AZ

ERŐMŰTANI CSAVARFELÜLETEK.

A VIZSZINTES

SZÉLKERÉK ELMÉLETE.

KÉT ÉRTEKEZÉS

MARTIN LAJOS

LEV. TAGTÓL,

(az illető akadémiai birálatokkal együtt).

BUDAPEST, 1875.

A M. TUD. AKADEMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALÁBAN.

(Akadémia-utcza, akad. bérház.)

Budapest, 1875. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

Martin Lajos úr három rendbeli értekezést nyujtott be az Akadémiának, a melyeknek kiadását illetőleg a III. osztály 1873. máj. 19-dikén tartott űlésen a következőleg határozott:

»150. Szily Kálmán: »A propeller felületéről« tartott előadást vonatkozással Martin Lajos értekezésére az erőműtani csavarfelületekről.

Véleménye oda megy ki, hogy Martin úr I-ső értekezése, ha szerzője a birálat közlése után még is kivánná, kinyomatható; a II-dik értekezést ugyanazon tárgyról, melyben erről újat nem mond, hanem sértőleg polemizál, egy, sehol nyilvánosan meg nem jelent birálat ellen, kinyomásra nem ajánlja. A III-dik értekezés »A vizszintes szélkerék elmélete« — ha szerző kivánja — kinyomatható.

Az osztály a biráló úr indokolásait helyesnek találván, összeegyeztetve a többi biráló véleményével, abban állapodik meg, hogy a birálatok másolatban közöltessenek a szerzővel, s azokkal együtt küldessék vissza kézirata azon kijelentéssel, hogy az I-ső értekezés »Az erőműtani csavarfelületek« és a III-dik »A vizszintes szélkerék elmélete« hogyha a birálat tudomásúl vétele után a szerző még is kivánná, kinyomatható; de akkor utána a birálók véleménye is adandó; ellenben a II-dik értekezés »Az erőműtani csavarfelületek nem adandó ki.«

Ezen határozat értelmében itt következik Martin úr első és harmadik értekezése, külön kinyomva; valamint a két biráló véleménye, melynek alapján ezen határozat hozatott.

Budapest, 1874. Julius hó.

Dr. Szabó József,
osztálytitkár.

Tekintetes Akadémia!

Alulirott Martin Lajos akadémiai levelező tagnak az erőműtani csavarfelületekről irt értekezését figyelmesen átolvasván, következő véleményt bátorkodik előterjeszteni:

Az értekezés 5 szakaszra oszlik, melyeknek czimei ezek: I. A vizi szárny. II. A vizi szárny kiszelvényének meghatározása. III. A szélszárny. IV. A gőzszárny. V. A sarktengelyes felületek. Kétségen kivül igen érdekes tárgysorozat, mely a gépész figyelmét felkölteni képes. Azonban a dolgozat alapelveiben egészen hibás, ennélfogva az eredményeket sem lehet elfogadni, melyek azon hibás elvekből vezettettek le.

A tévedés, melybe értekező minden mathematikai éles látása daczára, bebonyolódott, s mely mintegy veres fonal egész dolgozatán keresztül húzódik, két okra vezethető vissza. Ezeknek egyike tisztán tárgyilagos, s abban áll, hogy értekező az analyzis nehézségeinek kikerülése végett, a dolog természeténél fogva a térben működő erőket egy sikra szoritotta, s ez által az általánosságot feláldozta, olyan specialis esetbőindulván ki, melyet a későbbi eredmények nem igazolnak. Nevezetesen mindjárt a második lapon az első ábrában a lapát deréklőjét úgy veszi fel, mintha az annak haladási és forgási irányai által meghatározott sikban feküdnék; holott ez csak egyes, különös esetekben lehet igy, s általánosan csak akkor állana, ha a lapát egy, a forgási tengelyre merőleges egyenes vonalnak forgása által képzett conoid felületet ábrázolna; pedig az értekezés folytán a legelőnyösebb működésű lapátfelület nem ilyen alkatunak, hanem egy görbe nemző-vonal, vagy legalább a forgástengelyre f e r d é n á l l ó e g y e n e s vonal forgása által nyert felületnek találtatik. Az értekezés által legelőnyösebbnek talált lapátfelület deréklője tehát általában nem fekszik a fentebb körülirt sikban, következésképen arra a fentebb idézett helyen kifejtett képletek sem alkalmazhatók.

Ezen tárgyilagos hiba azonban egy második s u b j e k t i v kútfőből ered. Értekező t. i. a l a p á t f e l ü l e t e l e m é t egy e g y s z e r ü k e r e s z t m e t s z é s i v o n a l n a k képzeli magának, melynek deréklőjét a deréklő sikjában akárminő irányban fel lehet venni. Ezek közül épen azt választja ki magának, mely a lapátelem két mozgási irányának megfelelő sikkal párhuzamos, mely tehát a feladat feloldását szerinte leginkább megegyszerüsiti, a mennyiben e módon a feladatot a t é r r ő l a s i k r a lehetett átjátszani. Holott a felületelem deréklőjének egy bizonyos, meghatározott iránya van, melyen változtatni nem lehet. Értekező ezen téves nézetének következtében azután a 6-dik lapon a lapát-elem térfogatának képlete egészen hibás.

Ezen alaptévedések kimutatása után nem tartom szükségesnek a dolgozat részleteibe bocsátkozni, s az értekezést közlendőnek nem itélem.

B u d á n, 1870-iki aug. 1-jén.

Kruspér István.

VÉLEMÉNY

Martin Lajos l. tag úr

értekezései felől.

Martin úrnak a f. évi aprilisi értekezlet határozatából birálatomra kiadott értekezéseiről van szerencsém véleményemet a következőkben előterjeszteni.

Az erőműtani csavar-felületekről.

(Debreczen, 1870. marczius 26.)

Mindenek előtt kijelentem, hogy az értekezést, ha szerzője még most is kivánná, kinyomathatónak tartom. Azt hiszem azonban, hogy szerző úr, ha értekezését visszakapja, vagy módositani, vagy teljesen át is fogja dolgozni, nem levén valószinű, hogy saját kifogásait, melyeket hasonczimű 2-ik értekezésében az 1-re fölhoz, szándékosan figyelmen kivül kivánná hagyni.

Magam részéről is bátorkodom némi észrevételeket tenni szerző úr ezen értekezésére; s tudván azt, hogy a propeller-felület kérdésével akadémiai tagtársaink közül épen szerző úr foglalkozott legtöbbet és legbehatóbban, kérem észrevételeimet, vagyis jelen véleményemet vele egész kiterjedésében közölni. Itélje ő meg, mennyire alaposak észrevételeim, menynyire nem. Minden praetensio nélkül a csalatkozhatatlanságra s anélkül hogy szerző urat a »Quod scripsi, scripsi« büszke jelszó hangoztatásában követni bátorkodnám, tisztán collegialis érzületből teszem papirra igénytelen észrevételeimet. Ha szerző úr nem találná azokat nyomatékosoknak, küldje vissza értekezését osztályunk t. titkárának változatlanul. Minden határozatába bele egyezek látatlanul; csak arra kérem a t. Akadémiát, hogy az esetben, ha szerző úr jelen értekezésének változatlan kinyomatására határozná magát, méltóztassék elrendelni, hogy az akadémiai birálók véleményei is kinyomattassanak, az értekezés mellékletében.

Redtenbacher a »Maschinenbau« 3-ik kötetében a 228. és 229. lapon ezeket mondja: »Geht man von der Voraussetzung aus, dass die Flügelflächen einer Schiffsschraube in ähnlicher Weise geformt werden dürfen, wie die Flügel einer Windmühle, so erhält man eine Schiffsschraube, welche der gewöhnlichen Anordnung sehr ähnlich ist, sich aber doch wesentlich unterscheidet. . . . . Die Windmühlenschraube ist der gewöhnlichen Schraube sowohl in theoretischer wie in praktischer Hinsicht vorzuziehen. Der theoretische Vortheil besteht darin, dass man bei der Windmühlenschraube das Drehungsgesetz der Erzeugungslinie ganz nach Belieben annehmen und dadurch *vielleicht so wählen kann, dass eine vortheilhafte Form erzeugt wird.*«

Ezen elméleti előny fontolgatása birhatta szerző urat arra, hogy maga elé tűzze a nem hálådatlan feladatot: *azon felületet kitalálni, mely víziszárny gyanánt használva, a legjobb hatással bir.*

Feladatát lényegesen megkönnyitette az, hogy már *Maclaurin* meghatározta mértani úton, *Euler* pedig analytikai úton a szélmalmi szárnyak bordáinak legjobb hatású hajlását. Nem kellett tehát egyebet tennie, mint kikeresni azon mértani helyet, mely a Maclaurin-Euler féle képlet szerint állitott felület-elemek sorozatát kielégiti. Igy a feladat igen könnyüvé: egyszerü *mértani hely meghatározássá* vált.

Szerző úr megkisérti a maga módja szerint a mértani hely meghatározását, s elvégre arra az eredményre jő, hogy a legjobb hatású propeller-felület egyenlete ez:

$$z = \left[\frac{3\,c}{2\,\omega} \pm \sqrt{\left(\frac{3\,c}{2\,\omega}\right)^2 + 2r^2}\right] . \operatorname{arctg} \frac{y}{z}$$

föltévén, hogy az épszögü összrendezők Z tengelye a forgás tengelyébe van téve; ω a forgás szögsebességét, c a haladás sebességét; r a felület valamely pontjának tengelytől való távolát jelenti. »A legjobb hatású viziszárny, szerző szerint, oly csavar-felület, melynek minden tengelymetszése mentelék, mely mentelékek áltengelyei állandók, de melyeknek valódi tengelyei különbözők.«

A feladat tehát meg volna oldva.

Hogyha azonban vizsgálni kezdjük, vajjon megfelel-e a szerző által talált felület a feladat követelményeinek, megvannak-e valóban azok a tulajdonságai, melyekkel szerző szerint a legjobb hatású felületnek fel kell ruházva lenni, arra a csodálatos eredményre jutunk, hogy a szerző úr által legjobb hatásűnak állitott felület egyikével sem bir azon tulajdonságoknak, melyekkel ugyancsak szerző úr szerint a legjobb hatású felületnek birnia kell. Szerző úr szerint ugyanis a legjobb hatású felületnek *konoidnak* kell lenni: de a hyperbolikus csavar épenséggel nem konoid. Szerző úr szerint a legjobb hatású felületnek eleget kell tenni Maclaurin-Euler képletének: de a szerző úr által talált felület semmikép sem tesz eleget a Maclaurin-Euler-féle képletnek. Szerző úr értekezésének tartalmát röviden igy lehet öszszefoglalni: keres oly konoidfelületet, mely Maclaurin-Euler képletének eleget tesz, s talál egy olyat, mely se nem konoid, se nem tesz eleget a Maclaurin-Euler féle képletnek.

Ime a bizonyitás.

Szerző úr mindenekelőtt abból indul ki, hogy a keresett felület elemének normálisa benne fekszik a haladó és forgó sebességek parallelogramjának sikjában; vagyis a déréklő benne fekszik az r sugarú körhöz xy pontban huzott érintőn átmenő vertikalis síkban.

Lássuk mi következik ebből: jelentse x, y, z a felületelem összrendezőit: $\xi\,\eta\,\zeta$ pedig a normális folyó összrendezőit, úgy a normális fekvését a következő két egyenlet fejezi ki:

$$\xi - x = -\frac{dz}{dx}(\zeta - z) \qquad \eta - y = -\frac{dz}{dy}(\zeta - z)$$

Ennek az egyenesnek benne kell feküdni a föltevés szerint abban a vertikális síkban, melynek vizszintes nyoma az r sugaru körhöz xy pontban érintő.

E sík egyenlete ez:

$\eta - y = -\frac{x}{y}(\xi - x)$. Lesz tehát a benne fekvésre ez a föltétel:

$$-\frac{dz}{dy}(\zeta - z) = \frac{x}{y}.\frac{dz}{dx}(\zeta - z). \text{ Vagyis:}$$

I.) ..... $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0$. Ez, mint ismeretes, a konoid felületek partialis differentiaĭ egyenlete.

Ha α-nak nevezzük azon szöget, melyet a felületelem normálisa a haladás irányával képez, úgy Maclaurin-Euler képlete α legjobb értékére igy hangzik, szerző úr szerint is:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3c}{2\omega r} \pm \sqrt{\left(\frac{3c}{2\omega r}\right)^2 + 2}$$

Ugyde a normális és a Z tengely által képezett szög cosinusa, amint ismeretes, a következő képlet által adódik ki:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}} \text{ A miből következik, hogy}$$

$$\operatorname{tg}{}^2\alpha = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \text{ tehát:}$$

$$\text{II.)} \ldots \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \left[\frac{3c}{2\omega r} \pm \sqrt{\left(\frac{3c}{2\omega r}\right)^2 + 2}\,\right]^2$$

Lássuk már most megfelel-e a mentelékes csavarfelület

$z = \left[\frac{3c}{2\omega} \pm \sqrt{\left(\frac{3c}{2\omega}\right)^2 + 2r^2}\right] \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ az I és II. alatt kifejezett föltételeknek.

Képezzük belőle a $\frac{dz}{dx}$ és $\frac{dz}{dy}$ part. diff. quotienseket:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{\sqrt{\left(\frac{3c}{2\omega}\right)^2+2r^2}}.\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\left[\frac{3c}{2\omega}\pm\sqrt{\left(\frac{3c}{2\omega}\right)^2+2r^2}\right]\frac{x}{r^2}$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{2y}{\sqrt{\left(\frac{3c}{2\omega}\right)^2+2r^2}}.\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\left[\frac{3c}{2\omega}\pm\sqrt{\frac{3c}{2\omega}+2r^2}\right]\frac{x}{r^2}$$

Kisértsük meg ezen értékeket belehelyettesiteni a I és II alatti alapegyenletekbe, azt találjuk, hogy ezen part. diff. quotiensek nem tesznek a föltételeknek eleget, tehát maga a felület sem. Q. e. d.

Most már, miután másoldalról figyelmeztették rá, szerző úr maga is tudja, hogy az általa talált felület nem tesz eleget első alapföltételének. Az akadémia színe előtt szóról szóra ezeket mondotta:

»Ezt megfontolván, meggyőződünk, hogy a mentelékes csavarnak nem mindenik pontja felel meg az I alatti feltételnek.«

És mikép akarja szerző úr a szembeötlő ellenmondást megmagyarázni? Hihetetlen, de igaz! Ime ezekkel a szavakkal:

»Azonban furcsa dolog a mathematika; sokszor többet ad, mintsem kell, sokszor kevesebbet ad, mintsem kivánunk; olykor-olykor megint rejtélyekben beszél.«

Birálói tisztemnek a föntebbiekben eleget tettem; arra nem is vagyok talán hivatva, hogy szerző úr hibáját kikutassam és kiigazitsam; collegialis érzületből mégis fáradságot vettem magamnak és iparkodtam kinyomozni szerző úr tévedését, leirva azt is, hogy nézetem szerint, mi módon kellett volna a probléma megoldásához látni.

Szerző úr azt gondolja, hogy a keresett felületet megtalálhatja ugyis, hogy a felületet, mielőtt ismerné, átlyukgatja körhengerekkel, s aztán megnézegeti, hogy a körhenger minő görbe vonalat lyukasztott ki az ismeretlen felületből. Azután az igy kilyukgatott darabokat iparkodik összeragasztani egy felületté; de minthogy a felületet még nem ismeri, csak a sötétben tapogatózhat s a szinét a visszájával illeszti össze. Igy aztán elkésziti a mentelékes csavart, a vizi szárnyak, szélszárnyak, gőzszárnyak etc. non plus ultráját.

Szerző úr bizonyosan jól tudja, hogy rendesen nem ily primitiv módon szokták a felületek egyenletét megkeresni. Ha a felület ismert tulajdonsága oly mennyiségeket involvál magában, melyek differentialis quotiensektől függenek, úgy nem szabad restelleni a fáradságot: föl kell állitani a differentiál egyenletet s azt egész általánosan megoldani. Megengedem, hogy az az empirikus döfögetés kényelmesebb, hanem — uti figura docet — egyszersmind nagyon bizonytalan módszer. Ha szerző úr vette volna magának a fáradságot, s úgy látott volna a megoldáshoz, amint illik; csakhamar meggyőződött volna, hogy *olyasmit keres, ami nem létezik.* A mathematika, mely szerző úr szerint olykor-olykor rejtélyekben beszél, világosan megmondotta volna néki, hogy olyan két tulajdonságot akar ugyanarra az egy felületre ruházni, melyek sehogysem férnek össze egymással. A mathematika az ily természetű lehetetlen követelményeket igen nyiltan, minden rejtélyeskedés nélkül szokta visszautasitani; t. i. szép csendesen rávezeti a mathematikust egy oly három változós differentiálegyenletre, mely nem felel meg az *integrabilitás feltételének* s ezzel azt jelenti ki, hogy e három változóra — kettő közülök független változó levén — nem létezik oly függvény, mely a feladat követelményeinek eleget tudna tenni.

Hogy ez a szerző úr által maga elé tüzött problemánál csakugyan igy van, könnyen bebizonyitható. Ő ugyanis oly $z = f(x, y)$ függvényt keres, mely egyidejüleg eleget tartozik tenni az I és II alatti differential-egyenleteknek. Ennek a függvénynek tehát olyannak kellene lenni, mely megfelel a következő két föltételnek:

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 0$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \left[\frac{3c}{2\omega r} \pm \sqrt{\left(\frac{3c}{2\omega r}\right)^2 + 2}\right]^2$$

és a függvény fogalmából eredő relatiónak

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

Lássuk, lehetséges-e ez:

Keressük ki az első két egyenletből $\frac{dz}{dx}$ és $\frac{dz}{dy}$ értékét, ugy azt találjuk, hogy:

$$\frac{dz}{dx}=\pm\frac{y}{r}\left[\frac{3c}{2\omega r}\pm\sqrt{\left(\frac{3c}{2\omega r}\right)^2+2}\right]$$

$$\frac{dz}{dy}=\mp\frac{x}{r}\left[\frac{3c}{2\omega r}\pm\sqrt{\left(\frac{3c}{2\omega r}\right)^2+2}\right]$$

Jelöljük röviden

$$\frac{3c}{2\omega r}\pm\sqrt{\left(\frac{3c}{2\omega r}\right)^2+2}=f(r)$$

Ezek pedig nem felelnek meg az integrabilitás feltételének; vagyis a

$$dz=\pm\frac{y}{r}f(r)\,dx\mp\frac{x}{r}f(r)\,dy\ \ldots\ldots\ldots\ 1)$$

differentiál-egyenletnek nincs megoldása két független változóval, tehát nincs felület, mely neki megfelelne. Nincs felület, mely minden rajta gondolható vonallal megfelelne a differentiál-egyenletnek; valamint megint nincs felület, melyen egyes vonalak meg ne felelnének a diff. egyenletnek. Mert legyen $F(x\,y\,z)=o$ egy tetszőleges felület és vegyük teljes differentiálját, úgy ebből

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}.dy+\frac{dF}{dz}.dz=o\ \ldots\ldots\ldots\ 2)$$

és az 1) alattiból mindig kiküszöbölhető a változók egyike és hátramarad egy relatió $Mdx+Ndy=o$, két változó között.

Ha ezen két változós diff. egyenletet egészeljük, ugy egy összefüggést fogunk kapni az x és y között, mely összefüggésben még egy arbiträr állandó is elő fog fordulni. Az ily egyenlet a vonaloknak egy egész családját ábrázolja. Mindezen vonalak megfelelnek a feltett diff. egyenletnek és megfelelnek a fölvett felületnek is. Ezek a vonalak oly hajlásúak lesznek tehát, amint a Maclaurin-Euler-féle képlet kivánja. De a vonalaknak ily sora nemcsak egy bizonyos, hanem minden tetszőleges felületre rajzolható. Ugy,hogy ha szerző úr azt mondja, hogy a mentelékes csavar legjobb hatású felület; akkor erre azt lehet felelni, hogy *ily értelemben* minden tetszőleges felület legjobb hatású propeller-felület, mert mindeniken találkozik a vonalaknak egy egész sora, mely a legjobb hatásu hajlással bir.

A Maclaurin-Euler-féle hajlással nincs tehát konoid felület.

Közel fekszik a gondolat: ezt a dolgot akként általánosítani, hogy a felület keresésében elejtjük a Maclaurin-Euler-féle lehetetlen hajlást, s azt kutatjuk minő függvénye tartozik lenni a hajlás a távolságnak, hogy a talált felület egész terjedelmében megfeleljen a követelményeknek. Ez a kérdés nem jelent egyebet, mint megkeresni $tg\alpha$-hoz azt a $F(r)$-t melyre nézve

$$dz = \pm \frac{y}{r} F(r)\, dx \mp \frac{x}{r} F(r)\, dy$$

integrabilis differentiál egyenletté válik; vagyis a hol:

$$\pm \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{r}.F(r)\right) = \mp \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{r}F(r)\right)$$

$$\frac{F(r)}{r} + \frac{d}{dr}\left(\frac{F(r)}{r}\right)\frac{y^2}{r} + \frac{F(r)}{r} + \frac{d}{r}\left(\frac{F(r)}{r}\right)\frac{x^2}{r} = 0$$

vagyis

$$r.\frac{d}{dr}\left(\frac{F(r)}{r}\right) + 2.\frac{F(r)}{r} = 0$$

Ezt integrálva, lesz:

$$\frac{F(r)}{r}.r^2 = \text{Const.} = a$$

Tehát

$\underline{\underline{F(r) = \frac{a}{r}}}$; csak ez esetben lehet a diff. egyenletet mellékfelvétel nélkül egészelni.

Ekkor lesz t. i.

$$dz = \frac{ay}{r^2}dx - \frac{ax}{r^2}dy$$

Ennek pedig csak ez a megoldása:

$$z = - a. \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \text{Const.}$$

Vagyis az egyetlen lehetséges propellerfelület: az Archimedes féle csavarfelület, föltéve t. i. hogy a propellerfelület konoid és hogy a normális állása csupán a távolságnak függvénye.

A vizszintes szélkerék elmélete.

Alig pillantottam bele a 13 félivre terjedő értekezésbe, mindjárt megtaláltam benne szerző úr hengerét, melyet, úgy látszik, speciell a felületek differential egyenleteinek megoldására szokott használni. Itt az igaz, nem döfögeti vele a keresett felületet, hanem szépen betakargatja vele. Mindenesetre becses szerszám az a henger: hol lyukasztó, hol takaró, de a differentiál-egyenletek integrálására, higyje el szerző úr, mégsem való.

Ezt az értekezést, ha szerzőnek tetszik, kinyomathatja; én nem ellenzem.

Budapest, 1873. május 19.

Szily Kálmán,
lev. tag.

I.

AZ ERŐMŰTANI CSAVARFÖLÜLETEK.

MARTIN LAJOS l. tagtól.

(Előadta a III. osztály ülésén 1870. április 11.)

I. A vizi szárny.

1.

A csavarfölületek ellentálló közegben kétfélekép használtatnak. Lehet ugyanis vagy tengely körül végrehajtott forgást egyenes irányban haladó mozgásba, vagy megforditva egyenes irányu mozgást tengely körüli forgásba átalakitni. Az első eset közönségesen a vizben, a második eset a szabad légkörben működő csavarszárnyaknál szokott beállni, a miért is az első *viziszárnynak*, a második pedig *szélszárnynak* mondatik. Mind a két szárnynem elméletileg vizsgálva különkülön eredményre vezetvén, kell hogy külön-külön tárgyaltassék. Lássuk tehát először a viziszárny elméletét.

A viziszárnyak eddig közönségesen csigalépcsőzeti csavarfölületek szerint készültek. Ezen szokás-szentesitette eljárás azonban tudományilag megállapítva nincs, melynek helytelenségére a szárnyak eddig tapasztalt csekély mívelete is utalni látszik. A hiányt a tapasztalat emberei már régen érezték, s a többi közt megemlitjük, hogy Angolországban, ha nem csalódunk, Liverpoolban egy hajó- és gépgyár már évek óta azon van: a legjobbhatásu csavart kisérletileg kitalálni.

Józan ész szerint itélve, nem lehet ugyan kételkedni, hogy a viziszárny a csavarfölületek egy neme; de e fölületek megszámolhatatlan soknemüségét megfontolván, beláthatjuk, mily nehéz és észellenes feladat: tapasztalás, avagy vak szerencse utján a csavarfölületek azon nemét kitalálni, mely víziszárny gyanánt használva a legkedvezőbb hatással müködik.

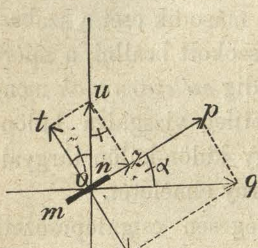
A következőkben azon leszünk, az utóbbi kérdést elmélet utján megfejteni. S hogy kisérletünknek a legfüggetlenebb átalánosságot adjuk, még attól is élnézünk, hogy a józan ész maga is már a viziszárnyat csavarnak tartja. Feladatunk tehát az:

azon fölületet kitalálni, mely viziszárny gyanánt használva, a legjobb hatással bir.

2.

A vizi szárny forgó mozgását egyenes irányban haladó mozgásba változtatván át, világos, hogy elemei kettős mozgásban részesülnek. Körülfutja t. i. az elem egy részről a szárny tengelyét, mi mellett más részről a tengelylyel párhuzamosan elővezettetik, s a két mozgás folyvást merőleges egymásra. E mindaz, mit a szárnyról mondhatunk s miből elméletét kell lefejtenünk.

1. ábra.



Hogy ily szárnyelem erőfejlesztését megtudhassuk, legyen (1. ábra) mn a szárnyelem $og = v$ az elem forgási s $ou = c$ egyenirányos sebessége, végre $noq = \alpha$ az elem hajlása a forgás síkjához; akkor oq sebesség $opqs$ derékszögény szerint:

$op = qo. Cos\, \alpha = v. Cos \alpha$

$os = qo\, .\, sin\, \alpha = v\, .\, sin\, \alpha$ oldalsebességekre oszlik; ugyszintén ot sebesség $tuzo$ derékszögény szerint:

$oz = uo\, .\, sin\, \alpha = c\, sin\, \alpha$ és

$to = uo\, .\, Cos\, \alpha = c\, Cos\, \alpha$ oldalsebességekre oszlik, melyek közül op és oz mn síkja, tehát mn-hez érintőleg hatnak, os és ot ellenben mn-re $\perp$. A két első a közegben ellentállásra nem találván, tekintetbe nem jő; a másik kettő ellenkező irányu lévén, világos, hogy különbségök:

$os - ot = v sin\alpha - c \, Cos\alpha$ azon viszonylagos sebességet adja, melylyel a szárnyelem az ellentálló közegre üt.

Ha tehát γ a közeg sűrüsége, f a szárnyelem térfogata és ξ a térfogati egységre és a sebesség egységére vonatkozó ellentállási tényező, akkor:

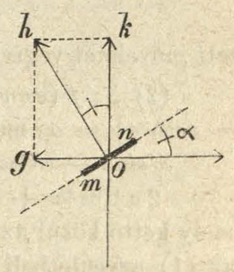
$f \, (v sin\alpha - c \, Cos\alpha)$ a helyéből mozditandó közeg köbfogata;

$\gamma f \, (v sin\alpha - c \, Cos\alpha)$ annak tömege és

$N = \zeta \, \gamma \, f \, (v sin\alpha - c \, Cos\alpha)^2$ azon erő, melylyel a közeg a mozgásnak ellenszegül.

Legyen most (2. ábra) $N = oh$, akkor e nyomás mind ok, mind ov iránytól eltérvén, $hkog$ derékszögény szerint:

2. ábra.



$og = oh \, . \, sin \, \alpha$ és

$ok = oh \, Cos \, \alpha = N \, Cos\alpha$ oldalnyomásokra oszlik, mely közül az első a szárny ov szerint ható forgási erejétől legyőzetik, a második pedig a szárny előhaladása irányában lép fel. Minthogy tehát az első megsemmisül, az továbbá tekintetbe nem veendő, s minthogy a második az előhaladás meggyorsitására szolgál, kötelességünk az oldalerőt lehetőleg szaporitni.

E szaporitás véghatárát éri el, ha ko legnagyobbját eléri; de ezen:

1) $ko = N \, Cos\alpha = \xi \, \gamma \, f \, (v sin\alpha - c \, Cos\alpha)^2 \, Cos\alpha$, s függ tehát ζ, γ, f, v, c és α-tól, melyek közűl:

ζ a közeg ellentállása, mely minden szárnyelemre nézve ugyanaz;

γ a közeg sürüsége, mely szintén állandó;

f a szárnyelem térfogata, melynek nagysága tetszésünktől függ, tehát minden elemre nézve állandónak tehető fel;

c a szárnyelem előhaladási sebessége, szintén állandó érték, mert az elemek, egy sem maradhatván vissza, egyenlő sebesen kényszerülnek előhaladni;

v forgási sebesség pedig két tényezőtől függ: a szárnyszög sebességétől, mely állandó, miután az elemek ugyanazon időben egyaránt ugyanannyi forgásokat tesznek a tengely körül, s a forgási sugártól, mely különböző ugyan, de mivel az egyszer kiválasztott elemről más elemre mindaddig át nem mehetünk, míg a kérdést az elsőre nézve fel nem fejtettük, azért látható, hogy az elem forgási sugara, s igy a forgási sebesség is állandónak tekinthető.

Ilyformán a felsorolt mennyiségekből csak az α maradt meg. S mivel e szögmennyiségről semmi bizonyost nem mondhatunk, legczélszerűbb, ha értékét ugy szabjuk meg, hogy az (1) egyenletbeli ko oldalerő legnagyobbját elérje, mi ismert elveknél fogva meglesz, ha:

$\frac{d\,[\zeta \gamma f\,(v sin\alpha\; - \; c\; Cos\alpha)^2\; Cos\alpha]}{d\alpha} = o$; vagy a kijelentett műveletet végrehajtván, s az eredményt rendezvén:

(2) $\zeta \gamma f\,(v sin\alpha \; - c\; Cos\alpha)\; [2\; v\; Cos^2\alpha + 3\; Cos\,\alpha\; sin\,\alpha$ $- \; v sin^2\alpha] = o$, melyből, $\zeta \gamma f$ állandó kihagyásával, vagy:

$v\, sin\alpha \; - c\, Cos\alpha = o$, vagy:

$2\, v\; Cos^2\alpha + 3\; c\, Cos\alpha\; sin\alpha \; - \; v sin^2\alpha = o$ következik, mely kettő közűl az első el nem fogadható, miután feltevése az (1) egyenletbeli ko oldalerőt semmire hozná, mi ko-nak legnagyobbja nem lehet. Ha pedig a másodikat teszszük fel akkor, ha azt $- v\; Cos^2\alpha$ által osztjuk:

$$tg^2\,\alpha - \frac{3\,c}{v}\,tg\,\alpha - 2 = \text{o}\ \text{és:}$$

(3) $tg\,\alpha = \frac{3\,c}{2\,v} \pm \sqrt{\left(\frac{3\,c}{2\,v}\right)^2 + 2}$. A legjobb míveletü szárny minden eleme tehát két különböző hajlási szögöt vehet fel.

A képletben c, mint már tudjuk, állandó érték, v pedig a szögi sebességtől és a forgás sugarától függ; ezeket vonatkozólag w és r-el, tehát v-t rw-val jelölvén, lesz végre:

$$(4)\; tg\; a = \frac{3\,c}{2\,w\,z} \pm \sqrt{\left(\frac{3\,c}{2\,w\,r}\right)^2 + 2}.$$

Ezen képletben r igen különböző ugyan, de $> \infty$ és $< \Theta$ nem lehet, ∞ és Θ tehát a két véghatár, melyek a (4) képletbe vezetve, a felső jelre nézve:

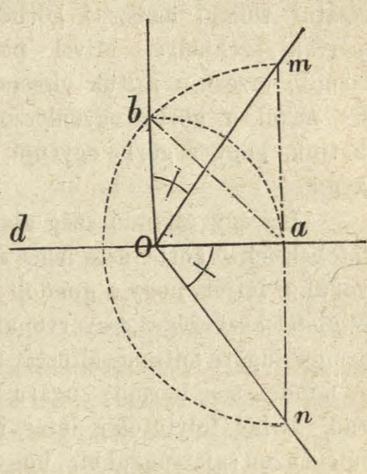
tg $\alpha_1 = + \sqrt{2}$ avagy $\alpha_1 = 54^0 - 44_1 - 8{\cdot}3''$ és

tg $\alpha_2 = \infty$ » $\alpha_2 = 90^0$; az alsó jelre nézve pedig:

$\text{tg}\,\alpha_3 = -\sqrt{2}$ avagy $\alpha_8 = 234^\circ - 44' - 8{\cdot}3''$ és
$\text{tg}\,\alpha_4 = 0$ » $\alpha_4 = 180^\circ$ véghatárokra veeetnek

Az imént talált szöghatárokat mértanilag szerkeszteni is lehet; ha ugyan (3. ábra) $ob \perp oa$, $am \parallel ob$, $ob = oa$ és $ma = na = ba$, végre mo, no huzatnak, akkor

3. ábra.



$$\frac{am}{ao} = \sqrt{2} = tg\ \alpha, \text{ és}$$

$\sphericalangle\, moa = 54^\circ - 44'\ 8{\cdot}3''$
$\sphericalangle\, boa = 90_0$; továbbá:

$$\frac{an}{oa} = -\sqrt{2} = \text{tg}\ \alpha_3 \text{ és}$$

$\sphericalangle\, don = 234^\circ - 44' - 8\ 3'$,
$\sphericalangle\, doa = 180^\circ$; — a (4) képlet α értéke tehát vagy bom, vagy aon szögtérbe esik.

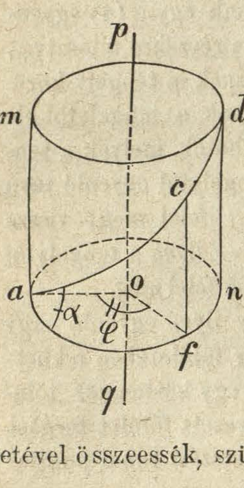
3.

A (4) képlet az egyes szárnyelem hajlását szabta meg Ez azonban még nem mindaz, a mivel a képlet szolgál. Hogy az tovább vizsgáljuk, gondoljunk magunknak egy a (4) egyenletet kielégitő fölületet tetszés szerinti kis részekre felosztva; akkor a kis területek különbözőleg lesznek a tengely körü elhelyezve, s különféle távolságban fognak a tengelytől elállani, de lesznek köztök olyanok is találhatók, melyek a tengelytől egyenlő távol vannak. Ilyen a tengelytől egyenlő távu elemeknek egyenlő nagy forgási sugár r felel meg; vissza tekintvén a (4) képletre, világos, hogy — ilyen a tengelytől egyenlő távu elemeknek ugyanazon α szög felel meg.

Más részről könnyü belátni, hogy ilyen egyenlő nagy sugár alá eső elemek csak egy körhenger fölületében fekhetnek Messük t. i. a szóban lévő fölületet egy körhenger fölülétével, melynek mértani tengelye a keresett fölület forgási tengelyével összeesik, akkor az eredő metszési vanal pontjai egyenlő távuak a tengelytől; ezen görbe mértani székhelye tehát a tengelytől egyenlő távu elemeknek. Ámde a (4) képlet ilyen elemekre nézve ugyanazon α értéket adja, ezen elemek tehát egyenlő hajlásuak. Az ezen elemeken keresztül vonuló metszési görbe egyenlő hajlásu elemeknek mértani székhelye. Mivel pedig az elemek egyenlő hajlásuak, azért a rajtuk elmenő görbe is egyenlő hajlásu. És mivel a görbe egyenlőszög alatt hajlik, azért mondhatjuk, hogy a görbe egyenlő, azaz állandó szög alatt emelkedik.

De egy állandó szög alatt emelkedő s körhenger fölületében fekvő görbe nem lehet egyéb, mint közönséges csavarvonal. S látjuk, hogy a gondolt körhenger a keresendő szárny-fölületet közönséges csavarvonalban vágja. S minthogy a körhenger sugara mitsem változtat a tett észleleten, belátni, hogy ez minden más bármily sugaru körhengernél is érvényes marad. Miből folytatólag látni, miszerint a kérdéses szárny fölülete azon sajátsággal bir, hogy rajta a csavarvonaloknak egy egész systemáját lehet kiszabni, minek folytán mondhatjuk, hogy a víziszárny valóban csavarfölület, s hogy tehát nem a józan ész itélete, vagy a jóhiszemben felvett föltevés, hanem egyedül azon alapegyenlet teszi a víziszárnyat csavarfölületté, melynek kell, hogy az megfeleljen.

4. ábra.



Hogy végre magát a fölület egyenletét kinyerhessük, legyen (4. ábra) mn egy körhenger s acd az azon lévő, $fac = \alpha$ szög alatt emelkedő csavarvonal, akkor, $cf = z$, $\sphericalangle\, aof = \varphi$, $ao = r$ tévén, mértani elveknél fogva:

$$cf = arc.\ af.\ tang\alpha \text{ azaz:}$$

$$z = r\varphi\, tg\alpha \text{ és}$$

$$tg\alpha = \frac{z}{r\varphi}$$

Ha már most acd görbe az elébb emlitett csavarvágások egyike, akkor kell, hogy $tang\ \alpha$ ezen értéke a (4) képletével összeessék, szükséges tehát, hogy:

$\frac{z}{r\varphi} = \frac{3c}{2rw} \pm \sqrt{\left(\frac{3c}{2rw}\right)^2 + 2}$ vagy némely egyszerűsítés után:

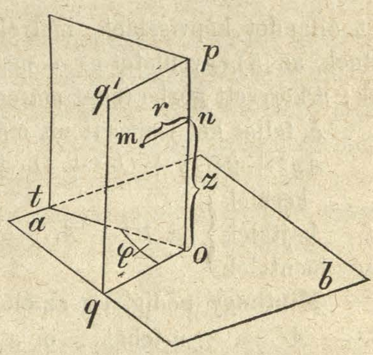
(5) $z^2 - \frac{3c}{w} \cdot z\varphi - 2r^2\varphi^2 = 0$. S ez aztán a keresett szárnyfölület egyenlete.

4.

A fölület egyenletét ismervén, kötelességünk mértani természetét is vizsgálni. E végre szükseges azon öszrendezői rendszer iránt tisztába jönni, melyre a fölület egyenlete vonatkozik.

Ürben adott pontok fekvesei közönségesen három egymásra $\perp$ sik segitségével határoztatnak meg, ilyen rendszer azonban a lehozott egyenletre nem alkalmazható. Vannak azonban az orthogonal rendszeren kivül még mások is, melyek közűl a következő sarktengelyes rendszer használható.

5. ábra.



Legyen (5. ábra) po a fekvésére nézve ismeretes sarktengely, ab egy tetszés szerinti, de po-ra $\perp$ sik, s top egy fekvésére nézve ismeretes s a sarktengelyen keresztül fektetett sik, mely ab alapsikot to-ban vágja; akkor m pontnak ezen ab és tp sikokra s po tengelyre vonatkozott fekvése $mn = r$, $no = z$ s $qot \sphericalangle = \varphi$ összrendezők által teljesen meg van határozva, s ez azon rendszer, melyre a lehozott egyenlet vonatkozik.

Kikeresvén most az (5) egyenletből a z-t, kapjuk:

$z = \varphi \left[\frac{3c}{2w} \pm \sqrt{\left(\frac{3c}{2w}\right)^2 + 2r^2}\right]$ s látjuk, hogy a z-nek, r és φ-nek minden egyes értéke mellett, két értéke van, az egyik mindig igenleges, a másik mindig nemleges. Az egyenlet tehát r és φ minden értéke mellett két az ürben fekvő pontra vezet, melyek egyike (5. ábra) ab alapsík fölött, másika az alá esik, miből következtetjük, hogy a fölület egyik része az alapsík fölé, a másik az alá terjeszkedik. S minthogy z, a (6) egyenletre tekintve, r és φ-nek minden valódi értéke mellett, valódi marad, minthogy tehát az egyenlet folytonosságát sehol félbe nem szakítja, világos, hogy a fölület a végtelenségig terjed.

Ha valamely fölület természete mértanilag vizsgálandó, akkor a fölületet több, fekvésükre nézve ismeretes, sikkal vágván, az eredő metszési görbéket vizsgáljuk. S világos, hogy ugyanazon eljárást az (5) egyenlet által kifejezett fölületre is kell alkalmaznunk. A végre legegyszerübb azt oly sikokkal vágni, melyek a fölület tengelyén keresztül mennek.

Utolsó ábránkra tekintvén, látni, hogy az opq síkban fekvő pontoknak különböző z és r .ugyan, de azonegy $= toq$ szögrendezőjük van, φ tehát ilyen síkokra nézve állandó. Ha azonban a φ-nek állandó értéket tulajdonitunk, akkor az (5) egyenlet második és harmadik tagbeli: $\frac{3c\varphi}{\omega}$ és $2\varphi^2$ tényezői két állandót képviselnek, melyek ha röviden m és n-el jelöltetnek, az (5) egyenletet $z^2 - mz - nr^2 = o$ egyenletre hozzák; a keresett görbe tehát másodfoku.

A teljes két ismeretlenü másodfoki egyenlet:

$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + f = o$; azonban lehet:

$$\left.\begin{array}{r}\text{kerülék}\\ \text{hajtalék}\\ \text{vagy mentelék}\end{array}\right\} \text{ha } B^2 - AC = \left\{\begin{array}{c}<\\ \\ >\end{array}\right\} o.$$

Minthogy pedig, ezt az előbbi egyenletre alkalmazván, $B^2 - AC = + n$ tehát $>$ o, a kijelentett görbe mentelék. S látjuk, hogy az (5) egyenlet oly fölületet fejez ki, melynek sík tengelyes metszései másodfoku mentelékek. *A víziszárny ehát a mentelékes csavarfölületek egy neme.*

Minden menteléknek két fő tengelye van; ha ezeket ismerjük, szerkeszthetjük is a menteléket.

A fentebbi egyenlet a menteléknek ugynevezett tetőponti egyenlete, ha abban $r = o$, lesz:

$z^2 - mz = o$, azaz $z\,(z - m) = o$, minek folytán vagy :

$z = o$, vagy:

$z = m = \frac{3\,c\varphi}{\omega}$; s minthogy a két érték számtani középarányosa a mentelék valódi féltengelye, következik, hogy a féltengely:

$$(7)\ a = \frac{3c\varphi}{2\,\omega} = \frac{m}{2}.$$

Az utolsó értéket z helyébe tévén, az egyenlet:

$z^2 - mz - nr^2 = o$ ebbe:

$\left(\frac{m}{2}\right)^2 - m.\frac{m}{2} - nr^2 = o$ megy át, miből:

$r = \frac{m}{2\sqrt{n}}\sqrt{-1}$ s innét a képzetes féltengely:

$$(8)\ b = \frac{3\,c}{2\omega\sqrt{2}}.$$

A (7) és (8) képletek az (5)-ből származtak, melyben csak z, r és φ változók fordulnak elő. Minthogy pedig a (8)-ban a három változó egyike sem foglaltatik, következik, hogy b állandó érték; minthogy pedig φ első hatványa a (7)-ben előfordul, látni lehet, hogy a a φ-vel változik, s ugyanaz a φ-vel egyenes viszonyban áll. A víziszárny tehát oly mentelékes csavarfölület, melyben a mentelékes metszéseknek állandó nagyságu képzetes és φ első hatványai szerint változó nagyságu valódi főtengelyük van. Később ki fog világlani, hogy ezen állandó képzetes tengely a szárny elméletében a legfőbb szerepet viseli, s hogy nagysága által az egész szárny mértani alakja meghatároztatik; a miért is azt minden képletben használni fogjuk, minek folytán $\frac{3c}{\omega}$ helyébe mindenütt: $2b\sqrt{2}$ irván, a (4), (5), (6) és (7) egyenletek a következőket adják:

$$(9)\ tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(b \pm \sqrt{b^2 + r^2}\right)$$

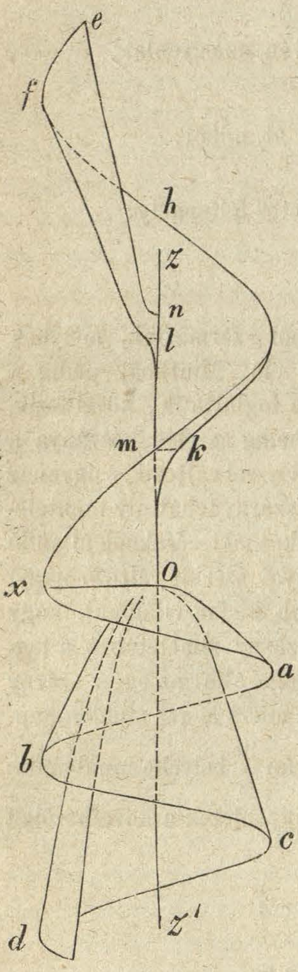
$$(10)\ z^2 - 2bz\varphi\sqrt{2} - 2\varphi^2 r^2 = o$$

$$(11)\ z = \varphi\sqrt{2}\left(b \pm \sqrt{b^2 + r^2}\right) \text{ és}$$

$$(12)\ a = b.\varphi\sqrt{2}.$$

Tudván már most azt, hogy a víziszárny minden hengermetszése közönséges csavarvonal, s hogy minden, a forgási tengelyen keresztül fektetett, sík metszése mentelék, melynek mindkét főtengelyét ismerjük, belátni, hogy maga a fölület ez adatok nyomán mértanilag szerkeszthető is.

6. ábra.



A (6. ábra) ily fölület egyik részének vetületét mutatja oly sikra, mely zoz_1 tengelyhez párhuzamos. A fölület két xo egyenes szerint összefüggő részből áll, melyek egyike xo fölött, másika az alatt van; $xghfe$ a felső-, $xabcd$ az alsó résznek valamelyik csavarvágása; mkg, oa egyazon tengelyes metszés mentelék ága, ugyszintén bo, lf egyazon mentelékmetszés két összetartozó ága; a mentelék két ága tehát ugy van a fölületben elhelyezve, hogy az egyik mindig az xo feletti, a második az xo alatti fölületrészbe jő, még pedig ugy, hogy a felső ágak m, l, n . . . tetőpontjai o ponttól annál távolabbra esnek, mennél későbbi tekervénybe esik, a mentelékes metszés holott az alsó ágak tetőpontjai mindnyájan o pontba esnek.

Minthogy az alsó ágak tetőpontjai mind o-ba esnek s a fölületrész a tengelyt végtelen sok tekervényben körülfutja, látni, hogy o pont a fölületnek többszörös, helyesebben végtelenszeres pontja. S minthogy a fölületrész xo, bo, do . . . . mentelékei tekervényről tekervényre oz_1 tengelyhez mindinkább közelednek, de a nélkül — miután azok $xabcd$ csavarvonalt átszelik, mely maga részéről az

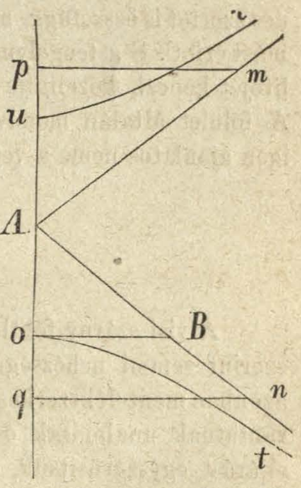
oz_1-ét soha sehol meg nem érinti — hogy azt valahol elérnék, látni, hogy a zz_1 tengely o alatti része a fölületnek egy közelitő vonala, hol annak felső része a fölületnek valódi vonala.

Vannak e fölületnek még más nevezetes mértani sajátságai is, melyek azonban mint könnyen felismerhetők, itt mellőztetnek.

5.

A kitalált szárnyfölületnek van közelitő fölülete is. Ha t. i. a szárnyfölületet több a tenyelyen keresztül menő sikok által vágjuk, minden ilyen metszés mentelék lesz. Minden ilyen menteléknek két közelitő egyenese lévén, látni való, miszerint az emlitett tengelyes síkok a mentelékeken kivül egyenes vonalu közelitőkből álló rendszert is adnak, mely egy új fölületnek mintegy vázát képezi. S minthogy az egyenesek a főfölületnek közelitőit képezik, világos hogy maga az ezekből képezett fölület a fő fölületnek közelitő fölülete lesz.

7. ábra.



Hogy a fölület egyenletét előállitsuk, legyen (7. ábra) pq a szárny tengelye, s uv, ot egyik mentelékmetszése, Am, An az ehhez tartozó két közelitő, akkor m pont öszrendezői $pm = r$ és $op = oA + Ap = Z$, az n ponté pedig: $qn = r$ és $qo = qA - OH = Z$; elvégre figyelembe veendő, hogy ismert okoknál fogva $AO = a$ és $OB = b$ a mentelék két fél-főtengelye.

$AOB \triangle \backsim$ most mind Aqn, mind Apm $\triangle$-höz, s lesz:

$Aq : qn = AO : OB$, azaz $AO + Oq : qn = AO : OB$ és

$Ap : pm = AO : OB$ azaz $Op - OA : pm = AO : OB$ avagy:

$a + z : r = a : b$ és $z - a : r = a : b$, miből

$(a + z) b = ar$ és $(z - a) b = ar$ vagy még:

$a(b-r)=bz$ és $a(b+r)=bz$, vagy a kettőt összevonva:

$a(b\pm r)=bz$. Feltévén most, hogy a mentelék a szárny egyik tengelyes metszése, akkor (12)-nél fogva: $a=b\varphi\sqrt{2}$, mit helyettezvén:

(13) $z=\varphi\sqrt{2}\,(b\pm r)$. S ez aztán a közelitő fölület egyenlete.

E fölületnek különös sajátságai vannak, melyek az egyenletből könnyen felismerhetők. A fölület szintén csavarfölület, hengermetszései t. i. közönséges csavarvonalok, melyek $tg\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{b}{r}\mp 1\right)$ egyenlet által meghatározott α szög alatt emelkednek; egyet, de csakis az egyet kivéve, mely $b=r$ sugaru kört képez. Ezen kör a fölület valamennyi csavartekervényeiben feküdvén, a fölületnek egy többszörös, helyesebben mondva, végtelenszeres vonala; s az ezen kör területén belől a fölületen kiszabható csavarvonalok, a kör területén kivül fekvőkkel ellenkezőleg vannak tekerve.

A fölület úgy mint a fő fölület két részből áll, melyek nem csak a forgási tengely, hanem azon a tengelyre $\perp$ egyenes szerint is összefügg, mely szerint a fő fölület két része egymást érinti. S a tengelynek azon része, mely a fő fölület közelitőjét képezi, közelitője egyszersmind a közelitő fölületnek A fölület általán mondva egy nevezetes, tanulmányozásra igen ajánlatos neme a vetemült fölületeknek.

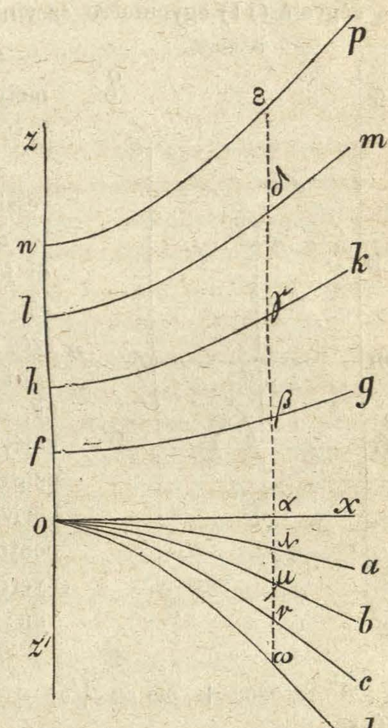
6.

A vizi szárny fölület mértani szerkesztése a mondottak szerint semmi nehézségnek sincs ugyan alávetve; minthogy azonban mentelékszerkesztések, kivált ha nagyobb számban kivántatnak, unalmasak és fárasztók, azert szükséges, hogy az eljárást egyszerüsitsük, mi a következőkben sikerült is annyira hogy elég, ha egy ilyen mentelék szerkesztetik, a többi aztán egyszerü közbevetés utján könnyen nyeretik.

Gondoljuk a viziszárnyat e végre több tengelyes sík által vágva; a nyert mentelékeket, a közös tengely körül állván, közös tengelyük körül forgatjuk, mignem mindnjájan azon egy sikba esnek, s legyen (8 ábra) zz, a közös tengely, oa, ob, oc, $od \dots fg, hk, lm.\ np$, a mentelékek, akkor a φ-nek minden ilyen mentelékre nézve bizony értéke felel meg, legyenek ezek: φ_1 φ_2 $\varphi_3 \cdots$ akkor a mentelékek egyenletei (11) szerint ezek:

$$z_1 = \varphi_1 \sqrt{2}\left(b \mp \sqrt{b^2 + r^2}\right)$$
$$z_2 = \varphi_2 \sqrt{2}\left(b \mp \sqrt{b^2 + r^2}\right)$$
$$z_3 = \varphi_3 \sqrt{2}\left(b \mp \sqrt{b + r^2}\right) \text{ stb.}$$

8. ábra.



Ha ezen egyenletekben a mindig ugyanazon számsort keresztül futó r-nek ugyanazon $o\alpha = r$ értéket adjuk, a zárjel alatti kitétel mindenütt egyértékü s lesz:

$z_1 : z_2 : z_3 : \dots = \varphi_1$ $\varphi_2 : \varphi_3 : \dots$ s ha φ_1 φ_2 $\varphi_3 \dots$ értékeit úgy választjuk hogy azok a természeti számsor: 1, 2, 3... szerint haladnak, akkor

$z_1 : z_2 : z_3 : \dots = 1 : 2 : 3 : \dots$ azaz:

$\alpha\beta : \alpha\lambda : \alpha\delta : \alpha\varepsilon : \dots = 1 : 2 : 3 : 4 : \dots$ s ugy szintén:

$\alpha\gamma : \alpha\mu : \alpha\nu : \alpha\omega : \dots = 1 : 2 : 3 : 4 : \dots$ Ha tehát a z-rendezők egyike ismeretes a többi, vagy szorzás vagy osztás útján nyerethetik meg. Elégséges tehát, ha a mentelékek egyikét szerkesztjük.

Ha pedig a mentelékek ekkép választatnak, tengely körüli összeállitásuk a következő:

Miután $\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \dots = 1 : 2 : 3 : \dots$, lészen:

$\varphi_1 = \varphi_1$ tehát: $\varphi_1 = \varphi_1$

$\varphi_2 = 2\varphi_1$ $\qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_1$

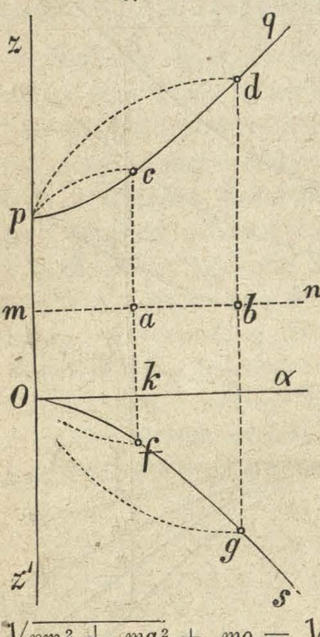
$\varphi_3 = 3\varphi_1 \qquad \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_1$

$\varphi_4 = 4\varphi_1 \qquad \varphi_4 - \varphi_3 = \varphi_1$

A mentelék metszések a tengely körül tehát ugy helyezendők el, hogy a kettő-kettő közé foglalt szög mindig ugyanaz. S így látni, hogy ha φ_1 szög s az ezen szög alatt felállitandó mentelék ismeretes, a többi közbevetés utján megnyerhető.

Figyelemre méltó, hogy a mentelékszerkesztés a szárny egyik metszésére különös egyszerüséggel jár. Visszamenvén a végre a (11) egyenletre, szerinte van:

9. ábra.



$$z = \varphi \sqrt{2}\left(\sqrt{b^2 + r^2} \pm b\right);$$

mely ha $\varphi \sqrt{2} = 1$, azaz ha $\varphi = \sqrt{1/2}$, ezen egyszerü

$$z = \sqrt{b^2 + r^2} \pm b$$ alakot veszi fel, s így szerkeszthető:

zz_1 (9. ábra) a mentelék valódi főtengelye; ox,, $mn \perp zz_1$; $om = mp =$ b; $cf_1, dg_1, \ldots$ tetszés szerinti „-ak zz_1hez, melyek mn-t a_1 $b_1 \ldots$ pontokban szelik át; ap, $bp \ldots$-vel $pc_1, pd_2, \ldots$ körivek a pq mentelék ág c_1, d.. pontokat adják, s ha ugyanazon körivekkel cf_1, dg„-kat f_1, $g \ldots$ pontokban is átszeljük az os ág nyeretik; mert c pontra nézve van:

$$ck = ca + ak = pa + mo = \sqrt{pm^2 + ma^2} + mo = \sqrt{b^2 + r^2} + b = z$$ és f pontra nézve:

$$kf = af - ak = pa - mo = \sqrt{pm^2 + ma^2} + mo \quad f$$

$\sqrt{b^2 + r^2} - b = z$. S hasonlókép van a dolog a többi pontra nézve is.

Az ekkép szerkesztett mentelék (mely nem egyéb mint egyenszáru mentelék) vonatkozik $\varphi = \sqrt{1/2}$ azaz $\varphi = 35^0$ — 15„ — 51„ —nyi szögre, mi a mentelékek összeállitásánál tekintetbe veendő.

Megemlitjük végezetre, hogy imént adott szerkesztés gyakorlatilag használtatott is. Az (5) a. egyenlet fölülete t. i. 1858, a triesti Lloyd-társaság egyik 60 lóerőnyi Verbano nevü gőzösön megpróbáltatott, s a csavar öntésére szükségelt homokminta négy mentelékmetszés segitségével készült el, melyek vékony hársfa deszkákból kivágva a mintaszekrényre a felelkező szögek alatt állíttattak össze s erősittettek meg. S hogy az a végre használt $35^0\ 15^1\ 51^2$-nyi szög pontosabban megnyeressék, az elég nagy pontossággal s könnyen szerkeszthető 282^0—6^1-nyi szög választatott, melynek nyolczad része 35^0—15^1—$45^2 7$ tesz, tehát a kivánt szögnél csak $5^1\ 3^2$-el kisebb.

7.

Hátra van még a víziszárny hatásának kiszámitása.

A vizi csavar több szárnyból összeillesztett készülék. A szárnyak egyenlő nagyok s egyenlő alkatuak, minek folytán az egész készülék mivelete nyeretik, ha az egyes szárnylap mivelétét a meglévő lapok számával szorozzuk. Az egész tehát oda megy ki, hogy az egyes szárnylap mivelete meghatároztassék.

Minden ilyen szárnylap a mértani szárnyfölület valamely kiszelvénye. A kérdés sulypontja tehát abban áll, a szárnyfölület azon részét meghatározni, mely az egészből kiszelvény gyanánt szelendő ki. Hogy a választandó kiszelvény meghatározása önkényünktől nem függhet, kétséget nem szenved ugyan, minthogy azonban a kiszelvény fekvésének s külső vázvonalának meghatározása a mechanikának legkényesebb kérdése, mely mély átgondolást, alapos megértést s nagy jártasságot kiván, elébb a hozzá szükséges előkészülődés kedvéért, egy tetszés szerint fekvő s a legegyszerübb egészelési miveleteket igénylő szelvényről szólandunk, s csak, ha a müfogásokkal megismerkedtünk s a még mellőzendő hiányokat kiérezni tanultuk, megyünk át azon szelvény meghatározására, mely valamennyi más szelvényhez hasonlitva legczélszerübbnek bizonyúl.

A tárgyalt fölület, mint tudjuk, két külön alkatu részből áll, melyek egyikéből a szárny lapja kiszelendő. Mi végből tehát alkalmilag nem is mind a két fölületrészszel egyszerre, hanem azok vagy egyikével vagy másikával kell eljárnunk, a két fölület rész ezután — egy szóval — mint két külön létező s önálló fölület tekintendő, melyek egymással semmi összefüggésben nincsenek. S minthogy az eljárás, mely a hatás kiszámitására forditandó, mind a két fölületrészre nézve ugyanaz, azért elégséges, ha azt csak az egyik fölületrészrenézve mutatjuk meg.

E végre a fölület azon részét választjuk, mely a már emlitett triesti kisérletek alkalmával használtatott, s melyre a lefejtett képletek alsó jelei vonatkoznak. Szerintök van tehát:

$$tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(b - \sqrt{b^2 + r^2}\right) \text{ és}$$

$$z = \varphi\sqrt{2}\,(b - \sqrt{b^2 + r^2})$$

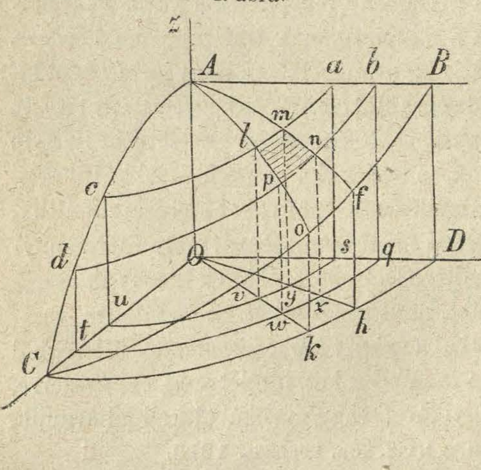
Itt a z és α mindig nemleges ugyan, de megfontolván, hogy a nemlegességnek voltaképen csak analytikai jelentősége volt, mely megszünik, mihelyt a fölület két részét egymástól elválasztjuk, világos hogy jövőre, szemmel tartván egyedül a képletek absolut értékét, a nemlegességtől el is tekinthetünk; mi végre a fentebbiek helyébe ezeket:

$$(14)\; tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(\sqrt{b^2 + r^2} - b\right) \text{és}\; z = \varphi\sqrt{2}\left(\sqrt{b^2 + r^2} - b\right)$$

írjuk.

Mielőtt a tulajdonképi fejtegetéseket megkezdenők, a szóba hozandó szárnykiszelvény alapját kell megállapitanunk. Első lépésre azt választjuk, mely a már emlitett triesti kiséeteknél használtatott, mi mellett alkalmunk lesz azon kiszámitási módot mutatni, mely szerint a szárny hatása akkor kinyeretett.

4. ábra.



A mondott kiszelvény két tengelyes sík és egy körhenger fölülete által volt befogva. Hogy ilyen szelvényt rajzban előállitsunk, legyen (10. ábra) zo-az ABC szárnyszelvény tengelye, ZOD, ZOC két sík s BDC a körhenger, melyek a szelvényt befogják. Hogy a szárnynak egy elemét előállitsuk, legyen twq és uvs két o-val központos körív olyformán, hogy sq az r sugár növesztékének tekinthető, a két köriven keresztül $bqtd$ és $asuc$ körhengereket fektetvén, ezek a szárnyat ac, bd csavarvonalban vágják, melyek közé $abdc$ szalag foglaltatik; oh, ok sugarakat huzván, ugy hogy koh a φ szög növesztékének tekinthető, s rajtok keresztül zok, zoh sikokat fektetvén, ezek a szárnyat Af, Ag mentelékekben vágják, melyek az $abdc$ szalagból $mnpl$ kis területet szelik ki, mely tehát a fölület növeszteke; l, m. n, p-ből lv, mg, nx, pw vetitő egyeneseket huzván, ezek a zo-ra $\perp$ DOC síkban $vgxw$ kis területre vezetnek, mely tehát az $mnpl$ fölületnöveszték vetülete DOC síkra, valamint $DOCK$ körkiszelvény az ABC szárnykiszelvény vetülete DOC síkra.

Ezen $lmnp$ szárnyelem zo tengely körül forog s e forgás síkja zo-ra $\perp$, $//$-os tehát DOC síkhoz, s az elem hajlása a forgás síkjához lesz egyszersmind hajlási szöge az elemnek DOC síkhoz. De amaz elem hajlási szöge (4) képletünk szerint α-val s az elem térfogatát f-el jelelvén, világos hogy ama képlet: $f\ Cos\alpha$ szorzója nem egyéb, mint $mnpq$ vetülete DOC sikra. Ha most sq sugárnöveszteket dr-el, koh szögnöveszték, ivmértékét $d\varphi$-vel, wx körivet tehát $rd\varphi$-vel jelöljük, lesz:

$$f\ Cos\ \alpha = rdrd\varphi.$$

Ha ezek után (1) képletünkre visszatérünk, ko helyébe dP-t tévén, akkor

$$dP = \xi\gamma f\ (vsin\alpha - c\ Cos\ \alpha)^2\ Cos\ \alpha \text{ avagy}$$

$$dP = \xi\gamma rdr\varphi rdr\ (vsin\alpha - c\ Cos\ \alpha)^2,$$ s ha végre v helyébe rw irjuk, s $Cos^2\ \alpha$ szorzóul kiemeljük:

$$dP' = \xi\gamma rdrd\varphi\ (rw\ tg\alpha - c)^2\ Cos\ ^2\alpha.$$

Ha már most utolsó ábránkban az egész $abdc$ szalagot $lmnp$ hasonló elemekre felosztván, az azoknak megfelelő szögnövesztékeket egymás után $d\varphi_1$; $d\varphi_2$; $d\varphi_3$ .... jeleljük, tekintettel arra hogy az r meg nem változik:

$$dP_1 = \xi\gamma rdr\ d\varphi_1\ (rw\ tg\alpha - c)^2\ Cos^2\ \alpha$$

$$dP_2 = \xi\gamma rdr\ d\varphi_2\ (rwtg\alpha - c)^2\ Cos^2\ \alpha$$ stb. összesen tehát:

$$dP = \xi\gamma rdr\ (rwtg\alpha - c)^2\ Cos^2\alpha\ [d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3 + \ldots]$$

Tekintve most hogy $d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3 + \ldots$ szögnövesztékek összege az egész $DOC = \varphi$ szögöt adják, lesz az $abcd$ szalagra eső nyomás

$$dP = \xi\gamma rdr\,(rwtg\alpha - c)^2\,Cos^2\,\alpha$$

S ha végre az egész ABC szárny ZO tengelytől egész külső BC széleig ily szalagokra osztatik s az azokra eső nyomások összefoglaltatnak, akkor az egész nyomás:

$P = \xi\gamma\varphi\int rdr\,(rwtga - c)^2\,Cos^2\,\alpha$ vagy ω^2 kiemelvén

$$(15)\quad P = \xi\gamma\varphi w^2\int rdr\left(rtg\alpha - \frac{c}{w}\right)^2 Cos^2\,\alpha$$

Mielőtt az egészlet felbontását megkezdenők, czélszerünek tartjuk azt elébb mértani szempontból szemlélni. Legfőbb figyelmet érdemel ugyan a benne előforduló:

$\left(rtg\alpha - \frac{c}{w}\right) Cos\,\alpha$ szorzó. Visszamenvén t. i. az értekezés kezdetére, azt fogjuk találni, hogy e szorzó tulajdonképen nem egyéb, mint azon viszonyos sebesség, melylyel a szárny egyes eleme, deréklője irányában a közegre üt. Nevezvén azt y-nak ugy hogy:

$$(16)\quad \begin{cases} y = \left(rtg\alpha - \frac{c}{w}\right) Cos\,\alpha \text{ és} \\ P = \xi\gamma\varphi w^2\int ry^2dr, \end{cases}$$

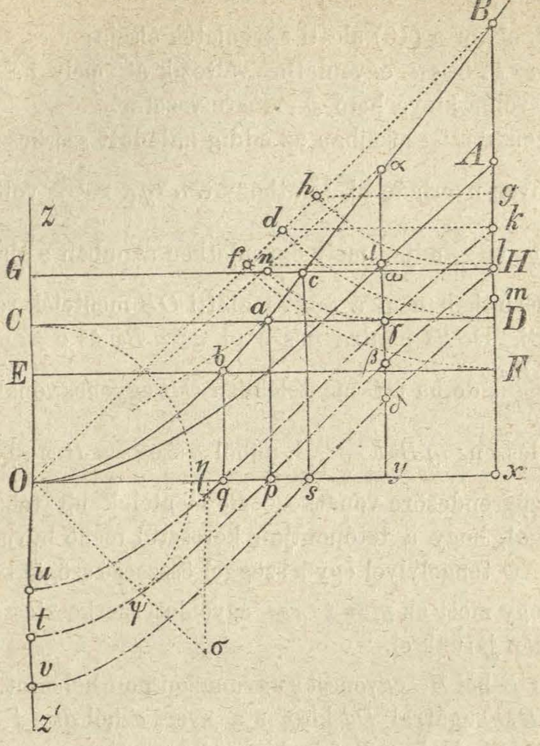
akkor a két egyenlet elseje, szemmel tartván a (9) egyenletet, csak r-nek függvénye, s az egyenlet egy mértani görbének képviselője, melynek rendezői a szárnyelemek deréklőleges sebességeit adják. S könnyü átlátni, hogy a szárny hatása leginkább a görbe természetétől függ. E görbe szerkesztése a következő:

zoz a szárnytengely (11. ábra) $ox \perp zo$, OA a $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ szögrendezőre vonatkozó mentelék, melynek szerkesztése 6-ból már ismeretes, ugy hogy Ax, γy ... rendezői a $\sqrt{b^2 + r^2 b)}$ kitétel értékeit képviselik.

Minthogy most a szárnyra nézve: $tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{r}$ $(\sqrt{b^2 + r^2} - b)$, lesz:

$rtg\alpha = \sqrt{2}\,(\sqrt{b^2 + r^2} - b)$ mely egyenlet mértanilag szerkesztve $ObacaB$ görbére vezet, mely, tekintettel a fölü-

11. ábra.



let egyenletére, a $\varphi = 1$ szögrendezőre vonatkozó menteléket képezi. A mondott görbe rendezői adják tehát az $rtg\alpha$ szorzat értékeit. Hogy tehát $rtg\alpha - \frac{c}{w}$ kitétel nyeressék, a görbe rendezőiből $\frac{c}{w}$ állandó érték vonandó le. De (8) szerint volt $b = \frac{3c}{rw\sqrt{2}}$, miből $\frac{c}{w} = \frac{2b\sqrt{2}}{3}$. Az érték előállitására legyen $o\eta = b$, $\eta\sigma \perp ox$, s $o\eta = \eta\sigma$, akkor $o\sigma = b\sqrt{2}$, ha tehát abból $o\psi = {}^2/_3\, o\sigma$ vétetik s c-ból oz-re felrakjuk, ugy hogy $oc = o\psi$, s C-ből $//ox$-hez CD-t huzunk, akkor ez utóbbi az OB görbe rendezőiből egy $\frac{c}{w}$ nagyságu vonaldarabot szel le, s világos, hogy a maradékok az $rtg\alpha - \frac{c}{w}$ kitételt képviselik.

Tegyük tehát pl. B pontra vonatkozván: $rtg\alpha - \frac{c}{w} =$ $BD = t$, akkor a (16) alatti egyenletek elseje:

$y = t \,.\, Cos\,\alpha$ egyenletbe változik át, mely ha α szög könnyen volna kinyerhető, y értékre vezetne.

Ezen α szög azonban az eddig haladott szerkesztés utján kőnnyen nyerhető ki. Minthogy t. i. $tg\,\alpha = \frac{z}{r\omega}$ volt, ez ha $\varphi - 1$ $tg\alpha = \frac{z}{r}$ adja, mely egyenletben azonban z alatt nem tetszésszerinti, hanem a $\varphi = 1$ alatti OB mentelék rendezőjét jelenti. De B pontra nézve pl. $z = Bx$ és $r = ox$; $tg\alpha$ tehát $= \frac{Bx}{Ox}$; de ha OB mentelékben OB egyenes vonalu húrt húzunk, lészen: $tg\,Box = \frac{Bx}{Ox}$, miből α szög $= Box \sphericalangle$. Ezen $\varphi = 1$ szögrendezőre vonatkozó Bo mentelék bir tehát azon sajátsággal, hogy a tetőpontján keresztül menő húrjai, mint pl. OB, XO tengelylyel egy α szöggel összeeső szögöt képez.

Hogy most az $y = t\,Cos\alpha$ egyenlet szerkesztessék, következőkép járunk el.

Ha B-ből BO egyenest s ugyanazon pontból mint középpontból BD sugárral Dd közt s a nyert d-ből $dk \perp Bx$-re huzván, x-ből $xH = dk$ felrakjuk, akkor H az $y = tCos\alpha$ egyenletnek megfelelö tpH görbe egyik pontja. Hasonlókép, ha α-ból $o\alpha$ egyenest, $\alpha\gamma$ sugárral $n\gamma$ kört, n-ből $nw \perp \alpha\gamma$-ra huzzuk s végre $nw = y\beta$ $y\alpha$-ra felrakjuk, a tpH görbe β pontja nyeretni fog.

S ha utóvégre az ilyképen nyert pontokat összekötjük, az $y = \left(rtg\alpha - \frac{c}{w}\right) Cos\,\alpha$ egyenletnek megfelelő Hpt görbét kapjuk.

Minthogy a görbének rendezői az elemek viszonlagos sebességeit adják, azért a görbét is a viszonlagos sebességek görbéjének fogjuk nevezni.

A görbe, mint látható, po távolban zo tengelytöl xo metszéktengelyt vágja, p pontnak rendezője tehát semmi po-nál kisebb metszékeknek nemleges, po-nál nagyobb metszékeknek pedig igenleges rendezőjük lesz; innen következik, hogy az o-tól a-ig érő mentelékrész nemleges, az a-tól a végtelenig érő rész pedig igenleges hatásu, s minthogy magában a pontban sem igenleges sem nemleges hatás nem fejlődik, azért azt az OB mentelék *semleges pontjának* nevezzük.

Az elébbiekben feltettük, hogy $\frac{c}{w}$ valóban $= \frac{2b\sqrt{2}}{3}$; történhetik azonban, hogy a szárny kedvező körülményekben ennél nagyobb, vagy nem kedvező esetben ennél kisebb sebességet vesz fel, lehet tehát hogy $\frac{c}{w} \gtrless \frac{2b\sqrt{2}}{3}$. Ha $\frac{c}{w} > \frac{2b\sqrt{2}}{3}$, akkor legyen $\frac{c}{w} = a$, a mellett a fentebbi egyenlet: $y = \left(rtg\alpha - \frac{c}{w}\right)$ $Cos\,\alpha$ ebbe: $y = (rtg\alpha - a)\ Cos\,\alpha$ megy által. Az esetben $a = OG$ s $GH \parallel Ox$ huzván, világos, hogy pl.

$HB = Bx - Hx = rtg\alpha - a$, s ha HB-vel Hh körivet s h-ból $hg \perp Bx$-re huzatik, s $hg = xm$ szerkesztetik, az eredő m pont az új vsm görbe pontja.

Ha pedig megforditva $\frac{c}{w} < \frac{2b\sqrt{2}}{3}$, akkor legyen $\frac{c}{w} = a'$, s a fentebbi egyenlet ez:

$y = (rtg\alpha - a,)\ Cos\,\alpha$. S ha $a' = OE$ szerkesztetik, E-ből $EF \parallel XO$-val huzatik, akkor pl.

$FB = Bx - Fx = rtg\alpha - a'$ S ha Ff körivet, f-ből $fl \perp Bx$-re huzatik, s $fl = xk$ szerkesztetik, az eredő k pont az uj uqk görbének pontja:

Mind a három uk, tH és vm görbét egymással összehasonlítván, könnyü a következőkről meggyőződni: Ha a szárny c sebessége meggyorsul, tH görbe a mélyebben fekvő vm állásba jut, a mellett p semleges pontja a tengelytől távozik s s-be megy által, az igenleges rendezők mind számra mind nagyságra nézve apadnak, a nemlegesek pedig ellenkezőleg számra és nagyságra nézve szaporodnak. Ha megint a szárny c sebessége meglassudik, tH görbe a feljebb fekvő uk fekvésbe emelkedik fel, a semleges pont p-ből a tengelyhez közelébb jut q-ba, az igenleges rendezők mind számra mind nagyságra nézve szaporodnak, a nemlegeseké megfordítva kevesbednek. Egyáltalában látni,hogy a viszonylagos sebességek görbéje a szárny miveletéről kimeritő felvilágositást ad, s hogy annak beható tanulmányozása igen ajánlható.

Igen kényelmes eszközül szolgálnak az elébb vizsgált viszonylagos sebességek görbéi a szárnyhatásának kiszámitására. Az eljárás a következő: (11. ábr.) Ht-a viszonylagos sebességek görbéje, akkor a szárnyelemek egy része igenlegesen, másik része nemlegesen hatván világos, hogy az együttes hatás a kettőnek különbségével egyenlő, s hogy a két fölületrész a semleges pontban egymást éri. Ha most op sugarat, mely a tengelytől a semleges pontig ér, tetszés szerinti, de egyenlő $\triangle r$ részekre osztjuk s az ugyan ily nagyságu részeket p-ből x-ig felrakjuk, akkor o, $\triangle r$, $_2\triangle r$, $_3\triangle r$, $_4\triangle r$,.... az egymás után következő sugarak; — ha azután az ezeknek tH görbére vonatkozó rendezőit lemérjük s y_0 y_1 y_2 y_3... jeleljük, a (16) alatti második egyenletre nézve:

$$\triangle P_0 = o$$

$$\triangle P_1 = \xi \gamma w^2 \varphi y_1 \triangle r^2$$

$$\triangle P_2 = \xi \gamma \varphi w^2 y_2 . 2 \triangle r^2$$

$$\triangle P_3 = \xi \gamma \varphi w^2 y_{,,,} 3 \triangle r^2$$

$$\triangle P_4 = \xi \gamma \varphi w^2 y_{IV} 4 \triangle r^2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\triangle P_, = \xi \gamma \varphi w^2 y_n . n \triangle r^2 \text{ vagy összesen}$$

$$P_{,,} = \xi \gamma \varphi w^2 \sum_o^n y_n n \triangle r^2 \text{ és}$$

$$P_{,,,} = \xi \gamma \varphi w^2 \sum_n^x y_x . x \triangle r^2 \text{ ugy hogy a szárny nyomása:}$$

$$(17) \quad P = P_{,,} - P_, = \xi \lambda \varphi w^2 \left(\sum_n^x y x \triangle r^2 - \sum_o^n y x \triangle r \right)$$

Hogy a képlet a szárnynyomást csak közelitőleg adja, magából világos; később szigoru képletekre jutunk. Mihez még csak azt emlitjük, hogy e közelitő kiszámitási mód, mások akkor még nem létezvén, azon két mentelékes szárnyra alkalmaztatott, mely a már emlitett triesti kisérletek alkalmával használtatott. Mind a két csavar kétszárnyas volt, 6 lábnyi átmérővel. Az elsőnél $b = 2$ aug. láb volt, a kiszelvény $57^0 - 17' - 44''$ — szögöt foglalt el; a csavar $4^1/_2$ font gőztúlfeszerő — s 978 fontnyi óránkénti kőszénemésztés mellett perczenként 144-szer forgott, mi alatt a gőzös óránként 10 teng. mértföldet futott meg. — A második csavarnál $b = 1$ láb s a szárnykiszelvény szöge csak $40^1/_2$ foknyi volt. A csavar 7 font tulfeszerő s 820 font óránkénti kőszénemésztés mellett, 1 percz alatt csak 108 forgott s a gőzös óránként 9 mértf. ment. — Mind a két csavar rezgés nélkül működött.

8.

Igen szép és kényelmes alkalmat nyujtanak az elébb tárgyalt sebességi görbék, a mentelékes szárny hatását más nemű szárny hatásával összehasonlitani. Megérdemli a fáradságot ezt egy példában mutatni.

Az eddig használt vizicsavarok szárnyai közönségesen csigalépcsőzeti szárnyak. Ilyen fölület, ha azt tengelyén keresztűl fektetett sik által vágjuk, vágódik, mint tudjuk egy a csavar tengelyére $\perp$ egyenes szerint; s két ilyen külön-külön, de egymást közvetlen követő tekervényben s ugyanazon tengelyes síkban fekvő egyenes egymástóli távolsága adja a csavarmenet nagyságát. Ha pedig e fölületet egy, mértani tengelyével a csavar tengelyével összeeső körhenger fölűletével vágjuk, akkor az eredő görbe közönséges csavarvonal; s ennek megfelelő emelkedését kapjuk, ha a csavarmenetet a henger kerületével osztjuk s lesz, ha α, h, r, egymásután az emelkedési szögöt, a csavarmenetet s a henger sugarát jelentik:

$$(18)\ tg\alpha = \frac{h}{2\pi r}.$$

Könnyű már most átlátni hogy a (15) (16) és (17) alatti egyenletek érvényesek, az r-nek bármily függvenyét jelentse is az ezekben fellépő α változható. Ennek folytán szabad α-nak a (18) egyenlet által adott függvényességét a (16) alatti képletek elsejébe vezetni; hogy a szerkesztés eredménye csak azon görbére vezet, melynek rendezői a csigalépcsőzeti szárnyelemek viszonylagos sebességeit előállitják, magából világos.

Ha tehát: $y = \left(rtg\alpha - \frac{c}{w}\right) Cos\ \alpha$ egyenletben $tg\alpha$ helyébe a fentebbi értéket teszszük, lesz:

$$y = \left(\frac{h}{2\pi} - \frac{c}{w}\right) Cos\ \alpha,$$ vagy, ha $\frac{h}{2\pi}$ állandó $= A$ és $\frac{c}{w}$ állandó $= B$.

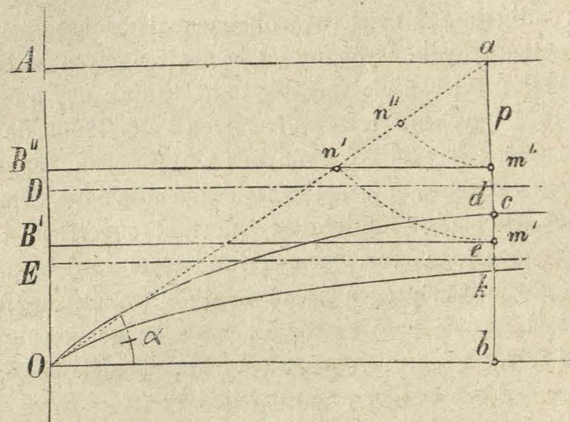
(19) $y = (A - B)\ Cos\ \alpha.$

Legyen már most AO a tengely (12. ábra) bO egy tetszés szerinti merőleges, és $OH = A$, $OB_{,} = B$, ugy hogy:

$$AB_{,} = A - B = rtg\alpha - \frac{c}{w}.$$

A és $B_{,}$-ből $Aa \parallel B_{,}m_{,} \parallel Ob$ akkor az Aa és $B_{,}m_{,}$ párhuzamosak közti tér folyvást $= A - B$.

12. ábra.



Ha az Aa egyenes pontjai pl. a pontját O-val összekötjük, az eredő ao egyenes Ob-vel épen azon α szögöt képezi, mely alatt az a pontra vonatkozó Ob sugaru csavarvonal emelkedik, mert $tang.\ \alpha = \frac{ab}{bo} = \frac{A}{r}$ vagy mivel $A = \frac{h}{2\pi}$ lesz $tg\alpha = \frac{h}{2\pi r}$ mint fentebb találtuk. Ha tehát $am_{,}$ sugárral $m_{,}n_{,}$ közt s $n_{,}$-ből $n_{,}m_{,,} \parallel ob$ húzzuk, s $n'm'' = bc$ szerkesztjük, az eredő c pont a kivánt oc görbe egyik pontja.

A görbének nemleges rendezői nincsenek, minélfogva a szárnynak nemleges hatásu elemei sincsenek, de a mindig igenleges rendezők $A—B$ határhoz, maga a görbe pedig egy Ob-hez $//Dd$ közelitőhöz van kötve. A csigalépcsőzeti fölülethez tartozó elemek deréklőleges sebességei nem növekedhetnek tehát, mint e mentelékes szárnyéi a végtelenig, hanem bizonyos határhoz vannak kötve, melyen túl nem mehetnek.

Ha c sebesség növekedik, $\frac{c}{w} = B$ érték is növekedik, minek folytán $A—B$ kisebbedik, minek következtében Dd közelitő $//$-an Ob-hez valamivel lenyomódik, s pl. Ee fekvésbe jut, mi mellett oc görbe ok alakba átmegy, miből látni, hogy a viszonylagos sebességek görbéje a szárny gyorsultával mindinkább ob egyenes felé huzódik, mig utóvégre ha $A=B$ lehetne, magával az ob-vel egybe nem esik, s hogy tehát e szárny hatása is oly korlátok által van körülhatárolva, melyek a mentelékes szárnyra nézve nem léteznek. S látjuk tehát, hogy a mentelékes szárny valóban hatályosabb mint a csigalépcsőzeti szárny.

Végezetre a viszonylagos sebességek görbéinek még egy tulajdonságáról kell emlitést tennünk. Tudjuk ugyan is, hogy (16) szerint:

$$y = \left(rtg\alpha - \frac{c}{w}\right) Cos\,\alpha \text{ és}$$

$P = \xi\gamma\varphi w^2 \int r y^2 dr$. Figyelembe vevén, miszerint gondolható olyan a szám, mely π ludolphi számmal szorozva $\xi\gamma\varphi w^2$ értéket adja, szabad lesz:

$\xi\gamma\varphi w^2 = a\pi$ tenni, minek folytán utolsó egészletünk:

$$P = a\pi \int r y^2 dr.$$

De $\pi \int r y^2 dr$ egészlet az analytikai mechanikában különös jelentőséggel bir. Ha ugyan y rendezőt egyik végpontja körül forgatjuk, ez kört irand le, melynek területe $= \pi y^2$. Ha most a viszonylagos sebességek görbéjét (11. vagy 12. ábra) ox vagy ob metszéki tengelyükön forgatjuk, a görbe minden rendezői ilyen körlapokat, az egész görbe pedig forgási testet ír le, és a szóban lévő $\pi\int ry^2dr$ egészlet ezen forgási test nyugtani nyomatéka; s minthogy $P=a\pi\int ry^2dr$, következik:

hogy a szárny ereje a szóban levő test nyugtani nyomatékával egyenlő, szorozva azt valamely a szorzóval.

9.

A fentebb igért szigorubb képletek lefejtésére (15) egyenletre térvén vissza, szerinte van:

$P=\xi\gamma\varphi w^2\int rdr\left(rtg\alpha-\frac{c}{w}\right)^2 Cos^2\alpha$, melyben, mentelékes kiszelvényt tévén fel:

$$tg\alpha=\frac{\sqrt{2}}{r}\left(\sqrt{b^2+r^2}-b\right)$$

A fentebbi egészlet két részre fog oszlani, az egyik az igenleges, a másik a nemleges hatásu elemeket fogja magában foglalni; s a két rész közti határ azon r sugár alatt keresendő, mely:

$rtg\,\alpha-\frac{c}{w}=o$ egyenletnek megfelel. Nevezzük azt $r_,$-nek, valamint a szárny külső sugarát r''-nek, a belső $r=o$, ha a szárny a tengelyig ér. Ez oknál fogva lesz:

$P_,=\xi\gamma\varphi w^2\int_{r_,}^{r_{,,}} rdr\left(rtg\alpha-\frac{c}{w}\right)^2 Cos^2\alpha$ az igenleges és

$P_{,,}=\xi\lambda\varphi w^2\int_{o}^{r_,} rdr\left(rtg\alpha-\frac{c}{w}\right)^2 Cos^2\alpha$ a nemleges, s igy végre az egész nyomás.

$$(20)\quad P=P_,-P_{,,}=\xi\gamma\varphi w^2\left[\int_{r_,}^{r_{,,}} rdr\left(rtg\alpha-\frac{c}{w}\right)^2 Cos^2\alpha-\right.$$
$$\left.-\int_{o}^{r_,} rdr\left(rtg\alpha-\frac{c}{w}\right)\right]$$

Az egészlet legrővidebb felfejtése a következő:

Tegyük $u^2 = b^2 + r^2$ tehát

$udu = rdr$, akkor, tekintettel (9)-re,

$$rtg\alpha = \sqrt{2}\left(u - b\right), \text{ és } Cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} \text{ azaz:}$$

$$Cos^2\alpha = \frac{u+b}{3u-b}; \text{ minek folytán:}$$

$$\int rdr\left(rtg\alpha - \frac{c}{w}\right)^2 Cos^2\alpha =$$

$$= \int udu\left(\sqrt{2}\,(u-b) - \frac{c}{w}\right)^2 \cdot \frac{u-b}{3u+b}, \text{ mely egészlet, ha}$$

$\sqrt{2}$ szorzóként kiemeljük:

$$2\int udu\left(u - b - \frac{c}{w\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{u-b}{3u+b} \text{ kitételbe alakul át. Ne-}$$

vezvén elvégre $b + \frac{c}{w\sqrt{2}}$ állandó értéket röviden a-nak, akkor egészletünk:

$$2\int udu\left(u - a\right)^2 \cdot \frac{u-b}{3u+b} \text{ alakot veszi föl.}$$

Minekelőtte azt felfejtjük, az egészleti határokra kell ügyelnünk, $u = \sqrt{b^2+r^2}$ lévén, világos, hogy $r_{,,}$-nek $u_{,,}$ fog megfelelni, ez tehát az egészlet felső határa. A második határ a semleges elemek sugara, ezekre nézve $u - a = 0$, a tehát a második határ. A harmadik határ r = o volt, minthogy $u = \sqrt{b^2+r^2}$, lészen b a harmadik határ. S ha e 3 határ a fentebbi egészletre átvitetik, következik:

$$P = \xi\gamma\varphi w^2 \left[\int_a^{u'} udu\frac{(u-a)^2(u+b)}{3u-b} - \right.$$

$$\left. - \int_o^a udu\frac{(u-a)^2(u+b)}{3u-b}\right]; \text{ mely egészlet}$$

még igy is adható:

$$\int udu\frac{(u-a)^2(u+b)}{3u-b} + C = f(u) \text{ tévén, lesz:}$$

$$P = \xi\gamma\varphi w^2 \Big(f(u_,) - 2f(a) + f(b)\Big)$$

De: $\int udu\,(u-a)^2\left(\frac{u+b}{3u-b}\right)=$

$$=\int\frac{udu}{3u-b}\left(u^3-(2a-b)\,u^2+(a-2b)\,au+a^2b\right);$$ mely-

ből, minthogy általjában:

$$\int\frac{x^n dx}{a+bx}=\frac{x^n}{nb}-\frac{a}{b}\int\frac{x^{n-1}dx}{a+bx},$$ léptenként haladó részletes

egészlés utján, s az egészlési határok bevezetése mellett:

$$(21)\quad P=\frac{2\zeta\gamma\varphi w^2}{3}\left[\frac{u_{,}^4-2a^4+b^4}{4}-\frac{2(3a-2b)}{9}\right.$$

$$\left(u_{,}^3-2a^3+b^3\right)+\frac{9a^2-24ab+46^2}{18}\left(u_{,}^2-2a^2+b^2\right)+$$

$$\left.+\frac{46}{27}\left(3a-b\right)^2\left(u_{,}-2a=b\right)+\frac{46^2}{27}\left(3a-b\right)^2 .log.nat\left(\frac{2b(3u_{,}-b)}{(3a-b)^2}\right)\right]$$

A szárny munkafejlesztésére nézve figyelembe veendő, hogy a P nyomást gyakorló szárny a tengely irányában c sebességgel halad, P erő munkafejlesztése lesz tehát:

$L=Pc$, vagy mivel $a=b+\frac{c}{w\sqrt{2}}$ tehát $c=(a-b)w\sqrt{2}$

$L=(a-b)w\sqrt{2}.\ P$ azaz:

$$(22)\quad L=\frac{2\zeta\gamma\varphi w^3\sqrt{2}}{3}\left[\frac{u_{,}^4-2a^4+b^4}{4}-\frac{2(3a-2b)}{9}\right.$$

$$\left(u_{,}^3-2a^3+b^3\right)+\frac{9a^2-24ab+4b^2}{18}\left(u_{,}^2-2a^2+b^2\right)+$$

$$+\frac{46}{27}\left(3a-b\right)^2\left(u_{,}-2a+b\right)+\frac{46^2}{27}\left(3a-b\right)^2 .\ log\ nat$$

$$\left.+\frac{2b(3u_{,}-b)}{(3a-b)^2}\right](a-b)$$

A kiszelvény forgatási nyomatékának meghatározására vissza kell térnünk az értekezés kezdetére. A (2. ábra) szerint volt ugyan:

$og=oh\,sin\,\alpha$ és $ok=oh\,Cos\,\alpha$, osztás utján lesz tehát: $og=ok\,tg\,\alpha$, azaz, og oldalnyomást $d\varphi$-val jelölvén:

$d\varphi = dP.tg\,\alpha$. Ezen erő r sugáron mint emeltyükaron müködvén, lesz az elem nyomatéka:

$d\mathfrak{M} = rdPtg\,\alpha$. Mentelékes szárnyat feltéve:

$rtg\alpha = \sqrt{2}\,(u - b)$ és

$d\,P = 2\zeta\gamma\varphi w^2\,udu\,(u - a)^2\left(\frac{u + b}{3u - b}\right)$. Lesz tehát

$\mathfrak{M} = 2\sqrt{2}\,\zeta\gamma\varphi w^2 \int udu\,(u - a)^2\left(\frac{u^2 - b^2}{3u - b}\right)$ vagy ha felbontunk:

$$= 2\sqrt{2}\,\zeta\gamma\varphi w^2 \int (u^5 - 2au^4 + (a^2 - b^2)\,u^3 + 2ab^2u^2 -$$

$$- a^2b^2u)\frac{du}{3u - b};$$ miből a fentebbi segédképlet ismételt használata mellett, részletes egészlés utján s az egészlés határaira vonatkozva végre:

$$(23)\ \mathfrak{M} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\zeta\gamma\varphi w^2\left[\frac{u_,^5 - 2a^5 + b^5}{5} - \frac{6a - b}{3}\right.$$

$$\left(\frac{u_,^4 - 2a^4 + b^4}{4}\right) + \frac{9a^2 - 6ab - 8b^2}{3^2}\left(\frac{u_,^3 - 2a^3 + b^3}{3}\right) +$$

$$+ \frac{(9a^2 + 48ab - 8b^2)b}{3^3}\left(\frac{u_,^2 - 2a^2 + b^2}{2}\right) - \frac{8b^2(3a - b)^2}{3^4}$$

$$\left.\left(u_, - 2a + b\right) - \frac{8b^3\,(3a - b)^2}{3^5}\log nat\frac{2b\,(3u_, - b)}{(3a - b)^2}\right]$$

Kötelességünk itt megjegyezni, hogy természettud. társulatunknak 1861-ben megjelent közlönyében ugyan e tárgyról szóló értekezés 179. lapján álló (33) képlet hibás, mely hibák hihetőleg a bonyodalmas kitétel összevonásával becsusztak, de a fentebbi (23) képletben helyreigazittattak.

II. A viziszárny kiszelvényének meghatározása.

10.

Eddig haladott 1861-ben a felállitott elmélet.

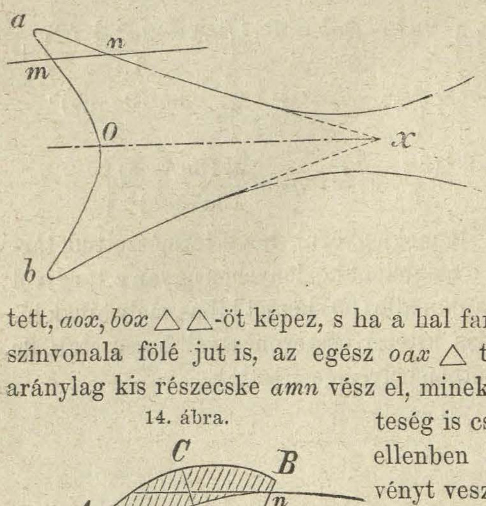
Már az 1858-ki kisérletek oda látszottak mutatni, hogy a szárny problemája tökéletesen még koránt sincs felfejtve.

A Triestben megpróbált második csavarnál tapasztaltatott ugyanis, hogy a hajó, tökéletlenül lévén megterhelve, s igy a csavar valami 8 hüvelyknyire a vízszine fölébe emelkedett, csak 6 ang. mértföldet futott meg, daczára hogy a csavar ugy mint közönségesen perczenként 108-szor megfordult. Ugyanakkor ha a csavar ellenkezőleg forgattatott, mi olykor történik, ha kivántatik, hogy a hajó hátrafelé menjen, oly erős és hathatós rezgések tapasztaltattak, hogy az nem csak a hajón levőkre kiállhatatlan volt, hanem még a hajógerendázat szilárdsága is veszélyezve volt általa.

A felette érdekes tüneményt a jelenlevők közül senki, még maga a csavarnak feltalálója sem, birta megmagyarázni, melynek oka azonban következőképen fejthető fel.

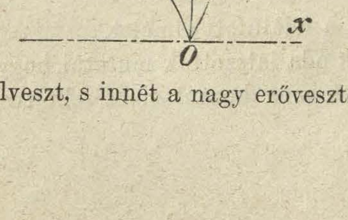
A természet, ezen szigoru mathematikus, mely mindent a maximum és minimum feltétele szerint fejt fel, a viziszárny problemáját a halakban már régen fejtette fel.

13. ábra.



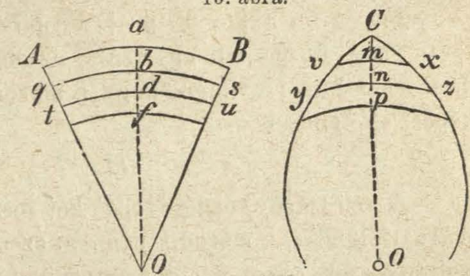
Már pedig ha a halak farkait vizsgáljuk, mint pl. (13. ábrában), akkor ez két, alapvonalaikkal *x o* tengelyre erősitett, *aox*, *box* △ △-öt képez, s ha a hal farkával véletlenül *mn* színvonala fölé jut is, az egész *oax* △ területből csak egy aránylag kis részecske *amn* vész el, minek folytán az erőveszteség is csak igen csekély. Ha ellenben az 1858-ki kiszelvényt veszszük, ez (14. ábra) szerint egy *o* csucsával *xo* tengelyhez erősitett, hogy ugy szóljunk, ABO △-öt képez, hacsak mn-ig viz alá jut, területéből ACB nm nagy részt elveszt, s innét a nagy erőveszteség.

14. ábra.



A következő vizsgálat még jobban fog felvilágositni. Gondoljunk ugyanis azonegy fölületből két külső vázvonalukra nézve különböző szelvényt kiszelve; legyen 15 ábr. *ABO* az egyik s CO a másik szelvény, mely mind a kettő egyenlő ao = Co=r sugarat bir; ez utóbbiakat tetszés szerinti elemekre osztván ugy, hogy ab=Cm; bd=mn; df=np; .... világos most, hogy mind a két kiszelvényre nézve ezen egyenletek:

15. ábra.



$$tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(\sqrt{b^2 + r^2} - b\right) \text{ és}$$

$$dP = \xi\gamma\omega^2 q\, rdr \left(rtga - \frac{c}{\omega}\right)^2 Cos^2\alpha$$

egyaránt érvényesek. Ha pedig b, d, f...; m, n, p.... pontokon keresztül qs, tu.....; vx, yz.... köriveket huzván, a két lapot elemekre osztjuk, világos hogy ABsq elem téregységére épen akkora nyomás esik mint Cvx elem téregységére, s hogy hasonlókép qust elem téregységére szint akkora nyomás hat mint vxzy elem egységére, s igy a többiekre nézve is. Ha tehát az elemek területeit f, f,, f,,,.... ês F_I F_{II} F_{III}.... s az azok egységeire ható nyomásokat: p_I p_{II} p_{III}.... nevezzük. világos hogy:

$F_I p_I + F_{II} p_{II} + F_{III} p_{III} + \ldots\ldots F_n p_n = P_I$ az egyik kiszelvény és

$f_I p_I + f_{II} p_{II} + f_{III} p_{III} + \ldots\ldots f_n p_n = P_{II}$ a másik szelvény ereje.

Feltévén most hogy a két szárny elemről elemre vizből kiemeltetnek, természetes hogy a két összegből léptenként az első tagok, vagy a két első, vagy a három első tagok elvesznek. A veszteségek lesznek tehát:

első esetben $F_I p_I$ és $f_I p_I$

második esetben $F_I p_I + F_{II} p_{II}$ és $f_I p_I + f_{II} p_{II}$

harmadik esetben $F_I p_I + F_{II} p_{II} + F p_{III}$ és $f_I p_I + f_{II} p_{II} + f_{III} p_{III}$ stb.

Ha az elemterületek egyenlők, a veszteségek is egyenlők, ha pedig:

$F_I > f_I$ akkor $F_I p_I$ is $> f_I p^I$; s ha hasonlókép $F_{II} > f_{II}$ akkor $F_I p_I + F_{II} p_{II}$ is $> f_I p_I + f_{II} p_{II}$; s ha $F_{III} > f_{III}$ akkor $F_I p_I + F_{II} p_{II} + F_{III} p_{III}$ is $> f_I p_I + f_{II} p_{II} + f_{III} p_{III}$ stb. egy szóval az első szárny többet veszt mint a második; s világos hogy a második szárny az elsőhöz képest előnyben van.

11.

A vízi szárny kérdése tehát két részre szakad. Az első a szárny fölületét, a második pedig az ezen fölületből kiszelendő szelvényt szabja meg, s a szárny elmélete csak ugy lesz tökéletesen kimeritve, ha mind a kettőre felelhetünk.

Hogy az előbb lefejtett fölület az első rész valódi feloldása, arról kételkedni sem lehet; hátra van tehát még a második rész, mely azonban többféleképp kezelhető. Legyen e végre első feladatunk a következő:

Több egyenlő nagy szelvény közül azt kikeresni, mely ha valamelyik részével vizből kiáll, erejéből legkevesebbet veszt

A kiszelvény területe $F = \int r\varphi dr$;

a kiszelvény ereje pedig:

$P = \zeta\gamma\omega^2 \int \varphi r dr \left(rtg\alpha - \frac{c}{\omega}\right)^2 Cos^2\alpha$, vagy ha a *dr* utáni szorzat röviden v-vel és az állandó $\gamma\omega^2$ röviden B-vel jelöltetik:

$$P = B\int r\varphi v dr$$

A maximum és minimum elve szerint most az első egészlet egy később meghatározandó állandóval szorzandó, s a második egészlethez adandó, lesz tehát a kitétel:

$A\int r\varphi dr + B\int r\varphi v dr$ vagyis

$\int \left(A. + Bv\right) r\varphi dr$, mely a kérdés feloldására vezet.

Minthogy most az ezen egészletben előforduló φ a szárnynak még ismeretlen vázvonalától függ, mely meg lesz határozva, mihelyt az r és φ közt létesitendő s reá vonatkozó függvényességet ismerjük, kell hogy ez utóbbit ugy válaszszuk, hogy az egészlet minimum legyen.

A végre pedig az egészlet az r és φ közt gondolt függvényességre vonatkozott külzelésnek alávetendő, mi mellett dr, mely növeszték az r és φ közti függvénytől egészen független, állandónak tekintendő. Nehogy tehát az egészletben már előforduló külzelési jelzőt a φ függvényességére vonatkozandóéval felcseréljük, dr helyébe δr-t akarunk irni. E szerint lészen:

(24) $\int r\varphi\left(A. + Bv\right)\delta r$ a φ szerint külzelendő egészlet,

mely a műtét végrehajtásával:

$$\int\left[\left(\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)\varphi + r\right)\left(A + Bv\right) + Br\varphi\left(\frac{dv}{dr}\right)\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)\right]\delta r = o \text{ adja.}$$

Ezen egészlet azonban semmi csak ugy lehet, ha:

$\left(\varphi\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) + r\right)\left(A + Bv\right) + Br\varphi\left(\frac{dv}{dr}\right)\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = o$, vagy ha rendezünk:

$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)\left[\varphi\,(A + Bv) + Br\varphi\left(\frac{dv}{dr}\right)\right] + r\left(A + Bv\right) = o$, tehát megforditva.

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)\cdot\frac{1}{\varphi\,(A + Bv) + Br\varphi\left(\frac{dv}{dr}\right)} = -\frac{1}{r\,(A + Bv)} \text{ s ha a}$$

két változót egymástól elkülönitjük:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\left[\frac{1}{r} + \frac{B\left(\frac{dv}{dr}\right)}{A + Bv}\right] dr, \text{ s ha egészelünk:}$$

$$l\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right) = + l\frac{r_0}{r} - \int\frac{B\left(\frac{dv}{dr}\right)dr}{A + Bv}.$$

A még hátralévő egészletre nézve figyelembe veendő hogy:

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)dr = dv \text{ és } Bdv = d\left(Bv\right) \text{ és } d\left(Bv\right) = d\left(A + Bv\right)$$

lesz tehát:

$$l\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right) = l\frac{r_0}{r}\frac{(A+Bv_0)}{(A+Bv)}$$ miből végre:

$$(25)\ \varphi = \varphi_0 \frac{r_0 (A+Bv_0)}{r(A+Bv)},$$ avagy v helyébe értékét téve

$$(26)\ \varphi = \varphi_0 \frac{ro\left[\dfrac{A(4b^2+3r_0^2-4b\sqrt{b^2+r_0^2})+2Br_0^2\left(\sqrt{b^2+r_0^2}-b+\dfrac{c}{\omega\sqrt{2}}\right)^2}{4b^2+3r_0^2-4b\sqrt{b^2+r_0^2}}\right]}{r\left[\dfrac{A(4b^2+3r^2-4b\sqrt{b^2+r^2})+2Br^2-\left(\sqrt{b^2+r^2}-b-\dfrac{c}{w\sqrt{2}}\right)^2}{4b^2+3r^2-4b\sqrt{b^2-r^2}}\right]}$$

s ez azon egyenlet, mely a szárnylap külső vázvonalát meghatározza.

De azon esetre, ha a szárnylap szegélye a kitalált egyenlettel megfelelően választatik, a nyomás képlete is szerinte átalakul. Volt ugyanis:

$P = B\int r\varphi v dr$; a fentebb kitalált (25) egyenletből pedig

$\varphi = \dfrac{C}{r(A+Bv)}$ tehát: $Br\varphi v = C - Ar\varphi$ és

$P = \int\left(C - Ar\varphi\right)dr = C\int dr - A\int r\varphi\ dr$. következik:

A jobb kéz felőli nemleges egészlet $\int r\varphi dr$ nem egyéb mint a szárny területe, melyet F-el jelelvén, végre

(27) $P = Cr - AF$

A fentebb behozott értékek közül csak A maradt még határozatlan, melyet tehát most kell meghatároznunk. Miután A-nak az értéke magából a műveletből elő nem adta magát, azt máshonnan kell megtudnunk. A végre szolgál a (27) egyenlet. Ezen egyenletben P a szárnynak nyomása, mely a képlet szerint tehát annál nagyobb mennél kisebb az AF szorzat. De F a szárnyterülete, mely a feladat feltétele szerint állandó érték; feltettük ugyan is, hogy az összehasonlitott szárnylapok egyenlő területüek; az AF értéke függ tehát még csak az A-tól, s annál kisebb lesz, mennél kisebb az A: a feladat csak annyit kötvén ki, hogy A valamely állandó érték, világos hogy az bár mily nagy vagy kicsiny lehet; miután a P legnagyobb ha A elenyészik, következik hogy legczélszerübb, ha

$A = o$; de ily feltétel alatt a (25), (26) és (27) alatti egyenletek a következő egyszerü alakot veszik fel:

$$(29)\left\{\begin{aligned} &\varphi = \varphi_0 \frac{r_0 v_0}{rv} = \frac{C}{rv} \\ &\varphi = \varphi_0 \frac{r_0^3\left(\sqrt{b^2+r_0^2}-b-\frac{c}{\omega\sqrt{2}}\right)^2}{r^3\left(\sqrt{b^2+r^2}-b-\frac{c}{\omega\sqrt{2}}\right)^2} \text{ és} \\ &P = Cr \end{aligned}\right.$$

12.

Elébb a szárnylap szegélyzete a nyomás veszteségtől tétetett függővé; keressük most azon szárnylapot, mely más vele egyenlő nyomásuhoz hasonlitva, a legkisebb forgási nyomatékkal bir. Az utat ismervén, melyen haladnunk kell rövidebben szólhatunk:

A szárnylap nyomása, v alatt r-nek illető függvényét értvén:

$\int \varphi v dr$—; a forgási nyomaték pedig:

$\int \varphi v u dr$ egészlettől függ, ha ugyan u alatt r azon függvényét értjük, mely φv-hez hozzájárul, hogy a nyomás képlete a nyomatékéba átmenjen. Hogy tehát a lap a feltételnek megfeleljen, kell hogy:

$A\int \varphi v dr + B\int \varphi v u dr$ avagy

$\int (A + Bu) v \varphi \delta r$ egészletnek φ függvény szerint vett külzeléke megsemmisüljön. Az egészlet azonban alakra nézve a (24) alattival egyezik, s világos hogy a most nyerendő eredmény az amott nyert eredménynyel is egyezni fog, ha csak amott r és v helyébe v és u iratik, lesz tehát:

$$\varphi = \varphi_0 \frac{V_0 (A + BU_0)}{V(A + BU)} = \frac{C}{V(A + BU)} \text{ miből } Bvu\varphi = C - A\varphi v.$$

Minthogy pedig a lap forgási nyomatéka:

$\mathfrak{M} = B \int \varphi vudr$; következik:

$\mathfrak{M} = Cr - A \int \varphi vdr$; de $\int \varphi vdr = P$, tehát

$\mathfrak{M} = Cr - AP.$

A nyomaték tehát annál nagyobb, mennél kisebb az A P; de P a lap nyomása állandónak tekintendő, mihelyt fölteszszük, hogy a lapok egyenlő nyomásuak, A P kisebbülése tehát csak ugy engedhető meg, ha A maga kisebbül; minthogy pedig a feladat A-ról csak annyit teszen fel, hogy valamely állandó érték, mely bár milyen nagy vagy kicsiny lehet, azért szabad a választás s föltehetni, hogy $A = O$, minek folytán ismét:

$$(30) \begin{cases} \mathfrak{M} = Cr \\ \varphi = \dfrac{C}{vu} \text{ és} \\ C = \varphi_0 v_0 u_0 \text{ lesz.} \end{cases}$$

Hasonlókép megy a dolog, ha az egyenlő területi lapok közül a legkisebb nyomatéku kerestetik. A szárnylap területe:

$\int r\varphi dr$ a nyomaték:

$\int r\varphi vudr$; ha tehát:

$\int (A + Bvu) r\varphi dr$ egészlet φ szerinti külzelékre elenyészik:

$$\varphi = \frac{C}{r(A + Bvu)} \text{ tehát } Br\varphi vu = C - Ar\varphi \text{ és}$$

$$= B \int r\varphi vudr = Cr - A \int r\varphi d\varphi \text{ vagy} = Cr - AF$$

De F terület állandó érték, mely a szárny nagysága által adva van, A pedig egy még meghatározandó állandó; és ugyan mennél kisebb az A, annál nagyobb az $\mathfrak{M}$, a legkedvezőbb eset pedig beáll, ha $A = o$. De ily feltétel alatt lesz:

$$(31) \begin{cases} \varphi = \dfrac{C}{Brvu} \\ C = \varphi_0 \, Br_0 \, v_0 \, u_0 \text{ és} \\ \mathfrak{M} = Cr \end{cases}$$

S látjuk már hogy a feloldás ezen és hasonló feladatoknál mind egy mintára megy.

13.

Elébb a felfejtés a feltételes legkisebből indult ki. Sokkal rövidebb és egyszerübb az ut, ha feltétlen legkisebből indulunk. Igy például, ha a legkisebb nyomást vesztő lapot keressük, van:

$$\mathrm{P} = \xi\gamma\omega^2 \int \mathrm{r}\varphi\mathrm{vdr} = \mathrm{B} \int \mathrm{r}\varphi\mathrm{vdr},$$ mely ha φ függvény szerint külzeltetik:

$$\mathrm{rv} + \varphi \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\mathrm{v} + \mathrm{r}\left(\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dr}}\right)\right) = \mathrm{o}, \text{ tehát}$$

$$\log \mathrm{nat}\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right) = \log \mathrm{nat}\left(\frac{\mathrm{r}_0 \, \mathrm{v}_0}{\mathrm{rv}}\right) \text{ azaz}$$

$$\varphi = \frac{C}{rv} \text{ és innét}$$

$$P = BC \int dr = BCr, \text{ valamint}$$

$$C = \varphi_0 \, r_0 \, v_0$$

Ha ellenben a legkisebb nyomatéku kerestetik, van:

$$\mathfrak{M} = B \int \mathrm{r}\varphi\mathrm{vu\,dr},$$ s ha φ szerint külzelünk:

$$\mathrm{rvu} + \varphi \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\mathrm{vu} + \mathrm{ru}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dr}} + \mathrm{rv}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dr}}\right) = \mathrm{o} \text{ és}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = -\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}} + \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{v}} + \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{u}}\right) \text{ tehát}$$

$$\varphi = \frac{C}{rvu} \text{ miből:}$$

$C = r_0 v_0 u_0$ és

$\mathfrak{M} = BCr$ következik.

Mely eredmények az elébb találtakkal tökéletesen egyeznek.

14.

A viziszárnyról felállitott elmélet most már annyira fejlődött, hogy minden csak lehető kérdésre megfelelhetünk, egyet kivéve, melyről eddig szándékosan hallgattunk, s ez a mentelékes szárny képzetes tengelye.

Igaz hogy (8) egyenlet szerint $b = \frac{3c}{2\omega\sqrt{2}}$ tétetett fel, de a viszonylagos sebességek görbéinél emlitettük már, hogy a c nagyobb is, kisebb is lehet. A sebesség, melyet a szárny fölveszen, függ t. i. nem csak szerkezetétől, hanem más szerkezetén kivül rejlő körülményektől is. Igy pl. ha a két triesti szárnyat veszszük, az elsőnél $b = 2^{I}$, melynek a fentebbi képlet szerint: $c = 106{\cdot}18^{I}$ felel meg, holott a szárny tényleg csak $16\,^2/_3$ láb sebességet nyert; a másodiknál $b = 1^{I}$ volt, melynek $c = 53{\cdot}09^{I}$ felelt volna meg, holott a szárny csak 15 láb sebességgel birt.

Látván tehát, hogy a tényleges s a képzetes tengely követelte sebesség egészen független egymástól, kell hogy a két utóbbinak (képzetes tengely és föltételes sebesség) egymásközti függvényességét értelmezzük.

A (8) egyenlet a fölület egyenletéből—, ez ismét a (4) —ből—, s ez megint az (1) egyenletből folyt; a feltételek, melyek e szerint az utóbbinál feltétettek, az elsőnel is felteendők. Már pedig a lefejtés abból indult ki: több egyenlő sebesen haladó szárny közül a legnagyobb nyomásut kitalálni. Ez deriti fel a fentebbi egyenlet értelmét, mely tehát azt mondja, hogy a mentelékes szárny, melynek képzetes tengelye $b = \frac{3c}{2\omega}$ egyenletnek megfelel, azon esetben ha c sebességgel halad, oly erőt fejleszt, mely minden más hasonló c-vel haladó szárnyak erejeinél nagyobb. Ha tehát a b képzetes tengely alapján szerkesztett szárny a vele összekötött teherrel együtt a sebességet minden feltétel alatt, s minden alkalommal valóban elnyerné, a szárny kérdése tényleg be volna fejezve. Minthogy azonban a szárny a sebességet csak ritkán éri el, minthogy tehát a szárny sebessége $b = \frac{3c}{2\omega}$ egyenletet csak ritkán teljesiti, e körülmény oda látszik utalni, b értéket nem a feltételes és csak ritkán elérhető c sebesség, hanem más feltétel szerint meghatározni. Arra pedig a következő eszmélkedés vezet.

Legyen b a szárny képzetes tengelye és c_0 az ennek megfelelő feltételes sebessége; tegyük fel, hogy a szárny egyszer $c_, > c_0$ másszor megint $c_{,,} < c_0$ sebességet nyer, s hogy ezen $c_, > c_0 > c_{,,}$ sebességek mellett $P_, P_0 P_{,,}$ erőket fejleszti, melyekről már tudjuk, hogy $P_, < P_0 < P_{,,}$; legyen végre $Q_, Q_0 Q_{,,}$ más valamely pl. csigalépcsőzeti szárnynak $c_, > c_0 > c_{,,}$ sebességek mellett fejlesztett ereje:

Akkor hánylatunk szerint

$P_0 > Q_0$; hogy azon kivül

$P_{,,}$ is $> Q_{,,}$ a viszonylagos sebességek görbéinél fogva sejdithető, s hogy

$P_, >$ vagy $< Q_,$ általjában véve bizonytalan ugyan, de nem jő már kérdésbe, miután a hánylat czélja el van érve, mihelyt $P_0 > Q_0$ feltétel beteljesül. Tekintve pedig azt, hogy minden c-nek bizonyos b megfelel, világos, hogy minden más alkatu s bizonyos sebességgel haladó szárnyhoz egy nálánál erősebb mentelékes szárny szerkeszthető.

Ha most valamennyi mentelékes szárnyat egymással összehasonlitjuk, ezek képzetes tengelyük különböző lévén, csak ugy hasonlithatók össze, ha mindnyájan, egyaránt a legkedvezőtlenebb körülménybe helyezve, egymással összeegyeztetnek. A legkedvezőtlenebb eset áll be mindnyájukra nézve ha futásukban rögtön feltartatnak, azaz ha $c = 0$; mely körülményben a szárnynyomás képlete:

$$P = \xi\gamma\omega^2 \int r\varphi\, dr \left(r \operatorname{tg}\alpha - \frac{c}{\omega}\right)^2 \operatorname{Cos}^2\alpha \text{ ezen alakot:}$$

$$= \xi\gamma\omega^2 \int r\varphi\, dr \left(r \sin\alpha\right)^2 \text{. veszi fel.}$$

Magától értetődik most, hogy az összehasonlitandó szárnyak mind sugárra, mind külső vázvonalukra nézve egyenlők, s csak egyéb alkatukra azaz *b*-re nézve különbözők. Az r és φ, mely kettő mindig ugyanazon számsort futja át, nincs tehát az eredményre befolyással, mely egyedül *b* értéktől függ; P nyomás megváltozása függ tehát csak *b* érték megváltozásától s tehetni:

$P = F(b)$, melynek érték változása ha *b*, $(b+h)$-ba átmegy, Taylor szerint ezen:

$$P_1 = F\left(b+h\right) = P + h\left[\left(\frac{dP}{db}\right) + \left(\frac{d^2P}{db^2}\right)\frac{h}{2} + \left(\frac{d^3P}{db^3}\right)\frac{h^2}{2.3} + \right]$$

egyenlet jobb kéz felőli második tagjától, illetőleg $\frac{dP}{db}$ előjelétől függ. Ha t. i. $\frac{dP}{db}$ igenleges, a zárjel közti sor, kellő kis *h* mellett, szintén igenleges, tehát $P_1 > P$; ha pedig $\frac{dP}{db}$ nemleges, a zárjel közti sor is, kellő kis *h* mellett, szintén nemleges, tehát $P_1 < P$ lészen:

De:

$$\frac{dP}{db} = \frac{d\left(\xi\gamma\omega^2\int r\varphi dr\left(r\sin\alpha\right)^2\right)}{db}$$

$$= \xi\varphi\omega^2\int {}^3r\varphi dr \,.\, \frac{d(\sin^2\alpha)}{db}\,.$$ és minthogy:

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2a}} \text{ vagy } = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$ ha $tg\alpha$ röviden v-ve jelöltetik:

$$\frac{d(\sin^2\alpha)}{db} = \frac{v\left(\frac{dv}{db}\right)}{(1+v^2)^2}; \text{ de } v = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(\sqrt{b^2+r^2} - b\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{r}\left(u - b\right) \text{ és } \frac{dv}{db} = \frac{\sqrt{2}}{r}\left(\frac{du}{db} - 1\right) \text{ és } \frac{du}{db} = \frac{b}{u} \text{ tehát } \frac{dv}{db} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{r}\left(\frac{b}{u} - 1\right)$$ s végre:

$$\frac{d\,sin^2\alpha}{db} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{r}\left(u - b\right)\frac{\sqrt{2}}{r}\left(\frac{b}{u} - 1\right)}{(1 + v^2)^2}.$$

A jobb kéz felőli nevező minden esetre igenleges, a számlálóra nézve pedig, $b < \sqrt{b^2 + r^2}$ azaz $b < u$, tehát $u - b > o$ és $\frac{b}{u} < 1$ lévén, világos, hogy $u - b$ tényezője mindig igenleges, $\frac{b}{u} - 1$ tényező pedig mindig nemleges, s minthogy a még ott lévő tényezők szintén igenlegesek, következik, hogy maga $\frac{d\,\sin^2\alpha}{db}$ nemleges; ez pedig nemleges lévén, világos, hogy

$\frac{dP}{db}$ is nemleges előjelü. A miből következik, hogy $P_{,} < P$. Ha most $c_0 < c_{,} < c_{,,} < c_{,,,} < \ldots$ feltételes sebességek ugy választatnak, hogy a nekik megfelelő b_0 $b_{,}$ $b_{,,}$ $b_{,,,}$ elegendő kis h-val különböznek s az ezeknek megfelelő értékek: P_0 $P_{,}$ $P_{,,}$ $P_{,,,}$.... jelöltetnek, a bebizonyitás szerint miután $b_{,} = b_0 + h$ lészen $P_0 > P_{,}$; miután $b_{,,} = b_{,} + h$, lészen $P_{,} > P_{,,}$; s miután $b_{,,,} = b_{,,} + h$ lészen $P_{,,} > P_{,,,}$ stb. azaz: $P_0 > P_{,} > P_{,,} > P_{,,,} > \ldots$ szóval azon szárnylap, melynek képzetes tengelye a legkisebb, a legnagyobb erőt fejleszti. Minthogy pedig a mentelékes szárnyak azon combinatiója a legelőnyösebb, mely legkedvezőtlenebb esetben a legnagyobb erővel bir, a b iránti kérdés el lesz döntve, ha értékei közül a legkisebbiket választjuk. De b vonalhossz, s legkisebb absolut értéke a semmi; látjuk tehát hogy b, ha a végső határokra megyünk, $= o$. És minthogy a szárnylap nyomása, melyet $c = o$ sebesség alatt fejleszt, a lap absolut nyomása, látjuk, hogy azon mentelékes szárnylap, melynek képzetes tengelye $b = o$, valamennyi más szárny közül az absolut, legnagyobb absolut nyomással bir.

15.

Az elébb kitalált érték a felállitott elmélet forduló pontja. Ha t. i. b-nek elébb talált határértékét a lefejtett képletekbe vezetjük, akkor a (9) egyenlet

$$(32) \begin{cases} tg\,\alpha = +\sqrt{2} \text{ és a (10) egyenlet helyébe:} \\ z = r\varphi\sqrt{2} \text{ nyerjük.} \end{cases}$$

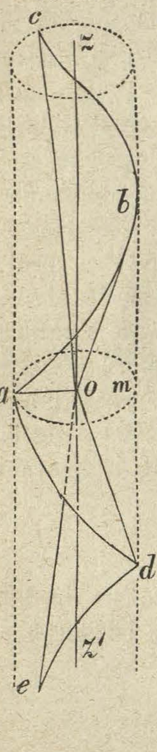
Az első egyenlet azt mondja, hogy az absolut legnagyobb nyomásu szárny minden eleme a forgási irányhoz $54^0\, 44'\, 8{\cdot}3''$-nyi szög alatt hajlik.

A második egyenlet pedig magát a fölület egyenletét adja, mely tehát a (10) alattitól egészen elüt.

Ha a fölületek forgási tengelyén keresztül fektetett sikokkal vágjuk, a fölületéből az eredő görbe egyenletét nyerjük, ha φ — t benne állandónak tekintjük, s lesz:

$z = rm$ egy a rendszer kezdőpontján keresztül menő egyenes egyenlete; a sikok vágják tehát a fölületet egyenes vonalokban, melyek mind az összrendezői rendszer kezdőpontján mennek keresztül. Ilyen fölület kúpfölület, látjuk tehát, hogy az absolut legnagyobb nyomásu viziszárny kúpfölület.

16. ábra.



Ha pedig a fölület körhengerek fölületeivel vágódik, egyenletében az r állandó, s lesz: $z = n\varphi$, mi megint a közönséges csavarvonal egyenlete. A fölület tehát csavarfölület is, mi okból az absolut legnagyobb nyomásu szárnyat kúpcsavarnak nevezhetjük.

A csavarvágások emelkedési szögei nyeretnek ha $\frac{z}{r\varphi}$ érték a fölület egyenletéből kikerestetik s $tg\alpha$-val egyenlittetik. Lesz tehát:

$\frac{z}{r\varphi} = tg\,\alpha = \pm\sqrt{2}$, mely egyenletből ismét azt látjuk, hogy a csavarvonalak minden kivétel nélkül mindnyájan $55^0, 44', 8{\cdot}3''$-nyi szög alatt emelkednek.

A fölület keletkezése és előállitása a következő: legyen (16 ábr.) *acmd* egy körhenger *abc*, *ade* az $54^0\, 44'\, 8{\cdot}3''$ szög alatt emelkedő két ellenkezőleg tekeredő csavarvonal, akkor, ha *oa* egyenes, a két csavarvonal mentében fel és alá ugy toljuk, hogy a mellett folyvást *o* ponton megy keresztül, az eredő *aobco* és *adeo* fölület az elébb tárgyalt kúpcsavar képét adja.

A fölület mint kúpfölület lefejthető (développable) mint csavar fölület a tengelyt végtelen tekervényben futja körül, mi mellett a tekervények egyenes nemzői *zo* tengelyhez mindinkább közelednek, de a nélkül hogy azt valaha elérnék; $zz_{\prime}$ tengely tehát a fölület közelitője.

A mentelékes szárny fölületnek volt, mint emlékezhetünk rá, közelitő fölülete. A közelitő fölület a kúpcsavarfölületével igen szoros összekapcsolásban áll. Gondoljuk e végre a mentelékes fölület közelitő fölületét s vele köztengelyesen az elébb tárgyalt kúpcsavart szerkesztve, s vágjuk mind a két köztengelyes fölület ugyanazon tekervényét (pl. mind a kettőének első tekervényeit) egy sikkal, akkor a sík a közelitő fölületet is, a kúpcsavart is egy-egy egyenesben vágja. Az első a mentelekés fölület egyik mentelékeinek közelitője, melynek két főféltengelye b és $b\varphi\sqrt{2}$, ugy hogy az egyenes hajlása a valódi tengelyhez $tg\beta_{\prime} = \varphi\sqrt{2}$; a kúpcsavar egyenesére nézve pedig lészen, tekintettel a fölület egyenletére, $tg\beta_{\prime\prime} = \frac{z}{r} = \varphi\sqrt{2}$, a miből $\beta_{\prime} = \beta_{\prime\prime}$ s igy következetesen a két egyenes párhuzamossága következik. A mentelékes szárny közelitő fölületei és a szóban lévő kúpcsavar tehát azon nevezetes sajátsággal birnak, hogy felelkező egyenes nemzői egymással párhuzamosak. Minthogy pedig minden mentelékes szárny közelitő fölülete a szóban lévö kúpcsavarhoz ilyen viszonyban áll, magok a különböző mentelékes szárny közelitő fölületei is sajátságos viszonyban vannak egy más közt. Gondoljunk ugyanis egy kúpcsavart és két különböző mentelékes szárny közelitő fölületeit egy sikkal vágva, s legyen A, B, C az egymásután eredő három egyenes metszési vonal, akkor a mondottak szerint a kúpcsavar A nemzője // az egyik közelitő fölület B nemzőjével; de ugyanazon okból az A nemző a másik közelitő fölület C nemzőjével párhuzamos lesz, következésképen B is párhuzamos C-vel. Látjuk tehát, hogy a különbféle mentelékes fölületek közelitő fölületeinek felelkező egyenes nemzői egymással párhuzamosak.

Megemlitjük még, hogy a mentelékes fölületek közelitő fölületei ezen sajátságából magokra a főfölületekre nézve is egy különös sajátság származtatható le, mely abból áll, hogy a mentelékes fölületek felelkező mentelékes nemzői hasonló görbék, ugy hogy ha egy ilyen fölület ilynemü nemzői ismeretesek, ezekből — a hasonlóság elvéből kiindulva — akármilyen más mentelékes fölület mentelékes nemzői könnyen nyerhetők.

16.

Tudván azt, hogy az elébb tárgyalt kúpcsavar minden mentelékes szárnyat s annyival inkább más fölület szerint készült szárnyakat nyomásra nézve fölülmúl, nem lehet többé kétség, hogy a viziszárnylap, ha egyáltalában a végső határokig menni szándékozunk, csak a kúpcsavarfölület egyik kiszelvénye lehet.

Fentebb láttuk az eljárást, mely szerint a szárnylap meghatározandó, ugyanazt most a kúpcsavarfölületre kell alkalmaznunk.

Az esetben van:

$z = \pm r\varphi\sqrt{2};$

$tg\alpha = \pm\sqrt{2}$ tehát

$Cos = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ és

$sin\,\alpha = \perp\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; — a szárny nyomása pedig:

$$P = \xi\gamma w^2\int r\varphi dr\left(rtg\alpha - \frac{c}{w}\right)^2 Cos^2\alpha$$

$= \dfrac{2\xi\gamma w^2}{3}\displaystyle\int r\varphi dr\left(r - \frac{w\sqrt{2}}{c}\right)^2$. S ha a veszteségek minimumát felteszszük:

$$
(33)\left\{\begin{aligned}
&\varphi=\frac{C}{r\left(r-\frac{c}{w\sqrt{2}}\right)^2}\\
&C=\varphi_0\, r_0\left(r_0-\frac{w\sqrt{2}}{c}\right)^2 \text{ és}\\
&P=\frac{2\xi\gamma w^2}{3}\cdot Cr, \text{ a forgási nyomaték pedig}\\
&\mathfrak{M}=\frac{2\,\xi\gamma w^2}{3}\int r\varphi dr\left(rtg\alpha-\frac{w\sqrt{2}}{c}\right).\ tg\alpha=\\
&\frac{2\sqrt{2}\xi\gamma w^2}{3}C\int rdr=\frac{\xi\gamma w^2\sqrt{2}}{3}Cr^2.
\end{aligned}\right.
$$

Vagy ha a nyomaték minimumát felteszszük:

$$
(34)\left\{\begin{aligned}
&\varphi=\frac{2r^2\left(r-\frac{w\sqrt{2}}{c}\right)^2.}{C\sqrt{2}}\\
&C=\sqrt{2}\,.\,r_0^2\,\varphi_0\left(r_0-\frac{w\sqrt{2}}{c}\right)^2\\
&P=2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\xi\gamma w^2 C\int\frac{dr}{r}=2\sqrt{\frac{2}{3}}.\,\xi\gamma w^2 C.\log\text{nat}\left(\frac{r}{r.}\right)\\
&\mathfrak{M}=2\xi\gamma w^2 Cr.
\end{aligned}\right.
$$

17.

Az elébb tárgyalt fölület által a kúpfölületek egy különös nemére jöttünk, mely egyébiránt egy egész fölületcsaládnak csak egyik tagja. A kúpcsavar:

$z=\pm r\varphi\sqrt{2}$ egyenlete nyilvánvaló az általános:

$z=mr\varphi$ egyenletben foglaltatik, ha $m=\pm\sqrt{2}$. Az azon egyenlet által képviselt fölületek pedig tengelyükön keresztülfektetett sikok által egyenes vonalok szerint, köztengelyes körhengerek fölűletei által pedig csavarvonalok szerint vágódnak; és a csavarvonalvágás emelkedési szöge $tg\alpha=m$ egyenlet által határozódik meg. A fölületek tengelyei pedig azok közelitői e~yszersmind, melyhez a fölüıetek tekervényről tekervényre mindinkább közelednek a nélkül, hogy azt valaha elérhetnék.

Ha ilyen fölületből szárnylapot szelünk, lesz:

$\operatorname{tg}\alpha = m$

$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ és

$\sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$; továbbá, ha $\frac{c}{mw}$ = a tétetik:

$P = \frac{m^2\xi\gamma w^2}{1+m^2}\int rdr\left(r - a\right)^2 . \varphi$, mely képlet a kúpcsavar erejének általános kifejezése. Legkevesebbet veszít e szárny, ha:

(35) $\varphi r^3 = C$, s ez a kiszelvény vázvonalát adja, mely esetben $P = \frac{m^2\xi\gamma w^2}{1+m^2}\varphi_0 r_0^3 \cdot r$ a lap nyomása.

A $z = r\varphi m$ egyenlet pedig, melyben $z = r\varphi\sqrt{2}$ egyenlet foglaltatott, különös specialitása ezen egyenletnek:

(36) $z^2 - 2Am\varphi z - m^2r^2\varphi^2 = o$, melybe ismét a mentelékes fölület: $z^2 - 2b\varphi z\sqrt{2} - 2\varphi^2r^2 = o$ egyenlete foglaltatik.

Az általános egyenlet pedig, bármit is jelentsen az A és m, mindig mentelékes csavarfölület. Mentelékes a fölület azért, minthogy z szerinti feloldása:

$z = m\varphi\,(A \pm \sqrt{A^2 + r^2})$ egyenletre vezet, mely mint már alakjáról tudjuk, menteléknek egyenlete, melynek valódi féltengelye $= A\infty m$, és képzetes fő féltengelye $= A$. — Csavarfölület pedig ama fölület azért, minthogy:

$\frac{z}{z\varphi} = \frac{m}{r}\left(A \pm \sqrt{A^2 + r^2}\right)$ állandó r mellett változatlan érték marad. Ha tehát a fölület köztengelyes körhenger által vágódik, ugy hogy r az eredő görbe minden pontjára nézve változatlan marad; világos, hogy $\frac{z}{r\varphi}$ kitétel is a görbe minden pontjára nézve változatlan marad, a miből következik, hogy a görbe egyenlőhajlásu elemeken elhuzódván, maga is minden pontjában egyenlő hajlásu vagy emelkedésü görbe, mely tehát mint egyszersmind közhengerben lévő görbe csak közönséges csavarvonal.

Az ezen egyenlet:

$z^2 - 2Amz\varphi - m^2r^2\varphi^2 = o$ által kifejezett fölületeknek van közelitő fölületök is, mert ha a fölület mentelékes nemzőit veszszük, közülök mindeniknek két közelitő egyenes felel meg, mely közelitő egyenesek egy új, a főfölületet kisérö fölület egyenes nemzőinek tekintendők, melyek összesen véve a főfölület közelitő fölületére vezetnek.

A közelitő fölület egyenlete pedig ez:

$z = m\varphi(r \pm A)$, mely szintén csavarfölület, s:

$z = mr\varphi$ kúpfölülettel szoros kapcsolatban van. Ha t. i. a két fölület felelkező egyenes vonalu nemzőit vizsgáljuk, azt találjuk, hogy párhuzamosak. A közelitő fölület nemzői t. i. a főfölület mentelékes nemzőinek közelitőit képezvén, hajlásuk a tengelyhez $tg\beta_{,} = m\varphi$ egyenlet által adatnak. A kúpfölület egyenes nemzőinek hajlása pedig $tg\beta_{,,} = \frac{z}{r} = m\varphi$ által adatnak, miből azonnal $tg\beta_{,} = tg\beta_{,,}$ és $\beta_{,} = \beta_{,,}$ tehát az egyenesek párhuzamossága következik. Minthogy pedig minden ilyen közelitő fölület a kúpfölülethez ilyen viszonyban áll, következik, hogy magok a közelitő fölületek egyf máshoz is ugyanazon viszonyban állanak. Mert legyen egy kup és két ilyen közelitő fölület adva, vágjuk mind a hármat ugyanazon sik által, s legyen P, Q, R a három egyenes nemző, akkor a mondottak szerint a kúp P nemzője // az egyik közelitő fölület Q nemzőjével s szintugy P // a másik közelitő fölület R nemzőjéhez: világos tehát, hogy Q is // R.

A főfölület, valamint közelitő fölületei is két külön fölületrészből állanak, melyek közül az egyik az alapsikon fölül, a másik azon alul van. A közelitő fölület egyik, de csakis az egy körhengeres metszése körvonal, melynek sugara $r = A$. Egy szóval, az ezen általános egyenletek által kifejezett fölületek ugyanazon mértani sajátsággal birnak, melylyel a legjobb hatásu viziszárny bir. S az általános egyenlet emezébe megy által, mihelyt $m = \sqrt{2}$ és $A = b$ tétetik.

Ha ezen általános fölületből szárnylapot szelünk ki, a víz nyomása:

$$P = \xi\gamma w^2 \int r^3\varphi dr \frac{\left(m\sqrt{A^2+r^2} - mA - \frac{c}{w}\right)^2}{r^2 + m^2(\sqrt{A^2+r^2} - A)^2} \text{ ; mely}$$

képlet ugyanazon módon bontatik fel, melyen a legjobb hatásu fölület képletét felbontottuk. Ezen P nagyobbodik, ha A kisebbedik, s lesz legnagyobb, ha $A = o$, mely esetben a képlet ebbe:

$$P = \xi\gamma w^2 . \frac{m^2}{1+m^2} \int r\varphi dr\,(r-a)^2 \text{ megy által, ha ugyan}$$

$A + \frac{c}{mw} = a$; mely képlet a fenntebb találttal összeesik. Ha végre a legkisebb veszteségre számitunk, lesz az általános fölületre nézve:

$$(38) \begin{cases} C = \dfrac{r^3\varphi\left(m\sqrt{A^2+r^2} - mA - \frac{c}{w}\right)^2}{r^2+m^2(\sqrt{A^2+r^2}-A)^2} \text{ a lap vázvonala és} \\ P = \xi\gamma w^2\, Cr \text{ a lap nyomása.} \end{cases}$$

S ezek aztán a víziszárny általános képletei, melyek a fentebb lehozottakat magukban foglalják. Ha azokban $A = o$

$$(39) \begin{cases} C = \dfrac{m^2 r^3 \varphi}{1+m^2} \text{ és} \\ P = \xi\gamma w^2\, Cr \text{ következik, s ezek az általános kúp-} \end{cases}$$

fölületből készült szelvény képletei, melyek ha $m = \sqrt{2}$, az absolut legnagyobb nyomásu szelvény képleteibe mennek által.

18.

Ugyanazon számitás, melyet előbb a mentelékes s vele rokon kúpszárnyra nézve véghez vittünk, bármily más fölűletre alkalmazható. S minthogy ez eddig a közönségesen használt csigalépcsőzeti fölületre nézve még senkitől meg nem kisértetett, legyen szabad a számitást ezen fölületre alkalmazni.

A csavarvágás emelkedését:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r}$ egyenlet szabja meg.

$$P \text{ tehát} = \omega^2 \xi \gamma \int r\varphi dr \left(rtg\alpha - \frac{c}{w}\right)^2 Cos^2\alpha$$

$$= 4\pi^2\xi\gamma\omega^2 \int \frac{r^3\varphi dr \left(\frac{h}{2\pi} - \frac{c}{w}\right)^2}{4\pi^2 r^2 + h^2}$$; rövidség kedvéért legyen:

$\frac{h}{2\pi} - \frac{c}{w} = a$, ugy hogy:

$P = 4\pi^2 \pi^2 \xi \gamma w^2 \int \frac{r^3 \varphi}{4\pi^2 r^2 + h^2}$. Hogy a lap vesztesége a legkisebb legyen, φ függvény ugy választandó, hogy

$\frac{dP}{d\varphi} = o$ azaz:

$$\frac{d\int \frac{r^3 \varphi \, dr}{4\pi^2 r^2 + h^2}}{d\varphi} = o;$$ a külzelést végrehajtván, kapunk tehát:

$$\int \frac{d\left(\frac{r^3}{4\pi^2 r^2 + h^2} \cdot \varphi\right)}{d\varphi} dr = \int \left(\frac{r^3}{h^2 + 4\pi^2 r^2} + \right.$$

$$\left. + \varphi \left(\frac{(h^2 + 4\pi^2 r^2) 3r^2 - 8\pi^2 r^4}{(h^2 + 4\pi^2 r^2)^2}\right) \frac{dr}{d\varphi}\right) dr = o,$$ mely követelés csak ugy elégithető ki, ha:

$$\frac{r^3}{h^2 + 4\pi^2 r^2} + \varphi \left[\frac{3r^2 (h^2 + 4\pi^2 r^2) - 8\pi^2 r^4}{(h^2 + 4\pi^2 r^2)^2}\right] \frac{dr}{d\varphi} = o,$$

vagy ha $\frac{r^2}{h^2 + 4\pi r^2}$ által röviditünk:

$$r + \varphi \left[\frac{3(h^2 + 4\pi^2 r^2) - 8\pi^2 r^2}{h^2 + 4\pi^2 r^2}\right] \frac{dr}{d\varphi} = c,$$ s ha a nevezőt eltávolitjuk:

$$h^2 r + 4\pi^2 r^3 + \varphi \left[3(h^2 + 4\pi^2 r^2) - 8\pi^2 r^2\right] \frac{dr}{d\varphi} = o,$$ tehát még:

$$\varphi \left[3(h^2 + 4\pi r^2) - 8\pi^2 r^2\right] \frac{dr}{d\varphi} = - r \left(h^0 + 4\pi^2 r^2\right)$$ s ha az egyenlet felfordittatik:

$$\frac{1}{\varphi \left[3(h^2 + 4\pi^2 r^2) - 8\pi^2 r^2\right]} \cdot \frac{d\varphi}{dr} = - r \frac{1}{r(h^2 + 4\pi^2 r^2)}$$ s a két változót egymástól elkülönitve:

4*

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{3(h^2+4\pi r^2)-8\pi^2 r^2}{r(h^2+4\pi^2 r^2)}dr, \text{ azaz:}$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{3dr}{r} + \frac{8\pi^2 rdr}{h^2+4\pi^2 r^2} \text{ s ha egészelünk:}$$

$$log\,nat\frac{\varphi}{\varphi_0} = 3\,log\,nat\frac{r_0}{r} + log\,nat\left(\frac{h^2+4\pi^2 r^2}{h^2+4\pi^2 r_0^2}\right) \text{ avagy}$$

végre

$$\varphi = \varphi_0 \frac{r_0^{\,3}}{h^2+4\pi^2 r_0^2} \cdot \frac{h^2+4\pi^2 r^2}{r^3}.$$ S ez a legkisebb erőveszteséggel müködő csigalépcsőzeti lap vázvonalának egyenlete, mely még ily alakra hozható:

$$(40)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\varphi r^3}{h^2+4\pi^2 r^2} = \dfrac{\varphi_0 r_0^3}{h^2+4\pi^2 r_0^2} = C; \text{ minek folytán végre:}\\ P = 4\xi\gamma\omega^2\pi^2 a^2. Cr \text{ következik.}\end{array}\right.$$

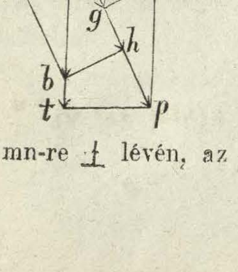
III. A szélszárny.

19.

Emlitettük már, hogy csavarok ellenálló közegben kétfélekép használhatók. Az egyik esetet előbb tárgyalván a másodikra megyünk át.

A szélszárny oly készülék, mely az egyenes irányban haladó közegnek szabadon kitéve, eleven erejét magába fölveszi s forgási mozgásba átalakitja.

17. ábra.



Mielőtt az egész szárnyról szólhatnánk, az egyes szárnyelem viszonyait kell tisztába hoznunk.

Legyen tehát (17. ábra) *mn* az *aok* $= \alpha$ szög alatt hajló, $oa = v$ sebességgel forgó elem s $ob = c$ a közeg sebessége. A két sebesség okag, ofbh derékszögények folytán ok, of, oh, og, összetevőkre szakad, melyek közül a két érintőleges ok, of hatás nélkül maradván, tekintetbe nem veendő, a másik kettő mn-re $\perp$ lévén, az egyenszögények folytán, ezek:

$oh = ob \,.\, Cos\,\alpha = c\,Cos\,\alpha$ és

$og = = oa\,sin\,\alpha = v\,sin\,\alpha$. Minthogy a közeg az elsővel az elemre lök, ez pedig a másodikkal amaz elől kitér, világos, hogy a közeg csak:

$c\,Cos\,\alpha - v\,sin\,\alpha$ sebességgel talál az elemre; s hogy ha f az elem területe, γ a közeg sürüsége s ξ a terület és sebesség egységre vonatkozó ellenállása:

$f\,(c\,Cos\,\alpha - v\,sin\,\alpha)$ a közeg köbfogata;

$\gamma f\,(c\,Cos\,\alpha - v sin\,\alpha)$ annak tömege és

$\xi\gamma f\,(c\,Cos\,\alpha - v sin\,\alpha)^2$ az ellenállás. Legyen op = N ezen mn-re $\perp$ nyomás, akkor az oqpt derékszögény szerint oq = N sin α és ot = N Cos α összetevőre oszlik, melyek közül emez a szárnytengely szilárdsága folytán megsemmisül, amaz pedig az elem forgását meggyorsitja, mely oknál fogva kell, hogy az mentől nagyobb legyen.

Az előforduló mennyiségek közül ξ γ és c saját természetüknél fogva állandók; f állandónak tekinthető, mert fel lehet tenni, hogy az egész szárny egyenlő nagy elemekből áll; v minden elemre nézve más és más lehet ugyan, de mivel mn-ről más elemre mindaddig át nem mehetünk, mig a kérdés arra nézve eldöntve nincs, v is állandónak tekintendő. A mennyiségekből tehát csak az α maradt meg; minthogy pedig erről még semmi bizonyost nem tudunk, ugy kell intézkednünk, hogy az összetevő legnagyobbját elérje, a mi meglesz, ha:

$\xi\gamma f \,.\, \frac{d\,[(c\,Cos\,\alpha - v sin\,\alpha)\,sin\,\alpha]}{d\,\alpha} = o$, s ha az állandók elhagyása után, külzelünk s rendezünk:

$(cCos\alpha - vsin\alpha)\,(cCos^2\alpha - 3vsin\alpha\,Cos\alpha - 2csin^2\alpha) = o.$

Mely két tényező közül az első meg nem semmisülhetvén, miután különben maga op erő is megsemmisül, kell hogy a második elenyészszék, ugy hogy:

$cCos^2\alpha - 3vsin\alpha Cos\alpha - 2csin^2\alpha = o$, vagy, $(-2cCos^2\alpha)$ val osztván:

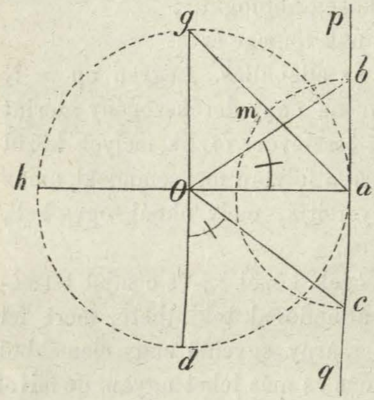
$tg^2\alpha + \frac{3v}{2c}\,tg\,\alpha - \frac{1}{2} = o$ s végre

$tg\alpha = -\frac{3v}{4c} \pm \sqrt{\left(\frac{3v}{4c}\right)^2 + \frac{1}{2}}$, vagy ha az elem forgási sugarát r-el, a szögi sebességet ω-val, v-t tehát $r\omega$-val jelöljük:

$$(41)\ \mathrm{tg}\alpha = -\frac{3\,r\omega}{4c} \pm \sqrt{\left(\frac{3\,r\omega}{4c}\right)^2 = \frac{1}{2}}$$

Az egyenlet azt mondja most, hogy az elem két különböző szög alatt hajolhat. Az egyik, ha tekintetbe veszszük,

18. ábra.



hogy r semmi és ∞ közé foglaltatik, $\mathrm{tg}\alpha = 0$ és $\mathrm{tg}\alpha = +\sqrt{2}$ azaz $\alpha = 0^0$ és $\alpha = 35^0 - 15' - 51{\cdot}7''$ közé foglaltatik, a második szögérték pedig $\mathrm{tg}\alpha = -\infty$ és $\mathrm{tg}\alpha = -\sqrt{2}$ tehát $\alpha = 270^0$ és $\alpha = 215^0 - 15' - 51{\cdot}7''$ határ közé esik.

A négy határérték könnyen szerkeszthető. Legyen (18. ábra) ah, qd két, a sugáregységgel leirt aghd körben huzott egymásra $\perp$ átmérő s ag a körnegyed húrja, pq az a ponton keresztül menő érintő; a körnegyed húrja am felével a-ból bc félkört, s ob, oc sugarakat huzván, lészen:

$$\mathrm{tg\,boa} = \mathrm{ba} = \mathrm{am} = \frac{1}{2}\mathrm{ag} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{tg}\,\alpha;\ \text{és}$$

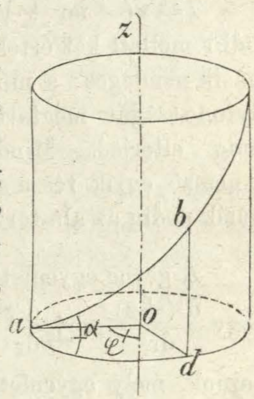
$$\mathrm{tg\,aoc} = -\mathrm{ac} = -\mathrm{am} = -\frac{1}{2}\mathrm{ag} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A (41) alatti képlet egyik α szöge tehát aob, a másik cod szögtérbe esik.

20.

Az egyes elem hajlásából nem nehéz most az egész fölület egyenletét kikapni. Az utolsó egyenletből látni, hogy α szög ugyanazon r mellett mindig változatlan marad. Azon elemek tehát, melyek egyenlő r forgási sugár alá esnek, egyenlő hajlásuak. Ilyen egyenlő sugár alá eső elemek azonban egy a fölülettel köztengelyes körhenger fölületében vannak. Ha tehát azt egy körhenger fölületével vágjuk, a metszési görbe mindazon elemeken keresztül megyen, melyek egyenlő sugár alá esnek s a mondottak szerint egyenlő hajlásuak. De ha az elemek, melyeken a görbe elvonul, egyenlő hajlásuak, akkor a görbe is egyenlő hajlásu. Egy egyenlő szög alatt emelkedő s körhenger fölületén fekvő görbe azonban csak közönséges csavarvonal lehet; a metszési görbe tehát csavarvonal. S látni, hogy a legjobb míveletü szélszárny szinte csavarfölület.

19. ábra.



Legyen *abc* (19. ábr.) az α szög emelkedő, *adc* körhenger fölületén lévő csavarvonal, akkor ha *b* pont *bd* rendezője z-vel, aod szög rendező φ-vel, s *ao* sugár r-el, *ad* köriv tehát $r\varphi$-vel jelöltetik, mértani elveknél fogva:

$\frac{z}{r\varphi} = tg\alpha$ lesz. Hogy most *abc* csavarvonal a szélszárny egyik nemzője legyen, kell, hogy $tg\alpha$ mostani értéke a (41) alattival összeessék, azaz kell hogy:

$$\frac{z}{r\varphi} = -\frac{3rw}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3rw}{4c}\right)^2 + \frac{1}{2}},$$ vagy ha $\frac{4c}{3w}$ állandót b-vel jelöljük:

$$\frac{z}{r\varphi} = -\frac{r}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}},$$ miből végre:

(42) $z^2 + 2\frac{z\varphi r^2}{b} - \frac{r^2\varphi^2}{2} = o$ következik. S ez aztán a szélszárny r, φ és z-re vonatkozó egyenlete, melyben

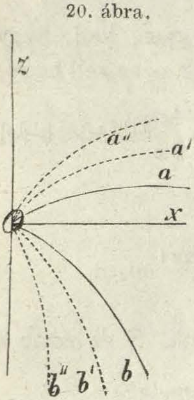
(43) $b = \frac{4c}{3w}$.

Hogy a fölület másnemü nemzőit is megtudhassuk, azt tengelyén keresztül menő sikok által vágjuk. A végre elég, ha φ-nek állandó értéket adunk; de az esetben, $\frac{\varphi}{b}$ és $\frac{\varphi^2}{2}$ állandókat m és n-el jelölvén, a fölület egyenlete:

$z^2 + 2mzr^2 - nr^2 = o$ alakot veszi fel. A metszési görbe tehát harmad foku. S minthogy z és r mindig egyidejüleg elenyésznek, bármit jelentsen is az m és n, azaz a φ, a harmadfoku nemzők mind az összrendezői rendszer sarkpontján mennek keresztül. Az egyenletet z szerint feloldván, kapjuk:

$z = r(-mr \pm \sqrt{m^2r^2 + n})$; a z-nek tehát minden valódi r mellett két értéke jut, az egyik mindig igenleges, a másik nemleges; s minthogy az egyenlet $r = o$-től $r = \infty$-ig olytonosságát megtartja, a harmadfoku nemző is a végtelenig elterjed. Mindezeket összefoglalva, látjuk hogy a nemző egyik része az r, φ összrendezők alapsikján fölül, a másik pedig az alá terjeszkedik.

A görbe egyenletét kétszer külzelvén, tekintettel arra, hogy $\frac{d^2(\pm z)}{dr^2} = \pm \frac{d^2z}{dr^2}$; $\frac{d^2z}{dr^2} = -mz^2\left(\frac{r\sqrt{m^2r^2 + n} + mr}{r^4(m^2r^2 + n)}\right)$ kapjuk, mely egyenletben a jobb kéz felőli minus, akár (+) akár (—) a z, mindkét esetben megmaradván, azt látjuk, hogy a balkéz felőli hányados előjele, (+z) mellett a z-nek előjelével ellenkezik, (—z) mellett pedig avval egyezik, mely okból mondhatjuk, hogy a görbe az r tengelyen felül lévő része homoru, alsó része pedig domboru oldalát a metszékek tengelye felé forditja. A görbe alakja (20. ábra) szerint tehát csak *ao*, *bo* lehet, ha ugyan *zo* a z rendezők s *xo* az r rendezők tengelye.



20. ábra.

Ha a fölület tekervényein az elsőtől kezdve a végtelenig elhaladunk s az azokban fekvő harmadrendü nemzőket egymásután az elsőtől kezdve szemléljük, tapasztaljuk, hogy a felső *oa* *oa,* *oa,,* . . . ágak tekervényről tekervényre mindinkább emelkednek, mi mellett xo-tól távozván, zo-hoz közelednek; — az alsó *bo*; b,o; b,,o . . . ágak mindinkább, xo-tól távozván, zo-hoz közeledvén, mélyebbre szállnak le.

Minthogy most a harmadrendü nemzők zo tengelyt csak egyedül o-ban vágják, s ennélfogva ezen pont a fölület valamennyi tekervényében megvan, e pont a fölület többszörös, helyesebben végtelenszeres pontja. Minthogy pedig a nemzők, tekervényről tekervényre *zo* tengelyhez közelednek, a nélkül, hogy azt valahol elérnék, a *zo* tengely a fölületnek közelitő egyenese. Magáról a fölületről csak azt emlitjük még, hogy két külön részből áll, melyek ellenkezőleg tekerednek s egy *zo* $\perp$ egyenes szerint összefüggnek, s melyek közül az egyik az alapsikon felül, a másik azon alul van.

A fölület hasonló eljárás szerint szerkeszthető, mely a viziszárnynál alkalmaztatott. Valamint t. i. ennél egy mentelékes nemzőjéből a többi kinyeretett, ugy amannál is a harmadrendü nemzők egyikéből a többi kinyerhető. Ha t. i. a fölület egyenletéből z kikerestetik: $z = r\varphi\left(-\frac{r}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}}\right)$ egyenletben r-nek azonegy értéke mellett φ helyébe léptenként haladva $\varphi, \varphi_{,,}, \varphi_{,,,}, \ldots$ tétetik:

$z_, : z_{,,} : z_{,,,} : \ldots = \varphi_, : \varphi_{,,} : \varphi_{,,,} : \ldots\ldots$, mely ha φ értékei a természetes számsort $1 : 2 : 3 : \ldots$ követik:

$z_, : z_{,,} : z_{,,,} : \ldots = 1 : 2 : 3 :$ aránylatra vezet, ugy hogy a z rendezők egyszerü közbevetés utján kinyerhetők. Elég tehát, ha egy ilyen nemzőt szerkesztünk.

Különös egyszerüséggel jár a szerkesztés azon nemzőre nézve, mely $\varphi = 1$ azaz $\varphi = 57^0 - 17' - 45{\cdot}6''$ szögrendezőre vonatkozik. Azon esetre a szerkesztendő egyenlet ez:

$z = r\left(-b \pm \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}}\right)$ vagy ha a külön szerkesztendő zárjelközti kitétel:

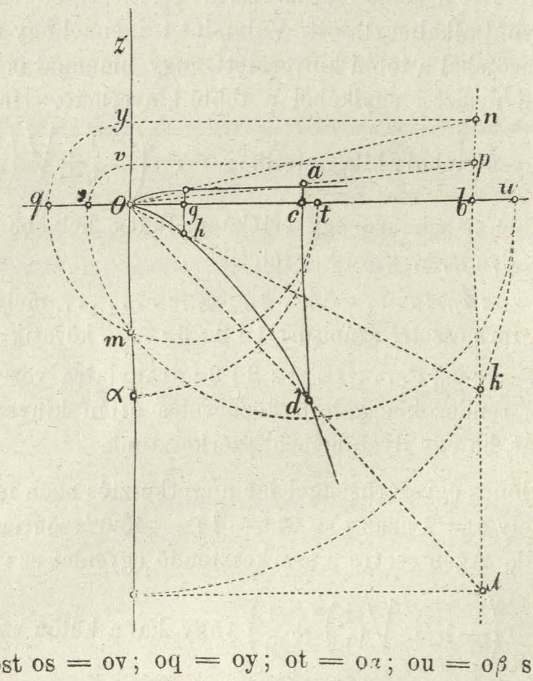
$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{r}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}};$$

$$z = r\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

A szerkesztés most így jár: $zz_,$ (21. ábra) a szárny tengelye; qu egy arra $\perp$ egyenes; ob = b; $nl \,/\!/\, zz_,$; $om = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Ha most og = r, és oc = r_2 lesz mg = $\sqrt{r_1^2+\frac{b^2}{2}}$; mc = $\sqrt{r_2^2+\frac{b^2}{2}}$; — g-ből mg sugárral, c-ből mc sugárral qmt és s mu félkörök huzatnak, oq = gq — go = $\sqrt{r_1^2+\frac{b^2}{2}}-r$, és os = cs — co = $\sqrt{r_2^2+\frac{b^2}{2}}-r_2$; másrészt ot = og + gt = $r_1+\sqrt{r_1^2+\frac{b^2}{2}}$ és ou = oc + cu = $r_2+\sqrt{r_2^2+\frac{b^2}{2}}$.

21. ábra.



Ha most os = ov; oq = oy; ot = $o\alpha$; ou = $o\beta$ s ha y, v α, β-ból yn // vp // ob // αk // βl huzatnak, ezek az ln egyenest n, p, k, l pontokban vágják, melyek által no, po, ko, lo egyenesek adatnak, s lészen tg pob $= \frac{pb}{ob} = \frac{\sqrt{r_2^2+\frac{b^2}{2}}-r_2}{b} =$

$\sqrt{\left(\frac{r_2}{b}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{r_2}{b} = \operatorname{tg}\alpha_2$ és

$$\text{tg bok} = \frac{-bk}{ob} = \frac{-\left(\sqrt{r_1^2 + \frac{b^2}{2}} + r_1\right)}{b} = -\sqrt{\frac{r_1^2}{b^2} +}$$

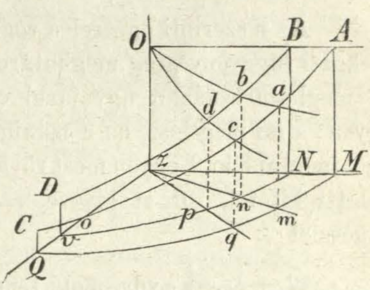
$-\frac{r_1}{b} = \text{tg}\,\alpha_1$; látjuk tehát hogy no, po, ko, lo egyenesek az α szögek nagyságait adják. Ha ezen egyenesek az $r_1 = og$; $r_2 = oc$ sugarak g, c végpontjain keresztűl huzott fh // ad // zz_1 által vágatnak, a felelkező f, a, h, d a kivánt ofa, ohd görbe ágakban fekszenek; mert $fg = og\,\text{tg}\alpha_1 = r_1\,\text{tg}\alpha_1 = z_1$; $cd = oc\text{tg}\alpha_2 = r_2\text{tg}\alpha_2 = z_2$ stb.

21.

Az egész szárnykészülék rendesen több egyenlő nagy szerkezetü szárnylapból állván, az egész hatást nyerjük, ha egy lap hatása a lapok számával szoroztatik. A szárnylap az egész szárnyfölület kiszelvénye lévén, a feladat csak az lehet, egy adott kiszelvény hatását meghatározni.

Legyen a végre (22. ábra) zo a szárny tengelye, MZQ egy arra különben tetszés szerinti sík; oz tengelyen keresztül OZM, ozm; OZn, OzQ sikokat fektetvén, ezek a szárnyat OA, Oa, Oc, OC görbékben, MZQ alapsikot zM, Zm, Zq, ZQ egyenesekben vágják; ZO-val köztengelyesen AMQC, BNPD körhengereket fektetvén, ezek a szárnyat AcC, BdD csavarvonalokban, az alapsikot pedig MqQ, NpP körivekben fogják vágni.

22. ábra.



Az előbbi két görbe a mostani csavarvágásokkal abcd területet fogja be, melynek az alapsikban mnpq terület felel meg, mely amannak vetülete az alapsikra. Feltévén, hogy qZm szög és Nm sugárnöveszték végtelen kicsiny, a két terület is végtelen kicsiny lesz, s ha amazok elsejét $d\varphi$-vel, másodikát dr-el, magát a sugarat r-el jelöljük, akkor mq körív $= rd\varphi$ és mnpq terület $= rdrd\varphi$; magát abdc elemet pedig df-el fogjuk jelölni.

A 19. §-ben mondottakból indulván ki, az abcd elem forgási ereje:

$$d^2Q = \xi\gamma df\,(c\,\mathrm{Cos}\,\alpha - r\omega\sin\alpha)^2\sin\alpha \text{ vagy pedig}$$

$$= \xi\gamma df\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,(c\,\mathrm{Cos}\,\alpha - r\omega\sin\alpha)^2\,\mathrm{tg}\alpha$$

A képletben df. Cos α nem egyéb, mint abcd terület vetülete MZQ sikra, mely mint tudjuk = $rdrd\varphi$; lesz tehát:

$$d^2Q = \xi\gamma rdrd\varphi\,(c\,\mathrm{Cos}\,\alpha - r\omega\sin\alpha)^2\,\mathrm{tg}\alpha,$$ s ezen r emeltyük azon müködő erő nyomatéka:

$$d^2\mathfrak{M} = \xi\gamma r^2drd\varphi\,(c\,\mathrm{Cos}\,\alpha - r\omega\sin\alpha)^2\,\mathrm{tg}\alpha$$ vagy ha Cos α kiemeltetik,

$$d^2\mathfrak{M} = \xi\gamma r^2drd\varphi\left(c - r\omega\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2.\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$ s ha φ szerint egészelünk,

$$d\mathfrak{M} = \xi\gamma r^2\varphi dr\left(c - r\omega\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2.\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$ s végre ω-t kiemelvén:

$$d\mathfrak{M} = \xi\gamma\omega^2r^2\varphi dr\left(\frac{c}{\omega} - r\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2.\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \text{ miből:}$$

$$(44)\quad \mathfrak{M} = \xi\gamma\omega^2\int r^2\varphi dr\left(\frac{c}{\omega} - r\mathrm{tg}\,\alpha\right)^2.\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Az r szerinti egészelés végrehajtására kell hogy a φ és r közti függvényesség meghatároztassék. A mellett czélszerü a meghatározásban ugy járni el, hogy a szárny javára legyen; a mi meg lesz, ha a maximum és minimum követeléseiből indulunk ki. Legyen most rövidség kedvéért az egészlési jel alatti kitétel, φdr-et kivéve, = v, akkor a megvizsgálandó egészlet:

$$\mathfrak{M} = \xi\gamma\omega^2\int\varphi vdr,$$ mely tehát maxim. vagy min. lesz, ha

$$\frac{d\mathfrak{M}}{d\varphi} = o;$$ ámde:

$$\frac{d\mathfrak{M}}{d\varphi} = \xi\gamma\omega^2\int\frac{d\,(\varphi v)}{d\varphi}dr = o$$ mi csak ugy gondolható, ha

$$\frac{d(\varphi v)}{d\varphi} = v + \varphi\left(\frac{dv}{dr}\right).\frac{dr}{d\varphi} = o,$$ azaz, ha

$$\log\,\mathrm{nat}\,\varphi = \log\,\mathrm{nat}\,\frac{c}{v} \text{ miből:}$$

$$(45)\begin{cases}\varphi v = C \text{ és} \\ \mathfrak{M} = \xi\gamma\omega^2 C(r - r_0).\end{cases}$$

22.

Az előbbi képletekben előforduló mennyiségek közül csak egyedül b nincs még meghatározva. A számitás felteszi ugyan hogy:

$$b = \frac{4c}{3\omega} \text{ azaz hogy:}$$

$\frac{c}{\omega} = \frac{3b}{4}$; de tekintve azt, hogy a szárnykészülék által felveendő szögi sebesség ω nem annyira a készülék szerkezetétől, mint inkább azon tehertől függ, mely megmozgatandó, s hogy ez különböző esetekben különböző is lehet, természetes, hogy a szárnylap is, ritka eseteket kivéve, nem ezen feltételes, hanem más szögi sebességet veszen fel, mely a feltételesnél majd nagyobb, majd kisebb lehet. A kevésbbé kedvező eset az, ha a tényleges sebesség a feltételesnél kisebb s a legkedvezőtlenebb eset áll be, ha a szárnylap forgásában egészen megáll, azaz ha $\omega = o$.

A kérdés most az, mily feltételhez köttessék a b-nek, illetőleg a feltételes ω-nak meghatározása? Világos, hogy a kérdés csak ugy intézhető el, hogy a válasz a lap előnyére legyen; a fölött pedig csak a (44) alatti egészlet határozhat, mely, ha ω a kéttagu négyzetes szorzóba visszahelyeztetik s ha helyette c kiemeltetik, ezen alakot:

$$\mathfrak{M} = \xi\gamma c^2 \int r^2 \varphi dr \left(1 - r\frac{\omega}{c}\operatorname{tg}\alpha\right)^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \text{ veszi fel.}$$

Az ezen képletben található ω alatt most nem az α-ra visszaható feltételes, hanem a szárnylap által valóban felvett szögi sebességet kell értenünk, mely legkevésbbé kedvező esetben elenyészik. Ha tehát ama képletben ω elenyészik, lesz:

$$(46)\ \mathfrak{M} = \xi\gamma c^2 \int r^2 \varphi dr \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Tekintve azt, hogy a b $\operatorname{tg}\alpha$-ban rejlik, tehát hogy $\mathfrak{M}$, r,φ és b-nek függvénye; de miután az r és φ az előbbiekben már meg lett határozva, ezektől el is tekinthetni; mondhatjuk tehát, hogy $\mathfrak{M}$ csak b-nek függvénye. A kérdés tehát az: ha b megváltozik, mikép változik az $\mathfrak{M}$?

Ámde:

$\mathfrak{M} = F(b)$; ha tehát b, (b + h)-ba átmegy Taylor szerint:

$$\mathfrak{M}' = F(b+h) = \mathfrak{M} + h\left[\frac{d\mathfrak{M}}{db} + \frac{d^2\mathfrak{M}}{db^2}\cdot\frac{h}{1.2} + \cdot\right] \text{és}$$

$\mathfrak{M}' \gtrless \mathfrak{M}$ ha kellő kis h mellett:

$\frac{d\mathfrak{M}}{db} \gtrless o$. A kérdés eldöntése tehát csak az utóbbi hányados előjelétől függ.

De:

$$\frac{d\left[\psi\gamma c^2 \int r^2 \varphi dr \frac{tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}\right]}{db}$$ hányados előjele r és φ-től független lévén, csak egyedül attól függhet, vajjon:

$$\frac{d\left(\frac{tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)}{db} \gtrless o, \text{ avagy függ, ha } tg\,\alpha = v, \ \frac{d\left(\frac{v}{1+v^2}\right)}{db}$$

kitétel előjelétől.

Amde $\frac{d\left(\frac{v}{1+v^2}\right)}{db} = \frac{\left(1-v^2\right)\frac{dv}{db}}{(1+v^2)^2}$ előjele a jobboldalu tört számlálójától függ. A kérdés tehát az, vajjon:

$$\left(1-v^2\right)\frac{dv}{db} \gtrless o \text{ azaz } \left(1-tg^2\alpha\right)\frac{d\,tg\alpha}{db} \gtrless o.$$

Minthogy $tg\,\alpha = -\frac{r}{b} \pm \sqrt{\frac{r^2}{b^2}+\frac{1}{2}}$; $\frac{d\,tg\alpha}{db} = \frac{r}{b^2} \pm \frac{\frac{r}{b^3}}{\sqrt{\frac{r^2}{b^2}+\frac{1}{2}}}$ lesz tehát: $\left(1-tg^2\alpha\right)\frac{dtg\alpha}{db} = \frac{r}{2b^2}\left(1-4\frac{r}{b}\left(\frac{r}{b} \mp \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)\right)\left(1 \mp \frac{\frac{r}{b}}{\sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2+\frac{1}{2}}}\right) = \mp \frac{r}{2b^2\sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2+\frac{1}{2}}}$

$$\left[1-4\frac{r}{b}\left(\frac{r}{b} \mp \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)\right]\left(\frac{r}{b} \mp \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2+\frac{1}{2}}\right).$$

A szorzat egyes tényezőit vizsgálván, látjuk, hogy az utolsó, ha a felső jelt veszszük, nemleges, mely a legelől álló felső jellel igenleges lesz; ha pedig a szorzóban az alsó jelt veszszük, az igenleges, mely a legelől álló alsó jellel igenleges marad; az utolsó tényező tehát az elől álló kettős jellel egybefogva mindig igenleges, s a szorzat előjele még csak:

$$\frac{r}{2b^2\sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2+\frac{1}{2}}}\left[1-4\frac{r}{b}\left(\frac{r}{b}\mp\sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)\right] \text{kitétel}$$

előjelétől.

A zárjel előtti tört kétségkivül igenleges; visszamaradt tehát csak $1-4\frac{r}{b}\left(\frac{r}{b}\mp\sqrt{\frac{r^2}{b^2}+\frac{1}{2}}\right)$; mely kitétel, ha a felső jelt veszszük, mindig igenleges, a kérdés tehát végre csak:

$$1-4\frac{r}{b}\left(\frac{r}{b}+\sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2+\frac{1}{2}}\right) \text{kitételtől függ.}$$

Ez azonban, ha:

$\frac{r}{b}=\frac{1}{4}$, megsemmisül, minden $1/4$-nél kisebb r/b értéknél igenleges, minden 1/4-nél nagyobb r/b értéknél nemleges. Ha tehát a szóban volt szorzatról az eredeti kitételre visszamegyünk, látjuk:

hogy $d\left(\frac{tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}\right)$ ha mindenütt a felső jeleket veszszük feltétlenül, ha pedig az alsó jeleket veszszük, csak azon feltétel alatt igenleges, hogy $\frac{r}{b}<\frac{1}{4}$, azaz, hogy $b > 4r$; s hogy a hányados annál inkább igenleges, mennél nagyobb a b; s hogy ennélfogva:

$$F(b+h) > F(b).$$

Az eredmény tehát az, hogy $\mathfrak{M}$ nyomaték azon esetben, ha b, (b + h)-ba általmegy, folyvást nagyobbodik, ha b már is $> 4r$.

Legyen most $b_1 > 4r$ és $b_2 = b_1 + h$; $b_3 = b_2 + h$: . . . és $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ . . . az $\mathfrak{M}$ értéke ha $b = b_1, b_2, b_3 \ldots$, akkor a mondottak szerint:

$\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2$; $\mathfrak{M}_2 < \mathfrak{M}_3$;.... azaz $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_2 < \mathfrak{M}_3 < \ldots$ ennélfogva bizonyos, hogy $\mathfrak{M}$ folytonosan növekedő b-nél, folytonosan öregbedik, s legnagyobb akkor, ha b a legnagyobb. Ámde b vonalhossz legnagyobb, ha ∞ ; látni tehát, hogy a lap nyomatéka akkor legnagyobb, ha $b = \infty$. De ha $b = \infty$, akkor a fölület egyenletéből a középső tag kiesik, maga az egyenlet pedig:

(47) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} r\varphi$ alakot veszi fel, mely nyilvánvaló kúpcsavar, miután az egyenlet a kúpcsavar:

$z = A r\varphi$ általános egyenletében foglaltatik. A kupcsavar tehát mind a vizi-, mind a szélszárnyra nézve fontos jelentőségü; az elsőre nézve az absolut legnagyobb tengelynyomást fejleszti, ha csavarvágásai 54^0 — 44′ — 8·3″ szög alatt emelkednek; az utóbbira nézve az absolut legnagyobb forgási nyomatékkal bir, ha csavarvágásai 35^0 — 15′ — 51·7″ szög alatt hajlanak.

Végre a (44) alatti képleteket e fölületre alkalmazva, lesz:

$$(48)\begin{cases} C = {}^1/_3 \sqrt{2} \,.\, C\ 4_o^2 \text{ és} \\ \mathfrak{M} = {}^1/_3 \xi\gamma c^2 \sqrt{2}\, \varphi_o r_o^2 (r - r_0). \end{cases}$$

IV. A gőzszárny.

23.

Az előbb tárgyalt két szárny még könnyen volt kinyerhető; vannak azonban esetek, melyekben a feloldás nagyobb nehézséggel jár. Példaként oly fölületet választunk mely eddig tényleg — legalább tudtunk szerint — nem használtatott, de melynek alkalmazhatósága elvileg kétségbe sem vonható; ez a *gőzcsavar*.

Gondoljunk ugyanis, hogy az eszmét röviden megértessük, egy kellő tágas körhenger alaku csövet a gőzkazán gőztartójával összekötve, magában a csőben pedig egy kellő szerkezetü szárnykészüléket alkalmazva; akkor a kazánban tüzelés utján gőzt fejlesztvén, ez a csövön keresztül szabadba készülvén, a szárnykészülékre hatni s azt forgásba fogja hozni. Ez a gőzcsavar eszméje.

Hogy a fölületet feltalálhassuk, mely szerint a szárnykészülék lapjai készitendők, előbb a gőz mozgását a csőben kell vizsgálnunk. Ha szárnyazat a csőben nincsen, a gőz túlfeszerejénél fogva a csőbe nyomulni s léptenkénty gorsuló sebességgel azon keresztül fog haladni. A gyorsulást azonban csak feszereje rovására nyeri el, mely annál inkább csökken, mennél inkább öregbedik amaz.

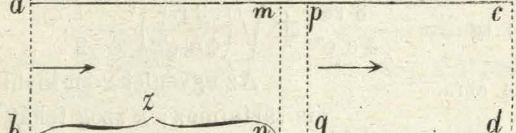
Hogy a kettő közti összefüggést megtudhassuk, legyen (23. ábra) *abcd* a cső, *ab* belső, *cd* külső nyilása s *mn*, *pq* két egymástól végtelen kis távolban lévő átmetszés. Legyen p_0 γ_0 c_0 az *ab*-nél belépő góznek feszereje, sürüsége és gyorsasága, hasonlókép p, γ és c az mn-nél elhaladó gőz feszereje, sürüsége és gyorsasága; elvégre legyen f a cső átmetszése. Feltévén most, hogy a gőz ab és mn-ben tapasztalt sürüségét és feszerejét állandóan megtartja, akkor kell, hogy mind a két nyiláson egyenlő időben egyenlő gőzmennyiségek folyjanak, azaz kell, hogy:

$fc\gamma = f_0 c_0 \gamma_0$ azaz:

$c\gamma = c_0 \gamma_0$ vagy Mariotte törvényét alkalmazva:

(49) $cp = c_0 p_0$ legyen.

23. ábra.



A gőz most bizonyos feszerővel bir, ha *ab* nyiláson belép, s bizonyos feszerővel bir, ha mn átmetszésen halad el, nehogy pedig a két feszerő megváltozzék, kell hogy azok a közbenső rétegek feszerejével moztani egyensulyban legyenek. A mi csak ugy gondolható, ha a feszerő a cső hosszának függvénye, mely következőkép nyerhető.

Az *ab*-nél behatoló gőz képes volna ugyan mindjárt c sebességet felvenni; hogy azt nem teszi, annak okai csak az előtte ömlengő sutját elálló gőzrétegek, melyek tömegeikkel ugy szólván reá nehezednek. A gőz tehát annál sürübb, mennél több réteg nehezedik reá. Ha tehát mn átmetszésről a legközelebbi pq átmetszésre átmegyünk, a megsüritő nyomás az mnpq rétegben foglalt gőz tömegével kisebbül; az innen keletkező feszerő-csökkenés:

$-\, dp = \gamma dz$ vagy Mariott szerint:

$-\, dp = \frac{\gamma_0}{p_0} \cdot p dz$ s ha egészelünk és $\frac{\gamma_0}{p_0}$ állandót m-el jeleljük.

$\log nat \frac{p_0}{p} = mz$ tehát

$p = p_0{}^{mz}$, mely érték (49)-be áthelyezve, végre

(50) $c = c_0 e^{mz}$ adja, mi által a gőz sebessége kiadódik.

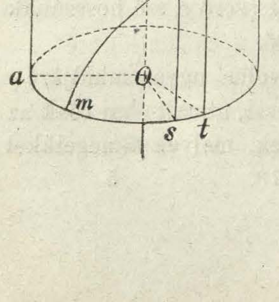
Ha, ezeket tudván, a csőben szárnykészüléket alkalmazunk, annak oly szerkezetünek kell lenni, hogy miatta a megsürüdés törvénye meg ne változzék. A gőz tehát a szárnyazat elemeire egyenlő sebesen nem talál; itt a c is változó.

Ha c állandó volna, azaz ha a gőz mindenütt egyenlő sebesen haladna, a gőzcsavar nem lehetne egyéb, mint csőbe rejtőzött szélszárny; amaz nem lévén, a szárny is a szélszárny fölületétől különbözni fog.

Mindazonáltal bizonyos, hogy a (41) alatti képlet a gőzcsavar elemeire nézve is érvényes, csakhogy az állandó c helyére (50)-ből veendő változó c teendő. Lesz tehát:

$$(51)\ tg\alpha = -\frac{3\, r\omega}{4\, c_0 e^{mz}} \pm \sqrt{\left(\frac{3\, r\omega}{4\, c_0 e^{mz}}\right)^2 + \frac{1}{2}}.$$

24. ábra.



Az egyenlet r-en kivül még z-t is tartalmaz; α szög tehát, még ha r állandó is, az azonkivül ott levő z miatt, változó. Mely körülmény azt mondja, hogy a fölület vele köztengelyes körhengerek által nem közönséges csavarvonalok, hanem másnemü görbék szerint vágódik; a fölület tehát nem csavarfölület, s egyenlete azon uton, melyen a vizi vagy szélszárnyét kinyertük, ki nem nyerhető.

Legyen (24. ábra) *mpn* egy *atb* körhenger fölületén lévő tetszés szerinti görbe, s pq egyik íveleme, ps, qt rendezőket, os, ot sugarakat, s pv // st huzván pqv végtelen kis △ keletkezik, melyben, qv = dz, $so' = d\varphi$, $os = r$ tehát st = pv = $rd\varphi$-vel tévén:

$tg\, qpv = tg\alpha = \frac{dz}{rd\varphi}$. S feltévén, hogy *mn* a gőzszárny egyik körhengermetszésü görbéje, akkor $tg\alpha$ mostani értéke az (51) alattiéval egybeesik, minek folytán:

$$(52)\ \frac{dz}{rd\varphi} = -\frac{3\,r\omega}{4\,c_0\,e^{mz}} \pm \sqrt{\left(\frac{3\,r\omega}{4\,c_0\,e^{mz}}\right)^2 + \frac{1}{2}},$$ s ha egészelünk:

$$\varphi = \frac{1}{2}\int\frac{dz.}{-\frac{3\,r\omega}{4\,c_0\,e^{mz}} \pm \sqrt{\left(\frac{3\,r\omega}{4\,c_0\,e^{mz}}\right)^2 + \frac{1}{2}}}.$$

A műtét egyszerüsitésére legyen: $\frac{3\,r\omega}{4\,b_0\,e^{mz}} = u$ tehát du = — mudz, miből:

$$\varphi = -\frac{1}{mr}\int\frac{du}{u\left(-u \pm \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}}\right)}$$ vagy a gyökjelt a nevezőből eltávolitván:

$$\varphi = +\frac{2}{mr}\int\frac{du}{u}\left(-u \mp \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}}\right)$$ s léptenként egészelvén:

$$(53)\ \varphi = -\frac{2}{mr}\left[\frac{3\,r\omega}{4\,c_0\,e^{mz}} \pm \sqrt{\left(\frac{3\,r\omega}{4\,c_0\,e^{mz}}\right)^2 + \frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.\log nat\left(\frac{\left(\sqrt{\left(\frac{3\,r\omega}{4\,c_0\,e^{mz}}\right)^2 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{\frac{3\,r\omega}{4\,c_0\,e^{mz}}}\right)\right]$$

S ez aztán a gőzcsavar fölületének egyenlete.

24.

Az akkép kitalált fölület szerkesztése végett

$$(54)\ \frac{4c_0}{3\,\omega} = b_0 \text{ és}$$

$$(55)\ b_0 e^{mz} = b \text{ tévén, először is}$$

$$(56)\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{r}{b} + \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}} \text{ azután}$$

$$(57)\ \varphi = -\frac{2}{mr}\left[\left(\frac{r}{b}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}} \pm \frac{\sqrt{1}}{2} \log.\text{nat} \left(\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{r}{b}\right)}\right)\right] \text{ vizsgálandó.}$$

Az utólsó és utólsó előtti egyenletben *b* az (55) egyenletből veendő, mely nem egyéb, mint a kitevőleges görbe egyenlete, mely tehát, minekelőtte ama kettő szerkesztetnék, szerkesztendő.

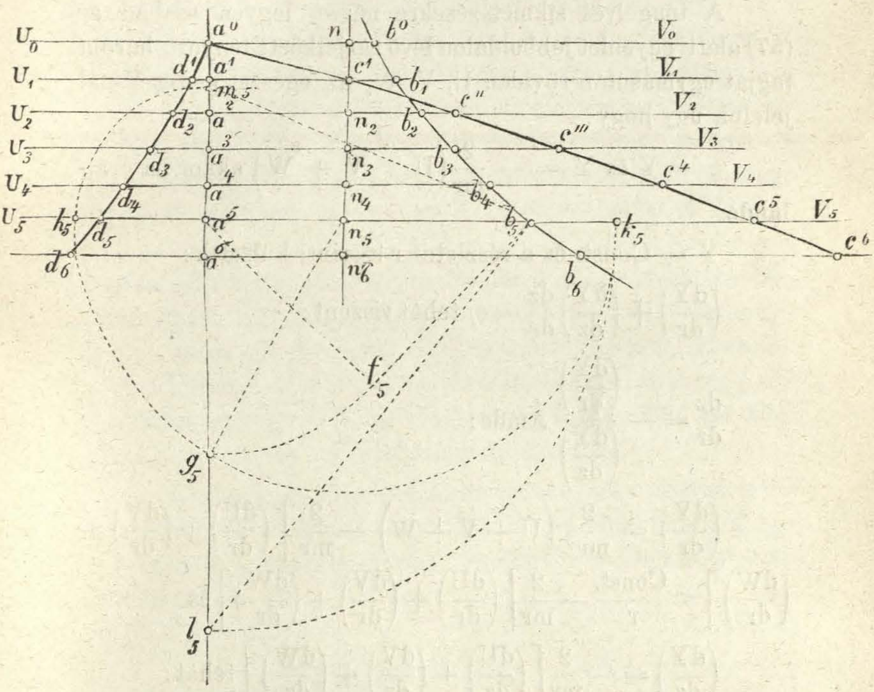
Az (56) alatti egyenlet szerkesztése a felület hengermetszésü nemzőit adja; az (57) alatti egyenlet ellenben, ha φ állandónak tekintetik, sik tengelyes metszésü; ha pedig z állandónak tekintetik, azon nemzőket adja, melyek nyeretnek, ha a fölület egy a tengelyre $\perp$ sik által végződik.

Gondoljuk most a szárnyfölületet, hogy hengermetszésü nemzői szerkesztését lássuk, egy körhenger fölületével, s ezt ismét több egymástól egyenlő távol a tengelyre $\perp$ sik által vágva. Akkor a két-két ilyen sík közé foglalt gőz sebességei (50) által, s az ezeknek megfelelő *b* (55) által adatnak.

A sikok a körhengert // körvonalokban vágják, melyek ha a körhenger fölülete lefejtetik, a fejleményben // egyeneseket adnak. Legyenek (25. ábra) $u_0\ v_0$, $u_1\ v_1$; $u_2\ v_2$; $u_3\ v_3$ $u_4\ v_4$; .... $u_6\ v_6$ az egyenesek, s $a_0\ a_6 \perp u_0\ v_0$ a körhenger; első egyenes nemzője, melytől φ szögrendező számitandó. Legyen $a_0\ n = a_6\ n_6 = r$ a lefejtett körhenger sugara, és $b_0\ b_6$ legyen azon görbe, mely az (55) a. egyenlet szerkesztéséből kikerül, ha a_0 a_6 a z rendezők tengelyének vétetik, és a_0 $b_0 = b_0$.

Az (56) alatti egyenlet a szerkesztendő görbe emelkedési szögeit, azaz $\frac{dz}{r d\varphi}$ hányadosokat adja, melyek segitségével a görbe következőkép szerkeszthető. Tegyük fel, hogy a szerkesztés u_0 v_0 rétegtől u_5 v_5 rétegig haladott s az (56) képlet felső jelére nézve a balkéz felőli a_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5, a felső

25. ábra.



jelre nézve pedig a jobbkéz felőli a_0 c_1 c_{11} . . . c_5 görbét adta volna; akkor a szerkesztés folytatására a_5 b_5 fölött a_5 f_5 b_5 egyenszáru derékszögü $\triangle$ szerkesztvén a_5-ből a_5 f_5 sugárral f_5 g_5 kör s g_5 n_5 huzatik, n_5-ből g_5 n_5 sugárral u_5 v_5 fölött h_5 g_5 k_5 félkört, a_5-ből h_5 a_5 sugárral m_5 h_5 és a_5 k_5 sugárral k_5 l_5 köriveket huzván, a nyert m_5, l_5 pontokat b_5-el kötjük össze. A b_5 m_5 g_5 szög $tg\alpha_5$ értékre vonatkozik, ha a felső jel, s b_5 l_5 a_5 szög $tg\alpha^5$ értékére, ha az alsó jel vétetik; ha tehát c_5-ből $c_5\ c_6 \,//\, m_5\ b_5$-höz és d_5-ből $d_5\ d_6 \,//\, b_5\ l_5$-höz huzatik, a nyert c_6 és d_6 pontok a két görbe folytatásaiban fekszenek. A szerkesztés folytatására figyelembe veendő, hogy $a_5\ b_5$ helyére $a_6\ b_6$, $u_5\ v_5$ helyére $d_6\ c_6$ egyenes lép; a_5 pontot a_6, b_5-öt b_6; n_5-öt n_6, d_5-öt d_6 és c_5-öt c_6 váltja fel. A többi müvelet ugyanaz marad. És az ilykép szerkesztett $a_6\ c_6$ és $a_0\ d_6$ görbék a hengermetszésü nemző alakja, ha azt sikban kiteregetjük, ha pedig a két görbét $a_0\ n = a_6\ n_6$ sugaru körhengerre feltekerjük, a két nemző valódi alakja nyeretik.

A tengelyes síkmetszésekre nézve, legyen szabad az (57) alatti egyenlet jobboldalon lévő zárjelközti tényező három tagját egymásután röviden U, V, W, az egészet pedig Y-nal jelelni, ugy hogy:

$$\varphi = Y \text{ és } Y = -\frac{2}{mr}\left(U + V + W\right) \text{ akkor ha } \varphi \text{ ál-}$$

landó:

$$Y = \text{Const. és a részletes r szerinti külzelék:}$$

$$\left(\frac{dY}{dr}\right) + \left(\frac{dY}{dz}\right)\frac{dz}{dr} = o, \text{ tehát viszont:}$$

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{\left(\frac{dY}{dr}\right)}{\left(\frac{dY}{dz}\right)} \text{ Ámde:}$$

$$\left(\frac{dY}{dr}\right) = \frac{2}{mr^2}\left(U + V + W\right) - \frac{2}{mr}\left[\left(\frac{dU}{dr}\right) + \left(\frac{dV}{dr}\right) + \left(\frac{dW}{dr}\right)\right] = \frac{\text{Const.}}{r} - \frac{2}{mr}\left[\left(\frac{dU}{dr}\right) + \left(\frac{dV}{dr}\right) + \left(\frac{dW}{dr}\right)\right] \text{ és}$$

$$\left(\frac{dY}{dz}\right) = -\frac{2}{mr}\left[\left(\frac{dU}{dz}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right) + \left(\frac{dW}{dz}\right)\right] \text{ tehát:}$$

$$\frac{dz}{dr} = +\frac{\frac{\text{Const.}}{r} - \frac{2}{mr}\left[\left(\frac{dU}{dr}\right) + \left(\frac{dV}{dr}\right) + \left(\frac{dW}{dr}\right)\right]}{+\frac{2}{mr}\left[\left(\frac{dU}{dz}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right) + \left(\frac{dW}{dz}\right)\right]} \text{ azaz:}$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{m.\ \text{Const.}}{\left[\left(\frac{dU}{dz}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right) + \left(\frac{dW}{dz}\right)\right]} - \frac{\left(\frac{dU}{dr}\right) + \left(\frac{dV}{dr}\right) + \left(\frac{dW}{dr}\right)}{\left(\frac{dU}{dz}\right) + \left(\frac{dV}{dz}\right) + \left(\frac{dW}{dz}\right)}$$

Tekintve azon körülményt, hogy e kitétel magában véve már is oly bonyolodott, hogy mértani szerkeszthetőséget tőle várni nem lehet, s tekintve azt, hogy a kitétel, ha $\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{db}\right)$ $\frac{db}{dz}$; $\frac{dV}{dz} = \left(\frac{dV}{db}\right) \cdot \frac{db}{dz}$ és $\frac{dW}{dz} = \left(\frac{dW}{db}\right)\frac{db}{dz}$ értékek helyettesittetnek, még annál complicáltabb lesz, könnyü átlátni, hogya fölület tengelyes metszései mértani szerkesztésre nem használhatók.

Hasonlókép van a dolog, ha z állandónak tekintetik. S igy látjuk, hogy a gőzszárny nemzői közül csak egy, s az is csak közelitő szerkesztés utján nyerhető meg. Szerencsénkre azonban az az egy is elég. Minthogy t. i. a gőzszárny nem egyéb, mint különböző *b* érték mellett szerkesztett szélszárnyelemek, vagy jobban mondva szalagok összefüzése, melyek közül a legeslegelső $b = b_0$ értékre vonatkozik, világos, hogy az egyes szalagok ugyanazon mértani természettel birnak, melylyel magok az illető fölületek birnak, azért a legelső szalag is a reá vonatkozó szélszárnyfölület természetével birni fog, s ennélfogva kell, hogy ezen első szalag legelől álló sik tengelyes metszése egy a tengelyre $\perp$ egyenest képezzen. Ha tehát több hengermetszésü nemzőt szerkesztettünk, ezek kezdő pontjai egy a tengelyre $\perp$ egyenes vonalba sorozandók, mi által a hengermetszések fekvései meghatároztatnak.

Minthogy minden hengermetszésre nézve két metszési görbét nyertünk, látni, hogy a gőzszárny fölülete is két, egy a tengelyre $\perp$ egyenes szerint összefüggő, de ellenkezőleg tekeredő részből áll.

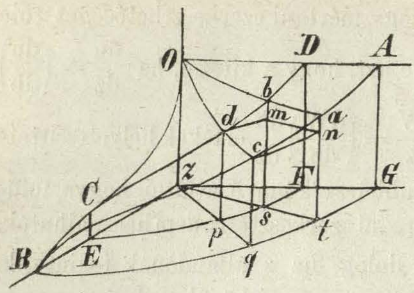
25.

A szárny erőfejlesztésére nézve kiindulási pontul:

$d^2Q = \xi\gamma\, df\, (c - r\omega\, tg\alpha)^2 \sin\alpha$ egyenlet szolgál. Az erő r emeltyükaron hatván, forgási nyomatéka:

$d^2\mathfrak{M} = \xi\gamma r df\, (c - r\omega\, tg\alpha)^2 \sin\alpha \, Cos^2\alpha.$

Legyen ezek után ZO (26. ábra) az AOB szárny tengelye, AcB, DdÇ két körhengeres nemzője, BZG egy OZ-re $\perp$ tetszés szerinti alapsik, mely a két körhengertől BG, EF körivekben vágódik; Oa, Oc végre két ozt, ozq tengelyes si-



26. ábra.

kokban fekvő tengelyes metszés; akkor a df területü *abcd* térelem szorzata acn szög keblével nem egyéb, mint amnb egyenszög, mely, ha an = dz mn = st = dr s acn $\sphericalangle = \alpha$.

$df\sin\alpha = dr \,.\, dz$, mely érték a fentebbire átvive:

$d^2\mathfrak{M} = \xi\gamma rdrdz\,(c - rwtg\alpha)^2 \operatorname{Cos}^2\alpha$, vagy ha $\operatorname{Cos}\alpha$, $tg\alpha$ által és c (50)-dik képlet által kitétetik:

$$d^2\mathfrak{M} = \xi\gamma rdrdz\,(c_0 e^{mz} - r\omega tg\alpha)^2 \frac{1}{1 + tg^2\alpha}$$

Tekintetbe veendő azonban, hogy γ nem állandó, lesz ugyan $\gamma = p \,.\, \frac{\gamma_0}{p_0} = mp$ avagy még: $\gamma = \gamma_0 \,.\, e^{-mz}$, minek folytán:

$$d^2\mathfrak{M} = \xi\gamma_0 rdrdz \frac{(c_0 e^{mz} - r\omega tg\alpha)^2}{e^{mz}(1 + tg^2\alpha)} \text{ és}$$

$$(58)\ \mathfrak{M} = \xi\gamma_0 \int rdrdz \frac{(c_0 e^{mz} - r\omega tg\alpha)^2}{e^{mz}(1 + tg^2\alpha)}$$

Az egészelés végrehajtásával az egészelési határok iránt kellvén intézkedni, figyelembe veendő, hogy ω szögsebesség a mozgásba hozandó teherhez megfelelőleg, hol nagyobb, hol kisebb, egy szóval határozatlan lehet. A kevésbbé kedvező eset az, ha ω kisebbedik, s a legkevésbbé kedvező áll be, ha a szárny forgásában megáll, azaz: ha $\omega = o$. Ez okbó a szárnyat ugy kell szerkesztenünk, hogy akkor a legnagyobb forgási nyomatékkal birjon. Azon esetre azonban, ha $\omega = o$, az elébbi egészlet:

$$(59)\ \mathfrak{M} = \xi\gamma_0 c_0^2 \iint \frac{e^{mz}.\, rdr\, dz}{1 + tg^2\alpha}$$

A szárnylapnak az egészelés végrehajtására szükséges vázvonala a nyomaték maxim. vagy min. tekintetbe vétele mellett választandó, mi okból kell hogy:

$$(60)\ \frac{d\mathfrak{M}}{dz} = \xi\gamma_0 c_0^2 \int\!\!\int \frac{d\left(\frac{re^{mz}}{1+tg^2\alpha}\right)}{dz} . dr . dz = o \text{ tehát:}$$

$$\frac{d\left(\frac{re^{mz}}{1+tg^2\alpha}\right)}{dz} = o \text{ vagy ha } \frac{e^{mz}}{1+tg^2\alpha} = v, \text{ hogy:}$$

$$d\frac{(rv)}{dz} = v\frac{dr}{dz} + r\left(\frac{dv}{dr}\right)\frac{dr}{dz} = r\left(\frac{dv}{dz}\right) = o \text{ legyen; miből:}$$

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{r\left(\frac{dv}{dz}\right)}{v + r\left(\frac{dv}{dr}\right)} \text{ vagy megforditva:}$$

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{v + r\left(\frac{dv}{dr}\right)}{r\left(\frac{dv}{dz}\right)} = -\frac{v}{r\left(\frac{dv}{dz}\right)} - \frac{\left(\frac{dv}{dr}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)}$$

$$\text{Ámde} \left(\frac{dv}{dr}\right) : \left(\frac{dv}{dz}\right) = \frac{dz}{dr} \text{ tehát lesz:}$$

$$2\frac{dz}{dr} = -\frac{v}{r\left(\frac{dv}{dz}\right)} \text{ s igy megforditva:}$$

$$\frac{1}{2} . \frac{dr}{dz} = -\frac{r\left(\frac{dv}{dz}\right)}{v}$$ s ha a két választót elválasztjuk egymástól:

$$\frac{1}{2} \log nat \frac{r}{r_0} = \log nat \frac{v_0}{v} \text{ miből}$$

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 \text{ vagyis}$$

$$(61)\ rV^2 = C \text{ miből}$$

$$rV = \frac{C}{V} \text{ tehát:}$$

$$(62)\ \mathfrak{M} = \xi\gamma_0 c_0^2 \int\!\!\int \frac{C}{V} drdz = \xi\gamma_0 c_0^2 C \int\!\!\int \frac{drdz\,(1+tg^2\alpha)}{e^{mz}}$$

Az utólsó egészletben $(1 + tg^2\alpha)$ tényező fordul elő, $tg\alpha$ tudvalevőleg $= -\frac{r}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}}$, és $b = b_0 e^{mz}$; látni tehát, hogy az egészlet végezetre b_0 értéktől függ, s hogy $\mathfrak{M}$ b_0-nek függvénye. Minthogy pedig ezen $b_0 = \frac{4c_0}{3\omega}$, ω határozatlansága folytán, tetszés szerint felvehető, értékét ugy választhatjuk, hogy az a szárny előnyére legyen.

A meghatározás legczélszerübb lesz, ha abból indulunk, hogy $\mathfrak{M} = F(b_0)$ mily változást szenved, ha b_0, $(b_0 + h)$-ba átmegyen, *h* alatt kellő kis értéket értvén:

Miután $\mathfrak{M} = F(b_0)$, Taylor sorát alkalmazva:

$$M' = F(b_0 + h) = \mathfrak{M} + h\left[\frac{d\mathfrak{M}}{db_0} + \frac{h}{2}\frac{d^2\mathfrak{M}}{db_0^2} + \dots\right]$$

világos, hogy:

$$\mathfrak{M}' \gtrless \mathfrak{M}, \text{ ha } \frac{d\mathfrak{M}}{db_0} \gtrless 0;$$ a kérdés eldöntése tehát $\frac{d\mathfrak{M}}{db_0}$ hányados előjelétől függ. A fentebbi egészletet tekintve, azonnal belátni, hogy a kérdéses előjel, z_0 nemleges nem lehetvén, csak:

$$\frac{d(1 + tg^2\alpha)}{db_0} \text{ kitételtől függ.}$$

Ámde: $\frac{d(1 + tg^2\alpha)}{db_0} = 2\,tg\alpha . \frac{d\,tg\alpha}{db_0}$ vagy mivel $tg\alpha = -\frac{r}{b_0 e^{mz}} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{b_0 e^{mz}}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ azaz ha $\frac{r}{b_0 e^{mz}} = u$ tehát $\frac{du}{db_0} = -\frac{r}{b_0^2 e^{mz}} = -\frac{u}{b_0}$. Ennélfogva:

$$(63)\quad \frac{d(1 + tg^2\alpha)}{db_0} = -\frac{2u}{b_0}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{2}}}\right)\left[\pm u - \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}}\right].\left[-u \pm \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}}\right]$$

A jobbkéz felőli szorzat első tényezője magában véve mindig igenleges, ugyszintén a második is, a harmadik akár felső, akár alsó jelét veszszük, mindig nemleges, a negyedik tényező végre, ha felső jele vétetik, igenleges, ha alsó jelét veszszük, nemleges, a jegyek egymásutánsága tehát ez:

$-(+).(+).(-).(\pm)$, a miből végre látni, hogy ama szorzat, ha felső jelei vétetnek, igenleges; ha ellenben alsó jeleit veszszük, nemleges. Ezt a fentebbire alkalmazván, látjuk hogy:

$\mathfrak{M}' > \mathfrak{M}$ ha mindenütt a felső jeleket veszszük, ellenben ha az alsó jelek vétetnek $\mathfrak{M}' < \mathfrak{M}$, azaz $\mathfrak{M}$, ha benne a felső jelek vétetnek, nagyobbodó b_0 érték mellett szintén nagyobbodik, ellenben kisebbedik, ha az alsó jelek vétetnek. $\mathfrak{M}$ tehát, felső jeleket értve, legnagyobb, ha b_0, legnagyobb, azaz ha $b_0 = \infty$; alsó jeleket értve pedig, legnagyobb ha b_0, legkisebb ha $b_0 = o$.

Hogy melyik felel meg a kettő közül a kivánt feladatnak, arról az (56) egyenlet világosit fel. Szerinte lesz, ha a felső jelt megtartjuk s $b_0 = \infty$ teszszük:

$\mathrm{tg}\alpha = +\sqrt{\frac{1}{2}}$, a mi megengedhető, ha pedig az alsó

jelt veszszük s $b_0 = o$ teszszük: $\mathrm{tg}\alpha = -\infty$, a mi nem használható, miután az elem az esetben // lenne a tengelyhez, az egész fölület pedig egy a szárny tengelyén keresztül menő sikot képezne, melyet a gőz, mely szintazon irányban folyamlik, forgásba nem hozhatna. Ennélfogva a kettő közül csak az első választható.

Ha azonban $\mathrm{tg}\alpha = +\sqrt{\frac{1}{2}}$, akkor (52) helyébe:

$\frac{dz}{rd\varphi} = +\sqrt{\frac{1}{2}}$ és (53) helyébe

$z = r\varphi\sqrt{\frac{1}{2}}$ nyerjük, mely egyenlet a már ismeretes kupcsavar egyenlete.

A fentebbi egészletre visszatérvén, tekintettel arra, hogy a mondottak szerint: $\mathrm{tg}\alpha = +\sqrt{\frac{1}{2}}$ és $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = {}^3/_2$, lesz:

$\mathfrak{M} = \frac{3\xi\gamma_0 c_0^2 C}{2}\int\int\frac{drdz}{e^{mz}}$ vagy ha egészelünk:

$\mathfrak{M} = -\frac{3\xi\gamma_0 c_0^2 C(r - r_0)}{2\,me^{mz}}$, minthogy

$C = \frac{4re^{2mz}}{9}$, lesz még:

$$\mathfrak{M} = -\frac{2\xi\gamma_0 c_0^2 re^{mz}}{3m}\left(r - r_0\right).$$ De $m = \frac{\gamma^0}{p_0}$ és $\frac{\gamma_0}{m} = p_0$,

miből ismét

$$\mathfrak{M} = -\frac{2\xi p_0 c_0^2 re^{mz}}{3}\left(r - r_0\right) = -\frac{2\xi}{3} . p_0 c_0 . c_0 e^{mz} . r$$

$\left(r - r_0\right)$; mely ha (49) és (50)-re visszatekintünk, még ily alakot vesz fel:

$$\mathfrak{M} = -\frac{2\xi}{3} pc^2 r\left(r - r_0\right)$$

Feltévén most, hogy r és r_0 a szárnynak külső és belső sugara, akkor $\pi (r^2 - r_0^2)$ azon átmetszés, melyen a gőz keresztül hat, s ha ezt c sebességgel és p feszerővel elhagyja, időegységenként $\pi (r^2 - r_0^2)$ cp gőzmennyiség használtatik fel, minek folytán ha $\pi (r^2 - r_0^2)\ c = Q$:

$$(64)\ \mathfrak{M} = -\frac{2\xi\, Qp\, cr}{3(r + r_0)}$$

V. A sarktengelyes fölületek.

26.

A ki az elébb tárgyalt eseteket figyelemmel kiséri, észreveheti, hogy az eljárás rendesen abból áll:

$\frac{z}{r\varphi}$ vagy $\frac{dz}{rd\varphi}$ kitételt más U kitétellel összeegyeztetni, U alatt r, φ és z valamely függvényét értvén. Igy ha U alatt a (4) a. egyenlet jobbkéz felőli részét értjük, a viziszárny egyenlete kerül ki; ha U alatt a (41) a. egyenlet jobbkéz felőli részét értjük, a szélszárny egyenletét nyerjük; s ha végre az (51) a. egyenletet választjuk, a gőzcsavar jő ki. Valahányszor tehát az eljárást követtük, a netalán előforduló külzelékek eltávolitása után végül egy r φ és z közt fennálló fölületet képviselő egyenletet nyertünk, mely vagy algebrai, vagy túlmenő volt.

Nem nehéz arról meggyőződni, hogy a tárgyalt esetek egy általános eljárás különleges esetei, melynek általános alakja ez:

$$(65)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{z}{r\varphi} = u \text{ vagy} \\ \dfrac{dz}{rd\varphi} = u\text{, u alatt r } \varphi \text{ és z-nek valamely kitételét} \end{array} \right.$$

értvén.

Az első egyenlet feloldása, a nevezők és gyökjelek eltávolitásán kivül, egyéb nevezetest nem mutat. Csak egyre nézve kell különböztetést tennünk, s az magát az U-t illeti. U-ra nézve t. i. négy eset gondolható.

Először u csupán r-nek függvénye, azaz $u = f(r)$ lehet. Az esetben:

$z = r\varphi f(r)$, mely a most tárgyalandó fölületek egy különös nemét adja.

Igy lesz $U = A$-ból; $Z = Ar\varphi$, mely tudvalevőleg a kúpcsavarfölületek általános egyenlete.

Igy lesz $U = (Ar + B)$-ből: $z = A\varphi r^2 + B\varphi r$; mely a hajtalékos csavarfölületek általános egyenlete. Különös megemlitésre méltó e fölületcsalád azon neme, mely kikerül, ha $B = o$, mely esetben $z = A\varphi r^2$ azon fölületet adja, melynek minden körhengeres metszése csavarvonal, síktengelyes metszései pedig hajtalékok, melyek tetőpontjai a tengely azonegy pontjába esnek, góczhúrjai nagyságai $\dfrac{1}{A\varphi}$ hányados által határoztatnak meg. A fölület jelen értekezésre nézve azért nevezetes, mivel a víziszárny fölületével a legközelebbi hasonlatosságban áll.

Igy továbbá $U = \dfrac{A}{r}$ egyenletből: $z = A\varphi$ következik, mely ismét a csigalépcsőzeti csavarfölület egyenlete, miről következőleg győződni meg: a körhengeres metszések emelkedése $\dfrac{z}{r\varphi} = \dfrac{A}{r}$ φ-re nézve állandó érték, a görbe tehát mint állandó szög alatt emelkedő, csak csavarvonal lehet; sik tengelyes metszéseire nézve pedig φ-t állandónak tekintvén, lészen $z = Const.$, mely egyenlet csak egy az alapsíkhoz // azaz a tengelyre $\perp$ egyenes egyenlete, mi tudvalevőleg a csigalépcsőzeti fölület sajátsága.

Igy lesz végre, hogy még egy példát mutassunk, $U = \frac{A}{r^2}$ egyenletből $zr = A\varphi$, mely ismét a mentelékes csavarfölület család egy új neme, mely a mentelékes víziszárnytól egészen különbözik. Mentelékes a fölület azért, mivel ha φ-nek az egyenletben állandó értéket adunk, azaz, ha a fölületről a sik tengelyes metszésre átmegyünk, a keletkező $zr = Const.$ egyenlet az egyenszáru menteléknek, közelitőire vonatkozott, egyenletét adja.

S igy lesz általában $U = Ar^{n-2} + Br^{n-2} + Cr^{n-2} + \ldots$ N egyenletből:

$z = (Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} + \ldots . + N)\varphi$. S ez az ez uton nyerhető fölületek általános kifejezése, melynek főbb sajátságai: a) hogy φ jobbkéz felől közös szorzóul kiemelhető; b) hogy közhengermetszésü nemzői csavarvonalok. A fölületek tehát mindig valódi csavarfölületek, s ezen fölületek általános fő jelleme az, hogy egyenletei, ha r állandónak tekintetik, r és φ-re nézve, vagy már magában véve első foku, vagy ily első fokú egyenletek rendszeréből áll.

27.

Elébb emlitettük, hogy U nemcsak r-nek, hanem r, z és φ függvénye is lehet. Hogy mire vezet az U, ha az csupán r-nek függvénye, már tudjuk; lássuk most, hogy mire jutunk, ha r-en kivül még más változható is előfordul.

Ha U r-en kivül még mást is tartalmaz, akkor három eset gondolható.

Lehet, hogy $u = f(r, \varphi)$ azaz r és φ-nek függvénye, mely esetben a fölület egyenlete ez: $z = r\varphi f(r, \varphi)$. Ezen fölület azonban, habár egyenlete r, φ és z-re vonatkozik is, nem csavarfölület, mert csavarfölület csak az, mely körhengerek által csavarvonalokban vágódik, közönséges csavarvonal pedig csak az, mely állandó szög alatt emelkedik. Az emelkedési szög pedig kitaláltatik, ha a fölület egyenletéből

$\frac{z}{r\varphi}$ hányados kikerestetik, s az r abban állandónak tekintetik. Ámde

$z = r\varphi f(r,\varphi)$-ből lesz:

$\frac{z}{r\varphi} = f(r,\varphi)$ s ha $r = a$ állandónak tekintetik

$\frac{z}{r\varphi} = f(a,\varphi)$, mely kitétel, daczára, hogy $r = a$ állandó, az ott rejlő φ miatt nem állandó. A hengermetszésü görbe tehát nem csavarvonal s a fölület nem csavarfölület. Figyelembe veendő a mellett, hogy a fölület egyenlete, ha r állandó is, z és φ-re nézve vagy túlmenő, vagy ha algebrai is, az első fokot túlhaladja.

Másodszor $u = f(r,z)$ lehet, miből $z = r\varphi f(r,z)$ következik. Ezen fölületek, habár egyenletei r,φ és z-re vonatkoznak is, nem csavarfölületek, miután ha $r = a$, $u = f(a,z)$ az ott rejlő z miatt változó marad, a körhengermetszésü nemző tehát nem csavarvonal.

Harmadszor lehet, hogy $u = f(r,\varphi,z)$, tehát $z = r\varphi f(v,\varphi,z)$. A fölület az esetben kettős okból nem csavarfölület, először az u-ban rejlő φ, s azonkivül aztán az ott lévő z miatt.

A mondottakat összefoglalván, láthatni, hogy minden r φ és z közt létre hozható egyenlet fölületet képvisel, s hogy az innen eredő fölületek közösen azon főtulajdonsággal birnak, hogy mértani alakjuk mindig egy az ürben adott, változhatlan egyeneshez van kötve, mely nélkül ilynemü fölületek nem is gondolhatók. Ezen adott, és változhatlan egyenes sarktengelynek, magok a fölületek pedig sarktengelyes fölületeknek mondathatnak.

Az eddig megvizsgált sarktengelyes fölületek két főcsaládra oszlottak. Az egyiknek körhengermetszésü alkotó görbéi közönséges csavarvonalok, magok a fölületek pedig csavarfölületek voltak; a második család ilynemü alkotói pedig nem csavarvonalok, hanem magasabb rendü görbék, a fölületek tehát magasabb rendü sarktengelyes fölületek voltak.

28.

Ha végre az adott egyenlet $\frac{dz}{rd\varphi} = U$, akkor U vagy csupán r-nek, vagy r és φ-nek, vagy r és z-nek, vagy mind a háromnak függvénye. A fölület egyenlete pedig:

első esetben: $z = r\varphi f(r)$ tehát első rendü —

másodikban: $z = r \int f(r,\varphi)\, d\varphi$ és

harmadikban: $r\varphi = \int \frac{dz}{u}$ tehát felsőbb rendü sarktengelyes fölületeket adnak. A negyedik esetre nézve a fölület egyenletének lefejtése azon körülménytől függ, vajon:

$\frac{dz}{rd\varphi} = f(r,\varphi,z)$ egyenletben z és φ változó szétválasztható-e egymástól. Ha igen, az egyenlet ilyen alakra:

$f'(r,z)\, dz = f''(r,\varphi)\, d\varphi$ hozható, melynek egészelése a fölület egyenletét adja. A fölület szintén felsőbb rendü.

A csavarfölület sarktengelyes fölületek közül könnyen felismerhető. Hogy azt megmutassuk, legyen:

$V = o$ a fölület r φ és z-re vonatkozó egyenlete, akkor:

$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)}$ s ha φ jobbkéz felől kellő egyszerüsités és átalakitás után végkép kiesik, a fölület csavarfölület. Például szolgáljon a víziszárny egyenlete:

$$z^2 - 2b\varphi z\sqrt{2} - 2\varphi^2 r^2 = V = o;\ \text{szerinte:}$$

$$\left(\frac{dv}{dz}\right) = 2\left(z - b\varphi\sqrt{2}\right) \text{ és } \left(\frac{dv}{d\varphi}\right) = -2\left(bz\sqrt{2} + 2\varphi r^2\right)$$

tehát:

$$\frac{\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)} = -\frac{bz\sqrt{2} + 2\varphi r^2}{z - b\varphi\sqrt{2}};\ \text{de } z^2 - 2b\varphi z\sqrt{2} - 2\varphi^2 r^2$$

$$= z^2 - b\varphi z\sqrt{2} - b\varphi z\sqrt{2} - 2\varphi^2 r^2 = o \text{ azaz } z\,(z - b\varphi\sqrt{2})$$

$$-\varphi\left(bz\sqrt{2}+2\varphi r^2\right)=o \text{ és } \frac{bz\sqrt{2}+2\varphi r2}{z-b\varphi\sqrt{2}}=\frac{z}{\varphi} \text{ ennél-}$$

fogva:

$$\frac{dz}{d\varphi}=-\frac{z}{\varphi}=-b\pm\sqrt{b^2+r^2}; \text{ minthogy tehát } \varphi$$

jobbkéz felől utóvégre kiesett, a víziszárny csavarfölület, azaz első rendü sarktengelyes fölület.

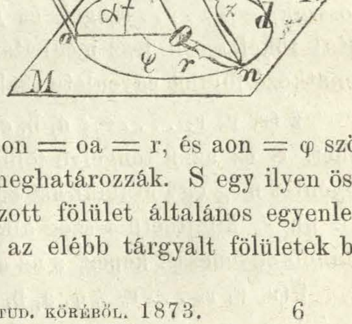
Egyébiránt ha r és φ a sarktengelyes egyenletben csak első hatványban s egymástól elkülönítve fordul elő, azaz, ha az egyenlet z és φ-re nézve első foku, a fölület is elsőrendü sarktengelyes fölület.

29.

Az elébbieket megfontolván, bizonyos hogy minden r φ és z közt fennálló egyenletnek sarktengelyes fölület felel meg, valamint megforditva, minden sarktengelyes fölületnek ily alaku egyenlet felel meg.

Az előbbiekben feltettük, hogy r sugár, valamint φ szögnek síkja is a sarktengelyre merőleges, ez azonban csak különleges esete egy általánosabb esetnek, mely eléáll, ha φ szögnek síkja, vagyis az alapsik a sarktengelyhez tetszés szerinti szög alatt hajlik. Ha ugyan (27. ábr.) MN az alapsik, melyben φ szögrendező éretik, s zo az α szög alatt hajló sarktengely s m a meghatározandó pont, akkor m ponton keresztül abmcdn körhengert fektetvén, melynek egyenes alkotói zo-hoz //-ak, mn = z, on = oa = r, és aon = φ szög rendezője a pont fekvését meghatározzák. S egy ilyen öszrendezői rendszerre vonatkozott fölület általános egyenlete lesz f (r,φ,z,α) = o, melyben az elébb tárgyalt fölületek befoglaltatnak.

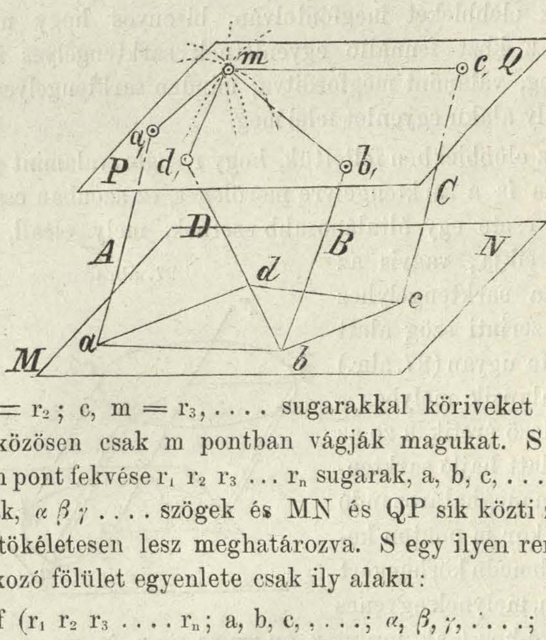
27. ábra.



Eddig csak oly fölületekről szóltunk, melyeknek csak egy sarktengelyük volt, a mi ismét egy általánosabb eset specialitása, mely legnagyobb általánosságban áll elé, ha a sarktengelyes fölületnek nemcsak egy, hanem *n* sarktengelye van.

Legyen, hogy n tengelyes sarkrendszer fogalmát adjuk (28. ábra), MN az alapsík $aa_,$, $bb_,$, cc, dd, ... n, az ürben fekvő sarktengely, melyek az alapsikot a, b, c, d, ...; pontokban találják, s ahhoz α, β, γ, ... szögek alatt hajlanak ab, ad, bc, $dc_,$ .... vonalhosszakat a, b, c, d, ...-vel jelölvén, legyen még m pont adva; m-en keresztül PQ sik // MN fektetvén, az n sarktengely ezt is a, b, c, d, ... pontokban találják. Ha most ezekből mint középpontokból a, m = $r_,$;

28. ábra.



b, m = r_2; c, m = r_3, ... sugarakkal köriveket húzunk, ezek közösen csak m pontban vágják magukat. S világos, hogy m pont fekvése r_1 r_2 r_3 ... r_n sugarak, a, b, c, ... vonalhosszak, α β γ .... szögek és MN és QP sík közti z elállás által tökéletesen lesz meghatározva. S egy ilyen rendszerre vonatkozó fölület egyenlete csak ily alaku:

$$f\,(r_1\; r_2\; r_3\; .... r_n;\; a, b, c, ...;\; \alpha, \beta, \gamma, ...;\; z) = o$$

lehet. S ez az n tengelyü fölületek általános kifejezése. Az egyenlet még egy átalakitást enged meg; a sugarak egyikét t. i. pl. r_n kifejthető φ szög által, melyet a sugár egy adott állandó egyenessel képez, s az egyenlet alakja ez esetben ez:

$$f\,(r_1\; r_2\; r_3\; ... r_{n-1}, \varphi, a, b, c, ...;\; \alpha, \beta, \gamma, ...;\; z) = o.$$

Ezen általános esetben minden más különleges eset foglaltatik. Igy pl. ha az n tengely // egymáshoz $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$ lesz, s a fölület egyenlete:

$f (r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_{n-1}\, \varphi\,;\, a, b, c, \ldots ; \alpha ; z) = o$. S ha ezen n // tengely végtelenül egymáshoz közeledik $a = b = c = \ldots = o$ és $r_1 = r_2 = \ldots r_{n-1}$ tehát az egyenlet:

$f (r, \varphi, \alpha, z) = o$ lészen.

Az általános egyenletben előforduló a, b, c, ... állandók száma $= 2n - 3$, az $\alpha\beta\gamma \ldots$ szögek száma pedig 2n összesen tehát $4n—3$ állandó fog előfordulni.

Az elébb tárgyalt rendszer s a velök összekötött fölületek azonban egészen más értelmezést kaphatnak még. Ha t. i. (28. ábr.) minden egyes tengely körül egy az adott m ponton keresztül menő hengert gondolunk, mely MN siktól körben vágódik, akkor az n tengely körül gondolt n körhenger fölületei egymást részint áthatni, részint érintkezni fognak, de a közös érintés és áthatás csak egy pontban történhetik. Legyen A, B, C, D .... az aa_1; bb_1; cc_1; dd_1; ... tengelyt körülvevő körhenger, akkor A és B vagy érintkezni, vagy egymást áthatni fogja, s az áthatás kettős görbületei zártkerületü görbét képeznek, ugyszintén A és C; A és D; B ésC; B és D; stb. körhenger ilyen kettős görbületü áthatási görbét adnak, melyek összes száma $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$ lesz. Ezen $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$ áthatási görbe közösen csak egy pontban vághatja egymást; s látni, hogy az n körhenger által csak egy az ürben fekvő pontra vezettetünk. A sarktengelyes öszrendezői rendszerek értelme tehát ez: több körhenger közös átmetszése által ürben fekvő pontokat meghatározni, ha a körhengerek alapvonalai azonegy alapsikban fekvő köröket képeznek. A sarktengelyes rendszer ily értelmezése mellett a tengelyek száma háromnál kisebb nem lehet; megjegyeztetik azonban, hogy azok egy része (r sugarat φ szögrendezővel pótolván) az alapsik által képviselhető, de ugy hogy a megmaradó tengelyek száma egynél kisebb nem lehet.

A mondottakat meggondolván, láthatni, hogy a sarktengelyes fölületek nemcsak az egyenlet foka szerint, hanem tengelyük száma szerint is egymástól különböznek, s hogy a fentebb tárgyalt fölületek nem egy, hanem három tengelyüek, mely három tengelye közül kettő az alapsík által van képviselve.

30.

Minden r φ és z közt fennálló egyenlet tehát vagy lehetetlenséget, vagy egyes pontot, vagy vonalat, vagy egész fölületet jelent, ha az egyenletet sarktengelyes rendszerre vonatkoztatjuk. Igy pl.

$z^2 + r^2 + \varphi^2 + a^2 = o$ lehetetlenséget fejez ki, miután nincs valódi szám, melynek négyzete több más négyzethez adva, összegül semmit adna. Igy pl.

$z^2 + r^2 + \varphi^2 = o$ csak ugy valósulhat, ha $z = o$; $r = o$; és $\varphi = o$, mely értékcsoport az öszrendezői rendszer kezdőpontjára vezet. S igy van az minden egyéb esetben; az r φ és z-ből összeállitott egyenletek tehát sarktengelyes rendszerre átvve, általában véve fölületre vezetnek.

Ha most $f (r,\varphi,z) = o$ egyenlet adva van, s benne r és φ helyére x és y iratik, s az új egyenlet $f (x,y,z) = o$ ferde, vagy derékszögü öszrendezőkre alkalmaztatik, új ferde vagy derékszögü öszrendezői rendszerre vonatkozó fölületet nyerünk. Az ùj fölület a sarktengelyesnek főbb mértani sajátságait avval osztani fogja ugyan, de alakja egészen más lészen.

Igy pl. ha a kúpcsavar egyenletében:

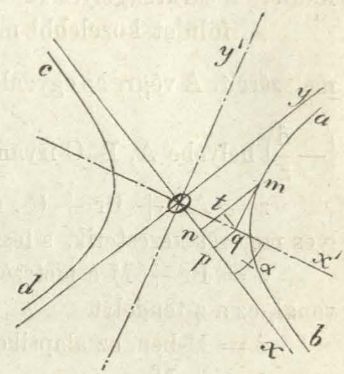
$z = Ar\varphi$, r és φ helyébe x és y tétetik, $z = Axy$ kerül ki. A két egyenlet most, ha z mind a kettőben állandónak tekintetik, a mentelék egyenletére, ha pedig r és x, vagy φ és y állandónak tekintetik, első foku egyenletre tehát vagy egyenes vonalra, vagy vonatkozólag a vele hasonrangu csavarvonalra vezet. S daczára annak hogy $z = Ar\varphi$ és $z = Axy$ egyenletek mértani természetre nézve tökéletesen egyeznek, az azoknak megfelelő fölületek tökéletesen különböznek egymástól.

Hogy az első kúpcsavart képez, már emlitettük; hogy a második ellenben csak mentelékes hajtalékdad (hyberbolisches Paraboloid) arról meggyőződni következőkép:

Ha z állandó értéket vesz fel, $z = Axy$ a mentelék közelitőkre vonatkozó egyenlete.

Legyen tehát xoy (29. ábra) az amb, cd mentelék közelitői, $mn = y$, $on = x$, m pont öszrendezői; ha xoy rendszer $x'oy'$ uj rendszerrel felcseréltetik: $mq = y'$ és $oq = x'$ az uj öszrendezők a régiekkel akként függnek össze, hogy:

29. ábra.



$x = on = op = tq = oq \,.\, \mathrm{Cos}\,\alpha - mq\sin\alpha = x'\,\mathrm{Cos}\,\alpha - y'\sin\alpha$ és

$y = mn = mt = pq = mq\,\mathrm{Cos}\,\alpha + oq\sin\alpha = y'\,\mathrm{Cos}\,\alpha + x'\sin\alpha$ lesz, s ha ezen értékek a mentelék egyenletébe x és y helyébe tétetnek s a vonások elhagyatnak:

$z = A\,(x\,\mathrm{Cos}\,\alpha - y\sin\alpha)\,(x\sin\alpha + y\,\mathrm{Cos}\,\alpha)$ azaz:

$z = A\,(x^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\sin\alpha - xy\sin^2\alpha + xy\,\mathrm{Cos}^2\alpha - y^2\sin\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha)$ nyeretik.

Feltévén most, hogy az új tengely a mentelék valódi főtengelye, akkor α az yox szög fele azaz 45^0, s minthogy $\sin 45^0 = \mathrm{Cos}\,45^0$, az egyenlet két középső tagja, a helyettesités után, kiesik, $\sin\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha = \sin^2 45 = \mathrm{Cos}^2 45 = \frac{1}{2}$ lévén, az egyenlet maga ez alakot nyeri:

$z = \frac{A}{2}\left(x^2 - y^2\right)$; mi a mentelékes hajtalékdad ismeretes egyenlete.

A kúpcsavar tehát a mentelékes hajtalékdad társfölülete a sarktengelyes rendszerben.

Elébb a $f\,(r, \varphi, z) = o$ egyenletben r és φ x és y-nal cseréltetett; ugyanazon eljárás alkalmazható megforditva is. Ha t. i. $f\,(x, y, z) = o$ egyenlet adatnék, s ha abban x és y helyett r és φ-t irunk, egy új egyenlet jő létre, mely utó végre sarktengelyes felületre vezet.

Igy pl. ha a sik egyenletét: $az + by + cx + d = o$ veszszük, helyébe:

$az + b\varphi + cr + d = o$ sarktengelyes fölület nyeretik, mely miután z és φ elkülönitve s csak első hatványban fordul elő, a csavarfölületek közé tartozik, s a siknak társfölülete a sarktengelyes rendszerben.

A fölület közelebbi megismertetésére vizsgáljuk főbb metszéseit. A végre az egyenletet a-val osztván s $\left(-\frac{b}{a}\right)$, $\left(-\frac{c}{a}\right)$, $\left(-\frac{d}{a}\right)$ helyébe A, B, C irván, lesz:

$z = A\varphi + Br + C$. melyben φ állandó, ha a tengelyes metszés kerestetik, s lesz:

$z = Br + M$ a metszés egyenlete, mely tehát egyenes vonal, ez a z tengelyt

$z = M$-ben, az alapsikot pedig:

$r = -\frac{M}{B}$ vágja. Figyelembe veendő azonban, hogy az M-ben a φ is rejlik, s hogy $M = A\varphi + C$; az M tehát φ első hatványai szerint növekedik. Az egyenes tehát a z ten gelyt ugy metszi, hogy a metszési pont elállása az alapsiktól φ-nek első hatványával egyenes viszonyban van. E sajátság már magában is elég, meggyőződni arról, hogy a csavarfölület csak közönséges torzult csavarfölületet képez, mit azonban az egyenes hajlása is tanusit, mert ezt r-nek együtthatója B határozza meg, minthogy pedig B állandó, a szög is az lészen.

Ha végezetre $z = A\varphi + Br + C$ egyenletben $C = o$ és $B = o$, akkor

$z = A\varphi$ egyenlet kerül ki, melyet már mint csigalépcsőzeti csavarfölületet ismerünk. Ha megforditva a sik egyenletében: $z = Ay + Bx + C$ egyenletben $B = o$, $C = o$, $z = Ay$ egy a zy-ok sikjához // sik egyenlete kerül ki; ez tehát a csigalépcsőzeti csavarfölület társfölülete.

A mint pedig $Az + By\ Cx + D = o$ egyenletről $Az + B\varphi + Cr + D = o$ egyenletre átmentünk, ugy mehetni át minden más egyenletről a felelkező sarktengelyes egyenletre. Csakhogy ezen átmenetelre nézve igen fontos észrevételünk van.

Vegyük a végre pl. a teljes másodfoku egyenletet:

$az^2 + bzy + czx + dy^2 + exy fx^2 + fx^2 + gz + hy + ix + k = o$.

Azon fölületfajok, melyek az egyenletben foglalvák, eléggé ismeretesek. Ha most az egyenletben y és x φ és r-el felcseréljük:

$az^2 + bz\varphi + czr + d\varphi^2 + er\varphi + fr^2 + gz + h\varphi + ir + k = o$ kerül ki. Az új egyenlet az elébbivel egészen hasonalkatu, s ugyanazon algebrai sajátsággal birván, kétségkivül oly fölületfajokat fog magában foglalni, melyek az első egyenletben foglaltaknak sarktengelyrendszeres társai a sarktengelyes rendszer másodfoku fölületei tehát ugyanannyi s ugyanazon fölületfajokból fognak kiállani, melyekből a derékszögü rendszer másodfoku fölületei állanak.

S ha hasonlókép a derékszögü rendszer harmadfoku fölületek teljes egyenletéről:

$az^3 + bz^2x + cz^2y + dzxy + ezx^2 + fzy^2 + gx^3 + hy^3 + iz^2 + kzx + lzy + mx^2 + ny^2 + oz + px + qy + t = o$ a sarktengelyes rendszer harmadfoku egyenletére:

$az^3 + bz^2r + cz^2\varphi + dzr\varphi + ezr^2 + fz\varphi^2 + gr^2 + h\varphi^3 + iz^2 + kzr + lz\varphi + mr^2 + n\varphi^2 + oz + pr + q\varphi + t = o$ áttérünk, ezek is ugyanannyi s ugyanazon fölületfajokat fogják magukban foglalni, mint amaz. S hogy egyáltalában az n-ed foku sarktengelyes fölületek ugyanannyi fajokra osztályozhatók, mint az n-ed foku derékszögrendszeres fölületek.

Csak egyre nézve különböznek a két rendszerbeli fölületosztályok. Hogy a különbséget megértessük, a másodfoku egyenletekre térünk vissza. Tudjuk, hogy a mentelékes hajtalékdad azok közé is tartozik, s hogy annak vagy:

$z = Axy$ vagy

$z = \frac{A}{2}\left(x^2 - y^2\right)$ egyenlet felel meg. S akár az első, akár a második egyenletet veszszük, a kettő mindig csak azonegy mentelékes hajtalékdadra vezet s a különbség csak egyedül abból álland, hogy az öszrendezői rendszer tengelyeinek a két esetben a fölülethez különböző fekvései lesznek.

Ha pedig az egyenletek a sarktengelyes rendszerre alkalmaztatnak, az első:

$z = Ar\varphi$ a kupcsavart, a második:

$z = \frac{A}{2}\left(r^2 - \varphi^2\right)$ egy a kúpcsavartól egészen különböző fölületalakot adja. S hasonlókép áll a dolog minden más fölületfajra nézve. Valahányszor t. i. a derékszögü rendszerben a tengelyek megváltoztatnak, s ez uton x helyébe x $\cos\alpha - y \sin\alpha$ és y helyébe: $x\sin\alpha + y \cos\alpha$ tétetik, akkor a:

$f(x, y, z) = o$ és a megváltoztatásból eredő:

$f\left[(x \cos\alpha - y \sin\alpha), (x \sin\alpha + y \sin\alpha), z\right] = o$ egyenlet derékszögü rendszerben csak azonegy fölületalakra vezet; ha pedig a megváltoztatás a sarktengelyes rendszerben vitetik véghez, a

$f(r, \varphi, z) = o$ és

$f\left[(r\cos\alpha - \varphi\sin\alpha), (r\sin\alpha + \varphi\cos\alpha), z\right] = o$ egyenletek két különböző fölületalakra vezetnek.

Igy pl. lesz:

$Az + Br + C\varphi + D = o$ egyenletből:

$Az + (B \cos\alpha + C \sin\alpha) r + (\cos\alpha - B\sin\alpha) \varphi + D = o$. Világos, hogy mind a kettő csak első foku sarktengelyes fölület, de az elsőnek csavarvágásai oly α szög alatt emelkednek, mely:

$tg\alpha = -\frac{C}{Ar}$ által adatnak, a második fölület csavarvágásai pedig

$$tg\alpha = -\frac{C \cos\alpha - B \sin\alpha}{Ar}$$ egyenlet által határoztatnak meg, s minthogy a két érték egymástól különbözik, a két csavarfölület körhengeres alkotóira nézve különböznek. S ha tekintetbe veszszük, hogy egyenes vonalu alkotóinak hajlásai a z tengelyhez,

$\mathrm{Ctg}\,\beta = -\frac{B}{A}$ és $\mathrm{Ctg}\,\beta = -\frac{B \cos\alpha + C\sin\alpha}{A}$ egyenletek szerint is különbözők, világos, hogy a két egyenlet ugyanazon fölület két különböző alaki módositása.

Hasonlókép van a dolog a fentebb emlitett mentelékes hajtalékdadra nézve, melynek egyenlete:

$z = Axy$ az összrendezők megváltoztatása folytán

$z = \frac{A}{2} \sin 2\alpha . \left(x^2 - y^2\right) + Axy \operatorname{Cos} 2\alpha$ általános egyenletbe alakul át, melyben a fölület egyenletének mindkét módositása benfoglaltatik, melyek egyike előkerül, ha $\alpha = o$, másodika pedig ha $\alpha = 90^0$.

Az egészből pedig kitetszik, hogy a sarktengelyes rendszerre vonatkozó egyenletek, ha a rendszer megváltoztatik, nemcsak külalakra nézve megváltoznak, hanem maga a fölület formája is megváltozik, s hogy a különböző sarktengelyes fölületek, melyek ily rendszer-megváltoztatásból előkerülne': azonegy fölületnek különbőző alaki módositásai.

Ha tehát egy sarktengelyes rendszerre vonatkozó egyenlet adva van, annak nemcsak egy, hanem több fölületmódositások felelnek meg, melyek az egyenletből leszármaztathatók, ha r helyébe: $r \operatorname{Cos} \alpha - \varphi \sin \alpha$ és φ helyébe $r \sin \alpha + \varphi \operatorname{Cos} \alpha$ helyettesitvén, α helyébe annyi különböző értéket teszünk, a hány különböző egyenlet-átalakulás elérhető.

Vegyük pl. a viziszárny egyenletét:

$z^2 - 2b\varphi z\sqrt{2} - 2\varphi^2 r^2 = o$, ha r és φ értékei helyettesittetnek, ezen egyenlet:

$z^2 - 2bzr\sqrt{2}\sin\alpha - 2bz\varphi\sqrt{2}\operatorname{Cos}\alpha - 2r\varphi^3 \sin 2\alpha \operatorname{Cos} 2\alpha - 2r^2\varphi^2 \operatorname{Cos} 4\alpha - (r^4 + \varphi^4)\sin^2 2\alpha = o$ kerül ki; mely a viziszárny fölületének minden sarktengelyes módositását magában foglalja, melyek abból kinyerhetők, ha α-nak azon értékeit keressük, melyeknél az egyenlet egyes tagjai elenyésznek.

Ilyen érték lesz $\alpha = o$, mely a módositott egyenletet az eredeti alakra visszavezeti, az tehát amannak első módositása.

A második érték lesz $\alpha = 90^0$; az esetben $\sin\alpha = +1$, $\operatorname{Cos}\alpha = o$, $\sin 2\alpha = o$, $\operatorname{Cos} 2\alpha = -1$ és $\operatorname{Cos} 4\alpha = +1$; a módositott egyenlet tehát ez alakot veszi fel:

$z^2 - 2bzr\sqrt{2} - 2r^2\varphi^2 = o$, ez tehát a második módositás.

A harmadik érték lesz $2\alpha = 90^\circ$, azaz $\alpha = 45^\circ$; az esetben $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{Cos}\alpha$, $\sin 2\alpha = +1$, $\operatorname{Cos} 2\alpha = 0$ és $\operatorname{Cos} 4\alpha = -1$, s a módositott egyenlet ez alakot nyeri:

$z^2 - 2bzr - 2bz\varphi + 2r^2\varphi^2 - r^4 - \varphi^4 = 0$, s ez a harmadik módositás.

A negyedik érték lesz $4\alpha = 90^\circ$, azaz $\alpha = 22^\circ - 30'$, mely esetben $\sin\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$; $\operatorname{Cos}\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$; $\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{Cos} 2\alpha$, $\operatorname{Cos} 4\alpha = 0$ és a módositott e e nlet:

$z^2 - 2bzr\sqrt{\sqrt{2}-1} - 2bz\varphi\sqrt{\sqrt{2}+1} - r\varphi^3 - \frac{r^4}{2} - \frac{\varphi^4}{2} = 0$ nyeretik, s ez az egyenlet negyedik módositása.

Minthogy végre a kitalált négy értéken kivül más értéket fel nem vehetni, a nélkül, hogy az egyenlet módositása a már kitaláltak egyikével össze ne essék, látni, hogy a víziszárny fölületének csak négy módositása van.

Tekintve pedig azt, hogy a kúpcsavarnak, melynek egyenlete másodfoku, csak két módositása van, a víziszárnynak, melynek egyenlete negyedfoku, négy módositása van, azt az általános elvet állitjuk fel, hogy minden sarktengelyes fölületnek csak annyi módositása lehet, a hányadik fokig az egyenlet emelkedik.

A felállitott elv általános bebizonyitására legyen:

$Az^n + Brz^{n-1} + C\varphi z^{n-1} + Dr^2z^{n-2} + Er\varphi z^{n-2} + F^2z^{n-2} + Gr^3z^{n-3} + Hr^2\varphi r^{n-3} + Ir\varphi^2z^{n-3} + K\varphi^3z^{n-3} + \ldots Mz + Nr + P\varphi + Q = 0$ az n-ed foku egyenlet, akkor, ha r helyébe $r\operatorname{Cos}\alpha - \sin\alpha$ és φ helyébe $r\sin\alpha + \varphi\operatorname{Cos}\alpha$ teszszük:

$$
\begin{aligned}
&Az^n + Br^{n-1}(r\operatorname{Cos}\alpha - \varphi\sin\alpha) + \\
&+ Cz^{n-1}(r\sin\alpha + \varphi\operatorname{Cos}\alpha) + \\
&+ Dz^{n-2}(r^2\operatorname{Cos}^2\alpha - 2r\varphi\sin\alpha\operatorname{Cos}\alpha + \varphi^2\sin^2\alpha) + \\
&+ Ez^{n-2}(r^2\sin\alpha\operatorname{Cos}\alpha + r\varphi\operatorname{Cos}2\alpha - \varphi^2\sin\alpha\operatorname{Cos}\alpha) + \\
&+ Fz^{n-2}(r^2\sin^2\alpha + 2r\varphi\sin\alpha\operatorname{Cos}\alpha + \varphi^2\operatorname{Cos}^2\alpha) +
\end{aligned}
$$

$+ Gz^{n-3} (r^3 \mathrm{Cos}^3\alpha - \binom{3}{1} r^2 \varphi \sin\alpha \mathrm{Cos}^2\alpha + \binom{3}{2} r\varphi^2 \sin^2\alpha \mathrm{Cos}\alpha - \varphi^3 \sin^3\alpha) +$

$+ Hz^{n-3} (r^2\varphi \mathrm{Cos}^3\alpha + \sin\alpha \mathrm{Cos}^2\alpha (\varphi^3 - 2r\varphi^2) + \sin^2\alpha \mathrm{Cos}\alpha (\varphi^3 - 2r^2\varphi) + r\varphi^2 \sin^3\alpha)$

$+ Iz^{n-3} (r\varphi^2 \mathrm{Cos}^3\alpha + \sin\alpha \mathrm{Cos}^2\alpha (2r^2\varphi - \varphi^3) + \sin^2\alpha \mathrm{Cos}\alpha (r^3 - 2r\varphi^2) - r^2\varphi \sin^3\alpha)$

$+ Kz^{n-2} (\varphi^3 \mathrm{Cos}^3\alpha + \binom{3}{1} \varphi^2 r \sin\alpha \mathrm{Cos}^2\alpha + \binom{3}{2} \varphi r^2 \sin^2\alpha \mathrm{Cos}\alpha + r^3 \sin^3\alpha)$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ L (r^n \mathrm{Cos}^n\alpha - \binom{n}{1} r^{n-1} \varphi \mathrm{Cos}^{n-1}\alpha \sin\alpha + \ldots) + \ldots\ldots$

$+ Mz$

$+ N (r\mathrm{Cos}\alpha - \varphi\sin\alpha) +$

$+ P (r\sin\alpha + \varphi\mathrm{Cos}\alpha)$

$+ Q = o$; mely egyenlet kellő rendezés és összevonás után :

$z^n + U_1 \sin\alpha + V_1 \mathrm{Cos}\alpha + U_2 \sin 2\alpha + V_2 \mathrm{Cos} 2\alpha + \ldots + V_n \mathrm{Cos} n\alpha + U_n \sin\alpha + Q = o$ alakot vesz fel, U_1 V_1 U_2 $V_2 \ldots U_n$ V_n alatt r és φ-nek illető összetételeit értvén. Az egyenlet egyes tagjai elenyésznek most, ha $\alpha = o$ vagy $\alpha = 90^\circ$ vagy $2\alpha = 90^\circ$, vagy $3\alpha = 90_0$; vagy $4\alpha = 90^\circ \ldots$ s végre $n\alpha = 90^\circ$, mely értékek összes száma $n + 1$, és mivel az első az eredeti egyenletet adja, az azon kivül gondolható száma legfeljebb n. Látni tehát, hogy a módositások száma az egyenlet fokát túl nem haladhatja.

A sarktengelyes rendszerekre vonatkozó egyenletek tehát a derékszögü rendszeres vonatkozóktól igen eltérnek, a mennyiben amazok sokkal több fölületalakot szoktak kijelenteni, mint ezek. Igy példáúl ha a másodfoku egyenlet vétetik, ez ugyanannyi fölületfajt fog ugyan kijelenteni, mint a derékszögü rendszerre vonatkozó másodfoku egyenlet, de minden egyes fajnak két módositása lévén, kétszer annyi fölületalakzatra is vezet. A harmadfoku sarktengelyes egyenlet háromszor, a negyedfoku négyszer annyi fölületalakzatot fejez ki, mint a derékszögü rendszer ugyanazonfoku társegyenlete.

Az ilykép nyert fölületalakzatok tökéletesen eltérők egymástól. Igy pl. ha a kúpcsavar módositását vizsgáljuk, miután egyenlete :

$z = \frac{A}{2}\left(r^2 - \varphi^2\right)$, tengelyes síkmetszései (ha t. i. φ állandónak tekintetik)

$z = \frac{Ar^2}{2} + B$ hajtalékokat, körhengermetszésü alkotói, (ha r állandónak tekintetik) $z = C \frac{A\varphi^2}{2}$ avagy $\frac{A\varphi^2}{2} = C - z$ hajtalékokat, tehát egészen más görbéket képeznek, mint a kúpcsavarnál.

A VIZSZINTES SZÉLKERÉK ELMÉLETE.

MARTIN LAJOS l. tagtól.

1.

A magy. kir. kereskedelmi minisztérium az 1870-ki szolnoki kiállitás alkalmával pályázatot nyitott olyan gőz-, víz- vagy lóerő által hajtott vizmerőgépek számára, melyek addig is míg a csatornázás ügye hazánkban életbe lép, mezei öntözésre pótszerül használhatók.

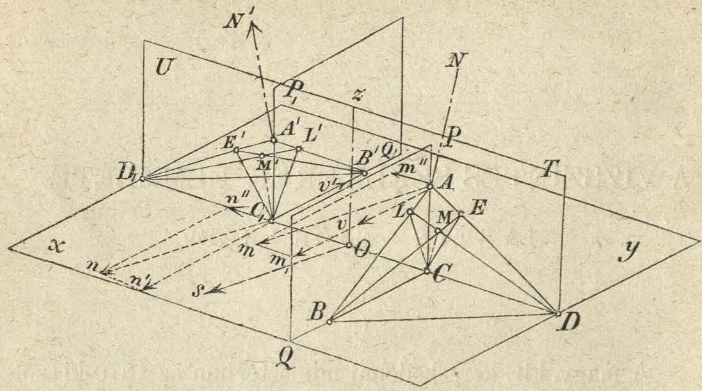
Egyik jó barátom, Károlyi Lajos úr tiszafüredi földbirtokos, a csavarfölületről tárgyaló értekezéseimről értesülvén, engem volt szives felszólitni oly vízmerő gépet szerkeszteni, mely szélerő által hajtatik.

Barátom csak közönséges azaz függélyes kereket kívánt, de én az ilyen keréknek nem vagyok nagy kedvelője. Felállitása bajos, s ha fel van is állitva, szilárdsága vagy is inkább állhatósága csekély, vihar esetében vég elpusztulásnak igen ki van téve s a mellett minduntalan igazitást kiván a szél iránya szerint. Ilyen kerék vizmeritésre nem való, melyhez csak olyan szélkerék ajánlható, mely egyszer felállitva, egészen önmagára hagyathatik. Gondom tehát arra törekedett: oly kereket alkotni, mely könnyebben felállitható, szerkezetre és állhatóságra nézve szilárdabb, külön igazitást vagy felügyeletet nem kiván, s mind a mellett a szél erejét jobban kihasználja mint a közönséges szélkerék. Ilyen kerék pedig csak vizszintes lehet; lássuk tehát elméletének lefejtését.

2.

Legyen ZO (1. ábr.) a kerék függélyes tengelye; xy egy arra $\perp$ tehát vizszintes, de egyébként tetszés szerinti sík; UTO

1. ábra.



pedig egy ZO tengelyen keresztül menő tetszés szerinti függélyes sík. Legyen továbbá A a kivánt fölületnek egy UTO síkban lévő pontja, akkor ezzel szemközt ZO tengelyen túl ugyanazon UTO-ban egy A, társpont gondolható, mely A-val egy vizszintesben fekszik s ZO tengelytől egyenlően távol van. Ha tehát az A ponton keresztül gondolt felületet avval együtt ZO körül megforgatjuk, az A pont A,-be, a fölület pedig egy új állásba jut, mely az A pontbelivel szemközt van s ZO tengelyre nézve avval öszméretes.

Legyen ABD az A pontbeli érintő-sík, akkor a szemközt lévő A, társpont A,B,D, érintő-síkja ZO-ra nézve ABD-vel öszméretes. Ha végre A és A, pontokon keresztül UOT síkra ⊥-en QCP, Q'C'P' síkokat fektetjük, akkor ezek s az UOT, valamint az xy ezen érintő-síkokat AB, AD, BD és A'B', A'D', B'D' csomóvonalokban vágják. A két érintő-sík fekvése CAD∢ =C'A'D'∢=η; CDB∢=C'D'B'∢=μ és CBA∢=C'B'A' ∢=α szögek által meg lesz határozva.

De ugyanazon két érintő sík fekvése meghatározható még az által, ha CB; C'B' éleken keresztül az átellenben fekvő AD A'D' élre CEB; C'E'B' ⊥ sikokat fektetjük, s hasonlókép CD; C'D' éleken keresztül AB; A'B'-re CDL; C'D'L' ⊥ sikokat bocsátjuk. A mellett bizonyos, hogy az A és A, pontbeli AN; A'N' deréklők a két ⊥ sík CM és C'M' átmetszési egyeneseikkel //; és ugyan hogy a két érintő-síknak úgy mint a deréklők fekvése $M'C'D = M_,C_,D_, = CMD = C_,M_,D_,=\lambda$ és $MCB=M'C'B'=BEC=B'E'C'=\varepsilon$ szögek által tökéletesen meg van határozva. Ezen μ, η, α, λ és ε szögek közt pedig bizonyos viszonyok állanak fen, melyek közül a következőkre lesz szükségünk.

Ha először ACB, BCD, ACD; másodszor ismét BAC, AEC, EBC; harmadszor végre ACD, ACL, LCD ▽▽ csoportokat szemléljük, e három egyenlet csoportos nyerjük:

$AC=BC\ \mathrm{tg}\ \alpha$	további $AC=BC\ \mathrm{tg}\ \alpha$	végre $AC\ \mathrm{tg}\ \eta = CD$
$BC=CD\ \mathrm{tg}\ \mu$	$EC=AC\ \sin\eta$	$LC = AC\cos\alpha$
$CD=AC\ \mathrm{tg}\ \eta$	$BC=EC\ \mathrm{tg}\ \varepsilon$	$CD = LC\ \mathrm{tg}\ \lambda$

az egymás alatt állókat egymással szorozva, e három egyenletet nyerjük:

$$(A)\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} 1 = \mathrm{tg}\ \alpha.\ \mathrm{tg}\ \mu.\ \mathrm{tg}\ \eta \\ 1 = \mathrm{tg}\ \alpha.\ \sin\eta.\ \mathrm{tg}\ \varepsilon \text{ és} \\ \mathrm{tg}\ \eta = \cos\alpha.\ \mathrm{tg}\ \lambda \end{array}\right.$$

Ezen előzmények után legyen OS//Am//C'n a széliránya s Am=C'n=c annak sebessége; továbbá legyen Av=C'v'=v az A és A' pontoknak ZO körüli forgási sebessége. Az Am és C'n sebességek Av és C'v' forg. sebességektől mit $m'Am'=nC'n'=\delta$ szög alatt elhajolván, Am'mm" és C'n'nn" vizszintes derékszögények folytán Am", Am' és C'n'; C'n" oldalsebességekre oszlanak és ugyan

$Am' = c.\cos\delta$ | $C'n' = c.\cos\delta$

$Am'' = c.\sin\delta$ | $C'n'' = c.\sin\delta$; a mellett figyelembe jő, hogy Am' és Av ellenkező —, a C'n' és C'v' ellenben egy értelmü sebességek, ennélfogva:

$c.\cos\delta - v$ az A pontbeli — és

$-(c\cos\delta + v)$ az A' pontbeli viszonylagos sebesség, melylyel a közeg a forgás irányában a két pontra lök, melyeknek:

$(c\cos\delta - v)\cos\varepsilon$ és

$+ (c\cos\delta + v)\cos\varepsilon$ viszonylagos deréklő ösztevők megfelelnek. A még hátralévő, sugárilag ható, Am" és C'n" oldalsebességek pedig:

$- c\sin\delta\cos\lambda$ A pontbeli és

$- c\sin\delta\cos\lambda$ A' pontbeli deréklő ösztevőkre vezetnek, melyek a két előbbivel együtt:

$(c \cos\delta - v)\cos\varepsilon - c\sin\delta\cos\lambda$ A pontbeli és
$(c \cos\delta + v)\cos\varepsilon - c\sin\delta\cos\lambda$ A' pontbeli deréklő eredőket adják.

Ha tehát ζ, γ, g és df egymásután a lökés móditója, a közeg sürüsége, a földi gyorsulás s az A és A' pontokban gondolt fölület-elemek térfogatai, akkor:

$\frac{\zeta\gamma}{2g}. df(c\cos\delta\cos\varepsilon - c\sin\delta\cos\lambda - v\cos\varepsilon)^2$ az A pontban és

$\frac{\zeta\gamma}{2g}. df(c\cos\delta\cos\varepsilon - c\sin\delta\cos\lambda + v\cos\varepsilon)^2$ az A' pontban

ejlődő deréklő nyomás, melyeknek:

$\frac{\zeta\gamma}{2g}. df(c\cos\delta\cos\varepsilon - c\sin\delta\cos\lambda - v\cos\varepsilon)^2\cos\varepsilon$ és

$\frac{\zeta\gamma}{2g} df(c\cos\delta\cos\varepsilon - c\sin\delta\cos\lambda + v\cos\varepsilon)^2\cos\varepsilon$ forgás elleni

nyomásuk, s ennélfogva:

$\frac{\zeta\gamma}{2g} rdf\cos\varepsilon(c\cos\delta\cos\varepsilon - c\sin\delta\cos\lambda - v\cos\varepsilon)^2$ és

$\frac{\zeta\gamma}{2g} rdf\cos\varepsilon(c\cos\delta\cos\varepsilon - c\sin\delta\cos\lambda + v\cos\varepsilon)^2$ nyomatékuk van.

Minthogy most az A és A' pontokban fejlődő nyomások ellenkező értelmü forgást igyekszenek ZO tengely körül létre hozni, világos hogy a két pont hatásaiból eredő nyomaték a lefejtett két nyomaték különbségéből áll, lesz tehát:

$$d\mathfrak{M} = \frac{\zeta\gamma}{2g} rdf\cos\varepsilon\Big[(c\cos\delta\cos\varepsilon - c\sin\delta\cos\lambda - v\cos\varepsilon)^2 - (c\cos\delta\cos\varepsilon - c\sin\delta\cos\lambda + v\cos\varepsilon)^2\Big]$$

vagy tekintettel arra, hogy $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

$$d\mathfrak{M} = 4\frac{\zeta\gamma}{2g}. rvcdf\cos^2\varepsilon(\sin\delta\cos\lambda - \cos\delta\cos\varepsilon),$$

s ha egészelünk:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{M} = 4.\frac{\zeta\gamma c}{2g}\iint rvdf\cos^2\varepsilon(\sin\delta\cos\lambda - \cos\delta\cos\varepsilon).$$

3.

Az utólsó képlet adja tehát a fölület nyomatékát, ha azt két 180°-al egymástól elálló helyzetben gondoljuk. Minthogy jelenleg egy fölület meghatározása forog szóban, arra két független változó fog kelleni; a képletben három változó fordul ugyan elő, melyekről semmi feltétel még elő nem fordul, de mivel δ a szélirányától függ, kell hogy az, ha felteszszük, hogy a kerék forgása a szél irányától független legyen, határozatlan maradjon. E szerint tehát csak ε és λ marad meg, mely épen elégséges arra, hogy a kérdés feloldassék.

Mi előtt az utólsó képletet a végre a kellő müveleteknek alávetjük, czélszerü lesz annak más alakot adni. Ha t. i. az A) alatti segéd egyenletekre visszatérünk, az ε és λ szögek α η és μ szögek által kifejezhetők. Ha azt megteszszük, az (1) alatti egyenletből egymás után e három egyenletet nyerjük:

$$(2) \ldots \mathfrak{M} = 4\frac{\zeta\gamma c}{2g}\iint rvdf\, tg^2\alpha\, tg^2\eta \frac{\sin\delta - \cos\delta\, tg\alpha\, tg\eta}{(1+tg^2\eta+tg^2\eta tg^2\alpha)^{3/2}}$$

$$(3) \ldots \mathfrak{M} = 4\frac{\zeta\gamma c}{2g}\iint rvdf \frac{\sin\delta\, tg\mu - \cos\delta}{(1+tg^2\mu+tg^2\eta tg^2\mu)^{3/2}} \text{ s végre:}$$

$$(4) \ldots \mathfrak{M} = 4\frac{\zeta\gamma c}{2g}\iint rvdf\, tg^3\alpha \frac{\sin\delta\, tg\mu - \cos\delta}{(1+tg^2\mu+tg^2\mu tg^2\alpha)^{3/2}}$$

A fölületet most ugy kell meghatározni, hogy M maximum legyen, a mi csak akkor lesz meg ha

első képletre nézve $\left(\frac{d\mathfrak{M}}{d\alpha}\right)=o$ és $\left(\frac{d\mathfrak{M}}{d\eta}\right)=o$; vagy

második képletre nézve $\left(\frac{d\mathfrak{M}}{d\eta}\right)=o$ és $\left(\frac{d\mathfrak{M}}{d\mu}\right)=o$; vagy

harmadikra nézve $\left(\frac{d\mathfrak{M}}{d\mu}\right)=o$ és $\left(\frac{d\mathfrak{M}}{d\alpha}\right)=o$.

Ha azonban a három képlet közül a középsőt közelebbről szemléljük, azonnal felismerni, hogy az η-ra nézve legnagyobb ha $\eta=o$; mert ha $\eta=o$, akkor a $\iint$-jel megetti tört nevezője legkisebb, a tört maga tehát legnagyobb, miből önkényt következik, hogy az egészlet is legnagyobb.

Ámde az A) alatti segéd egyenletek elseje szerint van:

$tg\,\eta = \frac{1}{tg\alpha\; tg\mu}$; ha tehát $\eta=o$, kell hogy vagy:

$tg\,\alpha = \infty$ vagy:

$\operatorname{tg}\mu = \infty$ legyen. A kettő közül a másodikat feltévén, maga a (3) alatti *M* elenyészik, mi tehát el nem fogadható; az elsőt feltévén, mind a három képlet a semmitől különböző s véges nagyságu *M*-re vezet, a mi elfogadható. De ha $\eta = o$ és $\alpha = 90^{\circ}$, az annak a jele, hogy az AC (1. ábra) // AB // AD-vel, mi által ABD érintő sík xy sikra $\perp$ lesz.

Ha most az előbb lefejtett esetet nem csak az A, hanem mind azon pontokra nézve figyelembe veszszük, melyeknél ugyanazon körülmény forog fenn, nyilván való, hogy a pontok összessége a fölület egy alkotójára vezet, melynek tehát az a fő sajátsága, hogy az abban fekvő pontokhoz gondolt érintő síkok egytől egyig xy síkra $\perp$-ek, azaz ZO tengelyhez //-ak. Ámde ha ezen érintő síkok ZO tengelyhez //-ak, akkor az azokat beburkoló fölület csak henger fölület lehet, melynek egyenes vonalu alkotói ZO-hoz //-ak. A kérdéses fölület tehát oly természetü, hogy hozzá egy beburkoló hengerfölület gondolható, melynek egyenes alkotói ZO-hoz //-ak. A kérdés feloldása tehát vagy egy a szóban forgó hengerfölülettel érintkező fölületből, vagy magából a feltalált hengerfölületből álland. Első esetben a fölületnek csak egy alkotója van, mely a maximum mind két feltételének megfelel; e szerint tehát állithatjuk, hogy a fölületnek legalább egy alkotója van, mely a maximumnak tökéletesen megfelel.

Hogy ezen alkotót közelebbről megismerjük, a (3) a. egészletet μ szerint külzeljük, miből:

$$\left(\frac{d\mathfrak{M}}{d\mu}\right) = \frac{4\zeta\gamma c}{2g} \iint r v d f. \; \frac{d\left(\dfrac{\sin\delta \operatorname{tg}\mu - \cos\delta}{(1+\operatorname{tg}^2\mu+\operatorname{tg}^2\eta \operatorname{tg}^2\mu)^{3/2}}\right)}{d\mu} = o$$

mi teljesül, ha:

$$\frac{d\left(\dfrac{\sin\delta \operatorname{tg}\mu - \cos\delta}{(1+\operatorname{tg}^2\mu+\operatorname{tg}^2\eta \operatorname{tg}^2\mu)^{3/2}}\right)}{d\mu} = o, \text{ azaz ha:}$$

$$\operatorname{tg}^2\mu - {}^3/_2 \operatorname{tg}\mu \operatorname{ctg}\delta - \frac{1}{2(1+\operatorname{tg}^2\eta)} = o, \text{miből:}$$

$$(5) \quad . \; . \operatorname{tg}\mu = {}^1/_4 \left[3 \operatorname{ctg}\delta \pm \sqrt{9 \operatorname{ctg}^2\delta + \frac{8}{1+\operatorname{tg}^2\eta}}\right]$$

Ezen alkotók egyenletei legczélszerübben sarkponti rendszerben fognak kifejeztetni; ilyenre nézve van:

$$tg\mu = \frac{rd\varphi}{dr}; \text{ lesz tehát:}$$

$$\frac{rd\varphi}{dr} = {}^1\!/_4 \left[3C\,tg^2\delta \pm \sqrt{9\,Ctg^2\delta + \frac{8}{1+tg^2\eta}}\right]$$

Bármilyen is a szélirány, annyi bizonyos hogy az egyes szélsugarak egymáshoz //-ak, minek folytán φ és δ csak egy állandóval különböznek egymástól azaz $\varphi = \delta + \text{const}$, s ha ezt külzeljük $\partial\varphi = \partial\delta$. Szabad tehát az utólsó egyenletben $\partial\varphi$ helyébe $\partial\delta$ irni. Ezt megtévén s egészelvén, ez egyenletet nyerjük: fog nyeretni:

$$(6)\;\ldots\; \log.\,\text{nat}\left(\frac{r}{r_0}\right) = 4\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{\partial\delta}{3\,Ctg\delta \pm \sqrt{9Ctg^2\delta + \frac{8}{1+tg^2\eta}}}$$

S ez a fennebb emlitett alkotók általános kifejezése, mely ha benne $\eta = o$, az absolut maxim. görbéjét adja, melynek ezen egyenlet megfelel:

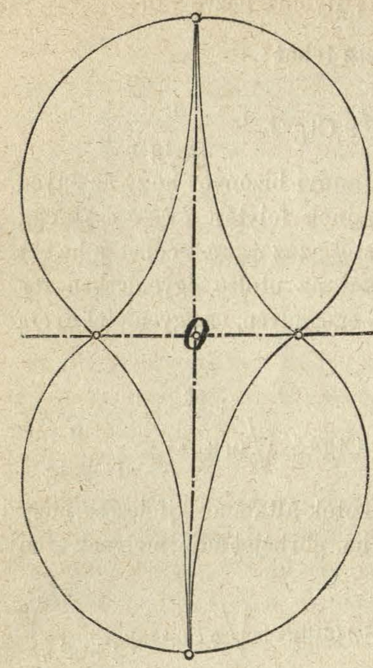
$$(7)\;\ldots\;\begin{cases} \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\frac{2}{1+tg^2\eta}} = \dfrac{(1+tg^2\eta)\left(3Ctg\delta + \sqrt{9\,Ctg^2\delta + \frac{8}{1+tg^2\eta}}\right)^3}{8(1+Ctg^2\delta)\left(Ctg\delta + \sqrt{9\,Ctg^2\delta + \frac{8}{1+tg^2\eta}}\right)} \\ \text{s ha } \eta = o \\ \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2 = \dfrac{\left(3\,Ctg\delta + \sqrt{9\,Ctg^2\delta + 8}\right)^3}{8(1+Ctg^2\delta)\left(Ctg\delta + \sqrt{9\,Ctg^2\delta + 8}\right)} \end{cases}$$

A két egyenlet elseje a kivánt fölületnek r, δ és η változók által kifejezett átalános egyenlete; a második az absolut maximum görbéjét adja, mely mértanilag szerkesztve (2. ábra) szerint körtealaku.

4.

Ennyire haladott volt a számitás 1871-ki ápril haváig. Miután a nyert képletek a hánylat miképi tovább folytatását elő nem jelezték, s így a fejlődés iránya nem ismertetett, szükségesnek tartottam a tapasztalást segitségül venni. A végre kisérletek lettek szükségesek, minthogy azokat, első

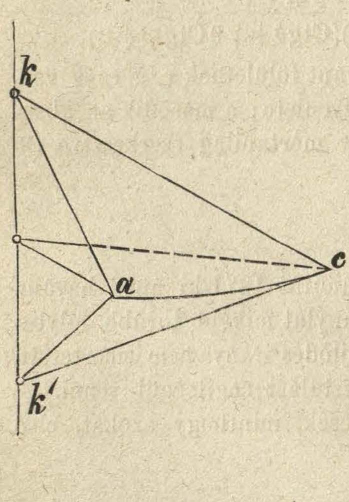
2-dik ábra.



nézetem szerint, csak szabadban lehetett végrehajtani, s az új találmány igy a közszemléletnek is ki van téve, hogy azt az utánzástól biztositsam, szabadalmat vettem rá. A végre a keréknek alakot kellett adni; s minthogy a (7) a. egyenlet által adott fölület mértani szerkesztése szerfelett nehéz, oly alakot választottam, melyet könnyen lehetett szerkeszteni s mely más részt a valódi fölület alakot lehetőleg megközelíti.

Ilyen alak pedig a kúpfölület, mely még a hengerfelületet is, mint külön specialitást, magában foglalja. Hogy pedig a valódi fölülethez beburkoló henger fölületek gondolhatók, arról azon körülmény biztosit, hogy, a fentebbiek szerint, a valódi fölület egy henger fölülettel beburkolható. A kúpfölület pedig akkép nyeretett, hogy, a (7) alatti alsó egyenletből előkerülő görbét vezető görbeül választván, 3. ábra szerint a $z0$ tengelyt k és k′ fix-pontokban metsző ka, k′a egyeneseket ac vezető görbe mente szerint eltolatott, mi által kac és k′ac kúpfölületek nyerettek.

3. ábra



Az ilyen szárnyalak hatását akkép véltem megközelitőleg meghatározhatni, hogy a (3) a. képletbe μ, η és δ

helyébe μ_0, η_0 és δ_0 középértékeket teszem, oly formán hogy $\mu_0 = \frac{1}{2}(\mu_, + \mu_{,,})$; $\eta_0 = \frac{1}{2}(\eta_, + \eta_{,,})$; $\delta_0 = \frac{1}{2}(\delta_, + \delta_{,,})$; $\mu_, \ \eta_, \ \delta_, \ \mu_{,,} \ \eta_{,,} \ \delta_{,,}$ alatt μ η és δ alsó és felső határ értékeit értem. Ily feltevés alatt a (3) a. képlet ezen alakba ment át:

$$\mathfrak{M} = 4\ \frac{\zeta\gamma c}{2g} \cdot \frac{\sin\delta_0 \operatorname{tg}\mu_0 - \cos\delta_0}{1 + \operatorname{tg}^2\mu_0 + \operatorname{tg}^2\mu_0 \operatorname{tg}^2\eta_0} \iint rvdrdz$$

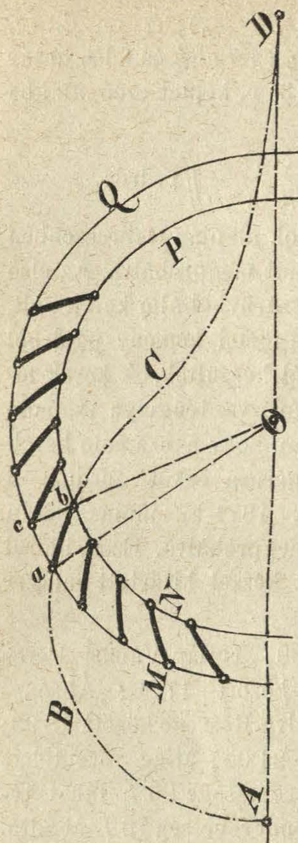
Az ilyen előleges megállapitások alapján Debreczenben és Tiszafüreden három mintakerék lett megpróbálva. Az első 159^{mm} sugaru, 119^{mm} magasságu, 8 szárnyból álló kerék volt, tengelye kötőtűből, alapszerkezete és főélei kemény papirból (carton), a szárnyak szalmapapirból készültek. A kerék főképen sebesség-mérésekre lévén határozva, tengelye számoló készülékkel volt felszerelve olyformán, hogy a számoló kerék a szárnykerék minden tíz—tíz forgására egyet fordul; a kerék a debreczen-szatmári vasút 1871-ki junius 26-án történt megnyitása alkalmával lett megpróbálva. Ezen, időről időre a waggon ablakjából szabad kézzel kitartott műszer következő adatokat szolgáltatott:

Debreczen-Haláp között 17·88; Haláp-Vámos Pércs között 20·42; V. Pércs-Ábrány között 17·88; Ábrány-Mihályfalva között 19·63; Mihályfalva-Reszege között 18·93; végre Reszege-Nagy-Károly között 21·05; átlag véve tehát 19·3 láb sebességet. A vonat közép sebessége $26\frac{2}{3}$ lábat tévén, a forgási sebesség e szerint a vonat sebesség 72%-át adta.

A második mintakerék Tiszafüreden próbáltatott meg; átmérője 1^m; magassága $\frac{1}{2}^m$; önsulya 16—17 font volt. A kerék alszerkezete 1" vastag korongból, a tengely 2" négyszög-átmetszésü két vas csapon járó lécz volt; a 8 szárny szegélyei 1" vastag léczekkel voltak beszegélyezve, a szárny maga vastag zsákvászonnal bevonva. Ezen kerék 10' sebes szél mellett mozgásba jött, ereje nem lett külön meghatározva.

A harmadik mintakerék ismét Tiszafüreden probáltatott meg; átmérője $1·21^m$, magassága $0·4^m$, önsulya 17 font volt; alszerkezete 1" vastag deszkakorongból, a tengely $1\frac{1}{2}$" □-átmetszésü léczből állott; a 16 zsákvásznas szárnyak szegélyei 3^{mm} vasdróttal voltak kierősitve. Ezen kerék alig 3' sebes

4. ábra.



szél mellett eleven forgásba jött; 10′ sebes szél mellett a tengelyére alkalmazott 23″ hosszu fékemeltyű $^2/_{10}$ font megterhelése alatt még 18 forgást hajtott végre perczenként, müvelete pedig a csapzsurlódás betudásával 0·84 lábfontot tett. A szél sebessége egy külön, meglehetős pontosságu, szélmérővel határoztatott meg.

A csekély és primitiv észleletek arra látszottak mutatni, hogy a kerék hatása a szárnyak számától függ. Igy állván a dolog, a számitást ez irányban folytattam.

5.

Ha a szárnyak számát szaporítjuk, a kerék lapátkerékké, a szárny pedig lapáttá lesz. Legyen tehát ABCD (4. ábr.) az O pont körül forgó szárny fentebb lefejtett alapgörbéje s ba elem az abból kiszelt lapát-alapvonal; tehát MQ a külső-, NP a belső lapátkoszoru, s ao $=$ r, a külső-, bo $=$ $r_{\prime\prime}$ a belső koszorúsugár, végre bc $=$ b a sugárilag mért koszorúszélesség. Miután felteszem, hogy az ab lapát belső b vége a szomszéd lapát külső c pontjának co sugarába esik, világos, hogy ba lapátiv annál kisebb, mennél több lapátot teszünk fel.

Ezt előre bocsátva a (3) a. képletre térünk vissza, mely η-ra nézve, tudvalevőleg Max. ha $\eta = o$. Ezt feltévén, a (3) a. képlet ezen alakra hozható:

$$\mathfrak{M} = 4\,\frac{\zeta\gamma c}{2g}\iint \mathrm{rvdf}\,\cos^2\mu\,(\sin\delta\,\sin\mu - \cos\delta\,\cos\mu)$$

Miután pedig ABD érintő sík (1-ső ábr.) xy alapsíkra $\perp$, annak hajlása TOU síkhoz CDB$\sphericalangle = \mu$ szög által adódik ki; tehát ha azon, egy df térfogatu elemet kiszelünk, dfcosα szorzat ezen terület vetülete UOT síkra lesz. Ha most az oz irányban mérendőt öszrendező z-vel, az OD irányban mérendőt r-el jeleljük, dfcosμ = dr. dz. Mivel továbbá v forgási sebesség = rw, ha r alatt A pont forgási sugarát, w alatt pedig a szögi sebességet értjük: akkor a képlet:

$$\mathfrak{M} = 4 \frac{\zeta\gamma cw}{2g} \iint r^2 drdz \cos\mu \,(\sin\delta \sin\mu - \cos\delta \cos\mu$$

megy által.

Tekintve most hogy μ és δ szögek az ab lapát csekély kiterjedés e miatt csak igen csekély változásnak lehetnek alávetve, a μ és δ-tól függő tényezők is az egészlet határain belül állandóknak tekinthetők s mint ilyenek, az egészlési jel elé tehetők, ennek folytán lesz:

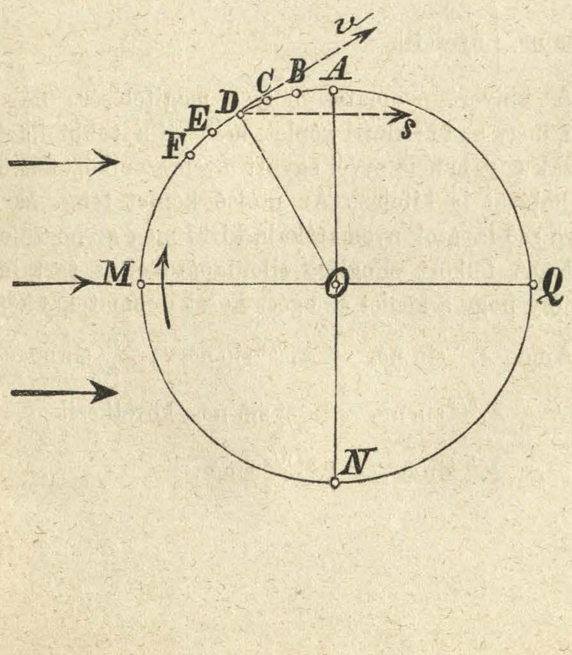
$$\mathfrak{M} = 4 \frac{\zeta\gamma cw}{2g}. \cos\mu \,(\sin\delta \sin\mu - \cos\delta \cos\mu) \iint r^2 drdz.$$

Az r és z szerinti műtétek azonban, miután felteszszük hogy ABD érintő sík $\perp$ xy-ra, egymástól függetlenek; ha tehát azokat külön-külön végrehajtjuk s z helyébe h-t irunk:

$$\mathfrak{M} = 4 \frac{\zeta\gamma cw}{2g}. \cos\mu \,(\sin\delta \sin\mu - \cos\delta \cos\mu)\, h \left(\frac{r_{,}^{3} - r_{,,}^{3}}{3}\right)$$

vagy mivel $r_{,,} = r_{,} - b$ és $r_{,,}^{3} = r_{,}^{3} - 3r_{,}^{2}b + 3r_{,}b^{2} + b^{3}$:

5. ábra.



$$\mathfrak{M} = 4\,\frac{\zeta\gamma cwhb}{2g}\left(\frac{3r_,^2 - 3r_,b + b^2}{3}\right)\cos\mu\,(\sin\delta\sin\mu - \cos\delta\cos\mu).$$

Ezek után a lapátok elosztása szemlélendő. A lapátok t. i. a külső koszorút egyenlő részekre osztván, legyen MQ (5 ábr.) a koszoru s A, B, C, D,.... a beosztás pontjai; akkor arc AB = arc BC = arc CD =.... De ezen AB, AC, AD,.... ívek az utólsó képletbeli δ-val állanak összfüggésben; Ds szélirány t. i. Dv forgási iránynyal olyan δ=v Ds∢ képez, mely DOA∢-el egyenlő. Ha AB=δ_0, akkor AC=$2\delta_0$ AD=$3\delta_0$;.... Ha tehát az utólsó képletet ezen A, B, C, D,.... pontok által jelzett lapátokra alkalmazzuk, az abban előforduló δ helyébe egymásután: δ_0, $2\delta_0$, $3\delta_0$.... teendő A többi mennyiségek változatlanok. E szerint lészen:

$$\mathfrak{M}_0 = 4\,\frac{\zeta\gamma cwhb}{2g}\left(\frac{3r_,^2 - 3r_,b + b^2}{3}\right)\cos\mu\,(\sin\delta_0\sin\mu - \cos\delta_0\cos\mu)$$

$$\mathfrak{M}_, = 4\,\frac{\zeta\gamma cwhb}{2g}\left(\frac{3r_,^2 - 3r_,b + b^2}{3}\right)\cos\mu(\sin 2\delta_0\sin\mu - \cos 2\delta_0\cos\mu)$$

$$\mathfrak{M}_{,,} = 4\,\frac{\zeta\gamma cwhb}{2g}\left(\frac{3r_,^2 - 3r_,b + b^2}{3}\right)\cos\mu(\sin 3\delta_0\sin\mu - \cos 3\delta_0\cos\mu$$

s ha összetezünk, AMN félkörre nézve:

$$\mathfrak{M} = 4.\,\frac{\zeta\gamma cwhb}{2g}\left(\frac{3r_,^2 - 3r_,b + b^2}{3}\right)\left[\sin\mu\cos\mu\,\Sigma_0^{\pi}\sin n\delta_0 - \cos^2\mu\right.$$

$$\left.\Sigma_0^{\pi}\cos n\delta_0\right]$$ nyeretik.

A kinyert nyomaték helyes megitélésére figyelembe veendő, hogy az (1) alatti képlet, melyből a többi lefejtetett, nem csak egy, hanem evvel együtt a vele szemközt fekvő ellenlapát hatását is kifejezi. Az utólsó képlet tehát az AMN félkörre eső lapátok nyomatékain kivül még az hozzájok tartozó, NQA félkört elfoglaló ellenlapátokét is tartalmazza; ebből foly, hogy a képlet az egész kerék nyomatékát képviseli.

Ámde $\Sigma_0^{\pi}\sin n\delta_0 = \Sigma_0^{\pi/2}\sin n\delta_0 + \Sigma_{\pi/2}^{\pi}\sin n\delta_0$ és mivel

$\Sigma_0^{\pi/2}\sin n\delta_0 = \Sigma_{\pi/2}^{\pi}\sin n\delta_0$, következik:

$$\Sigma_0^{\pi}\sin n\delta_0 = 2\Sigma_0^{\pi/2}\sin\delta_0.$$

Más részt:

$\Sigma_{\pi/2}^{\pi} \cos n\delta_0 = \cos \pi/_2 + \cos(\pi/_2 + \delta_0) + \cos(\pi/_2 + 2\delta_0) + \ldots$
$\ldots + \cos(\pi - 2\delta_0) + \cos(\pi - \delta_0) + \cos \pi$ vagy ha a sort megforditjuk:

$\Sigma_{\pi/2}^{\pi} \cos\delta = \cos\pi + \cos(\pi - \delta_0) + \cos(\pi - 2\delta_0) + \ldots.$
$\cos(\pi/_2 + \delta_0) + \cos \pi/_2$ azaz:

$= - \cos 0 - \cos\delta_0 - \cos 2\delta_0 - \ldots. - \cos \pi/_2$

$= - (\cos 0 + \cos . + \cos 2 . + \ldots. \cos \pi/_2) = -$
$\Sigma_0^{\pi/2} \cos n\delta_0$

Minthogy tehát:

$\Sigma_{\pi/2}^{\pi} \cos n\delta_0 = - \Sigma_0^{\pi/2} \cos n\delta_0$ következik:

$\Sigma_0^{\pi/2} \cos n\delta_0 + \Sigma_{\pi/2}^{\pi} \cos n\delta_0 = \Sigma_0^{\pi} \cos n\delta_0 = 0$

Ezeket az utólsó képletre alkalmazva, lesz:

$\mathfrak{M} = 4 \frac{\zeta\gamma cwbh}{2g}\left(\frac{3r,^2 - 3r,b + b^2}{3}\right). 2 \sin\mu \cos\mu\ \Sigma_0^{\pi/2} \sin n\delta_0$ azaz

(9) . . . $\mathfrak{M} = 4 \frac{\zeta\gamma cwbh}{2g}\left(\frac{3r,^3 - 3r,b + b^2}{3}\right) \sin 2\mu\ \Sigma_0^{\pi/2} \sin n\delta_0$

Az $\mathfrak{M}$ tehát legnagyobb ha, caeteris paribus, $2\mu = 90^0$ azaz ha $\mu = 45^0$. Minthogy pedig η és μ azaz CAD és CDM szögek, a lefejtettek szerint, ismeretes, ABD érintő sík s vele együtt a lapát fekvése is tökéletesen ismeretes. Ebből látjuk, hogy mi a (7) alatti egyenlet által kifejezett görbe szerkesztését egészen kerültük.

Az utólsó egyenletre visszatérvén, figyelembe veendő hogy:

$\Sigma_0^{\pi/2} \sin n\delta_0 = \sin\delta_0 + \sin 2\delta_0 + \ldots. \sin n\delta_0$ és $n\delta_0 = \pi/_2$; ámde:

$$\sin\delta_0 + \sin 2\delta_0 + \ldots. \sin n\delta_0 = \frac{\sin n\delta_0/_2 \sin(n + 1/_2)\delta_0}{\sin\delta_0/_2}$$

ebből pedig

$$\Sigma_0^{\pi/2} \sin n\delta_0 = \frac{\sin 45^0 \sin(45^0 + \delta_0/_2)}{\sin\ _0/_2} = \frac{\cos\ _0/_2 + \sin\delta_0/_2}{2\sin\ _0/_2},$$ s

ennél fogva:

$$(10)\ \ldots\ \mathfrak{M} = 4\,\frac{\zeta\gamma cwhb}{2g}\left(\frac{3r_,^2-3r_,b+b^2}{3}\right)\frac{\cos\delta_0/_2+\sin\delta_0/_2}{2\sin\delta_0/_2}$$

s ez a nyomatéknak tökéletes kifejezése.

A képlet még másnemü átalakitásokon is keresztül vezetendő. Ha ugyanis a 3-dik ábrát szemléljük, észreveszszük, hogy abc, a lapát kicsinységénél fogva egyenes vonalu, derékszögü, egyenszáru $\triangle$-nek tekinthető, melyben bc oldal ac-vel egyenlő. De ca ív, miután aoc$\sphericalangle = \delta_0$ és ao sugár $= r_,$: $r\delta_0$ szorzat által kifejezhető; e szerint:

$$\mathfrak{M} = 4\,\frac{\zeta\gamma cwhr_,^3}{2g}.\,\delta_0\left(\frac{3-3\delta_0+\delta_0^2}{3}\right)\left(\frac{\cos\delta_0/_2+\sin\delta_0/_2}{2\sin\delta_0/_2}\right)$$

Ha a lapátok száma nagy, δ_0 aránylag véve igen kicsiny lesz, melynek felsőbb hatványai elhanyagolhatók, azon kivül, ha δ_0 kicsiny, $\cos\delta_0/_2 = 1$ és $\sin\delta_0/_2 = \delta_0/_2$. Az utolsó képlet tehát ebbe változik át:

$$(11)\ \ldots\ \mathfrak{M} = 2.\,\frac{\zeta\gamma cwhr_,^3}{2g}(1-\delta_0)(2+\delta_0.$$

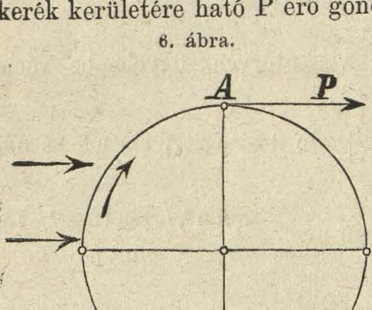
Ha végre igen sok lapátot teszünk fel, ha δ_0 végtelen kisebbülésre átmegy, a képlet ezen határ felé közeledik:

$$(12)\ \ldots\ \lim\mathfrak{M} = 4\,\frac{\zeta\gamma cwhr_,^3}{2g}.$$

6.

Hogy a nyomatékról a müveletre átmehessünk, figyelembe veendő, hogy a lefejtett $\mathfrak{M}$ nyomatékhoz mindig egy a kerék kerületére ható P erő gondolható, mely ugyanazon nyomatékot fejleszti. Ezen P erő támadó pontja akárhol, tehát A pontban is (6. ábr.) gondolható, olyformán, hogy P erő a szélirányhoz //. Ha ezen P erő támadó pontja a szél támadó pontjával egyenlő mozgásu, a P erő épen annyi munkát fog fejleszteni mint a kerék által felvett szélerő.

6. ábra.



Ámde a szélnek A támadó pontja $v_,$ forgási sebességgel halad AM körül, a szél pedig c sebességgel birván, világos hogy a támadó erő csak $c-v_,$ viszonylagos sebességgel haladhat, ez tehát P erő sebessége. De az A pont csak az $r_,$ sugaru AM körben mozoghat, e körmozgásnak szögi sebessége tehát $= \frac{c-v_,}{r_,}$.

Más részt mivel felteszszük, hogy ezen $r_,$ emeltyükaron müködő P erő $\mathfrak{M}$ nyomatékot fejleszt, kell hogy:

$\mathfrak{M} = P\, r_,$; a munka pedig melyet ezen erő végrehajt, nyeretni fog, ha a nyomaték a szögi sebességgel szoroztatik. Ebből következik:

$$L = M. \frac{c-v_,}{r_,} \text{ azaz:}$$

$$L = 2 \frac{\zeta\gamma c w h r_,^2}{2g} (c-v_,)(1-\delta)(2+\delta) \text{ és}$$

$$\operatorname{Lim} L = 4. \frac{\zeta\gamma c w h r_,^2}{2g}(c-v_,)\text{; vagy még mivel } v_, = r_, w\text{:}$$

$$L = 2 \frac{\zeta\gamma c v_,(c-v_,)}{2g} r_, h (1-\delta)(2+\delta \text{ és}$$

$$\lim L = 4 \frac{\zeta\gamma c v_,(v-v_,)}{2g} r_, h$$

A két képletben $2r_,$ a kerék átmérője, h annak magassága és $2r_, h$ a kerék átmetszése, ezt röviden F-el jelelvén, következik:

$$(13) \ldots\ldots \begin{cases} L = \zeta\, (1-\delta)(2+\delta). \dfrac{\gamma c v_,(c-v_,)\, F}{2g} \text{ és} \\ \lim L = 2\zeta. \dfrac{\gamma c v_,(c-v_,)\, F}{2g} \end{cases}$$

s ezek a munkafejlesztés átalános kifejezései.

Az azokban előforduló $v_,(c-v_,)$ szorzat maximum, ha $v_, = {}^1/_2 c$; s ez a legkedvezőbb kerék megterhelés esete. Azt feltévén, a két képlet végre ily alakot nyer:

$$(14) \ldots\ldots \begin{cases} L = \dfrac{\zeta(1-\delta)(2+\delta)}{4}. \left[\dfrac{\gamma F c^3}{2g}\right] \text{ és} \\ \lim L = \dfrac{\zeta}{2}. \left[\dfrac{\gamma F c^3}{2g}\right]. \end{cases}$$

Hogy az első képlet mily gyorsan közeledik lim L-hez ha a lapátok szaporittatnak, íme a képletek mutatják; ha t. i. a kerék

40 lapátu	$L = \zeta$.	0·0005772	Fc^3
80 »	$L = \zeta$.	0·00061	Fc^3
200 »	$L = \zeta$.	0·000620	Fc^3
360 »	$L = \zeta$.	0·000624	Fc^3
végre lim	$L = \zeta$.	0·00063004	Fc^3

7.

Ezen elmélet alapján Kolozsvártt egy mintakereket készitettem következő méretek szerint: átmérő 18 bécsi hüv. magasság 12"; lapátok száma = 80. A kerék alszerkezete két $\frac{1}{2}$ hüvelykes deszkakorongból állott, melyek két léczczel s két ékkel a 2'6" hosszu s $\frac{3}{4}$" átmérőju henger alaku tengelyre ráerősittettek; a tengely két vége vas csappal volt felszerelve, az alsó mint álló csap vas lemezen járt, a felső mint nyakcsap egy átlyukasztott horganylemez által tartatott. A lapátok 1" széles vászon szalagokból állottak.

Az állvány 2'8" magas és 1'8" belső szélességü kereket képezett, melynek alsó és felső talpfái a tengely két csapját tartották. Hogy az állvány önmagában egyenesen állhasson, az alsó talpfa két keresztfával volt ellátva. Az egész készülék önsulya 8 ℔, a kerék önsulya $6_1/^2$ ℔-nyi volt.

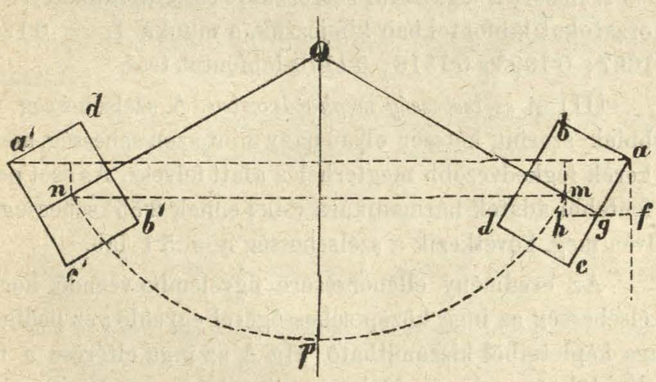
Az erő 9" hosszu dörzsfékemeltyükaron méretett, mely hogy forgás közben a tengely szerint le ne csuszszon, a kerék felső keresztfájáról lelógó czérnaszálakra felfüggesztetett úgy hogy az emeltyü netaláni ingásait a tengely körül akadály nélkül megtehesse. Az emeltyü papirdörzsvánkosait két czérnaszál szoritotta össze, melyeket egy alájok tett ékkel tetszés szerint meg lehetett feszitni.

Az állvány oldalán egy kis, két vascsapon könnyen mozgatható, $\frac{1}{4}$" átmérőjü henger volt alkalmazva. A fékemeltyü végpontjából egy czérnaszál vezettetett a kis hengerhez, mely az emeltyü feszületét evvel közölte. A henger, $\perp$-en tengelyére, át volt furva s a furáson keresztül egy gyors-mérleg módjára $\frac{1}{2}$ latról $\frac{1}{2}$ latra beosztott 5 mm. vashuzal huzatott, melylyel a czérnaszál feszülete méretett. Ezen készülék az emeltyü erejét kis vigyázat mellett $1/8$ latról $1/8$ latra adta ki.

Ha ezen minta kerék, állványa felső részén tartva, inga formára ingásba hozatott, a kerék eleven forgásba jött, mely forgás azon arányban meglassudott, mely arányban a fék feszitő szálai jobban meghuzattak. Ezen kisérlet, noha első látszatra semmi pontossággal sem látszott birni, a kerék mozgási viszonyait meglepő pontossággal adja ki; az eljárás a következő:

I) *Az ingási idő meghatározása.* A kellő erővel hajtott készülék (7. ábr.) váltakozva majd abcd majd a'b'c'd' helyzetbe jő; az egész tágulat $aa'=8'$; mop $\sphericalangle$ pedig $= 60$. Az egész készülék sulypontja a kerék közepébe, m-be esik; fh és $f'h'$ hosszak, tehát aa'-ból kivonandók. De $f'h'=fh=fg+gh$ s miután $agf \sphericalangle = gmh = 60^{\circ}$; $fg = \frac{1}{2}ag = r/2$, gh pedig $= gm \sin 60^{\circ} = h/2 \sin 60^{\circ}$; tehát $fg=0{\cdot}375$, $gh=0{\cdot}432$ és $fh=0{\cdot}807^{I}$. A valódi mn tágulat tesz tehát: $aa' - 2fh = 6{\cdot}386$ vagy kerekitve $= 6{\cdot}4^{I}$.

(7. ábra).



Az mn a 180°-nyi mon szög húrja; a hozzá tartozó om sugár tehát $= 0{\cdot}577 \times 6{\cdot}4 = 3{\cdot}693$ vagy kerekitve $= 3{\cdot}7^{I}$ s ez a keresett ingahossz.

A légüres térben végrehajtott ingás időtartama a képlet szerint:

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\sin \text{vers}\,\alpha}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{\sin \text{vers}\,\alpha}{2}\right)^2+\ldots\ldots\right)$$

kiszámitva ha abban $r = 3{\cdot}7$ és $\alpha = 60^0$ tehát $\sin \text{vers}\,\alpha = {}^1/_2$, ezt adja:

$$t = \pi\sqrt{\frac{3{\cdot}7}{31}}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{9}{256}+\ldots\right) = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\right) = 1{\cdot}2$$

másod percz.

A levegő ellentállása folytán azonban az ingamozgás meglassúdik, a valódi ingási idő tehát $1{\cdot}3^{\text{mp}}$-re tehető.

II) *A munka meghatározása.* Ha a fékemeltyü egymásután:

1 ; 1·5 ; 2·5 ; 3 ; és $4^1/_3$ lattal megterheltetett, a kerék egy ingás alatt egymásután:

7·07 ; 6·2 ; 4·4 ; 2·81 ; 1·49 szöggel megfordult, mely szögeknek

5·3 ; 4·65 ; 3·3 ; 2·107 ; 1·12 lábnyi körutak feleltek meg; ezen 1·3 m. p.-ben leirt utak, a másodperczre vonatkozva, következő forgási sebességeket adtak:

4·08 ; 3·6 ; 2·55 ; 1·62 ; $0{\cdot}86^{\text{I}}$. Ha a legfelső számsort a legalsóval szorozzuk, s ezen láblatokat jelentő szorzatokat lábfontokban kifejezzük, a munka L = 0·1275; 0·1687; 0·1993; 0·1518; 0·1170 lábfontot tesz.

III) *A szélsebesség meghatározása.* A szélsebesség, fentebbiek szerint, kétszer olyan nagy mint azon sebesség, melyet a kerék legkedvezőbb megterhelés alatt felvesz. Az eset pedig a fentebbi adatok harmadikára esik; ennek $2{\cdot}55^{\text{I}}$ sebesség felelvén meg, következik a szélsebesség c = 5·1 láb.

Az eredmény ellenőrzésére figyelembe veendő, hogy a szélsebesség az inga közép sebességével egyenlö; ez pedig az inga képleteiből kiszámitható. Ha A az inga eltérése a függélyestől, t az ingás ideje, r az ingahossza s m egy az inga formájától s a közeg természetétől függő móditó; akkor a legnagyobb ingasebesség

$$v = A\sqrt{gr}.\sin t\sqrt{\frac{g}{r}} + \frac{mrA^2}{3}\sqrt{gr}\left(\sin 2t\sqrt{\frac{g}{r}} - \sin t\sqrt{\frac{g}{r}}\right),$$

mely képlet ha m elenyészőnek feltétetik, ezen alakot veszi fel:

$v = A\sqrt{gr}$. sint $\sqrt{\frac{g}{r}}$. Ámde fenebb volt $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ $\left(1 + \frac{1}{16}\right)$; $t\sqrt{\frac{g}{r}}$ — tehát $= \pi + \frac{\pi}{16}$ és $\sin t\sqrt{\frac{g}{r}} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{16}\right)$ $= - \sin\frac{\pi}{16} = - \sin 11^{\circ} 15'$; ebből következik:

$v = - A\sqrt{gr} \sin 11^{\circ} 15 = - 7{\cdot}57^{I}$. Az analytikai értelmü nemleges jel, miután itt csak az absolut érték kerestetik, elhagyható. Az inga legnagyobb sebessége tesz tehát $7{\cdot}57^{I}$. Megjegyzendő azonban hogy a sebesség számértékre nézve valamivel kisebb mint a tényleges sebesség, miután a képlet második elhagyott tagja hasonelőjelü az azt megelőző első taggal.

A közép sebesség pedig legbiztosabban a Simpson-féle képletből fog nyeretni. Ha t. i. az inga m-ben van, sebessége $= 0$; ha p-ben van, sebessége $= 7{\cdot}57$ s ha n-ben van, sebessége ismét $= 0$. Ezen $v_{\circ} = 0$, $v_{1} = 7{\cdot}57$ és $v_{2} = 0$ értékekből következik:

$v = \frac{v_0 + 4\, v_1 + v_2}{6} = {}^2/_3 \times 7{\cdot}57 = 5{\cdot}04^{I}$. Ez tehát a közép sebesség, mely a fentebbi $5{\cdot}1^{I}$ sebességgel csakugyan összetalál.

IV) *Az ellentállási módító meghatározása.* A végre elébb a (13) a. képlet beigazítandó; szerinte van:

$L = \frac{\zeta v}{2g} (1 - \delta)(2 + \delta)$ F. vc $(c - v)$. A kerék átmetszése $F = 1{\cdot}5\square^{I}$, s miután 80 lapáta van: $\delta = \frac{2\pi}{80} = 0{\cdot}078539$; eszerint: $(1 - \delta)(2 + \delta) = 1{\cdot}915292$. végre $\frac{\gamma}{2g} = 0{\cdot}0012601$, s ha ezen kivül $v = nc$ azaz $n = \frac{v}{c}$, lesz:

$L = \zeta\; 0{\cdot}0036200\; n\,(1 - n)\, c^3$; de $c = 5{\cdot}1$, tehát végre:

$L = \zeta\, 0{\cdot}48021\, n (1 - n)$. Legyen most $0{\cdot}48021\; n\,(1 - n) = u$, akkor:

$L = \zeta . u.$

A fentebbi öt kisérlet szerint egymásután:

$v = 4{\cdot}08 \quad ; 3{\cdot}6 \quad ; 2{\cdot}55 \quad ; 1{\cdot}62 \quad ; 0{\cdot}86$ tehát:

$n = 0{\cdot}800 \quad ; 0{\cdot}706 \quad ; 0{\cdot}500 \quad ; 0{\cdot}317 \quad ; 0{\cdot}168$ ennek folytán:

$n(1-n) = 0{\cdot}1600 \quad ; 0{\cdot}2075 \quad ; 0{\cdot}2500 \quad ; 0{\cdot}2165 \quad ; 0{\cdot}1397$ s igy végre:

$u = 0{\cdot}07683 \; ; 0{\cdot}09964 \; ; 0{\cdot}12005 \; ; 0{\cdot}10396 \; ; 0{\cdot}06709$ van.

Fenebb találtatott:

$L = 0{\cdot}1275 \; ; 0{\cdot}1687 \; ; 0{\cdot}1993 \; ; 0{\cdot}1518 \; ; 0{\cdot}1170$ eszerint:

$\zeta = 1{\cdot}66 \quad ; 1{\cdot}69 \quad ; 1{\cdot}66 \quad ; 1{\cdot}46 \quad ; 1{\cdot}74.$

A kivánt együttható legbiztosabban a legkisebb négyzetek elve alapján fog kiszámittatni, s a végre e képlet:

$\zeta = \frac{\Sigma Lu}{\Sigma u^2}$ lesz használandó. És ugyan:

$Lu = 0{\cdot}00979 \; ; 0{\cdot}01679 \; ; 0{\cdot}02393 \; ; 0{\cdot}01578 \; ; 0{\cdot}00785,$
miből $\Sigma Lu = 0{\cdot}07414$

$u^2 = 0{\cdot}00595 \; ; 0{\cdot}00993 \; ; 0{\cdot}01560 \; ; 0{\cdot}01081 \; ; 0{\cdot}00450$
miből $\Sigma u^2 = 0{\cdot}04679$

(15)............ ζ tehát $= \frac{0{\cdot}07414}{0{\cdot}04679} = 1{\cdot}58.$

Megjegyzendő most hogy Borda és Thibault a levegő ellentállását egy körben forgatott lap ellen megmérték, s azt $= 1{\cdot}5$ találták; mely érték a most kiszámitott értékkel ismét egyezik.

V) *A képletek végleges megalapitása.* ζ együtthatót meghatározván, a felállitott képletek szerinte berendezhetők, és ugyan:

$$\zeta = 1{\cdot}58$$

$$\frac{\zeta\gamma}{2g} = 0{\cdot}001991 \text{ és } \left(\text{ha } \frac{v}{c} = n\right)$$

(16)......
$$\begin{cases} L = 0{\cdot}001991\,(1-\delta)\,n\,(2+\delta)\,(1-n)\,c^3\,F; \text{ vagy legkedvezőbb megterhelés alatt;} \\ L = 0{\cdot}0004977\,(1-\delta)\,(2+\delta)\,c^3\,F, \text{ végtére;} \\ \text{Lim. } L = 0{\cdot}0009954\,F\,c^3. \end{cases}$$

Coulomb, ki a szélkerék körül sokat fáradozott, a közönséges szélkerék hatását, hollandi szerkezetü szélmalmon szerzett tapasztalatai alapján e képlettel fejezte ki:

$$L = 0{\cdot}000557\,F\,c^3.$$

A közönséges kerék miveletét egységül vevén, a vizszintes keréké = 1·8, azaz a vizszintes kerék 80 % haladja meg a függélyes kereket. Ha pedig a teljes szélerő egységül vétetik, miután erre nézve $L' = \frac{\gamma F c^3}{2g} = 0{\cdot}00126\ Fc^3$, következik: $L = 0{\cdot}788\ L'$ azaz a vizszintes kerék 78 %-ot vesz fel a szél erejéből. Az uj kerék tehát csakugyan a jeles motorok közé számitandó.

A függélyes kerék csak 39 % vesz fel a szél erejéből.

A hozott bizonylat szigoru és döntő; kétszer csatlakozik oly tapasztalati tényekhez, melyek a felállitott elmélet területén kivül állván, ettől nem befolyásoltatnak. Az első a szélsebesség meghatározása, mely az inga középsebességével; — a második az ellentállási móditó, mely ismét a Borda és Thibault-félével egyezik. Hogy tehát a felállitott elmélet áll, kétségen kivülinek tekintendő.

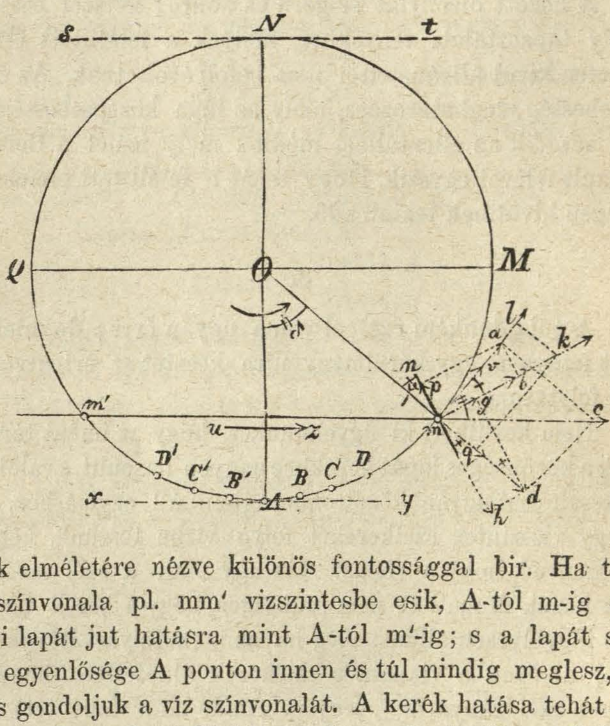
8.

A tulajdonképi czél el volna ugyan érve; de mielőtt a tollat leteszem, egy körülmény ujra késztet az értekezést tovább folytatni.

Nem kerülheti ki figyelmünket, hogy az imént tárgyalt kerék a közönséges lapát kerékhez nagyon hasonlit, s valóban a két kerék csakugyan közelrokonságban áll egymáshoz. Mert ha egy vizszintes szélkereket folyó vizbe teszünk, kétséget sem szenved, hogy a viz azt szintugy mint a szél mozgásba fogja hozni. A mellett nem szükséges, hogy a kerék tengelye épen függélyesen álljon; elég ha az a viz folyási irányára $\perp$, mivel az épen a vizszintes szélkerék alapfeltéte, hogy tengelye a szél irányára $\perp$ legyen. Ámde ha a vizbe tett kerék tengelye tetszés szerinti állásba hozható, akkor megeshetik, hogy az vizszintes helyzetbe jön. Ily felállitás mellett azonban a kerék csak közönséges lapátkerék, mely egészen viz alá van merítve. Hogy a kerék mozgási viszonyai ezen esetben is, ugy mint a fentebbiekben, feltételezettben megmaradnak, kétségbe nem vonható. Ha most ezen kereket emeljük ugy, hogy annak csak alsó része marad a vizben: ime, akkor a kerék alólcsapó kerékbe ment által. De ha a két kerék magában véve oly közel rokonságban van: akkor okvetlen kell, hogy a két kerék elmélete is összfüggésben álljon. S valóban a két keréknem erőműtani képletei egy közös képletből folynak. Lássuk tehát ezen általános képletet.

Legyen A M N Q (8. ábra) az O pont körül forgó kerék s A, B, C, D, ... m; A′, B′, C′, D′.... m′ az egyes lapátok, végre uz a folyó víz iránya; akkor az uz-re ⊥ AN átmérő a

8. ábra.



kerék elméletére nézve különös fontossággal bir. Ha t. i. a víz színvonala pl. mm′ vizszintesbe esik, A-tól m-ig épen annyi lapát jut hatásra mint A-tól m′-ig; s a lapát szám ezen egyenlősége A ponton innen és túl mindig meglesz, bár hol is gondoljuk a víz színvonalát. A kerék hatása tehát nyeretni fog, ha az A-tól M-felé sorakozó, víz alatti lapátok hatásait az A-tól Q-felé sorakozók hatásaihoz adjuk.

Ha a lapátok összes száma 4n, a két-két lapátközti távolság, ívmértékben kifejezve $= \frac{2\pi}{4n} = \frac{\pi}{2n}$; legyen rövidség kedvéért $\frac{\pi}{2n} = \delta_0$, akkor:

arc AB $= \delta_0$; arc AC $= 2\delta_0$; arc AD $= 3\delta_0$ stb. hasonlókép arc AB' $= \delta_0$; arc AC' $= 2\delta_0$; arc AD $= 3\delta_0$ stb. Ha pedig tudni akarjuk, hogy hány lapát esik egy adott ívhosszra, akkor ezt csak δ_0 kell osztanunk; pl. az Am ívre eső lapátok száma, ha AOm ívet δ-val jeleljük: $\frac{\delta}{\delta_0} + 1$; az mm' ívre pedig: $\frac{2\delta}{\delta_0} + 1$ lapát fog esni.

Ezek után legyen mn egy tetszés szerinti lapát, s omn $= \mu$ annak hajlása om sugarhoz, végre mk a lapát deréklője s ml a kerék érintője m pontban.

Legyen továbbá mc $=$ c a víz sebessége s mv $=$ v a kerék forgási sebessége, végre Aom szög $= \delta$.

Az mc, macd derékszögény szerint am s md oldalsebességekre oszlik, ugy hogy am $\perp$ mO s md Om irányába esik a mellett amc $\sphericalangle =$ AOm $= \delta$ s így:

ma $=$ c cosδ; md $=$ c sinδ. Az első a v-vel:

c cos δ — v oldalerőt fogja adni; legyen, nehogy az ábra vonalokkal túlterheltessék, mindjárt maga az ma $=$ (cCosδ — v) akkor ez abmp derékszögény szerint: mn $=$ (cCosδ — v) sinμ és mb $=$ (cCosδ — v) Cosμ oldalsebességekre oszlik. Amaz mn lapát irányába esik, tehát hatás nélkül marad, ez pedig az eredő deréklő sebesség egyik részét képezi.

A még hátramaradt md, gdhm szerint: mh $=$ csinδ Cosμ és mg $=$ c sinδ sinμ oldalsebességekre oszlik; mh a lapát irányába esvén, hatás nélkül marad; az mg ellenben az eredő deréklő sebesség második részét képezi. Minthogy most az mg és mb összetevők egyenlő értelmüek, a keletkező eredő ez lesz:

(c Cosδ — v) Cosμ + c sinδ sinμ $=$ c Cos (δ — μ) — v Cos μ, melynek:

$\frac{1}{2g}$ (c Cos [δ — μ] — v Cos $\mu)^2$ nyomási oszlop megfelel.

Legyen mk ezen nyomási oszlop, akkor a deréklő oszlop lkqm derékszögény szerint, mq $=$ mksinμ és ml $=$ mk Cosμ összetevő oszlopokra oszlik, melyek közül az első Om sugár irányába esvén, hatás nélkül marad, a második ml pedig Om sugárra $\perp$ állván, nyomatékot fejleszt. Ha df az m pontban gondolt lapátelem területe, ζ a lökés móditója s γ a vízsürüsége, akkor:

$$\frac{1}{2g}(c \operatorname{Cos}[\delta-\mu] - v \operatorname{Cos}\mu)^2 \operatorname{Cos}\mu$$ a nyomási oszlop

$$\zeta \frac{df\gamma}{2g}(c \operatorname{Cos}[\delta-\mu] - v \operatorname{Cos}\mu)^2 \operatorname{Cos}\mu$$ a fejlődő nyomás és

$$\frac{\zeta\gamma df}{2g} r (c \operatorname{Cos}[\delta-\mu] - v \operatorname{Cos}\mu)^2 \operatorname{Cos}\mu$$ a nyomás nyomatéka.

Az abban előforduló:

$$df \operatorname{Cos}\mu$$

szorzat azonban nem egyéb, mint az mn szerinti lapátelem vetülete egy mo sugár s a kerék tengelyen keresztül fektetett síkra a vetület területét drdz szorzat által kifejezvén, a nyomatékot pedig $d^2\mathfrak{M}$—el jelelvén:

$$d^2\mathfrak{M} = \frac{\zeta\gamma}{2g}.\, rdrdz\, [c \operatorname{Cos}(\delta-\mu) - v \operatorname{Cos}\mu]^2,$$ melyből

ha egészelünk, s a kijelentett hatványolást végrehajtjuk, s v helyébe rw-t irunk:

$$(17) \ldots\ldots\ldots \mathfrak{M} = \frac{\zeta\gamma}{2g}\iint rdrdz\, [c^2 \operatorname{Cos}^2(\delta-\mu) - 2cwr \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos}(\delta-\mu) + w^2 \operatorname{Cos}^2\mu r^2]$$

s ez az egyes lapátra gyakorolt nyomaték általános kifejezése.

Ha abban $\delta = o$ tétetik, nyilván való, hogy az A pont alatti lapát nyomatéka fog nyeretni, lesz pedig az:

$$(18) \ldots\ldots\ldots \mathfrak{M}_0 = \frac{\zeta\gamma}{2g}\iint rdrdz\, [c^2 - 2cwr + w^2 r^2] . \operatorname{Cos}^2\mu$$

Ha abban pedig $\delta = 180^0$, tekintettel arra, hogy $\operatorname{Cos}(180 - x) = -\operatorname{Cos} x$

$$(19) \ldots\ldots\ldots \mathfrak{M}_{180} = \frac{\zeta\gamma}{2g}\iint rdrdz\, [c^2 + 2cwr + w^2 r^2] \operatorname{Cos}^2\mu$$

A többi lapátra nézve pedig figyelembe veendő, hogy ha $AOm \sphericalangle = +\delta$, ennek ellenében az ellenkezőleg fekvő $AOm' \sphericalangle = -\delta$. Ha tehát δ helyébe $\delta_0, 2\delta_0, 3\delta_0$, értékeket igenlegesen a képletbe bevezetjük, az A-tól M-felé sorakozó lapátok-, ellenben ha azok nemlegesen vezettetnek be, az A-tól Q-felé sorakozók nyomatékait kapjuk. Lesz tehát az elsőkre nézve.

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{\zeta\gamma}{2g}\iint rdrdz\,[c^2 \operatorname{Cos}^2 (\delta_0 - \mu) - 2cwr \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos} (\delta_0 - \mu) + w^2 r^2 \operatorname{Cos}^2 \mu]$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{\zeta\gamma}{2g}\iint rdrdz\,[c^2 \operatorname{Cos}^2 (2\delta_0 - \mu) - 2cwr \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos} (2\delta_0 - \mu) + w^2 r^2 \operatorname{Cos}^2 \mu]$$

$$\mathfrak{M}_3 = \frac{\zeta\gamma}{2g}\iint rdrdz\,[c^2 \operatorname{Cos}^2 (3\delta_0 - \mu) - 2cwr \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos} (3\delta_0 - \mu) + w^2 r^2 \operatorname{Cos}^2 \mu]$$

és ha összetezünk:

$$(20)\ldots\ldots\ldots\mathfrak{M}' = \frac{\zeta\gamma}{2g}\sum_{\delta_0}^{n\delta_0}\iint rdrdz\,[c^2 \operatorname{Cos}^2 (\delta - \mu) - 2cwr \operatorname{Cos}, u \operatorname{Cos} (\delta - \mu) + w^2 r^2 \operatorname{Cos}^2 \mu]$$

Ellenben a Q-felé levő lapátokra nézve, tekintettel arra hogy Cos (— x) = Cos x:

$$\mathfrak{M}_{-1} = \frac{\zeta\gamma}{2g}\iint rdrdz\,[c^2 \operatorname{Cos}^2 (\delta_0 + \mu) - 2cwr \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos} (\delta_0 + \mu) + w^2 r^2 \operatorname{Cos}^2 \mu]$$

$$\mathfrak{M}_{-2} = \frac{\zeta\gamma}{2g}\iint rdrdz[c^2 \operatorname{Cos}^2 (2\delta_0 + \mu) - 2cwr \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos} (2\delta_0 + \mu) + w^2 r^2 \operatorname{Cos}^2 \mu]$$

tehát ha összetezünk:

$$(21)\ldots\ldots\ldots\mathfrak{M}'' = \frac{\zeta\gamma}{2g}\sum_{\delta_0}^{n\delta_0}\iint rdrdz\,[c^2 \operatorname{Cos}^2 (\delta + \mu) - 2wrc \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos} (\delta + \mu) + w^2 r^2 \operatorname{Cos}^2 \mu]$$

A kerék összes nyomatéka tehát nyeretni fog, ha a (18), (20) és (21) a. képletek összegeit veszszük, s ha a kerék egészen víz alatt van, ha ezekhez még a (19) a. képletet hozzá csatoljuk.

Mi előtt ezen műveletet végrehajtjuk, a kijelentett egészléseket kell végrehajtanunk, s ugyan elég ha azt a (20) a. kitételben teszszük, mert ha abban $\mu - \delta$ helyébe $(\mu + \delta)$-t irjuk, az a (21) alattiba fog átváltozni; s ha a két képletben δ-t elenyésztetjük, az első a (18) a második (19) a. egyenletek nyeretnek.

Ámde a (20) egyenlet még így irható:

$$\mathfrak{M}=\frac{\zeta\gamma}{2g}\sum_{\delta_0}^{n\delta_0}[c^2\iint rdrdz\,Cos^2(\delta-\mu)-2cw\iint r^2drdz$$

$$Cos\,\mu\,Cos\,(\delta-\mu)+w^2\iint r^3drdz\,Cos^2\mu]$$

Ha sok a lapát, egy lapát magába véve csak kicsiny lehet s a μ és δ ezen kis területen belül csak igen csekély változásnak lehet kitéve; az ezektől függő függvények tehát az egészlés határain belül állandóknak tekinthetők, minek folytán:

$$\mathfrak{M}=\frac{\zeta\gamma}{2g}\sum_{\delta_0}^{n\delta_0}[c^2\,Cos^2\,(\delta-\mu)\iint rdrdz-2cw\,Cos\,\mu$$

$$Cos\,(\delta-\mu)r^2\iint drdz+w^2\,Cos^2\,\mu\;r^3\iint drdz]$$

Ezt egészelvén, z helyébe h-t irván s a h-t kiemelvén:

$$\mathfrak{M}=\frac{\zeta\gamma h}{2g}\sum_{\delta_0}^{n\delta_0}\Big[c^2\,Cos^2\,(\delta-\mu)\left(\frac{r_,^2-r_{,,}^2}{2}\right)-2cw\,Cos\,\mu$$

$$Cos\,(\delta-\mu)\left(\frac{r_,^3-r_{,,}^3}{3}\right)+w^2\,Cos^2\mu\left(\frac{r_,^4-r_{,,}^4}{4}\right)\Big]$$

De ha $r_,$ a külső —, $r_{,,}$ a belső koszorusugár akkor $r_,$ — $r_{,,}$ a koszoruszélesség, ezt b-vel jelelvén, van: $r_{,,}=r_,-b$; $r_{,,}^2=r_,^2-2r_,b+b^2$; $r_{,,}^3=r_,^3-3r_,^2b+3r_,b^2-b^3$; $r_{,,}^4=r_,^4-4r_,{}^3b+br_,^2b^2-4r_,b^3+b^4$ tehát:

$$\mathfrak{M}=\frac{\zeta\gamma hb}{2g}\sum_{\delta_0}^{n\delta_0}\Big[\frac{c^2(2r_,-b)}{2}\,Cos^2\,(\delta-\mu)-2cw$$

$$\left(\frac{3r_,^2-3r_,b+b^2}{3}\right)Cos\,\mu\,Cos\,(\delta-\mu)+$$

$$+w^2\left(\frac{4r_,^3-br_,^2b+4r_,b^2-b^3}{4}\right)Cos^2\,\mu\Big]$$

Az összetezést tagonként kijelentvén, ha egyuttal:

$$(22)\ldots\ldots\begin{cases}A=\dfrac{\zeta\gamma hbc^2(2r_,-b)}{2.2g}\\[2mm] B=\dfrac{\zeta\gamma hbcw}{2g}\left(\dfrac{3r_,^2-3r_,b+b^2}{3}\right)\text{ és}\\[2mm] C=\dfrac{\zeta\gamma hbw^2}{2g}\left(\dfrac{4r_,^3-br_,^2b+4r_,b^2-b^3}{4}\right)\end{cases}$$

$$\mathfrak{M}=A\sum_{\delta_0}^{n\delta_0}Cos^2\,(\delta-\mu)-2B\sum_{\delta_0}^{n\delta_0}Cos\mu Cos(\delta-\mu)+$$

$$C\sum_{\delta_0}^{n\delta_0}Cos^2\,\mu.$$

vagy mivel δ a μ-től s μ a δ-tól független:

$$\mathfrak{M} = A \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \operatorname{Cos}^2(\delta-\mu) - 2B \operatorname{Cos}\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \operatorname{Cos}$$

$$(\delta-\mu) + C \operatorname{Cos}^2\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} 1$$

Az utólsó tagra nézve tekintetbe veendő hogy $\sum_{\delta_0}^{n\delta_0} 1$ kitétel csak azon lapátok számát fejezi ki, melyekre az Σjel kiterjed; az pedig $=$ n, lesz tehát ha egyuttal Cos $(\delta-\mu)$ feloldatik:

$$\mathfrak{M} = A \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} (\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\mu + \sin\delta \sin\mu)^2 - 2B \operatorname{Cos}\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta^0}$$

$$(\operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\mu + \sin\delta \sin\mu) + nC \operatorname{Cos}^2\mu.$$

Az összetezést, az első tagban kijelentett hatványolás kivitele után, tagonként végre hajtva:

$$(23) \ldots\ldots\ldots \mathfrak{M}_{\delta_0}^{n\delta_0} = A \operatorname{Cos}^2\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \operatorname{Cos}^2\delta + 2A \sin\mu \operatorname{Cos}\mu$$

$$\sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin\delta \operatorname{Cos}\delta + A \sin^2\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin^2\delta - 2B \operatorname{Cos}^2\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta_0}$$

$$\operatorname{Cos}\delta - 2B \sin\mu \operatorname{Cos}\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin\delta + nC \operatorname{Cos}^2\mu.$$

Ez tehát a (20) a. összet fejteménye. A (21) alattiét pedig nyerjük, ha Cos$(\delta-\mu)$ helyébe Cos$(\delta+\mu)$ tehát (Cosμ Cosδ + sinδ sinμ) helyébe (Cosμ Cosδ — sinδ sinμ) teszszük; azaz ha azon tagok előjelét megváltoztatjuk, melyekben sinμ sinδ szorzat első hatványban előfordul; ezt tévén:

$$(24) \ldots\ldots\ldots \mathfrak{M}'^{n\delta_0}_{\delta_0} = A \operatorname{Cos}^2\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \operatorname{Cos}^2\delta - 2A \sin\mu \operatorname{Cos}\mu$$

$$\sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin\delta \operatorname{Cos}\delta + A \sin^2\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin^2\delta - 2B \operatorname{Cos}^2\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \operatorname{Cos}\delta$$

$$+ 2B \sin\mu \operatorname{Cos}\mu \sum_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin\delta + nC \operatorname{Cos}^2\mu.$$

A két képletből, ha $\delta = o$ és $\delta = \pi$,

$$(25) \ldots\ldots \begin{cases} \mathfrak{M}_0 = (A - 2B + C) \operatorname{Cos}^2\mu \text{ és} \\ \mathfrak{M}_\pi = (A + 2B + C) \operatorname{Cos}^2\mu \text{ s ezek a (18) és} \\ \text{(19) alattiak fejteményei.} \end{cases}$$

Ha ezek után felteszszük, hogy a víz színvonala (8. ábr.) mm' vizszintesig felér, s a hatásra kerülő lapátok m'-től kezdve

A ponton keresztül m pontig érnek, az A ponton innen és túl fekvő lapátok számai egyenlők; s akkor ha arc $Am = n\delta_0$; arc $Am' = -n\delta_0$ a lapátok összes nyomatéka:

$$\mathfrak{M} = \Sigma_{-n\delta_0}^{+n\delta_0} \mathfrak{M} = \Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \mathfrak{M} + \mathfrak{M}_0 + \Sigma_{-n\delta_0}^{-\delta_0} \mathfrak{M} \text{ lesz.}$$

Ámde minthogy $\Sigma_a^b f(x)dx = -\Sigma_b^a f(x)dx$ következik:

$$\mathfrak{M} = \Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \mathfrak{M} + \mathfrak{M}_0 - \Sigma_{-\delta_0}^{-n\delta_0} \mathfrak{M}.$$

Ezen egyenletben az egyes tagokhoz kötött előjel analytikai értelme követelését kielégitvén, világos, hogy az egyes tagok még csak számtani értékeiket képviselhetik; e szerint az első tag csak a B-től m-ig érő, — a második tag az A-ban lévő, végre a harmadik tag csak a B'-től m'-ig érő elemek nyomatékait jelenthetik ki. De ezeket (23), (24) és (25) alatt lefejtvén, látni, hogy az m-től m'-ig érő kerékrész nyomatéka nyeretik, ha az $\mathfrak{M}_0$ értékkel szaporitott (23) egyenletből a (24) alattit kivonjuk, azaz tagonként megváltozott jelekkel amazokhoz csatoljuk. A szerint lesz:

$$\mathfrak{M}_{-n\delta}^{+n\delta} = 4A\sin\mu \operatorname{Cos}\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin\delta \operatorname{Cos}\delta - 4B\sin\mu \operatorname{Cos}\mu$$

$$\Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin\delta + (A-2B+C) \operatorname{Cos}^2\mu$$

$$= 2\sin 2\mu (A\Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin\delta \operatorname{Cos}\delta - B\Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin\delta) + (A-2B$$

$+C) \operatorname{Cos}^2\mu$; vagy végre:

$$\mathfrak{M}_{-n\delta_0}^{+n\delta_0} = A\sin 2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin 2\delta - 2B \sin 2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin\delta +$$

$(A-2B+C) \operatorname{Cos}^2\mu.$

Más részt: $\Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin 2\delta = \sin 2\delta_0 + \sin 4\delta_0 + \sin 6\delta_0$

$$+ \ldots \sin cn\delta_0 = \frac{\sin n\delta_0 \sin (n+1)\delta^0}{\sin \delta_0}$$

és $\Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \sin\delta = \operatorname{siu}\delta + \sin 2\delta + \sin 3\delta \ldots\ldots \sin n\delta_0 =$

$$\frac{\sin \frac{n\delta_0}{2} \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\delta_0}{\sin \frac{\delta_0}{2}}$$

Ha ezeket az utólsó összegbe helyettezzük s helyettezés után a mutatkozó közös szorzókat kiemeljük, tekintettel arra hogy $\sin n\delta_0 = 2\sin\frac{n\delta_0}{2}\operatorname{Cos}\frac{n\delta_0}{2}$ s hogy hasonlóképen: $\sin(n+1)\delta_0 = 2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\delta_0 \operatorname{Cos}\left(\frac{n+1}{2}\right)\delta_0$; a kifejezés fog nyeretni:

$$(26)\ldots\ldots\ldots \mathfrak{M}_{-n\delta_0}^{+n\delta_0} = 2\sin 2\mu.\ \frac{\sin\frac{n\delta_0}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\delta_0}{\sin\frac{\delta_0}{2}}$$

$$\left[\frac{A\operatorname{Cos}\frac{n\delta_0}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{n+1}{2}\right)\delta_0}{\operatorname{Cos}\frac{\delta_0}{2}} - B\right] + (A-2B+C)\operatorname{Cos}^2\mu.$$

S ez azon általános képlet, melyből mint közös kútforrásból valamennyi különleges eset lefejthető; a képlet, tudtom szerint, most először fejtetik le.

9.

A különleges esetek pedig a következők:

Ha t. i. a viz és a kerék egyenlő irányban mozognak, akkor a víz színvonala:

1-ször. a kereket csak alsó A pontjában érinti meg; vagy

2-szor. a viz színvonala A és N pontok közt pl. mm' szerint van; vagy

3-szor. a színvonal a kereket legfelső N pontjában érinti meg; —

Ha pedig a kerék és víz ellenkezőleg mozognak, akkor:

4-szer. a színvonal fölül érintkezhetik; vagy

5-ször. A és N közt halad el, vagy végre

6-szor. a kereket alól érinti meg.

A hat eset közül elég ha a három első lefejtetik, miután a többi három szintazon modorban lefejtendő.

I) Ha most a víz színvonala az egyértelemben forgó kereket csak alól érinti meg; a keréknek csak egy lapáta jut egyszerre hatásra. Az esetben $\delta = o$ és $n = \frac{\delta}{\delta_0} = o$; ennélfogva $\sin\frac{n\delta_0}{2} = o$ és $\sin\frac{n+1}{2}\delta_0 = \sin\frac{\delta_0}{2}$; továbbá $\operatorname{Cos}\frac{n\delta_0}{2} = 1$ $\operatorname{Cos}\frac{n+1}{2}\delta_0 = 1$. Ezt (26)-ba áttévén, az első tag elenyézik s marad:

$\mathfrak{M} = (A - 2B + C) \operatorname{Cos}^2\mu$, vagy A, B, C értékeit (22)-ből helyettezvén:

$$\mathfrak{M} = \frac{\zeta\gamma hb}{2g}\left[c^2\left(\frac{2r,-b}{2}\right) - 2cw\left(\frac{3r,^2-3r,b+b^2}{3}\right) + w^2\right.$$
$$\left.\left(\frac{4r,^3-br,^2b+4r,b^2-b^3}{4}\right)\right]\operatorname{Cos}^2\mu.$$

s ez a tökéletes képlet, mely ha sok lapátot, tehát r,-hez hasonlítva kis b-t felteszünk, ebbe megy át:

$$\mathfrak{M} = \frac{\zeta\gamma bhr,}{2g}[c-r,w]^2\operatorname{Cos}^2\mu \text{ azaz} = \frac{\zeta\gamma hbr,}{2g}(c-v)^2\operatorname{Cos}^2\mu$$

vagy még mivel bh a lapát térfogata, ha ezt f-el jeleljük:

$$\mathfrak{M} = \frac{\zeta\gamma fr,}{2g}(c-v)^2\operatorname{Cos}^2\mu$$

Miből észreveszszük, hogy a nyomaték legnagyobb, ha $\operatorname{Cos}\mu = 1$, azaz ha $\mu = o$, vagy is ha a lapát a sugár irányába esik. De ezt feltévén, a képlet ily alakot nyer:

$$\mathfrak{M} = \frac{\zeta\gamma fr,(c-v)^2}{2g}$$

mely nyilván a Parentféle képletbe megy át.

A Parent-féle képlet tehát csak akkor érvényes, ha a kerék lapátai egyenként jutnak egymásután hatáshoz. S a lapátok legkedvezőbben vannak alkalmazva, ha sugarilag állanak. Innét magyarázható azután az, hogy az alulcsapó kerék tényleges hatása mindig nagyobbnak tapasztaltatott, mint a Parent-féle képlet utján kiszámitott hatás.

10.

Ha pedig egy idejüleg több lapát hat egyszerre, akkor $n \gtrless 1$; a mellett lehet hogy $O < n\delta_0 < \pi$ s lehet megint hogy $n\delta_0 = \pi$. Első esetben a koszorunak csak egy része merül víz alá; második esetben az egész kerék van víz alatt. Vegyük az első esetet elő. Szerinte lesz, ha (26) a. egyenletben $\sin 2\mu$ hol $2\sin\mu \operatorname{Cos}\mu$ irjuk továbbá rövidség tekintetéből:

$$M = \frac{\sin\frac{n\delta_0}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\delta_0}{\sin\frac{\delta_0}{2}}\left[A\frac{\operatorname{Cos}\frac{n\delta_0}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\operatorname{Cos}\frac{\delta_0}{2}} - B\right]$$

és

$$N = A - 2B + C:$$

$$(27)\ldots\ldots \mathfrak{M} = \operatorname{Cos}\mu\,[4\, M\sin\mu + N\operatorname{Cos}\mu]$$

Az M és N μ-től függetlenek, ha tehát μ változik, M és N állandóan maradnak. Az $\mathfrak{M}$ azonban kétszer enyészik; ha vagy:

$$\operatorname{Cos}\mu = 0 \text{ azaz } \mu = 90^0 \text{ vagy}$$

$$4\, M\sin\mu + N\operatorname{Cos}\mu = 0 \text{ azaz } \operatorname{tg}\mu = -\frac{N}{4M}$$

s miután $\mathfrak{M}$ folytonosságát sehol meg nem szakitja s előjelét sem változtatja a két határérték közt, világos hogy az μ-nek bizonyos értéke mellett legnagyobb. Az értéket nyerjük ezen egyenletből:

$$\left(\frac{d\mathfrak{M}}{d\mu}\right) = o \text{ és } \frac{d^2\mathfrak{M}}{d\mu^2} \gtrless o. \text{ Ámde:}$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{d\mu} = 4M\operatorname{Cos}2\mu - N\sin 2\mu = o \text{ és } \frac{d^2\mathfrak{M}}{d\mu^2} = -(4M\sin 2\mu + N\operatorname{Cos}2\mu)$$

Az első szerint van $\operatorname{tg}2\mu = \frac{4M}{N}$, mely a másodikba áttéve a jobb kézfelöli minus jelt változatlanul meghagyja. A nyert érték tehát maximumra vezetet s van tehát:

$$\operatorname{tg}2\mu = \frac{4\frac{\sin\frac{n\delta_0}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\delta_0}{\sin\frac{\delta_0}{2}}\left[A\frac{\operatorname{Cos}\frac{n\delta_0}{2}\operatorname{Cos}\left(\frac{n+1}{2}\right)\delta_0}{\operatorname{Cos}\frac{\delta_0}{2}} - B\right]}{A - 2B + C}$$

Az egyenlet kellő megértésére figyelembe veendő hogy δ_0 azon szögöt jelenti mely két-két lapát közé foglaltatik. Hapl. x az összes lapátok száma akkor $x\delta_0 = 2\pi$ és $\delta_0 = \frac{2\pi}{x}$; δ_0 szög tehát a kerék osztási szöge. Ellenben n azon lapátok száma mely előkerül ha a vizben lévő lapátok számából egyet levonván a maradék felét veszszük. A vízben lévő lapátok száma tesz tehát: $2n+1$. Az ezeken kivül előforduló A, B, C állandó értékek. Ha ezeket tekintetbe veszszük:

$$(28)\ldots \operatorname{tg}2\mu = \frac{4\sin\frac{n\pi}{\varkappa}\sin\left(\frac{n+1}{\varkappa}\right)}{\sin\frac{\pi}{\varkappa}} \cdot \frac{\left[A\frac{\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{\varkappa}\operatorname{Cos}\left(\frac{n+1}{\varkappa}\right)}{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{\varkappa}} - B\right]}{A-2B+C}$$

Miután n és x egymástól egészen függetlenek, látni hogy μ két változótól függ. Innen magyarázhatók a nehézségek melyek a μ-nek tapasztalati meghatározásánál edigelé felmerültek; s innen magyarázhatók azon különbségek és eltérések az akként kikapott μ értékekre nézve. Mert két mintakerék nem csak x hanem n számértékre nézve is különbözhet egymástól, s mivel a μ-nek mindannyiszor külön értéke jut, a fenebbi képlet nélkül nem tudhatni valljon mi okozza az eltérést.

Hogy most a képlet alkalmazását lássuk, *tegyük fel először hogy a víz csak egy lapátra hat.* Az esetben tehát a vízbe merülő lapátok száma: $2n+1=1$ miből $n=o$. Ha pedig $n=o$ akkor $\sin\frac{n\pi}{x}=o$ s ennek folytán:

(29) .... $\operatorname{tg}2\mu=o$. azaz $2\mu=o$ és $\mu=o$ lesz. Mint az a Parent-féle esetben már fenebb is találtatott.

Tegyük fel másodszor hogy a víz két lapátra hat.

Az esetben $2n+1=2$ lévén következik $n=\frac{1}{2}$ tehát:

$$(30)\ldots\ldots\ldots \operatorname{tg}2\mu = \frac{4\sin\frac{\pi}{2\varkappa}\sin\frac{3\pi}{2\varkappa}}{\sin\frac{\pi}{\varkappa}} \cdot \frac{\left[A\frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2\varkappa}\operatorname{Cos}\frac{3\pi}{2\varkappa}}{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{\varkappa}} - B\right]}{A-2B+C}$$

Ha a víz, harmadszor, három lapátra hat; $2n+1=3$ tehát $n=1$ és

$$(31)\ldots\ldots \operatorname{tg} 2\mu = 4\sin\frac{2\pi}{\varkappa}\,\frac{\left[A \operatorname{Cos}\frac{2\pi}{\varkappa} - B\right]}{A-2B+C};$$

Ha a víz, *negyedszer, négy lapátra hat;* $2n+1=4$ tehát $n={}^3/_2$ és

$$(32)\ldots\ldots \operatorname{tg}2\mu = \frac{4\sin\frac{3\pi}{2\varkappa}\sin\frac{5\pi}{2\varkappa}}{\sin\frac{\pi}{\varkappa}}\,\frac{\left[A\frac{\operatorname{Cos}\frac{3\pi}{2\varkappa}\operatorname{Cos}\frac{5\pi}{2\varkappa}}{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{\varkappa}} - B\right]}{A-2B+C}$$

S ha az öt lapátra hat; $2n+1=5$, tehát $n=2$ és

$$(33)\ldots \operatorname{tg} 2\mu = \frac{4\sin\frac{2\pi}{\varkappa}\sin\frac{3\pi}{\varkappa}}{\sin\frac{\pi}{\varkappa}}\,\frac{\left[A\frac{\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{\varkappa}\operatorname{Cos}\frac{3\pi}{\varkappa}}{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{\varkappa}} - B\right]}{A-2B+C} \text{ stb.}$$

Bossut és Deparcieux kisérleteket tettek a lapátnak legkedvezőbb hajlási szöge iránt; szerintők ezen szög közép értéke 30_0-ot tesz. Legterjedelmesebbek a Bossut-féle kisérletek. Minta kereke 0·925m átmérőjü s 24 lapátu volt. Ha a fenebbi képletekben tehát $x=24$, egymásután:

ha a viz 1 lapátra hat: $\operatorname{tg} 2\mu = 0$ és $\mu=0$

» » » 2 » » $$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{4\sin\frac{\pi}{48}\sin\frac{3\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{24}}\,\frac{\left[A\frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{48}\operatorname{Cos}\frac{3\pi}{48}}{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{34}} - B\right]}{A-2B+C}$$ és $\mu=14\ 28'$

ha a viz 3 lapátra hat: $\operatorname{tg} 2\mu = 4\sin 15^\circ\left(\frac{A \operatorname{Cos} 15^\circ - D}{A-2B+C}\right)$

és $\mu=29^\circ\ 13'$

ha a viz 4 lapátra hat: $$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{4\sin 11^\circ\ 15' \sin 18^\circ\ 45'}{\sin 7^\circ\ 30'}\,\frac{\left(A\frac{\operatorname{Cos} 11^\circ\ 15' \operatorname{Cos} 18^\circ\ 45'}{\operatorname{Cos} 7^\circ\ 30'} - B\right)}{A-2B+C}$$ és $\mu=35^\circ\ 22'$

ha a viz 5 lapátra hat: $\mu = 38^{0}\ 20'$ stb. nyeretni fog.

Bossut kereke tehát úgy volt alkalmazva hogy a viz egy ideüleg 3—4 lapátra hatott. S valóban mi az alólesapó kereket ugy szoktuk felállitni hogy legalább három lapát a vizbe merüljőn.

Ha végtére x, állandó n mellett, végtelen nagyobbodásra átmegy, azaz ha a kerék végtelen kis de végtelen sok lapátból áll, akkor $\sin\frac{n\pi}{x} = \frac{n\pi}{x}$ és $\sin\frac{(n+1)\pi}{x} = \frac{(n+1)\pi}{x}$;

$\sin\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{x}$, $\mathrm{Cos}\frac{n\pi}{x} = \mathrm{Cos}\left(\frac{n+1}{x}\right)\pi = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{x} = 1$ tehető, a

(28) pedig ebbe megy át:

$$\mathrm{tg}\ 2\mu = \frac{4n\,(n+1)\,\pi}{x}\left[\frac{A-B}{A-2B+C}\right]$$ vagy megforditva:

$$\mathrm{Ctg}\ 2\mu = \frac{x}{4n\,(n+1)\,\pi}\left[\frac{A-2B+C}{A-B}\right]$$ mely még így irható:

$$\mathrm{Ctg}\ 2\mu = \frac{x}{4n\,(n+1)\,\pi}\left[1 - \frac{B-C}{A-B}\right];$$ ha ebbe A, B, C értékei tisszahelyeztetnek, s a közös tényezök kihagyatnak:

$$(34)\ \ldots\ \mathrm{Ctg}\ 2\mu = \frac{x}{4n\,(n+1)\,\pi}\left[\frac{c-v}{c}\right]$$ mely egyenlet utóvégre:

Sin Ctg $2\mu = \infty$ határ értéket felveszi. Azaz a kerék ismét a Parent-féle kerékbe megy át. Ha tehát egy lapátkerék csak egy részével hat; akkor azon esetben, ha a lapátok öszszes száma folytonosan szaporittatik, s az egyideüleg hatásra kerülő lapátok száma állandóan ugyanaz marad, a Parent-féle eset a határt képezi mely féle a kerék közeledik ha az összes lapátszám végtelen nagyobbodásra átmegy.

11.

Ha továbbá az $\frac{n}{x}$ hányados állandó értéket felvesz akkor a (28) a. képlet ezen alakot nyeri meg:

$$tg 2\mu = \frac{\dfrac{4 \sin a\pi \sin\left(a+\dfrac{1}{\varkappa}\right)\pi}{\sin\dfrac{1}{\varkappa}\pi}\left[A\dfrac{\operatorname{Cos} a\pi \operatorname{Cos}\left(a+\dfrac{1}{\varkappa}\right)\pi}{\operatorname{Cos}\dfrac{\pi}{\varkappa}} - B\right]}{A-2B+C}$$

Mely ha $\varkappa$ végtelen nagyobbodásra átmegy:

$$(35) \ldots\ldots tg\, 2\mu = \frac{4 \sin^2 a\pi}{\dfrac{1}{\varkappa}\pi}\left[\frac{A \operatorname{Cos}^2 a\pi - B}{A-2B+C}\right] \text{ és végre:}$$

$\lim tg\, 2\mu = \infty$ azaz $2\mu = 90^0$ és $\mu = 45^0$. adja.

Azon esetben tehát ha $\dfrac{n}{x} = a$ állandó értékü azaz ha a vizben dolgozó lapátok száma azon arányban az összes lapátok száma nagyobbodik akkor a lapátnak μ hajlási szöge folyvást öregbedik ugyan, de úgy hogy az soha nagyobb mint 45^0 nem lehet.

Minthogy sin $a\pi$ az egységet soha meg nem haladhatja, s azt csak akkor eléri ha $a\pi = \dfrac{\pi}{2}$ következik, mivel $\dfrac{n}{\varkappa} = a$, hogy $n = a\varkappa = \dfrac{\varkappa}{2}$; abból pedig következik a vizben dolgozó lapátok száma $= 2n + 1 = \varkappa + 1$ mely érték végtelenül szaporodó $\varkappa$ mellett végre $\varkappa$ felé közeledik. Minthogy azonban a (35) a. képlet jobb kéz felöli zárjelközti számlálója ha $a\pi = \dfrac{\pi}{2}$, nemleges előjelü, tehát a μ maga nemleges előjelü azaz a lapát nemleges avagy ellenkező hajlásu, a (35) a. képlet figyelmes vizsgálatnak alávetendő.

A (35) a. képlet még így irható:

$$tg\, 2\mu = \frac{4\varkappa}{\pi(A-2B+C)}\left[\sin^2 a\pi\left[(A-B) - A \sin^2 a\pi\right]\right] \text{ s ha A}$$

kiemeltetik:

$$(36) \ldots tg\, 2\mu = \frac{4A\varkappa}{\pi(A-2B+C)}\left[\sin^2 a\pi\left(\frac{A-B}{A} - \sin^2 a\pi\right)\right]$$

A zárjel előtti rész a képletben jelváltozást nem idézvén elő, világos, hogy a jel megváltozása csak a zárjel közti résztől lehet. De ha abban: $\sin^2 a\pi = y$ és $\frac{A-B}{A} = D$ tétetik, a kitétel ebbe megy átal:

$Y(D-Y)$ mely tudvalevőleg elenyész ha $y=o$ vagy ha $Y=D$, s mely igenleges ha $Y \gtrless {}^{o}_{D}$ és nemleges ha $Y > D$. A szorzat legnagyobb igenleges értéke pedig $Y = \frac{D}{2}$ értéknél áll be. Ámne ha $Y = \frac{D}{2}$ akkor

(37).....$\sin^2 a\pi = \frac{A-B}{2B}$. Ezt feltévén a (36) a. egyenlet ebbe megy át:

$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{\varkappa A(A-B)^2}{\pi B^2(A-2B+C)}$ s ha ebbe végtére A, B, C értékeit helyre állitjuk:

(38)....$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{\varkappa c^2(c^2-cv)^2}{\pi c^2 v^2(c-v)^2} = \frac{\varkappa}{\pi}\left(\frac{c}{v}\right)^2$

A határértékre nézve az eddigi tapasztalásra kell figyelnünk. Bossut, Smeaton és Lagerhjelm kisérletei szerint, a kerék legnagyobb hatása akkor áll be ha v forgási sebesség 0·4 c és 0·5 c közt van; Smeaton névszerint a hatást legnagyobbnak tapasztalta ha a v a c-nek 34—52 %-at teszi; Bossut s avval egyértelmileg Poncelet a hatást legnagyobbnak találják ha v=0·4c; Lagerhjelm pedig a v—t igen közel 0·5c-nek találta. A kisérleti adatok eltérése azon körülményben találja felejtését hogy a kisérlők különböző kerékszerkezetet használtak s azon kivül ezen szerkezetre nézve egymástól eltérő kerekeket különböző aránylagos mélységre állitották a vizbe. Igy pl. Bossut háromféle kerékszerkezetet használt, az egyik 12, a második 24, a harmadik 48 lapátból állott; ezeket ő egyenlő mélyen tette a vizbe. Az azokból nyert, s egymástól feltérő tapasztalati adatokból pedig a középértéket vette főeredményül. Smeaton egy 24. lapátu mintát használt mely 75 II kerületü volt. Lagerhjelm végtére két kereket használt az egyik 3 I átmérőjü s 72 lapátu, a második 6 I átmérőjü s 144 lapátu volt. Noha ezen egymástól egészen független s önálló kisérletek közt semmi tervszerü összeköttetés nem létezik még is alkalmasak arra hogy a jelen értekezésben lefejtett elmélet helyességét kibizonyitsák. Ha tehát pl. Bossüttel felteszszük hogy $v=0{\cdot}4c$; az utolsó képlet ezt adja:

$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{\varkappa}{\pi}(2{\cdot}5)^2 = 6{\cdot}25.\frac{\varkappa}{\pi}$ mely a 12 lapátu kerék számára:

$\operatorname{tg} 2\mu = 24$ tehát $\mu=43^0\,48'$; — a 24 lapátu kerék számára:

$\operatorname{tg} 2\mu = 48$ tehát $\mu = 44^0\,24'$; — a 48 lapátu számára:

$\operatorname{tg} 2\mu = 96$ tehát $\mu = 44^0\,42'$; — ellenben Lagerhjelm 72 kapátu kerekére nézve, mely $v = 0{\cdot}5\,c$ sebességgel megforgott, úgy hogy $\frac{c}{v} = 2$:

$\operatorname{tg} 2\mu = 96$ tehát $\mu = 44^0\,42'$ és a 144 lapátu számára

$\operatorname{tg} 2\mu = 192$ tehát $\mu = 44^0\,51'$ adja.

Ezen értékek nyilván oda mutatnak hogy μ szög a lapátok szaporodásával lim $\mu=45_0$ szöghatár felé közeledik. Bossut és De Parcieux azon állitása hogy a kerékmívelete legnagyobb ha a lapátok 30_0 alatt hajolnak sugarukhoz, tehát nem egészen pontos és szabatos; miután az csak akkor áll ha a 24 lapátu keréknek a lapáta egyszerre hat, vagy ha a 48 lapátu keréknek 6 lapáta egyszerre hat, avagy más szóval ha a 24—48 lapátu keréknek $_1/^8$ része vízbe merül.

Gerstner volt gondolom az első, ki azt az elvet felállitotta hogy az alólcsapó kerék lapátai ugy állitandók hogy azok ha a víz szinéből kiemelkednek, a víz színvonalára $\perp$-eg legyenek. Gerstner után ezen elv általánosan divatba jött, noha a tapasztalás hasznosságát még be nem bizonyitotta; s valóban az elv egészen téves, mivel a lapát hajlását nem a vizszínvonala hanem egyedül az összes lapátok s evvel együtt az egyideüleg víz alatt lévő lapátok száma meg határozza. S az elv csak azon csábitó körülményből folyt hogy a 30_0 alatt hajló lapát ha vízből kiemelkedik a víz szinére majd nem $\perp$.

Az elébbiben láttuk tehát hogy μ szög legnagyobb értéke az összes lapátok számát jelentő x értéktől függ, s hogy az 45^0 felé közeledik ha ez végtelen nagyobbodásra átmegy. Ezen határérték azonban csak akkor éretik el, ha egyideüleg a (37) alatti feltéti egyenlet teljesül; kell tehát, hogy:

$\sin^2 a\pi = \frac{A-B}{2B}$ vagy ha A és B értékei vissza helyeztetnek s röviditünk, hogy:

$\sin^2 a\pi = \frac{c-v}{2v}$ legyen. Ebből következik:

$$(39)\ldots\ldots a = \frac{1}{\pi} \text{ arc sin} \sqrt{\frac{c-v}{2v}}. -$$

A v és c-re nézve most a kisérlők adatai különböznek. Bossut s vele együtt De Parcieux és Poncelet is v=0·4c-nek Lagerhjelm pedig közel 0·5c-nek találják. Tartsuk meg mind a kettőt, akkor Bossut tapasztalása szerint:

$$a = \frac{1}{\pi} \text{ arc sin} \sqrt{\frac{c-0{\cdot}4c}{2\times0{\cdot}4c}} = \frac{1}{\pi} \text{ arc sin} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$$

Ámde: $a = \frac{n}{\varkappa}$ ebből következik:

$n = \frac{\varkappa}{3}$; azaz μ szög legnagyobb értékét akkor veszi fel, ha n az $\varkappa$-nek harmad része. A vízbe merülő lapátok száma, elébbiek szerint: $= 2n + 1$; ha ezt m-el jeleljük úgy hogy $m = 2n + 1$ következik a vízbemürülő lapátok száma:

$(40)\ldots\ldots m = \frac{2\varkappa}{3} + 1$, azaz μ szög a (28) a. legnagyobb értéket akkor veszi fel csak, ha a lapátok $^4/_3$-da vizbe merül egyideüleg.

Így áll a dolog ha Bossut kisérleteihez ragaszkodunk ha megint Lagerhjelm szerint haladunk: $v = \frac{1}{2}c$, tehát:

$a = \frac{1}{\pi}$ arc sin $\sqrt{\frac{1}{2}}$, vagy mivel $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sin 45^0 = \sin\frac{\pi}{4}$ következik:

$a = \frac{1}{4}$ azaz $\frac{n}{\varkappa} = \frac{1}{4}$ tehát $n = \frac{\varkappa}{4}$, s ennek folytán

$(41)\ldots\ldots m = \frac{\varkappa}{2} + 1$ azaz

ha forgási sebesség, mint Lagerhjelm azt tapasztalta is, a víz sebessége felével egyenlő, akkor a lapát μ hajlási szöge legnagyobb értékét éri el ha az összes lapátok fele azaz a fél kerék vízbe merül.

A lefejtetteket röviden összefoglalva az eddigi fejtemények rövid értelme az: Ha egy alólcsapó kerék csak egy lapáttal dolgozik, a lapátok legkedvezőbb hajlási szöge $\mu = 0_0$. Ha pedig több lapáttal dolgozik, a legelőnyösebb hajlási szög $\mu > 0$ és $< 45_0$. A legelőnyösebb hajlási szög határértéke pedig, mely különböző lehet, azon viszonytól függ melyben az egyideüleg vízbe merülő lapátok száma az összes lapátok számához áll. Bossut és De Parcieux azon állitása hogy a legelőnyösebb $\mu = 30_0$ csak akkor helyes ha a vizben lévő lapátok az összes lapátoknak épen egy nyolczad részét teszik. Azon állitás pedig, hogy a vizből kiemelkedő lapát $\perp$ legyen a víz színvonalára, nincs igazolva.

Még egyet kell különösen kiemelnünk. Az elébbiekben két egymástól eltérő tapasztalásra hivatkozom; a Bossut-féle s a Lagerhjelm-félére. Az első szerint v=0.4e, a második szerint v=0·5c. Az elsőre nézve n μ absolut legnagyobbja beáll ha m= $_2/^3$ x; a másodikra nézve ha m= $_1/^2$ x. Ezen körülmény a lapátkerék egy eddig ismeretlen sajátságára vezet. Ha t. i. v átaljában szólva $= ac$, s felteszszük hogy x olyan érték mely körülmények közt változhat is, akkor az attól függő m is változik. És ugyan, mint (40) és (41) mutatja, ha $\alpha = 0{\cdot}4$, $m = \frac{2x}{3}$; ha $\alpha = 0{\cdot}5$, $m = \frac{x}{2}$. Feltérén most hogy a feltétlen változó, mely a O-től az egységig változhat, akkor ha azt (39)-be bevezetjük:

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \text{ arc sin } \sqrt{\frac{c-v}{2v}} = \frac{1}{\pi} \text{ arc sin } \sqrt{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \text{ egyenle-}$$

tet nyerjük; mivel az ivek keblei 0 és 1 közé foglaltatnak, világos hogy ezen egyenletben: $\frac{1-\alpha}{2\alpha}$ tört olyan érték mely soha kisebb mint 0 és soha nagyobb mint 1 nem lehet. De ha $\frac{1-a}{2a} = o$, kell hogy $a = 1$ legyen; ha pedig $\frac{1-a}{2a} = 1$, kell megint hogy $a = \frac{1}{3}$. Ezek tehát a változónak tekintett a érték határai.

Ha most a változó $a = \frac{1}{3}$ határtól kezdve $a = 1$ határig valamennyi közbe eső értékében elhalad az α a fenebbi egyenletben bizonyos érték sorozaton fog keresztül menni. És ugyan ha $\alpha = \frac{1}{3}$.

$$a = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}; \text{ ha megint } \alpha = 1:$$

$$a = \frac{1}{\pi} \text{ arc sin } 0 = 0.$$ Az a tehát, ha α, $\alpha = \frac{1}{3}$ határtól $\alpha = 1$ határig halad, $a = \frac{1}{2}$ határtól a—0 határig fog haladni. És mivel.

$$a = \frac{n}{\varkappa} \text{ tehát } n = a\varkappa \text{ s továbbá: } m = 2n + 1 = 2n\varkappa + 1$$

látni hogy az m: $m = \varkappa + 1$ értéktől $m = 1$ értékig halad. Az első határ a kerék összes lapátszámát jelentvén látni tehát végre, hogy a vízbe merülő lapátok száma, ha α $\alpha = 1$ határtól $\alpha = {}_1/{}^3$ határig halad, $m = 1$ határtól $m = x + 1$ határig változ. Az első határ 1 lapátot, a második határ az összes lapátszámot jelentvén látni tehát hogy a vizbe merülő lapátok száma α-nak ezen határaira vonatkozólag az egyes lapáttól az összes lapátszámig emelkedik. És mivel, (38) szerint:

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{\varkappa}{\pi}\left(\frac{c}{v}\right)^2 \text{ volt, következik most:}$$

(42)$\ldots\ldots \operatorname{tg} 2\mu = \frac{\varkappa}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$. Ezen egyenletben $\varkappa$ és π jelen esetben két változatlan érték, mivel feltétetik hogy α-nak ezen változó értéke egy azon kezékre alkalmaztatik; ha az állandó értéket b-vel jeleljük:

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{b}{\alpha^2};$$ és minthogy α 1 és $^1/_3$ közé foglaltatik

$$\mu \gtreqless \frac{1}{2} \text{ arc tang b és } \mu \leqq \frac{1}{2} \text{ arc tang 9b.}$$

Így pl. ha a 24 lapátu Bossut-féle kereket veszszük $b = \frac{\varkappa}{\pi} = \frac{24}{3} = 8$, tehát

$$\mu \gtreqless \frac{1}{2} \text{ arc tg 8 és } \mu \leqq \frac{1}{2} \text{ arc tg 72; azaz}$$

$$\mu \gtreqless 25^0\, 40' \text{ vagy } \mu \leqq 44^0\, 36'$$

Ha a 80 lapátu kereket veszszük: $b = \frac{80}{\pi} = 28$, tehát:

$\mu \gtreqqless 43^{\circ}\ 56'$ vagy $\mu \leqq 44^{\circ}\ 52'$

Ha a 144 lapátu Lagerhjelm-féle kereket veszszük: $b = \frac{144}{\pi} = 48$

$\mu \gtreqqless 44^{\circ}\ 24'$ vagy $\mu \leqq 44^{\circ}\ 56'$

Ezen fejtemények tiszta és szabatos megértésére megjegyzem kogy az imént kiszámitott μ szögértékek a lapátok azon hajlásait adják, melyek mellett a kerék képes a lehető legnagyobb a lehető legkisebb forgási sebességet felvenni.

A két hajlási határszögöt vizsgálván, azt találjuk hogy 80 lapátúék közelebb vannak egymáshoz mint 24 lapátuék, s a 144 lapátuék ismét közelebb vannak egymáshoz mint a 80 lapátuék. Ebből látni hogy a keréknek legkisebb és legnagyobb forgására vonatkozó μ szögértékei mindinkább egymáshoz közelednek ha a lapátok számát szaporitjuk. Egyuttal látni egyszersmind hogy a két szöghatár közösen mindinkább 45_0-hoz közeledik; ez tehát a két szöghatár egy assymptotikus értéke.

12.

A fenebiekben a kerék nyomatéka fejtetik be ha annak vagy egy vagy több lapáta is viz asatt van. A mellett tapasztaltuk hogy a képlet csakugyan a Parent-féle képlet felé közeledik ha a víz alatt lévő lapátok száma kisebbülésre átmegy Ha pedig a víz alattiak száma nagyobbodik, a képlet a Parent-féle képlettől annál többet eltér. Hátra van még csak az eset ha az egész kerék vízalá merül.

Ha az egész kerék víz alatt van, akkor annak nyomatéka csak ez lehet:

$\mathfrak{M}_{-\pi}^{+\pi}$; — Ámde:

(43)... $\mathfrak{M}_{-\pi}^{+\pi} = \mathfrak{M}_{\delta_0}^{\pi-\delta} + \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_{\pi}^{-\delta_0}$ azaz tekintettel arra hogy

$\Sigma_a^b f(x)\,dx = -\Sigma_b^a f(x)\,dx$ $\mathfrak{M}_{-\pi}^{+\pi} = \mathfrak{M}_{\delta_0}^{\pi\delta} + \mathfrak{M}_0 - \mathfrak{M}_{-\delta_0}^{-\pi}$

$$= \mathfrak{M}_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} + \mathfrak{M}_0 - \left[\mathfrak{M}_{-\delta}^{-\pi+\delta} + \mathfrak{M}_{-\pi} \right]$$

S ha (23), (24) és (25)-ben $n\delta$ helyébe $\pi-\delta_0$ teszünk, s tekintetbe veszszük hogy az utolsó egyenletben előforduló $-\delta$, $(-\pi+\delta)$ és $-\pi$ határjelzök a nemleges előjelt most már csak megkülönböztetésül az igenleges előjelü határjelzőktől birják, vígtére:

$$\mathfrak{M}_{-\pi}^{+\pi} = A\,Cos^2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} Cos^2\delta + 2\,Asin\mu\, Cos\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0}$$

$$sin\delta\, Cos\delta + Asin^2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} sin^2\delta - 2B\,Cos^2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} Cos\delta$$

$$-2B\,sin\mu\, Cos\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} sin\delta + nC\, Cos^2\mu - ACos^2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta}$$

$$Cos^2\delta + 2Asin\mu\, Cos\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta} sin\delta\, Cos\delta - Asin^2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} sin^2\delta$$

$$+2B\, Cos^2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} Cos\delta - 2B\, sin\mu\, Cos\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} sin\delta - nC$$

$Cos^2\mu + (A-2B+C)\, Cos^2\mu - (A+2B+C)\, Cos^2\mu$, s ha összevonünk:

$$\mathfrak{M}_{-\pi}^{+\pi} = 4\left[Asin\mu\, Cos\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} sin\delta\, Cos\delta - Bsin\mu\, Cos\mu \right.$$

$$\left. \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} sin\delta - BCos^2\mu \right] \text{ vagy még:}$$

$$(44) \ldots\ldots\ldots\ldots \mathfrak{M}_{-\pi}^{+\pi} = Asin\, 2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} sin2\delta - 2Bsin2\mu$$

$$\Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta} sin\delta - 4B\, Cos^2\mu.$$

A képlet további átalakitása végett tekintetbe veendő hogy:

$$\Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta} sin2\delta = sin2\delta_0 + sin4\delta_0 + sin6\delta_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + sin\,(2\pi-2\delta) = \frac{sin\,(\pi-\delta_0)\, sin\pi}{sin\delta_0} = o.$$ A (44) a. képlet első tagja tehát elenyész s lesz:

$$\mathfrak{M}_{-\pi}^{+\pi} = -\, 2B\, sin2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta} sin\delta - 4B\, Cos^2\mu \text{ azaz:}$$

$$\mathfrak{M}_{-\pi}^{+\pi} = -\, 2B \left[sin\, 2\mu\, \Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta} sin\delta + 2Cos^2\mu \right]$$

Minthogy pedig:

$$\Sigma_{\delta_0}^{\pi-\delta_0} \sin\delta = \frac{\sin\frac{\pi-\delta_0}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\delta_0}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi-\delta_0}{2}}{\sin\frac{\delta_0}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta_0}{2}\right)}{\sin\frac{\delta_0}{2}}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos}\frac{\delta_0}{2}}{\sin\frac{\delta_0}{2}} = \operatorname{Ctg}\frac{\delta_0}{2},$$ következik:

$$\ldots\ldots \mathfrak{M}_{-\pi}^{+\pi} = -2B\left[\sin 2\mu \operatorname{Ctg}\frac{\delta_0}{2} + \operatorname{Cos}^2\mu\right]$$ mely képlet még így irható:

$$(45)\ldots\ldots \mathfrak{M} = 2B\left[\sin(-2\mu)\operatorname{Ctg}\frac{\delta_0}{2} - \operatorname{Cos}^2\mu)\right]$$

A képletben $\operatorname{Ctg}\frac{\delta_0}{2}$ annál nagyobb mennél kisebb δ_0, ámde ha $\varkappa$ az összes lapátok száma, akkor $\varkappa\delta_0 = 2\pi$ és $\delta_0 = \frac{2\pi}{\varkappa}$ tehát $\frac{\delta_0}{2} = \frac{\pi}{\varkappa}$, miből:

$$\mathfrak{M} = 2B\left[\sin(-2\mu)\operatorname{Ctg}\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right) - \operatorname{Cos}^2(-\mu)\right];$$ mentől nagyobb az $\varkappa$ annál kisebb a $\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)$ s annál nagyobb $\operatorname{Ctg}\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)$.

A zárjel alatti előtag tehát olyan $\operatorname{Ctg}\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)$ tényezővel szoroztatik mely x-nek folytonos szaporodásával folytonosan növekedik; ámde ha ez így vagyon akkor világos hogy a zárjel alatti második tag, mely x-től független, tehát arra nézve állandó, az első taghoz hasonlitva utóvégre elenyészönek tekinthető. Minek folytán:

$$\lim \mathfrak{M} = 2B\sin(-2\mu)\operatorname{Ctg}\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)$$ avagy:

$$\lim \mathfrak{M} = 2B\sin(-2\mu)\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\varkappa}} = \frac{2B\sin(-2\mu)}{\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)} = \frac{2\varkappa B\sin(-2\mu)}{\pi}$$

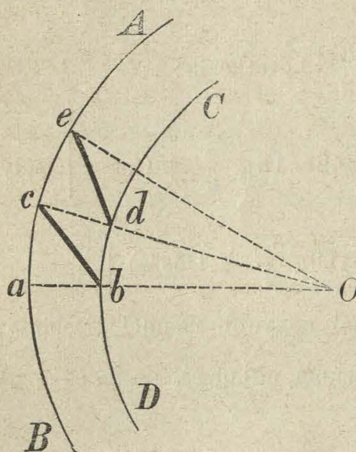
A B azonban (22) szerint ismeretes, volt ugyan:

$$B = \frac{\zeta\gamma hbcw}{2g}\left(\frac{3r_1^2 - 3r_1 b + b^2}{3}\right)$$ vagy, miután $\delta_0 = \frac{2\pi}{\varkappa}$ igen kicsinynek felteszszük, tehát a b is csak igen kicsiny:

$$B = \frac{\zeta\gamma hbcwr_,^2}{2g}$$; mit a fenebbibe helyettezvén ezt:

$$\lim \mathfrak{M} = 2\,\frac{\varkappa}{\pi}\sin(-2\mu).\frac{\zeta\gamma hbcwr_,^2}{2g}$$ adja.

38. ábra.



A képlet μ-re nézve legnagyobb, ha $-2\mu = 90^0$ azaz ha $-\mu = 45^0$.

A nemleges jelről egyelőre eltekintvén, látni tehát hogy μ a fennforgó esetben absolut értékben vévén csakugyan 45^0 felé közeledik. Ezt feltévén

$$\lim \mathfrak{M} = 2.\,\frac{\varkappa}{\pi}.\frac{\zeta\gamma hbcwr_,^2}{2g}.$$

A képlet további átalakítására, legyen (9. ábra) AB, CD az 0 körül forgó kerék kulső és belső lapát koszorúja s bc, de két lapáta; ao, co sugarakat huzván, abc, a lapát kicsinysége folytán, derékszögü $\triangle$-nek tekinthető melyben abc $\sphericalangle = \mu = 45^0$, úgy hogy ab $=$ ac. Minthogy aoc $\sphericalangle$ bc lapátot befogja, aoc $\sphericalangle = \delta_0$, s minthogy ab a koszoru szélesség, ab $=$ b; a külsó sugarat $r_, =$ ao tévén, lesz:

$$\text{arc ac} = r_,\ \delta_0 \text{ vagy mivel } \delta_0 = \frac{2\pi}{\varkappa}.$$

$$\text{arc ac} = \frac{2\pi r_,}{\varkappa};$$ s mivel ab $=$ ac. volt, következik:

$$\frac{2\pi r_,}{\varkappa} = b \text{ tehát:}$$

$$\frac{\varkappa}{\pi} b = 2r_,.$$ Ezt lim $\mathfrak{M}$-be áttéve lesz:

$$\lim \mathfrak{M} = 4.\,\frac{\zeta\gamma hcwr_,^3}{2g}.$$ Ámde $wr_,$ a kerék forgási sebessége, azt v-vel jelentvén:

$$\lim \mathfrak{M} = 4.\,\frac{\zeta\gamma hvcr_,^2}{2g}.$$ A képletben h a kerék szélessége,

a tengely irányában mérve; 2r, annak átmérője s 2r,h átmetszése térfogata; ezt f-el jelelvén, végre:

$\lim \mathfrak{M} = 2. \frac{\zeta\gamma f v c r,}{2g}$ ki kerül; mely képlet a (12) alattival azonos. Ebből látjuk hogy az alólcsapó kerék ha egészen vízalá helyeztetik, csak ugyan a vizszintes szélkerék szerepét, alakját s természetét felveszi.

Hátra van még csak μ szög, a (45) a. képletbe behozott, nemleges előjele értelmezése. A nemleges μ azért vitetett fell a (45) a. képletbe hogy az azt megelőző képletben legelől álló nemleges előjel zavarba ne ejtsen. Hogy pedig a nemleges előjel értelmét helyesen felfogjuk a képlet mikénti leszármaztatására kell vissza térnünk. A (45) a. képlet ugyanis a (44) alattiból, ez megint (43-ból származott, mely szerint az egész kerék nyomatéka az volt:

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\delta_0}^{\pi-\delta} + \mathfrak{M}_0 - \mathfrak{M}_{-\delta_0}^{-\pi}$ mely még így irható:

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0^{\pi-\delta} - \mathfrak{M}_{-\delta_0}^{-\pi}.$

Ha az egyenlet jobb oldalbeli két részét vizsgáljuk, az igenleges tag nem egyéb mint (8 Ábr) az AMN félkőrre eső lapátok összes nyomatéka; a nemleges tag pedig az AQN félkőrre eső lapátok összes nyomatéka. Miután most a két nyomaték egymásból kivonván nemleges eredményre vezet az annak a jele, hogy a kivonandó nagyobb volt mint a kisebbitendő; ennek folytán kell hogy: $\mathfrak{M}_0^{\pi-\delta_0} < \mathfrak{M}_{-\delta_0}^{-\pi}$ azaz az AMN félkőrre eső lapátok kisebb nyomatékot fejleszszenek mint az AQN-re esők. Ebből látjuk hogy az egészen víz alatt lévő alólcsapó kerék függélyes átmérője által két oly félrészre osztatik, mely közül a folyó víz felé álló nagyobb nyomatékot fejleszt mint a másik oldal felé fekvő.

Midőn tehát $\left(\mathfrak{M}_0^{\pi-\delta_0} - \mathfrak{M}_{-\delta_0}^{-\pi}\right)$ kitétel nemleges eredményre vezet annak más értelme nem lehet minthogy az igenleges tag $<$ a nemlegesnél. Ámde $\mathfrak{M}$ érték meghatározása nem tételezi fel épen hogy az AQN félkörbeli nyomaték az AMN-beliből kivonassék. Ugyan azon czélra jutunk ha a kivonást megforditva előveszszük, azaz ha felteszszük hogy $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{-\pi}_{-\delta_0} - \mathfrak{M}^{\pi-\delta}_{0}$; mely esetben az eredmény mindenesetre igenleges. Látni tehát hogy a (45) a. képletnek nemleges előjele csak azt jelenti kí hogy a folyó vízfelé álló félkerék nagyobb nyomatékot fejleszt mint a másik fél. De ha az egész kerék nyomatékát keressük, egészen közönyes reánk nézve akár az M-beli félkerék nyomaték a Q-beliéből akár megforditva a Q-belié az M-beliéből kivonatik. S így látni hogy a (45) a. képlet μ szögében előforduló minus jel egyszerüen ki is hagyható.

Hogy pedig én a (43) a. képlet összetételénél a most fejtett körülményt tekintetbe nem vettem, szándékos következetességből történt. Ha ugyanis a (26) a. képletre vissza tekintünk, az ebből fejtetett le:

$$\mathfrak{M} = \Sigma_{\delta_0}^{n\delta_0} \mathfrak{M} + \mathfrak{M}_0 - \Sigma_{-\delta_0}^{-n\delta_0} \mathfrak{M} \text{ mely rövidebben}$$

még így irható:

$$\mathfrak{M} = \Sigma_{0}^{n\delta_0} \mathfrak{M} - \Sigma_{-\delta_0}^{-n\delta_0} \mathfrak{M}.$$

A képletben, mint a (43) a.-ban is, az igenleges tag az AMN félkőrbeli, A-tól m-ig terjedő nyomaték összetét; a nemleges tag pedig az AQN félkőrbeli B'-től m'-ig érő nyomaték összetét jelenti. S minthogy a különbség a (26) a. képlet szerint csakugyan igenleges, az azt bizonyitja hogy az AMN félkőrbeli A-tól m-ig étő nyomaték összet $>$ mint az AQN félkőrbeli B'-től m'-ig érő összet; mely tény a keréknek egy egészen uj sajátságára vezet.

A mondottakat egybefoglalva látni tehát végezetre hogy a vizszintes szélkerék s az alólcsapó vízikerék igen közel rokonságban állanak hogy a fenebbi lefejtések csak ugyan bebizonyitják hogy a két kerék képletei közös forrásból merithetők. A fejtemények azonban a mellett nem állapodnak meg, a mennyiben kitelhetőleg azt is bizonyitják hogy az alólcsapó kerék eddig divó elmélete nem csak hiányos de némi részben véve téves is. Nem lévén szándékom az alólcsapó kerék elméletét kimeritöleg tárgyalni, annak további lefejtését más alkalomra hagyom.

13.

A fenebbi lefejtések végre képessé tesznek, más kerékidomok míveleteit lefejteni.

A (10) a. képlet oly kerékalakra vonatkozik, mely előkerül, ha a kerék lapátai a keréktengelyhez // hengerfölületü derékszögényeket képeznek. Gondolhatók azonban más kerékalakokat is, melyeknél a lapátok sem hengerfölületüek, sem dérékszögényalakuak; ilyen pl. a 3. ábrabeli lapát.

Hogy az eljárást lássuk, mely ily forma kerékre alkalmazandó, tegyük. fel, hogy a kerék ilyen 3. ábrabeli lapátokból áll! Legyen tehát (10 ábr.) xy a kerék tengelye s A B C D a kerék vázvonala (Contour). Ha az xy-ra $\perp$ AB sikhoz egy tetszés szerinti mn sikot huzunk, akkor a két sık AmnB kerékszelvényt foglal be, melynek magassága a két sík egymástóli távolságával egyenlő. Ha a két síkot egymáshoz közelitjük, a kerékszelvény magassága is mindinkább kisebbül, miközben a kiszelvény alsó AB és felső mn átmérő közti különbség is mindinkább kisebbülni fog. Ha pedig a két sikot egymáshoz végtelen közel gondoljuk, a kerékszelvény az egész kerék egy elemét képezendi, melynek magassága végtelen kicsiny s melynél a különbség a felső és alsó alapkör átmérői közt elenyész.

Az ilyen kiszelvényelem hatása a (13) a. képlet szerint meghatározható. Lesz ugyan:

$$L = \frac{\zeta\gamma}{2g}(1-\delta)(2+\delta)\,cv\,(c-v)\,F$$

Vagy ha a δ-tól függő rész értékét $[\delta]$ jelvénynyel kijelentjük, tekintve hogy a kerékelem átmesszése $F = 2rh$, és hogy $v = rw$, w alatt a szögi sebességet értve:

$$L = 2\,\frac{\zeta\gamma}{2g}\,[\delta]\,cwr^2\,(c-rw)\,h.$$

Felteszszük most hogy h magasság ∞ kicsiny; ha ezen végtelen kis magasság dz-vel jeleltetik, s w-t az utolsó zárjeles tényezőből kiemeljük, s $\frac{c}{w}$ helyébe röviden c_0 irjuk:

$$(46)\ldots\ldots dL = 2\frac{\zeta\gamma}{2g}[\delta]\,cw^2\,r^2\,(c_0-r)\,dz.$$

Ez tehát az egyes kerékszelvény mívelete. Ha az egész kerék végtelen sok ilynemü szelvényekre osztatik, ezek hatásai a (46) a. képlet utján kiszámithatók, mihelyt, δ, r és dz változók helyébe a felelkező értékeket helyettezzük. A mellett figyelembe veendő, hogy a keréknek AB sík fölötti része épen akkora hatást fejleszt mint az AB alatti kerékrész magarészéről fejleszt. Elég tehát ha a hatást az egyik, pl. a felső kerékrészre nézve lefejtjük, s azt kétszeresen veszszük. Ez okból ezután csak is a felső kerékrészről szólandunk.

Minthogy most a (46) képletben észlelhető $[\delta]$ érték csak egyedül a kerékben meglévő lapátok számától függ, ez pedig az ABC kerékrészhez tertozó valamennyi kiszelvényére nézve mindig ugyanaz; világos, hogy ezen $[\delta]$ által képviselt érték is minden szelvényre nézve ugyanaz. Ha tehát a kerékelem hatásáról az egész kerék hatására átmegyünk, az érték mint állandó a végrehajtandó egêszlès mütéti jele elé is tehetö: s lesz:

$$L = 2\frac{\zeta\gamma}{2g}[\delta]\,cw^2\int r^2\,(c_0-r)\,dz$$

ABC és mnC $\triangle\triangle$-ek hasonlósága folytán azonban: $\frac{AB}{2}:\frac{mn}{2} =$ AO : mp=OC : pC, vagy ha AO=a, mp=r, OC=h s pO=z, tehát pC=h—z:

$$a : r = h : h-z, \text{ miből } r = \frac{a}{h}(h-z), \text{ s ha helyettezünk:}$$

$$L = 2\frac{\zeta\gamma}{2g}[\delta]\,cw^2\int\frac{a^2}{h^2}(h-z)^2\left(c_0-a+\frac{az}{h}\right)dz \text{ azaz:}$$

$$L = 2\frac{\zeta\gamma}{2g}[\delta]\frac{cw^2a^2}{h^2}\int\Big(h^2(c_0-a) - zh\,(2c_0-3a) +$$

$$+ z^2(c_0-3a) + \frac{az^3}{h}\Big)dz$$

s ha egészlünk :

$$L = 2\frac{\zeta\gamma}{2g}[\delta]\frac{cw^2a^2}{h^2}\left(h^2z(c_0-a)-\frac{hz^2}{2}(2c_0-3a)\right.$$
$$\left.+\frac{z^3}{3}(c_0-3a)+\frac{az^4}{4h}\right)$$

Az egészelés itt csak $z=o$ és $z=h$ határokra terjedhet ki; ennélfogva:

$$L = \frac{2\zeta\gamma}{2g}[\delta]\frac{cw^2a^2}{h^2}\left[h^3(c_0-a)-h^3\left(\frac{2c_0-3a}{2}\right)+\right.$$
$$\left.h^3\left(\frac{c_0-3a}{3}\right)+\frac{ah^3}{4}\right]$$

s ha h^3 kiemeltetik, a visszamaradók rendeztetnek:

$$L = 2\frac{\zeta\gamma}{2g}[\delta]\,cw^2a^2h\left(\frac{c_0}{3}-\frac{a}{4}\right)$$

vagy ha c_0 helyére ismét $\frac{c}{w}$ tétetik, s $\frac{1}{3}$ kiemeltetik:

$$L = {}^2/_3\,\frac{\zeta\gamma}{2g}[\delta]\,cwa^2h\left(c-\frac{3aw}{4}\right)$$

De aw nem egyéb mint az AB átmetszés kerületi sebessége, ezt v-vel jelelvén meg, következik:

$$L = {}^2/_3\,\frac{\zeta\gamma}{2g}[\delta]\,cvah\left(c-\frac{3v}{4}\right)$$

És minthogy ah nem egyéb mint ABC $\triangle$ területe; ezt f-el jelelvén:

$$L = {}^2/_3\,\frac{\zeta\gamma}{2g}[\delta]\,fcv\left(c-\frac{3v}{4}\right)$$

Ez tehát az AB fölötti kerékrész hatása; az AB alatti része pedig épen akkora lévén, az összes mívelet:

$$(47)\ldots.\ L = \frac{2}{3}\frac{\zeta\gamma}{2g}[\delta]\,Fcv\left(c-\frac{3v}{4}\right),\ \text{ha ugyan } F = 2f.$$

Tekintetbe jő most hogy:

$$[\delta] = \delta\left(\frac{3-3\delta+\delta^2}{3}\right)\frac{\left(\operatorname{Cos}\frac{\delta}{2}+\sin\frac{\delta}{2}\right)}{2\sin\frac{\delta}{2}};\ \delta \text{ alatt: } \frac{2\pi}{n}$$

értve, ha n a lapátok száma.

Ha n végtelen nagyobbodásra átmegy, δ végtelen kisebbülésnek lesz alávetve, ámde ha δ elenyész $[\delta]$ ezen határ felé közeledik:

lin $[\delta] = 1$, minek folytán

$$(48)\ldots\ldots \lim L = {}^2/_3 . \frac{\zeta\gamma}{2g} F c v \left(c - \frac{3v}{4}\right)$$

Mind a (47) mind a (48) a. képlet elenyész ha $v = o$ és ha $v = \frac{4c}{3}$, s minthogy L a két határ között folyvást + marad, $v = o$ és $v = \frac{4c}{3}$ között oly értéknek léteznie kell, melynél L maximum; ez pedig nyeretni fog azon v-nél, mely: $\frac{dL}{dv} = o$ egyenletből előkerül. Az érték pedig ez:

$$(49)\ldots\ldots v = \frac{2c}{3}$$

A kúpidomu lapátkerék legnagyobb hatását éri el, ha kerületi forgása a szélsebesség ${}^2/_3$-dát teszi. Ezt feltevén, a (47) és 48) a. képletek ezen alakot veszik fel:

$$(50)\ldots\ldots \begin{cases} L = {}^2/_9\, \zeta . \frac{F\gamma c^3}{2g} [\delta] \text{ és} \\ \lim L = {}^2/_9\, \zeta . \frac{F\gamma c^3}{2g} \end{cases}$$

Figyelembe veendő most, hogy $\gamma \frac{Fc^3}{2g}$ a kerékre ható szél teljes munkaerejét jelenti. Az azon kivül előforduló tényezők pedig a gép haszonhatását fejezik ki; e szerint lészen a haszonhatás:

$$(51)\ldots\ldots \begin{cases} \eta = {}^2/_9 . \zeta . [\delta] \text{ és} \\ \lim \eta = {}^2/_9 . \zeta \end{cases}$$

A ζ-ra nézve különböztetnünk kell, vajon a kerék mozog-e nyugvó levegőben, vagy megfordítva, a mozgó levegő hat-e a nyugvó kerékre. Első esetben $\zeta = 1{\cdot}58$, másodikban $\zeta = 1{\cdot}86$.

Első esetben, azaz ellentálló levegőt feltéve:

$$(52)\ldots\ldots \begin{cases} \eta = 0{\cdot}35 [\delta] \text{ és} \\ \lim \eta = 0{\cdot}35 \end{cases}$$

Második esetben pedig, azaz lökő levegöt feltéve:

$$(53)\ldots\ldots \begin{cases} \eta = 0{\cdot}41 [\delta] \text{ és} \\ \lim \eta = 0{\cdot}41 \end{cases}$$

Azaz ellentállás esetében a hatás legfeljebb 35, lökés esetében pedig legfeljebb 41%-ot tesz.

A képletek most alkalmat nyujtanak a felállitott elméletet egy uj ellenőrző probának alávetni. Emlitettem fentebb hogy Tisza-Füreden egy 16 szárnyu $1{\cdot}21^m$ átmérőjü $0{\cdot}4^m$ magasságu kerék 10^I szélsebességnél $0{\cdot}84^I$ 𝔗 munkát fejlesztett. Vizsgáljuk meg ezen eredményt a fenebbi képletekből lefejthető eredménynyel.

Miután a keréknek 16 szárnya volt, $\delta = \frac{2\pi}{16} = 22^0\ 30^I$.

$$\text{Ennél fogva: } \log \delta = 0{\cdot}5940599-1$$

$$\log(3-3\delta+\delta^2) = 0{\cdot}2958089$$

$$\log\left(\text{Cos}\,\frac{\delta}{2}+\sin\frac{\delta}{2}\right) = 0{\cdot}0703631$$

$$\text{Compl. log}\left(2\sin\frac{\delta}{2}\right) = 0{\cdot}4087343 \text{ és}$$

$$\text{Compl. log } 3 = 0{\cdot}5228787-1 \text{ ha összeadunk:}$$

$$\log[\delta] = 0{\cdot}8918449-1 \text{ miből } [\delta] = 0{\cdot}7795$$

Tisza-Füreden csak a lökés esete fordult elő; a 16 szárnyu kerék hatása tehát legfeljebb: $0{\cdot}41 \times 0{\cdot}78 =$ közel 32% tehet.

És mivel a kerék forgása a szélsebesség csak $^1/_3$-dát elérte, tehát $v = \frac{c}{3}$ volt, következik a haszonhatás:

$$\eta = {}^2/_3\,\zeta\,[\delta].\frac{v\left(c-\frac{3v}{4}\right)}{c^2} = {}^2/_3\,\zeta\,[\delta].\frac{1}{4} = {}^2/_3 \times 1{\cdot}86 \times$$

$$0{\cdot}78 \times \frac{1}{4} = 24\,{}^1/_5\ \%$$

Ámde $c=10$, $F=2{\cdot}1$ lévén, következik:

$L = \frac{\gamma F c^3}{2g} = 2{\cdot}65$ I 𝔗, s ennek folytán tényleges haszonhatás:

$$\eta = \frac{0{\cdot}84}{2{\cdot}65} = 31\,{}^3/_5\ \%.$$

A gyakorlat eredménye tehát az elmélet eredményével nem egyezik. Az eltérés okát abban vélem lelhetni, hogy Károlyi barátom, kinek az adatokat köszönhetem, a szél sebességét kisebbnek vélte találni mint sem az a valóságban meg volt. A mérés hibáját ki is lehet számitani.

Feltévén, hogy az elméletileg kiszámitott haszonhatás helyes, a szélteljes hatása a haszonhatással szorozva a kerék tényleges haszonhatásával egyenlő, tehát megforditva a szél tetjes hatása:

$$L = \frac{0{\cdot}84}{0{\cdot}24} = 3{\cdot}5\text{I}\ \text{℔}$$

Ámde ezen szélerő:

$$L = \frac{\gamma F c^3}{2g}$$ tehát megforditva:

$$c = \sqrt[3]{\frac{2gL}{\gamma F}} = \sqrt[3]{1269{\cdot}76} = 10{\cdot}8\text{I}$$

A ki azonban szélmérésekkel foglalkozott, saját tapasztalásából a nehézségeket jól fogja ismerni, melyekkel minden szélmérés jár, s tudni fogja, hogy 1 láb különbség itt oly pontosság, melyet csak ritka esetekben lehet elérni. Károlyi Lajos ur mérése tehát kielégitő pontosnak tekintendő; s ennek folytán látjuk, hogy ezen tőlem egészen független kisérlet, mely tökéletesen sikerült, az általsm felállitott elmélet helyességét ujra bebizonyitja.

Végül szíves kötelességemnek tartom nevezett barátomnak önfeláldozó buzgalmáért és kitartásáért, melylyel engem e valóban nehéz probléma feloldása alkalmával támogatott és sokszor, ha már-már csüggedezni kezdtem, bátoritott, őszinte köszönetemet nyilványitni.