A KERÜLETRE REDUKÁLHATÓ

FELÜLET-EGÉSZLETEK

ELMÉLETÉHEZ.

RÉTHY MÓR

EGYETEMI NYILV. RK. TANÁRTÓL.

(Előterjesztetett a III. osztály ülésén 1874. okt. 12.)

BUDAPEST, 1875.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALÁBAN.

(Az Akadémia bérházában.)

Budapest 1875. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

Adott görbe vonaltól határolt tetszőleges fölületre kiterjesztendő olyan egészletekről, a melyek a határvonalra redukálhatók.

A kettős egészletek ezen neme megérdemli, hogy vele tüzetesen foglalkozzunk. Mert nemcsak hogy ezen osztályba physikai tekintetben is fontos egészletek tartoznak, hanem a tiszta mennyiségtan szempontjából is érdekes bennök azon periódikus függvényeket tanulmányozni, a melyek a térben analogiáját képezik a cirkuláris, elliptikus és felsőbb egészleteknek.

A következőkben szerencsém lesz ezen függvények néhány általános tulajdonáról értekezni. A transformáló képlet levezetése után jelesül vizsgálni fogjuk előbb azon tulajdonságokat, a melyekkel elegendő, de kell is, hogy birjon a kettős egészlet arra nézve, hogy általános úton egyszerű egészletre redukálható legyen. Azután e föltételnek megfelelő egészletek egy osztályára térünk át, a mely physikai tekintetben különös fontosságú, s végre ezen osztályból példákat meritünk részint bizonyos kivételes pontok felvilágositásáúl, részint mert e példákon alkalmunk lesz a térbeni periódikus függvények egy jellemző tulajdonával megismerkedni.

1. §.

I. Előbbi értekezésemben láttuk, miszerint eltekintve az ellenkező jegytől, mely a kerületen való egészelésnek irányát változtatja csak meg:

$$\int Zd\zeta = \int\left(\frac{\xi'}{\eta'\zeta'}\frac{dZ}{d\eta}\frac{d\xi}{n'dn} - \frac{\eta'}{\zeta'\xi'}\frac{dZ}{d\xi}\frac{d\eta}{n'dn}\right)d\omega$$

Ebből ciklikus felcserélés és Z helyett X illetőleg Y függvénynek tevése által lészen:

$$\int Xd\xi = \int\left(\frac{\eta'}{\zeta'\xi'}\frac{dX}{d\zeta}\frac{d\eta}{n'dn} - \frac{\zeta'}{\xi'\eta'}\frac{dX}{d\eta}\frac{d\zeta}{n'dn}\right)d\omega$$

$$\int Yd\eta = \int\left(\frac{\zeta'}{\xi'\eta'}\frac{dY}{d\xi}\frac{d\zeta}{n'dn} - \frac{\xi'}{\zeta'\eta'}\frac{dY}{d\zeta}\frac{d\xi}{n'dn}\right)d\omega$$

s a három képlet összegezése által:

$$1)\ldots \int\left(Xd\xi + Ydy + Zd\zeta\right) = \int\left[\frac{\xi'}{\eta'\zeta'}\left(\frac{dZ}{d\eta} - \frac{dY}{d\zeta}\right)\frac{d\xi}{n'dn}\right.$$
$$\left. + \frac{\eta'}{\zeta'\xi'}\left(\frac{dX}{d\zeta} - \frac{dZ}{d\xi}\right)\frac{d\eta}{n'dn} + \frac{\zeta'}{\xi'\eta'}\left(\frac{dY}{d\xi} - \frac{dX}{d\eta}\right)\frac{d\zeta}{n'dn}\right]d\omega$$

Ezen képletből önként következik, hogy minden felület-egészlet, hacsak a jobboldalon lévővel egyenlő alakkal bir, olyan egészletre redukálható, a mely magának a felületnek alakjától független s csakis a határvonalétól függ. — De ki lehet belőle olvasni azt is, hogy csakis az ilyen alakra hozható egészletek birnak a nevezett tulajdonsággal. A baloldalon lévő alak ugyanis a legáltalánosabb, a melylyel valamely vonal-egészlet csak birhat; más részről láttuk, mlszerint identikus transformatio által a jobboldalon lévőnek alakját veszi fel. Ha tehát valamely vonal-egészlet felület-egészletté alakul, akkor szintén kell, hogy ezen felület-egészlet a jobboldalon állónak alakjára hozható legyen.

A következőkben cartesiusi coordináták használatára fogunk szoritkozni; ez okból az 1) képletben ξ η ζ helyébe x y z-et s egyuttal ξ' η' ζ' és n' helyébe az egységet teszszük. Ez által ered *):

$$2) \ldots \int\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)=$$

$$\int\left[\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)\frac{dx}{du}+\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)\frac{dy}{du}+\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dx}{dy}\right)\frac{dz}{du}\right]d\omega$$

mely képletben X Y és Z függvények ugyanazon föltételeknek vannak alávetve, a melyeket előbbi értekezésemben a λ-ra nézve kimondottunk; kell tehát, hogy végesek és egyértéküek legyenek a szóban lévő felületdarabon mindenütt deriváltjaikkal egyetemben. Ugy hogy arra nézve, hogy

$$\int\left(U\frac{dx}{du}+V\frac{dy}{du}+W\frac{dy}{du}\right)d\omega$$

a határvonalra szoritkozó egészletre redukálható legyen, a következő tulajdonok megléte szükséges, de elegendő is:

1. U, V, W függvényeknek az egész felületen végeseknek és egyértéküeknek kell lenni.

2. A felületet környező térben a következő differentialis egyenletnek kell fennállani:

$$3) \ldots \frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}=o$$

3. A következő differentiális egyenletek megoldásainak az egész felületen végeseknek és egyértéküeknek kell lenni

$$4) \ldots \begin{cases} \dfrac{dZ}{dy}-\dfrac{dY}{dz}=U \\ \dfrac{dX}{dz}-\dfrac{dZ}{dx}=V \\ \dfrac{dY}{dx}-\dfrac{dX}{dy}=W \end{cases}$$

Ez utóbbi egyenleteknek a 3) egyenlet fennállását feltételezve, partialis megoldását képezi a követ-

*) E tétel Stokes tanártól való »Smith's Price Examination 1854 question 8,« 1) alatti általánositását bizonyitás nélkül Gauss összes müvei IV. kötetének végén Schering tette közzé.

vetkező csoport, a melyre a következőkben hivatkozni fogunk:

$$5) \ldots \begin{cases} X = \int V dz \\ Y = -\int U dz \\ Z = o \end{cases}$$

II. Ezek után áttérhetünk egy tulajdonság tárgyalására, a mely a szóban lévő kettős egészleteket különösen jellemzi.

Jelentsen $F\left(x y z \frac{dx}{dn} \frac{dy}{dn} \frac{dz}{dn}\right)$ valamely függvényt s legyenek azon értékei, melyekkel bir, ha

$\frac{dx}{dn} = 1, \frac{dy}{dn} = 0, \frac{dz}{dn} = 0$, illetőleg

$\frac{dx}{dn} = 0, \frac{dy}{dn} = 1, \frac{dz}{dn} = 0$, vagy végre

$\frac{dx}{dn} = 0, \frac{dy}{dn} = 0, \frac{dz}{dn} = 1$

sor szerint U, V, W. Legyenek továbbá ezen függvények valamely adott τ térben mindenütt végesek és egyértéküek, valamint $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz} \ldots$ deriváltak is. A τ tér maga egyetlen egy zárt felület által legyen határolva s a $+$ normális iránya a tér belseje felé mutasson. A következő felület-egészlet:

$$6) \ldots \Psi_\alpha = \int F\left(x y z \frac{dx}{d} \frac{dy}{d} \frac{dz}{d}\right) . d\omega$$

vonatkozzék valamely tetszőleges zárt Ω felületre, vagy akár ω felületdarabra, mely egészen az adott τ térben fekszik. Az egészletnek az a tulajdona legyen, hogy a nevezett zárt Ω felületre kiterjesztve, értékre zéróval egyenlő.

Azt állitjuk, hogy az ilyen egészletnek ω felületdarabra vonatkozó értéke, bizonyos később megnevezendő kívételes pontoknak a f e l ü l e t b ő l való k i r e k e s z t é s e u t á n, a z ω h a t á r-v o n a l á r a r e d u k á l h a t ó l é s z e n.

Föltétel szerint ugyanis τ terünkben lévő akármelyik zárt fölületre Ω-ra kiterjesztett Ψ_α mindenesetre elenyésző az általa bezárt térhez képest; ennélfogva Ψ_α-nak végtelen kis zárt fölületre vonatkozó értéke negyedrendü végtelen kicsiny lesz.

Ezen megjegyzést $F\left(x\, y\, z \frac{dx}{du} \frac{dy}{du} \frac{dz}{du}\right)$ alakjának meghatározására felhasználandók terjeszszük ki Ψ_α-t olyan tetraeder-elem felületére, melynek három élét

$$OA = dx,\ OB = dy,\ OC = dz$$

képezi s melynek oldal-területei tehát sorban:

$$ABC = d\omega,\ BOC = -d\omega \frac{dx}{dn},\ AOC = -d\omega \frac{dy}{dn}$$

$AOB = -d\omega \frac{dz}{dn}$ hol dn megállapodás szerint a tér belseje felé irányúl.

Ezen jelölések s a 6) alattiak tekintetbe vételével a 7) képletből közvetlenül foly, miszerint tetraederünk felületére vonatkozólag

$$\Psi_\alpha = \int\left[F(x\, y\, z\, \ldots) - U \frac{dx}{dn} - V \frac{dy}{dn} - W \frac{dz}{dn}\right] d\omega + \varepsilon,$$

mely egészlet általában másodrangu kicsiny, kivéve, ha

$F\left(x\, y\, z \frac{dx}{dn} \frac{dy}{dn} \frac{dz}{dn}\right) = U \frac{dx}{dn} + V \frac{dy}{dn} + W \frac{dz}{dn}$ mely esetben $\Psi_\alpha = \varepsilon$ harmadrangu kicsinynyé lesz.

Annak kifejezése végett már mostan, hogy ε is elenyésző kell hogy legyen, terjeszszük ki a

$$8) \ldots .\ \Psi_\alpha = \int\left(U \frac{dx}{dn} + V \frac{dy}{dn} + W \frac{dz}{dn}\right) d\omega$$

egészletet a cartesiusi coordinátákhoz tartozó térelemnek felületére. Azon lapon, melynek felülete

$$d\omega = dy\,.\,dz$$

lészen az egészlet értéke

$$U \,.\, dy \,.\, dz$$

illetőleg a dx távolban lévő ellentett lapján a térelemnek

$$-\left(U+\frac{dU}{dx}dx\right).\,dydz$$

Lészen tehát a többi egészlet-pár képezése s valamennyi összegezése után

$$9)\ldots\int\left(U\frac{dx}{dn}+V\frac{dy}{dn}+W\frac{dz}{dn}\right)d\omega=\int\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}\right)d\tau,$$

mely jobb oldalon álló mennyiség csak egy térelemre vonatkozván, általában harmadrendü végtelen kicsiny. Ámde Ψ_α negyedrangu kell hogy legyen; szükséges tehát, hogy U V W a τ térben mindenütt megoldásai legyenek a következő differentialis egyenletnek

$$3)\ldots\ldots\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}=o$$

De ezen egyenlet kielégitése nemcsak szükséges, hanem elegendő arra nézve is, hogy Ψ_α elenyésző legyen bármely véges zárt felületen, a mely τ terünkben van. Valóban ismeretes (s a 9) egyenletből a felülettől bezárt tér elemeire kiterjesztett összegezés által is bebizonyitható), hogy a 9) egyenlet érvényes véges tért bezáró fölületre vonatkozólag is.

Összefoglalva az eddigieket, bebizonyitottuk, miszerint egészletünknek a következő alakkal kell birni:

$$\Psi_\alpha=\int\left(U\frac{dx}{dn}+V\frac{dy}{dn}+W\frac{dz}{dn}\right)d\omega$$

hol U V W az egész τ térben a 3) differentialis egyenlet megoldását képezik.

Ámde ez meg lévén, elmondhatjuk, hogy az 5) alatti határozatlan egészletek által függvényünk határvonalára kiterjesztendő egészletre lesz visszavive, ha csak ép ezen határozatlan egészletek a szóban lévő felület egész terjedelmében végesek és egyértéküek. Ezen határozatlan egészletek egyes pontokban vagy vonalokban végtelenekké vagy többértéküekké lehetnek; az ilyen pontokat vagy vonalakat azután ki kell rekeszteni s a kirekesztő vonalat szintén a felület határvonalához szamitani.

2. §.

I. A 9) egyenlet véges fölületre is érvényes lévén, hacsak U V W és deriváltjaik a bezárt térben, miként föltételeztük, végesek és egyértéküek, tegyük meg benne a következő helyettesitéseket:

$$U = \Phi \frac{d\Psi}{dx} - \Psi \frac{d\Phi}{dx}$$

$$U = \Phi \frac{d\Psi}{dy} - \Psi \frac{d\Phi}{dy}$$

$$W = \Phi \frac{d\Psi}{dz} - \Psi \frac{d\Phi}{dz}$$

Ez által az ismeretes Green-féle tételre jövünk:

$$10) \ldots \int \left(\Phi \frac{d\psi}{dn} - \Psi \frac{d\Phi}{dn} \right) d\omega = - \int \left(\Phi \varDelta \Psi - \Psi \varDelta \Phi \right) dx\, dy\, dz$$

hol

$$\varDelta \Psi = \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \frac{d^2 \Psi}{dz^2}$$

mely egyenlet tehát megkivánja, hogy Φ, Ψ s ezeknek a képletben előforduló deriváltjaik az egész térben s felületén végesek és egyértéküek legyenek.

Visszaemlékezve már most az előző tételre azt következtethetjük, hogy a Green-féle tételből folyó minden, nem zárt, felületre vonatkozó kettős egészlet a határvonalra redukálható, hacsak Φ és Ψ együtt a következő egyenlet megoldásait képezik a szóban lévő felületdarab környületében:

$$11) \ldots \Phi \varDelta \psi - \Psi \varDelta \Phi = 0$$

Áll tehát ez in specie a következő felületegészletekről is:

$$12) \ldots F_\alpha = \int \left(\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\omega$$

$$13) \ldots F_\alpha = \int \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] d\omega$$

melyekben $i = \sqrt{-1}$, továbbá k állandót jelent, s

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

végre $\alpha\,\beta\,\gamma$ valamely p pont coordinátáit képviselik, — ha csak a szóban lévő térben r zérótól különböző s 12)-ben

$$\left.\begin{array}{ll} & \Delta\Psi = o \\ \text{illetőleg 13)-ban} & \Delta\Psi + k^2\,\Psi = o \end{array}\right\} 14)$$

Valóban $\frac{1}{r}$ és $\frac{e^{ikr}}{r}$ azonossá teszik a következő egyenletek mindegyikét:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = o \text{ illetőleg } \Delta\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) + k^2\frac{e^{ikr}}{r} = o$$

s ezeket tekintetbe véve a 11) egyenletből a 14) alattiak erednek.

---

3. §

Áttérünk a térbeni periodikus függvényekre. — Képzeljünk a térben egy görbe vonalat; képezze ez kerületét valamely felületdarabnak, mely önön magát tetszőleges számszor metszheti, — úgy hogy tehát egyes részei magukban véve zárt felületet is alkothatnak.

Függvényünk legyen egy egészlet által defineálva, a mely ilyen felületdarabra terjesztendő ki. A függvény változóságát okozhatná a görbe vonal folytonos változása, vagy határozott kerület föltevése mellett a felületdarabnak, — vagy végre az egészletben meglévő parametereknek változása. — Azon függvényeknél, a melyekkel a következőkben foglalkozni fogunk, változatlan görbe vonal lesz alapúl fölvéve; a függvény változását a tér különböző pontjaiban az illető pont coordinátái az által okozzák, hogy a nevezett egészletben mint parameterek szerepelnek; végre a tér ugyanazon pontjában is változzék a függvény a békeritett felület változósága folytán.

A tárgyalandó függvények körét azonban szükebbre kell hogy szoritsuk. Függvényünk az 1 §-ban tárgyalttal egyenlő alakú kettős egészlet által legyen defineálva, melynek U V W mennyiségei a 10) alatti differentialis egyenlet megoldását képezzék. Ezen egészletekben azután olyan függvényekkel lesz dolgunk, a melyeknek a tér ugyanazon pontjában való értékei között általában véges különbségek léteznek. — Valóban bizonyos határok között változhatik a bekerített felületdarab a nélkül, hogy a reá kiterjesztett egészlet értéke változnék, miután azon térben, a melyben a 10) egyenlet érvényes, általában a különböző felületekhez tartozó egészletek mind azonosak a határvonalra redukálttal. E között pedig s kivételes pontokat tartalmazó felületekre kiterjesztettek között általában véges különbségek léteznek.

Még szükebbre szoritjuk jelen tanulmányunk körét. Azon függvényekkel fogunk foglalkozni, a melyek az adtuk definitió alapján a 14) egyenletek érvényessége mellett a 12) és 13) egészletekből erednek.

Abból a czélból, hogy egészleteinknek előjegye kétes ne legyen, előbb azt mondottuk, hogy zárt felületnél ennek normálisa, a bezárt tér belseje felé irányúljon. Az alapúl fölvett görbe vonalra tett nem zárt felületeknél állapodjunk meg ugyan e czélból abban, hogy közülök egyen ω_1-en önkényesen választva meg a normális irányát, ez utóbbit azután minden más efféle ω felületen úgy vegyük, hogy az ω és ω_1 felületek közül csak az egyiké legyen a kettö által bezárt véges tár belseje felé irányulva.

Bizonyos térben a

$$\Delta \psi = 0, \text{ illetőleg } \Delta \psi + k^2 \psi = 0 \dots . \quad 14)$$

differentialis egyenletnek megfelelő függvények, miként ismeretes, olyan (gravitatiós, magnetikus, electricus, illetőleg hullám-gerjesztő) tömegektől származó potentiálértékek képviselőinek tekinthetők, a melyek által elfoglalt térben a 14) egyenletek nem érvényesek többé. Ismeretes továbbá, míszerint

a) ezen egészleteknek olyan zárt felületre vonatkozó értéke, mely a működő tömegek egyikét $M\lambda$-át a többiektől s az $\alpha\, \beta\, \gamma$ ponttól is elkülönitett térbe rekeszti, tökéletesen azonos az $M\lambda$-tól származó potentiálnak az $\alpha\, \beta\, \gamma$ pontban való értékével.

b) ezen egészleteknek olyan zárt felületre vonatkozó értékét, a mely $\alpha\, \beta\, \gamma$-át valamennyi tömeggel együtt ugyanabba az egy térbe rekeszti, zéróval egyenlő,

c) ezen egészleteknek akár zárt akár nem zárt felületre vonatkozó értékei között olyan pontokban, melyek egymáshoz végtelen közel, s egyszersmind a szóban lévő felülettől véges távolban vannak, — csak elenyésző különbség létezik.

Gondoljunk már mostan választott zárt vonalunkra, mint keretbe, önmagát nem metsző görbe felületet ráteritve; legyen ennek keresztmetszete A C B által ábrázolva. A térben tetszőlegesen fekvő M′ M″..... tömegeknek valamely pontban való potentiáljai legyenek ψ' ψ''..... s ezek összege ψ-vel jelölve. Az A C B felületdarab pontjai mind véges távolságban legyenek a tömegektől.

Gondoljuk ezek után az A C B felületre szoritkozó

$$f\alpha = \int\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\omega$$

$$\text{illetőleg } f\alpha = \int\left(\frac{e^{ikr}}{r}\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\frac{e^{ikr}}{r}}{dn}\right)d\omega$$

egészletet a végtelen tér minden pontjában kiszámitva, mely feladat elvben megoldható, miután ψ a fölületen véges (a tömegektől való véges távolság folytán) s így az f_α egészlet az A C B felületen ismert törvény szerint kiterített véges tömegek pontentiáljának tekinthető. Ez utóbbi okból még azt is hozzátehetjük, hogy az f_α az A C B fölület két oldalától határolt végtelen térben mindenütt egyértékű függvény lesz.

Nem igy F_α, melylyel a tetszőleges (csakhogy az A C B keretbe foglalt) felületre vonatkozó egészletet akarjuk jelölni. Sőt az a) és b) tételekből önként foly, miszerint a F_α-nak az $\alpha\ \beta\ \gamma$ pontban való értékei az f_α-tól az e pontban uralkodó potentiálok által (de csakis ezek által) különbözhetnek. F_α egészletünk tehát többértékü függvény; periodusai ψ', ψ''... úgy, hogy

15).....$F_\alpha = f_\alpha + m\,\psi_\alpha' + n\,\psi_\alpha'' + \ldots.$

hol m, n,...tetszőleges + vagy — egész számot jelent.

Szoritkozzunk egyszerüség kedvéért csupán egy tömegre, mely esetben

16)......$F_\alpha = f_\alpha + m\,\psi_\alpha$

s kérdezzük, mekkora a f_α-nak az A C B felületdarab átellenes (1 és 2) pontjaiban való értéke között. E feladatot megoldandók, gondoljunk zárt vonalunkra egy tetszőleges A D B felületet ráterive. Az A C B D A zárt felület az 1 pontot rekessze a tömegtől külön. Lészen a normális irányának tekintetbe vételével

$$F_1 = f_1 + \psi_1$$
$$F_2 = f_2$$

hol F_1 és F_2 az ADB felületre kiterjesztett egészletnek az 1 és 2 pontokra vonatkozó értékét, Ψ_1 pedig a periodusnak az 1 pontban való értékét jelentik; tekintetbe véve, hogy a c) alatti folytán

$$F_1 = F_2$$

lészen tehát

$$f_2 - f_1 = \psi_1 \ldots\ldots 17)$$

E vonatkozás arra szolgáltat módot, hogy F_α-nak ugyanazon pontban való végetlen sok értékét az egész tér közvetítése által összefüggésben gondolhassuk. Valóban ugyanazon m-hez tartozó értékei F_α-nak folytonos összefüggésben vannak egymással

$$[f_1 + m\,\psi_1]\text{-től} \ldots [f_2 + m\,\psi_2]\text{-ig}$$

s az F_α-nak ezen csoportjára megint a folytonosság törvénye szerint következik az (m+1)-hez tartozó csoport

$$[f_1 + (m+1)\,\psi_1]\text{-től} \ldots [f_2 + (m+1)\,\psi_2]\text{-ig},$$

miután

$$\psi_1 = \psi_2$$

s ennélfogva a 17) tekintetbe vételével

$$f_2 + m\,\psi_2 = f_1 + (m+1)\,\psi_1$$

Az F_α — függvény értékeinek folytonosságát a következő érdekes tétel által lehet szavakba foglalni:

Képzeljünk egy görbe *s* vonalat, mely α pontból kiindulva keretünket tetszőlegesen nagy gyürükben n-szer futja körül s azután ugyancsak α-ban végződik is. A következő egészlet, melyben $\frac{dF}{ds}$ értékét sehol se hagyjuk ugorni, ezen s vonalra terjedjen ki; akkor lészen

$$\int_{(s)} \frac{dF}{ds} ds = n . \psi\alpha \ldots\ldots 18)$$

na ugyan az egészelés kezdő és végpontja épen az α pont.*)

A tétel igazsága önkényt foly, miután a bal oldal az egészlet fogalma szerint nem egyéb, mint az $F\alpha$ függvénynek az s vonal mentében, (tehát n-szeres körülkanyargás alatt) való összes változása.

E tétel különben általánosan érvényes valamennyi periodikus egészletről. Érdekesnek pedig azért mondható, mert az eredmény valóban meglepő az első tekintetre, ha meggondoljuk, hogy az

$$\int_{(s)} \frac{dF}{ds} ds$$

látszat szerint két teljesen tetszőleges alakú görbe vonaltól függ. Más részről magában véve is érdekes, hogy a térbeni függvények periodusai tetszőleges alakú vonalak mentében vett egészletek által fejezhetők ki ép úgy, mint a complex sikon szereplő függvényekéi.

---

4. §.

Az eddigieknek kellő világosságba helyezése végett számitsuk ki teljesen a kettős magnetikus felület (galvan-folyam), — s a diffractiónak a kerületre redukált potentiálját.

---

*) E tételt azon speciális esetben, a midőn $F\alpha$ a galvan-folyam potentiálját jelenti, Gauss fedezte fel: ezen esetben $\psi\alpha$ állandó mennyiség az egész térben, úgy hogy az egészlet az α ponttól is független.

I. Az egyik oldalán $+$, másik oldalán — magnetikus fluidummal födött fölület potentiálja tudvalevőleg, ha a fluidum sürüsége az egységgel egyenlő:

$$\psi_\alpha = \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega \ldots 19)$$

másként

$$\psi_\alpha = \int \left[\frac{d\frac{1}{r}}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \frac{dy}{dn} + \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \frac{dz}{dn} \right] d\omega$$

Föladatunkat megoldandók 6) szerint a következő határozatlan egészleteket kell hogy kiszámitsuk:

$$x = \int \frac{d\frac{1}{r}}{dy} dz = -\int \frac{(y-\beta)\, dz}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{3/2}}$$

$$y = -\int \frac{d\frac{1}{r}}{dx} dz = \int \frac{(x-\alpha)\, dz}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{3/2}}$$

Ezekből lészen pedig

$$-\frac{x}{y-\beta} = \frac{y}{x-\alpha} = \frac{z-\gamma}{r\,[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]}$$

ugy hogy a kerületre redukált magnetikus potentiál lészen.

$$\psi_\alpha = \int \frac{z-\gamma}{r} \frac{(x-\alpha)\, dy - (y-\beta)\, dx}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \ldots 20$$

Ezen kerület-egészlet azonban csak akkor egyenlő a felület-egészlettel, ha ez kivételes pontot nem tartalmaz, vagy ha l e g a l á b b terithető a kerületre olyan felület is, a mely kivételes pontot nem tartalmaz s a mely a szóban lévő felülettel együtt véve nem fogja kőrül az $\alpha\ \beta\ \gamma$ pontot. — Ilyen kivételes pontok azok, melyekben az

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \end{array}\right\} - 21)$$

egyenes a szóban lévő felületet metszi, miután itt a x és y fügyvények végtelenekké lesznek. Az ilyen pontokat rekesszük ki végtelen kis körök által s számitsuk ki ezeknek a kerülethez való számitása mellett a megfelelő egészletet.

E czélból czélszerü lesz a következő helyettezés:

$$\left.\begin{aligned} &tg\Theta = \frac{y-\beta}{x-\alpha} \text{ tehát } d\Theta = \frac{(x-\alpha)\,dy - (y-\beta)\,dx}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \\ &z-\gamma = r\cos\varphi \end{aligned}\right\} 21_\alpha$$

mi által ered:

$$\psi_\alpha = \int \cos\varphi . d\Theta \ldots\ldots 22)$$

[mely egyszerü kifejezését a 19) felület-egészletnek a

$$\frac{dr}{dn} \cdot d\omega = r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\Theta$$

helyesités által a 19)-ből egyenesen is könnyü levezetni.]

A 22) segélyével pedig közvetlenül foly, hogy a végtelen kis körökben vett egészletek mindegyike

$$= \pm \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\Theta \Big]_{\varphi = 0,\, \pi, \ldots} = \pm \int_0^{2\pi} d\Theta = \pm 2\pi$$

hol a $+$ jegy akkor veendő, ha a metszés pontjában $z-\gamma > o$ s a $-$ jegy, $z-\gamma < o$

Ha tehát a kerület körülfogja a 21) egyenest s csak egy pontban történik átdöfés, akkor

$$\psi_\alpha = \pm 2\pi + \int \cos\varphi \, d\Theta$$

ha pedig a kerület félre esik, akkor ψ_α vagy egyenlő a 22) alatti kifejezéssel, vagy pedig

$$\psi_\alpha = \pm 4\pi + \int \cos\varphi \, d\,\Theta$$

mely utóbbi egyenlet, miként közvetlenül foly, akkor alkalmazandó, ha a felület a 21) egyenest két pontban és pedig a $z=y$ ellenkező oldalára eső pontjaiban metszi.

Látni való, hogy a

$$\psi_\alpha = \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega$$

függvénynek periodusa $= 4\pi$-vel, mint az egészletnek $r=o$ pont körül zárt felületre vonatkozó értékével. Ebből pedig s a 18) alatti tételből ama Gauss-féle tétel következik, melyet fentebb idéztünk, t. i.:

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\psi\alpha}{ds}\,ds = m\,,$$

hol m azon algebrai értelemben vett számot jelenti, a hányszor az s vonal a szóban lévő kerületet körülfutja (az ellenkező irányban történt gyürüzések számának természetesen algebrai összege veendő).

II. A diffractiós egészletnél az előbbivel analog kérdéseket csak érinteni fogjuk s itt is az előbbi értekezésemben levezetett redukált alakjából indulunk ki.*) — Ezen azután olyan észrevételt teszünk, a mely a redukált alak levezetésének új s minden periódikus függvényre érvényes módszerére fog vezetni.

Az idézett kerület-egészlet következőkép hangzik:

$$\psi\alpha = \frac{1}{2\pi h}\int e^{ik\,(R+r)}\cos^2\frac{w}{2}\,d\theta\,......23)$$

hol

$$\cos^2\frac{w}{2} = \frac{h^2-(R-r)^2}{4Rr}$$

Legyen már most a fénylő pont egyszersmind a Coordináták kezdőpontja s $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = h$, úgy hogy

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + (z-h)^2$$

Bele helyettezve már most a 23)-ba a $2_1 a)$ képletek egyikét, lészen a választott cartesiusi coordinatákra redukált kerület-egészletünk:

$$\psi\alpha = \int\frac{e^{ik\,(R+r)}}{8\pi h}\cdot\frac{h^2-(R-r)^2}{Rr}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\,....\,24)$$

Ebből pedig következik, hogy a kivételes pontok mértani helye itt azon egyenes, mely a fénylő és megvilágitott

*) Megjegyezzük, hogy a diffraktiós felület-egészletnek az 5) képletek segélyével való reduktiója a következő, magas transcendensnek látszó, egészlet kiszámitását követelné meg:

$$\int\frac{e^{ik(R+r)}}{Rr}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\left[ik-\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\right]dz$$

melynek megoldása a 24) képletből közvetlenül foly.

pontokat összeköti, s szabatosabban ennek is a nevezett két pont közötti része. Olyan felületre vonatkozólag, mely az összekötő egyenesnek e részét egyszer metszi, lészen tehát *)

$$\psi\alpha = -\frac{e^{ikh}}{h} + \frac{1}{2\pi h}\int e^{ik(R+r)} \cos^2\frac{w}{2}\, d\Theta \ldots\ldots 25)$$

A 24) alatti egészletből továbbá az is olvasható ki, hogy értéke azon kúp felületén ugrik, a melynek csúcsa a fénylő

---

*) Nem lesz érdektelen megjegyezni, hogy a 23) és 25) tétel együttvéve a sugár-képződés sajátságos tüneményét fejezi ki. Gondoljuk ugyanis a *P* fénylő pontot sötét burokkal körülvéve, a mely véges nagyságú nyilással van ellátva; e nyilásra gondoljuk p. a lehető legkisebb területü felületet ráterítve, melynek keresztmetszetét *ACB* ábrázolja. A külső térben való világosság kifejezéséül a Huyghens-féle elv alapján az *ACB*-re kiterjesztett ψa szolgálna. Az 1. pontbanvaló megvilágitás tehát a 23), ellenben a 2. pontbani a 25) által volna kifejezve. — Meggondolva már most, hogy a kerületegyenleteinél fogva θ és (R—r) függvénye lesz a(R+r)-nek, a 23)-at igy is irhatjuk:

$$\psi_a = \frac{1}{2\pi h}\int e^{ik(R+r)} f(R+r).\, d(R+r)$$

hol f(R+r) az egész kerület mentében véges függvényt jelent, ha csak a kerület egy részében sem állandó R+r, vagy pedig az 1 vagy 2 pont az árnyék kúpfelületéhez végtelen közel nem esik. (Ez utóbbi megszorítás a 24) egyenletböl következik.)

Ugyde akkor ez utóbbi egészlet ismeretes tétel szerint elenyésző esz, miután a hullám hossza végtelen kicsinynek tekinthető s ennél fogva $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\omega$.

Az árny-oldalon tehát $\psi a = o$, — mig a 25) szerint ugyanazon föltételek mellett a kúp belső oldalán $\psi a = \frac{e^{ikh}}{h}$ azaz a teljes megvilágitással, mintha a sötét burok ott se volna.

E következtetések általánosságban elvesztik érvényességüket akkor is, ha az 1 vagy 2 pont a kúpfelülettől olyan távolban fekszik, a mely a *h* távolsághoz képest λ-val egyenlő rangú kicsiny. Akkor ugyanis a fentebbi egészlet alsó határa körül $\Delta(R+r)$ rangja λ^2 lesz, mig $\Delta\Theta$ általában első rangú, következőleg *f*(R+r) rangja $\frac{1}{\lambda}$ lészen.

E bizonyítás első részének eszméjét Kirchhoff tanár úr előadásaiból meritettem, a ki is e következtetést a 26) felületegészletek elsejéből (a második ehhez képest elenyésző lévén) partiális egészelés utján vonta.

pont s vezérvonala az adott kerület, — még pedig a kúpnak is csak a fénylő ponttól elfordult azon részén, mely az adott kerülettől kezdve a végtelenbe nyúlik. — Ugyanis közvetlenül látható, hogy 24) egészletünk végtelenné lesz, ha a kerület valamely pontjában x=o, y=o és egyszersmind $h \gtrless R-r$, a mi csak a kúpfelület épen nevezett részén áll.

Tudva pedig, hogy a 12) és 13) képletekből eredő egészletek csak azon felületen ugorhatnak, a melyre ez egészletek kiterjesztendők, az utóbbi észrevételből azon következtetést vonhatjuk, hogy kerület-egészletünk nem lehet egyéb, mint a nevezett kúp felületére vonatkozó diffractiós egészlet. — S valóban nincs is nehézséggel összekötve a

$$\psi\alpha = k\int\frac{e^{ik(R+r)}}{Rr}\,\frac{d(R-r)}{dn}d\omega - \int\frac{e^{ik(R+r)}}{Rr}\left(\frac{1}{R}\,\frac{dR}{dn}-\frac{1}{r}\,\frac{dr}{dn}\right)d\omega \ldots.26)$$

diffractiós egészletnek a nevezett úton kerület-egészletre való redukálása.

N-nel ugyanis a R irányára a (R, r) síkban vont merőlegest jelölvén, lészen a nevezett kúpfelületen:

$$\frac{dR}{dn}=o,\ \frac{dr}{dn}=\cos(\widehat{rn})=\cos(\widehat{rN})\cos(\widehat{nN})$$

mely utóbbi egyenlet olyan három élü testszögből van véve, melyek r, n, N éleit képezik; végre a kúpfelület eleme lészen:

$$d\omega=\left(dR.\ \frac{Rr\sin w}{h}d\theta\right)\frac{1}{\cos(\widehat{Nn})}$$

Ezeket az utóbbi felület-egészletbe helyettezvén, ha még tekintetbe vesszük, miszerint $\widehat{rN} = w - 90^{\circ}$, lészen:

$$\psi\alpha = \frac{1}{4\pi h}\int d\theta\int e^{ik(R+r)}\left(ik-\frac{1}{r}\right)\sin^2 w\,dR\ldots.27)$$

Ámde

$$\frac{d}{dR}\left(e^{ik\ R+r)}\cos^2\frac{w}{2}\right)=e^{ik(R+r)}\left(ik\frac{d(R+r)}{dR}\cos^2\frac{w}{2}-\frac{\sin w}{2}\,\frac{d\omega}{dR}\right)$$

hol is a kúp felületére vonatkozólag

$$\frac{d\,(R+r)}{dR}=1-\cos w=2\sin^2\frac{w}{2}$$

s más részről

$$\frac{R}{h}=\frac{\sin(w-\hat{Rh})}{\sin w}=\cos(\hat{Rh})-\operatorname{ctg}w\sin(\hat{Rh})$$

sinus-arányból lészen:

$$\frac{dR}{dw}=\frac{r}{\sin w}$$

úgy hogy

$$\frac{d}{dR}\left(e^{ik\,(R+r)\cos^2\frac{w}{2}}\right)=\frac{1}{2}e^{ik\,(R+r)}\left(ik-\frac{1}{r}\right)\sin^2 w$$

mely eredménynek a 27)-be helyezése s a határok betevése után ered:

$$\psi_\alpha=-\int e^{ik\,(R+r)\cos^2\frac{w}{2}}d\theta$$

miután a felső határra vonatkozólag $w=180^0$

Látni való, hogy a módszer általános, habár kivitele nem lesz mindig oly könnyü feladat, mint példánkban.

Valamint az elliptikus és felsőbb egészleteknél épen megforditásaik birnak nagyobb érdekkel s fontossággal, úgy itt is remélhető, hogy érdekes lesz megvizsgálni, hogy a *felületegészletnek* differentiálja teljesen adva lévén (a benne lévő parameterek is), — melyek azon görbe vonalak, a melyek a felületegészlet adott számértékéhez tartoznak. Látható, hogy a görbe vonalaknak ilyen adott számértékhez tartozó csoportja periódikus függvénye lesz többértékü egészletünknek.

E föladatnak specialis esetekben megoldásával, valamint a kerületre redukálható felület-egészletek osztályok szerinti tárgyalásával más alkalommal szándékozom foglalkozni.