A

PROPELLER ÉS PERIPELLER FELÜLETEK

ELMÉLETÉHEZ.

RÉTHY MÓR,

A KOLOZSVÁRI M. K. TUD. EGYETEMEN NYILV. RK. TANÁR.

(Beterjesztetett a III. osztály ülésén 1875. nov. 8.)

BUDAPEST, 1876.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

Bármi tiszták és egyszerüek is valamely tudomány alapelvei, bármi szabatosak és biztosak módszerei, mégis megeshetik az a véletlenség, hogy hibás alapból kiinduló helytelen következtetés történetesen olyan eredményre vezet, a mely, megingathatatlan igazság kifejezése. Csodálatos, de tény hogy még a matézisben is fordul elő eset, a melyben utólagos vizsgálódás mutatja ki egy-egy tudósnak, mily hibás volt kiindulása, mily helytelen következtetése, holott eredményének helyes volta kifogás alá nem esik. Egy ilyen utólagos vizsgálat az, a mely alá Martin Lajos akadémiai lev. tagnak »Az erőműtani csavarfelületek« és »A vizszintes szélkerék elmélete« czimű értekezéseit vettem, mind a mellett is, hogy két szakavatott biráló véleménye kétséget nem hagyhatott az alap hibás s a következtetés helytelen volta iránt. Hátha az eredmény mégis helyes? Ily kérdés tárgyalása akárhányszor positiv eredményekre is vezethet, különösen ha a *tárgy* maga elég érdekes és sokoldalu vizsgálódásokra nyit tért. Vizsgálódásom a jelen esetben, mind a mellett, hogy Martin egy eredményének se sikerült *helyes voltát* kimutatnom, különálló positiv eredményekben elég jutalmazó volt.

Ez alkalommal a Martin értekezésében tárgyalt feladatok elsejével, a propellerek problemájával, leszek bátor foglalkozni, vele párhuzamban egy analog feladatot is tárgyalva, melyet a peripellerek problemájának fogunk nevezni (l. 1. §.II). Látni fogjuk, hogy a problémáknak néhány speciális megoldására könnyű reá jönni; e megoldások tulajdonságait azután tüzetesen tárgyaljuk s mellékesen ki fog az is tünni, *hogy a Martin-féle értekezés* a propeller problemáját illetőleg, nemcsak alapjában és következtetés módjában, de *végeredményében is helytelen.*

Midőn ezennel tanulmányaim méltatását a tekintetes magyar Tudományos Akadémia kegyébe ajánlani van szerencsém, egyúttal kedves kötelességemet végzem, midőn igen tisztelt tanártársamnak Szily Kálmán akadémiai rendes tagnak nyilvános köszönetemet fejezem ki f. é. junius hó második felében hozzám intézett leveléért, melyben velem vizsgálatai azon eredményét volt szives közölni, hogy az Archimedes-féle csavarfelület megoldását képezi a propellerek párt. diff. egyenletének; a nevezett időig még csak a propeller kúpokat ismertem; azóta jöttem reá egy az Archimedesit mint speciális esetet tartalmazó propeller-csavarra; azóta jöttem reá a peripeller problémára is, mely eddigelé tudtommal elméletileg tárgyalva nem volt még.

1. §.

A feladatok formulázása; első és második variatiók adott határvonal mellett.

A következő két feladattal fogunk foglalkozni:

I. Melyik az a felület, a mely folyadékban, a maga irányában u állandó sebességgel tovahaladó tengely körül w állandó szögsebességgel forogva, a folyadékra a haladás irányában a lehető legnagyobb nyomást gyakorolja.

II. Melyik az a felület, a mely adott u sebességű folyadékban a folyás irányával összeeső mozdulatlan tengely körül w állandó szögsebességgel forogva, a folyadékra olyan nyomást gyakorol, melynek nyomatéka, a tengelyre vonatkozólag, a lehető legnagyobb.

A I. feladat megoldását képező felületeket propellerfelületeknek, a II. feladatét peripeller-felületeknek fogjuk nevezni.

A föladatok megoldására a szóba jövő erőkifejtéseket azon hipotézis alapján fogjuk matematikai alakba önteni, melynek értelmében az ellenálló közeg a benne mozgó szilárd test df felületelemére az n normális irányában dN nyomást gyakorolván, e nyomás arányos a felületelemmel, s ennek a normális irányában a közeg saját *) mozgásához relative vett v_n sebessége négyzetével; úgy hogy tehát

$$1)\ dN = C\, df\, v_n^2,$$

hol C a folyadék természetétől s a használt mérték-egységektől függő állandó. Az I. feladat tárgyalásánál továbbá a foyadékot saját mozgás nélkülinek fogjuk tekinteni.

---

*) A folyadék »saját« mozgását ellentétben használjuk azon részhez képest, a melylyel a folyadék mozgását a belé jött szilárd testé módositja; a fentebbi hypotézis, miként ismeretes, ez utóbbi részt nem vévén tekintetbe, nélkülözi az elméleti alapot, de a gyakorlattal eléggé megegyező.

Válaszszuk a forgási tengelyt cilindrikus koordinátarendszer z tengelyéül s jelöljük a forgó felület variábilis pontjának radius vektorát r, meridiánus szögét φ és v-vel azon ivelem irányát, a melyet a pont forgás közben akármely időpontban leír. A forgó felületelemnek a z tengely irányába eső nyomás komponensét végre Z s ennek a tengelyhez képest vett momentumát M_z-vel jelölvén, lészen a hipotézis alapján:

$$2)\quad Z = C\int df\, v_n^2 \cos(z, n)$$

$$3)\quad M_z = C\int df\, r\, v_n^2 \cos(v, n)$$

mely egészletek terét a forgó felületek képezik; a bennök előforduló v_n, miként könnyen található, a w és u sebességek által igy fejezhető ki:

$$1a)\quad v_n = u \cos(z, n) - w\, r \cos(v, n)$$

A 2) illetőleg 3) alatti egészletek lévén azon erőkifejtéseknek kifejezései, a melyeknek feladataink értelmében a forgó felület *alakja* által lehetőleg legnagyobbá kell tétetniök, ezen alak meghatározására mindenekelőtt az egészletek variatióit kell kiszámítanunk. A variátiók kiszámítása végett legyen a keresett felületek egyenletének alakja ez:

$$4)\quad z = f(r, \varphi)$$

jelöltessék:

$$4a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial r} = \varrho \quad , & \dfrac{u}{w} = k \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = \pi \quad , & Cw^2 = A \end{cases}$$

és válaszszuk az erőegységet úgy, hogy $A = 1$ legyen.

E megállapodások mellett azután, miként könnyen levezethető:

$$\left.\begin{aligned} \cos(z, n) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \varrho^2 + \dfrac{\pi^2}{r^2}}} \\ \cos(r, n) &= \frac{\varrho}{\sqrt{1 + \varrho^2 + \dfrac{\pi^2}{r^2}}} \end{aligned}\right\} \quad 4b)$$

$$
\left.\begin{aligned}
\cos(v,n) &= \frac{\frac{\pi}{r}}{\sqrt{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}}\\
df &= r\,dr\,d\varphi\sqrt{1+\varrho_2+\frac{\pi^2}{r^2}}\\
v_n &= \frac{w\,(k-\pi)}{\sqrt{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}}
\end{aligned}\right\}\quad 4b)
$$

A feladatok értelmében legnagyobbá leendő erőkifejtések ezek:

$$
5)\; Z = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\,d\varphi\,\frac{r\,(k-\pi)^2}{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}
$$

$$
6)\; M_z = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\,d\varphi\,\frac{r\,\pi\,(k-\pi)^2}{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}
$$

E két egészlet közös alakja:

$$
7)\; S = 2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\,d\varphi\,V\,(r\,,\varphi\,,\pi)\quad,
$$

első variátiójuk tehát, adott határvonalak mellett, ebben az alakban foglaltatik:

$$
7a)\; \tfrac{1}{2}\,\delta S = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\frac{d}{d\varrho}\frac{\partial V}{\partial\pi}\right]\delta z\,dr\,d\varphi,
$$

és második variátiójuk, ugyancsak adott határvonalak mellett ebben:

$$
7b)\; \tfrac{1}{2}\,\delta S^2 = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\frac{d}{d\varrho}\frac{\partial V}{\partial\pi}\right]\delta^2 z\,dr\,d\varphi
$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}+\frac{d^2}{dr.d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\partial\pi}+\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2}\right](\delta z)^2 dr\, d\varphi$$

A 7a) és 7b)-ben előforduló mennyiségek kiszámítva, a mi eseteinkben ezek:

A propeller erőkifejtésében:

$$2V = r(k-\pi)^2 s^{-1}$$

hol

$$s = 1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}$$

ehát

$$\text{5a)}\left\{\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r} &= -r\varrho(k-\pi)^2 s^{-2}\\ \frac{\partial V}{\partial \pi} &= -r(k-\pi)s^{-1} - r^{-1}\pi(k-\pi)^2 s^{-2}\\ &= -r(k-\pi)\left(1+\varrho^2+\frac{k\pi}{r^2}\right)s^{-2}\end{aligned}\right.$$

és

$$\text{5b)}\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} &= -r(k-\pi)^2 s^{-2} + 4r\varrho^2(k-\pi)^2 s^{-3}\\ \frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\partial\pi} &= 2r\varrho(k-\pi)s^{-2} + 4r^{-1}\varrho\pi(k-\pi)^2 s^{-3}\\ \frac{\partial^2 V}{\delta\pi^2} &= r s^{-1} - r^{-1}(k-\pi)(k-5\pi)s^{-2}\\ &\quad + 4r^{-3}\pi^2(k-\pi)^2 s^{-3}\end{aligned}\right.$$

A peripeller erőkifejtésében:

$$2V = r\pi(k-\pi)^2 s^{-1}$$

lehát

$$\text{6a)}\left\{\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\varrho} &= -\frac{1}{2} r\pi\varrho(k-\pi)^2 s^{-2}\\ \frac{\partial V}{\partial\pi} &= \frac{1}{2} r(k-\pi)(k-3\pi)s^{-1} - r^{-1}\pi^2(k-\pi)^2 s^{-2}\\ &= \frac{1}{2} r(k-\pi\left[(k-3\pi)s - 2r^{-2}\pi^2(k-\pi)\right]s^{-2}\end{aligned}\right.$$

és

$$
6b)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} &= -r\pi(k-\pi)^2 s^{-2} - 4r\varrho^2\pi(k-\pi)^2 s^{-3}\\
\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho \partial \pi} &= -r\varrho(k-\pi)(k-3\pi)s^{-2} + 4r^{-1}\varrho\pi^2(k-\pi)^2 s^{-3}\\
\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} &= -r(2k-3\pi)s^{-1} - r^{-1}\pi(k-\pi)(3k-7\pi)s^{-2}\\
&\quad + 4r^{-3}\pi^3(k-\pi)^2 s^{-3}
\end{aligned}\right.
$$

---

2 §.

A propeller és peripeller felületek másodrendű partiális differentiális egyenletei; speciális megoldások.

A variátió számolás elvei szerint, az imént kiszámitott alakra hozott δS differentiálisa zéróval egyenlővé téve szolgáltatja azon felület differentiális egyenletét, a mely az S kettős egészletet legnagyobbá teszi, ha e felület szomszédságában $\delta^2 S$ *negativ*-nak bizonyul, és legkisebbé ellenkező esetben.

A propeller felületek másodrendű partiális differentiális egyenlete ennélfogva:

$$5c)\ 0 = \frac{d}{dr}\frac{r\varrho(k-\pi)^2}{\left[1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}\right]^2} + \frac{d}{d\varphi}\frac{r(k-\pi)(1+\varrho^2+k\pi r^{-2})}{\left[1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}\right]^2}$$

és a peripeller felületeké:

$$6c)\ 0 = \frac{d}{dr}\frac{r\pi\varrho(k-\pi)^2}{\left[1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}\right]^2} - \frac{d}{d\varphi}\frac{r(k-\pi)(k-3\pi)}{\left[1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}\right]}$$

Ezek tehát azon egyenletek, a melyeknek általános megoldását ismernünk kellene arra nézve, hogy feladatunkat teljesen megoldhassuk. Mivel azonban ez idő szerint kérdéses még, hogy általános megoldásuk véges alakban egyáltalában előállitható-e vagy sem, azért egyelőre speciális megoldások találásán leszünk.

I. Egy ilyen speciális megoldásra, a mely még hozzá a két egyenletnek közös megoldása és a k állandó értékétől is független, azon észrevétel vezet, a melyet az előbbi § 5) és 6) alatti képletének lefejtése után tettünk. Azt állitjuk ugyanis, hogy ha általánosan

$$7)\ S = \int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\,r\,d\,\varphi\,V\,(r, \pi, \varrho)$$

azaz ha a *V* függvény a *z* és φ koordinátákat explicite nem tartalmazza, akkor az S maximuma vagy minimuma által megkövetelt

$$o = \frac{d}{dr}\frac{\delta V}{\delta \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\delta V}{\delta \pi}, \qquad 8)$$

másod rendü pártiális differentiális egyenletnek speciális megoldását képezi

$$z = a\varphi + f\,(r)\,, \qquad 9)$$

hol *a* állandót jelent az f (r) pedig ezen közönséges, első rendü differentiális egyenletnek képezi a megoldását:

$$\text{const.} = \left(\frac{\delta V}{\delta \varrho}\right)\pi = a\,;\ \varrho = f'\,(r)\,, \qquad 9a)$$

Valóban a 8) egyenlet igy irható:

$$o = \frac{d}{dr} V_1\,(r\,, \pi\,, \varrho) + \frac{d}{d\varphi} V_2\,(r\,, \pi\,, \varrho)$$

mely egyenlet a 9) segélyével ezzé lesz:

$$o = \frac{d}{dr} V_1 \Big(r\,, a\,, f'\,(r)\Big) + \frac{d}{d\varphi} V_2 \Big(r\,, a\,, f'\,(r)\Big)$$

Mivel pedig V_2 (r, a, f (r)) csakis az *r*-nek függvénye tehát marad:

$$o = \frac{d}{dr} V_1 \Big(r\,, a\,, f'\,(r)\Big)$$

mely egyenletnek első egészlete:

$$\text{const.} = V_1 \Big(r\,, a\,, f'\,(r)\Big)$$

a 9a) alatti diff. egyenlettel azonos.

A nevezett helyen tett észrevétel tehát arra vezet, hogy *mind a propeller, mind a peripellerfelületek pártiális diff. egyenletének megoldását képezi ezen csavarfelületet képviselő egyenlet:*

$$10)\ z = a\varphi + f\,(r)$$

hol a állandót jelent, az f (r) pedig ebből az első rendü közönséges diff. egyenletből határozandó meg (1 § 5a, 5b.)

$$10a)\ \text{const.} = \frac{r\,f'(r)}{\left[1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Ezen diff. egyenlet megoldásával később fogunk foglalkozni. Tegyük föl, hogy megoldottuk; akkor az f (r) segélyével a 10) által képviselt felületet igy nemzhetjük: Egy valamelyik meridiánus síkban a

$$10b)\ z = f(r)$$

vonalat szerkesztvén, képzeljük azután, hogy e meridiánus sik a benne lévő vonallal együtt kettős mozgást végez és pedig hogy a z tengely körül állandó szögsebességgel forogva egyuttal a z tengely irányában állandó sebességgel tova csuszik. A 10b) által defineált (általánosan) görbe vonal e kettős mozgás folytán a 10) által képviselt, (netaláni propeller és peripeller) felületet nemzi.

E görbe vonal azon esetre, ha a 10a) egyenlet baloldalán álló constans $=$o, egyenessé degenerál, és pedig — miután akkor

$$f'(r) = o$$

azaz

$$f(r) = \text{constans},$$

tehát olyan egyenessé, a mely a Z tengelyt derék szög alatt metszi.

A 10 egyenlet tehát csavarfelületeket képvisel és közöttük az Archimedes-félét is. *)

---

*) Nem lesz érdektelen megjegyezni, hogy az Archimedes-féle csavarfelület megoldás marad ugy is, ha a vizsgálatainkban alapul vett hipotézis akként általánosittatik, hogy a szilárd test elemére gyakorolt normális nyomás

$$dN = C \,.\, df \,.\, F(v_n)\quad,$$

hol az F akármilyen differentiálható függvényt jelenthet. Ekkor ugyanis

$$Z = C \int df \,.\, F(v_n) \,.\, \cos(z, n)$$

$$M_z = C \int df \,.\, r\, F(v_n) \cos(v, n)$$

II. A propeller és peripeller-felületek pártiális diff. egyenletének egy másik speciálisabb és nem közös megoldására jövünk azon észrevétel által, hogy az erőkifejtések differentiálisa homogénná válik (π, r)-ben, ha k = o tétetik. Ha ugyanis általánosabban

$$11)\ S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\, d\varphi\, V(r, \varphi, \pi, \varrho)$$

azaz a V függvény nem tartalmazza a z koordinátát explicite, akkor az S maximuma avagy minimuma által megkövetelt

$$11a)\ 0 = \frac{d}{dr} \cdot \frac{d}{\delta\varrho} \cdot \frac{dV}{d\varrho} + \frac{d}{d\varphi} \cdot \frac{\delta V}{\delta\pi}$$

másod rendü pártiális differentiális egyenletnek megoldását képezi

---

tehát a 4) alatti képletek fölhasználásával:

$$Z = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\, d\varphi\, r\, F_1 \left[\frac{(k-\pi)}{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}\right]$$

$$M_z = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\, d\varphi\, r\, \pi\, F_1 \left[\frac{(k-\pi)^2}{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}\right].$$

A Z és M_z alakjából pedig a 9) 9a) alatti tétel értelmében az következik, hogy Z és M_z-nek, adott határvonalak melletti, első variátióját zéróvá teszi:

$$z = a\varphi + f(r)$$

ha f (r) meghatározására e diff. egyenlet szolgál:

$$\text{constans} = \frac{r\, f'(r)}{\left[1+\frac{a^2}{r^2}+f'(r)^2\right]^2} F_1' \left[\frac{(k-a)^2}{1+f'(r)^2+\frac{a^2}{r^2}}\right].$$

Ámde ezen egyenletnek abban a speciális esetben, ha a baloldalon álló constans = o, megoldását képezi:

$$f'(r) = o$$

azaz

$$f(r) = \text{constans}$$

$$12)\ z = r\,f(\varphi) + \text{const.}$$

által képviselt kúpfelület az esetben, ha $V(r, \varphi, \pi, \varrho)$ függvény (π, r) változókban homogén.

Valóban mert V homogén, azért a $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ is ép olyan rangú a $\frac{\partial V}{\partial \pi}$ pedig egygyel alantabb rangú homogén mennyiség lesz a (π, r) változókban; ez okból a 11a) egyenlet a r változóban *magában véve* homogénná válik, mihelyt benne a 12) értelmében

$$\pi = r\,f(\varphi)$$
$$\varrho = f(\varphi)$$

helyettesités megtétetik. A 11a) alatti pártiális diff. egyenletből ennélfogva az imént nevezett substitutió után az r változó mint közös szorzó kiesvén, a mi marad nem más, mint egy az $f(\varphi)$ meghatározására szolgáló közönséges, legföljebb másodrendü differentiális egyenlet.

Az imént tett észrevétel tehát arra vezet, hogy

II a) *a propeller-felületek pártiális diff. egyenletének abban az esetben, ha k a π-hez képest elenyésző, megoldását képezi*

$$12)\ z = r\,f(\varphi) + \mathit{const.}$$

hol $f(\varphi)$ meghatározására ezen egyenlet szolgál:

$$o = \frac{3\,f(\varphi)\,f'(\varphi)^2}{\left[1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2\right]^2} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\left[1 + f(\varphi)^2\right]f'(\varphi)}{\left[1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2\right]^2}$$

mely egyenlet kifejtve és rendezve, [reális megoldást nem adó szorzók elhagyása után] *ezzé lesz:*

$$12a)\ P\,f'(\varphi) + Q\,f''(\varphi) = o$$

hol

$$\begin{cases} P = f(\varphi)\,f'(\varphi)\left\{5\left[1 + f^2(\varphi)\right] + f'(\varphi)^2\right\} \\ Q = \left[1 + f(\varphi)^2\right]\left\{-\left[1 + f(\varphi)^2\right] + 3\,f(\varphi)^2\right\}; \end{cases}$$

és hogy

IIb) *a peripellerek partiális diff. egyenletének abban az esetben, ha k elenyésző a π-hez képest, megoldását képezi*

12) $z = r f(\varphi) + const.$

hol $f(\varphi)$ meghatározására ezen egyenlet szolgál:

$$o = \frac{8 f(\varphi) f'(\varphi)^3}{1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2} +$$

$$+ \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{3 f'(\varphi)^2}{1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2} - \frac{2 f'(\varphi)^4}{\left[1 + f(\varphi)^2 + f(\varphi)^2\right]^2}\right]$$

mely egyenlet kifejtve és rendezve, [reális megoldást nem nyujtó szorzók elhagyásával] *ezzé lesz:*

$$12b)\quad o = P f'(\varphi) + Q f''(\varphi)$$

hol

$$P = f(\varphi) f'(\varphi)\left[- 7 (1 + f(\varphi)^2 - 3 f'(\varphi)^2\right]$$

$$Q = \left[1 + f(\varphi)^2\right]\left[3 (1 + f(\varphi)^2) - f'(\varphi)^2\right]$$

Ezen másod rendü közönséges diff. egyenletek első egészlete közvetlenül fölirható a következő könnyen verifikálható tétel alapján, mely tétel különben könnyen általánosbitható. Ha ugyanis

$$P f'(\varphi) + Q f''(\varphi) = o$$

az adott másod rendü diff. egyenlet, lévén

$$P = f(\varphi) f'(\varphi)\left\{a\left[1 + f(\varphi)^2\right] + a' f'(\varphi)^2\right\}$$

$$Q = \left[1 + f(\varphi)^2\right]\left\{b\left[1 + f(\varphi)^2\right] + b' f'(\varphi)^2\right\},$$

hol az a, a', b, b' állandók között ez a relatio áll fenn:

$$a + b = a' + b';$$

akkor az adott egyenletnek első integrális egyenlete:

$$\ldots c = \left[1 + f(\varphi)^2\right]^{x_1}\left[1 + f^2(\varphi) + f'(\varphi)^2\right]^{x_2} f'(\varphi)^{2x_3}$$

hol

$$x_1 : x_2 : x_3 = a' : a - a' : b\quad .$$

A tétel alkalmazásával a 12a) első integralis egyenlete ez lesz:

$$12a')\ \left[1+f(\varphi)^2\right]\left[1+f(\varphi)^2+f'(\varphi)^2\right]^4 f'(\varphi)^{-2} = const.$$

és a 12b) alattié:

$$12b')\ \left[1+f(\varphi)^2\right]^3\left[1+f(\varphi)^2+f'(\varphi)^2\right]^4 f'(\varphi)^{-6} = const.$$

A következő §-ban megmutatjuk, hogy f (φ) hyperelliptikus egészletek által fejezhető ki. Az igy kiszámitott f (φ) segélyével azután a speciális megoldásokat képező kupfelületeket az $r=1$ hengerre rajzolt

$$z = f(\varphi)$$

vezérvonal útján könnyü lesz szerkeszteni.

III. A szóban lévő partiális diff. egyenleteknek, a II pont első felében bebizonyitott tétel alapján, könnyen jutunk speciális megoldásához abban az esetben is, ha k a π-hez képest végtelen nagynak tekinthető. Ugyanis:

IIIa.) *A propeller felületek pártiális diff. egyenletének a nevezett esetben megoldását képezi:*

$$13)\ z = r f(\varphi) + const.$$

hol az f (φ) meghatározására ezen másodrendü közönséges diff. egyenlet szolgál:

$$o = P\left[f(\varphi) + f''(\varphi)\right]$$

lévén

$$P = 1 + f(\varphi)^2 - 3 f'(\varphi)^2\ ,$$

mely egyenletnek P = o-ból folyó partikuláris megoldása ez:

$$13a)\ f(\varphi) = \frac{1}{2}\left[e^{(\varphi+\varphi_0)\frac{1}{\sqrt{3}}} - e^{-(\varphi+\varphi_0)\frac{1}{\sqrt{3}}}\right]$$

és f (φ) + f'' (φ) = o-ból folyó *általános megoldása*

$$13a')\ f(\varphi) = c \sin(\varphi + \varphi_0)$$

hol c és φ_0 állandókat jelentenek.

IIIb. *A peripellerek pártiális diff. egyenletének ugyanezen esetben spec. megoldását képezi:*

$$13)\ z = r f(\varphi) + const.$$

hol f (φ) meghatározására ezen másodrendű közönséges diff. egyenlet szolgál :

$$o = P\Big(f(\varphi) + f'(\varphi)\Big)$$

lévén

$$P = 3\Big[1 + f(\varphi)^2\Big] - f'(\varphi)^2,$$

mely egyenletnek P = o-ból folyó partikuláris megoldása :

$$13b)\ f(\varphi) = \frac{1}{2}\Big[e^{(\varphi + \varphi_0)\sqrt{3}} - e^{-(\varphi + \varphi_0)\sqrt{3}}\Big]$$

és $f(\varphi) + f''(\varphi) = o$-ból *általános megoldása :*

$$13b')\ f(\varphi) = c \sin(\varphi + \varphi_0)$$

hol c és φ_0 állandókat jelentenek.

---

3. §.

A $\delta S = o$ speciális megoldására szolgáló I. r. közönséges diff. egyenletek egészelése; a megoldást képező felületek nemzőjének, illetőleg vezérvonalának szerkesztése.

A propellerek és peripellerek (δS = o) pártiális diff egyenletének az előbbi § 10) és 10a) egyenletei értelmében a *k*-nak akármilyen értéke mellett speciális megoldását képez a csavar felületet képviselő

$$10)\ z = a\,\varrho + f(r)$$

egyenlet, melyben *a* állandót jelent, az f (r) pedig ebből az I r. köz. diff. egyenletből határozandó meg:

$$10a)\ \text{const.} = \frac{r f'(r)}{\Big[1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2\Big]^2}$$

A meghatározást már mostan a következő egyenlettel defineált *s* segédvariábilis által fogjuk eszközölni :

$$10b)\ s = 1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2$$

a számitás némi egyszerüsitése céljából e jelölésekkel élve :

$$10c)\ \frac{z}{a} = z_1\ ;\ \frac{r}{a} = r_1\ ;\ \text{const} = al.$$

Állapodjunk továbbá abban meg, hogy az *al* értéke positiv. A megnevezett jelölések mellett a 10a) alatti egyenlet ezzé lesz:

$$10d)\ ls^2 = r_1 \frac{dz_1}{dr_1}.$$

A 10b) alatti egyenletet azután igy irva:

$$\frac{r^2}{a^2} s = 1 + \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2} f'(r)^2,$$

egyesitjük a 10c) és 10d) alattiakkal, mi által ezzé lesz:

$$r_1{}^2 s = 1 + r_1{}^2 + \left(r_1 \frac{dz_1}{dr_1}\right)$$
$$= 1 + r_1{}^2 + l^2 s^4$$

honnan $r_1{}^2$ ekkép határozódik meg:

$$10e)\ r_1{}^2 = \frac{l^2 s^4 + 1}{s - 1}$$

Annak elérésére, hogy z_1 is az *s* által legyen kifejezve, a 10d)

$$r_1 \frac{dz_1}{ds} \cdot \frac{ds}{dr_1} = l s^2$$

egyenletből indulva ki, ebbe belé teszszük a 14 c)-ből kiszámitott

$$10f)\ \frac{dr_1}{ds} = \frac{3l^2 s^4 - 4l^2 s^3 - 1}{2 r_1 (s-1)^2}$$

deriváltat, s r_1 helyett 10e)-ből folyó értékét. Akkor lészen belőle:

$$10g)\ \frac{dz_1}{ds} = \frac{ls^2 (3 l^2 s^4 - 4 l^2 s^3 - 1)}{2 (s-1)(l^2 s^4 + 1)}$$

vagy kifejtve:

$$\frac{dz_1}{ds} = \frac{1}{2} \left\{ 3s - 1 - \frac{l^2 s^4 + 4 s^2 - 4 s + 1}{(s-1)(l^2 s^4 + 1)} \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ 3s - 1 - \frac{1}{s-1} - \frac{4s}{l^2 s^4 + 1} \right\}$$

honnan végre egészelés által

$$z_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} s^2 - s - \text{lognat}(s-1) - 2 l \overset{-1}{\text{arc tg}}\, l s^2 \right.$$

A 10a) által defineált f (r) függvény az s segédvariábilis által igy fejeződik tehát ki:

$$10h)\begin{cases} f(r)=\frac{al}{2}\left\{\frac{3}{2}s^2-s-\text{lognat}\,(s-1)-2l\,\overset{-1}{\text{arctg}}\,ls^2\right\}+\text{const.} \\ r=\frac{a\sqrt{l^2s^4+1}}{\sqrt{s-1}} \end{cases}$$

Ezek után lássuk, milyen azon vonal, melyben egyvalamelyik meridiánus sik $\varphi = \varphi_0$ a 10) alatti egyenletek által meghatározott csavarfelületet metszi. E vonal egyenlete

$$z = a\,\varphi_0 + f(r)$$

tehát

$$z = f(r) + \text{constans}.$$

Fusson már mostan s minden értéket végig $+\infty$-től $-\infty$-ig; akkor 10h) egyenletekből folyólag z és r *képzetesek maradnak* a

$$-\infty < s < +1$$

intervallumban; ha $s - 1 = +\varepsilon$, hol ε végtelen kicsiny absolut értéket jelent, akkor z és r *positiv végtelen nagy; ezentul az*

$$1 < s < +\infty$$

intervallumban z és r *mindenütt véges és valós értékkel birnak s folytonosan változnak* az $s = +\infty$-gyal szintén $+\infty$-*gyá* lesznek és pedig, miként könnyü belátni, felsőbb rendü végtelen nagygyá, mint a mikor $s - 1 = +\varepsilon$ volt. A z és r ezen menetéből mindenek előtt az következik tehát, hogy csak a *valós* értékeket tekintve az r minden értékének *két* z érték felel meg és hogy r és z valahol minimum. A minimum helye a 10f) és 10g) értelmében

$$3\,l^2 s^4 - 4\,l^2 s^3 + 1 = o$$

egyenlet által határozódván meg, z és r-re közös. Ezen egyenletnek csak *egy* positiv és *egy* negativ gyöke van, továbbá a positiv nagyobb egynél; tekintetbe véve tehát, hogy a negativ s mellett z és r képzetes, a z és r-nek mint s függvényeinek csak *egy* minimumok van. Az r ezen minimuma zérónál nagyobb, ha csak nem $l = o$, mert ha l véges érték, akkor r zéró egyáltalában sehol se lehet.

A $\frac{dz}{dr}$ *lefolyását* a 10d)-ből fogjuk következtetni; belőle

$$\frac{dz_1}{dr_1} = \frac{l\,s^2}{r_1},$$

tehát 10_c és 10_e segélyével:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{a l s^2}{r} = \frac{l s^2 \sqrt{s-1}}{\sqrt{l^2 s^4 + 1}}$$

s ebből *s* szerint való differentiálás által:

$$\frac{d^2 z}{dr\, ds} = \frac{l\, s\, (l^2 s^5 + 5 s - 4)}{2 (l^2 s^4 + 1) \sqrt{(s-1)(l^2 s^4 + 1)}},$$

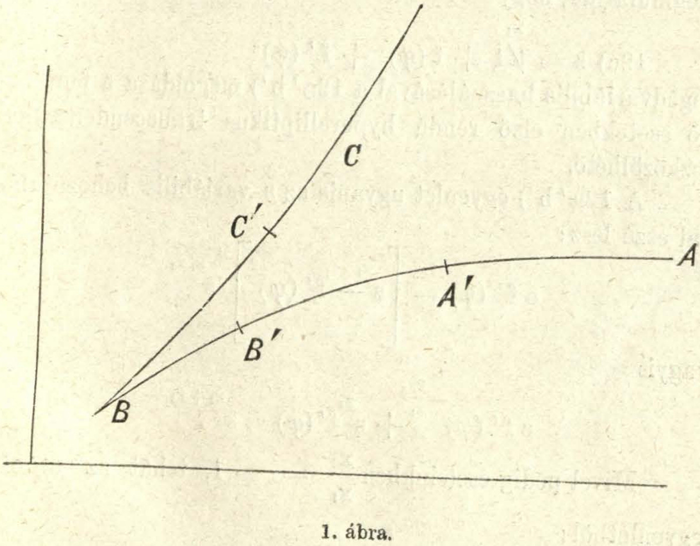
mely két utóbbi képletből az következik, hogy $\frac{dz}{dr}$ *zérótól végtelenig* és pedig *folytonosan nő, ha az s a többször nevezett intervallumot befutja.*

Ez utóbbi egyenletnek a 10 f)-fel egyesitése által végre ez ered:

$$\frac{d^2 z}{dr^2} = a l \frac{s (s-1) (l^2 s^5 + 5 s - 4)}{3 l^2 s^4 - 4 l^2 s^3 - 1},$$

mely egyenletből világos, hogy a tárgyalt vonal *görbülete* absolut értékét tekintve, *zérótól végtelenig nő, ha s az egységtől addig az értékig nő, hol* miként fentebb láttuk a *z* és *r legkisebb,* — hogy továbbá ezen pontig a görbület *negativ* s ezen tul *positiv* végtelentől véges értékeken át ismét a végtelen érték felé tart.

A görbe vonal tehát ilyen alaku:



1. ábra.

Ha s 1-től ∞-ig nő, akkor a görbe vonal variábilis pontja a végtelenből A B C irányban ismét a végtelenség felé tart.

Ha az l állandónak értéke zéró felé convergál, akkor az A B rész egyenessé degenerál, mely határ esetben a B pont a Z tengelybe esik stb.

II. A $\delta S = o$ egyenletnek arra az esetre, ha $k = o$, az előbbi §-ban nyert eredmények szerint megoldását képezi ezen, kupfelületet képviselő, egyenlet:

$$12)\ Z = r\, f(\varphi) + \text{const.}\ ,$$

hol az $f(\varphi)$ meghatározására a 12a′b′) értelmében ezen I r. közönséges diff. egyenlet szolgál:

$$12a'b')\ \text{const.} = \left[1 + f(\varphi)^2\right]^{x_1} \left[1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2\right]^{x_2} f'(\varphi)^{2x_3}$$

lévén *a propeller esetében*

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 4 : -1\ ,$$

és *a peripeller esetében*

$$x_1 : x_2 : x_3 : = 3 : 4 : -3\ .$$

Feladatunkul itt az $f(\varphi)$ meghatározását tüzzük ki s megmutatjuk, hogy

$$12c)\ s = \sqrt{1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}^{\,x_1}$$

segédvariábilis használásával a 12a′b′) megoldása a fennforgó esetekben első rendü hyperelliptikus transcendensekkel eszközölhető.

A 12a′b′) egyenlet ugyanis az s variábilis behozatalával ezzé lesz:

$$c\, f'(\varphi)^{-2x_3} = \left[s^{x_1} - f'(\varphi)^2\right]^{x_1} s^{x_1 x_2}$$

vagyis

$$c\, f'(\varphi)^{-\frac{2x_3}{x_1}} + s^{x_2} f'(\varphi) = s^{x_1 + x_2}\ .$$

Mivel pedig eseteinkben $\frac{x_3}{x_1} = -1$, tehát az utóbbi egyenletből:

$$12d)\ f'(\varphi^2) = \frac{s^{x^2 + x_2}}{s^{x_2} + c};$$

honnan a 12c felhasználásával:

$$12e)\ f(\varphi)^2 = \frac{-s^{x_2} + c\,s - c}{s^{x_2} + c},$$

mely egyenlet differentiálva, rövid reduktió után arra vezet, hogy

$$12f)\ d\varphi = \frac{c}{2} \frac{\left((1 - x_2)\,s^{x_2} + c\right) ds}{\left(s^{x_2} + c\right)\sqrt{s^{x_1 + x_2}\left(-s^{x_2} + c\,s - c\right)}}$$

A 12a′b′) differentiális egyenlet ezeknél fogva a propeller esetében e két egyenletben nyeri megoldását:

$$12a'')\ \begin{cases} \varphi = \dfrac{c}{2} \displaystyle\int_{s_0}^{s} \dfrac{(-3\,s^4 + c)\,ds}{(s^4 + c)\,s^2 \sqrt{s\,(-s^4 + c\,s - c)}} \\ f(\varphi) = \sqrt{\dfrac{-s^4 + c\,s - c}{s^4 + c}} \end{cases}$$

és a peripeller esetében e kettőben:

$$12b'')\ \begin{cases} \varphi = \dfrac{c}{2} \displaystyle\int_{s_0}^{s} \dfrac{(-3\,s^4 + c)\,ds}{(s^4 + c)\,s^3 \sqrt{s\,(-s^4 + c\,s - c)}} \\ f(\varphi) = \sqrt{\dfrac{-s^4 + c\,s - c}{s^4 + c}} \end{cases}$$

mi által állitásunk igaznak bizonyult.

Ezek után nem okoz semmi nehézséget a kupfelület *vezérvonalának* discussiója, annak tekintvén azon görbét, melyben az $r = 1$ henger kupfelületünket metszi, — melynek egyenletei ennélfogva:

$$\begin{cases} z = f(\varphi) + \text{const.} \\ r = 1\ . \end{cases}$$

Az

$$F(s) = -s^4 + c\,s - c = o$$

egyenletnek ugyanis, — melynek két összeeső gyöke van, ha

$c = \frac{4^4}{3^3}$ és két valós positiv gyöke, ha $c > \frac{4^4}{3^3}$, — kisebb valós gyökét s_1-gyel s a nagyobbat s_2-vel jelölvén, az F (s) csak e két gyökön belöl positiv; *ennélfogva az $f(\varphi)$ csakis addig, de addig minden esetre valós, mig s az*

$$s_1 < s < s_2$$

intervallumot átfutja, legnagyobb értékét elérve, ha

$$s^4 = \frac{c}{4};$$

az $f(\varphi)$ két határértéke zeró, legnagyobb értéke

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[4]{27c} - 4}$$

A $d\varphi$ *positiv a nevezett intervallum azon részében, hol*

$$s_1 < s < \sqrt[4]{\frac{c}{3}},$$

negativ a másikban; ennélfogva a φ ugyanott éri el legnagyobb értékét, a hol $f(\varphi)$, a miből az foly, hogy vezérvonalunknak e helyen hegye van.

Az $f'(\varphi)$ sehol se lehetvén zéró se végtelen nagy, jegyét nem változtathatja; *jegye* tehát a $\sqrt{\ }$ jegyről eddig hallgatva tett megállapodásunk szerint *positiv*. *Lefolyásának megismerésére* a 12c)-ből a 12f) felhasználásával kiszámitott

$$f''(\varphi) = \frac{1}{c}\,\frac{s^{x_1+x_2-1}\left[x_1 s^{x_2} + c(x_1 + x_2)\right]}{(1 - x_2)s^{x_2} + c}\sqrt{\frac{-s^{x_2} + cs - c}{s^{x_2} + c}}$$

vezet. E szerint ugyanis *a vezérvonal görbülete zéró az* s_1 *és* s_2 *helyen; végtelen nagy a hegynél;* és szabatosabban: zérótól a positiv végtelenségig nő az

$$s_1 < s < \sqrt[4]{\frac{c}{3}}$$

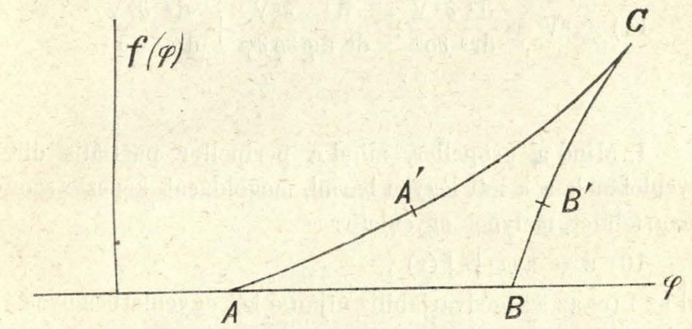
intervallumban, és $-\infty$-tól a negativ értékeken át zéróig a hátralévő

$$\sqrt[4]{\frac{c}{3}} < s < s_2$$

intervallumban.

Minél nagyobb c, annál nagyobb a φ és f (φ) maximuma, azaz annál kiterjedtebb a görbe.

A görbe alakja mindezeknél fogva a henger palástját sikra teritve ilyenforma:



2. ábra.

Az A pont az $s = s_1$ értéknek, a C pont $s = \sqrt[4]{\frac{c}{3}}$-nak, s a B pont $s = s_2$ értéknek felel meg.

---

4. §.

A második variátiók előjegye a $\delta S = o$ talált spec. megoldásai esetében.

Miután a propellerek és peripellerek $\delta S = o$ partiális diff. egyenleteinek talált speciális megoldásai által képviselt felületeket szerkesztettük, vizsgáljuk meg, hogy e felületek leghatályosabb propeller, illetőleg peripeller felületül szolgálhatnak-e? E vizsgálat keresztülvitele, miként ismeretes, csak annak eldöntésétől függ, hogy a $\delta^2 S$ előjegye a variábilisoknak legalább bizonyos határai között mindenütt negativnak bizonyul-e be, vagy nem, ha a $\delta S = o$ megoldása belé helyetteztetik. Tekintettel erre, a következő (1 §, 7b) mennyiség lesz az egyes esetekben megvizsgálandó;

$$\frac{1}{2}\delta^2 S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{d^2}{dr\, d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi} + \frac{d^2}{d\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right](\delta z)^2 dr d\varphi$$

vagyis a δ^2S-ét eldöntő jegyénél fogva ezen mennyiség:

$$14)\ \triangle^2 V = \frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{d^2}{dr\, d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \varphi} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}$$

I. Mind a propeller, mind a peripeller partiális diff egyenletének, a k lett légyen bármi, megoldását képezte azon csavarfelület, melynek egyenlete:

$$10)\ z = a\varphi + f(r)\ ,$$

hol az f (r) az *s* segédvariábilis útján e két egyenletben nyerte kifejezését:

$$10a)\ \begin{cases} f(r) = \frac{al}{2}\left[\frac{3}{2}s^2 - s - \mathrm{lognat}(s-1) - 2l\, \mathrm{arctg}\, ls^{2^{-1}}\right] + \mathrm{const.} \\ r^2 = \frac{a(l^2 s^4 + 1)}{s-1}\ . \end{cases}$$

E felületnek (l = o utján) speciális esetét képezte az Archimedes-féle csavarfelület.

Az általánosabb esetben ép ugy, mint e speciálisban, mind a $\varrho = \frac{dz}{dr}$, mind a $\pi = \frac{dz}{d\varphi}$ teljesen független lévén a φ variábilistól, behelyettezésükkel a $\triangle^2 V$ értékében előforduló

$$\frac{d^2}{dr\, d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi} \text{ és } \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}$$

mennyiségek zéróvá lesznek, ugy hogy itten:

$$15)\ \triangle^2 V = \frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}$$

Ia.) Az Archimedes-féle csavarfelület esetében:

$$z = a\varphi + \text{constans}$$

egyenletéből folyólag

$$\varrho = \frac{dz}{dr} = o$$

$$\pi = \frac{dz}{d\varphi} = a$$

$$s = 1 + \pi^2 + \varrho^2 = 1 + \frac{a^2}{r^2} \; ;$$

tehát az 1 § 5b és 6b egyenletekből, akár propeller, akár peripeller felületekről legyen szó, [positiv állandó szorzókat elhagyva]:

$$\frac{\partial^2 V^{\cdot}}{\partial \varrho^2} = - r^5 (r^2 + a^2)^{-2}$$

honnan

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial^2 V^{\cdot}}{\partial \varrho^2} = - (r^6 + 5\, a^2 r^4)(r^2 + a^2)^{-3} \; ;$$

következőleg még egyszer differentiálás után a 15) alatti jelölés használásával:

$$\triangle^2 \dot{V} = 4\, a^2 r^3 \frac{r^2 - 5\, a^2}{(r^2 + a^2)^4}$$

mely kifejezés negativ vagy positiv, a szerint a mint

$$\frac{a^2}{r^2} \gtrless o \, .$$

Ennélfogva a 14) 14a) és 15) tekintetbe vételével a második variátio jegye negativ, ha az Archimedesi felületen $\frac{a}{r}$ *mindenütt* nagyobb $\sqrt{\frac{1}{5}}$-nél, — positiv ellenkező esetben és határozatlan jegyü és értékü olyan darabján, a melynek egy részén $\frac{a}{r}$-nagyobb $\sqrt{\frac{1}{5}}$-nél, más részén pedig kisebb.

Eddigi vizsgálataink eredményét szabatosan kifejezendők, gondoljunk tehát, tetszés szerint választva az a értékét Archimedes-féle csavarfelületet s ennek tengelye körül r_0 sugarú hengert szerkesztve; a csavarfelület a hengerre közönséges csavarvonalat fog rajzolni

$$\alpha = \mathrm{arctg}\, \frac{a}{r_0}$$

emelkedési szöggel. A henger r^0 sugarát ugy válaszszuk, hogy

$$\alpha = \mathrm{arctg} \sqrt{\frac{1}{5}} = 24^0 5' 41'' \cdot 5 \cdots$$

legyen.

Akkor:

1.) *Az Archimedes-féle csavarfelületnek e hengeren belül eső fele*, s ezen félnek akármely része is, *vele közös határvonalú más felületekhez képest maximális hatású propeller és peripeller.*

2.) *Az Archimedes-féle felületnek a hengeren kivül eső fele,* vagy ennek akármely része is, vele közös határvonalú más felületekhez képest *minimális hatású propeller és peripeller.*

3.) Az Archimedes-féle felületnek olyan része, a mely *mind a két félből tartalmaz darabot, se maximális se minimális hatású* propeller vagy peripeller.

Ib) Ezzel el van döntve az is, hogy a 10, 10h) egyenletek által defineált általánosabb csavarfelületnek is megfelel bizonyos része a maximális propeller és perip. föltételének, mihelyt az l értéke elegendő kicsiny; megfelel, miután ezen egyenletek jobb oldalai folytonos függvényei az l állandónak és l elenyésztével az Archimedes-féle csavarfelületet adják. Mind a mellett külön megvizsgáljuk ezen általánosabb esetben is a második variátiót az okból, mert általánosabb csavarfelületünk nemzővonala két ágból áll s ezen ágak közül csak az egyik degenerál az Archimedesi csavarfelület egyenes vonalú nemzőjévé, úgy hogy ennél fogva a másik ágról a maximum kérdését illetőleg semmit se tudunk.

Általánosabb csavarfelületünk esetében már mostan:

$$\varrho = \frac{dz}{dr} = f'(r)\ ;\ \pi = \frac{dz}{d\varphi} = a$$

s láttuk a 3 §. első felében, hogy 10d)

$$\frac{dz}{dr} = \frac{l s^2}{r_1}$$

és 10f)

$$\frac{ds}{dr_1} = \frac{2 r_1 (s-1)^2}{3 l^2 s^4 - 4 l^2 s^3 - 1}$$

hol

$$r_1 = \frac{r}{a}$$

Ezek behelyettezésével lészen a propeller és peripeller esetére közösen az 1 §. 5b és 6b útján

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = \frac{r_1 (3\, l^2 s^4 - 4\, l^2 s^3 - 1)}{s^2 (l^2 s^4 + 1)}$$
$$= \frac{3\, l^2 s^4 - 4\, l^2 s^3 - 1}{r_1\, s^2 (s - 1)}$$

hol állandó *positiv* szorzók elhagyattak. Ezen egyenletből

$$\frac{d}{dr} \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} \doteq \frac{24 l^2 (s - 1^2)}{3 l^2 s^4 - 4 l^2 s^3 - 1} + 4 s^{-3} - 5 s^{-5} - \frac{4 l^2 (s^2 - s)}{l^2 s^4 + 1}$$

tehát

$$\triangle^2 V \doteq \frac{ds}{dr^1} \left\{ \frac{48 l^2 (s - 1)}{3 l^2 s^4 - 4 l^2 s^3 - 1} - \frac{24 . 12 l^4 s^2 (s - 1)^3}{(3 l^2 s^4 - 3 l^2 s^3 - 1)^2} \right.$$
$$\left. - 12 s^{-4} + 10 s^{-3} - \frac{4 l^2 (s - 1)}{l^2 s^4 + 1} + \frac{(4 l^2)^2 s^4 (s - 1)}{(l^2 s^4 + 1)^2} \right\}$$

A $\triangle^2 V$ értékéből már mostan könnyen megmutatható, hogy positiv, ha $s=1$ és akkor is, ha $s=\infty$, ellenben *positiv* végtelen nagyból *negativ* végtelenbe csap át, ha az s növekedő irányban ezen egyenlet s_1 gyök értékén megy át:

$$3\, l^2 s^4 - 4\, l^2 s^3 - 1 = o$$

A miből az következik, hogy $\triangle^2 V$ páros számszor változtatja jegyét $s=1$-től $s=s_1$-ig és páratlan számszor $s=s_1$-től $s=\infty$-ig. Visszaemlékezve tehát, hogy általános csavarfelületünk nemzőjének (1 ábra) azon része A B, a mely l elenyészésével egyenessé degenerál, addig iratott le, míg s az egységtől $s=s_1$-ig haladt, a másik része B C pedig, ha s az s_1 értéktől $s = \infty$-ig haladt, s hogy $s = s_1$ értéknek a nemzőn hegy felelt meg, a következő eredményre jutottunk:

Általános csavarfelületünk azon részén, a mely a nemző B C részének felel meg, a hegy szomszédságában mindig van olyan B C darab, a mely a maximális hatású propeller és peripeller föltételének megfelel; az A B részén pedig legalább akkor, ha l elegendő kicsiny, — de nem a hegy szomszédságában.

II. Partiális differentiális egyenletünknek $k=o$ esetében megoldását képezte

$$12\, Z = r\, f(\varphi) + \text{const.}$$

hol az $f(\varphi)$ meghatározására ezen egyenletpár szolgált:

$$12a'')\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{c}{2}\displaystyle\int_{s_0}^{s_1} \dfrac{(-3s^4+c)\,ds}{(s^4+c)s^n\sqrt{s(-s^4+cs-c)}} \\ f(\varphi) = \sqrt{\dfrac{-s^4+cs-c}{s^4+c}}\,; \end{cases}$$

az egészleti jel alatt álló $n=2$ volt a propeller esetében és $=3$ a peripellerében. A megoldás által képviselt csavarfelületnek az $r=r_0$ henger kiterített palástjára rajzolt vezérvonalát a 2. ábra állitja elénk; a kúpcsavar csúcsa O a tengelyen $z=\text{const}$ által van meghatározva: a vezérvonal

$$-s^4+cs-c=o$$

egyenletnek két valós positiv gyöke $s=s_1$ és s_2 között terülvén el az A pont s_1 értéknek, a B pont s_2-nek és a C hegy az

$s_3 = \sqrt[4]{\dfrac{c}{3}}$ felelt meg.

Azt állitjuk, hogy a kupcsavarnak azon része, a mely $O\,C$ és O A egyenesek által határoltatik, maximális hatályú propellert, illetőleg peripellert szolgáltat; az A helyzete a c állandó értékétől függvén.

Valóban pl. a propeller *) esetében ($k=o$ lévén):

$$(1\,\S.\,5b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} = r\pi^2 s^{-3}(4\varrho^2-s) \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi} = 2\varrho\pi r s^{-2}\left(2\dfrac{\pi^2}{r^2}s^{-1}-1\right) \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial\pi^2} = r s^{-3}\left(4\dfrac{\pi^2}{r^4}-5\dfrac{\pi^2}{r^2}s+{}^2\right) \end{cases}$$

mely kifejezésekbe a szóban lévő kúpcsavarnak megfelelőleg

$$(2\,\S.\,12d_1\;12e)\quad \begin{cases} \varrho = f(\varphi) = \sqrt{\dfrac{-s^4+cs-c}{s^4+c}} \\ \dfrac{\pi}{r} = f'(\varphi) = \sqrt{\dfrac{s^5}{s^4+c}} \end{cases}$$

behelyetteztetvén, némi összevonás után ezek erednek:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} = \frac{r^3 s^2}{s^4+c}\left[\frac{4(-s^4+cs-c)}{s^4+c}-s\right]$$

*) A tétel ép úgy bizonyítandó be a peripeller esetében is.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi} = \frac{2 r^2 \sqrt{s(-s^4 + cs - c)}\,(s^4 - c)}{(s^4 + c)^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2} = \frac{c\,r\,(c - 3 s^4)}{s\,(s^4 + c)^2}.$$

E kifejezések differentiálásával lészen azután:

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} = \frac{3 r^2 s^2}{s^4 + c}\left[\frac{4(-s^4 + cs - c)}{s^4 + c} - s\right]$$

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi} = \frac{4 r \sqrt{s(-s^4 + cs - c)}\,(s^4 - c)}{(s^4 + c)^2}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2} = \frac{r\sqrt{s(-s^4 + cs - c)}}{(s^4 + c)^2}\,\frac{15 s^8 - 18 c s^4 - c^2}{c - 3 s^4}\text{*)}$$

tehát összevonás után:

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2} = \frac{r\sqrt{s(-s^4 + cs - c)}\,(3 s^4 - 5 c)}{(s^4 + c)(c - 3 s^4)}.$$

Még egyszer differentiálván r illetőleg φ szerint lészen tehát:

$$\frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} = \frac{6 r s^2}{s^4 + c}\left[\frac{4(-s^4 + cs - c)}{s^4 + c} - s\right]$$

$$\frac{d^2}{dr\,d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2} = \frac{r s^3 (-s^4 + cs - c)(3 s^4 - 5 c)}{c\,(c - 3 s^4)^2}.$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{25} + \frac{-4 s^3 + c}{2(-s^4 + cs - c)} + \frac{12 s^3}{3 s^4 - 5 c} - \frac{4 s^3}{s^4 + c} + \frac{12 s^3}{c - 3 s^4}\right\}\text{*)}$$

Jelöltessék már most a jegyére nézve megvizsgálandó menynyiség:

$$\frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} + \frac{d^2}{dr\,d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2} = \triangle V(s)$$

s tétessék benne $s_3 = \sqrt[4]{\frac{c}{3}}$; akkor alsóbb rendü végetlen nagyok elhanyagolásával:

$$\triangle V(s_3) = -\frac{12 r s_3^{\,6}(-s_3^{\,4} + c s_3 - c)(3 s_3^{\,4} - 5 c)}{c\,(c - 3 s_3^{\,4})^2 (3 s_3^{\,4} - c)}$$

*) Tekintve, hogy 12a") szerint

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{2}{c}\,\frac{(s^4 + c) s^2 \sqrt{s(-s^4 + cs - c)}}{-3 s^4 + c}$$

Ámde $- s_3^4 + c\, s_3 - c$ a vezérvonal egész hoszszában positiv (3 §.) továbbá

$$3\, s_3^4 - 5\, c = -4\, c$$

tehát negativ (mivel c positiv érték.) Ennélfogva

az $s_3 = \sqrt[4]{\frac{c}{3}}$ szomszédságában

$$\Delta\, V(s_3) \gtrless o$$

a szerint, a mint

$$s_3 \lessgtr \sqrt{\frac{c}{3}}$$

q. e. d.

A közelebbi vizsgálat azt mutatja, hogy ha c állandó bizonyos értéknél kisebb, akkor az *egész* A C ágnak maximális hatályú kupfelület felel meg; továbbá, ha $c > \frac{8^4}{3^3 5}$, akkor a B C ágon is van a B szomszédságában olyan rész, a melynek maximális hatályú kupfelület felel meg; végre bármekkora legyen is a *c* értéke, az A C ágon mindig van ilyen rész az A pont szomszédságában is.

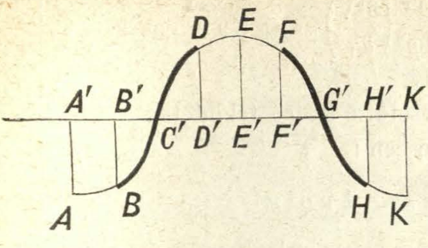
III. A 2 §. III pontjában láttuk, hogy a propellerek és peripellerek pártiális diff. egyenletének $k = \infty$ esetében általános megoldását képezi:

$$13a)\ z = c\, r \sin \varphi + \text{const.}$$

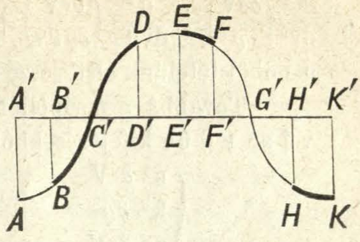
hol *c* állandót jelent, és partikuláris megoldását:

$$13a)\ z = \frac{1}{2}\left[e^{a\varphi} - e^{-a\varphi}\right]$$

hol a propeller esetére $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ és a peripeller esetére $a = \sqrt{3}$. — Miként látjuk, az általános megoldás által képviselt kúpfelület vezérvonaláúl az $r = 1$ henger palástjára rajzolt sinus vonal szolgálhat; legyen ennek egy-egy periódusa a 3a 3b idomon ábrázolva s $A'B' = B'C' = C'D' = \ldots = \frac{\pi}{4}$; jelöltessék végre a kúpfelület csúcsa O-val. Akkor be-



3a idom.



3b idom

ogjuk bizonyitani, hogy a kúpfelület azon része fog maximá- is hatályú propellert szolgáltatni, a mely az O A nemző egyenes által a 3a idom erősen rajzolt ivei útján iratik le; s hogy a kupfelület azon része fog maximális hatályú peripellert szolgáltatni, a mely a nemző egyenes által a 3b idom erősen rajzolt ivei útján iratik le.

Ugyanis a propeller esetére k=∞ tekintetbe vételével az 1 §. 5b kifejezésekből lészen

$$
13c)\left\{\begin{aligned}
&\frac{s^3}{k^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = -r s + 4 r \varrho^2 \\
&\frac{s^3}{k^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi} = 4 r^{-1} \varrho \pi \\
&\frac{s^3}{k^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} = -r^{-1} s + 4 r^{-3} \pi^2
\end{aligned}\right.
$$

Ebbe betéve a 13a ')-ből folyó ezen értékeket:

$$
13d)\quad \varrho = c \sin \varphi \quad , \quad \pi = c\, r \cos \varphi
$$

$$
s = 1 + c^2
$$

lészen közös állandó positiv szorzók elhagyásával

$$
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right) = -r\,(1 + c^2) + 4 r c^2 \sin^1 \varphi
$$

$$
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi}\right) = 4\, c^2 \sin \varphi \cos \varphi
$$

$$
\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right) = -r^{-1}(1 + c^2) + 4 r^{-1} c^2 \cos^2 \varphi
$$

következőleg a hatályosság maximumát avagy minimumát a maga jegyével eldöntő menynyiség:

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right)+\frac{d^2}{dr\,d\varphi}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\,\partial \pi}\right)+\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right)=-8\,r\,c^{2^{-1}}\cos 2\,\varphi\,;$$

a miből tételünk első része foly.

Továbbá a peripeller esetére $k=\infty$ tekintetbe vételével az 1 § 6b kifejezésekből lészen:

$$13d)\left\{\begin{aligned}\frac{s^3}{k^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}&=-r\,\pi\,s-4\,r\,\varrho^2\,\pi\\ \frac{s^3}{k^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\,\partial \pi}&=-r\,\varrho\,s+4\,r\,\varrho\,\pi^{2^{-1}}\\ \frac{s^3}{k^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}&=-3\,r^{-1}\,\pi\,s+4\,r\,\pi^{3^{-3}}\end{aligned}\right.$$

Ebbe betéve a 13d) értékeket, lészen állandó positiv közös szorzók elhagyásával

$$\left(\frac{\partial^1 V}{\partial \varrho^2}\right)=-(1+c^2)\,r\cos\varphi-4\,c^2\,r^2\cos\varphi\sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\,\partial \pi}\right)=-c\,(1+c^2)\,r\sin\varphi+4\,c^2 r\cos^2\varphi\sin\varphi$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right)=-3\,(1+c^2)\cos\varphi+4\,c^2\cos^3\varphi$$

következőleg a hatályosság maximumát avagy minimumát a maga jegyével eldöntő mennyiség:

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right)+\frac{d^2}{dr\,d\varphi}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\,\partial \pi}\right)+\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right)=-8\,c^2\cos\varphi\cos 2\,\varphi\,;$$

honnan tételünk második része foly.

---

5. §.

Határföltételek a propeller esetében, ha k bármekkora.

Láttuk, hogy azoknak a csavarfelületeknek bizonyos hengeren belül eső részei (4 §, I,) a melyek

$$10)\quad z=a\,\varphi+f\,(r)$$

egyenlet által képviseltetnek, hol *a* állandó és f (r) e két egyenlettel van defineálva:

$$10a)\left\{\begin{aligned}f(r)&=\frac{al}{2}\left[\frac{3}{2}s^2-s-\mathrm{lognat}(s-1)-2l^{-1}\,\mathrm{arctgl}s^2\right]+\mathrm{const.}\\ r&=\frac{a\,(l^2 s^4+1)}{s-2}\end{aligned}\right.$$

adott határvonalak mellett leghatályosabb propeller-felületül szolgálnak. Hogy ezen határvonalak nem lehetnek önkény szerint adva, az magától értetődik, valamint az is, hogy milyenek lehetnek csupán.

I. Gyakorlat szempontjából nagyérdekü az a kérdés: *milyen alaku felületdarab képezi a leghatályosabb propeller szárnyat, ha ezen felületdarabot egyrészről két közös tengelyü s adott sugarú körhenger, másrészről pedig két adott távolságú s a hengerek tengelyére merőleges sík vágja ki.* Feladatunkul tüzzük ki megvizsgálni, ha vajjon a 10) által képviselt csavarfelületünk nem képezi ezen gyakorlati föltételek között a leghatályosabb propeller-szárnyat.

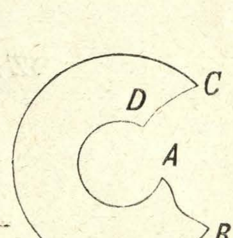
A propellerfelület tengelyirányu nyomásának első variátiója, akárhogyan változó határvonalak mellett (Moigno-Lindelöf »calcul des variations«-ban használt jelölésekkel élve) ez:

$$\delta Z = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}\right]\delta z\, dr\, d\varphi$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left|_{r_0}^{r_1}\left[\frac{\partial V}{\partial \varrho}-\frac{\partial V}{\partial \pi}\frac{dr}{d\varphi}\right]\delta z\, d\varphi+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\right|_{r_0}^{r_1} V\,\delta r\, d\varphi$$

$$+\left|_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\, dr+\right|_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} V\,\delta\varphi\, dr$$

A jobb oldalon lévő egészletek határai az ABCDA görbe által (4. ábra) vannak meghatározva, mely vonal a propeller ismeretlen határvonalának (r, φ) projektióját ábrázolván, róla csak annyi ismeretes, hogy AD és BC részei adott (r_0, r_1) sugarú körök ivei. A további határföltételek ezek:



4. ábra.

1) az AD és BC köriveken $\delta r = o$ és δz önkényszerű függvénye a φ-nek;

2) az AB és CD vonalakon $\delta r = o$ és $\delta\varphi$ önkényszerü függvénye az r-nek; továbbá azon okból, mert e vonalakon

$$\Big| ^{\varphi} z = \Big| ^{r} z = \text{constans},$$

állani fog még egész terjedelmükben:

$$\Big| ^{\varphi} (\delta z + \pi\,\delta\varphi) = o$$

$$\Big| ^{r} \delta z = o$$

E határföltételek tekintetbe vételével azután:

$$16b)\ \delta Z = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}\right]\delta z\,dr\,d\varphi$$

$$+ \delta Z_1 + \delta Z'_2 + \delta Z''_2 \,,$$

hol δZ_1 alatt csupân azt a részét értvén a δZ-nek, a mely a B-C és A D körvonalokra vonatkozik, lészen

$$\delta Z_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \Big|^{r_1} \frac{\partial V}{\partial \varrho}\,\delta z\,d\varphi - \int_{\varphi'_0}^{\varphi'_1} \Big|^{r_0} \frac{\partial V}{\partial \varrho}\,dz\,d\varphi$$

továbbá $\delta Z'_2$ alatt csupán azon részét értvén a δZ-nek, a mely az A B vonalra vonatkozik, lészen

$$\delta Z'_2 = \int_{r_0,\,\varphi_0}^{r_1,\,\varphi'_0}\left[V\,\delta\varphi + \frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right]dr$$

$$= \int_{r_0,\,\varphi_0}^{r_1,\,\varphi'_0}\left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi\right]\delta\varphi\,dr$$

végre $\delta Z''_2$ alatt csupán azon részét értvén a δZ-nek, a mely a C D vonalra vonatkozik, lészen ép ugy:

$$\delta Z''_2 = -\int\limits_{r_0,\,\varphi'_1}^{r_1,\,\varphi_1} \left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi \right] \delta\varphi \, dr$$

Ezek után a szóban lévő gyakorlati kérdés eldöntésére csak az lesz megvizsgálandó, hogy a 10) egyenlet által elenyészik-e az imént kiszámitott δZ, vagyis hogy teljesednek-e általa ezek az egyenletek:

$$16c')\quad \frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi} = o$$

$$16c'')\quad \left|\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right.^{r_1} = o\,; \quad \left|\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right.^{r_0} = o$$

$$16c''')\quad V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi = o\,.$$

Ámde a 10) alatti egyenlet épen a 16c′ egyenletnek képezte megoldását; továbbá a 16c″ egyenlet ezzé lesz a 10)-nek belé helyezésével:

$$\frac{r\,f'(r)}{\left[1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = o$$

honnan $f'(r) = o$, tehát $f(r) =$ constans következvén, a 10) egyenlet ezzé válik:

$$z = a\,\varphi + b$$

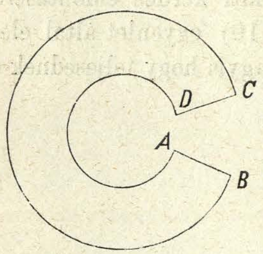
Igy tehát az archimedesi csavarfelület egyenlete a 16c′ és 16c″ egyenleteknek megfelel. De nem felel meg a 16c‴-nak, miután ebből, $z = a\,\varphi + b$ behelyezésével, az r állandó mennyiségnek adódnék ki az egész AB és C D görbéken, a mi pedig képtelenség.

Vizsgálatunk eredménye tehát az, hogy véges hosszaságú adott egyenes henger határain belől kiterjeszkedő propellerek között nem lehet a leghatályosabb se az Archimedes-féle, se a 10)-ben foglalt általánosabb csavarfelület.

II. Az imént tárgyalt kérdéshez közel áll a következő: *melyik szolgáltatja a legjobb propellerszárnyat azon felület-*

darabok között, a melyek határvonalait egy részről két közös tengelyű adott sugarú hengerre rajzolt különben ismeretlen vonalak, másrészről adott távolságú s a tengelyt merőlegesen metsző két egyenes képezik. Azt állitjuk, hogy az Archimedes-féle csavarfelületnek megfelelő része.

Valóban ez esetben a felületdarab határvonala csak abban különbözik az I. alatt tárgyaltétól, hogy mostan az (r, ϱ) projektiójának AB és CD vonalai (5. ábra) nem egyebek, mint az AD és BC körök középpontjából vont radius vektorok részei. Ennélfogva az előbbi szám alatt lefejtett δZ érték itt is állani fog s csak annyiban válik egyszerübbé, hogy az AB és CD vonalak imént kiemelt természeténél fogva a $d\varphi$ rajtok állandó lévén a $\delta Z'_2$ és $\delta Z_2''$-et alkotó ezen kifejezés :



5. ábra.

$$\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[V-\frac{\partial V}{\partial\pi}\pi\right]\delta\varphi\,dr=\delta\varphi_1\int_{r_0,\ \varphi_1}^{r_1,\ \varphi_1}\left[V-\frac{\partial V}{\partial\pi}\pi\right]dr$$

$$-\delta\varphi_0\int_{r_0\ \varphi_0}^{r_0\ \varphi_0}\left[V-\frac{\partial V}{\partial\pi}\pi\right]dr$$

úgy hogy ennek tekintetbe vételével esetünkben

$$\delta Z=-\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial\pi}\right]\delta z\,dr\,d\varphi$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\Big|^{r_1}\frac{\partial V}{\partial\varrho}\delta z\,d\varphi-\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\Big|^{r_0}\frac{\partial V}{\partial\varrho}\delta z\,d\varphi$$

$$+\delta\varphi_1 \int\limits_{r_0}^{r_0}\Bigg|^{\varphi_0} \left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi\right] dr - \delta\varphi_0 \int\limits_{r_0}^{r_1}\Bigg|^{\varphi_0} \left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi\right] dr$$

Hogy pedig ezen $\delta Z = o$ legyen, állani kell ezen egyenleteknek:

$$17a) \quad \frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi} = o$$

$$17b) \quad \begin{cases} \left|\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right|^{r_1} = o \\ \left|\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right|_{r_0} = o \end{cases}$$

$$17c) \quad \begin{cases} \int\limits_{r_0}^{r_1}\Bigg|^{\varphi_1} \left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\right] dr = o \\ \int\limits_{r_0}^{r_1}\Bigg|^{\varphi_0} \left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\right] dr = o \end{cases}$$

Ámde ezek közül az első kettőnek megoldását képezi, miként láttuk,

$$z = a\varphi + b$$

az ebben előforduló eddigelé határozatlan a pedig ugy határozható meg, hogy a 17c) alatti egyenletek is teljesüljenek, miután $z = a\varphi + b$ behelyeztetvén, a 17c) alatti egyenletek ezen egygyé válnak:

$$(k-a)\int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{r^3\,dr}{a^2+r^2} + 2a\int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{r^3(ka+r^2)\,dr}{(a^2+r^2)^2} = o\,.$$

Be van tehát bizonyitva, hogy a II. alatt kitüzött feladatot az Archimedes-féle csavarfelület megoldja.

További következtetések végett kifejtve az a meghatározására szolgáló egyenletet hozzuk ezen alakra:

$$17c')\; o = \Bigg| _{r_0}^{r_1} \frac{r^2\left[(-k+3a)a^2+(k+a)r^2\right]}{a^2+r^2} + a^2(k-3a)\log\frac{a^2+r_1^{\,2}}{a^2+r_0^{\,2}}$$

Belőle az következik, hogy adott r_0 és r_1 mellett a szóban lévő határföltételek között a legjobb propellerhez tartozó *a* más-más lesz, a mint k (azaz a tova haladás sebességének aránya a forgáséhoz) más; de következik másrészről az is, hogy az *a* értéke (azaz az Archimedes-féle csavarfelület alakja) egészen független a határoló hengerek hosszuságától.

1. Megjegyzés. A 17c') egyenletből bajos lévén az *a* értékének direkt meghatározása, az egyenletet megoldandók, czélszerübb lesz a kérdést akként formulázni, hogy adott archimedesi felületnek, adott sugarú közös tengelyü két henger közötti része milyen *k* mellett képezi a leghatályosabb propellerszárnyat, mely kérdésre az egyenlet majdnem közvetlenül felel. Ugyanis belőle

$$17c'')\; k = \frac{-\Bigg|_{r_0}^{r_1} \frac{3a^2+r^2}{a^2+r^2}r^2 + 3a^2\log\frac{a^2+r_1^{\,2}}{a^2+r_0^{\,2}}}{\Bigg|_{r_0}^{r_1} \frac{-a^2+r^2}{a^2+r^2}r^2 + a^2\log\frac{a^2+r_0^{\,2}}{a^2+r_0^{\,2}}}$$

E képlet segélyével azután az adott r_0 és r_1 értéket megtartva s *a* t változtatva a hozzájuk tartozó *k* addig kereshető, mig végre próbálgatás által az adott *k*-hoz elég közel jövünk.

2. *Megjegyzés.* Ha k = o, akkor a leghatályosabb propellerszárny szóban lévő állandói között a 17c'')-ből folyólag ennek a relatiónak kell állani:

$$o = -\Bigg|_{r_0}^{r_1} r^2\frac{3a^2+r^2}{a^2+r^2} + 3a^2\log\frac{a^2+r_1^{\,2}}{a^2+r_0^{\,2}}$$

Élve e következő jelölésekkel:

$$\frac{r_1}{a} = u_1\;;\;\frac{r_0}{a} = u_0$$ egyenletünk ez lészen:

$$17c''')\; -\frac{u_1{}^2(3+u_1{}^2)}{1+u_1{}^2}+3\log 1+u_1{}^2=-$$

$$-\frac{u_0{}^2(3+u_0{}^2)}{1+u_0{}^2}+3\log(1+4_0{}^2)$$

mely egyenletből az következik, hogy feladatunknak $k = o$ esetére csak akkor lesz megoldása, ha

$$-\frac{x(3+x)}{1+x}+3\log(1+x)=\text{constans}$$

egyenletnek legalább is 2 valós positiv gyöke van. Könnyü megmutatni, hogy ez az eset akkor és csakis akkor áll be, ha a jobb oldalon lévő állandó $\gtrless o$; ezzel azonban nem akarunk időzni. Csak azt jegyezzük még ide, hogy $r_0 = o$ lévén, a jobb oldalon álló constans $= o$ s a $17c'''$ ezzé lészen:

$$-\frac{r_1{}^2}{a^2}\left(3+\frac{r_1{}^2}{a^2}\right)+3\left(1+\frac{r_1{}^2}{a^2}\right)\log\left(1+\frac{r_1{}^2}{a^2}\right)=o$$

mely egyenletből

$$-\frac{r_1{}^2}{a^2}=1{,}8169\ldots=\text{cotg}^2\,36^0\,34'\,15''\ldots,$$

mely eredményt igy foglalhatjuk szavakba: *Bármekkora legyen is azon egyenes henger sugara és hosszúsága, a mely a propellert kivágja, az adott határföltételek mellett azon archimedesi csavarfelületből kivágott szárny fog a legnagyobb erövel megindulni, a mely a nevezett hengert*

$$\alpha = 36^0\,34'\,15''$$

emelkedésü csavarvonal szerint vágja.

[Hogy ez utóbbi esetben csakugyan maximummal (és nem minimummal) van dolgunk, az a 4. §. I. pontja végeredményéből közvetlenül foly.]

III. E §. I. száma alatt kitüzött határföltételek mellett a 10) által képviselt felületek nem képezték a propeller-probléma megoldását. Kérdezzük már mostan, hogy *legalább azon felületek között, a melyek a 10) egyenletben foglaltatnak, melyik szolgáltatja ugyanezen határföltétek mellett a hatályosabb propellerszárnyat.* Látni fogjuk, hogy azon archimedesi csavarfelület, a melynek α ja a 17c'') egyenlet által határozódik meg.

Ennek megmutatására az 1 §. 2) képletéből indulunk ki, mely szerint:

$$Z = C \int df\, v_n^2 \cos(z, n$$

s benne ezt a helyettezést teszszük

$$df \cos(v, n) = dz\, dr$$

mely által

$$Z = C \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{r_0}^{r_1} dr\, v_n^2 \frac{\cos(z_1\, n)}{\cos(v_1\, n)}\,.$$

Ezen egyenletbe azután az 1. §. 4b) alatti értékeket téve, lészen:

$$Z = C w^2 \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{r(k-\pi)^2}{\pi\left[1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}\right]},$$

honnan a 10) alatt foglalt felületek tengelyirányú nyomása lesz:

$$Z = C w^2 \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{r(k-a)^2}{a\left[1+f'(r)^2+\frac{a^2}{r^2}\right]}$$

vagy kifejtve ez:

$$18)\; Z = C w^2 (z_1 - z_0) \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{r(k-a)^2}{a\left[1+f'(r)^2+\frac{a^2}{r^2}\right]}\,.$$

Amde ezen §. I. száma elején kitüzött probléma szerint $z_1 - z_0$ (t. i. a henger hosszúsága) adva van, valamint r_0 és r_1 is. Ez okból a 18) egyenlet egyszerü megtekintéséből következik, hogy egyenlő *a* értékek mellett a Z akkor legnagyobb, ha $f'(r) = o$. Ennélfogva a 10) egyenlet által képviselt felületek között az archimedesi csavarfelület fogja a legelőnyösebb propellert szolgáltatni.

Hogy végre mekkora azon *a* érték, a mely az adott körülmények között a leghatályosabb propellerszárnyat szolgáltatja, azt megtaláljuk, ha a (8) képletbe $f'(r) = o$ értéket helyettezve az eredő Z-t az *a* szerint differentiáljuk. Az *a* meghatározására ily módon ezen egyenletet nyerjük:

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{d}{da} \frac{r\,(k-a)^2\,dr}{a\left[1+\frac{a^2}{r^2}\right]} = o$$

mely egyenlet kifejtve a (7c') alattival azonossá válik.

---

6. §.

A 10) által képviselt csavarfelületek olyan tulajdonai, a melyek által mint propeller-felületek teljesen defineálva vannak.

A 10) által képviselt felületek többek között a következő tulajdonokkal birnak:

1) felületelemük normálisának hajlása a forgás tengelyéhez csakis ezen elemhez vont radius vektor (r) függvénye; ép igy

2) a normális hajlása a radius vektor irányához

3) a normális hajlása a felületelem forgó mozgásának pillanatnyi irányához

4) a felületelem nyomás-komponense a forgás tengelye irányában

5) a felületelem nyomás-komponense a radius vektor irányában — s végre

6) a felületelem nyomás-komponense forgó mozgásának pillanatnyi irányához — csak is az *r* függvénye.

Azt állitjuk, hogy e tulajdonok mindegyike egy magában teljesen elegendő a 10) által képviselt felületeknek mint propellereknek definitiójára. A bizonyitást csak az 1) tulajdonra vonatkozólag fogjuk keresztülvinni; a bizonyitás a többi esetekben ép ugy megyen. — A bebizonyitandó tétel tehát a következő:

A propeller felületeknek csakis egy neme és pedig csakis a

10) $z = a\varphi + f(r)$

$$10a)\begin{cases} f(r)=\frac{al}{2}\left[\frac{3}{2}s^2-s-\text{lognat}(s-1)-2l\,\overset{-1}{\text{arct}}\,\text{gls}^2\right]+b \\ r=\frac{a(l^2s^4+1)}{s-1} \end{cases}$$

egyenletek által képviselt bir azon tulajdonnal, hogy normálisuk hajlása a forgás tengelyéhez csak az r függvénye. *)

A tétel igazsága el lesz ismerve, mihelyt kiderül, hogy a propeller-felületek

$$5c)\ o=\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}$$

partiális diff. egyenletének és a nevezett tulajdont kifejező

$$19a)\ F(r)=1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}$$

egyenletnek csakis a 10) 10a) által képviselt felület képezi *közös* megoldását. A közös megoldás feltalálása végett kifejtve az 5c) alatti egyenletet,

$$5d)\ o=\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}\frac{\partial\varrho}{\partial r}+2\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi}\frac{\partial\pi}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2}\frac{\partial\pi}{\partial\varrho}$$

s kiküszöbölve belőle $\frac{\partial\varrho}{\partial\pi}$ és $\frac{\partial\pi}{\partial r}$ mennyiségeket a 19a)-ból deriválással lefejtett e következő két egyenlet segélyével

$$19b)\ \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial r}=\frac{1}{2}F'(r)+\frac{\pi^2}{r^2}+\frac{\pi^2}{\varrho r^2}\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}$$

$$19c)\ \varrho\frac{\partial\pi}{\partial r}=-\pi\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}$$

rendezés után ezzé lesz:

$$5e)\ o=P-Q\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}$$

hol

$$P=\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial r}+\frac{1}{\varrho}\left[\frac{1}{2}F'(r)+\frac{\pi^2}{r^2}\right]\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}$$

$$Q=-\frac{\pi^2}{\varrho^2 r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}+\frac{2\pi}{\varrho}\frac{d^2 V}{\delta\varrho\,\delta\pi}-\frac{\partial^2 V}{\delta\pi^2}$$

Föltéve már mostan, hogy se $\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}$ se Q nem zéró, mely esetekben P se az, szorozzuk az 5e) egyenletet $\frac{d\varphi}{P}$-vel, elimi-

*.) A 10) alatti megoldásra az itt bemutatandó vizsgálat vezetett.

náljuk ki belőle a 19a) segélyével a ϱ variábilist s egészeljük az igy eredő diff. egyenletet; akkor ez ered:

$$20a)\ o = \varphi - \int_{\pi_0}^{\pi} \frac{Q}{P} d\pi + \psi_1 (r)$$

Ugyanazon föltétel mellett gondoljuk már részről az 5e)-ből a 19c utján $\frac{\partial \pi}{\partial \varphi}$ értéket eliminálva, az eredő egyenletet $\frac{d\varphi}{P}$ -vel szorozva, a szorzatból a 19a) segélyével π értéket kiküszöbölve s az igy eredő diff. egyenletet egészelve; akkor ez ered:

$$20b)\ o = \varphi + \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{Q\varrho}{P\pi} d\varrho + \psi_2 (r)$$

Ezek után a 20a egyenletet r szerint s a 20b)-t φ szerint deriválva, lészen sorban:

$$o = -\int_{\pi_0}^{\pi} \frac{\partial}{\partial r}\frac{Q}{P} - \frac{Q}{P}\frac{\partial \pi}{\partial r} + \psi_1{}^1(r)$$

$$o = 1 + \frac{Q\varrho}{P\pi}\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}$$

s mivel $\frac{\partial \pi}{\partial r} = \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}$, tehát e kettőből

$$o = -\int_{\pi_0}^{\pi} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{P}\right) d\pi + \frac{\pi}{\varrho} + \psi_1{}^1(r)$$

mely egyenletet, ϱ *eliminálása után*, π szerint differentiálva végre ez ered

$$20c)\ o = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{Q}{P} + \frac{\partial}{\partial \pi}\frac{\pi}{\sqrt{F(r) - 1 - \frac{\pi^2}{r^2}}}$$

Számitásunkból tehát az következik, hogy ha csak nem vagy

$$a)\ \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = o \\ P = o \end{cases}$$

vagy

$$\beta)\begin{cases} Q = o \\ P = o \end{cases}$$

ugy a keresett közös megoldáshoz tartozó F (r)-nek szükségképen ezen egyenlet megoldásának kell lenni:

$$\gamma)\ o = \frac{\partial}{\partial r}\frac{Q}{P} + \frac{\partial}{\partial \pi}\frac{\pi}{\sqrt{F(r) - 1 - \frac{\pi^8}{r^2}}}$$

mely utóbbi egyenletben a π nemcsak hogy határozottan *variábilis* de $\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \gtrless o$ okából) nem is lehet csupán az r függvénye; az egyenletben továbbá π r és F (r)-en kivül más változó nincs.

Az *α esetben* már mostan

$$\pi = F_1 (r)$$

tehát

$$21a)\ z = \varphi F_1 (r) + F_2 (r)$$

Ezt betéve $F(r) = 1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}$ egyenletbe, lészen rendezés után

$$o = 1 + F'_2 (r)^2 + \frac{F'_1 (r)^2}{r^2} - F(r) + 2\varphi F'_1 (r) F'_2 (r) + \varphi^2 F'_1 (r)^2$$

mely egyenlet csak ugy állhat meg, ha $F_1' (r) = o$. A 21a) megoldás következéskép ezzé lesz

$$Z = a\varphi + F_2 (r)$$

melyről tudjuk már (2. §. I. 3. §. I.), hogy csak ugy képezheti a propeller differentiális egyenletének megoldását, ha $F_2 (r) = f (r)$ (10a)

A *β) esetet* illetőleg a P = o, azaz (1. §. 5b segélyével) kifejtés és a ϱ^2 eliminálása után a belőle eredő

$$o = -r\left(\frac{F'(r)}{2} + \frac{\pi^2}{r^2}\right) + \left[-1 + \frac{2F'(r)}{F(r)}\right]\left[F(r) - 1 - \frac{\pi^2}{r^2}\right]$$

egyenlet, melynek állani kell π minden értékénél, e kettővé oszol:

$$o = -\frac{rF'(r)}{2} + \left[-1 + \frac{2F'(r)}{F(r)}\right]\left[F(r) - 1\right]$$

$$o = -r - 1 + \frac{2F'(r)}{F(r)}$$

Ámde e két egyenlet közül a másodikból:

$$2 \log c \, F(r) = \frac{r^2}{2} + r$$

mely értéket az elsőbe helyettezvén képtelenségre jövünk. — *Ennél fogva a β) eset nem vezet közös megoldásra.*

Hogy pedig végre *a γ) eset* sem vezet közös megoldásra arról igy győződünk meg. A $\frac{Q}{P}$ értéket az 5a) 5b) segélyével kiszámitva, lészen

$$20d)\ \frac{Q}{P} = \frac{\left[F(r)-1\right]\left[\frac{F(r)}{(k-\pi)^2} - \frac{1}{r^2}\right] - \frac{\pi^2 F(r)}{r^2 (k-\pi)^2}}{\left\{\left[F(r)-1\right]\left[\frac{1}{r} - \frac{2F'(r)}{F(r)}\right] + \frac{2\pi^2 F'(r)}{r^2 F(r)} + \frac{F'(r)}{2}\right\} \cdot \sqrt{F(r) - 1 - \frac{\pi r}{r^2}}}$$

mely értéket a 20c) egyenletbe helyettezve gondolva, lészen kifejtés után

$$20e)\ o = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{Q}{P} + \frac{1}{r^2\sqrt{F(r)-1-\frac{\pi^2}{r^2}}} + \frac{\pi^2}{r^4\sqrt{\left[F(r)-1-\frac{\pi^2}{r^2}\right]^3}}$$

Miután pedig az F (r) csak az r függvénye, tehát a 20e) egyenlet $\pi = \infty$ illetőleg $\pi = o$ tevése által a következő kettővé oszol

$$\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{r\left(1 - 2F(r)\right)F(r)}{2F'(r)} = r\left[F(r) - 1\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\sqrt{F(r)-1}\left[\frac{F(r)}{k^2} - \frac{1}{r^2}\right]}{\frac{F(r)-1}{r} + \left[\frac{2}{F(r)} - \frac{3}{2}\right]F'(r)} = \frac{1}{r^2\sqrt{F(r)-1}}$$

Ámde e két egyenlet közül az első független lévén a k-tól, csakis ugy állhat a másodikkal együttesen, ha legalább is a következő kettő együtt állhatna:

$$20f)\ \frac{d}{dr}\cdot\frac{F(r)\sqrt{F(r)-1}}{\frac{F(r)-1}{r}+\left[\frac{2}{F(r)}-\frac{3}{2}\right]F'(r)}=o\,,$$

$$20g)\ \frac{d}{dr}\cdot\frac{\sqrt{F(r)-1}}{r^2\left\{\frac{F(r)-1}{r}+\left[\frac{2}{F(r)}-\frac{3}{2}\right]F'(r)\right\}}=-\frac{1}{r^2\sqrt{F(r)-1}},$$

melyek közül az első k = o, a második k = ∞-gyá tevésével eredt.

Azt állitjuk már mostan, hogy e két egyenlet ellentmond egymásnak. Valójában a 20f)-ből integrálás utján ez ered:

$$20f')\ \frac{F(r)\sqrt{F(r)-1}}{\frac{F(r)-1}{r}+\left[\frac{2}{F(r)}-\frac{3}{2}\right]F'(r)}=c\,,$$

melynek segélyével a 20g) ezzé válik:

$$20g')\ \frac{d}{dr}\frac{c}{r^2F(r)}=-\frac{1}{r^2\sqrt{F(r)-1}}\,.$$

Ámde a 20f') egyenletből

$$F'(r)=\frac{F(r)\sqrt{F(r)-1}}{2-\frac{3}{2}F(r)}\left[\frac{F(r)}{c}-\frac{\sqrt{F(r)-1}}{r}\right]$$

mig a 20g')-ből

$$F'(r)=F(r)^2\left[\frac{1}{c\sqrt{F(r)-1}}-\frac{1}{rF(r)}\right]$$

mely két egyenlet ellenmondásban állván egymással, nem állhat meg együtt a 20f és 20g) sem. *Következéskép a γ) eset sem vezet közös megoldásra*

q. e. d.

II. A 10) egyenletek által képviselt csavarfelületnek végre még azt a tulajdonát is kiemeljük, hogy rajta kivül nincsen olyan propeller, mely ezen másodrendü pártiális diff. egyenletnek képezné megoldását:

$$21)\ \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=o$$

Hogy ez áll, arról könnyü meggyőződni. Valójában, ha a 21) alatti egyenlet általános egészlete

$$21a)\ z=\varphi\,F(r)+f(r)$$

a propellerek párt. diff. egyenletébe (p. az 5d alatti alakjában) behelyetteztetik, akkor egyszerü reduktiók után a propellerek egyenlete ezzé lesz:

$$o = M_0\,\varphi^3 + M_1\,\varphi^2 + M_2\,\varphi + M_3$$

hol (F_1 f_1 F_2 f_2 első illetőleg második deriváltakat jelölvén)

$$22)\left\{\begin{aligned} M_0 &= (-F_1{}^3 + 3\,r\,F_1{}^2\,T_2)\,(k - F) + 4\,r\,F_1{}^4\,, \\ M_1 &= (-3F_2^1\,f_1 + 3rF_2^1\,f_2 + 6r\,F_1\,F_2 f_1)\,(k - F) + 12r\,F_3^1\,f_1\,, \\ M_2 &= (-3F_2^1\,f_1{}^2 - 5r^{-2}F_1\,F^2 - F_1 + 6r\,F_1\,f_1\,f_2 + 3r\,F_2 f_2^1 - \\ &\quad - r^{-1}F_2\,F^2 - r\,F_2)\,.\,(k - F) + 4r\,F_1{}^2(3\,f_1{}^2 - \\ &\quad - r^{-2}\,F^2 + 2\,k\,r^{-2}F + 1\,), \\ M_3 &= \Big[-f_1{}^3 - 5r^{-2}f_1 F^2 - f_1 + rf_2(3f_1{}^2 - r^{-2}F^2 - 1)\Big]\,(k - F) \\ &\quad + 4\,r\,F_1\,f_1\,(f_1{}^2 - r^{-2}\,F^2 + 2r^{-2}\,k\,F + 1)\,. \end{aligned}\right.$$

Ebből következik, hogy a 21a) egyenlet csak ugy képezheti a propellerek párt. diff. egyenletének megoldását, ha az $f(r)$ és $F\,(r)$ meghatározása által a következő egyenletrendszer teljesülhet:

$$22a)\ M_0 = o\,;\ M_1 = o\,;\ M_2 = o\,;\ M_3 = o.$$

Azt állitjuk már mostan, hogy e négy egyenletnek csak ez az egy közös megoldása van:

$$22b)\left\{\begin{aligned} o &= F_1 \\ o &= (f_1{}^2 + 5r^{-2}F^2 + 1)\,f_1 - (3f_1{}^2 - r^{-2}F^2 - 1)\,r\,f^2 \end{aligned}\right.$$

Hogy ugyanis ezen egyenlet-pár megoldja az előbbi négyet, az közvetlenül világos, miután $F_1 = o$ által az M_0, M_1, és M_2 elenyészik, mig az $M_3 = o$ a 22b második egyenletévé válik. Hogy pedig a 22a) egyenletrendszernek ezen kivül más megoldása nincs, arról meg leszünk győződve, mihelyt kiderül, hogy az F_1 szorzó elhagyása után a 22a)-ból eredő egyenletrendszer ellenmondást tartalmaz.

Ámde az F_1 szorzó elhagyásával a 22a) egyenletek közül az első kettő ezzé lesz:

$$22c)\left\{\begin{aligned} &-F_1\,(k - F) + 4\,r\,F_1{}^2 + 3\,r\,(k - F)\,F_2 = o \\ &\Big[(-F_1 + 2rF_2)\,(k - F) + 4r\,F_1{}^2\Big]f_1 + rF_1\,(k - F)f_2 = o \end{aligned}\right.$$

Ezek közül az elsőt $r\,(k - F)\,F_1$ szorzattal osztás után egészelve, rövid összevonás után ez ered:

$$22d')\ c\,r\,(k - F)^4 = F_1{}^3$$

hol c állandót jelent. Ezen egyenlet segélyével kiküszöbölvén az F_2 második deriváltat a 22c) második egyenletből, ezen egyenletre jövünk:

$$22d'')\ (-k + F + 4 r F_1) f_1 + 3 r (k - F) f_2 = o$$

Kiszámitva azután ebből az f_2 értéket, tegyük be az $M_3 = o$ egyenletbe; lészen akkor rövid összevonás után

$$22d''')\ f_1 \left[-(4F^2+r^2)(k-F)+(-F^2+3kF+2r^2)2rF_1 \right] = o$$

Összehasonlitva már mostan a 22d') és 22d''') egyenleteket, közvetlenül világos, hogy csak ugy nem mondhatnak ellent egymásnak, ha $f_1 = o$. Miután pedig $f_1 = o$ a 22d'') egyenletet is megoldja, azért állitásunk helyességének bebizonyitására elég lesz megmutatnunk, hogy

$$22d')\ \begin{cases} F_1{}^3 = c\, r\, (k - F)^4 \\ f_1 = o \\ M_2 = o \end{cases}$$

egyenlet-rendszer együttesen nem állhat. Ámde az $M_2 = o$ egyenlet a megelőző kettő által ezzé lesz:

$$2 r F_1 [-F^2 + 3 k F + 2 r^2] = (4 F^2 + r^2) (k - F)$$

mely egyenlet a 22d') alattiak elsejével csakugyan ellenmondásban áll.

Be van tehát bizonyitva, hogy a

$$z = \varphi F (r) + f (r)$$

egyenlet csakis ugy képezheti a propeller-probléma megoldását, ha F (r) és f (r) meghatározására a 22b egyenletek szolgálnak, melyek integrálása által e kettő ered:

$$a = F (r)$$

$$c = \frac{r f'(r)}{\left[1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

hol *a* és *c* állandókat jelölnek.

q. e. d.

Megjegyzés. Martin szerint a propellerek partiális diff. egyenlete ez volna: (Erőműtani csavarfelületek, 6. lap)

$$x)\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{3c}{2 w r} \pm \sqrt{\left[\frac{3 c}{2 w r}\right]^2 + 2}\,,$$

hol $\alpha = (z, n)$ és $\frac{c}{w}$ ugyanaz, a mit mi *k*-val jelöltünk. Ha tehát ezen diff. egyenlet helyes volna, akkor megoldását e §. I. száma alatt bebizonyitott tétel szerint csak

$$10)\ z = a\,\varphi + f(r)$$

képezhetné, hol az f (r) meghatározására ezen diff. egyenlet szolgál (2. §. 10a)

$$10a)\ \text{constans} = \frac{r\,f'(r)}{\left[1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2\right]^2}$$

Ámde, miként az 1. §. 4b) alatti egyenletek elsejébő közvetlenül foly,

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2}$$

lévén, a 10)-nek behelyettezésével

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{f'(r)^2 + \frac{a^2}{r^2}}\,.$$

Hogy pedig ez az eredmény homlokegyenest ellenkezik az x) alattival, arról a 10a) egyenlet egyszerü megtekintése meggyőz. *Következéskép a propellerek Martin-féle diff. egyenlete s vele értekezésének alapja teljesen elhibázott.*

Ezen diff. egyenletéből azután mindenesetre sajátszerü következtetések utján *) azon eredményre jő, hogy a legjobb propeller-felület egyenlete ez : (Erőm. csav. 9 l.)

$$z = \varphi\left[\frac{3c}{2w}\sqrt{\left(\frac{3c}{2w}\right)^2 + 2r^2}\right].$$

mely eredmény megint a II. alatt bebizonyitott tétellel áll világos ellenmondásban.

Martin értekezése tehát alapjában, következtetés módjában és végeredményében is helytelen.

Kolozsvártt, 1875. évi octóber 10-kén.

---

*) L. Szily akadémiai birálatát a nevezett értekezés első lapjain.