ÉRTEKEZÉSEK

A

MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

NEGYEDIK KÖTET.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

BUDAPEST, 1877.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1877. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

TARTALOM.

AZ 1870. IV. SZ.

ÜSTÖKÖS

DEFINITIV PÁLYASZÁMÍTÁSA.

SCHULHOF LIPÓT

BÉCSI CSILLAGDAI SEGÉDTŐL.

(Beterjesztetett a III. osztály ülésén 1874. november 9.)

BUDAPEST, 1875.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALÁBAN.

(Az Akadémia bérházában.)

Budapest, 1875. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

Az

1870. IV. sz. üstökös definitiv pályaszámítása.

SCHULHOF LIPÓT, bécsi csillagdai segédtől.

(Beterjesztetett a III. osztály ülésén 1874. november 9.)

Az 1870. IV. sz. üstökös Dr. Winnecke Ágost tanár által Karlsruhéban fedeztetett fel 1870. november 23-dikán s kedvezőtlen viszonyok következtében csak hét napig volt észlelhető. Ezen rövid időköz daczára meglehetős pontossággal határozhatók meg pályaelemei, ha a pályát képviselő kúpszelettől eltekintünk, mert ez tökéletesen határozatlan marad, úgy hogy a parabolán kivül mind a hyperbola, mind a rövid keringésű ellipsis tesz eleget a csekély számú vizsgálatoknak. Én tehát a parabolánál fogok legvalószinübb elemrendszeremmel megállapodni, de mindamellett kutatásaimat ki fogom terjeszteni az excentricitás tagjára is, mivel igen érdekes s tanulságos kimutatni, hogy az önkénynek mily nagy tere van a kúpmetszet meghatározásánál. Ha netalán később ujra megjelenne az üstökös, hajtalékos elemei elegendők lesznek az azonosság felismerésére; mi pedig régebben megjelenteket illet, csupán az 1337-diki nagy üstökös mutat vele elemeiben némi összegyezést, de a kettőnek physikai megjelenése épenséggel szól azonosság ellen, mert mig amaz igen fényes, hónapokig szabad szemmel látható tárgy volt, emez a vizsgálóktól mint meglehetős világos, 3 percznyi átmérővel s központi sürüsödéssel biró gömbölyded tárgy iratik le.

Számításaim kiindulási pontjául nem használhatván egyikét sem az eddig megjelent elemrendszereknek, kénytelen voltam előleges elemeket levezetni.

Rendelkezésemre a következő észleletek állottak:

Sz.	1870.		Megfigyelési hely	helyi idő	α app.	log. f. par.	δ app.	log. f. par.	*
1	november	23.	Karlsruhe	$17^h52^m15^s$	$12^h42^m33^s48$	9.389_n	—3°29′20″.1	0·841	1
2	»	24.	Bécs	16 44 50	12 57 11.97	9.530_n	—3 46 37 . 3	0·831	2
3	»	24,	»	16 45 55	12 57 12.92	9.529_n	—3 46 43 . 5	0·832	2
4	»	24.	Karlsruhe	17 46 16	12 58 17.07	9.431_n	—3 47 54 . 1	0·841	3
5	»	25.	Krakó	16 39 13	13 14 24.25	9.534_n	—4 6 9 . 4	0·840	4
6	»	26.	»	17 7 13	13 34 4.40	9.522_n	—4 27 36 . 5	0.842	5
7	»	26.	»	17 36 54	13 34 29.55	9.485_n	—4 27 52 . 2	0.845	5
8	»	26.	Lipcse	17 51 41	13 35 7.25	9.456_n	—4 28 49 . 3	0.857	5
9	»	28.	Bonn	17 46 25	14 19 35.71	9.512_n	—5 13 10 . 7	0.848	6
10	»	28.	Hamburg	18 23 8	14 20 0.82	9.446_n	—5 13 40 . 2	0.866	7
11	»	29.	Bonn	17 48 1	14 43 57.24	9.533_n	—5 34 34 . 9	0.846	8
12	»	29.	»	18 4 20	14 44 13.63	9.517_n	—5 34 57 . 8	0.848	9
13	»	30.	Hamburg	17 56 27	15 9 3.31	9.516_n	—5 54 10 . 0	0.860	10
14	»	30.	»	18 16 10	15 9 25.13	9.500_n	—5 54 33 . 1	0.863	10

Ezen észleleteket a krakóiak kivételével, melyeket Dr. Karlinski igazgató ur levélben sziveskedett velem közölni, az Astr. Nachrichten 77. s 78. kötetéből meritettem s az eredetieket csak annyiban módositottam, a mennyiben az összehasonlitási csillagokat némileg máskép vettem fel mint a vizsgálók. Ugyanis a csillagok positióit 1870 elejére viszonyitva igy találtam Piazzi, Weisse, Taylor, Rümker, Santini, Lamont, Argelander, Schjellerups és Yarnall csillagjegyzékeiben s az »Astr. Nachr.« közlönyben.

Sz.			α 1870·0	δ 1870·0	súly
1.	Lam.	1449	$12^h40^m52^s70$	—3°58′12.″3	1
	Schj.	4610	52 49	11·3	2
	felvétetett		12 40 52·56	—3 58 11·6	
2.	W. I.	891	12 53 2·60	—3 43 40·0	
3.	Lam.	1478	12 56 18·52	—3 18 42·5	1
	Schj.	4710	18·57	44·2	2
	A. N. Nr.	1925	18·56	43·8	2
	felv.		12 56 18·56	—3 18 43·7	
4.	Rümk.	4284	13 15 27·65	—3 58 54·5	1
	Sant.	282	27·67	56·0	2
	A. N. Nr.	1255	27·64	55·9	2
	Yarnall	5533	27·61	51·3	2,1
	felv.		13 15 27·64	— 3 58 54·9	
5.	A. N. Nr.	795	13 33 39·81	—4 35 11·9	1
	»	797	39·75	12·0	1
	B. B. VI. p.	374	39·76	10·4	1
	Yarnall	5629	39 69	11·6	1
	felv.		13 33 39·75	—4 35 11·5	
6.	Piazzi	101	14 24 14·00[1802·3]	—5 13 20·6	1,0
	Taylor	7679	13·79[1835·0]	21·5	1,1
	Lam.	1707	13·27[1844·4]	20·3	1,1
	Sant.	280	13·36[1846·3]	25·8	1,1
	Yarnall	5990	13·01[1861·3]	23·7	2,2
	Lam. Suppl.		13·15[1868·5]	20·2	1,1
	felv.		14 24 13·02	—5 13 22·5	

Egyenes emelkedésben felvétetett —0·0142-nyi évi saját mozgás; a hátramaradó hibák:

Piazzi	+0.02	Sant.	0.00
Taylor	+0·27	Yarnall	—0·22
Lamont	—0·11	Lam. Suppl.	+0·12

7. Kapcsolat az előbbihez 14 20 4·57 —5 15 32·5

8.	Lam.	1784	$14^h42^m16^s12$	$-5°12'25.''0$	1
	Schj.	5253	15·76	22·5	2
	Lam. Suppl.		16·01	23·3	1
	felv.		14 42 15·91	—5 12 23·3	
9.	Lam.	1775	14 40 12·82	—5 29 10·1	1
	Lam. Suppl.		13·10	10·0	1
	felv.		14 40 12·96	—5 29 10·1	
10.	Taylor	7191	15 18 11·55	—5 47 4·0	1
	Sant.	295	11·23	6·0	1
	Lam.	1944	11·19	3·1	1
	felv.		15 18 11·32	—5 47 4·4	1

Észrevétel: *1. Lamont 1449 declinatiójához + 40″-nyi correctiót adtam.

A 2), 3), 4) továbbá 9) s 10) számú észleleteket egybevontam s 3-dik hely gyanánt a 13) vizsgálatot vettem fel, s az így nyert 3 helyet parallaxis, praecessió, nutatió, s aberratió tekintetbevételével az év kezdetére viszonyított hosszúsági és szélességi összrendezőkben fejeztem ki:

közép Berlini idő		λ 1870.0	β 1870.0
November	24·70856	194°42′ 3″5	+ 2′11′21.″8
	28·76437	214 25 21·3	+ 8 15 21·3
	30·75465	226 28 50·3	+11 20 1·8

Az üstökös földtávolainak viszonya M variatiója által a következő elemrendszert nyertem:

I. sz. elemek

$$\left\{\begin{array}{l} T = 1870.\text{ Deczember } 19{\cdot}91220 \text{ köz. Berl. idő} \\ \left.\begin{array}{rl} \omega = \pi - \Omega = & 90°35'15''{\cdot}2 \\ \Omega = & 94\ 44\ 47\cdot 6 \\ i = & 147\ 15\ 44\cdot 3 \end{array}\right\} \text{közép éjegyen } 1870{\cdot}0 \\ \log q = 9{\cdot}590288 \end{array}\right.$$

A második hely számított értékének eltérése az adattól $\Delta\lambda = -3''{\cdot}5$, $\Delta\beta = -10''{\cdot}5$.

Ezen elemekkel az egész észleleti időközre számitottam következő naplót:

18ʰ közép Berl. idő	α app.	δ app.	lóg Δ	Aberr. idő
November 23.	12ʰ42ᵐ28ˢ65	—3°29′17″9	9·72133	4ᵐ22ˢ1
» 24.	12 58 14·75	—3 47 37·5	9·69916	4 9·0
» 25.	13 15 48·27	—4 7 29 4	9·67813	3 57·3
» 26.	13 35 13 83	—4 28 36·7	9·65895	3 47·0
» 27.	13 56 30·00	—4 50 33·4	9·64247	3 38·5
» 28.	14 19 27·19	—5 12 37·6	9·62958	3 32·2
» 29.	14 43 45·65	—5 34 1·6	9·62118	3 28·1
» 30.	15 8 55·31	—5 53 47·3	9·61794	3 26·5
December 1.	15 34 18·79	—6 11 16·5	9·62024	3 27·6

Az észleleteket ezen naplóval összehasonlítván következő eltéréseket találtam:

	Sz.	idő	Δα (Obs.—Calc.)	Δδ (Obs.—Calc.)	súly
I.	1.	November 23·76	—0ˢ69	+17″0	1
	2.	24·68	—0·38	+ 1·1	1
	3.	24·69	—0·18	— 4·2	1
	4.	24·75	+0·15	— 0·8	1
		November 24·50	- 0·28	+ 3·3	
II.	5.	November 25·67	+0ˢ43	— 0·3	1
	6.	26·69	—0·07	+ 1·1	1
	7.	26·71	—0·01	+12·2	1
	8.	26·75	—0·35	— 4·1	1
		November 26·50	0·00	+ 2·2	
III.	9.	November 28·76	—0·22	— 9·1	1
	10.	28·77	+0·37	—15·1	1
	11.	29·76	—0·29	— 8·1	1
	12.	29·77	+0·23	—16·6	1
		November 29·25	+0·02	—12·2	
IV.	13.	November 30·75	+0·12	+ 0·2	1
	14.	30·77	+1·12	— 7·2	½
		November 30·75	+0·45	— 2·3	

Az évkezdet közép éjegyenére közvetlenűl számított positiók pedig:

		α med.	δ med.
November	24·50	193°31′41″·1	—3°42′43.″5
»	26·50	202 32 32·9	—4 23 4·5
»	29·25	217 51 32·5	—5 23 20·2
»	30·75	227 13 22·9	—5 53 41·3

tehát a fenntebbi javitások hozzáadása által következő normalhelyek erednek:

			α med.	δ med.	súly
I.	November	24·50	193°31′36·″9	—3°42′39·″3	1
II.	»	26·50	202 32 32·9	—4 23 2·3	1
III.	»	29·25	217 51 32·8	—5 23 32·4	1
IV.	»	30·75	227 13 29·7	—5 53 43·6	$^1/_2$

Az utolsónak csak fél súlyt adhattam, minthogy csupán 2 észleleten alapul, melyek egyikét maga a vizsgáló kevésbé pontosnak tartja.

Noha az egyes normalhelyekben hátramaradó hibák olyanok, hogy a csekély észleleti anyagot tekintve már jónak mondható az 1. számú elemrendszer, mégis szükségesnek látszott nekem feltéti egyenletek felállitása, hogy egyrészt a legvalószinűbb elemeket leszármaztathassam, másrészt pedig megtudhassam azon szélső határokat, melyekig módosithatók az egyes elemek a nélkűl, hogy az egyes normalhelyekben tûlságos hibák maradnának fenn; ez esetben a határok természetesen igen tágak lesznek a rövid észleleti időköz következtében.

Az egyenlitőre vonatkozó feltéti egyenleteket számitandó átváltoztattam az ecliptikai elemeket egyenlitői elemekre:

$$\omega_0 = 127°43'27''·2$$
$$\Omega_0 = 124\ 53\ 34·8$$
$$i_0 = 138\ 55\ 24·3$$

Következőben a differential-hányadosok logarithmikus alakban s azon rendben advák, melyben az egyenletek feloldásánál jártam el:

Egyenes emelkedési feltéti egyenletek:

$$
\begin{aligned}
5{\cdot}42069\, d\log q + 9{\cdot}35597_n\, di_0 + 4{\cdot}00879_n\, dT + 9{\cdot}39281_n\, d\Omega_0 + 9{\cdot}75404\, d\omega_0 + 4{\cdot}98720_n\, de &= 0{\cdot}65254_n \\
5{\cdot}58979\, d\log q + 9{\cdot}17060_n\, di_0 + 4{\cdot}09183_n\, dT + 9{\cdot}72637_n\, d\Omega_0 + 9{\cdot}92747\, d\omega_0 + 4{\cdot}94668_n\, de &= 0{\cdot}47585 \\
5{\cdot}75072\, d\log q + 8{\cdot}59882\, di_0 + 4{\cdot}16478_n\, dT + 9{\cdot}96926_n\, d\Omega_0 + 0{\cdot}08080\, d\omega_0 + 4{\cdot}82749_n\, de &= 0{\cdot}01926 \\
5{\cdot}64676\, d\log q + 9{\cdot}07099\, di_0 + 4{\cdot}02163_n\, dT + 9{\cdot}88272_n\, d\Omega_0 + 9{\cdot}96809\, d\omega_0 + 4{\cdot}56492_n\, de &= 0{\cdot}67648
\end{aligned}
$$

Elhajlási feltéti egyenletek:

$$
\begin{aligned}
5{\cdot}52129\, d\log q + 9{\cdot}87565_n\, di_0 + 2{\cdot}70375_n\, dT + 8{\cdot}93559\, d\Omega_0 + 9{\cdot}83199\, d\omega_0 + 4{\cdot}78006\, de &= 0{\cdot}62325 \\
5{\cdot}53607\, d\log q + 9{\cdot}92652_n\, di_0 + 2{\cdot}63446_n\, dT + 8{\cdot}99240\, d\Omega_0 + 9{\cdot}82358\, d\omega_0 + 4{\cdot}75637\, de &= 0{\cdot}30103 \\
5{\cdot}54314\, d\log q + 9{\cdot}97587_n\, di_0 + 2{\cdot}60860_n\, dT + 8{\cdot}97749\, d\Omega_0 + 9{\cdot}79399\, d\omega_0 + 4{\cdot}69057\, de &= 1{\cdot}07555_n \\
5{\cdot}38684\, d\log q + 9{\cdot}83516_n\, di_0 + 2{\cdot}49322_n\, dT + 8{\cdot}73698\, d\Omega_0 + 9{\cdot}61552\, d\omega_0 + 4{\cdot}48307\, de &= 0{\cdot}21082_n
\end{aligned}
$$

Észrevétel: A jobb oldalon álló tagok csak igen csekély mértékben külömböznek az előbb adott javitásoktól, mert számításuk alkalmával még nem rendelkeztem végkép az összehasonlítási csillagok positiói felett.

Minél kisebb az időköz, annál nehezebbé válik a számegyenletek megoldása, mert az eliminatió haladtával mindinkább kisebbedő együtthatók fordulnak elő, melyeknek hányadosai annálfogva igen bizonytalanok; azért is igen czélszerűnek találom nem csak az együtthatókat egyformaságra hozni oly módon, hogy egységnél nagyobb érték ne forduljon elő, hanem egyszersmind az ismeretlenek sorát úgy rendezni el, hogy az egyes eliminatiók kivitelénél a hányadosok mindig valódi törtek legyenek. Ezen eljárás által már többször sikerült nekem ott czélhoz jutni, hol mások kénytelenek voltak egy vagy több ismeretlent határozatlanul hagyni s a többi ismeretleneket függvényök gyanánt kifejezni. Magam is ez esetben határozatlanul fogom hagyni de excentricitási tagot, mivel szándékom a parabolánál megállapodni s az excentricus tag felett csak általános észrevételeket tenni. — A föntebbi ismeretlenek helyébe következőket fogok bevezetni: $5{\cdot}75072\ d\log q = x$; $9{\cdot}97587_n\ di_0 = y$; $4{\cdot}16478_n\ dT = z$; $9{\cdot}96926_n\ d\Omega_0 = u$; $0{\cdot}08080\ d\omega_0 = v$; $4{\cdot}98720_n\ de = w$, mi által az egyenletek így módosulnak :

$$
\begin{aligned}
&9{\cdot}66997\,x + 9{\cdot}38010\,y + 9{\cdot}84401\,z + 9{\cdot}42355\,u + 9{\cdot}67324\,v + 0{\cdot}00000\,w = 0{\cdot}64254_n\\
&9{\cdot}83907\,x + 9{\cdot}19473\,y + 9{\cdot}92705\,z + 9{\cdot}75711\,u + 9{\cdot}84667\,v + 9{\cdot}95948\,w = 9{\cdot}47585\\
&0{\cdot}00000\,x + 8{\cdot}62295_n y + 0{\cdot}00000\,z + 0{\cdot}00000\,u + 0{\cdot}00000\,v + 9{\cdot}84029\,w = 0{\cdot}01926\\
&9{\cdot}89604\,x + 9{\cdot}09512_n y + 9{\cdot}85685\,z + 9{\cdot}91346\,u + 9{\cdot}88729\,v + 9{\cdot}57772\,w = 0{\cdot}67648\\
&9{\cdot}77057\,x + 9{\cdot}89978\,y + 8{\cdot}53897\,z + 8{\cdot}96633_n u + 9{\cdot}75119\,v + 9{\cdot}79286_n w = 0{\cdot}62325\\
&9{\cdot}78535\,x + 9{\cdot}95065\,y + 8{\cdot}46968\,z + 9{\cdot}02314_n u + 9{\cdot}74278\,v + 9{\cdot}76917_n w = 0{\cdot}30103\\
&9{\cdot}79242\,x + 0{\cdot}00000\,y + 8{\cdot}44382\,z + 9{\cdot}00823_n u + 9{\cdot}71319\,v + 9{\cdot}70337_n w = 1{\cdot}07555_n\\
&9{\cdot}63612\,x + 9{\cdot}85929\,y + 8{\cdot}32844\,z + 8{\cdot}76772_n u + 9{\cdot}53472\,v + 9{\cdot}49587_n w = 0{\cdot}21082_n
\end{aligned}
$$

A legkisebb négyzetek módszere tulajdonképen 6 meghatározási egyenletre vezetne, de minthogy de értékét határozatlanul hagyom, csak a következő 5 egyenletre van szükségem:

$$
\begin{aligned}
&+ 3{\cdot}60630\,x + 2{\cdot}02590\,y + 2{\cdot}54111\,z + 1{\cdot}95613\,u + 3{\cdot}45100\,v = -\,0{\cdot}91337\,w - 1{\cdot}4498\\
&+ 2{\cdot}02590\,x + 3{\cdot}04948\,y + 0{\cdot}26539\,z - 0{\cdot}30273\,u + 1{\cdot}79081\,v = +\,1{\cdot}44257\,w - 9{\cdot}5971\\
&+ 2{\cdot}54111\,x + 0{\cdot}26539\,y + 2{\cdot}72274\,z + 2{\cdot}24727\,u + 2{\cdot}53523\,v = -\,2{\cdot}37312\,w + 1{\cdot}4858\\
&+ 1{\cdot}95613\,x - 0{\cdot}30273\,y + 2{\cdot}24727\,z + 2{\cdot}10188\,u + 1{\cdot}97537\,v = -\,1{\cdot}97732\,w + 4{\cdot}6502\\
&+ 3{\cdot}45100\,x + 1{\cdot}79081\,y + 2{\cdot}53523\,z + 1{\cdot}97537\,u + 3{\cdot}31882\,v = -\,1{\cdot}05195\,w - 0{\cdot}3816
\end{aligned}
$$

Ezen egyenletek megoldása által lesz:

$$
\begin{aligned}
x &= -\,0{\cdot}3238\,w - 44{\cdot}580\\
y &= -\,0{\cdot}1593\,w - 26{\cdot}220
\end{aligned}
$$

$$z = -2{\cdot}5299\ w - 15{\cdot}726$$
$$u = 0{\cdot}2882\ w - 25{\cdot}243$$
$$v = 1{\cdot}8668\ w + 83{\cdot}348$$

avagy

$$dT = 16{\cdot}8085\ de + 0{\cdot}00108$$
$$d\omega_0 = -15048''{\cdot}3\ de + 69''{\cdot}2$$
$$d\Omega_0 = 2935{\cdot}1\ de + 27{\cdot}1$$
$$di_0 = 1635{\cdot}0\ de + 27{\cdot}7$$
$$d \log q = 0{\cdot}055824\ de - 0{\cdot}000072$$

A parabolikus pálya felvételében $de=0$, tehát az elemek javításai ez esetben:

$$dT = +0{\cdot}00108$$
$$d\omega_0 = +1'\ 9''{\cdot}2$$
$$d\Omega_0 = +27{\cdot}1$$
$$di_0 = +27{\cdot}7$$
$$d \log q = -0{\cdot}000072$$

Ezen javításokat az eredeti elemekhez hozzáadván a normalhelyek számításánál következő külömbségeket találtam, melyekkel szembe állítom a differential-egyenletekből eredő hibákat:

	Egyenes számítás.		Külzeléki számítás.	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
I.	$-1''{\cdot}2$	$-1''{\cdot}3$	$-0''{\cdot}4$	$-0''{\cdot}7$
II.	$+0{\cdot}7$	$+1{\cdot}6$	$+1{\cdot}3$	$+2{\cdot}1$
III.	$-2{\cdot}8$	$-6{\cdot}6$	$-2{\cdot}5$	$-6{\cdot}0$
IV.	$+1{\cdot}1$	$+4{\cdot}7$	$+1{\cdot}2$	$+5{\cdot}2$

A két sor közti külömbség magasabb rendű tagok által okoztatik s új kiegyenlítést tesz szükségessé, mely az elemeknek még következő csekély javításait adja:

$$dT = +0{\cdot}00002$$
$$d\omega_0 = -7''{\cdot}2$$
$$d\Omega_0 = +7{\cdot}2$$
$$di_0 = +6{\cdot}3$$
$$d \log q = +0{\cdot}000026$$

mely javítások a hibanégyzetek összegét 80-ról 77-re szállítják le, úgy hogy a normalhelyekben még ezen hibák maradnak hátra:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
I.	$-0''5$	$-0''8$
II.	$+1 \cdot 8$	$+2 \cdot 2$
III.	$-1 \cdot 9$	$-5 \cdot 8$
IV.	$+1 \cdot 3$	$+5 \cdot 3$

A parabola felvételében tehát a legvalószinűbb egyenlítői elemrendszer:

$T = 1870.$ Deczember $19{\cdot}91330$ köz. Berlini idő
$\omega_0 = 127^\circ\ 44'\ 29''2$
$\Omega_0 = 124\ \ 54\ \ 9{\cdot}1$
$i_0 = 138\ \ 55\ \ 58{\cdot}3$
$\log q = 9{\cdot}590242$

Ezeknek átváltozása ecliptikai elemekre következő logarithmikus alakban adott differential-hányadosok segélyével történik:

$$d\Omega = 9{\cdot}98615\, d\Omega_0 + 0{\cdot}04780\, di_0$$
$$d(\omega-\omega_0) = 8{\cdot}78466\, d\Omega_0 + 9{\cdot}97268_n\, di_0$$
$$di_0 = 9{\cdot}59844\, d\Omega_0 + 9{\cdot}90157\, di_0$$

vagyis ez esetben: $d\omega = +32''2$, $d\Omega = -4''7$, $di = +40''7$ miáltal az üstökösnek következő legvalószinűbb ecliptikai elemeit nyerjük:

II. sz. elemek
$T = 1870.$ Deczember $19{\cdot}91330$ köz. Berl. idő
$\omega = 90^\circ\ 35'\ 47''4$
$\Omega = 94\ \ 44\ \ 42{\cdot}9$ közép éjegyen 1870·0
$i = 147\ \ 16\ \ 25{\cdot}0$
$\log q = 9{\cdot}590242$

Ezen elemrendszernél megállapodhatunk; mindamellett közelebbről fogom vizsgálni az excentricitási tagot, hogy kimutassam, miszerint az ellipsis még inkább tenne eleget a vizsgálatoknak s hogy sem a hyperbola, sem igen rövid keringési idő nincsen kizárva.

Föntebb kifejeztem az egyes elemváltozásokat d e függvényei gyanánt; ha azokat bevezetem az eredeti feltéti egyenletekbe s a jobb oldalon álló tagok helyett a véglegesen hátramaradt hibákat iktatom be, de meghatározására a következő egyenleteket kapom.

	Δa	$\Delta \delta$
I.	$6{\cdot}311\ de + 0''{\cdot}5 = 0$	$-37{\cdot}673\ de + 0''{\cdot}8 = 0$
II.	$8{\cdot}738\ de - 1\cdot 8 = 0$	$-0{\cdot}194\ de - 2\cdot 2 = 0$
III.	$-18{\cdot}835\ de + 1\cdot 9 = 0$	$37{\cdot}482\ de + 5\cdot 8 = 0$
IV.	$18{\cdot}835\ de - 1\cdot 3 = 0$	$-13{\cdot}203\ de - 5\cdot 3 = 0$

A legkisebb négyzetek módszerét alkalmazván $de = -0{\cdot}0483$ érték mellett a hibanégyzetek összegét még 9 egységgel szállíthatnók alább; ezen excentricitásnak 40 évi keringési idő felelne meg, azonban épenséggel sem lehet ebből még az ellipsis valóságára következtetni, miután egyrészt ugyan még nagyobb excentricitás, p. o. $de = -0{\cdot}15$ felvétele, melynek 4—5 évi keringési idő felel meg, sem hagyna igen tulságos hibákat, másrészt pedig a hyperbola felvételében $de = +0{\cdot}05$ határig mehetni a nélkül, hogy meg nem engedhető hibák jönnének létre.

Visszatérünk most a parabolicus elemekhez s kutatjuk azok biztosságát.

Legkönnyebben találjuk a határokat, melyek közt az egyes elemek ingadozhatnak, ha a fönntebb adott 5 meghatározási egyenletből csupán az első négynek segélyével fejezzük ki az egyes változásokat mint $d\omega_0$ függvényeit. Lesz ugyanis:

$$dT = +0{\cdot}000081\ d\omega_0$$
$$d\Omega_0 = -0''{\cdot}65\ d\omega_0$$
$$di_0 = -0\cdot 49\ d\omega_0$$
$$d\log q = -0{\cdot}0000023\ d\omega_0$$

Ha ezen értékeket bevezetjük az eredeti meghatározó egyenletekbe, a hátramaradó hibák következő határozatlan alakban advák:

	Δa	$\Delta \delta$
I.	$-0{\cdot}0168\ d\omega_0 + 0''{\cdot}5$	$+0{\cdot}0101\ d\omega_0 + 0''{\cdot}8$
II.	$+0{\cdot}0200\ d\omega_0 - 1\cdot 8$	$+0{\cdot}0019\ d\omega_0 - 2\cdot 2$
III.	$+0{\cdot}0131\ d\omega_0 + 1\cdot 9$	$-0{\cdot}0061\ d\omega_0 + 5\cdot 8$
IV.	$-0{\cdot}0237\ d\omega_0 - 1\cdot 3$	$-0{\cdot}0065\ d\omega_0 - 5\cdot 3$

Ebből látni, hogy $d\omega_0 = \pm 30''$ már a szélső határ. Egészben véve tehát a rövid észleleti idő daczára elegendőkép biztosak az egyes elemek s ezeknek értékei csak igen kevéssé változhattak volna sokkal hosszabb időre terjeszkedő észleletek folytán, hanem sajnos ebben, mint oly sok más esetben, hogy épen a legérdekesebb adatot, a keringési időt illetőleg egészen bizonytalanságban maradunk s megközelítőleg sem sejthetjük annak nagyságát.

AZ 1871. II. SZ.

ÜSTÖKÖS

DEFINITIV PÁLYASZÁMÍTÁSA.

SCHULHOF LIPÓT

BÉCSI CSILLAGDAI SEGÉDTŐL.

(Beterjesztetett a III. osztály ülésén 1874. november 9.)

BUDAPEST, 1875.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALÁBAN.

(Az Akadémia bérházában.)

Budapest, 1875. Nyomatott az Athenaeum r.társ. nyomdájában.

Az
1871. II. sz. üstökös definitiv pályaszámítása.

SCHULHOF LIPÓT, bécsi csillagdai segédtől.

(Beterjesztetett a III. osztály ülésén 1874. november 9.)

Az 1871. II. számú üstököst Tempel Vilmos Milánóban fedezte fel 1871. junius hó 14-dikén; 3 hónapon túl egész september hó 20-dikáig volt látható s ezen egész idő alatt folyton csekély világossággal birt, minek következtében az egyes észleletek közép hibái nagyobbak a szokottaknál; ez azonban ellensúlyoztatik a szemléletek nagy száma által, miért is az üstökös pályája nagy biztossággal határoztathatott meg.

A mi az üstökös külső alakját illeti, legbővebben tárgyalta azt Schmidt Gyula atheni igazgató (Astr. Nachr. Nr. 1866), ki számos mérések által az üstökös fejének valódi átmérőjét 2400 mértföldnyinek találta. Egyébként nem mutatkozott az üstökös külsejében semmi különös, de föltűnő volt benne a már az előtt is más üstökösöknél tapasztalt rendkivűli magatartás, hogy t. i. fényhatálya sokkal gyorsabban csökkent mint várni lehetett. Ugyanis a fényhatály képlete a következő: Legyen az illető égi test Naptóli s Földtőli távola bizonyos időben, például felfedezésekor, r_0 s $\varDelta_0$; akkor bármely más időpontban fényhatálya $J = \frac{r_0{}^2 \varDelta_0{}^2}{r^2 \varDelta^2}$. Ezen képletet alkalmazván az »Astronomische Nachrichten«, 1859-dik számában közlött kis értekezésemben azt találtam, hogy az üstökös október hó 10-dikén éri majd el legnagyobb fényét s hogy november elején ép oly fényes leend mint felfedezésekor;

mindamellett már október elején még a legnagyobb fényerejű távcsövekben sem volt többé nyoma. Ezen anomalia az üstökösöknek még nem eléggé ismert alkatában találja magyarázatát; a polariskop- és spectroskoppal való vizsgálatokból annyi kiderűlt már, hogy napközelben az üstökösök a Nap befolyása következtében fényt fejlesztenek, melyben ügyes vizsgálók, mint Schmidt s mások, néha időszakos oscillatiókat is vehettek észre, s mely a Naptól való eltávozáskor lasabban vagy gyorsabban csökken.

Az üstökös láthatósága ideje alatt több elemrendszert tettem közzé, melyek közt a legnagyobb észleleti időre terjeszkednek s három igen jó normalhelyen alapulnak az imént említett értekezésben foglalt elemek:

$$\text{I. sz. elemek}\left\{\begin{array}{l} T = 1871.\ \text{Julius}\ 26{\cdot}97906\ \text{köz. Berl. idő} \\ \left.\begin{array}{rl} \omega = \pi - \Omega = & 96^{\circ}13'49''{\cdot}2 \\ \Omega = & 211\ 56\ 58{\cdot}0 \\ i = & 101\ 59\ 26{\cdot}0 \end{array}\right\}\ \text{közép éjegyen}\ 1871{\cdot}0 \\ \log q = 0{\cdot}034819 \end{array}\right.$$

Ezeket további számitásaim kiindulási pontjául használván, legelőször is következő, berlini közép időre vonatkozó, naplót vezettem le:

12^h	α app.	δ app.	log $\varDelta$	Aberr. idő
1871. Jun. 14.	$10^h27^m21{\cdot}^s45$	$+57^{\circ}\ 5'13''{\cdot}5$	0·145065	$11^m35{\cdot}^s3$
15.	10 24 31·15	57 11 26·5	0·148661	11 41·0
16.	10 21 44·93	57 17 19·8	0·152165	11 46·7
17.	10 19 2·66	57 22 55·1	0·155576	11 52·3
18.	10 16 24·19	57 28 13·8	0·158894	11 57·8
19.	10 13 49·37	57 33 17·4	0·162117	12 3·1
20.	10 11 18·03	57 38 7·3	0·165246	12 8·3
21.	10 8 50·02	57 42 44·5	0·168279	12 13·4
22.	10 6 25·19	57 47 10·2	0·171216	12 18·4
23.	10 4 3·37	57 51 25·3	0·174056	12 23·3
24.	10 1 44·41	57 55 30·8	0·176800	12 28·0
25.	9 59 28·16	57 59 27·4	0·179447	12 32·6
26.	9 57 14·47	+58 3 16·0	0·181996	12 37·0

1871. 12^h		α app.	δ app.	log Δ	Aberr. idő
Junius	27.	$9^h55^m\ 3^s21$	$+58^\circ\ 6'57''1$	0·184446	12^m41^s3
	28.	9 52 54·23	58 10 31·5	0·186799	12 45·4
	29.	9 50 47·41	58 13 59·6	0·189054	12 49·4
	30.	9 48 42·62	58 17 22·0	0·191210	12 53·2
Julius	1.	9 46 39·74	58 20 39·1	0·193268	12 56·9
	2.	9 44 38·64	58 23 51·2	0·195227	13 0·5
	3.	9 42 39·22	58 26 58·7	0·197087	13 3·8
	4.	9 40 41·35	58 30 2·0	0·198848	13 6·9
	5.	9 38 44·94	58 33 1·7	0·200510	13 9·9
	6.	9 36 49·89	58 35 57·1	0·202072	13 12·5
	7.	9 34 56·10	58 38 49·5	0·203534	13 15·5
	8.	9 33 3·47	58 41 38·7	0·204897	13 18·0
	9.	9 31 11·90	58 44 24·9	0·206159	13 20·3
	10.	9 29 21·30	58 47 8·5	0·207320	13 22·4
	11.	9 27 31·58	58 49 49·5	0·208380	13 24·4
	12.	9 25 42·65	58 52 28·2	0·209339	13 26 2
	13.	9 23 54·42	58 55 4·6	0·210196	13 27·8
	14.	9 22 6·81	58 57 39·1	0·210951	13 29·2
	15.	9 20 19·73	59 0 11·7	0·211603	13 30·4
	16.	9 18 33·10	59 2 42·5	0·212152	13 31·4
	17.	9 16 46·84	59 5 11·6	0·212598	13 32·2
	18.	9 15 0·85	59 7 39·1	0·212940	13 32·8
	19.	9 13 15·06	59 10 5·2	0·213180	13 33·3
	20.	9 11 29·38	59 12 29·9	0·213317	13 33·6
	21.	9 9 43·75	59 14 53·2	0·213351	13 33·7
	22.	9 7 58·09	59 17 15·3	0·213283	13 33·6
	23.	9 6 12·31	59 19 36·2	0·213111	13 33·3
	24.	9 4 26·35	59 21 56·0	0·212834	13 32·7
	25	9 2 40·13	59 24 14·7	0·212451	13 31·9
	26.	9 0 53·57	59 26 32·3	0·211962	13 31·0
	27.	8 59 6·60	59 28 48·9	0·211367	13 29·9
	28.	8 57 19·16	59 31 4·5	0·210666	13 28·6
	29.	8 55 31·17	59 33 19·1	0·209861	13 27·1
	30.	8 53 42·58	59 35 32·9	0·208952	13 25·4
	31.	8 51 53·31	59 37 45·8	0·207937	13 23·5
Augustus	1.	8 50 3·30	+59 39 57·8	0·206816	13 21·5

1871. 12^h		α app.	δ app.	log Δ	Aberr. idő
Augustus	2.	$8^h 48^m 12^s.47$	$+59^\circ 42'\ 9''.1$	0·205589	$13^m 19^s.2$
	3.	8 46 20·75	59 44 20·1	0·204256	13 16·7
	4.	8 44 28·06	59 46 30·8	0·202816	13 14·1
	5.	8 42 34·31	59 48 41·2	0·201268	13 11·3
	6.	8 40 39·41	59 50 51·5	0·199613	13 8·3
	7.	8 38 43·25	59 53 1·8	0·197849	13 5·1
	8.	8 36 45·74	59 55 12·3	0·195977	13 1·8
	9.	8 34 46·78	59 57 23·1	0·193995	12 58·2
	10.	8 32 46·26	59 59 34·3	0·191904	12 54·4
	11.	8 30 44·06	60 1 46·0	0·189702	12 50·5
	12.	8 28 40·03	60 3 58·5	0·187390	12 46·4
	13.	8 26 34·03	60 6 11·9	0·184968	12 42·2
	14.	8 24 25·92	60 8 26·4	0·182436	12 37·8
	15.	8 22 15·54	60 10 42·0	0·179792	12 33·2
	16.	8 20 2·73	60 12 58·8	0·177036	12 28·4
	17.	8 17 47·33	60 15 16·9	0·174169	12 23·5
	18.	8 15 29·15	60 17 36·1	0·171189	12 18·4
	19.	8 13 7·99	60 19 56·4	0·168097	12 13·1
	20.	8 10 43·66	60 22 17·8	0·164892	12 7·7
	21.	8 8 15·95	60 24 40·1	0·161574	12 2·2
	22.	8 5 44·64	60 27 3·2	0·158142	11 56·5
	23.	8 3 9·49	60 29 26·8	0·154597	11 50·7
	24.	8 0 30·27	60 31 50 7	0·150939	11 44·7
	25.	7 57 46·72	60 34 14·6	0·147167	11 38·6
	26.	7 54 58·57	60 36 38·1	0·143281	11 32·4
	27.	7 52 5·55	60 39 0·8	0·139281	11 26·0
	28.	7 49 7·37	60 41 21·9	0·135167	11 19·5
	29.	7 46 3·74	60 43 40·7	0·130939	11 12·9
	30.	7 42 54·34	60 45 56·3	0·126596	11 6·3
	31.	7 39 38·83	60 48 8·2	0·122138	10 59·5
September	1.	7 36 16·84	60 50 15·4	0·117566	10 52·6
	2.	7 32 47·98	60 52 16·6	0·112880	10 45·6
	3.	7 29 11·85	60 54 10·6	0·108080	10 38·5
	4.	7 25 28·08	60 55 55·9	0·103167	10 31·3
	5.	7 21 36·29	60 57 30·3	0·098141	10 24·0
	6.	7 17 36·03	$+60$ 58 51·8	0·093003	10 16·7

1871. 12h		α app.	δ app.	log Δ	Aberr. idő
September	7.	$7^h13^m26^s.78$	$+60°59'58''.3$	0·087754	$10^m\ 9^s.3$
	8.	7 9 8·10	61 0 47·1	0·082396	10 1·3
	9.	7 4 39·59	61 1 15·4	0·076930	9 54·3
	10.	7 0 0·80	61 1 19·6	0·071357	9 46·7
	11.	6 55 11·23	61 0 55·8	0·065680	9 39·1
	12.	6 50 10·44	61 0 0·2	0·059903	9 31·5
	13.	6 44 58·01	60 58 28·3	0·054028	9 23·8
	14.	6 39 33·49	60 56 14·4	0·048059	9 16·1
	15.	6 33 56·50	60 53 12·7	0·042001	9 8·4
	16.	6 28 6·76	60 49 17·1	0·035859	9 0·7
	17.	6 22 4·02	60 44 20·9	0·029639	8 53·0
	18.	6 15 48·09	60 38 16·4	0·023346	8 45·3
	19.	6 9 18·86	60 30 55·4	0·016988	8 37·7
	20.	6 2 36·26	60 22 9·7	0·010575	8 30·1

A bő észleleti anyagot az »Astronomische Nachrichten« közlönyből vontam ki s némiképen módositottam, minthogy az összehasonlítási csillagokat illetőleg ujabb positiókkal rendelkezhettem mint annak idején az észlelők. Természetesen uj felvételeimben az üstökös és csillag közti külömbség változatlanul ugyanaz, mely a vizsgálóktól adatott. Kedves kötelességemnek tartom ez alkalommal mély köszönetemet fejezni ki Prof. Dr. A. Krueger úrnak Helsingforsban s Dr. Victor Knorre úrnak Berlinben, azon nagy szivességükért, melylyel nekem számos csillagot délköri távcsőn ujra határoztak meg.

Következőben adom az észleletek sorozatát, melyben könnyebb áttekintés végett egyszersmind a számítással való összehasonlításból eredő külömbségek vannak felvéve; ha ezeket a számított üstököspositiókhoz adjuk, kapjuk a föld középpontjára viszonyított észleleteket.

Sz.	1871.		hely	helyi idő	α app.	par	δ app.	par	*	Obs. — Calc. Δα cos δ	Δδ
					I. normalhely.						
1.	Junius	14.	Milánó	12ʰ26ᵐ42ˢ	10ʰ27ᵐ12ˢ49	+0ˢ50	+57° 5′49″4	+3″8	1	(—2ˢ51)	(+30″7)
2.	»	15.	»	10 45 35	10 24 34·49	+0·50	57 12 20·8	+3·8	1	(—2·28)	(+76·5)
3.	»	16.	»	10 19 47	10 21 54·95	+0·50	57 17 20·2	+3·8	2	—0·50	(+26·8)
4.	»	16.	Josefstadt	11 8 47	10 21 51·79	+0·51	57 17 0·6	+2·8	2	—0·63	+ 0·5
5.	»	16.	Karlsruhe	11 9 18	10 21 50·41	+0·50	57 17 3·0	+2·9	.	+0·61	— 4·3
6.	»	16.	Bécs	12 46 0	10 21 41·79	+0·43	57 17 14·0	+4·3	2	—0·09	— 5·4
7.	»	16.	»	13 31 23	10 21 34·82	+0·38	57 17 39·1	+4·8	2	—1·10	— 2·0
8.	»	17.	»	12 7 49	10 19 4·92	+0·46	57 22 32·3	+3·8	3	+0·50	—15·3
9.	»	17.	»	12 42 19	10 18 58·74	+0·43	57 22 57·3	+4·3	3	—0·77	+ 2·3
10.	»	19.	Florencz	10 19 3	10 14 0·95	+0·55	57 32 52·1	+2·3	4	+0·53	— 1·0
11.	»	19.	Milánó	10 40 45	10 13 54·50	+0·52	57 32 59·2	+2·0	5	—1·22	— 0·8
12.	»	20.	»	10 58 6	10 11 20·34	+0·53	57 37 52·1	+2·6	6	—1·65	— 1·3
13.	»	20.	Lipcse	12 35 0	10 11 12·36	+0·39	57 37 54·8	+4·5	6	—1·33	—13·3
14.	»	20.	Berlin	12 58 25	10 11 11·69	+0·35	57 38 21·1	+4·6	6	—0·64	+ 9·3
15.	»	21.	Milánó	11 5 37	10 8 52·13	+0·51	57 42 40·0	+3·1	6	—1·31	+ 8·0
16.	»	21.	Krakó	12 39 28	10 8 50·99	+0·38	57 42 42·0	+4·5	6	+0·77	+ 2·0
17.	»	22.	Florencz	10 54 52	10 6 33·04	+0·53	57 47 2·8	+3·1	7	+0·81	+18·2
18.	»	22.	Milánó	10 58 0	10 6 31·85	+0·51	57 47 1·8	+3·1	6	+0·79	+ 5·1
19.	»	22.	Bécs	11 32 23	10 6 29·38	+0·46	57 46 54·8	+3·7	8,9	—0·32	— 2·2

20.	»	22. »	12 26 46	10 6 23·56	+0·40	57 47 5·2	+4·3	8,9	—0·52	— 1·1
21.	»	23. Florencz	10 9 59	10 4 17·12	+0·54	57 50 46·0	+2·5	10	+1·64	—16·5
22.	»	23. Milánó	11 21 3	10 4 4·04	+0·49	57 51 47·1	+3·5	10	—1·18	(+31·3)
23.	»	24. Florencz	10 43 9	10 1 58·15	+0·52	57 55 8·4	+3·1	11	(+3·47)	— 5·9
24.	»	24. Hamburg	12 6 13	10 1 41·60	+0·37	57 55 24·8	+4·2	10	—0·92	— 3·1
25.	»	24. Bécs	12 33 44	10 1 42·37	+0·37	+57 55 26·7	+4·6	10	—0·42	— 1·1
Junius 20·5 I.									—0·365	—1·81

II. normalhely.

26.	Julius	4. Athen	9 6 47	9 40 59·61	+0·56	+58 29 21·6	+1·9	12	+0·15	— 9·8
27.	»	4. Bécs	10 55 8	9 40 48·20	+0·41	58 29 42·8	+3·8	13	—0·03	— 4·0
28.	»	4. Berlin	11 12 59	9 40 46·25	+0·36	58 29 49·7	+4·0	12	+0·19	— 0·7
29.	»	6. Athen	9 11 38	9 37 7·47	+0·56	58 35 24·1	+2·3	14	+0·21	— 3·7
30.	»	6. Florencz	10 3 58	9 37 0·74	+0·48	58 35 22·6	+3·2	15	+0·90	—16·7
31.	»	6. Bécs	11 14 51	9 36 55·13	+0·37	58 35 41·8	+4·1	16	+0·01	— 2·7
32.	»	6. Berlin	11 11 31	9 36 54·52	+0·34	58 35 38·5	+4·1	17	+0·04	— 7·0
33.	»	7. Florencz	9 39 18	9 35 8·62	+0·49	58 38 24·5	+2·6	15	+0·82	— 5·1
34.	»	7. Josefstadt	10 28 30	9 35 5·20	+0·42	58 38 28·4	+3·7	18,19	+0·14	— 3·5
35.	»	7. Bécs	11 1 19	9 35 1·99	+0·37	58 38 26·0	+4·0	20,21	—0·18	— 9·5
36.	»	7. Berlin	12 1 26	9 34 56·78	+0·27	58 38 34·1	+4·6	17	+0·01	— 9·4
37.	»	7. Hamburg	11 56 6	9 34 55·98	+0·27	58 38 38·7	+4·5	22	—0·11	— 6·6
38.	»	8. Bécs	10 54 45	9 33 9·91	+0·38	58 41 12·8	+4·0	22	—0·12	— 8·6

Sz.	1871.	hely	helyi idő	α app.	par	δ app.	par	*	Obs. — Calc. Δαcosδ	Δδ
39.	Julius 8.	Milánó	11ʰ 3ᵐ 3ˢ	9ʰ33ᵐ 5ˢ66	+0ˢ39	58°41′35·″7	+4·″1	23	—0ˢ82	+ 7·″3
40.	» 8.	Lipcse	11 27 4	9 33 6·10	+0·32	58 41 24·1	+4·4	24	—0·17	— 5·3
41.	» 8.	Berlin	11 49 26	9 33 5·78	+0·28	58 41 24·7	+4·5	24	+0·38	— 6·7
42.	» 9.	Florencz	9 43 14	9 31 23·80	+0·48	58 43 54·7	+3·2	15	+0·24	—10·8
43.	» 9.	Bécs	10 34 54	9 31 19·34	+0·39	58 43 59·1	+3·9	23	—0·36	— 9·1
44.	» 9.	Milánó	10 17 5	9 31 17·60	+0·44	58 44 1·1	+3·6	23	—0·80	— 8·8
45.	» 10.	Athen	9 4 55	9 29 39·06	+0·55	58 46 44·8	+2·6	23	+0·35	+ 4·8
46.	» 10.	Lipcse	10 58 7	9 29 27·03	+0·34	58 47 5·7	+4·2	24	+0·32	+ 9·3
47.	» 10.	Berlin	11 50 57	9 29 23·81	+0·26	58 46 56·7	+4·6	25	+0·54	— 4·7
48.	» 10.	Hamburg	11 51 16	9 29 21·52	+0·25	58 46 36·3	+4·5	24	—0·09	—26·7
49.	» 11.	Bécs	10 58 13	9 27 37·16	+0·35	58 49 33·8	+4·2	26	—0·36	— 1·8
50.	» 12.	Athen	9 5 0	9 26 0·08	+0·53	58 51 56·9	+2·7	25,27	+0·36	— 3·5
51.	» 12.	Bécs	10 25 14	9 25 50·73	+0·38	58 52 4·4	+4·9	25	—0·31	— 8·8
52.	» 12.	Milánó	10 8 17	9 25 51·40	+0·41	58 52 20·2	+3·7	25	+0·51	+ 7·3
53.	» 12.	Hamburg	11 19 47	9 25 45·81	+0·27	58 52 13·6	+4·4	25	+0·22	— 5·9
54.	» 13.	Berlin	11 30 36	9 23 57·43	+0·26	+58 54 47·2	+4·5	25	+0·03	— 8·3
	Julius 8·5	II.							+0·071	— 5·08

III. normalhely.

Sz.	1871.	hely	helyi idő	α app.	par	δ app.	par	*	Δαcosδ	Δδ
55.	Julius 14.	Athen	9 1 48	9 22 24·54	+0·53	+58 57 3·9	+3·0	28	+0·46	— 7·3
56.	» 14.	Bécs	11 33 38	9 22 10·34	+0·27	58 57 18·2	+4·7	29,30	—0·03	—10·7

57.	»	14.	Lipcse	12 52 47	9 22 4·31	+0·12	58 57 27·7	+5·1	25	+0·39	−10·8
58.	»	15.	Bécs	10 49 18	9 20 26·58	+0·32	58 59 45·9	+4·3	29,31	+0·03	−11·4
59.	»	15.	Berlin	11 15 33	9 20 24·96	+0·27	58 59 54·0	+4·5	32	+0·61	− 7·1
60.	»	16.	Lipcse	11 37 5	9 18 36·89	+0·24	59 2 11·0	+4·7	27	+0·84	−23·4
61.	»	17.	Athen	8 53 40	9 17 5·54	+0·53	59 4 37·1	+2·9	33	+0·75	− 6·7
62.	»	17.	Bécs	10 48 6	9 16 51·99	+0·31	59 4 40·6	+4·4	34	−0·88	−16·6
63.	»	17.	Berlin	11 56 8	9 16 48·80	+0·18	59 5 6·0	+4·6	34	+0·44	+ 0·8
64.	»	17.	Hamburg	12 25 41	9 16 45·50	+0·13	59 5 4·5	+4·9	35	+0·35	− 4·9
65.	»	17.	Lipcse	13 43 52	9 16 40·92	−0·02	59 5 20·5	+5·2	35	+0·19	+ 5·0
66.	»	18.	Kremsmünst.	10 55 47	9 15 3·57	+0·29	59 7 33·2	+4·5	29	−1·49	+ 6·7
67.	»	18.	Hamburg	10 58 3	9 15 5·94	+0·26	59 7 19·2	+4·4	35	+0·41	− 9·3
68.	»	19.	Athen	9 20 30	9 13 31·48	+0·49	59 9 34·6	+3·5	35	+0·60	− 5·6
69.	»	19.	Hamburg	11 14 9	9 13 18·95	+0·23	59 9 51·5	+4·7	35	+0·36	− 4·5
70.	»	20.	Athen	8 54 6	9 11 47·68	+0·51	59 12 0·8	+3·2	35	+0·58	− 1·8
71.	»	20.	Hamburg	11 5 23	9 11 33·32	+0·23	59 12 18·3	+4·5	35	+0·09	− 1·6
72.	»	20.	Lipcse	11 20 48	9 11 33·23	+0·22	59 12 21·7	+4·8	36	+0·25	+ 1·5
73.	»	20.	Washington	9 55 38	9 11 11·17	+0·47	59 12 40·2	+3·7	36	−0·68	− 8·4
74.	»	21.	Bécs	10 33 45	9 9 52·14	+0·29	59 14 29·2	+4·5	35,36	+0·25	− 8·4
75.	»	21.	Berlin	10 55 49	9 9 49·72	+0·25	59 14 41·9	+4·6	36	+0·26	+ 1·0
76.	»	21.	Lipcse	11 17 2	9 9 48·39	+0·22	59 14 44·0	+4·8	36	+0·51	+ 0·8
77.	»	21.	Washington	9 34 45	9 9 27·84	+0·45	59 14 55·5	+3·9	36	−0·47	−13·9

Sz.	1871.	hely	helyi idő	α app.	par	δ app.	par	*	Obs. — Calc. Δα cos δ	Δδ
78.	Julius 22.	Bécs	10h 27m 0s	9h 8m 6s·29	+0s·31	+59° 16′ 54″·7	+4″·4	36	—0s·10	—4″·5
79.	» 22.	Lipcse	10 23 3	9 8 6·52	+0·25	59 17 11·9	+4·3	36	+0·44	+11·4
80.	» 22.	Berlin	10 49 22	9 8 4·70	+0·25	59 16 57·6	+4·6	36	+0·29	— 4·7
81.	» 23.	Hamburg	12 27 21	9 6 10·78	+0·06	+59 19 26·8	+5·0	36	+0·28	— 7·1
	Julius 18·5	III.							+0·208	—5·25

IV. normalhely.

Sz.	1871.	hely	helyi idő	α app.	par	δ app.	par	*	Δα cos δ	Δδ
82.	Julius 24.	Lipcse	10 16 34	9 4 34·97	+0·29	+59 21 45·2	+4·3	36	+0·30	+ 4·4
83.	» 25.	Bécs	10 49 3	9 2 46·86	+0·24	59 23 57·5	+4·7	37	—0·08	— 3·2
84.	» 25.	Hamburg	11 0 39	9 2 44·54	+0·23	59 24 3·3	+4·7	37	+0·14	— 1·0
85.	» 27.	Lipcse	10 54 53	8 59 12·90	+0·20	59 28 47·5	+4·9	38	+0·48	+10·6
86.	» 27.	Hamburg	11 21 27	8 59 9·87	+0·14	59 28 35·3	+4·9	39	+0·28	— 5·1
87.	» 28.	Lipcse	12 35 34	8 57 18·83	—0·01	59 30 52·4	+5·2	39	+0·82	— 9·4
88.	» 30.	Hamburg	11 30 49	8 53 45·67	+0·09	59 35 26·4	+4·9	40	+0·50	+ 1·1
89.	Augustus 1.	Lund	11 19 45	8 50 7·59	+0·09	59 39 44·3	+4·9	40	+0·19	— 3·6
90.	» 2.	Hamburg	13 35 8	8 48 7·88	—0·17	59 42 2·8	+4·9	40	+1·32	—10·2
91.	» 3.	Lund	10 44 50	8 46 27·82	+0·13	59 44 4·2	+4·9	41	+0·20	— 3·1
92.	» 4.	Athen	9 22 9	8 44 43·84	+0·36	59 46 2·7	+4·8	42	—0·23	— 4·8
93.	» 4.	Florencz	9 40 55	8 44 42·40	+0·29	59 45 51·1	+4·7	43	+1·67	—22·0
94.	» 5.	Athen	8 45 49	8 42 53·91	+0·42	59 48 22·6	+4·5	42	+0·14	+ 8·4
95.	» 5.	Milánó	9 34 28	8 42 44·61	+0·28	59 48 35·7	+4·8	44	—0·34	+12·1

96.	»	5. Berlin	10 16 29	8 42 44·08	+0·17	59 48 16·9	+4·9	45	+0·34	— 6·1
97.	»	5. Hamburg	10 12 56	8 42 42·42	+0·18	59 48 25·1	+4·9	46	—0·08	— 1·6
98.	»	6. »	11 49 35	8 40 39·63	— 0·02	59 50 47·9	+5·1	46	—0·29	+ 2·4
99.	»	7. Florencz	9 13 4	8 38 57·82	+0·31	59 52 40·9	+4·8	47	+0·49	— 0·6
100.	»	7. Lipcse	10 14 14	8 38 52·17	+0·16	59 52 33·7	+5·1	46	—0·12	—12·6
101.	»	7. Hamburg	10 16 4	8 38 51·14	+0·15	59 52 47·2	+5·0	46	—0·17	— 0·4
102.	»	7. Lund	10 37 38	8 38 51·12	+0·11	59 52 48·6	+5·0	48	+0·16	+ 0·4
103.	»	7. Berlin	12 18 32	8 38 43·59	—0·09	59 52 51·0	+5·2	49	+0·35	— 6·1
Augustus 2·5		IV.							+0·217	—1·85
104.	Augustus	8. Florencz	9 14 28	8 37 1·27	+0·29	59 54 38·0	+4·9	49	+0·93	—14·0
105.	»	8. Berlin	10 14 27	8 36 55·94	+0·18	59 54 52·0	+5·0	49	+0·33	— 4·5
106.	»	8. Hamburg	10 7 43	8 36 54·77	+0·16	59 54 57·8	+5·0	50	+0·01	+ 0·6
107.	»	8, Lipcse	10 34 42	8 36 54·10	+0·11	59 55 2·5	+5·3	50	+0·36	+ 4·0
108.	»	8. Lund	13 47 48	8 36 37·92	—0·24	59 55 12·8	+4·6	48	—0·11	— 3·6
109.	»	9. Athen	8 51 18	8 35 6·70	+0·37	59 56 43·2	+4·9	49	+0·10	—12·9
110.	»	9. Bécs	10 6 17	8 34 57·40	+0·17	59 57 5·1	+5·2	48	—0·37	— 0·2
111.	»	9. Berlin	10 37 13	8 34 54·84	+0·09	59 57 11·0	+5·2	49	+0·10	+ 1·8
112.	»	9. Hamburg	10 24 18	8 34 54·57	+0·12	59 57 9·2	+5·1	50	+0·01	— 0·2
113.	»	9. Lipcse	10 36 5	8 34 54·86	+0·10	59 57 13·4	+5·3	50	+0·22	+ 4·1
114.	»	9. Lund	10 57 27	8 34 53·15	+0·05	59 57 7·4	+5·1	48	+0·11	— 3.8
115.	»	10. Florencz	9 10 10	8 33 2·31	+0·29	59 59 20·1	+5·0	49	+0·84	+ 6·7

Sz.	1871.		hely	helyi idő	α app.	par	δ app.	par	*	Obs. — Calc. $\Delta\alpha\cos\delta$	$\Delta\delta$
116.	Augustus	10.	Lipcse	$10^h15^m40^s$	$8^h32^m57^s.12$	$+0^s.13$	$+59°59'26''.6$	$+5''.2$	50	$+0^s.72$	$+7''.8$
117.	»	10.	Hamburg	10 6 16	8 32 55·47	+0·14	59 59 30·6	+5·1	50	—0·09	+11·7
118.	»	10.	Lund	10 41 25	8 32 53·86	+0·07	59 59 17·4	+5·1	50	+0·01	— 3·5
119.	»	10.	Berlin	10 52 31	8 32 52·83	+0·05	59 59 19·4	+5·3	50	—0·08	— 2·3
120.	»	11.	Athen	8 38 13	8 31 7·15	+0·37	60 1 8·4	+4·9	50	+0·30	— 9·3
121.	»	11.	Florencz	8 56 44	8 30 58·54	+0·31	60 1 12·5	+4·9	50	+0·02	—12·8
122.	»	11.	Hamburg	10 41 55	8 30 50·16	+0·01	60 1 33·0	+5·2	50	—0·25	— 1·5
123.	»	11.	Lund	11 37 23	8 30 46·89	—0·05	60 1 39·5	+5·2	50	—0·09	+ 1·9
124.	»	11.	Berlin	12 47 19	8 30 40·99	—0·19	60 1 41·8	+5·1	50	—0·15	— 2·3
125.	»	12.	Bécs	10 1 32	8 28 51·54	+0·14	60 3 35·4	+5·3	51	—0·38	— 4·6
126.	»	12.	Berlin	10 32 0	8 28 48·63	+0·07	60 3 43·9	+5·3	50	—0·02	0·0
127.	»	12.	Hamburg	11 10 15	8 28 43·83	—0·01	60 3 44·2	+5·3	50	—0·23	— 4·5
128.	»	12.	Lund	12 26 47	8 28 38·55	—0·15	60 3 55·3	+5·1	50	—0·17	+ 0·5
129.	»	13.	Berlin	9 34 15	8 26 47·85	+0·17	60 5 49·1	+5·2	50	+0·01	— 2·9
130.	»	13.	Milánó	9 32 32	8 26 47·76	+0·20	60 5 47·2	+5·3	51	+0·65	— 6·1
131.	»	13.	Bécs	10 9 6	8 26 44·79	+0·11	60 5 47·3	+5·4	51	—0·54	— 6·6
132.	»	13.	Hamburg	11 12 2	8 26 37·57	—0·03	60 6 1·4	+5·3	50	—0·32	— 0·8
133.	»	13.	Lund	11 35 36	8 26 37·06	—0·07	60 6 1·0	+5·2	51	—0·53	— 2·5
134.	»	14.	Florencz	9 22 23	8 24 41·18	+0·22	60 7 56·0	+5·4	52	+0·50	—10·9
135.	»	14.	Lund	10 13 33	8 24 35·64	+0·08	60 8 6·7	+5·2	52	—0·39	— 3·4

136.	»	14.	Hamburg	10 29 52	8 24 33·47	+0·05	+60	8 11·9	+5·3	50	−0·20	— 0·9
Augustus 11·5.			V.								+0·038	— 2·18

VI. normalhely.

137.	Augustus	15.	Florencz	9 30 8	8 22 31·00	+0·19	+60	10 18.9	+5·5	52	+0·79	— 3·1
138.	»	15.	Lipcse	10 1 40	8 22 27·76	+0·10	60	10 26·0	+5·5	53	+0·37	+ 1·5
139.	»	15.	Lund	10 17 10	8 22 24·58	+0·06	..	.. ....	.....	52	−0·68	......
140.	»	15.	Berlin	10 31 3	8 22 24·95	+0·03	60	10 21·8	+5·4	54	+0·12	— 4·8
141.	»	15.	Lund	10 40 26	.. ..	......	60	10 18·7	+5·3	52	......	— 9·4
142.	»	15.	Hamburg	12 14 1	8 22 13·23	−0·17	60	10 36·2	+5·6	53	−0·55	— 1·6
143.	»	16.	Athen	8 40 4	8 20 26·31	+0·31	60	12 12·6	+5·4	53,55	+0·16	—15·7
144.	»	16.	Berlin	9 32 41	8 20 17·20	+0·14	60	12 35·9	+5·3	54	−0·12	— 2·3
145.	»	16.	Hamburg	9 56 24	8 20 13·57	+0·09	60	12 40·9	+5·3	53	−0·27	— 0·8
146.	»	16.	Lund	11 12 28	8 20 7·91	−0·06	60	12 42·8	+5·3	53	−0·19	— 5·0
147.	»	17.	Hamburg	9 45 37	8 17 58·87	+0·10	60	14 58·1	+5·4	53	−0·49	— 0·6
148.	»	17.	Lund	11 0 30	8 17 53·49	−0·05	60	15 1·9	+5·4	55	−0·32	— 2·8
149.	»	17.	Lipcse	11 58 27	8 17 49·13	−0·05	60	15 10·1	+5·6	55	+0·40	— 0·2
150.	»	18.	Athen	8 23 37	8 15 54·66	+0·33	60	17 14·2	+5·4	56	−0·14	+ 9·7
151.	»	19.	Bécs	9 33 40	8 13 24·17	+0·11	60	19 24·0	+5·6	57	−0·29	—10·1
152.	»	20.	Hamburg	11 23 12	8 10 46·47	−0·14	60	22 5·0	+5·4	58	−0·45	— 3·9
153.	»	21.	Bécs	10 38 57	8 8 26·57	−0·09	60	24 13·1	+5·8	58	−0·18	—10·6
154.	»	22.	»	9 44 41	8 5 59·40	+0·04	60	26 28·5	+5·8	59	−1·04	—13·0

Sz.	1871.	hely	hely idő	α app.	par	δ app.	par	*	Obs. — Calc. Δα cosδ	Δδ
155.	Augustus 22.	Lund	$10^h29^m36^s$	$8^h\ 5^m54^s63$	—0·06	+60°26'43''0	+5''6	60	—0ˢ36	—4''5
156.	» 26.	Berlin	13 28 35	7 54 48·00	—0·45	60 36 37·1	+4·3	61	—0·95	— 9·1
157.	» 26.	Lipcse	14 10 9	7 54 45·18	—0·51	+60 36 46·7	+3·8	62	+0·23	+ 0·2
	Augustus 18·5.	VI.							—0·197	—4·31
				VII. normalhely.						
158.	September 3.	Athen	8 8 34	7 29 52·66	+0·10	+60 53 16·3	+7·1	63	—1·08	—25·3
159.	» 4.	Hamburg	8 52 25	7 25 53·59	—0·05	60 55 23·1	+6·4	64	—1·77	—13·5
160.	» 6.	»	9 10 0	7 17 59·66	—0·14	60 58 22·0	+6·4	65	—2·31	—14·7
161.	» 6.	Lund	9 35 23	7 17 58·78	—0·19	60 58 7·6	+6·2	65	—1·73	—29·9
162.	» 7.	Berlin	8 59 47	7 13 56·01	—0·13	60 58 49·6	+6·6	66	—2·00	—54·3
163.	» 7.	Lund	9 14 3	7 13 54·15	—0·16	60 59 19·6	+6·3	67	—1·75	—25·2
164.	» 8.	»	10 28 21	7 9 24·29	—0·34	61 0 15·3	+5·7	68	—1·25	—23·3
165.	» 8.	Berlin	11 24 42	7 9 11·50	—0·48	60 59 43·4	+5·3	68	—2·61	—57·2
166.	» 9.	Hamburg	9 23 25	7 5 2·41	—0·24	61 0 40·9	+6·4	69	—2·80	—26·1
167.	» 10.	»	9 36 12	7 0 22·84	—0·29	61 1 2·5	+5·0	70	—2·81	—12·8
168.	» 10.	Lund	12 1 14	6 59 57·04	—0·54	61 0 43·6	+4·6	71	—2·65	—31·4
169.	» 10.	Berlin	13 19 48	6 59 40·63	—0·63	61 0 56·4	+3·3	71	—3·37	—19·4
170.	» 11.	Lund	11 1 13	6 55 19·82	—0·47	61 0 32·7	+5·4	72	—2·77	—19·5
171.	» 11.	Hamburg	12 34 15	6 54 59·31	—0·60	+61 0 21·3	+4·0	71	—2·26	—29·5
	September 8·5.	VII.							—2·201	—25·29

VIII. normalhely.

172.	September 15.	Hamburg	10 39 6	6 34 7·42	—0·52	+60 52 44·5	+5·5	73	—3·79	—33·6
173.	» 16.	Lund	11 31 47	6 28 7·39	—0·60	.. ..	.....	74	—4·36	......
174.	» 16.	»	11 33 29	.. ....	......	60 48 39·2	+4·6	74	......	—40·4
175.	» 16.	Hamburg	12 5 2	6 27 58·39	—0·65	60 48 22·5	+3·9	75	—3·14	—49·0
176.	» 16.	Berlin	12 18 44	6 27 55·75	—0·68	60 48 23·6	+3·7	76	—4·43	—48·1
177.	» 18.	Hamburg	10 36 23	6 16 0·08	—0·60	60 38 9·7	+5·3	77	—4·66	—23·2
178.	» 19.	»	11 34 49	6 9 20·11	—0·68	.. ..	.....	78	—2·44	......
179.	» 19.	»	11 39 57	.. ..	......	60 30 41·7	+4·1	78	......	—14.6
180.	» 20.	»	10 0 54	6 2 58·72	—0·60	.. ..	.....	79	—5·18	......
181.	» 20.	»	10 6 53	.. ..	......	+60 22 6·5	+5·7	79	......	—40·0
	September 17·5.	VIII.							—4.000	—37·16

Tekintve azon körülményt, hogy az üstökös nagy fénygyengesége igen nehezítette a vizsgálatokat, csak igen kevés észleletet zártam egészen ki, ugyanis mindkét összrendezőben a két elsőt, rectascensióban azonkivül még a 23. számot, declinatióban pedig a 3. s 22. számot, minthogy bennök a hibák túlságosak. Ezeken kivül még azon észleleteknek, melyeknek hibái kissé nagyok, csupán $^1/_2$ súlyt adtam, s pedig rectascensióban a 21., 66., 90. s 93. számnak, declinatióban a 17., 48., 93., 162., 165. s 179. számnak.

Ha az észleleteket egyes csillagdák szerint állítom össze, az egyes sorozatok közt mutatkoznak ugyan némileg állandó külömbségek, mint például a flórencziek tevőlegesen, a bécsiek s milánóiak nemlegesen térnek el a középértékektől, de mindamellett nem értem volna el sokat azoknak tekintetbevételével, minthogy az észleletek egymás közti összegyezése igen csekély, s mivel az ily eljárásnál soha sem határozható meg azon csillagdák állandó correctiója, melyek kevés észleletet szolgáltatnak.

Az összehasonlítási csillagok positiói az 1871. közép időszakra vonatkozólag ezek:

Sz.		α 1871·0	δ 1871·0	súly
1.	2 Helsingforsi délk. észl.	$10^h25^m34^s.89$	+57° 6′ 0.″5	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	34·91	1·6	1
	felvétetett	10 25 34·90	+57 6 1·1	
2.	2 Helsingf. délk. észl.	10 22 20·80	+57 13 40·8	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	20·69	40·6	1
	felv.	10 22 20·74	+57 13 40·7	
3.	Struve 1209	10 22 2·48	+57 0 56·9	1
	2 Helsingf. délk. észl.	2·16	54·5	2
	Astr. Nachr. Nr. 2029	2·25	58·6	2
	felv.	10 22 2·26	+57 0 56·6	
4.	2 Helsingf. délk. észl.	10 19 8·30	+57 32 0·8	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	8·31	2·0	1
	felv.	10 19 8·31	+57 32 1·4	
5.	2 Helsingf. délk. észl.	10 15 6·60	+57 10 23·6	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	6·62	23·6	1
	felv.	10 15 6·61	+57 10 23·6	
6.	2 Helsingf. délk. észl.	10 8 10·84	+57 32 57·4	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	10·76	57·2	1
	felv.	10 8 10·80	+57 32 57·3	
7.	2 Helsingf. délk. észl.	10 1 21·73	+57 49 56·6	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	21·83	57·6	1
	felv.	10 1 21·78	+57 49 57·1	
8.	2 Helsingf. délk. észl.	10 8 31·16	+58 9 16·5	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	31·24	16·7	1
	felv.	10 8 31.20	+58 9 16·6	
9.	2 Helsingf. délk. észl.	10 7 47·97	+57 24 14·1	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	47·91	15·3	1
	felv.	10 7 47·94	+57 24 14·7	

Sz.		α 1871·0	δ 1871·0	súly
10.	2 Helsingf. délk. északi.	$9^h58^m45^s55$	+57°52′44·″8	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	45·57	45·2	1
	felv.	9 58 45·56	+57 52 45·0	
11.	2 Helsingf. délk. észl.	9 53 32·93	+57 54 9·3	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	33·05	10·7	1
	felv.	9 53 32·99	+57 54 10·0	
12.	Astr. Nachr. Nr. 1925	9 40 21·39	+58 28 32·3	
13.	Bonn. Beob. 1218	9 43 30·35	+58 31 11·4	1
	2 Helsingf. délk. észl.	30·81	7·7	2
	Astr. Nachr. Nr. 2029	30·75	8·7	2
	felv.	9 43 30·70	+58 31 8·8	
14.	Bonn. Beob. 1210	9 33 6·84	+58 24 56·2	1
	Astr. Nachr. 2029	6·94	58·0	1
	felv.	9 33 6·89	+58 24 57·1	
15.	2 Helsingf. délk. észl.	9 37 41·89	+58 42 60·3	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	41·56	59·6	1
	felv.	9 37 41·72	+58 43 0·0	
16.	Astr. Nachr. Nr. 2029	9 37 55·25	+56 33 27·4	
17.	Astr. Nachr. Nr. 1925	9 35 39·01	+58 35 45·2	
18.	2 Helsingf. délk. észl.	9 41 43·11	+58 48 14·7	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	42·91	14·3	1
	felv.	9 41 43·01	+58 48 14·5	
19.	2 Helsingf. délk. észl.	9 30 0·34	+58 26 34·9	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	0·20	35·6	1
	felv.	9 30 0·27	+58 26 35·3	
20.	2 Helsingf. délk. észl.	9 35 44·28	+59 1 43·3	1
	Astr. Nachr.Nr. 2029	44·46	45·5	1
	felv.	9 35 44·37	+59 1 44·4	
21.	Bonn. Beob. 1204	9 29 32·13	+58 16 13·0	1
	2 Helsingf. délk. észl.	32·23	12·2	2
	Astr. Nachr. Nr. 2029	31·91	12·0	2
	felv.	9 29 32·08	+58 16 12·3	

Sz.		α 1871·0	δ 1871·0	súly
22.	Bonn. Beob. 1211	$9^h35^m30^s.44$	$+58^\circ42'31''.4$	1
	Astr. Nachr. 2029	30·79	29·3	2
	felv.	9 35 30·67	+58 42 30·0	
23.	Bonn. Beob. 1200	9 27 49·90	+58 40 24·9	1
	2 Helsingf. délk. észl.	50·05	22·6	2
	Astr. Nachr. Nr. 2029	49·87	24·8	1
	felv.	9 27 49·94	+58 40 24·1	
24.	Bonn. Beob. 1203	9 29 5·03	+58 41 18 7	1
	Astr. Nachr. Nr. 1925	5·10	19·9	2
	2 Helsingf. délk. észl.	5·11	19·5	2
	Astr. Nachr. Nr. 2029	5·40	17·9	1
	felv.	9 29 5·14	+58 41 19·4	
25.	Astr. Nachr. Nr. 1925	9 24 48·10	+58 51 4·8	1
	2 Helsingf. délk. észl.	48·32	4·0	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	48·39	4·5	1
	felv.	9 24 48·27	+58 51 4·4	
26.	2 Helsingf. délk. észl.	9 24 38·01	+58 47 27·8	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	37·85	27·1	1
	felv.	9 24 37·93	+58 47 27·4	
27.	2 Helsingf. délk. észl.	9 28 5·51	+59 4 54·2	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	5.50	55·0	1
	felv.	9 28 5·51	+59 4 54·6	
28.	2 Helsingf. délk. észl.	9 23 53·20	+59 12 2·8	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	53·16	4·5	1
	felv.	9 23 53·18	+59 12 3·7	1
29.	2 Helsingf. délk. észl.	9 21 38·34	+59 19 11·5	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	38·48	11·2	
	felv.	9 21 38·41	+59 19 11·4	
30.	Astr. Nachr. Nr. 2007	9 20 25·07	+58 56 52·8	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	24·98	58·1	1
	felv.	9 20 25·03	+58 56 55·5	

Sz.		α 1871·0	δ 1871·0	súly
31.	2 Helsingf. délk. észl.	$9^h20^m21^s14$	$+58°41'24''2$	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	21·26	22·4	1
	felv.	9 20 21·20	+58 41 23·3	
32.	Astr. Nachr. Nr. 1925	9 21 3·39	+59 0 7·8	
33.	2 Helsingf. délk. észl.	9 16 18·39	+59 20 38·7	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	18·12	39·0	1
	felv.	9 16 18·25	+59 20 38·9	
34.	Astr. Nachr. Nr. 1925	9 15 3·11	+59 4 59·2	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	3·08	58·7	1
	felv.	9 15 3·10	+59 4 59·0	
35.	Helsingf. délk. észl.	9 9 30·80	+58 56 44·4	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	30·82	46·8	1
	felv.	9 9 30·81	+58 56 45·6	
36.	Rümk. 2781	9 6 14·20	+59 14 47·4	1
	Astr. Nachr. Nr. 1925	14·38	45·9	2
	2 Helsingf. délk. észl.	14·48	45·2	2
	Astr. Nachr. Nr. 2029	14·50	46·5	2
	felv.	9 6 14·42	+59 14 46·1	
37.	Bonn. Beob. 1226	9 4 50·24	+59 25 53·2	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	50·69	48·0	2
	felv.	9 4 50·54	+59 25 49·7	
38.	2 Helsingf. délk. észl.	8 57 27·73	+59 23 29·5	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	27·77	29·5	1
	felv.	8 57 27·75	+59 23 29·5	
39.	Rümk. 2737	8 58 23·91	+59 36 30·9	1
	2 Helsingf. délk. észl.	23·62	27·5	2
	Astr. Nachr. Nr. 2029	23·72	27·5	2
	felv.	8 58 23·72	+59 36 28·2	
40.	Rümker 2698	8 50 4·18	+59 45 13·9	1
	2 Helsingf. délk. észl.	4·20	14·1	2
	Astr. Nachr. Nr. 2029	4·25	14·1	2
	felv.	8 50 4·22	+59 45 14·1	

Sz.		α 1871·0	δ 1871·0	súly
41	Lundi mikr. észl.	$8^{h}46^{m}44^{s}58$	$+59^{\circ}44'24''1$	
42.	Rümker 2653	8 42 53·26	+59 32 12·2	1
	2 Helsingf. délk. észl.	53·32	12·1	2
	Astr. Nachr. Nr. 2029	53·41	13·1	2
	felv.	8 42 53·34	+59 32 12·6	
43.	Astr. Nachr. Nr. 2007	8 47 8·63	+59 38 34 8	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	8·42	36·6	1
	felv.	8 47 8·53	+59 38 35·7	
44.	2 Helsingf. délk. észl.	8 46 28·93	+59 54 20·4	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	29·13	19·6	1
	felv.	8 46 29·03	+59 54 20·0	
45.	Astr. Nachr. Nr. 1925	8 42 37·79	+59 46 58·6	
46.	2 Helsingf. délk. észl.	8 45 2·24	+59 56 29·4	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	1·83	29·8	1
	felv.	8 45 2·04	+59 56 29·6	
47.	Astr. Nachr. Nr. 2007	8 38 22·86	+59 45 22·5	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	22·68	21·7	1
	felv.	8 38 22·77	+59 45 22·1	
48.	Astr. Nachr. Nr. 2007	8 37 60·31	+59 58 57·4	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	59·93	60·6	1
	felv.	8 38 0·12	+59 58 59·0	
49.	Astr. Nachr. Nr. 1925	8 34 10·60	+59 52 9·2	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	10·83	9·0	1
	felv.	8 34 10·72	+59 52 9·1	
50.	Astr. Nachr. Nr. 1925	8 29 54·93	+60 2 11·1	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	54·90	11·2	
	felv.	8 29 54·92	+60 2 11·2	
51.	Astr. Nachr. Nr. 1925	8 28 10·91	+60 3 31·2	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	10·91	31·1	1
	felv.	8 28 10·91	+60 3 31·2	

Sz.		α 1871·0	δ 1871·0	súly
52.	2 Helsingf. délk. észl.	$8^h23^m25^s77$	+60° 4′57·″9	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	25·88	58·4	1
	felv.	8 23 25·83	+60 4 58·2	
53.	2 Helsingf. délk. észl.	8 20 36·10	+60 7 43·1	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	35·98	42·9	1
	felv.	8 20 36·04	+60 7 43·0	
54.	Astr. Nachr. Nr. 1925	8 18 46·00	+60 13 36·7	
55.	Bonn. Beob. 1136	8 20 29·91	+60 20 27·5	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	29·81	26·1	1
	felv.	8 20 29·86	+60 20 26·8	
56.	2 Helsingf. délk. észl.	8 15 19·15	+60 7 13·8	
57.	2 Helsingf. délk. észl.	8 14 23·13	+59 59 49·5	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	22·94	50·4	1
	felv.	8 14 23·04	+59 59 50·0	
58.	Astr. Nachr. Nr. 2007	8 9 14·81	+60 28 22·8	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	14·34	23·1	1
	felv.	8 9 14·58	+60 28 23·0	
59.	Astr. Nachr. Nr. 2007	8 6 48·42	+60 25 48·7	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	48·23	48·2	1
	felv.	8 6 48·33	+60 25 48·5	
60.	2 Helsingf. délk. észl.	8 4 30·42	+60 24 15·0	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	29·86	16·0	1
	felv.	8 4 30·14	+60 24 15·5	
61.	53. Camelop. Astr. Viertelj. Schr.	7 50 40·37	+60 40 25·5	
62.	2 Helsingf délk. észl.	7 58 4·85	+60 41 46·5	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	4·43	48·9	1
	felv.	7 58 4·64	+60 41 47·7	
63.	Bécsi Mikr. észl.	7 30 41·42	+60 51 55·7	
64.	Helsingf. délk. észl.	7 26 13·54	+60 49 8·7	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	13·27	7·1	1
	felv.	7 26 13·41	+60 49 7·9	

Sz.		α 1871·0	δ 1871·0	súly
65.	Astr. Nachr. Nr. 2007	7h18m 8s69	+60°58′45″·0	
66.	Astr. Nachr. Nr. 1925	7 13 30·23	+61 7 28·9	
67.	Astr. Nachr. Nr. 2029	7 14 4·33	+61 3 21·3	
68.	Bonn. Beob. 957	7 9 29·61	+61 4 35·9	1
	Astr. Nachr. Nr. 1925	29·74	33·3	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	29·45	34·6	1
	felv.	7 9 29 60	+61 4 34 6	
69.	2 Helsingf. délk. észl.	7 2 60·45	+61 16 49·7	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	59·99	49·5	1
	felv.	7 3 0·22	+61 16 49·6	
70.	Astr. Nachr. Nr. 2029	7 0 10·24	+61 9 35·4	
71.	Astr. Nachr. Nr, 1871	6 58 3·90	+60 59 28·5	5
	Yarnall 2848	3·90	27·1	2
	Astr. Nachr. Nr. 2029	3·57	28·3	1
	felv.	6 58 3·86	+60 59 28·3	
72.	Astr. Nachr. Nr. 2029	6 55 19·16	+61 3 24·0	
73.	Astr. Nachr. Nr. 2007	6 34 32·82	+60 46 33·5	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	32·43	34·5	1
	felv.	6 34 32·63	+60 46 34·0	
74.	Astr. Nachr. Nr. 1871	6 28 18·44	+60 46 42 2	
75.	Bonn. Beob. 980	6 24 59·81	+60 44 37·2	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	59·49	35 8	1
	felv.	6 24 59·65	+60 44 36·5	
76.	Astr. Nachr. Nr. 1925	6 29 38·77	+60 53 25·0	
77.	Bonn. Beob. 963	6 15 13·80	+60 42 4·0	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	13·44	1·3	1
	felv.	6 15 13·62	+60 42 2·4	
78.	Astr. Nachr. Nr. 2007	6 9 45·62	+60 35 22·8	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	45·07	25·0	1
	felv.	6 9 45·35	+60 35 23·9	
79.	Armagh 1372	5 9 33·56	+60 28 15·4	1
	Radcl. I. 1636	33·71	15·8	1
	Astr. Nachr. Nr. 2029	33·11	15·0	1
	felv.	5 9 33·46	+60 28 15·4	

Ha a föntebb talált javításokat hozzáadjuk a naplóból vett adatokhoz s azokat az év kezdetére viszonyítjuk, a normalhelyeknek következő értékeit nyerjük:

normalhely			α 1871·0	δ 1871·0	súly
I.	1871. Junius	20·5	152°49′13·″5	+57°38′ 8·″0	1
II.	Julius	8·5	143 15 42·3	58 41 36·8	1
III.	Julius	18·5	138 45 4·0	59 7 37·3	1
IV.	Augustus	2·5	132 2 54·2	59 42 10·7	1
V.	Augustus	11·5	127 40 40·2	60 1 47·0	1
IV.	Augustus	18·5	123 51 47·4	60 17 34·7	1
VII.	Septemb.	8·5	107 15 24·1	61 0 22·9	$1/2$
VIII.	Septemb.	17·5	95 28 26·7	+60 43 43·2	$1/3$

Csupán a hetedik normalhelynek adtam $1/2$ s az utolsónak $1/3$ súlyt, minthogy igen csekély észleleten alapúlnak, melyek az üstökös túlságos gyengesége miatt nagyobb hibákkal is birnak; a többieknek ugyanazon egyenlő súlyt adtam, noha nem képeztettek egyenlő számú észleletekből. Valahányszor nem egy s ugyanazon vizsgálótól valók s nem ugyanazon viszonyok közt tétettek az észleletek, könnyen keletkezhetnek theoretikus hibák, ha a súlyt az észleletek számának megfelelőleg veszszük fel; kétségkivül helyesebben tehetjük fel, hogy a különböző esetlegeshibák elegendően kiegyenlitik egymást, ha csak az egyes normalhelyekben az észleletek száma nem tulságosan aránytalan.

A legvalószínűbb elemek levezetése végett fel fogom állitani az egyenlitőre viszonyitott feltéti egyenleteket s e czélból átváltoztatom az eclipticai elemeket egyenlitőiekre:

$$\omega_0 = 83°56'53.''9$$
$$\Omega_0 = 211\ 31\ \ 3\cdot 1$$
$$i_0 = 81\ 57\ 50\cdot 2$$

A differential-hányadosok logarithmikus alakban a következők;

Egyenes emelkedési feltéti egyenletek:

$$9{\cdot}64852_n\, d\omega_0 + 9{\cdot}47018_n\, di_0 + 9{\cdot}40467\, d\Omega_0 + 4{\cdot}09770_n\, d\log q + 3{\cdot}35314\, dT + 4{\cdot}45227\, de = 0{\cdot}70757_n$$
$$9{\cdot}74578_n\, d\omega_0 + 9{\cdot}35560_n\, di_0 + 8{\cdot}63476\, d\Omega_0 + 3{\cdot}32808_n\, d\log q + 3{\cdot}41052\, dT + 4{\cdot}17296\, de = 0{\cdot}11859$$
$$9{\cdot}78171_n\, d\omega_0 + 9{\cdot}27474_n\, di_0 + 8{\cdot}46906_n\, d\Omega_0 + 4{\cdot}27250\, d\log q + 3{\cdot}43620\, dT + 3{\cdot}84754\, de = 0{\cdot}50365$$
$$9{\cdot}82413_n\, d\omega_0 + 9{\cdot}08888_n\, di_0 + 8{\cdot}98878_n\, d\Omega_0 + 4{\cdot}80282\, d\log q + 3{\cdot}46841\, dT + 3{\cdot}75823_n\, de = 0{\cdot}52048$$
$$9{\cdot}84497_n\, d\omega_0 + 8{\cdot}87277_n\, di_0 + 9{\cdot}05916_n\, d\Omega_0 + 4{\cdot}97067\, d\log q + 3{\cdot}48464\, dT + 4{\cdot}15290_n\, de = 9{\cdot}77159$$
$$9{\cdot}85904_n\, d\omega_0 + 8{\cdot}46775_n\, di_0 + 9{\cdot}04950_n\, d\Omega_0 + 5{\cdot}06435\, d\log q + 3{\cdot}49629\, dT + 4{\cdot}33098_n\, de = 0{\cdot}38426_n$$
$$9{\cdot}72591_n\, d\omega_0 + 9{\cdot}13976\, di_0 + 8{\cdot}66843\, d\Omega_0 + 5{\cdot}05588\, d\log q + 3{\cdot}37199\, dT + 4{\cdot}52682_n\, de = 1{\cdot}35294_n$$
$$9{\cdot}60685_n\, d\omega_0 + 9{\cdot}32606\, di_0 + 9{\cdot}26403\, d\Omega_0 + 4{\cdot}94437\, d\log q + 3{\cdot}27380\, dT + 4{\cdot}53599_n\, de = 1{\cdot}54765_n$$

Elhajlási egyenletek:

$$9{\cdot}80845\, d\omega_0 + 9{\cdot}56476_n\, di_0 + 9{\cdot}68395\, d\Omega_0 + 5{\cdot}48434\, d\log q + 3{\cdot}31865_n\, dT + 4{\cdot}27809_n\, de = 9{\cdot}55630_n$$
$$9{\cdot}60635\, d\omega_0 + 9{\cdot}64428_n\, di_0 + 9{\cdot}46487\, d\Omega_0 + 5{\cdot}35278\, d\log q + 3{\cdot}15767_n\, dT + 3{\cdot}83330_n\, de = 0{\cdot}68931_n$$
$$9{\cdot}44922\, d\omega_0 + 9{\cdot}67648_n\, di_0 + 9{\cdot}25127\, d\Omega_0 + 5{\cdot}29840\, d\log q + 3{\cdot}03781_n\, dT + 3{\cdot}40051_n\, de = 0{\cdot}69984_n$$
$$8{\cdot}98920\, d\omega_0 + 9{\cdot}71762_n\, di_0 + 7{\cdot}69406_n\, d\Omega_0 + 5{\cdot}27471\, d\log q + 2{\cdot}74864_n\, dT + 3{\cdot}10181\, de = 0{\cdot}15836_n$$
$$8{\cdot}51368_n\, d\omega_0 + 9{\cdot}73977_n\, di_0 + 9{\cdot}10711_n\, d\Omega_0 + 5{\cdot}30663\, d\log q + 2{\cdot}24161_n\, dT + 3{\cdot}25686\, de = 0{\cdot}37658_n$$
$$9{\cdot}15156_n\, d\omega_0 + 9{\cdot}75612_n\, di_0 + 9{\cdot}36909_n\, d\Omega_0 + 5{\cdot}35228\, d\log q + 2{\cdot}13321\, dT + 3{\cdot}09451\, de = 0{\cdot}64640_n$$
$$9{\cdot}62547_n\, d\omega_0 + 9{\cdot}64082_n\, di_0 + 9{\cdot}64593_n\, d\Omega_0 + 5{\cdot}41487\, d\log q + 2{\cdot}99954\, dT + 3{\cdot}85258_n\, de = 1{\cdot}25074_n$$
$$9{\cdot}71468_n\, d\omega_0 + 9{\cdot}53857_n\, di_0 + 9{\cdot}66680_n\, d\Omega_0 + 5{\cdot}44049\, d\log q + 3{\cdot}12091\, dT + 4{\cdot}15004_n\, de = 1{\cdot}33152_n$$

A jobb oldalon álló tagok némileg külömböznek a föntebb adott javításoktól, minthogy számításuk alkalmával máskép rendelkeztem az egyes észleletek súlyának meghatározása fölött; a végeredményre ez nem lesz semmi befolyással.

Az együtthatók nagyobb egyformasága kedveért uj ismeretleneket fogok oly módon bevezetni, hogy legnagyobb együtt hatójuk épen az egység legyen. E czélból legyen $9{\cdot}85904_n\, d\omega_0 = x$, $9{\cdot}75612_n\, di_0 = y$, $9{\cdot}68395\, d\Omega_0 = z$, $5{\cdot}48434\, d\log q = u$, $3{\cdot}49629\, dT = v$ s $4{\cdot}53599_n\, de = w$, mi által az egyenletek így módosulnak:

$$
\begin{array}{l}
9{\cdot}78948\,x + 9{\cdot}71406\,y + 9{\cdot}72072\,z + 8{\cdot}61336_n u + 9{\cdot}85685\,v + 9{\cdot}91628_n w = 0{\cdot}70757_n \\
9{\cdot}88674\,x + 9{\cdot}59948\,y + 8{\cdot}95081\,z + 7{\cdot}84374_n u + 9{\cdot}91423\,v + 9{\cdot}63697_n w = 0{\cdot}11859 \\
9{\cdot}92267\,x + 9{\cdot}51862\,y + 8{\cdot}78511_n z + 8{\cdot}78816\,u + 9{\cdot}93991\,v + 9{\cdot}31155_n w = 0{\cdot}50365 \\
9{\cdot}96509\,x + 9{\cdot}33276\,y + 9{\cdot}34083_n z + 9{\cdot}31848\,u + 9{\cdot}97212\,v + 9{\cdot}22224\,w = 0{\cdot}52048 \\
9{\cdot}98593\,x + 9{\cdot}11665\,y + 9{\cdot}37521_n z + 9{\cdot}48633\,u + 9{\cdot}98835\,v + 9{\cdot}61691\,w = 9{\cdot}77159 \\
0{\cdot}00000\,x + 8{\cdot}71163\,y + 9{\cdot}36555_n z + 9{\cdot}58001\,u + 0{\cdot}00000\,v + 9{\cdot}79499\,w = 0{\cdot}38426_n \\
9{\cdot}86687\,x + 9{\cdot}38364_n y + 8{\cdot}98448\,z + 9{\cdot}57154\,u + 9{\cdot}87570\,v + 9{\cdot}99083\,w = 1{\cdot}35294_n \\
9{\cdot}74781\,x + 9{\cdot}56994_n y + 9{\cdot}58008\,z + 9{\cdot}46003\,u + 9{\cdot}77751\,v + 0{\cdot}00000\,w = 1{\cdot}54765_n \\
9{\cdot}94941_n x + 9{\cdot}80864\,y + 0{\cdot}00000\,z + 0{\cdot}00000\,u + 9{\cdot}82236_n v + 9{\cdot}74210\,w = 9{\cdot}55630_n \\
9{\cdot}74731_n x + 9{\cdot}88816\,y + 9{\cdot}78092\,z + 9{\cdot}86844\,u + 9{\cdot}66138_n v + 9{\cdot}29731\,w = 0{\cdot}68931_n \\
9{\cdot}59018_n x + 9{\cdot}92036\,y + 9{\cdot}56732\,z + 9{\cdot}81406\,u + 9{\cdot}54152_n v + 8{\cdot}86452\,w = 0{\cdot}69984_n \\
9{\cdot}13016_n x + 9{\cdot}96150\,y + 8{\cdot}01011_n z + 9{\cdot}79037\,u + 9{\cdot}25235_n v + 8{\cdot}56582_n w = 0{\cdot}15836_n \\
8{\cdot}65464\,x + 9{\cdot}98365\,y + 9{\cdot}42316_n z + 9{\cdot}82229\,u + 8{\cdot}74532_n v + 8{\cdot}72087_n w = 0{\cdot}37658_n \\
9{\cdot}29252\,x + 0{\cdot}00000\,y + 9{\cdot}68514_n z + 9{\cdot}86794\,u + 8{\cdot}63692\,v + 8{\cdot}55852_n w = 0{\cdot}64640_n \\
9{\cdot}76643\,x + 9{\cdot}88470\,y + 9{\cdot}96198_n z + 9{\cdot}93053\,u + 9{\cdot}50325\,v + 9{\cdot}31659\,w = 1{\cdot}25074_n \\
9{\cdot}85564\,x + 9{\cdot}78245\,y + 9{\cdot}98285_n z + 9{\cdot}95615\,u + 9{\cdot}62462\,v + 9{\cdot}61405\,w = 1{\cdot}33152_n
\end{array}
$$

A legkisebb négyzetek módszere 6 meghatározó egyenletet adna, ha mind a 6 ismeretlennek értékét kivánnók, de jónak látom az excentricus tagot határozatlanúl hagyni s a többi változásokat vonalos függvényei gyanánt kifejezni, minek következtében csak ezen öt egyenletre van szükségem:

$$
\begin{array}{rrrrrcl}
+\,7{\cdot}48692\,x & +\,0{\cdot}56189\,y & -\,2{\cdot}72391\,z & +\,1{\cdot}00642\,u & +\,7{\cdot}00125\,v & = & -\,1{\cdot}22584\,w-56{\cdot}154\\
+\,0{\cdot}56189\,x & +\,6{\cdot}22258\,y & -\,0{\cdot}57963\,z & +\,4{\cdot}80392\,u & +\,0{\cdot}21654\,v & = & +\,0{\cdot}29583\,w-24{\cdot}722\\
-\,2{\cdot}72391\,x & -\,0{\cdot}57963\,y & +\,4{\cdot}16206\,z & -\,0{\cdot}58589\,u & -\,1{\cdot}72465\,v & = & +\,0{\cdot}11596\,w+15{\cdot}974\\
+\,1{\cdot}00642\,x & +\,4{\cdot}80392\,y & -\,0{\cdot}58589\,z & +\,5{\cdot}38954\,u & +\,0{\cdot}65212\,v & = & -\,2{\cdot}28690\,w-65{\cdot}785\\
+\,7{\cdot}00125\,x & +\,0{\cdot}21654\,y & -\,1{\cdot}72465\,z & +\,0{\cdot}65212\,u & +\,6{\cdot}78816\,v & = & -\,1{\cdot}15432\,w-46{\cdot}916
\end{array}
$$

Ezen egyenletek feloldása az ismeretlenek következő értékeit adja:

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 0{\cdot}71951\,w-255{\cdot}838\\
y & = & 1{\cdot}18597\,w+16{\cdot}873\\
z & = & 0{\cdot}13190\,w-63{\cdot}227\\
u & = & -\,1{\cdot}50809\,w-15{\cdot}609\\
v & = & -\,0{\cdot}77159\,w+241{\cdot}854
\end{array}
$$

avagy

$$
\begin{array}{rcl}
d\omega_0 & = & 34196''{\cdot}7\,de+353''{\cdot}94\\
di_0 & = & 69814{\cdot}3\,de-29{\cdot}58\\
d\Omega_0 & = & -\,9381{\cdot}6\,de-130{\cdot}95\\
d\log q & = & -\,0{\cdot}169854\,de-0{\cdot}0000512\\
dT & = & 8{\cdot}45442\,de+0{\cdot}077137
\end{array}
$$

A parabolicus felvételben $de=0$, minek következtében az elemváltozások ezek:

$$dT = +0{\cdot}07714$$
$$d\omega_0 = +5'\,53''{\cdot}9$$
$$d\Omega_0 = -2\;11{\cdot}0$$
$$di_0 = -0\;29{\cdot}6$$
$$d\log q = -0{\cdot}000051$$

Ha ezen változásokat az eredeti elemekhez csatolom s az uj elemrendszerrel a 8 normalhely értekét számítom, a hátramaradó hibák nem fognak egészen azonosak lenni a differential-számításból eredőkkel, minthogy a tekintetbe nem vett felsőbb rendű tagok csekély külömbségeket okoznak, melyek a következő összeállításból kitűnnek:

	Egyenes számítás		differentiál-számítás.	
	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
I.	$+1''{\cdot}8$	$-1''{\cdot}3$	$+2''{\cdot}0$	$-0''{\cdot}9$
II.	$-1{\cdot}7$	$-0{\cdot}9$	$-1{\cdot}5$	$-0{\cdot}4$
III.	$-2{\cdot}1$	$-1{\cdot}5$	$-1{\cdot}8$	$-1{\cdot}2$
IV.	$-0{\cdot}9$	$+0{\cdot}1$	$-0{\cdot}6$	$+0{\cdot}4$
V.	$+0{\cdot}1$	$-0{\cdot}1$	$+0{\cdot}4$	$+0{\cdot}2$
VI.	$+1{\cdot}0$	$-0{\cdot}9$	$+1{\cdot}4$	$-0{\cdot}6$
VII.	$-1{\cdot}7$	$-4{\cdot}7$	$-1{\cdot}0$	$-4{\cdot}3$
VIII.	$-3{\cdot}6$	$+5{\cdot}2$	$-2{\cdot}9$	$+5{\cdot}7$

Egy új kiegyenlítés nem csak ezen külömbségeket fogja kiküszöbőlni, hanem egyszersmind azokat is, melyek az első feloldásba a normalhelyek más felvétele által becsúsztak. Így még az elemeknek következő csekély változásait nyerem:

$$dT = +0{\cdot}00026$$
$$d\omega_0 = +0''{\cdot}7$$
$$d\Omega_0 = -1{\cdot}4$$
$$di_0 = -1{\cdot}4$$
$$d\log q = -0{\cdot}000005$$

melyek a hibanégyzetek összegét még 3 egységgel alábbszállítják. Az imigy változott elemekkel számítva, az egyes normalhelyekben a következő hibákat találjuk mind egyenes mind differential-számítás útján:

	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
I.	$+1''.5$	$+0''.5$
II.	-2.2	$+0.1$
III.	-2.6	-0.8
IV.	-1.2	-0.4
V.	$+0.1$	$+0.1$
VI.	$+1.2$	-0.8
VII.	-0.8	-4.5
VIII.	-2.1	$+5.7$

Ha az elemváltozásokat összeadjuk s az 1. számú egyenlítői elemekhez kapcsoljuk, mint legvalószínűbb egyenlítői elemrendszert a következőt találjuk:

$$
\begin{aligned}
T &= 1871.\ \text{Julius } 27{\cdot}05646 \text{ köz. berlini idő} \\
\omega_0 &= 84^0\ 2'\ 48''.5 \\
\Omega_0 &= 211\ 28\ 50{\cdot}7 \\
i_0 &= 81\ 57\ 19{\cdot}2 \\
\log q &= 0{\cdot}034763
\end{aligned}
$$

Az eclipticai elemeket differential-hányadosok segítségével vezetjük le, melyeknek számbeli értékei logarithmikus alakban:

$$
\begin{aligned}
d\Omega &= 9{\cdot}99523\, d\Omega_0 + 9{\cdot}33739\, di_0 \\
di &= 9{\cdot}32353_n d\Omega_0 + 9{\cdot}98994\, di_0 \\
d(\omega-\omega_0) &= 9{\cdot}53817\, d\Omega_0 + 8{\cdot}65463\, di_0
\end{aligned}
$$

A jelentett műtétel kivitele által lesz: $d\omega = 5'7''.5$, $d\Omega = -2'17''.7$, $di = -2''.4$.

Ha ezen értékeket az eredeti elemekhez adjuk, már megkapjuk a legvalószinűbb parabolikus elemrendszert:

$$
\text{II. sz. elemek}\left\{
\begin{aligned}
T &= 1871.\ \text{Julius } 27{\cdot}05646 \text{ köz. Berl. idő} \\
\omega &= 96^0\ 18'\ 56''.7 \\
\Omega &= 211\ 54\ 40{\cdot}3 \\
i &= 101\ 59\ 23{\cdot}6 \\
\log q &= 0{\cdot}031763
\end{aligned}
\right.
\quad \text{közép éjegyen } 1871{\cdot}0
$$

A hátramaradó hibáknak föntebb levezetett táblázatából kiderűl, hogy az üstökösnek valódi pályája a parabolától nem igen különbözhetik, s ha az excentricitást tekintetbe is vennők, nem tudnók sokkal alább szállítani a hibanégyzetek összegét. Kifejeztük ugyanis az egyes elemváltozásokat d e vonalos függvényei gyanánt; vezessük be ezen értékeket az eredeti feltéti egyenletekbe, akkor d e meghatározására következő feltéti egyenletek erednek:

	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
I.	6571·4 de — 1·5 = 0	6475·3 de — 0·5 = 0
II.	637·9 de + 2·2 = 0	—1113·0 de — 0·1 = 0
III.	— 556·3 de + 2·6 = 0	—3942·6 de + 0·8 = 0
IV.	— 746·2 de + 1·2 = 0	—5407·5 de + 0·4 = 0
V.	— 723·0 de — 0·1 = 0	—4417·3 de — 0·1 = 0
VI.	— 986·5 de — 1·2 = 0	—2779·4 de + 0·8 = 0
VII.	—3183·0 de + 0·5 = 0	3946·8 de + 3·2 = 0
VIII.	—3948·1 de + 1·1 = 0	5814·4 de — 3·3 = 0

A legkisebb négyzetek módszere d e értékét tevőleges jellel adja, ugyanis de = + 0·000124, mi annyit jelentene, hogy a hyperbola még valamivel valószínűbb a hajtaléknál, de minthogy tekintetbevételénél a hibanégyzetek összege csak 3 egységgel száll alább, megállapodhatunk a parabolánál mint azon kúpszeletnél, melyben az üstökös mozog. A központkülségi tagok nagy együtthatói egyszersmind bizonyítják a levezetett elemrendszer nagy határozottságát, minthogy d e értékének legszélsőbb határai, melyeknél már meg nem engedhető hibák maradnak hátra, +0·001 és —0·001 s ezeknek a többi elemekben következő szélső határok felelnek meg:

$$
\begin{aligned}
dT &= \pm\, 0{\cdot}0084 \\
d\omega &= \pm\, 34'' \\
d\Omega &= \pm\, 6 \\
di &= \pm\, 70 \\
d\log q &= \pm\, 0{\cdot}00017
\end{aligned}
$$

Ezen pályaszámítás azt mutatja, hogy legjobb esetben az üstökös keringési ideje 36000 évnél nagyobb lenne s ezen körülménynél fogva nem tartottam szükségesnek a háborgatások számítását, mely ezen eredményen csak igen keveset módosítana.

Nem merném állítani, hogy az ilyen számítás döntő azon irányban, miszerint az üstökösnek nem lehet sokkal rövidebb keringési ideje; nem szabad t. i. szem elől téveszteni azon fontos körülményt, hogy a számítások azon, — egészben véve nem is igen valószinű, — felvételen alapúlnak, miszerint először az üstökös súlypontja idők folytán változatlanúl tartja meg fekvését, továbbá pedig hogy a látszólagos súlypont vagyis az üstökösnek látszólagos legsűrűbb része, melyet általános szokás szerint észlelnek a csillagászok, láthatóságának egész ideje alatt ugyanaz marad. Az első pont ellen minden tapasztalatunk szól, melyet az üstökösök belső alkata, belső esékeny egyensúlya fölött szerezhettünk. Mily tanulságos ez irányban a Biela-féle üstökös ketté oszlása s később mindinkább folytatódó felbomlása, avagy egy s ugyanazon meteorrajban keringő több hasonló elemű üstökös kétségkivűli előjövetele! Még több szól a második pont ellen, különösen oly esetekben, ha az üstökösök a naphoz igen közel jönnek. Bár változatlan maradjon is súlypontjuk, a bennök létrejövő fényfejlődésekről igen kérdéses, valljon nem eszközölhetik ma az egyik holnap a másik pont látszólagos nagyobb világosságát, mely változások vagy törvényszerűleg haladnak s így a számításban nem árúlják el magukat, vagy rendetlenek, a míkor azt fogjuk mondani, hogy az üstökös roszúl volt észlelhető, s hogy onnét erednének az egyes megfigyelésekben feltünő nagyobb hibák. Napról napra szaporodik a biztosan kimutatható ellipticus üstökösök száma, s a körülbelűl egy század óta felfedezett üstökösök észleletei oly pontosak, hogy későbbi időkben sejditett azonosságuk kérdése könnyen eldönthető lesz, mig mi mult századok bizonytalan vizsgálataira szorúlunk, melyekből különféle értelmezéssel a legeltérőbb eredményeket lehet levezetni, úgy hogy jelenleg ilyetén kisérletek rendesen sikertelenek maradnak.

A

HŐ-ELMÉLET

MÁSODIK FŐTÉTELE,

LEVEZETVE AZ ELSŐBŐL.

SZILY KÁLMÁN,

R. TAGTÓL.

(SZÉKFOGLALÓ ÉRTEKEZÉS.)

(Előadta a III. osztály ülésén 1875. május 10-dikén.)

BUDAPEST, 1875.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALÁBAN.

(Az Akadémia bérházában)

Budapest, 1875. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

A hőelmélet második főtétele, levezetve az elsőből.

SZILY KÁLMÁN R. TAGTÓL

(Székfoglaló értekezés.)

(Előadta a III. osztály ülésén 1875. május 10.)

A magy. tud. Akadémia már két izben tüntette ki csekély személyemet, mind a kétszer érdemeimen felül. Először 1865. dec. 10-én, midőn a külföldi egyetemekről hazatérő ifjút levelező tagjai sorába választotta, és másodszor 1873. május 21-én, midőn szerény működésemet túlbecsülve, rendes tagjai közé emelt. Sem először, sem utóbb nem voltak még érdemeim, legalább elegendő érdemeim nem, hogy annyi kitünőség között méltóan foglalhassak helyet.

Kitüntetést, melyre nem szereztünk érdemet, igen nehéz megköszönni. A köszönetnél talán inkább helyén van az az igéret, hogy a meg nem érdemlett jutalmat legalább utólagosan törekszünk kiérdemelni. Fogadja a t. Akadémia e perczben, midőn mint rendes tag széket foglalok, azon igéretemet, hogy úgy, mint eddig, ezentúl is minden erőmből arra fogok törekedni, hogy a magyar tudományosságnak és ez által a m. tud. Akadémiának is tőlem telhetőleg szolgálatokat tehessek.

Székfoglaló értekezésemül — tudva azt, hogy a m. Akadémia szivesebben veszi, ha tagjai beszédek tartása helyett, inkább a maguk szaktudományának előbbre viteléről tesznek bizonyságot — székfoglalómúl egy speciális tárgyú, szaktanulmányaim körébe vágó dolgozatot választottam.

Nincs olyan elmélet s nem is lesz soha, mely a be nem bizonyitható, meg nem magyarázható alapföltevéseket, axiómákat egészen nélkülözhetné. Még a legtökéletesebb theoria is, a mathematika, mint tudva van, be nem bizonyitható, meg nem magyarázható axiómákból indul ki. — Igy van ez az elméleti természettanban is. Bármennyire fejlődjenek és tökéletesedjenek is idők jártával a physikai theoriák, mégis mindig bizonyos alap-föltevésekből, alapelvekből fognak kiindulni, melyek magukban véve meg nem magyarázhatók. *De annál tökéletesebbnek tartandó valamely elmélet, mentől kevesebb ily be nem bizonyitható alap-föltevésre van szüksége, és mentől több és mentől többféle tényt képes magába felölelni.*

A melegség mechanikai elmélete, mai állásában, két ily fundamentalis elvre, két ily főtantételre van alapítva. Az első fő elv (a Mayer-Jouleféle) nem egyéb, mint az erély megmaradása elvének, ezen universalis elvnek alkalmazása a melegségre, s közönségesen igy szokott formuláztatni:

»A munka átalakulhat melegséggé és viszont a melegség munkává; s e közben az egyik mennyisége mindig aránylagos a másik mennyiségével.«

A második fő-elv (a Carnot-Clausiusféle) nem hagyja magát oly egyszerűen kifejezni s nem is illeszthető oly könnyen egy általános physikai elv rámájába, mint az első. E második főelv, Clausius formulázása szerint, [1]) igy hangzik:

»Valahányszor melegség munkává alakul, de úgy, hogy a közbenjáró test állapotában maradandó változás nem áll be, mindannyiszor bizonyos melegmennyiségnek át is kell menni valamely melegebb testből hidegebbe, és e két melegmennyiség viszonya nem függ a közbenjáró test minőségétől, hanem csupán annak a két testnek mérsékletétől, melyek között az átmenetel történik.«

Nyilvánvaló, hogy az ily complicált tétel, a milyen ez, bármennyire egyezzék is a tapasztalati tényekkel, még sem fogadható el egyszerű axióma gyanánt. Keresni kellett valamely könnyebben kifejezhető, világosabban elképzelhető alap-

[1]) Pogg. Ann. Bd. 93. Pag. 481.

elvet, melyből azután a Carnot-Clausiusféle elv mathematikai szigorusággal levezethető legyen. És találtak is többféle ily kisegitő új elvet a főelv levezetésére.

Tartsunk egy rövid szemlét azok fölött a hypothetikus mellék-elvek fölött, melyeket a Carnot-Clausiusféle főelv levezetésére javasoltak. E hypothesiseket a könnyebb áttekintés végett két csoportba osztályozzuk. Az első csoportba sorozzuk azon hypothesiseket, melyek általában a melegségnek, mint ágensnek magaviseletére vonatkoznak, anélkül, hogy a kérdést, minő mozgás legyen a melegség? feszegetnék. A másik csoportba sorozzuk azon hypothesiseket, melyek a melegségi mozgás minőségét illetik.

Az első csoportba (a thermikus hypothesisek csoportjába) a következők sorozhatók:

1) A Clausius axiómája, [1]) melyet a berlini akadémián az 1850-ik évi február havában tartott alapvető értekezésében javasolt először s melyet utóbb több izben bővebben is kifejtett, t. i. *hogy a melegség magától sohasem megy a hidegebbről melegebbre.«*

2. A Thomsonféle axioma [2]), mely szabad forditásban igy hangzik: »*Valamely test melegségéből mechanikai munkát csak ugy nyerhetünk, ha környezetében nálánál hidegebb test is van.«*

3. A Clausius második hypothesise [3]), melyet a disgregatiora vonatkozó értekezésében állitott fel s mely igy hangzik: »*a mechanikai munka, melyet a melegség valamely test disgregatiojának változtatásában végezhet, aránylagos az absolut mérséklettel, a melynél a változás történik.«*

4) A Belpaire axiomája [4]), melyszerint *valamely végtelen kicsiny mérsékletü isothermikus transformationál a munkává alakult erély mennyisége is csak végtelen kicsiny lehet.*

Ezek ama thermikus hypothesisek, melyek a Carnot-Clausiusféle elv levezetésére tudtommal javaslatba hozattak.

Az ugyan e végből javasolt *dynamikai hypothesisek*, mely-

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 79. Pag. 368. és 500.

[2]) Edinb. Trans. XX. és Phil. mag. Ser. IV. Vol. 4.

[3]) Pogg. Ann. Bd. 116. Pag. 73.

[4]) Bulletin de l'Acad. de Belg. XXXIV.

lyek tehát a melegségi mozgás minőségére vonatkoznak, a következők:

1) Az úgy nevezett molekuláris vortexek hypothesise[1]), melyet 1850-ben Rankine állitott fel, s mely szerint a testrészecskék köralakú áramokban keringenének.

2) A keringő áramok hypothesise [2]) (circulating streams of any figure whatever), melyet ugyancsak Rankine 1851-ben fejtett ki s 1865-ben jelentékenyen egyszerüsbitett.

3) A periodikus mozgás hypothesise[3]), melyet Boltzmann 1866-ban alkalmazott a második főelv levezetésére.

4) A quasi-periodikus mozgás hypothesise[4]), melyet Clausius 1871-ben tárgyalt először s azóta több nagy értekezésben bővebben kifejtett.

Ezek azon hypothesisek, melyeket a második főelv levezetésére ekkoráig alkalmaztak. Leginkább el vannak terjedve és minthogy legplausibilisebbek, legtöbb keletre is találnak közöttük: a Clausius axiómája és a Thomsonféle axioma.

De vajjon *nem lehetne-e a második fő elvet egyenesen az első főelvből, minden további föltevés statuálása nélkül levezetni?* Ha ez sikerülhetne, úgy a hőelmélet tényleg csak egy tételre lenne alapítva, t. i. arra, melyet az erély megmaradásának universalis elve fejez ki.

E kérdés ekkoráig nemcsak hogy megoldva, de még megvizsgálva sincs igazán. Tudtommal csakis Rankine és Clausius szóltak e kérdéshez, s ezek is csakúgy mellékesen, odavetve. Rankine a Phil. Mag. IV. Ser. 7-ik kötetében a 250-ik lapon igy nyilatkozik: »most arra a következtetésre jöttem, hogy Carnot törvénye a hő elméletében nem független elv hanem mint következmény levezethető a melegség és mechanikai munka kölcsönös átalakithatóságának egyenleteiből« s hozzá teszi, hogy ezt meg is mutatta értekezése első fejezetében. Azonban elfeledi, hogy az idézett első fejezetben nagyon is hypothetikus alapra állott, midőn többek között a mérsékletet ekként értelmezte: »a mérséklet függvénye a molekulár-

---

[1]) Edinb. Trans. XX.

[2]) Edinb. Trans. for 1851. és Phil. Mag. Ser. IV. Vol. 30.

[3]) Sitzungsberichte der Wiener Acad. der Wiss. Bd. 53.

[4]) Pogg. Ann. Bd. 142.

vortexek keringési sebessége négyzetének, elosztva az atómatmospherák rugalmassági együtthatójával.« Természetes, hogy az ily complicált hypothesisre alapitott levezetést senki sem tartotta elfogadhatónak. Rankine következtetése e szerint nem egyéb mint puszta állitás, melynek bebizonyitásával adós maradt. — Clausius meg épen csak egész mellékesen érinti e kérdést azon szép előadásában, melyet a német természetvizsgálók és orvosok 41-ik gyülésén Frankfurtban tartott, midőn t. i. igy szól: »de van még egy második tétel is, mely amabban (t. i. az elsőben) nem foglaltatik benne és a melyet külön be kell bizonyitani, minthogy a két tétel együtt véve formálja azt a teljes alapot, melyen a mechanikai hőelmélet áll.« — A mint látható, Clausius nyilatkozata homlokegyenest ellenkezik Rankinével. Az egyik azt állitja — de be nem bizonyitja — hogy a második főtétel az elsőből levezethető; a másik pedig azt a véleményt fejezi ki, hogy a második főtétel nem foglaltatik benne az elsőben.

A jelen értekezés feladata e fontos kérdést tűzetesebben megvizsgálni; és megkisérteni a második főtétel levezetését az elsőből, minden további mellékhypothesis nélkül.

I.

Minden testet számtalan sok anyagi pont halmazának lehet tekinteni, melyek belső és külső erők hatása alatt, folyvást a test térfogatán belül maradva, bizonyos ismeretlen törvény szerint mozognak. E belső mozgás természetére nézve nem fogjuk magunkat semminemű hypothesishez kötni, egyedül csak azt tételezzük fel, a mi különben a hőelmélet első főelvének is alapját képezi, hogy t. i. a test részecskéi nincsenek nyugalomban, hanem valaminémű mozgásban.

E belső mozgás külső jellemzésére, vagyis a test *állapotának* hőtani meghatározására, mint tudva van, két független változó kivántatik. Nevezzük e független változókat ξ-nek és η-nak, úgy a test állapota mindaddig változatlan, mig sem ξ, sem η nem változik; mihelyt azonban akár ξ akár η, vagy mindakettő megváltozik, megváltozik egyúttal a test állapota is. (Ily állapotjelzőkül rendesen a mérsékletet és a térfogatot, vagy a nyomást és a térfogatot szokták választani.)

Gondoljunk magunknak egy változatlan állapotú testet; ξ és η tehát állandók, az időtől függetlenek. De azért a testet alkotó egyes anyagi pontok mozgási állapota pillanatról pillanatra változhatik. Szemeljünk ki a számtalan sok anyagi pont közül egyet, példaképen. Tömege legyen m; derékszögű coordinátái, az időszámitás kezdetén, vagyis a $t=o$ pillanatban legyenek: x, y, z; sebességének componensei x', y', z', gyorsulásának componensei x'', y'', z''. Már a következő pillanatban, mondjuk δt idő mulva, más lesz a helye, más a sebessége és más a gyorsulása, következéskép más lesz a mozgási erélye, valamint a helyzeti erélye is. Ép igy a többi pontoknál. Az egyes pontok mozgási faktorai változékonyak, de az egész testre kiterjedő összességükben állandók. Egy-egy pont mozgási erélye változó, de az egész test összes mozgási erélye T állandó; hasonlóképen egy-egy pont helyzeti erélye változó, de az egész test összes helyzeti erélye U állandó. *A mig tehát a test állapota változatlan,* felfogásom szerint, *mindaddig változatlan a test összes mozgási erélye is, és mindaddig változatlan a test összes helyzeti erélye is. A meddig tehát*

$$\delta\xi = o \text{ és } \delta\eta = o$$

ugyanaddig $\delta T = o$

és $\delta U = o.$

Fejezzük ki a két utóbbi egyenletet explicite, az egyes pontokra vonatkozó variatiók által. A föntebb megállapitott jelölések értelmében:

$$2T = \Sigma m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

tehát: $\Sigma m\,(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') = o \,.\,.\,.\,.\,.\ (1)$

Minthogy továbbá az oly test, melynek állapota nem változik, külső munkát nem végezhet; következik, hogy a δx, δy, δz . . . . elmozdulás közben végrehajtott munkák összege egyenlő lesz a helyzeti erély változásával, vagyis;

$$-\Sigma m\,(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = o \,.\,.\,.\,.\,.\ (2)$$

Az 1) és 2) egyenlet összekapcsolása által könnyen szert tehetünk egy 3-ik egyenletre, mely az idő variatioja és az egyes pontok helyzetének variatioja közti összefüggést fejezi ki.

Szorozzuk az 1) és 2) alatti egyenleteket dt-vel és adjuk őket össze:

$$\Sigma m\,(x'\delta x' + \ldots - x''\delta x - \ldots)\,dt = o$$

a mi még, $x' \ldots$ és $x'' \ldots$ jelentésénél fogva igy is irható:

$$\Sigma m\,(dx\,\delta x' + \ldots - dx'\,\delta x - \ldots) = o$$

úgyde: $dx'\,\delta x = d\,(x'\,\delta x) - x'\delta dx$

tehát: $\Sigma m\,(dx\,\delta x' + \ldots + x'\delta dx + \ldots) = d\,\Sigma m\,(x'\delta x + \ldots)$

azonban: $\delta\,(x'dx) = dx\delta x' + x'\delta dx$

És igy $\delta \Sigma m\,(x'dx + \ldots) = d\Sigma m\,(x'\delta x + \ldots)$

vagy ha az egyenlet baloldalán dt-vel szorzunk és osztunk és 2 T föntebbi értékét figyelembe veszszük

$$\delta\,(2\,T\,dt) = d\,\Sigma m\,(x'\,\delta\,x + \ldots)$$

Tudván azt, hogy T az időtől független, határozatlan integratio által nyerjük:

$$\Sigma m\,(x'\,\delta\,x + \ldots) = 2\,T\,\delta t + \text{Const.}$$

Az integratio állandójának meghatározására tudjuk, hogy midőn $\delta t = o$; akkor $\delta x = o \ldots$; tehát

$$\Sigma m\,(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) = 2T\,.\,\delta t \ldots (3)$$

Az 1), 2) és 3) alatti egyenletek mindaddig érvényesek maradnak s csak is addig maradnak érvényesek, mig a test állapota változatlan.

II.

Ekkoráig a test változatlan állapotából vontunk következtetéseket; térjünk most át az állapot-változások tárgyalására.

Legyen valamely test kezdeti (változás előtti) állapota a ξ_0 és η_0 állandók által meghatározva. A test valamelyik részecskéjének tömegét jelöljük megint *m*-mel; derékszögű coordinátáit az időszámitás kezdetén, vagyis a t=o pillanatban $x_0\ y_0\ z_0$-val; sebességi és gyorsulási componenseit $x'_0 \ldots$ és $x''_0 \ldots$ val. A test összes mozgási erélye legyen T_0, összes helyzeti erélye U_0. Ha a test állapota változatlan maradna, úgy T_0 és U_0 állandó levén, az egyes részecskékre vonatkozó variatiok folyvást eleget tennének az 1), 2) és 3) alatti egyenleteknek.

De a t=o pillanattól fogva kezdjünk a testtel erélyt közölni. Ennek következtében a test állapota is változásnak indul. A mily mértékben több és több erélyt szállitunk a testbe; a test állapota is mindinkább megváltozik. Tegyük fel, hogy az állapot-változásának sora és rendje akként legyen szabályozva, hogy az állapotjelzők minden pillanatban eleget tegyenek az

$$\eta = f(\xi) \ldots\ldots (4)$$

egyenletnek; a mi nem jelent egyebet, mint azt, hogy az állapotváltozások egymás után következése — mondjuk az *állapot pályája* — szabatosan meg van határozva. Amint több és több erélyt szállitunk a testbe, a test állapota is tovább és tovább halad a megszabott pályán. Folytassuk az erélyszállitást mindaddig, mig a test állapotjelzői (a 4-ik egyenletnek megfelelőleg) ξ_1 és η_1 értéket vesznek fől; az eddig beszállitott erély összes mennyisége legyen Q. Az erélyközlés megszüntével, szünjék meg a test állapotának változása is; ettől fogva tehát az állapotjelzők ξ_1 és η_1 és velök együtt az ekkori mozgási erély T_1 és az ekkori helyzeti erély U_1 ismét megmaradnak a mostani értéken.

A testet átvittük tehát a (ξ_0, η_0) kezdetállapotból a változásoknak bizonyos során és rendjén végig a (ξ_1 η_1) végállapotba, és e közben közöltünk vele összesen Q mennyiségü erélyt. A szóban forgó test kezdet-állapota (ξ_0, η_0), végállapota (ξ_1 η_1) és az állapotváltozások sora és rendje (vagyis az *f* functio) meg lévén határozva, *a testtel közlendő összes erélymennyiség Q is egyjelentésüleg meg van határozva.* Történjék az erély szállitása akár gyorsabban akár lassabban, a beszállitandó erély összege Q állandóan ugyanaz lesz, csak a pálya minősége s annak eleje és vége ne változzék. Más szóval: a pálya kezdetpontja, végpontja és minősége által a beszállitandó erély összes mennyisége teljesen meg van határozva, ellenben *az átvitel időtartama nincs meghatározva.* Ugyanazon Q mellett az átvitel időtartama, az erélyszállitás középgyorsaságához képest, minden tetszőleges értéket fölvehet o és ∞ között. Nevezzük az átvitel időtartamát *t*-nek, és jegyezzük meg, hogy *t mekkorasága egészen tetszésünktől függ.*

Eszközöljük most ugyanannak a testnek átvitelét ugyanabból a (ξ_0 η_0) kezdet-állapotból ugyanabba a (ξ_1 η_1) végállapotba, de úgy, hogy az állapotváltozások mostani sora és rendje (nevezzük ezt az állapot második pályájának) az imént követett egymásutántól (az állapot első pályájától) végtelen kevéssé különbözzék, vagyis a 4-ik egyenletbeli *f* functio *alakja* is szenvedjen egy végtelen kis változást. És az erély-közlés most ne kezdődjék mindjárt a t=o pillanatban, hanem megfelelőleg δt végtelen kis idővel később. E szerint az állapotváltozás megindulásakor az *m* részecskének coordinátái nem lesznek többé x_0, y_0, z_0; hanem tőlük δx_0, δy_0, δz_0-sal különbözők; ép igy a sebességi és gyorsulási componensek. S minthogy ezen δt idő alatt a test állapota még változatlan maradt, a föntebb 3)-mal jegyzett egyenlet ezen δt idő végeig még érvényes fog lenni, vagyis lesz:

$$\Sigma m\,(x'_0\,\delta x_0 + y'_0\,\delta y_0 + z'_0\,\delta z_0) = 2T_0\,\delta t \ldots . (5)$$

A δt idő végén induljon meg az erély közlése, és pedig gyorsaságára nézve akként szabályozva az előbbihez képest, hogy *a test ugyanazon t idő lefolyása alatt érkezzék a* $(\xi_1\ \eta_1)$ *végállapotba,* a mennyi alatt az első pályán oda érkezett. A most közlött erély összes mennyisége legyen megfelelőleg $Q + \delta Q$.

A második pályán, melynél az állapotváltozás kezdete δt idővel későbbre esett, ennek megfelelőleg az állapotváltozás vége is δt idővel későbbre, vagyis a $t + \delta t$ időpillanatra fog esni. Ezen $t + \delta t$ időpillanatban annak a bizonyos *m* részecskének coordinátái, sebességi és gyorsulási componensei nem lesznek többé azok, a mik az előbbi átvitel végén, a t időpillanatban voltak, t. i. $x_1 \ldots . x'_1 \ldots .$ és $x''_1 \ldots$, hanem ezektől $\delta x_1 \ldots \delta x'_1 \ldots$ és $\delta x''_1 \ldots$ vel különbözők. Minthogy pedig egyfelől $x_1 \ldots$, másfelől pedig $x_1 + \delta x_1 \ldots$ az *m* részecskének ugyanazon $(\xi_1\ \eta_1)$ állapothoz tartozó coordinátáit ábrázolják s egymástól csak annyiban különböznek, hogy az elsők a *t* időpillanatnak, az utóbbiak pedig a $t + \delta t$ időpillanatnak, felelnek meg, a föntebb 3)-mal jegyzett egyenlet ezen variatiokra is érvényes fog lenni, vagy is lesz:

$$\Sigma m\,(x_1'\,\delta x_1 + y_1'\,\delta y_1 + z'_1\,\delta z_1) = 2T_1 . \delta t \ldots . 6)$$

Az 5) és 7)-tal jegyzett egyenletek csakis az állapotváltozás kezdetére és végére vonatkoznak, s az átvitel egész folyamatára nem alkalmazhatók. Keresnünk kell tehát egy oly relatiot, mely az állapotváltozásnak akármelyik stadiumára is érvényes legyen.

Tegyük fel, hogy az állapot első pályáján a test, valamely τ idő elfolyása alatt, egy bizonyos (ξ η) állapotba érkezett, melyet röviden A_1 állapotnak fogunk nevezni. Ezen A_1 állapotban legyen a test összes mozgási erélye T, összes helyzeti erélye U; s az *m* részecskének coordinátái, sebességi és gyorsulási componensei $x \ldots x' \ldots$ és $x'' \ldots$

Az állapot második pályáján a test ugyancsak ezen τ idő elfolyása alatt — tehát a $\tau + \delta t$ időpillanatban — egy bizonyos ($\xi + \delta\xi$, $\eta + \delta\eta$) állapotba érkezik, melyet nevezzünk röviden A_2 állapotnak. Az A_2 állapothoz tartozó mennyiségek csak variatiok által külömböznek az A_1 állapotbeliektől. Az *m* részecske most nem lesz az $x \ldots$ helyzetben, hanem ettől elmozdulva $\delta x \ldots$ vel; sebességi és gyorsulási componensei is meglesznek változva $\delta x' \ldots$ és $\delta x'' \ldots$ vel.

Határozzuk meg már most, mennyi erélyt kellene a testtel közölni, hogy a δx, δy, δz elmozdulások által kijelölt utat követve, az A_1 állapotból az A_2 állapotba térjen át. Jelöljük e keresett erély mennyiséget $\delta\varepsilon$-nal és vegyük figyelembe, hogy $\delta\varepsilon$ összege lesz az eleven erőbeli gyarapodásnak δT-nek és azon munkának, melyet a test az alatt végez, mig részecskéi a működő erők ellenében, az A_1-nek megfelelő helyzetükből az A_2-höz tartozó helyzetbe jutnak; és igy

$$\delta\varepsilon = \delta T - \Sigma m\,(x''\,\delta x + y''\,\delta y + z''\,\delta z)$$

vagy még:

$$\delta\varepsilon = \Sigma m\,(x'\,\delta x' + y'\delta y' + z'\,\delta z' - x''\,\delta x - y''\,\delta y - z''\,dz) \ldots \quad 7)$$

Jobbról-balról dt-vel szorozva és $x' \ldots x''$ jelentését tekintetbe véve:

$$\delta\varepsilon\,.\,dt = \Sigma m\,(dx\,\delta x' + \ldots\ldots - dx'\,\delta x - \ldots.)$$

úgyde: $\quad dx'\,\delta x = d\,(x'\,\delta x) - x'\delta\,dx$

és $\quad \delta\,(x'\,dx) = dx\,\delta x' + x'\,\delta dx$

tehát: $\quad \delta\varepsilon\,.\,dt = \delta\Sigma m\,(x'dx + \ldots.) - d\Sigma m\,(x'\delta x + \ldots.)$

Integráljuk ez egyenletet a kezdet és végállapotnak megfelelő határok között, és vegyük figyelembe, hogy az időszámitás kezdetén a test még a kezdeti állapotban, a t pillanatban pedig már a végállapotban van:

$$\int_0^t \delta\varepsilon\,dt = \delta\int_0^{t_1} \Sigma m(x'dx + ..) - \Sigma m(x_1'\delta x_1 + ..) - \Sigma m(x_0'\delta x_0 + ..) \ldots$$

A jobb oldalon levő integrált transformálva, s az 5) és 6) alatti egyenleteket tekintetbe véve:

$$\int_0^t \delta\varepsilon . dt = 2\delta \int_0^t T\, dt - 2\, T_1\, \delta t + 2\, T_0\, \delta t$$

Minthogy T_1 és T_0 állandók, az egyenlet még igy is irható:

$$\int_0^t \delta\varepsilon . dt = 2\delta \int_0^t (T - T_1 + T_0)\, dt \; .\;.\;.\;. \; (9)$$

Azonban *az átvitel időtartama még tetszőlegesen választható;* a 9) alatti egyenlet igaz marad, akár tartson az átvitel hosszabb, vagy rövidebb ideig.

A $\delta\varepsilon$ erélymennyiség egy bizonyos megszabott átvitelnél valami függvénye az időnek. De az átvitel ugyanabból a kezdetállapotból ugyanabba a végállapotba és ugyanazon a pályán, a mi az időt illeti, egész tetszőlegesen eszközölhető; e szerint $\delta\varepsilon$, az erélyközlés gyorsaságához képest, más meg más függvénye az időnek. Az erélyközlés gyorsaságát kellően választva,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \delta\varepsilon \, . \, dt = \overline{\delta\varepsilon}$$

minden tetszőleges, végtelen kis értéket fölvehet.

Szabjuk meg az erélyközlés gyorsaságát akként, hogy az átvitel időtartama eleget tegyen a következő feltételi egyenletnek:

$$\int_0^t \delta\varepsilon \, . \, dt = t \, . \, \delta Q \; .\;.\;.\;. \; (10)$$

hol δQ azon erély mennyiséget jelenti, a mennyivel a második pályán többet kellett a testbe szállitani, mint az első pályán.

Az átvitelnek ezt a bizonyos, meghatározott időtartamát jelöljük megkülönböztetés végett i-vel; úgy:

$$\frac{1}{i} \int_0^i \delta\varepsilon . dt = \delta Q$$

és:

$$i \delta Q = 2\,\delta \int_0^i (T - T_1 + T_0)\, dt$$

vagy ha T középértékét ezen i idő alatt $\overline{T}$-vel jelöljük, és rövidség okáért:

$$\overline{T} - T_1 + T_0 = \mathfrak{T}$$

teszszük, úgy $$i\,\delta Q = 2\,\delta\,(i\,\mathfrak{T})$$

és ebből: $$\frac{\delta Q}{\mathfrak{T}} = 2\,\delta \log (i\,\mathfrak{T}) \ldots . (12)$$

A 12) alatti egyenlet alakjára nézve tökéletesen megegyez azon egyenlettel, melyre egy nem régiben közzétett dolgozatomban Hamilton tételét *) visszavezettem. Akkoriban azon föltevésből indultam ki, hogy

$$\Sigma m\,(x'_1 \delta x_1 + \ldots) = \Sigma m\,(x_0' \delta x_0 + \ldots)$$

E föltevést elejtve, mint látjuk, az ottani $\overline{T}$ helyébe $\mathfrak{T}$ lép. A jelen levezetésben Hamilton azon föltevését is mellőztem, hogy a működő erőknek erőfüggvényök legyen.

Alkalmazzuk már most a 12) alatti egyenletet az egyik pályából a másikba átlépő állapotok helyett azon állapotváltozásokra, melyek egy-ugyanazon pálya mentében fordulnak elő. A variatio jele helyett a differentiatio jelét téve:

$$\frac{dQ}{\mathfrak{T}} = 2\,d \log (i\,\mathfrak{T}) \ldots (13)$$

Mindaddig, míg a test állapotát nem változtatja, $Q = o$ és $$\mathfrak{T} = T_0 - T_0 + T_0 = T_0$$ a miből következik, hogy ugyanaddig i is állandó. A test minden $(\xi\eta)$ állapotára i-nek és $\mathfrak{T}$-nek bizonyos meghatározott értéke van, mely mindaddig változatlan, mig a test ugyanabban az állapotban van. Más állapotba térve, i-nek és $\mathfrak{T}$-nek más értéke lesz, mely azonban megint mindaddig állandó, mig a test ebben az állapotban van.

Integráljuk már most a 13.) alatti kifejezést bizonyos kezdet- és végállapotnak megfelelő határok között

$$\int_0^{\prime} \frac{dQ}{\mathfrak{T}} = 2 \log \frac{(i\mathfrak{T})_{\prime}}{(i\mathfrak{T})_0}$$

Terjeszszük ki az integrált egy egész körfolyamra, úgy

$$\int \frac{dQ}{\mathfrak{T}} = o \ldots\ldots (14)$$

*) A Hamilton-féle elv és a mechanikai hőelmélet második főtétele. (Értekezések a mathem. tudományok köréből. I. kötet. X. szám.)

Ezen egyenlet tökéletesen megfelel azon

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

egyenletnek, melyet Clausius 1854-ben állitott fel, emlitett axiómája segitségével. A különbség, mely a két kifejezés között mutatkozik, csak látszólagos. Clausiusnál T az absolut mérsékletet, nálunk $\mathfrak{T}$ voltaképen az összes mozgási erélyt jelenti. Ha ugyanis fölteszszük, a mi különben magától értetődő, hogy azalatt mig a test dQ erélymennyiséget vesz fel, összes mozgási erélye is csak végtelen csekélylyel változhatik, azonnal következik, hogy $\mathfrak{T}$ nem egyéb, mint az összes mozgási erély azon pillanatban, midőn a dQ a testtel közöltetett. Nálunk tehát T a test összes mozgási erélyét; Clausiusnál pedig az absolut mérsékletet jelenti; e két mennyiség azonban kétségtelenül aránylagos egymással. Kellően választva a mértékegységeket, az absolut mérsékletet ekként defineálhatjuk tehát: *a test tömegegységének összes mozgási erélye.*

Vizsgálodásainkban igyekeztünk magunkat távol tartani minden hypothesistől; levezetéseinket egyedül az erély megmaradása elvére alapitottuk. Mindezeknél fogva azt hiszszük, sikerült megmutatnunk, hogy *a hőelmélet második főtétele az elsőből, minden további hypothesis nélkül is levezethető.*

CSILLAGÁSZATI MEGFIGYELÉSEIM

1874 és 1875-ben.

KONKOLY MIKLÓSTÓL.

3 táblával.

(Beterjesztetett a III. osztály ülésén 1876. márczius 6.)

BUDAPEST, 1876.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALÁBAN.

(AZ AKADÉMIA BÉRHÁZÁBAN.)

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

ELŐSZÓ.

Midőn 1874. Mártius havában csillagdám leirását műszereivel együtt, úgy az abban történt észleléseket 1872. és 1873-ik évben, a Magyar Tudományos Akadémiának átnyujthatni szerencsés voltam, azt hittem, hogy a csillagdáról többé említést sem kell tennem, legfeljebb, mint azon értekezlet 4. és 5-dik lapján említettem, az új reflector leirását kell közzé tenni jelen alkalommal. Akkori véleményem azonban épen nem teljesülhet; miután azóta a körülmények igen megváltoztak.

Mint emlitettem volt, régi csillagdám lakházam éjszaki sarkán volt kiépítve, s habár az erős boltiveken állott is, még sem birt ócsárolhatatlan szilárdsággal, mert ha a lakházban egy ajtót a szél, vagy valaki erösen becsapott, bizony a napkép a projectión tetemesen rezgett, ha a kupolát forgattam, lehetlen volt észlelni; a lakház meglehetős közel fekszik egy igen járt országúthoz, minden kocsi rázkódtatást idézett elő; az egyedüli délkör, melyre épen legkevesebb szükség volt nálam, mint physicai observatoriumban, mert vele csak is idő-meghatározások történtek, állott elég szilárdul (egy főfalon). — Mindezeken kivül úgy a ház, mint az országút miatt nem volt soha absolut nyugalma az észlelőnek.

Ezen a sok bajon segíthetni már régi vágyam volt. Hozzá jött a reflector megérkezése, mely 8 ládában jött Londonból s körülbelűl pakolással együtt $19\frac{1}{2}$ mázsát nyomott. Ha a ládákra 5 mázsát leszámítunk, még mindig egy absolut súly marad a műszerre, mely $14\frac{1}{2}$ mázsa. Ha ezt házam tetejére felviszem a boltív okvetlen leroskad, s egy szép reggelen a csillagdát dolgozószobámban lelem. A kupola egy 4 hüvelyes refractornak lett készítve, ha ezen közel nyolcz láb hosszú csövet oda beállítom, ott mozdulni nem lehet, ha egy spectroscopot reácsavarok, a készülék sem fér el, annálkevésbé az észlelő. Sok mindenféle más ok is közbejött, minél-fogva elhatároztam magamat az egész csillagdát lebontani a házról, s azt a kertben alapból felépítni, távol tenni országúttól, portól s minden zajtól. A csillagda 1874. február legutolsó napjaiban a háztetőről le is lett valóban bontva, s az új építés a tavaszi szép napokban óriási lépésekkel haladt elő úgyannyira, hogy május közepén már a műszereket kezdtem benne felállítani.

Az észlelések ilyenformán csak is mártius, aprilis és május hónapokban szakadtak meg, miután minden vízmentes mészszel (roszul; cement) lett építve, a száradás a kőmüves kanala alatt már megtörtént, s semmi akadály sem állt előttem, hogy május havában már a műszereket felállítsam, mi meg is történt.

Jelen értekezésben van szerencsém a tudományos akadémiának az új épületet a $10^1/_2$ hüvelyes reflectorral bemutatni, s az 1874. és 1875-ben tett észleléseimet, a napfoltok kivételével, melyeket egy más értekezésben fogok előterjeszteni.

Ezen füzetben közzétett megfigyelések leginkább az üstökösök szinképeit, azok kinézését, úgy a hullócsillagok spectrumát tartalmazzák, nem különben, az ó-gyallai csillagda és a bécsi egyetemi csillagda közt eszközölt földrajzi hossz-különbség meghatározását távirati uton, a kolosvári úgynevezett csillagda, s a gyallai csillagda közötti hosszkülönbség, úgy a gyallai csillagda és a zágrábi főreáltanoda közti földrajzi hossz-különbség meghatározását, s végre az általunk Kolozsvártt eszközölt megfigyelését a Venus átvonulásának.

Szerencsés lehetek ez alkalommal nagyságos és főtisztelendő dr. Schenzel Guido úrnak, a m. k. központi meteorologiai intézet igazgatójának, ki engem mindenféleképen a Venusátvonulás észlelésénél pártfogolt és támogatott, úgy szintén méltóságos Takács János urnak, a magyar távirdák igazgatójának, s Szalay László távirdai kerületi igazgató kedves barátomnak, kik a tudomány érdekében semmi fáradságot, s áldozatot nem kiméltek, hálás köszönetemet kifejezni.

Ó-Gyalla, 1876. mártius 6.

Konkoly Miklós.

CSILLAGÁSZATI MEGFIGYELÉSEIM
1874- és 1875-ben.

(Beterjesztetett a M. Tud. Akad. III. osztály ülésén 1876. márcz. 6.)

Néhány szó az új épületről.

Az új csillagda egy k. b. 22 osztrák-magyar holdnyi angolkert közepén lett felépítve. Az épület igen alacsony, egy emeletes, s ezen emelet czélja is csak az, hogy a közellevő óriás fák lehetőleg keveset vegyenek el a látkörből, mi az által el is lett érve. Az épület alaprajzát, úgy a földszintet mint az első emeletet nem tartom czélszerűtlennek bővebben közölni, mert ez egészen a tudomány jelen igényeihez van alkalmaztatva, s nem mint a birodalomban lévő többi csillagda, 4 emeletes házak tetejéből nyulik ki a magasba.

A földszinti osztály (I. tábla 1. ábra) részben lépcsőháznak, részben dolgozó szobának van tartva. a) Egy kis nyitott tornácz, hol egy barometer és termometer van a közönség megtekintésére kiakasztva. Ha a főajtón belépünk, egy kis előszobában b) vagyunk, hol az ajtóval szemben a légsúlymérők vannak elhelyezve, jobbra c) szobába jutunk, mely közös dolgozó szoba, s hol egyuttal a csillagdai távirda-állomás is van, s annak sodronya az ó-gyallai állami távirda hivatalba vezet, s ott szükség esetében a főhuzallal egy váltó által összeköttetik.

Ha az előszobából a barometerek melletti sárga üvegtáblákkal ellátott ajtón bemegyünk, a d) szobácskába jutunk, mely absolut sötét, s fényképészeti czélokra szolgál. Nevezett előszobából balra a e) lépcsőházba jutunk s innen a valódi csillagdába.

Mielőtt oda megyünk, nézzük az a) tornáczról nyiló kis ajtót. Ez egy f) szobácskába vezet, mely egy miniatur vegytani laboratorium, a mennyire az a physicai csillagászathoz szükséges.

A mint a lépcsőházba megyünk, látunk egy nagy 8 láb átmérőjü oszlopot, mely még az első emeleten lévő előszobán is felül nyulik, mindig vékonyabbá lesz, mint egy mezei távcső. Ezen áll a nagy cső, s az ábrában g)-vel van jegyezve.

Ha a látogató a lépcsőn fölmegy, egy kis előszobába jut [I. tábla 2. ábra]. Ez a 2) ábra h)-val jelezve. E fölött van a nagy forgó kupola, mely egészen vas szerkezetü, csupán veres fenyőfa karikára van szerelve, és 8 öntött vas keréken forog. Ezen gyűrü vagy kerék alapja, mely szintén veres fenyőből van, épen úgy, mint a forgó karika 13 láb 6 hüvelyk átmérővel bir. Mivel a vas-szerkezet ezen gyűrü külsejére van illesztve, az még $1^1/_2$ lábbal nagyobb. — A nyilás, melyen az észlelő távcsövét az égre fordítja, kissé eltér a szokott ügyetlen s keskeny nyilásoktól. Ennél egy amerikai rendszer van alkalmazva, hol a nyilás nem sarkakra, sem felcsavarhatásra van szerkesztve, hanem oldalt félretolható, s azáltal oly széles nyilás van nyerve, hogy 40^0 azimuthban egyszerre áttekinthető.

Az elsőemeleti előszobából nyilik egy elég tágas délkör szoba i), melyben a régi csillagdával leirt műszerek vannak. Ebből nyilik egy kis szoba, mely apró műszerek, úgy természettani eszközök elhelyezéseül szolgál, s egyuttal egy kis erkélylyel is bir, hol valami műszert fel lehet szükség esetén állitani, ha vele dél felé akarunk észlelni. Ezen szoba tetején van a szélirány és sebesség mutató felállítva. Ezen szoba k)-val van jelezve. A délkörszobából még egy ajtó nyilik, mely l) forgótetejű kupolába vezet. Ezen kupola a lakház tetejéről lett baj nélkül ide átszállitva s a már leirt 4 hüvelyes Steinheilféle refractort takarja, melylyel ma is történnek a napfolt-feljegyzések.

A reflector.

A következő sorokban leirt nagy reflector csillagdám fő műszere. Ezen eszköz meg lett rendelve Browning londoni látszerésznél 1873. május közepén, s a tükör, ocularok egy része és az aczél cső már julius utolsó napjaiban annyira el voltak készítve, hogy az a művész csillagdáján Richmondban egy primitiv fa állványon fel volt állítva.

Végleg befejezve csak január 15-én 1874-ben lett a látcső, s én kezemhez vettem az év február 25-én. Nem tudva hova felállítni, egy száraz szobában helyeztem el addig, kipakolva ugyan, de csak is félig-meddig összerakva, mig az új csillagda elkészült.

Ezen műszer Newton-féle telescop, hol a parabolicus tükör a cső alsó végén van elhelyezve, s az általa felfogott sugarak a cső felső vége felé vettetnek vissza, de mielőtt a gyupontban egyesülnének, egy 45^0 szögelet alatt hajtott sik tükör azokat a cső oldalán levő lyukon oldalt kiveti. Ezen lyuknál van a szemlencsetartó cső és maga a szemlencse alkalmazva.

A parabolicus tükör átmérője 10$^1/_2$ hüvelyk, gyutávja 77 hüvelyk. Ezen tükör egy nagy öntött vas czellába van szerelve, de azt a tükör maga sehol sem érinti, mert azon czellában a tükör alapját egy minden oldalon esztergált s felső lapján a tükörrel összeköszörült vaslemez képezi, mely a czellához alól három kettős csavarral van erősítve és ezek polírozott ágyúérczből vannak, s azok segélyével a tükör tengelyét a cső tengelyével össze lehet állítani. A nevezett lemezre a tükröt csupán egy 8 kis csavarral hozzáerősített réz karika tartja. Ezen czella 3 réz fejes csavarral, egy a cső végére illesztett esztergált karikához lesz szorítva, mely vele ezzel egy solid egységet képez.

A cső, melynek egész hossza körülbelől 8 láb, Bessemer aczél lemezekből készíttetett, s átgörbülés ellen több karika által van biztosítva. Ezen karikák közül 2 középső esztergálva van és 2 másik karikában a legnagyobb könnyüséggel forgatható, melyek a declinatio tengelyen levő bölcsőhöz vannak erősítve. Ezen karikákban a távcső tengelye körül forgatható, s ez által elérhető azon nem eléggé megbecsülhető kényelem, hogy az észlelő bármely tájára nézzen is az égnek, mindig vizszintes irányban néz bele a csőbe, s magával hozza azt az előnyt, hogy a spectroscop asztalkája mindig vizszintesen állhat, s nem kell minden állására a látcsőnek ahoz más átgörbülési kitévőt számítni; a fotometer lámpáját bár megerősítse az eszközhez a mechanicus, mert az itt mindig vizirányosan áll magától is.

A cső parallacticus felállitása a lehető legerősebben van keresztül vive.

A csőre van a szemlencse közelében egy 2" nyilású kereső ráalkalmazva, alsó végén pedig egy $2^1/_2$" nyilású nagy látmezejü cső, melyre szintén egy Zöllnerféle photometer ráilleszthető. Ezen cső mellett van két oldalt 2 aczél pálcza, melyekre futó ellensúlyokat lehet illeszteni, ha a declinatió értelmében az egyensuly meg lenne valami nehezékkel zavarva.

Az óramű végtelen egyszerű, de annál nagyobb, s erősebb. Ha működésben van, csak játszik azon colossalis massával, melynek mozgó részei 575 fontot nyomnak.

A szabályzó egy Wattféle ingából áll 2 golyóval mint egy gőzgépnél. — Ezen két golyó tengelyén felül egy lemez van, mely ha a sebesség növekedik, az emelkedő golyók nyelén felül levő kar által, melynek végei kis kerekekben végződnek felnyomatik, s ez két érzékeny pakfong rugóhoz szoríttatik, az egyenlő mozgás ez által hozatik létre. A rugókat azonban egy, tetején a szabályzó állványán levő csavarral lehet feljebb vagy lejebb hozni, a mint az óra késik vagy siet. Az óramű még egy független mozgással is el van látva, melynek kulcsa az észlelő kezéhez ér s a távcsövet, midőn az óra megy is, a nélkül, hogy azt zavarná járásában, tetszése szerint előre vagy hátra mozgathatja. Az erő, mely a hajtómüvet mozgásba hozza egy, 100 fontnyi súlyu öntött vas darab, mely aczélsodrony kötélen van felakasztva s 3 óráig viszi a gépet minden legkisebb zaj és rángatás nélkül.

A látcsőhez a következő szemlencsék vannak adva, bele értve azokat, melyek a positio micrometeren vannak, s melyeket csillaggal jegyzek meg.

Minemüség	nagyitás
1) átmeneti lencse 5 sodronyszállal : . . .	35
2) üstököskereső lencse 40′ látmezővel : . .	77
3) achromaticus egyes lencse	77
4) 7 parallell szál [pókháló] átmeneti lencse .	86
5) aczélgyürü micrometer	120
6) Huyghens-féle lencse	180
7) Ramsden-féle *	266
8) » » üvegosztással	280
9) » » *	380
10) Huyghens-féle	500
11) Ramsden » *	556
12) » »	612
13) Huyghens	700
14) Ramsden	800
15) » »	950
16) » »	1255

A positio micrometer kissé eltér a német rendszertől. A finom beállitás a kör homlokán levő fogak által történik, melybe egy kisebb fogaskerék fog bele, s a szálakat forgatja. Van benne egy pókháló kereszt, azonfelül egy eltolható szál, melynek eltolatása egy dobon olvastatik le, s ennek homlokán oly osztás van platinára, hogy egy csavarmenet 0.01 lehet leolvasni s 0.005 csavarmenetet becsülni. A kör szintén platinára van osztva s 2 nonius által 1′ olvasható le rajta. A kör excentricitását megvizsgálva, annak hibája a leolvasási hibánál kisebb.

A kör megvizsgálása a következő eredményt adta.

Nonius I.	Nonius II.	Nonius I.	Nonius II.
0° 0′	179° 59′.5	50° 0′	229° 59′.0
10° 0′	189° 59′.0	60° 0′	240° 0′.5
20° 0′	199° 59′.5	70° 0′	250° 0′.5
30° 0′	210° 0′.0	80° 0′	260° 0′.0
40° 0′	219° 59′.5	90° 0′	270° 0′.0

Feleslegesnek tartom ezen számokkal tovább a helyet foglalni, mivel a többi negyedekben is hasonló értékeket kaptam.

Mint fentebb említettem volt, a készülékben egy eltolható szál is van, s ennek eltolatását a csavaron levő dob homlok osztásán lehet leolvasni. Ennek meghatározására többszöri átbocsájtását eszközöltem egy magas declinatióval biró csillagnak ($\varkappa$ Draconis), s egy csavarmenet értékét ebből vezettem le. — A kis műszert úgy állítottam be, hogy a csavar egyszer fent, egyszer lent legyen, egyszer jobbról máskor balról, s ezen sok átbocsájtásból kaptam a következő értékeket.

1-ső csavarmenet	26″.48
2-ik csavarmenet (közép) . . .	26″.86
3-ik csavarmenet (közép) . . .	27″.15

Ha minden értéket, melyet egyes, kettős, s hármas csavarmenetnél külön kaptam, veszem, mit absolut pontos méréseknél tenni is kell, lesz :

1.	csavarmenet	=	26″. 484
2.	» »	=	53″. 714
3.	» »	=	81″. 459

A gyürü micrometer meghatározása a pleyad csillagokkal történt, és pedig Merope és Electra csillagokkal. Ezek számtalan átbocsájtása a következő eredményre juttatott :

$$\left.\begin{array}{l} r = 10'\ 30''.\ 88 \\ \varrho = \ \ 8'\ 34''.\ 60 \end{array}\right\}\ {}^1/_2\,(r+\varrho) = 9'\ 32''.\ 74 \text{ s ebből:}$$

$$\left.\begin{array}{l} D = 21'\ \ 1''.\ 76 \\ d = 17'\ \ 9''.\ 20 \end{array}\right\}\ {}^1/_2\,(D-d) = 19'\ \ 5''.48$$

hol r a karika külső sugarát ϱ annak belső sugarát $^1/_2$ $(r+\varrho)$ a közép sugarat, D a gyürü külső, d a belső átmérőjét, $^1/_2$ $(D+d)$ természetesen annak közép átmérőjét jelzi.

Hogy minden egyenetlenséget, melyet a gyürü excentricitása idézhetne elő, elhárítsak, a gyürüt az oculárral együtt többször körülforgattam a csillag átbocsájtásánál, hogy t. i. ne mindig egy és ugyanazon ponton érintse a csillag a gyürűt.

A sodronyszálas átmeneti szemlencsében 3 verticalis és 2 horisontalis szál van kifeszítve oxidált ezüst sodronyból. Ezek távolságai a következők : I—II=4′42″.0 ; II—III= 4′46″.9. A két horisontális szál távola egymástól = 4′30″.5.

1874. és 1875-ik évben még két új spectroscop és egy fényképészeti készülék is lett beszerezve, úgymint egy Zöllner-féle astrophotometer. A mi utóbbit illeti, annak leirását fölöslegesnek tartom, miután az Zöllner irataiban bőven s több helyen le van irva, s semmi más változás nincs rajta téve, mi megemlítésre méltó volna ; azonban az előbb említett három műszerről szükségesnek vélem nehány szót szólni. Az egyik spectroscopot dr. Vogl által birom, ő t. i. Browning-féle prismákat alkalmazott bele, s a kivitelt Heustreu kieli mechanikus által eszközöltette Bothkampban időzése alatt.

A B. hüvelyben (III. tábla 1 ábra) van az 5 Janssen-Hoffmann-féle prismasor P beerősitve, melynek alsó végén egy planconvex achromaticus lencse van, mely b)-vel van jelezve, s $25^{m.m}$ hosszú gyútávval bir; ugyanazon hüvely felső végén van az a) hengeralakú lencse, melynek gyutávja $160^{m.m}$. A B hüvely felső végéhez van oldalt egy cső illesztve, C, mely épen a prismák vég lapjára nyilik, s ennek végén egy fotografirozott Scala S. létezik, mely kivülről megvilágitható, s a szinképpel egyszerre vizsgálható. A) egy ruganyos cső, melybe B) dugva van, s alsó végén w-nél csavarral van ellátva, mely által a távcsőre illeszthető, annak szemlencséje helyére, miután az eltávolittatott.

Ha az a) hengerlencse el lesz távolitva s a B) cső kellőleg állitva, akkor a csillag képének, mely a gyúpontban támad, tiszta spectruma látható, azonban ez olyan keskeny, hogy a hengerlencsét kell annak megszélesitésére alkalmazni.

Ez, mint mondtam, áll álló csillagokra vagy olyan bolygókra, melyeknek látszólagos átmérője végtelen kicsi, mert nagyobb átmérőjü égitesteknél több spectrum feküdne egymás tetején, és a szinkép tisztátlan lenne. Hogy ezen kis műszert, mely még 8-ad rendü csillagoktól is igen szép színképet ad, átmérővel biró tárgyakra is lehessen használni, egy kis kerek lemez is van hozzá adva, melyre a hasadás van fölszerelve, s azon lemez W.-nél A. cső végére illeszthető.

Hogy azonban ezen kis készülékkel necsak nézni lehessen színképeket, de annak egyes vonalain méréseket is tenni, szükséges, hogy az észlelő a scálarészek értékeit ismerje. A mód, melyet én választottam a hullám-hosszaság, melyre a scálán leolvasott értékeket reducálhatom, s e végre a kis műszerrel a nap szinképén többrendbeli méréseket tettem, s abból interpolálva az egyes scálarészek értékeit vezettem le. A mellékelt kis táblázat mutatja a scálarészek értékeit hullámhosszaságban.

scala részek	hullám hossz.	scala részek	hullámhossz.
1.0	775.0	13.5	479.5
1.5	750.0	14.0	476.0
2.0	725.0	14.5	472.5
2.5	706.0	15.0	469.0
3.0	686.7 (B)	15.5	466.0
3.5	668.0	16.0	462.5
4.0	648.0	16.5	459.0
4.5	630.0	17.0	456.0
5.0	607.5	17.5	452.0
5.5	589.2 (D)	18.0	448.0
6.0	580.0	18.5	444.5
6.5	572.0	19.0	441.0
7.0	562.5	19.5	437.5
7.5	554.0	20.0	434.5
8.0	545.0	20.5	430.0
8.5	535.5	21.0	425.5
9.0	527.5	21.5	422.0
9.5	522.0	22.0	418.0
10.0	516.0	22.5	414.5
10.5	511.0	23.0	411.5
11.0	505.0	23.5	407.5
11.5	500.0	24.0	403.5
12.0	493.0	24.5	400.0
12.5	486.1 (F)	25.0	397.0
13.0	483.5		

A scálarészek elegendő nagyok, hogy 0.5 leolvasható legyen, de nem tartottam szükségesnek a meghatározást pontosabban eszközölni, mint a hogy a tábla mutatja, mert 1.0 és 1.5 között, ha a hullámhosszaságot még interpolálom, semmiesetre sem követek el abban akkora hibát, mintha a scálarész leolvasásánál a tizedeket adom meg.

A másik spectroscop szintén csillag spectroscop, de sokkal complicáltabb szerkezetü. Az lényegében olyan, mint minőt Schellen spectralanaliesejében a 446-dik lapon leir és ábrázol, azon hozzáadással, hogy ez sokkal újabb lévén, sokkal czélszerűbb alkotással bir, azonfelül több rendbeli mérő eszközzel van ellátva. A műszer szintén a spectroscopok mesterétől: John Browningtól származik, s két flint prismával bir, melynek 60^0 szögeletü törési sarkai vannak, s törési együtthatójok 1.75. — A műszer távcsövében egy 60^0 alatt egymást metsző szálkereszt van, az illető vonalak vagy csíkok beállításához. A távcső az asztalka közepéből, melyen a prismák vannak, forgatható alhidádera van erősítve s egy finom csavar által odább tolható. Ezen mozgást le lehet először az asztalka homlokosztásán, mely 30″ ad olvasni, másodszor a csavaron levő dob homlokosztásán. Ezen dob 100 részre van osztva, s igy a leolvasás 0″.3. — Ez az első micrometer.

A második paránymérő egy fényképezett scála, mely egy cső végén van beillesztve, és a hátulsó prisma hátulsó lapjáról tükröztetik be a távcsőbe, s látszik a spectrum alatt vagy felett tetszés szerint.

A legfinomabb paránymérő egy szálas micrometer a szemüvegen, melyben szintén 60^0 szögelet alatt van egy pókhálószál pár kifeszítve. Ezen pókháló szál-pár mögött van közvetlen egy másik épen olyan szál-pár. Ha az index 0-on áll, a 4 szál tökéletesen fedi egymást. A hátulsó azonban mindkét oldalra eltolható, s ezen eltolathatás ismét egy homlokosztásu dobon olvasható le, mely 100 részre van osztva.

Hogy ezen műszerrel méréseket lehessen tenni, ennek scáláját s micrometerjeit épen úgy reducálhatni kell hullámhosszaságokra, mint az előbbiét, s ezért én ezzel, de még sokkal pedansabban, ugyanazon módszert vettem elő, mint a másiknál. Mindkét esetnél Ängström normál tábláit használtam. Itt adom fél csavarmenetekben a micrometer csavarának fordulási értékeit :

csavarmenet	*hullámhosz.*	*csavarmenet*	*hullámhosz.*
0.0	686.7 (B)	1.5	671.3
0.5	682.4	2.0	666.1
1.0	676.8	2.5	661.2

Csavarmenet	*hullámhossz.*	*Csavarmenet*	*hullámhossz.*
3.0	656.3	22.0	530.1
3.5	651.8	22.5	527.7
4.0	647.1	23.0	525.8
4.5	643.0	23.5	523.8
5.0	638.9	24.0	521.7
5.5	634.1	24.5	519.8
6.0	629.3	25.0	517.5
6.5	624.9	25.5	515.8
7.0	621.4	26.0	514.0
7.5	617.0	26.5	512.5
8.0	613.2	27.0	510.6
8.5	610.0	27.5	508.9
9.0	606.3	28.0	507.4
9.5	602.3	28.5	505.0
10.0	598.6	29.0	503.5
10.5	595.5	29.5	501.5
11.0	591.2	30.0	500.1
11.5	588.6	30.5	498.7
12.0	585.0	31.0	497.0
12.5	582.4	31.5	495.1
13.0	579.6	32.0	494.2
13.5	576.6	32.5	492.0
14.0	573.8	33.0	490.6
14.5	570.1	33.5	489.7
15.0	567.5	34.0	487.8
15.5	565.0	34.5	486.4
16.0	563.3	35.0	485.0
16.5	559.9	35.5	483.6
17.0	557.2	36.0	481.4
17.5	554.1	36.5	480.0
18.0	551.2	37.0	478.4
18.5	548.8	37.5	476.0
19.0	546.3	38.0	474.3
19.5	543.8	38.5	471.2
20.0	540.5	39.0	470.0
20.5	538.0	39.5	467.9
21.0	535.2	40.0	465.8
21.5	532.6		

Mint ezen táblázatból kitünik, a csavar igen egyenletesen van készítve, s nem ugrál. Ezen mérés úgy lett eszközölve, hogy a csavar egyszer jobbról, máskor balról állott, s a kiinduló pont a napspectrum B vonala volt mindig. — B vonalon túl nem láttam szükségesnek a csavarmenetek értékét egy csillag spectroscopban meghatározni, mert azon vonalon túl úgy sem igen kivehető a csillagok spectruma. Ezen spectroscop szétszóró ereje tetemes. A D vonalat a leggyengébb nagyitással is elég szépen kettéválasztja, úgy az erősebb nagyításokkal a »b« vonal 6—7-szeresen látszik. Ezen spectroscophoz 6 szemüveg van adva, melyből 3 a filarmicrometerhez tartozik s következő nagyításokkal, u. m: 3.1, 8.0 és 10.0.; A filármicrometernél: 9, 13 és 26. A műszer összehasonlító prismával is el van látva, ugy egy ebonit félkörre két kis csipőfogó van illesztve, mely az összehasonlítási prisma előtt áll, s különböző érczeket lehet belefogni, s a villanyszikra által izzóvá tenni; ezen készület felett egy minden irányba mozgatható ezüst tükör van alkalmazva, mely a fényt az összehasonlító prismába veti.

A fényképező készülék dr. Lohse volt bothcampi jelenleg berlini assistens szerkezete. Ezen eszköz czélja nem az, hogy vele tartós napképeket lehessen csinálni, hanem a napfoltokat rövid idő alatt fixirozni, mert itt az észlelő azonnal az érzékeny papirral dolgozik, s a készület nem igényel vegytani laboratoriumot, vagy sötét szobát, csak a papirt kell sötét és száraz helyen tartani, melylyel dolgozunk. Ezen papir chlorezüst collodion papir, melyet Obernetternél Münchenben lehet kapni.

Az eszköz szerkezete a következő: (bőven leirva Lohse által a bothkampi csillagda évkönyvében ábrával III. kötet 53-dik lap) egy sárgaréz körben concentricusan forog egy másik kör, melyeknek közepe át van furva, s az első egy csőre van illesztve, mely a távcső szemüvege helyett tétetik fel. A második körön, mely mint említve volt, forgatható, egy finom beállítás szorítóval együtt is van, ez arra szolgál: a később megemlitett hálót a napi mozgással paralel helyezni és megszoríthatni. — Ezen körre egy üveg lemez van reáragasztva, mely négyszög millimeterekre van osztva s minden tizedik millimeter vonal kissé erősebben meghúzva. — Az üveglemezt egy kis ajtócska fedi, mely a papirost a hálózott üveglemezhez szorítja. Oldalt az ajtócska szélei mellett két kis réz-oszlop emelkedik fel, melyek egy hidat tartanak, s ezen hidon előre- vagy hátra egy szemüveg védüveggel tolható, hogy vele egyidejüleg úgy a napképét mint a rostély képét be lehessen állítani a látcső gyúpontjába. Ha ez megtörtént, a távcső objectivje befedetik, de ezen fedélen kell egy ajtónak lenni, mely a cső alsó végétől nyitható vagy zárható. Ekkor az érzékenyített papir a collodionos felével reátétetik az üveglemezre, miután annak rostélyának valamely párhuzamja a napi mozgásba beállíttatott, az ajtócskával azt hozzászoritjuk a kérdéses lemezhez; ekkor a szükséghez mérve az objectiven levő ajtót kinyitva a papir meg lesz világítva $2^{s\text{-től}}$ $10^{s\text{-ig}}$, a milyen t. i. a nap fényének ereje, s mely napszakában történik a mütét. A megvilágítás után a papiron megjegyezve a napimozgás iránya, az gyorsan egy sötét dobozba eltétetik, s a napfoltok helye a rostélyokhoz viszonozva leolvastatnak egy mérsékelt világítású szobában, vagy gyertyafénynél. A papir, melyen a napkép a rostélyokkal együtt rajta van, még pedig azon módon, hogy a napkép barna, vagy ha az exponálás soká tartott fekete, a rostély és a foltok fehérek maradnak, a leolvasás után eldobatik. Ezen műtét megengedi azt, hogy egy nap alatt pár száz képet csinálhasson az észlelő, mi megbecsülhetlen egy maximum évben, hol a foltokon néha pár óra alatt tetemes változás megy végbe relativ helyzetöket illetőleg, mint azt későbben alkalmunk lesz láthatni, ha a napfoltokról lessz szó.

Az üstökösök kinézése s azok szinképei 1874—1875-ben.

A reflector felállításának bevégeztével azonnal iparkodtam a Coggia által felfedezett üstökösön észleléseket tenni, s ezen tárgy volt az első, mely a nagy csővel észleltetett.

I. 1874. III. számú (Coggia) üstökös.

1874. május 26. volt az első nap, midőn ezen üstököst először láttam volt, mert e hó 24-én végeztem be a felállítást. Az üstökös 77-szeres nagyítás mellett határozott szép köralaku volt, a naptól elfordult részén kis csóva mutatkozott, a nap felőli részén egy 12-ed nagyságú csillaghoz hasonló magva volt igen excentricusan álló sürüdés közepén. Szinképelemzésre az napon nem gondolhattam, mert az óra-mű nem volt még annyira szabályozva, hogy hosszabb ideig biztosan vezette volna a látcsövet az üstökös napi mozgása után, A szinképet mindamellett látni akarván, azt megkisértém egy kis »a vision direct« spectroscoppal. A szinkép három szines szalagból állott, s mellette egy végtelen gyenge folytonos spectrum volt látható.

1874. junius 4. Az üstökös fénye erősebb, mint május 26-án volt, csóvája tetemesen meghosszabbodott, a condensatio sokkal élénkebb, a magva 10-ed rendű csillaghoz hasonló. A szinképben 3 szalag mutatkozott s a folytonos spectrum igen jól *kivehető*, s körülbelől $586^{m\,m.m.}$-től $450^{m.m.m.}$ hullámhoszszig terjedt.

A szines szalagok helyét a következőleg határoztam meg:

1) = 563.3
2) = 515.0
3) = 472.1

1874. junius 10. Az üstökös igen szép, már szabad szemmel is a láthatóság határán áll. A magva mintegy 8-ad rendü csillag tünik fel, s igen közel van a nap felé fordult részéhez az üstökösnek, erős nagyitással (500) két oldalt a csóva irányában parabolicus kisugárzást lehet látni, s ennélfogva a mag táján a sürüsödésnek fénye gyengébb nagyitás mellett igen változó. A csóva már tetemes hosszaságot ért el, s közepén néha egy fekete vonal mutatkozik.

A szinképben levő 3. csik mérését ma is elővettem. A szinkép elég fényes volt, hogy rajta pontos méréseket lehessen tenni, de arra, hogy Geiszler-féle csövekkel összehasonlítást lehessen tenni izzógázok spectrumával, gyenge volt, mert ha a Geiszler-csövön a villanyszikrát át hagytam ütni az ezáltal előidézett szinkép az üstökös szinképét tulsugározta.

A csíkok helyzetét következőleg találtam, többszöri beállításból levén ezen számok a középértékre reducálva:

1) = 563.5
2) = 514.9
3) = 473.2

A mi a folytonos spectrumot illeti, annak intensitása igen növekedik s most már az említett határokon valamivel tul mértem meg annak két szélét, u. m. 592 és 444$^{m.m.m.}$ hullámhosszig volt az még kivehető.

1874. julius 3. Mindenféle okoknál fogva gátolva voltam a mai napig ezen érdekes égitestet észlelni. Midőn ma beletekintettem spectroscopomba, elcsodálkoztam a nagyon intensiv szinképen, hol legfeltünőbb volt a folytonos spectrum intensiv voltja.

A három szalag fényének intensitását a következő számokkal vélem kifejezni, s az első közülök a szinkép kevésbé törékeny részében levő szalagot jelzi, s ugy tovább. Az arány volna mint: 3, 5 és 1. Tehát a középső szalag legfényesebb, a viola felőli leggyengébb.

A folytonos spectrum a 3 szalagot szelő keskeny csiknak mutatkozik, s tetemes intensitással bir, épen ugy, mint ha hengerlencse nélkül egy álló csillagra nézünk. Ez azonban csak is akkor mutatkozott, ha a hasadás az üstökös magvára volt állítva, ha azt onnan tovább vittem, a folytonos szinkép láthatósága megszünt. Ezen keskeny spectrumot próbáltam hengerlencse által elszélesítni, azonban mind ennek daczára annak folytonosságán kivül semmitsem birtam észrevenni.

Ma, miután a szinkép nagyon szép volt, mérés helyett czélszerübbnek tartottam azt izzó gázokkal összehasonlítni. A szén-kőneg szinképe tökéletesen egyezett az üstökös szinképével. A spectroscop hasadását 0.1$^{m.m.}$-ig bezárva, még elég fényes szinképet nyertem, s akkor a szalagok mindkét oldala elég élesnek látszott.

Hogy mennyire egyezik az üstökös szinképe a szénkönegével, az a következő összehasonlításból legjobban kitünik.

Julius 4-én reggel a szénköneg spectrumon külön méréseket eszközöltem ugyanazon spectroscoppal, s ugyanazon Geiszler csővel, Rhumkorffal s teleppel.

Coggia üstökös szinképe		*Szénkön. vonal. az én mérésem*
1) = 563.4	2 mérésből	1) = $16^r \cdot 01$ = 563.2 m.m.m.
2) = 514.9	több beállí-	2) = $25^r \cdot 4$ = 516.1 m.m.m.
3) = 472.6	tásnál.	3) = $38^r \cdot 1$ = 473.7

Szénköneg Boisbodran szerint	Δ o* — *Boisbodran*
1) = 562.9	1) = 0.5
2) = 516.1	2) = 1.2
3) = 473.8	3) = 1.2

Ezen alkalommal nem mulaszthatom el egyuttal a nagy látcső óraművének tökéletes és egyenletes járásáról pár szót szólni. A spectroscopot $8^{h.}$ $30^{m.}$-kor beállítottam az üstökösre, de azonnal estelire lettem hiva, s észlelésemet nem kezdhettem meg, azonban az óraművet, mely különben több mint 3 óráig eljár, elfeledtem elállitani. Körülbelől $9^{h.}$ $15^{m.}$-kor visszatértem a csillagdába, s látva, hogy az óra még megy, azonnal a létrára mentem megnézendő, hogy mennyire jár egyenletesen az óra. Az üstökös szinképe mint hagytam $^3/_4$ óra előtt, úgy volt most is a spectroscop látmezejében. Ez egy üstökösnél persze csak is úgy történhet, ha annak saját mozgása oly csekély, mint jelenleg még ezé volt, s majdnem mint egy állócsillag részt vesz a napi mozgásban.

Távcsövön megtekintve, az üstökös feje igen szép látvány volt. A magva majdnem azon a szélén volt, mely a nap félé volt fordulva, s a parabolicus kisugárzás majdnem szemlátomást történt. A magva 4—5-öd rendü csillaghoz volt hasonló, s erős nagyitás mellett (700) mint egy vizgőzzel körülvett zöldes pont mutatkozott, melynek szélső contourjai nem voltak soha élesek s folytonos forrongásban látszott lenni, miért is annak átmérője nem igen volt megmérhető, s csak is becsülés után tartanám azt k. b. 1″ átmérőjünek (valamivel nagyobb, mint fonalam vastagsága a Positio micrometerben.)

A csóva már körülbelől 13° hosszú volt s határozottan, a közepén kétfelé volt válva.

II. 1874. IV. számú (Borelli) üstökös.

1874. julius 29-én. Ezen üstököst egy bécsi (egyetemi csillagda) sürgöny folytán kevés keresés után feltaláltam, de telehold mellett nem igen lehetett vele, nehány átbocsájtásnál a gyürün, egyebet tenni.

Az üstökös gyenge fénnyel birt, kissé elmosódottak voltak szélei. Határozott sürüdésben egy kicsi mag, mely 13 rendü csillaghoz volt hasonló, látszott néha-néha felvillanni.

1874. augusztus 1. Az üstökös elmosódott rendetlen alakkal bir. Ma 77-szeres nagyítás mellett több apró csillagszerü sürüdést mutat.

1874. augusztus 2. Az üstökös ma is azon elmosódott rendetlen alakot mutatja, azonban 96-szoros nagyítással 3 határozott 13-ad rendű csillagszerü mag mutatkozik benne. Erősebb nagyítás mellett granulierozott kinézésü.

1874. augusztus 4. Ma az augusztus 2-án észlelt 3 magnak már nyoma sincs, de több apró mag felvillan és ismét eltünik. 300-szoros nagyítás mellett granulierozott kinézésü.

1874. augusztus 11. Minden úgy van, mint volt augusztus 4-én, csakhogy az üstökös fénye növekedett azóta.

1874. szeptember 4. Az üstökös rendetlen alakját folyton megtartja, s 300-szoros nagyítás mellett nagyon granulierozott kinézése, s egy olyan csillagrakásra emlékeztet, melynek láthatósága egy távcső opticai erejének határán áll. Ezen mindig rendetlen tömegnek átmérője k. b. 16′.5. Középpontján egy 3′ 18″ átmérőjü sürüdés van, melyben igen sok fényes pont látszik lenni.

Ha a szemüveg s szem közé egy Savart-féle polariscopot csavartam, az polarisált fényre utalt, melynek sarkitási sikja azon irányba ment, hol akkor a nap állott.

A spectroscop 3 csíkot mutatott. Ezek relativ fényét a következő számokkal vélném kifejezhetni, u. m. : 3, 5 és 0 . 3. Tehát ismét a középső volt legfényteljesebb, s a spectrum törékenyebb részén fekvő a legfénytelenebb, mely olyannyira gyenge volt, hogy rajta mérést tenni lehetlen volt. A csíkok az ibolyaszín-felé elmosódottak voltak, valami igen határozott contourjok a vörös felé sem volt.

Hullám-hosszuságukat többszöri beállítás folytán a következő módon határoztam meg:

Hullámhossz.

1) = 559.8

2) = 513.0

1874. szeptember 7. Az üstökös ma is igen sok apró pontocskából volt összetéve, melyek 13—14-ed rendü csillagokhoz hasonlítottak, egy ködburokkal körül véve. 500-szoros nagyítással vizsgálva, a ködburok fénye eltünt s egy csillagrakáshoz hasonlított a rendetlen alakú tömeg.

Polarisált fény ma is mutatkozott, s a színes karikák eléggé láthatók voltak a sarkitó készülékben.

A spectroscopicus méréseket ma ismételtem, az utolsó szalagot valamivel fényesebbnek láttam, s igy egy megközelítő becsülést merek nyilvánitani annak helyzetéről. A fényteljességre nézve úgy állottak, mint 3,4 és 0.5. Mint látszik, a középső csik ma intensitásából vesztett, mig a gyenge ibolya szinhez közelebb levő valami keveset nyert.

A szalagok hullámhossza a következő:

Hullámhossz.

1) = 558.7

2) = 514.2

3) = 470.0 (?)

1874. szeptember 17. A condensatio igen excentricus helyzetben van, még pedig a nap felé fordult részén az üstökösnek, de fénye igen gyenge. Néha 2—3 mag, mely 13—14-ed rendű csillaghoz hasonlít, villan fel, melyek ismét eltünnek.

1874. szeptember 19. Az üstökös igen gyenge, keresőben már alig látható, rendetlen alakját azonban most is megtartotta, a condensatio ugy van, mint 17-kén volt. Spectroscopicus észlelés már nem igen tehető rajta. 300-szoros nagyitás mellett az apró csillagok ma is felfelvillannak benne.

1874. szeptember 21. Ma, daczára hogy a hold kissé zavar, az üstökös sokkal fényesebb, mint 19-kén volt. 77-szeres nagyitás mellett több mag látszik az excentricusan fekvő sürüdésben. 350-szeres nagyitásnál a ködmassa még épen csak hogy látható, de az apró pontok megolvashatlan menynyiségben tünnek elő. A szinképben ma még a két fényesebb szalag megmérhető, s remény lem, ezen üstökösön ezzel be is fejeztem a spectroscopicus észleléseket. A szalagok helyzetét következőleg találtam :

	Hullámhosszaság
1)	= 560 . 0
2)	= 513 . 8

1874. szeptember 23. A teljes holdfény mellett igen rosz képet kaptam; keresőben az üstökös épen nem, a 4 hüvelyes Steinheilban alig, a nagy csőben roszul volt látható.

A spectroscopicus méréseket egy közép értékké összehuzva, a következő eredményt nyertem :

	Hullámhosszaság
1)	= 559 . 5
2)	= 513 . 6
3)	= 470 . 0 (?)

Miután a beállítás minden egyes megfigyelésnél rendesen 6-szori volt, igy fölöslegesnek véltem súlyok szerint számítani. Az utolsó szalag egy kérdőjellel van kisérve, mert az csupán egy egyszeri becsülésből ered.

Mint látható, bizony ezen üstökös szinképe is igen közel jár az előbbiéhez, s nagyon valószinű, hogy ez is szénkönegből áll, mint az 1874. III. számú.

1874. V. számú (Coggia) üstökös.

1874. szeptember 6. Az üstökös gömbölyü, határozott körvonalakkal biró égi test volt. Ennek közepén egy határozott sürüdés mutatkozott, melyben néha-néha egy 13—14 nagyságú csillag villant fel. Ezen kis üstökös csakis a nagy csőben volt látható, fénye végtelen gyenge; erős nagyitás mellett sokat vesztett fényéből, 500-szorosnál láthatatlan volt. Miután láttam, hogy ezen kis ködön spectroscopicus észleléseket úgy sem lehet tenni, észlelni meglehetős kellemetlen volt, reggeli órákban levén ő látható, további észlelést rajta nem tettem.

1875. Encke-féle üstökös.

1875. márczius 26. Ephemerid hiányában csak ma találtam fel ezen nevezetes üstököst, ma is egy nem kielégítő ephemeriddel, mely róla laikusok számára a lipcsei »Illustr Zeitung«-ban jelent meg.

Az üstököst várakozásomon felül fényesnek találtam, annyira, hogy a 2 hüvelyes keresőben is biztosan látható volt. A nagy ködtömeg erős condensatioval birt, meglehetősen a középben, melyben néha-néha 12—13-ad nagyságú csillag, villan fel, mely az üstökös magvát képezi.

A naptól elfordult részén az üstökösnek egy kis csóva mutatkozik, melynek hossza az üstökös átmérőjének 0.6-ével felel meg. Az üstökös átmérőjét 2′ 30″-re becsültem.

1875. márczius 30. 6^h 50^m. Az üstökös rendkivül fényteljes; 8—9-ed rendű csillaghoz hasonlít magva, a 4 hüvelyes refractor keresőjében is igen jól lehet látni. Átmérője 2′ 30″. A csóva, melyet 26-án észleltem volt, ma nyom nélkül eltünt ha a képzelődésnek szabad beszélni, az a naptól elfordult részén az égi testnek valami fátyolszerü ködöt látna, de ez olyan gyenge, mit biztosan alig lehetne látni.

1875. aprilis 2-kán. 6^h 58^m. Az üstökös elég szép, de fénye tetemesen gyengült, mire a légkör kevésbé való átlátszósága is befoly. A condensatio 30-dik óta az üstökös azon szélére vándorolt, mely a nap felé van fordulva, s benne egy 12-ed rendü csillag látható. A kis csóva a naptól elfordult részén ma ismét látható, de sokkal gyengébben, mint 26-kán. 500-szoros nagyitással az üstökös igen granulierozott kinézésü, a kis csillag a sürüdés közepén szépen, de mint ködben látható. A kép még 800-szoros nagyitás mellett is szép, különösen kitünik ezen erős nagyitásnál a köddel mintegy körülvett kis csillag.

Mivel az üstökös elég fényes volt, már az első napokban spectroscopicus észlelésekre gondoltam, habár az üstökös igen az alkonyban volt is, óhajtottam a szín képét legalább is látni, tudva, hogy a többi európai csillagdák, különösen, hol spectroscopicus észlelések történnek, részint nagy házaktól, részint a városi gázlángok fényétől ezen nevezetes üstököst nem észlelhetik, mi valóban igy is volt.

A levegő átlátszósága ma kitünő volt, azonfelül olyan csendes és nyugodt, minőnek a tavaszi atmosphera ritkán mutatkozik. Az üstököst már az alkonyban jól láttam. 7^h 8^m-kor csavartam reá a nagy látcsőre a spectroscopot, még nem volt egészen sötét, midőn meglepetve láttam az üstökös fényes spectrumát. Ezen ködtömeg színképe sokkal élénkebb volt, mint a mult évi Coggia-féle üstökösé junius 4-én, holott akkor azt már sok ember, ki jó szemmel rendelkezett, fegyverzetlen szemmel is akarta látni (?)

Az első kisérletet hasadás nélkül tettem, a szemnél egy hengerlencsével egy »a vision direct« 5 prismás spectroscoppal. Azonban midőn a színkép elég fényességéről meggyőződtem, a hasadást beleillesztettem a spectroscopba, hogy méréseket is tehessek.

A színképben 3 csík volt látható, melyeknek fényerejét, a színkép kevésbé törékeny részétől számítva, a következő számokkal gondolnám kifejezni, u. m. : 5, 1 és 3. Mint látható, itt a középső csík a legfénytelenebb, nem mint az 1874. évi IV. számú (Borelli) üstökösnél, melynek színképében azon csík volt a legfénytelenebb, mely a színkép legtörékenyebb része felé állott.

Mind a három csík igen elmosódott, mondható ködös volt. Bármilyen finomra állítottam is a hasadást, ezen elmosódottság mindkét oldalon folyton megmaradt, s ezen oknál fogva a méréseket mindig a csíkok közepén tettem, s 6-szori beállítás után a következő középértékeket nyertem :

	scála		hullámhosszaság
1)	7.1	=	561.0
2)	10.0	=	516.0
3)	14.4	=	475.1

Folytonos színképet, daczára, hogy a hasadást a ködtömeg minden részére beállítottam, nem tudtam látni.

Végre egy érzékeny polarisatort csavartam az okulár elé, s habár ezen sarkított fényt gyanítottam is, azt az üstökösnek még mindig az alkonyban levő állásánál fogva határozottan állítni nem akarom.

1875. april 4. 7h 10m. Az üstökös ma is erős condensatiót mutat, a nap felőli részen, a magva csak alig látható, a csóva, valószinüleg a kevésbé tiszta levegő miatt, épen nem látható. Erős nagyitás mellett igen rosz volt a kép, 500-szorosnál már semmit sem lehetett látni.

A spectroscopicus mérések ismét 6 beállításból a következő eredményre juttattak:

	scala		hullámhossz.
1)	7.0	=	562.5
2)	10.0	=	516.0
3)	14.5	=	472.5

A csíkok fényteljességét a következő számokkal vélném kifejezhetni; u. m. 4, 1 és 4.

Ezen méréseket olyan pontossággal vélném adhatni, hogy az első csíknál (vöröstől) lehet ± 1m.m.m. hullámhosszaságbeli hiba, az utolsónál pedig ± 0.4m.m.m..

Ezen két észlelésből, respective 12-szeri beállításból a következő középértékeket nyertem a csikok hullámhosszaságai számára:

	hullámhossz.
1)	561.75
2)	516.00
3)	473.80

Ma egy igen fényteljes kis Browning-féle spectroscoppal próbáltam az üstökös szinképét összehasonlitani Geiszlercsövekben levő gázokkal, de különösen ismét a szénköneg gázzal. E czélra ma egy kis Rhumkorf-féle tekercset használtam egy chromsavas elemmel, nehogy a nagy Rhumkorf erős fényénél fogva tulsugározza az üstökös szinképét. Mint a csikok hullám hosszaságai mutatják, azok a szénköneg színképének 3 csikjával kielégitőleg egyeznek.

A polariscopot ma is megkisértém, de ma még kevesebb eredményre jutottam, mint april 2-án.

Ezen alkalmat azonban felhasználom, a physikusokat egy végtelen érzékeny polariscopra figyelmeztetni, mely dr. Vogl berlini csillagász constructiója. Egy hüvelyben van közvetlen a szem előtt egy Nicol prisma, ezen Nicol és a szem lencse között egy a kristallografiai tengelyével párhuzamban köszörült hegyjegecz lemez, mely 5m.m. vastag. Ezen hegyjegecz lemez azonban nincs a hüvelyben megerősítve, hanem egy réz lemezbe foglalva, mely kivülről bizonyos kis szögek alatt egy kis csavarfej segélyével lengethető. Ha ez nyugpontján áll, az eszköz a rendes szines karikákat mutatja. Ha ezen hegyjegecz-lemezt azonban kissé oscillaltatjuk, a karikák előrehátra mozogni látszanak. Ha most egy égi testre nézünk ezen eszközzel, melynek polarisált fénye van, a mint a hegyjegeczet s vele a szines karikákat mozgatjuk, azok vagy eltakarják az égitestet vagy nem, s igy nem is kell a karikákat effective szinekben látni, (ha a fény igen gyenge) elég ha azt észleljük hogy az égitest vagy fényesebb vagy halványabb lesz a quarz lengetése által.

1875. ápril 9. Az üstökös igen fényteljes magva 7—8-ad rendü csillaghoz hasonlit. A condensatio igen határozott a régi értelemben. A további észlelést azonban felhők akadályozták.

Hulló csillagok.

Legújabb időkben, különösen mióta Schiaparelli a hullócsillagokat olyan érdekesen és geniálisan összehozta az üstökösökkel, ezen pillanatig látható égi testekre több figyelmet fordítanak az észlelő csillagászok, mint eddigelé. Ezelőtt legfeljebb valami nagyszerű közáporról beszéltek, vagy egyes nagy tüzgömbről tettek említést, ha az gyujtott vagy embert ütött agyon. Schiaparelli azonban egészen más lendületet adott a dolognak; mióta ő theoriáját kimondta, egész hálózatok alakulnak Olaszországban, Francziaországban s különösen figyelemre méltó a mi hálózatunk az osztrák-magyar birodalomban, melyre minden hazafiság nélkül, s elfogulatlanúl elmondhatjuk, hogy legcorrectebben dolgozik; t. i. mig a francziák megelégesznek egyszerű megolvasásával a futó csillagoknak, vagy az olaszok s a németországiak a meteorokat azonnal egy égi mappába rajzolják be, azok láthatósága után, addig mi pontos chronometerekkel és meteoroscopokkal dolgozunk, s az időt 1^s pontossággal adjuk, az Azimuthot és magasságot $\pm 0^o,5$-nyi pontossággal, sőt gyakorlottabb régi észlelők ± 5—$10'$-ig is biztosan állítják be a futócsillag felvillanási s kialvási helyét. A mi a meteoroscopot s annak kezelésmódját illeti, azt feleslegesnek tartom itt tárgyalni, ezen igénytelen kis eszköz a tudományos világban már sokkal ismertebb dolog, hogysem azt itt magyarázni kellene.

Nem lesz azonban érdektelen a hálózattal megismerkedni, melynek létrehozója dr. Weisz Edmund tanár s kormánytanácsos Bécsben. Weisz tanárnak nem kevés fáradságába került, mig ezen hálózatot létrehozta, de most gyönyöre lehet benne. Ezen hálózat központja Bécs. A hálózat pontjai: Kremsmünster, (csillagda) Brün, (műegyetemi tanárok) Troppau, (gymnasiális tanárok) Krakkó, (csillagda) Póla, (csillagda) Ó-Gyalla (csillagda) s legújabban a királyi magyar természettudományi társulat bőkezüségéből s a később nevezett tanár urak szives közreműködésével birunk 4 állomást; u. m. Selmecz, (Schwarz akadémiai tanár), Szathmár-Némethi (Tóth Mike tanár), Zágráb, (Stozir tanár), és Gyulafehérvár, hol Avéd tanár észlel. — Ezekből 2 állomást a kir. m. természettudományi társulat látta el meteoroscopokkal, s mint igérve van, később órákkal és sextánsokkal is el fogja látni. A nevezett állomásokat főtisztelendő dr. Schemel igazgató ur látta el észlelési utasitással.

Az észlelők Azimuthot és magasságokat észlelvén, ezek olyan coordinaták, melyek minden pillanatban változnak a föld forgásával, s igy azokat reducálni kell Rectascensióra s declinatiora, hogy a csillagok felvillanási helyét, úgy azok elenyészésének positióját egy állandó mértékben kapjuk. Ha ez megvan, akkor égabroszra rajzoltatnak fel, honnan a radiátió pontjok azonnal kitünik.

A meteoroscopicus észlelésen kivül én spectroscoppal is szoktam a hulló csillagokat észlelni, s mindenekelőtt ezen észleléseim eredményét fogom közölni, miután mint physicai observatorium észlelései közt, ez elsőbb rendű helyet foglal a többinél.

A mód, melyet követek, az, melylyel Herschel Sándor

Browning- és nagy ritkán Huggins dolgozik; t. i. egy Browning-féle meteorspectroscoppal, mely áll 3 egyenes látatu prismából egy kis észlelő távcső elé dugva, s legelől egy henger lencsével bir (hasadás nélkül), mely a szinképet szélesiti. Én azonban arra a tapasztalásra jöttem, hogy ezen kis műszer látmezeje csak 7^0 átmérővel bir, s meglehetős fénytelen. Egy futócsillagnál, mely gyorsan megy, s alig 1^s-ig látható, 7^0 vajmi kevés! Megkisértém a távcsövet elvetni, s a henger lencsét a szem és prismák közé helyezni; ezzel azt értem el, hogy 7^0 helyett 22^0 lett a látmezőm s a spectroscop igy oly fényteljes, hogy egy 2-od rendű állócsillag szinképét még szépen látom benne; α Lirae szinképében még jó szem tiszta léggel absorbtiókat is lát vele. Igy persze sokkal könnyebb vele észlelni, s tetemesen több hullócsillagot is észleltem vele, mint azelőtt.

Az ó-gyallai csillagda stb. akadémiai kiadványban már az 1873-ik évi juliusi rajról nehány szó lett emlitve, igy azt most érintetlenül hagyva, az 1874-ik évi augusztusi rajnál kezdem észlelésem közlését.

1874. augusztus 7, 8, 10, 11 és 12-iki estéket kizárólag a spectroscopicus észlelésre szánhattam, mivel három észlelővel rendelkeztem, kik a csillagdai segéd vezetése mellett a meteoroscopicus észleléseket nélkülem is elvégezték.

A nevezett napokon mintegy 130 hullócsillagot észlelhettem a szinképelemző készülékkel, és pedig az 1-sőtől 4-ed rendüig.

A hullócsillagok magva mindig folytonos szinképet mutatott, de gyakran két spectrum volt látható t. i. a folytonos mellett egy izzó gáz-spectrum is. Olyan meteoroknál hol a sárga szín tulnyomó volt, a szinképben is az volt leginkább képviselve, vöröseknél a vörös szin, zöld csillagoknál a zöld. Az ibolyaszin sohasem volt látható, már az indigo is igen ritkán, a vörös csak kizárólag vörös meteoroknál.

Amilyen egyszerű a meteoritek magvának a spectruma, annál különbözőbb s tarkább azok csóváinak szinképe. A sárga csillagok csóvájában csupán a natrium szalag látszott, zöldeknél a magnesium, vöröseknél, melyek mind óriási gyorsasággal repültek, a lithion vagy talán strontium izzott. A vörös meteorítek csóvájának szinképe többnyire 2 csikból állott a spectrum vörös részében, de ritkán hiányzott belőle a natrium csikja is, mely igen jó tájékozóul szolgált ezen pillanatnyi észlelésnél.

Ezen periodusban volt alkalmam nehány nagy futócsillagot észlelni, melyek Venusnál nagyobbak voltak, s csóvájok 30—40s-ig, sőt egynél 156s-ig volt látható. Ezen utóbbinál a szinképet 30s-nél tovább vizsgálhattam. Itt a natriumon s magnesiumon kivül még több csikot láttam, különösen a zöldben, sőt kékben is; ezek okvetlen a vas és széneny szinképei voltak.

Másnap alcoholban különböző sókat oldottam fel, s pamutot bemártva sötét helyen kis távolban feldobattam magam előtt. Ezáltal egyuttal gyakoroltam magamat a meteoritokat követni a spectroscoppal. — A nevezett meteoritok szinképéhez leginkább hasonlitott azon folyadék szinképe, melyben natrium, magnesium vas (vaschlorid) és réz (rézchlorid) volt feloldva.

Nem tartozik ugyan a gyakori esetek közé, de többször észleltem mintsem elnézésnek tarthatnám, hogy némely csillag épen nem mutat legkisebbé sem gázspectrumot, csupán csak egy elég fényes folytonos spectrumot. Ilyen esetben mindig észlelőtársaimtól elmondattam magamnak azon csillag kinézését, de daczára, hogy társaimat a csóvák különös megfigyelésére felkértem, ilyen esetben sohasem láttak ők csóvát, midőn én gázspectrumot nem észleltem. — Ilyen alkalommal a folytonos szinkép mindig sokkal élénkebb volt egy 3-ad nagyságú csillagnál, mint egy olyan elsőrendűnél, hol a folytonos szinkép mellett gázspectrumok is voltak láthatók. Különös figyelemmel voltam ezen folytonos spectrumot mutató meteorokra, a végből: vajjon nem lehetne-e azok szinképében sötét vonalakat látni, ez azonban még eddig nem sikerült, ámbár azt lehetetlennek épen nem tudnám tartani.

1875-ben meteorokon kevés szinképelemezést tehettem, mert a rajoknál részint a holdfény hatott zavarólag, részint borus idő gátolta az észleléseket, az augusztusi rajt pedig betegségem miatt nem észlelhettem, mely épen azon napokban döntött ágyba. Az octoberi rajnál borus ég, a november

13–14-ikinél a holdfény, 27—28-ikinál, úgy a deczemberinél borus ég gátolta az észlelést.

A juliusi rajból több meteor szinképét vizsgáltam, melyek közül nehány érdekesebbet bővebben feljegyeztem.

Julius 27. $10^h\ 15^m\ 15^s$. Gyönyörü sárga magvú tűzgömb, melyet egy hosszú zöldessárga uszály követett. Ezen meteor Venusnál sokkal nagyobb, s 2 másodperczнél tovább volt látható. A magvának végtelen fényes szinképe folytonos volt, az uszálya gázspectrumot mutatott, melyben a natrium volt túlnyomó, de kivűle még a zöldben 3 csik látszott.

$10^h\ 40^m$. Szép vörös tűzgömb a déli égen, Marsnál sokkal nagyobb és fényesebb. A mindenhol jelenlevő natrium csikja itt végleg hiányzott, csak is a vörösben volt két csik látható, melyek közűl fényesebb volt az, mely a spectrum kevésbé törékeny felén volt. Végtelen halavány folytonos spectrum is mutatkozott mellette, a vöröstől a zöldig.

$10^h\ 45^m\ 43^s$. Jupiter nagyságú szép tűzgömb. Szine: zöldesfehér, hosszu uszály által lett kisérve. A gömbnek szinképe folytonos volt, s eléggé kivehető, uszálya gázspectrumot mutatott, még pedig a natrium igen határozottan mutatkozott, s mellette a zöldben 3 csik volt látható.

$10^h\ 55^m\ 14^s$. Első nagyságu meteor, középszerű uszálylyal. Szinképe: folytonos, de elég gyenge, mellette ismét a nátrium és a zöldben már többször mutatkozó 3 csik észleltetett.

$10^h\ 58^m\ 16^s$. Harmadnagyságú futócsillag, mely igen gyorsan haladt. Spectroscopban csupán a natrium csikja látszott, folytonos szinképnek nyoma sem volt.

Julius 29. $10^h\ 18^m\ 16^s$. Venus nagyságú szép tűzgömb, sárga szinű, mely 2 másodperczig volt látható. Szép uszály maradt utána, mely 5—6 mperczig világított az égen. A fényes folytonos szinképben a natrium csikja igen élénken mutatkozott.

Julius 31. $11^h\ 45^m\ 5^s$. Venus nagyságu szép tűzgömb, kis uszálylyal. A natrium csikja igen élénk volt, a folytonos szinkép elmosódott és halavány.

A meteoroscopicus feljegyzések, melyek az ó-gyallai csillagdán történtek, sokkal számosabbak. A feljegyzések

1871-ben kezdődnek s mint a tábla mutatja, 1875. végéig terjednek. Ide jegyzem egyuttal az észlelő napok számát is, mely valóban szép kevés, de tekintetbe véve azt, hogy az észleléseknél mennyit gátol bennünket a tele hold, s borus napok, könnyü belátni, hogy ezen számok megkettőztetésére a legkedvezőbb körülmények összetalálkozása kivántatnék.

Évszám	észlelő napok száma	meteorok száma	tüzgömb	1-ső nagyságu
1871	6	83	10	7
1872	18	568	23	71
1873	20	393	20	59
1874	9	453	13	64
1875	10	474	20	85
5 év alatt	63	1971	76	286

Mint a táblázat mutatja, 5 év alatt csak 63 napon lehetett észlelni, s ezek közül is több felhő miatt félbe lett szakítva, s a feljegyzett meteorok száma 1971, melyek közül csak 362 volt elsőrendű vagy annál nagyobb, természetesen ide nem számitva az 1872. november 27-ikét, hol egy este közel 2000 meteor lett hozzávetőleg megolvasva s utóbbi értekezletem 65-ik lapján ezen tünemény bővebben is lett megtárgyalva.

A csillagda földrajzi fekvésének meghatározása.

Mint már említve volt, a távirdai huzal a csillagdába be van vezetve, s ott egy felszerelt állomás van, kizárólag tudományos czélokra használandó. Az állomás földszint a dolgozó szobában van elhelyezve, de hogy a jeladások a normal órától történhessenek, mely a délkörszobában van elhelyezve, ott egy külön billentyű van felállítva s az állomáson (csillagdai) levő jelfogó, egy váltó segélyével, a helyi telep folyamát a délkörszobában lévő Chronograf delejpatkóján működteti, s ezáltal a vett jeleket a normál óra mellett lehet feljegyezni. Különböző okoknál fogva jobbnak láttam minden tekintetben a szem és fül-módszernek előnyt adni, már csak azért is, hogy Bécscsel az egyformaságot megtartsam.

A jeladások 1875. január 7, 8 és 9-én történtek. Bécsből dr. Weisz barátom és dr. Holetschek csillagdai segéd ur volt szives a jeleket adni az 1980-ik számú Molineux-féle boxchronometerrel.

Az eredmény melyet nyertünk, a következő:

Egy észlelet közép hibája	$\pm\ 0^s.457$
» » valószinű »	$\pm\ 0^s.309$
A számitás k. érték k. hibája	$\pm\ 0^s.0254$
» » » valószinű »	$\pm\ 0^s.0171$

tehát :

$$d\lambda = 7^m\ 13^s\ 89 \pm 0^s.02.$$

Kolozsvár földrajzi hosszának meghatározása.

Kolozsvár földrajzi hosszának meghatározásához már 1874. deczemberben, a mint a Venus átvonulása észlelése után onnan haza tértünk, hozzáfogtunk. A módszer ismét a távirdai huzal volt, melylyel müködtünk. Kolozsvártt a kiinduló pont az ugynevezett csillagda volt, hová a huzal be lett vezetve, s helyiség hiánya miatt dr. Martin Lajos kolozsvári k. egyetemi tanár ur egy kis Theodolithot iparkodott a csillagda ablakának párkányára felállitani, t. i. a délkörben, s miután ő nem csak sark, vagy sarkkörüli csillagot, de még a Zenithhez közeli csillagot sem volt képes beállitani, s csupán a déli égen látható csillagokra volt kénytelen szorítkozni, képzelhető, hogy eredményre egyátalában nem juthattunk.

Junius 8-án Nagy Tamás urat az Arway-féle boxchronometeremmel leküldtem, hogy a megkezdett munkát befejezzük.

Ezen műtétnél kiindulási pont gyanánt az ó-gyallai csillagdát vettem fel, melynek földrajzi fekvése akkor már Bécstől pontosan meg lett határozva. Kolozsvárott mint itt, egyidejüleg csillagászati észlelések történtek a délkörben, s hogy az órák netalántáni variatioi kizárassanak, azok összehasonlításai az észlelés közben történtek. Ó-Gyallán mint Kolozsvárott lehetőleg ugyanazon csillagok lettek átbocsájtva, s Gyallán a délkörcső többször átfordítva. Kolozsvárott Nagy Tamás ur észlelt, Gyallán én.

Az észlelések junius 11, 12, 13 és 14-én egész éjjel tartottak; Nagy Tamás tanár ur legsikerültebbnek tartja a 12-iki észlelést, kevésbé a 11 és 14-ikit. A 13-iki észlelésekkel a pókháló-szálak távolait határozta meg, úgy a collimatiót. A műszer tengelyének hajlása minden egyes átbocsájtás előtt és után meg lett határozva. Legnagyobb nehézséget okozott a műszernek az ingadozása azimuthban, mely valószinüleg a faoszlopoktól származott. (Kolosvárott)

A négy estén nyert azimuthok borzasztó ingadozásai a következő kis táblázatból kitünnek :

Junius 11	**Junius 12**	**Junius 13**	**Junius 14**
K= $+14^{s}.26$	K= $+17^{s}.29$	K= $+21^{s}.33$	K= $+27^{s}.93$
» $+14^{s}.42$	» $+17^{s}.55$		» $+26^{s}.64$
	» $+17^{s}.78$		» $+24^{s}.50$
	» $+17^{s}.42$		» $+25^{s}.04$
			» $+24^{s}.28$

Mint látható, 11, és 12-én az ingadozások csak is a másodpercz tizedrészében mutatkoznak, holott 14-én az eltérések borzasztó nagyok, midőn azok egy éjjel $3^{s}.65$-re rugnak.

	Junius 11	Junius 12	Junius 13
Δ t=	$+5^h\ 24^m\ 12^s.21$	$+5^h\ 27^m\ 57^s.84$	$+5^h\ 35^m\ 45^s.98$
	$+5^h\ 24^m\ 12^s.74$	$+5^h\ 27^m\ 57^s.31$	$+5^h\ 35^m\ 43^s.61$
		$+5^h\ 27^m\ 57^s.88$	$+5^h\ 35^m\ 44^s.53$
		$+5^h\ 27^m\ 58^s\ 54$	$+5^h\ 35^m\ 43^s.86$
		$+5^h\ 27^m\ 57^s\ 25$	$+5^h\ 35^m\ 46^s.78$
			$+5^h\ 35^m\ 43^s.63$
Közép=	$+5^h\ 24^m\ 12^s\ 47$(?)	$+5^h\ 27^m\ 57^s.76$	$+5^h\ 35^m\ 44^s.73$(?)

Ezen óra-állásokból látható, hogy biztos eredményt csakis a 12-diki észleletek alapján kaphatni, vagy súlyok szerint társítva összevonható valamennyi, ha ugyanis a 11- és 14-ki észlelésnek súlya 2, a 12-iké 4, akkor az óra — összehasonlítások alapján Gyalla és Kolozsvár közötti hosszkülönbség ($\Delta\lambda$) a következő :

$\Delta\lambda$ Kolozsvár—Gyalla$=+21^m\ 34^s.89$[mind társítva] *a*

» » » » $=+21^m\ 33^s.16$[csak a 12-i észlelésből] *b*

Nagy Tamás tanár úr, mint már említettem, az utóbbinak ad nagyobb súlyt, de mégis az *a* eredmény jobban megegyez a trigonometriai úton nyert hosszusággal, tudniillik: $21^m\ 36^s.1$.

A Vénus átvonulása alkalmával lent lévén Kolozsvárott, nehány csillag és a nap észleléséből, melyet egy kitünő Gambey-féle sextanssal tettem, s Arway-féle chronometerem átvitelével megközelitőleg iparkodtam Kolozsvár geographiai hosszát meghatározni, mely a telegraphikus meghatározástól nem nagyon tér el.

Kolozsvár földrajzi hossza lenne tehát Páristól kelet felé: telegraphicus meghatározás — $1^h\ 24^m\ 57^s.9$
sextanssali » » — $1^h\ 24^m\ 53^s.9$.

Földrajzi hossz-különbség Ó-Gyalla és Zágráb (reáliskola) között.

Ezen műtét inkább csak kisérlet volt dr. Schenzl igazgató úr részéről, mintsem annak valami fontos eredményt akart volna főtisztelendő igazgató úr tulajdonitani, azonban ismerve dr. Schenzl igazgató úr jártasságát a csillagászat terén is, azonfelül a műszerekkeli finom bánását, igen hamar kitünik, hogy az egyetlen julius 16-diki észlelések s óraösszehasonlítások nyomán ezen kis kisérlet sokkal nagyobb pontosságra tarthat igényt a kolozsvárinál.

Ó-Gyallán a rendes mód szerint történt az időmeghatározás; Zágrábban az időmeghatározást dr. Schenzl és Stozir urak eszközölték egy Hammermüller-féle theodolittal, mely a zágrábi főreáltanoda tulajdona, úgyszintén az Arway-féle chronometer is, melylyel ezen műtét véghez vitetett. Nevezett urak az időmeghatározás után a chronometert igen óvatosan a zágrábi távirdahivatalba vitték s onnan lettek a zágrábi idő szerint adott jelek Gyallára adva, s a gyallaiak felvéve.

A jeladások úgy történtek, mint azt már a Bécs—Gyalla közötti hosszkülönbség meghatározásánál említettem. 3 rendbeli jelt adott Zágráb, 3 rendbelit Gyalla és igy összesen 78 egyes óra-összehasonlítás történt.

A számításból kitűnik, hogy egy észlelet közép hibája : $\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m-1}} = \pm 0^s.130$

» » valószinű » $0.6744 \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m-1}} = \pm 0^s.087$

A számítás közép hibája $\frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m-1}} \dots = \pm 0^s.053$

A számítás valószinű » $\frac{0.6744}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m-1}} = \pm 0^s.036.$

Mindezekből az eredmény :

dλ [Ó-Gyalla — Zágráb] $= +8^m\ 44^s.57 \pm 0^s.036$

dλ [Ó-Gyalla — Berlin] $= -19^m\ 10^s.69 \pm 0.020$

dλ [Zágráb — Berlin] $= -10^m\ 26^s.12$

egy ismeretlen régi meghatározás folytán : $10^m\ 24^s\ 27.$

A Vénus átvonulásának észlelése Kolozsvárott.

Dr. Schenzl Guido ur szives támogatása mellett 1874. évi deczember 5-én Kolozsvárra utaztunk a végre, hogy ott a Venus átvonulás utolsó tüneményét megfigyelhessük. A kedvezőtlen időjárás nem kevés gondot okozott nekünk e tekintetben, miután egész novemberben esett az eső, mi még deczemberben is történt. 8-án estve napnyugatkor kitisztult, s derült maradt az ég 9-ikig, de az is csak d. e. 11 óráig. A műszereket csak aproximative birtuk felállitani, talán legjobban állott Schenzl igazgató ur heliometere mindannyi között

Nagy Tamás tanár ur eleinte Abt tanár ur szivességéből egy 3″ nyilású távcsövön, későbben az én Steinheilomon észlelt.

Az én műszerem egy 30‴ nyilású Steinheil-féle látcső volt, erős vas lábra parallacticusan felszerelve, melyhez egy egyszerű kis óramű lett rögtönözve.

Az észlelések következő eredményt adtak; dr. Schenzl igazgató ur a következő különbségeket észlelte:

1)	⊙ Nyug. szél	$19^h\ 46^m\ 29^s.3$	központi :	dif. (⊙—♀)
	⊙ Keleti »	$19^h\ 48^m\ 52^s.7$	$19^h\ 47^m\ 41^s.0$	$16^s.9$
	♀ Középpont	$19^h\ 47^m\ 24^s.7$	....	

Ezután a positio körön a következő értéket olvasta le igazgató ur: $19^h\ 59^m\ 27^s.5$ kolozsvári köz. időben a positio szög: $u=17°\ 37'$. A szög a declinátio körtől, északról nyugaton át délre lett meghatározva.

2)	⊙ Nyug. szél	$19^h\ 51^m\ 10^s.7$		diff. (⊙—♀)
	⊙ Keleti szél	$19^h\ 53^m\ 33^s.1$	$19^h\ 52^m\ 21^s.9$	$18^s.8$
	♀ Középpont	$19^h\ 52^m\ 3.1^s$	....	

Én az idő rövidsége miatt mind két csillagzat nyugati, respective keleti szélét észleltem s azok átmérőjét a táblákból olvastam ki, mivel későbben a Venus széle ugy is be volt harapozva a nap szélébe, ott biztos észlelést reményleni ugy sem lehetett.

1)	⊙ Nyug. szél	$19^h\ 46^m\ 27^s.6$		diff. (⊙—♀)
	⊙ Keleti »	$19^h\ 48^m\ 48^s.7$	$19^h\ 47^m\ 38^s.2$	
	♀ Nyug. »	$19^h\ 47^m\ 19^s.8$		$16^s.1$
	♀ Keleti »	$19^h\ 47^m\ 24^s.3$	$19^h\ 47^m\ 24^s.1$	

2)	⊙ Nyug. szél	$19^h\ 48^m\ 20^s.6$	$19^h\ 49^m\ 31^s.2$	
	⊙ Keleti »	$19^h\ 50^m\ 41^s.7$		$16^s.4$
	♀ Nyug. »	$19^h\ 49^m\ 12^s.6$	$19^h\ 49^m\ 14^s.8$	
	♀ Keleti »	$19^h\ 49^m\ 17^s.1$		

3)	⊙ Nyug. szél	$19^h\ 50^m\ 15^s.6$	$19^h\ 51^m\ 26^s.2$	
	⊙ Keleti »	$19^h\ 52^m\ 36^s.7$		$16^s.8$
	♀ Nyug. »	$19^h\ 51^m\ 7^s.1$	$19^h\ 51^m\ 9^s.4$	
	♀ Keleti »	$19^h\ 51^m\ 11^s.6$		

Miután ezen három △ különbséget észleltem, érzékeny szemeim a vörös védüvegtől annyira megfájdultak, hogy távcsövemet kénytelen voltam Nagy Tamás urnak átengedni, s az a következő különbségeket észlelte vele:

1)	⊙ Nyug. szél	$20^h\ 1^m\ 45^s.9$	$20^h\ 2^m\ 56^s.5$	diff. (⊙—♀) $25^s.1$	
	⊙ Keleti »	$20^h\ 4^m\ 7^s.0$			
	♀ Nyug. »	$20^h\ 2^m\ 29^s.1$	$20^h\ 2^m\ 31^s.4$	correct. $24^s.6$	
	♀ Keleti »	$20^h\ 2^m\ 33^s.6$			
2)	⊙ Nyug. szél	$20^h\ 3^m\ 12^s.6$	$20^h\ 4^m\ 23^s.2$	$24^s.8$	
	⊙ Keleti »	$20^h\ 5^m\ 23^s.7$			
	♀ Nyug. »	$20^h\ 3^m\ 56^s.1$	$20^h\ 3^m\ 58^s.4$		
	♀ Keleti »	$20^h\ 4^m\ 0^s.6$			

Ezen észlelések után Nagy ur nemsokára látta a Venus szélét a nap szélével összefolyni s ezen pillanatot fel is jegyezte, s miután a számitás az észleléstől csupán 9^s-ig tér el, ezen följegyzést helyesnek veszi fel, s igy az utolsó érintések a következő időkben történtek :

III. érintés	19^h	42^m	39^s
IV. érintés	20^h	7^m	13^s

A mi az utolsó érintést illeti, azt nem tartja Nagy úr ócsárolhatlan pontosságunak, mert ő már $20^h\ 6^m\ 45^s$-kor vélte a Vénust a nap tábla elől elvonulva, holott azt utoljára $20^h\ 7^m\ 13^s$-kor látta eltünni.

Az adott idők kolozsvári közép idők, melyek 8-án esteli sextans észlelésből (α geminorum) s 9-kén az átvonulás utáni napészlelésből lettek levezetve. — Kolozsvár keleti hoszszát Páristól ezen észlelések s a chromometer átvitel nyomán $1^h\ 24^m\ 53^s.9$ vettem fel, sarkmagasságát : $+ 46^{\circ}\ 45'\ 31''$. Utóbbi érték : több észlelő eredményének közép értéke.

A villámok spectruma.

A villámok spectrumát megfigyelni majdnem olyan nehéz mint a hullócsillagokét, mert habár az észlelő minden villámtól, mely a hátamögött villan is fel, lát ugyan spectrumot, de semmi esetre sem azt a spectrumot látja, melyet látna akkor, ha a spectroscop hasadása a villámra, vagyis a czikázó villany-szikrára lenne állítva, ezt is természetesen akkor látná legintensivebben, ha a villanyszikra a felhőből a földre csap át, de a sok villám között ez milyen ritka eset, és milyen véletlen kell ahoz, hogy észlelő épen arra a tájra fordítsa figyelmét, hol a két különnemü villanyosság: t. i. a felhőé a földével egyesül. Részemről kevés villanyos zivatart hagytam, különösen 1870. óta, megfigyelés nélkül, s miután azt többnyire, sőt mindig zsebspectroscoppal tettem, melyet folyvást magammal hordok, nem adom nap s óra időben, csak nehánynak jegyeztem fel dátumát, mely a többitől igen eltér, azonfelül megfigyeléseim nem is mind Gyalláról datálódnak, hanem több rendbeli Ostendeből, Bonnból, Londonból, Brightonból és Ischl vidékéről, sőt egy-kettőt vasuton is volt alkalmam észlelni.

1872. nyarán Budapesten volt alkalmam egy gyönyörü villanyos zivatart megfigyelni spectroscoppal. Délután a szigetre akarva menni, egy nagy felhő, mely a Gellérthegy felől (D. N.) jött, visszatartott a hajóraszállástól, látva benne élénk villámokat czikázni. Nemsokára az egész látkört sötét volt s kezdett az eső esni. Ez lehetett k. b. 3^h 40^m. Miután a villámok igen sürüen jöttek, a Dunagőzhajózási társulat váróbódéja alatt foglaltam helyet, hogy azokat a spectroscoppal észlelhessem. A nappali diffus fényből még elég fényes spectrum látszott a kis műszerben, s különösen feltünőleg mutatkoztak a Brewster-féle vonalak. A nagy felületű villámoknak még nem volt erős a fénye; néha-néha a folytonos spectrum kissé erősebb lett, arról volt megtudható, hogy villámlott.

Más látszott azonban, ha egy cikázó villám futott el a hasadás előtt; akkor a légeny és köneny spectruma oly élénkséggel tünt fel, hogy a diffus napfénytől eredő spectrumot Frauenhoffer vonalaival együtt olyannyira túlsugározta, hogy a szem utána pár másodperczig a napspectrumból semmitsem látott. Ezen observatoriumból azonban nagyhamar elhajtott egy sebes zápor, akkor egy kocsiba menekülve, lakásomra hajtattam, hogy onnan folytassam észleléseimet. Azalatt az est közeledvén, sötétebb lett s mindent jobban lehetett látni. *Háromféle spectrumat észleltem.* Azon villámok, melyek cikázás nélkül *nagy felülettel birtak, folytonos szinképet* mutattak, azok melyek *cikáztak megszakadás nélkül a köneny szinképét s mást semmit, végre* azok, melyek cikáztak ugyan, de a *cikázásuk több izben meglett szakadva, a köneny s a légeny gyönyörü szinképét* mutatták.

Ezen tapasztalatom több izben meg lett erősitve, azonban feltünést okozott nálam egy erős villanyos zivatar megfigyelése Ostendében 1872. augusztus havában. Ezen zivatarban alig látszott más, mint cikázó villám, azonban olyant nem birtam a spectroscopom hasadásába hozni, mely a tengerbe csapott. A horizontálisan cikázó *villámok spectruma köneny volt légeny nélkül,* s a köneny csikjai szélesebbnek látszottak, mint a tengertől távolabb fekvő vidékeken, meglepő volt azonban *a natrium végtelen intensiv csikja,* melyet máshol soha nem észleltem, de tengerparton azután is igen gyakran. A natrium csikja azonban nem mindig volt egyenlően látható.

A sok villanyos zivatar, melyet alkalmam volt megfigyelni, majd mind az előbb leirt, s Pesten észlelt zivatarral analog volt.

1874. május 30-án. Ó-Gyallán Nagy urral 2 spectroscoppal egy gyönyörü villanyos zivatart észleltünk. 10—11 óra között (este) a véletlen úgy akarta, hogy egyidejüleg mindketten egy és ugyanazon villám spectrumát lássuk, mely a földre ütött le. Itt csupán csak a köneny spectrumát láttuk mindketten, de oly intensitással, hogy mondhatni bátran, miszerint a vörös csik vakitó fénynyel birt. A többi csikok is oly élénken mutatkoztak, minő állapotban azokat mesterségesen előállitani részemről teljesen lehetlennek tartom. Eddig ez volt az egyetlen, a földre csapó villám, melynek spectrumát láttam.

1874. junius 15-én ismét egy nagy villanyos zivatart észleltem spectroscoppal. Ezen alkalommal tisztán kivehető volt, hogy kettős felhő réteg volt felettünk, s czikázó villám egyátalában nem látszott, hanem mind nagy felületü villámok vakitották a szabad szemmel észlelő szemeit, s rendkivüli intensitással birtak mind. A zivatar éjfélig tartott, de közelében egyetlen egy villám sem csapott le a földre. Ez alkalommal egy különös tüneményt észleltem. Mint előbb emlitettem volt, a nagy felületü villámok mind folytonos szinképpel birnak; ez alkalommal, habár mind nagy felületü villámok mutatkoztak is, azok közül egyetlen egy sem birt folytonos szinképpel, de mindannyi a köneny szinképét mutatta, minden legkissebb folytonosság nélkül. Ezen esetet részemről onnan magyaráznám, hogy a villámok egyik felhőből a másikba czikáztak ugyan, de a czikázást nem lehetett látni az alsó réteg miatt, (hahogy ez nem függ részben a magasságtól s légnyomástól is.)

Ezenkivül még volt alkalmam az utóbbi időben villanyos zivatarokat megfigyelni: 1874. julius 24. augusztus 9, 15, 16, 18, 19 és 20-án, továbbá 1875. julius 8-án és 25-én, hol az utolsó esetet kivéve, mely egyenlő tüneményt mutatott az 1874. junius 15-ikivel, mindig azt láttam, hogy *a villámok három különböző szinképet birnak előidézni,* (a tengerparti jelenetet ide nem számitva) s a szinképek minősége a villám alakjától függ.

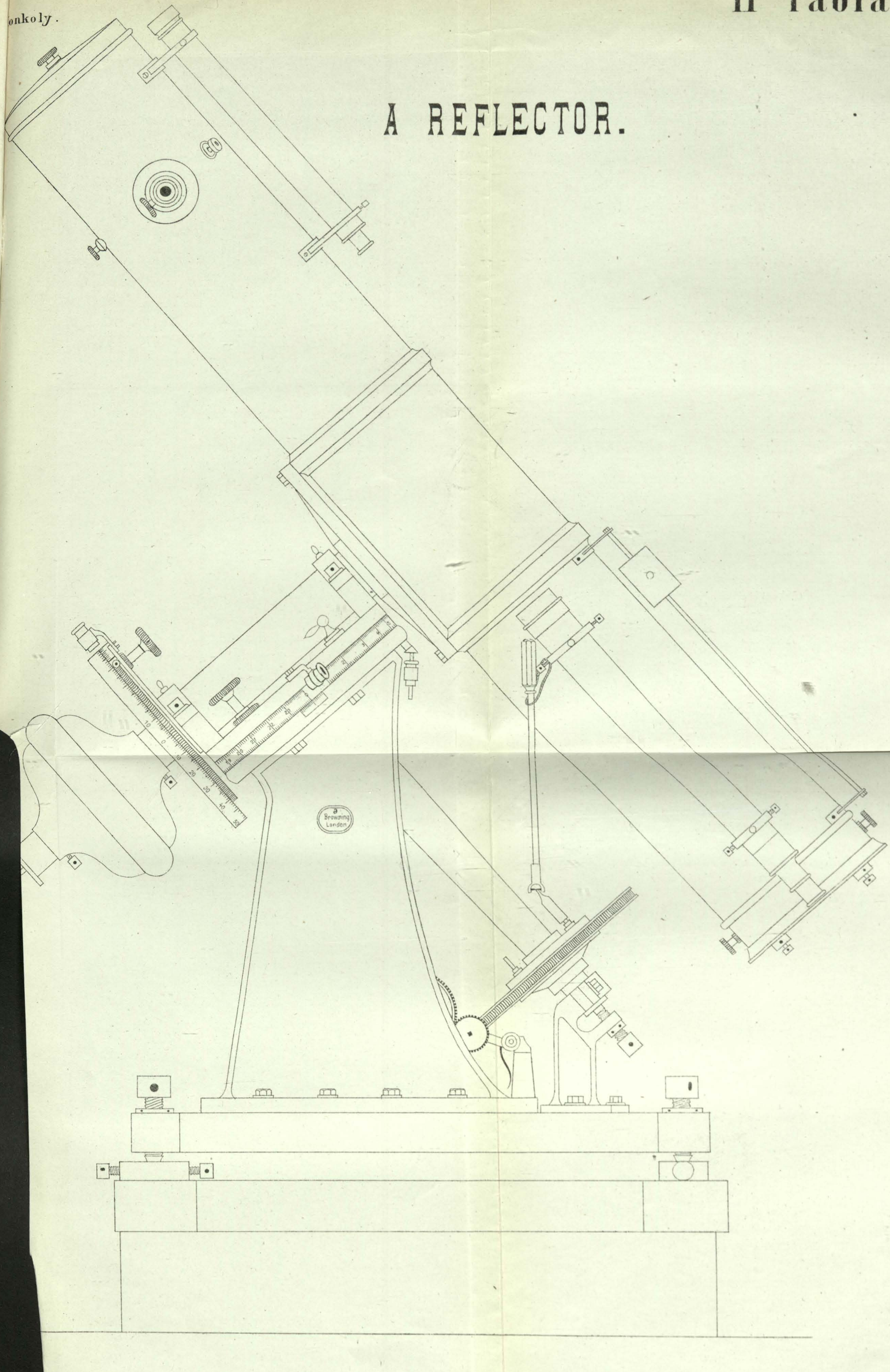
TARTALOM.

onkoly

onkoly.

II Tábla.

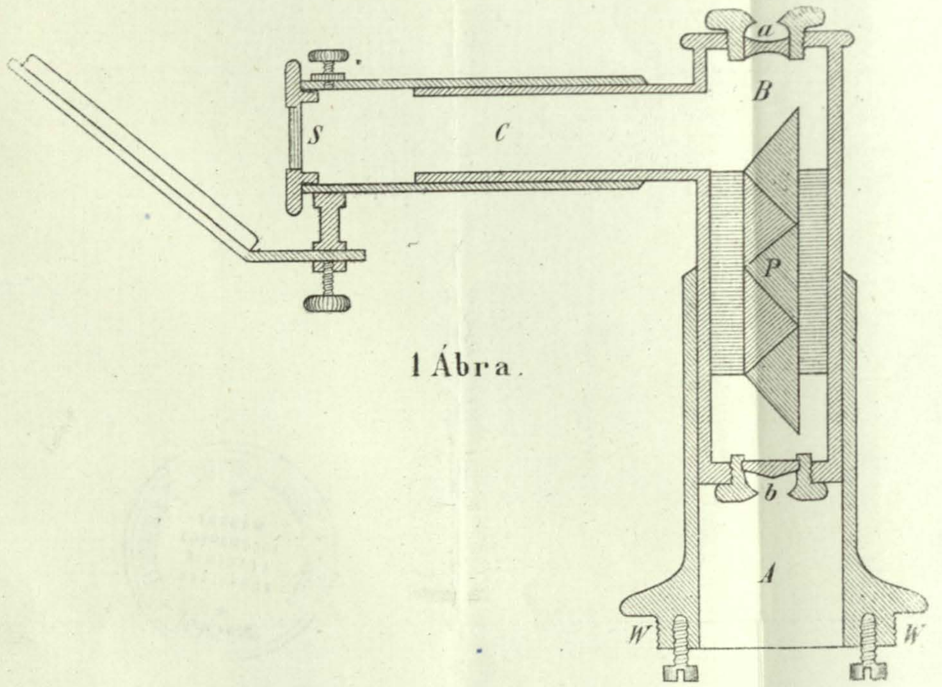
A REFLECTOR.



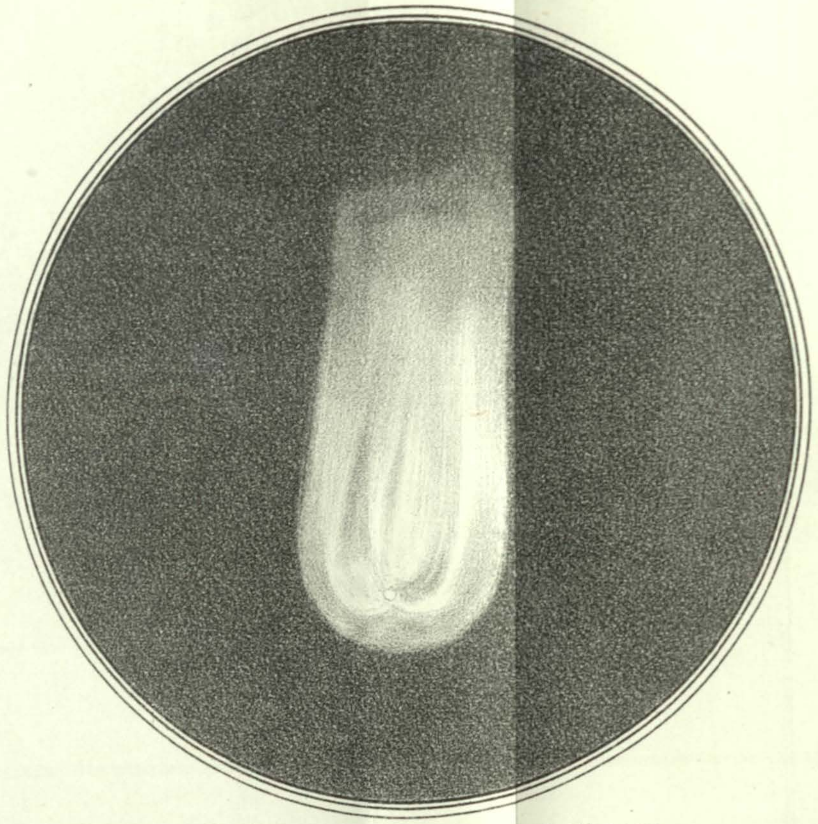
M.T.Ak. Értek. a természett. köréből. 1876.

Ny. Pataki J. udv. műint. Buda

III Tábla.

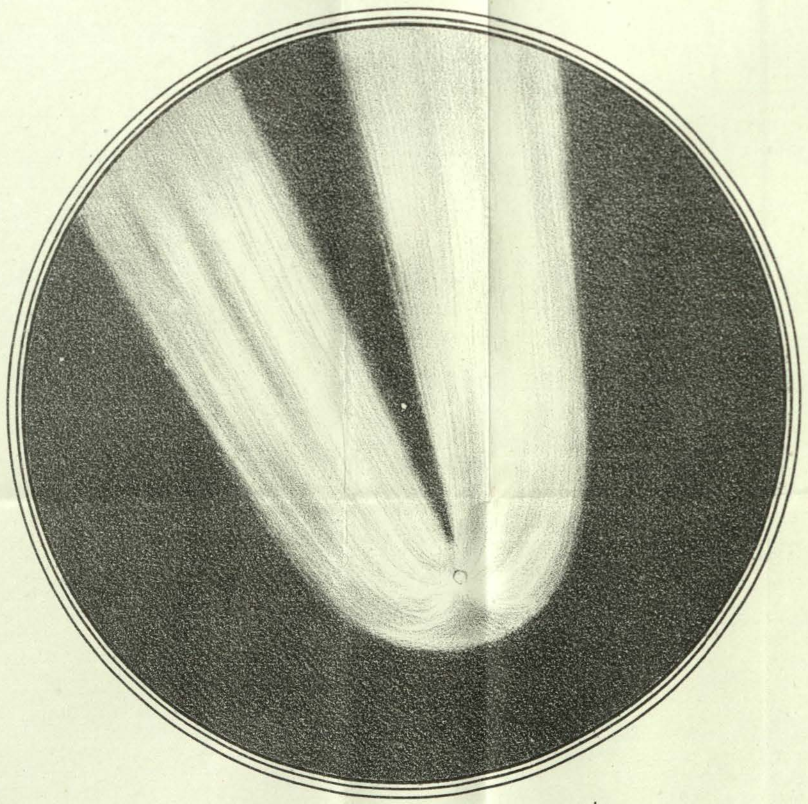


1 Ábra.

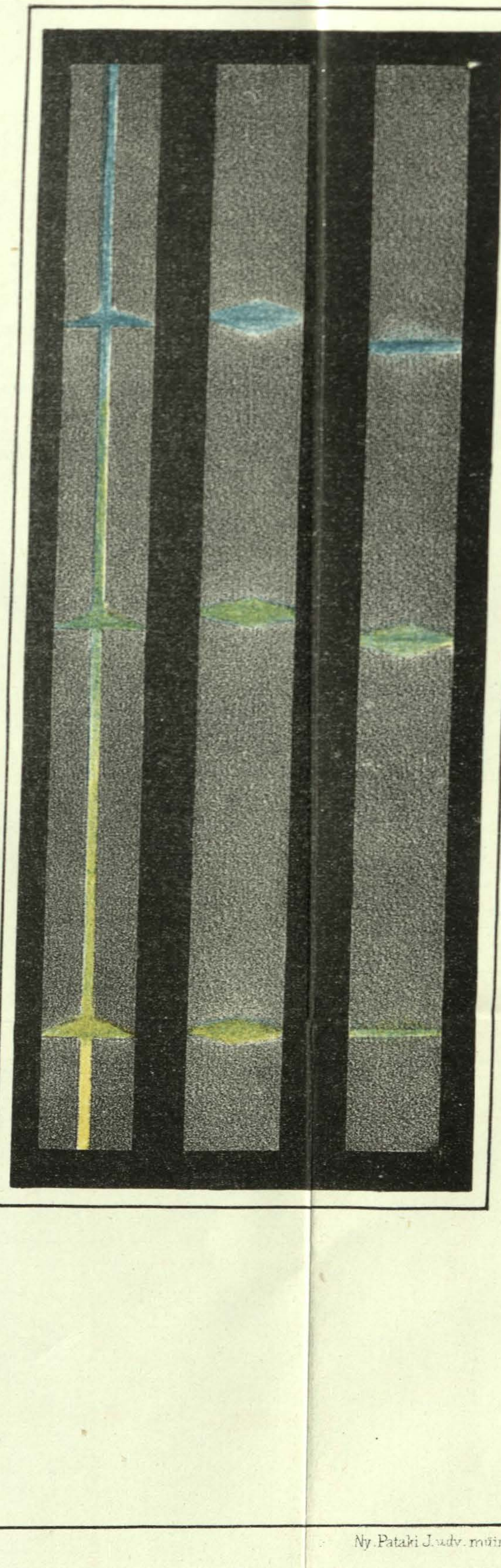


Coggia üstökös. 1874 Junius 6. 10ʰ 30ᵐ k. i.

Encke üstökös. 1875 April 2. 7ʰ 15ᵐ k. i.



Coggia. üstökös. 1874 Julius 3. 10ʰ k. i.



Üstökösök szinképei.

Ny. Pataki J. udv. műint. Budapest

NAPFOLTOK MEGFIGYELÉSE

AZ

Ó-GYALLAI CSILLAGDÁBAN.

KONKOLY MIKLÓSTÓL.

[EGY TÁBLÁVAL.]

(BETERJESZTETETT A III. OSZTÁLY ÜLÉSÉN 1876. MÁRCZIUS 6.)

BUDAPEST, 1876.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALÁBAN.

(Az Akadémia bérházában.)

Budapest, 1876. Nyomatott az „A t h e n a e u m“ könyvnyomdájában.

ELŐSZÓ.

Ezen értekezés csupán csak a napfoltok észleléseit tartalmazza, s folytatásának tekinthető azon megfigyelések sorának melyet szintén főkép a napfoltok megfigyeléséről 1874-ben voltam szerencsés a Magyar Tudományos Akadémiának átnyujthatni, s mely még az év nyarán nyomtatásban meg is jelent. A napfoltok észlelése ma is ugyanazon müszerrel, ugyanazon nagyitással, ugyanazon projectio távolságával és scálával történik mint 1872. és 1873-ban történt. Ámbár a projectió készület egy ujjal cseréltetett fel, de azért a nap képének átmérője, s a scálarészek értéke ugyanaz maradt ma is, a mi volt ezelőtt.

Elvül tüztük ki magunknak a napfoltokat átaljában chronográffal registrálni; először mert az által sokkal nagyobb pontosság éretik el; másodszor pedig a folt átvonulásánál a tábla középpontján, nem kell észlelőnek az átmeneti időre vigyázni, csupán csak a chronograf billentyüjét megnyomni, s egyidejüleg, a villanyosság segitségével feljegyzett folt positióját a scálarészekben kifejezve azonnal feljegyezheti, ezáltal el van hárítva az észlelés alatt megmelegedés következtében a müszer változása által létrejött hiba.

Erre a czélra egy általam szerkeztett három emeltyűs chronográfot állitottam fel a 4 hüvelyes refractor mellé, melynek középső iró szege a másodpercz jeleket adja, a két szélső pedig az észlelő jeleit böki a papirszalagra. Az eszköz a kupolában lévő óra közvetlen közelében áll egy kis szekrény tetején, mely a villanytelepeket tartalmazza s az óra ingája egy Lamont-féle higany érintővel van ellátva, s miután egy lengő aczél csészéből kiálló higany cseppet, minden ingalengésnél egy platin kés ketté metsz, melyet abba külebb vagy beljebb lehet mártani egy csavar segitségével, az a villany folyamot zárva, minden másodperczben egy pontot bök a chronograf szalagján. Nem registrálás esetében a platin a higanyból eltávolitható, s ismét használáskor azt csak bele kell ereszteni a nélkül, hogy a csavart ujból kellene beállitani.

A két szélső irószeg villanydelejének folyama egy körte alaku fogon lévő kettős billentyü által záratik, melyek oly végtelen könnyen mozgathatók, hogy erős reáfújás által már a folyamot zárják; ennek czélja persze az, hogy lehető legkevesebb idő kivántassék a folyam zárására. Ezen körte egy seyem cabelen lógg, mely hár om vékony veresréz sodronyt tartalmaz belsejében, s a távcső bár mely állásánál az észlelő• kezéhez szolgál.

A villanyosságot a chronograf 6 Leclaniché-féle elemtől nyeri, melyek minden emeltyühez kettesével vannak párositva Ezen elemek a legjobbak mit e czélra eddig találtam. Ezen 6 elem, a távirdánál 2 elem mint helyi telep, a lakházam dolgozó szobájában levő távirdánál (mely a dolgozó szobámat, a csillagdában levő dolgozó szobával összeköti) szintén 2 elem mint helyi telep, s a délkörszobában lévő chronografnál szintén 4 elem már 16 hónapja dolgozik a nélkül, hogy tisztitásnál (kivül) egyéb történt volna rajtok.

Nem tartom érdektelennek ezuttal megemliteni azt is, hogy a Meidinger-féle elemeken némi kis változást eszközöltem, melyet ugyan semmi áron sem tartok újnak, de épen ilyen formán még nem láttam sehol sem alkalmazva. A réz környékét kivül is tele rakom rézgáliczczal, olyan magosan, meddig a réz ér; miután az üveg hengert reá teszem, a rézgálicz és horgany közit erősen megtömöm fürészporral, s a szokott módon az egészet keserüsó-oldattal leöntöm, miután az üveghenger belsejét is megtöltöttem rézgáliczczal. Ilyenformán megtöltött 12 elem már 1874. october 30. óta müködésben van a távirdámnál s még kinézése után itélve egy évig fog szolgálni. Házi telegráfomnál pedig pár évvel ezelőtt 2, 16 hüvely magas szinhengerekből álló Hipp-féle elem 2 év és 4 hóig müködött kitünően, s eltávolitása nevezett idő után csak azért történt, mert a két óriási elem nagyon sok helyet foglalt.

A napfoltok észlelésén kivül még földdelejességi észleléseket is mutatok be, melyek ámbár többször meg lettek szakitva, még is elég folytonos megfigyelési sort tüntetnek elő.

Ó-Gyalla, 1876. február 28.

Konkoly Miklós.

Napfoltok megfigyelése.

A napfoltok megfigyelése ugyanazon módon történik, mint már említve volt, mint 1872 és 1873-ban, t. i. a projectio módjával. Az észlelések száma ezuttal kevesebb mint 1872 és 1873-ban, mivel részben azok az új csillagdának építésével meg lettek szakitva, részben pedig mert a napfoltok minimumához már nagyon közel állunk, s így több napi észlelés folt hiány miatt fel sem lett jegyezve.

A napfoltok helyzetét ismét ascensio és declinatio különbségekben adom, mint eddig. Az egy napon a nap felénk fordult felületén levő foltok területét pedig négyzet iv perczekben, mivel ez egy absolut mérték levén, erről kiki azok felületét tetszés szerint négyzet kilometerekre vagy négyszögmértföldekre átváltoztathatja. Megjegyzendő, hogy közép értékben 1^s idő a nap felületén 1448 földrajzi mértföldnek felel meg [az egyenlítőn] — s az adatokból, úgy a jelen mint az 1872 és 1873-iki napfolt észlelésekből az aberratio levonandó.

1874.

Január	d α	−32.8	−30.9	−28.9	−27.6	−26.6	+35.5				
1.	atm.	2.0	1.8	1.8	0.4	0.4	0.6				2.60
$0^h\ 30^m$	d δ	+6.3	−2.5	+7.6	+7.9	+7.9	0.0				
	átm	3.2	0.5	0.5	0.1	0.1	0.2				
Január	d α	−57.2	−54.0	−52.3	+5.1	+65.8					
3.	átm.	2.4	1.2	0.6	0.5	0.8					1.58
$0^h\ 0^m$	d δ	+4.6	−2.8	+5.0	+0.4	+2.2					
	átm.	0.8	0.5	0.5	0.2	0.3					
Január	d α	−63.1	−42.6	+17.9	+53.1	+57.4					
10.	átm.	0.2	0.3	4.0	1.5	2.1					2.32
$11^h\ 42^m$	d δ	+1.1	+2.4	+4.3	+5.0	+5 2					
	átm.	0.1	0.1	1.1	0.8	0.5					
Január	d α	−40.8	−38.5	−36.6	−10.5	−8.1	−0.5	+4.0	+68.0		
14.	átm.	1.0	0.2	0.8	0.2	2.8	0.2	6.0	0.2		2.93
$0^h\ 26^m$	d δ	+3.8	+4.0	+4.1	+4.6	+4.8	+5.2	+5.3	−1.5		
	átm.	0.6	0.1	0 3	0.1	0.8	0.1	1.2	0.5		
Január	d α	−53.7	−48 7	−22.6	−13.3	+63.0					
15.	átm.	0.8	0.8	3.3	10.0	1.0					3.87
$11^h\ 43^m$	d δ	+3.1	+3.4	+4 2	+4.8	−1.3					
	átm.	0.5	0.3	0 7	1.0	0.5					
Január	d α	−62.5	−57.7	−37.3	−32.7	−27.1	+54 3	+6.58			
16.	átm.	0.2	0.3	2.8	0.2	5.2	2.0	1.0			3.28
$0^h\ 19^m$	d δ	+2.9	+3.3	+3.9	+4.1	+4.6	−1.0	+3.2			
	átm.	0.3	0.1	0 8	0 1	1.1	0.5	0.5			
Január	d α	−50.0	−42.7	−39.7	+41 9	+56.9	+58.1	+59.8			
17.	átm.	3.0	0.2	4.0	1.2	1.2	1.2	1.0			3.02
$0^h\ 12^m$	d δ	+3.6	+4.3	+4.2	−0.7	+0.5	+3.9	+0.4			
	átm.	0.8	0.1	0.8	0.5	0.7	0.5	0.5			

Január	d α	-29.0	-19.5	-17.6	-9.5	-6.5		+63.0		+63.8					1.36
22.	átm.	0.2	0.2	3.0	0.2	2.0		1.0		0.5					
$0^h\ 27^m$	d δ	-2.5	-4.7	-0.8	+3.0	-0.7		-1.0		-1.5					
	átm.	0.1	0.2	0.8	0.3	0.5		0.6		0.3					
Január	d α	-36.0	-33.3	-21.9	-20.5	-18.0	-9.5	-1.5	+5.5	+26.5	+37.5	+38.5	+42.5	+67.1	4.71
29.	atm.	1.0	0.5	1.2	2.5	7.0	5.0	3.0	4.0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	
$1^h\ 33^m$	d δ	+0.6	+1.5	+1.4	-3.9	-0.7	+4.3	+4.9	+6.0	+5.9	+0.2	+0.5	+0.4	-1.1	
	átm.	0.5	0.3	0.5	0.5	0.8	1.0	0.8	0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.5	
Február	d α	-61.1	-60.7	-58.0	-47.3	-43.0		-40.3		-22.8		-3.6	0.0	+47.6	3.83
2.	átm.	1.8	1.5	2.0	1.4	2.0		1.4		0.4		0.8	2.0	0.2	
$11^h\ 47^m$	d δ	-3.7	-6.5	+1.0	+3.2	-2.5		-2.3		-2.0		-2.6	-2.3	-3.8	
	átm.	0.7	0.6	1.2	0.5	0.6		0.6		0.2		0.3	0.3	0.1	
Február	d α	-64.0	-56.8	-55.8	-50.9	-21.8		-16.0							2.27
3.	átm.	1.5	1.0	1.0	0.8	1.0		2.5							
$11^h\ 49^m$	d δ	+0.1	+2.3	-3.3	-3.1	-3.4		-3.2							
	átm.	1.0	0.5	0.8	0.8	0.7		0.5							
Február	d α	-67.4	-63.3	-61.1	-58.1	-34.5		-28.3	+43.6	+50.8	+51.6	+52.7	+53.8	+64.0	1.85
4.	átm.	0.1	0.4	0.7	0.8	2.0		2.2	0.2	0.6	0.2	0.3	0.5	1.0	
$0^h\ 6^m$	d δ	-0.7	+1.4	-4.6	-4.1	-4.6		-4.2	+6.6	+9.0	+0.7	+0.5	+0.9	+4.4	
	átm.	0.8	0.4	0.5	0.5	0.5		0.4	0.1	0.2	0.1	0.2	0.5	0.5	
Február	d α	-63.0	+7.0	+8.8	+30.2	+37.7		+37.8							0.56
8.	átm.	0.2	0.2	0.2	1.0	2.0		0.2							
$11^h\ 22^m$	d δ	-4.7	+7.4	+6.0	+7.3	+5.4		+5.9							
	átm.	0.2	0.4	0.5	0.6	0.4		0.3							
Február	d α	+16.3	+16.8	+20.6	+21.6	+23.6		+24.6							0.31
9.	átm.	1.5	0.5	0.2	0.2	0.2		0.2							
$11^h\ 51^m$	d δ	+4.2	+7.1	+7.4	+7.4	+4.8		+5.3							
	átm.	0.5	0.5	0.1	0.1	0.2		0.1							

Február	d α	−24.0	−23.8	−17.1	−17.1	−16.1	+41.1	+43.9	+48.1		0.38
11.	átm.	1.4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.5	0.2	0.5		
$11^h\ 29^m$	d δ	+1.6	+4.4	+4.7	+2.2	+2.8	+1.5	+1.4	+1.2		
	átm.	0.5	0.3	0.1	0.1	0.3	0.4	0.2	0.3		
Február	d α	−27.9	−27.3	−21.4	−21.0	+40.7	+43.6	+47.8	+64.6		0.54
12.	átm.	1.2	0.4	0.2	0.1	0.8	0.2	1.0	0.2		
$11^h\ 37^m$	d δ	+1.3	+4.0	+1.9	+2.4	+2.2	+2.0	+1 8	+1.1		
	átm.	0.5	0.2	0.2	0.2	0.4	0.1	0.5	0.3		
Február	d α	−40.3	−40.6	+27.7	+30.1	+31.6	+35.5	+58.7			0.89
13.	átm.	0.8	0.2	1.4	0.2	0.2	2.0	0.4			
$0^h\ 14^m$	d δ	+0.1	+2.9	+1.6	+1.6	+1.5	+1 4	+1.2			
	átm.	0.5	0.1	0.5	0.1	0.1	0.8	0.4			
Február	d α	−51.1	+12.8	+23.1	+50.8						0.62
14.	átm.	0.5	0.4	3.0	0.3						
$0^h\ 25^m$	d δ	−1 0	+0.6	+0.6	+1.0						
	átm.	0.5	0.2	0.6	0.3						
Február	d α	−31.3	−30.3	−25.3	+11.0	+37.7	+51.7	+56.7			0.45
24.	átm.	0.3	0.3	0.3	1.0	0.4	0.3	0.3			
$0^h\ 31^m$	d δ	+1.1	+1.6	+1.6	+7.2	+9.1	+9.5	+10.9			
	átm.	0.1	0.1	0.1	0.5	0.5	0.3	0.2			
Marcius	d α	−52.3	−50.3	−12.2	−1.8	+7.1	+32.8				1.58
1.	átm.	0.2	0 2	0 3	3.2	3.0	0.3				
$0^h\ 15^m$	d δ	−1.8	−2.3	+3.2	+5.9	+7.0	+5 6				
	átm.	0.1	0.1	0.1	0.8	1.0	0.3				
Marcius	d α	−25.2	−14.8	−5.8	+20.9						0.58
2.	átm.	0.2	3.0	3.0	0.3						
$0^h\ 39^m$	d δ	+2.0	+4.0	+5.3	+5.3						
	átm.	0.1	0.5	0.2	0.1						

Marcius	d α	−27.6	−18.8	−17.5	−15.0	+56 7						
3.	átm.	3.0	2.5	0.2	0.2	2.0						
	d δ	+3.0	+4.1	+6.1	+5.7	+9.0						3.04
11^h 43^m	átm.	0.7	1.0	0.1	0.1	0.5						
Marcius	d α	−64.5	−62.5	−3.9	−3.5	+3.5						
8.	átm.	0.2	0.2	1.2	0.2	0.2						
	d δ	—	+1.3	+10 6	+5.6	+6.8						0.09
3^h 12^m	átm.	—	0.1	0.1	0.4	0 1						
Marczius	d α	−56.9	+9.0	+27.5	+34.8							
13.	átm.	0.2	6.5	5.5	7.0							
	d δ	−2.5	+4.6	+4.4	+4.9							5.22
0^h 16^m	átm.	0.2	0.8	1.2	0 9							
Junius	d α	−43.6	−40.2	+52.0								
2.	átm.	0.2	3.2	2.0								
	d δ	+0.2	+0.9	+1.3								1.23
0^h 30^m	átm.	0.1	0.7	0.7								
Junius	d α	−64 8	−60.8	+4 5	+7.4	+11 4	+12.1	+15.6	+15.9	+18.4	+19.4	
19.	átm.	0.2	0.2	4.1	0.2	2.0	0.3	2.4	0.2	0.2	0.2	
	d δ	−4.5	−4.9	+2.6	+2.8	+3.0	+3.4	+2.9	+2.8	+4.3	+4.0	1.77
0^h 13^m	átm.	0 6	0.4	0.8	0.1	0.6	0.4	0.6	0.3	0.1	0.1	
Julius	d α	−64.1	−61.4	−35.3	−24.1	+5.7	+46.4	+48.7	+56.0	+59.4		
3.	átm.	1.0	0.4	1.5	0.6	0.5	2.0	2.5	1.2	2.0		
	d δ	−3.5	−3.4	+3.6	+3.4	−3.4	+2 5	+3.0	−1.6	−1.7		2.97
11^h 38^m	átm.	1.0	0 2	0.7	0.1	0.2	0.5	0.6	0.8	0.5		
Julius	d α	−46.3	−10.7	−4.7	+32.2	+37.4	+45.0	+49.5	+67.5			
4.	átm.	0.5	0.6	0.5	2.4	2.8	2.0	3.0	1.0			
	d δ	+3.7	−3.5	−3.5	+2.2	+2.5	−2.1	−2.1	−2.9			3.60
0^h 11^m	átm.	0.4	0.2	0.2	0.8	0.8	0.5	0.5	1.0			

Julius	d α	−56.2	−25.9	+17.8	+24.1	+31.6	+37.1	+63.1				
5.	átm.	0.5	0.4	3.4	4.0	2.0	4.0	2.0				4.20
$1^h\ 8^m$	d δ	+3.9	−3.4	+2.0	+2.2	−2.3	−2.3	−3.0				
	átm.	0.4	0.2	0.8	1.1	0.5	0.5	1.0				
Julius	d α	−46.5	−36.4	−31.0	−24.0	+15.2						
9.	átm.	0.5	1.2	1.6	1.6	4.0						2.06
$0^h\ 55^m$	d δ	+2.5	+2.6	−2.5	−2.0	−4.0						
	átm.	1.2	1.5	0.5	0.3	0.9						
Julius	d α	−53.4	−46.8	−44.4	−43.6	−42.3	−37.4	+0.4	+54.3			
10.	átm.	3.4	2.2	1.0	0.6	1.6	1.0	4.6	0.4			3.66
$1^h\ 27^m$	d δ	+2.9	+3.0	+1.2	+0.7	+2.8	+3.1	−3.9	+2.8			
	átm.	1.1	0.5	0.4	0.3	0.5	0.2	1.0	0.3			
Julius	d α	−65.0	−63.7	−63.3	−62.0	−61.2	−29.5	+22.6	+31.0	+34.2	+59.6	
12.	átm.	1.0	1.6	0.4	1.0	0.6	4.0	0.2	0.6	0.6	0.2	2.62
$0^h\ 4^m$	d δ	+3.3	+2.0	+3.8	+1.8	−1.3	−3.5	+2.0	+2.5	+2.2	+2.1	
	átm.	0.5	0.6	0.3	0.5	0.4	0.8	0.1	0.3	0.4	0.1	
Julius	d α	−66.2	−66.1	−44.0	+17.0	+20.0	+50.2					
13.	átm.	0.5	0.3	4.0	1.0	2.0	0.4					1.55
$0^h\ 31^m$	d δ	−0.9	+2.2	−3.4	+2.4	+2.1	+1.9					
	átm.	0.4	0.5	0.7	0.3	0.4	0.2					
Julius	d α	−54.4	+2.2	+4.3	+40.4	+42.4	+43.4	+64.5				
14.	átm.	2.5	0.6	1.2	0.2	0.2	0.2	0.4				1.16
$1^h\ 8^m$	d δ	−2.9	+2.6	+2.2	+1.8	+2.3	+1.9	+3.7				
	átm.	0.7	0.5	0.5	0.1	0.1	0.1	0.5				
Julius	d α	−62.0	−25.5	−12.9	−10.1	+28.4	+60.0					
15.	átm.	1.8	0.4	1.0	1.6	0.2	1.0					1.36
$0^h\ 52^m$	d δ	−2.5	+2.0	+2.9	+3.0	+2.2	+3.3					
	átm	0.7	0.1	0.4	0.5	0.2	0.5					

Julius	d α	−67.0	−42.3	−39 3	−28.2	−25 3	+13.0	+51.0			
16.	átm.	0.4	0.4	0.4	1.0	0.4	0.2	1.0			0.45
$11^h\ 48^m$	d δ	−2.1	+2 7	+2.4	+3.9	+2.8	+2 3	+2.7			
	átm.	0.7	0.4	0.1	0.3	0.3	0.1	0.5			
Julius	d α	−57 4	+7.9	+15.6	+29 2						
18.	átm.	1.0	1.6	3.0	1.0						1.14
$0^h\ 19^m$	d δ	+3 8	+0.6	+0.6	+3.6						
	átm.	0.5	0.5	0 7	0.5						
Julius	d α	−62.2	−21.3	−8.1	−3.8	+1.5	+16.5				
19.	átm.	0 3	0.2	2.4	1.0	3.6	1.6				1.57
$11^h\ 59^m$	d δ	+4.1	+3.9	+0.5	+0.5	+0.4	+3.2				
	átm.	0.3	0.1	0.6	0.3	1.0	0.4				
Julius	d α	−23.8	−19.8	−14.3	+2 2						
20.	átm.	3.0	3.0	4.0	1.0						2.41
$0^h\ 11^m$	d δ	+0.8	+0.3	+0.8	+3.5						
	átm.	0.8	0.6	1.2	0.3						
Julius	d α	−38.4	−30.4	−11.7							
21.	átm.	5.0	7.0	0.4							3.18
$1^h\ 12^m$	d δ	+1.2	+1.3	+4 0							
	átm.	0.8	1.0	0.2							
Julius	d α	−25 2									
22.	átm.	0.4									0.01
$11^h\ 6^m$	d δ	+4.2									
	átm.	0.1									
Julius	d α	−58 2	−53.2	−37.1	−26.1	+66.0					
23.	átm.	3 0	5.0	0.2	0.2	0 5					2.59
$11^h\ 14^m$	d δ	+2.8	+2.4	+5.1	+4.9	−1.0					
	átm.	0.2	1 0	0.4	0.1	0.5					

Julius	d α	−62.0	−46 4	+60.0								3.32
24.	átm.	5.0	0.2	1.0								
$11^h\ 14^m$	d δ	+3 1	+5.5	−2.3								
	átm.	1.0	0.1	0.7								
Julius	d α	+48.5	+51.9									0.47
25.	átm.	2.0	1.2									
$2^h\ 58^m$	d δ	−1.4	−1 3									
	átm.	0.6	0.1									
Julius	d α	+9.4	+12.4	+62.4	+63.2							0.71
28.	átm.	2.0	1.0	1.0	0.2							
$0^h\ 22^m$	d δ	0.0	+0.1	+0.3	−0.8							
	átm.	0.7	0.2	0 5	0.2							
Julius	d α	−6.5	−2.5	+45.6	+49.2	+51.6	+55.5	+55.7	+58.6			1.33
29.	átm.	2.0	2.0	0.2	0.3	0.2	2.0	0.4	0.1			
$11^h\ 38^m$	d δ	+0.6	+1.0	+0 3	−0.3	+0.1	+0.1	−1.0	−1.9			
	átm.	0.6	0.5	0.1	0.1	0.2	0.8	0.4	0.2			
Julius	d α	−21.9	−19.3	+36.5	+45.0	+46.1	+48.5	+51.4				1.51
30.	atm.	2.2	1.4	9.0	2.0	0.2	1.0	0.8				
$0^h\ 56^m$	d δ	+1.3	+1.9	−0.5	+0.3	−0.8	+1.8	−2.0				
	átm.	0.6	0.3	0.1	0.7	0.5	0 5	0.3				
August	d α	−46.7	+3.9	+13.1	+19.1	+22.1	+26.6	+46 7	+49.1	+56.3	+56.4	2.14
1.	átm.	1.4	0.2	1.0	3.0	1.0	2.0	0.2	1.0	1.0	1.2	
$1^h\ 4^m$	d δ	+3.1	+1.1	+1.2	+1.1	−0.7	−1.1	−8.1	−8.9	−8.0	−0.3	
	átm.	0.5	0.5	0.1	0.8	0.4	0.6	0.1	0 3	0.4	0.5	
August	d α	−55.2	−9.6	−2.0	+5.6	+8.5	+13.3	+39 8	+42.8	+47.1	+48.3	2.65
2.	átm.	1.0	0.2	0 2	2.6	1.3	4.0	1.0	1.0	0.5	1.0	
$11^h\ 52^m$	d δ	+4.0	+1.9	+0.9	+1.9	+0.1	−0.4	−8.3	−8.7	−5.2	−6.0	
	átm.	0.4	0.1	0.1	1.0	0.5	1.0	0.5	0.4	0.5	0.3	

August 3.	d α	−60.7	−9.3	−7.1	−1.4	+26.3	+32.0	+36.6	+37.0			1.73
	átm.	0.6	2.2	1.0	1.2	0 6	0.8	4.0	0.8			
	d δ	+4.5	+2.4	+0.8	−0.1	−8.1	−8.6	−0.2	−5.9			
$11^h\ 20^m$	átm.	0 4	0.7	0 4	0.6	0.5	0.5	0.5	0.3			
August 5.	d α	−46 8	−46.3	−43.3	−2.7	+5.5	+7.0	+14.5	+12 9			3.47
	átm.	2.0	1 4	4.2	0.6	1.0	2.0	15.0	1.8			
	d δ	+4.3	+2.4	+1.5	−7.0	−7 4	+0.9	−7.9	−5.3			
$0^h\ 17^m$	átm.	0.8	0.6	0 4	0.2	0.2	0.5	0.3	0.3			
August 6.	d α	−46.2	−45.9	−42.5	−18.9	−10.5	−7.9	−8.4	−4 4			1.10
	átm.	1.2	1.4	1.0	1.0	0.6	1.8	0.8	0.8			
	d δ	+3 4	+5.2	+2.6	−6 2	−6.5	+1.8	−7 3	−4.6			
$0^h\ 19^m$	átm.	0.4	0.5	0 4	0.4	0.2	0.6	0.3	0.3			
August 7.	d α	−54.7	−54.0	−33.3	−30.2	−25.9	−21.7	−21.3	−18.0	+49.4		2 06
	átm.	2.0	1 0	0.4	1.0	1.2	2.0	0.8	0.1	0.2		
	d δ	+4 0	+5.9	−5.3	−5.4	−5.4	+2.8	−6.8	−8.9	+0 1		
$0^h\ 54^m$	átm.	0.9	0 4	0.3	0.6	1.0	0.6	0.7	0.3	0.1		
August 8.	d α	−59 3	−57.8	−46.0	−42.6	−37.8	−34.0	−32.7	−31.9	−22.0	+4.1	2.08
	átm.	2.0	1.0	0.6	1.4	2.2	0.6	1.2	0.8	0.2	2.0	
	d δ	+5.0	+6.5	−4.1	−4.5	−4.2	−5.7	+3.8	−2 9	+0.4	−3.1	
$0^h\ 10^m$	átm.	0.5	0.3	0.2	0.5	0.4	0.2	0.4	0.1	0.1	1.0	
August 11.	d α	−61.4	−57.4	+39.7	+48.2							5.94
	átm.	0.1	0.2	3.6	6.6							
	d δ	+0.1	+6.5	−3.0	−8.5							
$2^h\ 34^m$	átm.	0.4	0.4	1.0	1.7							
August 13.	d α	−26 2	−22.3	+13.4	+29 6							6.78
	átm.	0.1	0.1	4.0	10.0							
	d ϑ	−4.1	−4.1	−2.0	−8.3							
$2^h\ 24^m$	átm.	0.1	0.1	1.0	1.7							

Augusztus	d α	+0.7	+14.7	+20.7							
14.	átm.	4.0	2.0	6.0							4.20
$11^h\ 54^m$	d δ	−1.1	−7.4	−7.8							
	átm.	0.8	0.5	1.7							
Augusztus	d α	−41.0	−28.5	−20.9							
17.	átm.	3.2	1.8	3.4							3.14
$2^h\ 32^m$	d δ	+2.3	−4.4	−4.9							
	átm.	1.0	0.5	2.0							
Augusztus	d α	−57.1	−49.6	−44.1	−44.1	+24.1	+27.1	+46.9	+61.0		
19.	átm.	2.0	1.0	2.0	2.0	0.3	0.3	2.0	0.2		1.91
$0^h\ 52^m$	d δ	+4.0	−2.4	−2.3	−3.4	−7.0	−7.0	−8.8	−3.3		
	átm.	0.7	0.4	0.5	0.6	0.1	0.1	0.3	0.2		
Augusztus	d α	−64.1	−14.8	+15.2	+34.5						
22.	átm.	0.1	8.0	2.0	0.6						5.67
$0^h\ 4^m$	d δ	−0.9	−3.7	−7.3	−2.6						
	átm.	0.3	2.5	0.6	0.2						
Augusztus	d α	−31.2	−26.3	+2.8	+22.8						
23.	átm.	0.2	6.0	2.2	0.2						3.59
$9^h\ 58^m$	d δ	−2.7	−2.3	−6.3	−1.8						
	átm.	0.1	2.0	0.5	0.2						
Augusztus	d α	−48.1	+35.1								
27.	átm.	1.4	0.2								0.26
$11^h\ 57^m$	d δ	−1.4	−1.5								
	átm.	0.5	0.2								
Augusztus	d α	−56.2	+23.2								
28.	átm.	1.2	0.4								0.27
$11^h\ 50^m$	d δ	−0.4	−0.5								
	átm.	0.5	0.2								

Augusztus	d α	−11.1	−4.1								2 10
30.	átm.	8.0	0.4								
$0^h\ 24^m$	d δ	−3.3	+1.7								
	átm.	1.0	0 2								
Augusztus	d α	−23.6	−17.4								1.62
31.	átm.	6.0	0.4								
$0^h\ 22^m$	d δ	−1.9	+3.1								
	átm.	1.0	0.1								
Szeptember	d α	−47.8	*+43.2								0.97
2.	átm.	4 0	10.0								
$0^h\ 19^m$	d δ	+1.0	−10.1								
	átm.	0.7	3.0								
Szeptember	d α	−58.1	−53.1	*+36.9							0.54
3.	átm.	1.0	1.0	13.0							
$0^h\ 35^m$	d δ	+2.4	+2.0	−9.2							
	átm.	0.7	0.5	3.0							
Szeptember	d α	−60.2	−59.0	*+29.5							0.44
4.	átm.	0.6	1.0	10.0							
$0^h\ 30^m$	d δ	+3 1	+2.9	−8.6							
	átm.	0.5	0.5	3.5							
Szeptember	d α	−62.5	*+17.8	+54.0							0.60
5.	átm.	0.4	5.0	0.6							
$0^h\ 3^m$	d δ	+7.5	−7.7	−5 6							
	átm.	0.5	3.5	0.3							
Szeptember	d α	−42 6	+23.7								0.05
8.	átm.	0.2	0.8								
$0^h\ 35^m$	d δ	+4.4	−3.5								
	átm.	0.2	0.2								

Szeptember	d α	−51.0	−35.1	+12.6							
9.	áém.	0.4	1.0	6.0							0.95
$0^h\ 21^m$	d δ	+5.6	−2.2	−2.7							
	átm.	0.2	0.5	0.5							
Szeptember	d α	+44.9									
15.	átm.	0.4									0.04
$0^h\ 16^m$	d δ	−9.6									
	átm.	0.2									
Szeptember	d α	+18.2									
18.	átm.	0.4									0.01
$0^h\ 2^m$	d δ	−7.6									
	átm.	0.1									
Szeptember	d α	−14.0	−11.0	+49.2							
20.	átm.	0.2	0.2	2.6							0.37
$11^h\ 56^m$	d δ	+3.1	+2.8	−9.4							
	átm.	0.1	0.2	0.2							
Szeptember	d α	−23.9	−20.9	+34.7	+42 4						
21.	átm.	0.2	0.2	0.4	3 0						1.23
$0^h\ 6^m$	d δ	+4.6	−0.8	+0.4	−8.7						
	átm.	0.1	0.2	0.2	0.9						
Szeptember	d α	−33.9	−33.3	+22.5	+26.4	+33.6					
22.	átm.	0.2	0.7	1.0	0.8	2.8					1.16
$0^h\ 26^m$	d δ	+6.7	−1.8	+1.7	+1.6	−8.2					
	átm.	0.1	0.1	0.4	0.2	1.0					
Szeptember	d α	−43 1	+8.8	+23.4							
23.	átm.	0.2	1.0	3.8							1 00
$0^h\ 9^m$	d δ	−0.4	+3.3	−7 1							
	átm.	0.1	0.3	0.8							

Szeptember	d α	−3.6	−0.1	+10.7							
24.	átm.	0.4	0.2	3.4							
0h 6m	d δ	+4.8	+4.1	−5.8							0.87
	átm.	0.2	0.2	0.9							
Szeptember	d α	−14.9	−10.0	−2.4	+58.0						
25.	átm.	0.4	0.2	3.4	0.2						
0h 36m	d δ	+6.5	+5.7	−4.2	−5.9						0.74
	átm.	0.1	0.2	0.8	0.2						
Szeptember	d α	−34.9	−34.4	−28.7	+45.3						
27.	átm.	0 3	0.2	3.2	0.4						
11h 49m	d δ	+9 1	+9.1	−1.1	−5.4						0 77
	átm.	0.1	0.1	0.8	0.2						
Szeptember	d α	−38.9	−35.1	−39.5	−38.5	+35.0	+48.4				
28.	átm.	3.4	4.2	0.2	0.2	0.4	2.0				
0h 12m	d δ	+0.6	−0.4	+10 4	+10.3	−4.5	−10 2				2.46
	átm.	0.9	0.1	0.1	0 1	0.1	0.9				
Szeptember	d α	−61.2	−48.9	−48.1	−48.0	+23 0	+37.6	+40.5	+44.9		
29.	átm.	0.2	2.5	0.2	0.2	0 4	0.5	0 2	7 0		
11h 46m	0 δ	+1.6	+2.1	+2.6	+1.0	−3.4	−9.0	−8.8	−10.2		6.93
	átm.	0.1	0.7	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	1.5		
Szeptember	d α	−56.7	+8.7	+25.9	+37.8	+47.9					
30.	átm.	1.0	0.2	0.2	8.0	0.2					
1h 27m	d δ	+3.4	+2.4	−8.2	−9.8	−5.8					6.02
	átm.	0.7	0.2	0 3	1.6	0 1					
October	d α	−59.8	+14 1	+15.8	+29.4	+39.8					
1.	átm.	1.0	0.4	0.2	8.5	0.2					
0h 3m	d δ	+4.2	−7.1	−6.9	−9.1	−4.9					3.29
	átm.	0.4	0.2	0.2	1 0	0.1					

October **2.** $0^h\ 42^m$	d α átm. d δ átm.	+1.2 1.0 −5.5 0.3	+14.2 1.0 −7.8 1.5	+27.8 0.2 −3.8 0.1							0.54
October **3.** $2^h\ 0^m$	d α átm. d δ átm.	−10.8 5.0 −4.2 0.8	+1.2 1.0 −6.5 2.0								1.60
October **4.** $0^h\ 18^m$	d α átm. d δ átm.	−24.4 1.0 −2.2 0.5	−19.8 0.2 −3.0 0.1	−5.4 11.0 −5.2 2.5							7.44
October **6.** $0^h\ 23^m$	d α átm. d δ átm.	−30.5 10.0 −1.6 2.1									5.88
October **13.** $11^h\ 36^m$	d α átm. d δ átm.	−54.0 1.4 +0.6 0.4	−48.9 1.6 −0.2 0.3								0.39
October **14.** $0^h\ 12^m$	d α átm. d δ átm.	−60.0 1.2 +1.7 0.6	−57.6 1.0 +0.9 0.2								0.45
October **17.** $0^h\ 20^m$	d δ átm. d δ átm.	+14.2 1.4 −0.4 0.4	+19.2 1.0 −0.9 0.5	+45.2 1.4 −3.8 0.5	+51.1 1.2 −9.1 0.4	+52.8 0.5 −4.3 0.2					0.92

October	d α	−13.8	−7.5	+21.7	+32.3	+36.5					
19.	átm.	0.4	1.0	1.4	0.2	1.0					0.40
$0^h\ 19^m$	d δ	+2.9	+2.3	−1.8	−2.4	−7.8					
	átm.	0.2	0.3	0.4	0.1	0.4					
October	d α	−26.0	−19.6	−2.9	−0.3	+9.1	+20.1	+26.9			
20.	átm.	0.2	1.0	0 4	0.4	2.4	0.4	2.0			0.67
$11^h\ 33^m$	d δ	+4.3	+3.8	−2.3	−2.4	+0.1	+3.8	−6.8			
	átm.	0.1	0 2	0.1	0.4	0.4	0.1	0.5			
October	d α	−31.2	−18.1	−13.1	−5.0	+14.6					
21.	átm.	0.8	1.0	1.0	1.2	2.4					0.57
$11^h\ 58^m$	d δ	+5.0	−0.4	−0.6	+1.7	−0.6					
	átm.	0 2	0.3	0.2	0.3	0.5					
October	d α	*−51.3	−47.8	*+45.2	+48.9						
26.	átm.	10.0	1.0	13.0	0.4						0.17
$11^h\ 31^m$	d δ	+8.1	+7.0	−10.3	−9.6						
	átm.	3.5	0.3	4.5	0.1						
October	d α	+35 8									
28.	átm.	0.6									0.03
$11^h\ 53^m$	d δ	−8.3									
	átm.	0.1									
October	d α	+6.5									
30.	átm.	0.4									0.01
$0^h\ 14^m$	d δ	−7.3									
	átm.	0.1									

November	d α	−8.9	−5.3	+5.2	+9.6						
17.	átm.	3.0	0.2	8.8	4.0						2.23
0^h 4^m	d δ	+1.7	+1.8	+1.4	+0.7						
	átm.	0.5	0.1	0.6	0.5						
November	d α	−57.4	+48.8	+58.5	+60.2						
22.	átm.	2.0	1.0	0.3	1.8						1.54
0^h 21^m	d δ	+6.6	−3.2	−0.7	−0.6						
	átm.	0.7	0.3	0.1	0.6						
November	d α	+22.3	+24.0	+36.0	+39.0	+41.9					
24.	átm.	0.8	0.2	0.2	0.2	2.0					0.22
11^h 41^m	d δ	−1.0	−1.1	+1.0	+0.9	+0.6					
	átm.	0.3	0.1	0.1	0.1	0.2					
November	d α	+7.4	+24.6	+29.0							
25.	átm.	1.0	0.5	2.2							0.57
0^h 11^m	d δ	+0.1	+2.2	+1.9							
	átm.	0.3	0.5	0.7							
Deczember	d α	+31.1	+38.3	+42 0	+45.2						
28.	átm.	5.0	1.0	0.4	1.2						1.53
0^h 50^m	d δ	−3.9	+9.7	−3.6	−4.0						
	átm.	0.7	0.5	0.5	0.5						

1875.

Január	d α	−24 3	−21.8	+62.8	+65.6						
7.	átm.	0.3	0.5	0.5	0.2						0 18
0^h 16^m	d δ	+4.5	+4.5	−2.7	−2.6						
	átm.	0.1	0.1	0.4	0.1						
Január	d α	+41.8	+43.3								
19.	átm.	1.8	5.3								2.09
0^h 45^m	d δ	+5.5	+3.7								
	átm.	0.5	1.0								

Február	d α	+20.6	+23.5								
4.	átm.	0.4	0.2								
$0^h\ 1^m$	d δ	+8.0	+8.6								0.05
	átm.	0.3	0.1								
Február	d α	−55.6	+54.6								
10.	átm.	0.2	0.6								
$11^h\ 46^m$	d δ	+2.6	+6.2								0.12
	átm.	0.1	0.3								
Február	d α	+38.8	+43.6	+51.0	+52.5						
20.	átm.	3.0	0.5	1.4	0.4						
$0^h\ 26^m$	d δ	+9.9	+10.3	+2.1	+2.5						1.62
	átm.	0.9	0.3	0.5	0.2						
Február	d α	+29.5	+41 1								
21.	átm.	4.0	2.8								
$0^h\ 22^m$	d δ	+9.3	+1.7								1 93
	átm.	1.1	0.4								
Február	d α	+18.2	+25.8	+28.2	+33.8						
22.	átm.	4.8	0.4	3.2	0.3						
$0^h\ 21^m$	d δ	+8.6	+9.6	+0.9	+1.7						0.99
	átm.	0.5	0.1	0.2	0.5						
Február	d α	−7.1	+0.6	+8.9	+45.3	+50.4					
24.	átm.	5.0	2.5	2.5	0 5	0.6					
$11^h\ 23^m$	d δ	+6.7	−1.0	−0.5	+6.8	+7.3					2.68
	átm.	1.2	0.7	0 6	0.3	0.4					
Márczius	d α	+41.6	+43.7	+53.3							
12.	átm.	1.2	1.0	0.5							
$11^h\ 49^m$	d δ	+4.1	+3.8	+5.7							0.38
	átm.	0.4	0.3	0.5							

Márczius	d α	+31.2	+45.8							
13.	átm.	1.0	1.8							0.46
$11^h\ 46^m$	d δ	+3.2	+5.4							
	átm.	0.4	0.5							
Márczius	d α	+5.4	+23.0							
15.	átm.	4.0	1.2							1.16
$0^h\ 8^m$	d δ	+0.4	+3.3							
	átm.	1.0	0.5							
Márczius	d α	−6.9	+9.1	+29.1	+32.1					
16.	átm.	0.2	1.8	0.2	0.2					0.26
$11^h\ 8^m$	d δ	−1.6	+2.0	+3 3	+3.7					
	átm.	0.1	0.5	0 1	0.1					
Márczius	d α	−8.8	−6.7	−3.5	+15.2	+46 7				
17.	átm.	1.2	1.0	1.0	0.4	0.6				0.37
$0^h\ 10^m$	d δ	−2.1	−1.7	+0.7	+1.8	+9.7				
	átm.	0.1	0.3	0.4	0.4	0.3				
Márczius	d α	−33.9	−30.1	−28.5	−11.0	+38.4				
19.	átm.	0.8	0.4	0.5	0.6	3 0				1.09
$11^h\ 58^m$	d δ	−3.5	−2.8	−2.5	−1.4	+10.8				
	átm.	0.3	0.1	0.1	0.3	0.6				
Márczius	d σ	−22.9	+6.2							
22.	átm.	4.5	2 9							1.92
$0^h\ 0^m$	d δ	−5.3	+8.1							
	átm.	1.1	0.6							
Márczius	d α	−47.7	−47 4	−31.6						
25.	átm.	2.0	0.5	2.2						1.59
$11^h\ 38^m$	d δ	−9.6	−9.0	+3.7						
	átm.	0.7	0.8	0.8						

Márczius	d α	−24.8	−18.9	+35.9							
30.	átm.	4.7	1 2	5.2							0.94
$0^h\ 17^m$	d δ	+0.3	+0.5	+1.0							
	átm.	0.5	0.5	0.1							
Aprilis	d α	−27.1	−21.2	+6.7	+14.7	+52.9					
4.	átm.	0.5	0.3	0.2	0.2	0.2					0.15
$11^h\ 54^m$	d δ	−6.7	−6.1	+5.1	+6.2	+3.4					
	átm.	0.6	0 1	0.1	0.1	0.1					
Aprilis	d α	−15.0	−12.9								
6.	átm.	0.8	1.0								0.12
$0^h\ 8^m$	d δ	+1.9	+2.8								
	átm.	0.1	0.4								
Aprilis	d α	−46.6									
9.	átm.	0.2									0.01
$0^h\ 21^m$	d δ	−1.6									
	átm.	0.2									
Aprilis	d α	−17.5	−14.1	+46.0	−46.9	+61.2	+61.9				
10.	átm.	0.2	0.2	0.2	0.2	1.2	1.0				0.75
$0^h\ 28^m$	d δ	+1.1	+1.3	+9.4	+9.0	+4.0	+3 4				
	átm.	0.1	0.1	0.1	0.1	0.5	0.5				
Aprilis	d α	+24.2	+28.9	+30.1	+49.6	+49.5					
12.	átm.	1.2	0.2	0.2	1.6	1.1					0 77
$11^h\ 45^m$	d δ	+7.2	+7.8	+8.0	+3.3	+2.6					
	átm.	0.4	0.1	0.1	0.6	0.6					
Aprilis	d α	−17.3	+16.1	+16.3							
15.	átm.	1.2	2.4	2.0							0.89
$0^h\ 10^m$	d δ	+2.4	−1 2	−0.4							
	átm.	0.5	0.6	0.7							

Aprilis	d α	−41.5	−36.6	−9.8	−8 5						
17.	átm.	1.0	9.6	2.0	3 0						0.77
$11^h\ 36^m$	d δ	−1.0	−0.1	−4.3	−3.5						
	átm.	0.5	0.2	0.4	0.7						
Aprilis	d α	−47.1	+42 1								
21.	átm.	2.0	0.3								1.14
$11^h\ 44^m$	d δ	−9.0	+9 2								
	átm.	1.0	0.2								
Aprilis	d α	+50.1	+50.9	+53.2							
26.	átm.	1.2	0.8	1.8							0.84
$0^h\ 23^m$	d δ	+4.6	+4.5	+6.3							
	átm.	0.4	0.4	0.6							
Aprilis	d α	+28.7	+31 2	+40.7	+45.3						
27.	átm.	1.2	1.0	4.0	3 2						4.01
$11^h\ 53^m$	d δ	+2.6	+2.5	+7.9	+8.4						
	átm.	0.4	0.4	1.0	1.5						
Május	d α	−25.2	−23.5	−8.0	−0.7						
2.	átm.	0.4	0.8	5.4	4.0						3.05
$0^h\ 26^m$	d δ	−3 5	−3.3	+3 1	+4 4						
	átm.	0.2	0.2	1 4	1 0						
Május	d α	−36.2	−34 7	−21.4							
3.	átm.	0 2	0 5	4.7							1.62
$0^h\ 27^m$	d δ	−4.8	−4.5	+1.6							
	átm.	0 1	0.8	1.2							
Május	d α	−51.0	−44.9								
5.	átm.	0.1	3.6								1.54
$0^h\ 55^m$	d δ	−6 9	−1.0								
	átm.	0.1	1.3								

Május **6.** $0^h\ 23^m$	d α átm. d δ átm.	—54.1 1.2 —2.3 0.9									0.43
Május **7.** $0^h\ 14^m$	d α átm. d δ átm.	—60.6 1.2 —3.1 0.9									0.60
Junius **2.** $0^h\ 11^m$	d α átm. d δ átm.	+48.8 1.2 +0 3 0.5	+53.2 2.0 +0.1 0.6								0.68
Junius **5.** $11^h\ 48^m$	d α átm. d δ átm.	+8.5 4.0 —2.3 0.7	+15.5 4.0 —2.3 0.8								1.54
Junius **7.** $0^h\ 25^m$	d α átm. d δ átm.	—21.2 4.0 —4.0 0.8	—17.3 0.4 —3.8 0.2	—14.8 1.4 —3 9 0.4							1.04

Junius	d α	—39.4	—33.6	—33.8							
21.	á·m.	2.0	2.0	1.0							0.79
	d δ	+0.3	+0.8	+0.4							
$0^h\ 29^m$	átm.	0.5	0.5	0.7							
Junius	d α	—47.1	—46.9	—46.7	—3.9	—1.3					
22.	átm.	9.6	0.8	0.9	1.7	6.0					3.50
	d δ	+0.1	—0.1	+0.5	—2.8	—2.3					
$0^h\ 25^m$	átm.	0.7	0.5	0.5	0.4	0.5					
Junius	d α	—63.0	+65.3								
27.	átm.	4 0	0.6								3.68
	d δ	—3.3	—2.0								
$0^h\ 36^m$	átm.	1.3	0.4								
Junius	d α	—44.4	+38.7	+54.2							
30.	átm.	5.0	1.2	0.2							2 01
	d δ	+1.7	—3.0	+2.9							
$0^h\ 19^m$	átm.	1.1	0.5	0.2							
Julius	d α	—63.0	—61.4	+9.6							
2.	átm.	0.2	0.2	1.4							0.27
	d δ	+2.5	+1.9	—3.4							
$0^h\ 1^m$	átm.	0.5	0.2	0.5							
Julius	d α	—35.7									
5.	átm.	0.7									0.06
	d δ	—3.6									
$0^h\ 19^m$	átm.	0.3									
Julius	d α	+10.0	+19.5								
30.	átm.	1.2	2.2								0.55
	d δ	+0.4	+0.4								
$0^h\ 16^m$	átm.	0.3	0.8								

September **15.** 0^h 17^m	d α átm. d δ átm.	+53.0 0 3 —2.1 0.1	+55.1 0.6 —2.6 0.2								0.07
October **19.** 11^h 52^m	d α átm. d δ átm.	+36.1 0.2 —1.9 0.1	+38.8 0.2 —2.2 0.1								0.02
October **20.** 0^h 32^m	d α átm. d δ átm.	+22.9 0.2 —0.7 0.1	+26.1 0.2 —1.1 0.1	+26 3 0.2 —1.1 0.1							0.03
October **24.** 11^h 52^m	d α átm. d δ átm.	—31.4 0.2 +5.6 0.1	+62.4 0.2 —4.1 0.1								0.04
November **1.** 0^h 13^m	d α átm. d δ átm.	—23 4 0.2 +4.6 0.1									0.01
November **4.** 11^h 26^m	d α átm. d δ átm.	—9.9 0.2 +8.3 0.1									0.01
Deczember **30 és 31.**	folt nélkül										

1874-ik évben 99 napon lett a nap korongja észlelve, s ezen napokon összevéve, tekintet nélkül arra, hogy egy folt többször is lett vizsgálva, 527 folt lett feljegyezve. A nap tábláján egyetlen folt sem látszott october 29-én, midőn a légköri viszonyok középszerüek voltak, úgy mint az nálunk szokott lenni az őszi napokon; fáklya azonban e napon egy nevezetes csoport mutatkozott a nap keleti szélén.

1875-ben a foltok száma észrevehetőleg fogy. Ez évben 51 észlelő napon csak 137 folt lett feljegyezve, s így az arány 1874. és 1875. között úgy áll mint 5·3 : 2·7-hez.

1875-ben a naptábla folt nélkül látszott május 9. és 15-én, úgy deczember 30. és 31-én, tekintetbe nem véve azon napokat, hol feljegyzések nem történtek, vagy az ég borus volt, s napot nem lehetett látni.

Ha összehasonlítjuk az 1875-iki észleléseket a régibbekkel, azonnal szépen látható a foltok mennyiségének kevesbedése.

Az ó-gyallai csillagdán 1872-ben (május utólja, deczember) lett észlelve 59 nap alatt 600 napfolt; 1873-ban 98 napon 730; 1874-ben 99 napon 527, s 1875-ben 51 napon 137 napfolt.

Ha az észlelt foltok számát osztjuk, az észlelő napok számával úgy kapunk egy számot, melyet ha a következő éveken történt észlelésekből nyert számokkal összehasonlítjuk, a foltoknak rendszeres kevesbedése azonnal kitünik, így pl. ha az észlelt napfoltok területét osztjuk az észlelő napok számával, szintén látjuk a kevesbedést, ámbár itt különbséget tehet az, ha több nagy folt észleltetett egy vagy más évben. Jövőre meg fogjuk látni, hogy ezen nyert szám 1876-ban még kisebb fog lenni, hahogy csak a nap légkörében valami anomalisticus tünemények nem fognak mutatkozi, mivel Wolff szerint a napfoltok periodusának minimuma 1876. február közepére esne.

évszám	foltok számával nyert szám	foltok területével nyert szám
1872	10·17	4·22
1873	7·45	2·65
1874	5.33	1·95
1875	2·68	1·02

A napfoltok kinézései 1874—1875-ben.

1874. január 10-én 0^h kor a nap keleti szélén $\triangle\alpha + 47^s{\cdot}9, +53^s{\cdot}1$ és $+57^s{\cdot}4$ és az északi részen $\triangle\delta + 4'{\cdot}3, +5'{\cdot}0$ és $+5'{\cdot}2$ egy szép foltcsoport tünt fel, melyek közől a felsorolt $\triangle\alpha$ és $\triangle\delta$ értékeknél az első 4^s átmeneti idő s $1'{\cdot}1$ mérettel birt a declinátio körön. A nagy folt penumbrájában észak és kelet felől két pontocska mutatkozott. Ezen foltot követte két kisebb, s ezek és a nagy folt között számos apró pontocska volt észlelhető. Január 14-én a nagy folt magva két részre volt szakadva, s a kis pontok a penumbrában eltüntek. A következő 2 foltból és az apró pontocskákból egy nagy folt csoport képződött, mely 14 foltból állott 5 maggal, s a két nagy folt 45°-nyi szöget írt le, t. i. egy közös központ körül fordultak, az északi folt keletről nyugatra, s az első nagy folttól tetemesen elmaradt.

Január 15-én az egész csoportot a nap nyugoti részén látjuk már. A nagy folt kevés változást szenvedett, annak északi része csupán valami 10°-nyi fordulást tett kelet felé. A csoport 5 nagyobb foltból áll, s végtelen számu apró pontocskára bomlott fel, hosszukás alakot öltve fel, s a nagy folthoz ismét közelebb áll, mint tegnap.

Január 16-án a nagy folt területe tetemesen nagyobb lett, a csoport óriási változáson ment át. A számtalan apró folt mind látható átmérőt nyert, s míg az egész csoport tegnap a Cassiopeja csillagkép alakjával birt, ma inkább a fiastyukhoz hasonlít, midőn azt egy gyenge nagyitásu üstökös-keresőn keresztül szemléljük. A nap keleti szélén két kettős magu folt tünt fel nagy mennnyiségü fáklya között, mig két kis foltokból álló csoport a nyugoti szélen eltünőfélben van, szintén sok s szép fáklya között.

Január 17-én. A nagy folt megmaradt tegnapi alakjában, az óriási csoport, mely még tegnap 45—50 tagból állott, ma alig 9 igénytelen foltocskából áll. A nyugati szélen sok fáklya, a keletin kevesebb. A keleti szélen tegnap óta egy uj folt képződött a nap szélétől oly távolban, hova tegnap óta nem érkezhetett, a nap forgása következtében.

Január 22. A nagy folt és foltcsoport a nyugati részen már láthatatlan. A 16-án előtünt foltok egyike a nap középpontjához egész közel áll, de már a nyugati részen, magva ma is kettős és meglehetős kiterjedésü, őt követi egy 6 tagból álló igénytelen csoport. A keleti részen előtünőfélben van egy szép folt. Fáklya ma nem látható az egész nap-korongon.

Január 29. Az említett nagy folt már a nap nyugati s déli részén van kettős maggal és egy fényes áthidalással (Lichtbrücke) bir, követi őt: 7 kis folt. Tőle észak-nyugatra s délkeletre szintén láthatók foltok, hol az előbbi egy igénytelen 4 tagból álló csoport, utóbbi egy szép egyes folt. A nap közepén, de az északi részen egy óriási csoportot látunk. [1-ső ábra, I. tábla.], hol egy feltünő folt elől 4 maggal s őt követi 3 csoport 40 folttal s 23 maggal. Keleti részen sok fáklya között egy előtünő folt.

Február 2. A nagy csoporton hihetetlen változás történt. Az elől menő nagy folt 4 magva összeolvadt 2 maggá s sok fáklya között áll a nyugati szélen tőle kelet felé egy kisebbszerü egyes folt. A 40 foltból álló csoport nyom nélkül eltünt. A nap déli részén elszórt nehány folt, a keletin nehány fáklya észleltetett.

Február 3. A nagy folt jan. 29 óta 90°-ot fordult központja körül, még pedig az északi része nyugat felé, s a nap legszélén áll sok fáklya között, a tőle keletre levő folt igen elmaradt. Déli részén nehány elszórt folt, keleten sok fáklya. [I. tábla, 2. ábra.]

Február 4. A nyugati szélen fáklyák között nehány apró folt, az északkeletin szintén fáklyák között 7 apró folt van előtünésben, úgy a keleti szélen is, hol azonban nincs fáklya.

Február 8. Az említett 4 folt hárommá olvadt össze. Fáklya nincs.

Február 9. A 8-án említett 3 folton, úgy körülötte tetemes változások mentek végbe; annak helyén most 6 önálló foltot látunk eléggé elszórva, s feljogosítva érezzük magunkat azt mondani, hogy ezeket valami óriási Cyclon szórta szét, mivel rotatoricus mozgást is lehet rajtok határozottan észlelni keletről nyugatra.

Február 11. Azon csoportból, mely tegnapelőtt 6 tagból állott, ma csak 5 létezik, s mig 9-én alakjuk öt szöghez hasonlított, ma az egy trapézt képez. Keleti szélén egy hármas csoport s 3 fáklya észlelhető.

Február 12. A trapéz inkább háromszöggé alakult, s a délnyugat felé lévő folt tetemesen megnőtt s a csoport 4 tagból áll. A keleti oldalon lévő foltok sem helyzetökre, sem alakjukra nézve nem változtak, csak fáklyák között a korong keleti szélén ismét egy új tünik elő.

Február 13. A 4 tagból álló csoportból ma csak két igénytelen egyes folt látható. A 11-én előtünt 3 folt 12 apró folttá szóródott szét, de viszonyos irányukat megtartották. Az, mely a csoportban kelet felé állott, maga 6 darabra szakadt, mely egy önálló csoportot képez; a tegnap előtünt folt ma is fáklyák között van.

Február 14. Az első 2 folt közül már csak a nagyobb, a déli, van meg. A többin semmi változás.

Február 24. A napkorongon szétszórva 9 folt van. Az északkeleti és délnyugati szélén sok fáklya.

Mártius. 1. A naptábla északi részén, s verticalis irányban közepe táján, egy szép foltcsoport, mely áll egy szép nagy foltból, melynek nagy magván kivül még a penumbrában egy második kis magva van, azonkivül egy másik meglehetős foltból, melynek kettős magva egy vékony szállal van összekötve. Körülöttük 20 kis folt terül el 9 maggal. Szétszórva még 5 kis folt látható, úgy E.K. és D.N.-on fáklyák.

Mártius 2. A nagy folt mintha szétrobbant volna. Nagysága a tegnapi, de borzasztó szétroncsolt állapotban, magva 11 részből áll. A többi foltra sem lehet reá ismerni. Ezen csoporton kivül, mely ma 26 tagból áll, még 2 egyes látszik. Fáklya ma nem észlelhető.

Mártius 3. Az első csoport különös átalakuláson ment át. A mártius elsején észlelt nagy folt, mely tegnap szétrobbantnak látszott, ma ismét tetemes alakot öltött fel, s őt közvetlen követi egy másik tekintélyes folt — az 1-ső̋n észlelt utolsó folt igen megnőtt, s így az összes egy szép csoportot képez, mely 22 tagból 13 maggal áll. N. fáklyák, úgy É.K.-en fáklyák között egy új folt feltünedező félben van, s már is kettősnek látszik lenni.

Mártius 8. A nagy csoport utolsó apró tagjai a korong N. szélén épen eltünnek nehány fáklya kiséretében. A 3-án É.K.-en előjövő foltok 3 kis pontocskává omoltak széjjel.

Mártius 13. A korongnak K. szélén egy szép kettős csoport látszik, melyből a tábla középpontjához közelebb levő 16, a nagyobb pedig 31 tagból áll. Ezen csoport legnagyobbika félhold alakkal bir s a nagyobbik csoportban a napi mozgásnál elől megy.

A mártius 8-iki észlelésnél a régi csillagda lebontása miatt, s az új épitésének ideje alatt az észlelések meg lettek szakítva. A következő észlelések az új csillagdában történtek, s mivel az, az országuton járókelő kocsik által nem lesz megrengetve, s a műszer régi gyenge lába elvettetett, s az kőoszlopra állitatott s a földszinétől épen felényi magasságra mint az az előtt állott, helyeztetett s végre a régi vetitési készülék helyett, mely sok kivánni valót hagyott hátra szilárdság dolgában, egy új lett használatba véve, az észlelések sokkal nagyobb pontosságra tartanak igényt mint eddig.

1874. junius 2. A napkorong nyugati széléhez közel egy szép egyes folt látható, úgy egy kisebb a K. szélen.

Junius 12. 6 szétszórt folt mutatkozik N és DN-i részen.

Junius 19. D.N.-on 3 kis folt tünik el szép fáklyák között. A korong közepén egy szép csoport, melyből az első egy nagy folt 3 elkülönzött maggal. Az egész csoport 22 megolvasható s számtalan apró tagból áll.

Julius 3. Ma 3 csoport s 4 egyes folt látszik az egész korongon szétszórva. Különös szép egy az É.N. negyedben levő szivalaku egyes folt, s az É.K. negyedben levő foltcsoport. Az összes foltok száma 20. K. és N.-on szép fáklyák vannak N.-on egy eltünő foltcsoport körül.

Julius 4. Ma 4 egyes folt s 2 szép csoport mutatkozik. Az egyes foltok igénytelenek; az É.K.-i negyedben lévő csoport két szép nagy foltból áll, melyek közül a nyugatinak

D.K.-i részén a penumbra tele van apró pontocskákkal. Ezen csoportban van még 3 apró folt. A D.K. negyedben levő foltcsoport egy szép nagy s 14 apró foltból áll, s a korong legszélén egy egyes folt, mely épen most tünik elő. N.-on egy csoport fáklya van.

Julius 5. Az É.K.-en levő folt-csoport két gyönyörü folttá alakult át, hol az előlmenőnek kettős magva van, a D.K.-en lévő kis pontok, melyek a penumbrában voltak, két külön folttá alakultak át, de mindig a penumbrában vannak; a hátulsó nagy folt hosszúra nyult, a napi mozgás irányában. A 2 nagy folt között 4 kisebb van. A D.K.-en lévő csoport is nagyobbá fejlődött, s összesen 21 foltból áll. A tegnap feltünt folt fáklyák között van, s szép tüneményt igér.

Julius 9. Az első csoport N.-i foltja egy óriási folttá fejlődött, magva kétfelé van szakadva, s az É.N.-i negyedben áll. A két foltocska, mely a penumbrában volt, most is ott van, de meglehetősen megnőtt. Kiséri ezen foltot 4 kis és egy meglehetős nagy penumbrával biró folt. A második csoport nem jelentékeny 8 foltból áll. A julius 4-én előtünt folt a D.K.-i negyedben áll s szabályos, majdnem négyszög alaku gyönyörü nagy folt. K.-en nehány fáklya mutatkozik.

Julius 10. Az első csoport összeolvadva látszik lenni egy önálló folttal; az első nagy folt tetemesen kisebb lett, s a csoport ma 27 tagból áll. A délnyugati negyedben van a másik foltcsoport, mely egy középszerü s 2 kis foltra olvadt le. A D.K.-i negyedben lévő folt valamivel kisebb lett, s hosszúkás alakot vett föl, magvából K. felé egy kis pont látszik olyformán, mintha az valami bel erő által lett volna onnan kilökve, s bár ő magánosan áll is, látszik utána egy vonal, mely őt egyszer követte, mig tőle elszakadt. K.-en nehány fáklya és 3 kis folt.

Julius 12. A két folt-csoport öszveolvadt s áll 12 semmit mondó foltból. A nagy folt, melynek magva lepke alaku, ma még inkább mutatja azon kilökést, mit tegnapelőtt, de ma mint egy szállal azon kilökött pont össze folyik¡a maggal. É.K.-i negyedben 10 igénytelen folt van elszórva fáklyák között.

Julius 13. A csoportból már csak 2 folt látszik. A nagy folt kilökött pontja egészen le van annak magvától válva, de mindig a penumbrában van, s ugy látszik, mintha egy másik ilyen testet is akarna magából kilökni. A É.K.-i negyedben levő szétszórt foltok egy 9 tagból álló csoporttá egyesültek.

Julius 14. A nagy folt penumbrástól együtt 2 darabba szakadt. A foltcsoport három külön al-csoportba szakadt, melyek megolvashatlan mennyiségü apró pontocskával vannak összehalmozva. Az É.K.-i negyedben egy kis 8 tagból álló csoport támadt a napkorong felénk fordult részén, s keleten fáklyák közt egy új folt tünik elő.

Julius 15. A kettős folt N.-on fáklyák között két külön darabban áll. A két csoport 9 és 12 tagból áll. A tegnap előtünt folt ma is fáklyák között áll.

Julius 16. N.-on és K.-en szép fáklyacsoportok, s nyugattól keletig meglehetős egyenes vonalban áll 18 folt, 3 csoportban és 2 önállóan.

Julius 18. É.N. negyedben közel a szélhez sok szép fáklya között egy 5 foltból álló csoport, a D.K.-i negyedben egy másik, hol az előmenő folt közép nagyságu, s 15 tagból áll, az É.K-i negyedben egy közép nagyságu folt.

Julius 19. Az É.N.-i negyedben lévő csoport leolvadt 2 foltra, de körülötte oly mennyiségü fáklya van, hogy azok majdnem a napkorong középpontjáig nyulnak be, hol egy kis folt áll. A második csoport egy óriási nagy csoporttá fejlődött, hol az elől menő nagyobb foltból 2 akkora folt lett, mint a tegnapi felületének négyzete. A két foltot, mely félárnynyal körül van véve, egy fényes áthidalás választja el; utána jő sok apró, végre 4 meglehetős nagyságu folt. A csoport összesen 28 foltból áll 9 maggal. Ezen csoporttól kelet felé egy egyes folt áll kettős maggal. Keleten is óriási menynyiségü fáklya látható két csoportban.

Julius 20. A sok fáklyának keleten mint nyugaton csak nyomai láthatók; a foltcsoport ma 31 tagból áll, de valami nagy nincsen köztük. Az előlmenő rákoll› gyanánt körül veszi 270°-nyira az utána menőt, mely tegnap még szintén nagyobb volt, s az elsőből egy hosszú szál nyulik ki kelet felé. A fölötte álló egyes folt megtartotta helyzetét.

Julius 21. É.N.-on és keleten ismét több fáklya mutatkozik. A foltcsoport egy hosszan nyujtott S alakban áll, sok apró foltal, melyek száma 25. A csoport fölött álló egyes folt 5 darabba szakadt szét.

Julius 22. É.N., É.K. és K. en sok fáklya, a foltcsoport ma egy kampóhoz hasonló alakot vett fel, hol az elől levő foltok egy nagy folttá egyesültek s Y alaku maggal bir; a foltok száma 31. A tegnap 5 darabra szakadt folt ismét 1 darabban áll.

Julius 23. A csoport tegnapi alakját eléggé megtartotta, csak hogy hosszabb vonalon van elterjedve, s 23 darabból áll. Az egyes folt mint tegnap. É.N.-on és K.-en fáklyák vannak s K.-en egy eltünő nagyobb folt.

Julius 24. A csoport közeledik az eltünéshez, s a napszélen lévén, belőle már nem sok látszik; az egyes folt mint tegnap; midegyik körül van véve fáklyákkal. A keleten támadó folt magva H alakban látszik, szép penumbrában.

Julius 25. A csoport fáklyák között eltünt, az egyes folt csak kis pont. A keleti szélen előlépett s először 23-án észlelt folt különös alakban áll előttünk. A folt majdnem gömbölyü, magva ellipticus, s ebből a penumbrán keresztül az ellipsis nagy tengelyétől mintegy 45⁰ szögelet alatt egy egyenes szál megy ki a folt fél átmérője távoláig, hol abból penumbra nélkül egy fekete gömb támadt. — Keleten fáklyák; — ehez [I. tábla, 3. ábra.]

Julius 28. A 25-én észlelt folt egészen szabályos alakkal bir, majdnem gömbölyü; a belőle kiálló szál eltünt, de azon irányban, melyben az haladni látszott, 4 kis folt van, melyek bizonyosan az emlitett nagy foltból lettek kilökve. Keleten fáklyák között 5 folt lép előtérbe. [I. tábla, 4-ik ábra.]

Julius 29. Az első folt egészen gömbölyü, a 4 kis folt közül ma csak 3 kiséri őt. A tegnap előlépett folt alakja egy szabályos ellipsis, magva azonban rendetlen alaku. Körülötte látszik 5 kis pont s nehány fáklya.

Julius 30. Tegnapról mára ismét nagy változás történt a nap tábláján. Az első folt körülbelül 5 szög alakban áll, s a követő 3 foltocskából, mely a 25-én történt kilöketés eredménye, egy folthalmaz támadt, mely majd akkora, mint a fő folt, s 10 maggal bir. Az ujon előtünt folt egy szép nagy folttá fejlődött, mely szabályos alakkal bir s egy különös tüneményt tár elénk fordított alakban, mint az előbbi 25-én. Ebből nyugat felé hajtott vessző alakban 15 sorrendben álló foltocska, mind apró maggal lett kilökve. Ezen foltot K. felől követi 3 középszerü, sok nagy fáklyával. Fáklyák nyugaton is vannak.

Augusztus 1. Az első foltból csak egy halavány hosszú folt látszik. A második, sok apró szüleményével és követőjével egy szép foltcsoporttá alakult, hol a nagy foltnak különös scorpio alaku magva van, s az egész jelenség egy nagy vihar tüzhelyére utal. [I. tábla, 6-ik ábra.] A csoport áll 16 tagból. A D.K.-i negyedben 5 folt áll elszórva egy szép kettős maggal.

Augusztus 2. Az első folt közeledik a szélhez, fáklyák között. A csoport meglehetős területre szóratott szét. A nagy folt egy Hybiscus Siriacus virágához hasonlít, hol a 3 darabra szakadt mag annak himszálait ábrázolná. A csoport áll 20 foltból. A D.K. negyedben áll egy egyes, egy kettős folt, s egy csoport 6 foltból; mind fáklyákkal körülvéve.

Augusztus 2. Az első folt a korongnak legszélén áll fáklyák között. A csoport kisebb területre huzódott össze. Főfoltja mindig első rendet foglal el; környezete, melyben 2 elég nagy folt létezik, 9 tagból áll. Az egyes folt megtartotta viszonyos helyzetét és alakját, a kettősből egy 5 tagból álló csoport lett, a csoport szintén megtartotta viszonyos helyzetét s 7 foltból áll.

Augusztus 5. A nagy folt igen megfogyott, s a kisérőinek nagy saját mozgásuk látszik lenni; az egész csoport 10 foltból áll. A kettős foltból keletkezett csoport eleje egy igen nagy folttá condensálódott össze, s aránytalan nagy penumbrával bir. Kisérői mind apró pontocskák, szám szerint 20. Az egyes folt a harmadik csoporttal egyesülvén, ez 17 tagból áll.

Augusztus 6. Az első csoportot nagy változásban látjuk. A korong széléhez közel fáklyákkal körülvéve 2 nagy folttá alakult, melyet 9 kicsi követ. A második csoport nagy foltja szabályos alakot vett fel, s a sok apró pont helyett mellette áll 3 kis folt. A harmadik csoport 18 foltból áll s olvashatatlan mennyiségü pontból. Keleten nehány fáklya.

Augusztus 7. Az első csoport dél felé lévő nagyobb foltja 2 felé szakadt, s így most áll a csoport 3 nagy és 7 apró foltból. A második csoport nagy foltja nagyon leapadt s csak 1 kis folt áll mellette. A harmadik csoport hosszúra nyult s áll 13 foltból. Keleten sok fáklya, s egy kis folt áll.

Augusztus 8. Az első csoport ismét két nagyobb foltból áll, mert a tegnap kétfelé szakadt nagy folt déli része ma apró foltokká oszlott szét, s fáklyák között a nap széléhez közel összesen 8 tagból áll. A második csoport nem nagyon változtatta viszonyos helyzetét s 21 foltból áll; a harmadik, egy nagyobb s 2 kis folttá változott. A keleten lévő egyes folt nyom nélkül eltünt, de helyette a nap legszélén sok fáklya között egy kettős látszik feltünni.

Augusztus 11. A 3 csoportból már nyugaton csak 2 egyes foltot látunk, sok fáklyával körülvéve. A 8-án előlépett folt egy gyönyörü 3-mas magu folttá változott; D.K.-en egy 30 foltból, mely azonban mint apró, álló csoport látszik fáklyákkal körülvéve.

Augusztus 13. A nap D.N.-i negyedében 2 egyes folt támadt. A nagy folt gyönyörü alakot öltött fel, magva kettőre ment össze, az egyik hosszúkás rendetlen alaku, a másik ellipticus, s ez nagy tengelyéből merőlegesen áll az előbbire. A csoport végtelen sok apró foltból áll, melynek száma több mint 40, s meglehetősen össze van halmozva a sok apró pont.

Augusztus 14. A két kis folt, mely a nap felénk fordult részén támadt, 11. és 13-ik közt már elenyészett. A nagy folt tetemes méretet vett fel, s hosszúkás magja egy 6-hoz hasonló alakot vett fel, mig az ellipticus kelet felé fordulva, vagy 15—20°-ot, 3 szögletes lett. Különös alakot öltött fel azonban a foltcsoport. Ennek alakja ma egy majdnem szabályos horgony, mig tegnap egy szabálytalan conglomerát volt. Az apró foltok száma megolvashatlan. Keleten nehány egyes fáklya mutatkozik.

Augusztus 17. É.N. és K.-en fáklyák mutatkoznak. A nagy folt magvai, a folt egész átmérője nagyságával szét-mentek s köztük még 2 kis pont támadt. A horgony alaku csoport ma is megtartotta kevés változással alakját, csak hogy északi része N. felé fordult 25—30°-kal, s a foltok kissé távolabb vannak egymáshoz.

Augusztus 19. A nagy foltnak 5 magva van, egy penumbrával körülvéve, környezve óriási mennyiségü fáklyával. A horgony alaku foltcsoport ma inkább egy W alakot öltött s benne 17-ik óta óriási forrongások mehettek végbe. Igen nagy mennyiségü fáklya kiséretében közeledik ez is a N. szélhez. A D.K.-i negyedben nagymennyiségü fáklya között: egy egyes, egy kettős és hármas folt mutatkozik.

Augusztus 22. A W alaku csoportból fáklyák között a N. szélen már csak 4 pont szemlélhető. A kettős foltból egy kör alaku csoport támadt, mely összesen 23 apró foltból áll. A hármas egygyé folyt össze, s szép 2 maggal bir. Az egyes megmaradt a maga minőségében. K-ten 8 fáklya.

Augusztus 23. A kör alaku csoport egy trapézzá ment szét, mely számtalan apró foltocskából áll. A kettős magú nagyobb folt változatlan, de D.K. felől 28 apró kis folttal van körülvéve, melyek tegnap óta vagy úgy támadtak vagy a főfoltból lökettek ki; részemről az elsőt helyesebbnek s valószinübbnek tartom.

Augusztus 27. A csoport mely trapez alakkal birt, eltünt. A második csoport nagy foltja ugyan még mindig megvan, s mindig 2 maggal, azonban egy csikkal összekötve; a körülötte levő apró foltok nyom nélkül eltüntek. N.-on 2 csoport fáklya, keleten egy kis egyes folt áll.

Augusztus 28. Az előbbi foltok lehetőleg kisebb méretre devalválva. Keleti oldalon 1, a nyugatin 2 csoport fáklya áll.

Augusztus 30. A nap középpontján mint odavarázsolva 2 nagy halavány csoport, végtelen sok apró foltból összeállítva. É.N. és K.-en fáklyák kis mennyiségben.

Augusztus 31. A két csoportnak bár alakját kissé változtatta, halaványsága ma is a tegnapi, azon kivétellel, hogy a déli csoportban 3 sötétebb folt látszik.

Szeptember 2. A déli csoport nyom nélkül elenyészett, az északiból 6 halvány folt van még; K. és DK.-en sok fáklya, s D.K. két kis folt van közötte.

Szeptember 3. A 6 tagból álló csoportból egy 23 foltból álló csoport lett, melyben a D. felé fekvő a legnagyobb, s 3 maggal bir; mellette sok fáklya mutatkozik. A D. részen egy nagy fáklyacsoportban 3 folt. Keleten is 2 fáklya-csoport észlelhető.

Szeptember 4. A foltcsoport a napkorong legszélén fáklyák között áll; É.N.-on és D.K.-en szép fáklya-csoport látszik. Keleten egy messze. a naptábla középpontja felé benyuló fáklyacsoport van, úgy a D.K. szélen is a már említett 2 kis folttal.

Szeptember 5. A foltcsoportból nagy mennyiségü fáklya tömeg között, mely a nap egész nyugati szélét ellepi, már csak az utolsó folt fele látszik. Déltől keletig 3 nagy csoport fáklya borítja be a nap szélét, s D.K.-en 3 kis folt látszik egész közel egymáshoz.

Szeptember 8. É.N. és D.K.-i negyedben 2 egyes folt, s nagyobb mennyiségü fáklya.

Szeptember 9. Az É.N.-i negyedben álló folt körülvéve igen intensiv fényü fáklyacsoport által, ugy a D.N.-i negyedben egy hármas folt, mely a nap látható felén támadt. A D.K.-i negyedben álló folt szétszóródott egy 17 tagból álló csoporttá, körül véve fáklyákkal. Ezen csoporttól isolálva K. felé egy nagy csoport fáklya létezik.

Szeptember 15. Az egész látható naptáblán egyetlen kis folt a D.K. negyedben, fáklyákkal környezve. Fáklyák É.N.-i és a K.-i részen is vannak.

Szeptember 18. A foltocska kissé megnőtt, de alakja nem változott. N.-i szélen öt darab fáklya látszik.

Sezptember 20. A folt megint kisebb lett; a tábla középpontja közelében két új foltocska támadt; D.K.-en fáklyák között egy nagyobb folt mutatkozik; keleten és É.N.-on fáklyák mutatkoznak a nap szélén.

Szeptember 21. Nyugati szélen sok fáklya mutatkozik az első folt régi alakjában, a két új kisebb lett. Keleten egy kis csoport támadt, mely 7 tagból áll; a 20-án előtünt folt tetemes alakot látszik felvenni.

Szeptember 22. Az első folt régi alakjában a kettősből az egyik eltünt, az újból támadt csoport 5 foltból áll, a

20-án előtünt folt igen szép szabályos alakú nagy folttá nőtte ki magát, tőle K.-felé több nagy fáklya van.

Szeptember 23. A kis foltok eltüntek; az 5 tagból álló csoport 2 foltra apadt le; a nagy folt ellipticus alakkal bir, s az ellipsis nagy tengelye merőlegesen áll a napi mozgásra, s ma a folt mellett a nagy tengely irányában É és D felől 2 respective 3 kis pont van látható. N.-on és keleten csekély mennyiségü fáklya létezik.

Szeptember 24. A két foltra apadt csoport ma ismét egygyel megszaporodott, s a három közül az északi legnagyobb, s K.-felé egy kis kidudorodás látszik rajta. A nagy folt szabályos gömbölyü alakkal bir, s közepén szép sötét magva áll fénykoszorúval körülvéve; a kis foltok most is mellette vannak, s számuk 8-ra szaporodott. N.-on 3 fáklya, keleten egy fáklyacsoport.

Szeptember 25. A kis foltok nagy változáson mentek át. A legnagyobb sokkal kisebb lett, s a tőle délfelé állók egy K.-től N.-felé terjedő sorban állanak, mintegy 4′ hosszuságu területen, s ezen foltsor 22 tagból áll. A nagy folt megtartotta alakját, de középpontja körül mintegy 90°-ot fordulni látszott kelet felé, és ÉN.-től D.-ig körül van véve 43 apró folttal. ÉN.-on s DK.-ten néhány fáklya mutatkozik; utóbbi csoportban egy folt lép elő.

Szeptember 27. A foltsor ismét 3 foltra apadt le, melyek közel állanak egymáshoz. A nagy folt alakja megmaradt, de magva egész különös rendetlen alakot öltött fel, s a 43 kis foltnak nyoma sincs. A 25-én előlépett folt két darabra szakadt, s mellette 4 fáklya áll.

Szeptember 28. A hármas kis csoport a tegnapi alakját megtartotta. A nagy folt hosszúkásra nyúlt, s magva ma kettős; a kettős folt egybeolvadt. D. K.-i szélen 8 fáklya kiséretében egy hármas folt tünik elő.

Szeptember 29. A hármas folt ma fáklyák között a nap É. N.-i szélén áll; a nagy folt is oda közeledik, s ezen is nagy változás történt; ő igen leapadt, a második magva egészen levált tőle, s mellette egy kis önálló foltot képez; a félárnyban 2 pont látszik, s a nagy folt körül van véve fáklyákkal s 4 kis folttal. Az egybeolvadt kettős folt ma ismét két darabban van; a tegnap előlépett folt ma egy óriás csoportnak mutatkozik, mely egy kettős magú nagy, s 31 kisebb foltból áll, sok fáklyával körülvéve.

Szeptember 30. A kis foltok láthatlanok. A nagy folt egyedül áll, hosszú ellipsis alakban, tengelye körül 45°-ot fordult N.-felé, s fáklyákkal van körülvéve; a kettészakadt folt ma ismét egyedül áll. A nagy csoport főfoltja ma 3 maggal bir s mellette még két tekintélyes folt áll, az egyik két maggal; az apró foltok száma 15. A csoport körül keleten sok fáklya létezik.

October 1. A nagy folt eltünőfélben van N.-on fáklyák között; a másik a nap közepén eloszlott nyom nélkül; a nagy csoport ma 3 nagy és 5 kis foltból áll, hol a középső nagy folt inkább egy foltconglomeratnak tünik elő, mint önálló foltnak; ő 10 maggal bir. Az előmenőnek 5 magja van.

October 2. A nagy csoporton kivül, mely igen tetemes területet foglal el, semmi más folt nem látható. A középső folt ma egy pyramishoz hasonlit, mely apró kövekből van rendszertelenül összedobálva, az előlmenő foltnak egy szakadozott L alaku magva van excentricus helyzetben; az utolsó folt elég szabályos, de magva egészen a szélén van, penumbra sincs D felé már előtte. Az apró foltok száma 33. K. és DK-en nehány fáklya látszik.

October 3. Az első folt ellipticus alakot vett fel s magva egy görög epsilonhoz hasonlit. A második egy leirhatlan rendetlen alakban áll, s megolvashatlan mennyiségü apró foltból alkotott; a harmadik tegnapi alakjában van.

October 6. A nagy csoport igen megváltozott. Az előlmenő nagy folt megmaradt ugyan előbbi alakjában, de a második egy halmaz alakjában 180°-nyira körülveszi őt, s dél felé egy félkör alakú kiugrást mutat, mely ismét félkör alakban 5 kis ponttal van körülvéve gyöngysorképen, az utolsó folt régi alakjában áll.

October 13. A nagy csoportból már csak 2 középszerü rendes alakú folt áll a N.-i szélhez nem messze.

October 14. A kettős folt elsője hosszú alakban látszik, követője a napi mozgás irányában 5 foltra szakadott szét.

October 17. A DK-i negyedben áll egy 10 kis foltból álló csoport; egy hosszúkás kettős magú s egy egyes folt nehány fáklya kiséretében.

October 19. A csoport 2 folttá olvadt össze, a kettős folt egyik magva kivált, s önálló foltocskákat képez a nagyobb folt körül; a többi mint 17-én.

October 20. A két folt mint tegnap; a nagyobb folt az aprókkal egygyéolvadva áll; a D. K.-i negyedben van még 5 apró, s egy nagyobb folt.

October 21. A két folt egygyé olvadt össze; a tegnap egygyéolvadt folt pedig ma egy 7 tagból álló csoportot képez. Ezenkivül áll a D. N.-i negyedben 2 kis folt, s a D. K.-tiben egy nagyobb.

October 26. É. N.-on sok nagy fáklya, s egy 4 tagból álló igénytelen kis csoport. D. K.-en szinte sok nagy fáklya, s egy kis egyes folt a nap szélén.

October 28. É. N.-ton fáklyák mint tegnap; D-től egész É. K.-ig sok nagy fáklya mutatkozik, s a D. K.-i negyedben egy 3 magból álló hosszas folt.

October 29. Keleten szép fáklyák, de folt nincs a napon egy sem.

October 30. Nyugaton szép fáklya-csoport van, a D.K.-i negyedben egy igénytelen 8 apró foltból álló csoport van, mely a napkorongon támadt tegnap óta.

November 17. A napkorong középpontján mutatkozik egy meglehetős nagy területen szétszórt foltcsoport, mely apró foltokból van alkotva, számszerint 46. A nyugati szélen apró fáklyák között látszik 3 kis pontocska.

November 22. É. N.-ton egy szép folt, mely gömbölyü alakú lehet, van közel az eltünéshez; magva észak felé finom szálban végződik. Körülötte sok fáklya van szétszórva. Keleten áll egy félhold alakú folt, melynek 4 magja kifli alakban áll; mellette 2 kis foltocska. A D. K.-i negyedben még igénytelen folt s nehány fáklya áll.

November 24. A félhold alakú folt Északi része mintegy 100°-ot fordult N.-felé; magva egygyéolvadt, penumbrájában egy másik mag látszik, s körül van véve 7 apró folttal. A másik 2 folt közül az egyik eltünt, a másik 2 darabra szakadt.

November 25. A nagyobb folt tegnap óta ismét fordult 45°-ot nyugat felé. A második magva a főmaggal összeolvadó félben van az apró foltokból, melyekből már csak 3 van meg. A tegnap 2 darabra szakadt folt ma egygyéolvadt össze.

Deczember 28. Az É. K.-i negyedben egy kettős folt áll ellipticus alakkal, a D. K.-i negyedben pedig egy 8 foltból álló csoport, melynek középső foltján látszik, hogy ezelőtt egy darab volt, mig most kétfelé van válva, még pedig olyan szabályszerüen, hogy az észlelő látni kivánja az összetartozó részeket.

1875.

Január 7. Az É. N.-i negyedben, s a keleti szélen áll egy kettős folt, úgy keleten nehány igénytelen fáklya látszik.

Január 19. Az É. K.-i negyedben egy majdnem T alakú csoport áll nem messze a nap keleti széléhez, 2 nagyobb s 21 apró foltból, ezeket nehány fáklya követi.

Február 4. Ismét az É. K.-i negyedben egy 8 tagból álló igénytelen foltcsoport látható.

Február 10. A 4-én emlitett csoport végleg eloszlott, mert a nap N.-i részén nyoma sem látszik. Az É. K.-i negyedben egy kis folt áll nehány elszórt fáklyával.

Február 20. Nyugaton egy nagy csoport fáklya látható, ugy K. és É. K.-en is. Az északkeleti negyedben egy hatalmas, szabályos alaku s 3 szegletes 2 maggal biró nagy folt áll; őt követi 4 kis pont. Keleten egy meglehetős kettős magvu folt áll, s őt követi 4 kis foltból álló halmaz.

Február 21. A nagyfolt majdnem változatlanul áll, csak magva egy görög lamda alakot öltött fel, s a követői fölhő alakban állanak utána 2 igénytelen maggal. A második folt gömbölyü szabályos alakban áll, kettős magva egygyé olvadt, s követőinek száma 9-re szaporodott.

Február 22. A nagy folt magva óriási nagyra növekedett, déli részén alig van penumbrája, szine intensiv fekete. Penumbrája É. K.-féle kis kidudorodást mutat az őt követő

3 kis folt irányában. A második folt is sokkal nagyobbra nőtt meg, s magvába észak felől egy fehér bemélyedés látszik, majdnem annak közepéig, az őt követő 8 foltocskán alig történt valami lényeges változás.

Február 24. A nagy folt ma egy szabályos három szög alakban áll, s magva, mely szintén olyan alakkal bir, meglehetősen a penumbra közepén van. A háromszög basisa parallell megy a napi mozgással. A háromszögü magnak kelet felé 3 kiugrása van, mintha fogai lennének, s fölötte a penumbrában egy pont látszik; az őt követő kis foltok köd forma alakkal birnak. A nagy folt oscillál kelettől nyugatra. A másik folt meglehetősen megnőtt s magva igen tépett széleket s rendetlen alakot mutat; őt követi egy több foltból öszszehalmozott, s összefolyt foltcsoport. É. K.-en fáklyák között két egyes folt áll. Fáklyák D. N.-on is vannak.

Mártius 12. D. N.-on egy csoport fáklya áll; keleten pedig egy kis, de szép foltcsoport. Ebben az előmenő folt meglehetős fekete s sötét penumbrával bir, őt követi egy igen tépett szélekkel biró szintén sötét folt; a kettő között számtalan apró folt áll. Ezen csoporttól kelet felé a napszélen szép fáklya csoportban áll egy egyes folt.

Mártius 13. A foltcsoport annyiban megváltozott, hogy valódi folt csak egy maradt belőle, t. i. a legnagyobb; a többi összeolvadt egy felhőszerü halmazba, mely a foltot környezi a keleti oldalon; a másik folt változatlanul áll. N.-on 4 fáklya, É. K.-en ugyanaz látható.

Mártius 15. A csoportból egygyé olvadt folt ma valami belerő által szétrobbantott ködburokkal körülvett foltcsoporttá változott, mely 5 foltból áll. A másik folt nagyobb lett, magva szabálytalan, s excentricusan áll a déli oldalon, követi őt valami 8 kis pont egy halmazban.

Mártius 16. A foltcsoport kisebb területre van szoritva s csak 3 tagból áll; a másik foltnak magva ma a középen áll, s 4 foltocska követi őt. Az É. K.-i negyedben tegnap óta két folt támadt.

Mártius 17. A 3 tagból álló csoport ma egy nagy területen elszórt, s igen apró, valami 19 foltból álló csoportot képez; a második magva annak D. N.-i oldalára vándorlott, s 3 részre szakadt, követi őt 3 foltocska. A tegnap először észlelt 2 foltból 15 tagból álló homályos csoport lett. Északkeleten a nap legszélén egy nagy fekete szalag látszik, miből egy nagy folt várható.

Mártius 19. A 17-én észlelt foltok mind szétszóródtak sporadicusokká, a nélkül, hogy őket valami csoportba lehetne gyüjteni; az összesek száma csak 8. Az É. K.-i negyedben előtünt folt sok fáklya között áll, s magva a nap egyenlitőjével párhuzamban K.-felé egy kidudorodást mutat.

Mártius 22. A sok apró folt egy 10 tagból álló csoporttá egyesült. A nagy folt északi része K.-felé fordult 90°-ot s magva hosszúkás, követi őt 6 apró foltocska. É. K. és D. N.-on több fáklya látható.

Mártius 25. A tiz tagból álló kis foltcsoport két nagy egyes folttá olvadt össze; sok fáklya között állanak a nap D. N.-i széléhez közel, miért is már nem sok látszik valódi alakjokból. A nagy folt megtartotta alakját, de az őtet követő kis foltok 90°-nyi szög alatt körüle fordultak D.-felé, s határozatlan felhőalaku tömeget képeznek.

Mártius 30. D. N.-i szélen és az É. K.-i negyedben (nap egyenlitőn) sok szép fáklya van látható. Az északi félgömbön egy kettős foltcsoport áll, összesen 13 tagból. A keleti oldalon de a déli félgömbön pedig egy 20 apró foltból álló csoport.

April 4. Az egész naptáblán szétszórva 7 folt, s 3 csoport fáklya látható.

April 6. A N. és D. N.-i szélen 2 szép fáklya-csoport áll; az északi félgömbön közel egymáshoz 3 kis folt.

April 9. Nyugati szélen nehány fáklya, azok keleti szélén az északi félgömbön egy kis folt látszik.

April 10. N.-i szélen egy csoport fáklya, a nap középpontján az északi félgömbön két kis pont, s a keleti szélen fáklyák között szintén két kis folt látszik. A déli félgömbön az egyenlitőhez közel 2 fáklya között két nagyobb folt lép előtérbe.

April 12. Az északi félgömbön álló 2 pontból 4 folt lett, a délin levők tetemes nagysággal birnak; ezek közől az északi szép fekete kampó alakú maggal bir, s hosszúkás alakû, mig a déli gömbölyü. Mindkettő fáklyák között áll s követi őket 5 kis pont.

April 15. A négy foltból egy lett, melyet csak egy pont követ. A déli félgömbön álló nagy foltok közől a déli forgó mozgást mutatott az északi körül s alakja hosszúra nyúlva, magva két részre szakadt. Mozgása N.-felé történt; követi őket két kis folt.

April 17. Az északi félgömbön lévő foltból ismét 3 külön folt lett. A nagy foltok közől az északi ma gömbölyü alakkal bir, szabálytalan maggal; a déli már előtte áll, s nagyságának tizedére lefogyott. Keleten 2 csoport fáklya mutatkozik.

Aprilis 21. A kis foltok eltüntek. A nagy foltok sok fáklya között állanak a nap nyugati szélén, de szétbomolva 11 tagból álló csoporttá. — É. K.-en fáklyák között egy kis folt áll.

Aprilis 26. A kis foltok, s foltcsoport eltünt. Keleten áll egy rendetlen alakú 3 foltból összetömött csoport, nehány fáklyától környezve. A nap legszélén pedig egy nagy csoport látszik fellépni.

April 27. A rendetlen alakú csoportból 2 szép szabályos folt lett, melyet sok apró pont választ el egymástól, s fölötte egy sereg apró pontból álló felhőforma halmaz áll. A tegnap fellépni látszó foltcsoport ma igen érdekes tüneményt mutatott. Ezen foltcsoport áll egy nagy tömeg fáklyával körülvett óriási foltból, mely hosszukás alakkal, s 2 nagy szakadozott szélü, s egy kis maggal birt; ő D. és K. felől környezve volt 21 kis folttal. Igy rajzolta azt Nagy Tamás tanár úr a déli órákban. Nemsokára ebéd közben tanár úr említést tett nekem ezen foltról, s én is óhajtva látni, délután átsétáltam a csillagdába, s nagy meglepetésünkre a folt alakja egészen más forma volt. Az egész tömeg vagy 100°-ot fordult kelet felé, t. i. északi része. A folt majdnem kétdarabra volt szakadva, s magva 6 rendetlen szaggatott szélü magból állott, melyek fehér szegélylyel birtak. A folt penumbrájának nyugati részében 3 óriási fáklya volt egy-egy kis folttal, úgy a keletin is egy, de folt nélkül. A félárnyék határozott körvonalakkal birt. A foltot követi 14 kis folt. Igy rajzolta Nagy úr a foltot 3 h. 30. m. kor.

4 h. kor én is készitettem róla egy rajzot, mely az ezelőtt félóraival már nem egészen egyezik meg, sőt sok vonást a rajzolás közben voltam kénytelen megváltoztatni. A rajz, melyet én készitettem, 300-szoros nagyitással történt a Reflectoron, s I. tábla 5. ábrán látható. A folt magva 5 nagy darabból állott (a 2 déli összeolvadt) s 7 kisebb sziget gyanánt úszott a penumbrában levő fáklyákon. Mint a rajzon a kisugárzás a penumbrán mutatja, óriási vihar tűzhelye volt ezen óriási folt-terület. A nagy foltot 14 apró követte, úgy számtalan felhőalakú szövevény. A magokban számtalan fehér pont villan fel s tünik el az észlelés alatt.

Május 2. A nagy folt magjai egészen egygyé folytak, kivéve a délit, mely ma is külön áll; a penumbrában levő fáklyáknak ma nyoma sincs, úgy az abban levő pontok is, az északi kivételével, elenyésztek. A magva igen roncsolt szélekkel bir, mig a penumbra határvonalai elég élesek. A foltot követő apró foltok egy része egy félkör alakban követi a nagy foltot, melynek nyitott fele a nagy folt felé fordult, más része utána egy sok tagból összehalmozott csoportot képez; a D. N.-i negyedben két kis egyes folt; D. N.-on s É. K.-en fáklyák.

Május 3. A nagy folt központja körül kelet felé fordult s a penumbra déli szélén 3 fekete pont van. A mag hosszúkás, de egy darabban van, kivéve a délnyugoton mindig külön álló magvat, s É. K.-en egyet, mely tegnap óta róla levált. A mag nyugati részének meglehetősen a közepén egy intensiv fáklya világit, mely az irradiatio következtében még fényesebbnek tűnik elő. A nagy foltot 2 kis folt, s az utána levő csoportból támadt felhőszerü szövevény követi. A 2 kis folt, mint tegnap, változatlanul áll.

Május. 5 A nagy folt sokkal kisebb, magva egészen egygyé olvadt, de alakja folyvást tépett kinézésü, őt csupán 4 kis folt követi. A kis foltok egygyé olvadtak, s egy fáklyacsoport közepén állanak. Fáklyák keleten is láthatók egy csoportban. — [I. tábla 7. ábra.]

Május 6. A nagy folt egy szép fáklyacsoporttól van környezve, s a délkeleti oldalán egy nagy fényöböl nyulik be penumbrájába, mely még a magvát is benyomni látszik; követője ma csak egy kis folt.

Május 7. A folt ma kétfelé van szakadva, s a két penumbrát csak egy kis ködfátyol köti össze; a két hosszukás mag 45^0 szögelet alatt áll egymás mellett. Mellette áll 6 kis folt, mely tegnap óta képződött. Az egész csoport fáklyákkal van környezve. Ilyenek 2 csoportban K.-en és É. K.-en láthatók csekélyebb fénynyel.

Május 9. A foltcsoport nyugaton eltünt, s ma a nap egészen folt nélkül áll. A keleti részen van egy szép fáklyacsoport, mely gömbölyü majdnem, s 6' átmérővel bir.

Május 15. A napon egyetlen foltocska sem látható. A keleti és nyugati széleken egy-egy fáklyacsoport vesztegel.

Junius 2. A nyugati szélen egy nagyszerü fáklyacsoport látható, mely 8' átmérővel bir; a keleti szélen, fáklyák között, egy foltcsoport, melyen látszik, hogy eredetileg egy folt volt, de valami bel erő által szétrobbantatott. A csoport áll egy 8 és egy 3 magvú nagyobb foltokból, melyekben a magok egészen a nyugati, illetőleg keleti részein állnak a foltnak, penumbra nélkül; van még közöttük összekötő vonal gyanánt 4 apró folt.

Junius 5. Ezen töredék egy igen szép csoporttá alakult. Ámbár 2-án a hátullevő folt volt legnagyobb, most az elölmenő méretei azt kétszeresen felülhaladják. Azon nagy folt hosszúkás alakkal bir; végén kelet felé össze van egy folthalmazzal olvadva, mely valami 9 maggal bir; ezt követi mintegy másik sorozat, mely 5 tagból áll, s mind elmosódottak, mig utánna jön az utolsó nagy folt, mely épen forditva mint az első, nyugat felé van egy tömkeleggel összeolvadva, mely valami 9 maggal bir; keleten egy szép fáklyacsoport látszik.

Junius 7. A nagy folt, mely elől ment, egy gyönyörű alakot öltött fel. Egészen gömbölyü, egy kelet felé nyuló kidudorodást leszámitva, körvonalai a penumbrának nem olyan határozottak, mint 5-én voltak. Magva gyönyörű jelenséget mutat; kinézése épen olyan, mint egy földi rák (Gecarcinus — ruricola). A foltot követi egy felhőszerü szövevény és 6 kis folt.

Junius 21. A nap északi félgömbjén áll egy foltcsoport, hol az előlmenő folt hosszukás s nagy tengelye a nap egyenlitőjével párhuzamosan áll. A nagy tengelyén egy fehér áthidalás szakitja a foltot majdnem egész hosszában keletről nyugatra két felé. A déli félnek egy hosszú roncsolt kinézésü magva van, mig a felső (északi) 2 maggal bír, mely a délinél sokkal kisebb. Ezen foltot követi 2 kis összeolvadt folt később 2 nagyobb, melyek közől az északi 3 maggal bir, s kelet felől egy nagy öböl látszik lenni penumbráján. A délinek rendetlen magva nyugat felől a legszélen áll penumbra nélkül. Északkeleten egy halavány fáklya-csoport áll.

Junius 22. A nagy folt 90° fordulást tett központja körül nyugat felé, s a szétszakadva látszott két fél egyesült, de magva, habár egy darabból van is, igen szaggatottnak látszik s nyugat felől egy nagy öböllel bir, a penumbra, mely a magváig halad. Követi őt két kis folt, s tovább 2 nagyobb, s 5 kisebb. A két nagyobbnak ma rendes, majdan gömbölyü alakja van. A déli félgömbön egy szabályos, kettős magvu, gömbölyü folt támadt, melynek egy sajátszerű követője van. Az t. i. valami felhőszerü alak, de épen úgy látszik, mintha két egymáshosszába állitott becsukott olló volna, melynek fogói a folt felé állanak.

Junius 27. Az első csoport eltünt; a második nyugoti szélen áll 8 fáklyával körülvéve, de egészen más alakban mint 22-ikén. A nagy folt egyesült a felhőszerü szövettel, s egy görbe, sok fekete ponttal pöttyözött halmazt állit szemünk elé; 6 folt követi ezen halmazt félkörben. A nap középpontján áll 3 kis pont s a keleti szélen 4 fáklya között jön elő egy új folt.

Junius 30. A 3 kis pontból egy csinos folt, mely egészen gömbölyü s egy központján kivül fekvő fekete maggal bir, s számos apró folt támadt, melyek a nagyobb folttól délfelé feküsznek. A 27-én előlépett folt egy trapézt képez 3 maggal, s a sötét penumbra északkelet felé elmosódott, s szaggatott kinézésü. Keleten egy csoport fáklya között egy kis folt tünt elő.

Julius 2. A foltcsoport néhány fáklyával körülvéve 2 egyes foltra olvadt le, melyek a nap legszélén állanak nyugaton. A trapez-alaku folt gömbölyü lett, egy kis kidudorodással dél felé, mely egy kis külön magvat tartalmaz. A nagy magva rendetlen alakkal, de határozott körvonallal bir. Az előlépett folt elenyészett a napkorong látható felén.

Julius 5. A gömbölyü folt kidudorodása irányában vele összefolyva egy tömkeleget látunk sok apró maggal; a főfolt magva kettős, de északnyugat felé hegyesre végződik mindkettő, s összefolyik egymással. A folttól északra néhány apró pontból álló halmaz látszik.

Julius 30. A napkorong középpontjához közel egy szép, ámbár apró foltokból összealkotott csoport áll előttünk. A csoport legnagyobb foltja elől megy, s déli vége a különben elég hosszú testnek nyugot felől egy nagy öböllel bir, mely egészen a magjáig behatol. Magva kelet felé fogaskerékhez hasonlit. Követi őt 2 kisebb s valami 8 pont alakú folt, végre egy nagy egyes foltot képező sok összeolvadott foltok tömkelege, szám nélküli fekete maggal, s egy kis egyes folt.

Szeptember 15. Nyugati oldalon egy nagy csoport fáklya vesztegel; a keleti szélen pedig 4 kis folt egy csoportban, mely 12 szép fáklyával van körülvéve. A dél felé fekvő legnagyobb folt épen egy szép fáklya közepén áll, s az irradiátio folytán annak feketesége még jobban kitünik.

October 19-én. A napkorong nyugati szélén két kis igénytelen pont volt észlelhető.

October 20. Ezen két kis ponthoz még egy harmadik támadt hozzá.

October 24. Az egész napkorongon ismét csak két kis pontocska látható.

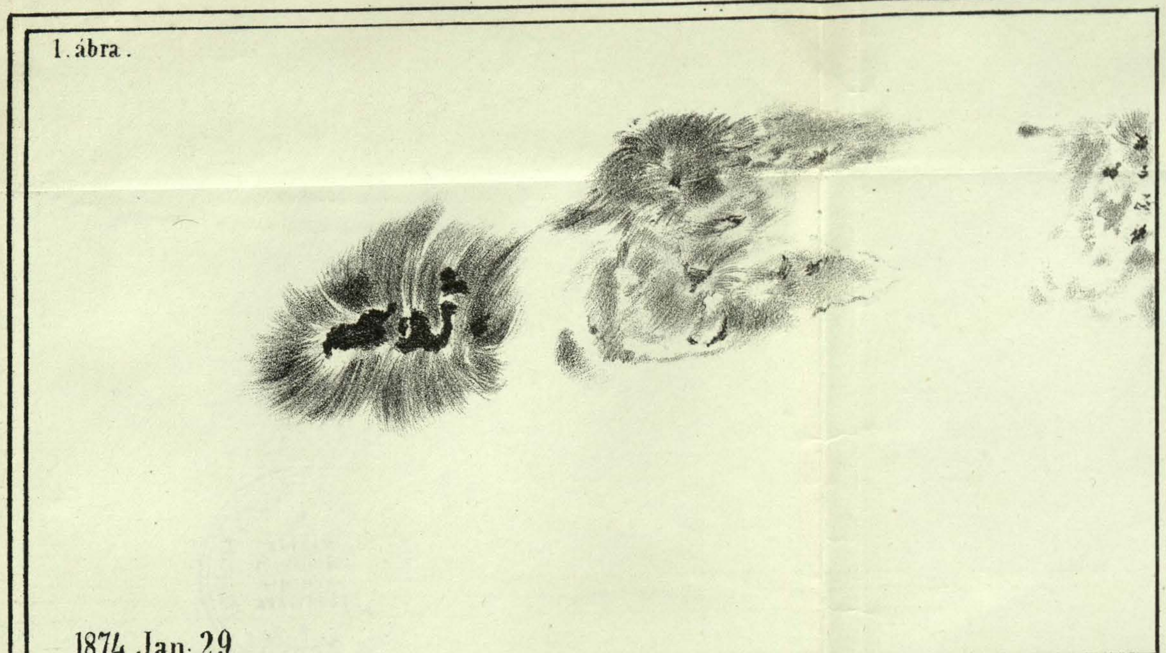
November 1. A nyugati szélen egy kis halavány fáklyacsoport, a keletin egy kis pont s három fáklya volt látható.

November 4. Az 1-sőn feljegyzett pontocska ma is látható, a fáklyákból csak a keleti szélen lévők voltak láthatók.

Deczember 30. és 31. Az egész november és deczember borús lévén, ezen 2 hóban csillagászati megfigyelések eszközlése lehetlen volt. November 4 óta ma láttam először napot (30-án), azonban rajta sem foltot sem fáklyát nem birtam találni.

A napfoltok megfigyelése, illetőleg feljegyzése mind chronograffal történik, úgy a nap képe minden egyes megfigyelésnél, a lehető legnagyobb gonddal lerajzoltatik. A nap észlelése nagyrészben Nagy Tamás ur munkája, mivel erre a czélra neki volt átadva a refractor; távollétében, vagy ha ő más sürgős teendővel volt elfoglalva, mindig én végeztem a napfeljegyzést helyette.

Konkoly.

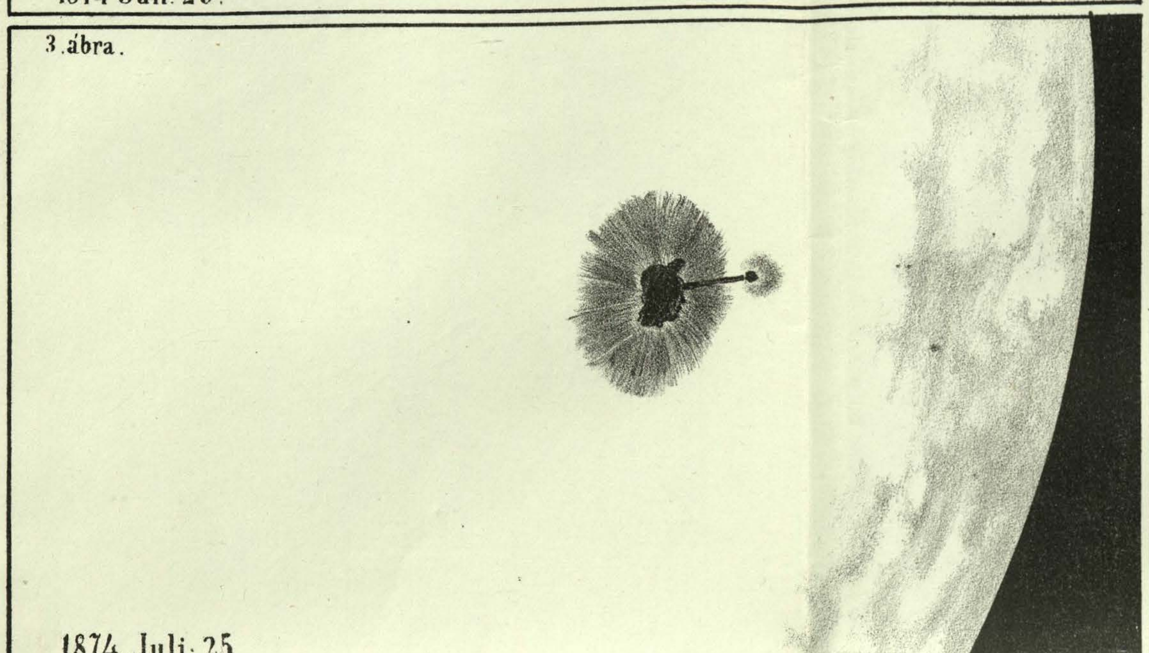


1. ábra.

1874 Jan: 29.

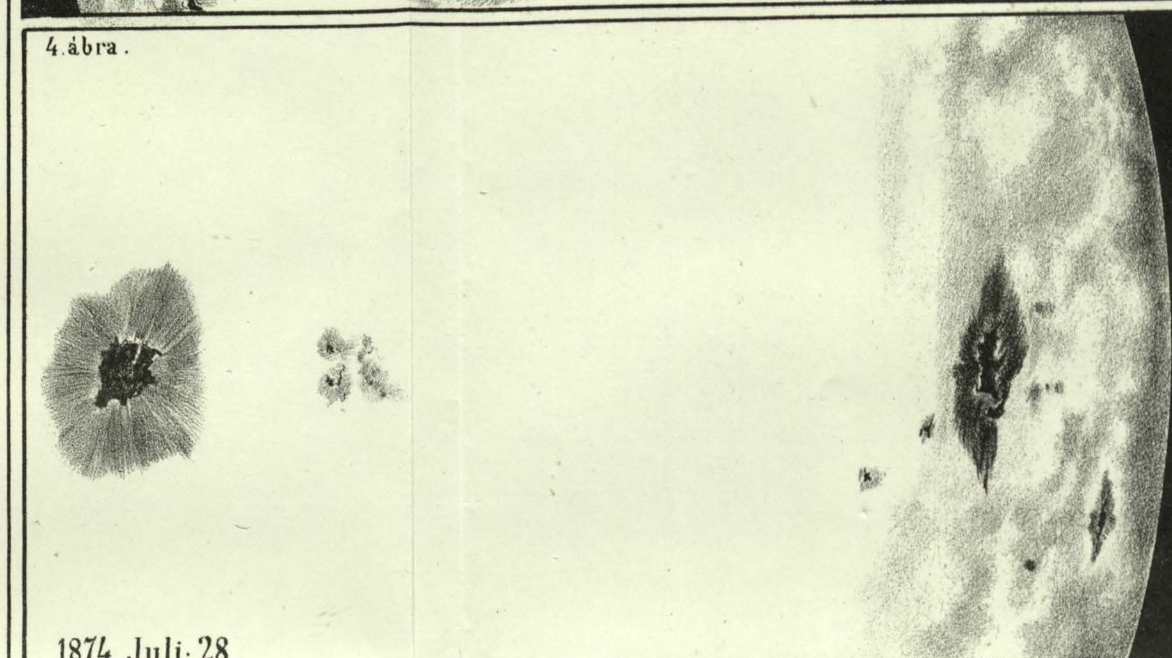
2. ábra.

1874 Febr: 2.



3. ábra.

1874 Juli: 25.



4. ábra.

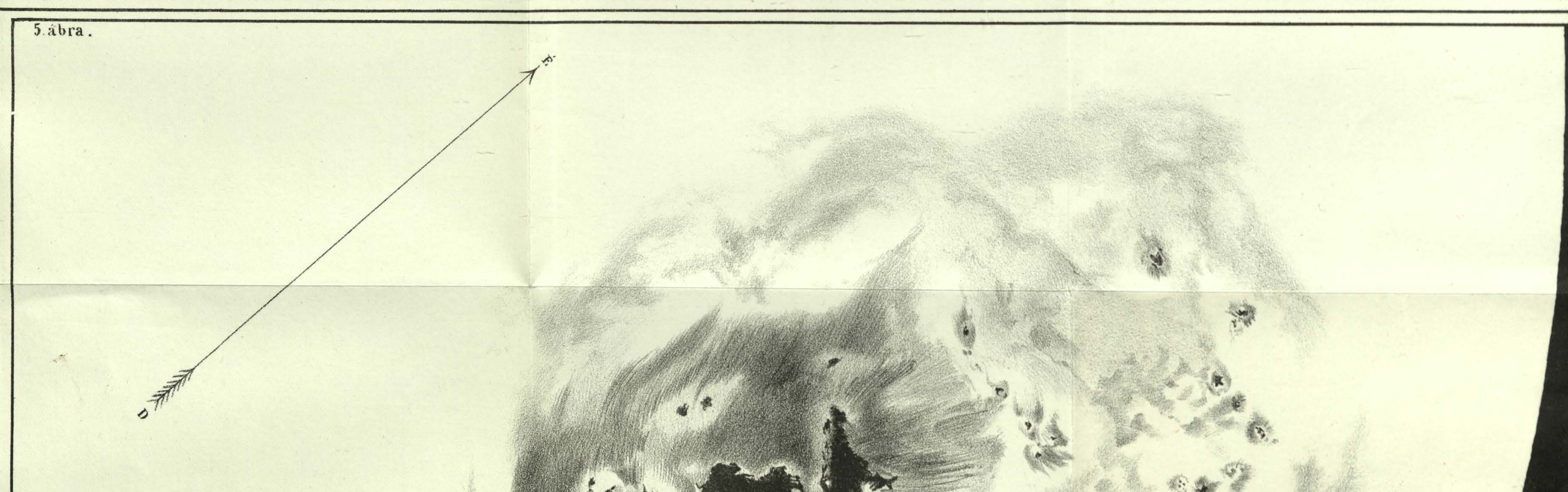
1874 Juli: 28.

6. ábra.

1874 Aug: 1.

7. ábra.

1875 Május 5.



5. ábra.

1875 April: 27. 4h 0m.

Ny. Pataki J. udv. műint. Budapest

A
KÚPSZELETEN FEKVŐ HAT PONT
FELTÉTELI EGYENLETÉNEK
KÜLÖNBÖZŐ ALAKJAIRÓL.

HUNYADY JENŐTŐL.

(Előadatott a M. T. Akadémia III. osztályi űlésén 1875. nov. 8.)

BUDAPEST, 1876.
A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ HIVATALÁBAN.
(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum könyvnyomdájában.

A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól.

HUNYADY JENŐTŐL.

(Előadatott a III-ik osztály ülésén 1875. november 8-án)

> Mais en géométrie, comme en algébre, la plupart des idées différentes ne sont que des trasnformations ; etc.
>
> (Poinsot : Sur la composition des momens et la composition des aires. Journ. de l'éc. polyt. Cah. XIII. p. 189.)

I.

1. Azon összefüggés, mely a kúpszeletnek hat pontja között létezik, a geometriának következő tételeiben nyert kifejezést.

A régiektől származó »ad quatuor lineas« czimü problémában, mely Descartes óta a Pappus-féle problémának neveztetik, továbbá a Desargues-féle, Newton-Chasles-féle, Pascal-Mac-Laurin-Braikenridge-féle és Carnot-féle tételekben.

Megjegyzendő, hogy a Chasles-féle tétel Newton [1]) tételét magában foglalja, valamint hogy a Mac-Laurin-Braikenridge-féle tételek tulajdonképen azonosak a Pascal-féle tétellel [2]) és csak a kimondásban különböznek egymástól.

---

[1]) Philosophiae naturalis Principia mathematica. Editio Leseur et Jacquier. T. I. p. 208.) (Lásd szintén Newton Enumeratio linearum tertii ordinis czímű munkájának a végét, melyben a görbék leirásával foglalkozik.)

[2]) Chasles : Aperçu historique 2. édition, XV. Note p. 336., (6).

a) A Pappus-féle ad quatuor lineas problémában a következő tétel van kimondva [3]:

»Ha a kúpszeletbe négyszögöt irunk be és a kúpszelet tetszés szerinti ötödik pontjából merőlegeseket bocsátunk a négyszög négy oldalára, ugy az átellenes oldalpárakra bocsátott merőlegesek szorzatainak viszonya állandó.«

Ugyanez fog állani, ha még a kúpszeletben valamely hatodik pontot veszünk fel; és igy a viszonyok állandósága miatt az ötödik és hatodik ponthoz tartozó viszonyok egymás között egyenlők.

Ha e viszonyokat tehát egymással egyenlítjük, úgy ezen egyenlet azon viszonylatot fejezi ki, melynél fogva a négyszögnek négy szögpontja és az ötödik és hatodik pont ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

b) A Desargues-féle [4]) tétel a következő:

»Ha a kúpszeletbe négyszögöt irunk be, úgy valamely tetszőleges szelő a négyszög négy oldalát és a kúpszeletet hat pontban metszi, a mely involutioban van.«

c) A Chasles-féle [5]) tétel a következő:

»Ha a kúpszeleten két pontot, a kúpszelet négy pontjával egyenesek által kötünk össze, úgy az első és második pontban találkozó négy sugár anharmonikus viszonyai egymás között egyenlők.«

d) A Pascal-féle [6]) »hexagrammum mysticum« tétele a következő:

»A kúpszeletbe beirt hatszögben az átellenes oldalak

---

[3]) Chasles: Aperçu historique 2 édition, Chapitre I. §. 32., p. 37—39.

[4]) Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra T. I. p. 186., továbbá p. 267.

[5]) Lásd Chasles: Rapport sur les progrés de la géométrie p. 268., melyben a szerző felemlíti, hogy e tétel általa már 1829-ben a Quetelet-féle Correspondance mathématique et physique czímü folyóiratban kimondatott.

[6]) Chasles: Aperçu hist. 2. ed., Chapitre II. p. 71., §. 17., a hol felemlíttetik, hogy Pascal-nak tétele a hexagrammum mysticumról kezdetét képezi Pascal következő czímű értekezésének: »Essai pour les coniques«, a mely szintén a Bossut által 1779-ben rendezett kiadásában a Pascal-féle munkáknak megjelent.

egymást három pontban metszik, melyek ugyanazon egyenesben fekszenek.«

e) Ha a minden algebrai görbére és minden tetszőleges sokszögre érvényes Carnot-féle [7]) tantételt a kúpszeletre és a háromszögre alkalmazzuk, úgy azt ez esetben a következőképen mondhatjuk ki:

»Ha a kúpszelet sikjában valamely háromszög adva van, úgy ez utóbbi kerületének tetszés szerinti pontjából kétféle egymással ellenkező irányban haladhatunk; ha mind a két esetben azon metszékek szorzatát képezzük, melyek a háromszög oldalain egyrészt a háromszög csúcsai által, másrészt pedig az oldalak és a kúpszelet átmetszési pontjai által meghatároztatnak, úgy e két szorozmány egymással egyenlő.«

2. Hogy az előbbi tételek algebrai tulajdonságaival foglalkozhassunk, úgy kell, hogy mindenekelőtt az előbbi tételeket algebrailag egyenletek által kifejezzük, a mit elérünk, hogy ha a kérdésben forgó hat pontnak az összrendezőit ismerjük.

Jelöljük tehát a hat pontot 1, 2, 3, 4, 5 és 6-tal és igy az i pontnak homogén viszony-összrendezőit x_i, y_i, z_i-vel ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), úgy ha az i pontot a k ponttal összekötjük, az ik egyenes egyenlete a következő lesz:

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

ha x, y, z a tetszés szerénti pont homogén összrendezőit jelentik.

Ha továbbá a következő jelölést használjuk:

$$\left.\begin{aligned} y_i z_k - y_k z_i &= \xi_{ik} \\ z_i x_k - z_k x_i &= \eta_{ik} \\ x_i y_k - x_k y_i &= \zeta_{ik} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (A)$$

úgy az ik egyenes homogén összrendezői:

$$\xi_{ik}\ \eta_{ik}\ \zeta_{ik}.$$

---

[7]) Géometrie de position, Paris 1808., p. 437. Théor. XXXVIII.

Végre még a következő jelölést használjuk:

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} = (i\, k\, l) \ldots\ldots (\mathrm{B})$$

3. Az *a*) alatti tételből kiindúlva, kössük össze az 1, 2, 3 és 4 pontokat rendre egymással, úgy az 1 2, 2 3, 3 4, 4 1 egyenesek lesznek a kúpszeletbe beírt négyszög oldalai, ezeknek az egyenletei pedig a következők:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Ha most az 5 és 6 pontokból merőlegeseket bocsátunk a négyszög oldalaira és azokat az a) alatti tételben leírt módon egymáshoz viszonyitjuk, úgy a B) alatti jelölést szemben tartva, a következő egyenletet nyerjük:

$$\frac{(125)\ (345)}{(235)\ (145)} = \frac{(126)\ (346)}{(236)\ (146)},$$

mely kifejezi, hogy az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

Ugyanezen egyenletre jövünk, ha az 1 2 3 4 négyszög oldalait az 5 6 egyenessel metszük és a b) alatti Desarguesféle tétel szerint kifejezzük, hogy az 5, 6, valamint azon pontok, a melyekben az 5 6 átszelő a négyszög négy oldala általa metszetik, involutioban vannak; vagy ha az 5 és 6 pontokat az 1, 2, 3, 4 pontokkal összekötjük és Chasles szerint kifejezzük, hogy az 5 és 6 pontokban találkozó négy sugárnak az anharmonikus viszonyai egymással egyenlők.

4. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokból 15-ször lehet négyet kiválasztani, négy pont által pedig három egyszerü négyszög lévén meghatározva, világos, hogy a hatpont által 45 egyszerű négyszög van meghatározva.

Ha mind a 45 négyszögre az a) alatti tételt alkalmazzuk, úgy 45 egyenlet által lesz kifejezve azon feltétel, melynél fogva hat pont ugyanazon kúpszeleten fekszik; ámde a 45 egyenlet közül, melyekre a 45 négyszög vezet, csak 15 egymástól alakban különböző van, mivel a 45 négyszög közül három mindég ugyanazon egyenletre vezet, így p. a következő négyszögök:

1234, 1536, 2546

az előbbi számban nyert feltételi egyenletre vezetnek.

A következő táblázatban mind a negyvenöt egyszerű négyszög hármankénti csoportokban van összeállitva, a mint azok ugyanazon egyenletre vezetnek.

1351		1235		1246	
1245	I.	1436	II.	1345	III.
3264		2456		2365	
1236		2345		1456	
1435	IV.	2645	V.	1253	VI.
2465		3651		4263	
3456		1256		1234	
3152	VII.	1354	VIII.	1536	IX.
4162		364		2546	
2435		1245		1562	
2631	X.	1346	XI.	1364	XII.
4651		2356		5324	
1546		1324		1326	
1243	XIII.	1526	XIV.	1425	XV.
5263		3546		3465	

Az ezen négyszögcsoportokhoz tartozó egyenletek pedig a következők, megjegyzendő, hogy minden csoporthoz tartozó egyenlet ugyanazon arabs számmal van számozva, mint a minő római számmal a megfelelő csoport.

$$
\begin{aligned}
&(126)(134)(235)(456)-(123)(146)(256)(345)=0 \ldots (1.\\
&(126)(145)(234)(356)-(124)(156)(236)(345)=0 \ldots (2.\\
&(125)(136)(234)(456)-(123)(156)(245)(346)=0 \ldots (3.\\
&(125)(146)(234)(356)-(124)(156)(235)(346)=0 \ldots (4.\\
&(125)(134)(236)(456)-(123)(145)(256)(346)=0 \ldots (5.\\
&(126)(134)(245)(356)-(124)(136)(256)(345)=0 \ldots (6.\\
&(136)(145)(234)(256)-(134)(156)(236)(245)=0 \ldots (7.\\
&(124)(136)(235)(456)-(123)(146)(245)(356)=0 \ldots (8.\\
&(126)(145)(235)(346)-(125)(146)(236)(345)=0 \ldots (9.\\
&(125)(134)(246)(356)-(124)(135)(256)(346)=0 \ldots (10.\\
&(126)(135)(234)(456)-(123)(156)(246)(345)=0 \ldots (11.\\
&(124)(135)(236)(456)-(123)(145)(246)(356)=0 \ldots (12.\\
&(126)(135)(245)(346)-(125)(136)(246)(345)=0 \ldots (13.\\
&(136)(145)(235)(246)-(135)(146)(236)(245)=0 \ldots (14.\\
&(135)(146)(234)(256)-(134)(156)(235)(246)=0 \ldots (15.
\end{aligned}
$$

5. Ha továbbá a *d)* alatti Pascal-féle tétel szerént fejezzük ki azon összefüggést, mely a kúpszelet hat pontja között létezik, úgy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokat rendre egyenesek által egymással összekötvén, az 123456 kúpszeletbe beírt hatszöget nyerjük, a melynek oldalai

12	és	45
34	»	61
56	»	23

és ezeknek homogén összrendezői a 2. szám A) alatti jelöléseknél fogva a következők:

$$
\left.\begin{array}{l}
\xi_{12},\ \eta_{12},\ \zeta_{12},\\
\xi_{34},\ \eta_{34},\ \zeta_{34},\\
\xi_{56},\ \eta_{56},\ \zeta_{56},
\end{array}\right\}
\quad \text{és} \quad
\left.\begin{array}{l}
\xi_{45},\ \eta_{45},\ \zeta_{45},\\
\xi_{61},\ \eta_{61},\ \zeta_{61},\\
\xi_{23},\ \eta_{23},\ \zeta_{23},
\end{array}\right\}
$$

és így azon feltétel, hogy az 123456 hatszög szembenfekvő oldalai egymást három pontban metszik, melyek ugyanazon egyenesben fekszenek, a következő egyenlet által van kifejezve:

$$
\begin{vmatrix}
\eta_{12}\zeta_{45}-\eta_{45}\zeta_{12}, & \zeta_{12}\xi_{45}-\zeta_{45}\xi_{12}, & \xi_{12}\eta_{45}-\xi_{45}\eta_{12}\\
\eta_{34}\zeta_{61}-\eta_{61}\zeta_{34}, & \zeta_{34}\xi_{61}-\zeta_{61}\xi_{34}, & \xi_{34}\eta_{61}-\xi_{61}\eta_{34}\\
\eta_{56}\zeta_{23}-\eta_{23}\zeta_{56}, & \zeta_{56}\xi_{23}-\zeta_{23}\xi_{56}, & \xi_{56}\eta_{23}-\xi_{28}\eta_{56}
\end{vmatrix}=0,
$$

a mely az előrebocsátottak szerént egyszersmind azon feltételt fejezi ki, hogy az 123456 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

6. Ismeretes, hogy hat pont által hatvan egyszerű hatszög van meghatározva és mindegyik hatszögnek szögpontjai az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok lesznek.

Kössük össze tehát a már nevezett pontokat egy bizonyos rendben, feltévén, hogy ily módon az *iklmnp* hatszögöt nyerjük, a hol megjegyzendő, hogy *iklmnp* az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok felcseréléseinek bizonyos complexióját jelenti.

Legyenek továbbá az i, k, l, m, n, p pontok homogén összrendezői a következők:

$$\begin{array}{lll} x_i, & y_i, & z_i \\ x_k, & y_k, & z_k \\ x_l, & y_l, & z_l \\ x_m, & y_m, & z_m \\ x_n, & y_n, & z_n \\ x_p, & y_p, & z_p \end{array}$$

úgy az

$$\begin{array}{ccc} ik & \text{és} & mn \\ lm & & pi \\ np & & kl \end{array}$$

oldalak homogén összrendezői az A) alatti jelölésnél fogva a következők lesznek:

$$\begin{array}{lcl} \xi_{ik},\ \eta_{ik},\ \zeta_{ik} & \text{és} & \xi_{mn},\ \eta_{mn},\ \zeta_{mn}, \\ \xi_{lm},\ \eta_{lm},\ \zeta_{lm} & » & \xi_{pi},\ \eta_{pi},\ \zeta_{pi}, \\ \xi_{np},\ \eta_{np},\ \zeta_{np} & » & \xi_{kl},\ \eta_{kl},\ \zeta_{kl}. \end{array}$$

Azon feltételi egyenlet pedig, a mely kifejezi, hogy az *iklmnp* hatszög szembenfekvő oldalai egymást három pontban metszik, a melyek ugyanazon egyenesben fekszenek, jelenleg a következő lesz:

$$\begin{vmatrix} \eta_{ik}\zeta_{mn} - \eta_{mn}\zeta_{ik}, & \zeta_{ik}\xi_{mn} - \zeta_{mn}\xi_{ik}, & \xi_{ik}\eta_{mn} - \xi_{mn}\eta_{ik} \\ \eta_{lm}\zeta_{pi} - \eta_{pi}\zeta_{lm}, & \zeta_{lm}\xi_{pi} - \zeta_{pi}\xi_{lm}, & \xi_{lm}\eta_{pi} - \xi_{pi}\eta_{lm} \\ \eta_{np}\zeta_{kl} - \eta_{kl}\zeta_{np}, & \zeta_{np}\xi_{kl} - \zeta_{kl}\xi_{np}, & \xi_{np}\eta_{kl} - \xi_{kl}\eta_{np} \end{vmatrix} = 0 \ldots (16$$

ezen egyenlet által pedig szintén ki van fejezve, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

A mint ezen egyenletben az i, k, l, m, n, p számoknak mindazon értékeket adjuk, a melyek a lehetséges hatvan egyszerű hatszöghöz tartoznak, úgy ez egyenletből hatvan alakilag egymástól egészen különböző egyenletre jövünk, a melyek a különböző hatszögökből erednek.

7. Ha az 1 és 2, 3 és 4, valamint 5 és 6 pontokat egyenesek által kötjük össze, továbbá a 34 és 56, 56 és 12, 12 és 34 oldalak átmetszési pontjait A, B, C-vel jelöljük, úgy az *e)* alatti Carnot-féle tantétel a következő egyenletben:

$$\frac{A5}{A3} \cdot \frac{A6}{A4} \cdot \frac{B1}{B5} \cdot \frac{B2}{B6} \cdot \frac{C3}{C1} \cdot \frac{C4}{C2} = 1.$$

nyer algebrai kifejezést.

Az ezen egyenletben előforduló viszonyokat az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok összrendezői által fejezhetjük ki.

Bocsássunk e czélból az 1 és 2 pontokból a 34 és 56 oldalakra, a 3 és 4 pontokból az 56 és 12 oldalakra, végre pedig az 5 és 6 pontokból az 12 és 34 oldalakra merőlegeseket, úgy az előbbi egyenletben előforduló viszonyokat ezen merőlegesek viszonyai által fejezhetjük ki, ezen merőlegeseket pedig ismét kifejezhetjük a kérdéses pontok összrendezői által, mi által a (B) alatti jelölést szemben tartva, az előbbi egyenlet a következőbe megy át:

$$\frac{(345)(346)(156)(256)(123)(124)}{(356)(456)(125)(126)(134)(234)} = 1.$$

vagy azt még rendezve:

$$(125)(126)(134)(234)(356)(456) - (123)(124)(156)(256)(345)(346) = 0 \; \ldots . (17.)$$

Megfontolván továbbá, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok által nem csak egy oly háromszög van meghatározva, melynek oldalai mind a hat ponton keresztül mennek, hanem kétszer annyi háromszög, mint a mennyi hatszög, úgy belátható, hogy a (17) alatti egyenletből a számok bizonyos felcserélései által még más 119 egymástól alakilag különböző egyenlet következik. A 17) alatti egyenlet tehát tulajdonképen 120 egyenletnek a képviselője.

II.

8. Az előbbiekben láttuk, hogy azon összefüggés, mely a kúpszelet hat pontja között létezik, a Pappus, Desargues és Chasles, valamint a Pascal és Carnot-féle tantételekben nyerte geometriai kifejezését.

Ha ugyanezen tantételeket algebrailag egyenletek által fejezzük ki, úgy az első három ugyanazon 15 egyenletre [(1—(15 alatti egyenletek], a Pascal-féle tétel 60 egyenletre [(16 alatti egyenlet], végre pedig a Carnot-féle tétel 120 egyenletre [(17 alatti egyenlet] vezetett. Így tehát összesen 195 egyenletet nyerünk, melyek egymástól alakilag különböznek.

Az említett 195 egyenletre, melyek mindnyájan ugyanazon geometriai feltételt fejezik ki, a geometria vezetett, ha tehát az algebra hátramaradni nem akar, úgy kell, hogy tisztán algebrailag mutassuk ki azon összefüggéseket, a melyek a 195 egyenletek között léteznek.

Az említett algebrai összefüggések kipuhatolása képezi ez értekezés főfeladatát.

9. A kérdésben forgó összefüggések felkeresésére a 16) alatti egyenletnek bal oldalát Δ_{iklmnp}-vel jelöljük és ugyanezen függvény azon különös esetéből indulunk ki, a melyben az *iklmnp* számsor az 123456 complexio által pótoltatik. Ennélfogva tehát a következő egyenlet:

$$
\varDelta_{123456} = \begin{vmatrix} \eta_{12}\zeta_{45} - \eta_{45}\zeta_{12}, & \zeta_{12}\xi_{45} - \zeta_{45}\xi_{12}, & \xi_{12}\eta_{45} - \xi_{45}\eta_{12} \\ \eta_{34}\zeta_{61} - \eta_{61}\zeta_{34}, & \zeta_{34}\xi_{61} - \zeta_{61}\xi_{34}, & \xi_{34}\eta_{61} - \xi_{61}\eta_{34} \\ \eta_{56}\zeta_{23} - \eta_{23}\zeta_{56}, & \zeta_{56}\xi_{23} - \zeta_{23}\xi_{56}, & \xi_{56}\eta_{23} - \xi_{23}\eta_{56} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (18.
$$

képezi kiindulási pontunkat.

10. A $\varDelta_{123456}$ determinánsnak az előbbi alakjától lényegesen különböző alakokat adhatunk; ezen új alakokat nyerjük, ha a nevezett determinánst bizonyos tényezőkkel szorozzuk.

Szorozzuk a $\varDelta_{123456}$ determinánst rendre a következő kilencz determinánssal:

$$
\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix},
$$

$$
\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix},
$$

úgy a szorzások eredményei a következők lesznek:

$$
\varDelta_{123456} \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (19
$$

$$\Delta_{123456}\begin{vmatrix}\xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12}\\ \xi_{31} & \eta_{34} & \zeta_{34}\\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ b'_1 & b'_2 & b'_3\end{vmatrix} \ldots\ldots (20.$$

$$\Delta_{123456}\begin{vmatrix}\xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12}\\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23}\\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ c'_1 & c'_2 & c'_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \ldots\ldots (21.$$

$$\Delta_{123456}\begin{vmatrix}\xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45}\\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34}\\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a'_1 & a'_2 & a'_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \ldots\ldots (22.$$

$$\Delta_{123456}\begin{vmatrix}\xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12}\\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61}\\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b'_1 & b'_2 & b'_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \ldots\ldots (23.$$

$$\Delta_{123456}\begin{vmatrix}\xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12}\\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34}\\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c'_1 & c'_2 & c'_8\end{vmatrix} \ldots\ldots (24.$$

$$\Delta_{123456}\begin{vmatrix}\xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12}\\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61}\\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b'_1 & b'_2 & b'_3\\ c'_1 & c'_2 & c'_3\end{vmatrix} \ldots\ldots (25.$$

$$\Delta_{123456}\begin{vmatrix}\xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45}\\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34}\\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a'_1 & a'_2 & a'_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c'_1 & c'_2 & c'_3\end{vmatrix} \ldots\ldots (26.$$

$$\Delta_{123456}\begin{vmatrix}\xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45}\\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61}\\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a'_1 & a'_2 & a'_3\\ b'_1 & b'_2 & b'_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \ldots\ldots (27.$$

a mely kifejezésekben az $a_1\ a_2\ a_3$-sal mennyiségek értékei a következő táblázatban vannak összeállítva:

$$a_1 = \xi_{12} (\eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}) + \eta_{12} (\zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}) + \zeta_{12} (\xi_{12} \eta_{45} - \zeta_{45} \eta_{12}) = 0.$$

$$a_2 = \xi_{12} (\eta_{34} \zeta_{61} - \eta_{61} \zeta_{34}) + \eta_{12} (\zeta_{34} \xi_{61} - \zeta_{61} \xi_{34}) + \zeta_{12} (\xi_{34} \eta_{61} - \xi_{61} \eta_{34}) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \xi_{12} (\eta_{56} \zeta_{23} - \eta_{23} \zeta_{56}) + \eta_{12} (\zeta_{56} \xi_{23} - \zeta_{23} \xi_{56}) + \zeta_{12} (\xi_{56} \eta_{23} - \xi_{23} \eta_{56}) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

$$b_1 = \xi_{34} (\eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}) + \eta_{34} (\zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}) + \zeta_{34} (\xi_{12} \eta_{45} - \xi_{45} \eta_{12}) = \begin{vmatrix} \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix}$$

$$b_2 = \xi_{34} (\eta_{34} \zeta_{61} - \eta_{61} \zeta_{34}) + \eta_{34} (\zeta_{34} \xi_{61} - \zeta_{61} \xi_{34}) + \zeta_{34} (\xi_{34} \eta_{61} - \xi_{61} \eta_{34}) = 0.$$

$$b_3 = \xi_{34} (\eta_{56} \zeta_{23} - \eta_{23} \zeta_{56}) + \eta_{34} (\zeta_{56} \xi_{23} - \zeta_{23} \xi_{56}) + \zeta_{34} (\xi_{56} \eta_{23} - \xi_{23} \eta_{56}) = \begin{vmatrix} \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \xi_{56} (\eta_{12} \zeta_{45} - \eta_{45} \zeta_{12}) + \eta_{56} (\zeta_{12} \xi_{45} - \zeta_{45} \xi_{12}) + \zeta_{56} (\xi_{12} \eta_{45} - \xi_{45} \eta_{12} = \begin{vmatrix} \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix}$$

$$c_2 = \xi_{56}\,(\eta_{34}\,\zeta_{61} - \eta_{61}\,\zeta_{34}) + \eta_{56}\,(\zeta_{34}\,\xi_{61} - \zeta_{61}\,\xi_{34}) + \zeta_{56}\,(\xi_{34}\,\eta_{61} - \xi_{61}\,\eta_{34}) = \begin{vmatrix} \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \xi_{56}\,(\eta_{56}\,\zeta_{23} - \eta_{23}\,\zeta_{56}) + \eta_{56}\,(\zeta_{56}\,\xi_{23} - \zeta_{23}\,\xi_{56}) + \zeta_{56}\,(\xi_{56}\,\eta_{23} - \xi_{23}\,\eta_{56}) = 0.$$

$$a'_1 = \xi_{45}\,(\eta_{12}\,\zeta_{45} - \eta_{45}\,\zeta_{12}) + \eta_{45}\,(\zeta_{12}\,\xi_{45} - \zeta_{45}\,\xi_{12}) + \zeta_{45}\,(\xi_{12}\,\eta_{45} - \xi_{45}\,\eta_{12}) = 0$$

$$a'_2 = \xi_{45}\,(\eta_{34}\,\zeta_{61} - \eta_{61}\,\zeta_{34}) + \eta_{45}\,(\zeta_{34}\,\xi_{61} - \zeta_{61}\,\xi_{34}) + \zeta_{45}\,(\xi_{34}\,\eta_{61} - \xi_{61}\,\eta_{34}) = \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$a'_3 = \xi_{45}\,(\eta_{56}\,\zeta_{23} - \eta_{23}\,\zeta_{56}) + \eta_{45}\,(\zeta_{56}\,\xi_{23} - \zeta_{23}\,\xi_{56}) + \zeta_{45}\,(\xi_{56}\,\eta_{23} - \xi_{23}\,\eta_{56}) = \begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

$$b'_1 = \xi_{61}\,(\eta_{12}\,\zeta_{45} - \eta_{45}\,\zeta_{12}) + \eta_{61}\,(\zeta_{12}\,\xi_{45} - \zeta_{45}\,\xi_{12}) + \zeta_{61}\,(\xi_{12}\,\eta_{45} - \xi_{45}\,\eta_{12} = \begin{vmatrix} \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \end{vmatrix}$$

$$b'_2 = \xi_{61}\,(\eta_{34}\,\zeta_{61} - \eta_{61}\,\zeta_{34}) + \eta_{61}\,(\zeta_{34}\,\xi_{61} - \zeta_{61}\,\xi_{34}) + \zeta_{61}\,(\xi_{34}\,\eta_{61} - \xi_{61}\,\eta_{34}) = 0$$

$$b'_3 = \xi_{61}\,(\eta_{56}\,\zeta_{23} - \eta_{23}\,\zeta_{56}) + \eta_{61}\,(\zeta_{56}\,\xi_{23} - \zeta_{23}\,\xi_{56}) + \zeta_{61}\,(\xi_{56}\,\eta_{23} - \xi_{23}\,\eta_{56}) = \begin{vmatrix} \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

$$c'_1 = \xi_{23}(\eta_{12}\zeta_{45} - \eta_{45}\zeta_{12}) + \eta_{23}(\zeta_{12}\xi_{45} - \zeta_{45}\xi_{12}) + \zeta_{23}(\xi_{12}\eta_{45} - \xi_{45}\eta_{12}) = \begin{vmatrix} \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{45} & \eta_{43} & \zeta_{49} \end{vmatrix}$$

$$c'_2 = \xi_{23}(\eta_{34}\zeta_{61} - \eta_{61}\zeta_{34}) + \eta_{23}(\zeta_{34}\xi_{61} - \zeta_{61}\xi_{34}) + \zeta_{23}(\xi_{34}\eta_{61} - \xi_{61}\eta_{34}) = \begin{vmatrix} \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}$$

$$c'_3 = \xi_{23}(\eta_{56}\zeta_{23} - \eta_{23}\zeta_{56}) + \eta_{23}(\zeta_{56}\xi_{23} - \zeta_{23}\xi_{56}) + \zeta_{23}(\xi_{56}\eta_{23} - \xi_{23}\eta_{56}) = 0.$$

11. A (19)—(27) alatti egyenletekben előforduló a, b, c, a', b', c' mennyiségek, melyek maguk is determinánsok, szintén még redukálhatók.

Ha nevezetesen az a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2, a'_2, a'_3, b'_1, b'_3, c'_1 és c'_2 mennyiségeket rendre a következő determinánsokkal szorozzuk:

(126), (123), (345), (234), (456), (156), (345), (456), (126), (156), (123), (234)

mi által az említett mennyiségeknek értékeit a következő alakban nyerjük:

$$\begin{array}{lll}
a_1 = 0, & a_2 = (126)(134), & a_3 = -(123)(256), \\
b_1 = -(124)(345) & b_2 = 0, & b_3 = (234)(356), \\
c_1 = (125)(456), & c_2 = -(156)(346), & c_3 = 0, \\
a'_1 = 0, & a'_2 = -(146)(345), & a'_3 = (235)(456), \\
b'_1 = (126)(145), & b'_2 = 0, & b'_3 = -(156)(236), \\
c'_1 = -(123)(245), & c'_2 = (136)(234), & c'_3 = 0.
\end{array}$$

Ha végre az a, b, c, a', b', c' mennyiségeknek ezen értékeit a (19)—(27) alatti egyenletekben helyettesítjük és azok első tagjaiban előforduló (C) alatti determinánsokat rendre a következő determinánsokkal szorozzuk:

$$(345), (126), (123), (345), (126), (123), (123), (345), (456),$$

úgy az egyenlő tényezők elhagyása után a (19)—(27) alatti egyenletek a következőkbe mennek át:

$$\varDelta_{123456} = (126)(134)(235)(456) - (123)(146)(256)(345) \; \ldots\ldots \; (28.$$
$$\varDelta_{123456} = (126)(145)(234)(356) - (124)(156)(236)(345) \; \ldots\ldots \; (29.$$
$$\varDelta_{123456} = (125)(136)(234)(456) - (123)(156)(245)(346) \; \ldots\ldots \; (30.$$
$$\varDelta_{123456} = (125)(146)(234)(356) - (124)(156)(235)(346) \; \ldots\ldots \; (31.$$
$$\varDelta_{123456} = (125)(134)(236)(456) - (123)(145)(256)(346) \; \ldots\ldots \; (32.$$
$$\varDelta_{123456} = (126)(134)(245)(356) - (124)(136)(256)(345) \; \ldots\ldots \; (33.$$
$$\varDelta_{123456} = (136)(145)(234)(256) - (134)(156)(236)(245) \; \ldots\ldots \; (34.$$
$$\varDelta_{123456} = (124)(136)(235)(456) - (123)(146)(245)(356) \; \ldots\ldots \; (35.$$
$$\varDelta_{123456} = (126)(145)(235)(346) - (125)(146)(236)(345) \; \ldots\ldots \; (36.$$

12. Ha továbbá a (16) alatti egyenletben *iklmnp* helyébe 124365 és 146325 helyettesítünk, úgy a következő egyenleteket nyerjük:

$$\varDelta_{124365} = \begin{vmatrix} \eta_{12}\,\zeta_{36} - \eta_{36}\,\zeta_{12}, & \zeta_{12}\,\xi_{36} - \zeta_{36}\,\xi_{12}, & \xi_{12}\,\eta_{36} - \xi_{36}\,\eta_{12} \\ \eta_{43}\,\zeta_{51} - \eta_{51}\,\zeta_{43}, & \zeta_{43}\,\xi_{51} - \zeta_{51}\,\xi_{43}, & \xi_{43}\,\eta_{51} - \xi_{51}\,\eta_{43} \\ \eta_{63}\,\zeta_{25} - \eta_{24}\,\zeta_{65}, & \zeta_{65}\,\xi_{24} - \zeta_{24}\,\xi_{65}, & \xi_{65}\,\eta_{24} - \xi_{24}\,\eta_{65} \end{vmatrix} = 0 \; \ldots\ldots \; (37.$$

és

$$\Delta_{146325} = \begin{vmatrix} \eta_{14}\,\zeta_{32} - \eta_{32}\,\zeta_{14}, & \zeta_{14}\,\xi_{32} - \zeta_{32}\,\xi_{14}, & \xi_{14}\,\eta_{32} - \xi_{32}\,\eta_{14} \\ \eta_{63}\,\zeta_{51} - \eta_{51}\,\zeta_{63}, & \zeta_{63}\,\xi_{51} - \zeta_{51}\,\xi_{63}, & \xi_{63}\,\eta_{51} - \xi_{51}\,\eta_{63} \\ \eta_{25}\,\zeta_{46} - \eta_{46}\,\zeta_{25}, & \zeta_{25}\,\xi_{46} - \zeta_{46}\,\xi_{25}, & \xi_{25}\,\eta_{46} - \xi_{46}\,\eta_{25} \end{vmatrix} = 0 \;\ldots\ldots\; (38.$$

Ha pedig az ezen egyenletekben előforduló determinánsok közől az elsőt

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{51} & \eta_{51} & \zeta_{51} \end{vmatrix} \text{ determinánssal, a másodikat pedig } \begin{vmatrix} \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{51} & \eta_{51} & \zeta_{51} \\ \xi_{46} & \eta_{46} & \zeta_{46} \end{vmatrix}$$

determinánssal megszorozzuk és e szorzatban az elemeket, melyek ismét determinánsok, szorzókra felbontjuk, úgy az egyenlő tényezők elhagyása után találjuk, hogy:

$$\Delta_{124365} = (125)(136)(234)(456) - (123)(156)(245)(346),$$
$$\Delta_{146325} = (125)(136)(234)(456) - (123)(156)(245)(346),$$

és így a (30) alatti egyenletnél fogva:

$$\Delta_{124365} = \Delta_{123456} \;\ldots\ldots\; (39.$$
$$\Delta_{146325} = \Delta_{123456} \;\ldots\ldots\; (40.$$

13. Szorozzuk a (37) alatti egyenletben előforduló determinánst rendre a következőkkel:

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{43} & \eta_{43} & \zeta_{43} \\ \xi_{24} & \eta_{24} & \zeta_{24} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{36} & \eta_{36} & \zeta_{36} \\ \xi_{51} & \eta_{51} & \zeta_{51} \\ \xi_{65} & \eta_{65} & \zeta_{65} \end{vmatrix},$$

úgy az előbbiekhez hasonló átalakítások segítségével találjuk, hogy:

$$\Delta_{124365} = (125)(134)(246)(356) - (124)(135)(256)(346) \ldots\ldots (41.$$

$$\Delta_{124365} = (126)(135)(234)(456) - (123)(156)(246)(345) \ldots\ldots (42.$$

$$\Delta_{124365} = (124)(135)(236)(456) - (123)(145)(246)(356) \ldots\ldots (43.$$

$$\Delta_{124365} = (126)(135)(245)(346) - (125)(136)(246)(345) \ldots\ldots (44.$$

Ha pedig a (38) alatti egyenletben előforduló determinánst rendre a következőkkel szorozzuk meg:

$$\begin{vmatrix} \xi_{14} & \eta_{14} & \zeta_{14} \\ \xi_{63} & \eta_{63} & \zeta_{63} \\ \xi_{32} & \eta_{32} & \zeta_{32} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \xi_{32} & \eta_{32} & \zeta_{32} \\ \xi_{53} & \eta_{63} & \zeta_{63} \\ \xi_{46} & \eta_{46} & \xi_{46} \end{vmatrix},$$

úgy találjuk, hogy

$$\Delta_{146325} = (136)(145)(235)(246) - (135)(146)(236)(245) \ldots\ldots (45.$$

$$\Delta_{146325} = (135)(146)(234)(256) - (134)(156)(235)(246) \ldots\ldots (46.$$

Ha végre a (41)—(46) alatti egyenletekben még a (39) és (40) alattiakat is tekintetbe veszszük, úgy a következő egyenleteket nyerjük:

$$\Delta_{123456} = (125)(134)(246)(356) - (124)(135)(256)(346) \ldots\ldots (47.$$

$$\Delta_{123456} = (126)(135)(234)(456) - (123)(156)(246)(345) \ldots\ldots (48.$$

$$\Delta_{123456} = (124)(135)(236)(456) - (123)(145)(246)(356) \ldots\ldots (49.$$

$$\Delta_{123456} = (126)(135)(245)(346) - (125)(136)(246)(345) \ldots\ldots (50.$$

$$\Delta_{123456} = (136)(145)(235)(246) - (135)(146)(236)(245) \ldots\ldots (51.$$

$$\Delta_{123456} = (135)(146)(234)(256) - (134)(156)(235)(246) \ldots\ldots (52.$$

14. (28)—(36), valamint a (47)—(52) egyenletekből kivehetni, hogy a (15) alatti egyenletből eredő

$$\Delta_{123456} = 0$$

egyenletet az előbbi számokban tárgyalt transformátiók segítségével olyképen lehet átalakítani, hogy abból az (1)—(15) alatti egyenletek eredek.

Azon különféle alakok, melyekre a Δ_{123456} függvény a (28)—(36) és (47)—(52) alatti egyenleteknél fogva hozható, bennünket még továbbá a Δ_{iklmnp} függvények egymás közötti összefüggésnek kipuhatolására is képesít.

Ha t. i. észrevesszük, hogy valahányszor Δ_{123456} két számot felcserélünk, úgy a már többször idézett egyenleteknél fogva az ez utolsó felcseréléshez tartozó Δ értéke jegyét változtatja.

Mivel pedig a különböző hatszögökhöz tartozó Δ-kat, Δ_{123456}-ból két-két mutató felcserélése által nyerjük, úgy az előbbiekből következik, hogy

$$\Delta_{iklmnp}$$

Δ_{123456}-tal vagy ugyanazon előjelű, vagy pedig az előjelben különböznek, a miként az

$$i\,k\,l\,m\,n\,p$$

complexio, vagy az első, vagy pedig a második osztályzatba tartozik.

Így a különböző hatszögökhöz tartozó Δ függvények, vagy egyenlők egymás között, vagy pedig absolut egyenlők, de előjelben különbözők.

15. Hátra van még azon összefüggés kipuhatolása, a mely a (17) alatti Carnot-féle egyenlet és a többi egyenletek között létezik.

Induljunk ki e czélból ismét a (18) alatti egyenletből és szorozzuk azt a következő determinánssal:

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix}$$

ugy az előbbi jelöléseknél fogva lesz:

$$\Delta_{123456} \begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

vagy ha az a, b, c mennyiségek értékeit helyettesítjük:

$$\varDelta_{123456}\begin{vmatrix} \xi_{12} & \eta_{12} & \zeta_{12} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & \zeta_{34} \\ \xi_{56} & \eta_{56} & \zeta_{56} \end{vmatrix} = (125)(126)(134)(234)(356)(456) - (123)(124)(156)(256)(345)(346) \ldots . \quad (53.$$

a mely egyenlet kimutatja a (16) alatti egyenletből eredő

$$\varDelta_{123456} = 0$$

egyenlet és a (17) alatti egyenlet közötti összefüggést.

Hogy ha még a (18) alatti egyenletet a következő determinánssal szorozzuk:

$$\begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix}$$

úgy a következő egyenletet nyerjük:

$$\varDelta_{123456}\begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \zeta_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_2 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix}$$

vagy ha az a', b', c' mennyiségek értékeit helyettesitjük, lesz:

$$\varDelta_{123456}\begin{vmatrix} \xi_{45} & \eta_{45} & \zeta_{45} \\ \xi_{61} & \eta_{61} & \zeta_{61} \\ \xi_{23} & \eta_{23} & \zeta_{23} \end{vmatrix} = (123)(146)(156)(236)(245)(345) - (126)(136)(145)(234)(235)(456) \ldots . \quad (54.$$

Hasonló módon vezethetjük Δ_{iklmnp}-ből az *iklmnp* hatszöghöz tartozó Carnot-féle egyenleteket, ha Δ_{iklmnp}-t azon determinánsokkal szorozzuk, melyek egyrészt az *iklmnp* hatszög

$$ik, \; lm, \; np$$

oldalak homogén összrendezőiből, másrészt pedig az

$$mn, \; pi, \; kl$$

oldalak összrendezőiből állanak.

III.

Nem mulaszthatjuk el végre felemliteni, hogy azon feltételt, a mely a kúpszeletnek hat pontja között létezik, még a már felsorolt módokon kivül tisztán algebrailag is nyerhetjük.

Feltéve, hogy a kúpszeletnek az egyenlete a következő:

$$a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33}\, z^2 + 2\, a_{23}\, yz + 2\, a_{13}\, xz + 2\, a_{12}\, xy = 0,$$

úgy azon feltétel, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok közül az i pont a kúpszeleten fekszik, a következő egyenlet által van kifejezve:

$$a_{11}\, x_i^2 + a_{22}\, y_i^2 + a_{33}\, z_i^2 + 2a_{23}\, y_i z_i + 2\, a_{13}\, x_i\, z_i + 2a_{12}\, x_i\, y_i = 0,$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

ha pedig e hat egyenletből, a melyekben az a mennyiségek egyméretűen előfordulnak, az utóbb nevezett mennyiségeket kiküszöböljük, úgy a következő feltételt nyerjük:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & z_2 x_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3 z_3 & z_3 x_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4 z_4 & z_4 x_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & z_5 x_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & z_6 x_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} = 0 \; \ldots\ldots \; (55.$$

a mely kifejezi, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek.

Ennélfogva kell tehát, hogy ezen egyenlet között, valamint az (1)—(17) alatti egyenletek között szintén bizonyos összefüggések létezzenek, a mely összefüggések kipuhatolása pusztán csak az (55) alatti egyenletben előforduló determináns átalakításától függ, oly alakokra, a melyek az (1)—17) alatti egyenletek első tagjait képezik.

A nevezett átalakitások még teljesen nem sikerültek, de mihelyt sikerülnek, nem fogom elmulasztani abbéli vizsgáltatásaimat a tekintetes Akadémiának bemutatni.

Pest, 1875. október 6.

A

HÁROM MÉRETŰ HOMOGÉN TÉR

(U. N. NEM EUKLIDIKUS)

SIKTANI TRIGONOMETRIÁJA.

RÉTHY MÓR

KOLOZSVÁRI EGYETEMI NYILV. RK. TANÁRTÓL.

(Bemutattatott a III. osztály űlésén 1875. junius 14.)

BUDAPEST, 1876.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ HIVATALÁBAN.

Az Akadémia bérházában.

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

A három méretű homogén tér trigonometriája.

Bólyai János ide vágó munkáját tanulmányozva észrevettem, hogy nehány tétele teljesen független a párhuzamosak megelőző elméletétől. Ezen észrevétel által annak kutatására ösztönöztetve, vajon nem lehetne-e az összes u. n. nem euklidikus geometriát ép ezen vagy hozzájuk hasonló tételekre alapítani, egy elemi módszerre jöttem, a mely e czélhoz ép oly természetes, mint rövid úton vezet. A módszert az jellemzi, hogy a geom. idomokat mind véges térrészen teljesen belül szerkesztvén, bizonyításaiban mellőzi a párhuzamosságnak még csak fogalmát is. Ily módon kikerüli az ember azt, a mi az eddigi elementáris módszereket nehezitette, t. i. a szokott képzelettel ellenkező idomokkal bizonyítást; továbbá kellő előkészület után egy-két csapással eldönti, hogy nemcsak *önmagában kifogástalan*, a mi különben fődolog, hanem a gyakorlati legpontosabb mérésekkel is összhangzó geometriát állapithat-e meg a nélkül, hogy a *határtalan* tért *végetlen nagy*-nak tekintse,*) vagy ha ezt még teszi, teheti-e a nélkül, hogy Euklidesnek párhuzamosság postulatumát**) elfogadja.***)

---

*) *Riemann* »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen« Abhandl. d. k. Ges. d. Wiss. Göttingen 1854. *Helmholtz* »Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen« Nachrichten d. k. G. d. W. Göttingen 1868.

**) Értjük az u. n. XI-ik axiomát. L. *Brassai Sámuel* »*Euklides elemei.*«

***) *Gauss levelei Schuhmacherhez* (1831-től kezdve) II. és V. köt. *Bólyai János* »Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc.« Maros-Vásárhely 1832. Franczia forditásban »La science absolue de l'espace stb.« Páris, Gauthier-Villars. *Lobatschewsky* »Geom. Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.« Berlin, 1840.

1. §.

1. Azon értelmezések, közeszmék és kivánatok, a melyekre az általánosabb geometria épül, hármat kivéve, azonosak azokkal, a melyek az u. n. euklidikusnak is alapját képezik. — Az értelmezések közül a párhuzamosságé, a kivánatok közül a XI. axioma nevezet alatt ismert mellőztetik, az egyenesről való postulatum pedig akként módosúl, hogy *»a határtalan térnek legyen legalább akkora része,* hogy e résznek két-két pontján át csak *egy* egyenes lehetséges.«

2. A határtalan tér azon részét, a melyben a későbbi bizonylatoknál szemléletül szolgáló idomok szerkesztendők lesznek, úgy szabjuk meg, hogy akármelyik két pontján át *csak egy* egyenes legyen vonható. Még tovább megyünk terünk szükebbre szabásában : ne lehessen *mindenestül* benne olyan háromszög, a melynek *két* oldala függélyes a harmadikra.

Hogy ilyen térrésznek lenni kell, az az egyenesről való postulatumból, módositott alakjában is, következik. — Ugyanis ha föltenném, hogy nincsen oly kicsiny térrész, a melyben ilyen háromszög ne volna, akkor meg kellene azt is engednem, hogy akármilyen kicsiny térrész *kétszeresében* van két olyan pont, a melyen át két egyenes vonható ;*) a mi pd. az imént nevezett postulatummal merőben ellenkezik.

E szükebbre szabott térben annál kevesbbé lehet olyan háromszög, a melynek egyik szöge derék, másik tompa. — Mert ebből a háromszögből a tompa szög csúcsán át vont egyenessel, *két* derék szöggel biró, háromszögöt szelhetnénk el.

2. §.

Azon tételeket soroljuk itt el, a melyeknek közönséges bizonylatában is csak az 1. §-ban elfogadottak szerepelnek. Teszszük ezt, mert rájok alapszik a későbbi ; a bizonyitásokat mellőzzük.

I. Csúcsszögek egyenlők.

*) Lásd köz. bizonylatát annak, hogy két egyenes, mely egy harmadikra merőleges, egymást nem metszheti.

II. Egyenes vonalú egyenlő szárú háromszögben egyenlő oldalakkal egyenlő szögek vannak átellenben s fordítva.

III. Az ilyen háromszög u. n. alapjának középpontját a csúcscsal összekötő egyenes merőleges az alapra s fordítva.

IV. Két egyenes vonalú háromszög egymásra illő, ha stb.

V. Ha *egy* középponttal r és r' sugarakkal ugyanazon egy sikon köröket rajzolunk s az egyiknek $\overset{\frown}{AB}$ és $\overset{\frown}{CD}$ ívei ugyanazon középponti szöggel vannak szembe, mint a másiknak $\overset{\frown}{A'B'}$ és $\overset{\frown}{C'D'}$ ívei, akkor

$$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{A'B'} : \overset{\frown}{C'D'}$$

VI. Ha három egyenes A, B és C egy ugyanazon D pontban metszi egymást és A merőleges B és C-re, akkor merőleges minden más egyenesre is, a mely a D ponton átmenve a B és C sikjában halad.

VII. Ha A és A' egy síkban vannak B egyenessel és merőlegesek reá, akkor, ha a B és A' egyenes az A körül mint szilárd tengely körül forog,

a) a B mértani olyan sík lesz, a mely az A-ra merőleges

b) e síkra az AA' síkja folyton merőleges lesz,

c) e síkra az A' egyenes is folyton merőleges lesz.

3. §.

Az egyenes vonalú háromszögök trigonometrikus alaptételeinek váza.

1. *Szerkesztés:* AOB=α szög egyik szárának A és A' pontjaiból állítsuk a szög másik szárára az A B és A' B' merőlegeseket; az idomot képzeljük az OB száron, mint szilárd tengelyen köröskörül forogva. Akkor az OA kúpfelületet, A és A' pedig olyan köröket írnak le, melyek középpontjai B és B', sugarai BA és B'A'.

Álland e (VIII) tétel:

$$\text{o}\overline{BA} : \text{o}\overline{OA} = \text{o}\overline{B'A'} : \text{o}\overline{OA'}$$

hol »or« jegygyel Bólyai szerint azon kör kerületének hoszszát jelöljük, a melynek sugara »r«.

Bizonyitás. Gondoljuk a kúpfelületet a rajta lévő körökkel együtt síkra legombolyítva. A nyert idomra alkalmazható lévén az V tétel, lészen:

$$o\overline{BA} : o\overline{B'A'} = o\overline{OA} : o\overline{OA'}$$

következőleg áll a tétel.

Következmény. E tétel arra jogosít fel, hogy a $o\overline{BA} : o\overline{OA}$ arányt az α szög függvényének tekintsük; e függőséget $f(\alpha)$-val jelölvén, e szerint állni fog bármely, legalább térrészünkön belül eső, derék szögű háromszögre, ha oldalait a, b, c, és szögeit sorban A^0, B^0, 90^0-kal jelöljük:

VIII. a) $oa : ob : oc = f(A) : f(B) : 1$

Továbbá világos, hogy $f(90^0) = 1$.

2. *Szerkesztés.**) Legyen BB′ B″ vonal úgy szerkesztve, hogy minden pontja az AA′ A″ egyenestől egy ugyanazon *a* távolságban van; legyen továbbá:

$$BA \perp AA'$$
$$B'A' \perp AA'$$
$$B''A'' \perp AA'$$

Attól egyelőre eltekintve, hogy a BB′B″ vonal egyenes-e vagy görbe (hisz hogy milyen, majd ki fog tünni), jelöljük a BB′ és B′B″ darabok hosszúságát $\widehat{BB'}$ és $\widehat{B'B''}$-vel.

Álland e (IX.) tétel:

$$\widehat{BB'} : \overline{AA'} = \widehat{BB''} : \overline{AA''}$$

E tétel helyességét közvetlenül belátjuk, ha $\overline{AA'}$ és $\overline{AA''}$ hoszszúságoknak van közös mértékük; mert ha

$$\overline{AA'} : \overline{AA''} = n' : n''$$

(hol n′ és n″ egész szám), akkor a mértékkel osztáskor található pontokban emelt merőlegesek segélyével közvetlenül foly, hogy

$$\widehat{BB'} : \widehat{BB''} = n' : n''$$

Ha pedig a tétel áll akkor, a midőn az arány szeres, akkor ismert módon kiterjeszthető arra az esetre is, ha az arány szertelen.

Következmény. Az imént bebizonyított tétel szerint $\widehat{BB'} : \overline{AA'}$ független lévén az $\overline{AA'}$ hoszszától, csak az $\overline{AB} = a$

*) Az e §-ban következők, az egyelőre ismeretlen φ függvény behozásának gondolatától eltekintve, a dolog lényegére Bólyai János absolut geometriájából vannak véve. »Appendix stb.« §. 27, 28.

távolságnak lehet még függvénye; e függőséget φ(a)-val jelölvén a IX. tételt így fejezhetjük ki:

$$\text{IX. a)} \quad \widehat{BB'} : AA' = \varphi\,(a).$$

3. *Szerkesztés.* A 2. alatti szerkesztéssel nyert idom BA A'B' darabját forgassuk a BA egyenesen, mint szilárd tengelyen köröskörül; az A'B' egyenes akkor hengerfelületet ír le, az A' pont kört, melynek középpontja, minthogy 2. szerkesztés szerint

$$A'A \perp BA,$$

nem más, mint A, — végre B' pont olyan kört ír le, melyről az eddigi szerkesztésből nem tudhatom, hogy középpontja azonos-e B ponttal vagy nem. Ez utóbbit ismét eldöntetlenül hagyva, jelölöm a B'-ből a szilárd tengelyre vont merőleges talppontját D-vel, lészen az A' körének sugara $\overline{A'A}$ s a B' köréé $\overline{B'D}$.

Alland e (X.) tétel:

$$o\overline{B'D} : o\overline{A'A} = \varphi\,(a)$$

Göngyölítsük le e tétel bebizonyításának céljából az A'B' egyenes leirta hengerfelületet valamely síkra, (a legöngyölítés lehetősége a VI. tétel segélyével könnyen bebizonyítható). Az A' köre, mindenik eleme merőlegesen állván a hengerfelület alkotóira (VII_c szerint) *egyenesben* gombolyodik le, a B' köre pedig olyan vonalban, melyről bizonyos, hogy amaz egyenestől minden pontja A'B' állandó távolságban van. A legombolyítás által nyert idomra alkalmazható lévén, ennélfogva a IX_a tétel, tételünk áll.

4. *Szerkesztés.* A 3. alatti szerkesztést egészítsük ki az $\overline{AB'}$ diagonálissal. Nevezzük azután a B'AD szöget A_1-nek és az A'B'A szöget B'-nek.

Álland e (XI) tétel:

$$f\,(A_1) : f\,(B') = \varphi\,(a)$$

Mert az AB'D és AB'A' háromszögök D illetőleg A' csúcsokon derék-szögüek lévén, a $VIII_a$ tétel értelmében

$$o\overline{DB'} = o\overline{AB'}\,f\,(A_1)$$
$$oAA' = oAB'\,f\,(B')$$

tehát

$$oDB' : oAA' = f\,(A_1) : f\,(B')$$

mely eredmény a X tétellel egybevetve, tételünket adja.

Következmény. A XI tétel értelmében az AA'B' derék szögű háromszögben, oldalait és szögeit

$$A'B' = a \;;\; AA' = b$$
$$B'AA'_1 = A^0;\; AB'A'_1 = B^0$$

tévén, lészen

$$XI_{a)} \quad f(90^0 - A^0) : f(B^0) = \varphi(a)$$
$$XI_{b)} \quad f(90^0 - B^0) : f(A^0) = \varphi(b)$$

4. §.

Az f (x) meghatározása.

XII. Tétel. Minden derék szögü háromszögnek t. b. (térrészünkön belől) nagyobb az átfogója, mint a béfogója.

Mert föltéve, hogy van t. b. olyan BCA derék szögű háromszög, a melynek BC béfogója nagyobb, mint BA átfogója, akkor kellene a BC béfogón B és C között olyan B' pontnak is lenni, hogy B'C = B'A, — azaz kellene t. b. B'CA *két* derékszöggel biró három szögnek lenni, a mi a térrészünkre nézve tett megállapodással nem fér meg.

1. *Következmény.* Minden háromszögben t. b. nagyobb szöggel nagyobb oldal van szemközt.

2. *Következmény.* Minden háromszögben t. b. nagyobb két oldal *összege,* mint a harmadik *egymaga.* Ennélfogva minden körnek t. b. nagyobb a kerülete, mint átmérőjének kettőzete; tehát

$$\lim \frac{or}{r} > 4$$

3. *Következmény.* A kör körül írt sokszög kerülete nagyobb mint a köré. In specie a k. k. írt négyzeté is, tehát tekintettel arra, hogy a négyzet egy-egy oldala 2r. felé konvergal, lészen

$$\lim \frac{or}{r}\Big]_{r=o} < 8$$

4. *Következmény.* A 2. és 3. következményt összevetve, lészen tehát

$$\lim \frac{or}{r}\Big]_{r=o} = a_1 \qquad \text{hol } 4 < a_1 < 8$$

XIII. Tétel. Ha valamely háromszög három csúcsa egymáshoz végtelenül közeledik, akkor a háromszög szögeinek összege 180^0 felé konvergál.

A tétel áll, mert a háromszög szögei, ha a csúcsok közeledtével változnak, akkor *folytonosan* változnak s más részről elvégre, ha a csúcsok együvé jőnek, akkor a háromszög sz. ö. egyenes szöget teszen.

Szerkesztés. Az ACB derékszögű háromszög C csúcsából állítsuk az átellenes AB átfogóra a CD merőlegest. Álland a

XIV. tétel, mely szerint

$$\lim \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}.\,\overline{BD}}\Bigg]_{AB=o} = 1 \text{ s ép úgy } \lim \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}.\,\overline{AD}}\Bigg]_{AB=o} = 1$$

Mert a VIII_a tétel szerint

$$f(A^0) = \frac{oBC}{oAB} = \lim \frac{oBC}{oAB}\Bigg]_{AB=o}$$

Más részről a XII. tétel 4. következményéből folyólag.

$$\lim \frac{oBC}{oAB}\Bigg]_{AB=o} = \lim \frac{BC}{AB}$$

tehát

$$f(A^0) = \lim \frac{BC}{AB}\Bigg]_{AB=o} \ldots \text{XIV}_a$$

Ép így

$$f(\widehat{BCD}) = \lim \frac{BD}{BC}\Bigg]_{AB=o}$$

Mivel pedig a XIII tételből folyólag

$$\lim \widehat{BCD} = A$$

tehát tételünk áll.

1. *Következmény.* Összevéve a XIV. alatti két egyenletet, lészen

$$\lim \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}\Bigg]_{AB=o} = 1$$

vagy akár

$$\left(\lim \frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\lim \frac{AC}{AB}\right)^2 = 1$$

tekintve már most, hogy XIV_a szerint

$$f(A^0) = \lim \frac{BC}{AB}$$

$$f(B^0) = \lim \frac{AC}{AB}$$

s a XIII. tétel értelmében

$$B^0 = 90^0 - A^0$$

lészen

$$\left[f(A^0)\right]^2 + \left[f(90^0 - A^0)\right]^2 = 1 \qquad XIV_b$$

XV. Tétel. Ha x és y akkármekora hegyes szöget jelent, akkor

$$f(x^0 + y^0) = f(x^0)\, f(90^0 - y^0) + f(90^0 - x^0)\, f(y^0)$$

E tétel bizonyítása itt olyan viszonyban áll közönséges bizonylatához, mint az előbbié.

1. Megjegyzés. Könnyen megmutatható ily módon, hogy végtelen kicsiny idomokra *minden esetre* áll az euklidikus geometria minden tétele; hogy többek közt

$$\lim \frac{or}{r}\Big]_{r=o} = 2\pi$$

Következmény. A XV. tételből a XIV_b, egyenlettel egyetemben (p. sorba fejtés útján) az következik, hogy

$$f(x^0) = \sin(hx^0)$$

hol h állandó értéke az f (x^0) geom. jelentéséből könnyen meghatározható.

Ugyanis egy felől sin hx^0 sorba fejtéséből az foly, hogy

$$\lim \frac{f(x^0)}{x^0}\Big]_{x^0=o} = h$$

másfelől tekintve, hogy a körív aránya húrjához az ív fogytával az egység felé konvergál, a XIV_a segélyével könnyű megmutatni, hogy

$$\lim \frac{f(x^0)}{x^0}\Big]_{x^0=o} = \lim \frac{1}{360^0} \cdot \frac{or}{r}$$

következőleg az 1. megjegyzést is felhasználva még, lészen

$$h = \frac{1}{180^0}\pi$$

Igy tehát

$$f(x^0) = \sin\left(\frac{x^0}{180^0}\pi\right)$$

Állapodjunk meg abban, hogy ezentúl a szöget fokmérték helyett a szárai közé eső olyan körívvel mérjük, a melyhez tartozó teljes kör kerülete 2π. Akkor az x^0 szárai közé eső körív hossza

$$s = \frac{x^0}{180^0}\pi$$

E megállapodás mellett azután $f(x^0)$ talált értékét a $VIII_a$ XI_a XI_b egyenletekbe helyettezvén, a XIV_b fölhasználásával lészen

$XV_{a)}$ $\quad oa : ob : oc = \sin A : \sin B : 1$

$XV_{b)}$ $\quad \cos A : \sin B = \varphi(a)$

$XV_{c)}$ $\quad \cos B : \sin A = \varphi(b)$

5. §.

A $\varphi(x)$ meghatározása.

XVI. Tétel. Térrészünkön belül eső minden körre, melynek sugara r

$$or = C\sqrt{1-[\varphi(r)]^2}$$

hol C állandót jelent.

Mert a $XV_{a)}$ ban használt jelöléssel

1) $\quad oa = oc \sin A$

2) $\quad ob = oc \sin B$

3) $\quad \varphi(a) = \cos A : \sin B;$

a 2) és 3) szorzásával tehát

4) $\quad ob\,\varphi(a) = oc \cos A$

Négyzetre emelvén már most és összegezvén az 1) és 4) egyenleteket, lészen

5) $\quad (oa)^2 + [ob\,\varphi(a)]^2 = (oc)^2;$

Ép így

6) $\quad (ob)^2 + [oa\,\varphi(b)]^2 = (oc)^2;$

az 5) és 6)-ból tehát

$$(oa)^2 \left[1 - [\varphi(b)]^2\right] = (ob)^2 \left[1 - [\varphi(a)^2\right]$$

s ebből végre

$$\frac{oa}{\sqrt{1 - [\varphi(a)]^2}} = \frac{ob}{\sqrt{1 - [\varphi(b)]^2}} = \text{const.}$$

q. e. d.

XVII. Tétel.

$$o(c_1 + c_2) = oc_1\, \varphi(c_2) + oc_2\, \varphi(c_1)$$

Bizonyitás. Szerkeszszünk egy egyenest, melynek hosszа $c = c_1 + c_2$ és pedig

$$\overline{AB} = c$$
$$\overline{AD} = c_1$$
$$\overline{DB} = c_2\,;$$

állítsuk D-ben az AB-re a DC merőlegest; rajzoljuk a CB és CA egyeneseket s legyen

$$\left.\begin{aligned} \overline{CB} &= a \\ \overline{CA} &= b \\ \overline{DC} &= m \end{aligned}\right| \begin{aligned} BCD_{\wedge} &= C_1 \\ ACD_{\wedge} &= C_2 \end{aligned}$$

E jelölésekkel élve a $XV_{a)}$ egyenletekből következik:

1) $oc_1 \sin B = om \sin C_1$

2) $oc_2 \sin A = om \sin C_2$

3) $om = oa \sin B$

4) $om = ob \sin A$

Az 1) egyenletet $\cos C_2$, a 2) alattit $\cos C_1$ szorzókkal véve és összeadva lészen

5) $oc_1 \sin B \cos C_2 + oc_2 \sin A \cos C_1 = om \sin C.$

Más részről a 3) és 4)-ből leolvasható szabály segélyével a 3)-ból:

6) $om \sin C = oc \sin A \sin B\,;$

Igy tehát az 5) és 7)-ből

$$oc_1 \frac{\cos C_2}{\sin A} + oc_2 \frac{\cos C_1}{\sin B} = oc.$$

Hivatkozván végre a XV_b által kifejezett tételre, álland:

$$oc_1\, \varphi(c_2) + oc_2\, \varphi(c_1) = oc$$

q. e. d.

Következmény. A XVI. és XVII. tételeket egyesítvén, ha c_1 és c_2 helyibe x illetőleg y tétetik, a következő egyenlet ered:

$$\sqrt{1-[\varphi(x-y)]^2}=\varphi(x)\sqrt{1-[\varphi(y)]^2}+\varphi(y)\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}$$

mely funktionális egyenletből az foly, hogy

$$XVII_{a)} \qquad \varphi(x) = \cos(kx)$$

hol k valós vagy tisztán képzetes, különben akármekkora, legalább egyelőre határozatlan állandót jelent. Vegyes képzetes ugyanis nem lehet, miután φ (x) eredeti jelentésénél fogva valós.

6. §.

A három méretű homogén tér siktani trigonometriájának alaptételei.

1. Bele tévén XV_a XV_b XV_c egyenletekbe or és φ (x)-nek az előző §-ban talált értékeit, a következő egyenletek erednek:

$$XVIII_{a)} \quad \sin ka : \sin kb : \sin kc = \sin A : \sin B : 1$$

$$XVIII_{b)} \quad \cos A : \sin B = \cos ka$$

$$XVIII_{c)} \quad \cos B : \sin A = \cos kb$$

mely egyenletek tehát olyan t. b. eső derékszögü háromszög darabjai közötti viszonyt fejezik ki, melynek oldalai a b c, s átellenes szögei A, B, $\frac{\pi}{2}$

Gondoljuk már most meg, hogy az euklidikus geometriában a derékszögű sphaerikus háromszög oldalai a' b' c' és szögei A, B, $\frac{\pi}{2}$ között a következő egyenletek állanak:

1) $\sin a' : \sin b' : \sin c' = \sin A : \sin B : 1$

2) $\cos A : \sin B = \cos a'$

3) $\cos B : \sin A = \cos b'$

Emlékezzünk vissza, hogy ezen egyenletekből *tisztán csak algebrai reduktiók és goniometrikus tételek segélyével* levezethető a derékszögü és kettéosztás útján a ferdeszögü gömbi háromszögök oldalai és szögei között fennálló mindenik tétel; levezethető és kiterjeszthető olyan háromszögre is, a melynek *többje* van *egy* derék avagy tompa szögnél. — Végre vegyük tekintetbe, hogy az 1) 2) 3) egyenletek azonosakká válnak a XVIII a, b, c) alattiakkal, mihelyt bennök a' b' c' helyébe ka, kb, kc tétetik. — Akkor azt a következtetést vonhatjuk, hogy a nem euklidikus geometriában egyenesek által alkotott akármekkora szögü háromszögökre érvényesekké lesznek az euklidikus gömbháromszögtan egyenletei, mihelyt bennnök az oldalak helyébe ka, kb, kc tétetik.

Ha tehát a, b, c, A, B, C, egyenes vonalú háromszögnek jelentik oldalait s átellenes szögeit, akkor a közöttök fenálló alapegyenletek ezek lesznek:

$$\mathrm{XIX}_{a)}\begin{cases}\cos ka = \cos kb \cos kc + \sin kb \sin kc \cos A\\ \cos kb = \cos kc \cos ka + \sin kc \sin ka \cos B\\ \cos kc = \cos ka \cos kb + \sin ka \sin kb \cos C\end{cases}$$

$$\mathrm{XIX}_{b)} \qquad \frac{\sin ka}{\sin A} = \frac{\sin kb}{\sin B} = \frac{\sin kc}{\sin C}$$

$$\mathrm{XIX}_{c)}\begin{cases}\mathrm{cotg}\, ka \sin kb = \cos kb \cos C + \mathrm{cotg}\, A \sin C\\ \mathrm{cotg}\, kb \sin kc = \cos kc \cos A + \mathrm{cotg}\, B \sin A\\ \mathrm{cotg}\, kc \sin ka = \cos ka \cos B + \mathrm{cotg}\, C \sin B\\ \mathrm{cotg}\, ka \sin kc = \cos kc \cos B + \mathrm{cotg}\, A \sin B\\ \mathrm{cotg}\, kb \sin ka = \cos ka \cos C + \mathrm{cotg}\, B \sin C\\ \mathrm{cotg}\, kc \sin kb = \cos kb \cos A + \mathrm{cotg}\, C \sin A\end{cases}$$

$$\mathrm{XIX}_{d)}\begin{cases}\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos ka\\ \cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos kb\\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos kc\end{cases}$$

hol k valós vagy tiszta képzetes, de numerikus értékre *legalább* egyelőre ismeretlen, állandót jelent.

2. Azon speciális esetben, ha k akár valós, akár képzetes úton végtelen kicsiny felé konvergál, akkor a $\mathrm{XIX}_{a)}$ és $\mathrm{XIX}_{b)}$-ből lészen:

$$\mathrm{XIX}_{a')}\begin{cases}a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A\\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B\\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C\end{cases}$$

$$\mathrm{XIX}_{b')} \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Ezek pedig azonosak az ú. n. euklidikus trigonometria alaptételeivel. — Az e tételekre épült geometria a gyakorlati mérésektől az észlelési hibákon belül eső különbségekkel tér el; de mivel *mégis csak eltér*, tehát a gyakorlat *csak* azt bizonyitja, hogy k-nak *igen* kicsinynek kell lenni; hogy mekkora, azt a gyakorlat nem adja és nem is adhatja.

3. Hogy vizsgálatainkat később megszakitani kénytelenek ne legyünk, ide igtatjuk az egyenes vonalú derék szögü háromszögök megoldására szolgáló, a XIX-ből közvetlenül folyó egyenleteket:

$$\left.\begin{array}{rl}
1) & \cos kc = \cos ka \cos kb \\
2) & \cos kc = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \\
3) & \sin kb = \sin kc \sin B \\
4) & \sin kb = \operatorname{tg} ka \operatorname{cotg} A \\
5) & \sin ka = \sin kc \sin A \\
6) & \sin ka = \operatorname{tg} kb \operatorname{cotg} B \\
7) & \cos A = \sin B \cos ka \\
8) & \cos A = \operatorname{tg} kb \operatorname{cotg} kc \\
9) & \cos B = \sin A \cos kb \\
10) & \cos B = \operatorname{tg} ka \operatorname{cotg} kc
\end{array}\right\} XX_{a)}$$

a melyekbe arra az esetre, ha k képzetes, $k = k' \sqrt{-1}$ tétetvén, lészen:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & e^{k'c} + e^{-k'c} = \frac{1}{2}(e^{k'a} + e^{-k'a})(e^{k'b} - e^{-k'b}) \\
2) & e^{k'c} + e^{-k'c} = 2 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \\
3) & e^{k'b} - e^{-k'b} = (e^{k'c} - e^{-k'c}) \sin B \\
4) & e^{k'b} - e^{-k'b} = 2\dfrac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{e^{k'a} + e^{-k'a}} \operatorname{cotg} A \\
5) & e^{k'a} - e^{-k'a} = (e^{k'c} - e^{-k'c}) \sin A \\
6) & e^{k'a} - e^{-k'a} = 2\dfrac{e^{k'b} - e^{-k'b}}{e^{k'b} + e^{-k'b}} \operatorname{cotg} B \\
7) & \cos A = \frac{1}{2}(e^{k'a} + e^{-k'a}) \sin B \\
8) & \cos A = \dfrac{e^{k'b} - e^{-k'b}}{e^{k'b} + e^{-k'b}} \dfrac{e^{k'c} + e^{-k'c}}{e^{k'c} - e^{-k'c}} \\
9) & \cos B = \frac{1}{2}(e^{k'b} + e^{-k'b}) \sin A \\
10) & \cos B = \dfrac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{e^{k'a} + e^{-k'a}} \dfrac{e^{k'c} + e^{-k'c}}{e^{k'c} - e^{-k'c}}
\end{array}\right\} XX_{b}$$

4. Ugyanazon okból ide iktatjuk végre a kör kerületének kiszámítására szolgáló képlet levezetését is. A XVI tétel szerint lészen ugyanis a $XVII_{a)}$ tekintetbe vételével

$$or = C \sin kr$$

Ámde a XV. tétel alatti 1) megjegyzés szerint:

$$\lim \left.\frac{or}{r}\right]_{r=o} = 2\pi$$

miután tehát más részről :

$$\lim \frac{\sin kr}{r}\Big]_{r=o} = k$$

azért

$$2\pi = C \cdot k$$

Ennélfogva :

$$or = \frac{2\pi}{k} \sin kr \qquad XX_{c)}$$

Ha k képzetes, akkor $k = k' \sqrt{-1}$ téve, lészen

$$or = \frac{\pi}{k'} (e^{k'r} - e^{-k'r}) \qquad XX_{d)}$$

7. §.

Egybefoglalva az eddigieket, azt találtuk, hogy ha a tér természete az elfogadott értelmezések és közeszmék mellett megkivánja az 1. §-ban kimondott postulatumot, akkor az egyenes vonalak által alkotott három szögök oldalai és szögei hódolnak *mindenesetre* a XIX. alatti egyenleteknek. Ezen egyenletekben szerepel egy *k* állandó, a mely bizonyos, hogy *complex* nem lehet; hogy mi a *k* állandó közelebbi értéke, az a kérdés függőben maradt.

Első feladatunkúl tűzzük ki, megmutatni, hogy a *k* állandót addig közelebb meghatározni nem lehet, mig az 1. §-ban elfogadottakhoz új postulatumot hozzá nem veszünk.

Tekintsük e czélból a nyert eredményt a legáltalánosabb szempontból. A XIX. alatti egyenletekben előforduló a b c A B C menynyiségeket tisztán algebraice fogva fel, az egyenletek ezen alg. menynyiségek közül háromnak a többi által meghatározására szolgálnak, mihelyt k bármekkorának is adva van. Világos, hogy a nevezett egyenletek *egymással* összeütközésbe nem jöhetnek még ezen legáltalánosabb felfogás mellett se. Hiszen Lagrange szerint*) könnyü megmutatni, hogy az első csoportból (XIX. a) levezethető a többi tisztán algebrai operatiók segélyével; az első csoport pedig *A B C* mennyiségeknek *a b c*-ből meghatározására szolgál: ha tehát akárhány *a b c A B C* számcsoportból úgyszólva

*) J. de l'Ecole polys. Cah. 6 p. 280.

számidomot öszszeállitva ezt a XIX egyenletek alapján vizsgáljuk, akkor bizonyos, hogy az igy felépült theoriában ellenmondás nem lehet.

Csak az lehet tehát kétséges, hogy ha ezen $a\ b\ c\ A\ B\ C$ mennyiségeknek azt a geometriai jelentést akarjuk tulajdonitani, a melylyel az egyenletek levezetése szerint szerepelnek, nem fognak-e egyenleteink általános k mellett *a geometriai előzményekkel* ellenmondásba jöhetni: kérdés t. i., nem fognak-e a XIX. egyenletekből azon vonalak számára, a melyek a b c oldalú és A B C szögű ezen egyenleteknek hódóló háromszöget alkotnak, olyan tulajdonok folyni, a melyek az egyenesnek az 1. §-ban felállitott postulatumával *csak is* úgy nem ellenkeznek, ha k állandó *bizonyos speciális* értékkel bir.

E kérdés eldöntésére, S vonalaknak nevezvén az imént körülirt háromszöget képező vonalakat, a következő tételeket bizonyitjuk be:

XXI_a *Tétel. Ha k képzetes, akkor a határtalan tér bármelyik két pontja között csak egy S vonal húzható.*

$XXI_{b)}$ *Tétel. Ha k valós, akkor is csak egy S vonal húzható a határtalan tér akkora részének bármelyik két pontja között, a melyben a leghoszszabb S vonal is rövidebb mint* $\frac{\pi}{k}$.

Mert tegyük föl, hogy két pont A és B között két S vonal húzható. Válaszszuk azután A és B pontokat s a közöttük föltevés szerint lehetséges S vonalak egyikén fölvett C pontot háromszög csúcsainak. A háromszög oldalai $a\ b\ c$ és szögei $A\ B\ C$ között állanak a XIX alatti egyenletek, melyek közül ezeket választjuk ki:

$$1)\ \cos kc = \cos ka \cos kb + \sin ka \sin kb \cos C$$

$$2)\ \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos ka - \cos k(b - c)}{2 \sin kb \sin kc}$$

$$3)\ \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{\cos kb - \cos k(c - a)}{2 \sin kc \sin ka}$$

Ámde föl kell tennünk hogy az S vonal, legfölebb egyes pontjait kivéve, folytonos [hiszen e nélkül az A, B, C szögeknek értelmük se volna.] A C pontot tehát választhattam úgy, hogy $C_A = \pi$; akkor pedig 1)-ből lészen

$$\cos kc = \cos k(a + b)$$

tehát $$kc = \pm k(a + b) + 2\lambda\pi$$

hol λ akármilyen positiv vagy negativ egész számot jelenthetne. De k vagy tisztán képzetes vagy valós. Első esetben $\lambda = o$ kell, hogy legyen s azután csak a $+$ jegynek van értelme. Második esetben ugyanaz áll abból az okból, mert föltétel szerint a leghoszszabb S vonal is rövidebb térrészünkön belől mint $\frac{\pi}{k}$, azaz

$$kc < \pi \quad \text{és} \quad k(a+b) < \pi$$

Tehát mindkét esetben

$$c = a + b$$

Ennek folytán a 2) és 3) egyenletekből lészen, minthogy a jobb oldal nevezője zéró az imént idézett föltétel szerint nem lehet :

$$4) \begin{cases} A = 2\lambda\pi \\ B = 2\lambda'\pi \end{cases}$$

hol λ és λ' egész számot jelentenek.

Ezek előrebocsátása után vegyünk föl az A és B között föltevés szerint lehetséges S vonalakon az A ponttól a' távolságban egy- egy pontot. Ha megmutatjuk, hogy e pontok egymástóli távolsága $x=o$, akkor tételünk be lesz bizonyítva. Ámde

$$\cos kx = \cos ka' \cos ka' + \sin ka' \sin ka' \cos A \quad \text{tehát}$$

4)-nél fogva

$$\cos kx = \cos^2 ka' + \sin^2 ka' = 1$$

következőleg, mivel k vagy képezetes vagy ha valós, akkor föltétel szerint $kx < \pi$, tehát

$$x = o^{*})$$

q. e. d.

Ez által be van bizonyítva, hogy az S vonalak, bármi legyen is k, birnak az egyenesnek azon fundamentális tulajdonával, hogy legalább bizonyos térrészen belől eső két pontjában megszilárdítva, helyét meg nem változtathatja.

---

*) A XXI. tétel alapján könnyü a XIX_a egyenletekből levezetni, hogy az S vonal A és B között a XXI-ben kimondott föltétel alatt a legrövidebb.

Összefoglalva tehát az eddig nyert eredményeket, be van bizonyitva, hogy ha az elfogadott értelmezések és axiómák mellett az 1. §-ban felállitott postulatum áll, akkor az egyenes vonalú háromszögre állnak a XIX. alatti egyenletek, — és forditva, ha az elfogadott értelmezések és axiómák mellett a XIX. alatti egyenletek állanak bizonyos egyelőre ismeretlen vonalak által alkotott háromszögre, akkor e vonalak, bármi legyen is a valós vagy képzetes k értéke, megfelelnek az 1. §-ban kimondott postulatumnak.

Ebből azután határozottan az következik, hogy mig csak az eddigiekhez valami új, velök összhangzó, postulatum föl nem vétetik a geometria épületébe, addig k értéke meg nem határozható. De következik másrészről az is, hogy az eddigiekre alapitott geometria önmagában kifogástalan theoriát képezend akármekkora valós vagy képzetes k mellett is: hogy a természettel milyen és mekkora k mellett egyez meg, az más kérdés.

A következőkben feladatul tüzzük ki vizsgálni, milyennek kellene a tér természetének lenni, ha k valós, milyennek ha képzetes.

8. §.

A tér természetének milyennek kellene lenni, ha k valós.

XXII. Tétel. *Ha k zerótól különböző valós értékkel birna, akkor a határtalan térnek nagyságra végesnek kellene lenni.*

E tétel be lesz bizonyitva, ha megmutatjuk, hogy a tér akármelyik A pontjából kiinduló valamenynyi sugárnak egyugyanazon B pontban kellene egyesülni, ha k zerótól különböző valós értékkel birna.

Tegyünk ennek megmutatására az A pontból szétágazó AB' és A B'' egyeneseken át sikot s irjunk ezen folytonosan nagyobbodó r sugárral és A ponttal mint középponttal köröket. Egy-egy kör kerülete a XX_c egyenlet szerint

$$= \frac{2\pi}{k} \sin kr$$

lévén, világos, hogy r növekedtével csak addig nő, mignem

$r=\frac{\pi}{2k}$; ezentúl folytonosan fogy és pedig teljesen zéróvá lesz, ha $r=\frac{\pi}{k}$. A kör kerülete tehát az A ponttól $\frac{\pi}{k}$ távolságban *egy pontté* húzódik öszsze: azaz az A pontból kiinduló AB' és AB" sugár ebben a távolságban lévő B pontban egyesül.

Megjegyzés. A számitás helyén van akkor is, ha k képzetes; de a következtetés akkor természetesen nem vonható. Ha k zéró, akkor a számítás nincs helyén; akkor ugyanis

$$\left.\frac{\sin kr}{k}\right]_{k=o} = r$$

1. Következmény. Ha k zérótól különböző valós értékkel birna, akkor az egyenesnek zárt vonalnak kellene lenni. Ugyanis az A pontból *ellenkező irányban* kiinduló egyenesek is a B pontban kellene, hogy egyesüljenek.

2. Következmény. Az *egyszer* zárt egyenes hoszsza $\frac{2\pi}{k}$ volna.

XXIII. Tétel. *Ha k zerótól különböző valós értékkel birna, akkor az egyenesnek tökéletesen azonosnak kellene lenni olyan körrel, a melynek sugara* $=\frac{\pi}{2k}$.

E tétel bebizonyítására emeljünk CA határtalan egyenes C pontjában merőlegest, rakjuk fel erre a $\frac{\pi}{2k}$ hosszuságot, úgy, hogy $CB = a = \frac{\pi}{2k}$; azt állitom, hogy a B pont $\frac{\pi}{2k}$ távolságban van a CA egyenes minden pontjától, úgy, hogy

$$BC = BA = \frac{\pi}{2k}.$$

A BCA háromszög ugyanis C-nél derékszögű lévén, lészen a XX_a tételek szerint

$$1)\ \operatorname{tg} kb = \sin ka \operatorname{tg} \overline{B}$$

$$2)\ \operatorname{tg} k c = \frac{\operatorname{tg} ka}{\cos B}$$

$$3)\ \cos A = \cos ka \sin \overline{B}$$

következőleg

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} kb &= \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} kc &= \infty \\ \cos A &= o \end{aligned}\right| \begin{aligned} kb &= B + \lambda\pi \\ kc &= \frac{\pi}{2} + \lambda'\pi \\ A &= \frac{\pi}{2} + \lambda''\pi \end{aligned}$$

Ámde ha b = o, akkor

$$B = o$$

$$A = \frac{\pi}{2}$$

$$c = a$$

miként a közvetlen szemlélet mutatja; következőleg $\lambda = \lambda' = \lambda'' = o$ és így b változtával csak B változik, míg $kc = \frac{\pi}{2} = A$ állandók maradnak; tehát

$$c = \frac{\pi}{2k} = a$$

q. e. d.

Következmény. Azon vonal tehát, a mely a *CA* egyenestől minden pontjában *a'* állandó távolságban van, olyan *kör* volna, a melynek középpontját a *B* pont képezi, s a melynek sugara $= \frac{\pi}{2k} - a'$.

Megjegyzés. A levezetésből egyuttal látható, hogy ha A pont a C egyenesen mozogván a *b* folytonosan nő zerótól $\frac{2\pi}{k}$-ig, akkor

$$B = kb$$

lévén, a B szög zérótól 2π-ig nő. Azaz ha k zérótól különböző valós érték, akkor az egyenes zárt vonal volna s egyszer vett hoszsza $\frac{2\pi}{k}$. (L. előbbi tétel következményeit.)

XXIV. Tétel. Ha k valós és nem zéró, akkor ugyanazon egy síkban lévő egyeneseknek kivétel nélkül metszeniök kellene egymást (tehát párhuzamosak nem léteznének).

XXV. Tétel. Ha k valós és nem zéró, akkor az egyenes vonalú háromszög szögeinek összege π-nél nagyobb volna.

E két tételnek különben is igen egyszerü bebizonyítását elhagyhatjuk annál is inkább, mert már XIX. tételekből magukban véve is világos, hogy ha k zérótól különböző valós értékkel birna, akkor az egyenes vonalú három szögökről azon tételeknek mindenesetre állani kellene, a melyek a közönséges geometriában $\frac{1}{k}$ sugárú gömbön fő köröktől határolt háromszögökről állanak*).

9. §.

A tér természetének milyennek kellene lenni, ha *k* képzetes.

XXVI. Tétel. Ha k képzetes értékkel bir, akkor a tér végtelen nagy.

Az *r* sugárral irt kör kerülete ugyan is a XX_d szerint

$$= \frac{\pi}{k'} (e^{k'r} - e^{-k'r})$$

Ennélfogva (minthogy k' valós) sugarával együtt végtelen nagygyá nő. A kör kézéppontjából kiinduló sugarak tehát soha nem egyesülnek többé, sőt mindinkább szétágaznak**)

XXVII. Tétel. Ha k képzetes s modulusa nem végtelen icsi y, akkor a háromszög szögöszszege kisebb π-nél; ha a háromszö ι valamelyik oldala végtelen kicsinynyé fogy, akkor a szögöszszeg π-hez vég nélkül közeledik.

E tétel bebizonyítására két ismert gömb- háromszögtani tételből indulunk ki, melyeket 6. §-ban bebizonyított elv segélyével átalakitván, lészen:

$$1)\ \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos ka - \cos k(b+c)}{2 \sin kb \sin kc}$$

$$2)\ \cos \frac{A+B+C}{2} = -\frac{\sin kb \sin kc \sin A}{4 \cos \frac{ka}{2} \cos \frac{kb}{2} \cos \frac{kc}{2}}$$

Minthogy már mostan *k* képzetes, tehát a $XXI_{a)}$ értelmében a határtalan tér bármelyik két pontja között csak egy egyenes lévén huzható, a XII. tétel 2 következményében a térrészre szorítkozás elmaradhat; azaz

$$a < b + c$$

Ez egyenlőtlenségnél fogva az 1) egyenletből az foly,

*) Riemann. Über die. Hyp. etc. (L. fen.)

**) L. XXII. tétel.

hogy $\cos \frac{A}{2}$ nem lehet zeróvá olyan háromszögnél, melynek csúcsai nincsenek ugyanazon egy egyenesben; a miből az következik, hogy ha ilyen háromszögöket kizárunk, akkor $\cos \frac{A}{2}$ vagy *minden* háromszögben positiv vagy *minden* háromszögben negativ. Ez utóbbi absurdumra vezetne, miután akkor nem volna háromszög, a melynek egy-egy szöge kisebb π-nél; tehát az első eset áll, azaz minden háromszögben *kisebb* egyegy szög π-nél.

Ennek előrebocsájtása után alakitsuk át a 2) egyenletet a XX_b előtti képletek segélyével; lészen:

$$\cos \frac{A+B+C}{2} = \frac{(e^{k'b} - e^{-k'b})(e^{k'c} - e^{-k'c}) \sin A}{2\left(e^{\frac{k'a}{2}} + e^{\frac{-k'a}{2}}\right)\left(e^{\frac{k'b}{2}} + e^{\frac{-k'b}{2}}\right)\left(e^{\frac{k'c}{2}} + e^{\frac{-k'c}{2}}\right)}$$

Azaz $\cos {}^1/_2 (A + B + C)$ negativ egyátalában nem lehet s zeró is csak akkor, de akkor mindenesetre, ha az oldalak közül valamelyik zéróvá fogy.

q. e. d.

Következmény. Ha k képzetes, akkor nem lehetne egyenes az a vonal, melynek mindegyik pontja adott egyenestől egyenlő távol van. — Mert ha ezen vonal egyenes volna, akkor akármelyik két pontjából függélyeket vonva az adott egyenesre, olyan egyenes vonalú négyszög állana előttünk, melynek mindenik szöge derékszög; ilyen pedig az előző tétel értelmében képzetes k mellett nem létezhetik.

XXVIII. Tétel. Ha CA egyeneshez B pontból BC = a függélyt és azon kivül BA ferdét vonok, akkor csak addig metszi e ferde a CA egyenest, mig a függély és ferde által képzett hegyes szög:

$$B < \text{arc cotg} \frac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{2}$$

A $C A$, BC és BA egyenesek ugyanis valósnak adott a és B mellett csak is úgy, de akkor mindenesetre képeznek háromszögöt, ha a XX_b egyenletek közül vett e három egyenlet

$$1) \quad \frac{e^{k'b} - e^{-k'b}}{e^{k'b} + e^{-k'b}} = \frac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{2 \text{ cotg } B}$$

$$2) \quad \frac{e^{k'c} - e^{-k'c}}{e^{k'c} + e^{-k'c}} = \frac{e^{k'a} - e^{-k'a}}{e^{k'a} + e^{-k'a}} \cdot \frac{1}{\cos B}$$

$$3)\quad \cos A = {}^1/_2\,(e^{k'a} + e^{-k'a}) \sin B$$

b, c és A számára valós megoldást szolgáltat. Ámde a mint

$$\cot B \gtrless {}^1/_2\,(e^{k'a} - e^{-k'a})$$

a szerint lészen

$$e^{k'b} - e^{-k'b} \lessgtr e^{k'b} + e^{-k'b}$$

mely egyenlőtlenségek közül az első valós értéket, a második ellenben képzetest engedvén meg b számára, tételünk be van bizonyítva. Mert a mint egy háromszögnek két oldala s az általuk bezárt szöge valós, azonnal valósak a háromszög egyéb darabjai is; mig forditva, ha valamelyik oldal képzetes stb.

Arra az esetre, ha

$$4) \ldots \quad \cot B = {}^1/_2\,(e^{k'a} - e^{-k'a})$$

az 1) és 2) egyenletekből az következik, hogy

$$5)\quad b = \infty \text{ és } c = \infty$$

a 3) egyenletből pedig

$$6)\quad A = 0$$

Következmény. A *CA* egyeneshez akármelyik *B* ponton át huzott ferdék között van tehát a BC függély *egy-egy* oldalán egy, de csak is egy olyan, a mely az CA egyenest *metsző* és *nem metsző* ferdék határáúl szolgál. Ezen egyenespárat a *CA*-hoz a *B* ponton átvont párhuzamosaknak nevezvén, a 4) 5) és 6) egyenletekből róluk azt tudjuk, hogy a CA egyenessel zéró szöget alkotnak, hogy azt (ellenkező irányban) végtelen távol metszik, s hogy végre *a BC függélylyel a 4) egyenlet által meghatározott hegyes szöget zárják be. E szöget az a függélynek megfelelő párhuzamos szögének nevezvén*, a 4-ből világos, hogy a párhuzamos szöge $\frac{\pi}{2}$-től zéróig fogy, ha *a* zérótól végtelenig nő.

Kitüzött czélunkat ezennel elértük*). Megmutattuk,

*) Továbbiakra nézve l. a fentebb idézetteken kivül *Beltrami* »Theoria fondamentale degli spazii di curvatura constante« 1868. Annali di Matematica Serie II. Pom. II. Milano *Christoffel* »Über die Transformation ganzer homogener Differentialausdrüke« 1869. *E. Schering*

hogy a nélkül, hogy a határtalan tér végetlen nagyságának s a párhuzamosságnak csak fogalmát is használná, lefejtheti az ember a számoló geometria alaptételeit és pedig egyszerü szerkezetü idomokon végzett bizonylatokkal; azután, hogy a nyert eredmények, *k* értékét *elegendő* kicsinynek véve, teljes összhangzásba hozhatók a gyakorlati legpontosabb mérésekkel is; továbbá, hogy a *k*-ra vonatkozó minden megszorítás nélkül is önmagában teljesen kifogástalan geometriának szolgáltatják az alapját;**) végre hogy ezen elméleti tekintetben kifogástalan geometria nem követeli meg se azt, hogy a határtalan tér végetlen nagy legyen, se azt, hogy a tér abban az esetben, ha végetlen nagy, Euklides úgynevezett XI. axiomájának megfeleljen, — nem *követeli* meg, de meg engedi.

Hogy valós vagy képzetes-e a *k* értéke, azaz milyen a tér a valóságban, az geometria utján semmi esetre se s metaphysika utján még kevésbé lesz bebizonyitható; *ha valahogyan* és *valaha* úgy bizonyára a világ- egyetemnek és physikai törvényeinek kiterjedtebb és pontosabb ismerete után lesz csak a kérdés eldönthető.

Kolozsvártt, 1875. évi április havában.

»Die Schwerkraft im Gaussischen Raume« Gött. Nachrichten 1870. Nro. 15. 1873. Nro. 6; »Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen« Gött. Nachr. 1873. Nro. 2 Fressdorf.« Über die Geometrie u. Potential Funktion im Gaussischen und Riemannschen Räumen.« Göttingen, 1873. Inaugural Dissertation.

**) Ezen igazság igen érdekes és tanúságos bizonylatásait nyeri a következő értekezésekben: *Beltrami* »Saggio di interpretazione della geometria Non-Euclidea«. Napoli 1868. *Julius König.* »Über eine reale Abbildung der s. g. Nicht-Euklidischen Geometrie« Göttinger Nachrichten 1872. p. 157. *Felix Klein* »Über die s. g. Nicht-Euklidische Geometrie« Math. Annalen Bd. IV. p. 573, Bd. VI. p. 112.

A

PROPELLER ÉS PERIPELLER FELÜLETEK

ELMÉLETÉHEZ.

RÉTHY MÓR,

A KOLOZSVÁRI M. K. TUD. EGYETEMEN NYILV. RK. TANÁR.

(Beterjesztetett a III. osztály ülésén 1875. nov. 8.)

BUDAPEST, 1876.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1876. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

Bármi tiszták és egyszerüek is valamely tudomány alapelvei, bármi szabatosak és biztosak módszerei, mégis megeshetik az a véletlenség, hogy hibás alapból kiinduló helytelen következtetés történetesen olyan eredményre vezet, a mely, megingathatatlan igazság kifejezése. Csodálatos, de tény hogy még a matézisben is fordul elő eset, a melyben utólagos vizsgálódás mutatja ki egy-egy tudósnak, mily hibás volt kiindulása, mily helytelen következtetése, holott eredményének helyes volta kifogás alá nem esik. Egy ilyen utólagos vizsgálat az, a mely alá Martin Lajos akadémiai lev. tagnak »Az erőműtani csavarfelületek« és »A vizszintes szélkerék elmélete« czimű értekezéseit vettem, mind a mellett is, hogy két szakavatott biráló véleménye kétséget nem hagyhatott az alap hibás s a következtetés helytelen volta iránt. Hátha az eredmény mégis helyes? Ily kérdés tárgyalása akárhányszor positiv eredményekre is vezethet, különösen ha a *tárgy* maga elég érdekes és sokoldalu vizsgálódásokra nyit tért. Vizsgálódásom a jelen esetben, mind a mellett, hogy Martin egy eredményének se sikerült *helyes voltát* kimutatnom, különálló positiv eredményekben elég jutalmazó volt.

Ez alkalommal a Martin értekezésében tárgyalt feladatok elsejével, a propellerek problemájával, leszek bátor foglalkozni, vele párhuzamban egy analog feladatot is tárgyalva, melyet a peripellerek problemájának fogunk nevezni (l. 1. §.II). Látni fogjuk, hogy a problémáknak néhány speciális megoldására könnyű reá jönni; e megoldások tulajdonságait azután tüzetesen tárgyaljuk s mellékesen ki fog az is tünni, *hogy a Martin-féle értekezés* a propeller problemáját illetőleg, nemcsak alapjában és következtetés módjában, de *végeredményében is helytelen.*

Midőn ezennel tanulmányaim méltatását a tekintetes magyar Tudományos Akadémia kegyébe ajánlani van szerencsém, egyúttal kedves kötelességemet végzem, midőn igen tisztelt tanártársamnak Szily Kálmán akadémiai rendes tagnak nyilvános köszönetemet fejezem ki f. é. junius hó második felében hozzám intézett leveléért, melyben velem vizsgálatai azon eredményét volt szives közölni, hogy az Archimedes-féle csavarfelület megoldását képezi a propellerek párt. diff. egyenletének; a nevezett időig még csak a propeller kúpokat ismertem; azóta jöttem reá egy az Archimedesit mint speciális esetet tartalmazó propeller-csavarra; azóta jöttem reá a peripeller problémára is, mely eddigelé tudtommal elméletileg tárgyalva nem volt még.

1. §.

A feladatok formulázása; első és második variatiók adott határvonal mellett.

A következő két feladattal fogunk foglalkozni:

I. Melyik az a felület, a mely folyadékban, a maga irányában u állandó sebességgel tovahaladó tengely körül w állandó szögsebességgel forogva, a folyadékra a haladás irányában a lehető legnagyobb nyomást gyakorolja.

II. Melyik az a felület, a mely adott u sebességű folyadékban a folyás irányával összeeső mozdulatlan tengely körül w állandó szögsebességgel forogva, a folyadékra olyan nyomást gyakorol, melynek nyomatéka, a tengelyre vonatkozólag, a lehető legnagyobb.

A I. feladat megoldását képező felületeket propellerfelületeknek, a II. feladatét peripeller-felületeknek fogjuk nevezni.

A föladatok megoldására a szóba jövő erőkifejtéseket azon hipotézis alapján fogjuk matematikai alakba önteni, melynek értelmében az ellenálló közeg a benne mozgó szilárd test df felületelemére az n normális irányában dN nyomást gyakorolván, e nyomás arányos a felületelemmel, s ennek a normális irányában a közeg saját *) mozgásához relative vett v_n sebessége négyzetével; úgy hogy tehát

$$1)\ dN = C\, df\, v_n^2,$$

hol C a folyadék természetétől s a használt mérték-egységektől függő állandó. Az I. feladat tárgyalásánál továbbá a foyadékot saját mozgás nélkülinek fogjuk tekinteni.

---

*) A folyadék »saját« mozgását ellentétben használjuk azon részhez képest, a melylyel a folyadék mozgását a belé jött szilárd testé módositja; a fentebbi hypotézis, miként ismeretes, ez utóbbi részt nem vévén tekintetbe, nélkülözi az elméleti alapot, de a gyakorlattal eléggé megegyező.

Válaszszuk a forgási tengelyt cilindrikus koordinátarendszer z tengelyéül s jelöljük a forgó felület variábilis pontjának radius vektorát r, meridiánus szögét φ és v-vel azon ívelem irányát, a melyet a pont forgás közben akármely időpontban leír. A forgó felületelemnek a z tengely irányába eső nyomás komponensét végre Z s ennek a tengelyhez képest vett momentumát M_z-vel jelölvén, lészen a hipotézis alapján:

$$2)\ Z = C\int df\, v_n^2 \cos(z, n)$$

$$3)\ M_z = C\int df\, r\, v_n^2 \cos(v, n)$$

mely egészletek terét a forgó felületek képezik; a bennök előforduló v_n, miként könnyen található, a w és u sebességek által igy fejezhető ki:

$$1a)\ v_n = u\cos(z, n) - w\, r\cos(v, n)$$

A 2) illetőleg 3) alatti egészletek lévén azon erőkifejtéseknek kifejezései, a melyeknek feladataink értelmében a forgó felület *alakja* által lehetőleg legnagyobbá kell tétetniök, ezen alak meghatározására mindenekelőtt az egészletek variatióit kell kiszámítanunk. A variátiók kiszámítása végett legyen a keresett felületek egyenletének alakja ez:

$$4)\ z = f(r, \varphi)$$

jelöltessék:

$$4a)\quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \varrho\ , & \frac{u}{w} &= k \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= \pi\ , & Cw^2 &= A \end{aligned}$$

és válaszszuk az erőegységet úgy, hogy $A = 1$ legyen.

E megállapodások mellett azután, miként könnyen levezethető:

$$\left.\begin{aligned} \cos(z, n) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}}} \\ \cos(r, n) &= \frac{\varrho}{\sqrt{1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}}} \end{aligned}\right\}\ 4b)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(v,n) &= \frac{\frac{\pi}{r}}{\sqrt{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}} \\ df &= r\,dr\,d\varphi\sqrt{1+\varrho_2+\frac{\pi^2}{r^2}} \\ v_n &= \frac{w\,(k-\pi)}{\sqrt{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}} \end{aligned}\right\} \quad 4b)$$

A feladatok értelmében legnagyobbá leendő erőkifejtések ezek:

$$5)\ Z = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\,d\varphi \frac{r\,(k-\pi)^2}{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}$$

$$6)\ M_z = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\,d\varphi \frac{r\,\pi\,(k-\pi)^2}{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}$$

E két egészlet közös alakja:

$$7)\ S = 2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\,d\varphi\,V\,(r,\varphi,\pi) \quad ,$$

első variátiójuk tehát, adott határvonalak mellett, ebben az alakban foglaltatik:

$$7a)\ \tfrac{1}{2}\,\delta S = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\frac{d}{d\varrho}\frac{\partial V}{\partial\pi}\right]\delta z\,dr\,d\varphi,$$

és második variátiójuk, ugyancsak adott határvonalak mellett ebben:

$$7b)\ \tfrac{1}{2}\,\delta S^2 = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\frac{d}{d\varrho}\frac{\partial V}{\partial\pi}\right]\delta^2 z\,dr\,d\varphi$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}+\frac{d^2}{dr.d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\partial\pi}+\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2}\right](\delta z)^2 dr\,d\varphi$$

A 7a) és 7b)-ben előforduló mennyiségek kiszámítva, a mi eseteinkben ezek:

A propeller erőkifejtésében:

$$2V = r(k-\pi)^2 s^{-1}$$

hol

$$s = 1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}$$

ehát

$$5a)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r} &= -r\varrho(k-\pi)^2 s^{-2}\\ \frac{\partial V}{\partial\pi} &= -r(k-\pi)s^{-1}-r^{-1}\pi(k-\pi)^2 s^{-2}\\ &= -r(k-\pi)\left(1+\varrho^2+\frac{k\pi}{r^2}\right)s^{-2}\end{aligned}\right.$$

és

$$5b)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} &= -r(k-\pi)^2 s^{-2}+4r\varrho^2(k-\pi)^2 s^{-3}\\ \frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\partial\pi} &= 2r\varrho(k-\pi)s^{-2}+4r^{-1}\varrho\pi(k-\pi)^2 s^{-3}\\ \frac{\partial^2 V}{\delta\pi^2} &= rs^{-1}-r^{-1}(k-\pi)(k-5\pi)s^{-2}\\ &\quad+4r^{-3}\pi^2(k-\pi)^2 s^{-3}\end{aligned}\right.$$

A peripeller erőkifejtésében:

$$2V = r\pi(k-\pi)^2 s^{-1}$$

lehát

$$6a)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\varrho} &= -\tfrac{1}{2}r\pi\varrho(k-\pi)^2 s^{-2}\\ \frac{\partial V}{\partial\pi} &= \tfrac{1}{2}r(k-\pi)(k-3\pi)s^{-1}-r^{-1}\pi^2(k-\pi)^2 s^{-2}\\ &= \tfrac{1}{2}r(k-\pi\left[(k-3\pi)s-2r^{-2}\pi^2(k-\pi)\right]s^{-2}\end{aligned}\right.$$

és

$$6b)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}=-r\pi(k-\pi)^2s^{-2}-4r\varrho^2\pi(k-\pi)^2-s^{-3}\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial\varrho\partial\pi}=-r\varrho(k-\pi)(k-3\pi)s^{-2}+4r^{-1}\varrho\pi^2(k-\pi)^2s^{-3}\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial\pi^2}=-r(2k-3\pi)s^{-1}-r^{-1}\pi(k-\pi)(3k-7\pi)s^{-2}\\ \qquad+4r^{-3}\pi^3(k-\pi)^2s^{-3}\end{cases}$$

---

2 §.

A propeller és peripeller felületek másodrendü partiális differentiális egyenletei; speciális megoldások.

A variátió számolás elvei szerint, az imént kiszámitott alakra hozott δS differentiálisa zéróval egyenlővé téve szolgáltatja azon felület differentiális egyenletét, a mely az S kettős egészletet legnagyobbá teszi, ha e felület szomszédságában $\delta^2 S$ *negativ*-nak bizonyul, és legkisebbé ellenkező esetben.

A propeller felületek másodrendü partiális differentiális egyenlete ennélfogva:

$$5c)\ o=\frac{d}{dr}\frac{r\varrho(k-\pi)^2}{\left[1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}\right]^2}+\frac{d}{d\varphi}\frac{r(k-\pi)(1+\varrho^2+k\pi r^{-2})}{\left[1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}\right]^2}$$

és a peripeller felületeké:

$$6c)\ o=\frac{d}{dr}\frac{r\pi\varrho(k-\pi)^2}{\left[1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}\right]^2}-\frac{d}{d\varphi}\frac{r(k-\pi)(k-3\pi)}{\left[1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}\right]}$$

Ezek tehát azon egyenletek, a melyeknek általános megoldását ismernünk kellene arra nézve, hogy feladatunkat teljesen megoldhassuk. Mivel azonban ez idő szerint kérdéses még, hogy általános megoldásuk véges alakban egyáltalában előállitható-e vagy sem, azért egyelőre speciális megoldások találásán leszünk.

I. Egy ilyen speciális megoldásra, a mely még hozzá a két egyenletnek közös megoldása és a k állandó értékétől is független, azon észrevétel vezet, a melyet az előbbi § 5) és 6) alatti képletének lefejtése után tettünk. Azt állitjuk ugyanis, hogy ha általánosan

$$7)\ S = \int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\,r\,d\,\varphi\,V\,(r, \pi, \varrho)$$

azaz ha a *V* függvény a *z* és φ koordinátákat explicite nem tartalmazza, akkor az S maximuma vagy minimuma által megkövetelt

$$o = \frac{d}{dr}\frac{\delta V}{\delta \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\delta V}{\delta \pi}, \qquad 8)$$

másod rendü pártiális differentiális egyenletnek speciális megoldását képezi

$$z = a\varphi + f\,(r)\,, \qquad 9)$$

hol *a* állandót jelent az f (r) pedig ezen közönséges, első rendü differentiális egyenletnek képezi a megoldását:

$$\text{const.} = \left(\frac{\delta V}{\delta \varrho}\right)\pi = a\,;\ \varrho = f'\,(r)\,, \qquad 9a)$$

Valóban a 8) egyenlet igy irható:

$$o = \frac{d}{dr}V_1\,(r\,,\pi\,,\varrho) + \frac{d}{d\varphi}V_2\,(r\,,\pi\,,\varrho)$$

mely egyenlet a 9) segélyével ezzé lesz:

$$o = \frac{d}{dr}V_1\left(r\,,a\,,f'\,(r)\right) + \frac{d}{d\varphi}V_2\left(r\,,a\,,f'\,(r)\right)$$

Mivel pedig V_2 (r, a, f (r)) csakis az *r*-nek függvénye tehát marad:

$$o = \frac{d}{dr}V_1\left(r\,,a\,,f'\,(r)\right)$$

mely egyenletnek első egészlete:

$$\text{const.} = V_1\left(r\,,a\,,f'\,(r)\right)$$

a 9a) alatti diff. egyenlettel azonos.

A nevezett helyen tett észrevétel tehát arra vezet, hogy *mind a propeller, mind a peripellerfelületek pártiális diff. egyenletének megoldását képezi ezen csavarfelületet képviselő egyenlet:*

$$10)\ z = a\varphi + f\,(r)$$

hol a állandót jelent, az f (r) pedig ebből az első rendü közönséges diff. egyenletből határozandó meg (1 § 5a, 5b.)

$$10a)\ \text{const.} = \frac{r\, f'(r)}{\left[1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Ezen diff. egyenlet megoldásával később fogunk foglalkozni. Tegyük föl, hogy megoldottuk; akkor az f (r) segélyével a 10) által képviselt felületet igy nemzhetjük: Egy valamelyik meridiánus síkban a

$$10b)\ z = f(r)$$

vonalat szerkesztvén, képzeljük azután, hogy e meridiánus sik a benne lévő vonallal együtt kettős mozgást végez és pedig hogy a z tengely körül állandó szögsebességgel forogva egyuttal a z tengely irányában állandó sebességgel tova csuszik. A 10b) által defineált (általánosan) görbe vonal e kettős mozgás folytán a 10) által képviselt, (netaláni propeller és peripeller) felületet nemzi.

E görbe vonal azon esetre, ha a 10a) egyenlet baloldalán álló constans $=$o, egyenessé degenerál, és pedig — miután akkor

$$f(r) = o$$

azaz

$$f(r) = \text{constans},$$

tehát olyan egyenessé, a mely a Z tengelyt derék szög alatt metszi.

A 10 egyenlet tehát csavarfelületeket képvisel és közöttük az Archimedes-félét is. *)

---

*) Nem lesz érdektelen megjegyezni, hogy az Archimedes-féle csavarfelület megoldás marad ugy is, ha a vizsgálatainkban alapul vett hipotézis akként általánosittatik, hogy a szilárd test elemére gyakorolt normális nyomás

$$d\,N = C\,.\,d\,f\,.\,F\,(v_n)\quad,$$

hol az F akármilyen differentiálható függvényt jelenthet. Ekkor ugyanis

$$Z = C \int df\,.\,F\,(v_n)\,.\,\cos\,(z\,,n)$$

$$M_z = C \int df\,.\,r\,F\,(v_n)\cos\,(v\,,n)$$

II. A propeller és peripeller-felületek pártiális diff. egyenletének egy másik speciálisabb és nem közös megoldására jövünk azon észrevétel által, hogy az erőkifejtések differentiálisa homogénná válik (π, r)-ben, ha k = o tétetik. Ha ugyanis általánosabban

$$11)\ S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\, d\varphi\, V(r, \varphi, \pi, \varrho)$$

azaz a V függvény nem tartalmazza a z koordinátát explicite, akkor az S maximuma avagy minimuma által megkövetelt

$$11a)\ 0 = \frac{d}{dr}\cdot\frac{d}{\delta\varrho}\cdot\frac{dV}{d\varrho} + \frac{d}{d\varphi}\cdot\frac{\delta V}{\delta\pi}$$

másod rendü pártiális differentiális egyenletnek megoldását képezi

---

tehát a 4) alatti képletek fölhasználásával:

$$Z = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\, d\varphi\, r\, F_1 \left[\frac{(k-\pi)}{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}\right]$$

$$M_z = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} dr\, d\varphi\, r\,\pi\, F_1 \left[\frac{(k-\pi)^2}{1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}}\right].$$

A Z és M_z alakjából pedig a 9) 9a) alatti tétel értelmében az következik, hogy Z és M_z-nek, adott határvonalak melletti, első variátióját zéróvá teszi:

$$z = a\varphi + f(r)$$

ha f (r) meghatározására e diff. egyenlet szolgál:

$$\text{constans} = \frac{r\, f'(r)}{\left[1+\frac{a^2}{r^2}+f'(r)^2\right]^2} F_1' \left[\frac{(k-a)^2}{1+f'(r)^2+\frac{a^2}{r^2}}\right].$$

Ámde ezen egyenletnek abban a speciális esetben, ha a baloldalon álló constans = o, megoldását képezi:

$$f'(r) = o$$

azaz

$$f(r) = \text{constans}$$

12) $z = r\, f(\varphi) + \text{const.}$

által képviselt kúpfelület az esetben, ha $V(r, \varphi, \pi, \varrho)$ függvény (π, r) változókban homogén.

Valóban mert V homogén, azért a $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ is ép olyan rangú a $\frac{\partial V}{\partial \pi}$ pedig egygyel alantabb rangú homogén mennyiség lesz a (π, r) változókban; ez okból a 11a) egyenlet a r változóban *magában véve* homogénná válik, mihelyt benne a 12) értelmében

$$\pi = r\, f(\varphi)$$
$$\varrho = f(\varphi)$$

helyettesités megtétetik. A 11a) alatti pártiális diff. egyenletből ennélfogva az imént nevezett substitutió után az r változó mint közös szorzó kiesvén, a mi marad nem más, mint egy az $f(\varphi)$ meghatározására szolgáló közönséges, legföljebb másodrendü differentiális egyenlet.

Az imént tett észrevétel tehát arra vezet, hogy

II a) *a propeller-felületek pártiális diff. egyenletének abban az esetben, ha k a π-hez képest elenyésző, megoldását képezi*

12) $z = r\, f(\varphi) + \text{const.}$

hol $f(\varphi)$ meghatározására ezen egyenlet szolgál:

$$o = \frac{3\, f(\varphi)\, f'(\varphi)^2}{\left[1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2\right]^2} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\left[1 + f(\varphi)^2\right] f'(\varphi)}{\left[1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2\right]^2}$$

mely egyenlet kifejtve és rendezve, [reális megoldást nem adó szorzók elhagyása után] *ezzé lesz:*

12a) $P\, f'(\varphi) + Q\, f''(\varphi) = o$

hol

$$\begin{cases} P = f(\varphi)\, f'(\varphi) \left\{ 5\left[1 + f^2(\varphi)\right] + f'(\varphi)^2 \right\} \\ Q = \left[1 + f(\varphi)^2\right] \left\{ -\left[1 + f(\varphi)^2\right] + 3\, f(\varphi)^2 \right\}; \end{cases}$$

és hogy

IIb) *a peripellerek partiális diff. egyenletének abban az esetben, ha k elenyésző a π-hez képest, megoldását képezi*

$$12)\ z = r f(\varphi) + const.$$

hol $f(\varphi)$ meghatározására ezen egyenlet szolgál:

$$o = \frac{8 f(\varphi) f'(\varphi)^3}{1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2} +$$

$$+ \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{3 f'(\varphi)^2}{1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2} - \frac{2 f'(\varphi)^4}{\left[1 + f(\varphi)^2 + f(\varphi)^2\right]^2}\right]$$

mely egyenlet kifejtve és rendezve, [reális megoldást nem nyujtó szorzók elhagyásával] *ezzé lesz:*

$$12b)\ o = P f'(\varphi) + Q f''(\varphi)$$

hol

$$P = f(\varphi) f'(\varphi)\left[-7 (1 + f(\varphi)^2 - 3 f'(\varphi)^2\right]$$

$$Q = \left[1 + f(\varphi)^2\right]\left[3 (1 + f(\varphi)^2) - f'(\varphi)^2\right]$$

Ezen másod rendü közönséges diff. egyenletek első egészlete közvetlenül fölirható a következő könnyen verifikálható tétel alapján, mely tétel különben könnyen általánosbitható. Ha ugyanis

$$P f'(\varphi) + Q f''(\varphi) = o$$

az adott másod rendü diff. egyenlet, lévén

$$P = f(\varphi) f'(\varphi)\left\{a\left[1 + f(\varphi)^2\right] + a' f'(\varphi)^2\right\}$$

$$Q = \left[1 + f(\varphi)^2\right]\left\{b\left[1 + f(\varphi)^2\right] + b' f'(\varphi)^2\right\},$$

hol az a, a', b, b' állandók között ez a relatio áll fenn:

$$a + b = a' + b';$$

akkor az adott egyenletnek első integrális egyenlete:

$$\ldots c = \left[1 + f(\varphi)^2\right]^{x_1}\left[1 + f^2(\varphi) + f'(\varphi)^2\right]^{x_2} f'(\varphi)^{2x_3}$$

hol

$$x_1 : x_2 : x_3 = a' : a - a' : b\ .$$

A tétel alkalmazásával a 12a) első integralis egyenlete ez lesz:

$$12a')\quad \Big[1+f(\varphi)^2\Big]\Big[1+f(\varphi)^2+f'(\varphi)^2\Big]^4 f'(\varphi)^{-2} = const.$$

és a 12b) alattié:

$$12b')\quad \Big[1+f(\varphi)^2\Big]^3\Big[1+f(\varphi)^2+f'(\varphi)^2\Big]^4 f'(\varphi)^{-6} = const.$$

A következő §-ban megmutatjuk, hogy $f(\varphi)$ hyperelliptikus egészletek által fejezhető ki. Az igy kiszámitott $f(\varphi)$ segélyével azután a speciális megoldásokat képező kupfelületeket az $r=1$ hengerre rajzolt

$$z = f(\varphi)$$

vezérvonal útján könnyü lesz szerkeszteni.

III. A szóban lévő partiális diff. egyenleteknek, a II pont első felében bebizonyitott tétel alapján, könnyen jutunk speciális megoldásához abban az esetben is, ha k a π-hez képest végtelen nagynak tekinthető. Ugyanis:

IIIa.) *A propeller felületek pártiális diff. egyenletének a nevezett esetben megoldását képezi:*

$$13)\quad z = r f(\varphi) + const.$$

hol az $f(\varphi)$ meghatározására ezen másodrendü közönséges diff. egyenlet szolgál:

$$o = P\Big[f(\varphi) + f''(\varphi)\Big]$$

lévén

$$P = 1 + f(\varphi)^2 - 3 f'(\varphi)^2 ,$$

mely egyenletnek P = o-ból folyó partikuláris megoldása ez:

$$13a)\quad f(\varphi) = \frac{1}{2}\left[e^{(\varphi+\varphi_0)\frac{1}{\sqrt{3}}} - e^{-(\varphi+\varphi_0)\frac{1}{\sqrt{3}}}\right]$$

és $f(\varphi) + f''(\varphi)$ = o-ból folyó *általános megoldása*

$$13a')\quad f(\varphi) = c \sin(\varphi + \varphi_0)$$

hol c és φ_0 állandókat jelentenek.

IIIb. *A peripellerek pártiális diff. egyenletének ugyanezen esetben spec. megoldását képezi:*

$$13)\quad z = r f(\varphi) + const.$$

hol $f(\varphi)$ meghatározására ezen másodrendű közönséges diff. egyenlet szolgál:

$$o = P\Big(f(\varphi) + f'(\varphi)\Big)$$

lévén

$$P = 3\Big[1 + f(\varphi)^2\Big] - f'(\varphi)^2,$$

mely egyenletnek $P = o$-ból folyó partikuláris megoldása:

$$13b)\ f(\varphi) = \frac{1}{2}\Big[e^{(\varphi + \varphi_0)\sqrt{3}} - e^{-(\varphi + \varphi_0)\sqrt{3}}\Big]$$

és $f(\varphi) + f''(\varphi) = o$-ból *általános megoldása:*

$$13b')\ f(\varphi) = c \sin(\varphi + \varphi_0)$$

hol c és φ_0 állandókat jelentenek.

---

3. §.

A $\delta S = o$ speciális megoldására szolgáló I. r. közönséges diff. egyenletek egészelése; a megoldást képező felületek nemzőjének, illetőleg vezérvonalának szerkesztése.

A propellerek és peripellerek ($\delta S = o$) pártiális diff egyenletének az előbbi § 10) és 10a) egyenletei értelmében a k-nak akármilyen értéke mellett speciális megoldását képez a csavar felületet képviselő

$$10)\ z = a\,\varrho + f(r)$$

egyenlet, melyben a állandót jelent, az f (r) pedig ebből az I r. köz. diff. egyenletből határozandó meg:

$$10a)\ \text{const.} = \frac{r\,f'(r)}{\Big[1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2\Big]^2}$$

A meghatározást már mostan a következő egyenlettel defineált s segédvariábilis által fogjuk eszközölni:

$$10b)\ s = 1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2$$

a számitás némi egyszerüsitése céljából e jelölésekkel élve:

$$10c)\ \frac{z}{a} = z_1\ ;\ \frac{r}{a} = r_1\ ;\ \text{const} = al.$$

Állapodjunk továbbá abban meg, hogy az al értéke positiv. A megnevezett jelölések mellett a 10a) alatti egyenlet ezzé lesz:

$$10d)\ ls^2 = r_1 \frac{dz_1}{dr_1}.$$

A 10b) alatti egyenletet azután igy irva:

$$\frac{r^2}{a^2} s = 1 + \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2} f'(r)^2,$$

egyesitjük a 10c) és 10d) alattiakkal, mi által ezzé lesz:

$$\begin{aligned} r_1^2 s &= 1 + r_1^2 + \left(r_1 \frac{dz_1}{dr_1}\right) \\ &= 1 + r_1^2 + l^2 s^4 \end{aligned}$$

honnan r_1^2 ekkép határozódik meg:

$$10e)\ r_1^2 = \frac{l^2 s^4 + 1}{s - 1}$$

Annak elérésére, hogy z_1 is az s által legyen kifejezve, a 10d)

$$r_1 \frac{dz_1}{ds} \cdot \frac{ds}{dr_1} = l s^2$$

egyenletből indulva ki, ebbe belé teszszük a 14 c)-ből kiszámitott

$$10f)\ \frac{dr_1}{ds} = \frac{3l^2 s^4 - 4l^2 s^3 - 1}{2 r_1 (s - 1)^2}$$

deriváltat, s r_1 helyett 10e)-ből folyó értékét. Akkor lészen belőle:

$$10g)\ \frac{dz_1}{ds} = \frac{ls^2 (3 l^2 s^4 - 4 l^2 s^3 - 1)}{2 (s - 1)(l^2 s^4 + 1)}$$

vagy kifejtve:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{ds} &= \frac{1}{2} \left\{ 3 s - 1 - \frac{l^2 s^4 + 4 s^2 - 4 s + 1}{(s - 1)(l^2 s^4 + 1)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 3 s - 1 - \frac{1}{s - 1} - \frac{4 s}{l^2 s^4 + 1} \right\} \end{aligned}$$

honnan végre egészelés által

$$z_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} s^2 - s - \text{lognat}(s - 1) - 2 \overset{-1}{l} \text{ arc tg } l s^2 \right.$$

A 10a) által defineált $f(r)$ függvény az s segédvariábilis által igy fejeződik tehát ki:

$$10\text{h})\begin{cases} f(r)=\dfrac{al}{2}\left\{\dfrac{3}{2}s^2-s-\text{lognat}\,(s-1)-2l\,\overset{-1}{\text{arctg}}\,ls^2\right\}+\text{const.} \\ r=\dfrac{a\sqrt{l^2s^4+1}}{\sqrt{s-1}} \end{cases}$$

Ezek után lássuk, milyen azon vonal, melyben egyvalamelyik meridiánus sik $\varphi = \varphi_0$ a 10) alatti egyenletek által meghatározott csavarfelületet metszi. E vonal egyenlete

$$z = a\,\varphi_0 + f(r)$$

tehát

$$z = f(r) + \text{constans}.$$

Fusson már mostan s minden értéket végig $+\infty$-től $-\infty$-ig; akkor 10h) egyenletekből folyólag z és r *képzetesek maradnak* a

$$-\infty < s < +1$$

intervallumban; ha $s - 1 = +\varepsilon$, hol ε végtelen kicsiny absolut értéket jelent, akkor z és r *positiv végtelen nagy; ezentul az*

$$1 < s < +\infty$$

intervallumban z és r *mindenütt véges és valós értékkel birnak s folytonosan változnak* az $s = +\infty$-gyal szintén $+\infty$-*gyá* lesznek és pedig, miként könnyü belátni, felsőbb rendü végtelen nagygyá, mint a mikor $s - 1 = +\varepsilon$ volt. A z és r ezen menetéből mindenek előtt az következik tehát, hogy csak a *valós* értékeket tekintve az r minden értékének *két* z érték felel meg és hogy r és z valahol minimum. A minimum helye a 10f) és 10g) értelmében

$$3\,l^2 s^4 - 4\,l^2 s^3 + 1 = 0$$

egyenlet által határozódván meg, z és r-re közös. Ezen egyenletnek csak *egy* positiv és *egy* negativ gyöke van, továbbá a positiv nagyobb egynél; tekintetbe véve tehát, hogy a negativ s mellett z és r képzetes, a z és r-nek mint s függvényeinek csak *egy* minimumok van. Az r ezen minimuma zérónál nagyobb, ha csak nem $l = 0$, mert ha l véges érték, akkor r zéró egyáltalában sehol se lehet.

A $\dfrac{dz}{dr}$ *lefolyását* a 10d)-ből fogjuk következtetni; belőle

$$\frac{dz_1}{dr_1} = \frac{l\,s^2}{r_1},$$

tehát 10_c és 10_e segélyével:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{al\,s^2}{r} = \frac{ls^2\sqrt{s-1}}{\sqrt{l^2 s^4 + 1}}$$

s ebből *s* szerint való differentiálás által:

$$\frac{d^2z}{dr\,ds} = \frac{l\,s\,(l^2 s^5 + 5\,s - 4)}{2\,(l^2 s^4 + 1)\sqrt{(s-1)(l^2 s^4 + 1)}},$$

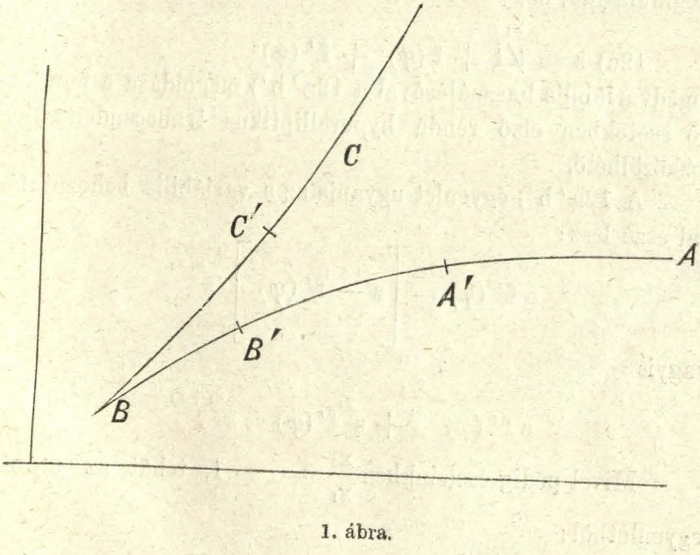
mely két utóbbi képletből az következik, hogy $\frac{dz}{dr}$ *zérótól végtelenig* és pedig *folytonosan nő, ha az s a többször nevezett intervallumot befutja.*

Ez utóbbi egyenletnek a 10 f)-fel egyesitése által végre ez ered:

$$\frac{d^2z}{dr^2} = al\,\frac{s\,(s-1)\,(l^2 s^5 + 5\,s - 4)}{3\,l^2 s^4 - 4\,l^2 s^3 - 1},$$

mely egyenletből világos, hogy a tárgyalt vonal *görbülete* absolut értékét tekintve, *zérótól végtelenig nő, ha s az egységtől addig az értékig nő, hol* miként fentebb láttuk a *z* és *r legkisebb,* — hogy továbbá ezen pontig a görbület *negativ* s ezen tul *positiv* végtelentől véges értékeken át ismét a végtelen érték felé tart.

A görbe vonal tehát ilyen alaku:



1. ábra.

Ha s 1-től ∞-ig nő, akkor a görbe vonal variábilis pontja a végtelenből A B C irányban ismét a végtelenség felé tart.

Ha az l állandónak értéke zéró felé convergál, akkor az A B rész egyenessé degenerál, mely határ esetben a B pont a Z tengelybe esik stb.

II. A $\delta S = o$ egyenletnek arra az esetre, ha $k = o$, az előbbi §-ban nyert eredmények szerint megoldását képezi ezen, kupfelületet képviselő, egyenlet:

12) $Z = r\,f(\varphi) + \text{const.}$,

hol az $f(\varphi)$ meghatározására a 12a'b') értelmében ezen I r. közönséges diff. egyenlet szolgál:

$$12a'b')\ \text{const.} = \left[1 + f(\varphi)^2\right]^{x_1} \left[1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2\right]^{x_2} f'(\varphi)^{2x_3}$$

lévén *a propeller esetében*

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 4 : -1\,,$$

és *a peripeller esetében*

$$x_1 : x_2 : x_3 := 3 : 4 : -3\,.$$

Feladatunkul itt az $f(\varphi)$ meghatározását tüzzük ki s megmutatjuk, hogy

$$12c)\ s = \sqrt[x_1]{1 + f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}$$

segédvariábilis használásával a 12a'b') megoldása a fennforgó esetekben első rendü hyperelliptikus transcendensekkel eszközölhető.

A 12a'b') egyenlet ugyanis az s variábilis behozatalával ezzé lesz:

$$c\,f'(\varphi)^{-2x_3} = \left[s^{x_1} - f'(\varphi)^2\right]^{x_1} s^{x_1 x_2}$$

vagyis

$$c\,f'(\varphi)^{-\frac{2x_3}{x_1}} + s^{x_2} f'(\varphi) = s^{x_1 + x_2}\,.$$

Mivel pedig eseteinkben $\frac{x_3}{x_1} = -1$, tehát az utóbbi egyenletből:

$$12d)\ f'(\varphi^2) = \frac{s^{x^2+x_2}}{s^{x_2}+c};$$

honnan a 12c felhasználásával:

$$12e)\ f(\varphi)^2 = \frac{-s^{x_2}+cs-c}{s^{x_2}+c},$$

mely egyenlet differentiálva, rövid reduktió után arra vezet, hogy

$$12f)\ d\varphi = \frac{c}{2}\frac{\left((1-x_2)\,s^{x_2}+c\right)ds}{\left(s^{x_2}+c\right)\sqrt{s^{x_1+x_2}\left(-s^{x_2}+cs-c\right)}}$$

A 12a'b') differentiális egyenlet ezeknél fogva a propeller esetében e két egyenletben nyeri megoldását:

$$12a'')\begin{cases}\varphi = \dfrac{c}{2}\displaystyle\int_{s_0}^{s}\frac{(-3s^4+c)\,ds}{(s^4+c)\,s^2\sqrt{s\,(-s^4+cs-c)}}\\[2ex] f(\varphi) = \sqrt{\dfrac{-s^4+cs-c}{s^4+c}}\end{cases}$$

és a peripeller esetében e kettőben:

$$12b'')\begin{cases}\varphi = \dfrac{c}{2}\displaystyle\int_{s_0}^{s}\frac{(-3s^4+c)\,ds}{(s^4+c)\,s^3\sqrt{s\,(-s^4+cs-c)}}\\[2ex] f(\varphi) = \sqrt{\dfrac{-s^4+cs-c}{s^4+c}}\end{cases}$$

mi által állitásunk igaznak bizonyult.

Ezek után nem okoz semmi nehézséget a kupfelület *vezérvonalának* discussiója, annak tekintvén azon görbét, melyben az r=1 henger kupfelületünket metszi, — melynek egyenletei ennélfogva:

$$\begin{cases} z = f(\varphi) + \text{const.}\\ r = 1\ .\end{cases}$$

Az

$$F(s) = -s^4 + cs - c = o$$

egyenletnek ugyanis, — melynek két összeeső gyöke van, ha

$c = \frac{4^4}{3^3}$ és két valós positiv gyöke, ha $c > \frac{4^4}{3^3}$, — kisebb valós gyökét s_1-gyel s a nagyobbat s_2-vel jelölvén, az F (s) csak e két gyökön belől positiv; *ennélfogva az f (φ) csakis addig, de addig minden esetre valós, mig s az*

$$s_1 < s < s_2$$

intervallumot átfutja, legnagyobb értékét elérve, ha

$$s^4 = \frac{c}{4};$$

az f (φ) két határértéke zeró, legnagyobb értéke

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[4]{27\,c} - 4}$$

A $d\varphi$ *positiv a nevezett intervallum azon részében, hol*

$$s_1 < s < \sqrt[4]{\frac{c}{3}},$$

negativ a másikban; ennélfogva a φ ugyanott éri el legnagyobb értékét, a hol f (φ), a miből az foly, hogy vezérvonalunknak e helyen hegye van.

Az f' (φ) sehol se lehetvén zéró se végtelen nagy, jegyét nem változtathatja; *jegye* tehát a $\sqrt{\;}$ jegyről eddig hallgatva tett megállapodásunk szerint *positiv. Lefolyásának megismerésére* a 12c)-ből a 12f) felhasználásával kiszámitott

$$f''(\varphi) = \frac{1}{c}\,\frac{s^{x_1+x_2-1}\left[x_1 s^{x_2} + c(x_1+x_2)\right]}{(1-x_2)\,s^{x_2}+c}\sqrt{\frac{-s^{x_2}+c\,s-c}{s^{x_2}+c}}$$

vezet. E szerint ugyanis *a vezérvonal görbülete zéró az* s_1 *és* s_2 *helyen; végtelen nagy a hegynél;* és szabatosabban: zérótól a positiv végtelenségig nő az

$$s_1 < s < \sqrt[4]{\frac{c}{3}}$$

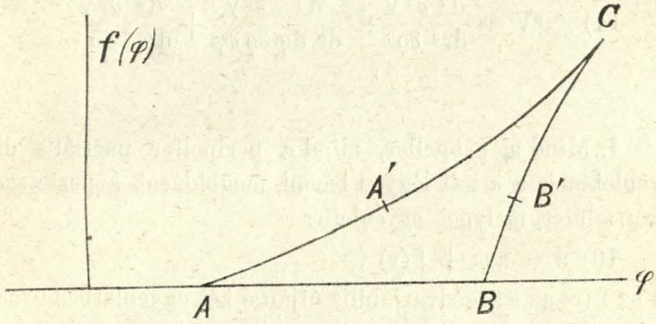
intervallumban, és $-\infty$-től a negativ értékeken át zéróig a hátralévő

$$\sqrt[4]{\frac{c}{3}} < s < s_2$$

intervallumban.

Minél nagyobb c, annál nagyobb a φ és f (φ) maximuma, azaz annál kiterjedtebb a görbe.

A görbe alakja mindezeknél fogva a henger palástját sikra teritve ilyenforma:



2. ábra.

Az A pont az $s = s_1$ értéknek, a C pont $s = \sqrt[4]{\frac{c}{3}}$-nak, s a B pont $s = s_2$ értéknek felel meg.

---

4. §.

A második variátiók elöjegye a $\delta S = o$ talált spec. megoldásai esetében.

Miután a propellerek és peripellerek $\delta S = o$ partiális diff. egyenleteinek talált speciális megoldásai által képviselt felületeket szerkesztettük, vizsgáljuk meg, hogy e felületek leghatályosabb propeller, illetőleg peripeller felületül szolgálhatnak-e? E vizsgálat keresztülvitele, miként ismeretes, csak annak eldöntésétől függ, hogy a $\delta^2 S$ előjegye a variábilisoknak legalább bizonyos határai között mindenütt negativnak bizonyul-e be, vagy nem, ha a $\delta S = o$ megoldása belé helyetteztetik. Tekintettel erre, a következő (1 §, 7b) mennyiség lesz az egyes esetekben megvizsgálandó;

$$\frac{1}{2}\delta^2 S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{d^2}{dr\,d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi} + \frac{d^2}{d\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2}\right](\delta z)^2 dr d\varphi$$

vagyis a δ^2S-ét eldöntő jegyénél fogva ezen mennyiség:

$$14)\ \triangle^2 V = \frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} + \frac{d^2}{dr\,d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\varphi} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2}$$

I. Mind a propeller, mind a peripeller partiális diff egyenletének, a k lett légyen bármi, megoldását képezte azon csavarfelület, melynek egyenlete:

$$10)\ z = a\varphi + f(r)\ ,$$

hol az f (r) az *s* segédvariábilis útján e két egyenletben nyerte kifejezését:

$$10a)\left\{\begin{array}{l} f(r) = \frac{al}{2}\left[\frac{3}{2}s^2 - s - \text{lognat}(s-1) - 2l\,\text{arctg}\,ls^{-1 \atop 2}\right] + \text{const.} \\ r^2 = \frac{a(l^2 s^4 + 1)}{s-1}\ . \end{array}\right.$$

E felületnek (l = o utján) speciális esetét képezte az Archimedes-féle csavarfelület.

Az általánosabb esetben ép ugy, mint e speciálisban, mind a $\varrho = \frac{dz}{dr}$, mind a $\pi = \frac{dz}{d\varphi}$ teljesen független lévén a φ variábilistól, behelyettezésükkel a $\triangle^2$V értékében előforduló

$$\frac{d^2}{dr\,d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi} \text{ és } \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2}$$

mennyiségek zéróvá lesznek, ugy hogy itten:

$$15)\ \triangle^2 V = \frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2}$$

Ia.) Az Archimedes-féle csavarfelület esetében:

$$z = a\varphi + \text{constans}$$

egyenletéből folyólag

$$\varrho = \frac{dz}{dr} = o$$

$$\pi = \frac{dz}{d\varphi} = a$$

$$s = 1 + \pi^2 + \varrho^2 = 1 + \frac{a^2}{r^2};$$

tehát az 1 § 5b és 6b egyenletekből, akár propeller, akár peripeller felületekről legyen szó, [positiv állandó szorzókat elhagyva]:

$$\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \varrho^2} = - r^5 (r^2 + a^2)^{-2}$$

honnan

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \varrho^2} = -(r^6 + 5a^2 r^4)(r^2 + a^2)^{-3};$$

következőleg még egyszer differentiálás után a 15) alatti jelölés használásával:

$$\triangle^2 \dot{V} = 4a^2 r^3 \frac{r^2 - 5a^2}{(r^2 + a^2)^4}$$

mely kifejezés negativ vagy positiv, a szerint a mint

$$\frac{a^2}{r^2} \gtrless 0 .$$

Ennélfogva a 14) 14a) és 15) tekintetbe vételével a második variátio jegye negativ, ha az Archimedesi felületen $\frac{a}{r}$ *mindenütt* nagyobb $\sqrt{\frac{1}{5}}$-nél, — positiv ellenkező esetben és határozatlan jegyü és értékü olyan darabján, a melynek egy részén $\frac{a}{r}$-nagyobb $\sqrt{\frac{1}{5}}$-nél, más részén pedig kisebb.

Eddigi vizsgálataink eredményét szabatosan kifejezendők, gondoljunk tehát, tetszés szerint választva az a értékét Archimedes-féle csavarfelületet s ennek tengelye körül r_0 sugarú hengert szerkesztve; a csavarfelület a hengerre közönséges csavarvonalat fog rajzolni

$$\alpha = \text{arctg}\, \frac{a}{r_0}$$

emelkedési szöggel. A henger r^0 sugarát ugy válaszszuk, hogy

$$\alpha = \text{arctg} \sqrt{\frac{1}{5}} = 24^0\, 5'\, 41'' \cdot 5 \cdots$$

legyen.

Akkor:

1.) *Az Archimedes-féle csavarfelületnek e hengeren belül eső fele*, s ezen félnek akármely része is, *vele közös határvonalú más felületekhez képest maximális hatású propeller és peripeller.*

2.) *Az Archimedes-féle felületnek a hengeren kivül eső fele,* vagy ennek akármely része is, vele közös határvonalú más felületekhez képest *minimális hatású propeller és peripeller.*

3.) Az Archimedes-féle felületnek olyan része, a mely *mind a két félből tartalmaz darabot, se maximális se minimális hatású* propeller vagy peripeller.

Ib) Ezzel el van döntve az is, hogy a 10, 10h) egyenletek által defineált általánosabb csavarfelületnek is megfelel bizonyos része a maximális propeller és perip. föltételének, mihelyt az l értéke elegendő kicsiny; megfelel, miután ezen egyenletek jobb oldalai folytonos függvényei az l állandónak és l elenyésztével az Archimedes-féle csavarfelületet adják. Mind a mellett külön megvizsgáljuk ezen általánosabb esetben is a második variátiót az okból, mert általánosabb csavarfelületünk nemzővonala két ágból áll s ezen ágak közül csak az egyik degenerál az Archimedesi csavarfelület egyenes vonalú nemzőjévé, úgy hogy ennél fogva a másik ágról a maximum kérdését illetőleg semmit se tudunk.

Általánosabb csavarfelületünk esetében már mostan:

$$\varrho = \frac{dz}{dr} = f'(r) \; ; \; \pi = \frac{dz}{d\varphi} = a$$

s láttuk a 3 §. első felében, hogy 10d)

$$\frac{dz}{dr} = \frac{l s^2}{r_1}$$

és 10f)

$$\frac{ds}{dr_1} = \frac{2 r_1 (s-1)^2}{3 l^2 s^4 - 4 l^2 s^3 - 1}$$

hol

$$r_1 = \frac{r}{a}$$

Ezek behelyettezésével lészen a propeller és peripeller esetére közösen az 1 §. 5b és 6b útján

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = \frac{r_1\,(3\,l^2\,s^4 - 4\,l^2\,s^3 - 1)}{s^2\,(l^2\,s^4 + 1)}$$
$$= \frac{3\,l^2\,s^4 - 4\,l^2\,s^3 - 1}{r_1\,s^2\,(s - 1)}$$

hol állandó *positiv* szorzók elhagyattak. Ezen egyenletből

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} \overset{\cdot}{=} \frac{24\,l^2\,(s - 1^2)}{3\,l^2\,s^4 - 4\,l^2\,s^3 - 1} + 4\,s^{-3} - 5\,s^{-5} - \frac{4\,l^2\,(s^2 - s)}{l^2\,s^4 + 1}$$

tehát

$$\triangle^2\,V \overset{\cdot}{=} \frac{ds}{dr^1}\left\{\frac{48\,l^2\,(s - 1)}{3\,l^2\,s^4 - 4\,l^2\,s^3 - 1} - \frac{24.12\,l^4\,s^2\,(s - 1)^3}{(3\,l^2\,s^4 - 3\,l^2\,s^3 - 1)^2}\right.$$
$$\left. - 12\,s^{-4} + 10\,s^{-3} - \frac{4\,l^2\,(s - 1)}{l^2\,s^4 + 1} + \frac{(4\,l^2)^2\,s^4\,(s - 1)}{(l^2\,s^4 + 1)^2}\right\}$$

A $\triangle^2 V$ értékéből már mostan könnyen megmutatható, hogy positiv, ha $s=1$ és akkor is, ha $s=\infty$, ellenben *positiv* végtelen nagyból *negativ* végtelenbe csap át, ha az s növekedő irányban ezen egyenlet s_1 gyök értékén megy át:

$$3\,l^2\,s^4 - 4\,l^2\,s^3 - 1 = o$$

A miből az következik, hogy $\triangle^2 V$ páros számszor változtatja jegyét $s=1$-től $s=s_1$-ig és páratlan számszor $s=s_1$-től $s=\infty$-ig. Visszaemlékezve tehát, hogy általános csavarfelületünk nemzőjének (1 ábra) azon része A B, a mely l elenyészésével egyenessé degenerál, addig iratott le, míg s az egységtől $s=s_1$-ig haladt, a másik része B C pedig, ha s az s_1 értéktől $s = \infty$-ig haladt, s hogy $s = s_1$ értéknek a nemzőn hegy felelt meg, a következő eredményre jutottunk:

Általános csavarfelületünk azon részén, a mely a nemző B C részének felel meg, a hegy szomszédságában mindig van olyan B C darab, a mely a maximális hatású propeller és peripeller föltételének megfelel; az A B részén pedig legalább akkor, ha l elegendő kicsiny, — de nem a hegy szomszédságában.

II. Partiális differentiális egyenletünknek $k=o$ esetében megoldását képezte

$$12\,Z = r\,f\,(\varphi) + \text{const.}$$

hol az $f\,(\varphi)$ meghatározására ezen egyenletpár szolgált:

$$12a'')\left\{\begin{aligned} &\varphi = \frac{c}{2}\int_{s_0}^{s_1}\frac{(-3\,s^4+c)\,ds}{(s^4+c)\,s^n\sqrt{s\,(-s^4+c\,s-c)}} \\ &f(\varphi) = \sqrt{\frac{-s^4+cs-c}{s^4+c}}\,; \end{aligned}\right.$$

az egészleti jel alatt álló n=2 volt a propeller esetében és =3 a peripellerében. A megoldás által képviselt csavarfelületnek az $r=r_0$ henger kiterített palástjára rajzolt vezérvonalát a 2. ábra állitja elénk; a kúpcsavar csúcsa O a tengelyen $z = \text{const}$ által van meghatározva: a vezérvonal

$$-s^4 + c\,s - c = o$$

egyenletnek két valós positiv gyöke $s=s_1$ és s_2 között terülvén el az *A* pont s_1 értéknek, a *B* pont s_2-nek és a *C* hegy az

$$s_3 = \sqrt[4]{\frac{c}{3}} \text{ felelt meg.}$$

Azt állitjuk, hogy a kupcsavarnak azon része, a mely *O C* és O A egyenesek által határoltatik, maximális hatályú propellert, illetőleg peripellert szolgáltat; az A helyzete a c állandó értékétől függvén.

Valóban pl. a propeller *) esetében (k = o lévén):

$$(1\,\S.\,5b)\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} = r\pi^2\, s^{-3}\,(4\,\varrho^2 - s) \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\pi} = 2\,\varrho\pi\, r\, s^{-2}\left(2\frac{\pi^2}{r^2}s^{-1} - 1\right) \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial\pi^2} = r\, s^{-3}\left(4\frac{\pi^2}{r^4} - 5\frac{\pi^2}{r^2}s + {}^2\right) \end{aligned}\right.$$

mely kifejezésekbe a szóban lévő kúpcsavarnak megfelelőleg

$$(2\,\S.\,12d_1\;12e)\left\{\begin{aligned} &\varrho = f(\varphi) = \sqrt{\frac{-s^4+cs-c}{s^4+c}} \\ &\frac{\pi}{r} = f'(\varphi) = \sqrt{\frac{s^5}{s^4+c}} \end{aligned}\right.$$

behelyetteztetvén, némi összevonás után ezek erednek:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho^2} = \frac{r^3 s^2}{s^4+c}\left[\frac{4\,(-s^4+c\,s-c)}{s^4+c} - s\right]$$

*) A tétel ép úgy bizonyitandó be a peripeller esetében is.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi} = \frac{2 r^2 \sqrt{s(-s^4 + cs - c)}\,(s^4 - c)}{(s^4 + c)^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} = \frac{c r (c - 3 s^4)}{s (s^4 + c)^2}\,.$$

E kifejezések differentiálásával lészen azután:

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = \frac{3 r^2 s^2}{s^4 + c}\left[\frac{4(-s^4 + cs - c)}{s^4 + c} - s\right]$$

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi} = \frac{4 r \sqrt{s(-s^4 + cs - c)}\,(s^4 - c)}{(s^4 + c)^2}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} = \frac{r \sqrt{s(-s^4 + cs - c)}}{(s^4 + c)^2}\,\frac{15 s^8 - 18 c s^4 - c^2\,{}^{*)}}{c - 3 s^4}$$

tehát összevonás után:

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} = \frac{r \sqrt{s(-s^4 + cs - c)}\,(3 s^4 - 5 c)}{(s^4 + c)(c - 3 s^4)}\,.$$

Még egyszer differentiálván r illetőleg φ szerint lészen tehát:

$$\frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = \frac{6 r s^2}{s^4 + c}\left[\frac{4(-s^4 + cs - c)}{s^4 + c} - s\right]$$

$$\frac{d^2}{dr\, d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} = \frac{r s^3 (-s^4 + cs - c)(3 s^4 - 5 c)}{c (c - 3 s^4)^2}\,.$$

$$\cdot \left\{\frac{1}{25} + \frac{-4 s^3 + c}{2(-s^4 + cs - c)} + \frac{12 s^3}{3 s^4 - 5 c} - \frac{4 s^3}{s^4 + c} + \frac{12 s^3}{c - 3 s^4}\right\}^{*)}$$

Jelöltessék már most a jegyére nézve megvizsgálandó menynyiség:

$$\frac{d^2}{dr^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{d^2}{dr\, d\varphi}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} = \triangle V(s)$$

s tétessék benne $s_3 = \sqrt[4]{\frac{c}{3}}$; akkor alsóbb rendü végetlen nagyok elhanyagolásával:

$$\triangle V(s_3) = -\frac{12 r s_3{}^6 (-s_3{}^4 + c s_3 - c)(3 s_3{}^4 - 5 c)}{c (c - 3 s_3{}^4)^2 (3 s_3{}^4 - c)}$$

---

*) Tekintve, hogy 12a'') szerint

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{2}{c}\,\frac{(s^4 + c) s^2 \sqrt{s(-s^4 + cs - c)}}{-3 s^4 + c}$$

Ámde $-s_3^4 + c\,s_3 - c$ a vezérvonal egész hoszszában positiv (3 §.) továbbá

$$3\,s_3^4 - 5\,c = -4\,c$$

tehát negativ (mivel c positiv érték.) Ennélfogva

az $s_3 = \sqrt[4]{\frac{c}{3}}$ szomszédságában

$$\Delta V(s_3) \gtrless 0$$

a szerint, a mint

$$s_3 \lessgtr \sqrt{\frac{c}{3}}$$

q. e. d.

A közelebbi vizsgálat azt mutatja, hogy ha c állandó bizonyos értéknél kisebb, akkor az *egész* A C ágnak maximális hatályú kupfelület felel meg; továbbá, ha $c > \frac{8^4}{3^3 5}$, akkor a B C ágon is van a B szomszédságában olyan rész, a melynek maximális hatályú kupfelület felel meg; végre bármekkora legyen is a *c* értéke, az A C ágon mindig van ilyen rész az A pont szomszédságában is.

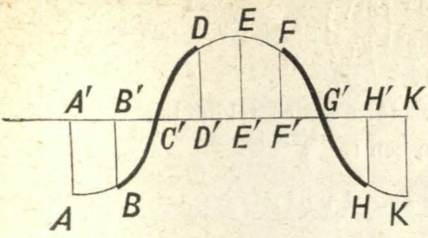
III. A 2 §. III pontjában láttuk, hogy a propellerek és peripellerek pártiális diff. egyenletének $k=\infty$ esetében általános megoldását képezi:

$$13a)\ z = c\,r \sin\varphi + \text{const.}$$

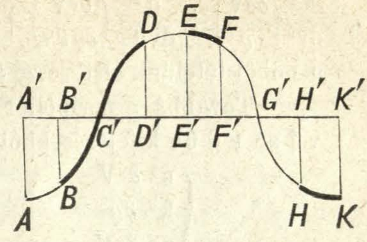
hol *c* állandót jelent, és partikuláris megoldását:

$$13a)\ z = \frac{1}{2}\left[e^{a\varphi} - e^{-a\varphi}\right]$$

hol a propeller esetére $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ és a peripeller esetére $a = \sqrt{3}$. — Miként látjuk, az általános megoldás által képviselt kúpfelület vezérvonaláúl az $r=1$ henger palástjára rajzolt sinus vonal szolgálhat; legyen ennek egy-egy periódusa a 3a 3b idomon ábrázolva s $A'B' = B'C' = C'D' = \ldots = \frac{\pi}{4}$; jelöltessék végre a kúpfelület csúcsa O-val. Akkor be-



3a idom.



3b idom

ogjuk bizonyitani, hogy a kúpfelület azon része fog maximá-is hatályú propellert szolgáltatni, a mely az O A nemző egyenes által a 3a idom erősen rajzolt ivei útján iratik le; s hogy a kupfelület azon része fog maximális hatályú peripellert szolgáltatni, a mely a nemző egyenes által a 3b idom erősen rajzolt ivei útján iratik le.

Ugyanis a propeller esetére $k = \infty$ tekintetbe vételével az 1 §. 5b kifejezésekből lészen

$$
13c) \left\{
\begin{aligned}
&\frac{s^3}{k^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = -r s + 4 r \varrho^2 \\
&\frac{s^3}{k^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi} = 4 r^{-1} \varrho \pi \\
&\frac{s^3}{k^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} = -r^{-1} s + 4 r^{-3} \pi^2
\end{aligned}
\right.
$$

Ebbe betéve a 13a ')-ből folyó ezen értékeket:

$$
13d) \quad \begin{aligned}
&\varrho = c \sin \varphi \quad , \quad \pi = c\, r \cos \varphi \\
&s = 1 + c^2
\end{aligned}
$$

lészen közös állandó positiv szorzók elhagyásával

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right) = -r(1 + c^2) + 4 r c^2 \sin^1 \varphi \\
&\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\, \partial \pi}\right) = 4 c^2 \sin \varphi \cos \varphi \\
&\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right) = -r^{-1}(1 + c^2) + 4 r^{-1} c^2 \cos^2 \varphi
\end{aligned}
$$

következőleg a hatályosság maximumát avagy minimumát a maga jegyével eldöntő menynyiség:

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right)+\frac{d^2}{dr\,d\varphi}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\,\partial \pi}\right)+\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right)=-8\,r\,c^{2}\,\overset{-1}{}\cos 2\varphi\,;$$

a miből tételünk első része foly.

Továbbá a peripeller esetére $k=\infty$ tekintetbe vételével az 1 § 6b kifejezésekből lészen:

$$\text{13d)}\begin{cases}\dfrac{s^3}{k^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}=-r\,\pi\,s-4\,r\,\varrho^2\,\pi\\[2ex] \dfrac{s^3}{k^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \varrho\,\partial \pi}=-r\,\varrho\,s+4\,r\,\varrho\,\pi^{\overset{-1}{2}}\\[2ex] \dfrac{s^3}{k^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}=-3\,r^{-1}\,\pi\,s+4\,r^{-3}\,\pi^3\end{cases}$$

Ebbe betéve a 13d) értékeket, lészen állandó positiv közös szorzók elhagyásával

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right)=-(1+c^2)\,r\cos\varphi-4\,c^2\,r^2\cos\varphi\sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\,\partial \pi}\right)=-c\,(1+c^2)\,r\sin\varphi+4\,c^2\,r\cos^2\varphi\sin\varphi$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right)=-3\,(1+c^2)\cos\varphi+4\,c^2\cos^3\varphi$$

következőleg a hatályosság maximumát avagy minimumát a maga jegyével eldöntő mennyiség:

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\right)+\frac{d^2}{dr\,d\varphi}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho\,\partial \pi}\right)+\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\right)=-8\,c^2\cos\varphi\cos 2\varphi\,;$$

honnan tételünk második része foly.

---

5. §.

Határföltételek a propeller esetében, ha k bármekkora.

Láttuk, hogy azoknak a csavarfelületeknek bizonyos hengeren belül eső részei (4 §, I,) a melyek

10) $z=a\,\varphi+f\,(r)$

egyenlet által képviseltetnek, hol *a* állandó és f (r) e két egyenlettel van defineálva:

$$\text{10a)}\begin{cases}f(r)=\dfrac{al}{2}\left[\dfrac{3}{2}s^2-s-\text{lognat}(s-1)-2l^{-1}\,\text{arctg}\,ls^2\right]+\text{const.}\\[2ex] r=\dfrac{a\,(l^2 s^4+1)}{s-2}\end{cases}$$

adott határvonalak mellett leghatályosabb propeller-felületül szolgálnak. Hogy ezen határvonalak nem lehetnek önkény szerint adva, az magától értetődik, valamint az is, hogy milyenek lehetnek csupán.

I. Gyakorlat szempontjából nagyérdekü az a kérdés: *milyen alaku felületdarab képezi a leghatályosabb propeller szárnyat, ha ezen felületdarabot egyrészről két közös tengelyü s adott sugarú körhenger, másrészről pedig két adott távolságú s a hengerek tengelyére merőleges sík vágja ki.* Feladatunkul tüzzük ki megvizsgálni, ha vajjon a 10) által képviselt csavarfelületünk nem képezi ezen gyakorlati föltételek között a leghatályosabb propeller-szárnyat.

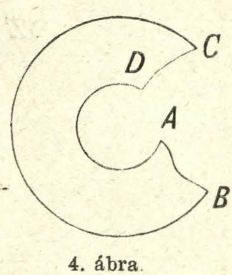
A propellerfelület tengelyirányu nyomásának első variátiója, akárhogyan változó határvonalak mellett (Moigno-Lindelöf »calcul des variations«-ban használt jelölésekkel élve) ez:

$$\delta Z = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}\right]\delta z\, dr\, d\varphi$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\Bigg|_{r_0}^{r_1}\left[\frac{\partial V}{\partial \varrho}-\frac{\partial V}{\partial \pi}\frac{dr}{d\varphi}\right]\delta z\, d\varphi+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\Bigg|_{r_0}^{r_1} V\,\delta r\, d\varphi$$

$$+\Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\, dr+\Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} V\,\delta\varphi\, dr$$

A jobb oldalon lévő egészletek határai az ABCDA görbe által (4. ábra) vannak meghatározva, mely vonal a propeller ismeretlen határvonalának (r, φ) projektióját ábrázolván, róla csak annyi ismeretes, hogy AD és BC részei adott (r_0, r_1) sugarú körök ivei. A további határföltételek ezek:



4. ábra

1) az AD és BC köriveken $\delta r = o$ és δz önkényszerű függvénye a φ-nek;

2) az AB és CD vonalakon $\delta r = o$ és $\delta\varphi$ önkényszerü függvénye az r-nek; továbbá azon okból, mert e vonalakon

$$\Big| ^{\varphi} z = \Big|^{r} z = \text{constans},$$

állani fog még egész terjedelmükben:

$$\Big|^{\varphi} (\delta z + \pi\,\delta\varphi) = o$$

$$\Big|^{r} \delta z = o$$

E határföltételek tekintetbe vételével azután:

$$16b)\ \delta Z = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1}\left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}\right]\delta z\, dr\, d\varphi$$

$$+ \delta Z_1 + \delta Z'_2 + \delta Z''_2\ ,$$

hol δZ_1 alatt csupán azt a részét értvén a δZ-nek, a mely a B-C és A D körvonalokra vonatkozik, lészen

$$\delta Z_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \Big|^{r_1} \frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\, d\varphi - \int_{\varphi'_0}^{\varphi'_1} \Big|^{r_0} \frac{\partial V}{\partial \varrho}\, dz\, d\varphi$$

továbbá $\delta Z'_2$ alatt csupán azon részét értvén a δZ-nek, a mely az A B vonalra vonatkozik, lészen

$$\delta Z'_2 = \int_{r_0,\,\varphi_0}^{r_1,\,\varphi'_0}\left[V\,\delta\varphi + \frac{\partial V}{\partial \pi}\delta z\right] dr$$

$$= \int_{r_0,\,\varphi_0}^{r_1,\,\varphi'_0}\left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi\right]\delta\varphi\, dr$$

végre $\delta Z''_2$ alatt csupán azon részét értvén a δZ-nek, a mely a C D vonalra vonatkozik, lészen ép ugy:

$$\delta Z''_2 = -\int_{r_0,\,\varphi'_1}^{r_1,\,\varphi_1} \left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi \right] \delta\varphi \, dr$$

Ezek után a szóban lévő gyakorlati kérdés eldöntésére csak az lesz megvizsgálandó, hogy a 10) egyenlet által elenyészik-e az imént kiszámitott δZ, vagyis hogy teljesednek-e általa ezek az egyenletek:

$$16c')\ \frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi} = o$$

$$16c'')\ \left|\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right.^{r_1} = o\ ;\ \left|\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right.^{r_0} = o$$

$$16c''')\ V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi = o\,.$$

Ámde a 10) alatti egyenlet épen a 16c' egyenletnek képezte megoldását; továbbá a 16c'' egyenlet ezzé lesz a 10)-nek belé helyezésével:

$$\frac{r\, f'(r)}{\left[1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2\right]^2} = o$$

honnan $f'(r) = o$, tehát $f(r) =$ constans következvén, a 10) egyenlet ezzé válik:

$$z = a\varphi + b$$

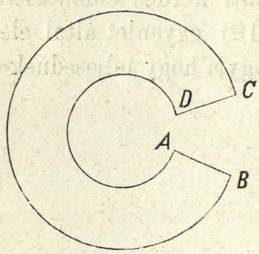
Igy tehát az archimedesi csavarfelület egyenlete a 16c' és 16c'' egyenleteknek megfelel. De nem felel meg a 16c'''-nak, miután ebből, $z = a\varphi + b$ behelyezésével, az r állandó mennyiségnek adódnék ki az egész AB és C D görbéken, a mi pedig képtelenség.

Vizsgálatunk eredménye tehát az, hogy véges hosszaságú adott egyenes henger határain belöl kiterjeszkedő propellerek között nem lehet a leghatályosabb se az Archimedes-féle, se a 10)-ben foglalt általánosabb csavarfelület.

II. Az imént tárgyalt kérdéshez közel áll a következő: *melyik szolgáltatja a legjobb propellerszárnyat azon felület-*

darabok között, a melyek határvonalait egy részről két közös tengelyű adott sugarú hengerre rajzolt különben ismeretlen vonalak, másrészről adott távolságú s a tengelyt merőlegesen metsző két egyenes képezik. Azt állitjuk, hogy az Archimedes-féle csavarfelületnek megfelelő része.

Valóban ez esetben a felületdarab határvonala csak abban különbözik az I. alatt tárgyaltétól, hogy mostan az (r, ϱ) projektiójának AB és CD vonalai (5. ábra) nem egyebek, mint az AD és BC körök középpontjából vont radius vektorok részei. Ennélfogva az előbbi szám alatt lefejtett δZ érték itt is állani fog s csak annyiban válik egyszerübbé, hogy az AB és CD vonalak imént kiemelt természeténél fogva a $d\varphi$ rajtok állandó lévén a $\delta Z'_2$ és $\delta Z_2''$-et alkotó ezen kifejezés :



5. ábra.

$$\Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{r_0}^{r_1} \left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi\right] \delta\varphi\, dr = \delta\varphi_1 \int_{r_0,\ \varphi_1}^{r_1,\ \varphi_1} \left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi\right] dr$$

$$- \delta\varphi_0 \int_{r_0\ \varphi_0}^{r_0\ \varphi_0} \left[V - \frac{\partial V}{\partial \pi}\pi\right] dr$$

úgy hogy ennek tekintetbe vételével esetünkben

$$\delta Z = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r_0}^{r_1} \left[\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}\right] \delta z\, dr\, d\varphi$$

$$+ \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \Bigg|^{r_1} \frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\, d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \Bigg|^{r_0} \frac{\partial V}{\partial \varrho}\delta z\, d\varphi$$

$$+\delta\varphi_1 \int\limits_{r_0}^{r_0}\Bigg|^{\varphi_0}\left[V-\frac{\partial V}{\partial \pi}\pi\right]dr-\delta\varphi_0 \int\limits_{r_0}^{r_1}\Bigg|^{\varphi_0}\left[V-\frac{\partial V}{\partial \pi}\pi\right]dr$$

Hogy pedig ezen $\delta Z = o$ legyen, állani kell ezen egyenleteknek:

$$17a)\quad \frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial \pi}=o$$

$$17b)\quad \begin{cases} \left|\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right|^{r_1} = o \\ \left|\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right|_{r_0} = o \end{cases}$$

$$17c)\quad \begin{cases} \int\limits_{r_0}^{r_1}\Bigg|^{\varphi_1}\left[V-\frac{\partial V}{\partial \pi}\right]dr = o \\ \int\limits_{r_0}^{r_1}\Bigg|^{\varphi_0}\left[V-\frac{\partial V}{\partial \pi}\right]dr = o \end{cases}$$

Ámde ezek közül az első kettőnek megoldását képezi, miként láttuk,

$$z = a\varphi + b$$

az ebben előforduló eddigelé határozatlan *a* pedig ugy határozható meg, hogy a 17c) alatti egyenletek is teljesüljenek, miután $z = a\varphi + b$ behelyeztetvén, a 17c) alatti egyenletek ezen egygyé válnak:

$$(k-a)\int\limits_{r_0}^{r_1}\frac{r^3\,dr}{a^2+r^2}+2a\int\limits_{r_0}^{r_1}\frac{r^3(ka+r^2)\,dr}{(a^2+r^2)^2}=o\,.$$

Be van tehát bizonyitva, hogy a II. alatt kitüzött feladatot az Archimedes-féle csavarfelület megoldja.

További következtetések végett kifejtve az *a* meghatározására szolgáló egyenletet hozzuk ezen alakra:

$$17c')\; o = \left| \frac{r^2\left[(-k+3a)a^2+(k+a)r^2\right]}{a^2+r^2} + a^2(k-3a)\log\frac{a^2+r_1{}^2}{a^2+r_0{}^2} \right|_{r_0}^{r_1}$$

Belőle az következik, hogy adott r_0 és r_1 mellett a szóban lévő határföltételek között a legjobb propellerhez tartozó a más-más lesz, a mint k (azaz a tova haladás sebességének aránya a forgáséhoz) más; de következik másrészről az is, hogy az a értéke (azaz az Archimedes-féle csavarfelület alakja) egészen független a határoló hengerek hosszuságától.

1. Megjegyzés. A 17c') egyenletből bajos lévén az a értékének direkt meghatározása, az egyenletet megoldandók, czélszerübb lesz a kérdést akként formulázni, hogy adott archimedesi felületnek, adott sugarú közös tengelyü két henger közötti része milyen k mellett képezi a leghatályosabb propellerszárnyat, mely kérdésre az egyenlet majdnem közvetlenül felel. Ugyanis belőle

$$17c'')\; k = \frac{-\left| \frac{3a^2+r^2}{a^2+r^2} r^2 + 3a^2\log\frac{a^2+r_1{}^2}{a^2+r_0{}^2} \right|_{r_0}^{r_1}}{\left| \frac{-a^2+r^2}{a^2+r^2} r^2 + a^2\log\frac{a^2+r_0{}^2}{a^2+r_0{}^2} \right|_{r_0}^{r_1}}$$

E képlet segélyével azután az adott r_0 és r_1 értéket megtartva s a t változtatva a hozzájuk tartozó k addig kereshető, mig végre próbálgatás által az adott k-hoz elég közel jövünk.

2. *Megjegyzés.* Ha k = o, akkor a leghatályosabb propellerszárny szóban lévő állandói között a 17c'')-ből folyólag ennek a relatiónak kell állani:

$$o = -\left| r^2\frac{3a^2+r^2}{a^2+r^2} + 3a^2\log\frac{a^2+r_1{}^2}{a^2+r_0{}^2} \right|_{r_0}^{r_1}$$

Élve e következő jelölésekkel:

$$\frac{r_1}{a} = u_1\; ; \; \frac{r_0}{a} = u_0 \text{ egyenletünk ez lészen:}$$

$$17c''')\ -\frac{u_1^2(3+u_1^2)}{1+u_1^2}+3\log 1+u_1^2=-$$

$$-\frac{u_0^2(3+u_0^2)}{1+u_0^2}+3\log(1+4_0^2)$$

mely egyenletből az következik, hogy feladatunknak $k = o$ esetére csak akkor lesz megoldása, ha

$$-\frac{x(3+x)}{1+x}+3\log(1+x)=\text{constans}$$

egyenletnek legalább is 2 valós positiv gyöke van. Könnyü megmutatni, hogy ez az eset akkor és csakis akkor áll be, ha a jobb oldalon lévő állandó $\gtrless$ o; ezzel azonban nem akarunk időzni. Csak azt jegyezzük még ide, hogy $r_0 = o$ lévén, a jobb oldalon álló constans $=$ o s a $17c'''$ ezzé lészen:

$$-\frac{r_1^2}{a^2}\left(3+\frac{r_1^2}{a^2}\right)+3\left(1+\frac{r_1^2}{a^2}\right)\log\left(1+\frac{r_1^2}{a^2}\right)=o$$

mely egyenletből

$$-\frac{r_1^2}{a^2}=1{,}8169\ldots=\operatorname{cotg}^2 36^0\,34'\,15''\ldots,$$

mely eredményt igy foglalhatjuk szavakba: *Bármekkora legyen is azon egyenes henger sugara és hosszúsága, a mely a propellert kivágja, az adott határföltételek mellett azon archimedesi csavarfelületből kivágott szárny fog a legnagyobb erővel megindulni, a mely a nevezett hengert*

$$\alpha = 36^0\,34'\,15''$$

emelkedésü csavarvonal szerint vágja.

[Hogy ez utóbbi esetben csakugyan maximummal (és nem minimummal) van dolgunk, az a 4. §. I. pontja végeredményéből közvetlenül foly.]

III. E §. I. száma alatt kitüzött határföltételek mellett a 10) által képviselt felületek nem képezték a propeller-probléma megoldását. Kérdezzük már mostan, hogy *legalább azon felületek között, a melyek a 10) egyenletben foglaltatnak, melyik szolgáltatja ugyanezen határföltétek mellett a hatályosabb propellerszárnyat.* Látni fogjuk, hogy azon archimedesi csavarfelület, a melynek α ja a $17c''$) egyenlet által határozódik meg.

Ennek megmutatására az 1 §. 2) képletéből indulunk ki, mely szerint:

$$Z = C \int df\, v_n^2 \cos(z, n$$

s benne ezt a helyettezést teszszük

$$df \cos(v, n) = dz\, dr$$

mely által

$$Z = C \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{r_0}^{r_1} dr\, v_n^2 \frac{\cos(z_1\, n)}{\cos(v_1\, n)}\,.$$

Ezen egyenletbe azután az 1. §. 4b) alatti értékeket téve, lészen:

$$Z = C\, w^2 \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{r\,(k - \pi)^2}{\pi \left[1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}\right]},$$

honnan a 10) alatt foglalt felületek tengelyirányú nyomása lesz:

$$Z = C\, w^2 \int_{z_0}^{z_1} dz \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{r\,(k - a)^2}{a \left[1 + f'(r)^2 + \frac{a^2}{r^2}\right]}$$

vagy kifejtve ez:

$$18)\; Z = C\, w^2 (z_1 - z_0) \int_{r_0}^{r_1} dr \frac{r\,(k - a)^2}{a \left[1 + f'(r)^2 + \frac{a^2}{r^2}\right]}\,.$$

Amde ezen §. I. száma elején kitüzött probléma szerint $z_1 - z_0$ (t. i. a henger hosszúsága) adva van, valamint r_0 és r_1 is. Ez okból a 18) egyenlet egyszerü megtekintéséből következik, hogy egyenlő *a* értékek mellett a Z akkor legnagyobb, ha $f'(r) = o$. Ennélfogva a 10) egyenlet által képviselt felületek között az archimedesi csavarfelület fogja a legelőnyösebb propellert szolgáltatni.

Hogy végre mekkora azon *a* érték, a mely az adott körülmények között a leghatályosabb propellerszárnyat szolgáltatja, azt megtaláljuk, ha a (8) képletbe $f'(r) = o$ értéket helyettezve az eredő Z-t az *a* szerint differentiáljuk. Az *a* meghatározására ily módon ezen egyenletet nyerjük:

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{d}{da} \frac{r(k-a)^2 dr}{a\left[1+\frac{a^2}{r^2}\right]} = o$$

mely egyenlet kifejtve a (7c') alattival azonossá válik.

---

6. §.

A 10) által képviselt csavarfelületek olyan tulajdonai, a melyek által mint propeller-felületek teljesen defineálva vannak.

A 10) által képviselt felületek többek között a következő tulajdonokkal birnak:

1) felületelemük normálisának hajlása a forgás tengelyéhez csakis ezen elemhez vont radius vektor (r) függvénye; ép igy

2) a normális hajlása a radius vektor irányához

3) a normális hajlása a felületelem forgó mozgásának pillanatnyi irányához

4) a felületelem nyomás-komponense a forgás tengelye irányában

5) a felületelem nyomás-komponense a radius vektor irányában — s végre

6) a felületelem nyomás-komponense forgó mozgásának pillanatnyi irányához — csak is az *r* függvénye.

Azt állitjuk, hogy e tulajdonok mindegyike egy magában teljesen elegendő a 10) által képviselt felületeknek mint propellereknek definitiójára. A bizonyitást csak az 1) tulajdonra vonatkozólag fogjuk keresztülvinni; a bizonyitás a többi esetekben ép ugy megyen. — A bebizonyitandó tétel tehát a következő:

A propellerfelületeknek csakis egy neme és pedig csakis a
10) $z = a\varphi + f(r)$

$$
10\mathrm{a})\begin{cases} f(r)=\dfrac{al}{2}\left[\dfrac{3}{2}s^2-s-\mathrm{lognat}(s-1)-2l\overset{-1}{\mathrm{arct}}\,gls^2\right]+b \\ r=\dfrac{a(l^2s^4+1)}{s-1} \end{cases}
$$

egyenletek által képviselt bir azon tulajdonnal, hogy normálisuk hajlása a forgás tengelyéhez csak az r függvénye. *)

A tétel igazsága el lesz ismerve, mihelyt kiderül, hogy a propeller-felületek

$$
5\mathrm{c})\ o=\frac{d}{dr}\frac{\partial V}{\partial\varrho}+\frac{d}{d\varphi}\frac{\partial V}{\partial\pi}
$$

partiális diff. egyenletének és a nevezett tulajdont kifejező

$$
19\mathrm{a})\ F(r)=1+\varrho^2+\frac{\pi^2}{r^2}
$$

egyenletnek csakis a 10) 10a) által képviselt felület képezi *közös* megoldását. A közös megoldás feltalálása végett kifejtve az 5c) alatti egyenletet,

$$
5\mathrm{d})\ o=\frac{\partial^2V}{\partial\varrho\,\partial r}+\frac{\partial^2V}{\partial\varrho^2}\frac{\partial\varrho}{\partial r}+2\frac{\partial^2V}{\partial\varrho\,\partial\pi}\frac{\partial\pi}{\partial r}+\frac{\partial^2V}{\partial\pi^2}\frac{\partial\pi}{\partial\varrho}
$$

s kiküszöbölve belőle $\frac{\partial\varrho}{\partial\pi}$ és $\frac{\partial\pi}{\partial r}$ mennyiségeket a 19a)-ból deriválással lefejtett e következő két egyenlet segélyével

$$
19\mathrm{b})\ \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial r}=\frac{1}{2}F'(r)+\frac{\pi^2}{r^2}+\frac{\pi^2}{\varrho r^2}\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}
$$

$$
19\mathrm{c})\ \varrho\frac{\partial\pi}{\partial r}=-\pi\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}
$$

rendezés után ezzé lesz:

$$
5\mathrm{e})\ o=P-Q\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}
$$

hol

$$
P=\frac{\partial^2V}{\partial\varrho\,\partial r}+\frac{1}{\varrho}\left[\frac{1}{2}F'(r)+\frac{\pi^2}{r^2}\right]\frac{\partial^2V}{\partial\varrho^2}
$$

$$
Q=-\frac{\pi^2}{\varrho^2r^2}\frac{\partial^2V}{\partial\varrho^2}+\frac{2\pi}{\varrho}\frac{d^2V}{\delta\varrho\,\delta\pi}-\frac{\partial^2V}{\delta\pi^2}
$$

Föltéve már mostan, hogy se $\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}$ se Q nem zéró, mely esetekben P se az, szorozzuk az 5e) egyenletet $\frac{d\varphi}{P}$-vel, elimi-

---

*) A 10) alatti megoldásra az itt bemutatandó vizsgálat vezetett.

náljuk ki belőle a 19a) segélyével a ϱ variábilist s egészeljük az igy eredő diff. egyenletet; akkor ez ered:

$$20a)\ o = \varphi - \int_{\pi_0}^{\pi} \frac{Q}{P} d\pi + \psi_1 (r)$$

Ugyanazon föltétel mellett gondoljuk már részről az 5e)-ből a 19c utján $\frac{\partial \pi}{\partial \varphi}$ értéket eliminálva, az eredő egyenletet $\frac{d\varphi}{P}$-vel szorozva, a szorzatból a 19a) segélyével π értéket kiküszöbölve s az igy eredő diff. egyenletet egészelve; akkor ez ered:

$$20b)\ o = \varphi + \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{Q\varrho}{P\pi} d\varrho + \psi_2 (r)$$

Ezek után a 20a egyenletet r szerint s a 20b)-t φ szerint deriválva, lészen sorban:

$$o = -\int_{\pi_0}^{\pi} \frac{\partial}{\partial r}\frac{Q}{P} - \frac{Q}{P}\frac{\partial \pi}{\partial r} + \psi_1{}^1(r)$$

$$o = 1 + \frac{Q\varrho}{P\pi}\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}$$

s mivel $\frac{\partial \pi}{\partial r} = \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}$, tehát e kettőből

$$o = -\int_{\pi_0}^{\pi} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{P}\right) d\pi + \frac{\pi}{\varrho} + \psi_1{}^1(r)$$

mely egyenletet, ϱ *eliminálása után*, π szerint differentiálva végre ez ered

$$20c)\ o = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{Q}{P} + \frac{\partial}{\partial \pi}\frac{\pi}{\sqrt{F(r) - 1 - \frac{\pi^2}{r^2}}}$$

Számitásunkból tehát az következik, hogy ha csak nem vagy

$$\alpha)\ \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = o \\ P = o \end{cases}$$

vagy

$$\beta)\begin{cases} Q = o \\ P = o \end{cases}$$

ugy a keresett közös megoldáshoz tartozó F (r)-nek szükségképen ezen egyenlet megoldásának kell lenni:

$$\gamma)\ o = \frac{\partial}{\partial r}\frac{Q}{P} + \frac{\partial}{\partial \pi}\frac{\pi}{\sqrt{F(r) - 1 - \frac{\pi^8}{r^2}}}$$

mely utóbbi egyenletben a π nemcsak hogy határozottan *variábilis* de $\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \gtrless o$ okából) nem is lehet csupán az r függvénye; az egyenletben továbbá π r és F (r)-en kivül más változó nincs.

Az *α esetben* már mostan

$$\pi = F_1(r)$$

tehát

$$21a)\ z = \varphi F_1(r) + F_2(r)$$

Ezt betéve $F(r) = 1 + \varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}$ egyenletbe, lészen rendezés után

$$o = 1 + F'_2(r)^2 + \frac{F'_1(r)^2}{r^2} - F(r) + 2\varphi F'_1(r) F'_2(r) + \varphi^2 F'_1(r)^2$$

mely egyenlet csak ugy állhat meg, ha $F_1'(r) = o$. A 21a) megoldás következésképp ezzé lesz

$$Z = a\varphi + F_2(r)$$

melyről tudjuk már (2. §. I. 3. §. I.), hogy csak ugy képezheti a propeller differentiális egyenletének megoldását, ha $F_2(r) = f(r)$ (10a)

A *β) esetet* illetőleg a P = o, azaz (1. §. 5b segélyével) kifejtés és a ϱ^2 eliminálása után a belőle eredő

$$o = -r\left(\frac{F'(r)}{2} + \frac{\pi^2}{r^2}\right) + \left[-1 + \frac{2F'(r)}{F(r)}\right]\left[F(r) - 1 - \frac{\pi^2}{r^2}\right]$$

egyenlet, melynek állani kell π minden értékénél, e kettővé oszol:

$$o = -\frac{rF'(r)}{2} + \left[-1 + \frac{2F'(r)}{F(r)}\right]\left[F(r) - 1\right]$$

$$o = -r - 1 + \frac{2F'(r)}{F(r)}$$

Ámde e két egyenlet közül a másodikból:

$$2 \log c \, F(r) = \frac{r^2}{2} + r$$

mely értéket az elsőbe helyettezvén képtelenségre jövünk. — *Ennél fogva a β) eset nem vezet közös megoldásra.*

Hogy pedig végre *a γ) eset* sem vezet közös megoldásra arról igy győződünk meg. A $\frac{Q}{P}$ értéket az 5a) 5b) segélyével kiszámitva, lészen

$$20\text{d)} \quad \frac{Q}{P} = \frac{\left[F(r) - 1\right]\left[\frac{F(r)}{(k-\pi)^2} - \frac{1}{r^2}\right] - \frac{\pi^2 F(r)}{r^2 (k-\pi)^2}}{\left\{\left[F(r) - 1\right]\left[\frac{1}{r} - \frac{2F'(r)}{F(r)}\right] + \frac{2\pi^2 F'(r)}{r^2 F(r)} + \frac{F'(r)}{2}\right\} \cdot \sqrt{F(r) - 1 - \frac{\pi r}{r^2}}}$$

mely értéket a 20c) egyenletbe helyettezve gondolva, lészen kifejtés után

$$20\text{e)} \quad o = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{Q}{P} + \frac{1}{r^2\sqrt{F(r) - 1 - \frac{\pi^2}{r^2}}} + \frac{\pi^2}{r^4\sqrt{\left[F(r) - 1 - \frac{\pi^2}{r^2}\right]^3}}$$

Miután pedig az F (r) csak az r függvénye, tehát a 20e) egyenlet $\pi = \infty$ illetőleg $\pi = o$ tevése által a következő kettővé oszol

$$\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{r\left(1 - 2F(r)\right)F(r)}{2F'(r)} = r\left[F(r) - 1\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\sqrt{F(r) - 1}\left[\frac{F(r)}{k^2} - \frac{1}{r^2}\right]}{\frac{F(r) - 1}{r} + \left[\frac{2}{F(r)} - \frac{3}{2}\right]F'(r)} = \frac{1}{r^2\sqrt{F(r) - 1}}$$

Ámde e két egyenlet közül az első független lévén a *k*-tól, csakis ugy állhat a másodikkal együttesen, ha legalább is a következő kettő együtt állhatna:

$$20f)\quad \frac{d}{dr}\cdot\frac{F(r)\sqrt{F(r)-1}}{\frac{F(r)-1}{r}+\left[\frac{2}{F(r)}-\frac{3}{2}\right]F'(r)}=o\,,$$

$$20g)\quad \frac{d}{dr}\cdot\frac{\sqrt{F(r)-1}}{r^2\left\{\frac{F(r)-1}{r}+\left[\frac{2}{F(r)}-\frac{3}{2}\right]F'(r)\right\}}=-\frac{1}{r^2\sqrt{F(r)-1}},$$

melyek közül az első k = o, a második k = ∞-gyá tevésével eredt.

Azt állitjuk már mostan, hogy e két egyenlet ellentmond egymásnak. Valójában a 20f)-ből integrálás utján ez ered:

$$20f')\quad \frac{F(r)\sqrt{F(r)-1}}{\frac{F(r)-1}{r}+\left[\frac{2}{F(r)}-\frac{3}{2}\right]F'(r)}=c\,,$$

melynek segélyével a 20g) ezzé válik:

$$20g')\quad \frac{d}{dr}\frac{c}{r^2F(r)}=-\frac{1}{r^2\sqrt{F(r)-1}}\,.$$

Ámde a 20f') egyenletből

$$F'(r)=\frac{F(r)\sqrt{F(r)-1}}{2-\frac{3}{2}F(r)}\left[\frac{F(r)}{c}-\frac{\sqrt{F(r)-1}}{r}\right]$$

mig a 20g')-ből

$$F'(r)=F(r)^2\left[\frac{1}{c\sqrt{F(r)-1}}-\frac{1}{rF(r)}\right]$$

mely két egyenlet ellenmondásban állván egymással, nem állhat meg együtt a 20f és 20g) sem. *Következéskép a γ) eset sem vezet közös megoldásra*

q. e. d.

II. A 10) egyenletek által képviselt csavarfelületnek végre még azt a tulajdonát is kiemeljük, hogy rajta kivül nincsen olyan propeller, mely ezen másodrendü pártiális diff. egyenletnek képezné megoldását:

$$21)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=o$$

Hogy ez áll, arról könnyü meggyőződni. Valójában, ha a 21) alatti egyenlet általános egészlete

$$21a)\quad z=\varphi\,F(r)+f(r)$$

a propellerek párt. diff. egyenletébe (p. az 5d alatti alakjában) behelyetteztetik, akkor egyszerü reduktiók után a propellerek egyenlete ezzé lesz:

$$o = M_0\,\varphi^3 + M_1\,\varphi^2 + M_2\,\varphi + M_3$$

hol (F_1 f_1 F_2 f_2 első illetőleg második deriváltakat jelölvén)

$$22)\left\{\begin{aligned} M_0 &= (-F_1{}^3 + 3rF_1{}^2T_2)(k-F) + 4rF_1{}^4\,,\\ M_1 &= (-3F_2^1 f_1 + 3rF_2^1 f_2 + 6rF_1F_2f_1)(k-F) + 12rF_3^1 f_1\,,\\ M_2 &= (-3F_2^1 f_1{}^2 - 5r^{-2}F_1F^2 - F_1 + 6rF_1f_1f_2 + 3rF_2f_2^1 -\\ &\quad - r^{-1}F_2F^2 - rF_2)\,.\,(k-F) + 4rF_1{}^2(3f_1{}^2 -\\ &\quad - r^{-2}F^2 + 2kr^{-2}F + 1)\,,\\ M_3 &= \left[-f_1{}^3 - 5r^{-2}f_1F^2 - f_1 + rf_2(3f_1{}^2 - r^{-2}F^2 - 1)\right](k-F)\\ &\quad + 4rF_1f_1(f_1{}^2 - r^{-2}F^2 + 2r^{-2}kF + 1)\,. \end{aligned}\right.$$

Ebből következik, hogy a 21a) egyenlet csak ugy képezheti a propellerek párt. diff. egyenletének megoldását, ha az f-(r) és F (r) meghatározása által a következő egyenletrendszer teljesülhet:

$$22a)\ M_0 = o\,;\ M_1 = o\,;\ M_2 = o\,;\ M_3 = o.$$

Azt állitjuk már mostan, hogy e négy egyenletnek csak ez az egy közös megoldása van:

$$22b)\left\{\begin{aligned} o &= F_1\\ o &= (f_1{}^2 + 5r^{-2}F^2 + 1)f_1 - (3f_1{}^2 - r^{-2}F^2 - 1)rf^2 \end{aligned}\right.$$

Hogy ugyanis ezen egyenlet-pár megoldja az előbbi négyet, az közvetlenül világos, miután $F_1 = o$ által az M_0, M_1, és M_2 elenyészik, mig az $M_3 = o$ a 22b második egyenletévé válik. Hogy pedig a 22a) egyenletrendszernek ezen kivül más megoldása nincs, arról meg leszünk győződve, mihelyt kiderül, hogy az F, szorzó elhagyása után a 22a)-ból eredő egyenletrendszer ellenmondást tartalmaz.

Ámde az F_1 szorzó elhagyásával a 22a) egyenletek közül az első kettő ezzé lesz:

$$22c)\left\{\begin{aligned} &-F_1(k-F) + 4rF_1{}^2 + 3r(k-F)F_2 = o\\ &\left[(-F_1 + 2rF_2)(k-F) + 4rF_1{}^2\right]f_1 + rF_1(k-F)f_2 = o \end{aligned}\right.$$

Ezek közül az elsőt r (k — F) F_1 szorzattal osztás után egészelve, rövid összevonás után ez ered:

$$22d')\ cr(k-F)^4 = F_1{}^3$$

hol c állandót jelent. Ezen egyenlet segélyével kiküszöbölvén az F_2 második deriváltat a 22c) második egyenletből, ezen egyenletre jövünk:

$$22d'')\ (-k + F + 4 r F_1) f_1 + 3 r (k - F) f_2 = o$$

Kiszámitva azután ebből az f_2 értéket, tegyük be az $M_3 = o$ egyenletbe; lészen akkor rövid összevonás után

$$22d''')\ f_1 \left[-(4F^2+r^2)(k-F)+(-F^2+3kF+2r^2)2rF_1 \right] = o$$

Összehasonlitva már mostan a 22d') és 22d''') egyenleteket, közvetlenül világos, hogy csak ugy nem mondhatnak ellent egymásnak, ha $f_1 = o$. Miután pedig $f_1 = o$ a 22d'') egyenletet is megoldja, azért állitásunk helyességének bebizonyitására elég lesz megmutatnunk, hogy

$$22d')\ \begin{cases} F_1{}^3 = c\, r (k - F)^4 \\ f_1 = o \\ M_2 = o \end{cases}$$

egyenlet-rendszer együttesen nem állhat. Ámde az $M_2 = o$ egyenlet a megelőző kettő által ezzé lesz:

$$2 r F_1 [-F^2 + 3 k F + 2 r^2] = (4 F^2 + r^2)(k - F)$$

mely egyenlet a 22d') alattiak elsejével csakugyan ellenmondásban áll.

Be van tehát bizonyitva, hogy a

$$z = \varphi F (r) + f (r)$$

egyenlet csakis ugy képezheti a propeller-probléma megoldását, ha F (r) és f (r) meghatározására a 22b egyenletek szolgálnak, melyek integrálása által e kettő ered:

$$a = F (r)$$

$$c = \frac{r f'(r)}{\left[1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2\right]^2}$$

hol *a* és *c* állandókat jelölnek.

q. e. d.

Megjegyzés. Martin szerint a propellerek partiális diff. egyenlete ez volna: (Erőműtani csavarfelületek, 6. lap)

$$x)\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{3c}{2 w r} \pm \sqrt{\left[\frac{3 c}{2 w r}\right]^2 + 2},$$

hol $\alpha = (z, n)$ és $\frac{c}{w}$ ugyanaz, a mit mi *k*-val jelöltünk. Ha tehát ezen diff. egyenlet helyes volna, akkor megoldását e §. I. száma alatt bebizonyitott tétel szerint csak

$$10)\ z = a\,\varphi + f(r)$$

képezhetné, hol az f (r) meghatározására ezen diff. egyenlet szolgál (2. §. 10a)

$$10a)\ \text{constans} = \frac{r\,f'(r)}{\left[1 + \frac{a^2}{r^2} + f'(r)^2\right]^2}$$

Ámde, miként az 1. §. 4b) alatti egyenletek elsejébő közvetlenül foly,

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\varrho^2 + \frac{\pi^2}{r^2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2}$$

lévén, a 10)-nek behelyettezésével

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{f'(r)^2 + \frac{a^2}{r^2}}\,.$$

Hogy pedig ez az eredmény homlokegyenest ellenkezik az x) alattival, arról a 10a) egyenlet egyszerü megtekintése meggyőz. *Következéskép a propellerek Martin-féle diff. egyenlete s vele értekezésének alapja teljesen elhibázott.*

Ezen diff. egyenletéből azután mindenesetre sajátszerü következtetések utján *) azon eredményre jő, hogy a legjobb propeller-felület egyenlete ez : (Erőm. csav. 9 l.)

$$z = \varphi\left[\frac{3c}{2w} - \sqrt{\left(\frac{3c}{2w}\right)^2 + 2r^2}\right].$$

mely eredmény megint a II. alatt bebizonyitott tétellel áll világos ellenmondásban.

Martin értekezése tehát alapjában, következtetés módjában és végeredményében is helytelen.

Kolozsvártt, 1875. évi október 10-kén.

*) L. Szily akadémiai birálatát a nevezett értekezés első lapjain.

TEMESI

REITTER FERENCZ

EMLÉKE.

FEST VILMOS

RENDES TAGTÓL.

(Felolvasta az Akadémia összes ülésén 1876. márcz. 27.)

BUDAPEST, 1876.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALÁBAN.

(Az Akadémia épületében.)

Budapesten, 1876. Nyomatott az A t h e n a e u m nyomdájában.

TEMESI REITTER FERENCZ

EMLÉKE.

Midőn tekintetes Akadémiánk kegyeletes szokásának hódolva, Reitter Ferencz elhunyt tagtársunknak emlékezetét megújitani szándékozom, mélyen érzem erőm gyengeségét arra, hogy e jeles férfiu tevékeny és eredménydús életét, egyéni érdemeihez méltón, ábrázoljam, és ha, — bár aggódva, — mégis vállalkoztam ezen feladat teljesitésére, arra leginkább a tekintetes Akadémia mathematikai osztályától ismételve nyert megbizás, valamint más részről, gyászolt barátom és annak számos művei iránt táplált személyes tiszteletem ösztönzött, — ez uton egyszersmind alkalmat lelvén, hogy a kegyelet adóját iránta leróhassam.

Reitter Ferencz Temesvár városában született 1813-ik évi márczius elsején; tevékeny életének 62-ik évében áldozatul esvén a Párka kérlelhetlen ollójának, közülünk örökre távozott 1874-ik évi decz. 9-én.

Atyja — Reitter Mátyás, Temes megyének köztiszteletben állott orvosa volt; — tisztelt nővére pedig még most is él boldog családi viszonyok közt, derék férje — Kis úr, budapesti gyógyszerész szerény házi körében.

Mint serdülő gyermek elhunyt tagtársunk szülő városában élte le zsenge ifjuságát és ott nyeré egyszersmind első oktatását is; későbbi nevelését szintén a temesvári gymnasiumban élvezvén, 1829-ik évben már Szegeden találkozunk vele, a bölcsészeti tanulmányokkal foglalkozva, melyeknek befejezése után Scheich József Temesvár városa főmérnökéhez, ezután pedig az ottani kincstári épitő hivatalhoz ment gyakorlatra, honnan két évi praxis után Budapestre jött, a hol 1831. végétől fogva a mérnöki tanfolyamot hallgatá s azt 1833-ban bevégzé.

Tanulói pályáját befejezvén, alkalmazást keresett és nyert a hajdani országos építészeti főigazgatóság felügyelete alatt működő Duna-térképezési intézetnél, honnan a Tisza és Maros folyók völgyein épen akkor megindított térképezési fölvételekhez segédmérnökül rendeltetvén ki, előre törekedő fiatal mérnökünk bő alkalmat talált ama—nagy pontossággal teljesített — mérnöki feladatnál arra, hogy e szakmában nemcsak kiképezhesse magát, hanem hogy a két folyó völgyeletén — Marmarostól Titelig és Szegedtől Erdélyország határáig folyt háromszögelési fölvételek, vizszín-megállapitások, vizemésztési mérések és hasonló vizműtani kérdések ügyes megoldásával oly közhasznu munkát állíthasson elő, mely későbben ama két folyó általános szabályozásának főalapjául szolgált.

Miután ezen érdekes előmunkálatokat 1833-tól fogva 1837-ik évig a legszebb sikerrel folytatá és nagyobbára be is végzé, tagtársunk tevékenysége új táplálékot talált az első magyar lóvonatu vaspálya tervezése és építésénél — Pozsonytól Nagy-Szombatig, hová az országos építészeti igazgatóságtól küldetett ki. Ez új hivatásában *Hieronymi Ottó*, jeles igazgató-mérnök körültekintő vezérlete alatt, nemcsak a vasuti előmunkálatoknál, hanem későbben a vaspálya végrehajtása körül is, oly fényes jelét adta szorgalmának, ügyességének és kitartásának, hogy a vasuti igazgatóságtól ugy, mint az említett építészeti főhatóság részéről elismerő és őt dicsérőleg kitüntető levelekkel örvendeztetett meg.

Sikeres foglalkozásának további elismeréséül 1838-ban működő mérnöknek neveztetett ki a Duna-térképezési hivatalnál; 1839-ben pedig rendes hivatalnok — ugynevezett rajzoló — lett az országos építészeti igazgatóság kebelében, egyelőre azonban szabadságot nyert a fennérintett vasuti munka folytatásánál, végleges befejezéséig, tényleg közreműködni.

Ez megtörténvén, Reitter ismét Budára jött, és még 1847-ik évben Leitner Máriával házasságra lépett; ezen szerencsés házi viszony azonban rövid időre némi háborodást szenvedett 1848-ban, midőn a nemzeti küzdelmek első stádiumában a magyar kormány néhány fővaspályát valósitani szándékozván, Reittert szemelte ki nevezetesen a Székesfehérvár-budai és a Pest-debreczeni vonalok tanulmányozására és tervezésére.

Ezen feladatát szokása szerint buzgalommal felkarolván, azzal okot adott arra, hogy a forradalom legyőzése után a hadi törvényszék elé állittatott, de miután elitélésére lényeges ok nem létezett, polgári szabadságát ismét viszszanyeré.

A szabadságharcz lezajlására következő korszakban Reitter az akkori helytartósági osztály épitészeti igazgatóságánál lett alkalmazva, hol mint első rendü mérnök, a középitészetet vezette, még pedig oly szorgalommal és odaadással, hogy rövid két év után a szó teljes értelmében valóságos épitész-mérnökké vált.

Mint ilyen, nagy szenvedélylyel folytatá pályáját, s ez új hivatalában, közel husz évig, oly szép sikerrel működött, hogy a főváros területén felmerült épitési ügyekben ugyszólván mérvadó lett Reitter nézete és sokat nyomó véleménye, ugy annyira, hogy nemcsak a legelső szakférfiak figyelmét vonta magára, hanem kitünő szakismerete és ritka ügyességével egyszersmind a két főváros tanácsának s képviselőségének osztatlan bizalmát is maradandóan tudta magának biztositani.

Ugyan ez időben történt, hogy a Duna-gőzhajózási társulat pályázatot nyitván az alsó dunarakpart létesitése ügyében, a pályázók közt Reitter is komolyan foglalkozott, s ebbeli fáradozása tényleg a legszebb sikerrel jutalmaztatott, miután munkája legjelesebb lévén, a társulattól elfogadtatott; ő pedig egyszersmind az épités végbevitelével bizatott meg.

Ez volt legelső önálló magány műve; azzal kapcsolatosan épité későbben a csatlakozó felső- és alsó-dunarakpartot, még pedig oly kedvező eredménynyel, hogy a bevégzett munka általános megelégedést aratott nemcsak, hanem hogy az előirányzott költségnél — szokásos tapasztalásunk ellenére — sokkal kisebb volt a valódi kiadás, annál nagyobb pedig ama rendkivüli haszon, hogy a szabályozás folytán nyert tágas dunapart felette előnyös eladásából több százezer forintot szedett be a fővárosi pénztár. Reitter vezetése alatt ezen érdekes vizi munka — utolsó részletéig — oly tökélylyel létesült, hogy párját alig találjuk Európa bármely fővárosában; könnyen magyarázható tehát, hogy fővárosunk ily fényes eredmény után elhatározta, hogy a megindított partműveknek folytatása megujitott erővel eszközöltessék ezentúl is Reitter ügyes vezetése alatt.

A közbizalomnak hódolván, elhunyt barátunk elfogadá — egyéb hivatalos kötelességei mellett — ez új feladat végrehajtását, és oly sikerrel vezérlé a munkát, hogy általános feltünést ébresztett társai körében, sőt ama rakpartok létesülése körül szerzett érdemeinél fogva a Ferencz József rendjel keresztjével diszíttetett fel. Amaz időben hivatalból bizatott meg az országban megindított számos száraz épitkezés vezetésével, nevezetesen: a váczi fegyenczház, valamint a budai Kapuczinusok zárdájának felépítése és gyökeres átalakításával; ugyanakkor tervezé a roskatag állapotu kincstári Lukács-fürdő ujjáépítését, mely legújabb igényeknek megfelelő modorban, személyes felügyelete alatt, csakugyan végre is hajtatott.

Ez alkalommal szerkesztett egyszersmind egy igen érdekes emlékiratot a Császár- és Lukács-fürdők tulajdonosai közt évek óta villongó pörlekedések végképeni megszüntetése érdekében.

Midőn 1860-ik év elején az országnak helytartósági osztályai Budán pontosultak össze s ezen egyesités folytán számos hivatalnok rendelkezés alá került, e véletlen sorsban Reitter is részesült, mivel öregebb társainak érdemeit a kormány figyelem nélkül nem hagyhatá.

E váratlan esemény azonban legkevésbé sem zavará meg kitartó szorgalmát és vele született tevékenységét, mert ő még ezen rövid idő alatt is bő alkalmat talált több közérdekü tervezet kidolgozására; ezek közül főhelyet foglalt el nevezetesen az állam- és déli vaspálya összekapcsolása czéljából szerzett részletes tervezet, mely szerint a két vasuti főindóház a Margit-szigeten alul öszvesített Dunán át épitendő vashid és vaspálya által akként köttetett volna össze, hogy az összekapcsoló főpályának egy mellékágazata a két fővárost közvetlen érintkezésbe hozta volna a Zugliget kies környékével.

Ezen eredeti eszméjének életrevalósága, — habár vállalkozó tüstént nem találkozott—fényesen bizonyult be későbbben, midőn amaz áthidalás franczia vállalkozókkal csakugyan megindíttatott, s most már be is fejeztetett; a hegyekbe vezető vasút pedig a közlekedésnek közel hat év óta tényleg már át van adva.

Ugyanakkor ő különös előszeretettel foglalkozott a Buda és Pest közötti Duna szabályozásának nagy horderejü eszméjével; — ennek megfelelőleg tehát pontos méréseket hajtott végre, saját költségén, hogy tiszta itéletet nyerhessen e nagyfontosságu tárgy felett, s tüzetes kutatásai nyomán alaposan szólhasson a dologhoz.

Ezen feladatot szokott hevével és szorgalmával befejezvén, mérnök-társait még 1865-ben lepte meg nyomtatásban is megjelent azon művével, mely: »Dunaszabályozás Buda és Pest között, pesti hajózható csatorna« stb. czim alatt nagy feltünést okozott a mérnöki világban.

Ezen munkája általános elismerésben részesülvén, nemcsak az érdekelt két főváros figyelmét vonta magára, hanem magyar Akadémiánk is különös méltánylásban részesítvén Reitternek ezen művét, 1865-ik évi dec. 10-én tartott nagygyülésén levelező tagjául választá meg őt; s azzal ő a legnagyobb kitüntetésben részesült, mely magyar tudóst életében érhet!!

Az e munkában részletezett művek létrehozására egész szellemi erejét és anyagi tehetségét fordítá; a gyümölcs, lelki örömére, érlelődni is látszott már, mert Pest városa a tervezett hajózási csatornát végrehajtani óhajtván, egyelőre már minden épitkezést betiltott, a csatorna vonalán eszközlendő kisajátítások akadálytalan végrehajtása végett.

Szép tervezetének várva várt valósítása azonban véletlen hajótörést szenvedett hazánk épen azon reményteljes forduló pontjában, midőn 1867. évben önálló miniszteriumunk alakulásával úgy látszott, hogy a főeszmék inkább szellemi irányt követtek, mintsem hogy anyagi kérdések nyomdokában haladtak volna.

Kedvencz eszméjén ily véletlenül sujtó fordulat által megdöbbenve, Reitter eleintén mélyen érezte ugyan a csapás keserűségét, azonban előtörekedő, élénk lelke új táplálékot talált amaz emlékezetes időben, midőn hű nemzetünk felséges királyának koronázása alkalmával ünnepélyesen hódolni akarván, a magasztos ünnepély berendezését reá bízta.

A nagyszerű ünnepély tagtársunknak, ki benne oly tevékeny részt vett, a megérdemlett jutalmat meghozá; Reitter a vaskorona rendjével s a vele járó nemességhez csatolt »Temesi« előnévvel tüntettetett ki.

A magyar miniszterium alakulásával osztálytanácsosul neveztetett ki, s mint ilyen, a középitészeti osztályt illető ügyek vezetésével bizatott meg, melyeket nem csak előbbi állásában igen sikeresen kezelt, hanem ez új hivatalában is kitünő eredménynyel látott el.

Régi kedvencz eszméje — a két főváros közötti Dunafolyam szabályozása—emez időben szavaztatott meg az országgyülés által, Reitter pedig a megindított szabályozást kezdetétől fogva nagy érdekkel kisérte, s tevékeny részt vett egyszersmind nemcsak a gyakorlati kivitelben, hanem a szabályozás érdekében felállitott hivatalos szakbizottmány minden nevezetesebb tanácskozásában is.

Ugyanekkor merült fel s indult meg a két főváros egyesítése, rendezése és általános szépitésére vonatkozó tárgyalás. Ez nyilván rendkivüli intézkedések életbeléptetését hozta magával s nevezetesen a közmunka-tanács fölállítását tételezte föl. Ennek főinditója és szervezője gróf Andrássy Gyula akkori miniszterelnök volt, a tényleges végrehajtással megbízott szakosztály főnökéül pedig elhunyt tagtársunk Reitter Ferencz szemeltetett ki és választatott meg.

Hogy e fontos új állásában sok oldalu feladatának eleget tehessen, a főügyek rendezése után azonnal a külföldre sietett, s körútjában Európa legnevezetesebb pontjait, mint London, Páris, Berlin, München, valamint az olasz fővárosokat is, saját költségén látogatá meg s szép tapasztalattal gazdagítva tért ismét haza; itthon pedig nagy szorgalommal tanulmányozta az általa látogatott, valamint más nevezetes városok szabályozási tervezeteit; olvasta a szervezésüket érdeklő szabályokat és beható tanulmányozásai után elvégre kész alaptervvel lépett föl, mely döntő helyen el is fogadtatván, ennek alapján biztos irányt jelölt ki azoknak, a kik későbben nélküle ugyan, de egyéni érdemének köteles elismerésével, folytatják jelenleg is azon művek végrehajtását, melyeket ő biztos kézzel jelölt ki annak valósitására, hogy Budapest méltó helyet foglaljon el minél elébb Európa jelesebb városai között.

Ő nagy részvéttel kiséré folyvást eme szép, a két város felvirulására irányzott feladat életbeléptetését, tevékenységének utolsó fénykoráig, sőt még akkor is, midőn orvosolhatlan betegsége testi erejét mindinkább aláásván, megérdemlett nyugalomba vonult vissza.

Ezt megelőzőleg azonban ő folytonos érdekkel és szorgalommal működött azonkivül még a pesti kör- és sugárut tényleges helyreállitása ügyében; kidolgozá az országos építési rendszabályt, valamint a főváros földalatti csatornázásának érdekes programmját; tevékeny részt vett azonkivül a pesti állatkert létesitésében, jelesen annak gyakorlati berendezése, valamint az állatok elhelyezésére szolgáló építmények tervezése és kivitele körül.

Eleven szinekkel ujitá meg tagtársunk becses emlékét elvégre, a legközelebb mult junius 26-án Budaváros területére megsemmisítő erővel tört felhőszakadás; mert épen Reitter volt az, a ki döntő köreinket már jóval ezelőtt komolyan figyelmeztetè a szomorú katastropha lehetőségére, s természetszerű sejtelménél fogva már régebben inditványozá, hogy a rendkivüli zivatarok alkalmával roppant erővel lezuhanó vízáramlat két külön csatornában vezettessék le a Dunába; e mellett világosan megmutatá, hogy, habár költséges volna a két meder rendszeres előállitása, ezen költség úgyszólván, elenyészněk ama roppant bajok és károkhoz mérve melyek emberélet és vagyonvesztéssel szünet nélkül fenyegetőznek.

Intő szavai azonban észrevétlenül hangzottak el akkor, — a mult nyári iszonyú csapás pedig teljes mérvben igazolá a jósolt rémképnek lehetőségét.

Ime, tisztelt Akadémia! rövid vonásokkal igyekeztem előadni tagtársunk munkás életének pályafutását, melyet utolsó lehelletéig, mindenkor tántoríthatlanul követett, daczára annak, hogy betegeskedésének első jelenségei már évek óta kezdettek gyarló testében nyilvánulni.

Szenvedő állapota ugyanis észrevehető volt már 1853-ban, a midőn engemet hivatalosan látogatott meg Kassán, az épen akkor befejezett Abauj-Zemplénmegyei főutvonal átvizsgálása ügyében.

Azóta ő maga is érzé testi fogyatkozását, kivált amaz időben, midőn szeretett nejének 1873-ban bekövetkezett halálával özvegysége sötét szárnyai ereszkedtek életösvényére, és ő ezen nagy veszteség által érzékenyen sújtva, kénytelen volt hanyatló egészségének helyreállitására a gleichenbergi fürdőt ismételve fölkeresni. A fürdő üdvös hatásának több ízben köszönheté testi javulását, a többi közt még azon alkalommal is, midőn Fiuméba hivatott, a tengerváros szabályozási tervét megbírálandó.

Miután innen a fürdőbe tért vissza, eleintén úgy látszott ugyan, mintha ingadozó egészsége, gondos ápolás s a fürdő üdvös hatása mellett ismét javult volna; a rövid javulás azonban csak mulékony fellobbanása volt e fáradhatlan szakférfiu munkás életének. Ezen válságos perczekben közbejött nyugalmaztatása s lelki felindulása azonkivül még növelte testi szenvedéseit, és midőn meghasonlott kedélylyel, sínlődve haza tért, elhelyezetlen gyermekeinek jövendő sorsa iránt táplált gondjai aggasztólag szállották meg atyai keblét; lelki elcsüggedésével pedig egyszersmind testi gyengülése napról-napra növekedett, noha azon sajátságos higgadtság, mely kedélyét mindenkor jellemzé, lelkét nem hagyá el életének utolsó pillanataiban sem.

De fénynapjai ekkor leáldozóban voltak; ő véglegesen kimerülve, tört lélekkel ágyba feküdt s huzamosb szenvedés után egy halk sóhajjal szenderült el — mint feljebb említém, — tevékeny életének 62-ik évében.

És ha ezek után most még egyszer fordulok vissza elhunyt tagtársunk emlékéhez, kötelességemet teljesítem csak, midőn egész őszinteséggel hangsúlyozom, hogy ő ama keveseknek egyike volt, ki a mérnöki tudomány gyakorlati alkalmazásában és előbbre vitelében — úgyszólván — úttörőül szerepelt, a ki tiszta felfogásu ész s lankadni nem tudó tevékenység birtokában, felette befolyásos állást vívott ki magának döntő körökben, s ez állásában egyszersmind hű ápolója, barátja és előmozditója volt minden jónak, a mi szakmájára és ennek terjesztésére vonatkozott.

Lelke egyáltalában tett-erős vala s mindenkor eredeti kerékvágásban mozgott, míg életének kérlelhetlen netovábbja nem tagadta meg tőle megkezdett munkáinak befejeztetését.

Practikus természeténél fogva boldogságát találta reális irányával karöltve járó tudvágyának kielégítésében, főképen pedig a mérnöki tudományok ápolásában; önzéstelen szeretettel szentelé erejét önnön választott szakmájának, és midőn még közszolgálatának tetőpontján állott, nem ritkán hallottam őt legbensőbb érzettel felkiáltani: »Büszke vagyok, hogy mérnök lettem.« Nem csuda tehát, hogy lelke egész hevével és szivósságával használt fel minden kedvező alkalmat arra, hogy gyakorlati tapintata és jó izlése által támogattatva, kedvencz szakmáját új meg új kincsekkel gazdagíthassa.

Fölötte buzgó és kitünő bajnoka volt ő egyszersmind a magyar mérnöki testületnek és az annak jelesbjeiből keletkezett magyar mérnöki egyletnek, mely társunk letünésével őszintén gyászolja egy ritka tehetségü és munkásságu aligazgatóját.

Igen jellemzőleg emlékszik róla különösen tisztelt barátom Herrich Károly ministeri tanácsos, midőn a mérnöki egyletben tartott emlékbeszédében ezeket mondja: »Ha valaki élete tevékeny pályáján végigtekint, s számba veszi: mit mívelt, őt egy erős, vas testtel megáldott, boldog teremtésnek fogja tartani. Ez a csalódások legkeservesebbike. Soha erősebb, soha emelkedettebb szellem gyengébb testbe szorítva nem volt, mint nála.«

Mi, kik közelebbről ismertük, mi, kik évekig folytonosan tartó lázait szemléltük, talányszerűnek tudtuk azt, hogy élhet, s midőn őt naponként halni láttuk s ma a holnaptól féltettük, elálmélkodtunk azon, hogy annyi évtized után tudott meghalni. Annyira megszoktuk azt hinni, annyira el tudtuk azt gondolni, hogy nála nem a test, de a szellem él. Mivel való az, a mit állitok róla, hogy roncsolt testében az életet csak emelkedettebb szelleme, csak lázas tevékenysége tartotta fenn, elannyira, hogy midőn a sors úgy akarta, hogy tevékenységének, hogy működésének határ vettessék, roncsolt teste azonnal érvényre hozta magát, s megtette azt, mire már annyi évtized előtt kész volt; megszünt lenni, életének 62-ik évében; hosszu pálya, ha meggondoljuk, hogy ő voltaképen ezen idő alatt kétszer élt; nappal, midőn ernyedetlen szorgalommal ellenőrizte vagy vezette számos épitményét, és éjjel, midőn tanulmányait és önképzését folytatta.«

Egyébiránt mindnyájan, a kik közelebbről becsülhettük tagtársunk egyéni tulajdonságait, tartozó kegyelettel ismerjük el azt, hogy jó szívü, szelid jellemü és becsületes barátot és oly férfiut vesztettünk benne, ki társai által őszintén tiszteltetett, maga részéről senkit nem bántott; ki személyes szerénysége és senkit nem sértő saját erős meggyőződése mellett másoknak érdemeit méltán elismerte és sokoldalu elfoglaltsága daczára, magánéletében kedélyes és hű barát volt, a ki ösmerőseitől szívesen látva és tisztelve, tisztességesen futá meg életpályáját. Áldott ember és jó barát, szerető férj és atya volt ő, kinek örökre eltávozásában a haza egy tehetséges és buzgó szakférfiút vesztett! .

Béke lengjen porai fölött!
