

**Digitalizálta**  
**a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtár**  
**és Információs Központ**



A  
KÚPSZELETEN FEKVŐ HAT PONT

FELTÉTELI EGYENLETÉNEK  
KÜLÖNBÖZŐ ALAKJAIRÓL.

---

HUNYADY JENŐTŐL.

(Előadott a M. T. Akadémia III. osztályi ülésén 1875. nov. 8.)

---

BUDAPEST, 1876.  
A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ HIVATALÁBAN,  
(Az Akadémia épületében.)



# A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyen- letének különböző alakjairól.

HÚNYADY JENŐTŐL.

(Előadatott a III-ik osztály ülésén 1875. november 8-án)

Mais en géométrie, comme en algèbre,  
la plupart des idées différentes ne sont  
que des transformations ; etc.

(Poinsot : Sur la composition des momens  
et la composition des aires. Journ. de l'éc.  
polyt. Cah. XIII. p. 189.)

## I.

1. Azon összefüggés, mely a kúpszeletnek hat pontja között létezik, a geometriának következő tételeiben nyert kifejezést.

A régiektől származó »ad quatuor lineas« című problémában, mely Descartes óta a Pappus-féle problémának neveztetik, továbbá a Desargues-féle, Newton-Chasles-féle, Pascal-Mac-Laurin-Braikenridge-féle és Carnot-féle tételekben.

Megjegyzendő, hogy a Chasles-féle tétel Newton<sup>1)</sup> tételét magában foglalja, valamint hogy a Mac-Laurin-Braikenridge-féle tételek tulajdonképen azonosak a Pascal-féle tétellel<sup>2)</sup> és csak a kimondásban különböznek egymástól.

---

<sup>1)</sup> Philosophiae naturalis Principia mathematica. Editio Leseur et Jacquier. T. I. p. 208.) (Lásd szintén Newton Enumeratio linearum tertii ordinis című munkájának a végét, melyben a görbék leírásával foglalkozik.)

<sup>2)</sup> Chasles : Aperçu historique 2. édition, XV. Note p. 336., (6).

a) A Pappus-féle ad quatuor lineas problémában a következő tétel van kimondva <sup>3)</sup>:

»Ha a kúpszeletbe négyszögöt irunk be és a kúpszelet tetszés szerinti ötödik pontjából merőlegeseket bocsátunk a négyszög négy oldalára, úgy az átellenes oldalpárákra bocsátott merőlegések szorzatainak viszonya állandó.«

Ugyanez fog állani, ha még a kúpszeletben valamely hatodik pontot veszünk fel; és így a viszonyok állandósága miatt az ötödik és hatodik ponthoz tartozó viszonyok egymás között egyenlők.

Ha e viszonyokat tehát egymással egyenlítjük, úgy ezen egyenlet azon viszonylatot fejezi ki, melynél fogva a négyszögnek négy szögpontja és az ötödik és hatodik pont ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

b) A Desargues-féle <sup>4)</sup> tétel a következő:

»Ha a kúpszeletbe négyszögöt irunk be, úgy valamely tetszőleges szelő a négyszög négy oldalát és a kúpszeletet hat pontban metszi, a mely involutióban van.«

c) A Chasles-féle <sup>5)</sup> tétel a következő:

»Ha a kúpszeleten két pontot, a kúpszelet négy pontjával egyenesek által kötünk össze, úgy az első és második pontban találkozó négy sugár anharmonikus viszonyai egymás között egyenlők.«

d) A Pascal-féle <sup>6)</sup> »hexagrammum mysticum« tétele a következő:

»A kúpszeletbe beirt hatszögben az átellenes oldalak

<sup>3)</sup> Chasles: Aperçu historique 2 édition, Chapitre I. §. 32., p. 37—39.

<sup>4)</sup> Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra T. I. p. 186., továbbá p. 267.

<sup>5)</sup> Lásd Chasles: Rapport sur les progrès de la géométrie p. 268., melyben a szerző felemlíti, hogy e tétel általa már 1829-ben a Quetelet-féle Correspondance mathématique et physique című folyóiratban kimondatott.

<sup>6)</sup> Chasles: Aperçu hist. 2. ed., Chapitre II. p. 71., §. 17., a hol felemlítetik, hogy Pascal-nak tétele a hexagrammum mysticumról kezdetét képezi Pascal következő című értekezésének: »Essai pour les coniques«, a mely szintén a Bossut által 1779-ben rendezett kiadásában a Pascal-féle munkáknak megjelent.

egymást három pontban metszik, melyek ugyanazon egyenesben fekszenek.«

e) Ha a minden algebrai görbére és minden tetszőleges sokszögre érvényes Carnot-féle <sup>7)</sup> tantételt a kúpszeletre és a háromszögre alkalmazzuk, úgy azt ez esetben a következőképen mondhatjuk ki:

»Ha a kúpszelet síkjában valamely háromszög adva van, úgy ez utóbbi kerületének tetszés szerinti pontjából két-féle egymással ellenkező irányban haladhatunk; ha mind a két esetben azon metszékek szorzatát képezzük, melyek a háromszög oldalain egyrészt a háromszög csúcsai által, másrészt pedig az oldalak és a kúpszelet átmetszési pontjai által meghatározottnak, úgy e két szorozmány egymással egyenlő.«

2. Hogy az előbbi tételek algebrai tulajdonságaival foglalkozhassunk, úgy kell, hogy mindenekelőtt az előbbi tételeket algebrailag egyenletek által kifejezzük, a mit elérünk, hogy ha a kérdésben forgó hat pontnak az összrendezőit ismerjük.

Jelöljük tehát a hat pontot 1, 2, 3, 4, 5 és 6-tal és így az  $i$  pontnak homogén viszony-összrendezőit  $x_i, y_i, z_i$ -vel ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ), úgy ha az  $i$  pontot a  $k$  ponttal összekötjük, az  $ik$  egyenes egyenlete a következő lesz:

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

ha  $x, y, z$  a tetszés szerinti pont homogén összrendezőit jelentik.

Ha továbbá a következő jelölést használjuk:

$$\left. \begin{aligned} y_i z_k - y_k z_i &= \xi_{ik} \\ z_i x_k - z_k x_i &= \eta_{ik} \\ x_i y_k - x_k y_i &= \zeta_{ik} \end{aligned} \right\} \dots\dots (A)$$

úgy az  $ik$  egyenes homogén összrendezői:

$$\xi_{ik} \eta_{ik} \zeta_{ik}.$$

<sup>7)</sup> Géométrie de position, Paris 1808., p. 437. Théor. XXXVIII.

Vége még a következő jelölést használjuk:

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} = (i k l) \dots \dots (B)$$

3. Az a) alatti tételből kiindulva, kössük össze az 1, 2, 3 és 4 pontokat rendre egymással, úgy az 1 2, 2 3, 3 4, 4 1 egyenesek lesznek a kúpszeletbe beírt négyszög oldalai, ezeknek az egyenletei pedig a következők:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Ha most az 5 és 6 pontokból merőlegeseket bocsátunk a négyszög oldalaira és azokat az a) alatti tételben leírt módon egymáshoz viszonyítjuk, úgy a B) alatti jelölést szemben tartva, a következő egyenletet nyerjük:

$$\frac{(125) (345)}{(235) (145)} = \frac{(126) (346)}{(236) (146)},$$

mely kifejezi, hogy az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

Ugyanezen egyenletre jövünk, ha az 1 2 3 4 négyszög oldalait az 5 6 egyenessel metszük és a b) alatti Desargues-féle tétel szerint kifejezzük, hogy az 5, 6, valamint azon pontok, a melyekben az 5 6 átszelő a négyszög négy oldala általa metszetik, involutióban vannak; vagy ha az 5 és 6 pontokat az 1, 2, 3, 4 pontokkal összekötjük és Chasles szerint kifejezzük, hogy az 5 és 6 pontokban találkozó négy sugárnak az anharmonikus viszonyai egymással egyenlők.

4. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokból 15-ször lehet négyet kiválasztani, négy pont által pedig három egyszerű négyszög lévén meghatározva, világos, hogy a hatpont által 45 egyszerű négyszög van meghatározva.

Ha mind a 45 négyszögre az a) alatti tételt alkalmazzuk, úgy 45 egyenlet által lesz kifejezve azon feltétel, melynél fogva hat pont ugyanazon küpszeleten fekszik; ámde a 45 egyenlet közül, melyekre a 45 négyszög vezet, csak 15 egymástól alakban különböző van, mivel a 45 négyszög közül három mindég ugyanazon egyenletre vezet, így p. a következő négyszögek:

1234, 1536, 2546

az előbbi számban nyert feltételi egyenletre vezetnek.

A következő táblázatban mind a negyvenöt egyszerű négyszög hármankénti csoportokban van összeállítva, a mint azok ugyanazon egyenletre vezetnek.

1351 } 1245 } I. 3264 }	1235 } 1436 } II. 2456 }	1246 } 1345 } III. 2365 }
1236 } 1435 } IV. 2465 }	2345 } 2645 } V. 3651 }	1456 } 1253 } VI. 4263 }
3456 } 3152 } VII. 4162 }	1256 } 1354 } VIII. 364 }	1234 } 1536 } IX. 2546 }
2435 } 2631 } X. 4651 }	1245 } 1346 } XI. 2356 }	1562 } 1364 } XII. 5324 }
1546 } 1243 } XIII. 5263 }	1324 } 1526 } XIV. 3546 }	1326 } 1425 } XV. 3465 }

Az ezen négyszögcsoportokhoz tartozó egyenletek pedig a következők, megjegyzendő, hogy minden csoporthoz tartozó egyenlet ugyanazon arabs számmal van számozva, mint a minő római számmal a megfelelő csoport.

- (126) (134) (235) (456) — (123) (146) (256) (345) = 0 ... (1.)  
 (126) (145) (234) (356) — (124) (156) (236) (345) = 0 ... (2.)  
 (125) (136) (234) (456) — (123) (156) (245) (346) = 0 ... (3.)  
 (125) (146) (234) (356) — (124) (156) (235) (346) = 0 ... (4.)  
 (125) (134) (236) (456) — (123) (145) (256) (346) = 0 ... (5.)  
 (126) (134) (245) (356) — (124) (136) (256) (345) = 0 ... (6.)  
 (136) (145) (234) (256) — (134) (156) (236) (245) = 0 ... (7.)  
 (124) (136) (235) (456) — (123) (146) (245) (356) = 0 ... (8.)  
 (126) (145) (235) (346) — (125) (146) (236) (345) = 0 ... (9.)  
 (125) (134) (246) (356) — (124) (135) (256) (346) = 0 ... (10.)  
 (126) (135) (234) (456) — (123) (156) (246) (345) = 0 ... (11.)  
 (124) (135) (236) (456) — (123) (145) (246) (356) = 0 ... (12.)  
 (126) (135) (245) (346) — (125) (136) (246) (345) = 0 ... (13.)  
 (136) (145) (235) (246) — (135) (146) (236) (245) = 0 ... (14.)  
 (135) (146) (234) (256) — (134) (156) (235) (246) = 0 ... (15.)

5. Ha továbbá a *d)* alatti Pascal-féle tétel szerint fejezzük ki azon összefüggést, mely a kúpszelet hat pontja között létezik, úgy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokat rendre egyenesek által egymással összekötvén, az 123456 kúpszeletbe beírt hatszögöt nyerjük, a melynek oldalai

$$\begin{array}{rcl} 12 & \text{és} & 45 \\ 34 & \text{»} & 61 \\ 56 & \text{»} & 23 \end{array}$$

és ezeknek homogén összrendezői a 2. szám A) alatti jelöléseknél fogva a következők:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_{12}, \eta_{12}, \zeta_{12}, \\ \xi_{34}, \eta_{34}, \zeta_{34}, \\ \xi_{56}, \eta_{56}, \zeta_{56}, \end{array} \right\} \quad \text{és} \quad \left. \begin{array}{l} \xi_{45}, \eta_{45}, \zeta_{45}, \\ \xi_{61}, \eta_{61}, \zeta_{61}, \\ \xi_{23}, \eta_{23}, \zeta_{23}, \end{array} \right\}$$

és így azon feltétel, hogy az 123456 hatszög szembenfekvő oldalai egymást három pontban metszik, melyek ugyanazon egyenesben fekszenek, a következő egyenlet által van kifejezve:

$$\left| \begin{array}{l} \eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}, \zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}, \xi_{12} \eta_{45} - \xi_{45} \eta_{12} \\ \eta_{34} \zeta_{61} - \eta_{61} \zeta_{34}, \zeta_{34} \xi_{61} - \zeta_{61} \xi_{34}, \xi_{34} \eta_{61} - \xi_{61} \eta_{34} \\ \eta_{56} \zeta_{23} - \eta_{23} \zeta_{56}, \zeta_{56} \xi_{23} - \zeta_{23} \xi_{56}, \xi_{56} \eta_{23} - \xi_{23} \eta_{56} \end{array} \right| = 0,$$

a mely az előrebocsátottak szerint egyszersmind azon feltételt fejezi ki, hogy az 123456 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

6. Ismeretes, hogy hat pont által hatvan egyszerű hatszög van meghatározva és mindegyik hatszögnek szögpontjai az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok lesznek.

Kössük össze tehát a már nevezett pontokat egy bizonyos rendben, feltévén, hogy ily módon az  $iklmnp$  hatszögöt nyerjük, a hol megjegyzendő, hogy  $iklmnp$  az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok felcseréléseinek bizonyos complexióját jelenti.

Legyenek továbbá az  $i, k, l, m, n, p$  pontok homogén összrendezői a következők:

$$\begin{aligned} x_i, & y_i, & z_i \\ x_k, & y_k, & z_k \\ x_l, & y_l, & z_l \\ x_m, & y_m, & z_m \\ x_n, & y_n, & z_n \\ x_p, & y_p, & z_p \end{aligned}$$

úgy az

$$\begin{aligned} ik & \text{ és } mn \\ lm & \quad pi \\ np & \quad kl \end{aligned}$$

oldalak homogén összrendezői az A) alatti jelölésnél fogva a következők lesznek:

$$\begin{aligned} \xi_{ik}, \eta_{ik}, \zeta_{ik} & \text{ és } \xi_{mn}, \eta_{mn}, \zeta_{mn}, \\ \xi_{lm}, \eta_{lm}, \zeta_{lm} & \text{ » } \xi_{pi}, \eta_{pi}, \zeta_{pi}, \\ \xi_{np}, \eta_{np}, \zeta_{np} & \text{ » } \xi_{kl}, \eta_{kl}, \zeta_{kl}. \end{aligned}$$

Azon feltételi egyenlet pedig, a mely kifejezi, hogy az  $iklmnp$  hatszög szembenfekvő oldalai egymást három pontban metszik, a melyek ugyanazon egyenesben fekszenek, jelenleg a következő lesz:

$$\begin{vmatrix} \eta_{ik} \zeta_{mn} - \eta_{mn} \zeta_{ik}, & \zeta_{ik} \xi_{mn} - \zeta_{mn} \xi_{ik}, & \xi_{ik} \eta_{mn} - \xi_{mn} \eta_{ik} \\ \eta_{lm} \zeta_{pi} - \eta_{pi} \zeta_{lm}, & \zeta_{lm} \xi_{pi} - \zeta_{pi} \xi_{lm}, & \xi_{lm} \eta_{pi} - \xi_{pi} \eta_{lm} \\ \eta_{np} \zeta_{kl} - \eta_{kl} \zeta_{np}, & \zeta_{np} \xi_{kl} - \zeta_{kl} \xi_{np}, & \xi_{np} \eta_{kl} - \xi_{kl} \eta_{np} \end{vmatrix} = 0 \dots (16)$$

ezen egyenlet által pedig szintén ki van fejezve, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

A mint ezen egyenletben az  $i, k, l, m, n, p$  számoknak mindazon értékeket adjuk, a melyek a lehetséges hatvan egyszerű hatszöghöz tartoznak, úgy ez egyenletből hatvan alakilag egymástól egészen különböző egyenletre jövünk, a melyek a különböző hatszögekéből erednek.

7. Ha az 1 és 2, 3 és 4, valamint 5 és 6 pontokat egyenesek által kötjük össze, továbbá a 34 és 56, 56 és 12, 12 és 34 oldalak átmetszési pontjait  $A, B, C$ -vel jelöljük, úgy az  $e$ ) alatti Carnot-féle tautétel a következő egyenletben:

$$\frac{A5}{A3} \cdot \frac{A6}{A4} \cdot \frac{B1}{B5} \cdot \frac{B2}{B6} \cdot \frac{C3}{C1} \cdot \frac{C4}{C2} = 1.$$

nyer algebrai kifejezést.

Az ezen egyenletben előforduló viszonyokat az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok összrendezői által fejezhetjük ki. Bocsássunk e célból az 1 és 2 pontokból a 34 és 56 oldalakra, a 3 és 4 pontokból az 56 és 12 oldalakra, végre pedig az 5 és 6 pontokból az 12 és 34 oldalakra merőlegeseket, úgy az előbbi egyenletben előforduló viszonyokat ezen merőlegések viszonyai által fejezhetjük ki, ezen merőlegeseket pedig ismét kifejezhetjük a kérdéses pontok összrendezői által, mi által a (B) alatti jelölést szemben tartva, az előbbi egyenlet a következőbe megy át:

$$\frac{(345)(346)(156)(256)(123)(124)}{(356)(456)(125)(126)(134)(234)} = 1.$$

vagy azt még rendezve:

$$(125)(126)(134)(234)(356)(456) - (123)(124)(156)(256)(345)(346) = 0 \dots (17.)$$

Megfontolván továbbá, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok által nem csak egy oly háromszög van meghatározva, melynek oldalai mind a hat ponton keresztül mennek, hanem kétszer annyi háromszög, mint a mennyi

hatszög, úgy belátható, hogy a (17) alatti egyenletből a számok bizonyos felcserélései által még más 119 egymástól alakilag különböző egyenlet következik. A 17) alatti egyenlet tehát tulajdonképen 120 egyenletnek a képviselője.

## II.

8. Az előbbieken láttuk, hogy azon összefüggés, mely a kúpszelet hat pontja között létezik, a Pappus, Desargues és Chasles, valamint a Pascal és Carnot-féle tantételekben nyerte geometriai kifejezését.

Ha ugyanezen tantételeket algebrailag egyenletek által fejezzük ki, úgy az első három ugyanazon 15 egyenletre [(1—(15 alatti egyenletek)], a Pascal-féle tétel 60 egyenletre [(16 alatti egyenlet], végre pedig a Carnot-féle tétel 120 egyenletre [(17 alatti egyenlet] vezetett. Így tehát összesen 195 egyenletet nyerünk, melyek egymástól alakilag különböznek.

Az említett 195 egyenletre, melyek mindnyájan ugyanazon geometriai feltételt fejezik ki, a geometria vezetett, ha tehát az algebra hátramaradni nem akar, úgy kell, hogy tisztán algebrailag mutassuk ki azon összefüggéseket, a melyek a 195 egyenletek között léteznek.

Az említett algebrai összefüggések kipuhatólása képezi ez értekezés főfeladatát.

9. A kérdésben forgó összefüggések felkeresésére a 16) alatti egyenletnek bal oldalát  $\Delta_{iklmnp}$ -vel jelöljük és ugyanezen függvény azon különös esetéből indulunk ki, a melyben az  $iklmnp$  számsor az 123456 complexio által pótoltatik. Ennélfogva tehát a következő egyenlet:

$$A_{123456} = \begin{vmatrix} \eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}, & \zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}, & \xi_{12} \eta_{45} - \xi_{45} \eta_{12} \\ \eta_{34} \zeta_{61} - \eta_{61} \zeta_{34}, & \zeta_{34} \xi_{61} - \zeta_{61} \xi_{34}, & \xi_{34} \eta_{61} - \xi_{61} \eta_{34} \\ \eta_{56} \zeta_{23} - \eta_{23} \zeta_{56}, & \zeta_{56} \xi_{23} - \zeta_{23} \xi_{56}, & \xi_{56} \eta_{23} - \xi_{23} \eta_{56} \end{vmatrix} \dots (18).$$

képezi kiindulási pontunkat.

10. A  $A_{123456}$  determinánsnak az előbbi alakjától lényegesen különböző alakokat adhatunk; ezen új alakokat nyerjük, ha a nevezett determinánst bizonyos tényezőkkel szorozzuk.

Szorozzuk a  $A_{123456}$  determinánst rendre a következő kilencz determinánssal:

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix},$$

úgy a szorzások eredményei a következők lesznek:

$$A_{123456} \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} \dots (19)$$

$$\mathcal{A}_{123456} \begin{vmatrix} \zeta_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \zeta_{31} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \zeta_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{vmatrix} \dots \dots (20.)$$

$$\mathcal{A}_{123456} \begin{vmatrix} \zeta_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \zeta_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \zeta_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \dots \dots (21.)$$

$$\mathcal{A}_{123456} \begin{vmatrix} \zeta_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \zeta_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \zeta_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \dots \dots (22.)$$

$$\mathcal{A}_{123456} \begin{vmatrix} \zeta_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \zeta_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \zeta_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \dots \dots (23.)$$

$$\mathcal{A}_{123456} \begin{vmatrix} \zeta_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \zeta_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \zeta_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix} \dots \dots (24.)$$

$$\mathcal{A}_{123456} \begin{vmatrix} \zeta_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \zeta_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \zeta_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix} \dots \dots (25.)$$

$$\mathcal{A}_{123456} \begin{vmatrix} \zeta_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \zeta_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \zeta_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix} \dots \dots (26.)$$

$$\mathcal{A}_{123456} \begin{vmatrix} \zeta_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \zeta_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \zeta_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \dots \dots (27.)$$

a mely kifejezésekben az  $a_1 a_2 a_3$ -sal mennyiségek értékei a következő táblázatban vannak összeállítva:

$$a_1 = \xi_{12} (\eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}) + \eta_{12} (\zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}) + \zeta_{12} (\xi_{12} \eta_{45} - \zeta_{45} \eta_{12}) = 0.$$

$$a_2 = \xi_{12} (\eta_{34} \zeta_{61} - \eta_{61} \zeta_{34}) + \eta_{12} (\zeta_{34} \xi_{61} - \zeta_{61} \xi_{34}) + \zeta_{12} (\xi_{34} \eta_{61} - \xi_{61} \eta_{34}) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \xi_{12} (\eta_{56} \zeta_{23} - \eta_{23} \zeta_{56}) + \eta_{12} (\zeta_{56} \xi_{23} - \zeta_{23} \xi_{56}) + \zeta_{12} (\xi_{56} \eta_{23} - \xi_{23} \eta_{56}) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

$$b_1 = \xi_{34} (\eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}) + \eta_{34} (\zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}) + \zeta_{34} (\xi_{12} \eta_{45} - \xi_{45} \eta_{12}) = \begin{vmatrix} \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix}$$

$$b_2 = \xi_{34} (\eta_{34} \zeta_{61} - \eta_{61} \zeta_{34}) + \eta_{34} (\zeta_{34} \xi_{61} - \zeta_{61} \xi_{34}) + \zeta_{34} (\xi_{34} \eta_{61} - \xi_{61} \eta_{34}) = 0.$$

$$b_3 = \xi_{34} (\eta_{56} \zeta_{23} - \eta_{23} \zeta_{56}) + \eta_{34} (\zeta_{56} \xi_{23} - \zeta_{23} \xi_{56}) + \zeta_{34} (\xi_{56} \eta_{23} - \xi_{23} \eta_{56}) = \begin{vmatrix} \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \xi_{56} (\eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}) + \eta_{56} (\zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}) + \zeta_{56} (\xi_{12} \eta_{45} - \xi_{45} \eta_{12}) = \begin{vmatrix} \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix}$$

$$c_2 = \xi_{56} (\eta_{34} \zeta_{61} - \eta_{61} \zeta_{34}) + \eta_{56} (\zeta_{34} \xi_{51} - \zeta_{61} \xi_{34}) + \zeta_{56} (\xi_{34} \eta_{61} - \xi_{61} \eta_{34}) = \begin{vmatrix} \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \xi_{56} (\eta_{56} \zeta_{23} - \eta_{23} \zeta_{56}) + \eta_{56} (\zeta_{56} \xi_{23} - \zeta_{23} \xi_{56}) + \zeta_{56} (\xi_{56} \eta_{23} - \xi_{23} \eta_{56}) = 0.$$

$$a'_1 = \xi_{45} (\eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}) + \eta_{45} (\zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}) + \zeta_{45} (\xi_{12} \eta_{45} - \xi_{45} \eta_{12}) = 0$$

$$a'_2 = \xi_{45} (\eta_{34} \zeta_{61} - \eta_{61} \zeta_{34}) + \eta_{45} (\zeta_{34} \xi_{61} - \zeta_{61} \xi_{34}) + \zeta_{45} (\xi_{34} \eta_{61} - \xi_{61} \eta_{34}) = \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$a'_3 = \xi_{45} (\eta_{56} \zeta_{23} - \eta_{23} \zeta_{56}) + \eta_{45} (\zeta_{56} \xi_{23} - \zeta_{23} \xi_{56}) + \zeta_{45} (\xi_{56} \eta_{23} - \xi_{23} \eta_{56}) = \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

$$b'_1 = \xi_{61} (\eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}) + \eta_{61} (\zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}) + \zeta_{61} (\xi_{12} \eta_{45} - \xi_{45} \eta_{12}) = \begin{vmatrix} \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix}$$

$$b'_2 = \xi_{31} (\eta_{34} \zeta_{61} - \eta_{61} \zeta_{34}) + \eta_{61} (\zeta_{34} \xi_{61} - \zeta_{61} \xi_{34}) + \zeta_{61} (\xi_{34} \eta_{61} - \xi_{61} \eta_{34}) = 0$$

$$b'_3 = \xi_{61} (\eta_{56} \zeta_{23} - \eta_{23} \zeta_{56}) + \eta_{61} (\zeta_{56} \xi_{23} - \zeta_{23} \xi_{56}) + \zeta_{61} (\xi_{56} \eta_{23} - \xi_{23} \eta_{56}) = \begin{vmatrix} \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

$$c'_1 = \xi_{23} (\eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}) + \eta_{23} (\zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}) + \zeta_{23} (\xi_{12} \eta_{45} - \xi_{45} \eta_{12}) = \begin{vmatrix} \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix}$$

$$c'_2 = \xi_{23} (\eta_{34} \zeta_{61} - \eta_{61} \zeta_{34}) + \eta_{23} (\zeta_{34} \xi_{61} - \zeta_{61} \xi_{34}) + \zeta_{23} (\xi_{34} \eta_{61} - \xi_{61} \eta_{34}) = \begin{vmatrix} \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$c'_3 = \xi_{23} (\eta_{56} \zeta_{23} - \eta_{23} \zeta_{56}) + \eta_{23} (\zeta_{56} \xi_{23} - \zeta_{23} \xi_{56}) + \zeta_{23} (\xi_{56} \eta_{23} - \xi_{23} \eta_{56}) = 0.$$

11. A (19)–(27) alatti egyenletekben előforduló  $a, b, c, a', b', c'$  mennyiségek, melyek maguk is determinánsok, szintén még redukálhatók.

Ha nevezetesen az  $a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2, a'_2, a'_3, b'_1, b'_3, c'_1$  és  $c'_2$  mennyiségeket rendre a következő determinánsokkal szorozzuk:

$$(126), (123), (345), (234), (456), (156), (345), (456), (126), (156), (123), (234)$$

mi által az említett mennyiségeknek értékeit a következő alakban nyerjük:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0, & a_2 = (126) (134), & a_3 = - (123) (256), \\ b_1 = - (124) (345) & b_2 = 0, & b_3 = (234) (356), \\ c_1 = (125) (456), & c_2 = - (156) (346), & c_3 = 0, \\ a'_1 = 0, & a'_2 = - (146) (345), & a'_3 = (235) (456), \\ b'_1 = (126) (145), & b'_2 = 0, & b'_3 = - (156) (236), \\ c'_1 = - (123) (245), & c'_2 = (136) (234), & c'_3 = 0. \end{array}$$

Ha végre az  $a, b, c, a', b', c'$  mennyiségeknek ezen értékeit a (19)—(27) alatti egyenletekben helyettesítjük és azok első tagjaiban előforduló (C) alatti determinánsokat rendre a következő determinánsokkal szorozzuk:

$$(345), (126), (123), (345), (126), (123), (123), (345), (456),$$

úgy az egyenlő tényezők elhagyása után a (19)—(27) alatti egyenletek a következőkbe mennek át:

$$A_{123456} = (126)(134)(235)(456) - (123)(146)(256)(345) \dots\dots (28.)$$

$$A_{123456} = (126)(145)(234)(356) - (124)(156)(236)(345) \dots\dots (29.)$$

$$A_{123456} = (125)(136)(234)(456) - (123)(156)(245)(346) \dots\dots (30.)$$

$$A_{123456} = (125)(146)(234)(356) - (124)(156)(235)(346) \dots\dots (31.)$$

$$A_{123456} = (125)(134)(236)(456) - (123)(145)(256)(346) \dots\dots (32.)$$

$$A_{123456} = (126)(134)(245)(356) - (124)(136)(256)(345) \dots\dots (33.)$$

$$A_{123456} = (136)(145)(234)(256) - (134)(156)(236)(245) \dots\dots (34.)$$

$$A_{123456} = (124)(136)(235)(456) - (123)(146)(245)(356) \dots\dots (35.)$$

$$A_{123456} = (126)(145)(235)(346) - (125)(146)(236)(345) \dots\dots (36.)$$

12. Ha továbbá a (16) alatti egyenletben  $iklmnp$  helyébe 124365 és 146325 helyettesítünk, úgy a következő egyenleteket nyerjük:

$$A_{124365} = \begin{vmatrix} \eta_{12} \zeta_{36} - \eta_{36} \zeta_{12}, & \zeta_{12} \xi_{36} - \zeta_{36} \xi_{12}, & \xi_{12} \eta_{36} - \xi_{36} \eta_{12} \\ \eta_{43} \zeta_{51} - \eta_{51} \zeta_{43}, & \zeta_{43} \xi_{51} - \zeta_{51} \xi_{43}, & \xi_{43} \eta_{51} - \xi_{51} \eta_{43} \\ \eta_{63} \zeta_{25} - \eta_{24} \zeta_{65}, & \zeta_{65} \xi_{24} - \zeta_{24} \xi_{65}, & \xi_{65} \eta_{24} - \xi_{24} \eta_{65} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots (37.)$$

és

$$A_{146325} = \begin{vmatrix} \eta_{14} \zeta_{32} - \eta_{32} \zeta_{14}, & \zeta_{14} \xi_{32} - \zeta_{32} \xi_{14}, & \xi_{14} \eta_{32} - \xi_{32} \eta_{14} \\ \eta_{43} \zeta_{51} - \eta_{51} \zeta_{43}, & \zeta_{43} \xi_{51} - \zeta_{51} \xi_{43}, & \xi_{43} \eta_{51} - \xi_{51} \eta_{43} \\ \eta_{25} \zeta_{46} - \eta_{46} \zeta_{25}, & \zeta_{25} \xi_{46} - \zeta_{46} \xi_{25}, & \xi_{25} \eta_{46} - \xi_{46} \eta_{25} \end{vmatrix} = 0 \dots \dots (38).$$

Ha pedig az ezen egyenletekben előforduló determinánsok közül az elsőt

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{51} & \eta_{51} & \zeta_{51} \end{vmatrix} \quad \text{determinánssal, a másodikat pedig} \quad \begin{vmatrix} \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{51} & \eta_{51} & \zeta_{51} \\ \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46} \end{vmatrix}$$

determinánssal megszorozzuk és e szorzatban az elemeket, melyek ismét determinánsok, szorzókra felbontjuk, úgy az egyenlő tényezők elhagyása után találjuk, hogy:

$$A_{124365} = (125)(136)(234)(456) - (123)(156)(245)(346),$$

$$A_{146325} = (125)(136)(234)(456) - (123)(156)(245)(346),$$

és így a (30) alatti egyenletnél fogva:

$$A_{124365} = A_{123456} \dots \dots (39).$$

$$A_{146325} = A_{123456} \dots \dots (40).$$

13. Szorozzuk a (37) alatti egyenletben előforduló determinánst rendre a következőkkel:

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{51} & \eta_{51} & \zeta_{51} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{24} & \eta_{24} & \zeta_{24} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{51} & \eta_{51} & \zeta_{51} \\ \xi_{55} & \eta_{55} & \zeta_{55} \end{vmatrix},$$

úgy az előbbiekhöz hasonló átalakítások segítségével találjuk, hogy:

$$A_{124365} = (125)(134)(246)(356) - (124)(135)(256)(346) \dots \dots (41).$$

$$A_{124365} = (126)(135)(234)(456) - (123)(156)(246)(345) \dots \dots (42).$$

$$A_{124365} = (124)(135)(236)(456) - (123)(145)(246)(356) \dots \dots (43).$$

$$A_{124365} = (126)(135)(245)(346) - (125)(136)(246)(345) \dots \dots (44).$$

Ha pedig a (38) alatti egyenletben előforduló determinánst rendre a következőkkel szorozzuk meg:

$$\begin{vmatrix} \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{63} & \eta_{63} & \zeta_{63} \\ \xi_{32} & \eta_{32} & \zeta_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{32} & \eta_{32} & \zeta_{32} \\ \xi_{13} & \eta_{63} & \zeta_{63} \\ \xi_{16} & \eta_{46} & \zeta_{46} \end{vmatrix},$$

úgy találjuk, hogy

$$A_{146325} = (136)(145)(235)(246) - (135)(146)(236)(245) \dots \dots (45).$$

$$A_{146325} = (135)(146)(234)(256) - (134)(156)(235)(246) \dots \dots (46).$$

Ha végre a (41)–(46) alatti egyenletekben még a (39) és (40) alattiakat is tekintetbe vesszük, úgy a következő egyenleteket nyerjük:

$$A_{123456} = (125)(134)(246)(356) - (124)(135)(256)(346) \dots \dots (47).$$

$$A_{123456} = (126)(135)(234)(456) - (123)(156)(246)(345) \dots \dots (48).$$

$$A_{123456} = (124)(135)(236)(456) - (123)(145)(246)(356) \dots \dots (49).$$

$$A_{123456} = (126)(135)(245)(346) - (125)(136)(246)(345) \dots \dots (50).$$

$$A_{123456} = (136)(145)(235)(246) - (135)(146)(236)(245) \dots \dots (51).$$

$$A_{123456} = (135)(146)(234)(256) - (134)(156)(235)(246) \dots \dots (52).$$

2 \*

14. (28)—(36), valamint a (47)—(52) egyenletekből ki-  
vehetni, hogy a (15) alatti egyenletből eredő

$$\mathcal{A}_{123456} = 0$$

egyenletet az előbbi számokban tárgyalt transformációk segít-  
ségével olyképen lehet átalakítani, hogy abból az (1)—(15)  
alatti egyenletek erednek.

Azon különféle alakok, melyekre a  $\mathcal{A}_{123456}$  függvény a  
(28)—(36) és (47)—(52) alatti egyenleteknél fogva hozható,  
bennünket még továbbá a  $\mathcal{A}_{iklmnp}$  függvények egymás közötti  
összefüggésnek kipuhatólására is képesít.

Ha t. i. észrevesszük, hogy valahányszor  $\mathcal{A}_{123456}$  két  
számot felcserélünk, úgy a már többször idézett egyenleteknél  
fogva az ez utolsó felcseréléshez tartozó  $\mathcal{A}$  értéke jegyét  
változtatja.

Mivel pedig a különböző hatszögekhez tartozó  $\mathcal{A}$ -kat,  
 $\mathcal{A}_{123456}$ -ból két-két mutató felcserélése által nyerjük, úgy az  
előbbiekből következik, hogy

$$\mathcal{A}_{iklmnp}$$

$\mathcal{A}_{123456}$ -tal vagy ugyanazon előjelű, vagy pedig az előjelben kü-  
lönböznek, a miként az

$$i k l m n p$$

complexio, vagy az első, vagy pedig a második osztályzatba  
tartozik.

Így a különböző hatszögekhez tartozó  $\mathcal{A}$  függvények,  
vagy egyenlők egymás között, vagy pedig abszolút egyenlők,  
de előjelben különbözők.

15. Hátra van még azon összefüggés kipuhatólása, a  
mely a (17) alatti Carnot-féle egyenlet és a többi egyenletek  
között létezik.

Induljunk ki e czélból ismét a (18) alatti egyenletből és  
szorozzuk azt a következő determinánssal:

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix}$$

ugy az előbbi jelöléseknél fogva lesz:

$$\mathcal{A}_{123456} \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

vagy ha az  $a, b, c$  mennyiségek értékeit helyettesítjük:

$$A_{123456} \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix} = (125)(126)(134)(234)(356)(456) - (123)(124)(156)(256)(345)(346) \dots (53.$$

a mely egyenlet kimutatja a (16) alatti egyenletből eredő

$$A_{123456} = 0$$

egyenlet és a (17) alatti egyenlet közötti összefüggést.

Hogy ha még a (18) alatti egyenletet a következő determinánssal szorozzuk:

$$\begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

úgy a következő egyenletet nyerjük:

$$A_{123456} \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_2 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix}$$

vagy ha az  $a', b', c'$  mennyiségek értékeit helyettesítjük, lesz:

$$A_{123456} \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix} = (123)(146)(156)(236)(245)(345) - (126)(136)(145)(234)(235)(456) \dots (54.$$

Hasonló módon vezethetjük  $\Delta_{iklmnp}$ -ből az  $iklmnp$  hatszöghöz tartozó Carnot-féle egyenleteket, ha  $\Delta_{iklmnp}$ -t azon determinánsokkal szorozzuk, melyek egyrészt az  $iklmnp$  hatszög

$$ik, lm, np$$

oldalak homogén összrendezőiből, másrészt pedig az

$$mn, pi, kl$$

oldalak összrendezőiből állanak.

### III.

Nem mulaszthatjuk el végre felemlíteni, hogy azon feltételt, a mely a kúpszeletnek hat pontja között létezik, még a már felsorolt módokon kívül tisztán algebrailag is nyerhetjük.

Feltéve, hogy a kúpszeletnek az egyenlete a következő:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{23} yz + 2 a_{13} xz + 2 a_{12} xy = 0,$$

úgy azon feltétel, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok közül az  $i$  pont a kúpszeleten fekszik, a következő egyenlet által van kifejezve:

$$a_{11} x_i^2 + a_{22} y_i^2 + a_{33} z_i^2 + 2 a_{23} y_i z_i + 2 a_{13} x_i z_i + 2 a_{12} x_i y_i = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

ha pedig e hat egyenletből, a melyekben az  $a$  mennyiségek egyméretűen előfordulnak, az utóbb nevezett mennyiségeket kiküszöböljük, úgy a következő feltételt nyerjük:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & z_2 x_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3 z_3 & z_3 x_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4 z_4 & z_4 x_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & z_5 x_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & z_6 x_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots (55.)$$

a mely kifejezi, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

Ennélfogva kell tehát, hogy ezen egyenlet között, valamint az (1)—(17) alatti egyenletek között szintén bizonyos összefüggések létezzenek, a mely összefüggések kipuhatólása pusztán csak az (55) alatti egyenletben előforduló determináns átalakításától függ, oly alakokra, a melyek az (1)—(17) alatti egyenletek első tagjait képezik.

A nevezett átalakítások még teljesen nem sikerültek, de mihelyt sikerülnek, nem fogom elmulasztani abbéli vizsgálatásaimat a tekintetes Akadémiának bemutatni.

Pest, 1875. október 6.

---

