ac'd''-ad'c''+ca'd''-cd'a''+da'c''-dc'a''$
z » $ab'd''-ad'b''+ba'd''-bd'a''+da'b''-db'a''$

mindháromnak pedig nevezője egyenlőkép

$$ab'c''-ac'b''+ba'c''-bc'a''+ca'b''-cb'a''$$

Ezen alakra bármelly különös kérdés alkalmazható, figyelemmel levén a' hellyes írásra. Legyen gyakorlatul a' 3 egyenlet

$$7x+5y+2z=79$$
$$8x+7y+9z=122$$
$$x+4y+5z=55.$$

hol, $a=7 \quad b=5 \quad c=2 \quad d=79$
$a'=8 \quad b'=7 \quad c'=9 \quad d'=122$
$a''=1 \quad b''=5 \quad c''=5 \quad d''=65.$

Adják pedig ezen egyenletek $x=4$, $y=9$ és $z=3$.

Akkor is, ha az egyenletek tagjai különböző jegyüek, eleget tesz közönséges kifejezésünk, de figyelnünk kell a' jegyek' változásira.

Legyen 3 egyenletünk

$$3x-9y+8z=41$$
$$-5x+4y+2z=-20$$
$$11x-7y-6z=37,\ \text{hol}$$

$a=3 \quad b=-9 \quad c=8 \quad d=+41$
$a'=-5 \quad b'=4 \quad c'=2 \quad d'=-20$
$a''=11 \quad b''=-7 \quad c''=-6 \quad d''=+37$

Vegyük először x értéke számlálója tagjait, de ne figyeljünk a' tagok jegyeire, lesz

$bc'd''=-9.\ 2.\ 37=-666$
$bd'c''=-9.-20.-6=-1080$
$cd'b''=8.-20.-7=+1120$
$cb'd''=8.-4.\ 37=+1184$
$db'c''=41.\ 4.-6=-984$
$dc'b''=41.\ 2.-7=-574,$

ha most a' jegyeket helyükre tesszük, a' páratlan helyek (1, 3, 5) állítók, a' páros helyüek (2, 4, 6) tagadók levén, jön a' 6 tag értéke

$$-666+1080+1120-1184-984+574$$
$$=2774-2834=-60.$$

Szinte-így találjuk a' másik két ismeretlen számlálóját. $y$né $=3022-2932=+90$
zé $=3859-3889=-30.$

A' három tört' közös nevezője

$$592-622=-30.$$

's innen következik a' 3 ismeretlen értéke;

$$x=\frac{-60}{-30}=2,\ y=\frac{+90}{-30}=-3,\ z=\frac{-30}{-30}=1.$$

5 §. Bizontalan egyenletek.

129. Ha nincs annyi *bizonyos és egymástól független* egyenletünk, hány az ismeretlen, *akkor a' kérdés bizontalan*, és közönségesen mondva, *végnélküli sok feloldást enged.*

Tekintsük a' legegyszerűbb esetet két ismeretlennel.

Közönséges egyenletünk $ax+by=c$.

Ha ebből x és y értékét keressük, bizonyosan végtelen sok feloldásra akadunk, mert ezen értékek mint említők minden lehető számokat magokban foglalnak. Bármelly értéket adjunk p. o.: $x$nek, hozzáképest változik y értéke.

Ha kérdeznők p. o.: melly azon két szám, mellynek öszvese 20, 10, vagy bármelly szám, 's lenne egyenletünk

$$x+y=20 \text{ vagy } x+y=10 \text{ 's a' t.}$$

vagy $x+y=1$, vagy $x+y=0$, mindegyik eset végtelen feloldást enged.

Vegyük visgálat alá bármellyiket p. o.; $x+y=1$.

Ha itt x nek bármelly önkényes értéket adunk, szükségesképen következik olly értéke $y$nak, hogy a' kettőnek öszvese $=1$ legyen.

De szembetűnő hogy x értéke a' két végtelenség-közt minden ki gondolható számot képviselhet 's y értékét következteti mint egészítőjét az egységhez. Ha például $x$nek értékeket adunk, noha ezek csekély számmal lehetnek a' végtelenséghez képest, állításunkat világítni fogják

legyen x értéke	következik y értéke
$=-875000$	$=+875001$
$=+9000000$	$=-8999999$
$=-\frac{1}{100000}$	$=+\frac{10^5+1}{100000}$
$=+\frac{10^9-1}{10^9}$	$=-\frac{1}{10^9}$
$=+\sqrt{a-x}$	$=-\sqrt{a-x}+1$
$=\pm 0$	$=1$
$=\pm\infty$'s a' t.	$=\mp\infty+1$'s a' t.

és bármelly számok tétessenek ∞ helyett.

A' feloldások végtelen száma gyakorta korlátoltatik némelly az egyenlethez kötött feltétek által, de minthogy ezeket az egyenletek által kifejezni nem tudjuk, a' következésre csak mellék útakon jutunk.

Ha p. o.: egyenletünkben $x+y=15$ azon feltétel lenne kimondva hogy x és y értékei, állító és egész számok legyenek, már szembetűnö hogy a' feloldások mennyisége valóban szoros körök közt van, mert így az egyik ismeretlen értéke 15nél nagyobb nem lehet 's ekkor a' másiké $=0$; a' feloldások száma tehát 16nál több nemlehet, 's ekkor ha egymásután $x$nek 0tól 15ig tesszük értékét, következik sorjában y értéke 15től, 0ig; mint

$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,$
$13,\ 14,\ 15,$
$y = 15,\ 14,\ 13,\ 12,\ 11,\ 10,\ 6,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,$
$2,\ 1,\ 0.$

130. De kevés ehez hasonló feladás van, mellyből olly könnyen lehessen következtetni a' feloldások' határát. Ha p. o.; közönséges egyenletünkben, állító és egész számok kívántatnak x és y értékeknek, gyakorta megtörténik, hogy mint az egyik ismeretlen értékének egész számot veszünk, a' másiké törtszám.

Szükséges ezen felül, hogy, ha egyenletünk $ax+by=c$ minden törtszámtul tisztítva 's legegyszerűbb kifejezésén van, mit itt mindenkor felteszünk, *a és b egymásközt elsők legyenek.*

Ha ezt valaki tagadná, tegyük fel hogy a és b nek valamelly közös osztója vagy factora van m, és hogy $a=a'm$ és $b=b'm$, ekkor egyenletünk

$$a'mx+b'my=c, \quad \text{és} \quad a'x+b'y=\frac{c}{m},$$

de minthogy feltételünk szerint az egyenlet legegyszerűbb kifejezésén volt, $\frac{c}{m}$ csak törtszám lehet; de lehetlen hogy törtszám megfeleljen x és y egész értékeinek.

131. Mindazon kérdések mellyek illy egyenletre vezetnek, egész értéköket kivánják az ismeretleneknek.

Tekintsük eleinten különös példákon a' feloldás' utját.

Legyen az egyenlet $5x+7=81$, és az ismeretlenek, nek egész szám értékei kivántatnak.

Az egyenlet legegyszerűbb kifejezésén van és $a=5$, $b=7$ első számok egymás közt.

Vegyük a' kisebb velejáróval álló ismeretlen értékét ez $x=\frac{81-7y}{5}$.

Osszunk itt 5 el meddig lehet, 's jön

$$x=16+{}^1/_5-y-\frac{2y}{5}$$

$$=16-y-\frac{2y-1}{5} \quad (a).$$

Azért válosztottuk a' kisebbik velejárót, mivel az osztás által kifejezésünket egyszerübb alakra hozhattuk.

Itt y nak bármelly értéke, x nek bizonyos értéket ád 's a' kérdést feloldja; de minthogy egész-számok kívántatnak, y értékének is szükségesképen egész számnak kell lennie.

Szükséges tehát, ha x nek egész szám értékét akarjuk, hogy $\frac{2y-1}{5}$ egész szám legyen p. o.: u, vagy $\frac{2y-1}{5}=u$, az az $2y-1=5u$, az elébbenihez hasonló egyenlet, de egyszerűbb. Folytatván a' feloldást következik

$$y=\frac{5u+1}{2}=2u+\frac{u+1}{2} \quad (b)$$

hogy y egész szám legyen, szükséges hogy $\frac{u+1}{2}$ is egészszám legyen, p. o.: v és $\frac{u+1}{2}=v$, vagy

$$u+1=2v, \; u=2v-1 \quad (c)$$

egyszerű, a' többihöz hasonló egyenlet. Már itt v helyett bármelly egész számot tehetünk, $u$nak mindenkor egészszám lesz értéke és szintigy $y$nak a' (b) egyenletben, 's következéskép $x$nek is (a)ban. Ismételt osztás és egyenlítés-által mindenkor illy egyszerű végkövetkezésre jutunk.

u értékét $y$ba tevén lesz:

$$y = 4v - 2 + v = 5v - 2 \quad (d)$$

és
$$x = 16 - 5v + 2 - 2v + 1 = 19 - 7v \quad (e).$$

Ezen két egyenletben minden értéke $v$nek, x és $y$nak megfelelő értékét adja, és v azon mennyiség mellyet bizontalannak nevezünk:

ha $v=1$,	$x=12$,	$y=3$	
$v=2$,	$x=5$,	$y=8$	
$v=3$,	$x=-2$,	$y=13$	
$v=4$,	$x=-9$,	$y=18$	's a't.

Minden illy egyenlet hasonló bizontalan $v$re vezet, mellynek értékei x és $y$nak egészszám értékeit adják; de ha az ismeretlenek velejárója nem elsők egymásközt, illy következésre nem juthatni.

Legyen más egyenletünk $11x - 17y = 5$.

Mivelvén mint elébb, lesz

$$x = \frac{17y+5}{11} = y + \frac{6y+5}{11}.$$

ha ismét $\frac{6y+5}{11} = u$, a' kifejezésben y velejárója a' 6 és a' nevező 11 közt a' különbség 5 levén, melly 5 épen a' másik tag, egyszerübb alakra jutunk, 's csakugyan

$$x=y+\frac{11y-5y+5}{11}=2y-\frac{(5y-5)}{11}$$
$$=2y-\frac{5(y-1)}{11}$$

's mivel 5 és 11 elsők egymásközt, $\frac{y-1}{11}$ egész szám.

Legyen $\frac{y-1}{11}=v$, $y-1=11v$, $y=11v+1$

$$x=2y-5v=22v+2-5v=17v+2$$

's ezekből

ha $v=0$, $x=2$, és $y=1$

$v=1$, $x=19$, $y=12$

$v=2$, $x=36$, $y=23$'s a' t.

Példák.

1) Kívántatik azon szám, melly 6 által, osztatván 5öt ád maradékul, 7 által osztatván pedig hármat.

A' szám x szer hat és 5 maradék, szinte y szor hét és 3 maradék.

A' két egyenlet

$$6x+5=7y+3$$

ebből $x=\frac{7y-2}{6}=y+\frac{y-2}{6}$

legyen $\frac{y-2}{6}=u$, és $y=6u+2$, $x=7u+2$

tehát x és y értékei egymásután, ha

$u=0$,	$x=2$,	$y=2$
$=1$,	$=9$,	$=8$
$=2$,	$=16$,	$=14$
$=3$,	$=25$,	$=20$

és a' kivánt számnak $6x+5=7y+3$ értékei,

17, 59, 101, 's a' t.

2) Három és öt forintossal kell 56 forintot fizetni. Kérdés mennyit kell mindegyikből venni?

Egyenletünkben,

$$3x+5y=56$$

$$x=\frac{56-5y}{3}=18-y-\frac{2y-2}{3}=18-y-\frac{2(y-1)}{3}$$

legyen

$$\frac{y-1}{3}=u,\ y=3u+1 \text{ és } x=17-5u.$$

x értékei, 17, 12, 7, 's a' t. —3

y „ 1, 4, 7 » 13

's mindezek megfelelnek a' kérdésnek, ugy, hogy p. o.: 17 hármas és 1 ötös, 12 hármas és 4 ötös 's a't. 56 ot tesznek; a' tagadó szám pedig azt mutatja hogy 13 ötösből, három hármas vissza adandó.

A' feloldásban nem épen elmuthatlan szükséges hogy az osztási részes kisebb legyen valódi értékénél, de némelykor sebesebben czélt érünk ha azt nagyobbra vesszük, ha p. o.:

$$19y=52x+139 \text{ ban}$$

$$y=2x+7+\frac{14x+6}{19}$$

helyett a' részest nagyobbra vesszük, 's írjuk,

$$y=3x+7\frac{-5x+6}{19},$$

sokkal kisebb és egyszerübb kifejezésre jutunk; ha itt p. o.: $\frac{-5x+6}{19}=u$ és belőle

$$x=\frac{6-19u}{5}=1-4u+\frac{1+u}{5}, \text{ és ismet}$$

$\frac{1+u}{5}=v$, lesz $u=5v-1$'s innen azonnal

$x=5-19v$, és $y=21-52v$;

melly egyenletben v nek tagadó értékei 0től fogva lefelé, x és y nak állító értékeit adják.

132. Ha példáinkban az ismeretlenek különbféle értékeit tekintjük, azt vesszük észre, hogy arithmetikai sort képeznek, p. o.:

$5x+7y=81$ ben

x értékei 12, 5, — 2, — 9 's a't.

y „ 3, 8, 13, 18 's a't.

$11x-17y=5$ ben

x értékei 2, 19, 36 's a't.

y értékei 1, 12, 23 's a't.

$6x+5=7y+3$ ban

x értékei 2, 9, 16, 25 's a't.

y „ 2, 8, 14, 20 's a't.

$3x+5y=56$ ban végre

x értékei 17, 12, 7, 2, — 3 's a't.

y „ 1, 4, 7, 10, 13 's a't.

's így tovább, és ezen sorok különbsége mindegyik ismeretlen értékeiben a' másik ismeretlen' velejárója, ugy hogy p. o.: x értékei, y velejárójával nőnek vagy fogynak, mint ez tagadó vagy állító.

Hogy ennek szükségesképen igy lennie kell, a' közönséges egyenlet $ax+by=c$ bizonyítja.

Az egyenlet legegyszerűbb kifejezésén van és a és b első számok egymásközt.

Tegyük fel, hogy találtunk x és y nak olly két értékét x' és y't melly az egyenletnek megfelel, 's lesz:

$$ax'+by'=c \quad (1)$$

legyen továbbá egy más egészszám értéke x nek $x'+m$, és y nak $y'+n$ ugy hogy

$$a(x'+m)+b(y'+n)=c \qquad (2)$$

's keressük melly arányban vannak m és n.

Levonván az első egyenletet a' másodikból, lesz

$$am+bn=0, \text{ vagy } am=-bn$$

tehát
$$m=-\frac{bn}{a} \qquad (3)$$

Mint a és b elsők egymásközt, ha m egész szám legyen, szükséges hogy n $a$nak többese és szinte n is egész szám legyen. Legyen tehát $n=au$, hol u mindenkor, egész, állító vagy tagadó szám lehet, és adja a' (3) egyenlet $m=bu$, 's mivel x' és y' két értéke x és y nak, minden többi adva van

$$x'-bu \text{ és } y'+au \text{ által.}$$

Ebből látjuk először, hogy x és $y$nak különböző értékei, mellyek az egyenletnek $ax+by=c$ megfelelnek, feljebbi két alakban foglalva vannak.

Másodszor, hogy ha a és b mindketten állítók, y értékei x velejárójával fogynak, és megforditva; de ha a vagy b tagadó, akkor az egymásnak megfelelő értékek vagy mindketten nőnek, vagy mindketten fogynak a' másik' velejárójával.

Harmadszor, minthogy a' bizontalan u értéke, tagadó mintszinte állító értékeket vehet fel, az említett arithmetikai sorok, mindkétfelől végtelenig fojtathatók.

133. Ha kettőnél több ismeretlen jön a' kérdésbe a' mívelet nem változik, és az egyik ismeretlen értéke megtaláltatván, a' többié belőle következik.

Legyen az adott egyenlet, $4x+9y+10z=103$

ebből $4x=103-9y-10z$ és $x=\frac{103-9y-10z}{4}$

$$x=25-2y-2z-\frac{y+2z-3}{4} \qquad (1)$$

legyen $\frac{y+2z-3}{4}=v$, vagy $y+2z-3=4v$

innen $y=4v+3-2z$ (2)

y ezen értékét (1) be tévén jön,

$$x=25-8v-6+4z-2z-v$$

$$x=19-9v+2z \qquad (3)$$

's így x és y értékeit z és v által fejeztük; de z értéke ugy van a' kérdésbe fogva, hogy bármelly egész értéke, x és y nak is egész értékeit adja. Legyen p. o. $z=0$ és adjuk v nek egymásután 0, 1, 2, 3, 's a' t. értékeit, jön

x értékének, 19, 10, 1 's a' t.
y .... 3, 7, 11 's a' t.

ha ezután $z=1$, lesz

x értéke 21, 12, 3 's a' t.
y ..... 1, 5, 9 's a' t.

Ha megkívántatik hogy z értéke csak állító legyen, z soha nem lehet 9 nél nagyobb, mert $9.10=90$ és ekkor $x=1$ és $y=1$.

Keresse a' tanuló következő 2 egyenletben a' 3 ismeretlen' értékét

$$x+y+z=41 \text{ és } 24x+19+10z=741.$$

134. Legyen a' két egyenlet

$$14x+11y+9z=360 \text{ és } x+y+z=30.$$

Kivántatnak az ismeretlenek értékei megfelelőleg mindkét egyenletnek.

Sokszorozzuk a' második egyenletet 14 el, lesz

$$14x+14y+14z=420$$

levonván ezt az elsőbül x elenyészik és marad

$$3y+5z=60. \qquad (1)$$

Ebből találjuk a' bizontalan u segédével y és z értékeit mellyek

$$y=4+5u \quad (2) \quad \text{és } z=9-3u \quad (3)$$

Ha ezen értékeket a' második egyenletből levonjuk, lesz $\qquad x=16-2u \qquad (4)$

's ha végre itt $u$nak, 0, 1, 2, 3 's a' t. értékeket adjuk, lesz sorjában

x értéke 16, 14, 12, 10 's a' t.
y . . . . 5, 10, 15, 20 's a' t.
z . . . . 9, 6, 3, 0 's a' t.

Példánk, egyik egyenletében a' velejárok $=1$ lévén, egyszerű feloldást engedett. Következő példa egészen megmutatja a' míveletet.

Legyen a' két egyenlet:

$$2x+5y+3z=108 \qquad (1)$$
$$3x-2y+72=95 \qquad (2)$$

Ha x kétféle velejárójával, 2 és 3 al sokszorozzuk az ellenkező egyenleteket, a' levonás által ezen ismeretlen elesik, 's lesz

$$6x+15y+9z=324$$
$$-(6x-4y+14z=190)$$
$$=19y-5z=134 \qquad (3)$$

A' bizontalan u kifejezi y és z értékeit, 's ezek

$$y=11+3u \quad (4) \quad \text{és } z=15+19u \quad (5)$$

Ezen értékeket a' (2) egyenletbe tévén jön

$$3x-22-10u+105+133u=95 \text{ és}$$
$$3x+123u=12$$

melly utolsó egyenlet 3 által osztható 's lesz

$$x+41u=4 \text{ és } x=4-41u$$

's innen mindhárom ismeretlen értéke következik.

3. § Másodrendü egyenletek egy ismeretlennel.

135. A' másodrendű egyenletekben, mellyek közönségesen négyszeg egyenleteknek is neveztetnek, az ismeretlen maga-magával sokszorozva, vagyis a' második hatóságon van.

Mindazon kérdések eszerint, mellyek az ismeretlen magamagával való sokszorozását következtetik, négyszeg egyenletekre vezetnek.

Ha p. o.: olly kétszám kívántatnék mellynek különbsége a, származata pedig b, az egyiket $x$nek nevezvén, a' másik $x+a$, a' kettőnek származata pedig $x(x+a)=b$, a' kérdés négyszeg egyenletre vezetne.

136. Legegyszerűbb négyszeg-egyenletek azok, mellyekben az ismeretlen egyedül áll második emelésén, valamelly ismert mennyiséggel egyenlítve: millyen p. o.: $x^2=a$, hol tudjuk $x^2-a=0$.

Ezen egyenlet azonnal feloldva van, mihelyst mindkét felől gyökeret veszünk, és $x=\sqrt{a}$.

Ha az ismeretlennek velejárója van, a' feloldás szintoly egyszerű mert, ezen velejárója osztóvá válik a' másik részen:

így ha $ax^2=b$, $x^2=\frac{b}{a}$ és $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ bármelly legyen *a* és *b* értéke, egy, két vagy több tagú, tört állító vagy tagadó szám.

A' kérdésre, melly szám ád 144et sokszoroztatván magamagával, a' felelet

$$x^2=144 \text{ és } x=\sqrt{144}=12.$$

Szinte melly számnak ötszörös négyszege 125?

$$5x^2=125,\ x^2=\frac{125}{5} \text{ és } x=\sqrt{25}=5.$$

137. Az ismeretlen' értékét, ha az ismeretlen második vagy feljebbvaló hatóságon van, *az egyenlet' gyökerének* nevezzük, mert azon gyökerét keressük az ismeretlennek melly emelésen jön ez elő az egyenletben. De tudjuk hogy (58) minden második gyökernek két értéke van, állító és tagadó, az az hogy

$$\sqrt{a^2}=\pm a,\quad \sqrt{144}=\pm 12 \text{ és } \sqrt{25}=\pm 5.$$

mert $\pm a\times\pm a=a^2$, $\pm 5\times\pm 5=5^2=25$'s a' t. eszerint minden négyszeg egyenletnek is két gyökere van, egyike állító, másika tagadó, tehát példáinkban

$$\sqrt{a^2}=+a \text{ és } =-a,\quad \sqrt{25}=+5 \text{ és } =-5 \text{ 's a' t.}$$

egyszerre mert mindkét érték megfelel az egyenletnek.

Bizonyos hogy az ismeretlen eleibe is tehetnők a' jegyet $\pm$ mint, $\pm x^2=\pm\sqrt{a^2}$, de ezen írás semmi uj esetet nem mutat, és a' 4 kifejezés közt, melly belőlle következik, két egyenlő van, p. o.:

$$+x=+a,\ +x=-a,\ -x=+a, \text{ és } -x=-a$$

hol a' két utolsó a' két elsőből támad a' jegyek változása által.

Hogy x et egyszersmind állító és tagadó mennyiséggel egyenlítjük, zavarra okot nemadhat, mert a' kifejezés csak x keresendő értékét mutatja függetlenül annak jegyétől.

138. A' négyszegegyenletek ritkán illy egyszerüek, 's gyakorta előjön az ismeretlen első emelésén is, más egyéb mennyiségekkel keverve.

Első kérdésünket (135) különözvén, keressünk két olly számot, mellynek különbsége 8, származata pedig 48: egyenletünket,

$$x(x+8)=x^2+8x=48$$

eddigi ismereteink segédivel nem fejthetjük meg, mert ha az ismeretlen legfőbb emelését magában hagyjuk, lesz $x^2=48-8x$'s ennek mindkét felől gyökerét vévén $x=\pm\sqrt{38-8x}$, melly kifejezésnek legkisebb hasznát nem vehetjük, a' gyökérjegy alatt levén még az ismeretlen maga. Ha az eredeti egyenlet' két részéből egyenesen vesszük a' gyökeret, annyi bizonyos hogy

$$\sqrt{x^2+8x}=\sqrt{48}$$

de sem egyik sem másik rész nem tökéletes emelés vagy négyszeg, 's így sem érünk czélt. Szükséges tehát, hogy legalább az egyenlet' azon része legyen tökéletes négyszeg, mellyben az ismeretlen áll.

Figyelemmel tekintvén x^2+8x re, látjuk hogy a' négyszegnek harmadik tagja nincs meg (arithm. 164), vagyis a' binom második tagjának négyszege

$$((a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ ban},\ b^2).$$

Ezen hijányt könnyű kipótolnunk mert jelen esetünkben $x=a$ levén $8=2b$, és $b=4$, 's így a' szükséges $b^2=4^2$ melly mennyiséget egyenletünk míndkét részéhez adván jön

$$x^2+8x+16=48+16 \quad \text{vagy}$$
$$x^2+2.4x+4^2=64$$

az egyenlet első része (itt a' második is) tökéletes négyszeg és $(x-4)^2$, 's gyökerét venni tudjuk, lesz pedig feloldásunk

$$(x+4)^2=64, \; x+4=\pm\sqrt{64} \text{ és } x=-4\pm\sqrt{64}=$$
$$=-4\pm 8$$

tehát x két értéke $x=-4+8=4$, és
$$x=-4-8=-12.$$

Ha az illy egyenletekben, a' binom négyszegének harmadik tagja hibázik, ezen harmadik tag, *az első emelésen levő ismeretlen velejárója felének négyszege*, melly négyszeg az egyenlet mindkét tagjához adandó.

Minden illy egyenlet, mellynek első része nem tökéletes négyszeg

$$x^2+px+q=0 \text{ alakra vihető,}$$

hol p és q bármelly, állító, tagadó, egész vagy tört lehet.

Igy p. o.: az egyenlet $ax+bx^2+c=x^2+d$ nem egyébb mint

$$(b-1)x^2+ax=d-c, \quad \text{ez pedig}$$

$$x^2+\frac{ax}{b-1}=\frac{d-c}{b-1} \text{ 's végre } x^2+\frac{ax}{b-1}-\frac{d-c}{b-1}=0,$$

Ha közönséges egyenletünkben $p=0$, ekkor $x^2+q=0$, 's az egyenlet legegyszerűbb alakon van.

139. $x^2+px+q=0$ közönséges feloldása következő

$$x^2+px=-q.$$

Első része az egyenletnek, tökéletes négyszeg lesz akkor ha p nek (x vélejárójának) felét második emelésre visszük 's az egyenlethez adjuk, ez

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}, \text{ 's egyenletünk}$$

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$$

$$\text{'s innen } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$$

mindkét részből gyökeret vevén, lesz

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ és}$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Ha ezen közönséges feloldást előbbi különös példánkra alkalmazzuk lesz

$$x^2+8x-48=0 \text{ ból}$$

$$x^2+8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2=\left(\frac{8}{2}\right)^2-(-48)$$

$$(x+4)^2=4^2+48,\ x+4=\pm\sqrt{16+48}$$

$$x=-4\pm\sqrt{64}=-4\pm8,$$

A' másodrendű vagy négyszeg-egyenletek feloldása eszerint következő szabályokban foglaltatik.

a) Ha az egyenletben törtek jönnek elő, ezektől megszabaditassék.

b) Mindazon tagok mellyekben az ismeretlen megvan, az egyenlet' egyik részében, minden egyéb tag annak másik részében legyenek.

c) Az ismeretlenek egyenlő emelései, velejárójokkal (ha többen vagynak) öszvétetnek.

d) A' második emelésen levő ismeretlen velejárójával az egyenletnek mindegyik tagja elosztatik, hogy a' legfőbb rendű ismeretlen, egyedül 's tisztán maradjon.

e) Az első emelésen levő ismeretlen *fél velejárója* négyszeg emelésre vitetvén az egyenlet mindkét részéhez adatik.

f) Mindkét részéből vétetvén gyökér, azon részhez mellyben ismeretlen elő nemjön a' $\pm$ jegy tétetik.

g) Igy vitetvén a' négyszeg egyenlet, első rendűre vagy egyszerű egyenletre, az ismert mívelet szerint feloldva van.

Példák. 1) Két szám kerestetik. Öszvesek $=10$, négyszegek' öszvese pedig 58.

Ha az egyik szám x, a' másik $10-x$, és

$x^2+(10-x)^2=58$ vagy feloldva

$x^2+100-20x+x^2=58$ öszvevéve

$2x^2-20x=58-100=-42$, elosztva 2 által

$x^2-10x=-21$

mindkét részhez adván x fél velejárójának (5nek) négyszegét melly $5^2=25$, lesz

$$x^2-10x+5^2=25-21 \text{ vagy}$$

$$(x-5)^2=4 \text{ 's ebből}$$

$$x-5=\pm\sqrt{4}=\pm2,\quad x=+5\pm2$$

$$x=+7, \text{ és } x=+3$$

's valóban $3^2+7^2=8+49=58$, $3+7=10$.

Tegyük fel hogy a' kérdés következő. Legyen a' két szám' öszvese mint elébb 10, négyszegek' öszvese pedig 20: lesz szinte,

$$2x^2-20x+100=20$$
$$x^2-10x=-40$$
$$x^2-10x+25=-15 \text{ és}$$
$$x=5\pm\sqrt{-15}$$

A' feloldás képzelt kifejezésre vezetvén mutatja, hogy a' kérdésben forgó számok lehetlenek, noha a' kifejezés, tökéletesen megfelel a' kérdésnek.

Vissza menvén közönséges egyenletünkre

$$x^2+px+q=0,$$

látjuk hogy az egyenlet' gyökerei mindenkor lehetlenek ha, $\frac{p^2}{4}-q$ tagadó mennyiség, de minthogy $\frac{p^2}{4}$, természete szerint állító (mert négyszeg), a' kifejezés akkor lesz tagadó 's következéskép az egyenlet' gyökere lehetlen, *ha q az egyenletben állító és nagyobb mint* $\frac{p^2}{4}$. Ha q tagadó mennyiség p. o.: $-m$, akkor a' gyökérjegy-alatti kifejezés következő alakban van,

$$\frac{p^2}{4}-(-m), \text{ mi } =\frac{p^2}{4}+m \text{ és állító:}$$

ha tehát q az egyenletben tagadó, a' gyökerek mindenkor lehetők és valók. Ha egyik gyökér lehetlen, a' másik is lehetlen, mert egyenlő kifejezések csak jegyében különbözik.

2) Egy kis társaság 70 fort: költött: négy személly belőle bizonyos okból nem-fizet, 's azért a' többinek 2 fortal többet kell fizetni mint lett volna különben egyes része. Kérdés hány személlyből állott a' társaság, 's mennyi jutott volna egyre?

Ha a' személlyek' száma x, égynek egynek része $\frac{70}{x}$, de mivel a' fizetők száma 4el kisebb, jön egy fizetőre $\frac{70}{x-4}$ forint.

Mivel mindegyik két forintal fizet többet valódi részénél, az egyenlet

$$\frac{70}{x-4}=\frac{70}{x}+2,$$

mit egyszerű kifejezésre vivén lesz $x^2-4x=140$: mindegyik részhez 2^2 ot$=4$ et adván lesz

$$(x-2)^2=144,\text{ és } x-2=\pm\sqrt{144},\ x=2\pm12$$

és $$x=+14 \text{ vagy } x=-10.$$

A' gyökér' állító értéke azonnal megfelel a' kérdésnek, mert 14 en lévén, mindegyikre $\frac{70}{14}=5$ forint jönne, 's a' maradottak $\frac{70}{10}=7$ az az kettővel többet fizetnek.

A' második, tagadó gyökér, algebrai feleletet ád a' kérdést megforditván 's mint

$$\frac{70}{-10-4}=\frac{70}{-10}+2,$$

azt jelenti hogy a' társaság a' fizetés helyett pénzt bévesz, 's a' kérdés így áll: valamelly társaság 70 forintot oszt fel tagjai közt, de ezeknek száma 4 személlyel szaporodik, 's így mindegyik kevesebbet vesz 2 forintal. Mindenkor megfelel tehát mindkét gyökér a' kérdésnek, de algebrai értelme figyelmet kíván.

3) Ketten kereskedésbe lépnek; az egyik 30 aranyat letesz és 17 holnapig ben hagyja, a' másik csak 5

holnap mulva adja be pénzét ('s eszerint 12 holnapig hagyja ben); pénze mennyiségét az utóbbinak nem ismerjük, de tudjuk hogy nyereségével együtt 26 aranyot kivesz a' kereskedés megszüntével. Az egész nyereség $18^3/_4$ arany. Kérdés mennyit tett be a' másik társ, 's mennyit nyert egyikük?

Az időt egy holnapra vivén, az elsőnek 30 aranya 17 szer annyi egy holnapra vagy is 510, ha a' másiknak része x, lesz egy holnapra $12x$; ismervén az egész nyereséget, megleljük a' másik részvevőjét következő arányból,

$$510+12x+18^3/_4=12x$$

hol a' negyedik tag $= \dfrac{12x \times 18^3/_4}{510+12x} = \dfrac{225x}{510+12x}$

ezen nyereség és betét tudjuk 26 arany, 's egyenletünk,

$$\frac{225x}{510+12x}+x=26, \text{ innen } x^2+\frac{141x}{4}=1105.$$

$\dfrac{141}{4}$ felét négyszegre vivén 's az egyenlethez adván jön,

$$x^2+\frac{141}{4}x+\frac{19881}{64}=\frac{19881}{64}+1105=\frac{90601}{64}$$

mindkét felől gyökeret vevén,

$$x+\frac{141}{8}=\pm\sqrt{\frac{90601}{64}}=\pm\frac{301}{8}$$

$$x=-\frac{141}{8}\pm\frac{301}{8}, \text{ és } x=20,$$

első értéke megfelel a' kérdésnek. A' második részvevő' tőkéje 20 arany, nyeresége 6, az elsönek nyeresége $12^3/_4$.

4) Két munkás különböző bérért dolgozik. Az első bizonyos napszám után 96 forintot keresett, a' má-

sik 6 nappal kevesebbet dolgozván, 54 forintot: de ha ezen második mindennap dolgozott volna és az első kevesebbet 6 nappal, akkor fizetések egyenlő lenne.

Kérdés hány nap és melly bérbe dolgozott egyik egyik?

Az elsőnek napjai x, a' másikéi $x—6$. Fizetése az elsőnek $\frac{96}{x}$, a' másiknak $\frac{54}{x—6}$, ha az első hat-nappal kevesebb 's a' második több, lenne az első pénze $(x—6)\frac{96}{x}$, és a' két kifejezés egyenlö,

$$\frac{(x—6)\,96}{x}=\frac{54x}{x—6}$$

a' nevezők' elenyésztése után

$$54x^2=96(x—6)\,(x—6)$$

hol a' számok 6 által oszthatók 's egyenletünk

$$9x^2=16(x—6)\,(x—6)=16(x—6)^2,$$

első tekintetre észre vesszük hogy, az egyenlet mindkét része tökélletes négyszeg 's hogy

$$3^2x^2=4^2\,(x—6)^2$$

gyökere egyszerű, lesz pedig

$$3x=\pm4(x—6),\ 3x=4x—24,\ x=24,$$

vagy $3x=—4x+24$, $x=\frac{24}{7}$.

$x$nek első értéke 24 egyenesen megfelel a' kérdésre, az első munkás 24 nap alatt 95 és 1 alatt 4 forintot, a' másik pedig 18 nap alatt 54et 's egy alatt hármat keresett.

140. Ha van olly érték a, melly közönséges egyenletünknek $x^2+px+q=0$ eleget tesz, az ismeretlennek a-n kivül még-egy értéke van.

Ha x helyett a t teszünk, egyenletünk

$$a^2+pa+q=0 \text{ tehát}$$
$$x^2+px=a^2+pa \text{ vagy}$$
$$x^2+px-a^2-pa=0 \text{ mi másként irva}$$
$$x^2-a^2+p(x-a)=0 \text{ vagyis}$$
$$(x-a)(x+a)+p(x-a)=0,$$

osztható ezen egyenlet $x-a$ által, 's marad

$$x+a+p=0, \text{ lesz tehát,}$$
$$x^2+px+q=x^2-a^2+p(x-a)=(x-a)(x+a+p).$$

Tudjuk hogy minden kifejezés egyenlő a' semmivel, mellynek valamellyik factora $=0$, 's itt mindkét factor külön külön $=0$.

Feltettük először hogy $a=x$, tehát $a-x$ vagy $x-a=0$, melly az egyik factor, a' másik is $x+a+p=0$, mert elosztván

$$(x+a)(x-a)+p(x-a)=0$$

egyenletet $x-a$ val, marad $x+a+p=0$ ezen utóbbi egyenletből következik $x=-a-p$.

Ha tehát egyenletünk' egyik gyökere a, másik szükségesképen $-a-p$; 's valóban mindkettő megfelel a' közönséges kifejezésünkben talált két értéknek, hol

$$x=-{}^1/_2p\pm\sqrt{q+{}^1/_4p^2}$$

hol q tagadón van véve, és $x$nek egyik értéke

$$a=-{}^1/_2p+\sqrt{q+{}^1/_4p^2}$$

's a' másik

$$-a-p=-{}^1/_2p-\sqrt{q+{}^1/_4p^2}.$$

Előbbi közönséges kifejezésünkben (139), ezen két érték

$$-{}^1/_2 p + \sqrt{{}^1/_4 p^2 - q} \text{ és } -{}^1/_2 p - \sqrt{{}^1/_4 p^2 - q}$$

volt, mi természetes, mert azon egyenletünk

$$x^2 + px + q = 0$$

volt, mostani pedig

$$x^2 + px - q = 0.$$

Hogy a' négyszeg vagy másodrendű egyismeretleni egyenletekben *két gyökérnél több nem lehet*, következőkép bizonyítjuk.

Legyen ismet $x^2+px+q=0$ ban, x egyik értéke a, másik a' 's lesz két egyenletünk

$$a^2+pa+q=0 \text{ és } a'^2+pa'+q=0,$$

vagy

$$a^2+pa+q=a'^2+pa'+q \text{ és } a^2-a'^2+p(a-a')=0,$$

's mint elébb $a^2-a'^2=-p(a-a')$

melly egyenletet $(a-a')$ al elosztván, jön

$$a+a'=-p \text{ és } a'=-(p+a)$$

Nyilván hogy $-(p+a)$nak csak egy értéke lehet, mert bizonyos mennyiség; az egyenletnek tehát a *kivül csak még egy értéke lehet.*

141. Az egyenlet' $x^2+px+q=0$ két gyökerének öszvese $=-p$ az az,

$$(-{}^1/_2 p+\sqrt{{}^1/_4 p^2-q})+(-{}^1/_2 p-\sqrt{{}^1/_4 p^2-q})=-p.$$

A' két gyökér' származata pedig $=q$, vagyis

$$(-{}^1/_2 p+\sqrt{{}^1/_4 p^2-q})\ (-{}^1/_2 p-\sqrt{{}^1/_4 p^2-q})$$

$$=(-{}^1/_2 p)^2-(\sqrt{{}^1/_4 p^2-q})^2 \text{ mi ismét}$$

$$=({}^1/_4 p^2-({}^1/_4 p^2-q)=q.$$

$$x^2 + 8x = 48$$

példánkban a' két gyökér $+4$ és -12.

Ezen két gyökér' öszvese $=-8$, és származata $=-48$, egyenletünkben pedig

$$8=p \text{ és } 48=-q\text{, tehát}$$
$$-p=-8\text{, és } -(-q)=48.$$

Eszerint ha, bármelly két gyökér adva van, ezekből a' négyszeg-egyenletetet könnyen alkothatni. Ha p. o.: adva van a' két gyökér 2 és 3, lesz

$$-p=2+3=5\text{, vagy } p=-5$$

q pedig $=2.3=6$, 's a' két gyökérnek megfelelő egyenletünk $x^2-5x+6=0$.

142. Következő kérdés, nevezetes kifejezését adja az ismeretlennek.

Osztassék valamelly szám olly két rézsre, hogy ezen részeknek négyszegei bizonyos (adott) arányban álljanak.

Legyen a' szám a, ennek egyik része x, m pedig azon arány mellyben a' két rész négyszege álljon; a' másik rész természetesen $a-x$. A' mondott szerint egyenletünk,

$$\frac{x^2}{(a-x)^2}=\frac{x^2}{(a-x)\,(a-x)}=m.$$

Ezt könnyű $x^2+px+q=0$ alakra vinni, 's azután feloldani; de látjuk hogy itt az nem szükséges 's hogy egyenesen czélt érünk az egyszerű gyökérvevés által mert

$$\frac{x}{a-x}=\pm\sqrt{m} \text{ 's innen } x=\pm(a-x)\sqrt{m}.$$

Ha most a' két első rendű egyenletet

$$x=+(a-x)\sqrt{m} \text{ és}$$
$$x=-(a-x)\sqrt{m} \text{ feloldjuk, jön}$$

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}\ (1)\ \text{és}\ x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}\ (2).$$

Eszerint $(a-x)$ a' második rész értéke (1)böl

$$a-\frac{a\sqrt{m}}{1+m}=\frac{a+a\sqrt{m}-a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{a}{1+\sqrt{m}}$$

's mindkét rész, $\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$ és $\frac{a}{1+\sqrt{m}}$ a' kérdés szerint kisebb mint a, x (2) értéke feloldása ád $(a-x)$ nek,

$$a+\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{a-\sqrt{m}+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{a}{1-\sqrt{m}}$$

's ekkor a' két rész $-\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$ és $\frac{a}{1-\sqrt{m}}$, hol a' jegyek ellenkezők levén a' szám a nem öszvesük többé, de különbségük.

Ha $m=1$, vagyis ha feltesszük, hogy a' két négyszeg egyenlő, akkor $\sqrt{m}=1$, és az első feloldás szerint a' két rész $\frac{1}{2}a$ és $\frac{1}{2}a$, de a' második feloldás szerint $-\frac{a}{0}$ és $\frac{a}{0}$, mi természetes, mert csak akkor tehetjük fel hogy a' két rész négyszegének aránya egyenlő legyen az egységgel, ha a' két mennyiség a ra vagy különbségére nézve végtelen nagy; (itt tudjuk $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a=0$).

Mert legyen p. o. ezen két mennyiség x és $x-a$, négyszegük aránya $\frac{x^2}{x^2-2ax+a^2}$

's ha 'a tört' két részit x^2 al elosztjuk jön

$$\frac{1}{1-\frac{2a}{x}+\frac{a^2}{x^2}}$$

's innen látni, mentül nagyobb x annál kisebbek

$\frac{2a}{x}$ és $\frac{a^2}{x^2}$, 's annál inkáb kö-

zeledik az arány $\frac{1}{1} = 1$ hez.

Hasonlítván eddigi tekinteteinket a' közönséges míveletliez, fejtsük meg az egyenletet

$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)} = m$ jön egymásután,

$$x^2 = m(a-x)(a-x) = a^2m - 2amx + mx^2$$

$$x^2 - mx^2 + 2amx = a^2m;\ (1-m)x^2 + 2amx = a^2m$$

$$x^2 + \frac{2amx}{1-m} = \frac{a^2m}{1-m}$$

itt, közönséges alakunk szerint

$$\frac{2am}{1-m} = p, \text{ és } \frac{a^2m}{1-m} = q$$

's lesz $\quad x = -\frac{am}{1-m} \pm \sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)^2} + \frac{a^2m}{1-m}}$

x ezen értéke különbözőnek látszik lenni, de vissza vihető az előbbenire. Lássuk a' miveletet gyakorlat kedviért.

Vigyük először egynevezőre a' gyökérjegy alatti törteket, mi a' második tag $(1-m)$ eli sokszorozás által történik: jön pedig, nem figyelvén a' gyökérjegyre;

$$\frac{a^2m^2}{(1-m)^2} + \frac{a^2}{1-m} = \frac{a^2m^2 + a^2m(1-m)}{(1-m)(1-m)}$$

$$=\frac{a^2m^2+a^2m-a^2m^2}{(1-m)(1-m)}=\frac{a^2m}{(1-m)^2}$$

a' nevező itt négyszeg, 's csak a' számláló gyökere jelöltetik, 's kifejezésünk $\frac{\sqrt{a^2m}}{1-m}$, 's még ez is egyszerűbb alakot enged, mert

$$=\frac{a\sqrt{m}}{1-m}, \text{ 's igy } x=-\frac{am}{1-m}\pm\frac{a\sqrt{m}}{1-m} \text{ tehát}$$

$$x=\frac{-am+a\sqrt{m}}{1-m}, \text{ vagy } x=\frac{-am-a\sqrt{m}}{1-m}$$

De bármelly egyszerüek ezen kifejezések, az előbbieket nem érték el, és akkor is ha $m=1$,

$$x=\frac{-a+a}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$x=\frac{-a-a}{1-1}=\frac{-2a}{0}$$

x második kifejezésében, mint előb, megleltük a' végtelenség' jegyét, de az első bizontalant mutat.

Keressük fel (123) nincs e a' számlálóban és nevezőben olly közös factor melly $m=1$ feltétével $=0$ lesz.

A' kifejezés

$$\frac{-am+a\sqrt{m}}{1-m}=\frac{a(-m+\sqrt{m})}{1-m}=\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}$$

's már innen látszik, hogy a' számláló csak a' factor $(\sqrt{m}-m)$ által lesz $=0$; nézzük nincs e' neki $(1-m)$ el közös factora.

A' gyökérjegy elkerülése végett tegyük $\sqrt{m}=n$, 's ekkor $m=n^2$, 's ez által $\sqrt{m}-m$, $1-m$ be,

$n - n^2$ pedig $1 - n^2$ ba változik : de mivel

$$n - n^2 = n(1-n) \text{ és } 1 - n^2 = (1-n)(1+n),$$

vissza adván n értékét $\sqrt{m}$ et lesz,

$$\sqrt{m} - m = (1-\sqrt{m})\sqrt{m}$$

$$1 - m = (1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})$$

's következésképen

$$\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m} = \frac{a(1-\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})} = \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$$

előbbi kifejezés.

Szintígy vissza vihető x másik értéke megjegyezvén hogy,

$$\frac{-a\sqrt{m}-am}{1-m} = \frac{-a(1+\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})} = \frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$$

Ha ezen példában m helyett m^2 et teszünk, a' gyökérjegyeket elkerüljük : de ekkor m az aránynak gyökere, melly mindenkor ismeretes ha négyszege adva van. A' tanúló keresztül-mehet a' számításon m helyibe m^2 et tevén, 's nyilván fogja látni, melly időnyerés az egyszerüb kifejezések' válosztása.

Azon alak mellyet (189) alatt adtunk, közönséges és minden esetre alkalmazható. Az ismeretlen' legfőbb emelésének velejárója $=1$.

143. Tekintsük közönségesen azon egyenleteket, mellyekben a' legfőbb hatóságú ismeretlen' velejárója valamelly mennyiség a, 's oldjuk fel p. o.: az egyenletet,

$$ax^2 - bx + c = 0$$

melly, ha benne $a = 1$, a' (139) alatt adottal tökéletesen megegyez.

Tegyük fel, az egyenlet viszonyainak 's tulajdoninak tisztáb értelme' kedviért, hogy 0 helyett legyen értéke az egyenletnek $=y$, vagy

$ax^2-bx+c=0$ helyett $ax^2-bx+c=y$ (1) *)

Itt y értéke, x értékétől függ, 's változik ha x változik.

Legyen m azon mennyiség, melly x helyibe tétetvén, az egyenletnek megfelel vagyis azt semmivé teszi, ekkor tudjuk m, gyökere az egyenletnek; és lesz

$ax^2-bx+c=0$ ból (2) $am^2-bm+c=0$ (3)

(3) egyenletet levonván (1) ből, lesz

$$y=a(x^2-m^2)-b(x-m)=(x-m)[a(x+m)-b].$$

Itt y nyilván $=0$, ha $x=m$, mint azt feltettük; de y akkor is $=0$, ha $a(x+m)-b=0$, tehát $x$nek még-egy értéke van 's ez $y=0$ ból következik: nevezzük ezen másik értékét $n$nek, 's megleljük következő egyenletből

$$a(n+m)-b=0, \text{ és } n+m=\frac{b}{a} \quad (4)$$

Ha ezen (4) egyenletből b értékét melly $b=a(n+m)$, (3) dikba tesszük, jön

$$am^2-am(n+m)+c=0$$

vagy $$c-amn=0, \text{ 's ebből } mn=\frac{c}{a} \quad (5)$$

b és c értékét (4) és (5) ből (1) be tevén lesz,

$$y=ax^2-a(m+n)x+amn$$
$$=a[x^2-(m+a)x+mn].$$

*) Visgalátinkban, a, b, és c, tartsák meg jegyeiket változatlan, mellyekkel írva vannak.

Ezen kifejezésnek korlátokközt levő factora $(x-m)(x-n)$ ből ered, és igy

$$y=a(x-m)(x-n). \qquad (6)$$

Vegyük erre például $y=4x^2-5x+1$ egyenletet.

Ha itt $x=1$, $y=4-5+1=0$, és $m=1$.

Ha $(4x^2-5x+1)$, $(x-1)$ el elosztatik, a' részes $4x-1$, és a' két factor $y=(x-1)(4x-1)$ és ez akkor is $=0$ ha $4x-1=0$, az az ha $x={}^1/_4$, tehát

$$n={}^1/_4 \text{ és } y=4(x-1)(x-{}^1/_4),$$

melly következés (6) al öszveüt.

Ha tehát az egyenlet' egyik gyökerét megleltük, a' másikat is megtaláljuk, 's az egyenletet

$$ax^2-bx+c=0$$

factoraiba válthatjuk, mellyek

$$a, (x-m) \text{ és } (x-n), \text{ 's lesz}$$
$$ax^2-bx+c=a(x-m)(x-n).$$

Tudjuk hogy $(x+m)(x+n)$ és $(x-m)(x-n)$ közt egyéb különbség nincs, mint x első emelése jegyének változtatása, ha tehát

$$ay^2-bx+c=a(x-m)(x-n)$$

akkor $ax^2+bx+c=a(x+m)(x+n)$

Vegyük fel most az egyenletet $ax^2-bx-c=y$'s legyen ismét az egyenlet' egyik gyökere m, tehát,

$$y=ax^2-bx-c,\ am^2-bm-c=0, \text{ 's ebből.}$$

$$y=a(x^2-m^2)-b(x-m)$$
$$=(x-m)[a(x+m)-b]$$
$$=(x-m)(ax+am-b)$$

legyen $\dfrac{am-b}{a}=n$ vagy $am-b=an$, ekkor

$$y=(x-m)(ax+an)=a(x-m)(x+n).$$

Például legyen

$$3x^2-x-2=3(x-1)(x+{}^2/_3).$$

Az egyenletben $ax^2+bx-c=y$, a' factorok második tagjának jegye változik, mert $(x+m)(x-n)$, $(x-m)(x+n)$ csak x első emelésének jegyét változtatja; következésképen,

$$\text{ha } ax^2-bx-c=a(x-m)(x+n)$$
$$\text{akkor } ax^2+bx-c=a(x+m)(x-n).$$

Mindegyik esetben hasonló következésre jutunk. Következő összetétben, az első és harmadik esetnél m et tévén x helyett, $y=0$, a' 2dik és 4dikben m és n ugyanazok, mint 1 és 3ban.

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ y=ax^2-bx+c=a(x-m)(x-n),\\
\qquad\qquad m+n=\dfrac{b}{a}\\
2)\ y=ax^2+bx+c=a(x+m)(x+n),\\
\qquad\qquad m+n=\dfrac{b}{a}\\
3)\ y=ax_2-bx-c=a(x-m)(x+n),\\
\qquad\qquad m-n=\dfrac{b}{a}\\
4)\ y=ax^2+bx-c=a(x+m)(x-n),\\
\qquad\qquad m-n=\dfrac{b}{a}
\end{array}\right\}\ mn=\frac{c}{a}$$

Visgáljuk most azon eseteket mellyekben x nek olly értéke lehet ezen különböző kifejezésekben, hogy általa $y=0$ lesz: és ezen visgálat mutassa tisztán, a' másodrendű egyenletek' feloldását.

Az első kifejezés $y=ax^2-by+c$. (1)

Megjegyezvén hogy

$$(2ax-b)^2=4a^2x^2-4abx+b^2,$$

egyenletünket illy factorba válószthatjuk. Sokszorozzuk p. o.: $4a$val, lesz $4ay=4a^2x^2-4abx+4ac$. (2)

Ha a' második részhez b^2 ot adunk 's egyszersmind le is vonunk, értéke nem változván, lesz

$$4ay=4a^2x^2-4abx+b^2+4ac-b^2$$

's ezt írhatjuk

$$4ay=(2ax-b)^2+4ac-b^2 \qquad (3)$$

Tudjuk hogy valamelly mennyiség' négyszege mindenkor állító, legyen a' mennyiség maga, állító vagy tagadó *), az első tagja ezen második résznek szükségképen állító, tekintsük tehát a' másik két tagot $4ac-b^2$, 's ez három különös esetet mutat.

I, Ha $b>4ac$, vagyis ha b^2-4ac állító; ekkor a' kifejezés $b^2-4ac=k^2$ a' feltétnek megfelel, (k^2 bizonyos képviselője lévén az algebrai állító mennyiségnek): tehát

$$4ay=(2ax-b)^2-k^2 \qquad (4)$$

és x nek azon értékét melly $y=0$ nak megfelel,

$$(2ax-b)^2-k^2=0$$

egyenletből fejtjük, 's tudjuk hogy

$$2ax-b=\pm k,$$

bármelly jegyét vegyük $k$nak: ez azt mutatja hogy, y vagy ax^2-bx+c, akkor$=0$ ha x helyett vagy

$$\frac{b+k}{2a}=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=m$$

$$\text{vagy } \frac{b-k}{2a}=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=n$$

---

*) A' kifejezés alakja, nem változtatja négyszegének alakját és $(c-d)^2$ vagy $(d-c)^2$ mindegy, 's mivel egyik a' kettő közül bizonyosan állító, a' másiknak is szükségeseképen állítónak kell lenni. Ha tehát nyilvánon akarnánk mondani hogy valamelly mennyiség állító, leg helyesben mondjuk azt valamelly algebrai mennyiség' négyszegével lenni egyenlőnek.

melly két kifejezésben k értékét vissza adtuk, m és n által pedig a' két gyökeret jelöltük.

Mindkét érték állító, mert $k^2=b^2-4ac$ lévén, kisebb mint b^2 's következéskép $b>k$, tehát, mind $\frac{b+k}{2a}$, mind $\frac{b-k}{2a}$ állítók; és ezen mennyiségeket neveztük m és n nek: Lesz tehát kifejezésünk

$$ax^2-bx+c=a(x-m)(x-n)$$

$$=a\left(x-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

és a' factorok' sokszorozása megmutatja hogy a' két egyenlet egynemű.

II. Ha $b^2=4ac$, az az b^2 sem nagyobb sem kisebb mint $4ac$, akkor $k=0$, mert $b^2-4ac=0$; és ezen esetben $m=n$'s mindkettő $=\frac{b}{2a}$ és

$$y=ax^2-bx+c=a(x-m)(x-n)=$$

$$=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2$$

Ekkor azt mondjuk hogy y tökéletes négyszeg, 's gyökere $\sqrt{a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}$

Az Arithmetikában, tudjuk, ez csak akkor volna tökéletes négyszeg, ha a nak tökéletes gyökere lenne; de az algebrában minden olly kifejezés tökéletes négyszeg, mellyben valamelly keresendő betü nincs többé a' gyökérjegy alatt.

Ezen következés gyakori, és elménkben tartandó, hogy t. i. ha $b^2=4ac$, vagy $b^2-4ac=0$, akkor ax^2-bx+c tökéletes négyszeg.

III. $b^2<4ac$, vagy b^2-4ac tagadó, 's igy $4ac-b$ állító.

Legyen ismét, $4ac-b^2=k^2$ és (3) egyenletből lesz

$$4ay=(2ax-b)^2+k^2.$$

Ezen esetben $x$nek nemlehet olly értéke, melly által $y=0$; mert olly egyenlet mint p. o.: $p^2+q^2=0$ azt mutatja hogy p^2 egyenlő q^2 al ellenkező jegyel véve de ez lehetlen, mert minden négyszegnek jegye egyenlő. Eszerint x értékei lehetlenek, 's azon feltétben, melly illyen következésre vezet, bizonyosan valami ellenkező vagy képtelen fekszik.

Meglelvén hogy ha

$$ax^2-bx+c=a(x-m)(x-n)$$

akkor bizonyosan

$$ax^2+bx+c=a(x+m)(x+n) \text{ és}$$

I. ha $b^2>4ac$, $ax^2+bx+c=$

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

II. ha $b^2=4ac$, $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$,

és y tökéletes négyszeg.

III. ha $b^2<4ac$, ax^2+bx+c,

nem váltható factoraiba.

Legyen ezután $y=ax^2-bx-c$ (1)

lesz mint eléb

$$4ay=4a^2x^2-4abx+b^2-4ac-b^2$$
$$=(2ax-b^2)-(b^2+4ac) \quad (2)$$

és ha

$$b^2+4ac=k^2, \text{ jön } 4ay=(2ax-b)^2-k^2 \quad (3)$$

és ha $y=0$ akkor, ha $(2ax-b)^2=k^2$

vagy ha $2ax-b=\pm k$

vagyis $$m=\frac{b+k}{2a}=\frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

$$n=\frac{b-k}{2a}=\frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

Mivel $b^2<b^2+4ac$, $b<\sqrt{b^2+4ac}$

tehát n tagadó mennyiség.

Tekintsük (3) egyenletet 's osszuk factoraiba: tudjuk hogy $p^2-q^2=(p-q)\,(p+q)$, ez ád

$$4ay=(2ax-b-k)\,(2ax-b+k)$$

$$=4a^2\left(x-\frac{k+b}{2a}\right)\left(x+\frac{k-b}{2a}\right)$$

's innen y vagy,

$$ax^2-bx-c=$$

$$=a\left(x-\frac{\sqrt{b^2+4ac}+b}{2a}\right)\left(x+\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a}\right)$$

és $$ax^2+bx-c=$$

$$=a\left(x+\frac{\sqrt{b^2+4a}+b}{2a}\right)\left(x-\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a}\right)$$

Alkalmazván ezekre némelly példát, a' tanuló meggyőzheti magát valóságokrul a' sokszorozás által

1) $$2x^2-7x+3=$$

$$=2\left(x-\frac{7+\sqrt{49-24}}{4}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{49-24}}{4}\right)$$

$$=2(x-3)\,(x-{}^1\!/_2)$$

2) $$3x^2-6x+1=$$
$$=3\left(x-\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right),$$
hol $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

3) $$5^1/_2x^2-22x+22={}^5/_2(x-2)^2$$

4) $$5x^2+9x-7=$$
$$=5\left(x+\frac{\sqrt{221}+9}{10}\right)\left(x-\frac{\sqrt{221}-9}{10}\right)$$

Öszvevén talált eseteinket következő táblába írhatjuk azokat.

$$ax^2+bx+c=$$
$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \quad (a)$$
$$ax-bx+c=$$
$$=a\left(x-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \quad (b)$$
$$ax+bx-c=$$
$$=a\left(x+\frac{\sqrt{b^2+4ac}+b}{2a}\right)\left(x-\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a}\right) \quad (c)$$
$$ax-bx-c=$$
$$=a\left(x-\frac{\sqrt{b^2+4ac}+b}{2a}\right)\left(x+\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a}\right) \quad (d)$$

Hogy mindezen alakokat a' jegyek' változtatása által egyre vihetjük szembetűnő.

Ha az egyenletnek, tagadó gyökere eleget tesz, akkor ezeket is tekintetbe kell vennünk 's $x$nek két értéke egyenlően semmivé teszi

$$ax^2 + bx + c\text{nek}$$

valamennyí alakját.

Legyen ezen első például

$$ax^2+bx+c=0,$$

ekkor vagy $x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$

vagy $x-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0.$

Ha x két értékét m és $n$nek nevezzük, lesz a' 4 alakban

$$m=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad n=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a')$$

$$m=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad n=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (b')$$

$$m=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}, \quad n=\frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a} \quad (c')$$

$$m=\frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}, \quad n=\frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a} \quad (d')$$

mindnégy esetben megfelel ax^2+bx+c alakja $a(x-m)\ (x-n)$nek, 's könnyen kifejthető p. o.: (a')ban m és n (ha csakugyan valók, léteznek vagy megvannak), tagadók; ha valók mondjuk, mert megmutatánk hogy ha b^2-4ac tagadó, ax^2+bx+c nem válható factoraiba, mert ekkor $\sqrt{b^2-4ac}$ nem algebrai mennyiség és sem tagadó sem állító.

(b')ben, ha m és n léteznek, mindketten állítók.

(c')ben, mindenkor való értékei vannak m és $n$nek mert b^2+4ac mindenkor állító. Az egyiknek értéke állító, a' másiké tagadó és ezen tagadó, számára nézve nagyobb *).

---

*) *Jegyzék.* Ha a' szavakat, nagyobb vagy kisebb, számokra alkalmazzuk, értelmük tiszta, 's tudjuk ha

$$a > b,\ a-c > b-c$$

mind addig míg a és b bül levonható c. De tágítván a' levonás értelmét, 's p. o: -3 at írván $5-8$ helyett, a' tan ha $a>b$ tehát $a-c>b-c$; következőre vezet.

Mivel $6>4$, $6-12>4-12$, vagyis $-6>-8$, vagy $0>-2$.

Ezen következések kivált az utolsó, képtelenek, ha a' több vagy kevesebb értelmét arithmetikai ismeretinken túl nem terjesztjük.

Mondjuk tehát, hogy két algebrai mennyiség közt, legyen jegyük egyenlő vagy különböző, az a' nagyobbik, mellyik nagyobb következést hoz elő, ha mindkettő valamelly olly számmal hasonlitott, melly nagyobb számmal van irva, mint akarmellyik a' kettő közzül. Példánkban tehát csak azért nagyobb -6 mint -8

mert $20-6>20-8$; és azért $0>-4$ mert

$$6+0>6-4,\ \text{és}\ +12>-30$$

mert $$40+12>40-30$$'s a' t.

Mondjuk továbbá, hogy -30, *számát vevén* nagyobb mint $+12$ mert több egységet foglal vagyis nagyobb szám jeggyel van írva.

Ezen okbul mondánk (c^1)ben, hogy a' tagadó gyökér *számát vevén*, nagyobb mint az állító, mert, különben az algebrában, minden állító mennyiség nagyobb a' tagadónál. Szintígy mondjuk hogy -14, $+3$ és -20 közt áll, kisebb lévén mint az első de nagyobb mint a' második. Vígyázva legyen a' tanuló mindezen tekintetekre, 's ha azt mondja valaki, hogy a' tagadó mennyiség kisebb vagy kevesebb a' semminél, ennek csak annyiban lehet értelme, mennyiben a' kifejezésnek nevit kereste. Mi legyen a' semminél kisebb vagy kevesebb azt senki nem tudhatja, mert olly tárgy nem létez.

A' származat $(x-m)(x-n)$ *állító* ha a' factoroknak *ugyan azon*, *tagadó* pedig, ha *különböző* jegyei vannak.

Ezen utóbbi eset csak akkor áll, ha x, m és n közt van, az az, ha x, algebrai értelem szerint, az egyiknél nagyobb, a' másiknál pedig kisebb.

Következő táblában, némelly származatok vannak feljegyezve, hol m és $n$nek különböző jegyek adattak, $x$nek pedig 3 értékei; ezen 3 értéke $x$nek olly, hogy az első kisebb mint m és kisebb mint n, a' második m és n közt van, a' harmadik pedig nagyobb mint m és n öszvevéve.

Származat.	x értéke.	Származat értéke jegyével.
$(x-4)(x-7)$	$+1$	$+18$
$m=4$	$+5$	-2
$n=7$	$+10$	$+18$
$(x+10)(x-3)$	-12	$+30$
$m=-10$	-7	-30
$n=3$	$+4$	$+14$
$(x+2)(x+12)$	-13	$+9$
$m=-2$	-6	-24
$n=-12$	-1	$+11$

Ezen változások' okát a' tanuló könnyen átláthatja, és jól tész ha illy táblácskákat alakit gyakorlatul.

Végkövetkeztetésünk az, hogy $(x-m)(x-n)$ *tagadó*, ha x, m és n közt van, *semmi* ha $x=m$ vagy $x=n$, és *állító* ha x nagyobb vagy kisebb mint öszvesen m és n.

Következésképen, $a(x-m)(x-n)$ nek *ugyan azon jegye van* mint a nak ha x nagyobb mint m és nagyobb mint n, *különböző* a val ha x, m és n közt van, de bármelly jegyü legyen a, b és c ha van olly két mennyiség m és n melly által

$$ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)$$

lesz, vagy mi egy; *ha az egyenletnek*

$$ax^2+bx+c=0$$

valódi gyökerei vannak, ax^2+bx+c nek ugyan azon jegye van mint (a) *nak, x minden értékeivel; kivévén ha x a' két gyökér közt van.*

Hátra van azon eset, mellyben ax^2+bx+c *nem válthaló factorokba*, 's ez akkor történik, ha b^2-4ac *vagy* $=0$ *vagy tagadó*; lesz pedig az első esetben ha $b^2-4ac=0$

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ és}$$

$$ax^2-bx+c=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2$$

's mivel a' kifejezések' egyik factora négyszeg, állító is, ugyan azon jegye van tehát mint a' másik factornak a nak.

Ha b^2-4ac tagadó, megmutattuk hogy ha,

$$y=ax^2\pm bx+c\,,\ 4ay=(2ax\pm b)^2+k^2\,,$$
$$\text{hol } k^2=4ac-b^2$$

tehát $4ay$, mint két négyszegnek öszvese, mindenkor állító, az az $ax^2\pm bx+c$ nek, ugyan azon jegye van mint a nak, bármelly legyen x értéke.

Ha $c=0$, a' kifejezesés $ax^2+bx=x(ax+b)$'s ez $=0$ akkor, ha vagy $x=0$, vagy $(ax+b)=0$ és

$$x=-\frac{b}{a}$$

m és n kifejezése ezen esetben

$$\frac{-b+\sqrt{b^2}}{2a} \text{ és } \frac{-b-\sqrt{b^2}}{2a}$$

Ha $b=0$. a' kifejezés ax^2-c akkor $=0$ ha,

$$x=\pm\sqrt{-\frac{a}{c}}$$

mi lehetlen, kivévén ha c és a nak különböző jegye van. Ezen esetben megegyez kifejezésünk, ha ax^2-c lesz, $a\left(x-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)$ vel.

Ugyan ezen következésre jutnnk, ha m és n közönséges kifejezéseiben, $b=0$ tesszük.

Ha végre $a=0$. a' kifejezés $bx+c$, melly csak x egy értéke által lehet $=0$, 's ez $x=-\frac{b}{c}$; itt m és n értékeit is megleljük, ha közönséges kifejezéseikben $a=0$ tesszük, ezek tudjuk

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ és } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ab}}{2a}$$

's jön $\frac{0}{0}$ és $\frac{-2b}{0}$, mit már feljebb is láttunk.

7 §. Felsőbb rendű egyenletek két ismeretlennel.

144. Az egyenletek egyismeretlennel, azon rendűek vagy emelésűek, mennyit jelöl az ismeretlen legnagyobb mutatója, vagy hányszor van az ismeretlen maga magával sokszorozva. Igy $x^3=8$, $x^m=a$

's a' t. harmad és m rendü egyenlelek, bárhány tag legyen x^3 és x^m után mellyben ismeretlen foglaltatik ha ennek mutatója kisebb 3 vagy m nél. Ha az ismeretlenek száma nagyobb, akkor sem egyik sem másik ismeretlen egyes mutatója nem jelölheti mindenkor bizonyosan az egyenlet rendét, de hasonlítva az egyes tagokban lévő factorok számával, vagyis *itt a' terjedség vagy a' factorok öszves mutatója* adja az egyenlet fokát.

Ha p. o. a' két ismeretlen x és y,

$$x^2+x^2y-y^2=0$$

harmadrendü egyenlet mert x^2y három terjedségü; szinte $x^2y+y^2=0$ is harmadrendü egyenlet.

145. Itt szinte, mint az első rendü egyenleteknél, szükséges hogy a' több ismeretlent foglaló egyenletek, egy ismeretleniekre vitessenek vissza.

Ha valamellyik, a' két ismeretlen közt, az első emelésen van, a' mívelet igen egyszerű, mert ekkor értékét egyik egyenletből a' másikba tesszük; p. o.:

1) Legyen két számnak öszvese 12, származata 35. A' két egyenlet $x+y=12$ és $xy=35$.
Az elsőből $x=12-y$, ezt a' másikba tévén

$$(12-y)y=35 \text{ vagy } 12y-y^2=35.$$

Az ismert mívelet szerint ezt feloldván jön, $y=6\pm1$, 5 vagy 7, 's következésképen $x=7$ vagy $=5$.

2) Ha a' két egyenlet

$$x+3y=6 \text{ és } x^2+y^2=12$$

az elsőből $x=6-3y$, 's a' feloldandó egyenlet

$$(6-3y)^2+y^2=12, \text{ 's ebből } 10y^2-36y+24=0.$$

3) Legyen a' két egyenlet

$$xy+y^2=5 \text{ és } x^3+x^2y=y^2+7$$

az első ád, $x=\frac{5-y^2}{y}$, 's a' másik általa,

$$\left(\frac{5-y^2}{y}\right)^3+\left(\frac{5-y^2}{y}\right)^2 y=y^2+7, \text{ vagy}$$

$$\frac{(5-y^2)^3}{y^3}+\frac{(5-y^2)^2}{y^2}y=y^2+7$$

a' nevezőket elenyésztetvén jön

$$(5-y^2)^3+(5-y^2)^2y^2=y^5+7y^3$$

feloldván a' kijelölt mível szerint, lesz,

$$125-75y^2+15y^4-y^6+25y^2-10y^4+y^6=y^5+7y^3$$

's vissza vivén marad,

$$y^5-5y^4+7y^3+50y^2-125=0,$$

hol az igaz csak egy ismeretlen van, de az ötödik emelésen.

146. ***Ha az egyik egyenletben, a' két ismeretlen' egyike nincs a' második emelésen túl, ebből azt kivevén a' másikba ugyan ezen hasonló ismeretlen' helyibe tesszük, addig míg ezen ismeretlen csak az első emelésen van. Ezután vétetik ezen ismeretlen értéke az utóbbi egyenletből az elsőbe.***

Adva van p. o.: a' két egyenlet:

$$x^2+3y^2=6x \text{ és } 2x^3-3y^2=8.$$

Az elsőből $x^2=6x-3y^2$, ezt a' másodikba téve jön $2x(6x-3y^2)-3y^2=8$

de x még itt is a' második hatóságon van, szükséges tehát hogy elébb talált értékét mégegyszer helyibe tegyük, 's ekkor lesz

$$72x-36y^2-6xy^2-3y^2=8$$

hol x már csak első emelésen van, 's ebből kivehető,

$$x(72-6y^2)-36y^2-3y^2=8$$

$$x=\frac{39y^2+8}{72-6y^2}$$

ezen értékét $x$nek $x^2+3y^2=6x$be tévén lesz

$$\left(\frac{39y^2+8}{72-6y^2}\right)^2+3y^2=6\left(\frac{39y^2+8}{72-6y^2}\right) \text{ vagy}$$

$$(39y^2+8)^2+3y^2(72-6y^2)^2=(234y^5+48)(72-6y^2)$$

hol a' sokszorozás és vissza-vivés még szükséges.

8 §. Kéttagú egyenletek.

147. *Mindazon egyenletek, mellyekben az ismeretlen ugyan azon emelésen van, kéttaguaknak neveztetnek*, mert bárhány tagjaik legyenek eleinten, mind vissza vihetők kettőre.

P. o.: $ax^5+bx^5=a^4b-a^3b^3$ kéttagú, mert a és b ismeretesek és az egyenlet

$$x^5(a+b)=a^4b-a^3b^3, \text{ az egyenlet pedig}$$

$$x^5=\left(\frac{a^4b-a^3b^3}{a+b}\right), \text{ nem egyéb mint } x^5=A$$

hol A az ismert mennyiséget képviseli.

Előbbi egyenletünk' közönséges alakja lehet tehát

$$px^5=q \text{ hol } x^5=\frac{q}{p} \text{ és } x=\sqrt[5]{\frac{q}{p}}\,.$$

Példa. Kivántatik 5 és 625 közt, két közép arány?

Ha a' két ismeretlen x és y, lesa $5:x=y;625$, 's ebből a' két egyenlet $5y=x^2$ és $625x=y^2$.

Az elsőbül $y=\frac{x^2}{5}$, mit a' másikba tévén,

$625x=\frac{x^4}{25}$ elosztván x el, és 25 el sokszorozván

jön, $x^3=15625$ és $x=\sqrt[3]{15625}=25$

tehát $y=\frac{x^2}{5}=\frac{625}{5}=125$.

9 §. Egyenletek, mellyek a' másodrendűek szerint feloldhatók.

148. Az illy egyenletekben az ismeretlen, nem lehet több mint két különböző emélésén, és szükséges hogy, egyik emelése kétszer akkora legyen mint a' másik. Az egyenletek,

$$x^4+5x^2=8 \text{ és } x^6+5x^3=8$$

illy esetben vannak.

Ezen egyenletek' feloldása következő.

a) Ha a' legfőbb emelést foglaló tag tagadó, azt állítóba fordítjuk.

b) Ha velejárója van ettül megszabadítatik.

c) A' kisebb emelésen levő ismeretlen velejárójának felét, második emelésre vive, az egyenlet mindkét részihez adjuk, 's igy az első rész tudjuk tökéletes négyszeg.

d) Mindkét részből ezután gyökeret vevén, a' másik rész elibe a' $\pm$ jegy tétetik. Igy az egyenlet kéttagúra van vissza vive. Kívántatik p. o.: két olly szám, mellyek' harmadik emeléseinek öszvese 35, származatok pedig 6 legyen. A' két egyenlet,

$$x^3+y^3=35 \text{ - és } xy=6$$

a' másodikbul $y=\frac{6}{x}$, ezt az elsőbe tévén,

$$x^3+\frac{216}{x^3}=35, \text{ és ez } x^6-35x^3=-216$$

35 felének négyszegét mindkét részhez adván, lesz,

$$x^6-35xx^3+\left(\frac{35}{2}\right)^2=-216+\left(\frac{35}{2}\right)^2=\frac{371}{4}$$

mindkét részből gyökeret vevén

$$x^3-\frac{35}{2}=\pm\sqrt{\frac{371}{4}}=\pm\frac{19}{2}$$

't ebből $x=3$ vagy $x=2$, és $y=\frac{6}{x}$ből $y=2$ és $y=3$

Ha a' mutató 4, vagy 4nek többese, négy valódi gyökér is lehető.

IX. SZAKASZ.

AZ EGYENLETEK' KÖZÖNSÉGES THEORIÁJA.

1 §. Közönséges alak. Gyökerek.

149. *Minden egyenletben, bármelly rendű legyen, megkivántatik hogy, az ismeretlen legfőbb emelésétül fogva lefelé az elsőig mindegyiken meglegyen, 's benne ezen felül legaláb egy ismeretes tag találkozzék.*

Tudjuk hogy, ha az első tagnak, melly mindenkor a' legfőbb emelésen levő ismeretlen, velejárója van, ettől osztás által szabidadítható. Szokás végre az ismeretlen különböző hatóságaít lemenő sorba írni. Igy lesz bármelly rendű egyenlet' közönséges alakja,

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Px + Q = 0.$$

Hol feltétünk szerint, az ismeretlen legfőbb hatósága velejáró nélkül áll, egyéb emelései pedig lemenő sorban következnek, ezeknek velejárójik A, B, C, 's a' t. P, bármelly számokat képviselhetnek, szinte mint jegyeik is bármellyek lehetnek; Q végre azon ismert mennyiség mellyben ismeretlen többé nem foglaltatik.

Ha n mutatónknak különös értékeket adunk p. o.: 3, 4, 5 öt, 's a' t. egyéb jelölésinket megtartjuk, a' bizonyos rendű egyenletek közönséges alakjait írjuk, így p. o.:

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0$$
$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$$
$$x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$$

harmad, negyed és ötöd rendű egyenletek' közönséges alakjai.

150. *Mindenkor van olly mennyiség vagy szám (a) egész, tört, vagy mérhetlen, való vagy képzelt, melly x helyibe tétetvén az egyenletet semmivé teszi vagy annak megfelel, 's így, szükségesképen gyökere.*

Ha közönséges egyenletünknek a gyökere, és első részét $(x-a)$val elosztjuk, addig fojtatván az osztást míg olly maradékra jutunk mellyben x többé nincs, ekkor a' talált részes sokszoroztatván az osztóval 's hozzá adván a' maradékot, egyenlő az osztandóval: egyenletünk

$x^n+Ax^{n-1}+B^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots Px+Q=0$ lévén

részesünk $=0$, tehát természetesen a' maradék is $=0$.

Jelöljük a' részest Rel, a' maradékot Mel, lesz egyenletünk az elosztás után

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots.Px+Q$$
$$=(x-a)R+M.$$

Minthogy ezen egyenlet első része x helyett at tevén $=0$ második részének is szükségesképen $=0$-

kell lennie, vagyis

$$(x-a)R+M=0 \text{ és } M=0.$$

Ha tehát (a) gyökere az egyenletetnek, ez a' binom által (x—a) tökéletesen osztható.

Könnyen bizonyíthatjuk megfordítva, hogy ha az egyenlet $(x-a)$ által osztható, a bizonyosan gyökere, vagy x nek egyik értéke, az az $x=a$.

Ha x helyett egyenletünkbe at teszünk lesz $a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots+Pa+Q=0$ tehát

$$Q=-(a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}Ca^{n-3}+\ldots\ldots+Pa)$$

és a' közönséges egyenlet következővel tökéletesen egyenlő, vagy

$$\left.\begin{matrix} x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots\ldots+Px \\ -a^n-Aa^{n-1}-Ba^{n-2}-Ca^{n-3}-\ldots\ldots-Pa \end{matrix}\right\}=0 \text{ és}$$

$$(x^n-a^n)+A(x^{n-1}-a^{n-1})+B(x^{n-2}-a^{n-2})+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+P(x-a)=0.$$

Tudjuk hogy, a' korlátok közt levő mennyiségek, valamennyien oszthatók $(x-a)$ által, 's ha az osztást eszközöljük, következö részesekre jutunk:

$$\begin{array}{r} x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+a^3x^{n-4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a^{n-1} \\ x^{n-2}+ax^{n-3}+a^2x^{n-4}+a^3x^{n-5}\ldots\ldots+a^{n-2} \\ x^{n-3}+ax^{n-4}+a^2x^{n-5}\ldots\ldots+a^{n-3} \\ x^{n-4}+ax^{n-5}\ldots\ldots+a^{n-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +x^{n-n+1}\ldots\ldots+a \\ +1 \end{array}$$

's ha ezeket x emelései szerint rendeljük, lesz

$$\begin{array}{l} x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a^{n-1} \\ \quad +Ax^{n-2}+Aax^{n-3}+Aa^2x^{n-4}+\ldots+Aa^{n-2} \\ \quad\quad + Bx^{n-3}+Bax^{n-4}+\ldots+Ba^{n-3} \\ \quad\quad\quad + Cx^{n-4}+\ldots+Ca^{n-4} \\ \quad\quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad +P. \end{array}$$

's ha itt x nek velejáróji öszvevesszük, 's mint eléb hasonlóul $A_{\prime}$ $B_{\prime}$ $C_{\prime}$'s a't. vel jelöljük, változván értékük; egyenletünket írhatjuk

$x^{n-1}+A_{\prime}x^{n-2}+B_{\prime}x^{n-3}+C_{\prime}x^{n-4}+\ldots\ldots+P_{\prime}=0$ és eredeti egyenletünk

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots\ldots+Px+Q=$$
$$=(x-a)[x^{n-1}+A_{\prime}x^{n-2}+B_{\prime}x^{n-3}+Cx^{n-4}\ldots+P_{\prime}].$$

Hasonlóképen bizonyítjuk, hogy ha egyenletünk

$$x^{n-1}+A_{\prime}x^{n-2}+Bx^{n-3}+\ldots+P_{\prime}=0$$

valamellyik gyökere b, akkor osztható $(x-b)$ által 's szint illy egyenletre jutunk az osztás után, vagy lesz

$$x^{n-2}+A_2x^{n-3}+B_2x^{n-4}+C_2x^{n-5}+\ldots\ldots+P_2=0.$$

Szinte ha ezen egyenlet gyökere c, 's $(x-c)$ által osztatik

$$x^{n-3}+A_3x^{n-4}B_3x^{n-5}+\ldots+P_3=0$$

's így mind addig oszthatjuk az egyenletet $(x-d)$, $(x-e)$, $(x-f)$'s a't. által, ha d, e, f, a' következő egyenletek' gyökerei míg végre x, minden osztás után egyel kisebb emelésre szállván, első emelésére jut.

Nyilván tehát hogy ha n rendű egyenletünknek n gyökere van, 's ezek sorjában

a, b, c, d.....m, és $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$'s a't. következőleg megosztják az egyenletet, annak szükségesképen ezen n binomi factorból kell öszvetéve lennie, vagyis

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots.Px+Q=$$
$$=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)\,(x-e)..(x-m).$$

És ha közönséges n rendű egyenletünk ezen binomok által osztható, a' mennyiségek a, b, c, d, 's a' t. az egyenletnek gyökerei, 's nekí eleget tesznek, ha x helyett bármellyiket tesszük, 's ekkor

$$x=a,\ x=b,\ x=c,\ x=d,\ \text{'s a' t.}$$

Ezen értékeknek száma n lévén, *valamelly egyenletnek annyi gyökere van, hány egységet foglal magában rendje' mutatója, de több semmi esetre nemlehet.*

Ha ezt valaki tagadná, 's mondaná hogy az egyenletnek, a, b, c, d, 's a' t. kívül, egy más velük nem egyenlő gyökere p. o.: α van, akkor ezen α is szükségesképen semmivé teszi az egyenletet ha x helyibe tesszük, és csakugyan semmivé teszi utolsó egyenletünk mindkét részét, vagyis

$$(\alpha-a)\,(\alpha-b)\,(\alpha-c)\,(\alpha-d)\ldots(\alpha-m)=0.$$

De ezen szármozat csak akkor lehet $=0$ ha valamellyik factora $=0$.

Legyen bármellyike ezen factoroknak p. o.: $(\alpha-a)=0$, akkor bizonyos hogy $\alpha=a$, 's ez mindegyik más factorra nézve ugy van. A' szármozat tehát csak akkor lehet $=0$, ha α valamellyik a, b, c, 's a't. mennyiséggel egyenlő; maradnak eszerint egyedül a, b, c... m, az egyenletnek gyökerei.

2 §. Az egyenletek' alkotása.

151. A' sokszorozásból de kívált a' binomi tanból tudjuk, hogy m számú olly binomok származata mint p. o.:

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)\ldots(x-m)$$

következő közönséges alakba írathatik:

$$x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+..(-1)^m\,Z.$$

hol $A=a+b+c+d+\ldots+m$, a' binomok második tagjai' öszvese

$$B=ab+ac+ad+\ldots+bc+bd+\ldots+lm$$

$$C=abc+abd+abe+\ldots+bcd+\ldots+klm$$

's a' t. ugyan ezen második tagok származata párosan, hármával 's a' t. combinálva, mig végre $Z=abcd..m$, valamennyi második tagnak származata, 's tagadó jegyet vesz fel, ha a' binomok száma m páratlan.

Mivel ezen kifejezés, az egyenletek közönséges alakjával egyenlő, ennek tagjai ugyan azon jegyekkel lesznek írva, felváltva állító és tagadóval.

Szinte igy minden egyenletben

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+Px+Q=0$$

a' velejárok egymásután következve, a' gyökerek öszvesébül és kölcsönös származataik' öszvesébül vannak alkotva, ugy hogy

A, az egyes gyökerek öszvesét

B, a' gyökerek származatai' öszvesét párosával véve,

C, ugyan azokat 3ával

D, négyivel 's a' t. foglalják, míg végre

Q, valamennyi gyökér származatábul áll.

A' jegyekre pedig megjegyzendő hogy, minden páros helyen álló velejáró *megfordított* jeggyel, minden páratlan helyen álló pedig *tulajdon* jegyével íratik, mig végre az utolsó tag tulajdon jegyével vétetik ha m vagy az egyenlet' rendje páros szám, ellenkezővel, ha páratlan.

Ha tehát a' gyökerek öszvese

$$(a+b+c+d+\ldots.)$$

állító következést ád Ax^{m-1} jegye tagadó, megfordítva állító; ha

$$(ab+ac+ad+\ldots bc+bd+\ldots lm)$$

állító vagy tagadó marad Bx^{m-2} állító vagy tagadó; ha $(abc+abd+acd+\ldots+klm)$ állító, Cx^{m-3} jegye tagadó, ha pedig tagadó Cx^{m-3} jegye állító 's a' t. 's a' t.

Ha p. o.: valamelly harmadrendű egyenletnek három gyökere α, β és γ, az egyenlet pedig

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0.$$

$$A=-(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$B=+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \text{ és}$$
$$C=-\alpha\beta\gamma.$$

Például legyen ezen harmadrendű egyenlet 3 gyökere -5, $+4$ és $+3$ lesz az egyenletet alakító három binomi factor

$$(x+5)(x-4)(x-3)$$

és kifejtve, egyenletünk

$$x^3-2x^2-23x+60=0$$

's itt $A=-2$, $B=-23$, $C=60$.

A' gyökerek' öszvese $(-5+4+3)=+2$, tehát az első velejáró (A) megfordított jeggyel $=-2$.

A' gyökerek' származatai öszvese, párosával véve a' gyökereket,

$(-5.4)+(-5.3)+(4.3)=-20-15+12=-23$ maradván a' második velejáró tulajdon jegyével, $B=-23$,

A' három gyökér' származata

$$-5\times-4\times-3=-60$$

tehát megfordított jeggyel $C=+60$.

Ha valamelly egyenletben, a' tagadó gyökerek őszvese, egyenlő az állító gyökerek öszvesével, akkor az ismeretlennek némelly hatóságai elmaradnak; p. o.: ha három factorunk $(x-2)(x-3)(x+5)$, a' tagadó két gyökér öszvese akkora, mekkora a' harmadik gyökér, egyenletünkből x második emelése kimarad, 's lesz

$$x^3-19x+30=0 \text{ mert } -2-3+5=0.$$

152. Ha az egyenleteket ugy tekintjük, mint egyszerü factorok származatiból alkottakat, azt bizonyítjuk, hogy több illy factorok nemlehetnek, mint mennyi egységet foglal magában az egyenlet rendmutatója; de ha ezen factorokat egymásközt combináljuk kettesivel hármosával 's a' t. másod, harmad 's a' t. emelésű factorokra találunk mellyek az egyenletet mind megosztják; igy valamint az n rendű egyenletben, az egyszerű gyökerek 's következéskép egyszerű factorok száma $=n$ szinte igy lesz

a' másodrendű factorok száma $\dfrac{n.(n-1)}{1.2}$

a' harmadrendűké $\dfrac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$'s a' t.

mint tudjuk a' combinálásból.

Példa. E' szerint valamelly negyedik rendű egyenletben, az ismeretlennek 4 értéke van, vagyis az egyenletnek 4 egyszerű factora, lesz $\frac{4.3}{1.2}=6$ másodrendű és $\frac{4.3.2}{1.2.3}=4$ negyedrendű factora.

Legyen ezen 4dik rendű egyenletünk

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$$

és x négy értéke a, b, c és d, következésképp, az egyenlet' 4 factora

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0.$$

Ha a' sokszorozást megtesszük; lesz

$$\begin{array}{l} x^4-ax^3+abx^2-abcx+abcd=0 \\ \quad\;\; -bx^3+acx^2-abdx \\ \quad\;\; -cx^3+adx^2-acdx \\ \quad\;\; -dx^3+bcx^2-bcdx \\ \qquad\qquad +bdx^2 \\ \qquad\qquad +cdx^2 \end{array}$$

és $A=-(a+b+c+d)$
$B=+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$
$C=-(abc+abd+acd+bcd)$
$D=+abcd.$

a' hat másodrendű factor pedig lesz

$$\begin{array}{l} (x-a)(x-b)\times(x-c)(x-d) \\ (x-a)(x-c)\times(x-b)(x-d) \\ (x-a)(x-d)\times(x-b)(x-c) \\ (x-b)(x-c)\times(x-a)(x-d) \\ (x-b)(x-d)\times(x-a)(x-c) \\ (x-c)(x-d)\times(x-a)(x-b) \end{array}$$

's igy a' harmadrendű factorok, hármasával véve.

3 §. Az egyenletek' közönséges feloldása.

153. A' kéttagú egyenletek (147) közönséges alakja

$$ax^m \pm b = 0.$$

Az illy egyenletek feloldása, több különös és nevezetes tulajdonokra vezet, mellyeket, minekelötte tovább mennénk tekintetbe vegyük.

Ha $\frac{b}{a} = A$, az egyenletet legyeszerűbb kifejezésére visszük 's lesz

$$x^m \pm A = 0.$$

Nyilván következik, azonnal

$$x = \sqrt[m]{\pm A}.$$

Tudjuk hogy az m rendű gyökér, m különböző értéket ád, mert

$$\sqrt[m]{\pm A} = \sqrt[m]{[(\pm 1).A]} = \sqrt[m]{\pm 1} \times \sqrt[m]{A}$$

és hogy a' tagadó vagy állító egységnek m különböző gyökere van, melly közzül csak egy vagy legfeljebb kettő lehet való.

Csakugyan ha m párotlan a' 2 való gyökér

$$\sqrt[m]{+1} = +1 \text{ és } \sqrt[m]{-1} = -1.$$

az $(m-2)$ többi pedig képzeleti, midőn a' páros m hez $+1$ nek, két való értéke jön, melly

$$\sqrt[m]{+1} = +1 \text{ és } \sqrt[m]{+1} = -1$$

de ekkor -1 nek csupa képzelt gyökerei vannak.

Ha $+1$ nek m gyökerét α, α_1, α_2, α_3, α_4 's a' t.
-1 nek m győkerét β, β_1, β_2, β_3, β_4 's a' t.
vel jelöljük

$$x^m \pm A = 0$$

egyenletünknek megfelelve lesznek, x nek m értékei

$$\begin{array}{llll}
\text{ha } A \text{ tagadó } & x = \beta \sqrt[m]{A} & \text{ha } A \text{ állító } & x = \alpha \sqrt[m]{A} \\
& = \beta_1 \sqrt[m]{A} & & = \alpha_1 \sqrt[m]{A} \\
& = \beta_2 \sqrt[m]{A} & & = \alpha_3 \sqrt[m]{A} \\
& = \beta_3 \sqrt[m]{A} & & = \alpha_3 \sqrt[m]{A} \\
& = \beta_4 \sqrt[m]{A} & & = \alpha_4 \sqrt[m]{A} \\
& \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
& = \beta_m \sqrt[m]{A} & & = \alpha_m \sqrt[m]{A}
\end{array}$$

Ha pedig az egység' valamennyi gyökerét y al jelöljük, lesz

$$x = y \sqrt[m]{A}.$$

melly értékét x nek, előbbi egyenletünkbe tévén jön

$$y^m A \pm A = 0 \text{ tehát } y^m \pm 1 = 0$$

a' legegyszerübb binomi alak, vagy kéttagú egyenlet, 's feloldásából következik a' tagadó vagy állító egység' m gyökerének valósítása.

154. Vegyük elsőbb tekíntetünk alá az egység' tagadó jegyét, 's legyen egyenletünk

$$y^m - 1 = 0.$$

Ha ezen egyenletben m nek factorai vannak, annyi alsóbb rendű egyenletek támodnak hány illy factora van m nek. Ha p. o.: $m=p\times p$, hol p és q egész számok $y^m-1=0$ ból következő két egyenlet támad: $y^p-1=0$ és $y^q-1=0$ mert ha ezen elsőnek valamellyik gyökere α, a másiknak β, lesz $\alpha^p=1$ és $\beta^q=1$

következőleg $(\alpha^p)^q=1^q=1$ és $(\beta^q)^p=1^p=1$

innen $(\alpha^p)^q\times(\beta^q)^p=(\alpha\beta)^{pq}=1$

és $(\alpha\beta)^m-1=0$

tehát a' két gyökér α és β származata, egyik gyökere az adott egyenletnek $y^m-1=0$.

155. Ha ezt a' hatodik rendű egyenletre alkalmazzuk, vagy is különös példánkban $m=6$, lesz egyenletünk $y^6-1=0$, melly, mivel $6=3.2$ két alsóbb rendű egyenletbe oszlik, 's ezen kettő

$$y^3-1=0 \text{ és } y^2-1=0$$

$y^2-1=0$ nak gyökerei $+1$ és -1 mert $y=\pm\sqrt{1}$.

Az elsőnek $y^3-1=0$, egyik gyökere bizonyosan $y=+1$, elosztván (y^3-1) ot ezen gyökér factorával, $(y-1)$ al, a' részes y^2+2y+1, egyenlő levén semmivel, adja másodrendű egyenletünket $y^2+2y+1=0$, 's ennek két gyökere

$$y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ és } y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

Ha az elöbbi szerint, két alsóbb rendű egyenletünk gyökereinek származatait vesszük $y^6-1=0$ nak, következő 6 gyökerére találunk.

$$+1\ ,,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ ,,\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$-1\ ,,\ \frac{+1-\sqrt{-3}}{2}\ ,,\ \frac{+1+\sqrt{-3}}{2}$$

Ha *m* nek factorai, *p*, *q*, *r*, *s*, *t* 's a' t. annyi egyenletbe óldható $y^m-1=0$ hány factorból áll *m*, 's lesznek az egyenletek sorjában

$$y^p-1=0\ ,\ y^q-1=0,\ y^r-1=0,\ y^s-1=0,$$
$$y^t-1=0 \text{ 's a' t.}$$

és a' külön egyenletek gyökereinek származatai adják, az eredeti egyenlet' gyökereit.

Ha *m* párotlan szám, p. o.; $2n+1$, egyenletünknek

$$y^{2n+1}-1=0$$

mindenkor van egy valódi gyökere $=1$, tehát első része tökéletesen osztható $(y-1)$ által. Ha az osztást végbehajtjuk, részésünk $=0$ levén, tudjuk, uj egyenletre érünk mellynek rendje egyel kisebb, 's ez

$$y^{2n}+y^{2n-1}+y^{2n-2}+\ldots\ldots+y^2+y+1=0$$

's most ezen egyenlettől függ előbbeninek $2n$ hátralevő gyökere.

Az illy egyenleteket, *visszamenőknek* nevezzük, 's rendöket mindenkor alább lehet szálítani.

Ha esetünkben, y^n által osztunk, lesz egyenletünk,

$$y^n+y^{n-1}+y^{n-2}+\ldots y^2+y+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\ldots$$
$$\frac{1}{y^{n-1}}+\frac{1}{y^n}=0$$

mellyben az egyenlet két végin álló tagokat párosával egymásmellé vivén, következő alakra jutunk,

$$y^n+\frac{1}{y^n}+y^{n-1}+\frac{1}{y^{n-1}}+y^{n-2}+\frac{1}{y^{n-2}}+\ldots$$
$$y^2+\frac{1}{y^2}+y+\frac{1}{y}$$

Tegyük itt $y+\frac{1}{y}=z$, tehát $y^2-zy+1=0$, jön sorjában,

$$y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$$

$$y^3+\frac{1}{y^3}=z^3-3z$$

$$y^4+\frac{1}{y^4}=z^4-4z^2+2$$

$$y^5+\frac{1}{y^5}=z^5-5z^3+5z$$

. . . .

$$y_\mu+\frac{1}{y^\mu}=z^\mu+\mu z^{\mu-2}+\frac{\mu(\mu-3)}{1.2}z^{\mu-4}-$$
$$-\frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1.2.3}z^{\mu-6}+\text{'s a' t.}$$

Ha mindezen értékeket egyenletünkben helyükre tesszük, nyilván hogy z ismeretlenből alkotott n rendü egyenletre találunk, mellyből, minden gyökér helyett $y^2-zy+1=0$ tévén, y nak megfelelő értékei következnek.

156. Alkalmazzuk a' kijelöltet az 5 dik rendre, vagyis keressük az egységnek, öt, ötödik gyökerét. Egyenletünk

$$y^5-1=0.$$

Itt is, mint valamennyi párotlan rendű hasonló egyenletben, van egy valódi gyökér $y=1$, osztható tehát $y^5-1=0$, $(y-1)$ által, 's lesz a' részes,

$$y^4+y^3+y^2+y+1=0$$

melly negyedrendű egyenlettől függ a' többi 4 gyökér.

Osszuk el az egészet y^2 által, 's írjuk egymás-mellé az egyenlő távolú tagokat mint elébb, jön

$$y^2+\frac{1}{y^2}+y+\frac{1}{y}+1=0$$

tegyük $$y+\frac{1}{y}=z,$$

tehát $$y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$$

és egyenletünk $$z^2+z-1=0$$

mellynek két gyökere tudjuk,

$$z=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ és } =\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

A' segéd egyenlet $y+\frac{1}{y}=z$ vagy $y^2-zy+1=0$, ugyan ezen mívelet szerint ád,

$$y=\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2} \text{ és } y=\frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}$$

Ha z elébbi értékeit vissza adjuk, egyenletünk' 5 gyökere következő.

1) $y=1$

2) $y=\dfrac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$

3) $y=\dfrac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$

4) $y=\dfrac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$

5) $y=\dfrac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$

Ha tehát m olly factorokba szétszedhető, mellyek 11 nél kisebbek, egyenletünk mindenkor feloldható a' második és harmadik rendű egyenletek' mívelete szerínt; de mihelyst valamellyik factor 11, vagy 11 nél nagyobb, már eddigi míveleteink elégtelenek, mert egyenletünk $y^{11}-1=0$, $(y-1)$ eli osztás által 10dik rendű visszamenő egyenletre vezet, melly

$$x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+\\+x+1=0$$

's ezt alább vinni az ötödik renden nem lehet.

4 §. A' számi egyenletek' mérhető és egyenlő gyökerei.

156. Ha az adott egyenletben, a' tagok' velejáróji egész számok, az első tagé pedig az egység, valódi gyökerei ezen egyenletnek, törtszámok által ki nem fejezhetők, az az, a' gyökerek vagy egészszámok vagy mérhetlenek.

Legyen bizonyítványul az egyenlet:

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots Px+Q=0$$

Tegyük x helyibe a' nemrövidíthető törtet $\frac{a}{b}$, 's lesz

$$\frac{a^n}{b^n}+A\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+B\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}+\ldots+P\frac{a}{b}+Q=0.$$

Egyenlő nevezőre vivén a' tagokat, jön

$$a^n+Aa^{n-1}b+Ba^{n-2}b^2+Ca^{n-3}b^3+\ldots\\Pab^{n-1}+Qb^n=0$$

vagy mi mindegy,

$$a^n+b(Aa^{n-1}+Ba^{n-2}b+Ca^{n-3}b^2+\ldots\ldots$$
$$+Pab^{n-2}+Qb^{n-1})=0.$$

Itt látjuk az egyenlet két tagból áll, mellynek egyike b által osztható, de másika a^n, semmi esetre nem, mert a és $b$nek feltétünk szerint közös factora nincs; tehát az egyenlet' egyik része semmivé nem teheti a' másikat.

167. A' törtek elhárítása tetemes hasznot hoz minden egyenletben, mert a' velejárókat egész számokba változtatjuk; de szükséges hogy az első, vagy legfőbb hatóságon levő tag, csak az egységgel legyen egybekötve. Ez, mint előre látható, nem mindenkor következik természetesen, de mindenkor elérjük czélunkat, *ha az ismeretlen helyibe, egy más olly ismeretlent teszünk, melly osztva van, valamennyi az egyenletben lévő nevezőknek származata által.*

Vegyük például az egyenletet

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{n}+\frac{c}{p}=0.$$

Ha ezen nevezőket m, n és p elhárítni akarjuk, mindhárommal sokszorozva lesz az első tag x^3, elkerüljük ezt, ha egy más ismeretlent (p. o. yt) m, n és p öszves származatával elosztunk, 's ezt x helyibe tesszük.

Vegyük e' szerint uj egyenletünkbe

$$x=\frac{y}{mnp}, \text{ 's jön}$$

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3}+\frac{ay^2}{m^3n^2p^2}+\frac{by}{mn^2p}+\frac{c}{p}=0$$

's ekkor sokszorozván az egész egyenletet, $m^3n^3p^3$, az első tag nevezőjével, annak legegyszerűbb kifejezésére jutunk, 's lesz

$$y^3+anpy^2+bm^2np^2y+cm^3n^3p^2=0.$$

Természetes, hogy ha a' nevezőknek közös factorai vannak, vagy köztük némelly egyenlő, legkisebb sokasukat vesszük; 's ha valamennyien egyenlők, a' mívelet egyszerű, mert ekkor p. o.:

$$m=n=p, \text{ és } x=\frac{y}{m}$$

's egyenletünkből

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{m}+\frac{c}{m}=0$$

következő támad

$$y^3+ay^2+bmy+cm^2=0.$$

Az illy egyenlet talált gyökereit, $m$el kell sokszorozni, mert

$$x=\frac{y}{m}\text{ből}, \quad y=mx.$$

Ha egyenletünknek

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots\ldots+Px+Q=0$$

egyik gyökere a, tudjuk osztható $(x-a)$ által, 's hogy

$$Q=-a^n-Aa^{n-1}-Ba^{n-2}-\ldots\ldots-Pa \quad (150)$$

hol az egyenlet egyik része a által osztható, szükségképen osztható tehát másik része is Q.

Elég tehát, ha kivált Qnak kevés osztóji vannak, x helyibe egymásután ezen osztókat tenni, 's általuk megtudni, van e' az egyenletnek egészszám gyökere vagy nincs?

Legyen például egyenletünk,

$$x^3-6x^2+27x-38=0$$

38nak osztóji 1, 2, 19 és 38. Ha ezen számokat írjuk egymásután, állítóan és tagadóan x helyibe, látjuk hogy csak a' szám 2, felel meg egyedül az egyenletnek, az az $x=2$.

Az egyenletet (x—2) által elosztván, részesünk

$$x^2-4x+19=0$$

ennek pedig gyökerei képzeletiek, 's adott egyenletünk három gyökere

$$x=2,\ x=2+\sqrt{-15}\ \text{és}\ x=2-\sqrt{-15}.$$

Ha az utolsó tagnak (Qnak) sok osztóji vannak, a' sok keresgélés hosszas és bajos, az egyenlet

$$Q=-a^n-Aa^{n-1}-Ba^{n-2}-\ldots\ldots-Pa$$

azonban ujabb tulajdonokat mutat, és rövidíthető míveleteket enged.

Vegyük például, 's a' mívelet' egyszerübb előadása kedviért az egyenletet.

$$x^4-Ax^3+Bx^2+Cx+D=0,$$

's legyen itt is $x$nek egyik értéke a, lesz mint mindenkor,

$$a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D=0 \quad \text{és}$$
$$D=-a^4-Aa^3-Ba^2-Ca$$

's ha mindkét felől a által osztunk

$$\frac{D}{a}=-C-Ba-Aa^2-a^3$$

Cben többé ismeretlen nincs, tehát áthozható és

$$\frac{D}{a}+C=-Ba-Aa^2-a^3.$$

Ha az egyenletet ismét a által osztjuk, lesz ha rövidség kedviért $\frac{D}{a}+C=E$

$$\frac{E}{a} = -B - Aa - a^2$$

mellyből következtetjük hogy $\frac{E}{a}$ is egész szám valamint voltak D és C, egész számok. A' miveletet igy fojtatván,

$$\frac{E}{a} + B = -Aa - a^2, \text{ és ha } \frac{E}{a} + B = F$$

$$\frac{F}{a} = -A - a \text{ szinte egész szám, végre}$$

$$\frac{F}{a} + A = -a, \text{ 's ebből ha ismet}$$

$$\frac{F}{a} + A = G,\ G = -a \text{ vagy } \frac{G}{a} = -1.$$

Ha eseteinket öszve írjuk hasonlitásul, és a minden következő egyenleteknek eleget tesz ekkor gyökere az adott egyenletnek; volt pedig,

$$\frac{D}{a} + C = E$$

$$\frac{E}{a} + B = F$$

$$\frac{F}{a} + A = G$$

$$\frac{G}{a} + 1 = 0$$

és E, F, G szükségesképen egész számok.

Ebből következik; megtudjuk vallyon gyökere e' az egyenletnek, az utolsó tag valametlyik osztója a? ha:

1) Ezen utolsó tagot általa elosztjuk, és x velejáróját a' részeshez adjuk;

2) ezen öszvest általa elosztjuk 's a' talált részeshöz adjuk x^2 velejáróját;

3) ezen öszvest általa elosztjuk, 's a' részeshez adjuk x^3 velejáróját;

4) elosztván végre ezen öszvest is $a$val, ismet a' részeshez adjuk x^4 velejáróját, melly $=1$; ha a, gyökere az egyenletnek, ekkor az utolsó következés $=0$.

Ezen mível et mindenrendű egyenletre alkalmazható, megjegyezvén, hogy a' következésre $=0$, mindaddig találnunk nemkell, mig az adott egyenlet első tagjához nem értünk, különben a nemlehet gyökere az egyenletnek.

Alkalmazzuk az előadottat számi egyenletre.

Legyen például negyedik rendű számi egyenletünk

$$x^4-9x^3+23x^2-20x+15=0.$$

Tekintsük a' míveletet egész kiterjedésében.

1) Az utolsó tagnak ($+15$nek) valamennyi osztója, 15, 5, 3, és 1, és csakugyan állítón és tagadón véve. Irjuk ezen osztókat egy sorba, nevezzük a sornak, vagy az osztók sorának. Előbbi közönséges egyenletünk szerint $15=D$, és a sor

$$+15+5+3+1-1-3-5-15.$$

2) Elosztjuk a' 15öt sorjában valamennyi itt álló osztóval 's a' részeseket írjuk egymásmellé egy sorban, melly sor $\frac{D}{a}$ sora, 's lesz,

$$+1+3+5+15-15-5-3-1.$$

3) Ezen részesekhez adjuk Ct, x velejáróját, 's nevezzük a' sort melly igy támad, a' — 20' egymásutánni hozzá adása által, $\frac{D}{a} + C = E$ sornak, melly —19—17—15—5—35—25—23—21

4) Ezen sorban csak három olly szám áll, melly felette az a sorban álló factor által osztható, 's ezek, $\frac{-15}{+3}$, $\frac{-5}{+1}$ és $\frac{-35}{-1}$, ezen részeseket irjuk $\frac{E}{a}$ sorba, —5—5+35.

5) Ezekhez adván x^2 velejáróját + 23 at, lesz $\frac{E}{a} + B = F$ sorunk +18+18+58.

6) Elosztván ezeket sorjában +3+1 és —1 által lesz $\frac{F}{a}$ sorunk +6+18—58.

7) Ezekhez adván x^3 velejáróját —9 et, lesz $\frac{F}{a} + A = G$ sorunk —3+9—67.

8) Elosztván végre szinte + 3 + 1 és —1 által ezeket sorjában lesz $\frac{G}{a}$ sorunk —1+3+67 's ha itt ezen végkövetkezésekhez x^4 velejáróját +1 et adjuk csak az első lesz $= 0$'s ez $-1+1=0$, miből következik hogy az egyenletnek csak egy mérhető gyökere van, 's ez $x=3$, osztható tehát az egyenlet $(x-3)$ által.

Mint itt adánk a' mívelet' magyarázatját, ugy írhatjuk fel példánkat könnyebb tekintet végett, 's lesz míveleti táblánk,

$a=$	$+15$	$+5$	$+3$	$+1$	-1	-3	-5	-15
$D:a=$	$+1$	$+3$	$+5$	$+15$	-15	-5	-3	-1
$E=$	-19	-17	-15	-5	-35	-25	-23	-21
$E:a=$				-5	-5	$+35$		
$F=$				$+18$	$+18$	$+58$		
$F:a=$				$+6$	$+18$	-58		
$G=$				-3	$+9$	-67		
$G:a=$				-1	$+9$	$+67$		
$G:a+1=$				0	$+10$	$+68.$		

a sorban a' 0 felett $+3$ lévén, $+3$ az egyenlet' mérhető gyökere.

Ezen míveleti táblából a' $+1$ és -1 factorok elhagyhatók, mert ezeket könnyű azonnal az egyenletbe tenni x helyett, 's egy pillanattal látni megfelelnek e' neki vagy nem.

Legyen más példánk $x^3-7x^2+36=0$.

Az egyenletnek $+1$ és -1, eleget nem tesznek. Az egyenletből x első emelése hibáz, táblánkból a' harmadik sor E, el marad, 's tüstént következik a' másodikból a' negyedik.

Leírván 36 nak minden factorait, 's alájok a' részeseket mindegyik külön factor által, lesz két sorunk:

$$+36+18+12+9+6+4+3+2-2-3-4-6-9-12-18-36$$
$$+1+2+3+4+6+9+12+18-18-12-9-6-4-3-2-1$$

Ezen két sorban a' felső számok osztók, az alsók pedig osztandók lévén, mindazokat elhagyjuk, mellyekből részes nem következik, 's maradnak a' két sorban,

a, sor	$+6+3+2-2-3-6$
	$+6+12+18-18-12-6.$
részesek, $E{:}\,a$	$+1+4+9+9+4+1$
$E{:}\,a+A$	$-6-3+2+2-3-6.$
$G{:}\,a$	$-1-1+1-1+1+1$
$G{:}\,a+1$	$0\quad 0+2\quad 0+2+2.$

Itt három szám által lett a' következés $=0$, tehát 3 felel meg az egyenletnek, 's ezen három szám mellyet egyszerre megleltünk $+6+3$ és -2, valamennyi gyökere az adott egyenletnek, 's ez származata a' három factornak $(x-6)\,(x-3)\,(x+2)$.

158. *Némelly betű egyenletek*, egyszerű fogások által, *gyakorta számi egyenletbe változnak.*

Ha adva volna p. o.: az egyenlet

$$y^3+2py^2-33p^2y+14p^3=0$$

tegyük $y=px$, 's lesz

$$p^3x^3+2p^3x^2-33p^3x+14p^3=0$$

's már is $\quad x^3+2x^2-33x+14=0.$

Ennek mérhető osztója vagy gyökere $x=-7$, factora $(x+7)$'s belőle $y=-7p$.

159. ***Ha valamelly egyenletnek egyik gyökerét ismerjük, másik gyökerének vehetjük, az ezen ismert gyökér 's bármelly másik közti különbséget.*** Ez által az egyenletet egy rendel aláb szálitjuk, melly rend több nevezetes tulajdonokat mutat.

Legyen közönséges egyenletünk

$$x^m+Ax^{m-1}Bx^{m-2}Cx^{m-3}+\ldots+Px+Q=0,$$

legyenek gyökerei a, b, c, d, e, 's a't, 's tegyük x helyibe $(a+y)$t: feloldván az emeléseket

$$(a+y)^m+A(a+y)^{m-1} \text{ 's a't. jön}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
a^m & +ma^{m-1}y+ \\
 & +\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2 \ldots\ldots\ldots +y^m \\
+Aa^{m-1} & +(m-1)Aa^{m-2}y+ \\
 & +\frac{(m-1)(m-2)}{2}Aa^{m-3}y^2 \ldots +\ldots \\
+Ba^{m-2} & +(m-2)Ba^{m-3}y+ \\
 & +\frac{(m-2)(m-3)}{2}Ba^{m-4}y^2 \ldots +\ldots \\
+Ca^{m-3} & +(m-3)Ca^{m-4}y+ \\
 & +\frac{(m-3)(m-4)}{2}Ca^{m-5}y^2 \ldots +\ldots \\
+\ldots & +\ldots\ldots\ldots \\
+Pa & +Py \\
+Q &
\end{array}\right\}=0$$

Itt észrevehető hogy az első függő sorban, közönséges egyenletünkhöz hasonló áll, hol x helyibe egyik gyökerét a t tettük, ez az egész sor tehát elhagyható,

$$a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+\ldots+Pa+Q$$

Azon tagokat pedig mellyek ezeken kivül megmaradnak y által eloszthatjuk 's lesz;

$$\left.\begin{array}{lll}
ma^{m-1} & +\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y & +y^{m-1} \\
+(m-1)Aa^{m-2} & +\frac{(m-1)(m-2)}{2}Aa^{m-3}y+\ldots & \\
+(m-2)Ba^{m-3} & +\frac{(m-2)(m-3)}{2}Ba^{m-4}y+\ldots & \\
+(m-3)Ca^{m-4} & +\frac{(m-3)(m-4)}{2}Ca^{m-5}y+\ldots & \\
+\ldots\ldots & +\ldots\ldots\ldots\ldots & +\ldots \\
+P & &
\end{array}\right\}=0$$

'S ezen egyenletnek $(m-1)$ gyökere láthatóképen $y=b-a$, $y=c-a$, $y=d-a$, $y=e-a$'s a' t.

Ha rövidség kedviért y nak a' függő sorokban álló velejáróit öszvevesszük s' jelöljük p. o.:

$$ma^{m-1}+(m-1)Aa^{m-2}+(m-2)Ba^{m-3}+\ldots.=A,$$
$$m(m-1)a^{m-2}+(m-1)(m-2)Aa^{m-3}+$$
$$+(m-2)(m-3)Ba^{m-4}+\ldots=B$$
$$(m-1)(m-2)a^{m-3}+(m-2)(m-3)Aa^{m-4}+$$
$$+(m-3)(m-4)Ba^{m-5}+.=C$$

's a' t. következő egyenletünk képviselheti az előbbit

$$A+\frac{B}{2}y+\frac{C}{2.3}y^2+\frac{D}{2.3.4}y^3+\ldots.+y^{m-1}=0 \quad (1)$$

legyen pedig egyenletünk

$$a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+Ca^{m-3}+\ldots.$$
$$+Pa+Q=V \quad (2)$$

Ha az adott közönséges egyenletnek két egyenlő gyökere van p. o.: $a=b$, akkor y egyik értéke $a-b=0$ lesz, tehát az egyenletnek $y=0$ lévén megfelel; de ezen feltétel (1) egyenletünk minden tagját elenyészteti kivevén az elsőt (At) mellyben y nincs, szükségeskép tehát ez magában is $=0$; 's így a értéke megfelel egyszersmind a' két egyenletnek

$$A=0 \text{ és } V=0.$$

Ha három egyenlő gyökér van p. o.: $a=b=c$, az (1) egyenletnek egyszerre két gyökere lesz $=0$, az az $(b-a)$ és $(c-a)$. Ezen esetben (1) egyenlet, kétszer osztható $y-o=y$ által egymásután, mi csak akkor történhető, ha A és B egyenkint $=0$.

Szükséges is ekkor hogy a eleget tegyen a' 3 egyenletnek, $V=0$, $A=0$ és $B=0$.

Igy fojtatván továb visgálatunkat, négy egyenlő gyökér esetében szükséges hogy a a' 4 egyenletnek megfeleljen

$$V=0,\ A=0,\ B=0 \text{ és } C=0.$$

Ezen mívelet által nem csak azt megleljük, találtatik e' ugyan azon a gyökér, többször az egyenletben, de azt is hogy, van e' más olly gyökere melly többször előjön, ha ennek értékét nem is ismerjük.

Megjegyzendő ennek következésében, hogy azon esetben ha $A=0$ vagy sora,

$$ma^{m-1}+(m-1)Aa^{m-2}+(m-2)Ba^{m-3}+\ldots+P=0$$

ugy tekinthetjük a gyökerét, mint gyökerét az egyenletnek,

$$mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+\ldots+P=0$$

hol x bármelly ismeretlent képvisel. Mivel pedig a gyökere az egyenletnek $V=0$, melly ismét

$$x^{m}+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots . Px+Q=0$$

következik, hogy $(x-a)$ mindkét utóbbi egyenletnek factora.

Ha B, C, D, 's a' t. kifejezéseikben is a t $x$be változtatjuk, ezekben is factor lesz $(x-a)$, ha a semmivé teszi a' mennyiségeket B, C, D 's a' t.

Mít itt a felől mondunk, egyenlőképen alkalmazható bármellyik többször meglevő gyökérre; 's igy az egyenletek' közös factorait, a' legnagyobb közös osztó mívelete szerint keressük az egyenletek közt,

$$V=0,\ A=0,\ B=0,\ C=0,\ D=0 \text{ 's a' t.}$$

's ezen factorok következő rendben adják, az adott egyenletnek egyenlő gyökereit.

Az eredeti egyenletnek, csak azok dupla vagy kettős factorai, mellyek a' két egyenletben $V=0$ és $A=0$ közösek, vagyis ha a' két egyenletben

$$V=0 \text{ és } A=0, \text{ p. o.: } (x-\alpha)\,(x-\beta)$$

közös osztó, akkor az ismeretlen x nek eredeti egyenletünkben két értéke lesz egyenlő αval és két egyenlő βval, az az, négy factora

$$(x-\alpha),\ (x-\alpha),\ (x-\beta) \text{ és } (x-\beta)$$

mi egyenlő $(x-\alpha)^2\,(x-\beta)^2$al.

A' három első egyenlet'

$$A=0,\quad B=0 \text{ és } V=0$$

közös factorai, az eredeti egyenletnek, hármos factorait adják, 's ezek $(x-\alpha)^3\,(x-\beta)^3$'s így tovább.

Helyen van itt megjegyezni, hogy az egyenlet A, ha a helyett $x$et teszünk

$$mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}+$$
$$+(m-3)Cx^{m-4}+\ldots+P=0$$

egyenesen a' $V=0$ egyenletből

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-1}+\ \ldots\ +Px+Q=0$$

következik, ha mindegyik x mutatójával sokszorozzuk sorjában minden tagot, és x mutatóját eggyel kisebbítjük; ekkor természetesen Q elmarad, mert x mutatója Qnál $=0$ vagyis

$$Q=Qx^0 \text{ és } Q.0=0$$

szinte lesz Pxből, mivel

$$Px=Px^1,\quad P.1=P.$$

Az egyenlet $B=0$ szintugy következik $A=0$ egyenletből valamint ez következett $V=0$ből, szintugy $C=0$, $B=0$ből, 's a' t.

Legyen az előadottra különös példánk

$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0=V$$

ebből következik A egyenletünk

$$5x^4-4.13x^3+3.67x^2-2.171x+216=0=A$$

vagy $5x^4-52x^3+201x^2-342x+216=0$

és ebből $4.5x^3-3.52x^2+2.201x-342=0=B$

vagy $20x^3-165x^2+402x-342=0$

A' két első egyenlet V és A közt, a' legnagyobb közösosztó

$$x^3-8x^2+21-8 \qquad (1)$$

de ezen harmadrendű osztóban bizonyosan több factor foglaltatik, keresni kell tehát nincs e' köztök ollyan, melly a' B egyenlettel is közös; 's valóban a' közös osztó $(x-3)$. Következésképen az adott V egyenletben a' gyökér $=3$, háromszor van meg, az az factorai közt $(x-3)^3$ áll. Elosztván $(x-3)$ által (1) factorunkat annyiszor mennyiszer lehet, esetünkben kétszer, találjuk $(x-2)$ részest. Ezen factor $(x-2)$ csak $V=0$ és $A=0$ egyenletek közt lévén, azokban csak kétszer van meg, az az $(x-2)^2$ factora a' két első egyenletnek, $V=0$ pedig áll $(x-3)^3$ $(x-2)^2=0$ ből; 's evvel egyértelmű. Eredeti közönséges egyenletünk, minden egyes gyökere, különbségét adja a' többivel, ha a helyett sorjában b, c, d, e 's a' t. egyéb gyökereit tesszük, a' nélkül hogy ezen cserélések által alakját valtoztatná, vagy velejárói változást szenvednének; 's igy minden gyökér különbségét párosával foglalja magában.

Ennek bizonyitására elég, ha az egyenletből,

$$a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+Ca^{m-3}+\ldots, Pa+Q=0$$

kiírtjuk az a t, mert a' következés, csak a' velejáróktól függvén, ezek pedig az egyes és különös gyökereknek semmi nyomát nem mutatják, egyenlőkép alkalmazható mindegyík külön tekintetre.

Látható hogy a' vég egyenlet, mellyre ezen visgálat és helyettezés vezet, $m(m-1)$ rendű lesz, mert a' gyökerek különbségei

$$(a-b),\ (a-c),\ (a-d),\ (a-e)\ldots$$
$$(b-a),\ (b-c),\ (b-d),\ (b-e)\ldots$$
$$(c-a),\ (c-b),\ (c-d),\ (c-e)\ldots \text{ 'sat.}$$

annyi számmal vannak hány változtatást enged m elem kettősbe véve, 's ez $m(m-1)$.

Ezen kívül, mivel a' mennyiségek

$$(a-b),\ (b-a),\ (a-c),\ (c-a) \text{ 's a' t.}$$

csak jegyeikben különböznek, a' gyökerek párosan egyenlők lesznek, mert ha p. o. $y=\alpha$, lesz egyszersmind ugyan ezen gyökér másik értéke $y=-\alpha$ is.

Következik ebbül, hogy az egyenlet' valamennyi tagjában az ísmeretlenek *páros emelésen* vannak, mert bizonyos számu *másodrendű factoroknak származata*, millyen másodrendű factor p. o.:

$$y^2-\alpha^2=(y-\alpha)(y+\alpha),$$

's az egyenletnek alakja

$$y^{2n}+py^{2n-2}+qy^{2n-4}+\ldots ty^2+u=0$$

melly, ha $y^2=z$ tesszük, változik következőbe,

$$z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}+rz^{n-3}+\ldots\ tz+u=0;$$

's minthogy z, y nak négyszege, y értékei, az adott egyenlet' gyökerei különbségeinek, négyszegei lesznek.

Legyen például, $x^3-7x+7=0$,
tegyünk x helyett $(a+y)$t, 's jön sorjában

$$x^3 = a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^3$$

$$-7x = -7a - 7y \text{ és } +7 = +7 \text{ vagy}$$

$$a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^3 - 7a - 7y + 7 = 0$$

itt tudjuk $a^2 - 7a + 7 = 0$'s ezen tagokat elhagyhatjuk, a' maradottakat pedig y által osztván, jön

$$3a^2 - 7 + 3ay + y^2 = 0$$

ha ezen egyenlet és $a^3 - 7a + 7 = 0$ közt at kiírtjuk, jön

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 49 = 0$$

$z = y^2$ tévén következik

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0.$$

160. Ha közönséges egyenletünkben

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Px + Q = 0$$

x helyibe $(a+y)$t teszünk, gyakorta czélunk az egyenlet valamellyik tagjának kiírtása. Ekkor a' következést y emelései szerint rendeljük, és at másik ismeretlen gyanánt vesszük; értékét pedig megtaláljuk ha, azon tag' velajáróját, mellyet kiírtani akarunk, semmivel egyenlítjük: lesz igy a' helyezés és kifejtés után,

$$\left.\begin{array}{l} y^m + may^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{2}a^2y^{m-2} + \ldots + a^m \\ \quad + Ay^{m-1} + (m-1)Aay^{m-2} + \ldots\ldots + Aa^{m-1} \\ \quad + \qquad By^{m-2} \quad + \ldots\ldots + Ba^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Q \end{array}\right\} = 0$$

Ezen tagokat mint emlitők y hatóságai szerint rendelve, uj egyenletre találunk, mellynek első tagjai lesznek

$$y^m + (ma + A)y^{m-1} + \left[\frac{m(m-1)}{2}a^2 + (m-1)Aa + B\right]$$

$$y^{m-2} + \text{ 's a' t.}$$

Ha p. o.: a' második tagot akarnók kiírtani, y^{m-1} velejáróját semmivel egyenlitjük, és $ma+A=0$ honnan következik $a=-\frac{A}{m}$. Ha ezen értékét a nak az egyenletbe tesszük, csak a' többi emelései maradnak y nak, és y^{m-1} elesik.

Ebből következik, hogy, *valamelly egyenletnek, második tagját kiirtjuk, ha az ismeretlen helyett, más uj ismeretlent teszünk, ehez adván a' második tag velejáróját megfordított jegyel, és elosztván az első tag mutatójával.*

Legyen például az egyenlet $x^3+6x^2-3x+4=0$.

A' szabály szerint lesz $x=y-\frac{6}{3}=y-2$, az ismeretlen, hozzá adván a' második tag velejáróját megforditott jegygyel 's elosztván az első tag' mutatójával.

Ezen uj ismeretlent az egyenletbe tévén x helyett, lesz

$$\left.\begin{array}{r} y^3-6y^2+12y-8 \\ +6y^2-24y+24 \\ -3y+6 \\ +4 \end{array}\right\}=0$$

és öszvevéve

$$y^3-15y+26=0$$

melly egyenletben y^2, vagy második tag, többé nincs.

161. Ha az eddig előadottakat, harmadrendű egyenletekre alkalmazzuk, mellyeknek közönséges alakja tudjuk,

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0$$

az egyenlet' második tagja, vagy x második hatósága, elenyészik ha, $x=y-\frac{A}{3}$ tesszük. A' helyettezés adja,

$$x^3=y^3-Ay^2+\frac{A^2}{3}y-\frac{A^3}{27}$$
$$Ax^2= \quad +Ay^2-\frac{2A^2}{3}y+\frac{A^3}{9}$$
$$Bx= \quad +By-\frac{BA}{3}$$
$$C= \quad +C$$

's már itt látjuk hogy $(-A+A)y^2=0$ és a' második tag elesik. Tegyük rövidség kedviért, y velejárójit

$$\frac{A^2}{3}-\frac{2A^2}{3}+B=B-\frac{A^2}{3}=M\text{nek}$$

az ismeretes tagok öszvesét pedig,

$$-\frac{A^3}{27}+\frac{A^3}{9}-\frac{BA}{3}+C=N\text{nek}$$

lesz egyenletünk

$$y^3+My+N=0$$

's ez legegyszerűbb kifejezése a' harmadrendű egyenletnek.

Meglelvén ebből $y$nak három értékét, mindegyikből $\frac{A}{3}$ levonandó, 's következik x értéke.

162. Eredeti közönséges egyenletünk harmadík tagja (mellyben y^{m-1} áll) elenyészik, ha velejárója $=0$, melly

$$\frac{m(m-1)}{2}a^2+(m-1)Aa+B=0$$

másodrendű egyenlet. Követvén ezen utat, bármellyik tagja kiírtható az egyenletnek ha velejárója $=0$ tétetik 's az uj ismeretlen értéke ezen egyenletből x helyibe íratik, de természetes hogy, a' tagok sorjában mindég nagyobb nagyobb rendű egyenletre vezetnek, 's hogy p. o.: a' negyedik tag kiírtása harmadrendű egyenlet feloldásától függ, az ötödik tagé, negyedik rendűtől 's a' t. míg végre az utolsó tag különben ki nem írtható ha csak az egyenlet nem,

$$a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+Ca^{m-3}+\ldots+Pa+Q=0$$

de melly tökéletesen egyenlő az adottal.

Oka ennek könnyen átlátható. Valamelly egyenletnek utolsó tagját semmivel egyenlítni, annyi mint feltenni, hogy valamennyi ismeretlennek értéke $=0$, 's ha ezen hypothesist tesszük $x=(y+a)$ ba, természetesen következik hogy $x=a$, az az hogy a szükségeskép egyik gyökere x nek.

5 §. Feloldás, közelítés által.

163. *Ha két mennyiség, az ismeretlen helyibe tétetvén, két, különböző jegyű következést hoz elő, bizonyos, hogy az egyenletnek valamellyik gyökere, ezen két mennyiség közt van, és való.*

Legyen például az egyenlet:

$$x^3-13x^2+7x-1=0$$

ha x helyibe egyszer 2 tőt, másszor 20 at teszünk, az egyenlet egyik esetben sem $=0$, de az elsőben $=-31$, a' másodikban $=+2939$, 's következik hogy az egyenlet' egyik való gyökere 2 és 20 közt van, 's hogy kettőnél nagyobb de 20nál kisebb, vagy $x>2$ és $x<20$.

A' mondottnak bizonyítására következőkép elmélünk.

Válosszuk el egymástól az állító és tagadó tagokat, 's egyenletünk

$$(x^3+7x)-(13x^2+1)=0$$

$x=2$ tévén a' következés tagadó, tehát

$$(x^3+7x)<(13x^2+1)$$

$x=20$, a' következés állító, és

$$(x^3+7x)>(13x^2+1).$$

Bizonyos hogy x növő értékével, mindkét rész nő, de az első (mellyben x^3 jön elő) sebesebben mint a' második, 's azon pillanatot mellyben a' két ellenkező jegyü mennyiség épen egyenlő, nem lesz nehéz felfogni; pillanat mellyben x valódi értéke a' két felet egyenlíti, 's lesz $(x^3+7x)=(13x^2+1)$: ekkor x ezen értéke okvetlenül gyökere az egyenletnek.

Az itt kimondott bármelly egyenletre alkalmazható közönségesen.

Ha az állító tagokat A val, a' tagadókat Tvel jelöljük; a legyen azon helyettese $x$nek melly tagadó, b pedig, melly állító következést ád; ezen két eset csak akkor lehető, ha az elsöben $A<T$, a' másikban pedig $A>T$, 's következtetjük hogy $x$nek azon értéke melly által $A=T$, a és b közt van.

Feltesszük eddigi tekintetünkben, hogy $x$nek felvett mindkét értéke egyenlően állító vagy tagadó, vagy is mindkét értéknek ugyan azon jegye legyen, másként a' különböző jegyek, változtatott következést adnak.

Ezen környüllállás megszünik azáltal ha $x=0$ tesszük, mert ekkor az egyenletnek csak utolsó tagja marad, és az egyik vagy másik felvétel következésével ellenkező jegye van.

Legyen például az egyenlet

$$x^4-2x^3-3x^2-15x-3=0$$

ha itt x helyibe -1 et teszünk, a' következés $+12$
$x=2$ ezen következés $=-45$
ha pedig $x=0$, marad -3; 's így $x=-1$ és $x=0$ jegyeikben különböző következéseket adnak. De ha x helyibe $-y$ t' teszünk az adott egyenlet változik

$$y^4+2y^3-3y^2+15y-3=0 \text{ be: és itt}$$
$$A=y^4+2y^3+15y \text{ és } T=3y^2+3, \text{ tehát}$$
$$A<T \text{ ha } y=0 \text{ és}$$
$$A>T \text{ ha } y=1.$$

Következik ebből hogy y valamellyik értéke 0 és $+1$ közt, innen pedig, hogy x érté ke0 és -1 közt, vagy inkáb $+2$ és -1 közt van.

164. *Bármelly rendű legyen az egyenlet, 's bármelly nagyok a' tagoknak velejárói, mindenkor találhatni olly számot, melly az ismeretlen helyibe tétetvén, az első tagot nagyobbra viszi, mint mekkora valamennyi egyéb tag öszvevéve.*

Ez magában is nyilván, tekintvén azon sebességet mellyel az emelések nőnek, melly sebesség annál nagyobb mentül nagyobb az emelési mutató. Lássuk feltétünket.

Legkevésbé kedvező lesz azon eset, mellyben a' tagok' velejáróji mind egyenlők 's csakugyan egyenlők a' köztük lévő legnagyobbal, az első tag pedig mint tudjuk, az 1 velejáróval áll.

Ha p. o.; közönséges egyenletünkben

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Px + Q = 0$$

A, B, C, . . . P és Q mind egyenlők 's köztök p. o.: S a' legnagyobbik, lenne egyenletünk:

$$x^m + Sx^{m-1} + Sx^{m-2} + Sx^{m-3} + \ldots + Sx + S = 0$$

ekkor az első 's valamennyi tagközti különbség

$$x^m - S(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1).$$

A' korlátközt levő kifejezés, geometri sor és öszvese $\frac{x^m - 1}{x - 1}$, és tekintendő különbségünk

$$x^m - \frac{S(x^m - 1)}{x - 1} \text{ vagy } x^m - \frac{Sx^m}{x - 1} + \frac{S}{x - 1}$$

ha itt x helyett Et veszünk, a' különbség

$$E^m - \frac{SE^m}{E - 1} + \frac{S}{E - 1}$$

's ez állító mennyiség ha $E^m = \frac{SE^m}{E - 1}$, mert ha az egyenletnek mindkét részit E^m el elosztjuk, lesz

$$1 = \frac{S}{E - 1} \text{ 's ebből } E = S + 1.$$

Ha tehát x helyibe, az egyenlet' tagjai közti, *egységgel nagyobbított legnagyobb velejáróját tesszük*, az első tag nagyobb lesz mint valamennyinek öszvese, 's melly jegye van ezen velejárónak azon jegyű lesz a' következés.

Ha csak, az állító tagokat akarjuk nagyobbakká tenni a' tagadóknál, elég, ha a' tagadó velejárók legkisebbét vesszük, nagyobbítva az egységgel.

Következik ebből, hogy az egyenletnek állító gyökerei, szükségképen 0 és $(S+1)$ közt vannak.

Szintígy találjuk a' tagadó gyökerek' határát, ha x helyibe $-y$ t teszünk, 's az első tag állító lesz ha elébb tagadó volt. Ha R a' legnagyobb velejáró ezen változtatás után $(R+1)$ lesz y állító értékeinek határa, tehát x tagadó gyökereinek határa, $(-R-1)$.

165. Az előadottakbul következik hogy, *minden páratlan rendű egyenletnek, szükségesképen van egy olly gyökere, mellynek jegye ellenkező, az egyenlet' utolsó tagja' jegyével.*

Mert, ha E t ugy vesszük, hogy a' mennyiség

$$E^m+AE^{m-1}+BE^{m-2}+\ldots+PE\pm Q,$$

jegye csak az első tagtól E^m függ, ugyanazon jegyű lesz minő jegyű E. Ezt tévén; ha az utolsó tag Q jegye $+$, és x et $=-E$ nek vesszük, ellenkező jegyre jutunk, attól melly jőne ha $x=0$: honnan látszik hogy az adott egyenletnek egy gyökere 0 és $-E$ közt van, vagyis tagadó.

Ha Q jegye $-$, akkor $x=+E$ kell venni, 's a' gyökér 0 és E közt van, vagyis állító.

166. Ha az adott egyenlet páros rendű, és E^m mindenkor állító bármelly legyen E nek jegye; az előbbeniből nemlehet megismerni van e' az egyenletnek való gyökere, ha az utolsó tag' jegye $+$ mert akar legyen $x=0$, akar $x=\pm E$, mindenkor állító következésre jutunk; de ha Q tagadó, akkor

$$x=+E,\ x=0 \text{ és } x=-E$$

helyibe három következésre jutunk $+-+$ jeggyel, 's így az adott egyenletnek legaláb két való gyökere van, és egyike állítò 0 és E közt másika tagadó 0 és $-E$ közt: tehát, *minden párosrendű egyenletnek, mellynek utolsó tagja tagadó, legaláb két való gyökere van, egyike állító másika tagadó.*

167. Világítsuk a' mondottat példák által.

Legyen az egyenlet

$$x^4-4x^3-3x+27=0.$$

Legnagyobb tagadó velejárója -4, 's következéskép legnagyobb állító gyökere 5 nél kisebb. Tegyünk x helyibe $-y$t, változik egyenletünk

$$y^4+4y^3+3y+27=0 \text{ be}$$

's mivel itt minden tag állító, nyilván, hogy y értéke tagadó, miből következik, hogy x értéke szükségképen állító, 's hogy az egyenletnek tagadó gyökere nincs; a' való gyökerek tehát 0 és 5 közt állnak.

Az első közelités úgy látszik abban áll, hogy vegyük egymásután,

$$x=1,\quad x=2,\quad x=3 \text{ és } x=4,$$

's ha közöttük két szám ellenkező következést ád, a' gyökerek közelebbi határaira találunk. Megtévén a' helyettezést, lesz sorjában az egyenlet következése

$$x=1 \text{ által } +21 \quad x=2 \text{ által } +5$$
$$x=3 \quad ,, \quad -9 \quad x=3 \quad ,, \quad +15,$$

's látjuk hogy az egyenletnek két való gyökere van, 's egyike 2 és 3, másika 3 és 4 közt. Az elsőhöz inkáb közelítünk ha 2 és 3 közt a' középszámot vesszük melly $2\cdot5$, feltesszük tehát hogy $x=2\cdot5$, 's következésünk

$$+39\cdot0625-62\cdot5-7\cdot5+27=-3\cdot9375$$

mivel tagadó azt mutatja, hogy a' gyökér 2 és $2\cdot5$ közt van. Ezek közt a' közép szám $x=2\cdot25$, 's ha megelégszünk $x=2\cdot3$ al, melly érték közel tizedes helyével adja x értékét, sebesen közelitünk hozzá Newton' mívelete szerint, melly ebböl áll.

Tegyük $x=(2\cdot3+y)$, hol tudjuk y csak parányi tört lehet 's felsőbb emelései elhagyhatók, lesz pedig

$$x^4=(2\cdot3)^4+4(2\cdot3)^3y$$
$$-4x^3=-4(2\cdot3)^3-12(2\cdot3)^2y$$
$$=3x=-3(2\cdot3)-3y.$$

's jön általuk $-0\cdot5836-17\cdot812y=0$

's ebből $y=-\dfrac{0\cdot5839}{17\cdot812}$,

ha a' századosokon túl nem megyünk, jön

$$y=-0\cdot03 \text{ és } x=2\cdot3-0\cdot03=2\cdot27.$$

Ha inkább közelítni akarunk x valódi értékéhez tegyük

$x=(2\cdot27+y^1)$'s jön, $-0\cdot04595359-18\cdot046468y^1=0$

$$y'=\frac{0\cdot04595359}{18\cdot046468}=-0\cdot0025$$

's $x=2\cdot2675$, 's így továb mig a' kívánatnak eleget teszünk.

A' második gyökér szinte így számítva

$$x=3\cdot6797.$$

Ha az elhagyott tagok' értékei határát keressük, megyőződünk, míveletünk' helyes létéről.

Ha az adott egyenlet

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots.+Px+Q=0$$

x helyibe $(a+y)$ tévén (159) egyenletre jutunk, melly, mivel a nem tökéletes gyökere az egyenletnek,

$$a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-}{}_2+\ldots\ldots+Pa+Q$$

nem lesz $=0$.

Ha ezen egyenletet V vel jelöljük, lesz az említett (1) egyenletünk helyett

$$V+\frac{A}{1}y+\frac{B}{1.2}y^2+\frac{C}{1.2.3}y^3+\frac{D}{1.2.3.4}y^4+\ldots.$$
$$\ldots..+y^m=0.$$

's ebből

$$Ay=-\left(V+\frac{B}{2}y^2+\frac{C}{2.3}y^3+\ldots.y^m\right)$$

$$y=-\left(\frac{V}{A}+\frac{B}{2.A}y^2+\frac{C}{2.3.A}y^3+\ldots+\frac{y^m}{A}\right)$$

's ha y felsőbb emeléseit elhagyjuk, megállhatunk

$$y=-\frac{V}{A} \text{ mellett, 's a' hiba}$$

$$-\left(\frac{By^2}{1.2A}+\frac{Cy^3}{2.3A}+\ldots.+\frac{y^m}{A}\right).$$

Ha a nem különbözik x valódi értékétől nagyobb mennyiséggel milly p. o.: $\frac{a}{p}$, a' hiba kisebb, mint-ha y helyibe $\frac{a}{p}$ tettünk volna, 's ez adná

$$-\left[\frac{B}{2.A}\left(\frac{a}{p}\right)^2+\frac{C}{2.3A}\left(\frac{a}{p}\right)^3+\ldots.+\frac{1}{A}\left(\frac{a}{p}\right)^m\right]$$

kifejtvén ezen mennyiséget, bizonyosak lehetünk, hogy $\frac{V}{A}$ hoz hasonlítva elhagyhagyható, 's csak ha tetemes, akkor keresünk x hez nagyobb közelítést.

Ha végre az egymásután vett y', y'', y''', értékek, lemenő következéseket adnak, a' közelités nem kétes.

217. Lagrange azt jegyzi meg hogy, ha csak egész számokat teszünk x helyibe, könnyen átugrunk némelly gyökeren a' nélkül hogy azokat észrevennénk, vagy létekről ismeretünk lenne; valóban, ha például vesszük az egyenletet

$$(x-{}^1/_3)\ (x-{}^1/_2)\ (x-3)\ (x-4)=0$$

és x helyett 0, 1, 2, 3, 's a' t. veszünk, a' gyökereken ${}^1/_3$ és ${}^1/_2$ túl megyünk nemis sejdítvén azokat, mert lenne,

$$(0-{}^1/_3)(0-{}^1/_2)(0-3)(0-4)=+{}^1/_3.{}^1/_2.3.4$$
$$(1-{}^1/_3)(1-{}^1/_2)(1-3)(1-4)=+{}^2/_3.{}^1/_2.2.3$$

egyenlő jegyű két következés.

Észrevehető hogy, $x=1$ által, a' két factor $(x-{}^1/_3)$ és $(x-{}^1/_2)$ jegye is változik, mint tagadó helyett mindkettő állítóba válik, de ha x helyett ${}^1/_3$ és ${}^1/_2$ közt álló számot teszünk $x-{}^1/_3$ egyedül változtatja jegyit, és tagadó következést ád.

Illy számra könnyen találunk, ha x helyett olly számokat teszünk, mellyek különbségei kisebbek a' két gyökér ${}^1/_3$ és ${}^1/_2$ közti különbségnél, p. o.: a' számok ${}^1/_7$, ${}^2/_7$, ${}^3/_7$, ${}^4/_7$'s a' t. jegyváltozásokat adnak.

A' következések mindenkor ugyanazon jegyüek, ha a' helybetett értékek, a' factorok jegyeit párosával változtatják. Ennek kikerülése végett, a' számok közzé, a' legkisebb határtúl a' legnagyobbig, kisebb különbséget kell tenni, mint a' legkisebb melly az adott egyenlet' való gyökerei közt lehet: ez által a' helyezés, két egymásmellet álló gyökér közzé esik, 's csak egy factor jegyét változtatja.

Itt nem szükség, a' gyökerek közti legkisebb különbség ismerése, csak azon határt ismerjük, mellynél alább nem eshetik.

Ezen határ meglelésére, alkossuk az egyenletet ugy, hogy gyökereinek négyszegei' különbségekből álljék. Legyen az egyenlet

$$z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \ldots + pz + q = 0 \ (A)$$

tegyük a' gyökerek legkisebb határa' meglelése végett $z = \frac{1}{v}$'s lesz egyenletünk

$$\frac{1}{v^n} + a\frac{1}{v^{n-1}} + b\frac{1}{v^{n-2}} + \ldots p\frac{1}{v} + q = 0$$

innen a' nevezőket elhárítván,

$$1 + av + bv^2 + \ldots + pv^{n-1} + qv^n = 0$$

's végre megforditva, 's v^n et velejárójátul megszabadítva,

$$v^n + \frac{p}{q}v^{n-1} + \ldots \frac{b}{q}v^2 + \frac{a}{q}v + \frac{1}{q} = 0$$

's ha p. o. $\frac{r}{q}$ a' velejárók legnagyobbika

$$\frac{1}{\frac{r}{q}+1} < z.$$

Ezen tekintet az állító határt mutatja, mert csak ez illeti az adott egyenlet' való gyökereit.

Ismervén a' határt

$$\frac{1}{\frac{r}{q}+1}=\frac{q}{r+q}$$

melly kisebb mint a' gyökerek különbségének négyszege, ha ennek négyszeg gyökerét vesszük, vagy legaláb a' hozzá közeleső kisebb való számot: ezen szám, mellyet k val jelöljünk, azon üreget mutatja, melly a' két helyettező szám közt áll. Alakitsuk a' két sort, 0, $+k$, $+2k$, $+3k$, $+4k$, 's a' t.

$-k$, $-2k$, $-3k$, $-4k$, 's a' t.

's ezekből csak azon számokat vesszük, mellyek a' legkisebb és legnagyobb *állító* gyökerek határai közé, 's ismet azokat, mellyek a' legkisebb 's legnagyobb *tagadó* gyökerek' határai közzé esnek.

Azon jegyváltozások, mellyek ezen számok által támadnak ha ezeket x helyibe tesszük, nyilvánítni fogják, a' való állító vagy tagadó gyökerek létét.

Legyen például az egyenlet $x^3-7x+7=0$, melly előbb már $z^3-42z^2+441z-49=0$ re vezetett. (159) itt $z=\frac{1}{v}$ tévén, 's v szerint rendelvén, az egyenlet,

$$v^3-9v^2+\frac{42}{49}v-\frac{1}{49}=0 \text{ 's ebből}$$

$$v<10,\ z>\frac{1}{10},$$

kell tehát vennünk $k \overset{=}{<} \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\left(k \text{ vagy} = \frac{1}{\sqrt{10}}\right.$, vagy kisebbre mint $\left.\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

Eleget teszünk, ka $k = {}^1/_4$, vagy ugy is ha $k = {}^1/_3$, mert 9 et tévén x helyibe, állító következést találunk, melly $v$nek nagyobb értékével csak nőhet v^3 és $9v^2$ pedig majdnem semmivé válnak 's elhagyhatók, $\frac{42}{49}v$ pedig $> \frac{1}{49}$.

Az adott egyenlet' $x^3 - 7x + 7 = 0$ állító gyökereinek legnagyobb határa $+8$, 's tagadóinak -8, tehetjük tehát x helyett a' számokat,

$$0,\ {}^1/_3,\ {}^2/_3,\ {}^3/_3,\ {}^4/_3 \ldots {}^{24}/_3$$
$$-{}^1/_3,\ -{}^2/_3,\ -{}^3/_3.\ -{}^4/_3 \ldots\ -{}^{24}/_3.$$

A' törteket pedig elkerülhetjük, ha $x = \frac{x'}{3}$ veszük mert ekkor x' értékeinek különbségei, háromszorosai x értékei különbségüknek, 's következésképp az egységet felülhaladják; és ekkor csak

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4 \ldots .\ 24$$
$$-1,\ -2,\ -3,\ -4 \ldots -24$$

lesz teendő az egyenletben

$$x'^3 - 63x' + 189 = 0.$$

Itt a' következések jegyei változnak, $+4$ és $+5$, $+5$ és $+6$, -9 és -10 között, ugy hogy az állító értékek

$$x' > 4 \text{ és } < 5 \text{ hol } x > {}^4/_3 \text{ és } < {}^5/_3$$
$$x' > 5 \text{ és } < 6 \text{ „ } x > {}^5/_3 \text{ és } < {}^6/_3$$

és x' tagadó értéke —9 és —10 közé esvén, lesz x értéke $-\frac{9}{3}$ és $-\frac{10}{3}$ között. Ismervén igy az egyenlet' gyökereit közel $^1/_3$ hoz, az elébbi mível̃et szerint inkáb inkáb közeledhetünk azokhoz.

Ha az egyenletben, a' velejárók tetemes nagy számok, helyes az egyenletet másba változtatni, 's ez által a' velejárókat szorosabb határok közzé vinni.

Legyen például egyenletünk:

$$x^4-80x^3+1998x^2-14937x+5000=0$$

ha x helyett $10z$ et teszünk, lesz a' változtatott egyenlet

$$z^4-8z^3+19{\cdot}98z^2-14{\cdot}937z+0{\cdot}5=0,$$

's ha az egész számokkal megelégszünk, írjuk,

$$z^4-8z^3+20z^2-15z+0{\cdot}5=0.$$

Baj nélkül megtaláljuk, hogy z két való értéke 0 és 1, 1 és 2 közt áll, tehát xé 0 és 10, 10 és 20 közt, de ez csak kijelölt nem pedig bíztosított érték, mert meglehet, hogy a' velejárókon történt legkisebb változás is már, a' gyökereket képzetiekké teszi, ha eléb ezek valók voltak, 's megfordítva.

Lagrange, az egymásutánni helyettezéseknek olly alakot adott, melly azonnal minden míveletet megismerteti mennyire közelítünk az igazi gyökérhez 's nem is kivánja hogy, legaláb tizedes részei meg- legyenek.

Jelöljük a val a' gyökér alatt lévő legközelebbi egész számot, így ezt csak valamelly törtel kell nagyobbítni hogy valódí gyökerünket megleljük, vagyis lesz $x = a + \frac{1}{y}$.

A' változtatott egyenletnek, bizonyosan lesz egy, az egységnél nagyobb gyökere, 's ha ezen talált gyökérhez legközelebb álló egész számot b nek nevezzük, lesz második közelítésünkre, $x = a + \frac{1}{b}$.

De itt b ugyan az y ra nézve, mi volt a $x$re nézve és az y egyenletbe $y = b + \frac{1}{y'}$ lehet tenni, hol y' szükségképen nagyobb az egységnél; c nek nevezvén továbbá az y' gyökere alatt lévő legközelebbi egész számot, lesz

$$y = b + \frac{1}{c} = \frac{bc+1}{c}$$

's ezen értéket x helyibe tévén,

$$x = a + \frac{c}{bc+1}$$

mint harmadik közelitő értéke x nek.

Ebből következik a' negyedik ha $y' = c + \frac{1}{y''}$ vesszük, mert ha d a' legközelebbi egészszám y'' alatt, lesz

$$y' = c + \frac{1}{d} = \frac{cd+1}{d} \text{ 's innen}$$

$$y = b + \frac{d}{cd+1} = \frac{bcd+d+b}{cd+1} \text{ és}$$

$$x = a + \frac{cd+1}{bcd+d+b}, \text{ 's így tovább.}$$

Alkalmazzuk ezt az egyenletre

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Láttuk hogy legkisebb állító gyökere $^4/_3$ és $^5/_3$ közt az az 1 és 2 közt van, tegyük $x = 1 + \frac{1}{y}$'s jön $\quad y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0.$

Ebben az állító gyökerek' határa 5, helyettezvén egymás után 0, 1, 2, 3, 4, y ért, elismerjük, hogy két az egységnél nagyobb gyökere van, egyike 1 és 2, másika 2 és 3 közt, tehát

$$x = 1 + {}^1/_1 \text{ és } x = 1 + {}^1/_2 \text{ vagy } x = 2 \text{ és } x = {}^3/_2.$$

A' két érték megfelel azoknak, mellyeket $^6/_3$ és $^5/_3$, $^5/_3$ és $^4/_3$ közt találtunk, 's az egységgel nem különböznek tőllük.

Tovább menvén, legyen $y = 1 + \frac{1}{y'}$'s lesz

$$y'^3 - 2y'^2 - y' + 1 = 0.$$

Ebben csak egy gyökér nagyobb az egységnél 2 és 3 közt, 's ád

$$y = 1 + {}^1/_2 = {}^3/_2, \quad x = 1 + {}^2/_3 = {}^5/_3.$$

Tegyük fel továbbá $y' = 2 + \frac{1}{y''}$'s jön

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0$$

hol y'' 4 és 5 közt van; vegyük 4 et mint kisebbiket, lesz,

$$y' = 2 + {}^1/_4, \quad y = 1 + {}^4/_9 = \frac{13}{9}, \quad x = 1 + {}^9/_{13} = \frac{22}{13}$$

Könnyű lesz a' míveletet fojtatni

$$y'' = 4 + \frac{1}{y'''} \text{ tévén.}$$

Vissza térvén x másik értékéhez melly $^3/_2$ volt az első közelítéssel és $y=2$ nak megfelel, vegyük $y=2+\frac{1}{y'}$, ezt az egyenletbe tévén 's a' jegyeket megforditván, hogy az első tag állító legyen, jön

$$y'^3+y'^2-2y'-1=0$$

és itt is csak egy nagyobb gyökér van az egységnél 1 és 2 közt; legyen

$$y'=1 \text{ 's jön } y=3 \text{ és } x=^4/_3$$

ha ismet $y'=1+\frac{1}{y''}$, jön, $y''^3-3y''^2-4y''-1=0$'s itt y'', 4 és 5 közt áll, miből következik

$$y'=^5/_4,\ y=^{14}/_6 \text{ és } x=\frac{19}{14}$$

továb menvén, tehetjük $y''=4+\frac{1}{y'''}$'s a' t.

Az egyenletnek $x^3-7x+7=0$ tagadó gyökere is van, -3 és -4 közt. Közelítvén ehez, legyen

$$x=-3-\frac{1}{y} \text{ 's ez adja}$$

$$y^3-20y^2-9y-1=0 \text{ hol } y>20 \text{ és } <21,$$

ebből következik $x=-3-^1/_{20}=-\frac{61}{20}$.

Folytatván a' keresést, legyen $y=20+\frac{1}{y'}$'s a' t. 's mind inkáb tökéletesben találjuk x értékét.

A' különböző helyettesek y, y', y'', y''' 's a' t. soha sem foglalnak több gyökeret egynél melly nagyobb lenne az egységnél, míg ugyan azon határ (a és $a+1$) közt, több gyökér nem áll; de ha ezen környülállás helyt tálal, akkor mint láttuk, y, y' y''

's a' t. egyenletekben, több, az egységnél nagyobb értéket találunk.

Gyakorolhatja magát a' tanuló az egyenleten

$$x^3-2x-5=0$$

mellynek gyökere 2 és 3 közzé esik, 's találni fog y, y', y'' 's a' t. értékeinek

10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12 's a' t.

és x közelített értékeinek

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},$$

$$\frac{16415}{7837}.$$

RAGASZTÉK.

PÉNZBELI KAMATOK.

1 §. Egyszerű kamatok.

169. Ha egy forint évi kamatját k val jelöljük (hol lásd arithmetika 229) k tudjuk, a' megnevezett procentónak századrésze), lesz a' kamat egyév után k, két év után $2k$, három után $3k$ és közönségesen n év után nk. Az A tőkének kamatja tehát n év mulva Ank.

Ha eszerint K az öszves kamatokat jelenti n év mulva, M pedig a' tőkét kamatjaival együtt lesz

$$K = Ank. \quad (1) \quad \text{és}$$

$$M = A + Ank = A(1 + nk) \quad (2).$$

A' négy mennyiség közül hármat ismervén, az egyenletekből a' negyediket megtaláljuk és

$$n = \frac{K}{kA} \quad (3)$$

$$A = \frac{K}{nk} \quad (4).$$

A' pénzt és időt szükséges, a' tizedes törtek' segédével egyneműre vinni, 's ekkor bármelly kérdésre egyszerű a' felelet.

2 §. Előre váltás.

170. Ha M, felmente n év alatt A nak, nyilván hogy n év mulva fizetendő M nek mostani értéke A.

Második egyenletünkből pedig $A=\frac{M}{1+nk}$

Á' jövendő és mostani érték közti különbség a' disconto 's ez

$$D=M-A.=M-\frac{M}{1+nk}=\frac{Mnk}{1+nk}$$

*K*öz megegyezés szerint inkáb a' fizetendő tökétől számítatik a' kamat ezen discont levonása helyett: és a' fizető hasznot talál abban, hogy a' mostani érték helyett csak a' fizetendő tőke kamatjait számitja, a' hitelező is megegyez ebben, nagyobb biztosság okáért.

Tegyük fel hogy A tartozik B nek $n_{,}$ év mulva fizetendő $P_{,}$ tökével, és ismét n_2 mulva fizetendő Q_2 tőkével mostantól fogva; kérdés mikor fizesse le A mindkét tőkét hogy egyik rész se károsuljék?

Legyen a' fizetétés ideje n.

Tehát $(n-n_{,})$ azon idő melly alatt A használja $P_{,}$ tőkét, az az nyeresége

$$P_{,}(n-n_{,})k$$

de minthogy a' P_2 tőkét $(n-n_{,})$ évvel korábban fizeti mintsem tartoznék, tehát elveszti ennek discontját melly

$$\frac{P_2(n_2-n)k}{1+(n_2-n)k}.$$

Hogy tehát sem ne veszítsen sem ne nyerjen, szükséges hogy ezen két kifejezés egyenlő legyen.

Ha nyereségét és veszteségét egyenlítjük, elosztván mindkét részt k val, lesz

$$P_1(n-n_1)=\frac{P_2(n_2-n)}{1+(n_2-n)k}$$

's ez másodrendű egyenletté válik.

171. De a' közönséges tekintet szerint A nem a' discontot hanem csak P_2 nek kamatját fizeti (n_2-n) év alatt vagy $P_2(n_2-n)k$ t; 's ezen esetben

$$P_1(n-n_1)=P_2(n_2-n) \text{ 's ebből}$$

$$n=\frac{P_1n_1+P_2n_2}{P_1+P_2}$$

172. Szinte így ha ezen n időre viszünk több és különböző időkre fizetendő tőkét, 's jelöljük P_1, P_2, P_3, P_4, 's a' t. az időket pedig n_1, n_2, n_3, n_4, 's a' t. lesz egyenletünk

$$n=\frac{P_1n_1+P_2n_2+P_3n_3+P_4n_4+\text{ 's a' t.}}{P_1+P_2+P_3+P_4+\text{ 's a' t.}}$$

melly kifejezés szóval:

adjuk öszve minden különös tőke származatját tartozási idejivel, 's osszuk el az adósságok' öszvesével.

3 §. Öszvetett kamatok.

173. Egy forint kamatja egy év mulva $(1+k)$
két év mulva $(1+k)^2$
három mulva $(1+k)^3$
és n év mulva $(1+k)^n$.

Ha tőkénket *T* vel jelöljük, *K* val pedig egy forint értékét egy év mulva, lesznek felsőbb kifejezéseink, ha *M* a' kamatjaival nevekedett tőkét jelöli,

első év után $M = TK$
második után $M = TK^2$
harmadik $M = TK^3$ és közönséges
n év mulva $M = TK^n$ (1).

174. Eddigi tekinteteink szerint *K* mutatóji egész számok vagy is a' kamatoktól csak egy egész év lefojta után számitatik ismét kamat, és (1) egyenletből következik $M - T$ vagy is a' tőke nővése ha ezt *N* nel jelöljük

$$N = TK^n - T = T(K^n - 1) \quad (2).$$

De könnyen meggyőződhetünk a' felől hogy *n* bármelly szám tört vagy tagadó lehet, 's a' szerint fog *M* is változni, mert *n* itt fojtatólag növeszti a' tőkét szakadatlanul bármelly értéke legyen.

Ha p. o.: *K* egyévi kamat legyen x hat holnapi 's következik

$$x^2 = K \text{ vagy } x = \sqrt{K} = K^{1/2}$$

's tökénk félév mulva $TK^{1/2}$, melly kifejezésre könnyen jutunk *n* helyett $^1/_2$ et tevén.

Ha ismét egy *m* dik részét tekintjük az évnek, lesz szinte $x = \frac{1}{m}$ része az évnek, és így a' kamat x^2 $\left(\frac{2}{m}\right)$ évrészre, x^3, $\left(\frac{3}{m}\right)$ évrészre 's a' t., hol

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ \ldots\ldots K$$

fojó sora $m + 1$ tagnak és

$$K = 1 \times x^m \quad \text{és} \quad x = K^{\frac{1}{m}}$$

T növése tehát $K^{\frac{1}{m}}$, mellyet akkor is megtalálunk ha n helyett $\frac{1}{m}$ tesszük.

Ha hasonlóképen 2 évi növést keresünk és az évnek $\frac{1}{m}$ részét, lesz ha a' két évi $TK^2 = T_1$ ezen $\frac{1}{m}$ részre $T_2K^{\frac{1}{m}} = TK^2K^{\frac{1}{m}} = TK^{\frac{2m+1}{m}}$

Ha tehát N, értéke Tnek n év alatt mostan fizetve, valamint a' következő időre n, Tből N lesz, ugy következik az elmult időre Nből T, n év alatt, vagy ezen utolsó esetre $T = NK^n$ és

$$N = \frac{T}{K^n} = TK^{-n}.$$

Az egyenlet $N = TK^n$ négy mennyiséget foglal, 's ha közüllük három ismeretes, a' negyedik megtaláltatik.

n értékét csak logarithmokkal találhatjuk 's lesz

$$\begin{aligned} \log N &= \log TK^n \\ &= \log T + \log K^n \\ &= \log T + n \log K \quad (1) \end{aligned}$$

és
$$n = \frac{\log N - \log T}{\log K} \quad (2).$$

175. Ha p. o.: minden évben járul az eredeti tőkéhez valamelly új tőke, 's mindegyiktől számitatik kamat kamattól n évig; legyenek a' tőkék sorjában, a, b, c, $d \ldots m$, hol m az utolsó év elött tétetett le, az az csak egy évig kamatoz, lesznek sorjában

a' tőkék kamatjaikkal együtt éredeti töke T által n év alatt, $N = T(1 + k)^n$ vagy ha elébbi nagy $K = (1 + k)$ marad

$$N = TK^n$$

hozzá jön	a 's lesz	$n-1$ év alatt	$=aK^{n-1}$
szinte	b	$n-2$ év alatt	$=bK^{n-2}$
„	c	$n-3$ év alatt	$=bK^{n-3}$
„	d	$n-4$ év alatt	$=dK^{n-4}$
és végre	m	$n-n+1=1$ év alatt	$=mK,$

és valamennyi külön tőke öszvese adja, a' keresett n év alatt nevekedett tőkét melly legyen N, és

$$N_1 = TK^n + aK^{n-1} + bK^{n-2} + cK^{n-3} + dK^{n-4} + \ldots \\ \ldots + mK,$$

hol minden tagot külön számitva öszve kell adnunk.

Ha a' tőkék mindegyik évben egyenlők, az az

$$T = a = b = c = \text{'s a' t.} = m$$

ekkor kifejezésünk egyszerű, és

$$N_1 = aK^n + aK^{n-1} + aK^{n-2} + aK^{n-3} + \ldots \\ \ldots + aK^2 + aK$$

melly geometriai sornak öszvese, tudjuk

$$N_1 = \frac{aK^{n+1} - aK}{K-1}$$

vagy ha K értékét vissza adjuk $K=(1+k)$

$$N_1 = \frac{a(1+k)^{n+1} - a(1+k)}{k}$$

$$= \frac{a(1+k)\,[(1+k)^n - 1]}{k}.$$

4 §. Annuitások.

176. Ha valamelly tőkét olly feltétellel veszünk fel, hogy bizonyos évek lefojta után, minden évben a' tőke egyrészét tevén le, az egész tőkét kamatjaival vissza fizetjük, ezen kölcsönt és rendes fizetést annuitásnak nevezzük. Az annuitások tehát ellenkező esetét mutatják eddigi visgálatinknak.

Tegyük fel hogy az évi fizetés a, valamint ennek értéke az n előtti évben,

$$aK^{n-1},\ n-2 \text{ évben},\ aK^{n-2}$$

's így lefelé a' második év után aK^2, és az első után aK, lesz az öszves fizetés

$$a+aK+aK^2+aK^3+\ldots.+aK^{n-2}+aK^{n-1}$$

vagy megforditva, melly részeknek öszvesen egyenlőknek kell lenniök az eredeti tőkével, ezt n évig hagyván a' kölcsönöző kezei közt, és

$$TK^n=aK^{n-1}+aK^{n-2}+aK^{n-3}+\ldots+aK+a$$

$$TK^n=N=\frac{aK^n-a}{K-1}=\frac{a[(1+k)^n-1]}{k}$$

hol kamat kamattól számítatott.

177. De mivel ezen kerdéseknél mindenkor csak egyszerű kamat vétetik, lesznek a' fizetések sorjában

1-ső év után a
2-dik után $a+aK$
3-dik után $a+2aK$
4-dik után $a+3aK$
. . . .
n-dikben után $a+(n-1)aK$

's öszvesük

$$na+ak(1+2+3+4\ldots n-1)$$

a' korlátközti arithmetikai sor öszvese

$$=(2+(n-2))\frac{n-1}{2}=n.\frac{n-1}{2}$$

és az öszves fizetés n év alatt N

$$N=na+ak.n.\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

P. o.: kellene 100 forintot minden évben fizetni, de ez elmulasztatott; kérdés mennyit kell húsz év mulva egyszerre fizetni ha a' kamat 5 száztól?

Itt $a=100$, $k=\cdot05$, $n=20$ és

$$n.\frac{n-1}{2}=190,\ ak=5 \text{ és}$$

$$n.\frac{n-1}{2}ak=950.$$

$N=2000+950=2950$ forint fizetendő 20 év mulva.

178. Egyszerű kamatot számítván, valamelly annuitás mostani értékét következökép tálaljuk meg.

Ha, a egy év mulva fizentendő, mostani értéke $\frac{a}{1+k}$

a két év mulva fizetendő, ér most $\frac{a}{1+2k}$

a három év mulva fizetendő, $\frac{a}{1+3k}$ mostani értéke, és

a, n év mulva fizetendő, ér most $\frac{a}{1+nk}$

ezen értékek öszvese az, mit ér a első második, harmadik 's a' t. n dik év után, vagyis a forint annuitása n évre fizetve rendesen. Ha ezen mostani érték T, lesz

$$T=a\left(\frac{1}{1+k}+\frac{1}{1+2k}+\frac{1}{1+3k}+\ldots+\frac{1}{1+nk}\right)(1)$$

ha az első év helyett valamelly más évben kezdődik a' fizetés p. o. m dik évben 's fojtattatik n évig hasonlóul lesz

$$T=a\left(\frac{1}{1+mk}+\frac{1}{1+(m+1)k}+\frac{1}{1+(m+2)k}+\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{1+(m+n)k}\right)(2)$$

Példa.

Mennyit ér most 50 f. annuitása, három év alatt fizetvén azt, egyszerű kamattal 3at száztól véve?

$$P=50\left(\frac{1}{1+k}+\frac{1}{1+2k}+\frac{1}{1+3k}\right)$$

Ha az egyes tagokat elosztjuk, lesz

$$\frac{1}{1+k}=1-k+k^2-k^3+\ldots$$

$$\frac{1}{1+2k}=1-2k+4k^2-8k^3+\ldots$$

$$\frac{1}{1+3k}=1-3k+9k^2+27k^3+\ldots$$

hol k harmadik emelése (mint $k=0{\cdot}03$) olly csekély hogy elhagyathatik; lesz a' többinek öszvese

$3-6k+14k^2$ hol k értékét vissza adván

lesz $3-6\times0{\cdot}03+14\times(0{\cdot}03)^2=2{\cdot}8212$

és $N=50\times2.8212=141$ f 06.

179. Több író azon mennyiséget veszi valamelly bizonyos évek alatt fizetendő annuitás' mostani érté-

kéül, melly az évenkénti fizetések öszvese. De ezen öszves nem az *annuitás*' mostani értéke, hanem az adott évek alatt *nevekedett annuitásé*, melly (177)

$$N=na+ak.n\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Ha pedig az annuitás mostani értéke N_1

mivel $$N_1(1+nk)=na+ak\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$N_1=\frac{an+ak\left(\frac{n-1}{2}\right)}{1+nk}$$

melly kifejezés különbözik N mostani értékétől.

Ezen két kifejezés nem is lehet egyenlő, mint azt az egyszerű kamatok természete magával hozza. Oka az egyenetlenségnek könnyen megmutatható.

Tegyük fel hogy r mostani értéke m forintnak melly m forint egy év mulva lenne fizetendő, tehát

$$r=\frac{m}{1+k}$$

tegyük fel továbbá hogy m a' második évben nem fizettetik, tehát kamatjaival nőni fog 's lesz $m(1+k)$.

De r két év mulva $r(1+2k)$ lesz, vagy $\frac{m(1+2k)}{1+k}$ melly m nőtt értékétől különbözik, 's azért mert rk, r nek első évi kamatja második évben nincs ismét kamattal terhelve; és azért egyik esetben m, másikban csak r terheltetett kamattal. Ezért r, melly m nek mostani értéke, nem lehet m bizonyos évek alatti nővésének mostani értéke.

Az örökidőre tartó annuitás mostani értéke meglelésére N és N_1 ben n végtelen, és lesz p. o.

$$N=a\left(\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+2r}+\frac{1}{1+3r}+\frac{1}{1+4r}+\ldots\right)$$

melly sor maga is végtelen; ez eléggé bizonyitja hogy az illy kérdésnek haszonvéte nem lehet.

180. Ha K ismét 1 forint értéke egy év mulva, megtaláljuk valamelly annuitás értékét kamatot kamattól számítva bármelly év után, megjegyezvén hogy; minden tartozás áll, az egyesévi fizetések mennyiségéből, hozzájok adván az ezt megelőző évre szólló nevekedést, vagy is lesz a' tartozás

első évben .... a
2-dikban ...... $a+aK$
3-dikban ...... $a+aK+aK^2$
4-dikben ...... $a+aK+aK^2+aK^3$
. . . .
n-dikben ...... $a+aK+aK^2+aK^3+aK^4\ldots+$
$+aK^{n-1}$

's n évalatt öszvesen, a' nevekedés

$$a(1+K+K^2+K^3+\ldots K^{n-1})$$

és a' korlátban álló geometriai sor' öszvese

$$\frac{K^n-1}{K-1} \text{ és}$$

$$N=a\left(\frac{K^n-1}{K-1}\right) \qquad (1)$$

181. Ha pedig az öszvetett kamati annuitás mostani értékét keressük, lesz egy év mulva fizetendő a nak mostani értéke $\frac{a}{K}$, két évmulvainak $\frac{a}{K^2}$'s a't.

's n év mulva fizetendő a nak mostani értéke $\frac{a}{K^n}$,
's ebből n év alatt fizetendő annuitás mostani értéke

$$\frac{a}{K}+\frac{a}{K^2}+\frac{a}{K^3}+\ldots+\frac{a}{K^n}$$

Megtartván N_1 et mostani értéknek, lesz

$$N_1=\frac{a}{K}\left(1+\frac{1}{K}+\frac{1}{K^2}+\ldots+\frac{1}{K^{n-1}}\right) \quad (2)$$

és a' korlátok közti mennyiség n tagja azon geometriai sornak mellynek factora $=\frac{1}{K}$, első tagja $=1$ tehát, öszvese $\dfrac{1-\frac{1}{K^n}}{1-\frac{1}{K}}$ és

$$N_1=a\frac{\left(1-\frac{1}{K^n}\right)}{K-1}$$

Az n év alatt *nevekedett* N annuitásnak mostaní értéke $\frac{N}{K^n}$, 's ha (1) alatt talált értékét N nek ide tesszük lesz ismét

$$N=a.\frac{1-\frac{1}{K^n}}{K-1}$$

ugyan az mint az annuitás' mostani értéke, de láttuk különböző ha csak egyszerű kamatokat számítunk.

Ha az első év helyett valamelly m dik évben kezdődik a' fizetés, szinte így lesz sorunk

$$\frac{a}{K^m}+\frac{a}{K^{m+1}}+\frac{a}{K^{m+2}}+\ldots\ldots\frac{a}{K^{m+n-1}}$$

vagy $$\frac{a}{K^m}\left(1+\frac{1}{K}+\frac{1}{K^2}+\ldots+\frac{1}{K^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{a}{K^m}\times\frac{1-\frac{1}{K^n}}{1-\frac{1}{K}}$$

$$=\frac{a}{K^{m-1}}\times\frac{1-\frac{1}{K^n}}{K-1} \qquad (3)$$

Ha az annuitás örökkétartó, a' sor végnélküli és

$$N=\frac{a}{K}\left(1+\frac{1}{K}+\frac{1}{K^2}+\ldots \text{ végnélkül}\right)$$

vagy $$N=\frac{a}{K}\times\frac{1}{1-\frac{1}{K}}=\frac{a}{K-1}\ldots \qquad (4)$$

hasonlóképen, ha a' fizetés m év mulva kezdődik 's ezután tart örökké, mostani értéke

$$\frac{a}{K^{m-1}}\times\frac{1}{K-1}$$

Kérdés, a' kamat $3^2/_5$ száztól, melly töke kivántatik 300 forint évi jövedelemhez?

$$3^2/_5=3{\cdot}4 \text{ és } K=1{\cdot}034,\ K-1=\cdot034$$

(4) szerint $N=\dfrac{a}{K-1}=\dfrac{300}{\cdot034}=\dfrac{300000}{34}=8825$ f közel

Az első tábla azt mutatja, hogy mennyíre nő 1 forint, kamatot kamattól számitva, bizonyos évek mulva, 4, 5, 6 és 7tet vevén száztól.

Mindezen számok tehát sokszorozói bármelly adott pénzmennyiségnek. P. o.

1) Ha kérdjük mennyire nő 6750 forint 14 év alatt 5töt száztól, kamotot kamattól számitva; a' 14 év után, az 5 % ók sorában áll 1·979931 és a' felelet 6750×1·968831 = 13364· 53 f.

Ha ezen tőkének csak öszvetett kamatja kivántatik ez lesz 13364·53 — 6750 = 6614·53.

2) Mennyire nő 8500, 23 év mulva 6 % öszvetett kamattal és mennyi a' kamat?

8500×3·819749=42467·867 forint
ebből a' tőkét levonván 8500
a' kamat egyedül =23967 f 876

3) Ha a' tőke növése nagyobb időre kivántatik, mínt a' táblában van (140), két vagy több olly számot kell venni mellynek öszvese adja a' kivánt évek számát, és az utánnok álló számok származata adja 1 f. értékét a' lefojt időre, p. o.

Kivántatik 500 forint értéke 75 év mulva 7 procentós öszvetett kamattal?

75=35+40 vagy 36+39 vagy 37+38
vagy 15 + 20 + 40 vagy 15 + 2.30

mint akarjuk, vegyük az első két számot 35+40 t. 's lesz a' két factor

10·6765 × 14·9744 = 159·874

és 500 forinté

$$159{\cdot}874 \times 500 = 79937 \text{ forint.}$$

4) Valamelly tőkének mostani értéke, vagy azon tőke melly valamelly adott mennyiségre rug bizonyos évek mulva, megtaláltatik ha, az adott mennyiség elosztatik azon számmal melly az évek és procentók sorában áll. p. o.

Melly tőkéből lesz 8 év mulva 5 %ra 8896 forint kamatot kamattól?

8 év 5% sorban áll 1·477455

$$\text{és } \frac{7896}{1{\cdot}477455} = 5344 \text{ f. } 20 \text{ kr} \ldots$$

a' keresett tőke.

5) 17 év mulva kellene fizetni 6 % öszvetett kamatra 16750 forintot; mit ér most a' tőke?

$$\frac{16750}{2{\cdot}992772} \text{ forintot.}$$

6) A. II. Táblában ezen növések, annuitások, procentek és idő szintigy találtatnak, hol feltétetett hogy az annuitás nem fizettetett le hanem kamatot kamattól számitva minden évben nevekedett.

P. o.: ha valakinek 1 f. annuitássát 6 évig nem fizettük, a' hetedikben kellene neki fizetnünk

7·898294 forintot 4 % re
8·142008 — 5 re
8·65402 — 7 re 's a' t.

mindezen számok sokszorozói az annuitási mennyiségnek.

A' III. Tábla végre azt mutatja mennyit kell most fizetni valamelly bizonyos évekig tartó annuitásért.

P. o. Ha 100 forint évi jövedelmet biztosítok 20 évre, kell 4% ra most 1359 fot.
6% ra „ 1146 f. 59 kr.
7% ra „ 1059 f. 24 kr. letennem.

112 szám helyibe adjuk, az 1-től — 1000 ig következő természetes számok logarithmait 10 tizedes jeggyel; a' táblának, kényesebb számításoknál hasznát vehetni.

I. TÁBLA.

1 forint' növése, kamatot kamattól számítván.

Év.	4%	5%	6%	7%
1	1 · 040000	1 · 050000	1 · 060000	1 · 07000
2	1 · 081600	1 · 102500	1 · 123600	1 · 14490
3	1 · 124864	1 · 157625	1 · 191016	1 · 22504
4	1 · 169858	1 215506	1 · 262476	1 · 31079
5	1 · 216652	1 · 276281	1 · 338225	1 · 40255
6	1 · 265319	1 · 340095	1 · 418519	1 · 50073
7	1 · 315931	1 · 407100	1 · 503630	1 · 60578
8	1 · 368569	1 · 477455	1 · 593848	1 · 71818
9	1 · 423311	1 · 551328	1 · 689478	1 · 83845
10	1 · 480244	1 · 628894	1 · 790847	1 · 96715
11	1 · 539454	1 · 710339	1 · 898298	2 · 10485
12	1 · 601032	1 · 795856	2 · 012196	2 · 25219
13	1 · 665073	1 · 885649	2 · 132928	2 · 40984
14	1 · 731676	1 · 979931	2 260903	2 · 57853
15	1 · 800943	2 · 078928	2 · 396558	2 · 75903
16	1 · 872981	2 · 182874	2 · 540351	2 · 95216
17	1 · 947900	2 · 292018	2 · 692772	3 · 15881
18	2 · 025816	2 406619	2 · 854339	3 · 37293
19	2 · 106849	2 · 526950	3 · 025599	3 · 61652
20	2 · 191123	2 · 653297	3 · 207135	3 · 86968
21	2 · 278768	2 · 785962	3 · 399563	4 · 14056
22	2 · 369918	2 · 925260	3 · 603537	4 · 43040
23	2 · 464715	3 · 071523	3 · 819749	4 · 74052
24	2 · 563304	3 · 225599	4 · 048934	5 · 07236
25	2 · 665836	3 · 386354	4 · 291870	5 · 42743
26	2 · 772469	3 · 555672	4 · 549382	5 · 80735
27	2 · 883368	3 · 733456	4 · 822345	6 · 21386
28	2 998703	3 · 920129	5 · 111686	6 · 64883
29	3 · 118651	4 · 116135	5 · 418387	7 · 11425
30	3 · 243397	4 · 421942	5 · 473491	7 · 61225
31	3 · 373133	4 538039	6 · 088100	8 · 14511
32	3 · 508058	4 · 764941	6 · 453386	8 · 71527
33	3 · 648381	5 · 003188	6 840589	9 · 32533
34	3 · 794316	5 · 253347	7 · 251025	9 · 97811
35	3 · 946088	5 · 516015	7 · 686086	10 · 6765
36	4 · 103932	5 · 791816	8 · 147252	11 · 4239
37	4 · 268089	6 · 081406	8 · 636087	12 · 2236
38	4 · 438813	6 · 385477	9 · 154252	13 · 0792
39	4 · 616365	6 · 704751	9 · 703507	13 · 9948
40	4 · 801020	7 · 039988	10 · 285717	14 · 9744

II. TÁBLA.

1 forint' annuitás növése, kamatot kamattól.

Év.	4%	5%	6%	7%
1	1 · 000000	1 · 000000	1 · 000000	1 · 00000
2	2 · 040000	2 · 050000	2 · 060000	2 · 07000
3	3 · 121600	3 · 152500	3 · 183600	3 · 21490
4	4 · 246464	4 · 310125	4 · 374616	4 · 43994
5	5 · 416322	5 · 525631	5 · 637092	5 · 75073
6	6 · 632975	6 · 801912	6 · 975318	7 · 15329
7	7 · 798294	8 · 142008	8 · 393837	8 · 65402
8	9 · 214226	9 · 549108	9 · 897467	10 · 2598
9	10 · 582795	11 · 026564	11 · 491315	11 · 9779
10	12 · 006107	12 · 577892	13 · 180794	13 · 8164
11	13 · 486351	14 · 206787	14 · 791642	15 · 7836
12	15 · 025805	15 · 917126	16 · 869941	17 · 8884
13	16 · 626837	17 · 712982	18 · 882137	20 · 1406
14	18 · 291911	19 · 598631	21 · 015065	22 · 5504
15	20 · 023580	21 · 578563	23 · 275969	25 · 1290
16	21 · 824531	23 · 657491	25 · 672528	27 · 8880
17	23 · 697512	25 · 840366	28 · 212879	31 · 8402
18	25 · 645412	28 · 132384	30 · 905652	33 · 9990
19	27 · 671229	30 · 539003	33 · 759991	37 · 3789
20	29 · 778078	33 · 065954	36 · 785591	40 · 9954
21	31 · 969201	35 · 719251	39 · 992726	44 · 8651
22	34 · 247969	38 · 505214	43 · 392290	49 · 0057
23	36 · 617888	41 · 430475	46 · 995827	53 · 4361
24	39 · 082604	44 · 501998	50 · 815577	58 · 1766
25	41 · 645908	47 · 727098	54 · 864512	63 · 2490
26	44 · 311744	51 · 113453	59 · 156382	68 · 6764
27	47 · 084214	54 · 663126	63 · 705965	74 · 4838
28	49 · 967582	58 · 402582	68 · 528111	80 · 6976
29	52 · 966286	62 · 322711	73 · 639798	87 · 3465
30	56 · 084937	66 · 438847	79 · 058186	94 · 4607
31	59 · 328355	70 · 760789	84 · 801677	102 · 073
32	62 · 701468	75 · 298829	90 · 889778	110 · 218
33	66 · 209527	80 · 063770	97 · 343164	118 · 933
34	69 · 857908	85 · 066959	104 · 183754	128 · 258
35	73 · 652224	90 · 320307	111 · 434779	138 · 236
36	77 · 598312	95 · 838322	119 · 120866	148 · 913
37	81 · 702246	101 · 628138	127 · 268118	160 · 337
38	85 · 970336	107 · 608545	135 · 904205	172 · 561
39	90 · 409149	114 · 095023	145 · 058458	185 · 640
40	95 · 025515	120 · 799774	154 · 761965	199 · 635

III. TÁBLA.

Mostani értéke egy forint' annuitásnak valamelly időre.

Év.	4%	5%	6%	7%
1	0 · 961539	0 · 952381	0 · 943396	0 · 9345
2	1 · 886095	1 · 859410	1 · 833393	1 · 8080
3	2 · 775901	2 · 723248	2 · 673012	2 · 6243
4	3 · 629895	3 · 545951	3 · 465106	3 · 3872
5	4 · 451822	4 · 329477	4 212364	4 · 1001
6	5 · 242137	5 · 075692	4 · 917324	4 · 7665
7	6 · 002055	5 · 786373	5 · 582382	5 · 3892
8	6 · 732745	6 · 463213	6 · 209794	5 · 9712
9	7 · 435331	7 · 107822	6 · 801692	6 · 5152
10	8 · 110896	7 · 721735	7 · 360087	7 · 0235
11	8 · 760476	8 · 306414	7 · 886875	7 · 4986
12	9 · 385073	8 · 863252	8 · 383844	7 · 9426
13	9 · 985647	9 · 393573	8 · 852683	8 · 3576
14	10 · 563122	9 · 898641	9 · 294984	8 · 7454
15	11 · 118387	10 · 379958	9 · 712249	9 · 1079
16	11 · 652295	10 · 837770	10 · 105895	9 · 4466
17	12 · 165668	11 · 274066	10 · 477260	9 · 7632
18	12 · 659296	11 · 989587	10 · 827604	10 · 059
19	13 · 133939	12 · 085311	11 · 158117	10 · 335
20	13 · 590325	12 · 462210	11 · 469921	10 · 594
21	14 · 029159	12 · 821153	11 · 764077	10 · 585
22	14 · 451114	13 · 163003	12 · 041582	11 · 061
23	14 · 856841	13 · 488574	12 · 303379	11 · 273
24	15 · 246962	13 · 798942	12 550358	11 · 469
25	15 · 622079	14 · 093945	12 · 783356	11 · 653
26	15 · 982768	14 · 375185	13 · 003166	11 · 825
27	16 · 329584	14 · 643034	13 · 210534	11 · 986
28	16 · 663062	14 · 898127	13 · 406164	12 · 137
29	16 · 983712	15 · 141074	13 · 590721	12 · 277
30	17 · 292032	15 · 372451	13 · 764831	12 · 409
31	17 · 588492	15 · 592810	13 · 929086	12 · 531
32	17 · 873550	15 802677	14 · 084044	12 · 646
33	18 · 147644	16 · 002549	14 · 230230	12 · 753
34	18 · 411196	16 · 192904	14 · 368141	12 · 854
35	18 · 664612	16 · 374194	14 · 498247	12 · 947
36	18 908280	16 · 546852	14 · 620987	13 · 035
37	19 · 142577	16 · 711287	14 · 736780	13 · 117
38	19 · 367863	16 · 867893	14 · 846019	13 · 193
39	19 584483	17 · 017041	14 · 949075	13 · 264
40	19 · 792772	17 · 159086	15 · 046297	13 · 331

Sz	Logar.	Sz.	Logar.	Sz	Logar.
1	0·00000 00000	41	1·61278 38567	81	1·90848 50189
2	0·30102 99957	42	1·62324 92904	82	1·91381 38524
3	0·47712 12547	43	1·63346 84556	83	1·91907 80924
4	0·60205 99913	44	1·64345 26765	84	1·92427 92861
5	0·69897 00043	45	1·65321 25138	85	1·92941 89257
6	0·77815 12504	46	1·66275 78317	86	1·93449 84512
7	0·84509 80400	47	1·67209 78579	87	1·93951 92526
8	0·90308 99870	48	1·68124 12374	88	1·94448 26722
9	0·95424 25094	49	1·69019 60800	89	1·94939 00066
10	1·00000 00000	50	1·69897 00043	90	1·95424 25094
11	1·04139 26851	51	1·70757 01761	91	1·95904 13923
12	1·07918 12460	52	1·71600 33436	92	1·96378 78273
13	1·11394 33523	53	1·72427 58696	93	1·96848 29486
14	1·14612 80357	54	1·73239 37598	94	1·97312 78536
15	1·17609 12591	55	1·74036 26895	95	1·97772 36053
16	1·20411 99827	56	1·74818 80270	96	1·98227 12330
17	1·23044 89214	57	1·75587 48557	97	1·98677 17343
18	1·25527 25051	58	1·76342 79936	98	1·99122 60757
19	1·27875 36010	59	1·77085 20116	99	1·99563 51946
20	1·30102 99957	60	1·77815 12504	100	2·00000 00000
21	1·32221 92947	61	1·78532 98350	101	2·00432 13738
22	1·34242 26808	62	1·79239 16895	102	2·00860 01718
23	1·36172 78360	63	1·79934 05495	103	2·01283 72247
24	1·38021 12417	64	1·80617 99740	104	2·01703 33393
25	1·39794 00087	65	1·81291 33566	105	2·02118 92991
26	1·41497 33480	66	1·81954 39355	106	2·02530 58653
27	1·43136 37642	67	1·82607 48027	107	2·02938 37777
28	1·44715 80313	68	1·83250 89127	108	2·03342 37555
29	1·46239 79979	69	1·83884 90907	109	2·03742 64979
30	1·47712 12547	70	1·84509 80400	110	2·04139 26852
31	1·49136 16938	71	1·85125 83487	111	2·04532 29788
32	1·50514 99783	72	1·85733 24964	112	2·04921 80227
33	1·51851 39399	73	1·86332 28601	113	2·05307 84435
34	1·53147 89170	74	1·86923 17197	114	2·05690 48513
35	1·54406 80444	75	1·87506 12634	115	2·06069 78404
36	1·55630 25008	76	1·88081 35923	116	2·06445 79892
37	1·56820 17241	77	1·88649 07252	117	2·06818 58617
38	1·57978 35966	78	1·89209 46027	118	2·07188 20073
39	1·59106 46070	79	1·89762 70913	119	2·07554 69614
40	1·60205 99913	80	1·90308 99870	120	2·07918 12460

A' TERMÉSZETES SZÁMOK LOGARITHMAI.

Sz.	Logar.	Sz.	Logar.	Sz.	Logar.
121	2·08278 53703	161	2·20682 58760	201	2·30319 60574
122	2·08635 98307	162	2·20951 50145	202	2·30535 13694
123	2·08990 51114	163	2·21218 76044	203	2·30749 60379
124	2·09342 16852	164	2·21484 38480	204	2·30963 01674
125	2·09691 00130	165	2·21748 39442	205	2·31175 38611
126	2·10037 05451	166	2·22010 80880	206	2·31386 72204
127	2·10380 37209	167	2·22271 64711	207	2·31597 03455
128	2·10720 99696	168	2·22530 92817	208	2·31806 33350
129	2·11058 97103	169	2·22788 67046	209	2·32014 62861
130	2·11394 33523	170	2·23044 89214	210	2·32221 92947
131	2·11727 12957	171	2·23299 61104	211	2·32428 24553
132	2·12057 39312	172	2·23552 84469	212	2·32633 58609
133	2·12385 16410	173	2·23804 61031	213	2·32837 96034
134	2·12710 47984	174	2·24054 92483	214	2·33041 37733
135	2·13033 37685	175	2·24303 80487	215	2·33243 84599
136	2·13353 89084	176	2·24551 26678	216	2·33445 37512
137	2·13672 05672	177	2·24797 32664	217	2·33645 97338
138	2·13987 90864	178	2·25042 00023	218	2·33845 64936
139	2·14301 48003	179	2·25285 30310	219	2·34044 41148
140	2·14612 80357	180	2·25527 25051	220	2·34242 26808
141	2·14921 91127	181	2·25767 85749	221	2·34439 22737
142	2·15228 83444	182	2·26007 13880	222	2·34635 29745
143	2·15533 60375	183	2·26245 10897	223	2·34830 48630
144	2·15836 24921	184	2·26481 78230	224	2·35024 80183
145	2·16136 80022	185	2·26717 17284	225	2·35218 25181
146	2·16435 28558	186	2·26951 29442	226	2·35410 84391
147	2·16731 73347	187	2·27184 16065	227	2·35602 58572
148	2·17026 17154	188	2·27415 78493	228	2·35793 48470
149	2·17318 62684	189	2·27646 18042	229	2·35983 54823
150	2·17609 12591	190	2·27875 36010	230	2·36172 78360
151	2·17897 69473	191	2·28103 33672	231	2·36361 19799
152	2·18184 35879	192	2·28330 12287	232	2·36548 79849
153	2·18469 14308	193	2·28555 73090	233	2·36735 59210
154	2·18752 07208	194	2·28780 17299	234	2·36921 58574
155	2·19033 16282	195	2·29003 46114	235	2·37106 78623
156	2·19312 45984	196	2·29225 60714	236	2·37291 20030
157	2·19589 96524	197	2·29446 62262	237	2·37474 83460
158	2·19865 70869	198	2·29666 51903	238	2·37657 69571
159	2·20139 71243	199	2·29885 30764	239	2·37839 79009
160	2·20411 99827	200	2·30102 99957	240	2·38021 12417

Sz.	Logar.	Sz.	Logar.	Sz.	Logar.
241	2·38201 70426	281	2·44870 63199	321	2·50650 50324
242	2·38381 53660	282	2·45024 91083	322	2·50785 58717
243	2·38560 62736	283	2·45178 64355	323	2·50920 25223
244	2·38738 98263	284	2·45331 83400	324	2·51054 50102
245	2·38916 60844	285	2·45484 48600	325	2·51188 33610
246	2·39093 51071	286	2·45636 60331	326	2·51321 76001
247	2·39269 69533	287	2·45788 18967	327	2·51454 77527
248	2·39445 16808	288	2·45939 24878	328	2·51587 38437
249	2·39619 93471	289	2·46089 78428	329	2·51719 58979
250	2·39794 00087	290	2·46239 79979	330	2·51851 39399
251	2·39967 37215	291	2·46389 29890	331	2 51982 79938
252	2·40140 05408	292	2·46538 28514	332	2·52113 80837
253	2·40312 05212	293	2·46686 76204	333	2 52244 42335
254	2·40483 37166	294	2·46834 73304	334	2·52374 64668
255	2·40654 01804	295	2·46982 20160	335	2.52504 48070
256	2·40823 99653	296	2 47129 17111	336	2 52633 92774
257	2·40993 31233	297	2·47275 69493	337	2·52762 99009
258	2·41161 97060	298	2·47421 62640	338	2·52891 67003
259	2·41329 97641	299	2·47567 11883	339	2 53019 96982
260	2·41497 33480	300	2·47712 12547	340	2·53147 89170
261	2·41664 05073	301	2·47856 64956	341	2 53275 43790
262	2·41830 12913	302	2·48000 69430	342	2·53402 61060
263	2·41995 57485	303	2·48144 26285	343	2·53529 41200
264	2·42160 39269	304	2·48287 35836	344	2 53655 84426
265	2 42324 58739	305	2·48429 98393	345	2·53781 90951
266	2·42488 16366	306	2·48572 14265	346	2·53907 60988
267	2·42651 12614	307	2·48713 83755	347	2·54032 94748
268	2·42813 47940	308	2·48855 07165	348	2·54157 92439
269	2·42975 22800	309	2·48995 84794	349	3·54282 54270
270	2·43136 37642	310	2·49136 16938	350	2·54406 80444
271	2·43296 92909	311	2·49276 03890	351	2·54530 71165
272	2·43456 89040	312	2·49415 45940	352	2·54654 26635
273	2·43616 26470	313	2·49554 43375	353	2·54777 47054
274	2·43775 05628	314	2·49692 96481	354	2·54900 32620
275	2·43933 26938	315	2·49831 05538	355	2·55022 83531
276	2·44090 90821	316	2·49968 70826	356	2·55144 99980
277	2·44247 97691	317	2·50105 92622	357	2·55266 82161
278	2·44404 47959	318	2·50242 71200	358	2·55388 30266
279	2 44560 42033	319	2·50379 06831	359	2·55509 44486
280	2·44715 80313	320	2·50514 99783	360	2·55630 25008

Sz.	Logar.	Sz.	Logar.	Sz.	Logar.
361	2·55750 72019	401	2·60314 43726	441	2·64443 85895
362	2·55870 85705	402	2·60422 60531	442	2·64542 22693
363	2·55990 66250	403	2·60530 50461	443	2·64640 37262
364	2·56110 13836	404	2·60638 13651	444	2·64738 29701
365	2·56229 28645	405	2·60745 50232	445	2·64836 00110
366	2·56348 10854	406	2·60852 60336	446	2·64933 48587
367	2·56466 60643	407	2·60959 44092	447	2·65030 75231
368	2·56584 78187	408	2·61066 01631	448	2·65127 80140
369	2·56702 63662	409	2·61172 33080	449	2·65224 63410
370	2·56820 17241	410	2·61278 38567	450	2·65321 25138
371	2,56937 39096	411	2·61384 18219	451	2·65417 65419
372	2,57054 29399	412	2·61489 72160	452	2·65513 84348
373	2,57170 88318	413	2·61595 00517	453	2·65609 82020
374	2,57287 16022	414	2·61700 03411	454	2·65705 58529
375	2,57403 12677	415	2·61804 80967	455	2·65801 13967
376	2·57518 78499	416	2·61909 33306	456	2·65896 48427
377	2·57634 13502	417	2·62013 60550	457	2·65991 62001
378	2·57749 17998	418	2·62117 62818	458	2·66086 54780
379	2·57863 92100	419	2·62221 40230	459	2·66181 26855
380	2·57978 35966	420	2·62324 92904	460	2·66275 78317
381	2·58092 49757	421	2·62428 20958	461	2·66370 09254
382	2·58206 33629	422	2·62531 24510	462	2·66464 19756
383	2·58319 87740	423	2·62634 03674	463	2·66558 09910
384	2·58433 12244	424	2·62736 58566	464	2·66651 79806
385	2·58546 07295	425	2·62838 89301	465	2·66745 29529
386	2·58658 73047	426	2·62940 95991	466	2·66838 59167
387	2·58771 09650	427	2·63042 78750	467	2·66931 68806
388	2·58883 17256	428	2·63144 37690	468	2·67024 58531
389	2·58994 96013	429	2·63245 72922	469	2·67117 28427
390	2·59106 46070	430	2·63346 84556	470	2·67209 78579
391	2·59217 67574	431	2·63447 72702	471	2·67302 09071
392	2·59328 60670	432	2·63548 37368	472	2·67394 19986
393	2·59439 25504	433	2·63648 78964	473	2·67486 11407
394	2·59549 62218	434	2·63748 97295	474	2·67577 83417
395	2·59659 70956	435	2·63848 92570	475	2·67669 36096
396	2·59769 51859	436	2·63948 64893	476	2·67760 69527
397	2·59879 05068	437	2·64048 14370	477	2·67851 83790
398	2·59988 30721	438	2·64147 41105	478	2·67942 78967
399	2·60097 28957	439	2·64246 45292	479	2·68033 55134
400	2·60205 99913	440	2·64345 26765	480	2·68124 12374

Sz.	Logar.	Sz.	Logar.	Sz.	Logar.
481	2·68214 50764	521	2·71683 77233	561	2·74896 28613
482	2·68304 70382	522	2·71767 05030	562	2 74973 63156
483	2·68394 71308	523	2 71850 16889	563	2·75050 83949
484	2·68484 53616	524	2·71933 12870	564	2·75127 91040
485	2·68574 17386	525	2·72015 93034	565	2 75204 84478
486	2·68663 62693	526	2·72098 57442	566	2·75281 64312
487	2·68752 89612	527	2 72181 06152	567	2·75358 30589
488	2·68841 98220	528	2·72263 39255	568	2·75434 83357
489	2·68930 88591	529	2 72345 56720	569	2·75511 22664
490	2·69019 60800	530	2·72427 58696	570	2·75587 48557
491	2·69108 14921	531	2·72509 45211	571	2·75663 61082
492	2·69196 51028	532	2·72591 16323	572	2·75739 60288
493	2·69284 69193	533	2·72672 72090	573	2·75815 46220
494	2·69372 69489	534	2·72754 12570	574	2·75891 18924
495	2·69460 51989	535	2·72835 37820	575	2·45966 73447
496	2·69548 16765	536	2·72916 47897	576	2·76042 24894
497	2·69635 63887	537	2·72997 43857	577	2·76117 58132
498	2·69722 93428	538	2·73078 22757	578	2·76192 78384
499	2·69810 05456	539	2·73158 87652	579	2·76267 85637
500	2·69897 00043	540	2·73239 37598	580	2·76342 79936
501	2·69983 77259	541	2·73319 72651	581	2·76417 61321
502	2·70070 37171	542	2·73399 92865	582	2·76492 29846
503	2·70156 79851	543	2·73479 98296	583	2·76566 85548
504	2·70243 05364	544	2·73559 88997	584	2·76641 28471
505	2·70329 13781	545	2·73639 65023	585	2.76715 58661
506	2·70415 05168	546	2·73719 26427	586	2·76789 76160
507	2·70500 79593	547	2·73798 73253	587	2·76863 81012
508	2·70586 37123	548	2·73878 05585	588	2·76937 73261
509	2·70671 77823	549	2·73957 23445	589	2·77011 52948
510	2·70757 01761	550	2·74036 26895	590	2·77085 20116
511	2·70842 09001	551	2·74115 15989	591	2·77158 74809
512	2·70926 99610	552	2·74193 90777	592	2·77232 17067
513	2·71011 73651	553	2·74272 51313	593	2·77305 46934
514	2·71096 31190	554	2·74350 97647	594	2·77378 64450
515	2·71180 72290	555	2·74429 29831	595	2·77451 69657
516	2·71264 97016	556	2·74507 47916	596	2·77524 62597
517	2·71349 05431	557	2·74585 51952	597	2·77597 43311
518	2·71432 97597	558	2·74663 41989	598	2·77670 11840
519	2·71516 73578	559	2·74741 18079	599	2·77742 68224
520	2·71600 33436	560	2·74818 80270	600	2·77815 12504

Sz.	Logar.	Sz.	Logar.	Sz.	Logar.
601	2·77887 44720	641	2·80685 80295	681	2·83314 71119
602	2·77959 64913	642	2 80753 50281	682	2·83378 43747
603	2·78031 73121	643	2·80821 09729	683	2·83442 07037
604	2 78103 69386	644	2·80888 58674	684	2·83505 61017
605	2·78175 53747	645	2·80955 97146	685	2·83569 05715
606	2·78247 26242	646	2·81023 25180	686	2·83632 41157
607	2·78318 86911	647	2·81090 42807	687	2 83695 67371
608	2·78390 35793	648	2·81157 50059	688	2 83758 84382
609	2·78461 72926	649	2 81224 46968	689	2 83821 92219
610	2·78532 98350	650	2·81291 33566	690	2·83884 90907
611	2·78604 12102	651	2 81358 09886	691	2·83947 80474
612	2·78675 14221	652	2·81424 75957	692	2·84010 60945
613	2·78746 04745	653	2·81491 31813	693	2·84073 32346
614	2·78816 83711	654	2·81557 77483	694	2·34135 94705
615	2·78887 51158	655	2·81624 13000	695	2·84198 48046
616	2·78958 07122	656	2·81690 38394	696	2·84260 92396
617	2·79028 51640	657	2·81756 53696	697	2·84323 27781
618	2·79098 84751	658	2·81822 58936	698	2·84385 54226
619	2·79169 06490	659	2·81888 54146	699	2·84447 71757
620	2·79239 16895	660	2·81954 39855	700	2·84509 80400
621	2.79309 16002	661	2·82020 14595	701	2·84571 80180
622	2·79379 03847	662	2·82085 79894	702	2·84633 71121
623	2·79448 80467	663	2·82151 35284	703	2·84695 58250
624	2·79518 45897	664	2·82216 80794	704	2·84757 26591
625	2·79588 00173	665	2·82282 16453	705	2·84818 91170
626	2·79657 43332	666	2·82347 42292	706	2·84880 47011
627	2·79726 75408	667	2·82412 58339	707	2·84941 94138
628	2·79795 96437	668	2·82477 64625	708	2·85003 32577
629	2·79865 06454	669	2·82542 61178	709	2·85064 62352
630	2·79934 05495	670	2·82607 48027	710	2 85125 83487
631	2·80002 93592	671	2·82672 25202	711	2·85186 96007
632	2·80071 70783	672	2 82736 92731	712	2·85247 99936
633	2·80140 37100	673	2 82801 50642	713	2·85308 95298
634	2·80208 92579	674	2·32865 98965	714	2·85369 82118
635	2·80277 37253	675	2·82930 37728	715	2·85430 60418
636	2·80345 71156	676	2 82994 66959	716	2.85491 30223
637	2·80413 94323	677	2·83058 86687	717	2·85551 91557
638	2·80482 06787	678	2·83122 96939	718	2·85612 44442
639	2·80550 08582	679	2·83186 97743	719	2·85672 88904
640	2·80617 99740	680	2·83250 89127	720	2·85733 24964

Sz.	Logar.	Sz.	Logar.	Sz.	Logar.
721	2·85793 52647	761	2·88138 46568	801	2·90363 25161
722	2·85853 71976	762	2·88195 49713	802	2·90417 43683
723	2·85913 82973	763	2·88252 45380	803	2·90471 55453
724	2·85973 85662	764	2·88309 33586	804	2·90525 60487
725	2·86033 80066	765	2·88366 14352	805	2·90579 58804
726	2·86093 66207	766	2·88422 87696	806	2·90633 50418
727	2·86153 44109	767	2·88479 53639	807	2·90687 35347
728	2·86213 13793	768	2·88536 12200	808	2·90741 13608
729	2·86272 75283	769	2·88592 63398	809	2·90794 85216
730	2·86332 28601	770	2·88649 07252	810	2·90848 50189
731	2·86391 73770	771	2·88705 43781	811	2·90902 08542
732	2·86451 10811	772	2·88761 73003	812	2·90955 60292
733	2·86510 39746	773	2·88817 94939	813	2·91009 05456
734	2·86569 65599	774	2·88874 09607	814	2·91062 44049
735	2·86628 73391	775	2·88930 17025	815	2·91115 76087
736	2·86687 78143	776	2·88986 17213	816	2·91169 01588
737	2·86746 74879	777	2·89042 10188	817	2·91222 20565
738	2·86805 63618	778	2·89097 95970	818	2·91275 33037
739	2·86864 44384	779	2·89153 74577	819	2·91328 39018
740	2·86923 17197	780	2·89209 46027	820	2·91381 38524
741	2·86981 82080	781	2·89265 10339	321	2·91434 31571
742	2·87040 39052	782	2·89320 67531	822	2·91487 18175
743	2·87098 88138	783	2·89376 17621	823	2·91539 98352
744	2·87157 29355	784	2·89431 60627	824	2·91592 72117
745	2·87215 62727	785	2·89486 96567	825	2·91645 89485
746	2·87273 88275	786	2·89542 25460	826	2·91698 00473
747	2·87332 06018	787	2·89597 47324	827	2·91750 55096
748	2·87390 15979	788	2·89652 62175	828	2·91803 08368
749	2·87448 18177	789	2·89707 70032	829	2·91855 45306
750	2·87506 12634	790	2·89762 70913	830	2·91907 80924
751	2·87563 99370	791	2·89817 64835	831	2·91960 10238
752	2·87621 78406	792	2·89872 51816	832	2·92012 33263
753	2·87679 49762	793	2·89927 31873	833	2·92064 50014
754	2·87737 13459	794	2·89982 0502[illegible]	834	2·92116 60506
755	2·87794 69516	795	2·90036 71287	835	2·92168 64755
756	2·87852 17955	796	2·90091 30677	836	2·92220 62774
757	2·87909 58795	797	2·90145 83214	837	2·92272 54580
758	2·87966 92056	798	2·90200 28914	838	2·92324 40186
759	2·88024 17759	799	2·90254 67793	839	2·92376 19608
760	2·88081 35923	800	2·90308 99870	840	2·92427 92861

Sz	Logar.	Sz.	Logar.	Sz	Logar.
841	2·92479 59958	881	2·94497 59084	921	2·96425 96302
842	2·92531 20915	882	2·94546 85851	922	2·96473 09211
843	2·92582 75746	883	2·94596 07036	923	2·96520 17010
844	2·92634 24466	884	2·94645 22650	924	2·96567 19712
845	2·92685 67089	885	2·94694 32707	925	2·96614 17327
846	2·92737 03630	886	2·94743 37219	926	2·96661 09867
847	2·92788 34103	887	2·94792 36198	927	2·96707 97341
848	2·92839 58523	888	2·94841 29658	928	2·96754 79762
849	2·92890 76902	889	2·94890 17610	929	2·96801 57140
850	2·92941 89257	890	2·94939 00066	930	2·96848 29486
851	2·92992 95601	891	2·94987 77040	931	2·96894 96810
852	2·93043 95948	892	2·95036 48544	932	2·96941 59124
853	2·93094 90312	893	2·95085 14589	933	2·96988 16437
854	2·93145 78707	894	2·95133 75188	934	2·97034 68762
855	2·93196 61147	895	2·95182 30353	935	2·97081 16109
856	2·93247 37647	896	2·95230 80097	936	2·97127 58487
857	2·93298 08219	897	2·95279 24430	937	2·97173 95909
858	2·93348 72878	898	2·95327 63367	938	2·97220 28384
859	2·93399 31638	899	2·95375 96917	939	2·97266 55923
860	2·93449 84512	900	2·95424 25094	940	2·97312 78536
861	2·93500 31515	901	2·95472 47910	941	2·97358 96234
862	2·93550 72658	902	2·95520 65375	942	2·97405 09028
863	2·93601 07957	903	2·95568 77503	943	2·97451 16927
864	2·93651 37425	904	2·95616 84305	944	2·97497 19943
865	2·93701 61075	905	2·95664 85792	945	2·97543 18085
866	2·93751 78920	906	2·95712 81977	946	2·97589 11364
867	2·93801 90975	907	2·95760 72871	947	2·97634 99790
868	2·93851 97252	908	2·95808 58485	948	2·97680 83273
869	2·93901 97763	909	2·95856 38832	949	2·97726 62124
870	2·93951 92526	910	2·95904 13923	950	2·97772 36053
871	2·94001 81550	911	2·95951 83770	951	2·97818 05169
872	2·94051 64849	912	2·95999 48383	952	2·97863 69484
873	2·94101 42437	913	2·96047 07775	953	2·97909 29004
874	2·94151 14326	914	2·96094 61957	954	2·97954 83747
875	2·94200 80530	915	2·96142 10941	955	2·98000 33716
876	2·94250 41062	916	2·96189 54737	956	2·98045 78923
877	2·94299 95934	917	2·96236 93357	957	2·98091 19378
878	2·94349 45159	918	2·96284 26812	958	2·98136 55091
879	2·94398 88751	919	2·96331 55114	959	2·98181 86072
880	2·94448 26722	920	2·96378 78273	960	2·98227 12330

Sz.	Logar.	Sz.	Logar.
961	2·98272 33877	981	2·99166 90074
962	2·98317 50720	982	2·99211 14878
963	2·98362 62871	983	2·99255 35178
964	2·98407 70339	984	2·99299 50984
965	2·98452 73133	985	2·99343 62305
966	2·98497 71264	986	2·99387 69149
967	2·98542 64741	987	2·99431 71527
968	2·98587 53573	988	2·99475 69446
969	2·98632 37771	989	2·99519 62916
970	2·98677 17343	990	2·99563 51946
971	2·98721 92299	991	2·99607 36545
972	2·98766 62649	992	2·99651 16722
973	2·98811 28403	993	2·99694 92485
974	2·98855 89569	994	2·99738 63844
975	2·98900 46157	995	2·99782 30807
976	2·98944 98177	996	2·99825 93384
977	2·98989 45637	997	2·99869 51583
978	2·99033 88548	998	2·99913 05413
979	2·99078 26918	999	2·99956 54882
980	2·99122 60757	1000	3·00000 00000

Javitandó nyomtatási hibák.

Lap.	sor	helyett	legyen
18	3 felül	$-20by^2$	$-25by^2$
	6 felül	$-20by^2$	$-25by^2$
	16 felül	$+aef+bef$	$+acf+bcf$
32	8 felül	(x_n+1)	(x^n+1)
34	11 alul	$=1-1+1+1$'s a' t.	$=1-1+1-1$'s a' t.
43	11 felül	$+30x$ et	$+30$, x et
44	11 alul	$(a+y)$	$(a-y)$
52	3 alul	a^2+z^2	a^2-z^2
55	4 felül	b vel	b, vel
80	5 alul	$\frac{\sqrt[6]{3^3 2}}{3}$	$\frac{\sqrt[6]{3^3 2^2}}{3}$
91	17 felül	$abcde$	$+abcde$
93	15 felül	$+Fx$	$+Ex$
113	8 alul	x^3	z^3
132	6 felül	$k^{u-v}k^v$	$h^{u-v}k^v$
137	11 felül	$x=6$	$x=0$
147	3 felül	$1+\frac{a}{m}+\frac{a}{m^2}+\frac{a}{m^3}+\frac{a}{m^4}$	$+1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}$
	4 felül	$\cdots\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}$	$\cdots\frac{a}{m^3}+\frac{a}{m^4}$
156	7 felül	$S^n=n(n+1)$	$S_n=$'s a' t.
161	3 felül	2 által	x által
174	11 felül	log $(1-\alpha)$	log $(1+\alpha)$
177	3 felül	$(a+b)$	$(c+b)$
	2 alul	$\left\{\frac{1}{2}+\right.$	$\left\{\frac{1}{3}+\right.$
204	7 felül	megtálalni	megtalálni
226	9 alul	$5a$	$5x$
231	14 alul	hogy 40	hogy 46
232	9 felül	Vnek.	B nek.
233	10 alul	feltetélnek	feltételnek
236	5 felül	unci	uncia
252	2 alul	$5x+7$	$5x+7y$
263	15 felül	$\sqrt{38-8x}$	$\sqrt{48-8x}$
265	9 felül	$-\frac{p}{2}\,\vert+\sqrt{\quad}$	$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\quad}$
273	13 felül	rézsre	részre
279	12 alul	ay^2-bx	$ax^2=bx$
294	1 felül	lesa $5:x=$	lesz $5:x$
295	7 felül	x^6-35xx^3	x^6-35x^3
301	7 felül	x^m-	x^m+
307	1 felül	$m=p\times p$	$m=p\times q$
	12 felül	$m-6$	$m=6$
312	1 felül	a_n+	a^n+
315	1 alul	valametlyik	valamellyik