A
HŐ-ELMÉLET
MÁSODIK FŐTÉTELE,
LEVEZETVE AZ ELSŐBŐL.

SZILY KÁLMÁN,
R. TAGTÓL.

(SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉS.)

(Előadta a III. osztály ülésén 1875. május 10-dikén.)

BUDAPEST, 1875.
A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALÁBAN.
(Az Akadémia bérházában)

Budapest, 1875. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

A hőelmélet második főtétele, levezetve az elsőből.

SZILY KÁLMÁN R. TAGTÓL

(Székfoglaló értekezés.)

(Előadta a III. osztály ülésén 1875. május 10.)

A magy. tud. Akadémia már két izben tüntette ki csekély személyemet, mind a kétszer érdemeimen felül. Először 1865. dec. 10-én, midőn a külföldi egyetemekről hazatérő ifjút levelező tagjai sorába választotta, és másodszor 1873. május 21-én, midőn szerény működésemet túlbecsülve, rendes tagjai közé emelt. Sem először, sem utóbb nem voltak még érdemeim, legalább elegendő érdemeim nem, hogy annyi kitünőség között méltóan foglalhassak helyet.

Kitüntetést, melyre nem szereztünk érdemet, igen nehéz megköszönni. A köszönetnél talán inkább helyén van az az igéret, hogy a meg nem érdemlett jutalmat legalább utólagosan törekszünk kiérdemelni. Fogadja a t. Akadémia e perczben, midőn mint rendes tag széket foglalok, azon igéretemet, hogy úgy, mint eddig, ezentúl is minden erőmből arra fogok törekedni, hogy a magyar tudományosságnak és ez által a m. tud. Akadémiának is tőlem telhetőleg szolgálatokat tehessek.

Székfoglaló értekezésemül — tudva azt, hogy a m. Akadémia szivesebben veszi, ha tagjai beszédek tartása helyett, inkább a maguk szaktudományának előbbre viteléről tesznek bizonyságot — székfoglalómúl egy speciális tárgyú, szaktanulmányaim körébe vágó dolgozatot választottam.

Nincs olyan elmélet s nem is lesz soha, mely a be nem bizonyitható, meg nem magyarázható alapföltevéseket, axiómákat egészen nélkülözhetné. Még a legtökéletesebb theoria is, a mathematika, mint tudva van, be nem bizonyitható, meg nem magyarázható axiómákból indul ki. — Igy van ez az elméleti természettanban is. Bármennyire fejlődjenek és tökéletesedjenek is idők jártával a physikai theoriák, mégis mindig bizonyos alap-föltevésekből, alapelvekből fognak kiindulni, melyek magukban véve meg nem magyarázhatók. *De annál tökéletesebbnek tartandó valamely elmélet, mentől kevesebb ily be nem bizonyitható alap-föltevésre van szüksége, és mentől több és mentől többféle tényt képes magába felölelni.*

A melegség mechanikai elmélete, mai állásában, két ily fundamentalis elvre, két ily főtantételre van alapítva. Az első fő elv (a Mayer-Jouleféle) nem egyéb, mint az erély megmaradása elvének, ezen universalis elvnek alkalmazása a melegségre, s közönségesen igy szokott formuláztatni:

»A munka átalakulhat melegséggé és viszont a melegség munkává; s e közben az egyik mennyisége mindig aránylagos a másik mennyiségével.«

A második fő-elv (a Carnot-Clausiusféle) nem hagyja magát oly egyszerűen kifejezni s nem is illeszthető oly könnyen egy általános physikai elv rámájába, mint az első. E második főelv, Clausius formulázása szerint, [1]) igy hangzik:

»Valahányszor melegség munkává alakul, de úgy, hogy a közbenjáró test állapotában maradandó változás nem áll be, mindannyiszor bizonyos melegmennyiségnek át is kell menni valamely melegebb testből hidegebbe, és e két melegmennyiség viszonya nem függ a közbenjáró test minőségétől, hanem csupán annak a két testnek mérsékletétől, melyek között az átmenetel történik.«

Nyilvánvaló, hogy az ily complicált tétel, a milyen ez, bármennyire egyezzék is a tapasztalati tényekkel, még sem fogadható el egyszerű axióma gyanánt. Keresni kellett valamely könnyebben kifejezhető, világosabban elképzelhető alap-

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 93. Pag. 481.

elvet, melyből azután a Carnot-Clausiusféle elv mathematikai szigorusággal levezethető legyen. És találtak is többféle ily kisegitő új elvet a főelv levezetésére.

Tartsunk egy rövid szemlét azok fölött a hypothetikus mellék-elvek fölött, melyeket a Carnot-Clausiusféle főelv levezetésére javasoltak. E hypothesiseket a könnyebb áttekintés végett két csoportba osztályozzuk. Az első csoportba sorozzuk azon hypothesiseket, melyek általában a melegségnek, mint ágensnek magaviseletére vonatkoznak, anélkül, hogy a kérdést, minő mozgás legyen a melegség? feszegetnék. A másik csoportba sorozzuk azon hypothesiseket, melyek a melegségi mozgás minőségét illetik.

Az első csoportba (a thermikus hypothesisek csoportjába) a következők sorozhatók:

1) A Clausius axiómája, [1]) melyet a berlini akadémián az 1850-ik évi február havában tartott alapvető értekezésében javasolt először s melyet utóbb több izben bővebben is kifejtett, t. i. *hogy a melegség magától sohasem megy a hidegebbről melegebbre.*«

2. A Thomsonféle axioma[2]), mely szabad forditásban igy hangzik: »*Valamely test melegségéből mechanikai munkát csak ugy nyerhetünk, ha környezetében nálánál hidegebb test is van.*«

3. A Clausius második hypothesise [3]), melyet a disgregatiora vonatkozó értekezésében állitott fel s mely igy hangzik: »*a mechanikai munka, melyet a melegség valamely test disgregatiojának változtatásában végezhet, aránylagos az absolut mérséklettel, a melynél a változás történik.*«

4) A Belpaire axiomája [4]), melyszerint *valamely végtelen kicsiny mérsékletü isothermikus transformationál a munkává alakult erély mennyisége is csak végtelen kicsiny lehet.*

Ezek ama thermikus hypothesisek, melyek a Carnot-Clausiusféle elv levezetésére tudtommal javaslatba hozattak.

Az ugyan e végből javasolt *dynamikai hypothesisek*, mely-

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 79. Pag. 368. és 500.

[2]) Edinb. Trans. XX. és Phil. mag. Ser. IV. Vol. 4.

[3]) Pogg. Ann. Bd. 116. Pag. 73.

[4]) Bulletin de l'Acad. de Belg. XXXIV.

lyek tehát a melegségi mozgás minőségére vonatkoznak, a következők:

1) Az úgy nevezett molekuláris vortexek hypothesise[1]), melyet 1850-ben Rankine állitott fel, s mely szerint a testrészecskék köralakú áramokban keringenének.

2) A keringő áramok hypothesise [2]) (circulating streams of any figure whatever), melyet ugyancsak Rankine 1851-ben fejtett ki s 1865-ben jelentékenyen egyszerüsbitett.

3) A periodikus mozgás hypothesise[3]), melyet Boltzmann 1866-ban alkalmazott a második főelv levezetésére.

4) A quasi-periodikus mozgás hypothesise[4]), melyet Clausius 1871-ben tárgyalt először s azóta több nagy értekezésben bövebben kifejtett.

Ezek azon hypothesisek, melyeket a második főelv levezetésére ekkoráig alkalmaztak. Leginkább el vannak terjedve és minthogy legplausibilisebbek, legtöbb keletre is találnak közöttük: a Clausius axiómája és a Thomsonféle axioma.

De vajjon *nem lehetne-e a második fő elvet egyenesen az első főelvből, minden további föltevés statuálása nélkül levezetni?* Ha ez sikerülhetne, úgy a hőelmélet tényleg csak egy tételre lenne alapitva, t. i. arra, melyet az erély megmaradásának universalis elve fejez ki.

E kérdés ekkoráig nemcsak hogy megoldva, de még megvizsgálva sincs igazán. Tudtommal csakis Rankine és Clausius szóltak e kérdéshez, s ezek is csakúgy mellékesen, odavetve. Rankine a Phil. Mag. IV. Ser. 7-ik kötetében a 250-ik lapon igy nyilatkozik: »most arra a következtetésre jöttem, hogy Carnot törvénye a hő elméletében nem független elv hanem mint következmény levezethető a melegség és mechanikai munka kölcsönös átalakithatóságának egyenleteiből« s hozzá teszi, hogy ezt meg is mutatta értekezése első fejezetében. Azonban elfeledi, hogy az idézett első fejezetben nagyon is hypothetikus alapra állott, midőn többek között a mérsékletet ekként értelmezte: »a mérséklet függvénye a molekulár-

---

1) Edinb. Trans. XX.

2) Edinb. Trans. for 1851. és Phil. Mag. Ser. IV. Vol. 30.

3) Sitzungsberichte der Wiener Acad. der Wiss. Bd. 53.

4) Pogg. Ann. Bd. 142.

vortexek keringési sebessége négyzetének, elosztva az atómatmospherák rugalmassági együtthatójával.« Természetes, hogy az ily complicált hypothesisre alapitott levezetést senki sem tartotta elfogadhatónak. Rankine következtetése e szerint nem egyéb mint puszta állitás, melynek bebizonyitásával adós maradt. — Clausius meg épen csak egész mellékesen érinti e kérdést azon szép előadásában, melyet a német természetvizsgálók és orvosok 41-ik gyülésén Frankfurtban tartott, midőn t. i. igy szól: »de van még egy második tétel is, mely amabban (t. i. az elsőben) nem foglaltatik benne és a melyet külön be kell bizonyitani, minthogy a két tétel együtt véve formálja azt a teljes alapot, melyen a mechanikai hőelmélet áll.« — A mint látható, Clausius nyilatkozata homlokegyenest ellenkezik Rankinével. Az egyik azt állitja — de be nem bizonyitja — hogy a második főtétel az elsőből levezethető; a másik pedig azt a véleményt fejezi ki, hogy a második főtétel nem foglaltatik benne az elsőben.

A jelen értekezés feladata e fontos kérdést tüzetesebben megvizsgálni; és megkisérteni a második főtétel levezetését az elsőből, minden további mellékhypothesis nélkül.

I.

Minden testet számtalan sok anyagi pont halmazának lehet tekinteni, melyek belső és külső erők hatása alatt, folyvást a test térfogatán belül maradva, bizonyos ismeretlen törvény szerint mozognak. E belső mozgás természetére nézve nem fogjuk magunkat semminemű hypothesishez kötni, egyedül csak azt tételezzük fel, a mi különben a hőelmélet első főelvének is alapját képezi, hogy t. i. a test részecskéi nincsenek nyugalomban, hanem valaminémű mozgásban.

E belső mozgás külső jellemzésére, vagyis a test *állapotának* hőtani meghatározására, mint tudva van, két független változó kivántatik. Nevezzük e független változókat ξ-nek és η-nak, úgy a test állapota mindaddig változatlan, mig sem ξ, sem η nem változik; mihelyt azonban akár ξ akár η, vagy mindakettő megváltozik, megváltozik egyúttal a test állapota is. (Ily állapotjelzőkül rendesen a mérsékletet és a térfogatot, vagy a nyomást és a térfogatot szokták választani.)

Gondoljunk magunknak egy változatlan állapotú testet; ξ és η tehát állandók, az időtől függetlenek. De azért a testet alkotó egyes anyagi pontok mozgási állapota pillanatról pillanatra változhatik. Szemeljünk ki a számtalan sok anyagi pont közül egyet, példaképen. Tömege legyen m; derékszögű coordinátái, az időszámitás kezdetén, vagyis a $t=o$ pillanatban legyenek: x, y, z; sebességének componensei x', y', z', gyorsulásának componensei x'', y'', z''. Már a következő pillanatban, mondjuk δt idő mulva, más lesz a helye, más a sebessége és más a gyorsulása, következéskép más lesz a mozgási erélye, valamint a helyzeti erélye is. Ép igy a többi pontoknál. Az egyes pontok mozgási faktorai változékonyak, de az egész testre kiterjedő összességükben állandók. Egy-egy pont mozgási erélye változó, de az egész test összes mozgási erélye T állandó; hasonlóképen egy-egy pont helyzeti erélye változó, de az egész test összes helyzeti erélye U állandó. *A mig tehát a test állapota változatlan,* felfogásom szerint, *mindaddig változatlan a test összes mozgási erélye is, és mindaddig változatlan a test összes helyzeti erélye is. A meddig tehát*

$$\delta\xi = o \text{ és } \delta\eta = o$$

ugyanaddig $\quad \delta T = o$

és $\quad \delta U = o.$

Fejezzük ki a két utóbbi egyenletet explicite, az egyes pontokra vonatkozó variatiók által. A föntebb megállapitott jelölések értelmében:

$$2T = \Sigma m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

tehát: $\quad \Sigma m\,(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') = o \;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$

Minthogy továbbá az oly test, melynek állapota nem változik, külső munkát nem végezhet; következik, hogy a δx, δy, δz .... elmozdulás közben végrehajtott munkák összege egyenlő lesz a helyzeti erély változásával, vagyis;

$$-\,\Sigma m\,(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = o \;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Az 1) és 2) egyenlet összekapcsolása által könnyen szert tehetünk egy 3-ik egyenletre, mely az idő variatioja és az egyes pontok helyzetének variatioja közti összefüggést fejezi ki.

Szorozzuk az 1) és 2) alatti egyenleteket *dt*-vel és adjuk őket össze:

$$\Sigma m (x' \delta x' + \ldots - x'' \delta x - \ldots) dt = o$$

a mi még, $x' \ldots$ és $x'' \ldots$ jelentésénél fogva igy is irható:

$$\Sigma m (dx\, \delta x' + \ldots - dx' \delta x - \ldots) = o$$

úgyde: $$dx' \delta x = d (x' \delta x) - x' \delta dx$$

tehát: $$\Sigma m (dx\, \delta x' + \ldots + x' \delta dx + \ldots) = d\, \Sigma m (x' \delta x + \ldots)$$

azonban: $$\delta (x' dx) = dx \delta x' + x' \delta dx$$

És igy $$\delta \Sigma m (x' dx + \ldots) = d \Sigma m (x' \delta x + \ldots)$$

vagy ha az egyenlet baloldalán dt-vel szorzunk és osztunk és 2 T föntebbi értékét figyelembe veszszük

$$\delta (2\, T\, dt) = d\, \Sigma m (x' \delta x + \ldots)$$

Tudván azt, hogy T az időtől független, határozatlan integratio által nyerjük:

$$\Sigma m (x' \delta x + \ldots) = 2\, T\, \delta t + \text{Const.}$$

Az integratio állandójának meghatározására tudjuk, hogy midőn $\delta t = o$; akkor $\delta x = o \ldots$; tehát

$$\Sigma m (x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) = 2 T . \delta t \ldots (3)$$

Az 1), 2) és 3) alatti egyenletek mindaddig érvényesek maradnak s csak is addig maradnak érvényesek, mig a test állapota változatlan.

II.

Ekkoráig a test változatlan állapotából vontunk következtetéseket; térjünk most át az állapot-változások tárgyalására.

Legyen valamely test kezdeti (változás előtti) állapota a ξ_0 és η_0 állandók által meghatározva. A test valamelyik részecskéjének tömegét jelöljük megint *m*-mel; derékszögű coordinátáit az időszámitás kezdetén, vagyis a $t = o$ pillanatban $x_0\ y_0\ z_0$-val; sebességi és gyorsulási componenseit $x'_0 \ldots$ és $x''_0 \ldots$ val. A test összes mozgási erélye legyen T_0, összes helyzeti erélye U_0. Ha a test állapota változatlan maradna, úgy T_0 és U_0 állandó levén, az egyes részecskékre vonatkozó variatiok folyvást eleget tennének az 1), 2) és 3) alatti egyenleteknek.

De a $t = o$ pillanattól fogva kezdjünk a testtel erélyt közölni. Ennek következtében a test állapota is változásnak indul. A mily mértékben több és több erélyt szállitunk a testbe; a test állapota is mindinkább megváltozik. Tegyük fel, hogy az állapot-változásának sora és rendje akként legyen szabályozva, hogy az állapotjelzők minden pillanatban eleget tegyenek az

$$\eta = f(\xi) \ldots\ldots (4)$$

egyenletnek; a mi nem jelent egyebet, mint azt, hogy az állapotváltozások egymás után következése — mondjuk az *állapot pályája* — szabatosan meg van határozva. Amint több és több erélyt szállitunk a testbe, a test állapota is tovább és tovább halad a megszabott pályán. Folytassuk az erélyszállitást mindaddig, mig a test állapotjelzői (a 4-ik egyenletnek megfelelőleg) ξ_1 és η_1 értéket vesznek föl; az eddig beszállitott erély összes mennyisége legyen Q. Az erélyközlés megszüntével, szünjék meg a test állapotának változása is; ettől fogva tehát az állapotjelzők ξ_1 és η_1 és velök együtt az ekkori mozgási erély T_1 és az ekkori helyzeti erély U_1 ismét megmaradnak a mostani értéken.

A testet átvittük tehát a (ξ_0, η_0) kezdetállapotból a változásoknak bizonyos során és rendjén végig a (ξ_1 η_1) végállapotba, és e közben közöltünk vele összesen Q mennyiségü erélyt. A szóban forgó test kezdet-állapota (ξ_0, η_0), végállapota (ξ_1 η_1) és az állapotváltozások sora és rendje (vagyis az f functio) meg lévén határozva, *a testtel közlendő összes erélymennyiség Q is egyjelentésüleg meg van határozva.* Történjék az erély szállitása akár gyorsabban akár lassabban, a beszállitandó erély összege Q állandóan ugyanaz lesz, csak a pálya minősége s annak eleje és vége ne változzék. Más szóval: a pálya kezdetpontja, végpontja és minősége által a beszállitandó erély összes mennyisége teljesen meg van határozva, ellenben *az átvitel időtartama nincs meghatározva.* Ugyanazon Q mellett az átvitel időtartama, az erélyszállitás középgyorsaságához képest, minden tetszőleges értéket fölvehet o és ∞ között. Nevezzük az átvitel időtartamát t-nek, és jegyezzük meg, hogy *t mekkorasága egészen tetszésünktől függ.*

Eszközöljük most ugyanannak a testnek átvitelét ugyanabból a (ξ_0 η_0) kezdet-állapotból ugyanabba a (ξ_1 η_1) végállapotba, de úgy, hogy az állapotváltozások mostani sora és rendje (nevezzük ezt az állapot második pályájának) az imént követett egymásutántól (az állapot első pályájától) végtelen kevéssé különbözzék, vagyis a 4-ik egyenletbeli f functio *alakja* is szenvedjen egy végtelen kis változást. És az erély-közlés most ne kezdődjék mindjárt a $t=o$ pillanatban, hanem megfelelőleg δt végtelen kis idővel később. E szerint az állapotváltozás megindulásakor az m részecskének coordinátái nem lesznek többé x_0, y_0, z_0; hanem tőlük δx_0, δy_0, δz_0-sal különbözők; ép igy a sebességi és gyorsulási componensek. S minthogy ezen δt idő alatt a test állapota még változatlan maradt, a föntebb 3)-mal jegyzett egyenlet ezen δt idő végeig még érvényes fog lenni, vagyis lesz:

$$\Sigma m\,(x'_0\,\delta x_0 + y'_0\,\delta y_0 + z'_0\,\delta z_0) = 2T_0\,\delta t \ldots . (5)$$

A δt idő végén induljon meg az erély közlése, és pedig gyorsaságára nézve akként szabályozva az előbbihez képest, hogy *a test ugyanazon t idő lefolyása alatt érkezzék a* ($\xi_1\ \eta_1$) *végállapotba,* a mennyi alatt az első pályán oda érkezett. A most közlött erély összes mennyisége legyen megfelelőleg $Q + \delta Q$.

A második pályán, melynél az állapotváltozás kezdete δt idővel későbbre esett, ennek megfelelőleg az állapotváltozás vége is δt idővel későbbre, vagyis a $t + \delta t$ időpillanatra fog esni. Ezen $t + \delta t$ időpillanatban annak a bizonyos m részecskének coordinátái, sebességi és gyorsulási componensei nem lesznek többé azok, a mik az előbbi átvitel végén, a t időpillanatban voltak, t. i. $x_1 \ldots . x'_1 \ldots .$ és $x''_1 \ldots$, hanem ezektől $\delta x_1 \ldots \delta x'_1 \ldots$ és $\delta x''_1 \ldots$ vel különbözők. Minthogy pedig egyfelől $x_1 \ldots$, másfelől pedig $x_1 + \delta x_1 \ldots$ az m részecskének ugyanazon ($\xi_1\ \eta_1$) állapothoz tartozó coordinátáit ábrázolják s egymástól csak annyiban különböznek, hogy az elsők a t időpillanatnak, az utóbbiak pedig a $t + \delta t$ időpillanatnak, felelnek meg, a föntebb 3)-mal jegyzett egyenlet ezen variatiokra is érvényes fog lenni, vagy is lesz:

$$\Sigma m\,(x_1'\,\delta x_1 + y_1'\,\delta y_1 + z'_1\,\delta z_1) = 2T_1 . \delta t \ldots . 6)$$

Az 5) és 7)-tal jegyzett egyenletek csakis az állapotváltozás kezdetére és végére vonatkoznak, s az átvitel egész folyamatára nem alkalmazhatók. Keresnünk kell tehát egy oly relatiot, mely az állapotváltozásnak akármelyik stadiumára is érvényes legyen.

Tegyük fel, hogy az állapot első pályáján a test, valamely τ idő elfolyása alatt, egy bizonyos ($\xi\ \eta$) állapotba érkezett, melyet röviden A_1 állapotnak fogunk nevezni. Ezen A_1 állapotban legyen a test összes mozgási erélye T, összes helyzeti erélye U; s az *m* részecskének coordinátái, sebességi és gyorsulási componensei $x \ldots x' \ldots$ és $x'' \ldots$

Az állapot második pályáján a test ugyancsak ezen τ idő elfolyása alatt — tehát a $\tau + \delta t$ időpillanatban — egy bizonyos ($\xi + \delta\xi$, $\eta + \delta\eta$) állapotba érkezik, melyet nevezzünk röviden A_2 állapotnak. Az A_2 állapothoz tartozó menynyiségek csak variatiok által külömböznek az A_1 állapotbeliektől. Az *m* részecske most nem lesz az $x \ldots$ helyzetben, hanem ettől elmozdulva $\delta x \ldots$ vel; sebességi és gyorsulási componensei is meglesznek változva $\delta x' \ldots$ és $\delta x'' \ldots$ vel.

Határozzuk meg már most, mennyi erélyt kellene a testtel közölni, hogy a δx, δy, δz elmozdulások által kijelölt utat követve, az A_1 állapotból az A_2 állapotba térjen át. Jelöljük e keresett erély mennyiséget $\delta\varepsilon$-nal és vegyük figyelembe, hogy $\delta\varepsilon$ összege lesz az eleven erőbeli gyarapodásnak δT-nek és azon munkának, melyet a test az alatt végez, mig részecskéi a működő erők ellenében, az A_1-nek megfelelő helyzetükből az A_2-höz tartozó helyzetbe jutnak; és igy

$$\delta\varepsilon = \delta T - \Sigma m\,(x''\,\delta x + y''\,\delta y + z''\,\delta z)$$

vagy még:

$$\delta\varepsilon = \Sigma m\,(x'\,\delta x' + y'\delta y' + z'\,\delta z' - x''\,\delta x - y''\,\delta y - z''\,dz) \ldots \quad 7)$$

Jobbról-balról dt-vel szorozva és $x' \ldots x''$ jelentését tekintetbe véve:

$$\delta\varepsilon\,.\,dt = \Sigma m\,(dx\,\delta x' + \ldots\ldots - dx'\,\delta x - \ldots.)$$

úgyde: $\quad dx'\,\delta x = d\,(x'\,\delta x) - x'\delta\,dx$

és $\quad \delta\,(x'\,dx) = dx\,\delta x' + x'\,\delta dx$

tehát: $\quad \delta\varepsilon\,.\,dt = \delta\Sigma m\,(x'dx + \ldots.) - d\Sigma m\,(x'\delta x + \ldots.)$

Integráljuk ez egyenletet a kezdet és végállapotnak megfelelő határok között, és vegyük figyelembe, hogy az időszámitás kezdetén a test még a kezdeti állapotban, a t pillanatban pedig már a végállapotban van:

$$\int_0^t \delta\varepsilon\,dt = \delta\int_0^{t_1} \Sigma m(x'dx + ..) - \Sigma m(x_1{}'\delta x_1 + ..) - \Sigma m(x_0{}'\delta x_0 + ..) \ldots$$

A jobb oldalon levő integrált transformálva, s az 5) és 6) alatti egyenleteket tekintetbe véve:

$$\int_0^t \delta\varepsilon \,.\, dt = 2\delta \int_0^t T\,dt - 2\,T_1\,\delta t + 2\,T_0\,\delta t$$

Minthogy T_1 és T_0 állandók, az egyenlet még igy is irható:

$$\int_0^t \delta\varepsilon \,.\, dt = 2\delta \int_0^t (T - T_1 + T_0)\,dt \;.\;.\;.\;. \;(9)$$

Azonban *az átvitel időtartama még tetszőlegesen választható;* a 9) alatti egyenlet igaz marad, akár tartson az átvitel hosszabb, vagy rövidebb ideig.

A $\delta\varepsilon$ erélymennyiség egy bizonyos megszabott átvitelnél valami függvénye az időnek. De az átvitel ugyanabból a kezdetállapotból ugyanabba a végállapotba és ugyanazon a pályán, a mi az időt illeti, egész tetszőlegesen eszközölhető; e szerint $\delta\varepsilon$, az erélyközlés gyorsaságához képest, más meg más függvénye az időnek. Az erélyközlés gyorsaságát kellően választva,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \delta\varepsilon \,.\, dt = \overline{\delta\varepsilon}$$

minden tetszőleges, végtelen kis értéket fölvehet.

Szabjuk meg az erélyközlés gyorsaságát akként, hogy az átvitel időtartama eleget tegyen a következő feltételi egyenletnek:

$$\int_0^t \delta\varepsilon \,.\, dt = t \,.\, \delta Q \;.\;.\;.\;. \;(10)$$

hol δQ azon erély mennyiséget jelenti, a mennyivel a második pályán többet kellett a testbe szállitani, mint az első pályán.

Az átvitelnek ezt a bizonyos, meghatározott időtartamát jelöljük megkülönböztetés végett i-vel; úgy:

$$\frac{1}{i}\int_0^i \delta\varepsilon \,.\, dt = \delta Q$$

és:

$$i\delta Q = 2\,\delta \int_0^i (T - T_1 + T_0)\,dt$$

vagy ha T középértékét ezen i idő alatt $\overline{T}$-vel jelöljük, és rövidség okáért:

$$\overline{T} - T_1 + T_0 = \mathfrak{T}$$

teszszük, úgy $\quad i\delta Q = 2\delta(i\mathfrak{T})$

és ebből: $\quad \frac{\delta Q}{\mathfrak{T}} = 2\delta \log(i\mathfrak{T}) \dots (12)$

A 12) alatti egyenlet alakjára nézve tökéletesen megegyez azon egyenlettel, melyre egy nem régiben közzétett dolgozatomban Hamilton tételét *) visszavezettem. Akkoriban azon föltevésből indultam ki, hogy

$$\Sigma m(x'_1\delta x_1 + \dots) = \Sigma m(x_0'\delta x_0 + \dots)$$

E föltevést elejtve, mint látjuk, az ottani $\overline{T}$ helyébe $\mathfrak{T}$ lép. A jelen levezetésben Hamilton azon föltevését is mellőztem, hogy a működő erőknek erőfüggvényök legyen.

Alkalmazzuk már most a 12) alatti egyenletet az egyik pályából a másikba átlépő állapotok helyett azon állapotváltozásokra, melyek egy-ugyanazon pálya mentében fordulnak elő. A variatio jele helyett a differentiatio jelét téve:

$$\frac{dQ}{\mathfrak{T}} = 2\,d\log(i\mathfrak{T}) \dots (13)$$

Mindaddig, míg a test állapotát nem változtatja, $Q = o$ és $\quad \mathfrak{T} = T_0 - T_0 + T_0 = T_0$

a miből következik, hogy ugyanaddig i is állandó. A test minden $(\xi\eta)$ állapotára i-nek és $\mathfrak{T}$-nek bizonyos meghatározott értéke van, mely mindaddig változatlan, mig a test ugyanabban az állapotban van. Más állapotba térve, i-nek és $\mathfrak{T}$-nek más értéke lesz, mely azonban megint mindaddig állandó, mig a test ebben az állapotban van.

Integráljuk már most a 13.) alatti kifejezést bizonyos kezdet- és végállapotnak megfelelő határok között

$$\int_0^{\prime} \frac{dQ}{\mathfrak{T}} = 2\log\frac{(i\mathfrak{T})'}{(i\mathfrak{T})_0}$$

Terjeszszük ki az integrált egy egész körfolyamra, úgy

$$\int \frac{dQ}{\mathfrak{T}} = o \dots\dots (14)$$

---

*) A Hamilton-féle elv és a mechanikai hőelmélet második főtétele. (Értekezések a mathem. tudományok köréből. I. kötet. X. szám.)

Ezen egyenlet tökéletesen megfelel azon

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

egyenletnek, melyet Clausius 1854-ben állitott fel, emlitett axiómája segitségével. A különbség, mely a két kifejezés között mutatkozik, csak látszólagos. Clausiusnál T az absolut mérsékletet, nálunk $\mathfrak{T}$ voltaképen az összes mozgási erélyt jelenti. Ha ugyanis fölteszszük, a mi különben magától értetődő, hogy azalatt mig a test dQ erélymennyiséget vesz fel, összes mozgási erélye is csak végtelen csekélylyel változhatik, azonnal következik, hogy $\mathfrak{T}$ nem egyéb, mint az összes mozgási erély azon pillanatban, midőn a dQ a testtel közöltetett. Nálunk tehát T a test összes mozgási erélyét; Clausiusnál pedig az absolut mérsékletet jelenti; e két mennyiség azonban kétségtelenül aránylagos egymással. Kellően választva a mértékegységeket, az absolut mérsékletet ekként defineálhatjuk tehát: *a test tömegegységének összes mozgási erélye.*

Vizsgálodásainkban igyekeztünk magunkat távol tartani minden hypothesistől; levezetéseinket egyedül az erély megmaradása elvére alapitottuk. Mindezeknél fogva azt hiszszük, sikerült megmutatnunk, hogy *a hőelmélet második főtétele az elsőből, minden további hypothesis nélkül is levezethető.*