Elemi Arithmologia. Arithmographia. 1. Arithmetika. Számirás különös jegyekkel

Rohrmann és Schweigerd
Bécs; Wien 1835

ARITHMETIKA.

ELEMI

ARITHMOLOGIA.

ARITHMOGRAPHIA.

ELSŐ RÉSZ:

SZÁMÍRÁS KÜLÖNÖS JEGYEKKEL.

ÍRTA

NAGY KÁROLY,

M. T. T. Am. Ph. T. T.

BÉCS:

ROHRMANN ÉS SCHWEIGERDNÁL.

MDCCCXXXV.

ARITHMETIKA.

SZÁMÍRÁS KÜLÖNÖS JEGYEKKEL.

ÍRTA

NAGY KÁROLY.

BÉCS:

ROHRMANN ÉS SCHWEIGERDNÁL.

MDCCCXXXV.

SOLLINGER J. P. SAJTÓJI ALÓL BÉCSBEN.

ELŐSZÓ.

Az Arithmetika' ismérete a' társasági lét' minden helyezetében mulhatlanul szükséges 's a' közoktatásnak első ágaihoz tartozik.

Alapja a' Mathesis' minden részeinek, mert minden számítás' végkövetkezése, szám.

Az arithmetikai munkákban megkívántatik: hogy a' tudomány' részei világosan és érthetőleg adassanak elő, lépcsőnként menvén a' könnyebb kérdésekről a' nehezebbekre, hogy a' tanuló könnyen és kedvel folytathassa elkezdett útját.

Meg kívántatik továbbá: hogy minden bennek előfordúló kérdés csupa és tiszta arithmetikai míveletek és tekintetek által fejtessen meg, kirekesztvén mindazt, mi az Algebrához vagy az Analysishez tartozik.

Ezen utóbbi kívánat' szoros megtartása ott szükséges hol nincs egyéb czél, mint az elemi számvetés' és a' különös számjegyekkeli egyszerű míveletek' tanítása.

Jelen munka, mellyben az említett kívánatoknak megfelelni akartam, több tárgyat foglal magában, mint közönségesen az arithmetikai könyvek, és némelly tekintetben különbözik is azoktól elrendelése által.

Czélja a' munkának kettős. Megismertetni a' tanulóval a' számok' természetét, az arithmetikai míveletek' egybefüggését, 's az egész Mathesisnak szoros egybeköttetését az Arithmetikával; alkalmat nyujtani néki az eddig szokatlan jegyek' béhozása által, hogy könnyűséggel tovább mehessen a' Mathesis' egyébb ágainak tanulásában, tapasztalásból tudván, melly ismeretlen országba lépünk, a' mint az ugynevezett tiszta Arithmetikáról az Algebrára megyünk által. De nem csak az fogja a' közjegyek értelme' esméretét használni, ki a' tudományban elébb akar menni, de az is ki a' mindennapi szükségre tanulja az Arithmetikát, mert azoknak kiterjedett 's közértelme rövidsége 's egyszerűsége az elmét nemcsak segélli, de erősíti 's neveli.

Reménylem örömest fogja látni mind tanuló mind tanító a' nehány rendkívüli tárgyakat, mint a' láncztörteket, az öszveilletést, az alakított számokat, a' végnélküli, a' tagadó 's állító mennyiségeket, a' sorokat 's a' t. valamint az imitt amott közbe szúrt táblákat is.

A' Logarithmok' tanítása és haszonvéte nem jutott még azon figyelemre, mellyet olly igen érdemel. Az arithmetikának mint legbecsesb része ápolgatást és szorgos tanulást kíván, mert azon könnyűség, mellyet a' logarithmok minden nemű számításra nyújtnak, semmi egyéb mathesisi mívelet által nem pótolható, el nem érhető.

A' könyv' első czímlapját Ampére' tekintetei szerént vettem fel.

Az Arithmetika valóban nem egyéb Számírásnál, 's az Arithmographiának egyik része, melly a' számírást és számvetést különös az az számjegyekkel tanítja: másik része ellenben a' köz az az betűjegyek által fejezi ki valamely szám' értékét. Hogy akármelly mennyiség, a' jegyek' segédsége által végtelenféle különböző alakban írathatik a' nélkül hogy értéke változnék, azt az Arithmographia tanítja 's mindegyik mívelete által bizonyítja. Ezen alakok, a' kérdés' természete szerént egyszerűek vagy kevertebbek mint a' tudományban előbb haladunk, de mindenkor csak a' keresendő mennyiséget fejezik ki változatlanul.

Így p. o: a' hat első arithmographiai mívelet csak az ő tulajdon jegyeivel illeti a' számokat. A' törtek ismét új alakokat nyújtnak, 's így továbbá az arányok, sorok, logarithmok 's a' t.

Az arithmographia e'szerént a' különböző alakok' változtatását, írását tanitja, 's azokat váloszt-ja mellyek, vagy legegyszerűbben fejezik ki a' keresendő mennyiséget, vagy legalkalmasabbak annak kifejezésére.

A' tanuló ki az egyszerűbb alakokról az öszvetettekre menvén, végre egy példába minden jegyeket öszve-köt: 's p. o: a' kifejezést

$$\frac{(2+5)^2-3\sqrt[4]{16^2-81}+7-\left({}^5\!/_8\,.\,{}^2\!/_5\right)}{(3+6)\left(9-4-\sqrt[3]{19+8}+{}^{32}\!/_9\right):\log.0\cdot123152}$$

leg egyszerűbb alakjára tudja vinni, az arithmographia' első részét tökéletesen érti.

Az arithmographia' második része ettől az elsőtől semmiben sem különbözik, 's csupán a' különös vagyis a' számjegyek hellyett közönséges jegyekkel, a' betűkkel ír. Ez az algebra' első része, 's mindazon tárgyakat foglalja ismételve magában mellyek a' jelen könyvben előadatnak.

Az algebra' második része, melly nem csupán az alakokat de a' kifejezett mennyiségeket is változtatja 's bizonyos viszonokba hozza, az analysishoz tartozik.

Ampére a' Mathesist Arithmologiának, a' számok ismeretének, 's ezt első rendű tudománynak hívja. Az Arithmologiát pedig két másod rendűbe, az elemi Arithmologiába 's a' Megethologiába osztja.

Az elemi Arithmologiának ismét két osztájt ád, 's így az Arithmographiát és a' mathesisi Analysist harmadik rendű tudománynak tészi.

Tökélletesen meggyőződvén Ampére természeti béosztása' igaz és helyeslétéről azt elfogadtam, 's jelen Arithmetikámat mint az Arithmográphiának első részét olly nézettel bocsájtom közre, hogy második részét az Algebra' elemeit, mint egészítőjét jövőre hozzá csatolom.

Nagy Károly.

1-ső September. 1835.
Bécs. Karinthi út 1004.

FOGLALAT.

I. SZAKASZ.

II. SZAKASZ.

Arithmetikai míveletek egész számokkal.

IV. SZAKASZ.

Törtszámok.

1 §. *Közönséges törtek.*

2 §. *Tizedes törtszámok.*

V. SZAKASZ.

Combinálás vagy Öszveilletés.

VI. SZAKASZ.

Emelések és Gyökerek.

VII. SZAKASZ.

1 §. *Megnevezett számok. Mérők. Mértékek. Pénznemei.*

2 §. *Feloldás és visszavivés.*

VIII. SZAKASZ.

Arithmetikai kérdések' feloldása.

IX. SZAKASZ.

Viszonok és Arányok.

1 §. Arithmetikai és geometriai viszonok.

X. SZAKASZ.

Sorok, Progressiok és Alakított számok.

1 §. A' Sorokról közönségesen.

T Á B L Á K.

ARITHMETIKA.

ELSŐ SZAKASZ.

ELŐZŐ ISMÉRETEK. SZÁM. JEGYEK.

1 §. Előző ismeretek.

1. Az Arithmetika, egy része, 's úgy szólván kezdete 's alapja a' Mathesisnek. Tanítja főkép a' *számokkal* való különböző számításokat.

A' *szám*, gyűjteménye több egyesnek.

Az *egység* önkényes mennyiség, 's hasonlításul szolgál több mennyiségek közt.

Mennyiség alatt értetik mind az, mit nagyobbítni és kissebbítni lehet.

2 §. Szám és Számok.

2. Az *egész Szám*, több ugyan azon nagyságú egyesekből álló öszveleg.

A' *tört-szám* valamelly része az egységnek.

A' Szám *abstract*, *elvont*, vagy *concret*, *illetett*, *öszszitett*, a' mint nem tekintjük egyesei' természetét, vagy tekintjük.

A' Szám, vagy valamelly mennyiség *állító* vagy *tagadó*, mint az a' kérdés' természetéhez képest, más mennyiséggel ellenkezik.

3 §. Jegyek.

3. A' Mennyiségek' kifejezésére a' jegyek szolgálnak. A' jegyek alakja önkényes: a' szokásba vett számjegyek 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 és 0. Ezen tíz jegy helyett akármelly mást lehetne venni, 's p. o.: valamelly nyelv' betűiből mint a' görög, arabs, zsidó, német vagy latánból tíz, az előbbeni jegyeknek megfelelne, szintúgy akármelly új képzelt jegy is.

4. Ezen szokásban vett jegyekkel írott szám vagy mennyiség *bizonyos*, mert *értéke* kétségen kivül megvan adva általok; 's ezen tekintetből a' jegyek *bizonyos jegyeknek* hívatnak. De az illy ki fejezett mennyiség egyszersmind *különös* is, mert csak egyedül az írathatik ugyan azon jegyekkel, 's ezen tekintetből a' számok' jegyei *különösek.*

5. Noha az Arithmetika csak számokkal, 's következésképp ezeknek bizonyos és különös jegyeivel munkál és mível, még is szüksége van gyakorta *közönséges kifejezésre;* 's ekkor más jegyeket választ. A' betűk használtatnak tehát ott, a' hol valamelly tekintet *közönségesen* vétetik, és ez minden különös kérdésre egyiránt alkalmaztatható.

6. Ha valamelly mennyiséget A val fejezünk ki p. o. az A betű alatt akármelly különös jegyekkel írt számot érthetünk, szinte így

B, C, D... a, b, c, d.... $\alpha.\beta.\gamma.\delta$.... 's a' t. alatt. A' nagy vagy kezdőbetűket ott használjuk, hol vagy főszámok értetnek, vagy valamelly arithmetikai míve-let' közönséges bizonyítványa kívántatik. A' kis betű-ket ott, hol gyakori és apróbb mennyiségek jönnek kérdésbe. Nincs azonban erre semmi bizonyos tör-vény, 's a' számító, ítélete szerint választhatja egyi-ket vagy a' másikat. Ha egynemű, vagy hasonló tu-lajdonú mennyiségek jönnek kérdésbe, gyakorta ugyan azon betűvel is szokás mind valamennyit jelölni, csak ekkor a' betűk vagy felűl vagy alól, vonalokat vagy apró számjegyeket kívánnak, — az elsők mindég alkalmasabbak. P. o.: A^0 A' A'' A'''. 's... vagy $A_{,}$ $A_{,,}$ $A_{,,,}$.... 's a' t.

Ha valamelly ismeretlen vagy keresendő mennyiség forog kérdésben, ezt az utolsó betűkkel x, y, z, v, u, & val szokás jelölni. Igen helyes olly betűket vá-lasztani, mellyek egyszersmind első 's kezdő betűi azon szónak vagy névnek melly kérdésben forog. Igy p. o.: a' Tőkét T vagy t vel, a' Kamatot K vagy k val, az Időt I vagy i vel, a' Sebességet S vagy s el, az Erőt E vagy e vel, a' Nehézséget N vagy n nel 's a' t. fejezni ki. A' kis betűk m, n, p, q.... végre valamelly *példa' közönséges kifejezését* mutatják.

4 §. A' Számok' alkotmánya.

7. A' különös jegyekkel írt számok, *természetes számoknak* neveztetnek, megkülönböztetéséül azok-nak, mellyek a' geometriai és felsőbb mathesisi mí-veletekből származnak 's az Arithmetikához nem tar-toznak.

8. A' Számok' alkotmánya sokféle lehet, a' szokás-ba vett a' *tizes alkotmány*, 's az Arithmetika, melly

a' tízes alkotmányú számokkal mível, *tizes Arithmétikának* is neveztetik.

A' tíz különös jegy 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. közt csak kilencz *jelentő* vagy *értékes* jegy van; a' tizedik a' 0 csak *segédjegy*. Az egyes jegyekkel e' szerint csak kilencz különböző számot lehet jelölni, 's ezt a' tízes alkotmány szerint *első rendű* vagy *egyes számoknak* nevezzük.

Ha valamellyike ezen kilencz értékes jegynek az *üressel* köttetik egybe, *felsőbb rendje* támad a' számoknak, 's egy üressel a' második, kettővel a' harmadik, hárommal a' negyedik 's igy további felyebb rend támad, melly akarmellyik rend ismét magában véve, különös neme az egységnek.

Hogy valamelly felsőbb rend támadjon, szükséges hogy, az előtte lévő rendből tíz egyes legyen együtt; az az: ha valamellyik rendből tíz egyes van együtt, azonnal a' következő felsőbb rend' egyese támad.

A' tízes alkotmány e' szerént számtalan csoportokbul áll, mellyek tíz tíz egyesét foglalják magokban a' különféle rendeknek.

5 §. A' Számok' értéke, írása és kimondása.

9. Mint a' 9 jelentő jegy 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. sorjában íratik, az elsőtől az egytől kezdetik a' számlálás, 's minden következő jegy egygyel nagyobb, az előtte állónál. A' Jegyek' neve egy, kettő, három, négy, öt, hat, hét, nyolcz és kilencz tehát azt jelöli, hogy mindegyik ugyan annyi egyest foglal magában.

Összekötvén az egyes jegyekkel a' segédjegyet az üreset következő számokra akadunk.

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90,

's ezek mint a' második rendhez tartozók, különös neveket vettek fel 's mondatnak: tíz, húsz, harmincz, negyven, ötven, hatvan, hetven, nyolczvan és kilenczvennek, 's annyi tízest foglalnak magokban, mennyit a' jelentő jegy mutat; a' második rendben tehát a' tízesek vannak 's ezek, ismét egyesek a' magok rendében.

Ha a' második rendbeli számokhoz ismét egy üreset ragasztunk, lesz:

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 és 900,

's ezen harmadik rend, a' *százasok*' rendje

A' negyedik rend három üressel az *ezreseké*, az ötödik néggyel a' *tizezreseké*, a' hatodik öttel a' *százezreseké*, 's a' hetedik hattal a' *millioké*.

Ez után következnek a' *milliok' tizesi százasi, ezresi, tizezresi* és *százezresi* míg az ezek után következő 13-dik rend új nevezetet a' *billiot* nyeri.

Ha hat egymást követő rendet veszünk öszve, külön külön *osztállyokat* képzelhetünk 's nevezzük az első hat rendből álló osztályt az *egyesek osztályának*, a' hat következendőt a' *milliok*', ismét a' jövő hatot a' *Billiok*' 's így tovább a' *Trilliok*', *Quadrilliok*', *Quintilliok*' 's a' t. osztállyának. Lesz tehát a' következő jegyzék szerént:

1	egy egyes	
10	egy tizes	tíz egyes
100	egy százas	tíz tizes
1000	egy ezres	tíz százas
10000	egy tízezres	tíz ezres
100000	egy százezres	tíz tízezres
1000000	egy millio	tíz százezres
10000000	egy tízesmillio	tíz millio
100000000	egy százasmillio	tíz tízesmillio
1000000000	egy ezresmillio	tíz százasmillio
10000000000	egy tízezresmillio	tíz ezresmillio

's a' t.

Itt észrevehető hogy, az egyes mindegyik következő sorban odébb esik egy egy hellyel jobbról balra, 's minden illy következő állásban tízannyi az értéke, mint volt az előbbeniben. Ha tehát valamelly számsort írunk, az első helyet jobbra az egyesek, a' másodikat a' tízesek, a' harmadikat a' százasok 's a' t. foglalják el, 's lesznek a' sorban:

10-es Billiok	Billiok	100 ezres Milliok	10 ezres Milliok	ezres Milliok	százas Milliok	10-es Milliok	Milliok	100 ezresek	10 ezresek	ezresek	százasok	tízesek	egyesek
XIV	XIII	XII	XI	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I

's a' t.

10. A' tíz számjeggyel minden képzelhető számot írhatunk tudván, hogy mindegyik feljebbvaló rend tíz egyesét foglalja magában az elötte valónak, 's meg-

adván a' rendeknek illő helyeket. Az írás' eszközlése nem egyéb mint a' *jegyek' összeillesztése*, párosával négyesével. 's a' t. a' mint mellyik rendhez tartozó számokat keresünk.

A' rendek' sorai e'kép állanak:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX 's a' t.
1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000
2	20	200	2000	20000	200000	2000000	20000000	200000000
3	30	300	3000	30000	300000	3000000	30000000	300000000
4	40	400	4000	40000	400000	4000000	40000000	400000000
5	50	500	5000	50000	500000	5000000	50000000	500000000
6	60	600	6000	60000	600000	6000000	60000000	600000000
7	70	700	7000	70000	700000	7000000	70000000	700000000
8	80	800	8000	80000	800000	8000000	80000000	800000000
9	90	900	9000	90000	900000	9000000	90000000	900000000

A' mint a' második rend' mindegyik tagja, tíz ugyan olly egyes számból áll a' melly jeggyel írva van, 's minden tag tíz egyessel nagyobb az előtte állónál, következéskép tehát a' két egymást követő tagközti különbség tíz; könnyű lesz p. o.: a' 10 és 20, a' 20 és 30, a' 30 és 40 's a' t. közzé tartozó számokat meglelni, ha az üres helyibe, sorjában a' jelentő jegyeket írjuk. Igy akadunk a' következő sorokra:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

's ezek mind azon számokat foglalják magokban, melylyek az 1 és 100 közt állanak, a' számok' természetes sorában. A' 100 és ezer közt álló számokat könynyű lesz e' szerént meglelni; szint így írjuk 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 és 900ban a' két üres helyett, az itt talált 99 számot. Szinte így lelnénk meg mindazon számokat, mellyek 1000 és 10000 közt vannak, ha a' jelentő kilencz számjegy után a' három üres helyett azon 999 számot írjuk, mellyet 100 és 1000 közt leltünk.

Ha p. o. kívántatnék, melly számok vannak 5000 és 6000 közt, következőkép keresnénk azokat.

Ötezer és hatezer közt egy egyesezer áll.

Az egyes ezer áll 10 Százasból.

Mindegyik Százas 10 tizest foglal.

Mindegyik tizes 10 egyest.

Meg keresnénk tehát a' 10 és száz közt álló számokat először, azután a' 100 és 1000 közt lévőket, 's mindezen 999 számot az ötöshöz ragasztván mindazokat megtaláltuk, mellyek 5000től fogva, 5999et bérekesztve, a' 6000ig következnek a' természetes számok' sorában.

11. Akármelly szám' szóbeli kimondása könnyű lesz, szemelőtt tartván, hogy mindegyik Számjegynek kettős az értéke.

1-ső A' jegy' vélejáró vagy is nevező értéke, 's

2-dik a' helyértéke.

Igy p. o.: 800ban a' 8as értéke először *nyolcz* 's másodszor *száz* a' harmadik helyet foglalván el, az az *nyolczszáz*, 70ben a' hetes értéke *hét* és *tizes, hét tizes* az az hetven, a' magánosan álló jegy végre annyi egyes, mennyit értéke mutat.

A' jegyek ezen kétféle értékét 's a' rendek' nevezetét ismervén csak három jegyből álló számot szükséges ki mondani tudni, hogy akarmelly még olly nagyszámú jegyekkel írottat könnyen kimondhassunk: p. o. 752, *hétszáz ötven kettő*, 's a' kimondást nyelvünk' valódi logikai és a' tízes alkotmányra nézve igen helyesléte nagyon segélli.

a' három következő jegy az ezresekhez tartozik 's lesz:

752752   752 *ezer* 752.

a' hetedik 's minden következő jegy, milliokhoz tartozik a' 13dikig és

527,836,753,892.   527 *ezer* 836 *millio* 753 *ezer* 892.

Az üresek, csupán azon helyeket töltvén bé, hol egész vagy jelentő jegyek nincsenek, nem is mondatnak ki,

608007, *hatszáz nyolczezer hét.*

Ha sok jegyből álló szám lenne kimondandó, helyes azt három három jegyet foglaló részekre osztani jobbról kezdve, mert egy tekintetre nehéz lenne megismerni p. o.: a' következő írásban, melly rendhez tartozik mellyik jegy:

86503217547197318045,

de elosztván jobbról három három jegybe, 's a' millio jegyét egy, a' billiojét két 's a' t. vonallal felűl ellátván, kimondása éppen olly könnyű mint a' három jegyé:

$86'''$,503,$217''$,547,$197'$,318,045.

86 trillio

503 ezer 217 billio

547 ezer 197 millio

318 ezer 45.

6 §. Az Arithmétika' míveletei.

12. A' mennyiség csak kétféle változást szenvedhetvén (§ 1.) csak a' *nagyobbitás* vagy a' *kissebbités* lehet az arithmetikai míveletek' czélja, melly a' jegyekkeli számítást tanítja.

Illyen *alapos mivelete* az Arithmetikának négy van: ez az *öszveadás*, *levonás*, *sokszorozás* és az *elosztás*: ezekhez lehet még kettőt számlálni: az *emelést* és a' *gyökérvevést*.

Ezen hat mívelet közül három nagyobbítást, három pedig, kisebbitést tárgyaz. A' három nagyobbító; öszveadás, sokszorozás és emelés; a' kisebbítők; levonás, elosztás és gyökérvevés épen ellenkezők tehát egymással.

Mindezen míveletek szoros egybeköttetésben állnak, 's mintegy egymástól függnek: mint a' kérdés vagy számítás kívánja, az választatik közűlök, melly a' legrövidebb 's könnyebb úton vezet következésre.

13. Az *Öszveadás* nem egyébb az egyszerű összeszámlálásnál; de mivel nagyobb mennyiségeknél sok idő veszne az unalmas számlálás által, az Arithmetika rövidséget és könnyűséget nyújt a' nagy és számos mennyiségek' öszveadására.

14. A' *Sokszorozás*, szoros értelemben rövidített öszveadás, 's ott használtatik, hol valamelly mennyiség *többször* adatik a' másikhoz.

15. Az *Emelés* a' sokszorozásnak különös neme, melly ugyan azon mennyiséget sokszoroz annyiszor magával a' hányszor kívántatik. Itt minden mennyiség

az első emelésen lenni tekintetik, 's a' hányszor sokszoroztatik maga magával, annyival több emelésen lenni mondatik az elsőnél.

16. A' *Levonás*, ellenese az öszveadásnak: viszsza felé számlálván a' természetes számok' sorában, annyival kisebbitünk valamelly mennyiséget a' mennyivel kívántatik. Nyilván észrevehető hogy, ki számlálni tud felfelé, összeadni is tud, 's ki lefelé számlál egyszersmind le is von.

Az öszveadás és levonás tehát, mint az arithmetikai míveletek' elemei, a' Számok' alkotmányától elválaszthatlanok.

17. Az *Elosztás* részekre szedi az adott mennyiséget, 's így rövidebb úton 's nagyobb részekben vonja le a' számokat egymástól.

18. A' *Gyökérvevés* végre azon számot keresi, melly maga magával sokszoroztatván, az adott mennyiséget származtatja.

Mindezen míveletek' kiterjedettebb értelmét 's tulajdonait magok helyén fogjuk bőven megismerni.

7 §. A' míveletek' jegyei.

19. A' rövidség 's nyilvánosság az előadásnál megkívánták némelly jegyek' béhozását: ezek fontos műszerei lettek az Arithmetikának és Mathesisnek, 's hasznok megbetsülhetetlen.

Az öszveadás' jegye a' fenn álló kereszt + 's ha valamelly szám előtt áll azt teszi *több* vagy *hozzá adandó*.

A' levonás jegye a' fekvő vonal —, szám előtt *kevesebbet* vagy *levonandót* jelent.

Melly esetekben teszen + és — állítót és tagadót, későbben fogjuk látni.

Nem ritkán áll mindkét jegy egymás felett mint $\pm$ és $\mp$; itt a' kérdés szerint a' felső vagy az alsó jegy vétetik felváltva.

A' Sokszorozás' jegye vagy a' pont •, vagy a' fekvő kereszt $\times$; mindkettő egyenlően használtatik. Mi a' pontot mint helykímélőt; gyakrabban fogjuk venni.

Az elosztás' jegye a' kettős pont :, vagy csupán vonal, melly az osztandó 's osztó közzé tétetik. Ezen utolsó egyszersmind a' törtszámok' alakját képzeli.

Az emeléseknek egyéb jegye nincs, mint a' mennyiségek' felibe tett apró számjegy; ez azt mutatja hanyadik emelésen legyen valamelly mennyiség? Neve, *mutató* azért.

A' gyökér jegy $\sqrt{}$ a' latán *r* ből (radix); jobb szárnya felül hoszabbítatik, ha alá több tagú szám jön, ezután pedig olly, melly többé alá nem tartozik, $\sqrt{\quad}$; felibe íratik apró számjegyekkel, hanyadik gyökere legyen valamelly mennyiségnek.

A' két egymás mellett fekvő vonal = az egyenlőség' jegye.

A' fekvő V, > vagy < azt teszi, *nagyobb* vagy *kisebb*, mint nyílása vagy hegye áll valamelly mennyiség felé.

A' korlátok ( ), [ ], nagy könnyűséget nyújtanak némelly mennyiség' nyilván különözésére, ott kivált, hol több tagú számmal ugyan azon mívelet kívántatik.

A' végtelenség' jegye a' fekvő nyolcz ∞.

8 §. A' betükkeli, a' szám és mivelet' jegyekkeli élés.

20. Két mennyiség A és B összeadandó, kifejezése $A+B$, 8hoz adandó 5, lesz írva $8+5$.

Három mennyiség A, B és C összeadandó, lesz $A+B+C$; az egymáshoz adandó 25, 33 és 49 lesz, $25+33+49$, 's így akarmelly számú mennyiség.

$$A+B+C+D+E+F+G+H+\&$$
$$16+38+105+372+845+208+3196+\&$$

a' $+$ jeggyel csatoltatván, *összeadandó*.

21. Valamelly mennyiségből A, vonassék le más mennyiség B, kifejezése $A-B$.

8ból vétessen el 5, lesz $8-5$.

Szóval A kevesebb Bvel, 8 kevesebb 5tel.

$A-B-C$ azt mutatja hogy, Aból mind B mind C levonattassék; $16-9-5$ hogy 16ból 9 és 5 vétessék el 's közönségesen

$$A-B-C-D-E-F-G-H-\&$$
$$8765-670-589-3763-692-507-321-\&$$

azt mutatja, hogy az első tagból (A és 8765) minden következő $-$ jeggyel illetett mennyiség, levonassék.

Ha a' $+$ és $-$ jegy, több mennyiségekkel keverve vagy változtatva jön elő, értelme csakugyan az marad, t. i. a' $+$ jegyesek összeadandók a' $-$ jegyűek pedig levonandók.

$A+B-C+D-E-F+G-H+L+$'s a' t. annyi, mint A, B, D, G és Lt összeadni, az öszvesből pedig C, E, F, Ht, & levonni: szinte így

$$86-75+892-678+1008-972-85+63-10$$

86, 892, 1008 és 63 összeadandók, belőlök pedig 75, 678, 972, 85 és 10 levonandók.

$A \pm B$ és $A \mp B$ azt tészi A több vagy kevesebb Bvel, és A kevesebb vagy több Bvel, a' felsőbb jegyet elsőnek véve. $A \pm B$ az első esetben $A + B$, a' két mennyiség *öszvesét*, a' másodikban $A - B$, azoknak *különbségét* mutatja.

22. Sokszoroztassék A, Bvel; íratik A. B vagy $A \times B$

8, hattal, 8. 6 vagy 8×6.

Bár hány mennyiség sokszoroztassék egymással, az írás nem változik, 's A. B. C. D. E. F. G. H.. &.

63. 8. 71. 10. 21. 670. 9.---

azt jelentik, hogy mind valamennyi tag egymással sokszorozandó.

23. Valamelly mennyiség A, osztassék B által, íratik

$A : B$ vagy $\frac{A}{B}$, igy 24 osztassék 6 által $24 : 6$ vagy $\frac{24}{6}$.

Ha még egy mennyiség következnék az osztás' jegyével, ez azt tenné, hogy a' már eloszlott mennyiség' következése ismét osztassék el ezen harmadikkal; p. o.

$A : B : C$, vagy $\frac{A}{B} : C$, $24 : 6 : 2$, $\frac{24}{6} : 2$ azt jelenti, hogy minekutána A elosztatott Bvel vagy 24 a' 6tal, a' következés ismét osztassék el Cvel vagy 2vel.

Nagy hiba lenne azonban írni $A : \frac{B}{C}$ vagy $24 : \frac{6}{2}$ mert igy igen különböző következésre jutnánk, de ismét helyes $\frac{A : B}{C}$ vagy $\frac{24 : 6}{2}$; $\frac{A/B}{C}$ v. $\frac{24/6}{2}$; ezen utolsó alakot soha sem kell azonban választani, mert könnyen ád alkalmat a' hibára.

24. Valamelly mennyiség A, akármelly emelése' közönséges kifejezése A^m, hol a' kis *m* minden számot jelenthet. Szóval mondva itt A az *m* emelésen van. Ha a' kis *m*nek szám értékeket adunk az A nak különös és bizonyos emeléseit nyerjük és

A^2, A^3, A^4, A^5 's a' t. által

az A, második, harmadik, negyedik, ötödik 's a' t. emeléseit fejezzük ki: szinte így vannak

6^2, 8^2, 25^2, 100^2, 625^2, 1050^2, a' második
6^5, 8^5, 25^5, 100^5, 625^5, 1050^5, az ötödik és
6^8, 8^8, 25^8, 100^8, 625^8, 1050^8, a' 8dik emelésen.

25. Valamelly mennyiség' A, közönséges gyökere' kifejezése $\sqrt[m]{A}$, vagy is A nak *m* gyökere. Különös gyökerei A nak $\sqrt[2]{A}$ $\sqrt[3]{A}$ $\sqrt[4]{A}$ $\sqrt[8]{A}$ $\sqrt[15]{A}$ $\sqrt[24]{A}$'s a' t. az az A nak 2dik, 3dik, 4dik, 8dik 's a' t. gyökere, mutatója szerint. Megjegyzendő itt az, hogy a' második vagy úgynevezett négyszeg gyökér nem vesz mutatót fel, 's hogy a' gyökér jegy $\sqrt{\ }$ magában is minden felírás nélkül a' második gyökeret jelenti, úgy pedig, hogy a' szóbeli kimondásnál sem szokás mondani *második gyökér*, de egyszerűen csak gyökér. Igy $\sqrt{9}$ a' kilencz' gyökere vagy négyszeg gyökere, $\sqrt[3]{9}$ a' kilencz 3dik vagy koczka gyökere $\sqrt[4]{9}$, a' 9nek negyedik, vagy kettős négyszeg; 's a' t. gyökere.

26. Ha két mennyiség egymással egyenlő, közibe jeléül a' $=$ jegy tétetik. $A=B$ szóval, A egyenlő Bvel; a' mi magában ismét azt teszi, hogy A is B vagy B is A. A' két egyszerű kifejezések' egyenlítése, szükségtelennek lenni látszik első tekintetre; de változtatván alakjokat, vagy több részekre választván

azokat, az egyenlőség jegyének értelme mindjárt fontosabb lesz. Ha p. o. B állana α, β, γ és δ ból A=Bből lenne $A = \alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Igy 6=6 magában is érthető 's az egyenlítés jegye felesleges, de $6 = 3 + 3 = 2.3 = 8 - 2 = \frac{12}{2} = \sqrt{36}$ is, 's mindezen esetben az egyenlítés' jegye igen is helyén áll.

27. $A > B$ azt jelöli A nagyobb B nél.

$A < B$ pedig hogy A kissebb B nél.

$A >< B$ azt hogy A nagyobb vagy kisebb mint B,

$A <> B$ azt hogy A kisebb vagy nagyobb mint B,

A ≷ B végre, hogy A vagy nagyobb vagy kissebb mint B, de véle semmi esetre sem egyenlő.

Ezen jegy haszonvéte, kivált a' míveletek' helyeslése' bizonyításánál szembetűnő.

28. A' korlátok' haszonvéte gyakori és kiterjedett.

Arra szolgálnak, hogy valamelly, több tagból álló mennyiség, általok különöztessék el a' többitől, ott kivált, hol közöttök is már némelly míveleti jegy áll, p. o.:

Ha A sokszorozandó lenne B—C vel, vagyis a' B és C közti különbséggel, így kellene írni A. (B—C).

Ha itt a' korlátot elhagynók, nagyon hibás lenne írni A. B—C, 's ezen kifejezést korlát nélkűl csakugyan írni sem lehetne érthetőleg, mert így azt tenné hogy sokszoroztassék A B vel, 's a' származatból vonassék le C. szinte így 5. 3—1 egészen más mint 5. (3—1).

Ezen kis példából már észrevehetni, melly vígyázattal kell lenni a' korlátok' használata mellett, de későbben, ha a' mennyiségek' különféle alakjairól szólunk, közelebbről megismerjük kiterjedett hasznokat.

9 §. Az egység' némelly jelesb tulajdoniról.

29. Az egység, származtatója minden más számnak, a' természetes számok sora' kezdője 's elseje, határa a' nálánál kisebb mennyiségeknek, a' tört számoknak.

Valamint a' természetes Számok' sora az egytől kezdve *végtelen* 's felfelé határnélkül nő, úgy következik az egy után lefelé a' törtszámok' birtoka végnélküli sorban, a' határtalan kicsinység. Ezen tekintetből az egység mintegy közepén áll a' két végtelenségnek, a' végtelen nagynak 's a' végtelen kicsinynek.

30. Ha valamelly mennyiséghez az egység adatik, nagyobbitatik eggyel. Igy támada a' természetes számok' sora, hol mindegyik számhoz egy egy van adva hogy, a' sorban felfelé helyt találjon.

31. Ha valamelly mennyiségből az egység elvétetik, az eggyel kisebb lesz. Igy számolunk valamelly számnál kezdve a' természetes Számsorba viszszafelé, még ismét az egyesre érünk

Ha az egyből egy elvétetik, *semmi* sem marad 's lesz $1-1=0$. Ezen semmi, a' számok' végső köre.

Melly számok legyenek azonban az üresen vagy semmin túl, későbben fogjuk meglátni ha, az állító 's tagadó mennyiségekről szólunk.

32. Ha valamelly mennyiség az egységgel sokszoroztatik, változatlan ugyan az marad:

A. 1=A. 's azt teszi A egyszer van véve.
26. 1=26 egyszer huszonhat csak 26.
1. 1=1. egyszer egy=egy.
Akárhányszor sokszoroztassék pedig az egység maga magával, vagy más mennyiség az eggyel, mindég változatlan marad:

$$1.1.1.1.1.1.1.1.1\ldots=1 \text{ és}$$
$$A.\ 1.1.1.1.1.1.1\ldots=A.$$

33. Ha valamelly mennyiség eggyel elosztatik változatlan marad; és A: 1 vagy $\frac{A}{1}$=A, azt jelenti, hogy az egy nem osztja a' mennyiségeket, vagy hogy minden mennyiség ugyan azon egy részből áll, vagy végre, hogy az egyet annyiszor találjuk meg valamelly számban a' hány egyből az összetéve van. Igy 1 : 1 vagy $\frac{1}{1}$=1; egyet az egyben egyszer, egyet egy részbe venni egy, 's a' t.

Akár hányszor osztassék tehát valamelly mennyiség az eggyel, változatlan marad és

$$A:1:1:1:1:1:1:1:1:\ldots.=A.$$
$$1:1:1:1:1:1:1:1:1:\ldots.=1.$$
$$8:1:1:1:1:1:1:1:1:\ldots.=8.$$

Az egység' ezen tulajdoni alkalmat nyújtnak, a' számokat külön alakokban írhatni a' nélkül, hogy értéküket illetnők, és mindegy akár írjuk A. 1 akár A : 1 vagy $\frac{A}{1}$ mindegyik 3 alak = A.

így $256=1.256=256:1=\frac{256}{1}$.

Ha a' kifejezéseket $\frac{A}{1}$, $\frac{10}{1}$, $\frac{25}{1}$, $\frac{125}{1}$, $\frac{1000}{1}$'s a' t.
megfordítjuk, 's írjuk $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{1000}$'s a' t.

a' mennyiségek' *megfordított* vagy visszált értékére jutunk; mert, a' mint előbb A ban A egyes, 10 ben 10 egyes, 25 ben 25; 125 ben 125 és 1000 ben 1000 egyes van foglalva, lesz meg fordított vagy visszált értékek, az egynek A része, 10 ed, 25 őd, 125 őd és 1000 red része.

34. A' mint az egység nem változik akárhányszor sokszoroztassék magával (32), egy marad akármelly emelésen is, $1^m = 1$ tehát akármelly értéket adjunk az *m* nek, és különösen $1^2 = 1^3 = 1^4 = 1^5 = 1^{20} 1^{100} = 1.$ szinte igy ha 1. A=A tehát 1^m A is = A.

35. Változatlan marad végre az egység, akármelly gyökere vétessen (33), és $\sqrt{1} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[4]{1} = \sqrt[10]{1} = \sqrt[m]{1} = \sqrt[25]{1} = 1.$

II. SZAKASZ.

AZ ARITHMETIKAI MÍVELETEK EGÉSZ SZÁMOKKAL.

1 §. Az Öszveadás.

36. Az öszveadás' czélja a' nagyobbítás, 's ha a' számok' különös értéke nem kívánja máskép, két szám együttvéve mindég nagyobb mint valamellyik a' kettő közűl magában:

$$A+B>A \text{ és } A+B>B.$$

Az öszveadás által azon számot keressük, melly más valamelly öszveadandó számokat egyedül foglal magában, 's ez az *öszveadandó* számok' *öszvesének* neveztetik:

$A+B=C$ben A és B öszveadandók, C pedig az öszves magában foglalja At és Bt.

37. A' természetes számok' sora az egységből támad, ezt minden következő számhoz adván egyenként, (9, 13, 30) és

$$1=1$$
$$1+1=2$$
$$1+1+1=3$$
$$1+1+1+1=4$$
$$1+1+1+1+1=5$$
$$1+1+1+1+1+1=6$$
$$1+1+1+1+1+1+1=7$$
$$1+1+1+1+1+1+1+1=8 \text{ 's így tovább,}$$

mit következőkép is írhatunk:

$$1+0=1$$
$$1+1=2$$
$$2+1=3$$
$$3+1=4$$
$$4+1=5$$
$$5+1=6$$
$$6+1=7$$
$$7+1=8 \text{ 's a' t.}$$

lesz tehát a' természetes számok' sora kezdete

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 's a' t.

Az öszveadás, összevevés, összeszámolás, nyilván kifejezik a' mívelet' tulajdonát, 's ha két, a' természetes számok' sorában álló számot öszve kellene adni, 4et az 5höz p. o.: az 5 egyeshez még 4 egyet számlálnánk, 's lenne:

$$5+4=5+1+1+1+1=9.$$

Ezen hozzá vagy egybeszámlálás azonban idővesztés; némelly gyakorlás által az egy jeggyel írt számok' öszvesét azonnal megmondhatjuk mint megpillantánk azokat.

A' következő táblácska az egyjegyű számok' öszvesét mutatja, párosával véve azokat minden változásaikban; segéde által kiki elméjébe veheti azt.

2	1+1				
3	1+2				
4	1+3	2+2			
5	1+4	2+3			
6	1+5	2+4	3+3		
7	1+6	2+5	3+4		
8	1+7	2+6	3+5	4+4	
9	1+8	2+7	3+6	4+5	
10	1+9	2+8	3+7	4+6	5+5
11	2+9	3+8	4+7	5+6	
12	3+9	4+8	5+7	6+6	
13	4+9	5+8	6+7		
14	5+9	6+8	7+7		
15	6+9	7+8			
16	7+9	8+8			
17	8+9				
18	9+9				

38. Az egyjegyű számok' öszveadása noha könnyű, gyakorlást kíván, hogy a' számítás sebesen 's egyszersmind jól tétessen; a' kilencz külön jegy' öszvese, $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$; ha a' tanuló ezen jegyeket vagy függő vagy fekvő sorokban, különbféleképp' elrendelve írja, haszonnal gyakorolhatja magát; p. o.:

2	1	3	9	7	5	5	6
+5	+3	+1	+6	+5	+8	+2	+1
+7	+5	+5	+3	+3	+6	+8	+3
+8	+7	+9	+8	+2	+9	+7	+2
+1	+9	+7	+4	+1	+4	+1	+7
+9	+2	+2	+2	+4	+7	+9	+5
+3	+4	+8	+5	+6	+2	+6	+8
+6	+6	+4	+1	+8	+3	+4	+4
+4	+8	+6	+7	+9	+1	+3	+9 'sat.
=45	=45	=45	=45	=45	=45	=45	=45

vagy 2+4+5+8+6+9+3+1+7=45
3+1+5+7+9+4+6+8+2=15
4+3+7+9+5+2+1+6+8=45
5+7+3+1+4+6+9+2+8=45
9+1+8+2+7+3+6+4+5=45 's a' t.

39. A' felsőbb rendű vagy több jegyből álló számok' öszveadása semmi nehézséget nem nyújt; értvén a' rendszert vagyis a' számok' tizedes alkotmányát, könnyű lesz akármelly nagy számot alkotó részeibe választani, (10. 11.) 's ekkor mindegyik rendet úgy adjuk öszve, mintha egyesek volnának jelentő jegyei.

Legyen p. o.: öszveadandó 7689 és 6548.

Az első számot a' 7689et így írhatjuk:

7000+600+80+9.

a' másikat a' 6548at pedig

6000+500+40+8

's lessz a' kettő öszve adva:

13 ezres 11 száz 12 tízes és 17 egyes, a' mi írva

13000+1100+120+17.

Az egyeseknél álló 1 tizest vissza adván a' tizesekhez, lesz:

13000+1100+130+7

a' tizesek közt lévő százast általvivén tovább a' százasokhoz lessz:

$$13000+1200+30+7$$

a' százasok mellett levő 1 ezrest az ezresekhez,

$$14000+200+30+7$$

's végre külön írván az ezreseknél álló 1 tízezrest lesz a' keresett öszves elrendelve,

$$10000+4000+200+30+7=14237.$$

Ezen példa világosan érteti a' nagyobb számok' öszveadási míveletét, melly abban áll, hogy az alsóbb rendek' öszveadásából eredett felsőbb rendeket ezekhez által kell vinni.

Ha az öszveadandó számok' egyes jegyei' öszvese nem ád felsőbb rendhez tartozót, semmi általvitel nincs; p. o.:

$$\begin{array}{r} 60752 \\ +27143 \\ +11004 \\ \hline =98899 \end{array}$$

de az illy eset ritka 's az alsóbb rendek többnyire felsőbbeket származtatnak mint p. o.:

$$\begin{array}{r} 578932 \\ +767864 \\ +897859 \\ \hline =2244655 \end{array}$$

ezen példában mindegyik alsóbb rendből származik valamelly a' következőhez adandó felsőbb.

Vegyünk a' mívelet bizonyítására nagyobb példát. Legyenek öszveadandók e' számok.

$$670902+789076+8650401+541200+679008.$$

A' Számítás ekkép áll

Öszveadatnak az egyesek

$2+6+1+0+8=17$ egyes $=10+7$

A' tizesek

$1+0+7+0+0+0=8$ tizes $=80$

Itt az első szám az egyes tíz, mint az egyesek öszveadása által származott előre a' tízesekhez adatott, 's a' többi esetekben is így fogunk tenni.

A' százasok, nem származván a' tízesekből egy is, maradnak.

$9+0+4+2+0=15$ százas $=1000+500.$

Az ezresek

$1+0+9+0+1+9=20$ ezres $=20000=2$tiz ezer

az ezresek helyén tehát semmi sem marad, a' két tízezres pedig által vitetik.

A' tizezresek lesznek

$2+7+8+5+4+7=33$ tizezres $=300000+30000$

A' százezresek

$3+6+7+6+5+6=33$ százezres $=3000000+300000$

A' milliók végre

$3+8=11$ millio $=10,000000+1,000000$

az az: 1 tizmillio és egy millio.

Ha a' részeket egymás-mellé írjuk lesz:

$7+80+500+0000+30000+300000+1000000$
$+10000000$

a' közönséges írás szerént helyükre tévén a' rendeket, lesz:

11330587 a' keresett öszves.

A' közönséges mód szerént az öszveadandók egymásalá íratnak úgy, hogy a' rendek helyesen essenek egymásalá.

40. Akármelly helyre írjuk az öszveadandó számokat, az az akárhogy rakjuk azokat egymás alá, öszvesek nem változik: p. o.:

7328+5609+8751+4892=8751+7328+5609+4892

és 5609	4892	7328	8751	
+7328	+8751	+4892	+5609	
+4892	+7328	+5609	+7328	
+8751	+5609	+8751	+4892	's a' t.

41. De ha ezen példában a' jegyek is felcseréltetnek egymással, megtartván azonban helyértéköket, még akkor sem változik öszvesek, szintugy nem mint akármelly' más példában, 's a' következő számok' öszvese mindegyik esetben = 26580.

5301	7622	8792	4809	7851	
+7622	+5309	+5608	+5728	+8692	
+4799	+8891	+4859	+7652	+5309	
+8858	+4758	+7321	+8391	+4728	's a' t.

mert az egyesek' jegyei	1, 2, 8, 9
a' tizeseké	0, 2, 5, 9
a' százasoké	3, 6, 7, 8
's az ezreseké	4, 5, 7, 8

változatlan maradván, öszvesek is ugyan az.

Ezen tekintet, bizonyítványára vezet 1-ször valljon jól adatott é öszve a' különféle szám (mennyire az öszveadásnak bizonyítványa lehetséges) mert csak viszonti és ismételt öszveadás által győződhetünk meg a' mívelet helyes létéről; megmutatja 2-szor hogy, akármelly renden kezdjük az öszveadást, az öszves semmi változást nem szenvedhet. Szokás szerint az egyeseknél kezdetik a' mívelet 's feljebb megy a' rendeken míg, a' legfelsőbbel végződik; de kiki látni fogja, hogy p. o.: öszszevissza lehet a' számokat venni, csak a' rendeket vegyük szoros figyelmünk tárgyául. A' következő példában a' mondott nyilván fog látszani:

Öszveadandók

$78306+34573+80965+53874+49783+85317.$

Az egyesek' öszvese $=6+3+5+4+3+7 \quad =28$

a' tizeseké $=0+7+6+7+8+1=29$ tiz $=290$

a' százasoké $=3+5+9+8+7+3=35$ száz $=3500$

az ezreseké $=8+4+0+3+9+5=29$ ezer $=29000$

a' tizezreseké $=7+3+8+5+4+8=35$ tizezer $=350000$

Tudván hogy a' számok' öszvese nem változik akármelly sorban adjuk azokat öszve, megtartván a' rendek helyét, írhatjuk tehát a' különös rendek' öszveseit akármelly helyre 's módon.

a)

$$\begin{array}{rrrr}
28\;35 & 35 & 28 & 350000 \\
29 & 29 & 290 & 29000 \\
35 & 35 & 3500 & 3500 \\
29 & 29 & 29000 & 290 \\
35 & 28 & 350000 & 28 \\
\hline
=382818 & =382818 & =382818 & =382818
\end{array}$$

; vagy

b)

$$\begin{array}{rrrr}
3500 & 32\cdot\cdot & 29000 & 29\cdot\cdot\cdot \\
28 & \cdot\cdot28 & 290 & 29 \\
29000 & 29\cdot\cdot\cdot & 350000 & 35\cdot\cdot\cdot\cdot \\
290 & 29 & 28 & 28 \\
350000 & 35\cdot\cdot\cdot\cdot & 3500 & 35\cdot\cdot \\
\hline
=382818 & =382818 & =382818 & =382818
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
=\quad 2929 \\
+353528 \\
\hline
=382818
\end{array}$$

Az a) alatt először az egyeseknél kezdve felfelé, másodszor a' 10 ezreseknél kezdvén lefelé történt az öszveadás: b) alatt először a' százasoknál, másodszor az ezreseknél kezdődött 's mint látni változtatva adattak öszve az egyes rendek.

42. Ha két szám' A és B öszvese C az az ha $A+B=C$ mindegyik öszveadott szám megtaláltatik, ha Cből a' másik levonatik 's lesz:

$A=C-B$ és $B=C-A$. (lásd Levonás) 's így az öszveadás' néminémü próbája a' levonás által tétetik.

2 §. A' Levonás.

43. Mint az öszveadás' ellenmívelete, kisebbítést tárgyaz: esmervén két szám' öszvesét 's az egyiket a' kettő közűl, megtalálni a' másik számot; vagy keresni, melly különbség légyen a' két adott szám közt.

Ha Aból levonatik B és $A>B$, valamelly szám fog maradni, mellyet a' két számközti különbségnek nevezünk.

Ha tehát $A-B=D$ A a' *kisebbitendő* B a' *levonandó* D pedig a' *különbség*.

Ha $A=B$ úgy $A-B=0$, az az: ha a' szám maga magából elvétetik, semmi sem marad, vagy is az A és B közti különbség $=0$ és D is $=0$.

$A-B=D$ből következik, hogy a' különbséget ismét a' levonandóhoz adván, a' kisebbítendő szám előjön és $B+D=A$.

Ezen tekintetek a' levonás' kétféle jelentésére vezetnek:

1) Vagy azon szám kerestetik, melly megmarad, ha a' kisebbik a' nagyobbikból elvétetik, vagy

2) azon szám, melly a' kisebbikhez adatván a' nagyobbikat ismét előhozza.

Az első esetben a' levonás' közönséges modját találjuk, a' másodikban öszveadás által keressük a' különbséget.

Az első esetben, mondjuk p. o.: hogy, 8ból 5töt el vevén vagy levonván, marad 3, az az 8—5=3. A' másodikban, kérdezzük hány egyest, vagy mennyit kell 5höz adni, hogy 8 legyen, az az 5+3=8, 's mindkét esetben megleltük a' 8 és 5 közti különbséget a' 3at.

44. A' kisebbítendő' jegyei nagyobbak lévén a' levonandó' jegyeinél, a' mívelet semmi nehézséget nem mutat, 's mindegyik rend' jegyei közt külön kerestetik a' különbség; p. o.:

86975—62514 = 24461 vagy is másként írva

$$\begin{array}{r} 86975=\mathrm{A} \\ -62514=\mathrm{B} \\ \hline =24461=\mathrm{D} \end{array}$$

Az első mívelet szerént mondjuk

4et az 5ből marad 1
1 „ a' 7 „ „ — „ 6
5 „ a' 9 „ „ — „ 4
2 „ a' 6 „ „ — „ 4
's 6ot a' 8ból marad 2, mindezen egyes számok a' vonal alá íratnak.

A' második esetben mondjuk 4 és 1=5, 1 és 6=7, 5 és 4=9, 2 és 4=6, 6 és 2=8, 's a' mint a' számokat 1, 6, 4, 4, 2 kimondjuk, le is írjuk. Ezen mód egyszersmind a' levonás próbáját is adja.

Ha a' levonandó szám' némelly jegyei nagyobbak mint a' kisebbitői, a' levonás nem történhetik a' nélkül, hogy valami felsőbb rend' egyesét hozzá ne adnók a' kérdéses alsóbb rendhez; p. o.: ha 32ből 19 lenne levonandó, a' 9 egyest a' 2 egyesből nem lehetne levonni a' nélkül hogy, a' kettőshöz egy tizest ne adnánk, melly szerint belőle 12 lesz 's ebből vonván le 9et, marad 3, elvévén a' kisebbítendő 3 tizeséből egyet, ott marada még 2, levonván ebből a' levonandó egyes tizesét marad még 1 tizes 's lesz 32—19=13.

Ezen mód szerint a' feljebbvaló rendből *kölcsönözünk* egyet, hogy a' levonás történhessék.

A' második esetben a' kölcsönözés elmarad 's így kérdjük; mennyi kell kilenczhez hogy 12 legyen?

9+3=12, leírván a' hármast, a' helyett hogy a' három tizest eggyel kisebbítenők, a' levonandó' egy tiseséhez még egy tizest adunk, 's lesz 2+1=3, leírván az egyet, lesz mint feljebb 19+13=32 vagy 32—19=13.

Ezen utóbbi mód' haszna sokkal szembetünőbb, ha valamelly kisebbítendő számból több szám levonandó: legyen p. o.:

58769ből levonandók 8768, 7592, 8071, 6542 és 963.

Tudjuk (21) hogy ezen 5 levonandó számot öszve kell adni 's az öszvest levonni a' kisebbitendőből, ez lenne írva.

58769—(8768+7592+8071+6542+963), vagy = 58769—31936=26833.

De rövidebben mívelünk következőkép':

$$\begin{array}{r} 58769 \\ -\ 8768 \\ -\ 7592 \\ -\ 8071 \\ -\ 6542 \\ -\ 963 \\ \hline =26833 \end{array}$$

mondván $3+2+1+2+8=16$ ehez kell 3 hogy 19 legyen, a' három leíratik;

az egyet (a' 19es egyes tizesét) a' következő rendhez adván

$1+6+4+7+9+6=33$, kell 36hoz 3, ez leíratik; a' 36 feleslegét a' 3ast ismét a' következő rendhez adván

$3+9+5+0+5+7=29$, ehez kell 8 hogy 37 legyen továbbá:

$3+6+8+7+8=32$, kell hogy 38 legyen 6

's végre a' 38 hármasa a' kisebbítendő utolsó jegyéből az 5ből elvétetvén, vagy a' háromhoz 2 adatván, a' kettős leíratik.

A' levonás' helyes mívelete kitűnőbb lesz következő példából:

Legyen keresendő a' 53721 és 8976 közti különbség?

Ha a' két számot egyes rendjeikbe választjuk lessz:

a' kisebbítendő $=50000+3000+700+20+1$
a' levonandó $=$ $8000+900+70+6$

Az utóbbinak jegyei, a' nekik meg felelő rendekre nézve mind nagyobbak mint a' kisebbítendő' ugyan azon rendbeli jegyei; szükséges tehát a' felsőbb rendekből pótolni az alsóbbak' hijányját; leg elől kezdvén a' pótlást az egységig, következő rendeléseket képzeljük:

a) 40000+13000+700+20+1

itt a' 10 ezresekből egyet, az ezresek potlására vettünk

b) 40000+12000+1700+20+1

az százasokat egy ezressel nagyobbítottuk:

c) 40000+12000+1600+120+1

a' tizesekhez egy százast adtunk

d) 40000+1200+1600+110+11

's végre az egyeshez egy tizest:

Most már a' kisebbítendőnek mindegyik rendje nagyobb mint a' levonandóé, a' levonás könnyű lesz a' számokat egymás alá írván, 's áll:

$$\begin{array}{r} 40000+12000+1600+110+11 \\ -\quad 8000-\ 900-\ 70-\ 6 \\ \hline =40000+\ 4000+\ 700+\ 40+\ 5=44745 \end{array}$$

45. Ha a' kisebbítendő valamelly számmal nő vagy fogy, a' levonandó pedig változatlan megmarad, a' különbség ugyan azon számmal nő vagy fogy; vagy is ha $A-B=D$ lesz $A+a-B=D+a$ és $A-a-B=D-a$ adjunk a' betűknek értékeket 's legyen

$A=15$, $B=6$, lesz $A-B=D$ $15-6=9$ $D=9$

$a=5$ lesz $A+a-B=D+a=15+5-6=9+5=14$

és $A-a-B=D-a=15-5-6=9-5=4$

Ebből következik hogy, a' különbség nem változik ha a' kisebbítendő és levonandó egyszersmind, ugyan azon mennyiséggel nő vagy fogy:

$A-B=D$, és $(A+a)-(B+a)=D$, szinte $(A-a)-(B-a)=D$; adjuk meg az A, B és a nak elébbi értékeket lesz:

$15-6=9, (15+5)-(6+5)=9$ és $(15-5)-(6-5)=9$

3 §. A' Sokszorozás.

46. A' Sokszorozás tárgya: többször adni összevalamelly számot. Itt is két szám jő kérdésbe, egyike a' *Sokszorozandó*, másika a' *Sokszorozó:* ezen utóbbi annyiszor veszi az elsőt a' mennyi egyesből áll. A' sokszorozásból eredő szám a' *Származat.* Mindkét szám tehát alkotó része a' származatnak, 's ennek factorának neveztetik.

A. B=Cben

A a' sokszorozandó, B a' sokszorozó C pedig a' származat. A és B factorai Cnek. C, áll Aból őt Bszer véve, vagy is az At annyiszor véve a' hány egyest foglal magában B, vagy a' mi mindegy Bt, Aszor véve.

47. A' sokszorozás mint említők, ismételt öszveadás, és valóban 3 szor 4 p. o: nem tész egyebet, mint hogy a' négy háromszor vétessék vagyis adassék öszve; 's ez lenne: 4+4+4. De minthogy a' nagy számok' gyakorti öszveadása nem kevés időbe kerülne, a' sokszorozás külön mívelete könnyűséget nyújt a' keresett származat meglelésénél.

48. Tudjuk hogy a' természetes számok, az *egység'* ismételt összeadásából támadtak, (37) de vannak közöttök ollyak is, mellyek *más egyébb* számok' ismételt öszveadása által is előhozathatók; így p. o: lesz a' 2 ismételt összeadása által:

$$\begin{aligned} 2&=2\\ 2+2&=4\\ 2+2+2&=6\\ 2+2+2+2&=8\\ 2+2+2+2+2&=10\\ 2+2+2+2+2+2&=12 \text{ 's a't.} \end{aligned}$$

ezek a' *párosszámok* a' természetes sorban; a' 3 ismételt összeadásából erednek,

$$3=3$$
$$3+3=6$$
$$3+3+3=9$$
$$3+3+3+3=12$$
$$3+3+3+3+3=15$$
$$3+3+3+3+3+3=18$$

4, 5 és 6ból

$$4=4$$
$$4+4=8$$
$$4+4+4=12$$
$$4+4+4+4=16$$
$4+4+4+4+4=20$, 's a't.

$$5=5$$
$$5+5=10$$
$$5+5+5=15$$
$$5+5+5+5=20$$
$5+5+5+5+5=25$, 'sa't.

$$6=6$$
$$6+6=12$$
$$6+6+6=18$$
$$6+6+6+6=24$$
$$6+6+6+6+6=30$$

7, 8 és 9ből

$$7=7$$
$$7+7=14$$
$$7+7+7=21$$
$$7+7+7+7=28$$
$7+7+7+7+7=35$, 's a't.

$$8=8$$
$$8+8=16$$
$$8+8+8=24$$
$$8+8+8+8=32$$
$8+8+8+8+8=40$, 'sa't.

$$9=9$$
$$9+9=18$$
$$9+9+9=27$$
$$9+9+9+9=36$$
$9+9+9+9+9=45$. 's a' t.

Mindezen számok tehát sokszorosai a' 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9nek, 's következőkép is írhatjuk azokat:

1.2= 2	1.3= 3	1.4= 4	1.5= 5
2.2= 4	2.3= 6	2.4= 8	2.5=10
3.2= 6	3.3= 9	3.4=12	3.5=15
4.2= 8	4.3=12	4.4=16	4.5=20
5.2=10	5.3=15	5.4=20	5.5=25
6.2=12	6.3=18	6.4=24	6.5=30
7.2=14	7.3=21	7.4=28	7.5=35
- - - -	- - - -	- - - -	- - - -
1.6= 6	1.7= 7	1.8= 8	1.9= 9
2.6=12	2.7=14	2.8=16	2.9=18
3.6=18	3.7=21	3.8=24	3.9=27
4.6=24	4.7=28	4.8=32	4.9=36
5.6=30	5.7=35	5.8=40	5.9=45
6.6=36	6.7=42	6.8=48	6.9=54
7.6=42	7.7=49	7.8=56	7.9=63
- - - -	- - - -	- - - -	- - - -

's ha ezen számokat sorokba vesszük, felül az egyes számok természetes sorát tévén 's nehány következő tagot hozzájok adván, lesz

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 's a't.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126 's a't.

's ezen kis táblában nem csak a' fekvő sorban állanak az azt kezdő számok sokszorosai, de a' függőkben is szintúgy felfelül lefelé, 's itt csakugyan a' 10, 11, 12, 13 's 14 sokszorosai is megtaláltatnak 9esökig.

Ha ezen sorokat figyelemmel tekintjük, azt fogjuk találni:

1-ször, hogy a' természetes számok sorában minden második, negyedik, hatodik 's a' t. vagy is a' páros-helyen álló szám a' *kettős' többszöröse.*

2-szor, hogy vannak olly számok, mellyek több sorban megtaláltatnak, így megvan a' 12 p. o: a' 2, 3, 4 és 6dik sorban, a' 24 az első 2, 3, 4, 6 és 8dik sorban 's több illyen.

3-szor, hogy olly számok is vannak, mellyek csak egyszer jőnek elő és semmi egyéb sorban meg nem találhatók, kivévén a' természetes számok' sorát, illyenek az 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13. 's a' t.

49. Az első tekintet mutatja hogy, minden páros szám a' kettősnek sokszorosa, 's viszont a' kettősnek minden sokszorosa szükségesképen páros szám.

A' páros számok' közönséges kifejezése $2m$, akármi legyen m értéke; a' páratlan számoké $2m\pm1$, mert akár adjuk az egyet a' páros számhoz, akár vegyük el azt, páratlan szám kerül ki.

A' második tekintet a' számok' öszvetételére vagy alkotórészei' ismeretére vezet 's mutatja, miként származnak más számok' sokszorozása által. Igy p. o: $6=2.3$ és $12=2.6$, de minthogy a' $6=2.3$, lesz a' $12=2.2.3$'s itt már három számra akadtunk, melly egymással sokszorozandó, hogy 12 származzon.

De tizenkettő egyszersmind $=3.4$ is, hol a' 4 ismét $=2.2$: akármelly úton keressük tehát 12nek alkotó részeit mindég a' 2, 2 és 3ra akadunk, 's mondjuk hogy a' 2, 2 és 3 *factorai* 12nek. De valamint a' 12-nek a' 4 és a' 6 is factorai; $4.3=12$ és $6.2=12$, ezen esetnek megkülönböztetéséül a' 2, 2, és 3, a' 12 *egyes* factorainak, a' 4 és 6 pedig *összetett factorainak* neveztetnek.

a' 36 p. o: $=1.36$ harminczhat egyes
$=2.18$ 18 kettős, vagy kettőse a' 18nak
$=3.12$ 12se a' hármasnak, vagy 3sa a' 12nek
$=4.\ 9$ 9se a' 4nek vagy 4se a' 9nek
$=6.\ 6$ hatosa a' hatnak.

Ha tehát felakarnók keresni, melly számok' sokszorosa ád 36ot, melly számok' sokszorozásából származik 36, vagyis mellyek 36nak factorai? megtalálnók egyes és összetett factorait, ha őt mint itt, apróbb részeibe vennők, 's az egyes factorokat változtatva egymással sokszoroznók, melly felkeresést alább fogjuk látni.

A' harmadik tekintet végre azt mutatja hogy, vannak olly számok, mellyek csupán csak az egység ismételt összeadásából eredtek, és semmi más szám vagy számok sokszorozása által nem képzelhetők. Ezen számokat ***Első számoknak***, nevezzük. Ebből következik hogy, minden első szám páratlan, kivévén a' kettőst, melly mint a' többi első, noha páros, az egyesből támadott: nem lehet azonban megfordítva mondani hogy; minden páratlan szám első, a' mi magában is nyilván, mert p. o: 9, 15, 21, 's a' t. páratlanok lévén azért nem elsők és,

$$9=3.3,\ 15=3.5 \text{ és } 21=3.7$$

50. A' sokszorozás míveleténél csak a' 9 jelentő számjegy' különbféle származata jön kérdésbe, akármelly legyen ennek helyértéke. Szükséges tehát hogy a' tanúló az egyes számok' kölcsönös származatát tökélletesen tudja 's elméjében tartsa, ha könnyűséggel akar mívelni. Következő kis táblában minden egyjegyű szám' sokszorosa megvan, kettőt kettőt véve egybe.

2.2= 4	3.3= 9	4.4=16	5.5=25	6.6=36	7.7=49	8.8=64	9.9=81
2.3= 6	3.4=12	4.5=20	5.6=30	6.7=42	7.8=56	8.9=72	
2.4= 8	3.5=15	4.6=24	5.7=35	6.8=48	7.9=63		
2.5=10	3.6=18	4.7=28	5 8=40	6.9=54			
2.6=12	3.7=21	4.8=32	5.9=45				
2.7=14	3,8=24	4.9=36					
2.8=16	3.9=27						
2.9=18							

Az úgy nevezett Pythagoras táblája, négyszeg, mellyben fekvő és függő sorok minden sokszorosait foglalják az első 9 számnak, de egyszersmind kétszer is, mert egyszer p. o: 5.8=40 megtaláljuk 's ismét 8.5=40t is.

A' következő két tábla kurtított és változtatott alakja Pythagorás táblájának.

	2	3	4	5	6	7	8	9
9	18	27	36	45	54	63	72	81
8	16	24	32	40	48	56	64	
7	14	21	28	35	42	49		
6	12	18	24	30	36			
5	10	15	20	25				
4	8	12	16					
3	6	9						
2	4							

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3		9	12	15	18	21	24	27
4			16	20	24	28	32	36
5				25	30	35	40	45
6					36	42	48	54
7						49	56	63
8							64	72
8								81

Mindegyik táblában ott van a' keresendő sokszorosa két számnak, hol a' függő sorban lévő a' fekvő sorban állóval egybe üt.

A' mint p. o: 7 egyes sokszoroztatván 8al =56 egyes, szintugy lesz 7tizes sokszoroztatván 8al=56 tizes 's a't.

51. A' tizzel való sokszorozás azt tészi hogy, a' sokszorozandó szám egy renddel feljebb emeltessék (9), mi az által történik, ha jobbra egy üres ragasztatik hozzá, így

$$236.10=2360.$$

Ha valamelly mennyiséget 100szor, 1000szer 's a' t. kell venni, vagy közönségesen, akármelly rendű egyessel sokszorozni, annyi üres ragasztatik hozzá, hányat hord magával az egy.

38.100=3800, 38.1000=38000, 38.10000=380000 's a't.

52. Ha valamelly szám más, egyjegyű számmal sokszoroztatik, szükséges hogy, mindegyik rendű jegye külön sokszoroztassék. p. o:

$$3412.2=(3000+400+10+2).2$$
$$=6000+800+20+4=6824.$$

Ha két egyjegyű szám sokszoroztatik (50), a' származat csak négy esetben egyjegyű 's minden másban 2 jegyű.

A' négy eset ez, 2.2=4, 2.3=6, 2.4=8 és 3.3=9. Kivan itt véve az egység, mi mint tudjuk minden számot változatlan hágy.

A' két jegyű származatok 10től 81ig vannak, ha tehát p. o: 897 lenne sokszorozandó 6tal, a' különös származatokat nem lehetne olly könnyen leírni, mint előbbi példánkban, mert (800+90+7).6=4800+540+42 's mindegyik jegy a' mint 6tal sokszoroztatott felsőbb rendet szűlt, 7.6=42ben 4 tizest, 90.6=540-ben 5 százast, 800.6=4800ba végre 4 ezrest származtatott. Minthogy ezen egyes tagok öszveadandók, a' fellyebb rendű jegyek szinte ugy adatnak a' velük egyneműekhez, mint az öszveadás míveletinél, és

$$\begin{array}{rr} 42 & 4800 \\ +540 & +540 \\ +4800 & +42=5382. \end{array}$$

A' mívelet közönségesen ekép történik.

$$\begin{array}{r} 897.6 \\ \hline 5382 \end{array}$$

Először a' legalsóbb renden, az egyeseken kezdetvén a' sokszorozás, tovább tovább megy a' felsőbbeken, hozzá adván a' következőhöz azon felsőbb rendű jegyet, melly az alsóbbnak sokszorozása által származott. Példánkban így szóllunk:

6.7=42, leírjuk a' kettőst 's a' 4 tizest fenntartjuk: továbbá 6.9=54 tizes, hozzá adjuk az elébbi 4 tizest, lesz 58 tizes, leírván a' 8 tizest, fenntartjuk az 5 százast:

6.8 végre =48 százas, ehez adván a' megmaradott 5 százast, lesz a' végső leírandó szám 53 százas.

53. Ha mindkét factor többjegyű, a' mívelet nem változik. Az egyiknek minden jegye, a' másik' minden jegyével egyenként és különösen sokszoroztatik: figyelem szükséges az egyes származatok' értékére, hogy az öszveadásnál tulajdon helyekre jussának: p. o:

I.) 897.65=897. (60+5)

az első származat 897.60=53820

a' második 897.5 = 4485

öszvesek 897.60+897.5 =53820+4485=58305.

II.) 897.657=897.(600+50+7)

$$\begin{array}{r} =538200 \\ +\ 44850 \\ +\ \ 6279 \\ \hline =589329 \end{array}$$

Szükséges előre figyelmezni arra, melly rendek származnak a' két factor jegyeiből, 's közönségesen, hogy, két különbféle rend, melly más rendet származtat?

A' következő tábla valamennyire segélli a' visgálatot.

	egyes	tizes	százas	ezres	10 E	100 E	Millio	10 M
tizes	tizes	százas	ezres	10 E	100 E	Millio	10 M	100 M
százas	százas	ezres	10 E	100 E	Millio	10 M	100 M	1000 M
ezres	ezres	10 E	100 E	Millio	10 M	100 M	E M	10 E M
10 E	10 E	100 E	Millio	10 M	100 M	E M	10E M	100EM
100E	100 E	Millio	10 M	100 M	E M	10 E M	100EM	Billio
Millio	Millio	10 M	100 M	E M	10 EM	100EM	Billio	10 B
10 M	10 M	100 M	E M	10 E M	100EM	Billio	10 B	100 B
100 M	100M	E M	10 E M	100EM	Billio	10 B	100 B	1000 B

's innen p. o: 10000.100=1000000
1000.100000=100000000 's a' t.

ha itt az egyesek helyébe olly jegyeket írunk, melylyek származata felsőbb rendet hoz, egy számmal többet fogunk találni; p. o:

60000.700=42000000
és 5000.800000=4000000000

Az első esetben a' tizezer sokszoroztatván 100al, milliót adott, a' másodikban 6szor 10ezer sokszoroztatván 7szer százzal 42 az az 2 egyes és 4 tizes milliót: szinte így az 5000, nyolczszáz ezerrel 4000 milliot az az 40százas milliot adott.

54. A' származat nem változik akármelly jeggyel kezdjük a' sokszorozást, akármelyikkel fojtassuk, akár-

melyikkel végezzük; a' sor tehát és az elsőség, számba nem vétetik és csupán csak a' kimondott: hogy *mindegyik jeggyel a' sokszorozás megessen; a' részes származatok pedig, helyesen adassanak öszve.* p.o: 573.462=573.(400+60+2)=229200+34380+1146 Az öszveadásból tudjuk, hogy akármelly sorban adassanak a' számok öszve, öszvesek nem változik: írhatjuk tehát a' példánkban lévő három különszármazatot akármelly sorban, öszvesek nem változik, 's így nem a' származat is.

III.) Sokszoroztassék 5347, 6528 által és csakugyan

először	5 által, lesz	5347.500	= 2673500
másodszor	8 — „ „	5347.8	= 42776
harmadszor	6 — „ „	5347.6000	=32082000
's végre	2 — „ „	5347.20	= 106940

lesz a' 4 külön származat öszvese =34905216.

A' közönséges míveletnél nem szokás az üreseket oda írni, de csupán csak a' jelentő jegyeket. Ekkor a' figyelem nagyobb a' rendek helyére, a' számok' egymásalá írása mellett; az üresek helyébe pontokat tenni gyakorta alkalmas.

Ha elébbi példánkat megtartjuk, különbféleképp változtathatjuk a' sokszorozandó jegyek sorát. Jeleljük meg apró jegyekkel, melly sorban sokszoroztunk az egyik factor' a' 6528, 4 különböző jegyével.

```
            1234                    4321
1.)    5347.6528        2.)    5347.6528
        32082                      42776
       +26735                    +10694.
        +10694                  +26735..
         +42776                +32082...
      =34905216                =34905216
```

$$3.)\quad \begin{array}{r} \scriptstyle 2143 \\ 5347.6528 \\ \hline 26735.. \\ +32082... \\ +\ 42776 \\ +\ 10694. \\ \hline =34905216 \end{array} \qquad 4.)\quad \begin{array}{r} \scriptstyle 3214 \\ 5347.6528 \\ \hline 10694. \\ +\ 26735.. \\ +32082... \\ +\ 42776 \\ \hline =34905216 \end{array}$$'s a' t.

55. Ha több szám vagy factor sokszorozandó, eleinten csak kettejének származata keresendő, ezután a' talált származaté 's a' harmadik factoré 's így tovább p.o:

$4.5.3.9.8=20.3.9.8=60.9.8=540.8=4320.$

56. Akármelly rendben vagy sorban sokszoroztassanak a' factorok egymásközt, a' származat változatlan.

$A.\ B=B.A$ és $5.8=8.5$

$A.B.C=C.B.A=B.C.A=A.C.B=B.A.C=C.A.B$

és $3.7.9=3.9.7=7.3.9=7.9.3=9.3.7=9.7.3.$

Az által hogy a' factorokat változtatni lehet, 's azzal sokszorozni a' mellyikkel akarunk, a' számitásnál gyakorta könnyebbítésre találunk; így p. o: sokkal alkalmasabb lesz

38.789675nél, a' 38al a' 789675öt mint megfordítva sokszorozni.

A' factorok végén álló üresek a' sokszorozás alatt elmaradhatnak, 's azután ragasztatnak a' származathoz, p. o:

280ant 20al sokszorozni annyi mint 28at 2vel, 's a' származathoz 2 üreset ragasztani:

800.7000.5000, 8at 7 és 5tel sokszorozni 's 8 üreset hozzá adni $=280{,}00000000$.

57. Valamelly származat' jegyeinek száma nem lehet nagyobb mint a' factoroké öszvesen, de nem le-

het kisebb a' factorok' öszves jegyei' számánál levonván ebből a' factorok' számát 's hozzá adván egyet. Legyen a' factorok száma F, ezeknek jegyei m, n, o, p... a' származat' jegyeinek száma = S. A' mondott szerént S nem lehet nagyobb mint m+n+o+p+....
's nem kisebb mint (m+n+o+p+...)—F+1.
P. o: két 4jegyű factor' (mint 5647 és 8201)) származata nem álhat több jegyből 4+4=8nál, 's nem kevesebből mint 8—2+1=7.
Öt, hatjegyű factor' származata legfeljebb 5.6=30 jegyből, leg alább 30—5+1=26ból; mert

1-ször, mindegyik factor kisebb azon egynél, mellyhez annyi üres ragasztatik a' mennyi jegyből a' factor áll, (a' legnagyobb 4 jegyű szám 9999 kisebb 10000nél), tehát a' származat sem lehet akkora mint azon egység, melly annyi ürest hord magával, a' mennyi a' factorok' öszves jegye.

2-szor, egy factor sem lehet kisebb azon egységnél, melly eggyel kevesebb ürest hord a' factor jegye' számánál, (minden más 4jeggyel írt szám nagyobb 1000nél), a' származat sem lehet tehát kevesebb jegyű, mint az egység annyi üressel, a' mennyi jegye van valamennyi factornak, elvevén belőle annyit, a' hány a' factor.

58. Ha a' factorok mind egyenlők, az az ha valamelly szám maga magával sokszoroztatik több ízben, akkor a' származat az a' mit emelésnek nevezünk.

Az emelések' megkülönböztetéséül számokkal jegyezzük meg, hányszor volt valamelly szám mint factor véve, vagyis, hányszor sokszoroztatott maga magával.

Igy lesz a' második, harmadik 's a' t. emelés apró számjegyekkel jelőlve p. o: $3.3=3^2, 3.3.3=3^3$, a' 3nak második és harmadik emelése.

Jegyzék. Minden magában álló szám az első emelésén lenni tartatik: $5=5^1$, de közönségesen nem jelöltetik.

59. Ugyan azon szám különbféle emelései' származata, egyenlő a' számmal, öszvevéve a' factorok mutatóját, 's ezeknek öszvesét írván felibe: így $4^3.4^2=4^5$, mert az egyik factor $4.4.4$, a' másik 4.4, 's együtt véve a' 4 5ször van mint factor téve tehát $4^3.4.4=4^5$. Igy $6^3.6^4.6^2=6^3.6^4.6.6=6^9$.

Ha tehát valamelly factor többféle mutatóval áll elé, elég azt egyszer tenni mutatóji' öszvesével; mint

$$3^5.5^2.3^3.5=3^8.5^3 \text{ vagy } (56)$$

$$\text{ez egy } 3^5.3^3.5^2.5=(3^5.3^3).(5^2.5)=3^8.5^3.\text{al}$$

60. A' származat a' factoroktól függvén, ezekkel növekedik és kisebbedik. Ha az egyik factor kétszer, háromszor 's a' t. nagyobb, a' származat is 2szer 3szor 's a' t. nagyobb lesz.

Ha a' származat változatlan marad, 's az egyik factor kétszer háromszor 's a' t. nagyobb vagy kisebb lesz, akkor a' másik factornak szükségeskép' kisebbnek vagy nagyobbnak kell lennie

$$A.B=C, \quad mA.B=mC$$

$$C=A.B, \quad C=mA\frac{B}{m}=\frac{A}{m}.mB.$$

$$8.2=16, \quad 8.4=32, \quad 8.6=48, \quad 8.8=64 \text{ 's a' t.}$$

$$64=8.8, =4.16=\frac{8}{2}.2.8=2.32=\frac{8}{4}.4.8.$$

Könnyebbitések a' Sokszorozásnál.

Ha az egyik factor jegyei közt egység áll, a' másikat nem szükség újra leírni, de mint rész származatot, mindjárt ott lehet hagyni: p. o:

$$
\text{1.)}\quad \begin{array}{r} 55742.135 \\ +167226 \\ +\ 278710 \\ \hline =7525170 \end{array}
$$

itt csak a' két számmal a' 3 és 5tel sokszoroztatott, 's az egész összeadatott.

Az utolsó jegy' származatát sem épen szükség oda írni, mert azt egyszerre a' többihez lehet adni

$$
\text{2.)}\quad \begin{array}{r} 684.\,165 \\ 4104 \\ \hline =112860 \end{array}
$$

Ez következőkép történék meg: 684.165. A' sokszorozandó 684 mint az egyes' rész származata ott marad; a' 6tal mint szokás sokszoroztatik 's rész származata az egyesének alája íratik, következik az 5tös, 's mondjuk 5.4=20 's az üreset mint az egyesek helyére valót le írjuk, fenntartván a' 2 tizest sokszorozunk tovább 5.8=40, ehez adván a' meg maradt 2őt 's már a' 6tos sokszorozása által ott álló 4et, lesz 5.8+2+4=46 a' 6tos leíratik, fenn maradván a' 4 százas lesz továbbá 5.6+4+4+0=38 a' nyolczas leíratván, a' megmaradott 3 ezres nem lévén a' factorokban több szokszorozandó jegy a' már ott álló ezresekhez 's mindegyik számrend öszve adatik.

3.) 6532. 248

13064
26128

=1619936

Ezen példában először a' 2vel, azután a' kettős származata ismét kettővel, ennek származata ismét kettővel sokszoroztatott 's az utolsó rész származat egyszersmind a' két elébbenihez adatott.

Itt tehát az egyes jegyek' factoraival sokszoroztunk, mi mindenkor könnyűséget nyujt ha azokat megtaláljuk, mert csakugyan az apró számokkal a' mívelet sokkal sebesebben megy. A' mint 4=2.2 és 8=2.4, a' helyett hogy a' számot 4 vagy 8al sokszoroznók, sokszorozzuk annak a' 2 vagy 4ből eredett származatát.

A' könnyűség mindenütt alkalmaztatható, hol valamelly szám 's ennek valamellyik sokasa jön egyszersmind elé az egyik factorban, mint p. o: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 & 4, 8, 12, 16, 20, 24 & 5, 10, 15, 20, 7, 14, 21, 28 &

Ha p. o: az egyik factor 39 volna, először a' 3al, azután mint a' 3,hármasával ismét a' 3al sokszoroznánk az első származatot. Ha a' factor 3927 volna, mind a' háromszor a' 3al lehetne sokszoroznunk, mert 9=3.3, és 27=3.9. Ha 981 tehát 9.9el az az kétszer egymás után 9el, 's a' szemes számító gyakorta fog efféle könnyebbítésekre akadni, csak hogy szünetleni figyelemmel legyen a' származatok' rendjeire 's ezeknek helyükre. Ha a' sokszorozót két egyes factorba lehet venni, a' mívelet még egyszerűbb, mert ekkor az öszveadás is megkíméltetik. P. o: 81, 64, 36, 25, 16 & — a' 9, 8, 6, 5 és 4nek második emelései lévén, a' sokszorozandót kétszer kell velük egymás után venni a' helyett, hogy p. o: 64el sokszorozván a' 6 és 4 külön származatát öszve adnók.

654.81=654.9.9. 893.64=893.8.8
571.36=571.6.6. 952.25=952.5.5

Hogy az itt mondott minden egyébb két vagy több factorból álló számra alkalmaztatható, magában is nyilván; illy számok a' többek közt 63=7.9, 72=8.9, 504=7.8.9 &.

Ha valamelly szám 11el sokszorozandó, nem szükség a' számot még egyszer oda írni; elég azt mint oda írottat gondolni 's a' sokszorozást egyszerű öszveadásba változtatni.

657.11=7227

A' közönséges mível et szerént a' számítás így áll:

$$\begin{array}{r} 657.11 \\ +\ 657 \\ \hline 7227 \end{array}$$

de mi le írjuk 1-ször a' hetest,
2-szor hozzá adjuk a' 7t az 5höz leírván a' 2őt
3-szor marad 1, 1+5+6=12 le írván a' 2őt
4-szer marad 1+6=7 az utolsó jegy.

Szinte így lehet mívelni, ha a' sokszorozó 111, 1111, vagy akárhány egyesből áll, csak hogy ezen esetekben 3, 4 vagy több jegy lenne felváltva öszveadandó.

Ha a' sokszorozó vagy egyik factor csupa kilenczes, annyi üres ragasztatik a' másik factorhoz, a' hány jegyből áll az első, 's ezen számból a' sokszorozandó levonatik.

9=10—1, a' helyett tehát hogy p. o: 456ot 9el sokszoroznánk, egy üreset ragasztunk hozzá, vagyis sokszorozzuk 10el 's lesz 4560. De ezen származat eggyel többször foglalja magában a' sokszorozandót mint kívántatott, le kell tehát azt belőlle vonni, 's a' kívánt származat = 4560—456=4104

és 456.9=4104

Itt a' sokszorozás helyett a' levonást használtuk. A' több kilenczesből álló factorral szintígy van, mert

99=100—1, 999=1000—1, 9999=10000—1 's a' t.

Ha az utolsó szám nem épen kilenczes, de akár melly szám, az előtte állók pedig mind kilenczesek, szinte így lehet könnyíteni a' számvetést.

97=100—3, 991=1000—9, 9992=10000—8 & csakhogy ezen esetekben annyiszor kell a' másik factort levonni a' származatból a' mennyi szám hibázott a' 100, 1000, 10000 's t. ből, p. o:

6.) 78963.9993=78963.(10000—7)

a' sokszorozandóhoz ragasztván 4 üreset, lesz 789630000
levonván belőle 7szer 78963at - - - - - 552741

lesz a' kívánt származat =789077259

A' 7szer 78963at, mint fellyebb láttuk nem lett volna szükség odaírni, hanem egyszersmind le lehetett volna vonni, de a' könnyebb értelmért tettük azt oda.

Ha az első és utolsó jegy közt egy vagy több 9es áll, akkor is rövidíthető a' mívelet bár melly jegy legyen az első és utolsó, p. o:

49995=50000—5

ha ezen szám lenne az eggyik factor, a' másik 5tel sokszorozandó lenne 's hozzá ragasztván 4 üreset belőlle levonandó annak 5töse;

ha 799992=800000—8al kellene valamelly számot sokszorozni, azt 8szor vennénk, 's 5 ürest hozzá tévén ugyan azon már 8szor vett 799992őt levonnánk belőle.

7.) 54832.7163

38374

=44202566

A' példában az egynek rész-származata ott hagyatott, azután 7tel sokszoroztatott, 's mivel 63=7.9 a' 7nek származata végre 9el, 's egyszersmind a' többihez adatott.

8.) 360749.79842

35353402

2525243

=28802921658

itt először 98al=100—2, azután 7tel 's végre a' 7 származata 42vel=7.6 sokszoroztatván az egész öszveadatott.

9.) 9206483.11812132

101271313

73651864

1113984443

=108748192451756

mint kijelöltük először 11, másodszor 121=11.11 harmadszor 8, 's végre 32=4.8al sokszoroztatott

A' rövidített sokszorozás.

Gyakorta két vagy több factor' származatának csak néhány jegyei kívántatnak, 's illy esetben szükségtelen volna az egész sokszorozást végezni; p. o: 389.6 csak azt akarjuk tudni ád e' a' két factor ezreseket 's ha ád, mennyit?

Az eggyik factor' főrendű jegye 3 és százas, a' másiké 6 eggyes 6.3=18 százas 's így a' két legfelsőbb jegy ád egy ezrest és 8 százast, de az egyik factor tizesei a' 8 a' 6 egyessel 480ant az az 4 százast ád, melly a' 18 százashoz adatván 22 százast az az két ezrest és 2 százast ád 's így

389.6=2 ezres a' felelet.

Itt a' 4 százas melly a' tizesek sokszorozása által származott 's a' többi százasokkal együtt még egy ezrest képzelt, *correcturának*, *javításnak* neveztetik.

A' rövidített sokszorozás' mívelete tehát ebből áll.

1-ször, A' sokszorozó' egyese a' sokszorozandó' azon jegye alá tétetik, melly a' kérdésben megkívántatik, vagy mellyiktől kezdve kívántatik felfelé a' származat; ezen egyes után íratik a' többi jegy *megfordított rendben.*

2-or, A' sokszorozás mindég azon számokkal kezdetik, mellyek egymás alá estek az írás által, a' részszármazatok is úgy tétetnek egymásalá mint az öszveadásnál.

3-or, Hogy a' kívánt származat tökélletes és a' kérdésnek megfelelő legyen, a' sokszorozó számmal a' felette eggyel jobbra eső jegyet is kell sokszorozni, mint azt a' példában láttuk, de származatát nem leírni, hanem fen-tartván tizeseit a' jövő számhoz kell adni. Ha ezen javítás az 5öt eléri vagy felűlmulja egyeseiben, akkor eggyel több adatik a' jövő számnak származatához, ha p. o: az elébbi jegy' származata 4, nincs semmi javítás de

5től	14-ig,	1	
15—	24—	2	
25—	34—	3	
35—	44—	4	
45—	54—	5	's a' t. javítás van.

4-szer, A' sokszorozón felüli üres helyeket nullákkal lehet betölteni.

5-ször, Ha minden hiba nélkül akarjuk a' keresett számot megtalálni, egy jeggyel többet kell keresnünk mint kívántatott, noha az illy hiba soha sem nagyobb az egységnél.

A' mívelet eképen áll:

549.64

kívántatik a' származat a' százasokkal együtt feljebb; a' 4, a' sokszorozó' egyese tehát a' százasok alá, tizese pedig a' tizesek alá esik

$$\begin{array}{r} 549 \\ 46 \\ \hline 329 \\ 22 \\ \hline 351 \end{array} \text{ százas.}$$

Először a' 6 tizessel kerestük a' sokszorozandó' 9 egyesében a' tízesek' számát javításul, ez 6.9=54, ád 5 javítást, mondánk továb 6.4=24+5 javítás = 29 's a' kilenczet leíránk, fenntartván a' kettőst; 6.5=30+2 maradván = 32, a' 2 leíratik a' hármassal együtt mint az utolsó jegy' származata; következik a' 4es származata; kerestetik a' javítás 4.4=16 feljül mulván 14et ád 2 javítást, 4.5=20,+2 javítás = 22 's ez leíratván, az egész öszveadatik.

A' kis példa eléggé mutatja a' mívelet' helyes létét, mert az egyik factor egyesével a' másiknak százasa, tizesével ennek tizese egyenlően százasokat származtatnak.

```
        d c b a  a b c d
2.)       73584.6759
           9576
          ------
          441504
           51509
            3679
             662
          ------
          497354 ezres
```

A' származat az ezresektől felfelé kívántatott.

3.) A' származat, milliotól fogva kívántatik

```
          ..67832.354769
          967453
          ------
           20350
            3392
             271
              47
               4
          ------
           24064 millio.
```

ezen példában a' sokszorozó 9 és 6tosa felett nem lévén a' másik factorban jegy, üresek tétetnek hejükbe.

A' 9 már semmit nem ád a' származathoz mert az egyesek az 10 ezresekkel legfeljebb 100 ezreseket, de so ha milliokat nem adhatnak, de a' hatos már 4 javítást ád.

A' közönséges mívelet szerént ugyan ezen példa következőkép állana:

```
           6783|2.354769
          -----|--
          20349|6
           3391|60
            271|328
             47|4824
              4|06992
               |610488
          -----|------
          24064|690808
```

's e' szerént mindaz szükségtelen a' kérdésre nézve, a' mi a' függő vonalon jobbra esik.

Némellykor 1, 2, 3 vagy több a' legfőbb számjegye kívántatik a' származatnak.

Ezen esetben arra kell nézni, hogy a' két factor' legfőbb jegyének származata egy vagy két jegyű e'? Az első esetben annyi jegy vágatik el a' sokszorozandóból a' mennyi jegy a' származatból kívántatott; a' másodikban pedig egy jeggyel kevesebb, 's így íratik alá a' többi jegy meg fordított sorban.

A' két factor' 13587 és 5893 származatának 4 legfelsőbb jegye kívántatik?

A' két factor legfőbb jegyei 1 és 5, 1.5=5 egyjegyű szám, a' sokszorozandóból tehát 4 jegy vágatik el, 's aláíratik az 5893 megfordítva, úgy mívelvén mint az elébbi példákban.

```
1358.7
3985
------
6794
1086
 122
   4
------
8006, és értéke 10 ezres.
```

759683 és 93574 származatából az 5 legfőbb jegy kívántatik?

9.7=63 kétjegyű tehát a' sokszorozandóból csak 4 jegy vágatik el.

7596,83
47539

68371
2279
380
53
3

71086 millio.

5843. 6434. 532 és 736 közti származat' 4 legfelsőbb jegye kívántatik, 's mi ezeknek értéke?

4 §. Az Elosztásról.

61. Az elosztás tárgya: adva lévén két factor' származata 's ezeknek egyike, megtalálni a' másikat.

Az adott szám az *osztandó* az adott factor az *osztó* a' talált szám pedig a' *részes*.

A:B=Cben, A az osztandó, B osztó, C részes. Az osztó sokszoroztatván a' részessel, az osztandó ismét előjön B.C=A.

Az osztás csupa levonás által is eszközöltethetnék, de ezen mívelet hosszas lévén, az elosztásé könnyebb módot nyújt.

P.o: hányszor táláltatik meg 4 a' 16ban? Ha a' 4et levonjuk 16ból először, marad 12, másodszor 8, harmadszor 4, 's végre semmi sem, 's így 4-szer találtuk meg a' 4et 16ban.

Az elosztás mívelete szerént pedig azon számot keresvén, melly az osztóval sokszoroztatván az osztandót adja, rövidebb úton jutunk czélhoz, 's mondjuk

$4.4=16$ és $\frac{16}{4}=4$.

Az elosztás míveleténél előforduló részek különbfélekép írathatnak oda

1-ször	A:B=C,,	osztandó | osztó | részes	15:3=5
2-szor	$\frac{A}{B}=C$	$\frac{\text{osztandó}}{\text{osztó}}$ | részes,	$\frac{15}{3}=5$
3-szor	A: | B. =C.	osztandó | osztó részes	15 | 3 = 5
4-szer		osztó | osztandó | részes	3 | 15 | =5.

62. Ha az elosztás véget ér, vagyis ha az osztó tökélletesen megtaláltatik az osztandóban, az az ha az osztó és a' részes egymással sokszorozva ismét az osztandót adják, akkor az elosztás *mérés*, és a' két factor együtt *alkotórésze* az osztandónak 's egyszersmind az osztandó ezeknek *sokszorosa.*

Ha az osztandó nem tökélletes sokszorosa az osztónak, úgy az osztás el nem végződik, de valamelly *maradék* támad. Ezen esetben az osztó nem alkotó, de csak *valamellyrésze* az osztandónak, 's ez csak úgy támadhat ismét az osztó' és a' részes' sokszorozása által, ha az említett maradék a' származathoz adatik.

63. Ha az osztó egyjegyű, a' mível semmi nehézséget nem mutat.

Ha az osztandó is egy vagy kétjegyű, a' részest a' sokszorozó táblából is tudhatjuk.

Ha az osztandó 's osztó több jegyű így esik az osztás :

1-ször: hányszor találtatik az osztó az osztandónak legfőbb jegyeiben? az első kérdés; szükséges hogy az osztandóból leg alább annyi jegy vétessen, a' mennyiből az osztó áll, legfellyebb pedig eggyel több, a' mint az osztó jegyei kisebbek vagy nagyobbak az osztandó' jegyeinél. Az első talált szám, a' részes' legfelsőbb jegye.

2-szor. Az osztó, sokszoroztatik a' talált részes jegygyel 's a' származat az osztandó' első jegyeiből levonatik.

3-szor. A' maradványhoz az osztandóból annyi jegy hozatik le a' mennyi szükséges, hogy az osztó benne ismét meg találtathassék, csak hogy a' lehozás egyenként történ, 's a' részeshez mindanyiszor egy üres adatik a' hány jegy az osztandóból lehozatott a' nélkűl, hogy az osztó benne megtaláltatott volna.

4-szer. A' 2tő alatt jelölt mívelet mindaddig fojtattatik míg az osztásnak vége lőn. Ha semmi maradék nem támadott, az osztás tökélletes, és mérés.

Ha maradék lett, ez külön íratik a' részes mellé, alája írván az osztót annak jeléül, hogy az osztás nem tökélletes.

a.) 3248:8=406 részes

```
 3248:8=406
—32
 ——
  ..48
  —48
  ———
    ..
```

b.) $280594:7=40084\frac{6}{7}$

```
 280594:7=40084 6/7
—28
 ——
  ..059
   —56
   ———
     34
    —28
    ———
      6
```

A' részes származatokat nem szükség oda írni, mert könnyű azokat gondolatban is levonni.

c.) 564230:5=112846
1423

d.) 745689:6=124281 $^3/_6$
121403

ezen 2 példában a' maradványok apró jegyekkel jelöltettek meg.

Az osztás' mívelete mint látjuk az osztandó legfőbb rendű jegyeiben keresi először az osztót, ez következő okokból történik.

1-ször. Az osztás ellenese lévén a' sokszorozásnak, mívelete is megfordítva fog történni. Ha a' sokszorozásnál a' különszármazatok' felsőbb rendjeit, a' velek egyenlő rendekhez adtuk balra menvén felfelé, úgy fogjuk az elosztásnál, azon alsóbb rendeket, melylyek fenn maradtak, jobbra a' következő alsóbb rendekhez adni.

2-or. Mint azt keressük először, mennyiszer találtatik az osztó az osztandó' legfőbb jegyeiben, czélunk kétféle: megtalálni a' részes legfőbb jegyét 's egyszersmind megtudni, hány jegyből fog az egész részes állani.

3-szor. Annyi jegyet vevén az osztandóból, mennyi jegye van az osztónak, a' mívelet' könnyebítését tárgyazzuk, mert ha p. o: 5412öt kellene 6tal elosztani, csakugyan megtalálnánk mi a' részest, melly = 902, de bizonyosan valamelly hosszabb úton, ha azt egyszerre az osztónak minden jegyeiben keresnénk. Valamint tehát a' sokszorozásnál az egyik factor' egyes jegyeivel külön és rész származatokat kerestünk 's az egészet öszveadtuk, úgy keressük az elosztásnál a' rész vagyis külön részeseket, levonván ezeknek sokszorosát az osztandóból.

p. o: 846:2=423, más alakba írva így áll:

(800+40+6):2=400+20+3=423.

3924:3=1308 pedig

(3000+900+20+4):3=1000+300+6+2=1308

a' mit, mivel a' 20 nem osztható maradék nélkűl 3 által így kell írnunk (3000+900+24):3=1000+300 +8=1308.

elébb így mondánk 3 a' 20ban megy 6szor 3.6=18 marad a' 20ból 2 ezt a' 4hez adván lesz 6, ebben a' 3 megvan 2szer.

Vegyünk egy nagyobb példát, mellyben az osztó kétjegyű, 's írjuk a' míveletet többféle alakban, az elosztás' világos értelme végett.

Legyen az osztandó 8955306 az osztó 54.

1.) 8955306:54=165839

355.
315.
453
210.
486
...

Ez a' közönséges mívelet, hol a' rész származatok már levonattak.

Az elosztás míveletét tökélletes valóságában advánpéldánk így áll.

2.) 8955306:54=165839

I.) Kerestetik az 54 egyes = 5 tizes 4 egyes az osztandó legfőbb jegyeiben a' 89ben, melly 8 millio és 900 ezer.

Megtalálni 54et 89ben 1szer.

Értéke az egynek *százezres*.

Az egész részes 6 jegyből fog állani.

Sokszorozván 54et az 1 száz ezressel, lesz az első rész származat 54 százezres, ez levonatván 89ből marad 35 százezres.

II.) A' 35höz lehozatván a' 89 után álló 5ös kerestetik az 54, 355ben, meg lelvén benne 6szor, az 54.6 =324 levonatik 355ből, marad 31 tíz ezres.

III.) A' 31hez lehozván következendő' 5töt 315ben megvan 54, 5ször és az 54.5=270 ebből levonatván marad 45 ezres

IV.) a' 45höz a' 3at lehozván a' 453ban 54 megvan 8szor, 54.8=432 és 453—432=21, értéke százas,

V.) a' 21hez ragasztván az üreset, van 54, 210ben 3szor és 3.54=162, 210—162=48 maradván és tizes

VI.) Ehez végre lehozván az utolsó jegyet a' 6ost, lesz 54 a' 486ban 9szer, és 54.9=486 az elosztásnak vége.

Számjegyekkel írván a' míveletet ekép áll.

3.) 8955306 : 54=165839
—54
355
—324
315
—270
453
—432
210
—162
486
—486
. . .

Ha ezen példát máskép írjuk nyilván fogjuk látni, hogy az elosztás nem egyéb mint ismételt levonása az osztónak és sokszorosainak az osztandóból ; 's valóban nem tettünk egyebet mint levontuk 6 ízben az adott 8955306 osztandóból az 54nek különböző sokszorosait's csak ugyan ;

	8955306	
1-ső származat	—5400000	=54.100000
	3555306	
2-dik	—3240000	=54.60000
	315306	
3-dik	—270000	=54.5000
	45306	
4-dik . . .	—43200	=54.800
	2106	
5-dik	—1620	=54.30
	486	
6-dik	—486	=54.9
	. . .	

Minthogy az elosztandó egyenlő a' részes és az osztóközti származattal

$$8955306 = 54\,(100000 + 60000 + 5000 + 800 + 30 + 9)$$
$$= 54.165839$$

's a' mívelet így is állhat

Osztó	Osztandó	Részes
54	5400000	100000
54	3240000	60000
54	270000	5000
54	43200	800
54	1620	30
54	486	9
54)	8955306 (	165839

Ha tehát az osztandót olly részekre tudnánk mindenkor könnyűséggel szedni, mellyek az osztónak valamelly sokszorosai, akkor mind a' mível et nagy könnyítést nyújtana, mind pedig mindegy lenne, akármely rendű jegyekkel kezdenénk vagy végeznénk az osztást.

Példánk, osztandóját a' jegyek' rendjei szerént írván lesz:

$$8955306=8000000+900000+50000+5000+300+6$$

Ha ezen részeket úgy rendeljük el, hogy az egyes tagok az 54nek az osztónak sokszorosai, szükségesképen az elébbi kifejezésekre érünk 's lesz

$$8955306=5400000+3240000+270000+43200+1620+486$$

hol minden tag sokszorosa 54nek, mit ismét így lehet írni:

$$=54.100000+54.60000+54.5000+54.800+54.30+54.9$$

'S minden alakban ugyan azon részesre akadván, a' mívelet helyesléte megvan bizonyítva.

64. A' mint a' részes legfőbb jegye megtaláltatott, előre lehet tudni hány jegyből fog az egész részes állani, az elsőhöz adván annyi jegyet mennyi még az osztandóban meg maradt.

Ha mind az osztandó és osztó több jegyűek, vígyázattal kell lenni hányszor található az osztó az osztandónak elvágott jegyeiben, mert a' csupa találgatás szükségtelen munkát okoz.

65. Ha az osztandó 's osztó után is üresek állnak, ezeket egyenlő számmal el lehet hagyni mindkettőből, mert a' részes azért nem változik: de ha csak az osz-

tónak vannak üresei ezeket mind ellehet hagyni, 's ekkor az osztandó jegyeiből ugyan annyit kell elvágni hány üres az osztóból el hagyatott. Az így elvágott jegyek az utolsó maradványhoz adatnak.

Következő példákban a' részszármazatok a' nélkül, hogy odaírattak volna, levonattak.

1.) 1030216 : 253 = 4072
 1821
 506
 . . .

2.) 6098600 : 72900 = 607986 : 729 = 834
 2478
 2916
 . . . .

3.) 87456 | 74 : 908 | 00 $= \frac{28874}{90800}$
 5736 |
 288 | 74 Maradék

4.) 9823467 : 7208 = $1362\frac{6171}{7208}$
 26154
 45306
 20587
 6171 Maradék.

Ha valamelly nagyobb ósztóval több számot kellene elosztani, igen jó hasznát vehetni egy kis táblácskának, mellyet a' számító előre készíthet. Az illy táblácska az osztó sokasait adja 1től 9ig 's megkímélteti az ismételt sokszorozást.

Ha p. o: 875el több számot kellene elosztani, illy táblácskát készíthetnénk:

Az osztó' többesei.

1szerese	—	875
2 . .	—	1750
3 . .	—	2625
4 . .	—	3500
5 . .	—	4375
6 . .	—	5250
7 . .	—	6125
8 . .	—	7000
9 . .	—	7875

's egy pillantattal megtudnánk segéde által hányszor foglaltatik 875 az osztandó' 3 vagy 4 jegyében.

66. Az elosztás, probája a' sokszorozásnak, valamint annak próbája a' sokszorozás, 's ha az osztó 's részes közti származat, hozzá-adván ehez a' maradékot ha illyen van, az osztandót tökélletesen megadja, hihető hogy az elosztásnál hiba nem történt. Ha viszont, a' két factorközti származatot az egyik factor által elosztván, a' másikat meg leljük, a' sokszorozás akkor hiba nélkül történt.

$$A:B=C+\frac{m}{B}, A=B.C+m$$

hol *m* a' maradvány, az elosztás próbája:

$$\text{és az } A.B=C, \frac{C}{A}=B, \frac{C}{B}=A.$$

a' sokszorozás' próbája.

67. Minél nagyobb az osztandó vagy kisebb az osztó, annál nagyobb a' részes; minél kisebb az osztandó vagy nagyobb az osztó, annál kisebb a' részes.

68. Hányszorta nagyobb vagy kisebb az osztandó, változatlan maradván az osztó, annyiszorta nagyobb vagy kisebb a' részes; hányszorta nagyobb vagy ki-

sebb az osztó, változatlan maradván az osztandó, annyiszorta kisebb vagy nagyobb a' részes.

Az első esetben $A.B=C$ lévén, lesz

$$mA:B=mC \text{ és } \frac{A}{m}:B=\frac{C}{m}$$

a' másodikban

$$A:mB=\frac{C}{m} \text{ és } A:\frac{B}{m}=mC$$

Ha ezen két esetet öszve vesszük szükségesképpen következik hogy;

69. A' részes nem változik, ha az osztandó 's osztó ugyan azon factorral vagy számmal sokszoroztatik vagy elosztatik, az az ha

$$A:B=C$$

$$mA:mB=C \text{ és } \frac{A}{m}:\frac{B}{m}=C.$$

A' maradék azonban — ha illyen van — ugyan azon factorral vagy osztóval illetett.

70. Ha valamelly szám' emelése ugyan ezen szám' más emelése által osztatik, a' részes a' szám' azon emelése, melly az osztandó' 's osztó emelései különbsége által támadott. Más szóval, ha az osztandó 's osztó ugyan azon számnak különböző emelésein vannak elég azok' mutatójinak különbségét venni, 's a' részesnek mutatója, ezen különbség lesz: mert az osztandó nem lévén egyéb a' részes és az osztó közti származatnál (61), mutatója az osztó' 's részes' öszves mutatójiból áll: így,

$A^m:A^n=A^{m-n}$ akár melly értéket adjunk A,*m* és *n* nek, 's különösen

$$2^4:2^2=2^{4-2}=2^2 \text{ mert } 2^2.2^2=2^4$$

$$(3^5.5^2):(3^3.5)=3^2.5 \text{ mert } (3^3.5).(3^2.5)=3^5.5^2$$

További magyarázatját a' mondottnak az emeléseknél fogjuk találni.

Könnyebbitések az elosztásnál.

1.) Ha valamelly számot 25tel kell elosztani, oszszuk el inkább 100al, (mi két jegy elvágása által könnyen megtörténik) és sokszorozzuk a' számot 4el; vagy megfordítva, sokszorozzuk először az osztandót 4el 's oszszuk el 100al; mert

$$25=100:4 \text{ vagyis } \frac{100}{4}=25 \text{ és } 25.4=100$$

Szintígy lehet 125 helyett 8al sokszorozni, 's a' származatot 1000el elosztani, mert $1000=8.125$ vagy $\frac{1000}{8}=125$

$$\text{a.) } 564725:25=\frac{564725.4}{100}=\frac{2258900}{100}=22589.$$

$$\text{b.) } 47859250:125=47859250.\frac{8}{1000}=382874.$$

szintígy lehet megfordítva bánni a' sokszorozásnál, ha az egyik factor 25 vagy 125, és a' másik factorhoz ragasztván 2 vagy 3 üreset azt 4 vagy 8al elosztjuk

$$\text{mert } 25=\frac{100}{4} \text{ és } 125=\frac{1000}{8}$$

2.) Ha az osztó két vagy több factorba szétszedhető, ollykor könnyebb azon factorokkal végezni az osztást, szintugy egymásután osztván velük az osztandót, mint a' sokszorozásnál sokszoroztuk a' másik factort.

p. o: $1296.48=1296:(6.8)$

először tehát 1296tót 6tal osztjuk el, a' talált részest pedig 8al, 's lesz

$1296:6=216$ és $216:8=27$ a' keresett részes.

Ha az egyes elosztásoknál maradék támadott, ezeket megjegyezzük, 's mindenkor az előtte lévő factorral sokszorozván az utolsó maradékot, az előtte álló maradékhoz adjuk származatát, ezen öszvest ismét az előtte álló factorral sokszorozzuk 's a' jövő maradékhoz adjuk, igy mívelvén míg az első maradékra jutván azt az egész származathoz adjuk. Ezen maradék lesz tökélletesen az, melly támadott volna a' közönséges elosztás által.

3.) 44371278:63 „ 63=7.9
:9= 4930142
:7= 704306 a' részes; maradék = 0

4.) 8457025 : 462 „ 462=6.7.11
:6 1409504 $_{1}$
:7 201357 $_{5}$
:11 18305 $_{2}$

A' részes itt 18305, 's a' háromféle maradék, 1, 5 és 2. sokszoroztatik a' feljebb mondott szerént:
először az utolsó maradék 2, az előtte álló factorral a' 7tel, ennek származatához adatik a' második maradék, az öszves sokszoroztatik a' következő factorral a' 6tal 's ehez az első maradék adatik.
Nem lévén több factor és maradék a' míveletnek vége, 's áll

$2.7+5=19$ az első maradék származata hozzá adván a' második maradékot,

$19.6+1=115$ az öszves és tökélletes maradék,

és $8457025:(6.7.11)=18305+\frac{115}{462}$

Ha az osztó egy vagy több kilenczesből áll, legyen egyesei' jegye akármelly, az elosztás a' következő felsőbb rendű egységgel történik.

Annyi számjegy vágatik el e' végre az osztandóból hány jegyből áll az osztó. A' vonal balfelére eső jegyek, minthogy nagyobb számmal osztattak el, azon különbséggel sokszoroztatnak, melly az osztó 's a' felsőbb rendű egység közt van, 's a' származat az osztandó alá íratik; ha valamelly jegye a' származatnak a' vonal balfelére esett, jele hogy ez is ád még a' részeshez valamit, és a' különbséggel sokszorozandó csakugyan mindegyik a' vonal balfelére esett jegy míg végre egy sem esik többé oda; ezután a' vonal jobbfelén álló jegyek mind öszveadatnak 's ha öszvesek által is esik még jegy a' vonal balfelire, ez is a' különbséggel sokszoroztatik, végre a' vonal két felén lévő jegyek öszveadatnak, a' balfelen lévők a' részest a' jobbfelen állók pedig a' maradékot adják.

	6		
5.) példa	7583	91	: 94. 94=100—6
	454	98	
	27	24	
	1	62	
		6	
	2	81	
		12	
részes=	8067	93	maradék.

A' 100zali osztás végett, két jegy az osztandóból elvágatott, a' vonal' balfelén álló jegyek 6tal sokszoroztattak mindenkor, midőn az elsőbb származatból jegyek estek oda. A' vonal jobbfelén öszveadott 5 sorból még kettős esett a' baloldalra 's ez is sokszoroztatott 6tal.

6.)

	6	
7583	96	: 94 94=100—6
454	98	
27	24	
1	62	
	6	
2	86	
	12	
8067	98	
+1	94	
részes=8068	4	maradék.

Ezen példában az osztandó csak 5 egységgel nagyobb az előbbeninél, de azért az első maradvány a' vonal jobbján 98, 's benne az osztó = 94 még egyszer találkozik, a' +1 tehát balra íratott levonván 98ból a' 94et 's lett a' maradék 4.

7.)

	7	
6329	934	: 993. 993=1000—7
44	303	
	308	
1	545	
	7	
részes=6374	552	maradék.

8.)

73596	482	73	: 99700. 99700=(1000—3) 100
220	788		
	660		
1	930		
	3		
részes =73817	93373		maradék.

Mint az osztó 99700 két ürest hordoz, ezért az osztandóból előre elvágtunk két jegyet, 's azután 997=(1000—3) al az elébbi mód szerént osztottuk.

Ezen mívelet helyes léte magából is nyilván; nagyobb számmal osztván az osztandót mint kívántatott, kisebb részesre akadunk, és ezt sokszorozni kellett azon számmal, mellyel az osztó öregbíttetett.

$$\text{Ha } \frac{A}{B}=C, \; A=BC$$

$$\text{és ha } \frac{A}{B+a}=C, \; A=BC+aC$$

hol *a* azon különbséget tészi, melly az adott szám 's a' felsőbb rendű egység közt van.

R ö v i d í t e t t   e l o s z t á s.

A' részesnek csak néhány jegyei kívántatnak.

Az osztandóból annyi jegy vágatik el balra a' hány jegye kívántatik a' részesnek.

Ha az osztónak több jegyei vannak, mint a' részesbe kívántatott, ebből is elkell vágni a' többit.

Az így elvágott jegyekkel történik az osztás, és a' helyett, hogy az osztandóból más jegyet hoznánk le, az osztóból vágunk el egyet 's ezzel osztjuk a' maradványt, ezután ismét egy jegyet vágunk el az osztóból 's így tovább míg csak egy jegyre érünk, melly az osztást béfejezi.

9.) példa 7359637 : 53489 a' részesnek három legfőbb jegye kívántatik. Elvágunk tehát az osztandóból, valamint az osztóból is 3 jegyet balra, 's keressük 534et 735ben.

Hogy a' részes a' lehetőségig tökélletes legyen, szintugy mint a' sokszorozásnál javítást keresünk. Ez a' javítás csak az osztótul jöhet az elosztásnál, valamint a' sokszorozásnál a' sokszorozandótól; a' talált részjegy és az osztó' utolsó jegyét követő jegyközti származat adja a' javítást, melly mint a' sokszorozásnál 5ig=0, 15ig=1 25ig=2 's a' t.

Meglelvén 735ben 534et egyszer, az osztó' sokszorosa szinte mint a' közönséges míveletnél az osztandóból levonatik, de minekelőtte az 534et levonnánk 735ből az osztó negyedik jegyéből keressük a' javítást, ez 1.8=8 ád javításul eggyet és 534+1=535 lesz levonandó 735ből: a' maradván 200hoz nem hozunk le jegyet az osztandóból, de az osztóból vágunk' el egygyet 's 534 helyett most csak 53al osztjuk a' 200at: találtatik benne 3szor, a' javítás kerestetvén 3.4=12, a' részes' második és az osztó' harmadik jegye közti származat ád egy javítást, 's lesz a' 200ból levonandó származat = 3.53+1=160, 200—160=40; ezen 40t végre 5tel osztjuk el, oda hagyván az osztó egyébb jegyét, 's találjuk 40ben 7szer; az utolsó javítás 7.3=21ből lesz kettő, és a' 40ből levonandó szám 5.7+2=37, 's 40—37=3, melly 3 az osztási maradék, de rá nincs szükség.

A' számírás következő:

```
735 | 9637 : 534 | 89=137
200
 40
  3
```

A' közönséges mívelet szerént a' példa így állana:

```
735|9637 : 53489=137
201|073
 40|6067
  3|1644 utolsó maradván:
```

mi itt a' vonal jobbján esik, kérdésünknél szükségtelen.

10.) példa 86593729 : 96873

Kívántatik a' három legfőbb jegy; tehát az osztó' 3 főjegye elvágatik, de az osztandóból 4 jegy kell balra, a' 968 nem találtatván meg a' 3 elsőben.

8659 | 3729 : 9,6,8 | 73 = 894
909
38
0

11.) 74086329 : 908

A' részes' 4 fő jegye kívántatik

Itt az osztó csak 3 jegyből állván, általa az osztás kétszer történik egymásután annélkül, hogy utolsó jegyét elvágnánk, 's csak a' harmadik részjegy' keresésénél hagyjuk-el a' 8ast 's a' t. Az osztandóból 5 jegyet kell vennünk, az az 4et a' kívánt 4 rész jegy végett, eggyet pedig azért mivel a' 908 a' 740ben nem találtatik.

74086 | 329 : 9,0,8 = 8159
1446
538
84
3

A' két factorközti valódi részes 5 jegyből álló 's a' 8159hez üreset kell adnunk, hogy értékét nyerje 's lesz a' kívánt részes = 81590.

példák gyakorlás végett.

12.) 307256791 : 876652

A' részes' 3 fő jegye kívántatik, 's mi annak értéke?

13.) 50070901 : 9702

A' részes' 2 legfőbb jegye kívántatik, 's értéke?

14.) 78576792543 : 69472

A' részes 5 első jegye kívántatik 's értéke?

Az öszveadás, levonás, sokszorozás és az elosztás négy alap míveleti lévén a' számírásnak, segédjek által az Arithmetika' legszövevényesb kérdései is feloldatnak.

III. SZAKASZ.

A' SZÁMOK' OSZTÓJI ÉS SOKSZOROSAINAK TULAJDONI. A' LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓ. AZ ELSŐ SZÁMOK ÉS PÁROSAK. VALAMELLY SZÁM' OSZTÓJINAK KERESÉSE.

1 §. A' számok osztóji' és sokszorosainak tulajdoni.

71. Ha több számnak közös osztója van, ez öszveseket is elosztja.

1-ször: minden szám egyenlő lévén osztója' valamelly sokasával, több szám öszvese szükségeskép magában foglalja annak több sokasát is, p. o:

12, 15 és 21, oszthatók 3 által, öszvesek $= 48$ is osztható általa, mert $12=3.4$, $15=3.5$, $21.=3.7$ és $48=3.16=3.(4+5+7)$.

2-szor: a' számok külön részesei' öszvese (ha ezek egész számok 's maradék nélkül vannak) egyenlő azon részessel, melly a' számok öszveséből származik: p. o:

$12:3=4$, $15:3=5$, és $21:3=7$.
$48:3=4+5+7=16$.

A' szám' akármelly sokasa is osztható mindazon szám által, melly őt elosztja.

p. o: 4 osztható 2 által, osztható 4nek minden sokszorosa tehát 2 által, mint 3.4, 5.4, 6.4, 7.4 &.

12, 18, 24, 30 oszthatók 6 által, 's minden sokszorosai ezen számoknak. De a' 6 maga is osztható 2 és 3 által, tehát mind a' számok 12, 18, 24, 30 oszthatók 2, 3, és 6 által, mind pedig akármelly sokasuk.

3-szor: valamelly szám' többféle sokasának öszvese, e' számnak sokasa is.

$$2.3+3.3+4.3+5.3=6+9+12+15$$
$$6+9+12+15=42=3.14$$

4-szer: ha valamelly két részből álló öszvesnek 's egyik részének közös osztója van, ezen közös osztó, szükségesképen elosztja a' számnak másik részét is. p. o:

$$35=20+15$$

35 és egyik része a' 20 oszthatók 5 által, tehát 15 is a' 35 másik része szükségesképen osztható 5 által.

$$\frac{35}{5}=7, \frac{20}{5}=4 \text{ és } \frac{15}{5}=3$$

5-ször Valamelly szám' kétféle sokasai különbsége is sokasa ezen számnak p. o:

35 és 20 sokasai 5nek, tehát
35—20=15 is sokasa 5nek.

6-szor: ebből következik. Ha több számnak közös osztója van, ez által mind öszvesek mind különbségek osztható.

54 és 18 oszthatók 2, 3, 6 és 9 által
osztható tehát 2, 3, 6 és 9 által 54+18 és 54—18 is.

72, 40 és 16, oszthatók 2, 4 és 8 által
szintigy osztható 2, 4 és 8 által 72+40+16, 72—40+16
72+40—16, és 72—40—16 is.

7-szer: ha valamelly szám' egyik része osztható más szám által, másik része pedig nem, úgy a' számnak egésze nem osztható azon szám által: p. o: vegyük 47nek két részét

$$47=30+17$$

Egyik része a' 30, osztható, 2, 3, 5, 6, 10 és 15 által másik része, a' 17 egyikkel sem osztható, nem osztható tehát 47 sem általok.

legyen $47=25+22$ olly részekbe véve, mellyek magukban oszthatók valamelly számmal, és csakugyan osztható 25 az 5tel, 22 pedig 2 és 11el.

de sem a' 25 nem osztható 2vel vagy 11el, sem a' 22 nem osztható 5 által, tehát 47 sem. Az az a' 25 és 22 közt nem lévén közös osztó, öszvesek között sincs.

8-szor: semmi szám nem osztható ollyan által, melly annak felinél nagyobb, hacsak nem önmaga által, mert, legkisebb részes lévén a' 2, ezt csak a' számnak fele adhatja, 2 és 1 közt pedig egész szám nincs; a' részest $=1$ pedig minden szám maga magával elosztatván adja.

2 §. A' számok' oszthatása, 2, 3, 5, 9 és 11el.

72. A' számok vagy *párosak* vagy *páratlanok.* Minden páros szám sokasa a' kettősnek. A' páratlanok is sokasai ugyan a' 2nek, de $+1$, a' melly egygyel több azokat páratlanokká teszi. (49)

A' számok' felsőbb rendjei, 10, 100, 1000, 10000 's a' t. mind párosak, valamint (71) azoknak akármelly sokszorosai is, 20, 30, 40.... 300, 500, 700,... 4000, 6000, 8000 's a' t. a' páratlan szám csak az utolsó az egyes jegyek közt lehet 1től 10ig.

Minden páros szám osztható kettővel, és minden kettővel osztható szám páros.

A' páros számok, 0, 2, 4, 6, 8.
a' páratlanok, 1, 3, 5, 7, 9.
Ha tehát valamelly számnak utolsó jegye 0, 2, 4, 6 vagy 8, (akárhány jegyből álljon a' szám), akkor osztható 2 által minden egyéb esetben pedig nem osztható.

73. A' 10, 100, 1000 's minden felsőbb rend, 's azoknak akármelly sokasai oszthatók 5 által; az egyesek közt csak az 5 maga osztható magával.

Minden szám osztható tehát 5 által, mellynek utolsó jegye (az egyeseké) 0 vagy 5, akármelly más jegygyel végződő szám pedig nem osztható.

74. Ha valamelly szám' jegyeinek öszvese, nevező értékeket vevén, 9 által osztható, úgy a' szám is: p. o: 81ben a' jegyek öszvese $8+1=9$ osztható 9 által tehát 81-is osztható 9 által
783nak jegyei $7+8+3=18$ osztható 9 által, tehát 783 is osztható általa.
A' tizes, és más feljebb rendű egyes is sokasai 9nek több egyel: és

$$10=9+1$$
$$100=99+1$$
$$1000=999+1$$
$$10000=9999+1$$
$$100000=99999+1 \quad \text{'s a' t.}$$

vagy is

$$10=1.9+1$$
$$100=11.9+1$$
$$1000=111.9+1$$
$$10000=1111.9+1.$$
$$100000=11111.9+1.$$

szinte így a' felsőbb rendek' akármelly sokasa is

p. o:

$$\begin{aligned} 30 &= 3.9+3=(1.\ 9+1)3 \\ 500 &= 55.9+5=(11.\ 9+1)5 \\ 7000 &= 777.9+7=(111.\ 9+1)7 \\ 90000 &= 9999.9+9=(1111.9+1)9 \end{aligned}$$'s a' t.

minden rendű szám, sokasa tehát a' kilencznek, 's épen annyival több, mennyit jegye mutat, mint p. o: láttuk 7000ben 777 kilenczes van és 7 egyes ezen feljül. Rakjuk széllyel a' számot 78641et könnyebb tekintet' kedvéért 's visgáljuk meg,

1-ször hány 9esből áll,
2-szor osztható e' általa 's
3-szor ha nem, mi marad?

$$\begin{array}{rcl} 78641 & = & \\ 70000 & = & 7777.9+7 \\ +\ 8000 & = & 888.9+8 \\ +\ 600 & = & 66.9+6 \\ +\ 40 & = & 4.9+4 \\ +\ 1 & = & 0.9+1 \\ \hline =78641 & = & 8735.9+26=8737.9+8. \end{array}$$

Találtunk tehát 78641ben 8735 kilenczest és 26 egyest: de mivel a' 26 egyes még 2 kilenczest foglal, ezt a' többihöz adván lesz öszvesen 8737 kilenczes és 8 maradván. A' szám nem osztható 9 által.

Kiki látja, hogy 26 egyes nem egyébb, mint az adott szám' jegyeinek öszvese, de minthogy 26 nem osztható 9 által, úgy 78641 sem osztható általa.

Ha példánk száma' utolsó jegyét csak eggyel növesztjük, már 78642 osztható lesz 9 által mert

$7+8+6+4+2=27$ és $\frac{27}{9}=3$.

Ha valamelly számban kilenczesek jőnek elé, ezeket szükségtelen a' többihöz adni, mert magokban is sokszorosai lévén a' 9nek mint, 90, 900, 90000 's a' t. általa oszthatók is: p. o: 2049789096ban, a' nyolcz értékes jegy' öszvese $=54$, de hárma úgy is kilenczes lévén elhagyatik 's marad $2+4+7+8+6=27$,

$27=3.9$ osztható 9 által, 's így az egész szám is. ***Közönségesen*:** hogy valamelly szám osztható legyen 9 által *szükséges és elég*, hogy jegyeinek öszvese legyen 9 által osztható.

Minden ugyan azon jegyekkel írt kétszám közti különbség osztható 9 által: mert

Az egyféle jegyekkel írt számok vagy oszthatók 9 által vagy nem.

Az első esetben (71) különbségek is osztható 9 által; a' másodikban, egyenlő maradvánnyal bírván, ezek a' levonás által egymást semmivé tészik, 's mind a' két számból el maradnak.

Következendő számokban nincs egyéb jegy a' 8, 6, 5 és 3on kívűl, hol $8+6+5+3=22$, 's egyike sem osztható 9 által, de valamennyi különbség igen.

$$\begin{aligned}8365-5638&=2727\\6538-3856&=2682\\8653-6538&=2115\\8563-6835&=1728\\3865-3658&=207\\3658-3586&=72\\3685-3658&=27 \text{ 's a' t.}\end{aligned}$$

75. Minden 9 által osztható szám, 3 által is osztható mert,

$$9=3.3$$

De ezen feljül minden 9 által osztható szám' kétszer osztható három által egymás után mert,

$$9=3^2.$$

Hogy tehát valamelly szám osztható legyen 3 által *szükséges és elég*, hogy jegyei' öszvese legyen osztható 3 által: p. o:

111, 102, 210, 306, 501, 813, 9027, 1001001 's a' t. mind oszthatók 3 által.

76. A' jegyek' *állását* a' számokban kétfélének nézhetni; páratlan és párosnak. E' szerént az 1, 3, 5, 7, és 9dik 's a' t. jegyet jobbról balra véve, páratlan, a' 2, 4, 6, 8, 10 's a' t. jegyet pedig páros állásunak mondjuk: p. o: a' számban 5607821, 1, 8, 0 és 5 páratlan, a' 2, 7 és 6 pedig páros állásuak vagy helyűek.

Azon kérdésnél, hogy osztható e' valamelly szám 11 által? a' páratlan és páros állású jegyek közti különbséget kell tekintenünk.

Ha a' különbség 11, vagy 11nek többese, vagy =0 ezen esetekben a' szám osztható 11 által, semmi más esetben pedig nem, és mennyivel 11nél kevesebb, annyi lesz a' maradván, ha 11el elosztatik. Minden számban, a' páratlan állású jegyek, sokasai 11nek több annyival, mennyi a' jegynek nevező értéke, vagy más szóval, minden főbb rendű egység sokasa a' 11nek +1, ha páratlan helyen áll; p. o:

$$
\begin{aligned}
1 &= 0.11+1 = 0+1\\
100 &= 9.11+1 = 99+1\\
10000 &= 909.11+1 = 9999+1\\
1000000 &= 90909.11+1 = 999999+1 \text{ 's a' t.}
\end{aligned}
$$

A' páros kilenczesek 99, 9999, 999999 's a' t. 11 által mind oszthatók, tehát a' páratlan helyű egyesek, sokasai 11nek több eggyel.

Hogy ezeknek akármelly sokszorosai is oszthatók 11 által (71ből) tudjuk.

A' páros állású jegyek is mind sokasai 11nek, de elvevén belöllök annyit a' menyit nevező értékek jelent; vagyis, minden főbb rendű egység, sokasa 11nek—1, ha páros helyen áll.

Ezeket könnyű lesz az elébbi alakra hoznunk, ha a' páratlan állású egyeseket páros állásuakká tesszük az által, hogy 10zel sokszorozzuk, 's lesz.

$$10 = 1.10 = 10 = 11-1$$
$$1000 = (99+1)10 = 990+10 = 990+11-1$$
$$100000 = (9999+1)10 = 99990+10 = 99990+11-1$$
$$10000000 = (999999+1)10 = 999999+10 = 9999990+11-1$$

's a' t.

A' páros kilenczesek valamint a' $+11$ mindegyik után, oszthatók 11 által; tehát a' páros helyű egyesek, sokasai 11nek elvévén belőllök 1et.

Következésképp, minden páratlan helyen álló szám, sokszorosa a' 11nek, hozzá adván jegyének nevező értékét, és minden pároshelyen álló is sokszorosa 11-nek, elvévén belőlle jegyének nevező értékét.

7385312ben

páratlan helyen állnak 2, 3, 8 és 7

páros helyen az 1, 5 és 3

az elébbi alakra hozván ezeket írjuk

$$2 \ldots = 0+2$$
$$300 \ldots = 3.99+3$$
$$80000 \ldots = 8.9999+8$$
$$7000000. = 7.999999+7$$
$$10 = 1.11-1$$
$$5000 = 5.990+11-5$$
$$800000 = 3.99990+11-3$$

A' páratlan helyen álló jegyek $2+3+8+7=20$

a' páros helyen állóké - - - - - $1+5+3= 9$

és $20-9=11$

melly különbség 11 által osztható; a' szám 7385312 maga is osztható tehát 11 által.

Hogy valamelly szám osztható legyen 11 által *szükséges és elég*, hogy a' páratlan és páros helyen álló jegyek közti különbség vagy 11 's ennek többese, vagy=0 legyen.

Oszthatók gyakorlásul a' többek közt 11el 308, 902, 90002, 9284, 308308, 565895, 8293637 's a' t.

Igen helyes előre is tudni mintegy reá pillantván, melly osztóji lehetnek valamelly számnak, 's némelly gyakorlat által tulajdonává tészi a' számító azon futó tekintetet, melly az arithmetikai 's mathesisi míveletekhez olly igen szükséges. Valamint a' 2, 3, 5, 9 és 11re meg leltük a' törvényeket, úgy lehetne tekinteteinket és visgálatainkat más egyébb számokra terjeszteni, de mivel sok többiekre nézve a' bizonyítván szövevényes, megelégszünk most az előadottakkal anyival is inkáb, hogy ezek a' közönséges haszonvétre a' leg szükségesebbek 's elégségesek is.

A' találtak' segéde által azonban, több más osztóra is alkalmaztathatjuk tapasztalásainkat: így p. o:

77. Néggyel osztható minden szám ha a' két utolsó, az egyes és tizes helyen álló jegy osztható 4 által, mert $100=4.25$ osztható lévén 4 által, annak minden sokszorosa szintugy mint minden nálánál felyebb rendű szám osztható 4 által. Tehát minden szám, melly 04, 08, 12, —...24, 28, 32....52, 56....88...92, 96 és 00al vőgződik osztható 4 által.

Minden 4 által osztható szám, kétszer osztható 2 által, mert $4=2^2$.

78. Ha valamelly szám 8 által osztható, szükségesképen 3 utolsó jegyének kell 8 által oszthatónak lenni.

1000=8.125, 8 által osztható 's minden felsőbb rendű 1. Végződik tehát a' 8 által osztható szám 008, 016, 024 'sa't. 104,..128,..176,..448....800....992, 000el. A' $8=2^3$ a' kettős' harmadik emelése lévén, minden szám melly 8 által osztható, háromszor osztható 2 által.

79. Hat által minden szám osztható, melly 2 és 3 által osztható egyszersmind, 6=2.3 lévén. Az illy szám páros és 3 által osztható.

88. 25 által minden szám osztható, mellynek két utolsó jegye 00, 25, 50 vagy 75, mert a' 100=25.4 's minden felsőbb rend úgy is osztható általa: az illy számot az 5 kétszer osztja mert $25=5^2$.

81. 125 által olly szám osztható, mellynek 3 utolsó jegye osztható általa, az 1000=8.125 's a' többi feljebb való rend úgy is osztható. Illy végző jegyek közé tartoznak

000, 125, 250, 375.....875.

$125=5^3$'s a' számot az 5ös 3szor osztja egymásután.

3 §. Az első számokrul. A' legnagyobb közös osztórul. Tulajdoni az első osztóknak. Visgálata a' számok osztójinak; ezen osztók' tulajdoni.

82. Valamelly szám *első, ha csak az egység és önmaga által osztható.*

Ha valamelly szám, semmi, felinél kisebb első szám által nem osztható, maga is *első szám.*

Ha valamelly szám 6 által osztatik, a' maradvány vagy 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5.

Ha a' maradvány =0 a' szám 6 által, ha 2 úgy 2 által, ha 3, 3 által, ha 4 ismét kettő által osztható.

6 *

Ebből a' következik, hogy minden első szám 2 és 3at kivévén vagy eggyel több vagy eggyel kevesebb a' 6 sokasánál; noha nem lehet megfordítva mondani hogy; ha valamelly szám eggyel nagyobb vagy kisebb a' 6 sokasánál, tehát első szám.

Ha két szám közt nincs közös osztó, ezen két szám egymásra nézve első. Igy 2.5 és 3.7 vagyis 10 és 21 *elsők egymás közt*, vagy 10 első a' 21el.

Két első szám mindenkor első egymásközt.

Két a' természetes számok sorában egymás mellett lévő szám, első egymásközt.

Ha a' factorok vagy osztók első számok, első factoroknak és első osztóknak neveztetnek. 5 és 7 első factorai 35nek, 's egyszersmind első osztóji is. $5.7=35$; $\frac{35}{7}=5$ és $\frac{35}{5}=7$.

I. TÁBLA.

NÉHÁNY ELSŐK A' TERMÉSZETES SZÁMOK' SORÁBAN.

1	127	293	487	683	907	1109	1327	1579
2	131	307	491	691	911	1117	1361	1583
3	137	311	499	701	919	1123	1367	1597
5	139	313	503	709	929	1129	1373	1601
7	149	317	509	719	937	1151	1381	1607
11	151	331	521	727	941	1153	1399	1609
13	157	337	523	733	947	1163	1409	1613
17	163	347	541	739	953	1171	1423	1619
19	167	349	547	743	967	1181	1427	1621
23	173	353	557	751	971	1187	1429	1627
29	179	359	563	757	977	1193	1433	1637
31	181	367	569	761	983	1201	1439	1657
37	191	373	571	769	991	1213	1447	1663
41	193	379	577	773	997	1217	1453	1667
43	197	383	587	787	1009	1223	1459	1669
47	199	389	593	797	1013	1229	1471	1693
53	211	397	599	809	1019	1231	1481	1697
59	223	401	601	811	1021	1237	1483	1699
61	227	409	607	821	1031	1249	1487	1709
67	229	419	613	823	1033	1259	1489	1721
71	233	421	617	827	1039	1277	1493	1723
73	239	431	619	829	1049	1279	1499	1733
79	241	433	631	839	1051	1283	1511	1741
83	251	439	641	853	1061	1289	1523	1747
89	257	443	643	857	1063	1291	1531	1753
97	263	449	647	859	1069	1297	1543	1759
101	269	457	653	863	1087	1301	1549	1777
103	271	461	659	877	1091	1303	1553	1783
107	277	463	661	881	1093	1307	1559	1787
109	281	467	673	883	1097	1319	1567	1789
113	283	479	677	887	1103	1321	1571	1801

83. Ha két vagy több számnak különféle közös osztóji vannak, a' legnagyobbikát ezen osztóknak, *a' két vagy, több számközti legnagyobb közös osztónak nevezzük.*

Tekintsük a' két számot 48 és 18.

Legnagyobb közös osztojuk nem lehet 18nál az egyik számnál magánál nagyobb. De ha 18 elosztja a' 48at, úgy 18 maga a' két számközti legnagyobb közös osztó: példánkban ez nem történik és $48 : 18 = 2 + \frac{12}{18}$ vagyis

$$48 = 2.18 + 12.$$

Innen (és 71 számból) azt látjuk, hogy 48 és 18 közt az a' legnagyobb közösosztó, melly 18 és 12 közt van; különben is minden osztó 18 és 12 közt, elosztja a' 2.18at és 12t 's így (71) 48at is, mint a' két szám' öszvesét.

A' 48 és 18 legnagyobb közös osztója tehát ugyan az, melly 18 és 12é.

Ebből láthatni továbbá, hogy minden kétszámközti közös osztó, a' köztük támadó osztási maradványt is elosztja; és hogy, kétszám' legnagyobb közös osztója nem egyébb mint az, melly a' kisebbik szám és az általa nyert osztási maradék közt találtatik.

A' kérdés vissza vitetett e'szerént erre; melly a' 18 és 12 közt lévő legnagyobb közösosztó?

Ha 12 elosztaná a' 18at, ő lenne a' 18 és 12, 's következéskép a' 48 és 18 köztti legnagyobb közös osztó: de $18 = 12 + 6$'s még a' részes után maradvány fog lenni, 's ez 6.

A' kérdés ismét változik 's a' mondott szerint 18 és 12 közt a' lesz a' leg nagyobb közös osztó melly

12 és 6 közt van: 's itt végre reá akadtunk 12=2.6 és 6=1.6 lévén a' 12 és 6, a' 18 és 12, a' 48 és 18 közt lévő legnagyobb közös osztóra melly 6.

84. *Közönségesen.* Két szám közti legnagyobb osztó következőkép kerestetik.

a.) A' nagyobbik szám elosztatik a' kisebbik által, ha az osztás maradék nélkül véget ér, a' kisebbik szám maga a' keresett legnagyobb közös osztó.

b.) Ha az elosztás nem ér véget 's valami megmarad, ezen maradékkal osztatik a' kisebbik szám; ha az osztás véget ér, a' maradék a' keresett legnagyobb közös osztó.

c.) Ha ismét maradékra akadtunk, általa osztatik az előbbeni maradék, 's így fojtatjuk a' míveletet mindenkor a' következő maradékkal osztván az előtte nyerttet, míg egyiket a' másikban megtaláljuk.

d.) Azon maradék vagy szám, melly az előtte való nagyobbat tökélletesen elosztotta, az adott két számközti legnagyobb közös osztó:

e.) Ha a' két szám közt nincs illyen közös osztó, az osztás szükségesképen addig foly míg a' maradék =1, mi jele hogy a' két szám első egymás közt.

85. 81ből következik, hogy kétszám legnagyobb közös osztója, mindazon maradványokat elosztja, mellyek keresésével támadtak; 's hogy egyszersmind akármelly két maradványnak is közösosztója: e' szerént

1-ször. Két szám' minden más közös osztója, legnagyobb közös osztójokat is elosztja.

2-szor. Ha az osztások' végső maradéka az egység, vagy ha két egymást követő maradék első szám, a' két számnak nincs egyéb közös osztója az 1nél.

3-szor. Ha két szám első egymásközt, a'köztöklévő legnagyobb közös osztó keresése szükségesképpen az egységre vezet mint vég maradékra.

a.) 5632 és 528 közt a' legnagyobb közös osztó kívántatik?

1.)	5632 : 528 = 10 +	352	maradvány
2.)	528 : 352 = 1 +	176	- - - -
3.)	352 : 176 = 2 +	0	- - - -

's 176 a' legnagyobb közös osztója 5632 és 528nak.

b.) 10824 és 278784 közti legnagyobb közös osztó kívántatik?

	10824	278784		1-ső részes	= 25
II. maradék	2640	8184.	I.)	2 - - -	= 1
		264.	III.)	3 - - -	= 3
				4 - - -	= 10

264 . 10 = 2640

és 264 a' keresett legnagyobb közös osztó.

c.) 84 és 715 közti legnagyobb közös osztó kívántatik?

	84	715		1-ső részes	= 8
második mar.	41	43	első maradék	2 - - -	= 1
4-dik marad.	1	2	harmadik mar.	3 - - -	= 1
				- - -	= 20
				- - -	= 2

Az egységre jutván, a' két adott szám közt nincs közös osztó.

86. Ha több mint két szám közt kell keresni a' legnagyobb közös osztót a' mívelet nem változik, de először a' két nagyobbik számközt kerestetik, azután a' talált közös osztó 's a' következendő kisebb szám közt, és mindenkor a' legnagyobb közös osztó 's a' következő kisebb szám közt míg a' mívelet' végit érjük.

10521, 6804 és 6447 közt 21 a' legnagyobb közös osztó, 10521 és 6804 közt ez 63, de 6447 és 63 közt 21; 's így a' három szám közti legnagyobb közös osztó 21.

87. Elosztatván a' számokat legnagyobb közös osztójok által, ezek a' részeseket többé nem osztják.

88. Ha valamelly szám, más két szám' származatát osztja, 's az egyikkel első, a' másikat szükségesképen elosztja.

89. Minden szám tehát, melly valami származatot eloszt, annak egyik factorát is elosztja.

90. Minden osztója valamelly szám' különböző emelésének, a' számot magát is elosztja.

91. Ha valamelly szám, két, egymásközti első által osztható, ezen elsők' származata által is osztható: p. o: 360, 4, 5 és 9 által osztható, következésképp 4.5.9=180 által is osztható.

92. Ebből következik, hogy ha valamelly számnak több első osztóji vannak, ezen különbféle osztóji' mindenféle származatai által is osztható, vegyük azokat párosan, hármasan, négyesen, 's a' t. vagy mindöszve.

P. o. 210 osztható 2, 3, 5 és 7 által, hol 2, 3, 5 és 7 első számok és 210nek első osztóji: osztható lesz tehát 210 mindazon származatokkal, mellyek ezen 4 factorból a' változtatás és összerakás által támadhatnak, 's ezek:

párosan véve 2.3=6, 2.5=10, 2.7=14, 3.5=15, 3.7=21 és 5.7=35

hármasával 2.3.5=30, 2.3.7=42, 2.5.7=70, 3.5.7=105 's végre: 2.3.5.7=210 vagyis maga a' szám.

210nek öszvetett osztóji e' szerént:

6, 10, 14, 15, 21, 35, 30, 42, 70, 105 és 210.

93. Két egymásközt első számnak, akármelly emelései is elsők egymásközt. P. o: 5 és 7 elsők lévén egymásközt 5^3 és 7^6 is, vagy 5^4 és 7^4 is elsők maradnak.

94. Ha valamelly szám első több más számok közt, ezeknek származatai közt is első:

91 első 6, 12 és 15el, első tehát 6.12, 12.15 és 6.12.15el, vagy 72, 180, és 1080al is.

95. Ha valamelly szám első egy másikkal, úgy ennek emelésével is első: 3,első 5tel, első 5^2, 5^3, 5^4 &el is.

96. Akármelly úton kerestessenek valamelly számnak első factorai, mindenkor csak ugyanazokra lehet találni.

97. A' számokat első factoraiba oldani, következőkép kell.

Osztani kezdjük a' számot a' legkisebb elsőkkel, mint a' 2, 3, 5, 7 's a' t.

Ha p. o: a' kettővel osztván egész részesre akadtunk, ezt a' 2őt mint a' szám' egyik első factorát feljegyezzük: és ismét 2vel kezdjük az osztást mind addig míg azt az adott számban megtaláljuk. *A' hányszor eloszthattuk a' számot kettővel, annyiszor első factora 2 annak.*

Ha a' szám 2vel többé nem oszlik, a' 3ra mint következő elsőre megyünk által szintúgy mívelvén mint a' 2vel: 's ezután a' feljebb való elsőkre.

Ha részest találtunk természetes, hogy a' következő osztást ezen részesen eszközöljük nem pedig ismét a' számon magán.

A' talált részesek' osztása változtatott elsőkkel mindaddig foly, míg az utolsó részes maga is első szám 's ekkor a' míveletnek vége; a' különbféle első osztók az utolsó részessel együtt, a' számnak minden első factorai.

Ha az osztásnál egy ollyan osztóra sem akadtunk, melly a' számot tökélletesen elosztotta volna, a' míveletet nem szükség tovább fojtatni mint addig, míg egy olly osztóra jutottunk, mellynek részese nálánál kisebb; ez bizonysága hogy az adott számnak semmi osztója nincs 's következéskép *elsőszám.* (82)

98. Ha valamelly szám mellynek első factorait keressük, egy első szám 's ennek második emelése közt van, 's általa vagy nállánál kisebb első által nem osztható, maga is első szám (97).

P. o: 647nek factorait keresvén, végre a' 19re jutunk az ennél kisebb elsőkkel hijában próbálván az osztást, 's a' visgálatot ekkép folytatjuk:

$$647:19=34+{}^{1}/_{19}$$
$$647:23=28+{}^{3}/_{23}$$
$$647:29=22+{}^{9}/_{29}$$

Már itt a' részes $=22$ kisebb mint az osztó $=29$ (vagyis $22<29$), az adott szám 647, 29 és 292 közt van ($29^{2}=841>647$) és semmi 29nél kisebb első szám által nem osztható, tehát maga is elsőszám.

1-ső példa: Oldandó 1155 első factoraiba?

1155 nem osztható 2 által

jegyeinek öszvese $1+1+5+5=12$ osztható 3 által, és, $1155:3=385$. A' 385 többé 3 által nem osztható, de osztható 5 által és $385:5=77$.

A' 77 osztható 7 által 's lesz $77:7=11$ hol a' részes $=11$ már maga is első szám, 's a' míveletnek vége.

Első factorai tehát 1155nek 3, 5, 7 és 11. és ezen factoroknak származata egyenlő az egész számmal

3.5.7.11=1155.

A' mívelet közönségesen így áll:

1155	3
395.	5
77.	7
11.	11

2-dik példa. 9800 első factorai 2, 2, 2, 5, 5, 7 és 7 's ezek 2^3, 5^2 és 7^2, vagy is $9800=2^3 . 5^2 . 7^2$

A' számok' feloldása első factoraiba segitni fog;

a.) A' szám' minden osztójit feltalálni.

b.) meglelni a' köztök levő legnagyobb közös osztót,

c.) minden közös osztót közöttök 's egyszersmind,

d.) az általuk osztható legkisebb számot.

99. Valamelly szám' minden osztójit megtalálni? Első factorait meglelvén ezeket magokban, kettejével, hármasával & 's végre valamennyit véve, minden osztójit megtaláljuk ezeknek származatában.

1.) 1155 minden osztóji kívántatnak? Első factorai 's következéskép első osztóji mint láttuk (98)

3, 5, 7, és 11.

Ezeket párosával véve következőkre akadunk,

3.5, 3.7, 3.11, 5.7, 5.11, és 7.11.

hármasával véve találjuk

3.5.7, 3.5.11, 3.7.11, és 5.7.11et

's végre mindnégyet öszvevevén

3.5.7.11 &.

feloldván ezeket, lesz 1155' minden osztója, első és öszvetett,

3, 5, 7, 11, 15, 21, 33, 35, 55, 77, 105, 165, 231, 385 és 1155.

Könnyebb tekintet kedviért a' számítás, következő-kép áll.

a.) Az első factorok függő sorba íratnak egymás alá.

b.) A' legfelsőbbel kezdvén sokszorozni, minden alatta álló számot sokszorozunk.

c.) Ezután a' sokszorozás a' következő elsővel történik, mindegyik utánna álló 's az elsővel talált származaton keresztűl menvén, így minden első factorral a' többit 's a' már talált származatokat sokszorozván, valamennyi osztójit megtaláljuk az adott számnak.

2.) 9800nak valamennyi osztója keresendő?

Láttuk (98) hogy $9800=2^3.\ 5^2.\ 7^2$

írjuk tehát első factorait függő sorba:

Első factorok.	összetett factorok.
2	
2	4
2	8
5	10, 20, 40.
5	50, 100, 200, 25.
7	14, 28, 56, 70, 140, 210, 350, 700, 1400, 245, 175.
7	35, 49, 98, 196, 392, 490, 980, 1470, 2450, 4900, 9800.

3.) 2310nek minden osztóji keresendők?

$$2310=2.3.5.7.11.$$

2	
3	6
5	10, 15, 30.
7	14, 21, 35, 42, 70, 105, 210.
11	22, 33, 55, 66, 77, 110, 165, 330.
	154, 231, 385, 462, 770, 1155, 2310.

sorban véve minden factort, egy sem marad el.

100. 9800nak: nincs több osztója 36nál; akármelly úton keressük ezeket mindenkor csak 2^3, 5^2, és 7^2re 's ezeknek kölcsönös származataira akadunk.

Ezen 36ton kívül semmiféle első vagy öszvetett szám nem oszthatja 9800at, 's p. o: 2^4 sem oszthatná, mert első 5^2 és 7^2 közt a' 2^3at pedig nem oszthatja.

9800 egyes factorainak mutatóji 3, 2 és 2, minden osztóji' vagy factorai' száma pedig $4.3.3=35$. Igy előre meglehet mondani, hány első és öszves osztója van valamelly számnak, ha első factorainak mindegyik mutatóját 1el öregbitjük 's ezeket egymással sokszorozzuk: a' származat lesz a' szám' minden osztójinak mennyisége.

1155 első factorai, 3, 5, 7 és 11, mindegyik az első emelésen, osztója lesz tehát $2.2.2.2=2^4=16$.

2310 első factorai 2, 3, 5, 7 és 11. mind első emelésen, osztóji' száma $2.2.2.2.2=2^5=32$.

4.) 45000nek mellyek első factorai?

mellyek első és öszvetett osztóji, 's mennyi?

45000 első factorai 2^3, 3^2, 5^4

és $2^3 . 3^2 . 5^4=45000$.

egyes első factorai tehát

$1, 2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 5, 5^2, 5^3, 5^4.$

fekvő sorba írván a' hat első factor' egyesét és kettesét, a' függő sorba íratott $5, 5^2, 5^3$, és 5^4el rendre mindegyik sokszoroztatott.

1,	2,	4,	8,	3,	6,	12,	24,	9,	18,	36,	72,
5,	10,	20,	40,	15,	30,	60,	120,	45,	90,	180,	360,
25,	50,	100,	200,	75,	150,	300,	600,	225,	450,	900,	1800,
125,	250,	500,	1000,	375,	750,	1500,	3000,	1125,	2250,	4500,	9000,
625,	1250,	2500,	5000,	1875,	3750,	7500,	15000,	5625,	11250,	22500,	45000,

minden kívánt osztója $2^3 . 3^2 . 5^4$nek, száma pedig $3.4.5=60$, közibe vévén az egységet és a' számot magát.

101. Ha két vagy több szám feloldatott első factoraiba, az lesz köztök a' legnagyobb közösosztó, melly,

azon factorokból származik, mellyek mindegyik számban egyenlően, 's egyenlő mennyiségben találtatnak.

Vegyük például 924 és 720at.

$924=2^2. 3.7.11$, $720=2^4.3.5$.

Nyilvános tehát, hogy a' kétszámközti legnagyobb közös osztó

$$=2^2.3=12$$

mert a' két számban nincs ezeken kívül közös factor, és

$$924=2^2. 3.(7.11).$$

$$720=2^2. 3. (2^2. 3.5)$$

P. o: $2^4. 3^5. 7^4. 11$ és $2^6. 3^7 7^2. 13^2$ közt $2^4. 3^5. 7^2$ a' legnagyobb közös osztó.

102. A' több számközti osztókat mind megtalálni?

Több számnak valamelly közös osztója, azoknak legnagyobb közösosztóját is megosztja. Viszont: a' számok' legnagyobb közös osztójának factora, factora a' számoknak is.

Megtaláltatnak következésképp két vagy több számnak minden közös osztóji, ha legnagyobb közös osztójuknak factorai kerestetnek fel.

p. o: 924 és 720 minden közös osztóji, az ő legnagyobb közös osztójokban foglaltatik; ez 12, 12őt pedig osztják

$1, 2^2, 3$, tehát 924 és 720 közti

közös osztók 1, 2, 3, 4, 6 és 12. (100)

103. Megtalálni azon számot, melly több más szám által egyenlően elosztható, de egyszersmind a' legkisebb sokszorosa ezen számoknak?

E' végre az adott számok első factoraikba oldatnak. Azon factorok, mellyek mindegyik számban a' legnagyobb emelésen találtatnak egymással sokszoroztatnak.

Sokszoroztatnak ezen fellyűl mindazon elsők is, mellyek csak az egyik számban találtattak, de a' többiben elő nem jönnek.

Sokszoroztatnak végre a' számok magok, ha elsők egymás közt.

Ha p. o: azon legkisebb számot keresnénk, mellyet 2 és 3 eloszt, bizonyosan származatában találnánk azt 's ez $2.3=6$.

2 és 3 számtalan számot osztanak, de ezek közt 6 a' legkisebb.

Ha azon számot keresnénk, mellyet 4 és 6 osztnak, és egyszersmind legkisebb sokasa is legyen 4 és 6nak, származatját vennénk, mert 24et az igaz 4 és 6 elosztja, de 24 nem a' legkisebb szám, mellyet 4 és 6 oszt; ez $12.=2^2.\ 3$, vettük pedig a' 2^2 és 3at a' 4ből, melly $=2^2$ és a' 6ból, melly $=2.3$. A' 6nál lévő 2 már úgy is foglalva lévén 2^2ban elhagyatott.

4, 6, 8, 12 és 16 közös legkisebb sokasa kívántatik?

$4=2^2$, $6=2.3$, $8=2^3$, $12=3.2^2$ és $16=2^4$

A' mondott szerént $2^4.3=48$ lesz a' négy szám' legkisebb sokasa, 's csakugyan 48at mindegyik elosztja, 's egyszersmind nincs is 48nál kisebb szám, mellyet a' 4, 6, 8, 12 és 16 egyenlőkép elosztana.

Melly azon szám, mit 500, 200 és 147 egyenlőkép osztnak, 's egyszersmind legkisebb sokasa ezen három számnak?

$500=2.^2 5^3$, $200=2^3.\ 5^2$, $147=3.7^2$

a' három szám' legfőbb emelésen lévő factorai

2^3, 3, 5^3 és 7^2 's ezeknek származata

$2^3.\ 3.5^3.\ 7^2=147000$ a' keresett legkisebb sokasa 500, 200 és 147nek.

Láttuk a' sokszorozásnál, hogy a' $2^3. 3.5^3. 7^2$ egyenlőkép osztható $2^3. 5^2$, $2^2. 5^3$, és 3.7^2 által, a' számot 147000et következő 3 alakban írhatjuk factorai szerént.

$$2^3. 5^2. (5.3.7^2)$$
$$2^2.5^3. (2.3.7^2)$$
$$3. 7^2. (2^3. 5^3)$$

's mindhárom kifejezés = 147000.

A' korláton kívül álló factorok, az adott 3 számnak factorai, a' korlátokban lévők pedig azon részesnek factorai, melly 147000 elosztásából származott.

Elvégezvén a' kijelölt sokszorozást példánk így áll.

200. 735. = 147000
500. 249. = 147000
147. 1000. = 147000 mert

$147000:200 = 5.3.7^2 = 735$
$147000:500 = 2.3.7^2 = 249$
$147000:147 = 2^3.5^3 = 1000$

104. Ha több szám adatik, legkisebb sokasa keresésére, őket sorban írván, közűllök mindazokat előre elhagyhatni, mellyek már valamelly köztök álló nagyobb számban foglaltatnak, 's csak a' maradóknak kell factorait keresni.

Ha p. o: következő számoknak keresnénk legkisebb sokasát,

3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 24, 27, 30, 40, 60.
az első nyolcz számot 18ig mind ellehet hagyni, mert a' jövőkbe megvannak, és a' 30at is mint 60nak felét, a' kérdés tehát 18, 24, 27, 40 és 60ra vivődött.

Ezeknek egyes factorai 2, 2, 2, 3, 3, 3 és 5. $= 2^3. 3^3. 5.$ és származatok = 1080 a' keresett legkisebb sokas.

A' számítás így állhat:

:2	18	24	27	40	60
:2	9	12	27	20	30
:2	9	6	27	10	15
:3	9	3	27	5	15
:3	3	1	9	5	5
:3	1	„	3	5	5
:5	„	„	1	5	5
	„	„	„	1	1

A' kettővel kezdvén az osztást addig fojtattuk míg belől általa osztható szám állott, azután 3al, 's végre 5tel.

Azon számokat mellyek, a' kinn álló első factorok által nem oszthatók, változatlan a' következő sorba vittük le, míg factoraira értünk.

Ezen míveletnek nagy hasznát fogjuk venni a' törtszámok' szakaszában.

105. *Legjelesb tulajdoni a' páros és páratlan számoknak.*

A' párosszámok közönséges kifejezése $2m$, akármelly legyen m értéke.

A' páratlan szám egyel több vagy kevesebb a' párosnál, közönséges kifejezése $2m\pm1$. vegyük példáinkban $2m+1$nak

1.) Két *páros* szám' *öszvese* és *különbsége* is *páros*.

$$2m+2n=2(m+n)$$
$$2m-2n=2(m-n)$$
$$2m\pm2n=2(m\pm n)$$

$$12+8=2(6+4)=20$$
$$12-8=2(6-4)=4$$

Több *páros* szám' öszvese és különbsége is *páros*

$$24+12+8+4=48=2(12+6+4+2)$$
$$24-12+8-4=16=2(12-6+4-2)$$
$$24-12-8+4=\ 8=2(12-6-4+2)$$
$$24-12-8-4=\ 0=2(12-6-4-2)$$

az üres a' páros számok közzé számláltatik.

2.) Két *páratlan* szám' *öszvese* és *különbsége is páros*.

$$2m+1+2n+1=2m+2n+2=2(m+n+1)$$
$$2m+1-2n+1=2m-2n\quad=2(m-n)$$
$$15+7=22=2.11$$
$$15-7=\ 8=2.4$$

3.) Egy páros és páratlan szám' öszvese és különbsége is páratlan

$$2m+1+2n=2m+2n+1=2(m+n)+1$$
$$2m+1-2n=2m-2n+1=2(m-n)+1$$
$$2m+1\pm 2n=2m\pm 2n+1=2(m\pm n)+1$$
$$24+13=37=2(12+6)+1$$
$$24-13=11=2.(5)+1$$

4.) Két páros szám' származata *páros*.

$$2m.2n=4mn=2(2mn)$$
$$4.6=24,\ 8.12=96.=2(48)$$

5.) Két páratlan szám' származata *páratlan*.

$$(2m+1)(2n+1)=4mn+2m+2n+1=2(2mn+m+n)+1$$
$$5.\ 9+45=2(22)+1$$
$$7.13=91=2(45)+1$$

6.) A' páros és páratlan közti származat *páros*.

$$(2m+1).2n=4mn+2n=2(2mn+n)$$
$$16.5=\ 80=2.(40)$$
$$13.8=104=2.(52)$$

7.) Ha egy páros más páros által osztatik, a' részes *páros* vagy *páratlan*. Ha maradék van, ez mindenkor *páros* legyen a' részes páros vagy páratlan.

$$54:2=27 \text{ ,, } 54:6=9$$
$$60:6=10 \text{ ,, } 60:12=5$$
$$100:20=5 \text{ ,, } 100:4=25$$
$$240:24=10 \text{ ,, } 240:48=5$$
$$240:26=9+\frac{6}{26}$$
$$240:28=8+\frac{16}{28}$$

8.) A' két páratlan közti részes *páratlan*. Itt a' maradék ha van, *páros* ha a' részes *páratlan*, *páratlan* ha a' részes *páros*.

$$35:7=5,\ 125:25=5$$
$$35:9=3+\frac{8}{9},\ 125:27=4+\frac{17}{25}$$

9.) Ha az osztandó páros az osztó pedig páratlan, a' részes *páros*. Ha maradék van, az *páros* vagy *páratlan*, mint a' részes páros vagy páratlan.

$$264:3=88,\ 100:25=4$$
$$264:5=52+\frac{4}{5} 100:27=3\frac{19}{27}$$

10.) Ha az osztandó páratlan és az osztó páros, az osztás nem végződik, 's a' maradék mindenkor *páratlan*

$$35:4=8+\frac{3}{4},\ 35:6=5+\frac{5}{6},\ 35:8=4+\frac{3}{8}$$

IV. SZAKASZ.

A' KÖZÖNSÉGES ÉS TIZEDES TÖRTSZÁMOKRÓL.

1 §. A' közönséges törtszámokról.

106. Ha valamelly szám nem osztatik el tökéletesen egy másik által, az az valami fenn marad mi kisebb mint az osztó, a' részes két a' természetes számok' sorában egymás mellett lévő szám közt van: p. o: 26, 3szor 7 és 4szer 7 közt lévén, ha 7 által osztjuk, 3 egészet és 5 maradékot találunk; de négyszer nem megy 7 a' 26ban, mert $4.7=28$: részesünk maradékostul $3+\frac{5}{7}$ tehát a' 3 és 4 közt áll.

A' maradék az 5 kisebb olly egységnél, mellyből a' részes' 3egyese áll 's ennek csak némelly része. Azért neveztetik $\frac{5}{7}$ *törtszámnak*.

Mindenkor törtszámra találunk e' szerént, ha valamelly számot nálánál nagyobb számmal akarunk osztani.

Minden szám maga magával osztva az egységet adja részesnek, ha tehát az osztó nagyobb az osztandónál, kisebb számra kell találnunk mint az egység, 's következésképen minden törtszám kisebb az egységnél.

$\frac{5}{7}$ kimondva öt hetedrész, annyi mint az 5 minden egyes részeinek hetede, vagy öt hetedrésze az egynek. A' törtszámok értékét az osztó szerént szokás kimondani, mint 3ad 4ed 5öd 6od része az egységnek; példánkban a' 7 lévén osztónk, ő adja a' törtszámnak nevezetét, 's azért hívatik a' vonal alatt lévő szám, *nevezőnek*.

Példánkban az 5 azt jelenti, hogy az egység 7 részbe osztandó 's ezen 7 részből 5 legyen veendő; mutatja tehát hány olly része kívántatik az egységnek, mellybe a' nevező által osztatik, 's ezen okból *számlálónak* neveztetett.

Igy $\frac{5}{7}$ben 5 a' *számláló*, 7 pedig a' *nevező*.

Ha a' törtszámot figyelemmel tekintjük, következő észrevételekre akadunk. Vegyük például az $\frac{5}{7}$et.

a.) Mint az egységnek öt hetede, annyi mint heted része az 5nek.

b.) Minden törtszám két szempont alatt tekinthető;

1-ször, mint az egység' némelly kisebb részeinek kifejezése.

2-szor, mint kijelölt, de nem végzett osztás, vagy olly részes, mellynek osztója a' törtszám' *nevezője*, osztandója pedig ennek *számlálója*.

3-szor, a' törtszám' számlálója mindég ugyan azon része nevezőjének, melly része az egész tört az egynek.

107. A' törtszámoknak különféle nemei vannak:

1.) *Valódi törtszámnak* neveztetik ollyan, mellynek nevezője nagyobb mint számlálója: p. o: $^3/_4$, $^5/_6$, $^{11}/_{15}$.

2.) ***Szinlett törtszám*** az, hol a' számláló nagyobb mint a' nevező; a' nélkűl azonban, hogy az többese lenne: p. o: $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{13}{9}$, $\frac{25}{7}$, 's a' t.

3.) ***Képzelt törtszám*** az, mellynek számlálója valamelly többese nevezőjének, mint, $\frac{8}{4}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{24}{6}$, $\frac{24}{3}$,

4.) ***Rendes törtszám*** mindaz, mellynek mindkét része egész szám, $^3/_4$, $^7/_5$, $^{11}/_{15}$, $^{12}/_6$. 's a' t.

5.) ***Rendetlen*** az, mellynél a' számláló vagy nevező, vagy mindkettő egyszersmind, ismét törtszám, mint $\frac{^2/_3}{3}$, $\frac{5}{^1/_4}$ vagy $\frac{^2/_5}{^3/_4}$.

6.) ***Kevert számnak*** hívjuk azt, ha valamelly egész szám után a' + vagy — jeggyel törtszám van téve; illyen kevertszám minden el nem végzett osztás. $4+{}^2/_4$, $5-{}^3/_4$; mit közönségesen míveleti jegy nélkül is szokás írni, $4^2/_4$, a' levonás' jegyével úgy sem szoktak illetve lenni.

Illy kevert számba könnyen változtatható, minden színlett törtszám, p. o: $\frac{17}{5}=3^2/_5$, $\frac{24}{7}=3^3/_7$'s a' t.

Minden kevert számot viszont, színlett törtszámba lehet az által változtatni, ha az egész szám a' tört' nevezőjével sokszoroztatik 's a' származat, számlálójához adatik, p. o:

$$3^2/_5=\frac{3.5+2}{5}=\frac{15+2}{5}=\frac{17}{5}$$

$$3^3/_7=\frac{3.7+3}{7}=\frac{21+3}{7}=\frac{24}{7}$$

Ezen áltvitelét a' kevertszámnak színlett törtbe, *rendbehozásnak* szokás nevezni.

108. **Ha több törtszámnak egyféle nevezője van, az közöttök a' legnagyobbik, mellynek számlálója legnagyobb.**

Ha pedig számlálójok egyenlő, az mellyiknek legkisebb nevezője van a' legnagyobb, kinek leg nagyobb nevezője van a' legkisebb:

$$^3/_4 > ^2/_4 > ^1/_4, \quad ^7/_{11} > ^6/_{11} > ^4/_{11}$$

$$^3/_4 > ^3/_5 > ^3/_7 > ^3/_8, \quad ^5/_{15} < ^5/_{12} < ^5/_8 < ^5/_6$$

A' törtszámok' értéke nem attól függ, mekkora legyen számlálójok és nevezőjök; mert, ezeknek nagyságok határtalan változások alá van vetve, 's a' nélkül, hogy a' törtszám értéke változna, végtelenül nevekedhetnek: de a' számláló és nevező közti *viszonytól*, 's nagyságok közti *iránytól*. A' meddig ezen irány a' számláló 's nevező közt fenn áll, a' törtszámnak értéke nem változik. Következő törtek:

$$\frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \frac{25}{30}, \frac{30}{36}, \frac{35}{42}, \frac{40}{48}, \frac{80}{96}, \text{'s a' t.}$$

noha a' számokra nézve mellyel írva vannak igen különböznek egymástól, mind egyenlők; az az ugyan azon egy törtszámot az $\frac{5}{6}$ot képzelik.

109. Mint láttuk ezen törtek $\frac{5}{6}$ból a' sokszorozás által nőttek, 's hogy a' nagyobbak csakugyan sokasai az $\frac{5}{6}$nak, ha a' nevezőt 's számlálót külön veszszük: az az: a' nevező 's számláló ugyan azon számmal egyszersmind sokszoroztatott. Ebből következik, hogy a' törtszámok változást nem szenvednek, ha számlálójok 's nevezőjök ugyan azon számmal sokszoroztatnak: és nem változnak következésképp, ha számlálójok és nevezőjök ugyan azon szám által elosztatnak.

A' sokszorozás által valamelly törtszámot, minden kigondolható nagyságig vihetjük mintegy végnélkűl; de az elosztásnak úgy látszik határai vannak, mert nem lehet (mint láttuk) a' számokat önkényes számokkal osztani tökélletesen, mint sokszorozni, de csupán csak azoknak osztóji által.

A' sokszorozás által, a' törtszámoknak azon nevezőt adhatjuk melly kívántatik, 's a' számokat növeszthetjük.

A' törtszámok' közönséges alakja $\frac{a}{b}$, és

$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$ akármelly legyen *m* értéke,

és $\frac{a:n}{b:n}=\frac{a}{b}$ akármelly legyen *n* értéke:

mert ha $\frac{a}{b}=c$ $c=\frac{ma}{mb}=\frac{a:n}{b:n}$ (69).

110. Valamelly törtszámot *röviditeni* vagy *kurtitani* annyit tesz, mint azt legkisebb kifejezésére vinni vissza: az az, a' lehető legkisebb számokkal írni, p. o:

$$\frac{36}{48}=\frac{36:12}{48:12}=\frac{3}{4}, \quad \frac{13}{39}=\frac{13:13}{39:13}=\frac{1}{3}$$

Itt a' számlálót 's nevezőt első factoraikba oldván fel, a' köztök egyenlőket elhagytuk: mert

$$\frac{36}{48}=\frac{2^2.3^2}{2^4.3}=\frac{3}{2^2}, \text{ és } \frac{70}{112}=\frac{2.5.7}{2.8.7}=\frac{5}{8}$$

111. Akármelly törtet más nevezésre lehet vinni az által, ha az adott újnevezőt, az elébbivel elosztjuk, 's a' nyert részessel, a' régi tört számlálóját és nevezőjét sokszorozzuk.

$\frac{3}{5}$ újnevezője 20 legyen;

$\frac{20}{5}=4$ tehát $\frac{3.4}{5.4}=\frac{12}{20}$ a' változatlan de más nevezetű tört.

Ha különbféle nevezetű törteket kellene egy nevezőre vinni, e' szerént czélt érnénk a' kijelölt úton: e' végre; a' (103) alatt adott mód szerint a' különböző nevezők' közös legkisebb sokasát kell először keresni, ezt továbbá minden külön nevezővel elosztani, 's végre a' talált részesekkel a' törtek' számlálóját 's nevezőjét sokszorozni.

1.) Egyenlő nevezőkre vitessenek $^2/_3$, $^4/_5$, és $^6/_7$

3, 5 és 7 elsők lévén egymásközt, legkisebb sokasok csak öszves származatok lehet; $3.5.7=105$

Az adott törtek így változnak.

$$\frac{2.5.7}{3.5.7}=\frac{2(5.7)}{3(5.7)}=\frac{70}{105}$$

$$\frac{4.3.7}{5.3.7}=\frac{4(3.7)}{5(3.7)}=\frac{84}{105}$$

$$\frac{6.3.5}{7.3.5}=\frac{6(3.5)}{7(3.5)}=\frac{90}{105}$$

2.) Egy nevezőre vitessenek $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$ és $^7/_{12}$.

Itt a' 12, osztható lévén 3.4 és 6 által már maga a' megkívántató legkisebb sokas; és lesz:

$$\frac{2}{3}=\frac{2.4}{3.4},\ \frac{3}{4}=\frac{3.3}{4.3},\ \frac{5}{6}=\frac{5.2}{6.2},\ \frac{7}{12}=\frac{7.1}{12.1}$$

a' sokszorozást végezvén, lesz a' 4tört:

$$\frac{8}{12},\ \frac{9}{12},\ \frac{10}{12},\ \text{és}\ \frac{7}{12}$$

3.) Ha csak két törtet kell egynevezőre vinni elég, hogy az egyik sokszoroztasson a' másiknak nevezőjével kölcsönösen; ugy hogy 1ször az egyik számlálója és nevezője a' másik' nevezőjével, azután ennek számolója és nevezője az első' nevezőjével sokszoroztassék; $\frac{3}{7}$ és $\frac{6}{11}$ egynevezőre vitessék, lesz: $\frac{3.11}{7.11}$ az egyik, $\frac{6.7}{11.7}$ a' másik; $\frac{33}{77}$ és $\frac{42}{77}$

szinte helyesen és röviden mívelünk hasonlóul akkor, ha több törtek' nevezőji egymásközt elsők, és minden tört nevezőjét és számolóját, a' többi törtek' nevezőjökkel sokszorozzuk kölcsönösen, mint ez az 1) példában nyilván látszik:

4.) Egynevezetre viendők $\frac{11}{72}$, $\frac{7}{60}$, és $\frac{3}{175}$

A' három nevező 72, 60 és 175 legkisebb sokasa 12600. Elosztván 12600ot először 72vel azután 60 és 175el, a' talált részesekkel sorjában, a' törteknek sokszorozni kell nevezőjöket és számlálójokat, 's lesz:

$$\frac{1925}{12600}, \frac{1470}{12600}, \frac{216}{12600},$$

5.) Egyenlő nevezőre vitessenek $^1/_2$, $^2/_3$, $^5/_4$, $^7/_9$, $^5/_8$ és $^5/_6$.

A' nevezők legkisebb sokasa $= 2^3 . 3^2 = 72$.

72őt mindegyik nevezővel elosztván, mindegyiknek részesivel sokszoroztatik nevezője és számlálója.

$$72:2=36 \text{ lesz } {}^1/_2 = \frac{1.36}{2.36} = \frac{36}{72}$$

$$72:3=24 \quad {}^2/_3 = \frac{2.24}{3.24} = \frac{48}{72}$$

$$72:4=18 \quad {}^5/_4 = \frac{5.18}{4.18} = \frac{90}{72}$$

$$72:6=12 \quad {}^5/_6 = \frac{5.12}{6.12} = \frac{60}{72}$$

$72:8 = 9 \qquad {}^5/_8 = \frac{5.9}{8.9} = \frac{45}{72}$

$72:9 = 8 \qquad {}^7/_9 = \frac{7.8}{9.8} = \frac{56}{72}$

Ha két vagy több törtet hasonlítni akarunk egymásközt, szükséges, hogy ugyan azon nevezőjök legyen.

112. Ha a' törtszám két tagja közt nincs közös factor, az nem rövidíthető, az az számolója 's nevezője *elsők* egymásközt. A' rövidítés az által történvén meg, hogy a' két tag, legnagyobb közös osztója által osztatik, de az egységen kivűl, mint p. o: $\frac{113}{355}$ben, semmi egyéb osztójok nem lévén, a' tört *nem rövidíthető*.

113. Az öszveadás e' szerént csak olly törtek közt eszközölhető, mellyeknek egyenlő nevezőji vannak.

${}^3/_4$ és ${}^2/_{11}$nek öszvesét megnem lehet mondani, 's az öszveadását csak kijelölni lehet, mint ${}^3/_4 + {}^2/_{11}$, de ha egy nevezőre vitetnek az öszveadás könnyű.

Tudjuk hogy p. o: ${}^3/_4 = {}^1/_4 + {}^1/_4 + {}^1/_4$ az az egy negyedrész háromszor véve: szinte így lesz tehát ${}^2/_7 + {}^3/_7 + {}^1/_7 + {}^4/_7 = \frac{10}{7} = 1 + {}^3/_7$

Ha tehát különböző nevezővel illetett törteket kell öszveadni, szükséges azokat előre egyenlő nevezőre vinni.

Ha a' törtek mellett egész számok állanak, vagy is ha kevert számot kell öszveadni, az egészek külön adatnak össze, és szükségtelen azokat törtre változtatni.

Öszveadandók ${}^3/_4 + {}^4/_5 + {}^5/_6 + {}^3/_8 + {}^7/_9 + {}^3/_{10}$?

(111) szerint megtalálván a' nevezők' legkisebb sokasát $= 360$, és mindegyik nevező által elosztatik, 's

a' részessel most csak a' számolóját szükséges sokszorozni, tudván hogy mindegyik nevező egyenlő, és $=360$.

A' külön származatok ezután öszve adatnak 's öszvesek alá tétetvén a' 360 köznevező, megtaláltuk a' törtek' kívánt öszvesét.

öszveadandók,	a' nevezők' részesei,	nevezők,	újszámolók.
$^3/_4$ - - -	90	.3 =	270
$^4/_5$ - - -	72	.4 =	288
$^5/_6$ - - -	60	.5 =	300
$^3/_8$ - - -	45	.3 =	135
$^7/_9$ - - -	40	.7 =	280
$^3/_{10}$ - - -	36	.3 =	108
		Öszves	1381

's a' törtek kívánt öszvese $=\frac{1381}{360}=3\frac{301}{360}$

Következő kevert számoknak öszvese kívántatik?

$3^2/_5+7^5/_8+29^7/_{10}+2^{11}/_{12}+{}^{13}/_{15}$.

5, 8, 10, 12 és 15 legkisebb sokasa $=120$.

120: 5=24	24. 2= 48
: 8=15	15. 5= 75
:10=12	12. 7= 84
:12=10	10.11=110
:15= 8	8.13=104
	Öszves=421

a' törtek öszvese $=\frac{421}{120}=3\frac{61}{120}$

az egészeké - - - - - - - $=41$

Öszvese $44\frac{61}{120}$

114. A' levonás is csak olly törtekkel eszközölhető, mellyek egyenlő nevezőkkel bírnak.

Valamint $^3/_7+^2/_7=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$

úgy $^3/_7-^2/_7$ is $=\frac{3-2}{7}=\frac{1}{7}$

és $\frac{15-3-4-2-1}{16}=\frac{5}{16}$

Ha különböző nevezőkkel illetett törtek közt kell keresni a' különbséget, szükséges hogy azok egyenlő nevezőre vitessenek.

A' mívelet semmivel sem különbözvén az öszveadástól, új tekinteteket nem ád.

115. A' törtek, sokszoroztatnak egész számokkal, ha azoknak számlálója sokszoroztatik: p. o: 3szor $^2/_5$ annyi mint két ötöd részt háromszor venni, e' pedig $=$

$$^2/_5+^2/_5+^2/_5=\frac{2+2+2}{5}=\frac{6}{5}=\frac{3.2}{5}$$

és közönségesen $\frac{a}{b}.m=\frac{am}{b}$ legyen *m*nek akármelly értéke:

$$^5/_8.7=\frac{5.7}{8}=\frac{35}{8}$$

$$^7/_{11}.(5+2+6)=^7/_{11}.13=\frac{7.13}{11}=\frac{91}{11}$$

$$^6/_{15}.(3.4.5)=\frac{6.3.4.5}{15}=\frac{360}{15}$$

Ha kevert szám sokszorozandó egész számmal, az egészeket és a' törteket külön külön kell sokszorozni.

$$5^4/_7.8=5.8+\frac{4.8}{7}=40+\frac{32}{7}=44^4/_7$$

$(8^3/_5+7^4/_5).7=(15+^7/_5).7=16^2/_5.7=112+\frac{14}{5}=$ $114^4/_5$.

Ha törtszámot törtszámmal kell sokszorozni, a' számlálót a' számlálóval a' nevezőt a' nevezővel kell sokszorozni, 's a' két származat lesz az új tört' számolója 's nevezője.

Közönségesen $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$$^1/_2 \cdot {}^2/_3 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = {}^1/_3$$

$$^3/_4 \cdot {}^4/_5 = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{12}{20} = {}^3/_5$$

Ha több tört sokszorozandó egymással, az adott törtek számlálóji és nevezőji mindannyi factorai az új származati tört' számlálójának és nevezőjének.

Közönségesen $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} \cdot\cdot = \frac{a \cdot c \cdot e \cdot g \cdot\cdot}{b \cdot d \cdot f \cdot h \cdot\cdot}$

akármelly legyen a' sokszorozandó törtek' száma.

$$^2/_3 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^4/_5 \cdot {}^2/_7 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{48}{420} = \frac{4}{35}.$$

A' törtek' egymássali sokszorozásánál nem lehet többé mondani hogy, a' sokszorozás rövidített összeadás; de szorosabb értelmét kell vennünk a' sokszorozásnak. Ez ebben áll: *Sokszorozni azt tészen, keresni egy számot* (nevezete származat) *melly épen úgy származzék egy más* (sokszorozandó nevű) *számból, mint a' harmadik* (sokszorozó) *szám származott az egységből.*

Legyen $^2/_3$ sokszorozandó $^4/_5$el.

Olly számot kell képzelni, melly úgy származzék $^2/_3$ból valamint származott $^4/_5$ az egységből. De $^4/_5$ négyszer egy ötöde az egynek; megleljük tehát a' $^2/_3$ és $^4/_5$ közti származatot ha $^2/_3$nak négyszer vesszük ötödrészét. $^2/_3$nak ötöd része pedig $^2/_3 : 5 = \frac{\frac{2}{3}}{5}$ vagy

$=\frac{2}{3.5}=\frac{2}{15}$ rész, és ezt négyszer véve lesz $\frac{4.2}{3.5}=\frac{8}{15}$ a' keresett származat, és $^2/_3.^4/_5=\frac{2.4}{3.5}$.

Ha a' két törthez még $^8/_{11}$ jőne mint factor, meg lelvén a' két első közti származatot a' kérdés ismét két törtre vitetne vissza 's ez $^8/_{15}$ és $^7/_{11}$, erre az elébbi tekintetet alkalmaztatván lesz:

$$\frac{8}{15}.\ ^7/_{11}=\frac{8.7}{15.11}$$

's a' mívelet' helyessége minden esetekre, megvan bizonyítva.

116. Mint a' sokszorozásnál a' nevező a' nevezővel, a' számláló a' számlálóval sokszoroztatnak, szintugy származnak a' törteknek akármelly emelései is.

$$(^2/_3)^2=\,^2/_3.\,^2/_3=\frac{2.2}{3.3}=\frac{2^2}{3^2}$$

és közönségesen $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$

ha tehát törtszámot kell valamelly emelésre vinni, számolója és nevezője ugyan azon mutatót veszik fel. Ha valamelly törtszám nem rövidíthető, annak akármelly emelése sem rövidíthető, valamint két első számnak minden emelése is első egymásközt, ugy maradnak elsők a' rövidíthetetlen törtnek számlálója és nevezője akármelly emelésen, p. o:

$^6/_7$ nem rövidíthető 's 's így $\frac{6^4}{7^4}$ sem mert

$$\frac{6.6.6.6}{7.7.7.7}\text{ben}$$

nincs olly factor melly számító és nevezőben egyszersmind meglenne.

117. Valamelly törtszám elosztatik egész számmal ha ezzel nevezője sokszoroztatik (109)

$$\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4.5}=\frac{3}{20}$$

a' mi nem egyéb mint (példánkban) $^3/_4$nek ötöd részét venni, 's ez $={}^{3}/_{4}/_{5}=\frac{3}{20}={}^{3}/_{4}.{}^{1}/_{5}$.

Ha kevertszám osztandó egész számmal, külön lehet az egészeket, külön a' törteket osztani; ha a' mívelet' könyebbítése kívánja, a' kevertszámot rendbe lehet hozni vagy is tört alakba írni 's azután osztani a' színlett törtet.

$$3^3/_7:6=\frac{3}{6}+\frac{3}{7}:6=\frac{3}{6}+\frac{3}{7.6}=\frac{3.7+3}{6.7}=\frac{24}{42}$$

$$\text{'s rövidítve}=\frac{4}{7}.$$

$$\text{vagy } 3^3/_7=\frac{24}{7} \text{ lévén, } 3^3/_7:6=\frac{24}{7.6}=\frac{24}{42}={}^4/_7$$

A' törtszámok' elosztása sokszorozásba fordúl.

Valamelly törtszám más törtszámmal elosztatik, ha a' nevezők és számolók megfordítva sokszoroztatnak: más szóval, ha az osztandónak (vagy egyik factornak) számolója, az osztó' nevezőjével, nevezője pedig ennek számolójával sokszoroztatik.

A' közönséges mívelet szerént, az osztó egyszerüen megfordítatik, (az az mi előbb felyűl volt most alul esik) 's az osztandó vele sokszoroztatik

$^3/_4$ osztandó $^1/_2$ által írjuk $^3/_4:^1/_2$

megfordítjuk a' $^1/_2$et 's lesz $^3/_4.^2/_1=\frac{6}{4}$.

$$^2/_5:^3/_4=^2/_5.^4/_3=\frac{8}{15}$$

Hogy ezen mívelet helyes, minden tekintet bizonyitja:

1-ször, első példánkban azt kérdezénk hányszor találtatik a' fél $^3/_4$ részben.

Hogy a' fél akármelly számban vagy mennyiségben kétszer találtatik, említeni szükségtelen, 's így $^3/_4$ben van 2szer $^3/_4$szer a' fél ez pedig

$$\frac{2.3}{4}=\frac{6}{4}={}^3/_2$$

2.) Második példánkban $^2/_5:{}^3/_4=\frac{2.4}{5.3}={}^8/_{15}$.

Ha a' két törtet $^2/_5$ és $^3/_4$et egy nevezőre visszük lesz $^2/_5={}^8/_{20}=$ és $^3/_4={}^{15}/_{20}$ vagy is

$$^2/_5=\frac{2.4}{5.4} \text{ és } {}^3/_4=\frac{3.5}{4.5}$$

kérdésünk most $\frac{2.4}{5.4}:\frac{3.5}{4.5}$ vagy $^8/_{20}:{}^{15}/_{20}$ra vitetett.

Tudjuk hogy a' részes változatlan marad ha mind az osztandót mind az osztót ugyan azon számmal sokszorozzuk (69); sokszorozzuk tehát a' két factort $^8/_{20}$ és $^{15}/_{20}$ 20al, lesz:

$$^8/_{20}:{}^{15}/_{20}=\frac{2.4}{5.4}:\frac{3.5}{5.4}=8:15=(2.4):(3.5)$$

az eléb talált részes $={}^8/_{15}$, mi volt bizonyítandó.

3.) A' részesnek ollyannak kell lenni, hogy véle az osztót sokszorozván, az osztandó vissza térjen.

Példánkban a' részes $^8/_{15}$ sokszoroztatván az osztóval $^3/_4$el, adja $^8/_{15}.{}^3/_4={}^{24}/_{60}={}^2/_5$, az osztandót.

118. Ha több osztó áll mint factor elé vagy egymásután végeztetik egyenként velük az osztás, minden factort külön fordítván fel; vagy egyszerre minden osztót megfordítunk, 's a' számítókat 's nevezőket egymással sokszorozzuk.

$$^3/_4:{}^2/_3:{}^1/_5:{}^7/_8=\frac{3.3}{4.2}:{}^1/_5:{}^7/_8=\frac{3.3.5}{4.2.1}:{}^7/_8=\frac{3.3.5.8}{4.2.1.7}$$

$$\text{vagy } {}^3/_4:{}^2/_3:{}^1/_5:{}^7/_8={}^3/_4.\frac{3.5.8}{2.1.7}=\frac{3.3.5.8}{4.2.1.7}$$

's ez mindkét esetben $={}^{360}/_{56}$

119. Ha a' két osztási factor egyenlő nevezetű, részesek rövidíthető; mert az egyik' nevezője a' számláló factorává lett 's az alul maradt vele egyenlővel együtt el hagyathatik.

szinte így van ha a' két factor számolója egyenlő.

p. o: $^5/_{11}:^7/_{11}=^5/_{11}\cdot^{11}/_7=^{5.11}/_{7\cdot11}=^5/_7$

és $^6/_{11}:^6/_{15}=^{6.15}/_{11\cdot6}=^{15}/_{11}$

$^3/_7:^5/_7=^{3.7}/_{7\cdot5}=^3/_5$

$^7/_3:^7/_5=^{7.5}/_{3\cdot7}=^5/_3$

120. Ha valamelly törtszám által az egység osztatik el, a' részes egyenlő a' megfordított tört számmal.

$$1:^3/_4=^1/_{^3/_4}=1.^4/_3=^4/_3$$

Ha az egyest képzelt törtre visszük lesz:

$$1:^3/_4=^4/_4:^3/_4=^{4.4}/_{4\cdot3}=^4/_3.$$

Egyet $^3/_4$el osztani annyi mint 4et hárommal, 's valóban az egyben $=^3/_4+^1/_4$ a' $^3/_4$et egyszer meg találjuk és még egy harmadát és

$$\frac{^3/_4+^1/_4}{^3/_4}=\frac{3+1}{3}=^4/_3=1+^1/_3.$$

Az illy megfordított törtszámot *visszásértékűnek* nevezzük. $^3/_7$ visszásértéke $^7/_3$,

$$\frac{a}{b}\text{nek } \frac{b}{a}.$$

Bizonyítványa, miért kisebbülnek a' számok ha valódi törtekkel sokszoroztatnak, 's miért nőnek ha ilylyenekkel osztatnak? a' sokszorozásban és (67)ben foglaltatik.

2 §. A' tizedes törtszámokról.

121. Szám alkotmányunk a' 10re lévén alapítva, ha balra, az egyesektül kezdve mindegyik következő jegy 10 annyit ér mint az előtte álló, szintugy lenne,

ha ezen természetes számok alkotmányában jobbra az egyes után helyek lennének, mindegyik következő jegy 10szerte kisebb az előtte állónál.

És valóban a' tizedes törtek tulajdona az, hogy a' természetes számok' alkotmányának ezen híjánját kipótolja, az által, hogy az egységnél kisebb számokat határtalan terjeszti 's írja mintegy szakadatlanul az egész számok sorába, alakjok változtatása nélkül. Következik tehát az egységen túl jobbra egymásután a' *tizedes*, *százados*, *ezredes*, *10ezredes*, *100ezredes*, *milliomodos* 's a' t. ugyan azon rendben alábbalább kisebbedve mint balra feljebb a' rendek növekedve haladnak. *)

122. Mindezen, az egységet jobbra követő rendeket *tizedes törtszámoknak* nevezzük mert, bizonyos tized, század, ezred 's a' t. részét foglalják az egységnek.

123. Közönségesen, olly törtszámokat értünk a' tizedesek alatt, mellyeknek nevezője vagy 10 vagy más főbb rendű egység, mint 100, 1000, 10000 & akármelly legyen a' tört' számlálója: így

$^1/_{10}$, $^5/_{10}$, $^{75}/_{100}$, $^{897}/_{1000}$'s a' t. tizedes törtek.

A' tizedes törtek' nevezője tehát mindenkor az egység, több vagy kevesebb üressel.

124. Ha az egész számok után tizedes törtek következnek, ezek pont által válosztatnak el amazoktól, az egyesek után felyűl tévén a' pontot.

---

*)

	100 ezer	10 ezer	ezer	száz	tiz	egység	tized	század	ezred	10 ezred	100 ezred	
's a' t.	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	's a' t.

367·52

Itt a' 367 egész után 52 tizedes következik.

Ha a' tizesedes tört magában áll egész nélkül, akkor a' pontot vagy egyedűl tesszük eleibe felül mint ·75, vagy üreset teszünk eleibe jeléül, hogy az egé szek helyett áll ott mint, 0·75

Ha a' tizedes törtek' csak valamelly alsóbb rendjei jönnek elé, akkor a' nem lévők helyeit üresekkel szükség bétölteni, p. o: öt százados =0·05 hol tizedesek nem lévén helyükön üres áll, 75 tizezredes lesz írva 0.0075 vagy ·0075.

$$\frac{5479}{1000}=5+\frac{479}{1000}=5+\frac{400+70+9}{1000}=5\cdot479$$

$$\frac{364}{1000}=\frac{300+60+4}{1000}=\frac{3}{10}+\frac{6}{100}+\frac{4}{1000}=0\cdot364$$

$$\frac{203}{100000}=\frac{200}{100000}+\frac{0}{100000}+\frac{3}{100000}=\frac{2}{1000}+0+\frac{3}{100000}$$

$$=0{,}00203.$$

$$\frac{30004}{1000}=30\cdot004.$$

Valamint az egész számokat, úgy a' tizedes törteket is különbözőkép írhatjuk, mint a' kérdésre vagy a' mívelet' könnyebbítésére egyik vagy másik alakjokat alkalmasabbaknak gondoljuk.

A' tizedes alkotmány' rendei, tudjuk a' tízes sokasai, vagy is az egység tízesei, százasai, ezresei &... felfelé, 's hogy ezen rendeket 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 's a' t.

írhatjuk: 1.0, 1.10, 1.100, 1.1000, 1.10000, 1.100000, 1.1000000, 's a' t. hol az egység mint factor áll és a' rendet jelöli.

De tudjuk hogy $100=10.10.=10^2$, $1000=10^2.10=10^3$'s a' t.

írhatjuk tehát a' rendeket következőkép:

10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 's a' t.

hol a' mutatók azt jelentik, hányadik emelésen van a' 10, vagy hány üreset vesz fel az egy ha a' mutatókat elhagyjuk.

Jegyzék. Minden mennyiség a' 0 emelésen egyenlő az egységgel

és $A^0=1$, mint $10^0=1$.

A' mint itt az egész számok' rendjei az egységig lefelé kisebbedvén, mutatójok is kisebbedett míg az egységnél az üreset érte, úgy találunk az egységnél kevesebb mutatókra a' tizedes törteknél, ha a' helyett hogy a' mutatókat hozzájok adnók, azokat belőllök mintegy levonjuk, vagy is a' —jeggyel illetve tesszük.

Ha tehát az egész számok rendjei felülről véve 10^m, ...10^6; 10^5, 10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, következnek a' tizedestörtek rendjei az egység $=10^0$ után 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6},.....10^{-m} legyen m akármelly határa tekintetünknek.

Öszvevévén mindazon alakokat, mellyekben eddig az egész és tizedes törtszámokat láttunk, 67852·37542 számot p. o: írjuk különbféleképen.

Az egészek lesznek:

2 egyes	$= 2$	$= 2.1$	$= 2.10^0$
5 tizes	$= 50$	$= 5.10$	$= 5.10^1$
8 százas	$= 800$	$= 8.100$	$= 8.10^2$
7 ezres	$= 7000$	$= 7.1000$	$= 7.10^3$
6 tizezres	$= 60000$	$= 6.10000$	$= 6.10^4$

A' tizedesek:

3 tizedes $=0.3$ $=3:10$ $=\,^3/_{10}$ $=3:10^1=$

$$=\frac{3}{10^1}=3.10^{-1}$$

7 százados $=0.07=7:100=\,^7/_{100}=7:10^2=$
$=\frac{7}{10^2}=7.10^{-2}$

5 ezredes $=0\cdot005=5:1000=\,^5/_{1000}=5:10^3=$
$=\frac{5}{10^3}=5.10^{-3}$

4 10 ezredes $=0\cdot0004=4:10000=\,^4/_{10000}=4:10^4=$
$=\frac{4}{10^4}=4.10^{-4}$

2 100ezredes $=0\cdot00002=2:100000=\,^2/_{100000}=2:10^5=$
$=\frac{2}{10^5}=2.10^{-5}$

's írhatjuk 67852·37542öt

1) $60000+7000+800+50+2+0\cdot3+0\cdot07+0\cdot005+$
$+0.0004+0.00002$

2) $6.10000+7.1000+8.100+5.10+2+3:10+7:100+$
$+5:1000+4:10000+2:100000$

3) $6.10^4+7.10^3+8.10^2+5.10+2+3:10+7:10^2 5:10^3+$
$+4:10^4+2:10^5$

4) $6.10^4+7.10^3+8.10^2+5.10^1+2.10^0+3.10^{-1}+$
$+7.10^{-2}+5.10^{-3}+4.10^{-4}+2.10^{-5}$

125. Figyelemmel tekintvén ezen alakokat, a' tizedes törtszámok értelme 's írásmódja nem fog nehéz lenni.

Ha törtszám alakban adott tizedeseket, az egész számok' alakjára kell vinni, annyi jegymarad jobbra a' pont után hány üreset tart az adott törtnek nevezője: p. o:

$\frac{50073}{100}=500\cdot73$ két üres lévén a' nevező mellett.

$\frac{35701}{10000}=5\cdot5701$ „ $\frac{762501}{1000000}=\cdot762501$'s a' t.

Ha a' nevezőnek több üresei vannak mint jegyei a' számlálónak, annyi üres tétetik elibe a' tizedes törtnek mennyi szükséges hogy jegyei akkora számban legyenek mint a' nevezőnek üresei.

$\frac{307}{10000} = \cdot 0307$, 4 üres lévén a' nevezőben:

$\frac{256}{100000} = \cdot 00256$, $\frac{75}{1000000} = \cdot 000075$.

126. Eszerént nem lesz nehéz valamelly tizedes törtszámot közönséges törtszám alakban írni, mert hány jegyből áll a' tizedes tört, annyi üressel ellátva íratik alá az egység. Ha egész számok vannak mellette ezek vagy külön vagy vele együtt írathatnak.

$\cdot 865 = \frac{865}{1000}$, $\cdot 07 = \frac{7}{100}$, $\cdot 0035 = \frac{35}{10000}$.

$3 \cdot 87 = \frac{387}{100} = 3 + \frac{87}{100}$, $56 \cdot 759 = \frac{56759}{1000} = 56 + \frac{759}{1000}$.

127. A' tizedesek kimondása nem különbözik az egészek' kimondásától, csak hogy a' tizedes törtek' minden jegyét egyszerre kimondván mintha egész számok lennének, utoljára az értéke mondatik hozzá.

·5 öt tized
·51 ötvenegy század
·525 ötszáz huszonöt ezred
·5257, 5257 tiz ezred: 's a' t.

és 36·425, 36 egész 425 ezred
179·56789 179 egész és 56789 száz ezred. 's a' t.

128. A' tizedesek' értéke azon helytől függvén mellyen állanak, nem változik ha utánnok akármelly számú üres tétetik, vagy ha már ott áll elvétetik.

$0 \cdot 5 = 0 \cdot 50 = 0 \cdot 500 = 0 \cdot 5000 = 0 \cdot 50000$'s a' t.
és $0 \cdot 700000 = 0 \cdot 70000 = 0 \cdot 7000 = 0 \cdot 70 = 0 \cdot 7$

Az az 5 tized vagy 7 tized változatlan 5 vagy 7 tized marad, mert 50 század = 5 tized, és 7000 tízezred = 7 tized. 's a' t.

129. Éppen ellenkező ha eleibe tétetik egy vagy több üres, mert mint az egész számok' értékét egy utánna ragasztott üres tizszerte nagyobbitja, ugy kisebbíti 10szerte a' tizedes törteket mindegyik eleikbe tett üres. $3\cdot5=3^5/_{10}$ és $3\cdot05=3^5/_{100}$, $\cdot06={}^6/_{100}$ és $\cdot00006={}^6/_{100000}$.

130. Ha az egészeket a' tizedes törtektől választó pont, balra tétetik, anyiszor osztatik a' szám 10 által hány jeggyel ment a' pont eléb balra; annyiszor sokszoroztatik ellenben 10 által hány jeggyel tétetett jobbra: ha p. o: 5345·2136ban a' pontot más más helyre tesszük a' szám értékét változtatjuk.

$$5345\cdot2136=5345+\frac{2136}{10000},\quad 534\cdot52136=534+\frac{52136}{100000}$$

$$\text{vagy } 53\cdot452136=\frac{53452136}{1000000},\quad 5\cdot3452136=\frac{53452136}{10000000}$$

$$\text{és } 53452\cdot136=\frac{53452136}{1000},\quad 5345213\cdot6=\frac{53452136}{10}$$

131. A' tizedes törtek' összeadása semmiben sem különböz az egész számok' öszveadásától. Megtartván a' hasonló 's egyenlő rendeket, vigyázattal iratnak helyesen egymás alá.

$$35\cdot785+8\cdot3047+17\cdot01072+0\cdot00037=61\cdot10079$$

$$\begin{array}{lr}
 & 35\cdot785\\
 & +\ 8\cdot3047\\
 & +17\cdot01072\\
 & +\ 0\cdot00037\\
\hline
\text{Öszves} & =61\cdot10079.
\end{array}$$

132. A' tizedes törtek' levonásánál sem tehetünk új észrevételeket, 's a' mívelet egyenlő az egészszámokéval.

$$78\cdot35708-63\cdot753875=14\cdot603205$$

természetes hogy a' levonandó felibe ott hol a' kisebbítendőnek nincsenek jegyei ehez üreseket adni vagy gondolni.

$$\begin{array}{rl} & 78:35708 \\ & -63\cdot753875. \\ \hline \text{Különbség} & =14\cdot603205 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 138\cdot785 \\ & -115\cdot8975231 \\ & -\ \ 8\cdot00347 \\ & -\ 11\cdot07 \\ & -\ \ 3\cdot8140069 \\ \hline \text{Különbség} & =\ \ 0\cdot0000000. \end{array}$$

133. Ha valamelly egész szám tizedes tört'el, vagy kevertszám tizedes tört'el, vagy tizedestört tizedestörttel sokszorozandó, ezt ugy tekinthetjük mint ha két egész szám állana factor gyanánt elő, és sokszorozunk mint a' könnyűség és gyakoroltságunk kívánja 's engedi: *de a' származatból annyi jegyet vágunk el jobbra tizedeseknek a' pont által, mennyi tizedes volt öszvesen mind két factorban.*

$$\begin{array}{l} ^{*)}\ 35\times0\cdot5=17\cdot5 \\ 0\cdot327\times8=2\cdot616 \\ 35\cdot7\times15\cdot36=548\cdot352 \\ 2\cdot045\times0\cdot0037=0\cdot0075665. \end{array}$$

*) A' sokszorozás jegyének itt a' fekvö keresztet vettük, hogy a' több pont ne háborgassa az értelmet.

Utóbbi példánkban a' 2045öt 37el sokszoroztuk, és a' származatból $3+4=7$ jegyet vágtunk el tizedeseknek, mennyi a' két factorban van.

Az egység felsőbb rendjeivel mint láttuk a' sokszorozás az által történik meg, hogy a' pontot annyival viszszük elébb balra, mennyi üres van az 1 mellett.

$0\cdot7253\times10\ \ =7\cdot253$
$0\cdot7253\times100\ =72\cdot53$
$0\cdot7253\times1000=725\ 3$'s a' t.

135. A' tizedes törtekkeli osztásnál két eset tekintendő.

1) Ha az osztandó és az osztó egyenlő számú jegyekkel vannak írva (a' törtekre nézve, mert az osztandó' egésze akármelly számú jegyből állhat,) az osztás úgy történik mint az egész számokkal:

$4\cdot86:2\cdot43={}^{486}/_{243}=2$
$0\cdot96:0\cdot12={}^{96}/_{12}=8$

2) Ha az osztandónak nincs annyi jegye mint az osztónak, ahoz üreseket kell adni

$4\cdot86:0\cdot00243={}^{486000}/_{243}=2000.$
$4\cdot86:0\cdot24358={}^{486000}/_{24358}$

figyelemmel kell lenni arra, melly értéke lesz a' részes' első jegyének, ha ez bizonyos, a' többi hibátlan fog utánna állani.

$325\cdot478:0\cdot43=756\cdot92550\ldots\ldots$

itt az osztó' legfőbb jegye 4, nem találtatván az osztandó' legfőbb jegyében a' 3ban, a' kettő alá jön; az osztó' egyese pedig melly itt $=0$ a' 3 alá 's így a' részes 3 egész számból áll.

$6794\cdot389:4206\cdot25=1\cdot615\ldots\ldots$
$7\cdot30825:805\cdot42=0\cdot00907$

az utolsó példában az osztó egyese (az 5) az osztandó' ezresei (a' 8) alá esik, tehát a' részes ezredeseken kezdődik

$$38\cdot72568:0\cdot006084=6365\cdot167\ldots..$$

Ezen példában az osztó' egyese =0 az osztandó ezresei alá esik (noha itt olly nincs azt oda lehet gondolni) az osztó' ezredese a' 6, az osztandó' egyese alá, tehát a' részes ezreseken kezdődik, 's 4 helye lesz az egészeknek.

Azt is lehet mondani hogy az ezredes itt 6, a' 38 egészben 6 ezerszer találtatik, 's így továb minden külön esetekben egyenlő tekintettel reá találunk az első jegy' értékére

A' tanuló kevés bajjal készíthet magának egy táblát, melly mutatja hogy a' tizedes törtek' rendjei, az egészekkel és törtekkel, melly származatokat; egy más táblában, pedig hogy, melly részeseket adnak. Hasonló tábla a' sokszorozásnál adatott.

Osztási példáinkban a' részes után lévő pontok (....) azt jelentik hogy a' míveletet nem végeztük és hogy az osztást tovább is lehetne fojtatni, ha kívántatnék. Közelebb okait ennek, a' jövő számok alatt fogjuk megtudni.

136. *Valamelly közönséges törtet tizedesbe változtatni.*

A' közönséges törtszám' számlálójához annyi üreset ragasztunk a' mennyit akarunk, 's ezután nevezőjével ezt úgy osztjuk mint a' közönséges és egész számokat.

Ha az osztás véget nyer, illyen üresek nem nagy számmal szükségesek; ha nem nyer, annyi üreset kell a' számlálóhoz ragasztani a' mennyi jegy kívántatik a' részesben, több annyival a' mennyivel több jegye van a' nevezőnek. Az üresek száma azonban igen mellesleges 's a' több vagy kevesebb semmi fontosságú.

Ha az osztásnak vége ered, *a' részes tökélletes, és egyenlő az adott közönséges törtszámmal.*

Ha vége nem ered, *a' részes soha sem fejezi ki tökélletesen az adott közönséges törtet.* De minthogy a' különbség a' részes és a' közönséges törtszámközt annál kisebb lesz mennél tovább folytatjuk az osztást, a' valódi értékéhez mindég inkáb inkáb közelítünk.

1) $^1/_2 = {}^{\cdot 10}/_2 = 0\cdot5$

2) $^3/_5 = {}^{\cdot 30}/_5 = 0\cdot6$

3) $^3/_{25} = {}^{\cdot 300}/_{25} = 0\cdot12$

4) $^3/_{125} = {}^{\cdot 3000}/_{125} = 0\cdot024$

Mint utóbbi példánkban a' háromhoz az első üreset adánk a' 30ban a' 125 nem találtatván, még egy üreset kellett a' részesbe írni, 's csak a' második üres' hozzáadása után találtuk a' 300ban az osztót.

5) $^1/_3 = 0\cdot33333\ldots\ldots\ldots$

6) $^2/_3 = 0\cdot66666\ldots\ldots\ldots$

7) $^1/_9 = 0\cdot11111\ldots\ldots\ldots$

8) $^1/_{11} = 0\cdot090909\ldots\ldots\ldots$

9) $^1/_{37} = 0\cdot027027027\ldots\ldots$

10) $^{15}/_{37} = 0\cdot405405405\ldots\ldots$

11) $^{523}/_{740} = 0\cdot706756756756\ldots$

figyelemmel tekintvén ezen részeseket, vagy is tizedesekbe változtatott közönséges törteket, látjuk hogy a' 4 első osztás véget ért 's következéskép a' tizedesek tökélletesen adják a' közönséges törtek' értékét. A' többi példánkban sehol sem értünk véget, 's mindezen esetekben 5)től 11)ig az osztás örökké fojtatódhatna, még se érnénk egyenlőséget a' közönzönséges 's a' belőllök származott tizedes törtszám között.

Az 5) 6) és 7) példában ugyan azen jegyek jőnek elő, 's ezeket *ismételő* tizedes törteknek nevezzük.

A' 8) 9) 10) és 11) példában is ismételéseket veszünk észre de ezek más törvényt követnek.

A' 8) ban kétjegy ismétel egymásután rendesen; a' 9) és 10) ben három jegy 's végre

a' 11) ben csak a' harmadik helyután kezdődik 3jegynek bizonyos és végnélküli ismételése.

Ezen utóbbi tizedes törteket *szakaszos ismételőknek* nevezzük.

Noha ezen 5) től 11) igi példákban nem találtuk meg közönséges törtszámjaik' tökélletes értékét, addig közelíthetünk mint mondánk ehez meddig kívántatik a' számítás szigorúsága szerént.

A' közönséges életben igen ritkán szükség 3 tizedes helynél tovább menni és a' 4-dik legfellyebb 5-dik hely (melly már százezred rész) a' legkényesebb kérdésekre is kielégítőleg felel.

Tekintsük figyelemmel a' tizedes törtek értékét 's a' közönséges törtekhez való közelítését.

Vegyük tekintetül

$$^1/_3 = 0.3333333 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \text{ vagy}$$

$$^1/_3 = {}^3/_{10} + {}^3/_{10^2} + {}^3/_{10^3} + {}^3/_{10^4} + {}^3/_{10^5} + {}^3/_{10^6} + \\ + {}^3/_{10^7} + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, + {}^3/_{10^m}$$

hol mindezen tagokat öszve kellene venni, (legyen *m* p. o: a' számtalan sok tag végsője) hogy $^1/_3$ kerüljön belőlők; 's mint emliténk még ekkor sem lenne az öszves $= {}^1/_3$.

Ha a' tizedes törtnek 0.333333.... első jegyét vesszük lesz

$^1/_3 = 0\cdot3$, de $0\cdot3 = {}^3/_{10} = {}^9/_{30}$, $^1/_3 = {}^{10}/_{30}$ tehát még hibázna $^1/_3$ ból $^1/_{30}$ ad.

Ha két jegyét vesszük lesz:

$$^1/_3 = 0\cdot33,, = {}^{33}/_{100} = {}^{99}/_{300}$$

és $^1/_3 = {}^{100}/_{300}$, tehát $^{100}/_{300} - {}^{99}/_{300} = {}^1/_{300}$.

Igy lesz a' különbség három jegy és $^1/_3$ közt $^1/_{3000}$ 4 jegy és $^1/_3$ közt $^1/_{30000}$'s. a' t. 's már ebből látjuk hogy p. o: 7 jegyet vévén $^1/_3 = 0\cdot3333333$ e' különbség csak $\frac{1}{3\text{ millio}}$, valami alig észrevehető menynyiség lesz.

Mint kellessen czélerányosan mívelni, a' közönséges törteket tizedesekre vivén által, következő példa mutassa: $^{27}/_{512}$ változtasson tizedes törtbe:

$$^{27}/_{512} = 27_{00} : 512 = 0\cdot052734375.$$

$$140_0$$
$$376_0$$
$$176_0$$
$$224_0$$
$$192_0$$
$$384_0$$
$$256_0$$
$$\ldots\ldots$$

Mint a' 27ben 512 nem találtatik, ürest írtunk oda, ez azon üres melly az egyesek helyét foglalja.

Üreset ragasztván 27hez, a' 270ben ismét nem találtuk meg az 512őt, s' a' tizedesek helyére üreset tettünk.

A' második üreset ragasztván a' 27hez, a' 2700ben végre 5ször találtuk meg az 512őt. Igy fojtatjuk az osztást, mindenkor üreset adván a' maradványhoz, (a' helyett hogy az egész számokkal való osztásnál azok közzül hozunk le jegyet) míg vagy végét érjük az osztásnak, vagy a' kívánatnak eleget tettünk a' részes jegyei' mennyisége által; példánk véget ért.

Ott hol üres ragasztatott a' maradékhoz, apró jegy tétetett.

Ha itt előre ragasztottunk volna üreseket az oszandóhoz, azokból 9et kellett volna vennünk: 's lenne:

27·000000000:512.

137. Mindég előre lehet tudni véges é vagy végetlen valamelly közönséges törtből eredett tizedes tört; és hogy ha végetlen, ismételő é vagy nem?

1) *Ha az adott törtszám' nevezője 2 vagy 5; vagy ezen kétszám' valamellyik emelése; vagy ezen kétszámnak sokasa; vagy ezen kétszám valamelly emelésének sokasa; vagy végre ha ezen két szám sokszorosának vagy valamelly emelésének származata, úgy a' tizedes tört véges és egyenlő az adott közönséges törtszámmal.*

Minden törtszám tehát mellynek nevezője

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 's a' t.
5, 25, 125, 625, 3125, 's a' t.
10, 20, 40, 50, 80, 's a' t..

véle egyenlő tizedesbe változható mert,

a' 10, 100, 1000, 10000,

's más főbb rendű egyesnek nincs egyéb első factora 2és 5ön kívűl, tehát csak ezek által osztható: p o: $10=2.5$,, $100=2^2.5^2$,, $1000=2^3.5^3$,, $10000=2^4.5^4$'s a 't.

Ha valamelly illy nevezővel biró tört, mint p. o: $^7/_{40}$, tizedes törtre változtandó; nevezőjét olly emeléseivel lehet a' 2és 5nek sokszorozni, hogy a' származat az egység' valamelly főbb rendje legyen.

Tudjuk hogy a' tört értéke nem változik ha számlálóját és nevezőjét ugyan azon számmal sokszorozzuk. (109)

$^7/_{40}$nek példánkban következő alakját adhatjuk.

$$\frac{7}{40}=\frac{7}{2^3 5}=\frac{7.5^2}{2^3.5.5^2}=\frac{7.5^2}{2^3.5^3}=\frac{175}{1000}=0\cdot175$$

$$\frac{11}{80}=\frac{11}{2^4.5}=\frac{11.5^3}{2^4.5.5^3}=\frac{11.5^3}{2^4.5^4}=\frac{1375}{10000}=0\cdot1375$$

$$\frac{13}{125}=\frac{13}{5^3}=\frac{13.2^3}{5^3.2^3}=\frac{104}{1000}=0\cdot104.$$

2) *Ha a' közönséges törtszám' nevezőjében 2 és 5 kivül más factor is van, és ezen más factor nem osztja meg a' törtszámnak számlálóját; az illyes közönséges törtszámnak tizedes alakja ki nem fejezi tökélletesen értékét és ismételő.*

A' két törtszám $^6/_{15}$ és $^9/_{15}$ nevezőjében az 5ön kívül más factor is van 's ez a' 3, $5.3=15$: de ezen factor 3 meg van a' két tört' számlálójában is, tehát a' tizedes törtszám véges; mert azonkívül is ezek rövidithetők, és $^6/_{15}={}^2/_5$ és $^9/_{15}={}^3/_5$, 's így nevezőjök 5 lévén, véges tizedesekre változtathatók.

Nem úgy van $^8/_{15}$el, mert $8=2^3$ és $15=3.5$; a' két számnak nem lévén közös osztója, itt a' tizedes tört végnélküli és ismételő: $^8/_{15}=0\cdot533333\ .\ .\ .\ .\ .$ hol a' 3as végnélkül előjön.

Jegyzék. Az írás kimélllése végett ponttal jelöljük az ismételéseket, 's azon jegy felibe tesszük melly ismétel, p. o: $0\cdot5333333\ .\ .\ .$ helyett írjuk $0\cdot5\dot{3}$; ha az ismételés szakaszi, a' szakasz' első és utolsó jegye felibe teszünk pontokat, 's irjuk p. o.

$0\cdot405405405\ .\ .\ .$ helyett $0\cdot\dot{4}0\dot{5}$

Ha az adott közönséges törtszám nevezőjében nincs meg a' 2 és 5ös, vagyis más egyéb factorból vagy első számból áll, tizedes tört kifejezése mindenkor egyszerű ismételés; vagyis az ismételés mindjárt az első jeggyel a' tizedessel kezdődik.

$^{13}/_{21} = 0{\cdot}619047619047\ldots\ldots = 0{\cdot}\dot{6}1904\dot{7}.$

Az ismétélők jegyei' száma különböző, de soha sem lehet nagyobb a' nevező egyeseinél, hanem szükségeskép egyel kisebb, p. o:

$^{2}/_{7} = 0,\ \dot{2}8571\dot{4}$, az ismételő jegye = 6.

Ha az adott tört' nevezőjében a' 2 és 5ös factor megvan, de ezenkívül más factor vagy factorok is, tizedes kifejezése mindenkor kevert ismételésre vezet: az az nem mindjárt kezdődik az ismételés de néhány őt megelőző hozzá nem tartozó jegy után:

illyen p. o: $^{523}/_{740} = 0{\cdot}70\dot{6}7\dot{5}.$

Ha megakarjuk tudni hány jegy előzi az ismételést, a' 2 és 5 factorait kell felkeresnünk. Az egyik' vagy a' másik' legnagyobb emelési mutatója adja a' feleletet.

Ha p. o: valamelly nevezőben 2^3 és 5^4 volnának a' factorok, a' két factorközti nagyobbik mutató a' 4 lenne az ismételőt előző jegyek' száma. Az ismételő' jegyeinek száma pedig mindég kisebb (legalább egygyel) azon számnál melly a' nevező' factorainak sokszorozásából származik, kihagyván közüllök a' 2 és 5 öt.

Vegyük például $\frac{3397}{24750}$.

A' nevezőnek 24750nek 2 és 5ös factorai = 2, 5, 5, 5, és $2.5^3\ 99 = 24750$. Az ismételőt előző jegyek' száma 3 (az 5 mutatója). Egyéb factorai $3^2.11$'s az ismételő' jegyeinek száma 99 nem lehet; példánkban ez csak kettő és

$$\frac{3397}{24750} = 0\cdot137252525\ldots\ldots = 0.137\ddot{2}5.$$

Némelly nevezőknek ismétlései.

1) $^1/_3 = 0\cdot\dot{3}$	8) $^1/_{111} = 0\cdot\dot{0}0\dot{9}$
2) $^1/_9 = 0\cdot\dot{1}$	9) $^1/_{133} = 0\cdot\dot{0}0\dot{3}$
3) $^1/_{11} = 0\cdot0\ddot{9}$	10) $^1/_{999} = 0\cdot\dot{0}0\dot{1}$
4) $^1/_{33} = 0\cdot0\ddot{3}$	11) $^{37}/_{54} = 0\cdot6\dot{8}5\dot{1}$
5) $^1/_{99} = 0\cdot00\ddot{1}$	12) $^{36}/_{41} = 0\cdot\dot{8}780\dot{4}$
6) $^1/_{27} = 0\cdot\dot{0}3\dot{7}$	13) $^9/_{13} = 0\cdot\dot{6}9230\dot{7}$
7) $^1/_{37} = 0\cdot\dot{0}2\dot{7}$	14) $^{13}/_{14} = 0\cdot9\dot{2}8571\dot{4}$

15) $^{41}/_{93} = 0\cdot\dot{4}4086021505376\dot{3}$

16) $^{13}/_{19} = 0\cdot\dot{6}8421052631578947\dot{3}$

17) $^8/_{17} = 0\cdot\dot{4}70588235294117\dot{6}$

18) $^{18}/_{23} = 0\cdot\dot{7}82608695652173913043\dot{4}$

19) $^{41}/_{43} = 0\cdot\dot{9}5348837209302325881\dot{3}$

20) $^{25}/_{58} = 0\cdot\dot{4}310344827586206896551724137\dot{9}$

138. ***A' tizedeseket közönséges törtre vissza vinni.***

Ha a' tizedes tört véges, aláíratván természetes nevezője, addig rövidítetik míg, legegyszerűbb kifejezésére jut.

$$0\cdot25 = {}^{25}/_{100} = {}^1/_4$$
$$0\cdot6 = {}^6/_{10} = {}^3/_5$$
$$0\cdot104 = {}^{104}/_{1000} = {}^{13}/_{125} \text{ 's a' t.}$$

Ha a' tizedes tört ismételő 's egyszersmind egyszerű ismételő, annyi 9es íratik nevezőjének hány jegyből áll ismételése. A'.legrövidebb kifejezést keresvén meg találjuk az eredeti törtet: p. o:

$$0\cdot\ddot{45} = {}^{45}/_{99} = {}^{5}/_{11}$$

$$0\cdot\dot{4}2857\dot{1} = \frac{428571}{999999} = {}^{3}/_{7}.$$

Bizonyitás: legyen áltváltoztató közönséges törtre

0·2727272727....

Hívjuk a' keresendő törtet $x$nek.

Vegyük az adott tizedes törtet százszor és vonjuk le százasából maga magát egyszer, lesz

$$\begin{array}{rl} 100x = & 27\cdot27272727..\text{s' a' t.} \\ -1x = & -\ 0\cdot27272727..... \\ \hline 100x - x = 99x = & 27\cdot00000000 \end{array}$$

's ha mindegyik kifejezést 99el osztjuk lesz

$x = {}^{27}/_{99} = {}^{3}/_{11}$ a' keresett eredeti tört.

Ha a' tizedes tört, kevert ismételő, levonatik az ismétlésből az azt megelőző szám, a' maradvány' nevezője lesz annyi kilenczes hány jegye van az ismételésnek, 's annyi a' kilenczesek után ragasztott üres hány jegy előzi az ismételést. Rövidítés által az eredeti törtet találjuk.

$$0\cdot583333 = 0\cdot58\dot{3} = \frac{583-58}{900} = \frac{525}{900} = {}^{7}/_{12}$$

$$0\cdot55\dot{4}8\dot{1} = \frac{55481-55}{99900} = \frac{55426}{99900} = \frac{749}{1350}.$$

Ha a' tizedesek előtt egészek vannak, a' mívelet nem változik: p. o:

$$20\cdot3040404.... = 20\cdot3\ddot{04} = \frac{20\cdot304-203}{990} = \frac{20101}{990}$$

$$137\cdot252525..... = 137\cdot\ddot{25} = \frac{137\cdot25-137}{99} = \frac{13588}{99}$$

3 §. A' láncz törtszámokról.

139. Azon törtszám mellynek nevezője kétrészből áll, egészből és ismét törtből, 's ezen törtnek nevezője viszont két tagból áll 's nem az utolsó, vagy is más több hozzá hasonló következik; *öszvefüggő* vagy *láncztörtnek* neveztetik.

A'láncztörtek közönséges alakja

$$\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\ldots}}}} \text{ 's a' t.}$$

hol mind nevezők mind számolók, akármelly számok lehetnek.

De van a' törtszámoknak egy neme, melly különösen érdekli figyelmünket, ebben valamennyi tagnak számolója $=1$. és közönséges alakja:

$$E+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f}}}}}} \text{ 's a' t.}$$

Hol E egészeket az a, b, c, d, 's a' t. akármelly számokat jelent; az egyes tagokat $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$'s a't. *rendszámoknak, tagoknak* hívjuk. Ha az illy láncztört véget ér *véges*, ha nem, a' *végtelen* nevet veszi fel. Ezen uttóbbiak közönségesen ismételők, 's bizonyos száma a' tagoknak ugyan azon sorban jön elő.

140. *A' láncztörtek' származása.*

Ha valamelly közönséges törtszámnak számlálóját és egyszersmind nevezőjét is, számlálójával osztjuk, a' lánczstört' első tagját találjuk: p. o: ha $^3/_{11}$nek mindkét részét 3al osztjuk lesz

$$\frac{3}{11}=\frac{3:3}{11:3}=\frac{1}{11:3}=\frac{1}{\frac{11}{3}}=\frac{1}{3+\frac{2}{3}}$$

$$\text{mert } \frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}\text{ „ és } \frac{1}{3+\frac{2}{3}}$$

első tagja azon lánczörtnek melly $^3/_{11}$ ből ered.

Szinte igy fojtatjuk a' többi tagok' keresését is mindenkor a' számláló által osztván számlálóját 's nevezőjét a' maradéknak: megtaláljuk tehát példánk' második tagját ha a' $^2/_3$nak mindkét részét kettővel osztjuk, 's ebből lesz

$$\frac{2:2}{3:2}=\frac{1}{3:2}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\text{ mert } \frac{3}{2}=1+{}^1/_2.$$

's ez a' lánczstört második' tagja.

A' mint itt $^1/_2$re, a' leg egyszerübb kifejezésre akadtunk a' felváltás véget ért, *a' lánczs törtszám véges* és az adott közönséges törtnek lánczstört alakja

$$\frac{3}{11}=\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

A' mívelet, melly által a' közönséges törteket láncztörtbe változtatjuk nem egyéb, mint a' legnagyobb közös osztó keresése a' számláló 's nevező közt (118) Ha ott a' részeseket, mellyek az egymást követő osztások által származtak feljegyezzük, azok lesznek azon láncztört' tagjainak nevezőji melly a' két számból kerül ha azt úgy tekintjük mint valamelly törtnek számolóját 's nevezőjét.

Ha p. o: 2509 és 725 közt kellene keresnünk a' legnagyobb közösosztót, ez annyi lenne, mintha $^{2509}/_{725}$ közönséges törtet, láncztörtre kellene vinnünk.

Az első tag lesz

$$3 \text{ egész} + \frac{334}{725} = 3 + \frac{1}{725:334} = 3 + \frac{1}{2+\frac{57}{334}}$$

$$\text{a' második tag } \frac{57}{334} = \frac{1}{334:57} = \frac{1}{5+\frac{49}{57}}$$

$$\text{a' harmadik } \frac{49}{57} = \frac{1}{57:49} = \frac{1}{1+\frac{8}{49}}$$

$$\text{a' negyedik } \frac{8}{49} = \frac{1}{49:8} = \frac{1}{6+\frac{1}{8}}$$

az ötödik maga $= {}^1/_8$ legegyszerűbb kifejezésen mert számlálója $= 1$.

Keressük hasonlításul a' legnagyobb közös osztót 2509 és 725 között.

1-ször,	lesz az első		részes	3 egész,	első	maradván	334
2-szor,	osztatik	725,	334el	részes 2,		maradván	57
3-szor,	- -	334,	57el	- 5,	- -		49
4-szer,	- -	57,	49el	- 1,	- -		8
5-ször,	- -	49,	8al	- 6,	- -		1
6-szor,	- -	8,	1el	- 8,	, -		0

Tehát az egymást követő részesek, 2, 5, 1, 6, 8 a' más úton is megtalált nevezőji a' láncztört tagjainak; és

$$\frac{2509}{725} = 3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8}}}}}$$

figyelemmel hasonlítván a' két míveletet, minden köztök lévő egyenlőség könnyen szembetünhető.

Nehány, láncztörtekre vitt közönséges törtszám.

1) $$\frac{8}{13} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$$

2) $$\frac{29}{70} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$$

3) $$\frac{157}{225} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}}$$

4) $$\frac{189}{433}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}}$$

141. **Valamelly láncz tört' egyes tagjait, vagy azoknak öszveseit, közönséges törtszámra vinni?**

1) Legyen az áltváltoztandó láncztört =

$$=2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{10}}}}}$$

A' két egész és a' láncz' első tagja $=\frac{2.5+1}{5}$

Ha a' láncztört egész számmal jár, mint példánkban, az első változtatott tag számlálójához még egy egyes adatik; ha illy egész nincs vele, az egység, nevezőjéhez tétetik. Ezen mívelethez úgynevezett segéd törtet kell vennünk, melly az első esetben $^1/_0$ a' másodikban $^0/_1$ alakban jelenik meg, 's az első taghoz adandó.

Az első taghoz adván a' segéd törtet lesz:

$$\frac{2.5+1}{5+0}=\frac{11}{5}$$

A' második tagot $^1/_4$ ehez tévén, sokszorozzuk nevezőjével a' $^{11}/_5$öt 's lesz $^{11.4}/_{5.4}$, ehez adván az egyeseket törtszám alakban, az az 2-őt$=^2/_1$ írván, lesz a' két első tag' értéke $=2+{}^1/_5+{}^1/_4=\frac{11.4+2}{5.4+1}=\frac{46}{21}$

A' harmadik nevezőjével $^{46}/_{21}$ mindkét részét sokszorozni kell 's hozzá adni az első tag értékét a' $^{11}/_5$öt lesz:

$$\frac{46.2+11}{21.2+5}=\frac{103}{47}=2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}$$

ide adván a' 4-dik tagot lesz:

$$2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}=\frac{103.3+46}{47.3+21}=\frac{355}{162}$$

és végre az egész tört:

$$2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{10}}}}}=\frac{355.10+103}{162.10+47}=\frac{3653}{1667}$$

A' mivelet következőkép foly:

egymás után íratnak az egyes tagok' nevezőji fekvő sorban, alávonván őket balra a' segéd jegyet írjuk: következnek a' nevezők alá az egyes tagok értékei két féle kifejezésben, és a' sokszorozása az előbbeni törtnek, a' jelenvalónak nevezőjével, 's az annak előtte álló tört egyszerű hozzáadása sorjában folytatik.

	2	5	4	2	3	10
$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2.5+1}{1.5+0}$	$\frac{4.11+2}{4.5+1}$	$\frac{2.46+11}{2.21+5}$	$\frac{3.103+46}{3.47+21}$	$\frac{10.355+103}{10.162+47}$
vagy	$\frac{2}{1}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{46}{21}$	$\frac{103}{47}$	$\frac{355}{162}$	$\frac{3653}{1667}$

2) $$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}}}}}$$

itt egész nem lévén a' segédtört $= {}^0/_1$ a' második taghoz adandó.

3.	5.	1.	4.	7.
1	5	6	29	209
3	16	19	92	663

142. *A' láncztörtek' jelesb tulajdoniról.*

1) Az egyes tagok változólag kisebbek 's nagyobbak a' szám valódi értékénél.

2) A' páratlan számú tagok 1, 3, 5, 7 & értéke, mindég nagyobb a' törtszáménál, a' páros tagoké pedig kisebb, ha egész nincs a' láncztört tagjai előtt.

Ha egész szám van a' tagok előtt, ugy megfordítva a' páratlan számú tagok értéke kisebb, a' párosoké pedig nagyobb mint a' közönséges törtszámé.

Ebből következik hogy, a' törtszám valódi értéke, két egymást követő láncztörttag értéke között áll.

3) Két egymásutánni láncztört tag' különbsége mindég ± 1 (több vagy kevesebb egynél) elosztván ezt a' két tag nevezője' származatával.

Mentűl távolabbiak a' tagok, annál kisebb a' két egymást követő tagok közti különbség, 's annyival inkáb közelednek értékeik az adott tört értékéhez: ezért neveztetnek a' láncz törtek *közelítő törteknek is.*

4) A' páratlan tagok kisebbedvén, a' párosak nevekedvén közelítnek a' törtszám' értékéhez; és megfordítva ha előttök egész szám áll.

5) Valamelly egyes tag' és a' tört közti különbség mindég kisebb mint ± 1 elosztva a' tag' nevezője négyszegével.

6) A' tagok' számolóji és nevezőji mindég elsők egymásközt. Példa:

$$\frac{100000}{102764}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{36+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}}}}}}$$

értékei :

1	36	5	1	1	2	1	17
$\frac{1}{1}$	$\frac{36}{37}$	$\frac{181}{186}$	$\frac{217}{223}$	$\frac{398}{409}$	$\frac{1013}{1041}$	$\frac{1411}{1450}$	$\frac{25000}{25691}$

Hogy ezen közelítő törteket könnyebben öszvehasonlíthassuk, változtassuk azokat tizedesekbe.

Értékek. *Különbség a' két egymásután álló tagközt.*

$\frac{1}{1}=1\cdot000000000$

$=+0.027027027=+\frac{1}{37}$

$\frac{36}{37}=0\cdot972972973$

$=-0\cdot000145306=-\frac{1}{37.186}$

$\frac{181}{186}=0\cdot973118279$

$=+0\cdot000024109=+\frac{1}{186.223}$

$\frac{217}{223}=0\cdot973094170$

$=-0\cdot000010964=-\frac{1}{223.409}$

$\frac{398}{409}=0\cdot973105134$

$=+0\cdot000002348=+\frac{1}{409.1041}$

$\frac{1013}{2041}=0\cdot973102786$

$=-0\cdot000000662=-\frac{1}{1041.1450}$

$\frac{1411}{1450}=0\cdot973103448$

$=+0\cdot000000027=+\frac{1}{1450.25691}$

$\frac{25000}{25691}=0\cdot973103431$

Látni ezen példából.

a) Hogy az első tag nagyobb, a' második kisebb, a' harmadik nagyobb a' 4dik kisebb 's a' t. 's így felváltva a' tagok nagyobbak és kisebbek a' szám valódi értékénél.

b) Hogy az 1, 3, 5 és 7dik tagok értéke nagyobb a' 2, 4, 6 és 8dik tagoké pedig kisebb mint az adott közönséges törtszámé.

c) Hogy a' közeledés a' valódi értékhez annál nagyobb mentűl távolabb esik valamellyik tag az elsőtől; vagy hogy, a' két egymást követő tagközti különbség mindég kisebb kisebb.

7) Egy páros és egy páratlan helyű tag közzé nem lehet olly számot *béiktatni*, melly közelebb lenne a' valódi értékhez 's egyzsersmind nagyobb nevezővel birna mint az elsőbb tag, vagy kisebbel mint a' második tag.

Ellöttünk lévő példát vevén ez azt teszi, hogy p. o: $^{36}/_{37}$ és $^{181}/_{186}$ közzé nem lehet olly törtszámot iktatni melly közelebb lennne $\frac{25000}{25691}$ valódi értékéhez mint valamellyike ezen kettőnek, és nevezője egyszersmind a' kettőnek nevezője 37 és 186 között állana.

8) Két páros, vagy két páratlan helyű tagközé, lehet olly számokat iktatni, mellyek az adott tört' valódi értékéhez közelebb állnak nálluknál, ha, a' köztök lévő különbség nagyobb mint 1 elosztván ezt a' nagyobbik nevezővel: és annyi törtet lehet közükbe iktatni hánnyal több ezen különbség 1nél.

Vegyük az előttünk lévő példát.

Lehet é a' béiktatásnak helye $^{1}/_{1}$ és $^{181}/_{186}$ között? Az $^{1}/_{1} = 1$ és $^{181}/_{186}$ az első és harmadik tagjai a' lánczörtnek. A' köztük lévő különbség

$$^{1}/_{1} - {}^{181}/_{186} = {}^{186-181}/_{186} = {}^{5}/_{186}$$

's így 4számot lehet a' kettő közé iktatni 's ez következő.

$$1)\quad \frac{1+36}{1+37} = \frac{37}{38}$$

$$2)\quad \frac{1+2.36}{1+2.37} = \frac{73}{75}$$

$$3)\quad \frac{2+3.36}{1+3.37} = \frac{109}{112}$$

$$4)\quad \frac{1+4.36}{1+4.37} = \frac{145}{149}$$

hol mindegyik törtnek nevezője nagyobb 37nél és kisebb 186nal.

Lehet é $^{181}/_{186}$ és $^{398}/_{405}$ mint 3dik és 5dik láncztag közé illy közelítőket iktatni?

$$\frac{181}{186} - \frac{398}{409} = \frac{1}{186.409}$$

a' különbség köztök az egység, elosztatván a' két tag nevezője' származata által, semmi közelítő nem állhat közöttök, 's a' két törtszám legközelebb van mindazok közt egymáshoz, mellyeknek nevezője 186 és 409 közt áll; az 5dik és 7dik tagközti különbség

$$\frac{389}{409} - \frac{1411}{1450} = \frac{1}{409.1450}$$

a' két számközt ugyan azon okokból nem lehet közelítő.

Nézzük a' páros állású tagokat:

$$\frac{36}{37} - \frac{217}{223} = -\frac{1}{37.223}$$

tehát az iktatásnak nincs helye.

$$\frac{217}{223} - \frac{1013}{1041} = -\frac{2}{223.1041}$$

van egy közelítő 's ez

$$\frac{217+398}{223+409} = \frac{615}{632}$$

végre $$\frac{1013}{1041} - \frac{25000}{25691} = -\frac{17}{1041.25691}$$

ad 16 béiktandó törtet, 's ezek:

$$1)\ \frac{1013+1411}{1041+1450} = \frac{2424}{2491} \qquad 9)\ \frac{1013+9.1411}{1041+9.1450} = \frac{13712}{14091}$$

$$2)\ \frac{1013+2.1411}{1041+2.1450} = \frac{3835}{3941} \qquad 10)\ \frac{1013+10.1411}{1041+10.1450} = \frac{15123}{15541}$$

$$3)\ \frac{1013+3.1411}{1041+3.1450} = \frac{5246}{5391} \qquad 11)\ \frac{1013+11.1411}{1041+11.1450} = \frac{16534}{16991}$$

$$4)\ \frac{1013+4.1411}{1041+4.1450} = \frac{6657}{6841} \qquad 12)\ \frac{1013+12.1411}{1041+12.1450} = \frac{17945}{18441}$$

$$5)\ \frac{1013+5.1411}{1041+5.1450} = \frac{8068}{8291} \qquad 13)\ \frac{1013+13.1411}{1041+13.1450} = \frac{19356}{19891}$$

$$6)\ \frac{1013+6.1411}{1041+6.1450} = \frac{9479}{9741} \qquad 14)\ \frac{1013+14.1411}{1041+14.1450} = \frac{20767}{21341}$$

$$7)\ \frac{1013+7.1411}{1041+7.1450} = \frac{10890}{11191} \qquad 15)\ \frac{1013+15.1411}{1041+15.1450} = \frac{22178}{22791}$$

$$8)\ \frac{1013+8.1411}{1041+8.1450} = \frac{12301}{12641} \qquad 16)\ \frac{1013+16.1411}{1041+16\ 1450} = \frac{23589}{24241}$$

Ha a' láncztört tagjait, 's az itt talált beiktandó közelítőket tizedesekre változtatván, sorba írjuk, nyilván latjuk hogy, az adott törtszám' $^{100000}/_{102764}$ értékéhez melly tizedesbe változtatván $=0{\cdot}9731034214.$, 29 törtszámot iktathatunk bé az 1től fogva, mellyek változtatva kisebbedés és öregbedés által közelítnek az adott tört valódi értékéhez: és csakugyan közelednek:

A) Kisebbedés által.	*B) öregbedés által.*
1. 1·000000000	1. 0,972972973
2. 0·973684210	2. 0·973094170
3. 0·973333333	3. 0·973101266
4. 0·973214285	4. 0·973102786
5. 0·973154362	5. 0·973103171
6. 0·973118279	6. 0·973103273
7. 0·973105134	7. 0·973103320
8. 0·973103448	8. 0·973103347
	9. 0·973103365
	10. 0·973103377
	11. 0·973103387
	12. 0·973103394
	13. 0·973103399
	14. 0·973103404
	15. 0·973103408
	16. 0·973103411
	17. 0·973103414
	18. 0·973103416
	19. 0 973103418
	20. 0·973103420
	21. 0.973103421

A' közönséges életben elég lévén a' tizedesek 3 első jegye, láthatni hogy a' lánczörtek' egyes tagjai már haszonvehetőleg adják az eredeti törtnek értékét.

Haszna a' láncz törteknek kivált az *Analisisban tetemes*, *'s azért ismerése szükséges.*

Jegyzék. Vegyünk használatának egy példáját.

A' napi év 'hossza 365 nap 5óra 48 percz és 49 másodpercz.

Ha azt, mi 365 napon felül van elhagyjuk, kérdés hány év lefojta allatt lesz 5óra 48′ és 49″ből a' napok' bizonyos száma?

Ha a' több, épen 6óra lenne $4.6=24$ minden 4 év után egy egész napot iktathatnánk bé tökéletességgel.

A' légrégib időben már így pótoltatott az évek híjja: és minden 4 év után még 11' 11'' veszett el a' Juliani iktatás szerént. A' hiba 1582ben már közel 10 napot tett s' XIII Gergely pápa az 5-dik Octobert azon évben a' 15-diknek íratta, és rendelte hogy jövőben 97 nap adasson 400 évhez, az az 3al kevesebb mint addig történt 400 évben.

A' kérdés tehát az hogy melly arányban áll 24 óra 5 óra 48' és 49'' hez, ez $= \frac{24^0}{5^0 48' 49''} = \frac{86400}{20929}$ azt mutatja, hogy ha minden évben elhagynók az 5 óra 48' és 49'' et, a' hiba minden évben a' nap $\frac{20929}{86400}$ részét tenné és következéskép 86400 év alatt 20929 napot: tehát úgy kell 86400 évközé 20929 napot bé iktatni hogy a' szakaszok ne felette nagyok legyenek.

Bizonyossan fogunk olly számokat találni (ha a' törtet $^{86400}/_{20929}$, láncztörtbe változtatjuk), mellyek értékéhez közelítnek és egyszermind kisebb számokkal lesznek írva.

$$\frac{86400}{20929} = 4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{15}}}}}}}}$$

és az egyes tagok értékei

$$\frac{1}{0}, \frac{4}{1}, \frac{29}{7}, \frac{33}{8}, \frac{128}{31}, \frac{161}{39}, \frac{2704}{655}, \frac{2865}{694}, \frac{5569}{1349}, \frac{86400}{20029}$$

Tudjuk hogy a' 1, 3, 5, 7 & tagok igen kicsinyek a' 2, 4, 6, 8, tagok pedig igen is nagyok, de hogy mindég közelednek a' tört' valódi értékéhez.

Keressük fel azon számokat mellyek a' tagok közt állnak és mint közelitők béiktathatnak.

$$\frac{1}{0} \text{ és } \frac{29}{7} \text{ közt van } 6. \frac{35-29}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\text{'s ez } \frac{5}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{17}{4}, \frac{21}{5}, \frac{25}{6}$$

$$\frac{4}{1} - \frac{33}{8} = -\frac{1}{8}$$

közöttök nincs közelítő.

$$\frac{29}{7} \text{ és } \frac{128}{31} \text{ közt, } \frac{899-896}{7.31} = \frac{3}{7.31}$$

van kettő $\frac{62}{15}$, és $\frac{95}{23}$

$$\frac{33}{8} - \frac{161}{39} = \frac{1}{8.39.} \text{ nincs közelítő.}$$

$$\frac{128}{31} - \frac{2704}{655} = \frac{83840-83824}{31.655} = \frac{16}{31.655}$$

tehát van 15be iktandó, 's ez

$$\frac{289}{70}, \frac{450}{109}, \frac{611}{148}, \frac{772}{187}, \frac{933}{226}, \frac{1094}{265}, \frac{1255}{304}, \frac{1416}{343}$$

$$\frac{1577}{382}, \frac{1738}{421}, \frac{1899}{460}, \frac{1060}{499}, \frac{2221}{538}, \frac{2382}{577}, \frac{2543}{616}$$

$$\frac{161}{39} - \frac{2865}{694} = -\frac{1}{39.694} \text{ nincs közelítő.}$$

$$\frac{2704}{655} - \frac{5569}{1349} = \frac{1}{655.1349} \text{ nincs közelítő.}$$

$$\frac{2865}{694} - \frac{86400}{20929} = \frac{15}{694.20929}$$

lesz 14 közelítő: 's ezek.

$\frac{14003}{3392}$, $\frac{19572}{4731}$, $\frac{25141}{6090}$, $\frac{30710}{7439}$, $\frac{36279}{8788}$, $\frac{41848}{10137}$, $\frac{47417}{11486}$

$\frac{52996}{12835}$, $\frac{58555}{14184}$, $\frac{64124}{15533}$, $\frac{69693}{16882}$, $\frac{75262}{18231}$, $\frac{80831}{19580}$, $\frac{86400}{20929}$

Ha mindezen közelítő és béiktandó tagokat össze írjuk külön külön az öregbedés és kisebbedések szerint, és könnyebb tekintet kedvéért tizedes törtekre változtatjuk lesz közel értékek: = 4,128.... mindaddig míg

$$\frac{86400}{30929} = 4\cdot1282383$$

valódi értékre nem jutunk.

Az utóbbi számok már nagyok a' haszonvétre, de az előbbiek közt van egy, melly igen alkalmas lenne a' felvételre, 's ez a' $^{450}/_{109}$ melly = 4·1284403 és csak egy sekundával nagyobb mint az eredeti szám. Megjegyzendő az itt hogy, a' szokásban lévő iktatása az éveknek $^{400}/_{97}$, ezen tagok és közelítő számok közt sehol sincs, $^{289}/_{70}$ és $^{450}/_{109}$ közt pedig mint tudjuk semmi esetre sem állhat, szembetűnő tehát hogy $^{289}/_{70}$túl akármellyik szám is jobb szolgálatot tenne 's közelebb vinne bennünket az igazsághoz mint a' Gergelyi iktatás, hol $^{400}/_{97}$ értéke napokban kitéve 365 nap 5óra 49′ 12″ tehát az igazi időt 23″val közel fejülhaladja; azonban a' hiba csak 3757 év mulva tész egy napot.

Ha $^{450}/_{109}$ vagy inkáb $^{900}/_{218}$ vétetne fel a' $^{400}/_{97}$ helyett, a' hiba alig tenne egy napot 100 ezer évben, 's e' szerént a' négy első században 100 nap volna bé iktandó, vagy 200 a' 8 században, és 9 vagy 18 az ötödik század feliben vagy a' 9dik században.

$^{450}/_{109} = 4{\cdot}12844\ldots$ tehát azt tészi hogy minden 4·12844 évben kell egy napot bé iktatni, de mivel az iktatásra egész évek és egész napok kívántatnak a' közönséges tört $^{450}/_{109}$ jobban megfelel tekintetünknek.

Ha tehát minden században 24 napot iktatnánk bé lenne 4 egymást követő században 96 nap, 's a' következő 50 év közzé 13 napot kellene iktatni: vagy ha a' mostani iktatást megtartjuk, szükéges annak javítására hogy minden 3757 év lefojta után egy napot elhagyjunk.

V. SZAKASZ.

A' COMBINÁLÁSRÓL VAGY ÖSZVE-ILLETÉSRŐL.

143. Ha valamelly betűk számok vagy más jegyek, bizonyos mennyiségben és változásokban egymás mellé rakatnak, vagy öszveilletnek, ezen mivelet *Combinationak Combinálásnak* neveztetik, kiterjedett értelemben. Az egyes számokat vagy jegyeket *elemeknek* nevezzük, több elem, tagját vagy csoportját képzeli az öszveilletésnek.

Ha számjegyeket veszünk, ezeknek értéke egyszersmind az elem értékét fogja mutatni, vagy is hogy hányadik?

P. o: ha 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.....'s a' t. öszveilletési elemek lennének, az 1 első, a' 2, a' második a' 3, 4 's a' t. 4dik 5dik elem lenne, 's ha 251 volna valamelly combinált tag, azt tudnánk belőle hogy a' második ötödik és az első elem illettetett öszve.

Ha betűjegyeket választunk, ezeket közönségesen az alphabet sorába vesszük 's lesz a, b, c, d, e, f, 's a' t. az első második, harmadik 's a' t. elem.

Azon tagokat, mellyek fejebbvaló vagy nagyobb számokkal vagy távolabb betűkkel íratnak, magasabb combinálásnak hívjuk: így *ba* magosabb combinálás *ab*nál és 21 nagyobb 12nél: 324 magosabb mint 243 's a't

A' combinálás *rendes* akkor ha a' tagok ugy vannak egymásután rakva, hogy soha sem előzi valamelly magosabb a' nálánál kisebbet.

144. A' combinálás' első 's legkönnyebb mívelete, a' *permutálás* vagy *elváltoztatás*. Itt az adott elemek mind egymás mellé íratnak annyiszor változtatva, a' hány változás lehetséges.

Ha 3 elem lenne adva *a*, *b*, *c* vagy 1. 2. 3. permutatiojok ekép állana:

abc,	123.	bac,	213.	cab,	312.
acb,	132.	bca,	231.	cba,	321.

Adva van 4 elem *a*, *b*, *c*, *d* vagy 1. 2. 3. 4.

abcd	1234	bacd	2134	cabd	3124	dabc	4123
abdc	1243	badc	2143	cadb	3142	dacb	4132
acbd	1324	bcad	2314	cbad	3214	dbac	4213
acdb	1342	bcda	2341	cbda	3241	dbca	4231
adbc	1423	bdac	2413	cdab	3412	dcab	4312
adcb	1432	bdca	2431	cdba	3421	dcba	4321

Itt a' tagok rendesen következnek egymásután, minden későbbi nagyobb vagy magosabb az előtte állónál, 's így az utolsó tag épen a' megfordított első.

Annyi osztály támad hány az elem, 's mindegyik osztály más elemmel kezdődik.

Hány változtatást enged valamelly számja a' tagoknak, példáinkból láthatjuk.

Egy elem magában állván nem változtatható és *a* csak *a*, $1=1$.

Két elem kétszer változtatható *a* és *b* p. o: *ab* és *ba* több eset nem lévén $2=1.2$

Három elem *a*, *b*, *c* mint láttuk 6 változtatást enged és $6=1.2.3$

Négy elem a, b, c, d, adott 24 tagot és $24 = 1.2.3.4$.

Ha az 5ödik elem járul ehez, mind az elébbi 24 tagban 5ször fog előjönni vagy is 5 különbféle helyet foglalni, mit p. o: már látjuk ha egyik tagját veszszük a' 4 elemű változtatásnak.

Iktassuk bé az 5öt 1234 közzé lesz:

12345, 12354, 12534, 15234, 51234.

és szinte így áll az 5tös mindegyik tagban 5 helyen.

Lesz 5 elem' változtatása $24.5 = 1.2.3.4.5 = 120$

Minden hozzá járó új elem tehát annyîval több változtatást enged mennyit az előbbeni számú elem, sokszorozván ezt a' hozzájáró elem számával, p. o: a' hatodik elem járulván öthöz, az öt elem változtatásai hattal sokszoroztatván adják a' 6 elem' változtatási tagjainak számát, ez $120.6 = 1.2.3.4.5.6 = 720$.

Közönségesen ha az elemek száma n, 's a' változtatásoké Pn,

lesz $(n-1)$ változtatása $P(n-1)$'s ebből

$$Pn = n.\ P(n-1)$$

és az n elem közti változtatás' közönséges kifejezése

$$n.(n-1).(n-1)\ldots\ldots 4.3.2.1 \text{ vagy}$$

$$1.2.3.4\ldots\ldots(n-1).n.$$

's így könnyen megtaláljuk a' változtatások' számát akárhány elem adassék, egymásmellé írván a' természetes számokat egytől kezdve addig, hány elem adatott, mint factorokat, 's a' belöllök nyert származat, a' keresett változtatás' mennyisége.

Példák:

Hány kilencz jegyből álló számot lehet a' kilencz számjeggyel írni?

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362880.$$

Ha valakit kérdeznénk hány ebédet kellene adnia 12 vendégének ugy, hogy ezek mindennap más rendben ülvén az asztalnál, végre az első napi rendre kerüljenek vissza? meglehet hogy kis gondolkozás után holnapot engedne; de miként bámulna kiszámítván, hogy erre nem kívántatna kevesebb idő mint egy millio háromszáz kilenczezer hetvennyolcz év és 130 nap? 's valóban

1.2.3.....12=477813600 nap =1,309078 év és 130 nap.

Hányszor lehet az Alphabet' 24 betűjét változtatva írni?

1.2.3.4........24 következő rettentő számot adna

620,448'''401,733''239,493'360,000.

szám, melly az emberi ész előtt megfoghatatlan. A' változtatásokat leírván nagyobb tér kívántatnék hozzá mint 144 ezerszer földünk borítékja, 's ha valamenyi lakosa földünknek szünetlen írná, nem végezné el a' munkát ezer millio év alatt.

Ha az adott elemek közt egyenlők vannak, a' változtatások száma kisebb, mert helyüket változtatván, a' tagok' hasonlósága nem változott: így p. o: ha a' 3 elem közt két egyenlő van a,a,b a' változtatások száma nem 6 többé de csak 3 mert

aab, aab, aba, aba, baa, baa közt két két egyenlő van, az az csak aab, aba és baa különböznek egymástól, s' a' 3 elem változtatása $\frac{1.2.3}{1.2}=3$ ha közötte két egyenlő van.

Ha 4 elemközt 3 egyenlő van a' változtatás' száma nem lehet több négynél, az az a' negyedik elem maga változtatja helyét 's a' többi ott marad.

Ha az elemek közt több van ollyan, melly többször jön elé egyszernél, vagy mellyből több van egyenlő, a' változtatások száma ismét kevesebb: p. o: 5 elem közt legyen kettő kettő egyenlő: a, b, b, c, c, a' változtatások

abbcc	babcc	bcabc	cabbc	cbbca
abcbc	bacbc	bcabc	cabcb	cbcab
abccb	baccb	bcbac	cacbb	cbcba
acbbc	bbacc	bcbca	cbabc	ccabb
acbcb	bbcac	bccab	cbacb	ccbab
accbb	bbcca	bccba	cbbac	ccbba

számok pedig $=30=\frac{1.2.3.4.5}{1.2+1.2}$

Ha itt egyik elem 3-szor a' másik 2-szer volna, változtatások száma lenne $\frac{1.2.3.\ 4.5}{1.2.3+1.2}=10$

Ha tehát csak egyik elemből van több egyenlő, a' származatból factorai elhagyatnak, vagy factoraival a' származat el osztatik, mi annyi, mint ha a' több egyenlő elem csak egy lenne: 's közönségesen ha n elem közt m egyenlő van, a' változtatások száma $=$

$$\frac{1.2.3.4.\ldots n}{1.2.3.4.\ldots m} \text{ vagy}$$

$$=(m+1).(m+2).(m+3)\ldots.n.$$

p. o: 8 elem közt van 5 egyenlő, lesz a' változtatások' száma $=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5.}=6.7.8$

Ha az elemek közt többféle egyenlő van, a' származat az egyenlő elemek származatának öszvesével osztatik, mi annyi hogy az egyes egyenlő elemek külön külön származatával kevesebbedik a' változtatások száma.

Közönségesen, legyen n elem közt m, p, q és r egyenlő elem, lesz a' változtatások' száma $=$

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.n}{1.2.3.\ldots m+1.2.3.\ldots p+1.2.3.\ldots q+1.2.3.\ldots r}$$

P. o: adva van 9 elem, közötte van egyikből 3 másikból 3, harmadikból 2 egyenlő elem, a' változtatások' száma

$$=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3+1.2.3+1.2}$$

145. A' combinálás szorosabb értelemben, *öszverakása* valamelly elemeknek bizonyos számba anyiszor, mennyiszer lehet. Itt annyi osztályt lehet képzelni mennyi az elemek' száma, azokat egyesen, párosan, hármával, négyben 's a' t. véve, 's az osztályok' nevei, *unio*, *ambo* vagy *binio*, *ternio*, *quaternio*, *quinternio* 's a' t.

Egy elem csak uniot ád magában $a=a$

Két elem ád két uniót és egy ámbót a, b, ab

Három elem ád 3 uniot a, b, c, ab, ac, bc három ámbot és abc egy terniót.

Négy elem négy uniot a, b, c, d, 6 ambot ab, ac, ad, bc, bd és cd, 4 terniot abc, abd, acd és bcd, 's egy quaterniot $abcd$. 's a' t.

Ezen combinalás az *egyszerű*; a' mondottból könnyen következtethetjük hány öszveilletést enged, binio, ternio, quaternio 's a' t. be valamelly száma az elemeknek.

Egy elem nem adhat ámbot, sem feljebb való illetést

Két elem ád 1 biniot $\frac{2.1}{1.2}=1$

Három elem ád három biniot $\frac{3.2}{1.2}=3$

Négy elem ád 6 biniót $\frac{4.3}{1.2}=6$

Öt elem ád 10 biniot $\frac{5.4}{1.2}=10$'s a' t.

Közönségesen ha az elemek száma m, a' lehető binioké

$$\frac{m-(m-1)}{1.2}$$

A' terniok lehető száma

$$3 \text{ elemből} = 1 = \frac{3.2.1}{1.2.3}$$

$$4 \text{ elemből} = \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$$

$$5 \text{ elemből} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10. \text{ 's a' t.}$$

A' terniok közönséges kifejezése m elem közt

$$\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ .2.\ 3}$$

szintigy lesz a' quaternioké

$$\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

a' quinternioké

$$\frac{m.(-1).(m-2).m-3).(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

és közönséges n elem m öszveilletésen

$$\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots.(n-(m-1))}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ldots\ldots m}$$

Ha tehát valamelly számú elem adatott és az öszveilletés neme, az elemek számát fel írván annyi lefelé utánna következő számot teszünk factorokká, a' mekkora legyen a' combinálási tag, 's a' természetes számok annyi egymást követő factorával osztjuk, mennyi elem combináltatott egy tagba, legyen p. o: $n=30$ és $m=3$

tehát 30 elem közt hány ternió van? ez

$$=\frac{30.29.28}{1.2.3}$$

Vegyük például a' Lotteriát, hol 90 szám közzűl 5 húzatván ki, 's következéskép uniok, biniok, terniok, quaterniok és egy quinternó képzeltetnek, 's csakugyan ád az 5 húzott szám

$$\frac{5}{1} = 5 \text{ uniot}$$
$$\frac{5.4}{1.2} = 10 \text{ biniot}$$
$$\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10 \text{ terniót}$$
$$\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5 \text{ quaterniot és végre}$$
$$\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = 1 \text{ quinterniot.}$$

A' lehető öszveilletések pedig ezen 5 féle combinálási sorban, 90 számból

$$\frac{90}{1} = 90 \text{ unio}$$
$$\frac{90.89}{1.\ 2} = 4005 \text{ binio}$$
$$\frac{90.89.88}{1.\ 2.\ 3} = 117480 \text{ ternio}$$
$$\frac{90.89.88\ 87}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 2555190 \text{ quaternio és}$$
$$\frac{90.89.88.87.86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 43949268 \text{ quinternio.}$$

Az egyszerű combinálásnál mint látjuk mindegyik tag csak egyszer áll, 's mindegyik különbözik a' többitől.

Ha az egyes tagokat is elváltoztatjuk az az, ha az elemek' helyeit felcseréljük, a' *változtatott combinálásra* jutunk.

Az egyszerű combinálás ád 3 elemből 1 terniot de ád változtatással mint láttuk 6tot.

Négy elem ád terniot egyszerűen combinálva 4et, változtatva mindegyik a' négy tag közül ád 6ot tehát 4.6=24.

Öt elem ád egyszerűen 10 terniot, változtatva 6.10=60

's így minden különös esetre megtaláljuk a' változtatott combinálás számát, ha az egyszerű combinálási tagok' számát sokszorozzuk az egyes tag lehetséges változtatásával, p. o:

7 elem ád 35 quaterniot 's mindegyik quaternio ád 4.3.2.1=24 változtatást, 's így az egész =35.24=840.

Közönségesen. Ha az egyszerű combinálási szám $=C$ valamelly m öszveilletésiben, a' változtatott combinálási szám lesz

$$C.m(m-1).(m-2)\ldots.3.2.1$$

146. Ha az egyes elemek többször jöhetnek elő 's csakugyan annyiszor mellyik combinálási sorban míveltetik, ekkor a' combinálás *ismételő* és *határtalan.* Itt változtatás nincs, és a' tagok úgy állanak, hogy mindég a' magosabb következik, és soha sem áll kisebb jegy nálánál nagyobb előtt.

Combináltasson ismeteléssel 3 elem a, b, c vagy 1.2.3.

Ambok.	11	12	13	22	23	33				
	aa	ab	ac	bb	bc	cc				
Terniok.	111	112	113	122	123	133	222	223	233	333
	aaa	aab	aac	abb	abc	acc	bbb	bbc	bcc	ccc
Quaterniok.	1111	1112	1113	1122	1123	1133	1222	1223	'sa't	
	aaaa	aaab	aaac	aabb	aabc	aacc	abbb	abbc		
Quinterniok.	11111	11112	11113	11122	11123	's a' t.				
	aaaaa	aaaab	aaaac	aabbb	aaabc					

's így továb végnélkül akármelly combinalisi sort lehet egyes elemből is képzelni.

Kívántatik 5 elem quaternioja ismételéssel.

Ha figyelemmel tekintjük az ismételt combinálási tagok' számát azt látjuk hogy *közönségesen* n elemet ismételéssel combinálni m sorba annyi, mintha $n+m-1$ elemet combinálnánk egyszerűen. Ezen kifejezésből könnyű lesz akármelly adott elemek ismételt combinálási számát megmondani valamelly sorban.

P. o: 8 elem ismételt combinálása 5-dik sorban vagy quinterniókban annyi mintha $8+5-1=12$ elemet combinálnánk quinternioba egyszerűen.

15 elemet a' 7-dik sorban ismételéssel combinálni annyi mint $15+7-1=21$ elemet egyszerűen.

A' *variálás*, *különböztetés*, ismét más neme a' combinálásnak: 's nem egyébb mint az *ismételt combinálás' változtatása*, hol egy tag sem hagyatik el.

Három elem' a, b, c, vagy 1.2.3 némely variálásai.

Biniók	aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc
	11	12	13	21	22	23	31	32	33
Terniok	aaa	aab	aac	aba	abb	abc	aca	acb	acc
	111	112	113	121	122	123	131	132	133
	baa	bab	bac	bba	bbb	bbc	bca	bcb	bcc
	211	212	213	221	222	223	231	232	233
	caa	cab	cac	cba	cbb	cbc	cca	ccb	ccc
	311	312	313	321	322	323	331	332	333

Quaterniok. 1111 1112 1113.......1133
aaaa aaab aaac.......aacc

1211 1212 1213.......1233
abaa abab abac.......abcc

1311 1312 1313.......1333
acaa acab acac.......accc

2111 2112 2113.......2133
baaa baab baac.......bacc

. . . .

. . . .

3311 3312 3313.......3333
ccaa ccab ccac.......cccc 's a' t.

A' várialásnak egy igen egyszerű mívelete van, melly szerént könnyű minden tagot meglelni rendiben anélkül, hogy egy is kimaradna. Ez abban áll, hogy az egyes elemek akár melly legyen számok, úgy íratnak egymás közt fel mint, az egyes factorok a' számok osztóji' keresésénél, 's úgy vétetnek össze mintha sokszoroztatnának.

Legyenek az elemek *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.......

a' biniok variálása e'kép fog állani.

	a	b	c	d	e......
a	aa	ab	ac	ad	ae......
b	ba	bb	bc	bd	be......
c	ca	cb	cc	cd	ce......
d	da	db	dc	dd	de......
e	ea	eb	ec	ed	ee......-
.	. . . .				
.	. . . .				

's a' fekvő sorban lévőket minden a' függőben álló egyes elemmel öszvetévén egy variatio' sem marad ki.

A' terniok származnak, ha a' biniok az uniokkal köttetnek egybe.

	aa	ab	ac	ad	ae	ba	bb	.....
a	aaa	aab	aac	aad	aae	aba	abb	.....
b	baa	bab	bac	bad	bae	bba	bbb	.....
c	caa	cab	cac	cad	cae	cba	cbb	.....
d	daa	dab	dac	dad	dae	dba	dbb	.....
.	...	...	...	...	...	...	...	.....
.	...	...	...	...	...	...	...	.....

A' Quaterniok támadnak ha a' biniok biniokkal köttetnek egybe:

	aa	ab	ac	ad	ae	ba	bb	....
aa	aaaa	aaab	aaac	aaad	aaae	aaba	aabb	....
ab	abaa	abab	abac	abad	abae	abba	abbb	....
ac	acaa	acab	acac	acad	acae	acba	acbb	....
ad	adaa	adab	adac	adad	adae	adba	adbb	....
..	....	....	....	....	....	....	....	....
..	....	....	....	....	....	....	....	....

A' quinterniok ha a' terniok biniokkal

A' sexterniok ha a' terniok terniokkal vagy a' quaterniok biniokkal 's a' t. köttetnek össze.

Ha a' várialásokat csoportokba vesszük 's ezeket binio, ternio quaternio 's a' t. helyett második harmadik negyedik 's a' t. csoportnak nevezzük, annyi lesz valamelly mennyiségű elem lehető váriálása, mennyi az elemek száma azon emelésen, mellynek mutatója a' csoport.

P. o: Hány tagot ád 6 elem a' 4-dik csoportban?

6^4 = hat a' 4-dik emelésen:

3 elem biniokban $=3^2$, 4 elem terniokban $=4^3$

3 elem terniokban $=3^3$, 5 elem quaterniokb. $=5^4$'s a't.

Ha tehát 3 elem volna adva, 's ezek variálásából 6 csoport kívántatna, lenne az első 3^1, a' második 3^2, a' harmadik 3^3, negyedik 3^4, ötödik 3^5 és a' hatodik 3^6

és a' 3 elem' lehető öszves váriálásai $=3+3^2+3^3+$ $+3^4+3^5+3^6$

Közönségesen. Legyen az elemek száma n, a' csoportoké m, a' lehető váriálások' száma lesz

$$n+n^2+n^3+n^4+n^5+\ldots\ldots n^m.$$

Ezen kifejezés, geometriai sor, mellynek öszvesét és tulajdonit később fogjuk megismerni.

147. Gyakorta kívántatik, hogy a' természetes számok bizonyos értékbe combináltassanak. Ez kétfélekép történhet meg.

1) Ha a' rend nincs meg adva vagy ki jelölve, csak azon számok íratnak egymás mellé ismételéssel mellyeknek öszvese a' kívánt értéket adja, 's a' kérdés abba fordul: hányfélekép lehet a' jegyekkel valamelly értéket írni?

A' jegyek egymás mellé íratnak

2) Ha a' szám jegyeknek bizonyos mennyisége van adva, az az ha valamelly bizonyos rendbe kell combinálni az elemeket.

Az első esetre példák.

Combináltasson 3 öszvesre

111, 12 és 3

a' hármat többfélekép nem lehet írni egymás mellé rakván az öszveadandó jegyeket.

Combináltasson 4 öszvesre

1111, 112, 13, 22, 4.

5 öszvesre

11111, 1112, 113, 14, 122, 23 és 5.

6 öszvesre

111111, 11112, 1113, 114, 15, 123, 222, 24, 33 és 6.

7 öszvesre

1111111, 11122, 115, 133, 25
111112, 1114, 1222, 16, 34
11113, 1123, 124, 223, 7

figyelemmel lévén minden lehető öszverakás megtaláltatik.

Második eset: bizonyos osztályba combinálni.

Combináltassék a' második rendbe 6 öszvesre

15, 24, 33.

A' második rendbe 8 öszvesre

17, 26, 35, 44.

A' harmadik rendbe 10 öszvesre

118, 127, 136, 145, 226, 235, 244, 334.

A' negyedik rendbe 10 öszvesre

1117, 1126, 1135, 1144, 1225, 1234, 1333, 2224, 2233,

Az ötödik rendbe 10 öszvesre

11116, 11125, 11134, 11224, 11233, 12223, 22222

A' 6dik rendbe 14 öszvesre

111119	111146	111236	111344	112334	122234
111128	111155	111245	112226	113333	222224
111137	111227	111335	112235	122225	222233

Ha a' kívánt öszves nagyobb mintsem azt egyes számjegyekkel lehetne írni, kettős és többes jeggyel kell mívelni. De szükség hogy, megkülönböztetésül a' kettős vagy többes jegyek' felibe, vonal vagy más jegy tétessék.

P. o: combináltassék a' 3dik rendbe 20 öszvesre

$11\overline{18}$	$15\overline{14}$	$19\overline{10}$	$25\overline{13}$	299	$36\overline{11}$	$45\overline{11}$	$55\overline{10}$	
$12\overline{17}$	$16\overline{13}$	$22\overline{16}$	$26\overline{12}$	$33\overline{14}$	$37\overline{10}$	$46\overline{10}$	569	
$13\overline{16}$	$17\overline{12}$	$23\overline{15}$	$27\overline{11}$	$34\overline{13}$	389	479	578	
$14\overline{15}$	$18\overline{11}$	$24\overline{14}$	$28\overline{10}$	$35\overline{12}$	$44\overline{12}$	488	668	677

a' kétjegyű számokra vonalok tétettek
combináltassék a' 4dik rendbe 16 öszvesre

$111\overset{\frown}{13}$	1159	$123\overset{\frown}{10}$	1339	1447	2248	2347	3337	
$112\overset{\frown}{12}$	1168	1249	1348	1456	2257	2356	3346	
$113\overset{\frown}{11}$	1177	1258	1357	$222\overset{\frown}{10}$	2266	2446	3355	
$114\overset{\frown}{10}$	$122\overset{\frown}{11}$	1267	1366	2239	2338	2455	3445	4444

a' kétjegyű számok' felibe görbe tétetett.

A' combinálásnak az Analysisben nagy haszna lévén, elemeit itt megismérni szükséges volt.

VI. SZAKASZ.

AZ EMELÉSEKRŐL ÉS GYÖKEREKRŐL.

148. Mindegyik szám, (mint első emelésen lévő) *gyökere* valamelly *emelésének*. A, *gyökere* A^mnek, és a' 3, *gyökere* 3^2, 3^3, 3^4 's a' t.nek,

Hogy akármelly emelésre lehet valamelly számot vinni, láttuk: 's hogy annyit fog mutatója jelőlni, hányszor volt a' szám mint factor véve.

Az emelések mindszinte azoknak egyes faktorai vagy *gyökerei* csak számok, mert csak ezekből lehet származatokat várni, csak ezeket sokszorozni.

149. Az egyjegyű számok' második emelését már a' sokszorozó táblácskából esmerjük 10ig.

A' tiznek emelései sorban, a' természetes számok' egymást követő rendjei. Az emelés' mutatója azt jelöli hány üressel jár az egység.

$10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$'s a' t.

Jegyzék. Az emeléseket csak akkor lehet öszveadni vagy egymásból levonni ha mind a' szám mind a' mutató egyenlők; minden más esetben a' mivelet csak kijelőltetik.

P. o: $A^m + 2A^m + aA^m = (3+a)A^m = 3A^m + aA^m$.
vagy $4^2 + 4^2 + 3.4^2 = 5.4^2$

de $4^2 + 4^3$ vagy $4^2 + 5^3$ csak így maradnak míg a' számok vagyis a' származatok nem kerestettek, mi

$4.4+4.4.4=16+64=80$ és
$4.4+5.5.5=16+125=141$'s a' t.
szintigy a' levonás
$aA^m-bA^m=(a-b)A^m$
$4^2-4^2=0$
$3.4^2-2.4^2=4^2=3.16-2.16=16.$
de 4^3-4^2 nem 4 hanem $4.4.4-4.4=64-16=48$

Hatehát emelésekkel kell az Arithmetika' 4 alapos míveletei által számolni, szükséges hogy közönséges szám alakba változtassanak; úgy a' míveletek nem fognak semmi nehézséget nyújtani.

P. o: $2^3.3^2=2.2.2.3.3$

$$\frac{3^2}{2^2}=\frac{3.3}{2.2}$$

Minden egyéb szám is annyiszor sokszoroztatik maga magával mennyiszer mutatója jelöli.

150. Ha valamelly emelést kell ismét emelésre vinni, a' régi és új mutató származatja lesz a' kívánt emelés' mutatója. $(N^m)^n=N^{mn}$
p. o: $(5^3)^2=5^{3.2}=5^6$ mert (148) 5^3 a' második emelésre vinni azt teszi, 5^3at kétszer venni mint faktort, ez pedig

$$5^3.5^3=5^{3+3}$$

Ebből következik, hogy ha *egyik emelése* valamelly mennyiségnek ugyan ezen mennyiség' *más emelésével* sokszorozandó a' *kétféle emelés' öszvese* lesz a' származat' mutatója.

$$A^m.A^n=A^{m+n}$$

$$(7^3)^4=7^{3.4}=7^3.7^3.7^3.7^3=7^{3+3+3+3}=7^{12}$$

Ha pedig valamelly menyiség egyik emelése a' másik által osztandó, a' mutatókközti különbség a' részes' mutatója.

$$\frac{A^m}{A^n}=A^{m-n}.\ \text{ha}\ m=n\ A^{m-n}=1$$

$$4^5:4^3=4^{5-3}=4^2\ ,,$$

$$4^5:4^5=4^{5-5}=4^0=1.\ \text{vagy}\ \frac{4^5}{4^5}=1.$$

151. Számazatot emelni annyi, mint annak egyes factorait külön külön emelni, 's megfordítva.

Ha $A=abc.$ lesz $A^m=a^m b^m c^m.=(abc)^m$

$$21^2=3^2.7^2\ \text{mert}\ 21=3.7$$

$$63^3=(7.9)^3=7^3.9^3.$$

152. Törtszám, valamelly emelésre vitetik, ha számlálója és nevezője külön külön emeltetnek.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^m=\frac{A^m}{B^m}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^2}{3^2}\ ,,\ \left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3^3}{5^3}$$

153. Valamelly szám' 2dik 3dik 4dik 's a' t. gyökerét venni nem egyéb mint azon számnak keresése, melly 2-szor 3-szor 4-szer 's a' t. állván mint factor, az adott számot adá: így p. o:

4nek második gyökere $=2$ mert $2.2=4$

8nak 3dik gyökere $=2$ mert $2.2.2=8$

243nak 5dik gyökere $=3$ mert $3.3.3.3.3=3^5$

és közönségesen

$$N^m\ m\text{dik gyökere}=N,\ \sqrt[m]{N^m}=N$$

A' kifejezéseket

$$\sqrt{A},\ \sqrt[3]{ab},\ \sqrt[4]{32},\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}},\ 3\sqrt[3]{5}\ \ \sqrt[m]{N}\ \text{'s a' t.}$$

Gyökérmennyiségeknek nevezzük.

Ha több mennyiségnek *gyökér mutatója* egyenlő, ezek *egynevűeknek:* ha pedig a' gyökérjegy allatti számok is egyenlők *egynemüeknek* hívatnak.

$\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{7}$ és $\sqrt[3]{a}$ egynevűek;

$\sqrt[3]{5}$, $2\sqrt[3]{5}$ és $5\sqrt[3]{5}$ egyneműek.

A' szám nem változik ha belőle valamelly rendű gyökér vétetik és egyszersmind azon rendre emeltetik:

$$5=\sqrt{5^2}=\sqrt[3]{5^3}=\sqrt[4]{5^4}=\sqrt[m]{5^m}$$

154. Valamelly szám, mellynek bizonyos mennyiségű faktorait szét lehet rakni *tökéletes emelés*, 's az illyen szám' gyökere is *tökélletes gyökér* vagyis *mérhető*: az ellenkező esetben a' gyökér *mérhetetlen*.

$2.2=4$ tökélletes emelés $\sqrt{4}=2$ tökélletes gyökér

$4.4.4=4^3$ és $\sqrt[3]{4^3}$ tökéletes emelés és gyökér: de se $\sqrt{4^3}$ se $\sqrt[4]{4^3}$ nem tökélletes emelések vagy gyökerek, mert gyökér és emelési mutatójik nem mérhetők egymásközt.

155. Valamelly származat' gyökere, ezen gyökér' egyes faktorainak származatja:

$$\sqrt{36}=6=2.3=\sqrt{2^2.3^2}=\sqrt{6^2}$$

Valamelly törtszám' gyökere, egyenlő azon részessel melly, a' számláló és nevező egynevű gyökere elosztása által kerül.

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\text{''},\quad \sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2}}=\frac{2}{3}.$$

156. Ha' a' gyökérmennyiség előtt egész szám áll mint faktor, ezt *velejárónak* hívjuk.

$3\sqrt{5}$, $5\sqrt[3]{3}$, $a\sqrt[4]{b}$, $m\sqrt[n]{A}$, 's a' t.ben.

a' 3, 5, *a* és *m* velejárok.

Az illy velejárokat a' gyökérjegy alá tehetjük azáltal, ha a' gyökér mutatóját, emelési mutatójává teszszük 's véle a' gyökérjegy alatt álló számot sokszorozzuk: p. o:

$$3\sqrt{5}=\sqrt{5.3^2}\ ,,\ 5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3.5^3}\ \mathrm{a}\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{b.a^4}\ \text{és}$$

$$m\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{A.m^n}$$

Következésképen ha, a' gyökérjegy alatt lévő számot olly két faktorba vehetjük szét mellyiknek egyike tökélletes gyökér, ezt a' gyökérjegyen kívül írhatjuk benn hagyván a' másik faktort: p. o:

$$\sqrt{45}=\sqrt{5.3^2}=3\sqrt{5}\ ,,\ \sqrt[3]{375}=\sqrt[3]{3.5^3}=5\sqrt[3]{3}.$$

$$\sqrt{15}=\sqrt{\frac{36.5}{12}}=\sqrt{6^2.\frac{5}{12}}=6\sqrt{\frac{5}{12}}$$

157. A' gyökérmennyiségek öszveadatnak vagy levonatnak, ha a' $+$ és $-$ jeggyel egybeköttetnek, rendbehozván a' köztök álló egyneműeket.

1)
$$\begin{array}{r} 3\sqrt{2}+7\sqrt{5}-5\sqrt[3]{3} \\ +4\sqrt{2}-5\sqrt{5}+4\sqrt[3]{3} \\ \hline =7\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\ \sqrt[3]{3} \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} (5\sqrt{3}+7\sqrt[3]{16}-4\sqrt{3}.\sqrt[3]{32}) \\ -(2\sqrt{12}-3\sqrt[3]{2}-6\sqrt{48}\sqrt[3]{4}\ ) \end{array}$$

A' gyökérmennyiségeknek itt más irásmodját találjuk, 's nem ritkán lehet kis figyelemmel is egyszerűbb kifejezésekre vagy hasonlatosságokra akadni p. o: itt

$$\begin{array}{lrl} \text{a' kisebbitendő} & = & 5\sqrt{3}+14\sqrt[3]{2}-\ 8\sqrt{3}.\sqrt[3]{4} \\ \text{a' levonandó} & = & -4\sqrt{3}+\ 3\sqrt[3]{2}+24\sqrt{3}.\sqrt[3]{4} \\ \hline \text{'s a' különbség} & = & \sqrt{3}+17\sqrt[3]{2}+16\sqrt{3}.\sqrt[3]{4} \end{array}$$

158. A' sokszorozás megkívánja hogy a' sokszorozandó gyökérmennyiségek egynevűek legyenek, 's ekkor a' gyökérjegy alatt álló számok sokszoroztatnak egymással.

$$\sqrt{2}.\sqrt{4}=\sqrt{2.4}=\sqrt{8}$$

$$\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2.4}=\sqrt[3]{8}=2$$

$$\sqrt[5]{32}.\sqrt[5]{70}=\sqrt[5]{32.70}=\sqrt[5]{2240}$$

közönségesen

$$\sqrt[m]{A}.\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{AB}$$

és $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}.\sqrt[n]{e}\ldots=\sqrt[n]{a.b.c.d.e\ldots}$'s a' t.

159. Ha a' gyökérmennyiségeknek velejárójok van, ezek is sokszoroztatnak egymással: p. o:

$$3\sqrt{2}.5\sqrt{18}=3.5\sqrt{2.18}=15\sqrt{36}=15\sqrt{6^2}=15.6=90$$

$$4\sqrt[3]{12}.3\sqrt[3]{2}=4.3\sqrt[3]{12.2}=12\sqrt[3]{24}=12\sqrt[3]{8.3}$$

$$=12\sqrt[3]{2^3.3}=24\sqrt[3]{3}$$

$$5\sqrt[3]{6}.4\sqrt{9}=5\sqrt[6]{6^3}.4\sqrt[6]{9^2}=20\sqrt[6]{6^3.9^2}=20\sqrt[6]{(2.3)^3.(3^2)^2}$$

$$=20\sqrt[6]{2^3.3^3.3^4}=20\sqrt[6]{2^3.3^7}=60\sqrt[6]{2^3.3}=60\sqrt[6]{24}$$

Ha a' faktorok több tagúak, vagy többen vannak kettőnél a' mívelet nem változik

$$(6+5\sqrt{2}).6\sqrt{6}=6.6\sqrt{6}+5.6\sqrt{2.6}=36\sqrt{6}+30\sqrt{2.6}$$

$$=36\sqrt{6}+30\sqrt{2^2.3}=36\sqrt{6}+60\sqrt{3}=12(3\sqrt{6}+5\sqrt{3})$$

160. A' gyökérmennyiségek elosztatnak egymás által, ha a' gyökérjegy alatt lévő számok osztatnak egymás által, szükséges hogy egynevűek legyenek a' faktorok.

$$\sqrt[5]{2240} : \sqrt[5]{70} = \frac{\sqrt[5]{2240}}{\sqrt[5]{70}} = \sqrt[5]{\frac{2240}{70}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

közönségesen

$$\sqrt[m]{A} : \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}} \qquad (155)$$

161. Valamelly gyökér mennyiség, emelésre vitetik, ha a' gyökérjegy alatt lévő szám emeltetik; a' gyökér mutató változatlan marad.

$$(\sqrt{3})^2 = \sqrt{3^2} = 3 \text{ ,, } (\sqrt[3]{4})^3 = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

Ha tehát valamelly gyökér mennyiség azon emelésre vitetik melly szám a' gyökér-mutató, a' gyökérjegy alatti szám íratik le a' jegyek elhagyásával.

$$\left(\sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right)^2 = \sqrt[5]{\frac{2^2}{3^2}} = \sqrt[5]{\frac{4}{9}}$$

162. A' gyökér nem változik, ha a' gyökér' és az alatta lévő szám' emelési mutatója ugyan azon mennyiséggel sokszoroztatnak vagy elosztatnak.

$$\sqrt{3} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt[16]{3^8}.$$

$$\sqrt[4]{2^4} = \sqrt{2^2} = 2.$$

Változtathatjuk tehát a' gyökér mutatókat, ha a' szükség kívánja. Olly esetekben p. o: holl többféle gyökérmutató jön elő valamelly míveletnél, ezeket egy nevűekre lehet változtatni.

$\sqrt{3} . \sqrt[4]{4}$ nem lévén egynevűek a' sokszorozás nem eszközölhető, de $\sqrt{3} = \sqrt[4]{3^2}$'s így

$$\sqrt{3} . \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{3^2} . \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{(3.2)^2} = \sqrt{3.2} = \sqrt{6}$$

163. **Valamelly gyökérmennyiségnek gyökerét venni, lehet akkor ha mutatójának faktorai vannak: p. o:**

$$\sqrt[3]{(\sqrt{64})} = \sqrt[3]{\sqrt{64}}$$

annyi mint 64 második vagy négyszeg gyökerének ismét harmadik gyökerét venni, 's így 2.3=6 a' gyökér mutató 's a' szám $= \sqrt[6]{64}. = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Ha a' gyökérmutató faktorokból áll, a' gyökeret egymást követőleg lehet ezen faktorokkal venni. Ha p. o: valamely számnak 8dik gyökere kívántatna, először második $^8/_2$, azután ismét második $^4/_2$'s végre harmadszor is második gyökerét lehet venni, mi a' számításnál nagy könnyűséget nyujt.

$$8 = 2^3 = 2.2.2. \text{ és } \sqrt[8]{5^8} = \sqrt[4]{5^4} = \sqrt{5^2} = 5.$$

164. A' gyökér keresés tiszta értelmére nézve, szükséges lesz azt tekintenünk figyelemmel hogy;

1) miként támadnak az emelések és
2) melly alkotó részekből állanak.

Az aríthmetikának ritkán van szüksége nagyobb emelésre a' harmadiknál, és még ritkábban keres a' második és a' harmadik gyökérnél fellyebb valót. Mi is itt különösen a' második és harmadik emelésekre, második és harmadik gyökerekre szoritjuk visgálatainkat.

Tudjuk hogy akármelly számnak második emelését megleljük, ha a' számot maga magával sokszorozzuk, akárhány jegyből álljon a' szám, és hogy $A^2 = A.A$.

De mivel a' négyszegnek alkotó részeit akarjuk megismerni szükséges hogy a' míveletet más alakba írjuk p.o:

$$12^2 = 12.12 = 144.$$

tudjuk azonban hogy a' származat 144 külön származatok' öszvese, 's épen ezen külön származatokat akarjuk itt közelébről tekinteni. Erre nézve irjuk a' 12őt két rendje egyes tagjaiba, 's lesz $12=10+2$

és $12^2=(10+2).(10+2)$

a' sokszorozást, most a' két taggal szintugy végezhetjük mint közönségesen szoktuk p: o: 12őt 12vel sokszorozni.

Hogy a' két mívelet csakugyan egy valamint a' származat is, következő két írásmód bizonyitja.

$$12.12=100+20+20+4=144 \text{ vagy}$$

$$\begin{array}{l} 12.12=120 \quad =12^2 \\ \quad\quad\quad\; +\ 24 \\ \hline \quad\quad\quad\; =144 \end{array}$$

's így $(10+2).(10+2)=100+20+20+4$
$=10^2+2.20+2^2=144.=(10+2)^2=12^2$

12^2 eszerint három különböző tagból áll, melly 3tag 144nek alkotó része, ez

1) A' legfőbb számjegy (itt 10) második emelése $=10^2$
2) A' két tagközti dupla származat $=2.20\ldots=2.2.10$
3) és a' második jegynek négyszege.........$=2^2$.

Ezen három tag minden kétjegyű számnak alkotó része és közönségesen

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Ha tehát valamely kétjegyű szám adatik a' második emelésre, ezt könnyen meg leljük, ha *mindegyik jegynek külön veszszük négyszegét, és származatának dupláját, 's a' három tagot öszve adjuk.*

Ha az adott szám több mint kétjegyből áll, mindenkor úgy írathatik mint két tagú, következésképszintugy vitethetik a' második emelésre mint akármelly kétjegyű szám:

p. o: $345^2 = 345.345. = (340+5)^2$
vagy ha alkalmasabbnak látszik $= (300+45)$ hol a' 3as mint egyes jegy tekintődhetik,

az első esetben $(340+5)^2 = 340^2 + 2.5.340 + 5^2$
a' másikban $(300+45)^2 = 300^2 + 300.45.2 + 45^2$
$= 90000 + 27000 + 2025 = 119025.$

Valamint hogy a' négyszeg nem változik, akármelly részekbe osztjuk az adott számot 's egyes részeit emeljük ugy a' számitó mindenkor találhat könnyebségeket az elrendelésben.

$$345^2 = 345.345 = (300+45)^2 = (340+5)^2$$
$$= (300+40+5)^2$$

Ha a' számot faktoraiba választhatjuk (ha illyen faktorai vannak?) az egyes faktorok' emelései származatja a' keresett emelés.

$$345 = 3.5.23 \text{ és } 345^2 = 3^2.5^2.23^2.$$

Nézzük melly tagokat ád $300+40+5$ ha magamagával sokszoroztatik?

$$\begin{array}{rl} & (300+40+5).(300+40+5) \\ & 345.300 = 90000 + 12000 + 1500 \\ & 345.\ 40 = \quad + 12000 + 1600 + 200 \\ & 345.\ \ 5 = \quad + 1500 + 200 + 25 \\ \hline \text{öszvese} & = 90000 + 24000 + 4600 + 400 + 25 \\ & = 119025. \end{array}$$

Ha ezen egyes és külön származati tagokat közelebbről tekintjük és rendesen írjuk: lesz

$$345^2 = 90000 + 2.12000 + 1600 + 2.1500 + 2.200 + 25$$
$$= 300^2 + 2.300.40 + 40^2 + 2.300.5 + 2.40.5 + 5^2$$
$$= 300^2 + 2.300.40 + 40^2 + 2.340.5 + 5^2$$

és az 5 tag következendő.

1) 300^2, négyszege az első és legfőbb jegynek a' 3nak.

2) 2.300.40. dupla származata az első és második jegynek,

3) 40^2, négyszege a' második jegynek,

4) 2.340.5 dupla származata az utolsó és mindkét előtte álló jegynek 's végre

5) 5^2 négyszege az utolsó jegynek.

Vegyünk például egy 4 jegyű számot, legyen 8749 a' második emelésre viendő?

Láttuk hogy $8749^2=(8000+749)^2=(8700+49)^2=(8740+9)^2$'s a' t. 's hogy akármelly alakban emelése nem változik, de tekintetünk szerént sokszorozzuk a' számot maga magával mint előbbeni példánkban míveltünk:

$8749 = 8000+700+40+9$

és $8749^2=(8000+700+40+9).(8000+700+40+9)$ négy taggal kell különösen a' másik négyet sokszorozni,

8)64000000+5600000+320000+72000
7) +5600000+490000+28000+6300
4) +320000+28000+1600+360
9) +72000+6300+360+81

's ezeket öszvevévén lesz 8749^2

$=64000000+2.5600000+490000+2.320000+2.72000+$
$+2.28000+1600+2.6300+2.360+81$

ezt ismét egybe vévén $=8000^2+2.8000.700+$
$+700^2+2.8700.40+40^2+2.8740.9+9^2$

1) a' legfőbb jegy' négyszege $8000^2=$ 64000000
2) ennek 's utánna következőnek dupla származatja - - - - - - - - - - 11200000
3) a' második jegynek négyszege $700^2=$ 490000
4) a' második jegy 's a' két előtte lévőnek dupla származatja - - - - - - - 696000

5) a' harmadik jegy' négyszege $40^2=$	1600
6) ennek 's az előtte álló jegyeknek dupla származatja - - - - - - - - -	157320
7) 's végre az utolsó tag' 4 szege $9^2=$ - -	81
$8749^2=$	76545001

165. Akárhány jegyből álljon tehát valamely, négyszegre emelendő szám, változatlan marad a' következő mível et.

Az első 's legfőbbrendű jegy csak tulajdon négyszegét adja, minden következő jegy két tagot ád, tulajdon négyszegét és az őt megelőző jegyek' 's magaközti dupla származatát.

A' közönséges míveletnél, a' rendekre nem ügyelünk azon tekintetben hogy az üreseket oda nem írjuk, de figyelemmel megtartván helyértékeket az egyes tagoknak, ezeket illően írjuk egymás alá.

$$
\begin{array}{rl}
8749^2=64\ldots\ldots\ldots = & 8000^2 \\
112\ldots\ldots = & (8000.700)2 \\
49\ldots\ldots = & 700^2 \\
696\ldots\ldots = & (8700.40)2 \\
16\ldots = & 40^2 \\
15732..= & (8740.9)2 \\
81.= & 9^2 \\
\hline
=76545001 &
\end{array}
$$

Ha minden következő tag' legalsóbb jegyét egy egy hellyel odébb tesszük jobbra, nem hibázhatunk.

166. A' tizedes törtek szintugy emeltetnek mint az egész számok, csakhogy *az emelés' jegyeiből két annyi vágatik el, mennyi tizedes jegye volt az adott számnak.*

Eszerént mindegyik tizedes jegyből kettő vált az emelés után:

1) $0{\cdot}34^2 = 0{\cdot}34 . 0{\cdot}34 = 0{\cdot}1156$

$$\begin{array}{r}
(0{\cdot}34)^2 = 9 \\
24 \\
\underline{\quad 16} \\
0{\cdot}1156.
\end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
(234{\cdot}06)^2 = 4 & & & & \\
1 & 2 & & & \\
 & 9 & & & \\
 & 18 & 4 & & \\
 & & 16 & 00 & \\
 & & 28 & 08 & 0 \\
 & & & & 36 \\
\hline
= 5 & 47 & 84 & 08 & 36
\end{array}$$

a' tizedesek jegye $2.2 = 4$ az egészeké lesz a' megmaradó 5 jegy.

Ha valamelly szám' négyszegét jobbról balra két két jegyet foglaló osztályokba választjuk el vonalokkal, látszik hogy az első osztályban balrul kezdve ,az adott szám' első 's legfőbb jegyének négyszege áll, és mindegyik jegynek négyszege a' következő osztályba esik, (szintannyi osztály lévén hány jegye volt az emelendő számnak), 's hogy a' négyszegeket megelőző dupla származatok, az előttök lévő osztályba is át esnek balra.

Ha tehát valamelly négyszeg emelés adatik, megtudjuk hány jegyből áll gyökere ha a' jegyeket két két jegyet foglaló osztályokba vesszük.

A' tizedesek' mindegyik jegye, kettőt adván az emelésben, a' jegyek balról osztatnak bé jobbra.

167. Valamelly számot a' harmadik emelésre vinni

$$A^3 = A.A.A \text{ és } 23^3 = 23.23.23$$

$$\text{de } A^3 = A^2. A \text{ és } 23^3 = 23^2. 23$$

tehát ha valamelly szám' négyszegét, gyökerével sokszorozzuk a' koczkát vagy harmadik emelést találjuk.

Vegyük például 23at.

$$23^2=(20+3)^2=20^2+2.(3.20)+3^2$$

ha tehát 23 négyszege' 3 tagját, gyökerével a' 23al sokszorozzuk, koczkájára jutunk és

$$(20+3)^3=(20^2+2.(3.20)+3^2).(20+3)$$
$$=(20+3).(20+3).(20+3)$$
$$=20^3+20^2.2.3+3^2.20+3.20^2+2.3^2.20+3^3$$
$$=20^3+2.(20^2.3)+3^2.20+3.20^2+2.(3^2.20)+3^3$$
$$=20^3+3.(20^2.3)+3(3^2.20)+3^3$$

minden kétjegyű szám' harmadik emelése 4 tagot ád.

1) Az első jegy koczkáját.

2) Hármas származatát az első jegy' négyszegének a' második jeggyel.

3) Hármas származatát a' második jegy' négyszegének az előtte álló jegyekkel 's végre

4) a' második jegy harmadik emelését vagy koczkáját.

Közönségesen $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Akármelly legyen a' jegyek' száma a' mívelet nem változik, és, *az első jegy tulajdon koczkáját adja,* mindegyik következő jegy három tagot ád:

a) a' négyszegét, sokszorozva az előtte álló jegy vagy jegyek hármasával.

b) hármasát sokszorozva az előtte álló jegy vagy jegyek' négyszegével, és

c) tulajdon koczkáját.

Az első jegy eszerint 1 tagot minden következő pedig három tagot ád, 's így a' tagok számát könnyű tudni előre.

P. o: 3 jegyű szám koczkája fog állani $1+2.3=7$
4 jegyű szám koczkája - - - $1+3.3=10$
5 jegyűé - - - - - - - - - $1+4.3=13$
's a' t. tagból.

P. o: $(4572)^3$ 10 tagja fog lenni.

1) 4000^3	6) $3(4500.70^2)$
2) $3.(4000^2 500)$	7) 70^3
3) $3.(4000.500^2)$	8) $3(4570^2.2)$
4) 500^3	9) $3(4570.2^2)$
5) $3(4500^2.70)$	10) 2^3

A' közönséges mívelet szerént

$$\begin{array}{rl} (4572)^3 = & 64 \\ & \;\;240 \\ & \;\;\;300 \\ & \;\;\;\;125 \\ & \;\;\;42525 \\ & \;\;\;\;\;6615 \\ & \;\;\;\;\;\;343 \\ & \;\;\;\;1253094 \\ & \;\;\;\;\;\;\;5484 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\ldots.8 \\ \hline & =95569357248 \end{array}$$

2) $(1246)^3 = (1.1000+2.100+4.10+6)^3$

$$\begin{array}{lr} = (1.1000)^3 & =1000000000 \\ + 3.(1000)^2.(2.100) & =600000000 \\ + 3\,(1000).(2.100)^2 & =120000000 \\ + (2.100)^3 & =8000000 \\ + 3(12.100)^2.(4.10) & =172800000 \\ + 3(12.100).(4.10)^2 & =5760000 \\ + (4.10)^3 & =64000 \\ + 3.(124.10)^2.6 & =27676800 \\ + 3.(124.10).6^2 & =133920 \\ + 6^3 & =216 \end{array}$$

's ha az üreseket elhagyjuk, a' rendek helyére figyelmezvén lesz: $(1+2+4+6)^3$ hol az egy ezrest, a' kettő százat, a' 4 tizet és a' 6 egyest jelentnek.

$= 1^3$	$=1$			
$+ 3.(1^2.2)$		6		
$+ 3.(1.2^2)$		12		
$+ 2^3$		8		
$+ 3.(12^2.4)$		172	8	
$+ 3.(12.4^2)$		5	76	
$+ 4^3$			64	
$+ 3.(124^2.6)$		27	676	8
$+ 3.(124.6^2)$			133	92
$+ 6^3$				216
	$=1$	934	434	936

Valamelly szám' koczkáját 3 3 jegyet foglaló osztályokba vévén látjuk, hogy az elsőben balrul a' legfőbb jegy' koczkája áll, 's igy a' következő osztályokban, sorban a' többi jegyé. A' második osztályban balrul, áll a' második jegy 3as származata négyszegével, és az előtte álló jegy vagy jegyek négyszegével 's így továb.

A' tizedesek szintugy emeltetnek koczkára mint az egész számok.

A' tizedesek' mindegyik jegye, három jegyet ád koczka emelésén, és balról jobbra osztatik bé.

Mind ezen tekintetek és észrevételek, a' gyökérvevés' míveletét fogják világositani.

168. Az első kilencz szám' négyszegei csak 1, 4, 5, 6 és 9 által végződhetvén, semmi szám nem lehet négyszeg melly 2, 3, 7 vagy 8al végződik.

A' páros számok' négyszege osztható 4 által.

A' páratlan számok négyszege nem osztható 2 által.

Tehát semmi párosszám nem lehet négyszeg ha 4 által nem osztható.

Ha valamelly szám, mellynek üresei vannak jobb végén, négy szegre emeltetik, az emelésben két annyi üres jön elé mint volt a' gyökér után. Semmi szám nem lehet tehát négyszeg, ha utánnn az üresek' száma páratlan.

Ha valamelly szám' utolsó jegye 5, ennek négyszegében a' két utolsó jegy szükségesképen 25. Ha tehát valamelly szám' utolsó jegye 5 az 5 előtt álló pedig nem 2, az illyen szám nem lehet négyszeg.

Minden páros számnak 8al kell oszthatónak lennie, hogy koczka legyen.

Üresekkel végződő számok csak akkor lehetnek koczkák, ha az üresek száma 3 vagy 3nak sokasa.

II. TÁBLA.

A' TIZ ELSŐ SZÁM' 10 ELSŐ EMELÉSE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729	2197	6591	19773	59319
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	36	216	1296	7776	44656	279936	1679616	10077696	60466176
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	64	512	4098	32784	262272	2098176	16785408	134283264	1074266112
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

III. T Á B L A.

NÉHÁNY SZÁMOK' NÉGYSZEG ÉS KOCZKA EMELÉSEI.

1-től—120-ig.

Szám	Négyszeg	Koczka	Szám	Négyszeg	Koczka	Szám	Négyszeg	Koczka
1	1	1	41	1681	68921	81	6561	531441
2	4	8	42	1764	74088	82	6724	551368
3	9	27	43	1849	79507	83	6889	571787
4	16	64	44	1936	85184	84	7056	592704
5	25	125	45	2025	91125	85	7225	614125
6	36	216	46	2116	97336	86	7396	636056
7	49	343	47	2209	103823	87	7569	658503
8	64	512	48	2304	110592	88	7744	681472
9	81	729	49	2401	117649	89	7921	704969
10	100	1000	50	2500	125000	90	8100	729000
11	121	1331	51	2601	132651	91	8281	753571
12	144	1728	52	2704	140608	92	8464	778688
13	169	2197	53	2809	148877	93	8649	804357
14	196	2744	54	2916	157464	94	8836	830584
15	225	3375	55	3025	166375	95	9025	857375
16	256	4096	56	3136	175616	96	9216	884736
17	289	4913	57	3249	185193	97	9409	912673
18	324	5832	58	3364	195112	98	9604	941192
19	361	6859	59	3481	205379	99	9801	970299
20	400	8000	60	3600	216000	100	10000	1000000
21	441	9261	61	3721	226981	101	10201	1030301
22	484	10648	62	3844	238328	102	10404	1061208
23	529	12167	63	3969	250047	103	10609	1092727
24	576	13824	64	4096	262144	104	10816	1124864
25	625	15625	65	4225	274625	105	11025	1157625
26	676	17576	66	4356	287496	106	11236	1191016
27	729	19683	67	4489	300763	107	11449	1225043
28	784	21952	68	4624	314432	108	11664	1259712
29	841	24389	69	4761	328509	109	11881	1295029
30	900	27000	70	4900	343000	110	12100	1331000
31	961	29791	71	5041	357911	111	12321	1367631
32	1024	32768	72	5184	373248	112	12544	1404928
33	1089	35937	73	5329	389017	113	12769	1442897
34	1156	39304	74	5476	405224	114	12996	1481544
35	1225	42875	75	5625	421875	115	13225	1520875
36	1296	46656	76	5776	438976	116	13456	1560896
37	1369	50653	77	5929	456533	117	13689	1601613
38	1444	54872	78	6084	474552	118	13924	1643032
39	1521	59319	79	6241	493039	119	14161	1685159
40	1600	64000	80	6400	512000	120	14400	1728000

III. TÁBLA.

NÉHÁNY SZÁMOK' NÉGYSZEG ÉS KOCZKA EMELÉSEI.

121-től—240-ig.

Szám	Negyszeg	Koczka	Szám	Négyszeg	Koczka	Szám	Négyszeg	Koczka
121	14641	1771561	161	25921	4173281	201	40401	8120601
122	14884	1815848	162	26244	4251528	202	40804	8242408
123	15129	1860867	163	26569	4330747	203	41209	8365427
124	15376	1906624	164	26896	4410944	204	41616	8489664
125	15625	1953125	165	27225	4492125	205	42025	8615125
126	15876	2000376	166	27556	4574296	206	42436	8741816
127	16129	2048383	167	27889	4657463	207	42849	8869743
128	16384	2097152	168	28224	4741632	208	43264	8998912
129	16641	2146689	169	28561	4826809	209	43681	9129329
130	16900	2197000	170	28900	4913000	210	44100	9261000
131	17161	2248091	171	29241	5000211	211	44521	9393931
132	17424	2299968	172	29584	5088448	212	44944	9528128
133	17689	2352637	173	29929	5177717	213	45369	9663597
134	17956	2406104	174	30276	5268024	214	45796	9800344
135	18225	2460375	175	30625	5359375	215	46225	9938375
136	18496	2515456	176	30976	5451776	216	46656	10077696
137	18769	2571353	177	31329	5545233	217	47089	10218313
138	19044	2628072	178	31684	5639752	218	47524	10360232
139	19321	2685619	179	32041	5735339	219	47961	10503459
140	19600	2744000	180	32400	5832000	220	48400	10648000
141	19881	2803221	181	32761	5929741	221	48841	10793861
142	20164	2863288	182	33124	6028565	222	49284	10941048
143	20449	2924207	183	33489	6128487	223	49729	11089567
144	20736	2985984	184	33856	6229504	224	50176	11239424
145	21025	3048625	185	34225	6331625	225	50625	11390625
146	21316	3112136	186	34596	6434856	226	51076	11543176
147	21609	3176523	187	34969	6539203	227	51529	11697083
148	21904	3241792	188	35344	6644672	228	51984	11852352
149	22201	3307949	189	35721	6751269	229	52441	12008989
150	22500	3375000	190	36100	6859000	230	52900	12167000
151	22801	3442951	191	36481	6967871	231	53361	12326391
152	23104	3511808	192	36864	7077888	232	53824	12487168
153	23409	3581577	193	37249	7189057	233	54289	12649337
154	23716	3652264	194	37636	7301384	234	54756	12812904
155	24025	3723875	195	38025	7414875	235	55225	12977875
156	24336	3796416	196	38416	7529536	236	55696	13144256
157	24649	3869893	197	38809	7645373	237	56169	13312053
158	24964	3944312	198	39204	7762392	238	56644	13481272
159	25281	4019679	199	39601	7880599	239	57121	13651919
160	25600	4096000	200	40000	8000000	240	57600	13824000

169. Valamelly szám' négyszeg gyökerét venni.

Esmervén a' négyszegek' alkotó reszeit, az adott számot osztályokba vévén előre tudjuk hány jegyből áll a' gyökér.

A' mívelet következőkép foly.

1) A' gyökér' legfőbb jegye az első osztályban lévén, ebben kerestetik. Ha az osztály száma nem tökéletes négyszeg, a következő kisebbszám vétetik a' gyökér első 's legfőbb jegyének.

2) A' talált gyökeret ismét négyszegre vivén, levonjuk az első osztály' jegyeiből.

3) Ha a' különbséghez a' második osztály elsőjegye lehozatik, ezekben kell lennie a' két első gyökérjegy dupla származatának. Ezen lent lévő számban tehát, a' már meglelt első gyökérjegy' kettesével kell a' részest keresni; 's ezen részes lesz a' gyökér' második főjegye.

4) Ekkor hozatik le a' második osztálynak fenn maradott második jegye; 's a' lent lévő jegyekből vonatik le a' két megtalált gyökérjegy' dupla származata és a' második jegy' négyszege. Ha a' számban nincs több jegy és gyökere csak kétjegyű, a' míveletnek vége.

5) Ha a' gyökér kettőnél több jegyből áll, a' következő osztály lehozatik a' maradványhoz — ha illyen van — 's ezekben kerestetik a' megtalált gyökérjegyek' kettőse: így folytatván a' míveletet bár melly legyen az osztályok' vagy gyökérjegyek' száma.

6) Ha némelly osztályban nincs egyéb üresnél, minden két üresért, egy üres tétetik a' gyökér jegyekhez.

7) Ha a' gyökérjegyek' származata és a' négyszeg' öszvese, nagyobb mint az adott vagy lentlévő szám, jele hogy a' részes nagyra vétetett és hogy kisebbet kell keresni.

1*Példa.)* $\sqrt{1369} = \sqrt{13|69} = 37$.

A' 13ban lévő legnagyobb gyökér csak 3 lehet mert $4.4 = 16 > 13$: a' gyökér' első jegye tehát $= 3$.

A' 3 ismét négyszegére emeltetvén a' 13ból levonatik

$$13 - 3^2 = 13 - 9 = 4.$$

A' megmaradt 4hez lehozzuk a' 6ot 's a' 46ban keressük a' talált jegy kettesét $2.3 = 6$ot, 's meglel-jük 7szer 's a' hetet mint a' gyökér második jegyét felirjuk.

Lehozván most, a' második osztályban maradt 9et, lesz alól 469, 's ebből levonandó a' négyszeg' két alkotó része, a' 3 és 7 dupla származata, és a' 7nek négyszege 's lesz

$$2.(30.7) + 7^2 = 420 + 49 = 469:$$

és minthogy $469 - 469 = 0$ a' míveletnek vége 's a' tökélletes gyökér megtaláltatott.

2P.) $\sqrt{31690000} = \sqrt{31\,69|00|00} = 3700$

a' harmadik ozstályban valamint a' negyedikben is két két üres lévén, helyettük egy egy üres jött a' gyökérhez.

3P.) $\sqrt{12|11|04} = 348.$

$$\begin{array}{rl}
-9 & \\
\hline
31 & : 6 \\
-24 & \ldots\ldots = 2.(3.4) \\
-\ 16 & \ldots\ldots = 4^2 \\
\hline
550 & : 68 \\
-544 & \ldots\ldots = 2(34.8) \\
-\ 64 & \ldots\ldots = 8^2 \\
\hline
\ldots\ldots &
\end{array}$$

itt a' dupla származatok és négyszegek egyszersmind vonattak le.

4P.) $\sqrt{1|75|72|\cdot 15|36} = 132\cdot 56$

$,, ,, 75 : 2_3$

$6,72 : 26_2$

$148,\cdot 15 : 264_5$

$1590,36 : 2650_6$

Ezen példában a' gyökérvevés' mívelete legnyilványosb.

1) Az egyes négyszege = 1 odaíratott.

2) A' kétszer 1=2vel osztatott 7, találtatván 3-szor a' hármat a' gyökérhez írván kis jeggyel egyszersmind a' kettöshöz is alul odatétetett 's lett 23, ezen 23 sokszorosztatott 3al mert így mind a' kettős származatát (a 2tős itt 200) a' hárommal mind magát a' 3 négyszegét egyszerre meg találjuk.

3) Kerestetett 26 a' 67ben, meglelvén a' kettőt, 262 sokszoroztatván 2 által, származata a' 672ből levonatott 's így végig.

Ha valamelly szám után tizedesek is vannak; vagy ha valamelly számot a' tizedes pontal elválasztunk, a' gyökér' jegyei nem változnak ha a' pont két két jeggyel megy eléb vagy hátrább: és ha

$\sqrt{17572\cdot 1536} = 132\cdot 56$ 4P.)

$\sqrt{1757215\cdot 36} = 1325\cdot 6$

$\sqrt{175721536} = 13256$

$\sqrt{175\cdot 721536} = 13\cdot 256$

$\sqrt{1\cdot 75721536} = 1\cdot 3256$

$\sqrt{\cdot 0175721536} = 0\cdot 13256.$

De egészen más jegyek jőnek elő a' gyökérben ha a' pont páratlan helylyel megy előre vagy hátra; és

$\sqrt{1757\cdot 2153}$ p. o: $= 41\cdot 919\ldots\ldots$

mert 1757nek gyökere nem tökéletes és a' 41 egész után végtelen törtszám következik.

170. Ha az adott szám nem tökéletes négyszeg, gyökere nem egész szám, de végnélküli törttel van illetve p. o:

$\sqrt{10}=3\cdot1622776$ ....'s a' t.

$1,_{00}$
$39,_{00}$
$144,_{00}$
$1756,_{00}$
$49116,_{00}$
$484471,_{00}$
$4175271,_{00}$'s a' t.

Az illy példákban mindenkor párosan vitetik le az üres, mintha a' mivelet előtt a' 10 után bizontalan számú üreseket ragasztottunk volna. A' mivelet addig fojtattatik, meddig a' kérdés kívánja.

171. Ha valamelly szám' gyökere két egymást követő számközt áll, soha sem lehet kifejezése tökélletes, de mindenkor csak közelítő, és végtelen.

172. Ha valamelly közönséges törtszám p. o: $^5/_7$ gyökere keresendő, legalkalmasb azt tizedes törtre változtatni, 's ebből venni a' kívánt gyökeret.

173. *A' koczka gyökér*, következőkép vétetik.

Ha az adott szám nem áll két vagy 3jegynél többől, koczka gyökere isméretes.

Ha jegyei száma nagyobb 3nál de kisebb 7nél:

1) három három jegyet foglaló osztályba vétetik, 's az első osztályban balról, kerestetik az első gyökérjegy;

2) a' talált gyökér' *koczkája* az osztály jegyeiből levonatik;

3) a' maradvánhoz le tévén a' következő osztályt, elvágatik jobbra kétjegy 's a' többiben kerestetik a' gyökérjegy' *hármas négyszege*, a' részes, második jegye a' gyökérnek;

4) végre a' három tagot kell keresni, mellyet a' második jegy ád, öszvesek a' lent lévő jegyekből levonatik.

1P.) $\sqrt[3]{262|144} = 64$

$216 = 6^3$

$461,44$ osztó $= 3.6^2 = 108$

$$\begin{array}{rl} 3.6^2.4 & = 432 \\ +3.6\ .4^2 & = 288 \\ + \quad 4^3 & = \ \ 64. \\ \hline & \ \ ..... \end{array}$$

174. Bár hány jegyből áljon a' gyökér, a' harmadik és következők megtaláltatnak, lehozván egy új osztályt, ebben kerestetik a' következő jegy az elötte már meglett gyökérjegyeket egyes tagnak vagy jegynek vévén 3mas négyszegökkel: a' koczkát képzelő 3 tag' öszvese ezután, az alatt lévő jegyekből levonatik: 's így végig.

Ha a' tagok öszvese nagyobb találna lenni az osztandónál, jele hogy a' részes nagyra vétetett és kisebbet kell keresni.

Ha valamelly osztandóban, az osztó (3as négyszege a' meglelt gyökér jegyeknek) nem találtatna meg, gyökér jegyeihez *üreset* kell tenni, a' következő osztályt lehozni 's így folytatni a' míveletet.

2P.) $\sqrt[3]{99|252|847} = 463$

$4^3 = \ 64$

marad $352,52$ osztó $3.4^2 = 48$, kerestetik 352ben

$$\begin{array}{ll} 3.4^2.6 = 288 & \\ 3.4\;.6^2 = +432 & \Big\} \text{ levonandó} \\ 6^3 = +\;216 & \\ \hline \end{array}$$

marad 19168,47 osztó $3.46^2 =$
$= 6348$, 19168ban

$$\begin{array}{ll} 3.46^2.\;3 = 19044 & \\ 3.46\;.3^2 = +1242 & \Big\} \text{ levonandó} \\ 3^3 = +\quad 27 & \\ \hline \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

3P.) $\sqrt[3]{13|945|313|143} = 2407$

$$\begin{array}{l} 2^3 = \;-8 \\ \hline 5945 : 3.2^2 = 12 \\ 3.2^2.4 = \;48 \\ 3.2\;.4^2 = +96 \\ 4^3 = +\;64 \\ \hline 121313 : 3.24^2 = 1728 \text{ nem találtatik} \\ \hline 3.240^2.7 = 121313143 : 3.240^2 = 172800 \\ 3.240.7^2 = 1209600 \\ \quad +35280 \\ 7^3 = +\quad 343 \\ \hline \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

175. Ha az adott számnak tizedesei vannak, a' mívelet nem változik. A' tizedek mint említénk balról jóbbra vágatnak három három jegyet foglaló osztályokba.

4P.) $\sqrt[3]{12|821\cdot|119|155|125} = 23\cdot405$

$$\begin{array}{lll} -\,8 & & \\ \hline 4821 : 12 & & 12 = 3.2^2 \\ 36 & = 3.2^2.3 & \\ 54 & = 3.2\;.3^2 & \\ 27 & = 3^3 & \\ \hline 654119 : & 3.23^2 & = 1587 \end{array}$$

$$
-\begin{cases} 6348 = 3.23^2.4 \\ 1104 = 3.23\,.4^2 \\ 64 = 4^3 \end{cases}
$$

$8215155 : 3.234^2 = 164268 \quad (0)$

$8215155125 : 3.2340^2 = 16426800$

$$
-\begin{cases} 82134000 = 3.2340^2.5 \\ 175500 = 3.2340\,.5^2 \\ 125 = 5^3 \end{cases}
$$

. . . .

176. Ha valamelly szám nem tökélletes koczka, az az, nem mérhető, a' mívelet nem változik 's az utolsó maradványhoz három három üresből álló osztályok hozatnak le.

Hány jegy kerestessen a' gyökérben, azt a' kérdés természete határozza.

Ha a' tizedesek jegyei nem adnak három jegyet az osztályba, üreseket teszünk hejükbe.

5P.) $\sqrt[3]{13} = 2{\cdot}351$ . . . . 's a' t.

$-\ 8$

$5000 : 12$

$$
-\begin{cases} 36 \\ 54 \\ 27 \end{cases}
$$

$833000 : 1587$

$$
-\begin{cases} 7935 \\ 1725 \\ 125 \end{cases}
$$

$22125000 : 165675$'s így tovább.

6P.) $\sqrt[3]{83|745} = 43{\cdot}7508$ . . . . . 's a' t.

$-64 \quad (4$

$197.45 : 48 \quad (3$

$$-\left\{\begin{array}{r}144\\108\\27\end{array}\right.$$

4238000 : 5547 (7

$$-\left\{\begin{array}{r}38829\\6321\\343\end{array}\right.$$

291547000 : 572907 (5

$$-\left\{\begin{array}{r}2864535\\32775\\125\end{array}\right.$$

4765625000 : 57421875 (0

4765625000000 : 5742187500 (8 's a' t.

7P.) $\sqrt[3]{29\cdot|806|4} = \sqrt[3]{29\cdot|806|400} = 3\cdot10053\ldots$

8P.) $\sqrt[3]{725123750650140808} = 898402$

9P.) $\sqrt[3]{0\cdot000000049} = 0\cdot007$

10P.) $\sqrt[3]{{}^{3}/_{748}} = 0\cdot15888146 \ldots\ldots$

IV. TABLA.

A' TERMÉSZETES SZÁMOK' NÉGYSZEG ÉS KOCZKA GYÖKEREI.

1-től—50-ig.

Szám	$\sqrt{\ }$	$\sqrt[3]{\ }$	Szám	$\sqrt{\ }$	$\sqrt[3]{\ }$
1	1·0000000	1·0000000	26	5·0990195	2·9624960
2	1·4142136	1·2599210	27	5·1961524	3·0000000
3	1·6320508	1·4422496	28	5·2195026	3·0365889
4	2·0000000	1·5874011	29	5·3851648	3·0723168
5	2·2360680	1·7099759	30	5·4772256	3·1072325
6	2·4494897	1·8171206	31	5·5677644	3·1413806
7	2·6457513	1·9129312	32	5·6568543	3·1748021
8	2·8284271	2·0000000	33	5·7445626	3·2075343
9	3·0000000	2·0800337	34	5·8309519	3.2396118
10	3·1622777	2·1544347	35	5·9160798	3·2710663
11	3·3166248	2·2239801	36	6·0000000	3·3019272
12	3·4141016	2·2894286	37	6·0827625	3·3322218
13	3·6055513	2·3513347	38	6·1644140	3·3619754
14	3·7416574	2·4101422	39	6·2449980	3·3912114
15	3·8729833	2·4662121	40	6·3245553	3·4199519
16	4·0000000	2·5198421	41	6·4031242	3·4482172
17	4·1231056	2·5712816	42	6·4807407	3·4760266
18	4·2426407	2·6207414	43	6·5574385	3·5033981
19	4·3588989	2·6684016	44	6·6332496	3·5303483
20	4·4721359	2·7144177	45	6·7082039	3·5568933
21	4·5825757	2·7589243	46	6 7823300	3·5830479
22	4·6904158	2·8020394	47	6·8556547	3·6088261
23	4·7958315	2·8438670	48	6·9282032	3·6342411
24	4·8989795	2·8844991	49	7·0000000	3·6593057
25	5·0000000	2·9240177	50	7·0710678	3·6840314

IV. TÁBLA.

A' TERMÉSZETES SZÁMOK' NÉGYSZEG ÉS KOCZKA GYÖKEREI.

51-től—100-ig.

Szám	$\sqrt{}$	$\sqrt[3]{}$	Szám	$\sqrt{}$	$\sqrt[3]{}$
51	7·1414284	3·7084298	76	8·7177978	4·2358236
52	7·2111026	3·7325111	77	8·7749644	4·2543210
53	7·2801099	3·7562858	78	8·8317609	4·2726586
54	7·3484692	3·7797631	79	8·8881944	4·2908404
55	7·4161985	3·8029525	80	8·9442719	4·3088695
56	7·4833148	3·8258624	81	9·0000000	4·3267487
57	7·5498344	3·8485011	82	9·0553851	4·3444815
58	7·6157731	3·8708766	83	9·1104336	4·3620707
59	7·6811458	3·8929065	84	9·1651514	4·3795191
60	7·7459667	3·9148676	85	9·2195445	4·3968296
61	7·8102497	3·9364972	86	9·2736185	4·4140049
62	7·8740078	3·9578915	87	9·3273791	4·4310476
63	7·9372539	3·9790571	88	9·3808315	4·4479602
64	8·0000000	4·0000000	89	9·4339811	4·4647451
65	8·0622577	4·0207256	90	9·4868330	4·4814047
66	8·1240384	4·0412401	91	9·5393919	4·4979414
67	8·1853527	4·0615480	92	9·5916630	4·5143574
68	8·2462112	4·0816551	93	9·6436507	4·5306549
69	8·3066239	4·1015661	94	9·6953597	4·5468359
70	8·3666003	4·1212853	95	9·7467943	4·5629026
71	8·4261497	4·1408178	96	9·7979589	4·5788570
72	8·4852814	4·1601676	97	9·8488577	4·5947009
73	8·5440037	4·1793390	98	9·8994949	4·6104363
74	8·6023253	4·1983364	99	9·9498744	4·6260650
75	8·6602540	4·2171633	100	10·0000000	4·6415888

VII. SZAKASZ.

1 §. A' megnevezett számokról, a' mérők', mértékek' 's a' pénz' nemeiről.

177. Valamelly *bizonyos nemű* mennyiség, *megnevezett szám*. Ezek egészek vagy részek, egész számok vagy törttek lehetnek.

Mindezen megnevezett számok a' többféle polgári mérők' mértékek' és pénz nemekre alkalmaztatnak 's következéskép azoknak ismeretét kívánják.

Ha valamelly nagyságot vagy mennyiséget akarunk mérni, ugyan azon nemű egységgel kell őt öszvehasonlítnunk. Ezen egységek noha minden pontján földünknek szükségeskép megvannak, igen különbözők a' különböző országokban.

Minekelőtte tehát velük számítanánk, meg kell őket ismérnünk.

A) A' Hosszmérőkről.

178. Hazánkban; valamint számos országokban a' hosszmérő' egysége a' *láb*; több részekre osztva alsóbb, többszeresen véve felsőbb mérőket ád. Igy lesznek osztályi a' hüvely, vonal, pont; többesei a' rőf az öl és a' mértföld.

Mint származának a' hossz és egyébb mérők, bizonyosan' meg nem lehet mondani; hihető, hogy önkényes választás 's későbbi szokás szentelte haszonvéteket. Legkisebb becsületére sem válik az emberi észnek, vagy inkáb az ember' társasági szellemének a' mérők' különbözősége, de nem kis akadálya az egyetértésnek, a' közelítésnek.

Valamenyi mérő 's mértéki alapok közt, csak az új franczia érdemel — mint észszerinti 's természetes — figyelmet, 's azért ehez fogjuk hasonlítni minden más hossz, valamint egyéb mérőket is.

A' franczia hosszmérő' egysége a' *Métre*. Megméretvén földünk' délvonalának hossza, a' földtengely és az egyenlítő közt, ez 5130740 Toise (régi franczia mérő) vogy 30784440 régi párisi lábnyi hosszúnak találtatott; ezen hossz tízmilliomod' része, a' mostani Métre, egyenlő tehát 0·5130740 Toise-zal, vagy 3,0784440 régi lábbal.

A' métre' tizes sokasait és tizedes részeit eleibe tett görög syllabák jelölik 's ezek: a' myria, kilo, hecto, deca, deci, centi és milli; így:

a' myriametre	=	10000	métre	
kilometre	=	1000	„	
hectometre	=	100	„	
decametre	=	10	„	
decimetre	=	0·1	„	
centimetre	=	0·01	„	's végre a'
millimetre	=	0·001	„	

Látni melly könnyűséggel lehet ezen rendszerrel számítani, a' természetes számok' tizes és tizedesével egyenlő lévén: 's valóban 3·7562 métre anyi mint 3 métre 7 Decimetre 5 centimetre és 62 millimetre.

Hazánkban a' bécsi láb hosszmérőnk' egysége, ez = 0·3161 métre 's eloszlik 12 hüvelyre, mindegyik hüvely 12 vonalra 's minden vonal 12 pontra. Hat láb = egy öl, egy osztra mértföld 4000 öl 's a' délvonal' egy fokára illy mértföldből 14·646 jut.

A' következendő (V) tábla a' legnevezétesb hosszmérők egységét adja különbféle helyeken, Métre-re és bécsi lábra víve.

Ezen tábla után akármely mérővel könnyű számítani, ha értékét vagy métreben, vagy bécsi lábban vesszük.

179. A' bécsi lábot és részeit tizedes számokban adni ?

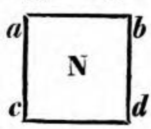
Legyen 5 láb 11 hüvely és 8 vonal$=5' \ 11'' \ 8'''$ egy hüvely$=^1/_{12}$ láb, a' hüvelyeket 12vel elosztván, tizedeseit megtaláljuk; éppen ugy a' vonal$=^1/_{12}$ hüvely. Közönségesen, a' legkisebb nemen kezdvén, fellyeb megyünk.

Bővebben meglátjuk példákkal felvilágosítva a' *feloldás* és *visszavivésnél* (§ 2.)

(*Lásd* V. VI. VII *és* VIII-dik *Táblákat*).

B) A' Térmérőkről.

180. A' térmérők egysége valamely négyszeg, az az: négy egyenlő vonal által békerített tér. Szögletei ezen négyszegnek mind egyenlők, jelen alakban *a*, *b*, *c*, *d* a' négy szöglet.



V. TÁBLA.

Némelly Hosszmérők.

A' Metre'el és a' Bécsilábbal hasonlítva.

Hely	Hosszmérö	Métre	Bécsiláb
Amsterdám	Láb=11hüvely	0·2831	0·896
Antverp	—	0·2856	0·903
Augsburg	— =12hüvely	0·2962	0·937
Bécs	— =12h.	0·3161	1·000
Berlin	— =12h.	0·3097	0·980
Bern	—	0·2933	0·928
Braunschweig	—	0·2854	0·903
Bremen	—	0·2892	0·915
Calcutta	—	0·2656	0·840
Cassel	—	0·2849	0·901
China	—	0·3331	1·054
Constantinápoly	Pic	0·6479	2·050
Dresda	Láb	0·2833	0·896
Florenz	Braccio	0·5830	1·844
Frankfurt	Láb	0·2876	0·900
Hamburg	—	0·3139	0·993
Hannover	—	0·2920	0·924
Köln	—	0·2883	0·911
Lisboa	Palmo craveiro	0·2186	0·692
London	Láb	0·3048	0·964
Lübeck	—	0. 2879	0·911
Lucca	—	0·5899	1·866
Madrid	—	0·2827	0·894
Malta	—	0·2836	0·897
Milan	—	0·4352	1·377
Modena	—	0·5230	1·655
München	—	0·2919	0·923
Norimberga	—	0·3038	0·961
Palermo	—	0·2421	0·766
Paris	Metre	1·0000	3·164
Paris	Láb	0·3248	1·028
Petersburg	—	0·3048	0·964
Prag	—	0·2964	0·938
Roma	—	0·2979	0·942
Stokholm	—	0·2969	0·939
Stuttgart	—	0·2865	0·906
Varso	—	0·2798	0·942
» » Kraok	—	0·3564	1·128

VI. TÁBLA.

A' Hüvely Vonal és Pont

a' Láb' tizedes részeiben.

	Hüvely	Vonal	Pont
1	·0833	·006944	·00057868
2	·1667	·013889	·00115736
3	·2500	·020832	·00173604
4	·3333	·027777	·00231472
5	·4167	·034721	·00289340
6	·5000	·041666	·00347208
7	·5833	·048610	·00405076
8	·6667	·055554	·00462945
9	·7500	·062499	·00520813
10	·8333	·069444	·00578681
11	·9167	·076389	·00636549
12	1·0000	·083333	·00694417

1 Láb=12 Hüvely 1H=12 Vonal IV=12 Pont.

VII. TÁBLA.

Bécsi láb, hüvely vonal és pont

A' metre tizedes részeiben BL=240·126868 Pár:vonal.

Pont	Metre	Vonal	Métre	Hüvely	Métre	Láb	Métre
1	·0001829	1	·0021955	1	·0263466	1	·316159
2	·0003658	2	·0043910	2	·0526932	2	·632318
3	·0005488	3	·0065866	3	·0790398	3	·948477
4	·0007317	4	·0087822	4	·1053863	4	1·264636
5	·0009147	5	·0109777	5	·1317329	5	1·580794
6	·0010977	6	·0131733	6	·1580795	6	1·896953
7	·0012806	7	·0153688	7	·1844261	7	2·213112
8	·0014636	8	·0175644	8	·2107726	8	2·529271
9	.0016466	9	·0197599	9	·2371192	9	2·845430
10	.0018295	10	·0219555	10	·2634658	10	3·161589
11	·0020125	11	·0241510	11	·2898124	11	3·477748
12	.0021955	12	.0263466	12	·3161589	15	3·793907

VIII. T Á B L A.

Metre

a' Bécsi láb' tizedes részeiben.

Metre	B. Láb	Metre	B. Láb	Metre	B. Láb
·001	·003163	·1	·31629	10	31·6297
·002	·006327	·2	·63259	11	34·7926
·003	·009490	·3	·94889	12	37·9556
·004	·012654	·4	1·26519	13	41·1186
.005	·015817	·5	1·58148	14	44·2815
·006	·018980	·6	1·89778	15	47·4445
·007	·022144	·7	2·21408	16	50·6074
·008	·025307	·8	2·53037	17	53·7704
·009	·028466	·9	2·84667	18	56·9334
·01	·031629	1	3·16297	19	60·0964
·02	·063258	2	6·32593	20	63·2593
·03	·094888	3	9·48890	30	94·8890
·04	·126518	4	12·65186	40	126·5186
·05	·158148	5	15·81483	50	158·1483
·06	·189777	6	18·97780	60	189·7779
·07	·221407	7	22·14076	70	221·4076
·08	·253037	8	25·30373	80	253·0372
·09	·284667	9	28·46669	90	284·6669
·1.	·316296	10	31·62966	100	316·2966

A' mint ezen alak' valamelyik oldala *ab*, *ac*, *bd*, *cd* egy öl, láb vagy hüvely, úgy lesz az egész, négyszegől, négyszegláb vagy négyszeghüvely.

Szokás a' négyszeg mérőt □el jelölni 's így lesz:

□° = négyszegöl
□' = négyszegláb
□'' = négyszeghüvely 's igy tovább.

Egy négyszegölben van 36 négyszegláb = 36□'
Egy □'ban van 12.12□'' = 144□''
Egy □''ben van 12.12□''' = 144□'''

Legnagyobb térmérő a'□ mértföld =16000000□°

Az osztra hold = 1600□° a' négyszeg' mindegyik oldala 40° lévén, 10000 hold = 1□ mértföld.

A' bécsi □' = 999·2068513 négyszeg centimetre.

A' Franczia térmérő *Are*, ennek oldala 10 métre.

Az Are = 100 négyszegmétre, 100 Are neve Hectare = 10000 négyszeg metre, oldala 100 metre hosszú.

Következnek némelly külföldi térmérők Areban és bécsi □°ben számítva hasonlításul.

IX. TÁBLA.

Némelly Térmérő.

Az Are és a' Bécsi négyszeg öllel hasonlítva.

Hely	Térmérő	Are	Bécsi □0
Anglia	Rood acre=1210 jard	10·12	281·3
Austria	Juchart	57·55	1600·0
Baden	Morgen	36·00	1000·8
Bajor	Juchart	34·07	947·1
Belgium	Vierkantebunder	1·00	27·8
Burkus	Morgen régibb	55·26	1536·2
—	— újabb	25·53	709·7
Francia	Are	1·00	27·8
—	Hectare	100·00	2780·1
—	Arpent de Paris	34·19	950·5
Hamburg	Morgen	96·52	2683·3
—	Scheffel (Szántóföldmérő)	42·02	1168·2
Hollandia	Amsterdami Morgen	81·24	2258·5
Lengyel	Morgen	59·85	1663·8
Muszka	Deciatine	109·25	3037·2
Portugal	Geira	57·82	1607·4
Roma	Pezze	26·37	733·1
Sardinia	Tavola	38·01	1056·7
Saxonia	Morgen	55·37	1535·3
Spanyol	Fanegada	48·34	1349·9
Svéd	Tunneland	49·36	1372·2
Würtemberga	Joch=$^1/_2$ Morgen	47·28	1314·4

C) *Az üregmérőkről.*

191. Mint a' hosszmérők' egysége a' vonal, térmérőké a' 4szegtér, úgy lesz az üreg 's a' testek' mérője három irányú, azaz a' *koczka*, mellynek hossza, széle és méjje egyenlő.

A' mint ezen koczkának egyik vagy másik oldala mértföld, hold, öl, láb, hüvely 's a' t. úgy lesz belőle koczka mértföld, hold, öl, láb vagy hüvely.

Elosztatik az üregmérő koczka öl:

1-ször 6 koczka-öl lábra, a' koczkaölláb 12 koczkaöl hüvelyre, a' koczkaölhüvely 12 koczkaöl vonalra 's igy továb.

A' koczkaölláb tehát egy öl hosszu, egy öl széles és egy láb magos vagy méjj; igy a' koczka öl hüvely: egy öl hosszú, egy öl széles és egy hüvely magos. Az illy térmérőt *rakásmérőnek* is hivják.

2-szor osztatik a' koczkaöl 216 koczka lábra; a' koczkaláb 1728 koczka hüvelyre; ez ismét 1728 koczka vonalra 's a' t.

$216=6^3$. $1728=12^3$ mindegyiknek 3dik emelése.

Ide tartoznak a' gabonamérők és a' hígmérők.

Mindezek igen változók lévén, hasonlitjuk őket a' franczia természetes mérőkhöz.

A' *tartalék* (volum) mérő' egysége a' *koczkamétre.* Ha véle fát mérnek, neve *Stére.*

A' magok' 's folyamok' mérője a' *Litre,* ez a' koczka decimetre.

Haszonban vannak: a' *Hectolitre, Decalitre, Litre* és *Decilitre.*

A' bécsi gabonamérő az úgynevezett Metzen, egy köböl 8 részre osztatik 's a' nyolszadrész közönséges mérő. Két nyolczadrész, vagy $^1/_4$ köböl az, mit vékának nevezünk.

A' bécsi folyammérő az akó, ez 40 bécsi kupát vagy pintet és 80 bécsi iczét foglal magába.

Következő hasonlításban a' különböző országok' üregmérőji, parisi litre, bécsi nyolczad és bécsi iczére vannak vive.

(*Lásd* X *és* XI-dik *Táblákat*).

D) A' nehézmérőkről vagy nyomatokról

182. A' franczia nyomat' egysége *Gramme*: egy koczka centimétre tiszta víz' nehézsége legnagyobb tömötségében (4^0, zéron fellyül).

Decagramme	= 10	gramme
Hectogramme	= 100	—
Kilogramme	= 1000	—
Decigramme	= 0·1	—
Centigramme	= 0·01	—
Milligramme	= 0·001	—

A' bécsi nyomatok igen külömbözők egymásközt 's van 5 féle haszonvétben.

1) A' pénzmérték:

1 Mark = 16 lat = 64 negyed = 256 Pfennig = 512 Heller = 65536 úgynevezett Richtpfennig, az irányló, legkissebb neme a' nyomatoknak.

128 illy irányló	= Heller
2 Heller	= Pfennig
4 Pfennig	= 1 negyed
4 negyed	= 1 lat.

A' bécsi mark	= 280·7293 Gramme
A' kölni mark	= 233·9411 —

X. T Á B L A.

Némelly Higmérő.

A' Litre' és Bécsi' pint'el hasonlítva.

Hely.	Higmérö.	Litre	Bécsi pint.
Anglia	Gallon	4·54	3·21
Austria	Pint = 2 Icze	1·42	1·00
—	Akó = 40 pint	56·60	40·00
Baden	Nagy Ohm	159·52	112·73
Bajor	Akó	68·42	48·928
Belgium	Vat	100·00	70·67
Burkus	Ohm	149·80	105·86
—	Uj akó	68·69	48·54
Denemark	Anker = 39 pint	37·65	26·61
Francia	Litre	1·00	0·71
Francia	Muid	0·93	0 66
Hamburg	Ahm = 5 Akó	144·40	102·05
Hollandia	Hoop	2·43	1·72
—	Aam = 4 Anker	155·22	109 70
Lengyel	Garniec	4·00	2·83
Magyar	Icze	0·833	0·59
—	Akó = 64 Icze	53·343	37·90
Muszka	Vedro	12·29	8·69
Portugal	Almade	16·54	11·69
Roma	Bazil	58·34	41·23
Roma	Bazil Olajmérő	57·48	40·62
Sardinia	Rubbio	9·39	6·64
Saxonia	Akó	67·43	47·65
Spanyol	Arroba	16·07	11·36
Svéd	Tunna = 48 Kann	125·52	88·71
Török	Almud	5 23	3·70
Würtemberga	Maas	1·92	1·36

XI. T Á B L A.

Némelly Gabonamérő.

A' Litre és Bécsi nyolczaddal hasonlítva.

Hely.	Gabona Mérö.	Litre.	Bécsinyolczad
Anglia	Gallon	4·54	0·591
	Bushel = 8 Gallon	36·35	4·729
Austria	Achtel = 1/8 köböl	7·687	1·000
	Köböl	61·50	8·000
Baden	Malter	102·99	13·399
Bajor	Scheffel	222·35	28·928
Belgium	Mudde	100·00	13·010
Burkus	Wispel	54·73	7·120
	Új Scheffel	54·96	7·150
Denemark	Toonde	139·00	18·084
Francia	Litre	1·000	0·130
	Régi Setier	156·10	20·309
Hamburg	Seheffel (Buza)	105·30	13·700
	— (Zab. Árpa)	157·95	20·549
Hollandia	Sheppel	27·81	3·618
Lengyel	Korzec	128·00	16·653
Magyar	Posonyi mérő (Kila)	53·343	6·939
	Pesti mérő = 96 icze	80·015	10·408
Orosz	Tschetvert	209·74	27·287
Portugal	Fanga	54·26	7·059
Roma	Rubbio	294·46	38·309
Sardinia	Sacco	115·00	14·962
Saxonia	Scheffel	103·90	13·517
Spanyol	Fanega	56·35	7·331
Svéd	Tunna	146·49	19·085
Török	Killot	33·15	4·313
Würtemberga	Scheffel	177 22	38·056

2) A' kereskedői nyomatok:

Egy mázsa	=	100 font
1 font	=	32 lat
1 lat	=	4 fertálylat, nehézék
1 fertálylat	=	4 tizenhatodrész
Egy font	=	560·18707 Gramme.

3) Az aranymérték:

A' bécsi markra $80^2/_5$ darab arany
a' kölnire 67 — — megy.

Az arany 60 gránra osztatik és nyom $815^{25}/_{201}$ bécsi iránylót, vagy 72·647 hollandi asszt; 58·19429 milligramme az arany $^1/_{60}$ része = 1 gránja

4) Ékességnyomat:

Ezen mérték' egysége a' karat=$48^1/_8$ bécsi irányló; a' karat 4 gránba osztatik 's nyom = 206·1477 milligrammot.

5) Gyógyszermérték:

1 font	=	12 Uncia
1 Uncia	=	2 lat
1 lat	=	4 Drachma
1 Drachma	=	3 Scrupul
1 Scrupul	=	20 grán

A' patikai font = 8741·33 hollandi Assz
— — grán = 72·9403 milligramme.

Némely külső-országi nyomatok itt öszvehasonlittatnak a' franczia kilogrammal és a' bécsi fontal.

XII. TÁBLA.

Némelly Nyomatok.

A' Kilogramm'al és a' Bécsi fontal hasonlítva.

Hely.	Nyomat.	Kilo-gramme	Bécsi font.
Anglia	Troy font=240Pen.=5760 Gr.	0·373	0·666
	Avoir dupoids font=256 Dr.	0·453	0·809
Austria	Mark 8 Uncia	0·281	0·502
	Font=32 Lat	0·560	1·000
	Patika font=24Lat=5760Gr.	0·420	0·750
Baden	Font=100 Cent.=1000 Pfng.	0·500	0·893
Bajor	Font=32 Lat	0·560	1·000
Belgium	Livre	1·000	1·786
Burkus (Por.)	Font=32 Lat	0·468	0·836
Dania	Font=32 Lat=128 Drach.	0·499	0·891
Francia	Kilogramme	1·000	1·786
	Régi font=9216 Gran	0·490	0·875
Hamburg	2 Mark=16 Uncia	0·484	0·864
Hollandia	2 Mark=16 Unc.=128 Dr.	0·494	0·882
	Troyfont=102400 Ass	0·492	0·878
Lengyel	Font=32 Lat=128 Drach.	0·405	0·723
Orosz (Musz.)	Font=96 Zolotnik	0·409	0·730
Portugal	Arratel=16Unc.=288Ottava	0·459	0·820
Roma	Font=12 Uncia=288 Den.	0·339	0·605
Sardinia	Font=96 Ottavi=288 Den.	0·369	0·659
Saxonia	Font=32 Lat	0·467	0·834
Spanyol	Font=16 Uncia=128 Dr.	0·461	0·822
Svekus (Svéd)	Font=2Mk.=32Lod=128Gros	0·425	0·759
Török	Oka=4Cheky„ 1 Cheky=	0·319	0·570
	UjabbOka=4 Ujabb Cheky	1·284	2·292
Würtemberga	Font=32 Lat=128 Drach.	0·468	0·835

XIII. T Á B L A.

LATOK A' FONT' TIZEDES RÉSZEIBEN.

font=32 L.

·25	·00781	9	·28125	21	·65625
·50	·01563	10	·31250	22	·68750
·75	·02344	11	·34375	23	·71875
1	·03125	12	·37500	24	·75000
2	·06250	13	·40625	25	·78125
3	·09375	14	·43750	26	·81250
4	·12500	15	·46875	27	·84375
5	·15625	16	·50000	28	·87500
6	·18750	17	·53125	29	·90625
7	·21875	18	·56250	30	·93750
8	·25000	19	·59375	31	·96875
9	·28125	20	·62500	32	1·00000

E) Az értékmérő' vagy a' pénz nemeiről.

183. A' fraczia pénz' egysége a' franc, sullya =5 Gramme. Ebben van $^9/_{10}$ rész ezüst 's épen úgy az arany pénzekben $^9/_{10}$ rész tiszta arany; eszerént mondatik, hogy az ezüst és arany pénzek $^9/_{10}$ finomságúak.

Jegyzék. A' mark is tiszta vagy allyas, a' mint az ezüst és az arany vagy tisztán, vagy más nemtelen érczekkel keverve van.

Az allyas mark 12 latos, benne tehát 12 lat finom ezüst van. Az arany allyas mark 18 karatos, 's benne 18 karat finom arany és 6 karat hozzátétel van.

A' franc tizedrésze decime 's ismét ennek tizede centime.

Ezüstből vannak $^1/_4$, fél, egy, két és öt francok. Az öt francos 25 gramme lévén, belőle 40 darab 1000 gramme, vagy egy kilogramme.

Az új arany pénzek 20 és 40 francosok. A' 20 francos nyom 6·45161 grámmot 's áltmérője 21 millimetre.

A' 40 francos áltmérője 26 millimetre.

Ha 34 darab 20 francos és 11 darab 40 francos egymásmellé rakatik, hosszaságok éppen egy métre, mert $34.21 + 11.26 = 1000$ millimétres $= 1$ métre; 's igy lehet szükségből a' franczia pénzeket mint nyomatokat és mérőket használni.

A' pénz' neme kétfelé oszlik:

a) vert, bizonyos vagy forgó pénz

b) költött vagy számítási.

Mind két neme a' pénznek változásokat szenved 's csak az ujabb haszonban lévőket fogjuk közelebbről tekinteni.

Hazánkban a' forint, garas, krajczár, fél- és fertálykrajczár számító, mint forgó pénz. Ebből válik a' tallér, a' két forintos, az arany 's a' t.

A' forint elosztatik:	3	ezüst	huszasra
	6	—	10 xrosra
	12	—	5 xrosra
	20	—	garasra
	60	—	krajczárra
	120	—	félkrajczárra 's a't.

A' következő táblában vannak némely jelesb pénz' nemei felvéve különböző országoknak. Értékek ezüst forint és xrban 's ennek tizedeseiben vannak adva.

XIV. TÁBLA.

Némelly Pénz' nemei.

Forintban és krajczárokban adva értékeket.

Hely	Számitási pénz	Értéke fr.	Értéke kr.	Vert és forgópénz.	Értéke fr.	Értéke kr.
Amerika	Dollar = 100 Cents	2	8·66	Sas,10,5 és $2^1/_2$dolláros10d=	21	15·70
				Ezüst Dollar	2	5·24
Amsterdam	forint = 100 Cents	—	49·33	Arany	4	35·65
				Forint	—	48·78
				12 Stuver	—	30·71
Bécs	1 forint = 3 huszas	1	—	Császári arany	4	34·04
	100 — Váltó a' 250 f.	—	24·00	Magyar vagy körmöczi ar.	4	35·16
				Két forintos Tallér	1	59·92
				Ezüst huszas	—	20·00
Berlin	Tallér = 30 ezüstgaras	1	25·72	Fridrich arany	8	0·62
				Forint	1	5·92
				Species Tallér	1	59·30
Bremen	Tallér = 72 garas	1	30·00	48 garasos Tallér	1	5·75
Braunschweig	Tallér = 24 garas	1	30·00	Arany	4	26·87

				2 Forintos Tallér	1	59·34
Brüssel	Forint = 100 centim	—	49·33	Vilmosarany	8	0·15
				Forint	—	49·89
Constantinápoly	Piaster = 40 para	—	15·79	Sequin (arany)	3	46·44
				Piaster	—	49·01
				— 1808tól	—	22·48
Coppenhaga	Rycksdaler	1	4·86	Arany	4	34·04
				Tallér	1	54·61
Florenz	Lira = 20 soldi	—	19·66	Sequin (arany)	4	37·57
				Scudi = 7 lire	2	17·58
				10 Paoli	2	9·73
Hamburg	Markbanco	—	43·44	Arany	4	31·73
	Mark = 16 Schilling	—	35·35	Tallér	2	13·56
Carlsruhe	Forint = 60 kr.	—	50·00	Arany	4	1·64
				Tallér	1	59·00
				2 Forintos	1	36·58
Lisboa	Mille Reis =	2	19.03	Dobrao	65	10.85
	Reis	—	0·14	Crusade	1	8·23
	Conto de Reis=1000000 Reis			Jeston	—	14·12
London	Font Sterling 1816	8	57·16	Guinea	10	11·63
	Liversterling	9	31·82	Souverain	9	42·45

XIV. Tábla. Némelly Pénz' nemei.

Hely	Számitási pénz	Értéke fr.	Értéke kr.	Vert vagy forgópénz.	Értéke fr.	Értéke kr.
				Crown = 5 Shilling	2	22·80
				Shilling = 12 pence	—	26·83
Lucca	Scudo d'oro	2	5·17	Dublon	6	41·48
	Lire = 20 Soldi	—	16·68	Scudo	2	3·71
Lübeck	Mark = 16 Shilling	—	35·28	Arany	4	37·27
	Tallér curant	1	45·87	Tallér (species)	2	13·32
Malta	Scudo = 12 Tari = 20 Grani	—	50·79	Onza	1	52·11
	Onza = 25 Scudi	2	6·99	Louis (egyes)	9	14·55
Milan	Lira = 100 Centesimi	—	20·00	Sequin	4	38·20
	Olasz lira	—	23·11	Scudo	2	0·15
München	Forint = 60 kr.	—	50·00	Arany	4	32·03
				Tallér	1	57·84
Nápoly	Ducati = 100 Grani	1	38·16	Carlino	0	9·82
				3 arany Oncetta	5	0·15
Paris	Franc = 100 Centimes	—	23·11	40 francos arany	15	24·25
				5 franc ezüst	1	55·53
				Louisd'or	9	4·60
Pétervár	Ezüst rubel	1	19·72	Arany	4	34·11
	Papiros rubel	—	26·11	— Imperial = 10 Rubel	20	10·31

				Platina = 6 Rubel	9	14·54
				— Rubel = 100 Kopeka	1	43·72
				— — Alexander	1	42·40
		2	44· 3	5 Kopeka	—	5·06
Roma	Piaster = 10 Paoli			Sequin	4	32·65
		—	27·17	Scudo	2	28·20
Sardinia	Lire = 20 Soldi	—	23·11	Sequin	4	36·00
	Lire = 100 Centesimi			Scudo (régi)	2	19·17
		1	30·00	Scudo = 5 líre	1	55·53
Szász	Tallér = 24 garas			Arany	4	34·04
				Tallér	2	0·04
		—	11·62	16 Garas	—	56·19
Spanyol	Real de plata antigua	—	6·17	Pistole	8	13·55
	Real de Vellon = 34 maravedi	2	11·45	Piaster	2	5·47
Stockholm	Reicksdaler			Arany	4	30·34
				Tallér	2	13·03
		—	13·84	4 Skilling	—	11·09
Varsó	Forint = 30 Garas			Arany	4	34·87
				Uj Tallér	1	24·52
		—	23·11	Forint	—	27·89
Venetia	Lire = 100 Centesimi			Sequin	4	36·16

XV. TÁBLA.

KRAJCZÁROK A' FORINT' TIZEDESEIBEN.

1	·01666	21	·35000	41	·68333
2	·03333	22	·36666	42	·70000
3	·05000	23	·38333	43	·71666
4	·06666	24	·40000	44	·73333
5	·08333	25	·41666	45	·75000
6	·10000	26	·43333	46	·76666
7	·11666	27	·45000	47	·78333
8	·13333	28	·46666	48	·80000
9	·15000	29	·48333	49	·81666
10	·16666	30	·50000	50	·83333
11	·18333	31	·51666	51	·85000
12	·20000	32	·53333	52	·86666
13	·21666	33	·55000	53	·88333
14	·23333	34	·56666	54	·90000
15	·25000	35	·58333	55	·91666
16	·26666	36	·60000	56	·93333
17	·28333	37	·61666	57	·95000
18	·30000	38	·63333	58	·96666
19	·31666	39	·65000	59	·98333
20	·33333	40	.66666	60	1·00000

F) A' kör' elosztása.

184. A' kör (bármely nagy vagy kicsi legyen az) 360 egyenlő részre osztatik; az egyes részeket *grádoknak*, fokoknak nevezzük.

Minden grád = 60 minuta, minden minuta = 60 sekunda 's így továb.

Földünk kerekségét, vagy valamely nagy körét = 20522960 toisenek találván közel lesz a' kör egy grádja = 57008·2222 's a' t, toise.

A' franczia földmérő' *(mértföld)* egysége a' *Lieu* ennek 25öd része és = 2280·3288....toise, vagy más szóval: a' földköre egyes grádjára 25 franczia mértföld jut. A' mi közönséges geografiai vagy német mértföldünkből 15 megy az egyenlítő' egy grádjára; 's igy földünk kerülete franczia mértföldben = 9000, 's geografiaiban = 5400. Minden mértföldet ezekhez hasonlítván, csak azt kérdezzük: mennyi megy belöllök az aequator' vagy valamelyik délvonal grádjára 's azonnal tudjuk nagyságát.

Lásd XVI *Táblát.*

G) Az idő' mértékjéről.

185. Az idő mérője a' föld' 's a' hold' mozgása.

Földünknek, közel gömböly lévén, kétféle a' mozgása: egyik a' tengelyénni forgása, másik a' napkörülti. Mindennapi forgása a' tengelyi, adja *napunkat*, ennek óráját 60 első 60 másodperczét 's igy továb.

Azon idő, mellyben napkerülti útját végzi, a' mi *napi évünk* 's ez $365^1/_4$ nap. A' *közönséges*

XVI. TÁBLA.

MINÚTÁK ÉS SEKUNDÁK A' GRÁDOK' TIZEDESEIBEN.

Minúták.				Sekundák			
1	·01667	31	·51667	1	·00028	31	·00861
2	·03333	32	·53333	2	·00056	32	·00889
3	·05000	33	·55000	3	·00083	33	·00917
4	·06667	34	·56667	4	·00111	34	·00944
5	·08333	35	·58333	5	·00139	35	·00972
6	·10000	36	·60000	6	·00167	36	·01000
7	·11667	37	·61667	7	·00194	37	·01028
8	·13333	38	·63333	8	·00222	38	·01056
9	·15000	39	·65000	9	·00250	39	·01083
10	·16667	40	·66667	10	·00278	40	·01111
11	·18333	41	·68333	11	·00306	41	·01139
12	·20000	42	·70000	12	·00333	42	·01167
13	·21667	43	·71667	13	·00361	43	01194
14	·23333	44	·73333	14	·00389	44	·01222
15	·25000	45	·75000	15	·00417	45	·01250
16	·26667	46	·76667	16	·00444	46	·01278
17	·28333	47	·78333	17	·00472	47	·01306
18	·30000	48	·80000	18	·00500	48	·01333
19	·31667	49	·81667	19	·00528	49	·01361
20	·33333	50	·83333	20	·00556	50	·01389
21	·35000	51	·85000	21	·00583	51	·01417
22	·36667	52	·86667	22	·00611	52	·01444
23	·38333	53	·88333	23	·00639	53	·01472
24	·40000	54	·90000	24	·00667	54	·01500
25	·41667	55	·91667	25	·00694	55	·01528
26	·43333	56	·93333	26	·00722	56	·01556
27	·45000	57	·95000	27	·00750	57	·01583
28	·46667	58	·96667	28	·00778	58	·01611
29	·48333	59	·98333	29	·00806	59	·01639
30	·50000	60	1·00000	30	·00833	60	·01667

vagy *polgári év* 365 nap. Ebből következik: hogy 4 napi év egy nappal többet tészen mint 4 polgári, 's így minden negyedik évben egy nap adatik a' 365höz 's lesz a' mi szökő évünk.

Ha a' napi év tökélletesen $365^{1}/_{4}$ napból állna, földünk közép pontja minden 4 év lefojtával ugyan azon helyet foglalná el a' napra nézve; de minthogy a' napi év csak 365 nap 5 óra 48 percz és 49'' másodpercz, ebből 400 év alatt 3 napból álló hiba következik 's így a' második javítás szerént 400 év alatt 3 szökő évet kell elhagynunk.

Száz év' öszvesége egy *század*.

Még földünk a' napot körüljárja, az őt útjában követő hold szinte 12szer forog körülte 's ez okból vezettetünk a' 12 hónap alkotására.

Az első, 3-dik, 5-dik, 7-dik, 8-dik, 10-dik és 12-dik hónap 31 napból, a' többi 30 napból áll, kivévén a' másodikat, melly, a' mint az év 365 vagy 366 napból áll, vagy 28 vagy 29 napos.

A' szokásban lévő Kalandriomunkat Gergelyinek nevezzük, 's ha nem tökélletes is, jó ideig fenntartja a' napi és polgári év közt lévő viszont, mert csak közel 4000 év mulva mutat egy napból álló hibát. (142)

XVII. TÁBLA.

NAPOK AZ ÉV' TIZEDES RÉSZEIBEN.

Az év$=365^{n}$

Hón nap.	Januarius.	Év Nap	Februarius	Év Nap	Mártius.	Év Nap	Aprilis.	Év Nap	Majus.	Év Nap	Junius.	Év Nap
1	·0027	1	·0877	32	·1643	60	·2493	91	·3315	121	·4163	152
2	·0054	2	·0904	33	·1670	61	·2520	92	·3342	122	·4191	153
3	·0081	3	·0931	34	·1698	62	·2548	93	·3369	123	·4218	154
4	·0108	4	·0958	35	·1725	63	·2575	94	·3397	124	·4246	155
5	·0136	5	·0986	36	·1753	64	·2602	95	·3424	125	·4273	156
6	·0163	6	·1013	37	·1780	65	·2630	96	·3452	126	·4301	157
7	·0190	7	·1040	38	·1808	66	·2657	97	3479	127	·4328	158
8	·0217	8	·1068	39	·1835	67	·2685	98	·3507	128	·4356	159
9	·0246	9	·1095	40	·1863	68	2712	99	·3534	129	·4383	160
10	·0274	10	·1122	41	·1890	69	·2739	100	·3561	130	·4411	161
11	·0301	11	·1149	42	·1917	70	·2767	101	·3588	131	·4438	162
12	·0329	12	·1176	43	·1945	71	·2794	102	·3616	132	·4465	163
13	·0356	13	·1204	44	·1972	72	·2822	103	·3643	133	·4493	164
14	·0383	14	·1232	45	·2000	73	·2849	104	·3670	134	·4520	165
15	·0410	15	·1259	46	·2027	74	·2876	105	·3698	135	·4548	166
16	·0438	16	·1287	47	·2054	75	·2904	106	·3725	136	·4575	167
17	·0466	17	·1314	48	·2082	76	·2931	107	·3752	137	·4602	168
18	·0493	18	·1342	49	·2109	77	·2958	108	·3780	138	·4630	169
19	·0521	19	·1369	50	·2136	78	·2986	109	·3807	139	·4657	170
20	·0548	20	·1396	51	·2163	79	·3013	110	·3835	140	·4685	171
21	·0575	21	·1424	52	·2191	80	·3041	111	·3862	141	·4712	172
22	·0603	22	·1452	53	·2218	81	·3068	112	·3890	142	·4739	173
23	·0630	23	·1479	54	·2246	82	·3096	113	·3917	143	·4767	174
24	·0657	24	·1506	55	·2273	83	·3123	114	·3945	144	4794	175
25	·0685	25	·1534	56	·2301	84	·3150	115	.3972	145	·4822	176
26	·0712	26	·1561	57	2328	85	·3178	116	·4000	146	·4849	177
27	·0740	27	·1589	58	·2356	86	·3205	117	·4027	147	·4876	178
28	·0767	28	·1616	59	·2383	87	·3232	118	·4055	148	·4904	179
29	·0794	29			·2411	88	·3260	119	·4082	149	4931	180
30	·0821	30			·2438	89	·3287	120	·4109	150	4958	181
31	·0849	31			·2465	90			·4136	151		

XVII. TÁBLA.

NAPOK AZ ÉV' TIZEDES RÉSZEIBEN.

Az év=365^{n}

Hón nap.	Julius.	Év Nap	Augustus.	Év Nap	September	Év Nap	October.	Év Nap	November	Év Nap	December	Év Nap
1	·4986	182	·5835	213	6685	244	·7507	274	·8356	305	·9178	335
2	·5013	183	5862	214	·6712	245	·7534	275	·8383	306	·9205	336
3	·5041	184	·5890	215	·6739	246	·7561	276	·8411	307	·9232	337
4	·5068	185	·5917	216	·6767	247	·7588	277	·8438	308	·9260	338
5	·5096	186	·5945	217	·6794	248	·7616	278	·8465	309	·9287	339
6	·5123	187	·5972	218	·6822	249	·7643	279	·8493	310	·9315	340
7	.5150	188	·6000	219	·6849	250	·7671	280	·8520	311	·9342	341
8	·5178	189	·6027	220	·6876	251	·7698	281	·8548	312	·9369	342
9	·5205	190	·6055	221	·6904	252	·7725	282	·8575	313	·9397	343
10	·5232	191	·6082	222	·6931	253	·7753	283	·8602	314	·9424	344
11	·5260	192	·6109	223	·6958	254	·7780	284	·8630	315	·9452	345
12	·5287	193	·6136	224	·6986	255	·7807	285	.8657	316	·9479	346
13	·5315	194	·6163	225	·7013	256	·7835	286	·8685	317	9507	347
14	·5342	195	·6191	226	·7041	257	·7862	287	8712	318	·9534	348
15	·5369	196	·6218	227	·7068	258	·7890	288	·8739	319	·9561	349
16	·5397	197	·6246	228	·7096	259	·7917	289	·8767	320	·9589	350
17	·5424	198	·6273	229	·7123	260	·7945	290	·8794	321	·9616	351
18	·5452	199	·6301	330	·7150	261	·7972	291	·8822	322	·9643	352
19	·5479	200	6328	331	·7178	262	·8000	292	·8849	323	·9671	353
20	·5507	201	6356	332	·7205	263	·8027	293	·8876	324	·9698	354
21	·5534	202	6383	333	·7232	264	·8055	294	·8904	325	·9725	355
22	·5561	203	·6411	334	·7260	265	·8082	295	·8931	326	·9753	356
23	·5588	204	·6438	335	·7287	266	·8109	296	·8958	327	·9780	357
24	·5616	205	·6465	336	·7315	267	·8136	297	·8986	328	·9807	358
25	·5643	206	·6493	337	·7342	268	·8163	298	·9013	329	·9835	359
26	·5670	207	·6520	338	·7369	269	·8191	299	·9041	330	·9863	360
27	·5698	208	·6548	339	·7397	270	·8219	300	·9068	331	·9890	361
28	·5725	209	·6575	340	·7424	271	·8246	301	·9096	332	·9917	362
29	·5753	210	·6602	341	·7452	272	·8273	302	·9123	333	·9945	363
30	·5780	211	·6630	342	·7479	273	·8301	303	·9150	334	·9972	364
31	·5807	212	6657	343			·8328	304			1·0000	365

XVIII. TABLA.

ÓRÁK MINUTÁK ÉS SEKUNDÁK A' NAP' TIZEDES RÉSZEIBEN.

Ora		Minuta		Minuta		Sekunda		Sekunda	
1	·04167	1	·00069	31	·02153	1	·00001	31	·00036
2	·08333	2	·00139	32	·02222	2	·00002	32	·00037
3	·12500	3	·00208	33	·02292	3	·00003	33	·00038
4	·16667	4	·00278	34	·02361	4	·00005	34	·00039
5	·20833	5	·00347	35	·02430	5	·00006	35	·00040
6	·25000	6	·00417	36	·02500	6	·00007	36	·00042
7	·29167	7	·00486	37	·02569	7	·00008	37	·00043
8	·33333	8	·00556	38	·02639	8	·00009	38	·00044
9	·37500	9	·00625	39	·02708	9	·00010	39	·00045
10	·41667	10	·00694	40	·02778	10	·00012	40	·00046
11	·45833	11	·00764	41	·02847	11	·00013	41	·00047
12	·50000	12	·00833	42	·02917	12	·00014	42	·00049
13	·54167	13	·00903	43	·02986	13	·00015	43	·00050
14	·58333	14	·00972	44	·03056	14	·00016	44	·00051
15	·62500	15	·01042	45	·03125	15	·00017	45	·00052
16	·66667	16	·01111	46	·03194	16	·00018	46	·00053
17	·70833	17	·01180	47	·03264	17	·00020	47	·00054
18	·75000	18	·01250	48	·03333	18	·00021	48	·00056
19	·79167	19	·01319	49	·03403	19	·00022	49	·00057
20	·83333	20	·01389	50	·03472	20	·00023	50	·00058
21	·87500	21	·01458	51	·03542	21	·00024	51	·00059
22	·91667	22	·01528	52	·03611	22	·00025	52	·00060
23	·95833	23	·01597	53	·03680	23	·00027	53	·00061
24	1·00000	24	·01667	54	·03750	24	·00028	54	·00062
		25	·01736	55	·03819	25	·00029	55	·00064
		26	·01805	56	·03889	26	·00030	56	·00065
		27	·01875	57	·03958	27	·00031	57	·00066
		28	·01944	58	·04028	28	·00032	58	·00067
		29	·02014	59	·04097	29	·00034	59	·00068
		30	·02083	60	·04167	30	·00035	60	.00069

A' tábla első sorában vannak a' hónapok' napjai. Utánnok következnek ugyan ezen hónapok' valamennyi napjai az év' tizedes részeiben.

A' harmadik függősor végre az év' napjait egytől 365ig foglalja. Ha tehát kérdés volna, melly része az évnek valamely hónap' valamely napja? a' két első sor adná a' feleletet: p. o:

21-dik Julius az évnek ˙5534ed része

A' harmadik sorban pedig egyszersmind látszik, hogy ezen 21-dik Julius az évnek 202-dik napja.

A' tábla segédével fel kereshetjük tehát az év' tizedes részeit ha

1-ször, valamelly hónapnak napja van adva, vagy

2-szor, az évben lefojt napok' száma

és viszont ha az év' valamely tizedes része van adva, megtaláljuk a' hozzá tartozó napok' számát és egyszersmind a' hónap napját is.

P. o: ˙7535 része az évnek hány nap?

A' hozzá legközelebb álló szám ˙7534 's utánna 275 nap a' 2-dik Oktober. Ha valamely két datum közt lefojt napok' számát akarjuk tudni, a' 3-dik sorban megtaláljuk, ha a' két idő közti különbséget vesszük.

P. o: Hány nap folyt le 3-dik Februártól fogva 27-dik Novemberig

lesz 27 November — 3-dik Februar $=331-34=297$ nap.

A' táblában lévő 4 tizedes helyei az évnek nem csak a' napokat adják tökélletesen, de szükségből az órákat is. minden $^1/_{10000}$nek közel 52˙5 percz lévén értéke: így p. o: ha az év része ˙3467 lenne, meg lelnénk a' nállánál kisebb számot $=3452$ melly 126 napnak felel meg, a' köztüklévő különbség $=15$ melly $15\times52˙5=787˙5=13$ óra és $7'5$.

H.) *A' temperatura' mérőjéről.*

186. A' meleg széleszti (tágítja, terjeszti) a' testeket; a' hideg ellenben öszvevonja (szorítja), az az: a' testek' tartalékja (volum) a' meleggel nevekedik 's véle kisebbül, ha a' meleg nevekedik vagy kisebbül. A' meleg' különbféle létét meg lehet mérni a' *hévmérők' melegmérők* vagy thermométerek segéde által. A' kényesővel, borszesszel, vagy más könnyen terjedhető híggal töltött üvegcsővek először az épen olvadó jég közzé 's azután forró vízbe mártatnak. Az ezen két pont (a' fagy- és forrás pont) közti tér bizonyos részekre osztatván, szolgál minden egyéb melegség' mérésére.

Réaumur ezen tért 80 részbe osztotta.

Celsius a' franczia thermométert 100 részre.

Fahrenheit az ángolyt 180ra.

A' két első' fagypontján 0 (üres), forráspontján 80 és 100 áll; a' harmadik' nullpontján 32, forráspontján pedig 212.

Mind a' fagypont alatt, mind a' forráspont felett, tetszés szerént lehet az osztást folytatni. Az ürest követő grádokat —al (lefelé tagadók) 's a' felette lévőket +al írjuk. Ezen 3 thermométeren kivül Európában nincs több haszonvétben; Lisle 150 részbe osztott hévmérőjét sem vévén ki, noha az némely könyvekben előjön.

Réaumur scálája' 4^0 grádja $=5^0$ Centigrád $=9^0$ Fahrenheit; 's így könnyű egyiket a' másikba változtatni.

Mindegyik Fahrenheit grád $= {}^4/_9$ Réaumur; ha tehát a' Fahrenheit grádjai 4el sokszoroztatnak 's kilenczel elosztatnak, Réaumur grádjait találjuk. Ha több volt 32nél, ugy a' Réaumur scálájai +, ha ennél kevesebb lesz —. Megfordítva lesz $^9/_4$ Réaumurból Fahrenheit. Fahrenheitot Centigrádba $^5/_9$eli sokszorozás, emezt pedig Fahrenheitba $^9/_5$ eli, változtatja.

Réaumurt Centigrádra $^5/_4$eli, Centigrádot Réaumurba $^4/_5$eli sokszorozás változtatja.

(*Lásd* XIX. *Tábla*)

2 §. A' feloldásról 's visszavivésről.

187. Felsőbbrendű megnevezett számokat, kisebb nevezésre vinni, *feloldás;* megfordítva pedig, *visszavivés*, ha az apróbb rendű egyesek felsőbb nevezetűekre vitetnek. Az első a' sokszorozás, az utóbbi az elosztás által történik. Azon számokat, mellyek a' kisebb rend' mennyiségét jelölik ki, az az: megmutatják, hány illy kisebb rendű egységből lesz valamely következő felsőbb rend, *feloldó* vagy *visszavivő számoknak* nevezzük.

188. A' feloldás a' sokszorozásnak segéde által történvén meg, valamelly adott számot vagy mennyiséget a' kívánt rendre visszük, ha vagy egyszerre a' legkisebb nevezésre, vagy lassan lassan következő kisebbre visszük, annyival sokszorozván, a' hány részből áll a' nagyobb rendű egység.

Ha p. o: a' kört másodperczekben (sekundákban) kellene adni, a' 360 grádot 60al sokszorozván, minutákat vagy az első perczeket lelnénk 's ezekben 60 másodpercz lévén, a' 360.60 ismét 60al kellene sokszorozni. A' mint tehát a' könyebbség kívánja, vagy egy-

XIX. TÁBLA.

Fahrenheit' Thermometere, hasonlitva Reaumuréval és a' száz-részüvel.

F.	Reaum	100 részü	F.	Reaum	100 részü	F.	Reaum	100 részü
0°	—14°2	—17°8	33°	+0°4	+0°6	67°	+15°6	+19°4
1	13·8	17·2	34	0·9	1·1	68	16·0	20.0
2	13·3	16·7	35	1·3	1·7	69	16·4	20·6
3	12·9	16·1	36	1·8	2·2	70	16·9	21·1
4	12·4	15·6	37	2·2	2·8	71	17·3	21·7
5	12·0	15·0	38	2·7	3·3	72	17·8	22·2
6	11·6	14·4	39	3·1	3·9	73	18·2	22·8
7	11·1	13·9	40	3·6	4·4	74	18·7	23·3
8	10·7	13·3	41	4·0	5·0	75	19·1	23·9
9	10·2	12·8	42	4·4	5·6	76	19·6	24·4
10	9·8	12·2	43	4·9	6·1	77	20·0	25·0
11	9·3	11·7	44	5·3	6·7	78	20·4	25·6
12	8·9	11·1	45	5·8	7·2	79	20·9	26·1
13	8·4	10·6	46	6·2	7·8	80	21·3	26·7
14	8·0	10·0	47	6·7	8·3	81	21·8	27·3
15	7·6	9.4	48	7·1	8·9	82	22·2	27·8
16	7·1	8·9	49	7·6	9·4	83	22·7	28·3
17	6·7	8·3	50	8·0	10·0	84	23·1	28·9
18	6·2	7·8	51	8·4	10·6	85	23·6	29·4
19	5·8	7·2	52	8·9	11·1	86	24·0	30·0
20	5·3	6·7	53	9·3	11·7	87	24·4	30·6
21	4·9	6·1	54	9·8	12·2	88	24·9	31·1
22	4·4	5·6	55	10·2	12·8	89	25·3	31·7
23	4·0	5·0	56	10·7	13·3	90	25·8	32·2
24	3·6	4·4	57	11·1	13·9	91	26·2	32·8
25	3·1	3·9	58	11·6	14·4	92	26·7	33·3
26	2·7	3·3	59	12·0	15·0	93	27·1	33·9
27	2·2	2·8	60	12·4	15·6	94	27·6	34·4
28	1·8	2·2	61	12·9	16·1	95	28·0	35·0
29	1·3	1·7	62	13·3	16·7	96	28·4	35·6
30	0·9	1·1	63	13·8	17·2	97	28·9	36·1
31	—0·4	—0·6	64	14·2	17·8	98	29·3	36·7
32	± 0·0	± 0·0	65	14·7	18·3	99	29·8	37·2
33	+0·4	+0·6	66	+15·1	+18·9	100	+30·2	+37·8

szerre fogjuk a' grádok' számát $60.60=60^2=3600$al, vagy egymásután 60 és 60nal sokszorozni.

Példa: 1) $5^0\ 3'\ 4''$ az az: 5 öl 3 láb és 4 hüvely, hüvelyekben adandó?

$5^0=5.6=30$ láb, hozzáadván a' 3 lábot, lesz $33'$; $33'.12=396''$ (hüvely) ehez végre az ott álló $4''$t$=400''$ (hüvely).

Ezen példában az 5öt 6.12vel, a' 3at 12vel sokszorozván, ugyan azon következést értük volna.

2) $18^{\square}\ 32^{\square\prime}\ 116^{\square\prime\prime}\ 83^{\square\prime\prime\prime}$ kívántatik négyszeg vonalokban.

a) a' $18^{\square 0}$ sokszoroztatik 36al 's lesz belőle □ láb

b) a' □ lábokból lesz 144eli sokszorozás által, □ hüvely

c) a' □ hüvelyből végre 144el négyszeg-vonal.

A' következő rendek öszveadatván, adják a' feleletet.

3) 7 akó 16 pint 29 icze, hány messzely?

A' magyar akó 64 icze, vagy 32 pint, egy pint két icze, egy icze két messzely, tehát:

$(7.32)+16=224+16=240$ pint

$(240.2)+29=480+29=509$ icze

$509.2=1018$ messzely.

4) 3 font 11 uncia 4 drachma 2 scrupulus, hány grán patika mérték?

$(3.12)+11=36+11=47$ uncia

$(47.8)+4=376+4=380$ drachma

$(380.3)+1140+2=1142$ scrupulus

$1142.20=22840$ grán.

5) 4 Liver Sterling 15 Schilling 8 pence, hány pence?

$(4.20)+15=80+15=95$ Shilling
$(95.12)+8=1140+8=1148$ pence.

6) $42^0\ 52'\ 36''$ hány másodpercz ?
$(42.60)+52=2520+52=2572'$ minuta
$(2572.60)+36=154320+36=154356''$

7) 4 év 25 nap 17 óra hány óra ?
4 évben bizonyosan van egy szökő, tehát a' napok' számához egy hozzáadatik.

$(4.365)+25+1=1460+26=1486$ nap
$(1486.24)+17=35664+17=35681$ óra.

189. A' visszavivés az osztás által történvén, látható hogy a' részes majd mindég törtszám, 's mivel a' tizedes tört hasonlíthatatlanul könnyebb számítást enged mint a' közönséges, csak őt lehet ajánlani, noha sokszor végnélkül való sorra találunk, még is elég tökéletesen megleljük a' keresett értékeket.

Igy p. o: a' garas $^1/_{20}$ ja a' forintnak, $^1/_{20}$ pedig $= 0{\cdot}05$; 2 garas $= 0{\cdot}1$ forint 's a' t. A' krajczár $^1/_3$ a' garasnak; $^1/_3 = 0{\cdot}333333\ldots$ soha sem adja az $^1/_3$ at tökélletesen, de minthogy ezen törtet 3al sokszorozván egy végtelen sor kilenczeseket érünk $1={\cdot}999999$ ..... a' legutolsó kilenczeshez hiba nélkül hozzá adhatjuk az egyet 's igy lessz

$$\begin{array}{rr} 1= & 0{\cdot}999999999\ldots\ldots \\ & +0{\cdot}000000001 \\ \hline 1= & 1{\cdot}000000000 \end{array}$$

Látjuk, hogy az egészítő egyes' értéke itt *ezer milliomod*, a' mi valóban a' mi pénzértékünkhöz hasonlítatván *semmi*.

Egy krajczár továbbá $^1/_{60}$ forint $= 0{\cdot}0166666\ldots$ $= 0.016$ forint

4 xár $= {}^{4}/_{60}$ forint $=0·066666\ldots\ldots=0·0\dot{6}$

15 xár $= {}^{15}/_{90}$ — $=0·25$ forint $= {}^{1}/_{4}$ forint

57 xár $= {}^{57}/_{60}$ — $=0·8833333$ forint $= 0·98\dot{3}$ forint 's igy tovább.

Mind ezen értéket a' 60 ali sokszorozással könnyű lesz ismét eredeti nevezetére vinni.

Ha tehát többféle alsóbb rendű egyeseket kell a' legfelsőbb rendre vinni, először a legalsóbbat a' következő magosb rendre visszük tizedes számra változtatván elosztás által, ezt ismét egy rendel felyebb 's igy tovább, míg a' legfelsőbbet értük.

Példák: 1) $15^{0}\ 5'\ 9''\ 8'''$ hány öl?

$\frac{8'''}{12}=0·6''$ hüvely $=0·666\ldots\ldots$

$\frac{9'·6666}{12}=0·805555\ldots\ldots= 4'·80\dot{5}$ láb

$\frac{5·80455}{6}=·0967592592$'s a' t. $=0·96\dot{7}59\dot{2}$

's ehez adván végre a' 15^{0}et, lesz $15^{0}96\dot{7}59\dot{2}$

2) $27^{\square 0}\ 13^{\square\prime}\ 36^{\square\prime\prime}\ 72^{\square\prime\prime\prime}$ hány $\square^{0}$?

$\frac{72}{144} = 0·5$ négyszeghüvely

$\frac{36·5}{144} = 0·25347222222=0·25347\dot{2}^{\square\prime}$

$\frac{13·25347\dot{2}}{36}=0·368152.$

ehez az egészeket adván $= 27^{\square 0},368152.$

3) 25 icze bor hány akó?

${}^{25}/_{64} = 0·390625.$

4) 85 font 16 lat hány mázsa?

$16 \text{ lat} = {}^1/_2 \text{ font} = 0{\cdot}5 \text{ font}$

$$85{\cdot}5 \text{ font} = \frac{85{\cdot}5}{100} = 0{\cdot}855 \text{ mázsa}$$

5) $45''$ hány grád?

$$\frac{45}{60^2} = \frac{45}{3600} = 0^0 0125$$

6) 18 óra melly része az évnek?

$$\frac{18}{24.\,365} = {}^3/_4 \text{ nap elosztva } 365\text{el} = 0{\cdot}00205479$$

Ha a' tizedesek' valamelly jegyénél, p. o: az ötödiknél meg akarunk állani, (a' közönséges életben mindég elég 4, 5 legfejebb 6 jegy) ezen utolsó jegyet mindenkor emeljük az egységgel, vagy is hozzá adjunk egyet, ha az utánna következő jegy nagyobb az 5tösnél; p. o: 0·52368 helyett érezhető hiba nélkül irhatjuk 0·5237et.

Minden előjövő kérdésre példákat adni hoszas volna, és az előbbeniekből látható, mikép kelessen a' kivánatnak eleget tenni 's kiki könnyen fog p. o: gránokból latokat, garasokból forintokat, sekundákból minutákat, ezekből órákat, napokat 's a' t. számítni.

190. Az öszveadása, valamint a' levonása a' megnevezett számoknak semmi nehézséget sem mutat; az egynemű 's rendű egyesek a' vélek hasonlókhoz adatnak, vagy belőllök levonatnak. Meglelvén az öszvest vagy különbséget, az egyrendűek ismét öszvevétetnek, ha valamelly felsőbb rend találtatna az alsóbban.

Példa 1) 382 forint 36 kr.
+ 32 — 42
+ 65 — 57
=479 — 135 kr. = 479 f. + 2 f. 15 kr.
= 481 f. 15 kr.

2) 25 mázsa 59 font 26 lat 3 negyed vagy nehézék
+ 3 — 78 — 31 — 2 —
+ 32 — 93 — 25 — 1 —
+ 79 — 81 — 3 — $2^1/_2$ —
= 139 — 311 — 85 — $8^1/_2$ —
= (139+3) mázsa (11+2) font (21+2) lat $^1/_2$ nehézék
= 142 — 13 — 23 — 0·5 —

Hogy az alsóbb rendben lévő felsőbbet mindjárt a' következő felsőbbhöz lehet adni, kiki látja 's ugy is fog tenni.

A' levonásnál gyakorta megtörténik hogy az alsóbbrend' levonandója nagyobb mint a' kisebbítendő, ezen esetben a' felsőbb rendből kell egyet kölcsönözni, p. o:'
125 mázsa 38 font 12 lat 2 nehézékből levonandó
— 87 — 93 — 30 — 3 —

Itt mind három alsóbb rendhez kell a' felsőbnek egyesét adni, 's lesz a' kisebbítendő 124 m. 137 font 43 lat 6 nehézék.

Könnyebítéseket a' levonásnál ki ki talál a' míveletben.

191. A' sokszorozás háromféleképp eszközölhető megnevezett számokkal.

1) Vagy mind a' két faktor a' legkisebb rendre vitetik.

2) Vagy a' legfelsőbbre.

3) Vagy minden rendű tag külön külön sokszoroztatik.

Jegyzék. Előre bocsájtandó itt, hogy a' sokszorozó soha sem lehet p. o: év, holnap, óra, minuta, grád, forint vagy krajczár, de mindég csak szám és elvont szám, 's csak a' származat lesz ugyan azon nemű, a' millyen volt a' sokszorozandó. A' hossz- és térmérőknél geometriai okokból a' sokszorozás elváltoztatja az előbbeni értéket, 's ha lábot lábbal sokszorozunk a' hosszmérőknél, négyszeg láb lesz a' származat 's így a' hosszmérőből térmérő; ha a' térmérőt hosszmérővel sokszorozzuk, üregmérőre, az az: koczka mértékre jutunk.

$$5'.4'=20^{\square\prime}$$
$$2'.2''=24''.2''=48^{\square\prime\prime}$$
$$3^{\square\prime}.2'=6 \text{ koczka láb.}$$

A' sokszorozás' háromféle míveletét egy példára alkalmaztatván, lesz:

1) Példa:

Valamelly tőke 24 f. 45 kr. és 3 fillért hoz évenként kamatul; menyit fog 8év alatt jövedelmezni?

a) lesz 24 f. 45 kr. és 3 fillér = 5943 fillér, ezt sokszorozván 8al:

lesz = 47544 fillér = 11886 kr. = 198 f. 6 kr.

b) 24 f. 45 kr. 3 fillér = 24·7625forint, sokszorozván 8al
= 198·1

c) 24 f. 45 kr. 3 fillér sokszoroztatik 8al

$$\frac{8}{192 \text{ f. } 360 \text{ kr. } 24 \text{ fillér} = 198 \text{ f. } 6 \text{ kr.}}$$

2-dik *Példa*: Ha valamelly portéka' fontja 1 f. 24 kr. mennyi lesz 15 font 10 lat' ára?

Itt a' pénzt forintokra $= 1\cdot4$ a' nyomatot fontokra $= 15\cdot3125$ változtatván, a' két faktor' származata $= 21\cdot4375$ forint lesz, mellyből könnyű ismét a' krajczárokat meglelni.

Mint a' kérdésnél könnyebb lesz, úgy választjuk a' rendek' nemét, némely esetben időnyerés a' legfelsőbb nevezetet választani, másban alkalmasab a' kisebbeket venni.

Valamelly portéka' latja $12^1/_2$ krajczár, mi lesz 3 font $17^1/_2$ lat árra?

Itt vagy egyenesen a' krajczárokkal sokszorozzuk

a' $3.32+17^1/_2 = 96+17^1/_2 = 113\cdot5$

latot és a' krajczárokból ismét forintokat alkotunk, vagy a' $12^1/_2 = 12\cdot5$ kr. forintokra visszük és $^{12\cdot5}/_{60} = 0\cdot2083$al sokszorozzuk a' $113\cdot5$öt, hol egyenesen forintokból áll a' származat.

192. A' megnevezett számok' elosztása is ekkép' történik.

Az osztandó 's osztó egyféle nevezetre vitetnek 's csak ugyan a' mint alkalmasabb főbb vagy alsóbb rendre.

Megjegyzendő, hogy ha a' térmérő hosszmérő által osztatik; vagy üregmérő térmérő által, a' részes *hosszmérő*; koczkamérő pedig hosszmérő által osztva térmérőt ád.

Példa: 1) Valamely szoba' padolatjának tére $= 12^{\square\square}\ 19^{\square\prime}\ 96^{\square\prime\prime}$, hossza a' szobának 3^0, $4'$, $7''$; mi a' szoba szélessége?

Tudjuk hogy a' tér, a' szél' és hossz' sokszorozása által származott' tehát ha a' tért elosztjuk a' hosszal, bizonyosan a' szélt találjuk meg. Feloldván a' tért négyszeg hüvelybe, lesz $12^{\square 0}$ $19^{\square \prime}$ $96^{\square \prime\prime}$=$65040^{\square \prime\prime}$ ezt elosztván a' 3^0 $4'$ $7''$=$271''$el, a' részes=$240''$=$20'$ =3^0 $2'$ a' szoba széle.

2) Valamelly summa pénz bizonyos részekre osztasson?

A' forintokat, krajczárokat, 's a' t. egynevezetre hozván, annyi részre osztjuk, a' mennyire kivántatik.

3) Ha valamelly mennyiség' öszyes árából az egység kerestetik, a' mennyiség mindég osztó, és ennek értéke vagy árra az osztandó.

P. o: 340 font 15 lat 3 nehézék 862 f. 42 kr, hány for: lesz 1 font, 1 lat 's a' t.

Az érték forintokra vitetvén vissza, a' mennyiség fontokra 's lesz egy font árra

$$\frac{862 \cdot 7 \text{ forint}}{340 \cdot 4921875}$$

VIII. SZAKASZ.

AZ ARITHMETIKAI KÉRDÉSEK' FELOLDÁSÁRÓL.

193. A' négy alap mívelet' helyes alkalmaztatása által, minden Arithmetikai kérdésre meg lehet felelni. A' következendő példák több olly kérdések' könnyű feloldására vezetnek, mellyeket eddig az arithmetika' útján nem lehetett feloldani, 's nagy haszonnal fognak azokra nézve is lenni, kik továbbá az Algebra' tanúlásához fordulnak. *)

1) Kérdés: Valamelly portéka' rőfe 13·47 forint, hogy lesz 5·6 rőf?

A' két faktor' származata lesz a' felelet.

2) Ha egy rőf 11·75 forint, hány rőföt lehet venni 217·35 forinton?

A' felelet $\frac{217 \cdot 35}{11 \cdot 75}$ vagy is: a' két faktorközti részes.

3) Négy munkás 24 rőf matériát sző, mennyit fog 9 szőni?

Egy munkás $^{24}/_{4}=6$ rőföt sző, 9 tehát $^{24.9}/_{4}$et, vagy 54et.

*) Mind ezen példákban a' tizedes számoknak 's némely gyakorta már előfordult könnyebitéseknek hasznokat fogjuk venni.

4) 24 métre szövet 6 nap alatt készül; hány nap kell 98 métre készülésére?

Egy nap készül $^{24}/_{6}=4$ métre, készül tehát 98 métre $^{98}/_{4}$ nap alatt.

5) Három munkás valamelly dolgot 15 óra alatt végez; hány óra kell ahoz 5 munkásnak?

Egy munkás háromszor annyi idő alatt végezné mint három, az az kellene néki $3.15=45$ óra, az 5 tehát 5 szörte kevesebb, az az: $^{3.15}/_{5}=9$ óra alatt végzi.

6) Két munkás 5 nap alatt 3 órát dolgozván 90 métre szövetet készített, hány métret készítene 3 munkás 7 órát dolgozván két nap.

Az előbbeni példákhoz hasonlóul következtetvén, ha két munkás 90 métret szőtt, 1 fog 45 métret szőni, három tehát 3-szor 45 métret; három munkás 5 nap három órát dolgozván, tehát 135 métret sző.

A' 3 órai munkát most 7 óráira kell visszavinni.

A' 3 órai munka 135 métre lévén, 1 órai lesz $^{135}/_{3}=45$ métre.

A' 7 órai munka tehát 7-szer 45 m.$=315$ métre,

A' 3 munkás 5 nap 7 órát dolgozván, 315 métret készít 's igy egy nap 63 métret, két nap pedig 2.63 m, $=126$ métret, 's így a' felelet:

3 munkás 2 nap 7 óráig dolgozván 126 métret készít.

Ezen példa több ízben lehet hasznos, lássuk a' könnyeb számítás' módját.

2 munkás 5 nap 3 órát dolgozván, minden nap készít 90 métret

1 — ugyan azon idő alatt ennek felét $=\frac{90}{2}$

3 munkás három annyit mint egy $= \frac{3.90}{2}$

3 — öt nap csak 1 órát dolgozván ennek harmadát $= \frac{3.90}{2.3}$

3 — öt nap 7 órát dolgozván, 7-szer ennyit $= \frac{7.3.90}{2.3}$

3 — 1 nap 7 órát, ennek ötödrészét $= \frac{7.3.90}{2.4.5}$

3 — 2 nap 7 órát tehát két enyit $= \frac{2.7.3.90}{2.3.5}$

itt az egyenlő faktorokat elhagyván, lessz $= \frac{7.90}{5}$ $= 126$ métre.

7) Két munkás 5 nap alatt 3 órai munkával 90 métret készít, hány nap kell 3 munkásnak 7 órai dologgal 126 métre készítésére?

Az elébbi példában láttuk, hogy:

3 munkás 5 nap 7 órai munkával $\frac{90\text{m}..3.7}{2.3} = 315$ métret készít, a' kérdés most ebbe változik:

Ha a' 3 munkás 7 órai munkával 5 nap 315 métret készít, hány nap kell néki 126 métrehez?

Ha 315 métrehez 5 nap kellett, 1 métrehez kell $^5/_{315} = ^1/_{63}$ nap, a' 126 métre tehát $126.\ ^1/_{63} = ^{126}/_{63}$ $= 2$ nap lesz kész.

Az előbbeni példa szerént a' számítás' vég kifejezése $= \frac{5.2.3.126}{90.3.7} = \frac{5.2.126}{90.7} = 2$

8) 100 Spanyol Piaster 543 frankot ér, 100 hollandi arany pedig 1193 frankot; hány illy aranyt ér 3579 piaster?

A' piaster ér $^{543}/_{100}$ frankot, 1 frank ér $^{100}/_{1193}$ aranyt; tehát egy piaster $^{543}/_{100}$ részét $^{100}/_{1193}$ aranynak, vagy is: $^{543}/_{1193}$ aranyt; 3579 piaster e' szerént $=\frac{3579 \cdot 543}{1193}=1629$ arany.

A' társasági régula.

194. Ha valamelly nyereség, vagy veszteség, több részvevők közt a' szerént osztandó, a' mennyi tőkével ki ki bélépett, a' számítást ***társasági regulának*** nevezzük.

9) Három társ' tőkéje 300, 500 és 700 forint, öszves nyeresége 4500 forint; mennyiben részesűl egyik egyik?

A' három részes' tőkéje = 1500 forint lévén, mindegyik forint $^{4500}/_{1500}=3$ forintot nyert, 's igy mindegyik' tőkéje 3szorta nagyob lett; $300.3+500.3+$ $+700.3=900+1500+2100=4500$.

Minden illy kérdésnél, a' részesek' öszves tőkéje által osztatik a' nyereség vagy veszteség, 's a' részes által sokszorozván mindegyik külön tőkét, a' származat lesz a' keresett egyes rész.

10) Három társ' egyes tőkéje 100, 250 és 50 forint. Az első, három holnapig maradt a' társaságban, a' második két, a' harmadik pedig 14 holnapig; az öszves nyereség 4500 forint; mennyi jut egyre egyre?

A' nyereség itt azon időtől függ, melly alatt az egyes tőkék a' kereskedésben maradtak. Ha mindegyik társ és tőke ugyan azon ideig maradt volna együtt, a' kérdésre az előbbeni példa felelne, 's igy először tehát azt tesszük fel, hogy az idő mind három társra nézve ugyan az. De minthogy 100 forint három holnap alatt 3 anyit jövedelmez, mint egy holnap alatt, az az: annyit mint 300 forint egy holnap alatt, 250 pedig 2 holnap alatt és 50 f. 14 holnap alatt mint 2szer 250=500 és 14szer 50=700 egy holnap alatt; így a' nyereségek éppen azok, mellyek az előbbi példában.

11) Három kereskedő 3 évre állott társaságba. Az első 12000 forintot tett bé, de 15 holnap mulva ismét 4500 f.tot adott hozzá. A' másik eleinte 18000 forintot tett bé, de 7 holnap mulva 7600 f.tot vissza húzott. A' harmadik végre 9650 forintot tett bé 's benn hagyta az egész 3 év alatt. Az öszves nyereség 39045 forint volt; menyiben részesül egyik egyik?

Az első kereskedő 36 holnap alatt 12000 forintal 's ezenkivül 36—15=21 holnap alatt 4500 forintal volt benn, a' tőkék tehát anyit jövedelmeznek öszvesen, mintha 36.12000 forint, és 21.4500 f. egy holnapig lett volna a' kereskedésben, vagyis: az első kereskedő' része lessz 43200+94500=526500 forint egy holnapra. Éppen úgy lessz a' második kereskedő' tőkéje egy holnapra véve 18000 7+10400.29=427600 forint, mivel a' 18000 forint csak 7 holnapig és ezután 29 holnapig 7600 forintal kevesebbel maradt benn.

A' harmadik kereskedő' 9650 forintja végre 36 holnap alatt lévén benn, annyit fog nyerni 9650 forintjával, mintha 9650 forintja 36szorta véve 1 holnapig lett volna a' kereskedésben, az az: 36.9650=347400 f.

A' kérdés tehát erre vivődött vissza:

Osztasson el 39045 forint 3 társ közt, kik 526500, 427600 és 347400 forintal léptek öszve.

A' három tőke öszvese =1301500, ezzel elosztván a' nyereséget:

$\frac{39045}{1301500}$ részesel = 0·03al sokszorozandó mindegyik külön tőke 's a' származatok lesznek a' keresett nyereségek.

az első:	526500. 0·03 =	15795 f.
a' második	427600. 0·03 =	12828 „
a' harmadik	347400. 0·03 =	10422 „
	Öszv.	39045 forint.

12) Egy hajón lévő portéka 800000 forintra lévén becsülve, a' biztosító társaság minden forint veszteséget 0·17 forint kárpótlással válalt fel. Az utban 70000 forintnyi kárt szenvedett a' hajó, mennyit kell a' biztosító társaság' részéről azon kereskedőnek fizetni, kinek 60000 forint ára portékája volt a' hajón?

800000 forint 70000 forint kárt szenvedett

jön tehát minden forintra $\frac{70000}{800000}=\frac{7}{80}$ forint kár, 's így 60000 forint szenvedett 60000szer $^7/_{80}$ forint kárt =5250 forintot, 's ezért fizet néki a' társaság 5250×0·17=892·5 forintot.

13) Egy más hajón 7 tulajdonos' portékái voltak 1000, 900, 600, 8100, 5000, 3000 és 2400 forint értékkel; szélvész támadván, a' 3 első kereskedő' portékái legnehezebbek lévén, kihányattak a' hajóból 's így 2500 forint elveszett; a' kárt a' 7 közt egyformán kell felosztani, mennyit tartozik a' 4 utolsó kereskedő a' 3 elsőnek megtériteni?

A' hét érték' öszvese = 21000 forint, a' veszteség =2500.

$\frac{2500}{21000}=\frac{25}{210}$ lesz az egyes részek' sokszorozója. Elosztván így a' mindegyikre eső kárt:

$1 = 119\,^{1}/_{21}$
$2 = 107\,^{3}/_{21}$
$3 = 71\,^{9}/_{21}$
$4 = 964\,^{6}/_{21}$
$5 = 595\,^{5}/_{21}$
$6 = 357\,^{3}/_{21}$
$7 = 285\,^{15}/_{21}$

Öszves $= 2500$—

Kell tehát az elsőnek megtériteni:

	$1000 - 119\,^{1}/_{21}$	forintot	$= 880\,^{20}/_{21}$
a' másodiknak	$900 - 107\,^{3}/_{21}$	„	$= 792\,^{18}/_{21}$
a' harmadiknak	$600 - 71\,^{9}/_{21}$	„	$= 528\,^{12}/_{21}$

mennyiben részesül ezen térítésben a' 4 utóbbi kereskedő külön külön?

14) A' romai lex falcidia szerént a' fő successor a' hátramaradott vagyon' negyedét előre kiveheti, ha a' többi követelő' részei a' hagyomán' $^{3}/_{4}$ részét felyülmulják 's a' maradott $^{3}/_{4}$ rész osztatik el a' többi legatarius közt a' végakarat' értelme szerént. A' testáló, fő successorának nevezvén ki az elsőt, a' másodiknak 800, a' harmadiknak 1000, a' negyediknek végre 600 forintot hagyott; de mivel az egész vagyon csak 2600 forintból állott, mennyiben részesül mindegyik?

Az öszves hagyomány $= 2600$ f. a' 3 utóbbi' követelő része $= 2400$ f. Az első elvévén egy negyedét a' hátra hagyott 2600 forintnak $= 650$ forintot, marad felosztásra $= 1950$ f. ezt kell tehát a' 3 utóbbi közt felosztani a' már kijelelt mívelet szerént.

Az egyszerű kamatok' számitása.

195. A' jövő kérdésekben 5öt száztól vévén, az évi kamat $^5/_{100}={}^1/_{20}=$ huszadrésze lesz a' tőkének, ezt tehát $^1/_{20}$al sokszorozván, megleljük kamatjait.

15) Mennyit kamatoz 480000 forint 3 év alatt?

a) Egy év alatt $^{480000}/_{20}=24000$, tehát 3 év alatt 3szor $24000=72000$ forintot.

Lesz a' tőke 3 év után $480000+72000=552000$ forint.

b) 100 forint évi kamatja - - - - - $=5$ forint
1 forinté - - - - - - - - - - - - $={}^1/_{20}$ „
1 forint 3 évi kamatja - - - - $=3.{}^1/_{20}={}^3/_{20}$ f.
1 forint értéke 3 év mulva $=1+{}^3/_{20}={}^{23}/_{20}$ f.
lesz tehát 480000 forint 3 év mulva $=480000.{}^{23}/_{20}=$ $=552000$ forint.

c) Az egy évi kamat megtaláltatik tehát, ha a' tőkét $^1/_{20}$al, vagy $^5/_{100}$al sokszorozzuk; az utóbbi sokszorozás könnyebb, mert a' tőkét az 5eli sokszorozás után 100al elosztani két jegy elvágása által könnyű.

p. o: 6545 f. évi kamatja $=\frac{6545.5}{100}=327\cdot25=327$ forint 15 kr.

d) még egyszerübben pedig, ha az adott tőke kettővel elosztatik, elvágván eleinte egy jegyét jobbra:

$$6545.{}^1/_{20}=\frac{654\cdot5}{2}=327\cdot25.$$

Ha fél évi kamat számíttatik, az elosztás 4el történik kettő helyett, mert a' kamat fél annyi; a' fertály évi pedig 8al, mindegyik esetben elvágván jobbra egy jegyét a' tőkének.

6545 f. 5% félévi kamatja $=\frac{654\cdot5}{4}=163\cdot625$

6545 f. $^1/_4$ évi kamatja $=\frac{654\cdot5}{8}=81\cdot8125$ forint.

Ha több évi kamat számitandó, mindegy, akár a' tőkét sokszorozzuk az elosztás előtt az évek számával, akár az egy évre talált kamatot, vagy pedig igy:

Valamely tőke' évi kamatja $=\frac{5}{100}$, két évi lesz $\frac{10}{100}$, 3 évi $\frac{15}{100}$, 4 évi $\frac{20}{100}$'s igy tovább; sokszoroztatván tehát a' tőke 5, 10, 15, 20 's a' t.vel, a' származatból 2 jegy elvágatik mint tizedes forint.

16) Mennyit ér valamelly, bizonyos időben fizetendő tőke készpénzben? vagyis; mit lehet valamelly tőkéért készpénzben mindjárt lefizetni, melly tőke csak távolabb időben lenne fizetendő?

A' bizonyos idő mulva fizetendő tőke, származata az ezen idő alatt nőtt forint' és az eredeti tőkének; ha tehát a' jövőben fizetendő tőkét azon forintal osztjuk el, melly a' kijelőlt idő alatt nevekedett, megtaláljuk az eredeti tőkét.

560000 forint 40 holnap mulva fizetendő, mennyit lehet érette készpénzben adni mindjárt?

12 holnap alatt ád 1 forint $\frac{1}{20}$ f. kamatot.

1 holnapra tehát $\frac{1}{20.\,12}$ forintot.

40 holnapra 40 ennyit $=\frac{40}{20.\,12}=\frac{1}{6}$ forintot; ér tehát 40 holnap után egy forint $1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$ forintot, elosztván 560000ret $\frac{7}{6}$ által, a' részes$=$480000 forint; ez volt az eredeti tőke 's ennyit lehet mindjárt fizetni.

17) Mennyi idő alatt lesz 480000 forintból 560000 f.?

A' két tőke közti különbség $=$ 80000 forint, azt kell tehát keresni, mennyi időre kell 480000 forintot kiadni, hogy 80000 forintot kamatozzon.

Egy forint' évi kamatja $=\frac{1}{20}$ forint lévén, 480000 forint kamatja $=\frac{480000}{20}=24000$ forint.

Ha tehát 24000 forint egy évi kamatja 480000 f.nak, 1 forint kamatja lesz $=\frac{1 \text{ év}}{24000}$'s így 80000 forint' kamatja $=\frac{80000.1\text{év}}{24000}$, vagy $^{10}/_{3}$ év $=$ 3 év 4 holnap $=$ 40 holnap.

18) 480000 forint tőke 40 holnap mulva kamatjaival együtt 560000 forint; kérdés hány proCentora ($^0/_0$) volt kiadva?

A' kamat 40 holnap alatt 80000 forint 480000 forintól, lesz tehát 1 forintól 40 holnap alatt $\frac{80000}{480000}={}^1/_6$ for.

1 forint' kamatja egy holnap alatt$=\frac{1}{6.40}=\frac{1}{240}$forint 's így 12 holnap alatt $=\frac{12}{240}=\frac{1}{20}$ és 100 forint kamatja egy év által $^1/_{20}.100=5$ forint; az az: a' tőke $5^0/_0$ra volt kiadva.

19) 480000 forint tőkéből 40 holnap alatt 560000 forint lett. Mennyi lesz 86481 forintból ugyan azon $^0/_0$val 80 holnap alatt?

Az elébbi példa szerént 1 forint 80 holnap alatt $^1/_3$ forintot kamatoz 's így 86481 for. sokszoroztatván $^1/_3$al, a' részes $=28827$ f.

Érni fog tehát 86481 forint 80 holnap mulva 115308 forintot.

20) Valamelly tőke, hozzáadván kamatjait, 5 holnap mulva 1235 és 16 holnap mulva 1312 forintot ér.

Az eredeti tőke 's a' $^0/_0$ kerestetik?

1235 és 1312 közt 77 a' különbség, 5 és 16 közt pedig 11.

A' tőke következéskép 11 holnap alatt 77 forintal, 's egy holnap alatt $^{77}/_{11}=7$ forintal nevekedett 's így 5 holnap alatt 5ször 7=35 forintal.

Mivel a' tőke 5 holnap mulva = 1235 f. volt, lesz 5 holnap előtt = 1235—35=1200 forint minden holnapra 7 f. kamattal, ád 12 holnapra vagy 1 évre 7.12 =84 forintot; ha tehát 1200 forint 84 forintot kamatoz, 100 forint $^{84}/_{12}$ forintot fog adni, ez pedig =7 forint 's így a' tőke $7^0/_0$ra volt helyezve.

Az előre váltás' (Escompte) regulája.

196. Escompte-nek vagy előreváltásnak neveztetik azon pénz, melly visszatartatik akkor, ha valamelly váltó, a' helyett hogy bizonyos idő lefolyta után fizettetnék, mindjárt készpénzben megkívántatik.

Az előreváltásnak két neme van:

1) A' *belső elővaltás* nem különböz az egyszerű kamat számítástól és csupán a' kamatok vonatnak le a' meg nevezett időre, mint láttuk (16)

2) A' *külső elővaltás* az, ha a' már kamatjaival nagyobbitott tőkétől vétetik kamat, nem pedig mint a' belső előváltásnál, csak az eredeti tőkétől; 's így nem csak az eredeti tőkétől, de a' megnevezett idő alatti kamatjaitól is vétetik kamat p. o:

Ha 100 forintot egy év mulva kellene fizetni 's mindjárt megkéretik, azon 5 forint kamat, mellyet egy év alatt hozna, levonatik; az az: ha egy év mulva 105 forintot kellett volna fizetni, most 105—5=100 forint fizettetik a' belső előváltás szerént; de a' külső előváltás szerént a' 105 forint' évi kamatja vonatik le, az az: $^{105}/_{20}=5{\cdot}25$ forint, 's így csak 105—5·25=99·75 forint fizettetne 105 helyett. Ha ezen 99·75 forintot

$5^0/_0$ kamatra tennénk, ez egy év alatt csak $\frac{99 \cdot 75}{20}=$

$=4 \cdot 7375$ forintot hozna.

Ha kérdezzük, melly $^0/_0$ra kellene $99 \cdot 75$ forintot helyezni, hogy 1 év alatt 105 f. legyen belőlle? így mondjuk:

$99 \cdot 75$ f. kamatjának $5 \cdot 25$ forintnak kell lenni

1 f. kamatja lesz $\frac{5 \cdot 25}{99 \cdot 75}=\frac{1}{19}$ f.

100 forinté tehát $=\frac{100}{19}=5+\frac{5}{19}$ forint.

A' külső előváltás $5^0/_0$ra e' szerént annyi, mint $5+{}^5/_{19}$ forint.

21) Mennyit kell fizetni, ha $2850 \cdot 45$ forintra szólló váltónkat mindjárt felakarjuk venni, melly 40 holnap mulva volna csak fizetendő és $6^0/_0$ra van?

100 forint' escomptja, 6 forint lévén egy évre

1 forinté lesz ${}^6/_{100}$ f. 's így

$2850 \cdot 45$ forinté $\frac{6 . 2850 \cdot 45}{100}$

1 holnapra pedig ennek 12ed része $=\frac{6 . 2850 \cdot 45}{100 . 12}$

40 holnap mulva 40 ennyi $=\frac{6 . 2850 \cdot 45 \times 40}{100 . 12}=$

$= 570.09.$

Kapunk tehát kész pénzben $2850 \cdot 45 - 570 \cdot 09=$ $=2280 \cdot 36$ forintot.

22) $2850 \cdot 45$ f. váltó, 40 holnap mulva volt fizetendő, készpénzben előreváltatott $2280 \cdot 36$ forintal, mennyi volt az escompte' $^0/_0$ja?

A' két mennyiség közti különbség $= 570 \cdot 09$, lesz.

1 forint' escomptja $\frac{570 \cdot 09}{2850 \cdot 45}={}^1/_5$ forint

100 forint escomptja tehát ${}^{100}/_5=20$ forint.

's így ha 100 forint 40 holnap alatt 20 forintot kamatoz, fog 1 holnap alatt $^1/_2$ és 12 holnap alatt $6^0/_0$t kamatozni.

A' váltó' escomptja $6^0/_0$ volt.

23) A' 2850·45 forintos váltó $6^0/_0$ escompt 2280·36 forintal előre váltatott; mennyi idő mulva lett volna fizetendő?

Az Escompte 570·09 f. lévén, 100 forint' kamatja 6, vagy 1 forinté $=^6/_{100}$ egy évre.

2850·45 forinté $2850·45 . ^6/_{100} = 171·027$ forint egy évre.

1 holnapra tehát $\frac{171·027}{12}$ escompte

lesz így egy forinté $\frac{12 \text{ h}}{171·027}$ és 570·09 forinté $=$
$\frac{12\text{h}. 590·09}{171·027} = 40$ holnap.

A' váltó 40 holnapra szóllt.

Az öszvetett kamatokról.

197. Példáinkban feltesszük, hogy a' tőke $5^0/_0$ot kamatoz, 's hogy az év' végével a' kamat a' tőkéhez adatik, úgy hogy a' jövő vagy következő évben a' kamatjával nevekedett tőke fog kamatozni; feltesszük továbbá, hogy csak az egész év' lefojta után adatik a' tőkéhez a' kamat, 's ha holnapok vannak az éveken kivűl, ezek alatt csak egyszerűen kamatoz az egész tőke, a' lefolyt évek alatt hozzá adott kamatjaival.

24) Mennyit ér 480000 forint 3 év mulva?

első felelet: 480000 forint' kamatja egy év alatt annak huszadrésze $=24000$ f.

480000 f. ér tehát az első év' végével $480000+24000=$
$=504000$ forintot.

A' második év' kezdetével 504000 fogja $^1/_{20}$ részét kamatozni $=25200$'s így lesz a' második év' lefojtával 480000 f.ból $504000+25200=529200$.

Ezen summa pénz a' 3dik év alatt 20ad részét kamatozván 26460 forintal 's ezt hozzáadván, lesz $=$ 555660 forint, mint értéke 480000 forintnak három év' lefojta után.

2dik felelet: A' mint egy évi kamat a' tőke' 20ad része, tehát az év' végén kamatjaival szaporodott tőke $^1/_{20}$ részével nagyobbodott, vagyis: $1+{}^1/_{20}={}^{21}/_{20}$ következéskép 480000 forint az első év' végével $480000.{}^{21}/_{20}$ lesz; ezen tőkének a' második év' lefojtával ismét $^1/_{20}$ része lesz kamatja, tehát $=480000.$ ${}^{21}/_{20}.{}^{21}/_{20}=480000\ ({}^{21}/_{20})^2$ épen így a' harmadik év' végén

$=480000.{}^{21}/_{20}.{}^{21}/_{20}.{}^{21}/_{20}=480000\,({}^{21}/_{20})^3=555660$ forint.

Megleljük tehát akármellyik tőkét bár melly év után $5^0/_0$ra, ha a' tőkét ${}^{21}/_{20}$ azon emelésével sokszorozzuk, a' mennyi évig kamatozott.

Közönségesen: Akármelly $^0/_0$ra legyen helyezve a' tőke, azt kell keresni, mi lesz egy forint' értéke egy év után 's ezen törtnek azon emelésével sokszorozni a' tőkét, a' hány év van a' kérdésbe foglalva.

25) 480000 f. mit ér 3 év és 4 holnap mulva?

Meglelvén a' 3 év utánni értékét $=555660$ f. csak ezen tőke' $^1/_3$ évi kamatját keresvén $=9261$, az hozzáadatik 's lesz értéke $=564921$ f. 3 év és 4 holnap mulva.

Minthogy 4 holnapos kamatja egy forintnak, egy harmada az évinek, az az: ${}^1/_3.{}^1/_{20}={}^1/_{60}$, tehát a' tőke 4 holnap mulva $1+{}^{1}/_{60}={}^{61}/_{60}$ lesz; ha 480000 f. 3 év után $=480000.({}^{21}/_{20})^{3}$, még ${}^{61}/_{60}$szor véve, 3 év és 4 holnapi értékét leljük.

$=480000.({}^{21}/_{20})^{3}.{}^{61}/_{60}=555660.{}^{61}/_{60}=564921$ for.

Ha tehát az évek után holnapok is következnek, elég egy forint' értékét keresni a' holnapok után 's ezen törtszámmal sokszorozni a' már megtalált évekutánni tőkét.

26) Valaki 2 év és 11 holnap mulva 480000 forintot tartozik fizetni, váltóját csak 6 év' és 3 holnap' lefojta után akarja kielégíteni; kérdés mennyit ér váltó levele?

6 év 3 holnap és 2 év 11 holnap közt 3 év és 4 holnap a' különbség, tehát a' kérdés (25)re visz vissza $=564921$ f.

27) Mennyi idő alatt lesz 480000 forintból 564921 f. kamattól kamatot számítván?

Megkeresvén évről évre 480000 f. értékét, a' 3dik év után ez 555660, a' negyedik után pedig 583443 f. mivel 564921 ezen két szám közt van, az idő is 3 és 4 év között lesz.

Elég tehát 564921 és 555660 (a' 3 évi érték) közti különbséget $=$ 9261 forintot keresni és hogy hány holnap alatt kamatozott az 555660 forint 9261 forintot.

Tudván hogy 12 holnap alatt 555660 f. 27783 forintot kamatoz, mondhatjuk, hogy mivel 27783 forint 12 holnapnak felel meg,

$$1 \text{ forint} = \frac{12\text{h}}{27783}$$

's így lesz 9261 f. $=\dfrac{12\text{h}}{27783}\times 9261$ vagy is 4 holnap:

a' keresett idő tehát 3 év és 4 holnap.

28) Valaki 11000 forintal tartozván, évenként fizet kamatul 2200 forintot; ő mind a' tőkét, mind kamatjait 2 év alatt vissza akarván fizetni két egyenlő rátában mindegyik év' végével: a' két fizetés értéke kívántatik?

11000 f. évi kamatja =2200 f. lévén, egy forinté $\frac{2200}{11000}={}^1/_5$'s így egy forint az év' végével lesz $1+{}^1/_5$ $={}^6/_5$ forint; lesz tehát 11000 f. értéke a' második év' végével $=11000.({}^6/_5)^2=15840$ f.

Ha tehát a' második év' végével fizetné le, úgy 15840 forintot kellene fizetnie; de minthogy az első fizetés a' második év' végével ${}^6/_5$ részét tészi értékének, a' második pedig ${}^5/_5$ részét, a' két eggyes fizetés a' második év' végével ${}^6/_5+{}^5/_5={}^{11}/_5$ részit éri az elsőnek.

Ezt előre bocsájtván

mivel ${}^{11}/_5$ része az első fizetésnek 15840 f.

lesz ${}^1/_5$ része $\frac{15840}{11}=1440$ f.

az első fizetés lesz tehát 5ször 1440 f. =7200 f.

's valóban az első év után 7200 forintot fizetvén a' tartozott 2200 f. helyett, a' tőkéből 5000 fizettetett le 's így a' második évben csak a' megmaradt 6000 forint' kamatjáról, a' 1200 forintról kell számolni, 's ez tészen tőkéjével együtt 7200 forintot, mellyet a' második év' végén lefizetvén, egész adósságát lefizette. Az illy kérdések, *annuitási* kérdéseknek neveztetnek.

A' csere' regulája.

198. Ha valamelly dolgot más ránt veszünk által, *cserélünk*.

29) Valamelly kereskedő 40 forintos posztót akar cserélni 24 forintos ezánt, de a' 24 forintos posztó' tulajdonosa nem akar cserélni különben mint 35 forintjával véve az elsőbb' posztóját. Mennyire kell tehát a' 24 forintos posztót levinni?

Mivel 40 forintból 35 lesz
lesz 1 forintból $^{35}/_{40} = ^{7}/_{8}$
a' 24et evvel' sokszorozván $24 . ^{7}/_{8} = 21$ forint a' 24 forintos posztó' vissza vitt értéke.

30) 40 forintos posztót 24 forintos casimirral akarván cserélni, hány rőf casimirt kapunk 300 rőf posztóért?

a) 300 rőf posztó árra $300 . 40 = 12000$ forint
kapunk tehát $^{12000}/_{24} = 500$ rőf casimirt.

b) A. posztó 40, a' casimir 24 forint lévén: egy forintért kapunk $^{1}/_{40}$ rőf posztót és $^{1}/_{24}$ rőf casimirt; tehát $^{1}/_{40}$ posztó $= ^{1}/_{24}$ casimir, egy rőf posztó tehát 40-szer ér annyit, mint $^{1}/_{24}$ casimir $= ^{5}/_{3}$ tehát 300 rőf posztó $= 300 . ^{5}/_{3} = 500$ rőf casimir.

199. *A' Keverékekről.*

31) Valamelly keverék áll 4 akó borból 14 forintjával és 6 akó 24 forintosból. Mennyit ér a' keverék' akója?

a' 4 akó ér 4-szer 14 = 56 forintot
a' 6 — — 6-szor 24 = 144 —

a' 10 akó tehát ér = 200 forintot 's ennek tizede = 20 f.

Az illy kérdésekre megfelelünk, ha a' mennyiséget két eggyes értékeikkel sokszorozzuk 's valamennyi származatot öszveadván, azt az öszvesmennyiséggel elosztjuk; a' részes lesz a' keverék' értéke.

32) Mennyit kell 14 és 24 forintos borbul öszvekeverni, hogy a' keverék' akója 20 forintot érjen?

Minden akó 14 forintos bor 6 forint nyereséget adna, ha 20 forintért adatna el; minden akó 24 forintos pedig 4 forint veszteséget; következésképp, hogy a' veszteség a' nyereséget helyre hozza, elég 4 akó 24 forintost 6 akó 14 forintossal öszvekeverni 's a' 10 akó keveréknek 20 forintra jön akója.

33) 12 akó 15 forintos borhoz mennyi vizet kell adni hogy akóját 9 forintért lehessen adni? feltévén hogy a' víz semmiben sem kerűl.

a) Minthogy a' keverék' értéke ugyan az, ha akóját 9 forintal sokszorozzuk, mint 12 akó 15 forintal sokszorozva = 180; tehát 180at 9el elosztván, lesz a' keverék 20 akó; 20—12 pedig = 8 's igy 8 akó vízre lesz szükség.

b) Mindegyik akó bor, eladván azt 9 forintért, 6 forint veszteséget hozna, 's mindegyik akó víz 9 forint nyereséget, ha tehát 9 akó 15 forintos bort 6 akó vízzel keverünk, a' keverék' akója 9 forintot ér; mert a' veszteség 9-szer 6=54; a' nyereség pedig 6-szor 9=54 egyenlő lesz.

Vagy: 6 a' kilencznek $^6/_9$ed és egyszersmind $^2/_3$ része; a' 12 akó 15 forintos borhoz $^2/_3 . 12=8$ akó víz kell.

34) Hogy kell 5, 10, 14 és 24 forintos bort keverni, hogy akója a' keveréknek 12 forintot érjen?

A' 12 forintnál ócsobbakkal és a' 12 forintnál drágábbakkal őnkényes keverékeket csinálván, a' két keverék' értéke közt lesz továbbá a' kérdés.

P. o: Ha 4 akó 5 f. és 6 akó 10 forintost keverünk, a' keverék' akója 8 forintot fog érni, állván $^4/_{10}$ akó 5 és $^6/_{10}$ akó 10 forintosból.

Ha így 7 akó 14 és 3 akó 24 forintosat keverünk, akója 17 forintot fog érni 's áll $^7/_{10}$ akó 14 és $^3/_{10}$ akó 24 forintosból. Most már az a' kérdés, hogy kell a' 8 és 17 forintos bort keverni, hogy 12 forintot érjen akója? Vagy minden 8 forintos, 12őn adott akó, 4 forint nyereséget, minden 17 forintos 5 forint veszteséget hozna, 's így elég 5 akó 8 és 4 akó 17 forintost keverni, hogy akója 12őt érjen.

Ebből könnyű megtalálni, mennyi van az egyik egyik borból közötte? mert:

1 akó a' 8 forintosból áll	$^4/_{10}$	5 f. és	$^6/_{10}$ 10 forintosból	
5 — tehát	$^{20}/_{10}$	5 f. és	$^{30}/_{10}$ 10	—
1 — a' 17 — áll	$^7/_{10}$	14 f. és	$^3/_{10}$ 24	—
4 — tehát	$^{28}/_{10}$	14 f. és	$^{12}/_{10}$ 24	—

ezen 9 akóban van tehát $^{20}/_{10}$ 5 f. $^{30}/_{10}$ 10 f. $^{28}/_{10}$ 14 f. és $^{12}/_{10}$ 24 forintos, vagy ha 10 annyit veszünk öszve:

az 5 forintosból	20	akó	
a' 10 —	30	—	
a' 14 —	18	—	és
a' 24 —	12	—	
	90		

s' így egy akó keverékben van: $^{20}/_{90}$ a' 5 f. $^{30}/_{90}$ a' 10 f. $^{28}/_{90}$ a' 14 f. és $^{12}/_{90}$ a' 24 forintosból.

Hogy illy keveréket végtelen sokféle mennyiségben lehet eszközleni, igen természetes, 's azért is az illy kérdéseket *bizontalanoknak* hivjuk.

35) A' jó puskapor áll 16 rész salétrom, 3 rész szén, és 2 rész kénkőből mennyit kell venni mindegyikből, ha 84 font puskaport akarunk késziteni?

A' részek öszvesen $= 16 + 3 + 2 = 21$et tesznek a' kivánt font pedig 84; ezt elosztván 21el $^{84}/_{21} = 4$ lesz tehát

$4.16 = 64$ font salétrom
$4.\ 3 = 12$ — szén és
$4.\ 2 = \ 8$ — kénkő szükséges
84 fontra.

36) A' spanyol-vagy pecsétviaszhoz kell: (ha veres) 2 rész terpentin, 3 cinobrium', 3 rész sellak és $^1/_2$ rész kréta. Mennyit kell mindegyikből venni 10 font pecsétviaszhoz?

Az öszves részek$=2+3+3+^1/_2=8^1/_2=^{17}/_2$'s a' fontok száma $= 10$; ezt elosztván $^{17}/_2$el, lesz $^{20}/_{17}$ tehát:

$^{20}/_{17}.2 = ^{40}/_{17} = 2^{12}/_{17}$ font terpentin
$^{20}/_{17}.3 = ^{60}/_{17} = 3^9/_{17}$ — cinobrium
$^{20}/_{17}.3 = ^{60}/_{17} = 3^9/_{17}$ — sellak
$^{20}/_{17}.^1/_2 = ^{10}/_{19} = ^{10}/_{17}$ — kréta
10 — font.

Az egybe - olvasztásról.

200. Ha többféle érczek olvasztatnak öszve, új ércz támad, 's ezt (alliagenak) *kevertércznek* hívjuk, darabját pedig az illy kevertércznek *rúdnak*.

Példáinkban az érczeknek csak nehézségeket vagy sujait tekintjük 's igy a' keverék' vagy olvasztottnak suja az lesz, melly az egyes érczeké öszvesen.

Ha valamelly olvasztásban $^8/_{10}$ arany van, azt mondjuk: hogy $^8/_{10}$ rész finom arany. Tehát 100 latot nyomó rúdban $^8/_{10}.100 = 80$ lat tiszta arany és 20 lat más ércz van.

Ha az olvasztásban $^7/_{10}$ arany és $^3/_{10}$ ezüst van, azt az aranyra rézve $^7/_{10}$ aranynak, az ezüstre nézve pedig $^3/_{10}$ finom ezüstnek nevezzük; 100 latban tehát 70 lat arany és 30 lat ezüst lesz.

A' régi arany pénzekben az arany $^{11}/_{12}$.

Az ujabb franczia arany és ezüst pénz $^9/_{10}$ finom, az az: $^9/_{10}$ arany vagy ezüst, és $^1/_{10}$ réz van bennök.

37) Olvasztunk 70 lat aranyat 0·90 vagy $^9/_{10}$ probával, és 30 latot $0·80 = {}^8/_{10}$ olvasztásút, melly olvasztási neve lesz a' keveréknek?

a' 70 latban van finom arany	a' 0·9 = 63 lat	
a' 30ban — — —	a' 0·8 = 24 —	
's így a' 100ban lesz..........	87 —	az olvaszt.

neve tehát 0·87.

38) Egy aranymívesnek 4 féle olvasztású arannya van:

0·05, 0·10, 0·14 és 0·24; mennyit kell mindegyikből vennie, hogy 360 Gramme 0·12 olvasztású arannya legyen?

Egy Grammet fog képzelni, ha vészen:

$^{20}/_{90}$ a' 0·05ből, $^{30}/_{90}$ a' 0·10ből, $^{28}/_{90}$ a' 0·14 és $^{12}/_{90}$ a' 0·24ből 360 nal sokszorozván, lesz a' 4 féle olvasztás:

	az 0·05ből	80
	az 0·10ből	120
	sz 0·14ből	112
's	az 0·24ből	48
		360

A' hibás helyezet' regulája.

201. Az eddigi példákat tétovázás nélkül feloldottuk, de vannak olly kérdések, mellyek az egyenes mi-

velet alól mintegy kiszöknek. Ha csak önkényesen vett számok által akarnánk az illy kérdésre felelni, sok haszontalan probát tehetnénk; a' számitás' útját tehát hypotesis által tüzvén ki, a' hibákat elkerüljük p. o:

39) Van 2 és 5 forintosunk, fizessünk 10 illy darabbal 26 forintot?

Ha 10 darab 2 forintost veszünk, értéke 20 forint 's hattal kevesebb lesz, 's így a' 10 darab' értékét nevelni kell 6 forintal a' nélkül hogy száma kissebbedne. De minden ötös, felcserélvén általa a' kettőset, 3 forintal neveli az értéket 's így a' 6 forint kipotlására nem kell többet 2 darabnál felcserélni: tehát 8 kettős és 2 ötös tészen 26 forintot.

40) 45 darab, 20 és 40 fránkos egymásmellé rakatván, 1 métre hosszaságú, a' 20 frank áltmérője 21, a' 40esé 26 millimétre.

Hány darab kell mindegyikből?

Ha 45 darab 20 frankosat veszünk egymásmellé, lesz hossza $45.21=945$ millimetre 1000 helyett: 55 millimetre toldás kell tehát, és a' 45 darab megmaradjon'. A' különbség a' 20 és 40 frankosáltmérője közt $=5$'s ha $^{55}/_{5}=11$ 40 frankost kicserélünk 11 20 frankos helyett, lesz:

34	20 frankos	$=34.21=$	714	millimetre
és 11	40 —	$=11.26=$	286	—
45 darab			$=1000$	—

A' kettős hibás helyezet.

202. Valaki megkérdeztetvén, mennyi pénz van zsebiben? igy szoll: annyival több arannyaim' ötszörös száma 30nál, mint kettese 6nál.

Itt önkényesen veszünk fel valamelly számot 's ha a' kérdésnek meg nem felel, bizonyos hibát fog mutatni; egy más önkényes szám ezen hibát helyre hozza, p. o:

1-ső *felvétel*:.....20 arany

5-ször 20=100	70nel több mint 30
2-szer 20= 40	34el több mint 6
70—34 = 36	a' hiba tehát 36.

2dik *hypotesis*:....19 arany

5-ször 19=95	65el több mint 30
2-szer 19=38	32vel több mint 6
65—32 = 33	a' hiba 33

látván, hogy a' 36 hibát 3al kevesítjük, ha az aranyok' számát 1el kissebbitjük 's így $^{36}/_{3}=12$ aranyat kell elvenni a' 20ból, hogy az egész 36 hiba elenyésszen; Zsebébe tehát volt 8 arany, mert:

5-ször 8=40 10el több mint 30

és 2-szor 8=16 is 10el több mint 6.

42. Egy tanító, almákat akarván tanítványi közt elosztani, így szóll ezekhez; ha mindegyiteknek 6ot adok még 7 marad nállam 's ha 4et adok, ugy 17 marad.

A' mint a' kiosztott almák' száma mindegyik tanulónál 6—4, 2 kettővel kissebül, a' megmaradottaké 17—7 10el nevekedik; de ezen utóbbi szám annyi kettősből áll, a' hány tanuló van, mert mindegyik 2vel kapott kevesebbet a' második esetben, tehát a' tanúlók száma $^{10}/_{2}=5$. Ha tehát a' tanító mindegyiknek hatot ád, lesz:

5.6=30 és ekkor 7 marad; 30+7=37 almája volt és csakugyan, ha mindegyiknek 4et ád; 4.5=20 ugy 17 marad, az az: 37—20=17.

43. Megkérdeztetvén az Atya, hogy mennyi idős már fia, azt felelé: éveim' száma 3 akkora mint fiamé, de 10év előtt 5-ször annyi volt. Mennyi idős volt a' fiú?

Tegyük fel a' fiú' éveit 24re, ekkor attya 72éves, 10év elött a' fiú 14, az attya 62 volt; de 14 ötszöröse = 70 és 8al több 62nél, a' hiba tehát = 8. Ha a' fiú' éveit eggyel kevesitjük, a' hiba kisebbül 2vel 's igy a' hiba 4 évnek elvétele' által elmúlik. A' fiú tehát 20éves az attya 60; volt a' fiú 10ev előtt 10, attya 50.

203. *Különbféle kérdések.*

44) Lyuk támadván egy hajón, egy óra alatt 4 koczkamétre víz foly bele, a' baj csak 3óra mulva vétetett észre 's már 12 koczkametre víz volt benn, midőn húzni kezdették a' vizet két kúttal; az első kút 3·7 koczkametre vizet, a' másik 2·3 metret húz egy óra alatt. Meddig kellett húzni, míg minden viz kijött a' hajóból?

A' 2 kút 6 koczkametre vizet húz egy óra alatt, többet kettővel mint bé foljik; osztatik a' benn lévő viz' mennyisége' tehát 2vel 's a' részes az órát teszi:

$^{12}/_{2}=6$ óra alatt megürült a' hajó.

45) Azon szám kerestetik, mellynek fele és egy nyolczada öszvesen = 60. A' két törtszám $^1/_2$ és $^1/_8$ öszvese $= {}^5/_8$, tehát a' keresendő szám' $^5/_8$ része = 60, ennek $^1/_8$ része $= {}^{60}/_5 = 12$'s így az egész szám, (itt $^8/_8$) $= \frac{60.8}{5} = 12.8 = 96$. Valóban 96nak fele $=48$, egy nyolczada 12 's ez a' kétszám öszvesen $48 + 12 = 60$.

46) Egy atya vagyona' felét fiának, harmadát lyányának, a' megmaradott 1000 forintot pedig özvegyének hagyta; mi volt vagyona 's mennyit kaptak gyermekei?

A' két gyermek' részei $^1/_2$ és $^1/_3 = {}^5/_6$ öszvesen; minthogy az egész vagyonhoz $^1/_6$ rész kell még, az 1000 forint ez a' hatodrész 's így a' vagyon $= 6000$ f. A' fiú' része 3000, a' lyányé 2000.

47) Két kút önti vizét valamelly edénybe: az egyik, egyedül folyván megtöltené $^3/_2$ óra alatt, a' másik $^3/_4$ alatt; a' vizzel teli edény kiürül 3óra alatt, ha a' rajta lévő csap megeresztetik. Kérdés, mennyi idő alatt telik meg az edény, ha a' két kút és a' csap is folynak egyszerre?

Az első kút megtölti az edényt maga $^3/_2$ óra alatt, kétszer tehát 3óra alatt, $^2/_3$-szor 1 óra alatt.

A' második kút éppen így tölti $^4/_3$ részét egy óra alatt, a' csap pedig kiüriti $^1/_3$ részét egy óra alatt.

Lesz tehát a' 3féle folyó egy óra alatt $^2/_3 + {}^4/_3 - {}^1/_3 = {}^5/_3$; $^5/_3$-szor megtelik tehát egy óra alatt 's így $^1/_3$-szor $^1/_5$ rész óra alatt, következésképp teli lesz egyszer $3.{}^1/_5 = {}^3/_5$ óra alatt.

48. Két Kurir, egy útnak megy, az első 138 mértföldre elébb van midőn a' második elindul, az első 40 órával indult el elébb; az első 3 mértföldet halad 4 óra alatt, a' másik 6 mértföldet 7óra alatt. Mennyi idő alatt éri el a' második az elsőt és hol?

Az első $^3/_4$ a' másik $^6/_7$ mértföldet tesz egy óra alatt.

Az első tehát 40 óra alatt $40.{}^3/_4 = 30$ mértföldet tett.

Igy az első már 138+30=168 mértföldnyire van, a' midőn a' másik elindul, 's ez csak 108 mértföldnyire érheti el, vagy is közelít a' második hozzá $^6/_7 = {}^3/_4$ $= {}^{28}/_3$ óra alatt 's végre 168 mértföldet $168 . {}^{28}/_3 =$ 1568 óra alatt.

A' második kurir eléri tehát az elsőt 1568 óra járás után, ez alatt az idő alatt az első $1568+40=1608 . {}^3/_4$ mértföldet tett =1206 hozzá adván az elébbi 40 óráját. A' második pedig $1568 . {}^6/_7 = 1344$ mértföldet. A' két szám közti különbség 1344—1206=138 az elindulási két hely közti.

49) Az óra délt mutat; kérdés, hányszor találkozik a' perczmutató az óra mutatavól éjfélig 's melly órában lesz mindegyik találkozás ?

A' kör 60 perczre lévén osztva, a' perczmutató akkor találkozik az óra mutatóval először, ha ennél 60nal több osztájt járt meg, vagy is: ha a' két mutató' útja' különbsége=60' lesz.

A' percz-mutató egy óra alatt 60 osztályt fut be, az óra mutató pedig 5öt. A' különbség e' szerént a' két mutató közt:

60—5=55 egy órában, vagy:

1 osztájban $^1/_{55}$ óra

60 osztályban $^{60}/_{55} = {}^{12}/_{11}$ óra $= 1^0\ 5'\ {}^5/_{11}$

's ez lesz az első találkozás' ideje.

A' mutatók ugyan azon sebességgel menvén, az ismét találkozások' ideje mindenkor $= {}^{12}/_{11}$ óra lesz 's így a' második $= 2(1^0\ 5'\ {}^5/_{11})$ a' harmadik $= 3(1^0\ 5'$ ${}^5/_{11})$'s a' t. míg végre a' 11-dik találkozás éppen éjfélben történik, az az: ott, a' hol egymástól eleinten elváltak.

50) Egy Brig, tengeri rablót vadász, de ennek hajója 54 kilometre vagy 64000 metre távoly amattól és 15 kilometret halad egy óra alatt. Kérdés hány óra alatt tüzelhet a' brig reá, ha 25 kilometert halad egy óra alatt 's ágyú golyói 500 metrere érnek?

Hogy a' csata elkezdődhessen, szükséges hogy a' két hajó 64000—500=63500 metrere közelitsen egymáshoz.

A' Brig 10 kilometre = 10000 metrevel megy sebessebben mint a' korszár 's így egy óra alatt ennyivel közelít hozzá 's e' szerént $\frac{63500}{10000} = 6^0\ 21'$ mulva ágyúzhatja,

51) Három játékos megegyez abban, hogy a' vesztő a' két másik' pénzét kettőzteti. Játékát rendre mindegyik elvesztette 's a' 3 játék után maradt az elsőnek 24 a' másodiknak 28, és a' harmadiknak 14 forintja. Mennyi pénze volt kinek kinek a' játék kezdetével?

A' harmadik játék végével volt az elsőnek 24, a' másodiknak 28, a' harmadiknak 14 forintja. A' harmadik játékos elvesztvén játékát, duplázta a' másik kettő' pénzét ' így ezeknek a' második játék' végével volt csak:

$^{24}/_2$ és $^{28}/_2$ az az: 12 és 14 forintjuk, volt pedig a' harmadiknak 40 forintja, így leljük meg, hogy az első játék' végével volt az elsőnek 6, a' másodiknak 40, a' harmadiknak 20 forintja, a' játék' kezdetével pedig:

az 1-nek=36, a' 2-nak=20, a' 3-nak 10 forintja.

IX. SZAKASZ.

A' VISZONOK ÉS ARÁNYOKRÓL.

1 §. Arithmetikai és geometriai viszonokról.

204. Ha két mennyiség egymásközt jön tekintetbe, *viszonba* hozatik.

A' viszon tehát két mennyiség' öszvehasonlítása, keresvén, hogy támada egyik a' másikból, vagy hogy támadhatott?

Hogy csak egynemű mennyiségek jöhetnek viszonba, természetes.

Az egymáshoz hasonlított mennyiségeket ezen esetben a' *viszon' tagjainak* nevezzük; az elsőt *előtagnak*, a' másodikat *hátulsó tagnak*. Ha mind a' két tag egyenlő, úgy a' viszont *egyenlőség' viszonának* hívjuk. Ha nem egyenlők, a' viszon vagy *nevekedő* vagy *kisebbedő*, a' mint a' hátulsó tag nagyobb vagy kisebb az előtagnál.

205. Ha a' hátulsó tag öszveadás vagy levonás által származott az előtagból, ekkor a' viszon *arithmetikai*, vagy is: *különbségi*. Igy 18 és 6 közt a' *viszon*, vagy *különbség* $= 18 - 6 = 12$. Valamelly arithmetikai viszon' jelölésére a' $\div$ jegyet használjuk' 's írjuk: $18 \div 6$.

206. Ha a' hátulsó tag sokszorozás vagy elosztás által származott az előtagból, ekkor a' viszon *geometriai*; azon szám vagy faktor, melly a' hátulsó tagot származtatta, a' *részes* vagy *mutató*, 18 és 6 közt a' geometriai viszon $= {}^{18}/_{6} = 3$, *itt* 3 *a' mutató*. A' geometriai viszon (:) al jelöltetik 's 18:3 mondatik: 18 van a' 3hoz.

Ha a' kétféle viszon' tagjait *a* és *b*vel fejezzük ki, az arithmetikai viszonban a' különbséget *k*val; a' geometriaiban a' részest *r*rel, lesznek a' közönséges kifejezések:

az arithmetikai viszon $a \div a \pm k$, $18 \div 8 \pm 6$ az elébbi példában

a' geometriai pedig $a:ar$ $18:3.6$

mert az arithmetikai viszonban $b = a \pm k$ $18 - 6 = 12$

a' geometriaiban $b = ar$ vagy $\frac{a}{r}$, ${}^{18}/_{3} = 6$

207. Ha a' tagok megfordíttatnak 's az előtagból hátulsó lett, a' viszon *megfordított viszonnak* neveztetik, 's az elébbeni *egyenesnek*.

A' viszonok egyenlők egymásközt, ha egyenlő különbségüek, vagy egyenlő mutatójok van. Igy: $3 \div 7$, $7 \div 9$ egyenlők, mert a' különbség közöttök$=2$; egyenlő 3:12 és 5:20 is, mert ${}^{12}/_{3} = {}^{20}/_{5} = 4$.

208. Az arithmetikai viszon nem változik, ha mind két tagjához ugyan azon szám adatik vagy belőlle elvétetik:

$7 \div 5$ annyi mint: $7+3 \div 5+3$ az az: mint $10 \div 8$ és annyi mint: $7-3 \div 5-3$ mint $4 \div 2$.

Ha a' geometriai viszon' tagjait ugyan azon számmal sokszorozzuk vagy elosztjuk, a' viszon nem változik: $24:6 = 24.4:6.4 = {}^{24}/_{6} : {}^{6}/_{6}$

209. Ha több geometriai viszonnak ugyan az részese vagy mutatója, a' viszonok öszves elő tagjának is az a' mutatója, az az: az előtagok' öszvese ugyan azon viszonban áll a' hátulsó tagok' öszvesével, a' mellyben az egyes viszonok' tagjai állnak:

3:6, 4:8, 7:14, 13:26 úgy állnak viszonban, mint $3+4+7+13:6+8+14+26=27:54$.

Két egyenlő geometriai viszon' elő tagjai' öszvese vagy különbsége azon viszonban van a' hátulsó tagok' öszvesével vagy különbségével, mellyben az egyes viszon' tagjai állnak:

$4:8,\ 7:14=4\pm7:8\pm14=3:6=11:22$

2 §. Az arányokról.

210. Két egyenlő viszon öszvehasonlítása vagy egyeztetése *aránynak* hívatik, melly ismét arithmetikai vagy geométriai, a' mint a' viszonok arithmetikaiak vagy geomatriaiak voltak. Igy:

$5\div7=8\div10$ arithmetikai

$5:10=8:16$ geometriai arány.

A' tagok' első 's utolsóját: *külső tagoknak*: a' második és harmadikát: *belső tagoknak* nevezzük.

Az első és harmadik tag ezen kivül még *egyneműek*, mert belőllök származnak a' 2-dik és 4-dik tagok.

Ha a' két közép tag egyenlő, az arány *folyó* vagy *egybefüggő*, így:

$5\div7=7\div9$ folyó arányzat, mint:

$4:12=12:36$ is, és rövidítve igy is lehet irni:

$5\div7\div9$, $4:12:36$, a' hol 7 és 12 *közép arányzatoknak* neveztetnek.

A' geometriai arányban a' második tag úgy származik az elsőből, mint a' negyedik a' harmadikból, vagy: a' negyedig tag éppen annyiszor nagyobb vagy kisebb a' 3diknál, a' mennyiszer nagyobb vagy kisebb a' második tag az elsőnél. Az itt kimondott, mindenkor probája lesz valamelly geometriai arány valóságának.

3 §. Az arithmetikai arányról.

211. Minden arithmetikai arányban, a' külső tagok' öszvese egyenlő a' belső tagok' öszvesével, 's ha csak egy közép tag van, ennek duplájával.

$4 \div 7 = 5 \div 8$ „ $4 + 8 = 7 + 5$

$4 \div 7 \div 10$ „ $4 + 10 = 7 + 7 = 2.7$

ha tehát valamelly két szám' öszvese, egyenlő más két szám' öszvesével, a' 4 szám arithmetikai arányban van 's az egyik kettő a' külső, a' másik kettő a' belső tagokat képzeli.

212. Az arithmetikai arány' negyedik tagja, egyenlő a' két közép tag öszvesével, levonván ebből az első tagot.

2-szor A' harmadik tag egyenlő a' két külső öszvesével, levonván ebből a' másodikat.

3-szor A' második tag egyenlő a' külsők' öszvesével, levonván ebből a' harmadik tagot.

4-szer Az első tag egyenlő a' közép tagok' öszvesével, levonván ebből az utolsó tagot.

5-ször A' közép tag végre, ha csak egy van, egyenlő a' két külső tag' öszvese' felével.

Az itt mondottakat példába vévén, következőkép fogjuk akármellyik tagot meglelni, ha a' 4 közül 3 isméretes.

Legyen az arány' 4 tagja: a, b, c, d, vagy számokkal is:

3, 5, 4, 6 vagy: $a \div b = c \div d$ „ $3 \div 5 = 4 \div 6$

1) kívántatik a' 4dik tag: $d = b + c - a$ „ $6 = 5 + 4 - 3$

2) — — 3dik — $c = a + d - b$ „ $4 = 3 + 6 - 5$

3) — — 2dik — $b = a + d - c$ „ $5 = 3 + 6 - 4$

4) — az 1ső — $a = b + c - d$ „ $3 = 5 + 4 - 6$

5) — végre a' középső, ha egy van

$a \div b \div e$ $\quad b = \frac{a+c}{2}$

$3 \div 5 \div 7$ $\quad 5 = \frac{3+7}{2}$

213. Az arithmetikai arány 4 tagjait 8 félekép lehet írni a' nélkül, hogy értéke 's valósága változna.

1) $a \div b = c \div d$
$3 \div 5 = 4 \div 6$ az adott

2) $a \div c = b \div d$
$3 \div 4 = 5 \div 6$ a' közép tagok' felcserélése által

3) $d \div b = c \div a$
$6 \div 5 = 4 \div 3$ a' külső tagok' felcserélése által

4) $b \div a = d \div c$
$5 \div 3 = 6 \div 4$ a' viszonok' megfordítása által

5) $d \div c = b \div a$
$6 \div 4 = 5 \div 3$ a' külső 's belső tagok' áltcserélése által

6) $b \div d = a \div c$
$5 \div 6 = 3 \div 4$ a' harmadik eset' viszoninak megfordítása által

7) $c \div d = a \div b$

$4 \div 6 = 3 \div 5$ az első eset' viszonai' felcserélése által

8) $c \div a = d \div b$

$4 \div 3 = 6 \div 5$ a' második eset' viszonai' változtatása által.

's mind ezen 8 esetben a' külső tagok' öszvese, egyenlő a' belső tagok' öszvesével, az az;

$a + d = b + c$ „ $3 + 6 = 5 + 4$,

4 §. A' geometriai arányokról.

214. Ezen arányoknak haszonvéte a' geometriában igen kiterjedett 's onnan vette is nevezetét, 's mivel hogy az arithmetikaiaknak ritkán szokás hasznokat venni, mindenkor geomotriait értünk, ha arányról van szó.

Minden geométriai arányban a' külső tagok' származatja, egyenlő a' belső tagok' származatjával:

ha $a:b = c:d$ úgy $ad = bc$, valamint:

ha $3:9 = 5:15$ úgy $3.15 = 9.5$

ha csak egy közép tag van: $a:b:e$ „ $3:9:27$, akkor a' külső tagok' származata egyenlő a' közép tag' négyszegével, az az:

$$ae = b^2 \text{ és } 3.27 = 9^2$$

215. Ez által, ha 3 tag adatott, a' 4diket mindég meg lehet találni.

Ha az arányban: $a:b = c:d$ $ad = bc$,

úgy $a = \frac{bc}{d}$ és $d = \frac{bc}{a}$

$3:9 = 5:15$ben p. o: $3 = \frac{9.5}{15}$ és $15 = \frac{9.5}{3}$

Valamelly külső tag megtaláltatik tehát, ha a' belsők' származata az esmért másik külsővel elosztatik.

Éppen úgy következik $ad = bc$, $3.15 = 9.5$ ből

$$b = \frac{ad}{c},\ c = \frac{ad}{b}\ \text{és:}\ 9 = \frac{3.15}{5},\ 5 = \frac{3.15}{9}$$

Valamelly közép vagy belső tag megtaláltatik, ha a' külső tagok' származata az ismért egyik közép tag által elosztatik.

Ha tehát a' 3, 7 és 12 közt a' 4dik arány szám kerestetne, ezt *x*nek hívván lesz;

$$x = \frac{7.12}{3} = 28.$$

Az aránynak, egy közép tagja lévén, $ac = b^2$ ből következik:

$$a = \frac{b^2}{c} \quad c = \frac{b^2}{a}\ \text{és}\ b = \sqrt{ac}$$

$$3 = \frac{9^2}{27} \quad 27 = \frac{9^2}{3}\ \text{és}\ 9 = \sqrt{3.27}.$$

Valamelly külső tag megtaláltatik, ha a' közép tag' négyszege a' másik külsővel elosztatik.

A' közép tag pedig, ha a' két külső származatából a' négyszeg gyökér vétetik.

216. Minden arányban a' 4 tagot 8 féleképp lehet változtatni. Tartsuk meg a' két arányt:

$a:b = c:d$ és $3:9 = 5:15$

1) $a:b = c:d$

$3:9 = 5:15$, ebből lesz a' közép tagok cserélése által

2) $a:c = b:d$

$3:5 = 9:15$, ha az első eset' viszonait megforditjuk, lesz:

3) b:a=d:c
9:3=15:5, ha a' második eset' viszonait megforditjuk, lesz:

4) b:d=a:c
9:15=3:5, ha a' második' viszonait felváltjuk:

5) c:a=d:b
5:3=15:9, ha az első eset' viszonait felváltjuk lesz:

6) c:d =a:b
5:15=3:9 ha az első eset' külső tagjait felcseréljük, lesz:

7) d:b=c:a
15:9=5:3 's végre ha a' második eset' külső tagjait felcseréljük.

8) d:c=b:a
15:5=9:3
's minden irányban ad=bc és 3.15=5.9

217. Az arány nem változik, ha egy közép és egy külső tag valamelly számmal sokszoroztatik vagy elosztatik:

a:b=c:d=am:bm=c:d

3:9=5:15=3·2:9=5·2:15

vagy közönségesen: amn:bmp=cnr:drp
akármelly szám legyen m, n, p és r
's ha példánkban m=2, n=4, p=6, r=7, tehát:

3:9=3:5=3.2.4:9.2.6=5.4.7:15.6.7

mindegyik különböző számmal (2,4,6,7) lévén egy külső 's egy belső tag sokszorozva; 's így:

$$a:b=c:d=\frac{a}{mn}:\frac{b}{mp}=\frac{c}{nr}:\frac{d}{rp}$$

$$3:9=5:15=\frac{3}{2.4}:\frac{9}{2.6}=\frac{5}{4.7}:\frac{15}{6.7}$$

218. Az arányok' ezen tulajdona által könnyű a' törtszámokat, ha illyenek előjönnek, változtatni 's az arányt egyszerű alakban adni, sokszorozván a' tagokat olly számmal, a' millyenek alkalmasok. Ha p. o: ezen arányban:

$$7\,{}^1/_5 : 9\,{}^1/_7 = 2\,{}^1/_{10} : x, \text{vagy} \frac{36}{5} : \frac{64}{7} = \frac{21}{10} : x$$

az első és 3dik tagot 10el, a' második és 4diket pedig 7el sokszorozzuk, lesz belőle $72:64 = 21:7x$.

Ha ezen arány' két első tagját 8al, a' két utolsót pedig 7el elosztjuk, lesz belőle $9:8 = 3:1x$, ebben ismét ellehet az első és 3dik tagot 3 által osztani 's lesz az arány' legegyszerübb kifejezése:

$3:8 = 1:x$

E' szerént a' tagok' faktorait a' két külső és két belső tagok közt az arány' változtatása nélkül fel lehet cserélni: P. o:

$3.4:5.7 = 6:10x$ ád:

$4.10:5 = 7.6:3x$, vagy:

$4.2:1 = 7.2:x$, vagy:

$4:1 = 7:x$.

219. Minden arány ezenkívül következő tulajdonokkal bír:

1) A' két első tag' öszvese úgy áll a' második taghoz, mint áll a' két utolsó' öszvese az utolsóhoz: $18:6 = 12:4$ p. o:

$18+6:6 = 12+4:4$ vagy: $24:6 = 16:4$

2) A' két első tag' különbsége úgy áll a' második taghoz, mint a' két hátulsóé az utolsóhoz:

$18-6:6 = 12-4:4 = 12:6 = 8:4$.

3) A' két első tag' öszvese úgy áll a' két utolsó tag' öszveséhez, mint a' második tag a' negyedikhez, vagy mint az első a' 3dikhoz:

$18+6:12+4=6:4$, vagy: $24:16=6:4$

$18+6:12+4=18:12$, vagy: $24:16=18:12$

4) A' két első tag' és a' két utolsó tag' különbségei úgy állnak, mint az első és 3dik, vagy mint a' második és 4dik tagok:

$18-6:12-4=6:4$ „ $12:8=6:4$

$18-6:12-4=18:12$ „ $12:8=18:12$

5) A' két első tag' öszvese úgy áll a' két utolsó tag' öszveséhez, mint a' két első tag' különbsége áll a' két utolsó tag' különbségéhez.

$18+6:12+4=18-6:12-4$ „ $24:16=12:8$.

6) 7) Az elő tagok' öszvese vagy különbsége, úgy áll a' hátulsó tagok' öszvese vagy különbségéhez, valamint áll mindegyik előtag a' hátulsóhoz.

A' $18:6=12:4$ arányból lesz:

$18\pm12:6\pm4=12:4=18:6$

itt mind két eset öszve van véve és kétszer hasonlítva egymás után.

8) Az elő tagok' öszvese úgy áll a' hátulsó tagok' öszveséhez, mint különbségek ezeknek különbségéhez:

$18\pm12:6\pm4=18\mp12:6\mp4$

itt a' megfordított eset is mindjárt bé van foglalva;

9) A' négy szám' egyenlő emelése új arányt képzel.

A' mint $18:6=12:4$ azt fejezi ki, hogy a' viszonok $^{18}/_{6}$ és $^{12}/_{4}$ egyenlők, ezen törtek' emelései is egyenlők lesznek, vagy is:

$(^{18}/_{6})^3=(^{12}/_{4})^3$ vagy: $\frac{18^3}{6^3}=\frac{12^3}{4^3}$'s ez ád: $18^3:6^3=12^3:4^3$

10) Négy, arányban lévő mennyiség' egyenlő gyökerei új arányt képzelnek: legyen $4:9=16:36$, ez ád:

$\sqrt{4}:\sqrt{9}=\sqrt{16}:\sqrt{36}=2:9=4:6$

'sa' mint $^4/_9={}^{16}/_{36}$, $\sqrt{^4/_9}=\sqrt{^{16}/_{36}}$, és $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}}$

220. Ha több arány' tagjait rendszerént egymással sokszorozzuk, a' négy származat egy új arányt képzel. A' 3 arányban:

$3:6=4:8$, $5:7=20:28$, $2:11=8:44$

a' viszonok: $^3/_6$, $^5/_7$, $^2/_{11}$ egyenlők $^4/_8$, $^{20}/_{28}$ és $^8/_{44}$el, a' három első' származata: $\frac{3.\,5.\,2}{6.\,7.\,11}=\frac{4.\,20.\,8}{8.\,28.\,44}$ az utóbbival, 's ez a' következő irányt adja:

$3.5.2:6.7.11=4.20.8:8.28.44.$

Jegyzék. A' viszonokat $^3/_6$, $^4/_8$, $^7/_{14}$ egyenlők lévén, így szokás írni.

$3:6=4:8=7:14$ a' mi azt teszi: 3 ugy áll a' 6hoz, mint 4 a' 8hoz és 7 a' 14hez.

221. Viszonokat, mint $a:x$, $x:y$, $y:z$, mellyeknél a' következő viszon' első tagja, mindég az előtte lévőnek hátulsó tagja, *öszvefüggő* viszonoknak nevezzük és a' származatikból kerűlő viszon $axy:xyz$ mindég $=a:z$, az az: = az első előtag' és utolsó hátulsó tag' viszonával.

Számokat vévén: $2:4$, $4:8$, $8:16$ban

$2.4.8:4.8.16=2:16$

ha tehát olly arányok vannak öszvetéve, mellyeknél a' következő első tag mindég egyenlő az előtte lévő arány 2dik tagjával, az első arány' első tagja, 's az utolsó arány második tagja viszonban vannak a' többi tagok származatával. Legyen:

$a:b=c:d$
$b:e=f:g$
$e:h=i:k$
$h:l=m:n$
$l:x=p:q$'s mint láttuk, lesz:
$a.b.e.h.l:b.e.h.l.x=cfimp:dgknq$, és
$a:x=cfimp:dgknq$.

222. Ha az egynevű tagok egymás által elosztatnak, a' részesek ismét arányt adnak; a' két arányban:

$$\begin{array}{ll} a:b=c:d & 4:9=6:xy \\ m:n=p:q & \underline{2:3=1:x} \\ \text{arányt ád: } \frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{c}{p}:\frac{d}{q} & \frac{4}{2}:\frac{9}{3}=6:\frac{xy}{x} \\ & \text{vagy: } 2:3=6:y \\ & \text{vagy: } 1:3=3:y \end{array}$$

223. Ha valamelly arány' előtagjai, más arány' hátulsó tagjaival egyenlők, a' többi tagok egyenes arányban vannak.

$$\begin{array}{l} a:b=c:d \\ \underline{b:m=d:n} \\ ab:bm=cd:dn \text{ az az:} \\ a:m=c:n \end{array}$$

Ha két arány elő vagy hátulsó tagjai egyenlők, az első esetben a' hátulsó, a' másodikban az előtagok egyenes arányúak:

$$\begin{array}{ll} 1) & a:b=c:d \\ & \underline{a:m=c:n} \\ & b:m=d:n \\ 2) & a:b=c:d \\ & \underline{m:b=n:d} \\ & a:m=c:n \end{array}$$

Ha az egyik arány' közép tagjai, egy más arány külső tagjaival egyenlők, úgy az első arány' külső tagjai, és a' második arány' közép tagjai megfordított arányúak:

$$\frac{\begin{array}{l} a:b=c:d \\ b:m=n:c \end{array}}{a:m=n:d}$$

Ha két arány' külső, vagy közép tagjai egyenlők, úgy az első esetben a' közép, a' másodikban a' külső tagok megfordított arányban vannak.

1) $$\frac{\begin{array}{l} a:b=c:d \\ a:m=n:d \end{array}}{b:m=n:c}$$

2) $$\frac{\begin{array}{l} a:b=c:d \\ m:b=c:n \end{array}}{a:m=n:d.}$$

5 §. Az arányok' haszonvétéről.

224. Az arányok által mindazon kérdésekre meg lehet felelni, mellyeket példáinkban hozánk elő. A' mint az adott ismértekből az ismeretlent kell keresni, ott okoskodás, itt egyszerű arithmetikai mívelet által találjuk azt meg. Minden arányban az ismért mennyiségeket *okoknak* is tekinthetjük 's azt a' mit keresünk *következésnek*. Több vagy kevesebb mennyisége valamelly portékának, nagyobb vagy kisebb árt következtet; nagyobb vagy kisebb tőke, több vagy kevesebb kamatot, itt ismét nagyobb idő több kamatot, ha a' tőke ugyan az. A' munkás, az erő, okok; a' dolog 's tett, a' következések. Ha ezen kimondottat betűre és arányra visszük, azt mondjuk, hogy: *egy-*

nemű okok vagy erők, egyenlő körállások közt, *úgy állanak, mint következések.*

Ha az okokat *O*val, a' következést *K*val jelöljük meg, lesz:

$$O:o=K:k\text{, vagy}\frac{O}{o}=\frac{K}{k}$$

225. Ezen mívelet: a' 3 ismért tagból a' negyediket meglelni, a' *hármas regula*, vagy *arany regulának* is neveztetik, 's csak ugyan *egyszerű* hármas regulának, ha egy arány elégséges a' kérdés' megfelelésére; *öszvetett* hármas regulának pedig akkor, ha több arányt szükség képzelni.

226. Az ismeretlen, vagy keresendő tagokat, valamellyik utolsóbb x, y, z betűkkel szokás jelölni. Hogy kellessen valamelly kérdést helyes arányba hozni, bizonyos réguláк által nehéz kitűzni és gyakorta a' számító' elmésségétől függ. Közönségesen azt lehet mondani, hogy: *a' kérdő tag a' kérdővel egynemű; a' 3dik pedig az ismeretlennel*, p. o:

Valamelly portékából 5 font 12 forint, mi lesz 16 font' árra?

Itt a' kérdő tag a' 16 font 's következéskép a' második; a' véle egynemű az 5 font, 's az első tag;

Keresendő, a' 16 font árra, a' 4dik tag =x

a' véle egynemű 12 forint 's igy 3dik tag.

Az arány tehát 5tt a' 16tthoz, mint 12 forint x forinthoz.

Szükséges, hogy az arány' tagjai közt, mellyek egynevűek, azon rendet és egyszerűséget eszközöljük, a' millyent az előadot tmívelet által eszközölhetünk

Az egyszerű hármas regula.

227. 1) Példa:

4 munkás 20 rőf matériát sző, hány rőföt fog 9 munkás szőni?

$$4:9=20:x=\frac{9.20}{4}=45.$$

2) Ha $3^3/_5$ rőf posztó 8 f. 32 x., hogy lesz $7^7/_8$ rőf?

$3^3/_5:7^7/_8=8$ f. 42x.:fx.

$^{18}/_5:^{63}/_8=8\cdot7$ f.:x

$8\times18:63=8\cdot7\times5$:x

$8\times2:7=43\times5$:x

$$x=\frac{7.43.5}{16}=19\cdot03\text{ f.}$$

3) 3 Mázsa 48 font 23 lat és $2^3/_4$ nehézék portéka 97 f. 36 x. $3^1/_2$ fillér, hogy lesz fontja?

3 M. 48 font 23 l. $2^3/_4$ f.: 1 font $=97$ f. 36 x. $3^1/_2$ f;x

A' nyomatokat fontokra, a' pénzt pedig xra vivén, lesz:

348.74033 font : 1 font $=5856\cdot875$:x

tehát $x=\frac{5856\cdot875}{348\cdot74023}=16$ xr. $3\cdot16$ fillér

4) Mekkora azon tőke, melly egy év alatt $7^0/_0$ra 580 forintot kamatoz?

$7:580=100:x$

$$x=\frac{58000}{7}=8285^5/_7\text{ forint.}$$

5) Ha valamelly helységbe 8 nap alatt gyalogolunk, 5 mértföldet tévén egy nap; mennyi idő alatt jövünk vissza 6 mértföldet tévén napjában?

$6:5=8:x$

$$x=\frac{5.8}{6}=6^2/_3.$$

Az öszvetett hármas reguláról.

228. 6) Két munkás 3 órát dolgozván napjában, 5 nap alatt 9 rőfőt sző; mennyit fog szőni 3 munkás 2 nap alatt, 7 órát dolgozván napjában?

A' munkásokra, napokra és órákra figyelmezvén, látjuk, hogy azt lehet 1ször kérdezni:

ha két munkás 3 órányit dolgozván, 5 nap alatt 9 rőfőt sző, hány rőföt sző 3 munkás 3 órányi dologgal 5 nap alatt?

A' mint itt az órák' és napok' száma nem változik lesz:

a) $2:3=90:x \qquad x=\frac{3.90}{2}=135$

b) 3 órai munkával 135 rőf készült, hány készül 7 órai munkával?

$$3:7=135:x \qquad x=\frac{7.135}{3}$$

c) 5 nap készítvén $\frac{7.135}{3}$ rőföt, mennyit készít két nap alatt:

$$5:2=\frac{7.135}{3}:x \text{ és lesz } x=\frac{2.7.135}{5}=126.$$

7) Két munkás 8 métret készít, mennyit készít 5 munkás, ha a' nehézsége ezen két dolognak úgy áll, mint 3;4.

először megkeresvén $2:5=8:x$ „ $x=20$ az 5 munkás tehát az elsőből 20 métret készítene. Mivel a' nehézség a' készítésnél, a' kétféle materiánál $=3:4$, lesz a' második arány:

$$4:3=20:x \text{ és } x=15.$$

229. Az illy kérdések' feloldására egy közönséges példa légyen útmutató, mellyben betűket választván, ezeknek akármelly értéke lehet számokkal:

bizonyos számú munkás legyen =A
munkáik' órája egy nap „ =B
a' napoké „ =C
ássanak árkot, ennek hossza legyen =D láb
széle „ =E „
mélysége =F „

ezen számok adva lévén, keresendő:

a' napok' száma x, mellyben:

a munkás
b órát dolgozván
d hosszúságú árkot ás
e láb szélességgel és
f láb mélységgel.

1. Ha itt öszvehasonlítjuk A, a, és C, z et, (a' hol z a' Cvel egynevű, látjuk hogy z kisebb vagy nagyobb mint C, ha *a* nagyobb vagy kisebb mint *A*; ha tehát minden egyébb mennyiséget egyenlőnek teszünk, lesz:

a:A=C:z

2) Öszvehasonlítván B, b, z és y lont, a' hol y ismét egynevű x el, megtaláljuk: b:B=x:y.

3) A' mint d nagyobb; úgy az y nal egynevű v is nevekedik, lesz megfordítva: D:d=y:v.

4) Éppen így lesz x értéke nagyobb vagy kisebb, mennél nagyob vagy kisebb e, 's ha itt x helyett w írunk, lesz: E:e=v:w.

5) 's végre F és f az idővel w és x el egyenes viszonban vannak és lesz: F:f=w:x.

Lesz tehát az 5 öszves arány:

a:A=C:z
b:B=z:y
D:d=y:v

$E:e=v:w$ és

$F:f=w:x$ (185)

tehát $x=\frac{CABdef}{abDEF}$. Ha ezen tört számot úgy írjuk, hogy a' számlálója' factorai jobbra, a' nevezője' faktorai pedig balra esnek, egy függő vonal mellé, az illyen kérdések' megfelelésére igen jó míveletet találunk:

$$\begin{array}{r|l} x & C \\ a & A \\ b & B \\ D & d \\ E & e \\ F & f \end{array}$$

$$xabDEF=CABdef \text{ és } X=\frac{CABdef}{abDEF}$$

A' példában tehát először odaíratik a' keresendő x balra, 's jobbjára a' kérdő tagja (itt C) ezután kérdésbe vévén az egyes feltételeket, hogy nevekedésekkel nevekedik e' a' keresendő szám, vagy csak némelly része, az az más szóval: hogy egyenes vagy megfordított viszonban állnak e' egymás közt? az első esetben a' kérdő tag jobbra 's a' véle egynemű balra esik, a' másodikban megfordítva. A' jobbra álló jegyek' vagy mennyiségek' származatát az x minden faktorai származatával elosztván, megtaláltatik x.

Tegyük példánkban $A=15$, $B=10^1/_2$, $C=12$, $D=350'$ $E=6'$ $F=4'$ és $a=36$, $b=9$, $d=630$, $e=3\ ^1/_5$, $f=7^1/_2$, a' kétféle míveletben így fog állani példánk:

1)
$$36:15=12:z$$
$$9:10\tfrac{1}{2}=z:y$$
$$350:630=y:v$$
$$6:3\tfrac{1}{5}=v:w$$
$$4:7\tfrac{1}{2}=w:x$$
$$\overline{36.9.350.6.4:15.10\tfrac{1}{2}.630.3\tfrac{1}{5}.7\tfrac{1}{2}=12:x}$$
$$\text{és } x=12.\frac{(15.10\tfrac{1}{2}.630.3\tfrac{1}{5}.7\tfrac{1}{2})}{36.9.350,6.4}=10\tfrac{1}{2}$$

2)

Munkás.	Nap.	Ora.	Hossz.	Szél.	Mélly.	
15	12	$10\frac{1}{2}$	350′	6′	4′	keresendő
36	x	9	630′	$3\frac{1}{5}$′	$7\frac{1}{2}$′	kérdő

x nap	12 nap
36 munkás	15 munkás
9 óra	$^{21}/_{2}$ óra
350′ hosszú	630′ hosszú
6′ szél	$^{16}/_{5}$ szél
4′ mélly	$^{15}/_{2}$ mélly

vagy

x	12
36	15
2.9	21
350	630
5.6	16
2.4	15

$2x=21$, $x=10,5$

Ezen második példában először: a' jobb oldalon lévő törtszámok' nevezőji átvitettek mint faktorok balra, a' mi annyit tesz, mint mind a' két tagot ugyan azon számmal sokszorozni; 's másodszor: hogy olly sok szám ne sokszoroztasson együtt, a' közös faktorok kihagyattak.

230. Harmadik közönséges mívelet, az öszvetett hármas regula szerénti feloldásra:

Ha valamelly erők ugyan azon idő alatt munkálódnak, természetes, hogy kétszer, háromszor 's a' t., nagyobb erő, 2szer, 3szor 's a' t. nagyobb következést szül. Tehát: *az erők egyenes arányban vannak a' következéssel.*

Ha pedig egyenlő erők külömböző ideig munkálódnak, ismét természetes, hogy az fog többet következtetni, melly több ideig munkálódik; tehát: a' következések is egyenes arányban vannak az időkkel. Ha tehát 3 féle erőt vagy okot C C' és C''el, időjöket t t' és t'', és a' következéseket e e', e''el jelőljük és felvesszük: hogy $t=t''$ és $C'=C''$, a' következő arányt találjuk:

$$
\begin{array}{rl}
 & e : e'' = c : c'' \\
 & e'' : e' = t' : t'' \\
\hline
\text{tehát} & e : e' = ct' : c''t''
\end{array}
$$

vagy is: $e : e' = ct : c't'$, az az: a' következések az erők' 's idők' öszvetett viszonában állanak.

Látszik tehát ezen arányból, hogy az időt is úgy lehet tekinteni, mint erőnövesztőt. Igy p. o: mind egy, ha 4 ember 3 nap dolgozik, vagy $3.4=12$ ember egy nap. Ha a' napok' száma mellett órák is vannak, ekkor még közelebbi fejtése nyujtatik az erőnek. Ha p. o: 4 ember 3 nap, minden nap 10 órát dolgozik: az az: öszvesen 30 órát a' 3 nap; ugy minden egyéb tekintetet egyenlővé téve $4.30=120$ ember egy óra alatt szintannyit fog dolgozni. De ezen esetben a' 120, a' 4.2 és 10 származata, az az: az erő' és időjé; 's így akármelly mennyiségű erő és idő legyen a' kérdésben, ez közönségesen változatlan, és ha az időket T T' T'' és t t' t'' és t'''el jelöljük; lesz az elébbi példa:

$$e : e' = cTT'T''T''' : c'tt't''t'''$$

Ha végre azon ellentállást tekintjük, melly az erőt hátrálja, nyilván látjuk, hogy azon erő, mellynek 2szer 3szor, 4szer annyi ellentállást kell meggyőznie, 2, 3, 4szerte kevesebbet fog következtetni. A' különböző erők pedig, egyenlő ellentállás mellett, annál többet következtetnek, a' mennyiszerte nagyobbak egymásközt. Ha tehát 3 erő: $e\,e'\,e''$ 3 ellentállást $g\,g'\,g''$ vívván, $k\,k'\,k''$ következést származzák, a' következő arányra találunk, $e=e''$ és $g'=g''$nek tévén:

$$\begin{array}{rl} & k:k''=g:g'' \\ & k'':k'=e'':e' \\ \hline \text{és} & k:k'=ge'':g''e \end{array}$$

$$\text{vagy: } k:k'=ge:g'e' \text{ vagy } k:k'=\frac{e}{g}:\frac{e'}{g'}$$

az az: a' következések az erőkkel egyenes és az ellentállásokkal megfordított arányban vannak, vagy: a' következések úgy állnak, mint az okok, vagy erők elosztva az ellentállásokkal. Ha e' szerént több ellentállás foly bé, ezeknek származata lesz az öszves ellentállás. Az ellentállás tehát erőkisebbítés, gyengítés, valamint az idő növesztés. Ha tehát valamelly erőmennyiség kerestetik, az idők mint faktorok, az ellentállások pedig, mint osztók állnak elé. Ha ezen utolsókat $G, G'\,G''\,G'''$'s a' t. és g, g', g'', g'''el jelöljük, lesz az elébbi arány:

$$=\frac{cTT'T''T'''}{GG'G''G'''}:\frac{c'tt't''t'''}{gg'g''g'''} \qquad \text{vagy}$$

$$e:e'=cTT'T''T'''.gg'g''g''':ctt't''t'''.GG'G''G''' \text{ 's a' t.}$$

Alkalmaztassuk erre előbbeni példánkat.

Ott volt:	munkás.	óra.	nap.	hossz.	szél.	mélly.
	15	$10^1/_2$	12	$350'$	$6'$	$4'$
	36	9	x	$630'$	$3^1/_5{}'$	$7^1/_2{}'$

itt: $c=15$ $T=12$ $T'=10^1/_2$ $e=350.6.4$

$c'=36$ $t=x$ $t'=9$ $e'=630.3^1/_5.7^1/_2.=63.16.15$

tehát: $15.12.{}^{21}/_2:36.x.9=350.6.4:63.16.14$

vagy: 5 1.21:3.x.3=2.50.2.1:9.4.5

5.7:3.x=10:9

7:x=2:3 és $x=\frac{7.3}{2}=10^1/_2$

Ha pedig azt mondjuk, hogy a' szél és mélj az árok hosszára nézve ellentállások, mert a' mennyivel szélesebb vagy méllyebb legyen az árok egy időben 's egy erővel, annyival rövidebb lesz, tehát:

$G=6'$ $G'=4$, $g=^{16}/_5$ és $g'=^{15}/_2$ lesz és az arány:

$350:630=15.12.^{21}/_2.^{16}/_5.^{15}/_2:36.x.9.6.4$

5:9=15.12.21.4.3:36.x.9.6.4

1:9=3.21:x.9.6

1:1=21:2x és ebből $x=^{21}/_2=10{,}5$ mint elébb.

Gyakorlás' kedvéért egy példát mind három mívelet szerént oldjunk fel még.

Ha 18 takács 8 hét alatt, minden héten 6 nap és minden nap 10 órát dolgozván, 100 darab gyólcsot készít, mellynek hossza 30 rőf, széle pedig $1^1/_2$ rőf; hány darab gyolcsot fog 42 takács, 12 hét alatt készíteni, minden héten 5 nap és minden nap 12 órát dolgozván, ha a' darabok 36 rőfnyi hosszak és 2 rőfnyi szélesek?

Takács.	hét.	nap.	óra.	darab.	rőfhosszú.	rőfszéles
18	8	6	10	100	30	$^3/_2$
42	12	5	12	x	36	2

az első mívelet szerént a' számítás így áll:

a) 18 takács : 42 takács = 100 darab : z darab.

8 hét : 12 hét = z „ : y „

6 nap : 5 nap = y „ : u „

10 óra : 12 óra = u „ : v „

36 rőfh. : 30 rőfhos. = v „ : w „

2 rőfsz. : $^3/_2$ rőfszél = w „ : x „

vagy: $3:7=100:z$ $2:3=z:y$ $6:5=y:v$ $5:6=u:v$ $6:5=v:w$
$4:3=w:x$.

tehát: $18.8.6.10.36.2:42.12.5.12.30.{}^3/_2=100:x$ és úgy
$16:35=100:x$

vagy: $4:35=25:x$, $x=\frac{35.25}{4}=\frac{875}{4}=218^3/_4$ darab.

a' második szerént:

b) x darab	100 darab	vagy	x	100	vagy x	25	
18 takács	42 takács	„	3	7	2	7	
8 hét	12 hét	„	2	3	2	5	
6 nap	5 nap	„	1	1			
10 óra	12 óra	„	2	2			$4.x=875$
36 rőfhos.	30 rőfhosszú	„	6	5			$x=\frac{875}{4}=218^3/_4$.
2 rőfszél.	$^3/_2$ rőfszél	„	2,2	3			

természetesen, a' két oldalon lévő egyenlő faktorok elhagyatnak.

A' harmadik közönséges mívelet szerént lesz:

c) $cTT'T''...xgg'g''...:ctt't''...GG'G''..=e:e'$ szerént.
$(18.8.6.10).36.2:(42.12.5.12).30.{}^3/_2=100:x$

vagy: $2.2:7.5=25:x$. $4:35=25:x$

és $x=\frac{35.25}{4}=218^3/_4$, mint a' két más példában.

A' Kamatokról.

231. *a)* Egyenlő idő alatt a' kamat arányban van a' tőkével

b) A' tőke' kamatja arányban van az idővel.

Az egyszerű Kamatokról.

232. 1) Mennyit ér 480000 f. 5%ra 3 év mulva? mivel 100 forint 3 év mulva 115 forintot ér, lesz:

$100:480000=115:x$ és $x=552000$.

a' kamatok' iránya pedig lesz:

$100:480000=3.5:x$ „ $x=72000$.

2) Mennyit fog érni 480000 f. 40 hónap mulva $5^0/_0$ra?
A' kamat 12 hónapra 5 f. lévén 100tól, lesz:

$$12:40=5:x\text{, a' hol } x=\frac{40.5}{12}=\frac{50}{3}$$

tehát 100 forint' 40 hónapi $5^0/_0$ kamatja $= {}^{50}/_3$'s így 100 forintból

$$40 \text{ hónap mulva lesz: } 100+\frac{50}{3}=\frac{350}{3},$$

a' kívánt szám tehát kikerül ezen arányból:

$$100:480000=\frac{350}{3}:x \text{ és } x=560000.$$

lesz a' kamat maga: 560000—480000=80000, vagy

$$100:480000={}^{50}/_3:x \text{ „ } x=80000.$$

3) Mennyit ér, 40 hónap mulva fizetendő 560000 forint mindjárt letéve

$$\frac{350}{3}:560000=100:x \text{ „ } x=480000:$$

4) Mennyi idő alatt lesz 480000 forintból 560000 f. $5^0/_0$ra?

480000 forint' évi kamatja 24000 f. lévén, lesz:

24000:80000=1:x, mert a' két tőke' különbsége = 80000 f.

$$\text{'s így } x=\frac{80000}{24000}=\frac{10}{3} \text{ év.}$$

XX. TÁBLA.

Némelly Tőkék' Kamatjai.

4-et száztól.

Tőke	Kamat. 1 Év		1Hón.	1 Nap	Tőke	Kamat. 1 Év	1 Hónap		1 Nap	
forint.	*f.*	*x.*	*x.*	*x.*	*forint.*	*f.*	*f.*	*x.*	*f.*	*x.*
1	.	2·4	0·2	. .	300	12	1	. .	. .	2·00
2	.	4·8	0·4	. .	400	16	1	20	. .	2·66
3	.	7·2	0·6	. .	500	20	1	40	. .	3·33
4	.	9·6	0·8	. .	600	24	2	. .	. .	4·00
5	.	12.0	1·0	. .	700	28	2	20	. .	4·66
6		14·4	1·2	. .	800	32	2	40	. .	5·33
7	.	16·8	1·4	. .	900	36	3	. .	. .	6·00
8	.	19·2	1·6	. .	1000	40	3	20	. .	6·66
9	.	21·6	1·8	. .	2000	80	6	40	. .	13·33
10	.	24·0	2	0·07	3000	120	10	. .	. .	20·00
20	.	48	4	0·13	4000	160	13	20	. .	26·66
30	1	12	6	0·20	5000	200	16	40	. .	33·33
40	1	36	8	0·26	6000	240	20	. .	. .	40·00
50	2	. .	10	0·33	7000	280	23	20	.	46·66
60	2	24	12	0·40	8000	320	26	40	. .	53·33
70	2	48	14	0·46	9000	360	30	. .	1	. .
80	3	12	16	0·53	10000	400	33	20	1	6·66
90	3	36	18	0·60	50000	2000	166	40	5	33·33
100	4	. .	20	0·67	100000	4000	333	20	11	6·66
200	8	. .	40	1·34	250000	10000	833	20	27	46·66

XX. TÁBLA.

Némelly Tőkék' Kamatjai.

5-öt száztól.

Tőke	Kamat.				Tőke	Kamat.				
	1 Év		1 Hón.	1 Nap		1 Év	1 Hónap		1 Nap.	
forint.	*f.*	*x.*	*x.*	*x.*	*forint.*	*f.*	*f.*	*x.*	*f.*	*x.*
1	..	3	0·25	. .	300	15	1	15	..	2·50
2	..	6	0·50	. .	400	20	1	40	..	3·33
3	..	9	0·75	. .	500	25	2	5	..	4·16
4	..	12	1·00	. .	600	30	2	30	..	5·00
5	..	15	1·25	. .	700	35	2	55	..	5·83
6	..	18	1·50	. .	800	40	3	20	..	6·66
7	..	21	1·75	. .	900	45	3	45	..	7·50
8	..	24	2·00	. .	1000	50	4	10	..	8·33
9	..	27	2·25	. .	2000	100	8	20	..	16·66
10	.	30	2·50	0·08	3000	150	12	30	..	25·00
20	1	..	5·00	0·17	4000	200	16	40	..	33·33
30	1	30	7·50	0·25	5000	250	20	50	..	41·66
40	2	..	10·00	0·33	6000	300	25	..	..	50·00
50	2	30	12·50	0·41	7000	350	29	10	..	58·33
60	3	..	15·00	0·48	8000	400	33	20	1	6·66
70	3	30	17·50	0·57	9000	450	37	30	1	15·00
80	4	..	20·00	0·66	10000	500	41	40	1	23·33
90	4	30	22·50	0·75	50000	2500	208	20	6	56·66
100	5		25·00	0·83	100000	5000	416	40	13	53·33
200	10		·50	1·66	250000	11500	1041	40	34	43·33

XX. TÁBLA.

Némelly Tőkék' Kamatjai.

6-tot száztól.

Tőke	Kamat.				Tőke	Kamat.				
	1 Év		1 Hón.	1 Nap		1 Év	1 Hónap		1 Nap	
forint.	*f.*	*x.*	*x.*	*x.*	*forint.*	*f.*	*f.*	*x.*	*f.*	*x.*
1	. .	3·6	0·3	0·01	300	18	1	30	. .	3
2	. .	7.2	0·6	0·02	400	24	2	. .	. .	4
3	. .	10·8	0·9	0·03	500	30	2	30	. .	5
4	. .	14·4	1·2	0·04	600	36	3	. .	. .	6
5	. .	18·0	1·5	0·05	700	42	3	30	. .	7
6	. .	21·6	1·8	0·06	800	48	4	. .	. .	8
7	. .	25·2	2·1	0·07	900	54	4	30	. .	9
8	. .	28·8	2·4	0·08	1000	60	5	. .	. .	10
9	. .	32·4	2 7	0·09	2000	120	10	. .	. .	20
10	. .	36·0	3	0·1	3000	180	15	. .	. .	30
20	1	12	6	0·2	4000	240	20	. .	. .	40
30	1	48	9	0·3	5000	300	25	. .	. .	50
40	2	24	12	0·4	6000	360	30	. .	1	
50	3	. .	15	0·5	7000	420	35	. .	1	10
60	3	36	18	0·6	8000	480	40	. .	1	20
70	4	12	21	0·7	9000	540	45	. .	1	30
80	4	48	24	0·8	10000	600	50	. .	1	40
90	5	20	27	0·9	50000	3000	250	. .	8	20
100	6	. .	30	1·0	100000	6000	500	. .	16	40
200	12	. .	60	2·0	250000	15000	1250	. .	41	40

Az előre váltás.

233. 5) Mennyi escomptot kell fizetni $6^0/_0$val, ha egy 2850,45 f. váltót, melly 3 év és 4 hónap mulva fizetendő, mindjárt felvesszük készpénzben?

Egy évre lesz az escompte 6 f, tehát

$$100:2850,45=6:x \text{ és } x=\frac{2850,45.\,6}{100}$$

ezen escompte egy évre lévén, megtaláljuk a' 40 hónapot:

$$12:40=\frac{2850,45.\,6}{1000}:x \text{ és } x=570,09,$$

A' kamatok' Tábláji' haszonvéte.

1Példa. 7000 f. mennyit kamatoz $4^0/_0$ra 3 év alatt? a' táblában áll 1 évre 280 f. ezt háromszor véve lesz=840 f.

2) 8000 f. mennyit kamatoz $5^0/_0$ra 2 év és 5 hónap alatt?
a' tábla szerént 1 évre kamatoz 400 f.
1 hónapra 33 f. 20 kr.
lesz tehát 400 f.2+33 f. 20.5=800+166 f. 40
=966 f. 40 kr.

3) 9000 forint mennyit kamatoz 1 év 7 hónap és 23 nap alatt $6^0/_0$ra?
a' tábla szerént kamatoz 1 év alatt...540 f.
1 hónap 45 f. és 7 holnap 45×7=..315
1 nap 1 f.30 és 23 nap 1.5×23=... 34 30
889 f. 30

4) 15736 f. mennyit kamatoz 1 évre $4^0/_0$ra?

10000 f. ád....	400 f.	
5000	200	
700	28	
30	1	12
6		14.4.
kamat	629 f.	26.4.

5) 26945 f. mennyit kamatoz 3 év és 5 hónap alatt 5%ra ?

20000	egy évre ád 1000 f.	egy hónapra	41 f. 40
6000	 300	....	25 —
900	 45	....	3 45
40	.... 1 36	....	— 8
5	.... — 12	....	— 1
26945	egyévre 1346 f. 48	egy hónapra	70 f. 34

lesz kamat 1346 f. $48 \times 3 +$ 70 f. $34 \times 5 =$ 4040 f. 24 $+$ 352 f. $50 =$ 4393 f. 14.

6) 154728 f. mennyit kamatoz 6%ra 4 év 3 hónap és 19 nap alatt.

150000 f.	ád egy évre 9000	egy hón. 750	egy nap. 25f.
4000	 240	... 20	... — 40
700	 42	... 3.30	... — 7
20	.... 1 12	... — 6	... — 0.2
8	.... — 28.8	... — 2.4	... — 0.08
154728	.... 9283f.40.8	... 773.38.4	... 25f.47.28

lesz tehát 9283 f. $40.8 \times 4 +$ 773 f. $38.4 \times 3 +$ $+$ 25 f. $47{\cdot}28 \times 19 =$ 37134 f. 43.2$++$2320 f. 55.2$+$489 f. $58.32 =$ 39945 f. 36·72.

Az öszvetett kamatokról.

234. 6) Mennyit ér 480000 f. 3 év mulva ?

Az első évben lesz: $100:105 = 480000:x$ „ $x = 504000$

a' második évben: $100:105 = 504000:x$ „ $x = 529000$

a' harmadikban: $100:105 = 529000:x$ „ $x = 555660$

az ösztvetett kamat tehát 3 és alatt $555660 - 480000 =$ 75660 forint.

7) Mennyit ér 564921 forint 40 hónap előtt? tudjuk, hogy 100 f. 4 holnap mulva $^{105}/_{3}$ forintot ér

$$^{105}/_{3} : 100 = 564921 : x \quad „ \quad x = 555660$$

tehát azt kell keresni, mennyit ér 555660 forint 3 év előtt?

105:100=555660:x „ x=529200 az első év előtt

105:100=529200:x „ x=504000 a' második év előtt

és 105:100=504000:x „ x=480000

8) Elosztani 2290 et 4 részre, úgy hogy:

az első rész legyen a' másodikhoz, mint=3:2

— — — — a' harmadikhoz — =5:7

a' második rész — a' negyedikhez — =8:9

A' két első arányból következik, hogy ha az első rész egy volna (=1) a' második $^2/_3$ és a' harmadik $^7/_5$ lenne; a' 4dik' megtalálására az irány:

8:9=$^2/_3$: a' negyedik részhez vezet, ez=$^{18}/_{24}$=$^3/_4$

A' négy rész tehát arányban van ezen számokkal:

1, $^2/_3$, $^7/_5$ és $^3/_4$.

A' törteket 3.5.4 sokszorozván, szintúgy mint az egyet is, lesz a' három szám:

60, 40, 84 és 45 ezeknek öszvese=299.

's a' kivánt részeket megleljük:

229:2290=60 az első részhez, vagy: 1:10=60:1-ső r.

229:2290=40 a' másodikhoz — 1:10=40:2-d. r.

229:2290=84 a' 3-dikhoz — 1:10=84:3-d. r.

229:2290=45 a' 4-dikhez — 1:10=46:4-d. r.

's ezek=600, 400, 840 és 450.

X. SZAKASZ.

A' SOROKRÓL VAGY PROGRESSIÓKRÓL ÉS AZ ALAKITOTT SZÁMOKRÓL.

1 §. A' sorokról közönségesen.

235. Ha valamelly mennyiségeket, mellyek bizonyos törvény szerént rendesen támadnak 's egymásközt viszonban állanak, sorba írjuk egymás után mint támadtak, az illy sort *progressionak*-nevezzük, az egyes és különös mennyiségeket pedig a' sor' vagy progressio' *tagjainak*.

A' mint a' sornak tagjai *nőnek* vagy *fogynak*, *nagyobbodnak* vagy *kisebbednek*, a' sort magát *növő* vagy *fogyó*, *fel* vagy *lemenő* sornak vagy progressionak hívjuk.

A' tagokat mutatókkal szokás ellátni a' végre hogy általuk megtudhassuk hányadik valamelly kérdésben forgó tag a' sorban, vagy is hányadik helyet foglalja el.

Ha a' növő sorban az első, kezdő tagot, 1el jelöljük, a' többi jobbra következő tagok a' természetes számok sorával jelöltetnek, 2, 3, 4, 5, 6, 7-dik 's a' t. tagnak neveztetvén.

Ha a' sor balra is ki terjed és az első tagon túl fogyó sorba változik, tagjait 0, —1, —2, —3, —4 's a' t.vel jelöljük.

A' sorok *végesek* vagy *végtelenek*, *határozottak* vagy *határtalanok*. Az első esetben minden tagjai ismeretesek a' másodikban addig lehet azokat fojtatni még kívántatik.

A' sorok *arithmetikaiak* vagy *geometriaiak*, mint tagjai támadtak. Ha a' tagok öszveadás által nőnek vagy levonás által fogynak, akkor a' sor arithmetikai. Ha a' tagok sokszorozás által nőnek vagy elosztás által fogynak, a' sor geometriai. Az arithmetikai sorokat, *különbségieknek*, a' geometriaiakat pedig *származatiaknak* is szokás nevezni.

2 §. Az arithmetikai sorokról.

236. Az arithmetikai sornak tagjai ugyan azon mennyiséggel nőnek vagy fogynak, *és minden egymásmellett álló két tagközti különbség egyenlő*, legyen a' sor felmenő vagy lemenő, csakhogy az első esetben a' jobbra eső tag nagyobb, a' másikban a' balra eső.

A' természetes számok' sora maga is arithmetikai sor, hol a' két egymásmellett álló tagközti különbség=1.

A' következő sorok

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	's a' t.
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	—
1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	—
2	7	12	17	22	27	32	37	42	47	—
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	—
6	14	22	30	38	46	54	62	70	78	—
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	—

mind arithmetikaiak, és csakugyan növő sorok, 's a' tagokközti különbségek az egymás alatt álló sorokban, 2, 3, 4, 5, 6, 8 és 10.

'A sorok

15, 12, 9, 6, 3, 0 —3 —6 —9 —12'sa't.
18, 6,— 6 —18 —30 —42 —54 's a' t.
100, 75, 50, 25,— 0 —25 —50 —75 —100 's a't.

fogyók vagy lemenők, a' tagokközti különbségek, 3, 12 és 25, vagy ha akarjuk —3, —12 és —25.

A' tagok törtszámúk is lehetnek, és

$^{1}/_{15}$, $^{3}/_{15}$, $^{5}/_{15}$, $^{7}/_{15}$, $^{9}/_{15}$, $^{11}/_{15}$, 's a' t.
$^{3}/_{25}$, $^{7}/_{25}$, $^{11}/_{25}$, $^{15}/_{25}$, $^{19}/_{25}$, $^{23}/_{25}$, —
$^{8}/_{30}$, $^{16}/_{30}$, $^{24}/_{30}$, $^{32}/_{30}$, $^{40}/_{30}$, $^{48}/_{30}$, —
·01 ·015, ·030, ·045, ·060, ·075, ·090 's a' t.
0·5 1·0 1·5, 2·0, 2·5, 3·0, 3·5 —

szinte arithmetikai sorok és különbségek $^{2}/_{15}$, $^{4}/_{25}$ $^{8}/_{30}$, ·015 és 0·5.

237. A' sor' különbsége, mi a' tagok különbségével egyértelmű, mindegyik két egymásmelletti tagból megtalálható. Valamelly arithmetikai sor' fojtatására nem kell tehát egyébb ezen különbségnél, 's felfelé vagy lefelé odaírhatjuk a' sor' annyi tagját, mennyi kívántatik. Ha p. o: adva volna az egyes tag 37, és a' különbség=5, a' sort mindkét felől 37en jobbra és balra addig fojtatnánk meddig szükséges lenne és írnánk középpet a' 37et, sorunk

3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62 'sa't.

lenne, a' növő felét öszveadás, fogyó részét pedig levonás által képezvén,

Ha valamellyik sort figyelemmel tekintjük, látjuk hogy a' különbségek ugyan azok maradván a' tagok számával nőnek, ha az egymástól távolabbi tagokat hasonlítjuk öszve: ha a' különbség a' két egymásmellet lévő tag közt egyszer van meg p. o: az első és második tag közt, már az első és a' harmadik tagközt kétszer, az első és 4-dik tag közt 3-szor, az első és 5-dik közt 4-szer 's a' t.: igy az első és 15-dik tag közt 14-szer meglesz. A' sorban p. o:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43,

a' különbség 4 mindegyik két egymásmelletti tag közt, az az

$7-3=4$ és $19-15=4$, $31-27=4$, $43-39=4$

a' két hellyel tovább eső tagokközti különbség már $2.4=8$ és $11-3=8$, $23-15=8$, $27-19=8$, $39-31=8$'s a' t. a' három hellyel tovább esők között a' különbség$=3.4=12$, $15-3=12$, $23-11=12$, $35-23=12$'s a' t. 's így tovább. Ha tehát a' különbségeket a' tagokból kivesszük, nem marad egyébb az első tagnál, ehez annyiszor adván a' különbséget a' hány hellyel tovább esnek nálánál a' tagok. Tartsuk meg sorunkat 's jelöljük meg apró jegyekkel a' tagok' számát, 0 nak nevezvén az elsőt.

$$\overset{0}{3},\ \overset{1}{7},\ \overset{2}{11},\ \overset{3}{15},\ \overset{4}{19},\ \overset{5}{23},\ \overset{6}{27},\ \overset{7}{31},\ \overset{8}{35},\ \overset{9}{39},\ \overset{10}{43}\ \text{'s a' t.}$$

$$=\overset{0}{3+0},\ \overset{1}{3+1.4},\ \overset{2}{3+2.4},\ \overset{3}{3+3.4},\ \overset{4}{3+4.4},\ \overset{5}{3+5.4},$$

$$\overset{6}{3+6.4},\ \overset{7}{3+7.4},\ \overset{8}{3+8.4},\ \overset{9}{3+9.4},\ \overset{10}{3+10.4}\ \text{'s a' t.}$$

tehát az első taghoz annyiszor van adva a' különbszég a' hányadik a' tag az első után, ha az elsőt *0*nak nevezzük.

Könnyű lesz e' szerént az arithmetikai sorok' közönséges kifejezését adni. Legyen az első tag *a*, a' különbség *k*, lesz a' sor a' a+k, a+2k, a+3k, a+4k, a+5k...a+(m—1)k, hol a' tagok száma *m* az elsőt is hozzájok adván.

Ha ezen sort lefelé kellene fojtatni, lenne;

$$a,\ a-k,\ a-2k,\ a-3k,\ a-4k, \ldots\ldots$$
$$a-(m-2)k,\ a-(m-1)k$$

és a' tagok' száma lefelé is *m*, hozzájuk adván az elsőt.

Ezen tekintet segélni fog bennünket akármellyik tagnak megtalálására a' sorban ha az első tagot és a' különbséget ismerjük; jelöljük meg a' közönséges tagot $t_n$el, hol *n* akármellyik tag' mutatója lehet, lesz tehát az első tag t_o, nevezzük a' különbséget *k*nak, és

$$t_n = t_o + (n-1)k.$$

mert mindegyik tag' mutatója egyel kisebb mint a' tagnak helyszáma, p. o: a' nyolczadik tag' mutatója 7.

Példák. Az első tag 4, a' különbség 6, mellyik lesz a' 13dik tag?

$$4+(13-1)6=4+12.6=76.$$

Az első tag 0·04, a' különbség +0.09 mennyi a' 16dik tag?

$$0{\cdot}04+15.0{\cdot}09=0{\cdot}04+1{\cdot}35=1{\cdot}39$$

Az első tag *h*, a' különbség *p*, mellyik lesz a' *x* tag?

$$h_x = h_o + (x-1)p.$$

Az első tag 8795, a' különbség —137, mellyik lesz a' 23 dik tag a' fogyó sorban?

$$8795-(23-1)137=8795-22.137=5781$$

mellyik lesz a' 76 dik tag?

$$8795-(76-1)137=8795-75.137=8795-10225=$$
$$=-1430.$$

Akármellyik tag megtaláltatik tehát, ha mutatójából egy levonatik 's véle a' különbség sokszoroztatik, a' származathoz adván az első tagot. Vagy más szóval ha a' különbséget annyiszor vesszük a' mennyi tag a' keresettet megelőzi, 's az első taghoz adjuk.

238. A' sor' valamellyik két tagja közzé annyi új tagokat lehet iktatni a' mennyi kívántatik hogy mind arithmetikai progressioban álljanak egymásközt.

Mint hogy két tag adva van, és a' közükbe iktandó tagok száma, nyilván hogy a' tagok' öszves száma kettővel több mint a' beiktandó tagoké. Ha tehát *m* tag volna két adott közzé iktandó, lesz a' tagok öszves száma $2+m$.

Legyen p. o: két tagközzé 6 új iktandó, lesz a' tagok száma $2+6=8$, az egyik adott tag tehát az első, a' másik a' nyolczadig tag az új progressióban.

Ismervén pedig a' közönséges tag kifejezéséből mindegyik tagot, természetes hogy a' nagyobbik tag egyenlő a' kisebbikkel hozzá adván ehez annyiszor a' különbséget hány tag azt megelőzi (237), vagy annyiszor több eggyel hány új tag beiktandó.

Kívántatik p. o: 3 és 31 közzé 6 tag?

Közönséges tagunk $t_n = t_o (n-1) k$.

példánkban a' tagokszáma 8, $t_o = 3$ és $t_n = 31$.

tehát $31 = 3 + (8-1) k = 3 + 7k$,

$$\frac{31-3}{7} = K = \frac{28}{7} = 4$$

a' különbség $k=4$ lévén a' kívánt 6 iktandó tag

$3+4$, $3+2.4$, $3+3.4$, $3+4.4$, $3+5.4$ és $3+6.4$

's az új sor 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 8tag.

Közönségesen. Akármelly legyen a' két adott tagközzé iktandó tagok' száma, megtaláltatik a' különbség, ha az egyik tagból a' másik levonatik 's annyival elosztatik mennyi a' béiktandó tagok' száma hozzá adván egyet.

Legyen a' két tag a és b: kívántatik közibe n tag. lesz tehát a' tagok' száma n+2. a' különbség =k.

és $$k=\frac{b-a}{n+1}$$

kívántatik 3 és 4 közzé 10 tag, lesz a' különbség

$$k=\frac{4-3}{10+1}=\frac{1}{11}$$

és a' 12 új tag

$3,\ 3+{}^{1}/_{11},\ 3+{}^{2}/_{11},\ 3+{}^{3}/_{11},\ 3+{}^{4}/_{11},\ 3+{}^{5}/_{11}$
$3+{}^{6}/_{11},\ 3+{}^{7}/_{11},\ 3+{}^{8}/_{11},\ 3+{}^{9}/_{11},\ 3+{}^{10}/_{11},\ 4$

239. Ha valamelly progressionak két két egymás mellettálló tagjai közzé egyenlő számú tagok iktatnak bé, az új sor is rendes arithmetikai progressio.

Legyen az adott progressio, 7, 27, 47, 67, mind. egyik két két tag közzé 4 új tag iktandó; lesz az új tagok' száma 3.4=12, az adottaké=4 és az új progressió' valamennyi tagja =4+12=16.
a' különbség

$$k=\frac{27-7}{5}=\frac{20}{5}=4$$

és az új sor,

7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, 59, 63, 67.

240. *Közönségesen.* Akármelly sorban, akármelly számú tagok' beiktatása következőkép fejeztetik ki.

Legyen mint (238) ban $k=\dfrac{b-a}{n+1}$

hol *a* az első tag *b* az utolsó, az öszves tagok' száma n+2: lesz a' sor

$$a,\ a+\frac{b-a}{n+1},\ a+\frac{2(b-a)}{n+1},\ a+\frac{3(b-a)}{n+1},\ a+\frac{4(b-a)}{n+1}$$

$$\ldots\ldots a+\frac{(n-2)(b-a)}{n+1},\ a+\frac{(n-1)(b-a)}{n+1},\ a+\frac{n(b-a)}{n+1}$$

és az utolsó tag

$$a+\frac{(n+1)(b-a)}{n+1}=a+b-a=b.$$

241. Minden arithmetikai progressioban az egyenlő messzeálló tagok' öszvese is egyenlő, ha a' progressio határozott.

Más szóval a' két legvégső tag' öszvese p. o: egyenlő akármelly két más tag' öszvesével ha a' két utobbinak egyike olly távól esik az első tagtól, mint másika esik az utolsó, tagtól.

Közönségesen ha a' tagoknak mutatókat adunk, mind azon két tag' öszvese egyenlő, mellynek mutatóji' öszvese egyenlő. P. o: valamelly sor 18 tagból áll, és az első tagnak mutatója 0, az utolsóé 17. a' második tagé 1 az utolsót előzőé 16, a' harmadiké 2, a' hatulról 3diké 15, és így tovább a' mutatók öszvese mindenkor = 17.

Nyilvánab lesz a' mondott ha valamelly sort leirunk 's ugyan azon sort megfordítva alá irjuk: legyen

a' sor	5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47.
megfordítva	47, 41, 35, 29, 23, 17, 11, 5.
öszvesek	52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52.

Ha a' tagok' száma páratlan, akkor egy közép tag van melly kétszer véve egyenlő valamelly két más tőlle ugyan azon távolyban lévő tag' öszvesével.

Ha a' tagok' száma p, o: 2m+1 a' középső tag

$$\frac{2m+1+1}{2} = \frac{2m+2}{2} = m+1$$

helyen fog állani, 's ha az utolsó tag mutatója=2m, a' középsőnek mutatója *m*.

Ha az elébbi sorunkból egy tagot elveszünk marad 7 és 7=2.3+1., lesz a' középső tag

$$\frac{2.3+2}{2} = 3+1$$

a' negyedik; a' hetedik tag mutatója 6,=2.3 és a' negyedike $\frac{2.3}{2} = 3$. a' sor pedig írva

$$\begin{array}{l} 5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29,\ 35,\ 41 \\ 41,\ 35,\ 29,\ 23,\ 17,\ 11,\ \ 5 \\ \hline 46,\ 46,\ 46,\ 46,\ 46,\ 46,\ 46 \end{array}$$

hol a' közép tag' öszvese =

$= 2.23 = 5+41 = 11+35$'s a' t.

241. Az arithmetikai sorok ezen tulajdona könnyű úton vezet tagjai' öszvesének megtalálására. Nevezzük valamelly sor' öszvesét *S*nek 's legyen

$$S=a+b+c+d+e+f+g+h+i+k+l,$$

bizonyosan megfordítva is ugyan az lesz öszvese, és

$$S=l+k+i+h+g+f+e+d+c+b+a,$$

ha a' két egyenlő sort öszveadjuk lesz

$$\begin{aligned} 2S = & (a+l)+(b+k)+(c+i)+(d+h) \\ & +(e+g)+(f+f)+(g+e)+(h+d) \\ & +(c+c)+(k+b)+l+a) \end{aligned}$$

hol a' tagok tudjuk a' nélkül is mind egyenlők, valamint p. o: $(a+l)=(l+a)$ szinte így $(a+l)=(b+k)$ mert $b=a+\delta$ ha δ a' különbség és $k=l-\delta$ tehát $a+\delta+l-\delta=a+l$ tehát $(b+k)=(a+l)$.

A' mennyi tagból áll tehát a' kettős sor annyiszor vehetjük akármellyik tagot, 's az lesz a' kettős sornak öszvese vagyis ha a' tagok száma *m*

$$2S = m(a+l) = m(b+k) = m(e+g)$$

vagy akármellyik tag *m*szer véve, és innen az egyes sornak öszvese $S = \frac{m(a+l)}{2}$

a' mi szóval annyi, *vétessen az első és utolsó tag' öszvese annyiszor, mennyi a' tagok' száma, és osztasson el kettő által.*

Példák:

Mennyi a' természetes számok sorában álló első 38 számnak öszvese

Az első tag$=1$, az utolsó$=38$, a' tagok' száma is $= 38$, tehát

$$S = \frac{38(38+1)}{2} = \frac{38}{2}(38+1) = 19.39 = 741.$$

Akár legyen a' tagok' száma páros, akár páratlan egyik vagy másik factor természetesen osztható 2 által, vegyünk 25 tagot sorunkból

lesz $S = \frac{25(1+25)}{2} = 25 . \frac{26}{2} = 25.13 = 325.$

Az első tag 17 az utolsó 654, a' tagok' száma 22.

$$S = \frac{22}{2}(17+654) = 11.671 = 7381.$$

243. Minden arithmetikai progressioban öt mennyiség jön tekintetben, 's ezek mint láttuk

1) az első tag $= a$
2) a' különbség $= k$
3) az utolsó tag $= z$
4) a' tagok' száma $= m$
5) a' tagok' öszvese $= S$.

Ha tehát az 5 közzül legaláb 3 van adva, a' többit ezekből megtalálhatni. Ha a' mondottakat ismételjük következő végkövetkezésekre jutunk.

1-ször. Az első tag megtaláltatik, ha az utolsó tagból levonatik a' különbség, annyiszor véve hány tagból áll a' sor eggyel kevesebb.

$$a = z - (m-1)k.$$

2-szor. A' különbség mint láttuk minden egymásmellett álló tagból megtaláltatik, de ugy is meg, ha az utolsó tagból az első levonatik és a' tagok száma által, eggyel kevesebb, elosztatik, mi az elébbi kifejezésből ered és

$$k = \frac{z-a}{m-1}$$

3-szor. Az utolsó tag megtaláltatik ha az első taghoz a' különbség annyiszor adatik mennyi a' tagok száma kevesebb eggyel.

$$z = a + (m-1)k.$$

4-szer. A' tagok száma megtaláltatik, ha a' tagok' vagy a' sor' kettős öszvese az első és utolsó tag öszvesével elosztatik

$$m = \frac{2S}{a+z}$$

vagy ha az első és utolsó tagközti különbség, a' sor' vagy a' tagokközti különbséggel elosztatik, és a' részeshez adatik 1.

$$\text{és} \quad m = \frac{z-a}{k} + 1.$$

5-ször. Az öszves végre megtaláltatik ha az első és utolsó tag' öszvese a' tagok' fél számával sokszoroztatik

$$S = (a+z) \cdot \frac{m}{2}$$

és ha itt z helyett, értékét $= a + (m-1)k$ vesszük lesz $S = [a + a + (m-1)k] \cdot \frac{m}{2} = (2a + (m-1)k)\frac{m}{2}$

és $S = am + \frac{m(m-1)}{2}k$.

'S itt az öszvest az első tagból a' tagok' mennyiségéből és a' különbségből találjuk.

Alkalmaztassuk mindezen eseteket egy sorra és legyen sorunk egyike

—1, —0·75, —0·5, —0·25, ±0, 0·25, ·050, ·075, 1, 1,25, 1,50

másik

—48 —36 —24 —12, 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108

a' 3-dik

81, 118, 155, 192, 229, 266, 303 340, 377, 414.

Kivántatik az első tag $a = z - (m-1)k$.

I. $a = 1{\cdot}50 - (10-1)0{\cdot}25 = 1{\cdot}50 - 10{\cdot}0{\cdot}25 =$
$= 1{\cdot}5 - 2{\cdot}5 = -1$

II. $a = 108 - (14-1)12 = 108 - 13.12 =$
$= 108 - 156 = -48$

III. $a = 414 - (10-1)37 = 414 - 9.37 = 81$.

Kivántatik a' különbség $k = \frac{z-a}{m-1}$

I. $k = \frac{1{\cdot}50-(-1)}{11-1} = \frac{1{\cdot}50+1}{10} = \frac{2{\cdot}5}{10} = 0{\cdot}25$

II. $k = \frac{108-(-48)}{14-1} = \frac{108+48}{13} = \frac{156}{13} = 12$

III. $k = \frac{414-81}{10-1} = \frac{333}{9} = 37$

kívántatik az utolsó tag $z = a + (m-1)k$

I. $z = -1 + (11-1)0{\cdot}25 = -1 + 10{\cdot}0{\cdot}25 = -$
$= -1 + 2.5 = 1{\cdot}5$

II. $z = -48 + (14-1)12 = -48 + 13{\cdot}12 =$
$= 156 - 48 = 108$

III. $z = 81 + (10-1)37 = 81 + 9.37 =$
$= 81 + 333 = 414$

kívántatik a' tagok száma $m = \frac{z-a}{k} + 1$

I $m = \frac{1{\cdot}50-(-1)}{0{\cdot}25} + 1 = \frac{2{\cdot}50}{0{\cdot}25} + 1 = 10 + 1 = 11$

II. $m = \frac{108-(-48)}{12} + 1 = \frac{108+48}{12} + 1 = \frac{156}{12} + 1 = 14$

III. $m = \frac{414-81}{37} + 1 = \frac{333}{37} + 1 = 9 + 1 = 10$

kívántatik végre az öszves $S = (a+z)\frac{m}{2}$

I. $S = (-1 + 1{\cdot}50)\frac{11}{2} = \frac{0{\cdot}50.11}{2} = \frac{5{\cdot}50}{2} = 2{\cdot}75$

II. $S = (-48 + 108)\frac{14}{2} = \frac{60.14}{2} = 420$

III. $S = (81 + 414)\frac{10}{2} = \frac{495.10}{2} = 2475.$

Az előadottak' segédje által mindazon kérdéseket könnyen feloldhatjuk mellyek az arithmetikai sorokhoz tartoznak.

3 §. A' geometriai sorok.

244. Mi az arithmetikai progressioban különbség, a' geometriaiban factor; ezen factor a' második tagtól kezdvén annyiszor van véve hány tag van az első után. Minden az első után következő tag eszerént származata az első tagnak és a' sor factora' azon emelésének melly a' tag' mutatója.

Ha valamellyik tag a' geometriai sorban az előtte állóval' elosztatik, a' sor factora megtaláltatik, és csak ugyan a' részes változatlan ugyan az melly akármelly két egymásmellett álló tag' elosztása által származik. a' sor 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 's a' t.

$=2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8$'s a' t,

faktora a' 2 és a' tagok emeléseit foglalják.

A' geometriai sorban a' factor' mutatóji egyszersmind a' tagok' mutatóji is lehetnek, mert mindeggyik tag' emelési mutatója eggyel kisebb mint a' tagok száma.

A' leszálló sorban is

$625, 125, 25, 5, 1, {}^1/_5, {}^1/_{25}, {}^1/_{125}, {}^1/_{625}$

$=5^4, 5^3, 5^2, 5^1, 5^0, 5^{-1}, 5^{-2}, 5^{-3}, 5^{-4}$

a' mutatok' száma $4-(-4)=8$ a' tagoké $8+1=9$.

Minden három egymásután álló tag a' geometriai sorban, állandó arányban van: p. o: a' sorban

3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187.

$27: 81 = 81:243$

$81:243 = 243:729$

és $8: 16 = 16: 32$

$5: 1 = {}^1/_5 : {}^1/_{25}$'s a' t.

Akármelly tagja a' geometriai sornak közönségesen kifejeztetik ha az első tagot eggyel kisebb emelési mutatóval ellátott factorral sokszorozzuk mennyi a' keresett tagnak helyszáma.

Legyen az első tag=a a' factor =q és a' tagok száma=n, a' geometria sor' közönséges kifejezése

$a:aq:aq^2:aq^3:aq^4:aq^5: \ . \ . \ . \ aq^{n-2}:aq^{n-1}$

a' hatodik tag p. o: aq^5 és a' közönséges tag *m*dik $=aq^{m-1}$ és $t_m=aq^{m-1}$ hol t_m akármelly tagot jelőli.

Azon progressioban mellynek első tagja 1, factora $=4$ a' 7-dik tag p. o: $t_7=1.4^6=4^6$

Az első tag 1, a' factor $^1/_2$ lesz az 6diktag

$$1.\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2^5}$$

245 Ha valamelly új tagokat kell két adott tag közzé iktatni, az új progressio' factorát kell keresni. Ez minden esetben mint láttuk megtaláltatik. A' nagyobbik szám egyenlő a' kisebbel, sokszorozván ezt a' factorral eggyel feljebb emelésen az adott béiktandó tagok' számával.

P. o; két tag adva lévén, és 4 béiktandó, a' tagok' száma tehát hat, a' factor mutatója következéskép 5=4+1 az az eggyel több mint a' béiktandó tagok' száma.

Ha tehát a' nagyobbik szám elosztatik a' kissebbel, a' részes azon emelése lesz a' factornak hozzá adván eggyet, hány tag beiktandó.

Közönségesen. Az adott két tag legyen *a* és *b*, közükbe iktandó *m* tag, lesz a' tagok' szamá m+2, ha tehát a' béiktandó tagok' factora q, *b* bizonyosan mint utolsó tag (m+1) mutató és emelésű lesz és $b=a.q^{m+1}$ ebből következik $q^{m+1}=\frac{b}{a}$ és maga

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}=\left(\frac{b}{a}\right)\frac{1}{m+1}.$$

Példák. Iktassék bé 5 tag 1 és 2 közzé?
itt a=1 b=2 a' tagok száma 7, a' béiktandóké m=5.

$$\text{és } q=\sqrt[5+1]{\frac{2}{1}}=\sqrt[6]{2}=2^{1/6}$$

az 5 kívánt tag

$$2^{1/6},\ 2^{2/6},\ 2^{3/6},\ 2^{4/6} \text{ és } 2^{5/6}$$

kivántatik 1 és 81 közzé 3; 81 és 6561 közzé is 3 tag.

$$1)\quad q=\sqrt[4]{81}=81^{1/4}=3$$

$$2)\quad q=\sqrt[4]{\frac{6561}{81}}=\sqrt[4]{\frac{3^8}{3^4}}=3$$

és az új sor:

$$1:3:3^2:3^3:3^4:3^5:3^6:3^7:3^8$$
$$1:3:9:27:81:243:729:2187:6561$$

246. Valamelly geometriai sor' tagjainak öszvese következőkép találtatik meg. Legyen az öszves S és a' sor

$$S=a+b+c+d+e+f+g+\;..\;x+y+z$$

tudjuk hogy mindegyik egymást követő tagközti részes egyenlő, és

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}=\frac{f}{e}..=\frac{z}{y}$$

tehát az öszves osztandók' részese az öszves osztók által is egyenlő lesz akármelly két tag' részesével és

$$\frac{b+c+d+e+f\;...\;z}{a+b+c+d+e\;...\;y}=\frac{b}{a}$$

De a' nevezőnk itt $S-z$

számlálónk pedig $S-a$ tehát $\frac{S-a}{S-z}=\frac{b}{a}$, de $\frac{b}{a}$ tudjuk hogy a' factort adja melly$=q$

's így $S-a=q(S-z)=qS-qz$

$$qS-S=qz-a=S(q-1)$$

és ebből végre $S=\frac{qz-a}{q-1}$

Megtaláltatik e' szerént valamelly geometriai sor' öszvese, *ha az utolsó tag a' sor factorával sokszoroztatik, a' származatból az első tag levonatik' a'* *különbség végre az egységgel kisebbitett factorral elosztatik.*

Példák, következő 8 tagú sor' öszvese kívántatik

2, 8, 32, 128, 512, 2048, 8192, 32768

a' sornak factora $q=4$ és másként írva a' sor

$$2,\ 2.4,\ 2.4^2,\ 2.4^3,\ 2.4^4,\ 2.4^5,\ 2.4^6,\ 2.4^7.$$

$$S=\frac{4.(2.4^7)-2}{4-1}=\frac{4.32768-2}{3}=43690$$

Az első tag 5, a' factorok száma 7, a' tagok' száma 14, mennyi a' sor' öszvese?

$S=\frac{qz-a}{q-1}$ szükséges tehát az utolsó tag, e' pedig $t_{14}=5.7^{13}$ és

$$S=\frac{5.7^{14}-5}{7-1}=113037179625.$$

247. ***Példák a' progressiok' haszonvételére.***

1) Valaki a' lotteriába tesz és fél forint'al kezdi, de minden következő húzásnál fél forint'al többet tesz míg 40szer hijában rakván nyereség nélkül, pénzéből ki fogyott. Kérdés mennyit tett utoljára 's mennyit veszitett öszvesen.

Az arithmetikai sor' első tagja, különbsége és tagjainak száma adva van, és

$$Z=a+(m-1)k=\tfrac{1}{2}+39.\tfrac{1}{2}=20$$

$$S=\frac{m(a+z)}{2}=\frac{40.(\frac{1}{2}+20)}{2}=20.20\tfrac{1}{2}=410.$$

Elvesztett 410 forintot, utolsó tétele 20 f.

2) Fogadott egy jó gyalogló, hogy 9 óra alatt bé gyalogol a' városba, mert tapasztalása szerint megszokott 1000 ölet tenni fél óra alatt. Az első 1000 ölet csakugyan $26\tfrac{1}{2}$ percz alatt tette meg, de minden kö-

vetkező 1000 ölhez másfél percz'el több kellett. Ha a' távoly $4^1/_4$ mértföld volt, kérdés megnyerte é fogadását?

4000 ől tévén egy mértföldet az arithmetikai sor' első tagja $26^1/_2$, különbsége $1^1/_2$, tagjai száma $=17$; az utolsó tag $z=26{\cdot}5+16.1{\cdot}5=50{\cdot}5$

és $S=\frac{17}{2}(26{\cdot}5+50{\cdot}5)=\frac{17.\,77}{2}=604{\cdot}5$

Az idő 10 óra és 4·5 percz, a' fogadás elveszett 1^0 4·5 percz'el.

3) 6440 forint adósságát valaki hónaponként fizette le, és csakugyan fizetett az első hónapban 5 forintot. Kérdés mennyi idő alatt fizette le egész tartozását és mennyivel fizetett minden hónappal többet, ha az utolsó fizetése 275 forint volt?

A' tagok' száma $m=\frac{2\,S}{a+z}=\frac{2.\,6440}{5+275}=\frac{12880}{280}=46$ hónap

$$k=\frac{z-a}{m-1}=\frac{275-5}{46-1}=\frac{270}{45}=6$$

Kifizette 3 év és 10 hónap mulva, 6 forintal tódván minden elébb hónapi fizetését.

4) Ha mindennap 24 mérővel több gabonát csépeltek így szóll a' gazda munkássaihoz, 2 hónap mulva raktárban lesz idei termésem, a' borra való pedig elnem marad.

Az utolsó (61-dik) nap 1600 mérő gabona tisztult, kérdés mennyi volt a' termés és mennyi csépeltetett az első nap?

Az első tag $a=z(m-1)k=1600-60.24=160.$ mérő.

$$S=(a+2)\frac{m}{2}=(160+1600\frac{61}{2}=\frac{1760.\,61}{2}=53680 \text{ mérő.}$$

5) B le tudott írni egy ívet $2^1/_2$ óra alatt, 40 sort véve egy lapra 's minden sorba általányosan 52 betűt. Sürgetős lévén valamelly munka, a' szokás és ipar által mindegyik következő ívet $2^1/_4$ perczel kevesebb idő alatt végezett, míg az utolsó ívet egy óra $38^1/_4$ percz alatt le írta.

Kérdés hány ívet írt 's mennyi idő alatt, és hány betűt írt öszvesen, 's hány jön mindegyik órára általányosan?

Az első tag 150 az utolsó $98^1/_4$, a' különbség $2^1/_4$

$$m=\frac{150-98^1/_4}{2^1/_4}+1=\frac{51^3/_4}{2^1/_4}+1=23+1=24$$

$$S=(150+98^1/_4)\frac{24}{2}=248^1/_4 . 12=2979.$$

Az ívek száma 24. Az idő 2979 percz=49 óra 39 percz.

A' betűk száma=4.40.52.24=199680, jön egy órára $\frac{199680}{49\cdot65}=4021$ betű.

6) Artesiai kútam már 96 ölnyi 's még sem ád vizet, az első öl csak 18 forintba került de minden következő 6 és fél forintal többe. Kérdés mennyiben áll már kútam 's mennyit kell a' 97dik ölért fizetnem ha tovább ásatom?

$$z=95\times6\cdot5=617\cdot5$$

$$S=(18+617\cdot5)\frac{96}{2}=635\cdot5\times48=30504.$$

A' kút már 30504 forintban van, 's a' 97dik öl kerülne 617·5+6·5=624 forintba.

7) Tnek szomszédjai rendesen felszántogatták legelőjét csak $^3/_4$ rész holdal kezdvén az első évben, de nagy bámulására 13 év mulva tetemes 2430 holdnyi pusztájából nem maradt több jól megmérve 642 hold-

nál; kérdés mennyivel többet foglaltak el kedves szomszédjai minden évben, 's az utolsóban különösen?

$$S=1788 \quad m=13 \text{ és } a=\frac{3}{4}$$

$$z=\frac{2.\,1788-13^3/_4}{13}=243{\cdot}25$$

$$k=\frac{234{\cdot}25-^3/_4}{12}-19{\cdot}46$$

Minden évben közel 19·46 holdal szántottak többet bé 's az utolsóban már 243·25öt.

8) Egy kereskedő 17 forintal kezdé el munkálódásit: a' kedvező szerencse minden évben megdupláztatta vagyonát. Kérdés mennyit hagyott fiaira 16 év lefojta után?

A' geometriai progressió, első tagja 17, factora 2. az utolsó tag

$$z=17.2^{15}=17.19968=339456$$

$$\text{és } S=\frac{2.\,339456-17}{2-1}=678895.$$

Hagyott 678895 forintot.

9) Hatszor egymásután kell fizetni és mindenkor hatszor annyit mint elébb; kérdés mennyit kellett öszvesen fizetni és mennyi fizettetett elöször ha az utolsó fizetés 233280 f. volt?

Itt $q=6, \quad t=6$ és $z=233280$

$$a=\frac{z}{6^5}=\frac{233280}{7776}=30$$

$$S=\frac{6.\,233280-30}{6-1}=279930.$$

10) Mit adjak azért a' szép angol óráért kérdi Lajos Sándor barátját? Örömest nem válok megtőlle mond Sándor, de ha jó feltételek alatt eladhatom úgy

által engedem. Ha p. o: meg egyeznél benne hogy 3 év alatt meg fizeted ugy hogy az első hónapban csak egy krajczárt, a' másodikban kettőt, a' 3dikban 4et a' negyedikban 8at, 's így tovább fizetsz úgy oda adom. Lajos nagyot nevetett barátja együgyűségén 's az alkúra, különnössége miatt reá állott. Sándor kötlevelet kért azonban mellyben Lajos magát, maradóit 's minden vagyonát lekötelezi kaczagva, a' semmiség' lefizetésére.

Az első évben csak fizette a' sort

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512,

krajczárokkal, de a' második évben már fejét vakarni kezdé midőn

1024, 2496, 4992, 9984, 19968, 39936, 79872 kr.

's így tovább következett. A' második év' végével már jószágait eladta és tökélletes koldús lett.

Most Sándor kaczaga 's mindenit vissza adván a' számítás tanulását javaslotta néki.

Kérdés mennyi birtoka volt Lajosnak, és mennyire ment volna a' varázs órának árra 36 hónap mulva?

itt $S=2^{m}-1$.

Lajós vagyona $=2^{24}-1$ a' huszonnégy hónapi fizetés után $=170393$ f. 35 kr.

36 hónap mulva pedig a' csekélység

$S=2^{36}-1=11453'591,278$ f. 55 kr.

Tizenegyezer négyszáz ötven három millio és 591,278 f. 55 kr.

11) Ide Pest városa 24 mértföld, mit gondolsz Pista hány nap érsz oda ha az első nap felét teszed meg az útnak, másnap a' megmaradott félnek ismét felét, a' harmadiknap a' megmaradott távolynak ismét felét és így tovább? No hány nap felel Pista, tán csak

nem egy hét alatt? Soha sem, örök időre sem balgatag, szóll barátja, s' valóban a' sor

$$12,\ 6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{1\cdot5}{2},\ \frac{1\cdot5}{4},\ \frac{1\cdot5}{8},\ \frac{1\cdot5}{16},\ \frac{1\cdot5}{32}\ \text{'s a' t.}$$

vagy $\frac{24}{2},\ \frac{24}{2^2},\ \frac{24}{2^3},\ \frac{24}{2^4},\ \frac{24}{2^5},\ \frac{24}{2^6},\ \frac{24}{2^7},\ \frac{24}{2^8},\ \frac{24}{2^9}$, 's a' t.

végtelen.

4 §. A' Poligonal vagy többszegletü számok.

248. Ha az arithmetikai sor' közönséges alakjában, az első tagot 1nek a' különbséget pedig k nak vesszük lesz,

$$1,\ 1+k,\ 1+2k,\ 1+3k,\ 1+4k,\ 1+5k,\ 1+6k,$$
$$1+7k, \ldots\ldots 1+(m-1)k$$

sorunk, hol *m* a' tagok' számát mutatja.

Ha ezen sornak tagjait öszve vesszük előlről kezdvén kettőt, hármat, négyet, ötöt 's a' t. következő egyes tagokra akadunk.

a) az első tag egyedül $=1$

b) az első és második' öszvese $=1+1+k=2+k$

c) a' 3 első' öszvese $=1+1+k+1+2k=3+3k$

d) a' 4 első tag öszvevéve $3+3k+1+3k=4+6k$

e) az 5 első tag $=4+6k+1+4k- \quad =5+10k$

f) a' 6 első tag $=5+10k+1+5k \quad =6+15k$

. . . . 's a' t.

's végre mind valamennyi tag

$$=m+\frac{m(m-1)}{2}k.$$

hol ezen utolsó tag egyszersmind közönséges kifejezése mindegyik tagnak az új sorban, 's általa akár hány tag' öszvese megtaláltatik. Keressük p. o: a' 7 első tag öszvesét lesz

$$m + \frac{m(m-1)}{2} k = 7 + \frac{7.6}{2} k = 7 + 21k$$

a' 8 első . . . .

$$m + \frac{m(m-1)}{2} k = 8 + \frac{8.7}{2} k = 8 + 28k \text{ 's a' t.}$$

Ha mindezen külön tagokat egymásután írjuk, következő sorra akadunk.

$$1,\ 2+k,\ 3+3k,\ 4+6k,\ 5+10k,\ 6+15k,$$
$$7+21k\ .\ .\ .\ m + \frac{m(m-1)}{2} k$$

ha ezen sorban *k* helyett egymásután a' természetes számokat, 1, 2, 3, 4, 5.... tesszük következőket találjuk.

I. $k=1$,, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45.. $\frac{m(m+1)}{2}$

II. $k=2$,, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.. m^2

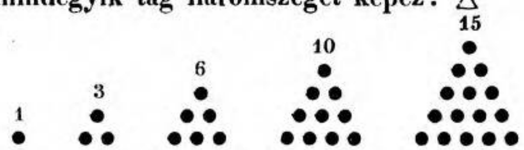
III. $k=3$,, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117.. $\frac{m(3m-1)}{2}$

IV. $k=4$,, 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153.. $m(2m-1)$

V. $k=5$,, 1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189.. $\frac{m(5m-3)}{2}$

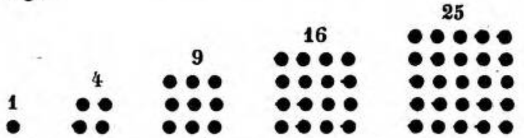
Ezen sorok adják a' poligonál, vagy szegletes számokat, mellyeknek tulajdona az hogy, rendre vagy rendes rakásokba vévén azokat, bizonyos szegleteket képeznek és csakugyan annyi szegű alakzatokat, mennyit a' sor' második tagja mutat.

Példáink' első sora a' háromszegű számokat foglalja, hol mindegyik tag háromszeget képez: △



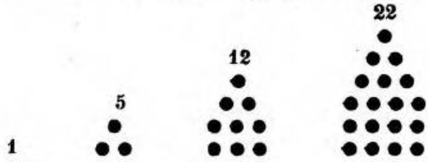
's a' t.

A' II sor a' négyszegű vagy tetragonál számokat foglalja



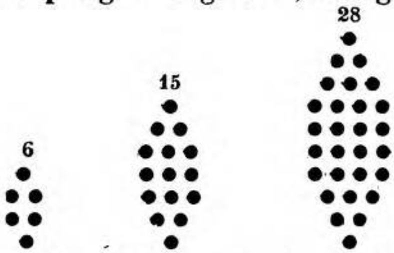
□ 's a' t.

A' III sor az ötszegű vagy pentagonál számokat



's a' t.

A' IV. sorći pedig 6 szegletűek, hexagonál számok:



's a' t.

249. Az illy alakított számok' feltalására következő kifejezések szolgáljanak, melyek' segéde által akármellyik tagot a' sorban meglehet találni, ha *m* helyett azon számot tesszük, melly a' tag' helyét mutatja.

a) a' háromszegű számoké .. $\frac{m(m+1)}{2}$

b) a' 4 szegűeké .... m^2

c) az 5 szegűeké .... $\frac{3m^2-m}{2} = \frac{m(m3-1)}{2}$

d) a' 6 szegűeké .... $\frac{4m^2-2m}{2} = m(2m-1)$

e) a' 7 szegűeké .... $\frac{5m^2-3m}{2} = \frac{m(5m-3)}{2}$

f) a' 8 szegűeké .... $\frac{6m^2-4m}{2}=m(3m-2)$

g) a' 9 szegűeké .... $\frac{7m^2-5m}{2}=\frac{m(7m-5)}{2}$

h) a' 10 szegűeké .... $\frac{8m^2-6m}{2}=m(4m-3)$

i) az N szegű vagy közönségesen: $\frac{(N-2)m^2-(N-4)m}{2}$

a' hol N a' szegletek' számát teszi.

Gyakorlásul kerestessen :

a' 4 szegű számok' 5dik tagja a' sorban ez lesz: $5^2=25$

a' 6 szegű számok' 7dik tagja ... $7(14-1)=13.7=91$

a' 9 szegűek' 9dik tagja .... $\frac{9(7.9-5)}{2}=\frac{9(63-5)}{2}$

$$=\frac{9.58}{2}=261.$$

a' 16 szegű számok' közönséges kifejezése? itt $N=16$ tehát:

$$\frac{(16-2)m^2-(16-4)m}{2}=m(7m-6)$$

és ezeknek 5dik tagja a' sorban

$$=5(7.5-6)=5.35-30=155.$$

XI. SZAKASZ.

1 §. Az állító és tagadó mennyiségekről.

250. Eddig a' jegyeket: + és — (több és kevesebb) csak míveleti jegyeknek vettük, de szükséges ezen jegyek' közönséges értelmét is megismérni.

251. Ha valamelly mennyiségnél a' + jegy áll, mindég azt teszi

1-ször, hogy mint mennyiség, egy más mennyiséghez adatván, azt bizonyosan nevelni fogja; 2-szor pedig: hogy a' mennyiség magában is, valami állító, való, positivum.

Valamelly egyedül álló mennyiség' eleibe azonban soha sem szokás ezen jegyet tenni, melléértvén mindenkor, hogy ha különösen a' — jegy nincs előtte, állító.

Az itt mondott az arithmetikai míveletekre nézve szorosan áll; különben valamelly mennyiség, magában tekintve, sem állító sem tagadó, és csupán csak az öszvehasonlítás által más mennyiségekkel lesz értelme és értéke.

252. A' tagadó számok közönségesen akkor támadnak, ha a' levonandó nagyobb mint azon szám, mellyből az levonatik. De ezen kivül a' — jeggyel illetett mennyiségeknek más értelme is van, és mint va-

lódi tagadó, ellenes, negativ mennyiségeket jelentenek.

Ha p. o: vagyonunk valami való és azt számba tesszük, adósságaink a' — jegyet fogják hordani. Igy ha a' nyereség, a' felmenet, a' bévétel, az irány jobbra, magasság 's a' t. + jegyel' iratnak; úgy a' veszteség, lemenet, kiadás, irány balra, méllység 's a' t. a' — jegyet fogják hordani. Hogy mindezen tárgyakat önkényesen megfordítva is jelölhetjük természetes, csak hogy értelmük szerént mindenkor ellenesek maradnak egymásra nézve.

A' tagadó mennyiség, ha értelem van mellé csatolva, mindég annyit tesz az ő elleneséből, a' mennyit ez megfordítva az ő állító jegyével.

Úgy p. o: —5 forint veszteség annyi mint +5 forint nyereség, és —5 forint nyereség, annyi mint +5 forint veszteség.

Ha tehát egynemű mennyiségeknél kétféle jegy jön elő, ezeket mindenkor elleneseknek tekinthetjük.

253. A' tagadó és állító mennyiségeknek mindenkor egyneműeknek kell lenniek. Vagyon és adósság mindenkor pénzre; felemelkedés és leesés mindenkor mozgásra mutatnak.

254. Ha valakinek éppen annyi adóssága van mint vagyona, úgy éppen semmije nincs. Ellenes mennyiségek tehát csak akkor emelik fel egymást, ha egyenlők; minden más esetben, egyik vagy a' másik oldalon marad valami. Az, kinek 100 forint vagyona és 80 forint adóssága van; még mindég bír 20 forintal; de kinek 100 forint vagyona mellett 120 forint adóssága

van, +20 forint (állító) adóssággal, vagy — 20 forint vagyonnal bír.

A' semmi, az üres tehát csak akkor támad, ha a' két ellenes mennyiség egyenlő.

Elvévén 5ből egymásután egyet egyet, arithmetikai sorra jutunk, mellynek különbsége=1 's ez lesz:

5, 4, 3, 2, 1, 0, —1,—2,—3,—4,—5 's a' t.

's itt nyilván látjuk, hogy a' 0 az állító és tagadó számok' határa 's mindegyik balra álló szám eggyel nagyobb a' következőnél:

$5>4>3>2>1>0>-1>-2>-3>-4>-5$

's itt lesz értelme annak. hogy a' semmi nagyobb valamelly tagadó mennyiségnél.

255. A' különböző jeggyekkel való öszveadás egybe foly a' levonással, mert a' mint a' + höz — adatik, ezt különben nem lehet eszközleni, mint levonás által, ha kevert jegy jön elő. Igy:

$+8-5=3$ és $-8+5=-3$;

ha pedig két egyenlő jegyű mennyiség adandó öszve, a' jegy változtatlan marad az öszves mellett, mint

$+8+3=11$ és $-8-3$ is $=-11$;

az az: a' tagadó jeggyel illetett mennyiségek' öszvese is tagadó, valamint 20+5+10+3 forint adósság bizonyosan =38 forint adósság marad, így —20—5—10+3 forint vagyon is — 38 f. vagyon marad.

Akármennyi kevert jegyű mennyiség legyen tehát együtt, ezeket egyszerű levonás által lehet öszveadni p. o:

$30-5+17-8+3-25+7+3-4-1+35-52+2-14$

az által, hogy az egyféle jegyűek különösen adatnak öszve 's a' maradandó többség tulajdon jegyét megtartja;

Példánkban:

a' + jegyűek' öszvese $=+94$
a — jegyűeké pedig $=-109$
's így a' következés $=-15$

256. A' levonása az illy jegyekkel illetett mennyiségeknek megfordítva történik; az az: a' levonandó mennyiség' jegye' elváltoztatása által.

Ha 8ból 5öt le kell vonni, tudjuk hogy 3 marad 's itt a' mennyiségek mind a' + jeggyel vannak, és + 8ból + 5öt levonván + 3 maradt.

De ezt így szokás írni: $8-5=3$, mivel a' levonás' tulajdon jegye is már — 's így is lehet írni: $+8-(+5)=+3$; tehát a' levonás elváltoztatta a' mennyiség' jegyét. Ha — 8ból + 5öt levonunk, szinte így lesz $-8-(+5)=-13$ mert $-8-5=-13$; 's végre ha 8ból —5öt kell levonni, ez lesz $+8-(-5)$ $=+8+5=+13$ és $-8-(-5)=-8+5=-3$.

Mit is tesz egyebet a' vagyonból adosságot vonni le, mint a' vagyont nevelni? Ha valakinek 60 forintja van és 30 f. adóssága, valódi vagyona kétség kivűl $=30$ f. Vonjunk le ezen 30ból p. o: 10 f. adósságot, nem lesz é 10 forintjával több? és ez $30-(-10)=30+10$; és ha minden adósságát levonjuk, nem lesz é $30-(-30)=30+30=60$ f. vagyona?

Eszközöltetik tehát a' jegyekkel illetett mennyiségek' levonása, ha a' kissebbítő szám' jegyei mind megváltoztatnak, az az: a' +, —be és megfordítva, 's így a' mennyiségek öszveadatnak:

$8+37-48-20+4-13$ ből vonasson le
$-7-3+4+8-18+27$; ezt így is lehet írni:

$$(8+37-48-20+4-13)$$
$$-(-7-3+4+8-18+27)$$

az első tag $=+49$ a' második, a' kissebbitő $=+39$

$$\begin{array}{r} -81 \\ \hline =-32 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \hline =+11 \end{array}$$

lesz tehát: $-32-(+11)=-32-11=-43$.

Ha pedig az első írásalakban az alsó sor' valamennyi jegyét elváltoztattuk volna, lenne:

$$8+37-48-20+4-13$$

$+7+3-4-8+18-27$'s ezt öszve számítván lesz az első sor -32

a' második -11

öszvese -43

257. Mint a' sokszorozásnál láttuk, a' származat éppen úgy támad a' sokszorozandóból, valamint a' sokszorozó támada az egységből. A' származat' jegye tehát a' factorok' jegyétől függ.

Ha $+5$ sokszoroztatik $+4$el, kétséget nem szenved, hogy származata $=+20$.

De ha $+5$ sokszoroztatik -4el, a' származat úgy fog támadni 5 és -4ből valamint -4 az egységből támadott, az az: négyszer véve -1et; a' mint tehát -4 áll: $4.-1$ből, az az: $-1-1-1$ és -1ből, éppen úgy fog -20 állani: $5.-4=-5-5-5-5$ből. Szinte úgy van ha $-5.+4$ által sokszoroztatik 's lesz $=-20$.

Ha tehát két factor közt egyik $+$a' másik $-$, a' származat mindég $-$ vagy tagadó. És valóban mit tesz ezen kifejezés: *tagadóan állító* egyebet mint tagadót? vagy megfordítva: *állitóan tagadó*? Mind két eset nem egyéb $-$nál.

Ha végre -5 sokszoroztatik -4el, a' származat ugyan ezen okból $= +20$, mert a' tagadót tagadóan véve, állítás; és az említett tekintet szerént $-5.-4$ nem lesz egyéb, mint -5öt négyszer egymásután tagadóan tenni. Mivel tehát -5 tagadóan véve, vagy $-(-5)$ (256,) nem egyéb $+5$nél, lesz:

$$-5.-4=+5+5+5+5=+20.$$

Ha tehát a' két factor' jegyei egyenlők a' származat mindenkor állító, vagy $+$ jegyű:

$$+5.+4=+20$$
$$-5.-4=+20.$$

ha pedig a' jegyek különbözők, a' származat tagadó:

$$+5.-4=-20$$
$$-5.+4=-20$$

A' négy esetet kettőbe vévén, lesz:

$$\pm5.\pm4=+20$$
$$\pm5.\mp4=-20.$$

258. Ha több factor jön elő különböző jegygyel, a' származat változik a' jegyekkel és ezeknek számával.

Láttuk a' sokszorozásnál, hogy a' factorokat, ha több van, egymásután sorban lehet egymással sokszorozni. Ha tehát $+3.+5.+2$ volna sokszorozandó, a' származat $=30$ bizonyosan a' $+$ jegyet venné magára.

De: $+3.+5.-2$, vagy: $-3.+5.+2$, vagy: $+3.-5.+2$, mind $=-30$ mert, $+3.+5.-2= +15.-2=-30$, és $-3.+5.+2=-15.+2=-30$'s így tovább.

Szinte így $+3.-5.-2$ „ $-3.-5.+2$ „ $-3.+5.-2$ mind $=+30$. mert $+3.-5.-2=-15.$

-2 „ $-3.-5=+15$. és $-2.-3.+5=-15.-2=+30$ és $-3.-5.-2=+15.-2=-30$.

Ha 4 factor jön öszve egyenlő jegygyel, a' származat mindég állító ha a' jegyek egyenlők egymás közt; mindég állító továbbá, ha a' jegyek párosan jönnek elő:

$$\left.\begin{array}{l}-3.+2.-4.+5\\-3.-2.-4.-5\\+3.-2.+4.-5\\+3.+2.+4.+5\end{array}\right\}\text{mind}=+120$$

ha pedig a' jegyek páratlanok egymás közt, a' származat mindég tagadó

$$\left.\begin{array}{l}+3.+2.+4.-5\\+3.-2.-4.-5\end{array}\right\}=-120.$$

Akárhány legyen tehát a' factor, a' származat mindég állító; ha:

1) mind valamennyi factor egyenlő

2) ha a' factorok' jegyei párosan jönnek elő; vagy

3) ha egyféle factorjegy legalább kétszer jön elő; természetesen ide értvén, hogy a' factorok' száma maga is páros legyen, különben a' jegyek sem lehetnek párosak. Minden egyéb esetben a' származat tagadó.

Ha valamelly — jegygyel illetett számot maga magával sokszorozunk ismételve, következő változásokra találunk.

$$-2.-2=+4=2^2$$
$$-2.-2.-2=+4.-2=-8=-2^3$$
$$-2.-2.-2.-2=-8.-2=+16=+2^4$$
$$-2.-2.-2.-2.-2=+16.-2=-32=-2^5$$

's így továb.

Itt nyilván látjuk, hogy ha a' factorok' száma páros vagy páratlan, és jegyei egyenlően —, a' származat is + vagy — ; és hogy valamelly tagadó mennyiség' egyenes vagy páros emelései mind állítók, páratlan emelései mind tagadok, és hogy:

$$(-2)^2 = +2^2 \text{ ,, } (-2)^3 = -2^3 \text{ ,, } (-2)^4 = +2^4 \text{ ,, } (-2)^5 = -2^5 \text{ ,, } (-2)^6 = +2^6$$

's így továb.

259. A' mint $-2.-2 = +4 = +2^2$
és $+2.+2 = +4 = +2^2$

látszik: hogy valamelly mennyiség második emelése (valamint minden egyéb páros emelése is) kétfélekép származhatott: 1-ször állító és 2-szor tagadó factorokból 's következésképpen: a' négyszeg' és más egyenes emelés' gyökere lehet állító is és tagadó is; tehát:

$$\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = \pm 2 \text{ ,, } \sqrt[4]{2^4} = \pm 2$$

és közönségesen: ha a' páros számokat $2m$ el jelöljük:

$$\sqrt{a^{2m}} = \pm a.$$

A' páratlan faktorokból álló mennyiségek vagy + vagy — jegygyel lévén, a' gyökér ugyan azon jegyet fogja hordani:

$$\sqrt[3]{-2^3} = -2 \text{ és } \sqrt[3]{2^3} = +2$$

Ebből következik, hogy p. o: — 4 nem négyszege a' kettőnek, hanem csak $+2.-2$ származata, 's hogy közönségesen tagadó páros emelés nincsen 's nem lehet írni -2^2 mint származatot, hanem ismét csak mint levonási jegygyel.

Gyakran megtörténik, hogy a' gyökérjegy alatt valamelly tagadó szám áll: ha az illy tagadó, valamelly páros mutatójú gyökérjegy alatt van, az illy mennyiséget képzelt mennyiségnek hivjuk, mivel a' mint említők, a' páros emelésű tagadó mennyiség csak képzelet.

Az illyen képzelt mennyiség $\sqrt[2m]{-A}$, a' hol A akármelly számot, $2m$ pedig akármelly páros számot jelent. De mivel minden tagadó mennyiséget állítónak vehetünk sokszoroztatván —1el, mert valóban — A =+A.—1. lesz :

$$\sqrt[2m]{-A} = \sqrt[2m]{A.-1} = \sqrt[2m]{A}.\sqrt[2m]{-1}$$

's ha feltesszük hogy

$$\sqrt[2m]{A} = a, \quad \text{lesz} \quad \sqrt[2m]{A}.\sqrt[2m]{-1} = a\sqrt[2m]{-1}$$

's ezen kifejezés a' képzelt mennyiségek' közönséges alakja.

E' szerént:

$$\sqrt{-8} = \sqrt{-2^3} = \sqrt{2^2.-2} = 2\sqrt{-2}$$

$$\text{és } \sqrt{-4} = \sqrt{-2^2} = \sqrt{2^2.-1} = 2\sqrt{-1}$$

nem pedig —2

$$\text{és } \sqrt[4]{-2^2}.\sqrt[4]{-2^2} = \sqrt[4]{-2^4} = \sqrt{-2} = \sqrt{2}.\sqrt{-1}$$

$$\text{és } \sqrt[4]{-2}.\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{-2^2} = \sqrt{-2} = \sqrt{2}.\sqrt{-1}$$

261. Az elosztásnál mind az változtatlan marad, a' mit a' sokszorozásnál mondottunk, és a' jegyek szinte úgy változnak 's maradnak, valamint ott és egyenlő jegyek állító; különböző jegyek, tagadó részest adnak.

$$+8:-4=-2$$
$$+8:+4=+2$$
$$-8:+4=-2$$
$$-8:-4=+2$$

Tudván különben az elosztásból, hogy a' részes éppen úgy támad az osztandóból, valamint az osztó támada az egységből, a' mivelet, nehézségekre nem fog adni okot.

$$\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{-2^2} : \sqrt{-2} = \sqrt{\frac{-2^2}{-2}} = \sqrt{+2} = \sqrt{2}$$

$$\text{és } \frac{\sqrt[4]{-a^2}}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt[4]{-a^2}}{\sqrt[4]{(-a)^2}} = \sqrt[4]{\frac{-a^2}{+a^2}} = \sqrt[4]{-1}$$

2 §. A' végnélküli vagy határtalan mennyiségekről.

262. Ha elménk nem foghatja is meg a' szó' egész értelmét, azért a' mathesisben ez szintolly tiszta, mint akármelly egyéb szám. A' végnélkül való mennyiség magában tekintve mindenkor csak ugyan az, és minden megfogható erő előtt egyértelmű; de őt mint számolási mennyiséget, közelebbről tekintvén, más végnélküli mennyiséghez hasonlítni, ahoz adni, belőlle levonni, általa elosztani 's a' t. egy szóval, véle minden arithmetikai és mathesisi míveletet eszközleni szoktunk.

És valóban, mi egyéb, mint végtelenség mind az: mi bennünket körülvesz, mindaz mivel élünk? Az idő, a' tér, a' tudományok, a' természet' törvényei s' ereji, a' történet, mindannyi végnélküli mennyiségek, mint számolási alapunk a' tizes alkotmány. Hogy ezen végtelen mennyiségek csakugyan nagyobbithatók szorosabb tekintetben; kiki érzi.

Közönséges számaink, noha jegyeink csak 9, kétségen kivül végtelen, és mindennapi haszonvétünkre ezen végtelenség' igen csekély része elegendő. Legnagyobb számaink az astronomiában jönnek elé és ezeknek jegye ritkán mulja felül a' 8at 's ezek tizes milliok leg fellyebb.

Melly parányi szám ez a' végtelenséghez képest?

Természetes számaink' 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... sora, mint legtöbbnyire az arithmetikai és geometriai sorok 's mint láttuk, a' törtszámok' tizedes kifejezései, ha a' tört' számítója 's nevezője egymásközt elsők, és még több illy mennyiségek, valódi végtelenek és addig fojtathatók, a' meddig akarjuk, a' nélkül, hogy valaha véget lelnének.

263. Ha tehát természetes számaink végtelenig nevekednek felfelé, úgy végtelenül is kisebbednek az 0 alatt, hol a' tagadó számok' birtoka kezdődik.

De melly kevés legyen is az 0 és 1 közti különbség, még e' közt is végtelen számok férnek el. Ha valaki ezt tagadná, olly kis törtszámokat kellene nekie adni, mellynél kisebbeket nem lehetne béiktatni, ezt pedig nem adhat; mert akármelly kis törtszámmal igyekezne a' semmit elérni, hijjába iparkodna. Ha p. o: azt mondaná, hogy $\frac{1}{10^{1000}}$ a' semmi mellett van, egy más a' tizes' *mutatóját* is sok emelésre vihetné 's még sem érné el a' valódi semmit. De sora' parányi tagjai p. o:

$$\frac{1}{10^{1000}} \text{ és } \frac{2}{10^{1000}}$$

közt is végtelen szám áll, melly mind nagyobb

$\frac{1}{10^{1000}}$ nél és kisebb $\frac{2}{10^{1000}}$ nél 's lenne a' többi közt:

$$\frac{1\cdot00000001}{10^{1000}},\quad \frac{1\cdot00000002}{10^{1000}}\ \text{'s a' t.}$$

Tudjuk, hogy a' részes annál kisebb, mennyivel nagyobb az osztó 's következő sorban csakugyan sebesen közelítünk a' mennyiségek' alig észrevehető értékéhez:

$$\frac{1}{10}=0\cdot1,\ \frac{1}{10^2}=0\cdot01,\ \frac{1}{10^4}=0\cdot0001..\frac{1}{10^8}=0\cdot00000001$$

de akármelly mutatója legyen a' 10nek, soha sem érjük a' semmit, míg az osztó maga végtelen nem lesz 's ekkor $\frac{1}{\infty}=0$, arithmetikai értelemben.

264. A' mondottból könnyen következtethetni, hogy mindegyik, még olly csekély mennyiség, végtelen részecskékből állhat és ezen részecskék által ki is fejezhető mennyire kívántatik. Minden még olly kicsi vagy nagy mennyiségeket e' szerént a' végnélküli sorok' alakjába lehet öltöztetni.

Valamint a' törtszámokat végtelen tizedes részekben lehet adni, úgy minden egész számot is végtelen részecskéi által; a' mi tehát itt az egyik értelemben véges, bizonyos, isméretes és való; más tekintetben végtelen 's végnélküli.

265. Ha $\frac{a}{1-a}$ az álgebra szerént feloldatik, lesz az osztás' részese, az az $\frac{a}{1-a}=a:(1-a)=a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$.. és $\frac{a}{1-x}$ éppen így$=a+ax+ax^2ax^3+ax^4+ax^5$....és ha itt az utolsó példában x helyet 1et te-

szünk, lesz: $\frac{a}{1-1}=a+a+a+a+a+a+a+a+\ldots$

's mindeggyik sor végnélküli.

Adjunk ezen *a*nak akármelly értéket, látszik, hogy a' részes nagyobb mint akármelly még olly nagy szám 's következésképp$=\infty$'s így:

$$\frac{a}{1-1}=\frac{a}{0}=\infty \quad \text{és ebből} \quad \frac{a}{\infty}=0.$$

$$\frac{a}{1+a}=a-a^2+a^3-a^4+a^5-a^6+a^7-a^3$$

's így tovább; ha $a=1$, lesz:

$$\frac{1}{1+1}={}^1/_2=1-1+1-1+1-1+1-1+1\ldots.$$

végnélkül 's a' mint egyik tag a' másikat semmivé teszi, a' maradék mindég $^1/_2$ marad.

E' szerént az elosztást különb különb alakokban végezvén, több nevezetes sorra lehet találni:

$$\frac{1+1}{1-2}=1+3+6+12+24+\ldots.$$

$$\frac{1+1}{1-3}=1+4+12+36+108+\ldots$$

$$\frac{1+1}{1-4}=1+5+20+80=320+\ldots$$

$$\frac{1+2}{1-2}=1+4+8+16+32+\ldots.$$

$$\frac{1+2}{1-3}=1+6+15+45+135+\ldots$$

$$\frac{1+2}{1-4}=1+6+24+96+384+\ldots$$

$$\frac{^4/_2}{1-2}=\frac{4}{2}+4+8+16+32+\ldots$$

$$\frac{^6/_4}{1-4}=\frac{6}{4}+6+24+96+384+\ldots$$

XII. SZAKASZ.

A' LOGARITHMOKRÓL.

1. §. A' logarithmokról közönségesen.

266. Azon különbféle emelési mutatókat, mellyeket valamelly változatlan mennyiség felibe teszünk, hogy különbféle emelései által egymásután minden lehető számot kifejezhessünk, *logarithmoknak* nevezünk: a' változatlan mennyiség a' logarithmok' *alkotmányi alapja*.

Minden szám ugy tekintetik tehát mint ezen alapnak valamellyik emelése, és az alapnak mutatóji, a' számoknak logarithmai.

A' közönséges kifejezésben $y=a^x$ y a' szám, a alkotmányi alap x pedig a' logarithma, 's mondjuk x logarithmája y nak.

Ha $y=256$ p. o: és $a=2$, lesz $256=2^x$, és x azon emelése 2nek melly 256ot származtat: tudjuk pedig hogy $256=2^8$, tehát $x=8$ azon log: alkotmányban mellynek alapja 2, és 256nak log: $=8$ mit így szokás írni $\log:256=8$

szinte így $64=2^6$ és $\log:64=6$'s a' t.

267. Ha két végnélküli progressiót öszvehasonlítunk, egyike geometriai 's első tagja $=1$, másika arithmetikai első tagja$=0$ lévén, ezen utóbbinak mind-

egyik tagja, logarithmaja lesz az első sorban néki megfelelő tagnak.

A' két progressió tagjai logar: alkotmányt adnak; 's ebből tüstént következik hogy az egységnek nincs semmi logarithmaja vagyis log:1=0.

268. A' két progressióban, a' geometriainak mindegyik tagja azon emelésen van, a' mennyi az előtte álló tagok' száma; az arithmetikainak tagja pedig a' különbséggel annyiszor sokszorozva, hány tag őt megelőzi. (237.244)

Következéskép': ha a' geometriai progressio' tagja ugyan azon helyen áll mellyen az arithmetikainak tagja, a' kettő olly arányban áll egymásközt, hogy *az első sor tagjának mutatója egyenlő a' második sor tagjának sokszorozójával.*

269. Ha a' geometriai sorban valamelly két tag sokszoroztatik, az arithmetikaiban pedig a' nekik megfelelő két tag öszve adatik, a' származat és az öszves ismét tagjai lesznek a' soroknak, és ezen felül, egymásnak megfelelelő tagjai. Tekintsük például az 5 és 7dik tagokat: a' geometria sorban az 5dik tag 4dik emelésen- a' 7dik tag pedig a' 6dik emelésen van, az arithmetikaiban az 5dik tag négyszer van sokszorozva a' különbséggel, a' 7dik tag pedig 6-szor.

Az első esetben az emelés 4+6=10 a' másodikban a' sokszorozó különbség 4+6=10, 's mindegyik sorban 11dik tag.

A' származat és öszves tehát egymásnak megfelelők a' két sorban.

A' mondott nem csak két de akárhány tagra is alkalmaztatható, és ha valamelly tagok' származatját az első sorban meg akarjuk találni, elég a' második sorban az ezeknek megfelelő tagokat öszveadni, az öszves megfelel a' keresett származatnak, 's hányadik tagja ezen öszves az arithmetikai sornak, ugyan azon tagja a' származat a' geometriai sornak. Példa legyen a' két sor:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561 's a' t.
0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 's a' t.

keressük a', geometriai sorban a' 3, 27 és 81 származatát; ezen tagoknak meg felelnek az arithmetikai sorban 2, 6 és 8 tehát a' $2+6+8=16$ felett lévő geometriai tag a' keresett származat 's ez

$$3.27.81=6561.$$

A' két sort egyszerűbben írván világosabban látjuk a' mondottat: legyen a' két sor

$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5,\ 3^6,\ 3^7,\ 3^8$
$0,\ 1.2,\ 1.2.2,\ 1.2.3,\ 1.2.4,\ 1.2.5,\ 1.2.6,\ 1.2.7,\ 1.2.8$
vagy $3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5,\ 3^6,\ 3^7,\ 3^8..$
$0.2,\ 1.2,\ 2.2,\ 3.2,\ 4.2,\ 5.2,\ 6.2,\ 7.2,\ 8.2..$
és p. o:

$3^1.3^3.3^5=3^9$, $\quad 1.2+3.2+5.2=(1+3+5)2$
$=9.2=18$

Ha tehát a' felső sor tagjainak megfelő tagjai az alsó sornak, azoknak logarithmai; úgy a' felső sor tagjai' származatának logarithmaja, a' nekik megfelelő alsó sori tagoknak öszvese.

A' logar: egyik tulajdona tehát hogy, a' sokszorozást öszveadásba változtatják.

Első tekintetre azt lehetne észrevenni, hogy a' logarithmok mint felsőbb példánkban csak azon tagoknak felelhetnek meg, mellyek a' sorban lévén egész szám mutatóval bírnak, de tudván hogy, mindegyik két tag közé annyi új tagokat lehet iktatni a' mennyi kívántatik, könnyen átláthatni hogy minden kívánható és lehetséges számot magában foglalhat a' két sor, 's így minden számnak a' felső sorban, logarithmája is lesz az alsóban.

2 §. A' logarithmok' alapjairól.

270. Minden állító szám, alapja lehet valamelly logarithmi alkotmánynak kivévén az egységet, melly minden emelésen változatlan $=1$. (34)

Ha a' kifejezésben $y=a^x$, $a>1$, y akármelly szám, x pedig $y$nak logarithmája, tudjuk hogy y nőni fog egyszersmind x el.

Ha $x$nek következő értékeket adunk:

$$x=0,\ x=1,\ x=2,\ x=3,\ x=4,\ x=5 \text{ 's a' t.}$$

lesznek y megfelelő értékei

$$y=a^0=1,\ y=a,\ y=a^2,\ y=a^3,\ y=a^4,\ y=a^5 \text{ 's a' t.}$$

Ha itt $x$et alig észrevehetőleg növesztjük 0 tól 1 ig, (semmitől egyig) annyi számot találunk y értékéül 1 és a közt a' mennyit akarunk: ha $x$nek szinte így adunk 1 és 2 közt értékeket, a és a^2 közzé annyi szám esik a' mennyi kívántatik; x értékei 2 és 3 közt, az a^2 és a^3 közt lévő számokat adják 's így tovább.

Az egység logarithmája minden alkotmányban $=0$. A' végtelenség' logarithmája is végtelen mert $a^{\infty}=\infty$.

271. Ha $x$et tagadónak vesszük, $y=a^x$ helyett

$$y=a^{-x} \text{ irúnk, lesz } y=\frac{1}{a^x}$$

és x értékeinek

$x=0$, $x=-1$, $x=-2$, $x=-3$ $x=-4$, 's a' t.

$$y=1,\ y=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{a^2},\ y=\frac{1}{a^3},\ y=\frac{1}{a^4}\text{ 's a' t.}$$

felel meg.

Minden értékei x nek 0 és -1 közt, az 1 és $\frac{1}{a}$ közt lévő törtszámokat, -1 és -2 közti x az $\frac{1}{a}$ és $\frac{1}{a^2}$ közti törteket, a' -2 és -3 közti x az $\frac{1}{a^2}$ és $\frac{1}{a^3}$ közti törteket & adják: mentül nagyobb a' tagadó x, annál kisebb y: következésképp, ha a' tagadó x végtelen nagy, y végtelen kicsi, tehát *a' semmiség' vagy a' 0 logarithmája végtelen tagadó.*

Minden alkotmányban mellynek alapja állító és nagyobb az egységnél, minden logarithmai az egységnél nagyobb számoknak egész és törtszámok: az egységnél kisebb számoknak logarithmai pedig tagadók.

272. Ha az alkotmányi alap törtszám p. o:

$$\frac{1}{b}\text{ hol } b>1 \text{ lesz } y=\left(\frac{1}{b}\right)^{-x}=\frac{1}{b^x}$$

's így az *egységnél kisebb* számok' logarithmai *állítók.*

Ha innen az egységnél *nagyobb* számok' logarithmait keresnénk x et tagadóan kellene vennünk 's lenne

$$y=\left(\frac{1}{b}\right)^{-x} \text{ hellyet } y=\frac{1}{b^{-x}}=b^x$$

és ekkor x tagadó értékei, az egységnél *nagyobb* számokat adnának y értékeinek.

273. Az alkotmányi alap tagadó szám nem lehet mert, ennek emelései nem egyformán de rendetlenűl nőnek.

Legyen p. o: $y=-5^x$ (hol az alkotmányi alap -5 tagadó szám), lesz x következő értékeinek

$$x=o,\ x=1,\ x=2,\ x=3 \text{ 's a' t.}$$

megfelelő

$$y=1,\ y=-5,\ y=25,\ y=-125 \text{ 's a' t.}$$

úgy hogy a' páratlan emelések tagadó, a' párosak, pedig állító mennyiségeket adván (257), változtatva kétféle számokra akadnók.

Ha az x nek tört értéket adunk p. o: $x=\frac{1}{2}$

$$y=(-5)^{1/2}=\sqrt{-5}$$

lesz, mi lehetetlen kifejezés.

Tagadó értékei x nek tehát, y nak felváltva tagadó és állító tört értékeket, x tört értékei pedig tagadó mennyiségeket adnának ha a' nevező páratlan, és képzelt értékeket ha az páros lenne. Lehetetlen tehát hogy, tagadó szám emelései által minden más szám elő hozassék.

274, A' tagadó számok' logarithmai képzeletiek, mert, $y=a^x$ ben minden lehető értékei x nek, legyenek azok állítók vagy tagadók, y nak egész vagy törtszám de mindenkor csak állító értékeket adhatnak.

3 §. Közönséges logarithmok.

Logarithmi alkotmány mellynek alapja 10.

275. A' haszonba vett logarithmok alkotmányi alapja 10 és a' tizes alkotmányhoz alkalmaztatott.

A' számok' tizesrendjei geometriai végnélküli sort képzenek hol a' 10, 100, 1000, 10000 's a' t. a' sornak egyes tagjai és mutatójok szerént állanak, a' rendek vagy a' 10 nek mutatóji a' természetes számok arithmetikai sorát képezik mellynek egyes tagjai egyszersmind az első sorban nekik megfelelő tagoknak logarithmai.

A' két sor:

10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6. 10^7 's a' t.
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 's a' t.

Eszerént a' $10^0=1$ logarithmaja$=0$
$10^1=10$ .... $=1$
$10^3=1000$ .... $=3$
$10^5=100000$ .... $=5$
$10^7=10000000$ .... $=7$'s a' t.

276. Látjuk hogy a' felsőbb rendű 1nek logarithmai egész számok, és csakugyan a' hány üreset hord magával az egy, azon szám lesz egyszersmind logarithmája.

De ha, csak a' 10' különbféle emeléseinek logarithmai egész számok, azt is látjuk hogy semmi egyéb szám logarithmája egész szám nem lehet de kevert vagy csupa törtszám: és csak ugyan esni fog a' számok logarithmája

az 1 és 10 közötti számé 0 és 1 közzé
a' 10 és 100 vagy 10^2.... 1 és 2 —
a' 10^2 és 1000 vagy 10^3.. 2 és 3 —
a' 10^3 és 10000 vagy 10^4.. 3 és 4 —'s a' t. (270)

úgy hogy az 1 és 10 közt lévő számok logarithmai csak törtek lehetnek és mind kisebbek 1 nél' a' 10 és 10^2 közt lévők' logarithmai már 1 egészből és törtekből, a' 10^2 és 10^3 közteké 2 egészből és törtekből 's a' t. fog állani: és közönségesen, akármelly szám' logarithmája egyel kevesebb egészet fog a' törtek előtt hordani (ha illyenek vannak) mint mennyi a' jegyek száma mellyekkel írva van: p. o: a' három jegyű szám' logarithmája két egészet, a' 4 jegyűé 3 at, a 8 é 7 tet és az m é $(m-1)$ et: ha viszont valamelly logarithma volna adva, egyszeriben meglehet tudni hány jegyből áll a' hozzá tartozó szám, a' törtek előtt álló egészekből, p. o: 3 egész és tört log: tartozó szám 4 jeggyel van írva, az m egész számot hordó log: pedig $m+1$ jeggyel.

Ezen egészeket, mellyek mint láttuk csak akkor állanak magukban törtszám nélkűl, ha a' 10 valamelly felsőbb emeléséhez tartoznak, caracteristikáknak vagy logarithmi mutatóknak nevezzük.

4 §. Tagadó logarithmok.

277. Előbbi sorunk csak azon számok' logaritmait adja, mellyek az egységnél nagyobbak; ha tehát az egynél kisebb számok' logarithmait is meg akarjuk ismérni, szükséges hogy sorunkat balra folytassuk lefelé és a' 10nek alsóbb rendjeit tekintsük: lesz sorunk az egység' mind két felin folytatva

's a't. $^1/_{10000}$, $^1/_{1000}$, $^1/_{100}$, $^1/_{10}$, 1, 10, 100, 1000, 10000, 's a' t.

vagy 0·0001, 0·001, 0·01, 0·1, 1, 10, 100, 1000, 10000 's a' t.

$$=\frac{1}{10^4},\ \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^1},\ \frac{1}{10^0},\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4 \text{ 'sa't.}$$

$$=\frac{1}{10^4},\ \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^1},\ \frac{1}{10^0},\ \frac{1}{10^{-1}},\ \frac{1}{10^{-2}},\ \frac{1}{10^{-3}},\ \frac{1}{10^{-4}}$$

$$=10^{-4},\ 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4 \text{ \&.}$$

ennek megfelel az arithmetikai sor

$$—4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

Az egynél kisebb számok' logarithmai e' szerént a' tagadó mennyiségekre vezetnek, 's mindaz mit (275 és 276 ban) mondottunk ide is alkalmaztatható.

az 1 és $\frac{1}{10}$ közti számok logarithmai 0 és —1 közt

$\frac{1}{10}$ és $\frac{1}{10^2}$ közti . . . . . . —1 és —2 ,—,

$\frac{1}{10^2}$ és $\frac{1}{10^3}$ — . . . . . . —2 és —3 ,—,

's a' t. vannak.

Ha a' geometriai sor' valamelly tagjait kellene sokszorozni, a' származat' logarithmája lesz szinte így az arithmetikai sor tagjainak öszvese

$$\text{p. o:} \quad 0{\cdot}00 \times 10{\cdot}1 \times 10^3$$

vagyis

$$\tfrac{1}{1000} . \tfrac{1}{10} . 1000 = 10^{-3} . 10^{-1} . 10^3 = 10^{3-4} = 10^{-1} = \tfrac{1}{10}$$

$$\text{mert} = -3 - 1 + 3 = -1.$$

$$10^{-4} . 10^{-2} . 10^3 . 10^5 = 10^{8-6} = 10^2 \;,, \; -4-2+3+5=2.$$

278. Az egynél kisebb számok' logarithmi mutatója tehát tagadó szám és akkora, hány üres megelőzi a' jelentő jegyet hozzá vévén a' tizedes pontot magát is. Megjegyzendő itt hogy, minden törtszámot tizedesekbe kell változtatni ha logarithmi mutatóját keressük:

p. o: log: $0{\cdot}1 = -1$, log:$0{\cdot}001 = -3$,
log: $0{\cdot}000001 = -6$

5 §. A' logarithmok' szerkeztetése.

279. Ha valamelly számnak logarithmaját kell keresni valamelly bizonyos közelítéssel, elég azon két

tag közzé, hol az adott szám áll, annyi új' tagokat iktatni mennyi szükséges a' kívánt közelítés szerént. Azon szám vagy tag a' geometriai sorban, melly az adotthoz legközelebb áll, logarithmaját megleli az arithmetikai sor' megfelelő tagjában.

A' tizedes törteknél láttuk hogy, mint a' kérdés kívánja annyi tizedes jegyeket veszünk feloldására, 's addig fojtatjuk visgálatinkat míg a' feltételnek eleget tettünk.

Példa. Kívántatik 3 logarithmaja egyes ezred részeiben, vagyis csak három tizedes helyben?

1 és 10 közt a' geometriai közép $=\sqrt{10}=3\cdot162..$ 0 és 1 közt az arithmetikai $=0\cdot5$ tehát

$$\log 3\cdot162\ldots=0\cdot5.$$

A' 3, egy és $3\cdot162\ldots$ közt lévén, ezen két számközti geometriai közép $=\sqrt{3.162\ldots}=1\cdot778$, 0 és $0\cdot5$ közt az arithmetikai $=0\cdot25$.

$$\log 1\cdot778=0\cdot25$$

Ezután kerestetik $3\cdot162$ és $1\cdot778$ közt a' geometriai közép, $0\cdot5$ és $0\cdot25$ közt az arithmetikai, 's így folytatván a' visgálatot következő tagokra akadunk:

3·162, 1·778, 2·371, 2·738, 2·942, 3·050,
2·996, 3·023, 3·009, 3·002 és 2·990,

ezeknek megfelelő logarithmok pedig az az arithmetikai sorban

0·500, 0·250, 0·375, 0 437, 0·468, 0·484,
0·476, 0·480, 0·478, 0·477 és 0·477.

A' geometriai sorban 3, bizonyosan 3·002 és 2·999 közt lévén, ezen két tagnak megfelelő logarithmaja a' második sorban $=0\cdot477$ és egyenlő: ha tehát a' kérdésben több tizedes hely háromnál nem kívántatott, neki elégtétetett, és $\log 3=0\cdot477$.

280. A' logarithmok' szerkeztetésére sokkal alkalmasbak a' láncztörtek. A' velükvaló mívelet ekép' történik.

Kívántatik 2-ő logarithmaja?

$10^x = 2$ tehát x valódi törtszám p. o: $\frac{1}{x'}$ és $10^{\frac{1}{x'}} = 2$ vagy $10 = 2^{x'}$ hol $x' > 3$ és $x < 4$ mert $2^3 = 8$ és $2^4 = 16$, 10 pedig 2^3 és 2^4 között áll: legyen tehát $x' = 3 + \frac{1}{x''}$'s ebből következik:

$$2^{3+\frac{1}{x''}} = 10 \text{ vagy } 10 = 2^3 . 2^{\frac{1}{x''}} \text{ és } 2^{\frac{1}{x''}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\text{és } 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{x''} = (1 \cdot 25)^{x''}$$

Tovább folytatván a' keresést, megleljük hogy x^{II}, 3 és 4 között; x^{III}, 9 és 10 között; x^{IV}, 2 és 3 's a' t. között áll: 's lesz a' láncztörtben x értéke közelítve

$$x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 +}}}}} \text{ 's a' t.}$$

Ha ezen láncztörtnek ötödik közelítő értékét veszszük melly

$$= \frac{146}{485} = 0 \cdot 301030, \text{ lesz } 10^{0 \cdot 301030} = 2 \text{ és}$$

$$\log 2 = 0 \cdot 301030.$$

281. Hogy a' geometriai progressioban a' számok' logarithmai arithmetikai progressioban állanak következőkép bizonyítatik közönségesen.

Ha a' geometria progressio

$$a : b : c : d : e : f : g : h \ \&$$

lesz a' logarithmok' sora arithmetikai,

$$\log a \div \log b \div \log c \div \log d \div \log e \div \log f \div \log g \div \log h \div$$

mert geometriai progressionkban

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} = \frac{f}{e} = \frac{g}{b} = \frac{h}{g} \ \& \ (244)$$

az arithmetikaiban lesz:

$$\log b - \log a = \log c - \log b = \log d - \log c$$
$$= \log e - \log d \ \&$$

mi bizonyítandó volt.

A' logarithmok' második fő tulajdona tehát hogy az elosztást levonásba változtatják.

282. Ha tehát a' számoknak logarithmait keressük, csupán csak az elsőszámokét szükséges megtalálni, és ezekből minden egyéb szám' logarithmaját könnyű lesz egyszerű öszveadás vagy levonás által alakítni az elsőszámokéból; p. o: ha 2, és 3nak log: megtaláltuk már csak ezekből is számtalan más számok' logarithmait leírhatjuk, így találjuk 2 és 3 minden lehető sokasának és részesének logarithmait, 2 és 3 minden emeléseinek 2 és 3 közti minden egyes és sokas származatnak 's a' t. logarithmait: így:

$$\log 4 = \log 2 + \log 2 \text{ mert } 4 = 2.2$$
$$\log 8 = \log 2 + \log 2 + \log 2 \text{ mert } 8 = 2.2.2$$
$$\log 8 = \log 4 + \log 2 \text{ is, mert } 8 = 4.2$$
$$\log 16 = \log 4 + \log 4 = \log 2^4 = 4 \log 2 \text{ mert } 16 = 2^4$$
$$\log 64 = \log 2^6 = 6 \log 2 = \log 8 + \log 8 \text{ mert } 64$$
$$= 8.8 = 2^6$$
$$\log 9 = \log 3 + \log 3 = 2 \log 3 \text{ mert } 9 = 3^2$$
$$\log 27 = 3 \log 3 = \log 9 + \log 3 \text{ mert } 27 = 9.3 = 3^3$$

$\log\ 81 = \log 9 + \log 9 = 4 \log 3$ mert $81 = 9.9 = 3^4$

$\log 6561 = \log 81 + \log 81 = 8 \log 3$ mert $6561 = 81.81 = 3^8$

$\log\ 6 = \log 2 + \log 3$ mert $6 = 2.3$

$\log\ 18 = \log 6 + \log 3$ mert $18 = 6.3$

$\log\ 24 = \log 6 + \log 4 = \log 3 + 3 \log 2$ mert $24 = 4.6 = 3.2^3$

$\log\ 5 = \log 10 - \log 2$ mert $5 = \frac{10}{2}$

$\log\ 25 = 2 \log 5 = \log 5 + \log 5$ mert $25 = 5^2$

$\log\ 75 = 2 \log 5 + \log 3$ mert $75 = 5^2.3$ &.

'S így néhány első szám logarithmainak segédével végtelen sok számnak megtalálhatni logarithmaját.

6 §. A' logarithmok' tulajdoniról.

283. A' logarithmokkali számítás nagy könnyűséget nyújt és a' míveleteket egyszerűbbekké változtatja: de vannak olly kérdések is mellyek nállok nélkül felsem is oldhatók.

Az itt emlitett tulajdonok minden logarithmi alkotmányal közösek.

284. Valamelly származat' logarithmaját megtaláljuk ha, az egyes factorok' különös logarithmait öszveadjuk, bár melly legyen a' factorok' száma.

A' sokszorozás egyszerű öszveadásba fordul

Bizonyitvány.

Legyen a' származat b.c.d,

ha a' logarithmi alap *a*

$b = a^{\log b}$, $c = a^{\log c}$, $d = a^{\log d}$

$bcd = a^{\log b} . a^{\log c} . a^{\log d}, = a^{\log b + \log c + \log d}$ (150)

következéskép $\log bcd = \log a + \log c + \log d.$

$\log (52.64.95) = \log 52 + \log 64 + \log 95.$

$$\begin{aligned} \log (10.100.1000) &= \log 10 + \log 100 + \log 1000 \\ &= \log 10^1 + \log 10^2 + \log 10^3 \\ &= \log 10^6 = 6. = 1+2+3. \end{aligned}$$

285. **Valamelly részesnek logarithmaja megtaláltatik ha az osztandó logarithmajából az osztóјé levonatik.**

Az elosztás, levonásba fordul.

Bizonyitvány

$$\frac{b}{c} = \frac{a^{\log b}}{a^{\log c}} = a^{\log b - \log c}$$

tehát $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c.$

$$\begin{aligned} \log (73:42) &= \log 73 - \log 42 \\ \log (10000:100) &= \log 10000 - \log 100 \\ &= \log 10^4 - \log 10^2 \\ &= \log 10^{4-2} = \log 10^2 = 2 = 4 - 2 \end{aligned}$$

$$\log \frac{\cdot 00032}{\cdot 00785} = \log \cdot 00032 - \log \cdot 00785.$$

$$\log \frac{5}{7} = \log 5 - \log 7.$$

286. **Valamelly szám emelésének logarithmaja meg találtatik, sokszorozván a' szám, (a' gyökér), logarithmaja' emelési mutatójával.**

Az emelés sokszorozásba fordul.

$$\log b^z = z \log b$$

Bizonyitvány.

1) Ha z egész szám lesz

$b = a^{\log b}$ és $b^z = a^{z \cdot \log b}$

2-szor *A' tizedes jegyek' száma által.* Az apró ugynevezett zsebbeli táblákban nincs több 5 tizedes jegynél, másokban 6, legtöb'ben 7, némelly nagy kiterjedésű táblákban 10 és 14 tizedes hely is van. A' közönséges életben 5 tizedes hellyel, a' leg kényesebb számításoknál pedig 7tel tökéletesen megelégedhetni, és csak a' tudományos visgálatban folyamodunk több jegyhez.

3-szor *Elrendelések által.* A' számok és hozzájok tartozó logarithmok különbféléképp vannak sorokba és osztályokba véve, mint szerkeztetőjök azt czélja' és tekinteteihez legalkalmasabbnak vélé. Az első sorban állanak közönségesen a' számok, mellettök a' második függő sorban logarithmaik' tizedes részei, az egészek vagy is hozzájok tartozó mutatóji ritkán vannak oda téve, mert anélkül is ismeretesek: (276) egy harmadik függő sorban állnak a' logarithmok utána' *különbségek*, a' különbség két egymást követő logarithma közt van véve 's mutatja mennyivel több vagy nagyobb a' logarithma ha a' számhoz egység adatott. Ezen különbségek az apró számoknál nagyobbak, de mentül nagyobbak a' számok annál kisebb logarithmaiknak különbsége, úgy hogy: a' négy jeggyel írt egymás mellett álló számok logarithmaja' különbsége már közelít az egyenlőséghez, és az 5 jegyű számok' logarithmai különbsége csak a' 7-dik tizedes helyen észrevehető.

290. A' számok' logarithmait könnyű eszerént a' táblákban felkeresni. *)

---

*) Peldáinkban mindenütt Babbage hasonlithatatlan tábláját vesszük alapul, mellyet a' Túdós Társaság adott ki.

Tudjuk hogy a' 10 és emeléseinek logarithmai egész számok; log 10=1. log 100=2, log 1000=3, log 10000=4 és log 100000=5, tizedes részei tehát ezeknek nincsenek.

Minden egyéb számnak logarithmai tizedes törtekben vannak 7 jeggyel adva, és ezekhez kell adni a' számhoz tartozó logarithmi mutatót melly mint tudjuk

1től tizig=0
11től 100ig=1
111től 1000ig=2
1111től 10000ig=3
11111től 100000ig=4.

Babbage tábláiban az 5 első lapon 1től kezdve 1200ig minden szám mellett áll logarithmaja: p. o:

log 7=0·8450980
log 27=1·4313638
log 531=2·7250945
log 986=2·9938769
log1129=3·0526939

hol a' mutatók már oda tétettek.

A' hatodik lapon más elrendelése van a' tábláknak.

A' számok 1000ren kezdődvén a' 185-dik lapon 9999el végződnek. A' táblákon felül a'

0, 1, 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8, 9

jegyek 10 osztályt képeznek.

Minden négy jeggyel írt szám logarithmaja 1000től 9999ig bérekesztőleg, a' szám után áll ugyan is az első függő sorban mellynek felírása 0.

így log 1015=·0064660
log 2750=·4393327
log 3831=·5833122

log 4795=·6807886
log 5891=·7701890
log 6004=·7784407
log 7056=·8485586
log 8997=·9540977
log 9998=·9999131

's mindezen logarithmok' mutatója = 3 's hozzájuk adandó.

Ha 5 jeggyel írt számnak kell logarithmaját keresni a' táblák' 186 lapjától kezdve 201-dik lapig 10000től 10799ig a' számok megvannak: és

log 10080=·00346053
log 10521=·02205702
log 10785=·03282015

's csakugyan 8 tizedes hellyel. Ezekhez a' mutató = 4.

Minden 5 jeggyel írt számnak logarithmaját meglehet azonban találni a' táblák elébbi részében is, mert a' lapok felett álló jegyek' sorában áll az ötödik jegyhez tartozó 4 utolsó helye a' logarithmanak: igy p. o: ha 35789nek keressük logarithmaját, megtaláljuk a' 3578 mellett a' három első tizedes helyet melly 553 az ehez tartozó 4 utóbbi tizedes jegy azon osztályban van, mellynek felírása 9 a' szám' ötödik jegye 's csakugyan hol a' 3578 nak fekvő sora a' 9 felírású függő sorral öszveüt 's ez 7496, tehát

log 35789=·5537496, mutató=4
és log 35789=4·5537496
log 87573=4·9423702
log 99990=4·9999566 &

Ha 6 jeggyel írt számnak logarithmaját kell keresni, a' különbségekre van szükségünk. A' táblák jobb végén állanak *Diff.* felírással apró táblácskák 's ezekben áll a' különbség tizedes sokasa ·1től ·9ig, a' kis táblák felett álló szám pedig két egymást követő logarithma közti különbség, a' 32-dik lapon p. o: 4 táblácska van 188, 187, 186 és 185 felírással, és azon két logarithma különbsége, melly ezen táblácskák' körébe esik annyi, mennyi a' fenn írt szám; p. o:

$$\begin{array}{l} \log.\ 23200 = 4\cdot3654880 \\ \log.\ 23201 = 4\cdot3655067 \end{array} \text{ és } \left\{ \begin{array}{l} 5067 \\ -4880 = 187 \end{array} \right.$$

Ezen különbség 187 mint látjuk az ötödik jegyet illeti, a' hozzá járuló 6dik jegyre tehát a' 187ből annyi jut, a' mennyi a' 6todik jegy' nevező értéke, úgy tekintvén azt mint tizedes számot 's vele 187et sokszorozván. Ha tehát a' 6dik jegy 0, a' logarithma nem változik, ha 1, a' különbség 18·7, ha 2, 37·4 's a' t. mit a' táblácska mutat.

Hat jegy lévén a' számban, megkeressük tehát az 5 első jegy logarithmaját, 's ehez adjuk a' 6dik számért azon különbséget melly őt illeti, a' táblácskából.

p. o: 675628 logarithmaja keresendő.

log. 67562 = ·8297025 a' 64 felírású kis táblában a' 6dik jegynek a' 8asnak megfelel a' különbség 51 's ez a' talált logarithmahoz adandó, lesz

$$\begin{array}{r} \cdot8297025 \\ +\quad 51 \\ \hline =\cdot8297076 \end{array} \text{ mutató } 5$$

és log 675628 = 5·8297076

$$\begin{array}{rl} \log 853075 = \log 85307 & = \cdot9309847 \\ 5 & = \quad\quad 26 \\ \hline \log 853075 & = \cdot9309873. \end{array} \ \&.$$

Ha még egy jegy járulna a' 6hoz, a' 7tedik jegyhez tartozó különbséget is meglelnénk a' táblácskák-ban, tizedét vevén az ott álló számnak: p. o: a' 137 lapon álló kis táblácskában a' 6dik jegyhez tartozó különbség ha ezen jegy $=5$, 29: ha a' 7dik jegy is 5ös a' hozzá adandó különbség 2·9 vagy helyesebben 3, mert a' 9es több levén 4nél, javítást ád vagy is közelebb áll az igazsághoz. A' számítás így áll:

keresztetik 7568957 logarithmaja.

$$\begin{array}{lrcr} \log. & 75689 & = & \cdot 8790328 \\ & \cdot 5 & + & 29 \\ & \cdot\cdot 7 & + & 4 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{\log.\ 7568967 = 6\cdot 8790361.\ \&.} \end{array}$$

Ha a' 8dik jegy járulna a' számhoz a' különbségnek annyi század részét adnánk a' talált logarithmahoz ezen 8dik jegyért mennyi nevező értéke p. o:

$$\begin{array}{lrcr} \log. 33876389. = \log. & 33876 & = & \cdot 5298921 \\ & \cdot 3 & + & 38 \\ & \cdot\cdot 8 & + & 10 \\ & \cdot\cdot\cdot 9 & + & 1 \\ \hline \multicolumn{4}{r}{\log.\ 33876389 = 7\cdot 5298970.} \end{array}$$

291. *Közönségesen.* Ha több jegyű szám' logarithmaját kell keresni 5nél, kerestessen fel az 5 első jegy logarithmaja, sokszoroztasson a' kis tábla felett álló különbség mindazon jeggyel melly 5ön túl van, 's vágasson el jobbra annyi jegy a' származatból hány jeggyel sokszoroztatott, a' balfelen maradt szám hozzá adandó az 5 első jegyhez tartozó logarithmahoz. Vegyük elébbi 8 jegyű számunkat:

kerestetik 33876389 logarithmaja?

Az öt első jegy után következik 389; a' kis tábla feletti különbség $= 128$, $389.128=49792$ elvágván a' származatból 3 jegyet jobbra marad 49 és

log. 33876 = ·5298921
389 + 49

log. 33876389 = 7·5298970 mint előbb.

292. Valamelly adott logarithmahoz tartozó számot megtalálni?

1) Ha az adott logarithma' minden jegye tökélletesen megvan a' táblákban, hozzá tartozandó száma mellette áll.

p. o: 2·5289167 = log. 338
3·6618127 = log. 4590
4·6891045 = log. 18877

2) Ha az adott log: nincs tökélletesen a' táblában a' hozzá legközelebb álló kisebb logarithmát kell keresni, 's az ahoz tartozó számot leírni; ezután az adott és talált logarithma közti különbséget vevén, ez a' kis táblában még egy vagy két jegyet fog a' számhoz járultatni.

adva van 5·8047778.

a' táblában ·8047778,4 utolsóbb jegye 7730 és 7798 közzé esik, a' kisebbik' 7730hoz tartozó szám 63793 5 jegyű, az adott log:hoz tartozó szám pedig 6 jegyű; 7778—7730=48 ád a' kis táblában 7et, melly a' keresett számnak 6dik jegye és

5·8047778=log 637937.

adva van 6·5532370

a' 4 utolsó jegy a' táblában 2275 és 2396 közt van a' kisebbiket vevén, száma 35746, 5 jegy, de még kettő kívántatik

2370—2275=95

a' kis táblában 95 legközelebb áll a' nállánál kisebb 85höz, ez adja a' 6dik jegyet, melly = 7

95—85=10 adja a' 7diket, ez = 9
6·5532370 tehát = log. 3574679. &.

8 §. Számok, mellyek a' táblákban nem találtatnak.

293. A' nyolcz jegyig mint láttuk minden számnak logarithmaját megtaláljuk a' táblákban, de a' nyolczadik jegyet is, sokszorozván a' különbséget azon jegyekkel mellyek az ötöt fellyűl mulják. Megtaláljuk viszont az adott logarithmahoz tartozó 5tön felüli jegyeket, ha a' két egymást követő logarithmi különbséget a' kis tábla feletti számmal elosztjuk, annyi jegyet tartván meg a' részesből, mennyi a' logarithmi mutató szerént a' már megtalált 5 számjegyhez szükséges.

De olly számok' logarithmaját, mellyek több mint 8 jeggyel íratnak, többé a' táblákban meg nem leljük, 's ezen esetekben más módot kell találni.

Említénk hogy a' logarithmok' különbségei mindég kisebbednek ha a' számok' jegye nő, és hogy végre majdnem egyenlők.

Valóban már a' 4 jeggyel írt számok' logarithmi különbsége is észrevehetőleg aránylatt a' számok' különbségével, mit következőkép lehet szigorúan bizonyítani.

A' geometriai sorban 1000 és 10000 közzé számtalan tagot iktathatunk, 's szinte így az arithmetikai sor' két tagja 3 és 4 közzé. Iktassunk bé p. o: 9000 tagot;
legyen a' geometriai sor tagjainak factora = r
az arithmetikainak különbsége = δ
lesz két sorunk:

$1000,\ 1000r,\ 1000r^2,\ 1000r^3 \ldots\ldots 10000$

$3,\ 3+\delta,\ 3+2\delta,\ 3+3\delta, \ldots\ldots\ 4$

a' 10000 és a' 4 előtt tehát 9001 tag lesz; és

$10000 = 1000r^{9001}$'s innen $r^{9001} = 10$: (245)

következéskép $r = \sqrt[9001]{10}$

szinte így lesz arithmetikai progressiónk' utolsó tagja,

$4 = 3 + 9001\delta$

hol mindegyik egymást követő 2 tagközti különbség $= \delta$ Az arithmetikai sor' tagjai logarithmok lévén, a' nekik megfelelő 2 szám' különbsége lesz geometriai sorunkban

$$1000r^n - 1000r^{n-1} = 1000r^{n-1}(r-1)$$

$$1000r^{n+1} - 1000r^n = 1000r^n\ (r-1)$$

ezen két egymást követő különbség aránya

$$\frac{1000r^n\ (r-1)}{1000r^{n-1}(r-1)} = \frac{r}{1}$$

hol $r = \sqrt[9001]{10}$ és alig különböz az egységtől, mit könynyű látni, ha $\frac{1}{9001}$et tekintjük: tehetjük tehát tetemes hiba nélkül $\frac{r}{1} = 1$.

Tekintsünk némelly logarithmi különbségeket.

		különbségek.
log. 8992	= 3·9538563	
8993	= 3·9539046	·0000483
8994	= 3·9539529	·0000483
8995	= 3·9540012	·0000483
8996	= 3·9540494	·0000482

log. 56785	= 4·7542336	
56786	= 4·7542413	·0000077
56787	= 4·7542489	·0000076
56788	= 4·7542566	·0000077
56789	= 4·7542642	·0000076

log. 107863 = 5·0327725
107864 = 5·0327765 ... ·0000040
107865 = 5·0327805 ... ·0000040
107866 = 5·0327845 ... ·0000040
107867 = 5·0327886 ... ·0000041

Nyilván látszik hogy már 4 számjegynél 's feljebb, a' számok különbségei arányban vannak a' logarithmok' különbségeivel 's hogy p. o:

(8994—8992):(8996—8992) = (log. 8994— log. 8992):
(log. 8996 — log. 8992)

vagy 2 : 4 = ·0000966 : ·0001931.

Ha tehát olly nagy szám logarithmaját kell keresni melly a' táblában többé elénem jön az 5 vagy 6nál többi jegyek logarithmaját aránylat által kereshetjük meg.

p. o: 68530756 logarithmaja keresendő;
keressük 5 jegy logarithmaját ez

log. 68530=4·8358807

ha az elmaradt 3 jegyet 756ot tizedes résznek veszszük, természetesen kisebb 1 nél.

Keressük tehát 68531 logarithmaját 's vegyük különbségét a' már megtaláltal.

log. 68531=4·8358871
a' különbség =0·0000064

lesz tehát log. 68530·756= log. 68530+x
és az aránylat 1:0·756=0·0000064:x
's innen x=0·0000064 × ·756=0·0000048384

de csak 7 tizedes helyre lévén szükség hozzá adandó az 5 első számjegy logarithmahoz 0·0000048 és a' mutató,
lesz log. 68530756=7·8358919.

294. A' törtszámok, a' tört'el kevertek, 's a' mérhetetlen számok' logarithmai nincsenek a' táblákban.

Tudjuk hogy log. $\frac{a}{b}$ = log. a — log. b tehát

log: törtszám = log. számláló — log. nevező

log. $\frac{5}{7}$ = log. 5 — log. 7.

Gyakorta szükséges előre tizedesekbe változtatni a' közönséges törteket.

A' kevert számot szükséges törtalakra vinni.

log. $5^3/_8$ = log. $^{43}/_8$ = log. 43 — log. 8.

295. A' tizedes törtek' logarithmait úgy keressük mintha egészek lennének, csak mutatójokat változtatjuk; mert a' logarithma nem változik ha a' számok ugyan azon jegyekkel íratnak akárhol legyen a' tizedes pont és csupán csak a' mutató változik, melly mint tudjuk az egynél kisebb számoknál tagadó. P. o:

$$
\begin{aligned}
\text{log. } 54387 &= 4{\cdot}7354951 \\
5438{\cdot}7 &= 3{\cdot}7354951 \\
543{\cdot}87 &= 2{\cdot}7354951 \\
54{\cdot}387 &= 1{\cdot}7354951 \\
5{\cdot}4387 &= 0{\cdot}7354951 \\
{\cdot}54387 &= \overline{1}{\cdot}7354951 \\
{\cdot}054387 &= \overline{2}{\cdot}7354951 \\
{\cdot}0054387 &= \overline{3}{\cdot}7354951 \\
{\cdot}00054387 &= \overline{4}{\cdot}7354951 \qquad \text{'s a' t.}
\end{aligned}
$$

a' tagadó jegyet a' mutatókra tettük és nem eleibek, mert a' logar. tizedesei nem tagadók.

Valamint a' tizedes pont elébb vagy hátrább tétele egy hellyel 10eli sokszorozást vagy elosztást eszközöl, úgy nő vagy kisebbül a' logarithmi mutató eggyel eggyel:

szinte így ha log. 6 = 0·7781513
lesz log. 60 = 0·7781513+1
log. 600 = 0·7781513+2
log. 6000 = 0·7781513+3 's a' t.

$\overline{2}$·7563447 melly számnak logarithmaja?
legközelebbi 7563394 ád 57061
a' kis tábla 53 . . .7

·7563447 570617

a' mutató $\overline{2}$ szerint egy üres áll a' tizedes pont után, tehát $\overline{2}$·7563447=log. 0·0570617.

$\overline{5}$·00758315 melly számnak logarithmaja?
legközelebbi ·00758137 ád 1017061et
kis tábla 171 . . .4
7 2

·00758315 101706142

a' mutató szerint 5 üres előzi a' számot, tehát
$\overline{5}$·00758315=log. ·0000101706142.
igy log. ·000000653= log. 653—7. mert

$$\cdot000000653=\frac{653}{10000000}=\frac{653}{10^7}.$$

9 §. Az arithmetikai Egészítő vagy Complement.

296. *Az arithmetikai egészítő*, valamelly szám 's nálánál eggyel felsőbb rendű egységközti különbség. Vagy valamelly számnak arithmetikai complementje, különbség közte 's olly egyes közt, melly után annyi üres áll, hány jeggyel írva van a' szám.

P. o: 8, egészítője 2nek 's viszont 2 a' 8nak (tízhez) mert 8+2=10 és 10—2=8, 10—8=2.

25 egészítője 75nek 's megfordítva, mert 75+25=100.
565nek egészítője 1000—565=435
87·6537nek 100·0000—87·6537=12·3463.
3·7563258 logarithmanak
10·0000000—3·7563258=6·2436742.
ha tehát log. 785=2·8948697
log. 785nek complementje
10·0000000—2·8948697=7·1051303
és iratik C log. 785=7·1051303.

Az egészítőkkeli számítás könnyűséget nyújt, mert

1) A' törtek' logarithmait állítókba fordítja

2) A' levonást öszveadásba változtatja a' mint a' tagadó logarithmokból állítókat képez.

Ha egészítőkkel számítunk, p. o: ha a' helyett hogy a' számot a' másikból le vonnánk egészítőjét hozzá adjuk, annyi mintha a' különbséghez tízet adtunk volna; szükséges ezen 10et a' mívelet végén ismét el venni.

P. o: 563—437 helyett 437nek complementjét adjuk 563hoz ez 1000—437=563

tehát 563—437=563+C437=563+563=1126

Példánkban a' különbséghez 1000ret adtunk tehát 1000et kell elvennünk: 's így írjuk:

563—437=563+563—1000.=563+(1000—437)—
—1000 és ez =126.

A' logarithmoknál soha sem jön elő közönséges életben nagyobb mutató 7, 8 vagy legfeljebb 9nél, a' 10es egészítő tehát haszonnal vétethetik; de mindannyiszor kell a' következésből végre 10et elvenni, hány egészítő adatott a' többi számhoz.

Ha p. o: valamelly törtszám vagy osztási logarithmot kellene keresnünk, a' levonás helyett a' logar.

egészítőt adnánk a' számláló vagy osztandóhoz, 's lenne

$\log. {}^{58}/_{34} = \log. 58 - \log. 34$ helyett

$= \log. 58 + C \log. 33 = \log. 58 + (10 - \log. 34) - 10.$

10 §. Logarithmi Arithmetika. Számírás logarithmokkal.

297. Ha a' 6 § eseteit öszve írjuk következő alakokat hozzuk emlékünkbe:

1) $\log. ab = \log. a + \log. b$

2) $\log. \frac{a}{b} = \log. a - \log. b$

3) $\log. a^m = m \log. a$

4) $\log. \sqrt[m]{a} = \log. a^{\frac{1}{m}} = {}^1/_m \log. a = \frac{\log. a}{m}$

I. 68.126 származata kerestetik?

$$\begin{aligned} \log.\ 68 &= 1\ 8325089 \\ +\log.\ 126 &= +\ 2{\cdot}1003705 \\ \hline \log.\ 8568 &= 3{\cdot}9328794 \end{aligned}$$

92.651.83 származata kívántatik?

$$\begin{aligned} \log.\ 92 &= 1{\cdot}9637878 \\ +\log.\ 651 &= 2.8135810 \\ +\log.\ 83 &= 1{\cdot}9190781 \\ \hline \log.\ 4971036 &= 6{\cdot}6964469 \end{aligned}$$

$8751 \times 0{\cdot}7564 \times 7857 \times 0{\cdot}00085$ származata kívántatik?

$$\begin{aligned} \log.\ 8751 &= +3{\cdot}9420577 \\ +\log.\ 0{\cdot}7564 &= -1{\cdot}8787515 \\ +\log.\ 7857 &= +3{\cdot}8952568 \\ +\log. 0{\cdot}00085 &= -4{\cdot}9294189 \\ \hline \log. 42206{\cdot}27 &= 4{\cdot}6454849 \end{aligned}$$

II. 6587 : 538 a' részes kívántatik?

log. 6587 = 3·8186877
—log. 538 = 2·7307823
log. 12·2425 = 1·0879054

897 : 75 : 83 : 0·785 kerestessék a' részes?

log. 897 = 2·9527924
—log. 75 = 1.8750613
—log. 83 = 1·9190781
=log. ·785 = $\bar{1}$·8948697
log. ·183056 = $\bar{1}$·2637833

Ugyan ezen példa az egészítőkkel

log. 897 = 2·9527924
+C.log. 83 = 8·0809219
+C log. 75 = 8·1249387
+Clog. ·785 = 10·1051303
log. ·183056 = 29·2637833—30 mint feljebb.

itt a' —30+29=—1=$\bar{1}$.

Kerestessék a' 4dik aránylati tag 73·5, 891·2 és 678·75 között $x=\frac{891\cdot2.\ 678\cdot75}{73.5}$

log. 891·2 = 2·9499752
+log. 678·75 = 2·8317098
+Clog. 73·5 = 8·1337127
log 8229·96 = 13·9153978—10

III. 3·758 második emelése kívántatik.

log. 3·758 = 0·5749568
×2
Log. 14·10229 = 1·1499136

4·525 koczka emelése kívántatik?

log. 4·525 = 0·6556186
×3
log. 92·6525 = 1·9668558.

2·8 4dik emelése kívántatik.

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 2\cdot8 = & 0\cdot4471580 \\ & \times4 \\ \hline \text{log. } 61\cdot4656 = & 1\cdot7886320 \end{array}$$

0·0075 3dik emelése kívántatik?

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 0\cdot0075 = & \overline{3}\cdot8750613 \\ & \times3 \\ \hline \text{log. } 0\cdot000000421875 = & \overline{7}\cdot6251839 \end{array}$$

Itt a' tagadó mutató is sokszoroztatik a' 3al és —3.3= $=\overline{9}$ adna 9 tagadó mutatót, de a' tizedes részek állítók és a' 3·8 adott 2 állító mutatót melly —9hez adva $= \overline{9}+2=\overline{7}$.

0·1075, 8dik emelése kívántatik?

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 0\cdot1075 = & \overline{1}\cdot0314085 \\ & 8 \\ \hline \text{log. } \cdot0000000178347 = & \overline{8}\cdot2512680 \end{array}$$

1·0082, 378dik emelése kívántatik?

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 1\cdot0082 = & 0\cdot00354669. \\ & 378 \\ \hline & 2837352 \\ & 2482683 \\ & 1114007 \\ \hline \text{log. } 24\cdot58379.. = & 1\cdot39064882 \end{array}$$

IV. 5184 gyökere kívántatik

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 5184 = & 3\cdot7146650 \\ & :\ 2 \\ \hline \text{log. } 72 = & 1\cdot8573325 \end{array}$$

274625 koczka gyökere kívántatik?

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 274625 = & 5\cdot4387401 \\ & :\ 3 \\ \hline \text{log. } 65 = & 1\cdot81291337 \end{array}$$

6nak 10dik gyökere kívántatik

log. 6 = 0·7781513:10
log. 1·19629 = 0·07781513

1·0095nek 385dik gyökere kívántatik.

log. 1·0095 = 0·00410632
: 385

log. 1·0000245 = 0·00001066

0·0078 koczka gyökere kívántatik?

log. 0·0078 = $\overline{3}$·8920946
: 3

log. 0·198319 = $\overline{1}$·2973649

·00084 harmadik gyökere kívántatik?

log. 0·00084 = $\overline{4}$·9242793
: 3

log. 0·0943536 = $\overline{2}$·9747597

Ha a' gyökérmutató nincs meg az adott logarithmi mutatóban, annyit kell hozzá adni, hogy benne megtaláltathassék, de minthogy (mint p. o: itt —2ő) a' mutatóhoz tagadó szám adatik, szükséges hogy a' logarithma' állító részéhez ugyan annyi állító adassék 's így értéke változatlan maradjon; példánk másként írva így áll,

log. 0·00084 = $\overline{4}$·9242793
= $\overline{6}$·29242793
: 3

log. 0·0943536 = $\overline{2}$·9747597

0·006 5tödik gyökere kívántatik?

log. 0·006 = $\overline{3}$·7781513
: 5

log. 0·53944 = $\overline{1}$·5556303

0·0512, 9dik gyökere kívántatik?

$$\log.\ 0{\cdot}0512 = \bar{2}{\cdot}7092700 = \bar{9}{\cdot}77092700$$
$$:9 \qquad :9$$
$$\log.\ 0{\cdot}718763 = \bar{1}{\cdot}8565856 = \bar{1}{\cdot}\ 8565856$$

298. Az egészen tagadó logarithmok levonás által származván, ha a' hozzájok tartozó számot keressük, szükséges hogy olly egész számhoz adassanak melly által a' logarithmi mutató 3 egész lesz, ez azt teszi, hogy annyit kell hozzá adni +4 a' mennyi, tagadó mutatója. A' talált logarithmanak megfelelő számot pedig olly tízessel kell elosztani, mellynek mutatója a' tagadó logarithmahoz adott szám.

Példa. Legyen a' tagadó logarithma =—2·8574238 melly szám tartozik hozzá?

Mutatója —2, hogy újmutatója +3 legyen szükséges hogy 2+4 adassék hozzá és lesz

$$\begin{array}{l} 6{\cdot}0000000 \\ -2{\cdot}8574238 \\ \hline =3{\cdot}1425762 \end{array}$$ és az ehez tartozó szám=1388·6

de hat egyest adván a' logarithmahoz, a' számot $\frac{1}{10^6}$al kell sokszoroznunk, vagy is a' tizedes pontot 6 helylyel odébb tenni balra 's lesz

$$1388{\cdot}6 = \frac{1388{\cdot}6}{10^6} = 0{\cdot}0013886$$

a' tagadó logarithmahoz tartozó szám.

—3·4172168hoz melly szám tartozik?

3+4=7 és
$$\begin{array}{l} 7{\cdot}0000000 \\ -3{\cdot}4172168 \\ \hline =3{\cdot}5827832 \end{array}$$ száma =3826·34

és log. 0·000382634=—3·4172168

—0·9875325hez melly szám tartozik? 0+4=4.

$$\begin{array}{r} 4\cdot0000000 \\ -0\cdot9875325 \\ \hline 3\cdot0124675 \end{array} \text{ száma} = 1029\cdot224$$

Példák.

1) A' két tört $\frac{9658}{7542}$ és $\frac{876}{4537}$ közti részes kívántatik?

$$\frac{9658}{7542} : \frac{876}{4537} = \frac{9658 \times 4537}{7542 \times 876}$$

és ennek logarithmaja log. 9658+log. 4537—log.7542 —log. 876.

ha pedig az egészítőkkel számítunk, lesz

log. 9658+log. 4537+Clog. 7542+Clog. 876

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & \log. 9658 & = & 3\cdot9848872 \\
 & \log. 4537 & = & 3\cdot6567688 \\ \hline
 & & & 7\cdot6416560 \\
- & \log. 7542 & = & 3\cdot8774865 \\
- & \log. 876 & = & 2\cdot9425041 \\ \hline
 & & = & 0\cdot8216654
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{b)} & \log 9658 & = & 3\cdot9848872 \\
 & +\log. 4537 & = & 3\cdot6567688 \\
 & +\text{C}\log. 7542 & = & 6\cdot1225135 \\
 & +\text{C}\log. 876 & = & 7\cdot0574959 \\ \hline
 & & = & 20\cdot8216654-20
\end{array}$$

's mindkét esetben log. 6·63232=0·8216654 a' keresett részes.

2) Kerestetik x értéke ha

$$x = \left\{\left(\frac{5}{7}\right)^3 \times \left(\frac{123}{17}\right)^5\right\} : \left\{\left(\frac{8}{17}\right)^2 \times \left(\frac{7}{13}\right)^4\right\}$$

$$x = \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^3 \times \left(\frac{123}{17}\right)^5}{\left(\frac{8}{17}\right)^2 \times \left(\frac{7}{13}\right)^4} = \frac{5^3.\ 123^5.\ 13^4}{8^2.\quad 7^7.\ 17^3}$$

és $\log. x = \log. (5^3 + 123^5 + 13^4) + C\log. (8^2 + 7^7 + 17^3)$

$= 3\log.5 + 5\log.123 + 4\log.13 - 2\log.8 - 7\log.7$

$- 3\log.17 = 3\log.5 + 5\log 123 + C2\log.8 +$

$+ 4\log.13 + C7\log 7 + C3\log 17.$

a) $\log\ 5 = 0{\cdot}6989700$ $\quad 3\log\ 5 = 2{\cdot}0969100$

$\log 123 = 2{\cdot}0899051$ $\quad 5\log 123 = 10{\cdot}4495255$

$\log\ 13 = 1{\cdot}1139434$ $\quad 4\log\ 13 = 4{\cdot}4557736$

$17{\cdot}0022091$

$-\log\ 8 = 0{\cdot}9030900$ $\quad -2\log\ 8 = 1{\cdot}8061800$

$-\log\ 7 = 0{\cdot}8450980$ $\quad -7\log\ 7 = 5{\cdot}9156860$

$-\log 17 = 1{\cdot}2304489$ $\quad -3\log 17 = 3{\cdot}6913467$

$x = 388147{\cdot}19$ és $\log 388147{\cdot}19$ $\quad 5{\cdot}5889964$

b) $3\log 5 + 5\log 123 + 4\log 13 = 17{\cdot}0022091$

$+ C\ 2\log\ 8 = 8{\cdot}1938200$

$+ C17\log\ 7 = 4{\cdot}0843140$

$+ C\ 3\log 17 = 6{\cdot}3086533$

$= 35{\cdot}5089964 - 30$

és $\log x = 5{\cdot}5889964$ mint elébb.

3) $$x = \frac{0{\cdot}785 \times 65{\cdot}43 \times (0{\cdot}005)^2}{\sqrt{8} \times 5\sqrt[3]{7} \times (0{\cdot}7)^2} : \frac{2\sqrt[5]{0{\cdot}782} \times \sqrt[7]{5}}{(0{\cdot}685)^3 \times \sqrt{9}}$$

$$x = \frac{0.785 \times 65{\cdot}43 \times (0{\cdot}005)^2 . (0{\cdot}685)^3 . 3}{\sqrt{8} \times 5\sqrt[3]{7} \times (0{\cdot}7)^2 \times 2\sqrt[5]{0{\cdot}782} \times \sqrt[7]{5}}$$

$\log x = \log 0{\cdot}785 + \log 65{\cdot}43 + 2\log 0{\cdot}005 + 3\log 0{\cdot}685$

$+ \log 3 - {}^1/_2 \log 8 - \log 5 - {}^1/_3 \log 7 - 2\log 0{\cdot}7$

$- \log 2 - {}^1/_5 \log 0{\cdot}782 - {}^1/_7 \log 5.$

'S ha az egészítőkkel számolunk minden jegy öszveadási.

$\log 0{\cdot}785 = \bar{1}{\cdot}8948697$

$\log 65{\cdot}43 = 1{\cdot}8157769$

$$\begin{array}{rl}
2 \log 0{\cdot}005 & = \bar{5}{\cdot}3979400 \\
3 \log 6{\cdot}685 & = \bar{1}{\cdot}5070718 \\
\log 3 & = 0{\cdot}4771213 \\
C\, {}^1\!/_2 \log 8 & = 9{\cdot}5484550 \\
C \log 5 & = 9{\cdot}3010300 \\
C\, {}^1\!/_3 \log 7 & = 9{\cdot}7183007 \\
C\; 2 \log 0{\cdot}7 & = 10{\cdot}3098040 \\
C \log 2 & = 9{\cdot}6989700 \\
C\, {}^1\!/_5 \log 0{\cdot}782 & = 10{\cdot}0213587 \\
C\, {}^1\!/_7 \log 5 & = 9{\cdot}9001473 \\
\hline
 & = 65{\cdot}5908454 - 70.
\end{array}$$

és $\log x = \bar{5}{\cdot}5908454$. $x = 0{\cdot}00003890833\ldots$

Jegyzék. Minthogy a' számok után álló üresek, logarithmaikat számoknak nem változtatják, a' táblákban mindegy p. o: ha a' 3nak logarithmáját kellene ki venni, akár a' 30, 300 vagy 3000 logarithmáját vesszük csak megadjuk mutatóját. Nyilván látszik ebből hogy a' logarithmi táblákat 1000ren lehetne kezdeni, mert a' következő számokban ugyis minden kisebb megtaláltatik: p. o: ha 23 logarithmaja kellene, vénnők 2300 ét 's az 1 mutatót hozzá tennők 's a' t.

11 §. Kamatszámitás logaritmokkal.

299. Feltétetik hogy a' tőke egyszerűen kamatoz vagy is, a' kamatok nem adatnak a' tőkéhez és nem kamatoznak.

Tekintsük a' kérdés' közönséges feloldását.

A' kamatszámításnál négy mennyiség jőn kérdésbe, jeleljük meg mindegyiket kezdő betűjével.

a) a' tőke legyen $=T$

b) a' procento vagy hányszáztól $=p$

c) a' kamat $=k$'s végre

d) az idő $=i$.

Arányunkban (232) $100:T=(100+p):x$ vagy

$$1:T=(1+\frac{p}{100}):x$$

az x egy évi kamatjával nagyobított tőkét jelenti,

$$\text{tehát } x=T(1+\frac{p}{100})=T+T.\frac{p}{100}$$

ebből következik hogy a' kamat egy évre

$$k=\frac{Tp}{100}$$

De mivel a' procentókat úgy is törtszámban írjuk p .o: 4, 5, vagy 6 procento helyett

$\frac{4}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{6}{100}$ vagy $0\cdot04, 0\cdot05, 0\cdot06$ tot írunk, lesz $k=Tp$, egy évre.

Akármelly legyen tehát az idő években fejezve ki $k=iTp$. és ebből következik

$$i=\frac{k}{Tp}$$

$$p=\frac{k}{iT} \quad \text{és}$$

$$T=\frac{k}{ip}$$

Az egyenletben négy különböző mennyiség jövén elé, ha három van adva, a' 4-dik azokból könnyen megtalálható. Ha logarithmokkal számítunk lesz :

$\log k = \log i + \log T + \log p$

$\log i = \log k - \log T - \log p = \log k + C \log T$
$+ C \log p$

$\log p = \log k - \log i - \log T = \log k + C \log i$
$+ C \log T$

$\log T = \log k - \log i - \log p = \log k + C \log i$
$+ C \log p.$

Vegyünk egy példát 's számítsuk ezen különbféle alak szerént.

Kérdés. Ha 100 forint egy év alatt $5^3/_4$ forintot kamatoz, mennyit fog kamatozni 728500 f. 4 év és 292 nap mulva?

Az aránylat ád

$$100 : 728500 = (100 + 5^3/_4)\,4{\cdot}8 : x$$

$$x = 728500 + 728500 \times {\cdot}0575 \times 4{\cdot}8$$

hol x a' tőke kamatokkal együtt,

A' kamatok pedig magok

$$= 728500 \times {\cdot}276 = 201066.$$

Ha tehát a' 4 mennyiség közzül

$$T = 728500,\ p = 0{\cdot}0575,\ i = 4{\cdot}8,\ k = 201066$$

három adva van lesz:

1) T.p.i van adva kerestetik k:

$$k = iTp \text{ itt} = 4{\cdot}8 \times 728500 \times {\cdot}0575 = 201066$$

2) k.p.i adva van lesz

$$T = \frac{k}{i.p} = \frac{201066}{{\cdot}276} = 728500.$$

3) adva van T.k és i

$$p = \frac{k}{iT} = \frac{201066}{4.8 \times 728500} = \frac{201066}{2496800} = 0{\cdot}0575$$

4) adva van T.k és p

$$i = \frac{k}{pT} = \frac{201066}{0{\cdot}0575 \times 728500} = \frac{201066}{41888{\cdot}75} = 4{\cdot}8$$

Gyakorlásul számitsa a' tanuló logarithmokkal a' 4 esetet!

300. Tudjuk hogy a' tőkék és idejők egyenlő aránylatban állnak kamatjaikkal és hogy

$$Ti : T i' = k : k'$$

hol T' i' és k' a' hasonlított tőke idő és kamat.

Ebből következik hogy

$$\frac{k'}{k} = \frac{T'i'}{Ti} \text{ és } k' = \frac{kT'i'}{Ti},$$

ha tehát a' kérdés lenne: mennyit kamatoz 16000 f. $5^1/_2$ év alatt ha, 4560 forintot $2^1/_4$ év alatt 738 forintot kamatoz, a' keresett kamat megtaláltatna következő alakból.

$$k' = \frac{738 \times 16000 \times 5 \cdot 5}{4560 \times 2 \cdot 25} = \frac{64944000}{10260} = 6329 \cdot 826$$

és logarithmokkal

$$\begin{array}{rlr}
\text{mint van } \left.\begin{array}{r} 4560 \\ 2 \cdot 25 \end{array}\right\} & \text{C log} & \begin{array}{l} = 6 \cdot 3410352 \\ = 9 \cdot 6478175 \end{array} \\
\left.\begin{array}{r} 5 \cdot 5 \\ 16000 \end{array}\right\} & \text{log:hoz} & \begin{array}{l} = 0 \cdot 7403627 \\ = 4 \cdot 2041200 \end{array} \\
\text{úgy áll } 738 & \text{log} & = 2 \cdot 8680564 \\
\hline
6329 \cdot 826\text{hoz} & \text{log} & = 23 \cdot 8013918 - 20
\end{array}$$

Ezen kérdést a' tanuló különbözőkép változtathatja.

Ha p. o: napokban kellene számítni, 's a' kérdés volna: 100 forint kamatoz 365 nap $3^4/_5 = {}^{19}/_5$ forintot, mennyit kamatoz 7569·5 f. 1237 nap alatt? szintígy lesz

$$k' = \frac{7569 \cdot 5 \times 1237 \times \frac{19}{5}}{100 \times 365} \text{ 's ez} =$$

$$k' = \frac{7569{\cdot}5 \times 1237 \times 3{\cdot}8}{36500}$$

$$\begin{array}{rll} & \log 7569{\cdot}5 & = 3{\cdot}8790672 \\ + & \log 1237 & = 3{\cdot}0913152 \\ + & \log 3{\cdot}8 & = 0{\cdot}5797836 \\ + & \mathrm{Clog}\, 36500 & = 5{\cdot}4377071 \\ \hline k' = 972{\cdot}463 & \log & = 12{\cdot}9878731 - 10. \end{array}$$

Öszvetett kamatok.

301. Tudjuk hogy valamelly tőke bizonyos évek mulva

$$Tq^i$$

hol $q = 1 + \frac{p}{100}$ a' procentoval nevekedett forint egy év mulva és *i* az évek' száma.

Ha az *i* évek alatt kamatjaival nagyobbított tőkét, T'vel jelüljük és *p* értékét vissza adjuk, lesz

$$T' = T\left(1 + \frac{p}{100}\right)^i \quad \text{és}$$

$$\log T' = \log T + i \log (100 + p) - i \log 100$$

Ezen egyenletből, hol log: 100=2 következő 4 menynyiség' kifejezését találjuk

$$\log T' = \log T + i \log (100 + p) - 2i$$

$$\log T = \log T' + 2i - i \log (100 + p)$$

$$i = \frac{\log T' - \log T}{\log (100 + p) - 2} \quad \text{és}$$

$$\log (100 + p) = \frac{\log T' - \log T}{i} + 2$$

log (100+p) ből 100+p, és ebből p megtaláltatik.

Példák.

1) Mennyi lesz 10 év mulva 36000 forintból, 5öt száztól minden év' lefojtával a' tőkéhez adván?

$$\log T' = \log 36000 + 10 \log 105 - 20.$$

$$\begin{aligned}\log 3600 &= 4\cdot5563025\\ +10\log 105 &= 20\cdot2118929\\ \hline T' = 58640\cdot2 \log &= 24\cdot7681954-20\end{aligned}$$

$T'-T=22640\cdot2$ a' tőke növése 10 év mulván, $(100+p)=100+5$ és $p=5$.

2) Mennyi idő alatt dupláztatik meg valamelly tőke 5 száztól kamatjait hozzá adván évenként?

Elég 1 forintot tekinteni mennyi idő alatt lesz belőle kettő:

lesz pedig egy év mulva 1 forintból $1\cdot05$ forint, 's ha a' keresendő évek' száma x, lesz x év mulva $(1\cdot05)^x$, hol $(1\cdot05)^x=2$ feltételünk szerént, és

$$x\log(1\cdot05)=\log 2 \text{ 's innen}$$

$$x=\frac{\log 2}{\log 105}=\frac{0\cdot3010300}{0\cdot0211893}=14\cdot206.$$

ha a' procento 6 volna

$$x=\frac{\log 2}{\log 1\cdot06}=11\cdot89\cdots\cdots$$

3) Hány procentóra kell 15000 forintot helyezni hogy, 10 év mulva kamatot kamattól 37000 f. legyen?

$$\log(100+p)=\frac{\log 36000-\log 15000}{10}+2$$

$$\begin{aligned}\log 36000 &= 4\cdot5563025\\ -\log 15000 &= 4\cdot1760913\\ \hline &= 0\cdot3802112\\ :10 &= 0\cdot0380211+2\\ \log(100+p) &= 2\cdot0380211\\ 100+p &= 109\cdot15 \text{ és } p=9\cdot15\%\end{aligned}$$

4) Egy szigetet 2500an laknak, minden holnapban járul a' lakosokhoz 5, kérdés mennyi lesz a' sziget népessége 85 év mulva?

Lesz 100 lakó helyett 1 hónap mulva $100 + {}^{1}/_{5}$, $p=0{\cdot}2$ $i=12.85$ mert 1 év=12 hónap, és

$$T'=2500\,(1+{\cdot}002)^{1020}$$

$$\log T'=\log 2500+1020\log 100{\cdot}2-2040.$$

$$\begin{array}{rl} \log 2500= & 3.3979400 \\ 1020\log 100{\cdot}2= & \underline{2040{\cdot}8850540} \\ T'=19185\ \log= & 2044{\cdot}2829940-2040 \end{array}$$

5) Valakinek 1000 forintot kölcsönözvén kamatot kamattol, mennyit tartozik 12 év mulva letenni?

Ha a' procento 5, és $p={\cdot}05$

$$T'=1000\,(1+{\cdot}05)^{12}=1000\,(1+\frac{1}{100})^{12}$$

$$\log T'=\log 1000+12\log 105-24$$

Ha a' procento 6 és $p={\cdot}06=\frac{6}{100}=\frac{3}{50}$

$$\text{lesz } 1+\frac{3}{50}=\frac{53}{50},\ T'=1000\left(\frac{53}{50}\right)^{12}$$

$$\begin{aligned} \text{és } \log T' &=\log 1000+12\,(\log 53-\log 50) \\ &=\log 1000+12\log 53-12\log 50. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Az első esetben } \log 1000= & 3{\cdot}0000000 \\ +12\log 105= & \underline{24{\cdot}2542716} \\ & 27{\cdot}2542716-24 \end{array}$$

$$T'=1795{\cdot}898=1795{\cdot}9$$

A' másodikban

$$\begin{array}{rl} \log 1000= & 3{\cdot}0000000 \\ 12\,(\log 53-\log 50)= & \underline{0{\cdot}3036708} \\ & 3{\cdot}3036708 \end{array}$$

$$T'=2012{\cdot}2.$$

301. Ha a' már kamatozó tőkéhez minden évben valami új mennyiség járul vagy abból el vétetik; a' kifejezések változnak.

Járuljon először minden évben a' T tőkéhez valamelly új tőke t, maradjon a' procento $= p$ az évek száma pedig e, keressük az egész summát e év mulva 's jelöljük meg S el.

Ha előre csak az ujónnan helyezett évenkénti mennyiséget tekintjük, lesz
az első évben letett t ből e év mulva $t(1+p)^e$
a' második évi természetesen egy évvel kevesebbet kamatoz

lesz második évben $t(1+p)^{e-1}$
harmadik évben $t(1+p)^{e-2}$
negyedikben $t(1+p)^{e-3}$'s így továb míg
az utolsó évi lesz $t(1+p)$

ezen kifejezéseknek öszvese geometriai sor és $=$

$$t(1+p)+t(1+p)^2+t(1+p)^3+t(1+p)^4 + \ldots\ldots t(1+p)^e$$

hol mindegyik tagban még t áll, azt kivévén lesz

$$=t(1+p)\left[1+(1+p)+(1+p)^2+(1+p)^3+\ldots\ldots\right. \left. +(1+p^{e-2}+(1+p)^{e-1}\right]$$

és a' nagy korlát közt olly sor áll mellynek első tagja $=1$, factora $(1+p)$ és a' tagok száma $= e$

A' tagok öszvese tehát a' nagykorlátban

$$\frac{1+p^e-1}{p} \quad (246)$$

Az egész kifejezés

$$=\frac{t(1+p)[(1+p)^e-1]}{p}=\frac{t(1+p)^{e+1}-t(1+p)}{p}$$

ha pedig az eredeti Tőkét hozzá adjuk lesz

$$S=T(1+p)^e+\frac{t(1+p)^{e+1}-t(1+p)}{p}$$

ha az utolsó évben nem jött hozzá új tőke, vagy csak az első év lefojtával adatott az hozzá, a' kifejezés

$$S=T(1+p)^e+\frac{t(1+p)^e-t(1+p)}{p}.$$

Ha a' helyett hogy az eredeti tőkéhez új mennyiségek' járulnának, abból rendesen minden év lefojtával bizonyos *t* somma elvétetnék, a' kifejezés' második tagja tagadó jegyet hordana, 's lenne

$$S=T(1+p)^e-\left\{\frac{t(1+p^e-t(1+p))}{p}\right\}$$

A' két esetetet együtt véve

$$S=T(1+p)^e\pm\left\{\frac{t(1+p^e-t(1+p))}{p}\right\}$$

A' kifejezések minden egyes esetekre alkalmaztathatók.

Példák.

1) Eredeti tőke nincs, de minden évben 200 forint tétetik le $5^0/_0$ra kamatot kamattól, kérdés mennyire nőtt az egész tőke kamatjaival együtt 10 év mulva?

$$S=\frac{t(1+p)^a-t(1+p)}{p}$$

$$\text{itt } t=200,\ p=\frac{5}{100}=\frac{1}{20} \text{ és } 1+p=\frac{21}{20}$$

$$S=\frac{200(^{21}/_{20})^{10}-200^{21}/_{20}}{^1/_{20}}=\frac{200(1\cdot05)^{10}-210}{0\cdot05}$$

$$S=\frac{114\cdot2}{0\cdot05}=2284.$$

Ha a' kérdés illy könnyű, logarithmokra nincs szükség egyébre mint a $(1\cdot05)^{10}$ felkeresésére.

2) Az eredeti tőke 20000 forint, hozzá járul minden évben kamatja 's ezen felyül 500 forint. Mennyi lesz S tíz év mulva, a' kamat 6 száztól?

$$S = T(1+p)^e + \frac{t(1+p)^e - t(1+p)}{p}$$

$$T = 20000,\ p = 0\cdot06,\ e = 10,\ t = 500$$

$$S = 20000(1\cdot06)^{10} + \frac{500(1+\cdot06)^{10} - 500(1\cdot06)}{0\cdot06}$$

$$= 20000(1\cdot06)^{10} + \frac{500}{0\cdot06}\left[(1\cdot06)^{10} - 1\right]$$

$$= \frac{1700(1\cdot06)^{10}}{0\cdot06} - 8333\cdot3$$

$$= \log 1700 + 10 \log 1\cdot06 + C \log 0\cdot06$$

levonván a' meglelt számból 8333·3 ot

$$\begin{aligned} \log 1700 &= 3\cdot2304489 \\ 10 \log 1\cdot06 &= 0\cdot2530589 \\ C \log 0\cdot06 &= 11.2218487 \\ \hline & \ \ 14\cdot7053565 - 10. \end{aligned}$$

$$S = 50740\cdot7 - 8333\cdot3 = 42407\cdot4$$

3) 200000 f. adosságot 10 év alatt $5^0/_0$ kamatjaival együtt egyenlő mennyiségben akarván vissza fizetni, mennyi járul egy évre fizetendő?

$$T(1+p)^e = t\left(\frac{(1+p)^n - 1}{p}\right) \text{ből lesz}$$

$$t = \frac{Tp(1+p)^e}{(1+p)^e - 1}$$

hol $T = 200000,\ p = 0\cdot05 = \frac{1}{20},\ (1+p) = \frac{21}{20}$

$$e = 10$$

a' keresendő

$$t = \frac{200000.0\cdot05\left(\frac{21}{20}\right)^{10}}{\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1}$$

$$= \frac{10000.\left(\frac{21}{20}\right)^{10}}{\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1}$$ és logarithmokkal

$$\log t = \log 10000 + 10 \log\left(\frac{21}{20}\right) - \log\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right\}$$

$$= \log 10^4 + 10(\log 21 - \log 20)$$

$$- \log\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{01} - 1\right\}$$

$$\log 10^4 = 4\cdot0000000$$

$$10(\log 21 - \log 20) = 0\cdot2118930$$

$$-\log\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right\} = 0\cdot2014184$$

$$4\cdot4133114$$

$$t = 25900\cdot7$$

's ennyit kell minden évben fizetni.

A' kifejés $-\log\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right\}$

következőképen találtatik

$$\log\left(\frac{21}{20}\right)^{10} = 10(\log 21 - \log 20) = 10(0\cdot3222193$$

$$- 0\cdot3010300)$$

$= 0\cdot2118930$'s ennek száma $= 1\cdot6289$

$1\cdot6289 - 1$ pedig $= 0\cdot6289 = \frac{6289}{10000}$

’s ebből $\log\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{10}-1\right\}=\log 6289-\log 10000$

de mivel a’ jegy tagadó az az levonási, lesz

$$-\log\left\{\left(\frac{21}{20}\right)^{10}-1\right\}=\log 10000-\log 6289$$

$$=4\cdot0000000-3\cdot7985816=0\cdot2014184.$$

4) Valakinek 90000 forintja van $5^0/_0$ kamaton, de kamatjai nem elégségesek évi költségeire ’s kéntelen ezeket minden évben 8000 forintig a’ tőkéből potlani. Kérdés meddig gazdálkodhatik illy módon vagyonával?

Itt az évek kerestetnek és x év után a’ tőke $=0$ $t=8000$, $p=0\cdot05$ $T=90000$.

$$\text{tehát } 90000(1\cdot05)^x-\frac{8000}{0\cdot05}\left\{(1\cdot05)^x-1\right\}=0$$

$$\text{vagy } 90(1.05)^x-\frac{8}{0\cdot05}(1\cdot05)^x+\frac{8}{0\cdot05}=0$$

$$\text{innen } \frac{8}{0\cdot05}=\left(\frac{8}{0\cdot05}-90\right)(1\cdot05)^x$$

$$8=(8-4\cdot5)(1\cdot05)^x=3\cdot5(1\cdot05)^x$$

$$(1.05)^x=\frac{8}{3\cdot5}=2\cdot285714\ldots$$

ebből $x\log(1\cdot05)=\log 2\cdot285714\ldots$ ’s végre

$$x=\frac{\log 2\cdot285714}{\log(1\cdot05)}=\frac{0\cdot3590218}{0\cdot0211893}$$

$$\text{és } \frac{3590218}{211893}=16\cdot944$$

Az évek’ száma $16\cdot944=x$.

5) Jószágot vevén 650000 forinton, a’ pénz $6^0/_0$ kamatra vétetett fel, olly feltétettel hogy a’ jószág

jövedelmeihez még évenként 30000 ftétetik 's az öszves fizettetik a' hitelezőnek.

Kérdés ha a' jószág $7^1/_2$ procentot hoz, mennyi idő alatt fizettetik vissza a' tőke kamatostól, ha a' megkimélt kamatok is minden évben a' jővedelemhez adatnak.

A' kérdés mint látjuk a' (301) alatt adott kifejezésre vezet, minden évben egy bizonyos mennyiséget véven el a' tőkéből, melly ezenkivül a' megkimélt kamatokkal szaporodik, és a' visszafizetett egész tőke kamatjaival együtt

$$=S-t\frac{(1+p)^e-1}{p}$$

Példánkban a' jövedelmekből még $1^1/_2$ % meg maradván, 650000 forinttól ez=9750, hozzá adván az événként fizetendő 30000 forinthoz lesz

$$t=39750.$$

az évék' száma

$$=x. \text{ és } p=\frac{6}{100}=0\cdot06$$

$$\text{és } S=39750\left(\frac{(1+0\cdot06)^x-1}{0\cdot06}\right)$$

$$S=\frac{t(1+p)^e-1}{p} \text{ ből következik}$$

$$(1+p)^e=\frac{S(1+p)-1}{t}+1=\frac{Sp}{t}+1$$

$$\text{és } e\log(1+p)=\log\left(\frac{Sp}{t}+1\right)$$

$$=\log(Sq+t)-\log t.$$

$$\text{és } e=\frac{\log(Sp+t)-\log t}{\log(1+p)}$$

ha az értékeket helyre állítjuk lesz

$$x = \log \frac{(650000.\,0 \cdot 06 + 39750) - \log 39750}{\log 1 \cdot 06}$$

$$= \log \frac{\log 78750 - \log 39750}{\log 1 \cdot 06} = \frac{0 \cdot 2969135}{0 \cdot 0253059}$$

$x = 11 \cdot 8$ közel 12 év.

6) 650000 f. adósságot mennyi idő alatt lehet vissza fizetni ha a' kamatok mellé évenként 25000 forditatik a' tőke' vissza fizetésére, és a' $6^0/_0$ minden évben megkímélt kamat is hozzá adatik?

A' kérdés egy az előbbenivel, csak egyszerűbb.

$$x = \log \frac{(650000.0 \cdot 06 + 25000) - \log 25000}{\log 1 \cdot 06}$$

$$= \log \frac{64000 - \log 25000}{\log 1 \cdot 06}$$

$$= \frac{\log 64 - \log 25}{\log 1 \cdot 06} \;\; ,, \;\; x = \frac{4082400}{253059}$$

és x ez évek száma $= 16 \cdot 1$.

7) Ha 800000 forint $6^0/_0$ adósságot 20 év alatt vissza akarnánk fizetni; mennyit kellene évenként a' rendes és megkímélt kamatokhoz adni?

Itt a' t keresendő.

$$S = t \frac{t[(1+p)^e - 1]}{p} \text{ ből}$$

$$t = \frac{S}{\frac{[(1+p)^e - 1]}{p}} = \frac{800000}{\frac{[(1 \cdot 06)^{20} - 1]}{0 \cdot 06}}$$

$$= 800000 : 36 \cdot 78 = 21751 \text{ f.}$$

8) Valaki jószágait javítja 's bizonyos évekig tart munkálodása, az első évben a' javításhoz legtöbb pénz szükséges 's így minden év mulva kevesebb kevesebb. A' jávítási munka végét érvén, a' reá fordított

tőke kamatozni kezd, 's csakugyan az első évben legkevesebbet, 's minden évben többet míg leg nagyobb kamatjait el érte. Kérdés mennyi idő mulva fize i ki a' javítás 1ször a' kamatokat, 2szor a' tőkét.

Legyenek közönséges feloldásunkra.

A' javításra fordított sommák a, b, c, d, e, f, g. &

A' kamatok $=p$ az évek száma 's csakugyan a' javítási éveké $=n$, a' jövedelmezőké $=m$, legyen végre a' legnagyobb javítási kamat m év mulva $=$K vagy is a' javítások' jövedelme: ez csakugyan az első évben lesz $\frac{K}{m}$, a' másodikban, $\frac{2K}{m}$, a' 3dikban $\frac{3K}{m}$ &, az utolsó előtt valóban $\frac{(m-1)K}{m}$'s végre az utolsó, $m$dik év' lefojta után $\frac{mK}{m}=K$ mint feltettük. Mindegyik évi javítási somma, tudjuk annyi évig fog kamatjaival nevekedni míg vissza nem fizettetett, tehát mindegyik egy évvel később adott javítói tőke egy évvel kevesebb kamatot kíván, vagy is ha az első somma a, n évig kamatoz: lesz kifejezése

$$a(1+p)^n$$

a' második tőke b csak $n-1$ évig kamatoz tehát

$$b(1+p)^{n-1}, \text{ 's így mindegyik}$$

ha itt $(1+p)$ helyett qt írunk, 's mindazon tőkéket melylyeket n év alatt javítottunk Sel jelöljük lesz

$$S=aq^n+bq^{n-1}+cq^{n-2}+dq^{n-3}+\ldots.yq^2+zq$$

hol a' kifejezés az előbbeniből ismeretes, mint geometriai sor' öszvese.

Ha szinte így fejezzük ki a' javítási jövedelmeket m év alatt, hozzájuk adván kamatjaikat is, lesz

$$S,=\frac{K}{m}q^{m-1}+\frac{2K}{m}q^{m-2}+\frac{3K}{m}q^{m-3}\ \ldots.\frac{m-1}{m}Kq+K$$

De a' javítási tőke melly n év mulván egészét érte, szinte fog kamatozni a' következő m év alatt is, lesz tehát kifejezése $S.q^m$, 's hívjuk Tnek, mint egész javítási tőkét kamatjaival együtt $n+m$ év' lefojta után.

$T-S$ bizonyosan a' javításra fordított sommákat fejezi ki, 's ezek $a+b+c+d+e\ldots y+z$.

tehát $S,+a+b+c+d\ldots\ldots+y+z=T$.

és $K=p(T-S)$.

Elértük kifejezésünkben azon időt, mellyben, a' javítások a' reájok fordított tőkék' kamatjait kifizetik, az az a' jövedelem egyenlő a' kamatokkal. Ha tehát a' tőkét magát is vissza kellene fizetni a' nevekedett jövedelemből szükséges lenne hogy

$S,=T$ legyen, $n+m$ év mulva.

9) Egy gazda 6 évig javítt, 210000 forintal. A' hetedik évben kezd munkálódása gyümölcsözni 's csakugyan hoz az első évben 4000, a' 2dikban 6000, a' 3-dikba 8000 's így minden évben két ezer forintal többet míg végre a' 6dik évben 3 ezer forintal nő és 15000 forintnál meg is marad.

Kérdés hány év mulva fizeti ki a' javítás a' kamatokat vagy is mellyik évben egyenlő a' jövedelem a' 210000 forint 6% kamatjával és végre hány év mulva fizeti ki a' javítás az egész tőkét kamatjaival együtt? Megjegyzendő hogy a' megkímélt kamatok is a' tőke' lefizetésére használtatnak.

A' 210000 fból lesz 6 év mulva $210000(1\cdot06)^6$ f.

Az első évben 6 után fizettetik 4000 f.

A' másodikban $4000(1\cdot06)+6000$

A' 3dikban $4000(1\cdot06)^2+6000(1\cdot06)+8000$

a' 4dik $4000(1\cdot06)^3+6000(1.06)^2+8000(1\cdot06)+$
$+10000$

5dik $4000(1\cdot6)^4+6000(1\cdot06)^3+8000(1\cdot06)^2+$
$+10000(1\cdot06)+12000$

6dik $4000(1\cdot06)^5+6000(1\cdot06)^4+8000(1\cdot06)^3+$
$+10000(1\cdot06)^2+12000(1\cdot06)+15000$

A' tőke pedig a' 7dik év végével

$$T=210000(1\cdot06)^7-4000$$

8al. $T=[210000(1\cdot06)^7-4000](1\cdot06)-6000$
$=210000(1\cdot06)^8-[4000(1\cdot06)+6000]$

9el. $=210000(1\cdot06)^9-[4000(1\cdot06)^2+6000(1\cdot06)$
$+8000]$

'S így végre a' 12 év' végével hol a' javítások elérték legmagosb állásokat lesz

$T=210000(1\cdot06)^{12}$'s a' vissza fizetett mennyiség
$S_{,}=+[4000(1\cdot06)^5+6000(1\cdot06)^4+8000(1\cdot06)^3+$
$+10000(1\cdot06)^2+12000(1\cdot06)+15000]$

Ha tehát $T-S_{,}=T_{,}$

és $T_{,}p=15000$, akkor a' javítások' jövedelmei megbírják a' kamatok fizetését.

Ha példánkban az egyes tagokat fel oldjuk könnyebb tekintetül, lesz a' tőke kamatjaival nevekedve, az egymást követő években 6 után,

a' 7ben.	T=315762·6— 4000=311762·6	kamatja	18705·7
8....	=330468·4— 6000=324468·4	„—„	19468·1
9....	=343936·5— 8000=335936·5	„—„	20156·2
10....	=356092·7—10000=346092·7	„—„	20765·6
11....	=366858.3—12000=354858·3	„—„	21291·5
12....	=376149·8—15000=361149·8	„—„	21668·3
13....	=382838·8—15000=367838·8	„—„	22070·3

Ha csupán csak az utolsó vagy is 12dik évi tagokat hasonlítjuk öszve, mikor a' javítás haszna 15000 fnál meg áll

$$T=210000(1{\cdot}06)^{12}=422561{\cdot}7$$

Utolsó tagunk pedig

$S_{,}=61411{\cdot}9$, azt találjuk hogy

$T-S_{,}=361149{\cdot}8$ a' felyebbi tartozás a' 12 év lefolytával.

De 361149·8 fnak $6^0/_0$ kamatja=21668·3

a' jövedelem pedig nem több mint =15000

lesz hát minden évben veszteség 6668·3 f. melly évről évre kamatjaival szaporodik.

210000 forint kamatja pedig egy évre =12600 f.

Ha tehát feltételünkben azt véltük hogy a' 15000—12600 =2400 f. nyereség elég leend a' javítási tőkét ellátni, hibáztunk, mert ehez még 6668·3 f. kellene, és a' javításoknak 12 év mulva szükségesképen 15000+6668·3 =21668·3 forintot kellene tisztán jövedelmezni, ha pénzünket minden nyereség nélkül csak $6^0/_0$ra akarnánk használni, 's így a' javítások' jövedelmét 10 procentón fellyűl kell venni a' reájok fordított tőkétől.

10) Ha évenként, 5ször 80000 forintot javítunk jószágainkba, 6tot száztól fizetvén kamatul, és a' második éven kezdvén mindegyik külön tőke 3at, a' 3dikban 6ot a' 4dikbe 9et az 5dikben 12őt 's a' 6dik évben $15^0/_0$ kamatoz a' javítások jövedelmeiből, megállván a' $15^0/_0$ tiszta jövedelemnél, mennyi idő alatt lesz az egész tőke ki fizetve, ha az egész jövedelmet a' tőke és kamat lefizetésére szánjuk megkímélt kamatjaival együtt.

Legyen a' javítási tőke = T, a' jövedelem S, lesz

T az első évben	= 80000
másodikba	= 80000 (1·06) + 80000
harmadik	= $80000 (1·06)^2 + 80000 (1·06) + 80000$
negyedik	= $80000 (1·06)^3 + 80000 (1·06)^2 + 80000 (1·06) + 80000$

's a' t.

Az 5 év lefolytával tehát T = 450967·5.

A' jövedelem a' második év végével kezdődvén csak a' 10dik évben fog egész 15%ot = 60000 ft kamatozni, 's az évek így állanak,

2) 2400, 3) 7200, 4) 14400, 5) 24000, 6) 36000, 7) 45600 8) 52800 9) 57600 10) 60000

'S lesz a' Tőke

2)	T=80000(2·06)	— 2400	=	162400
3)	T=256944	— 7200	=	249744
4)	T=349528·6	—14400	=	335128·6
5)	T=440036·3	—24000	=	416036.3
6)	T=440998·5	—36000	=	404998·5
7)	T=429298·c	—45600	=	383698·5
8)	T=406720·4	—52800	=	353920·4
9)	T=375155·2	—57600	=	317555·2
10)	T=336608·3	—60000	=	276608·3

a' 10 évben már a' kérdés arra vitetett viszsza, menynyi idő alatt fizettetik le 317555·2 f. 6% kamatjával, ha évenként 60000 f. adatik reá?

Az évek' száma = x

$$=\text{log.}\ \frac{(317555\cdot 2.0\cdot 060000)-\text{log}.60000}{\text{log}.1\cdot 06}$$

$$=\frac{\log.79053\cdot1-\log.60000}{\log.1\cdot06}=\frac{1197688}{223059}=4\cdot8$$

közel öt év mulva, az egész tőke tehát a' javítások' kezdetétől fogva 15 év mulva vissza fizettetik.

Ezen példák' változásait, a' tanuló, gyakorlásul maga szerkeztetheti.

Nyomtatási hibák.

Lap.	*sor.*	*helyett.*	*olvasni.*
23	12	$=15$	$=45$
38	utolsó	8|81	9|81
81	11	999999	9999990
123	6	elébb balra	elébb jobbra
258	2	csak 108	csak 168
—	3	hozzá $^6/_7={}^3/_4$	hozzá egy mértföldet $^6/_7-{}^3/_4$
270	3	$2:9=4:6$	$2:3=4:6$
276	13 alul	$b:B=x:y$	$b:B=z:y$
289	2 alul	$1:10=46:4$ dr.	$1:10=45:4$ dr.
292	5 alul	$3, 2, 7,$	$-3, 2, 7 \ldots$
304	7 alul	$\left(\frac{b}{a}\right)\frac{1}{m+1}$	$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}}$
319	4	$+39$ 28	$+39$ -28
241	4 alul	log. bz	log. b^z
369	11	$(1+{}^1/_{100})^{12}$	$(1+{}^5/_{100})^{12}$