A

DIFFRACTIO ELMÉLETÉHEZ.

RÉTHY MÓRTÓL

(Felolvastatott a III. osztály ülésén 1874. márczius 16.)

BUDAPEST,
EGGENBERGER-FÉLE AKAD. KÖNYVKERESKEDÉS.
(Hoffmann és Molnár.)
1874.

Budapest, 1874. Nyomotott Az Athenaeum nyomdájában.

A diffractio elméletéhez.

RÉTHY MÓR-tól.

(Felolvastatott a III. osztály ülésén 1874. márczius 16.)

Jelen kutatásra Gaussnak hátramaradt irataiban olvasható[1]) nehány sor által indíttattam, a melyekre a nagy szerző munkáinak kiadója Schering Ernest tanár ur volt szives engemet figyelmeztetni.

Gauss, ugy látszik, inductió utján a diffractiót kifejező két egészletre jött. Mindkettő alkalmazható lévén tetszés szerinti nyilású ernyőre, általánosabb a közönségesen használtnál, a melyet Fresnel-félének nevezhetnénk; azonban csak egyikök egyez meg olyan mértékben az észleletekkel, mint a Fresnel-féle.

Ezen egészleteknek elméleti alapját való kerestemben, a Huyghens-féle elvnek Helmholtztól talált alakjából indulva ki, a diffractiónak olyan képletére jöttem, a mely mind a Fresnel-félétől, mind a Gaussétól elüt ugyan, de az észleletekkel csak olyan mértékben megegyez, mint ezek, s azon kivül ép oly általános alakú, mint a Gaussé.

1. §.

Mielőtt a nevezett uton talált diffractió-képlet levezetését s a Fresnel és Gauss-féléknek ezzel való összehasonlitását bemutatnám, legyen megengedve nehány geometriai tételt s Huyghens elvét előre bocsátanom.

---

1) Gauss Werke, Bd. V.; Bemerkungen in demselben Bde von Ernst Schering.

I. Legyenek $\xi\ \eta\ \zeta$ és $\sigma\ \tau$ n görbe vonalas derékszögű coordináták; $\xi'd\xi$, $\eta'd\eta$, $\zeta'd\zeta$ és $\sigma'd\sigma$, $\tau'd\tau$, $n'dn$ az ezen rendszerekhez tartozó térelemnek főbb méretei, ugy hogy

$$1)\ldots(\xi'd\xi)^2+(\eta'd\eta)^2+(\zeta'd\zeta)^2=(\sigma'd\sigma)^2+(\tau'd\tau)^2+(n'dn)^2$$

Minthogy $\xi\ \eta\ \zeta$ szükségképen függvényei $\sigma\ \tau$ n-nek, azért lészen:

$$2)\quad\left\{\begin{aligned}
\xi'd\xi &= \frac{\xi'd\xi}{\sigma'd\sigma}\,\sigma'd\sigma+\frac{\xi'd\xi}{\tau'd\tau}\,\tau'd\tau+\frac{\xi'd\xi}{n'dn}\,n'dn\\
\eta'd\eta &= \frac{\eta'd\eta}{\sigma'd\sigma}\,\sigma'd\sigma+\frac{\eta'd\eta}{\tau'd\tau}\,\tau'd\tau+\frac{\eta'd\eta}{n'dn}\,n'dn\\
\zeta'd\zeta &= \frac{\zeta'd\zeta}{\sigma'd\sigma}\,\sigma'd\sigma+\frac{\zeta'd\zeta}{\tau'd\tau}\,\tau'd\tau+\frac{\zeta'd\zeta}{n'dn}\,n'dn
\end{aligned}\right.$$

Az ezen egyenletekből 1) szerint képezhető identitás segélyével 9 egyenletet nyerünk, melyek közül a következő hármat emeljük ki:

$$3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\xi'd\xi}{n'dn}\cdot\frac{\xi'd\xi}{n'dn}+\frac{\eta'd\eta}{n'dn}\cdot\frac{\eta'd\eta}{n'dn}+\frac{\zeta'd\zeta}{n'dn}\cdot\frac{\zeta'd\zeta}{n'dn}=1\\
&\frac{\xi'd\xi}{\sigma'd\sigma}\cdot\frac{\xi'd\xi}{n'dn}+\frac{\eta'd\eta}{\sigma'd\sigma}\cdot\frac{\eta'd\eta}{n'dn}+\frac{\zeta'd\zeta}{\sigma'd\sigma}\cdot\frac{\zeta'd\zeta}{n'dn}=0\\
&\frac{\xi'd\xi}{\tau'd\tau}\cdot\frac{\xi d\xi}{n'dn}+\frac{\eta'd\eta}{\tau'd\tau}\cdot\frac{\eta'd\eta}{n'dn}+\frac{\zeta'd\zeta}{\tau'd\tau}\cdot\frac{\zeta'd\zeta}{n'dn}=0
\end{aligned}\right.$$

mely utóbbiakból kiszámitva lészen:

$$4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}+\\-\end{pmatrix}\frac{\xi'd\xi}{n'dn}=\frac{\eta'd\eta}{\sigma'd\sigma}\cdot\frac{\zeta'd\zeta}{\tau'd\tau}-\frac{\eta'd\eta}{\tau'd\tau}\cdot\frac{\zeta'd\zeta}{\sigma'd\sigma}\\
&\begin{pmatrix}+\\-\end{pmatrix}\frac{\eta'd\eta}{n'dn}=\frac{\zeta'd\zeta}{\sigma'd\sigma}\cdot\frac{\xi'd\xi}{\tau'd\tau}-\frac{\zeta'd\zeta}{\tau'd\tau}\cdot\frac{\xi'd\xi}{\sigma'd\sigma}\\
&\begin{pmatrix}+\\-\end{pmatrix}\frac{\zeta'd\zeta}{n'dn}=\frac{\xi'd\xi}{\sigma'd\sigma}\cdot\frac{\eta'd\eta}{\tau'd\tau}-\frac{\xi'd\xi}{\tau'd\tau}\cdot\frac{\eta'd\eta}{\sigma'd\sigma}\ .
\end{aligned}\right.$$

Gondoljuk továbbá a 2) egyenleteket $\sigma'd\sigma$, $\tau'd\tau$ és $n'dn$ ismeretlenek szerint feloldva s az igy nyert három egyenletre ismét az 1) viszonylatot alkalmazva; lészen akkor többek között

$$5)\quad\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\xi'd\xi}{\sigma'd\sigma}\right)^2+\left(\frac{\xi'd\xi}{\tau'd\tau}\right)^2+\left(\frac{\xi'd\xi}{ndn}\right)^2=1\\
&\left(\frac{\eta'd\eta}{\sigma'd\sigma}\right)^2+\left(\frac{\eta'd\eta}{\tau'd\tau}\right)^2+\left(\frac{\eta'd\eta}{n'dn}\right)^2=1\\
&\left(\frac{\zeta d'\zeta}{\sigma d'\sigma}\right)^2+\left(\frac{\zeta'd\zeta}{\tau'd\tau}\right)^2+\left(\frac{\zeta'd\zeta}{n'dn}\right)^2=1
\end{aligned}\right.$$

A 4) egyenleteket azon specialis esetben fogjuk alkalmazni, a midőn $\frac{d\zeta}{d\tau} = o$; az 5) egyenleteket pedig azon esetben, a midőn $\sigma\ \tau$ n cartesiusi coordinátákat jelentenek, mely esetben $\sigma' d\sigma = dx$, $\tau' d\tau = dy$, $n' dn = dz$.

Lészen tehát a 4) és 5) egyenlet-rendszerből:

$$6)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix}+\\-\end{pmatrix}\dfrac{\xi' d\xi}{n' dn} = -\dfrac{\eta' d\eta}{\tau' d\tau} \cdot \dfrac{\zeta' d\zeta}{\sigma' d\sigma} \\ \begin{pmatrix}+\\-\end{pmatrix}\dfrac{\eta' d\eta}{n' dn} = \dfrac{\zeta' d\zeta}{\sigma' d\sigma} \cdot \dfrac{\xi' d\xi}{\tau' d\tau} \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\xi'^2} = \left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\xi}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\xi}{dz}\right)^2 \\ \dfrac{1}{\eta'^2} = \left(\dfrac{d\eta}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\eta}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\eta}{dz}\right)^2 \\ \dfrac{1}{\zeta'^2} = \left(\dfrac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dz}\right)^2 \end{cases}$$

II. Legyen ω valamely görbe felületnek, ς vonalrendszer által határolt, része; n annak bizonyos iránybau $+$ jegygyel vett normálisa; λ olyan függvény, mely e felületen és határvonalain deriváltjaival együtt véges és egyértelmű.

Ezen s az előbbi pontban értelmezett egyéb jelölések alkalmazásával a következő tételt fogjuk bebizonyitani:

$$8) \ldots \int \lambda\, d\zeta = \int \frac{1}{\zeta'}\left[\frac{d\lambda}{\xi' d\xi}\frac{\eta' d\eta}{n' dn} - \frac{d\lambda \cdot \xi' d\xi}{\eta' d\eta\ n' dn}\right] d\omega$$

a jobboldalon lévő egészlet, később megnevezendő irányban, az ς vonalrendszerre, a baloldalon lévő pedig az általa határolt különben tetszőleges felületre lévén kiterjesztendő.

Gondoljunk e tétel bebizonyitása végett az ω felületen olyan derékszögű hálózatot (σ, τ) kiteritve, melynek egyik irányú szála(τ) nem egyéb, mint a $\zeta =$ constans felületeknek az ω-vali metszete. Lészen akkor

$$9)\quad \begin{cases} d\omega = \sigma' d\sigma \,.\, \tau' d\tau \\ \dfrac{d\zeta}{d\tau} = o \end{cases}$$

s miután az ω felületen haladván $dn = o$, ugyanott

$$10) \ldots d\zeta = \frac{d\zeta}{d\sigma} d\sigma$$

A következő egészleteket az egész ω fefületre, illetőleg annak ς határvonalára kiterjesztvén, lészen már most:

$$\int \frac{d\lambda}{\tau' d\tau} \cdot \frac{d\zeta}{\sigma' d\sigma} d\omega = \int d\zeta \int \frac{d\lambda}{\tau' d\tau} \tau' d\tau$$

s ha $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 \ldots$ azon értékeket jelentik, melyeket λ az σ határnak valamely $\zeta =$ constans-hoz tartozó 1, 2, 3, ... pontjaiban vesz fel

$$11) \ldots \int \frac{d\lambda}{\tau' d\tau} \cdot \frac{d\zeta}{\sigma' d\sigma} d\omega = \int d\zeta\,(-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \ldots)$$

Ha már most abban állapodunk meg, hogy a hátramaradt vonalas egészelést jövendőben azon irányban végezzük el, a melyben haladva az ω felület bal kezünk felé esik, ha a positiv normális irányában állva a határvonalakat bejárjuk, akkor a 11) egyenletet következőkép irhatjuk:

$$12) \ldots \int \frac{d\lambda}{\tau' d\tau} \cdot \frac{d\zeta}{\sigma' d\sigma} d\omega = -\int \lambda d\zeta$$

Más részről

$$\frac{d\lambda}{\tau' d\tau} = \frac{d\lambda}{\xi' d\xi} \frac{\xi' d\xi}{\tau' d\tau} + \frac{d\lambda}{\eta' d\eta} \frac{\eta' d\eta}{\tau' d\tau} + \frac{d\lambda}{\zeta' d\zeta} \frac{\zeta' d\zeta}{\tau' d\tau}$$

Tekintve tehát a 6) és 9) egyenleteket, s a 6) ban a — jegyet választván lészen:

$$\frac{d\lambda}{\tau' d\tau} \cdot \frac{d\zeta}{\sigma' d\sigma} = \frac{1}{\zeta'} \left[-\frac{d\lambda}{\xi' d\xi} \cdot \frac{\eta' d\eta}{n' dn} + \frac{d\lambda}{\eta' d\eta} \cdot \frac{\xi' d\xi}{n' dn} \right]$$

mely egyenletnek a 12)-be való helyettezése által a 8) tétel jő ki eredményűl.

III. Megtörténhetik, hogy az ω felületnek olyan pontjai is vannak, a melyek a $\xi\ \eta\ \zeta$ speciális természeténél fogva a 11) alatt végbevitt egészeléskor mint határok lépnek föl. Ilyen pontot mindig ki kell rekesztenünk végtelen kis zárt vonal segélyével, mely azután szintén hozzá lesz számitandó az ω felületet határoló ς rendszerhez. Ezen pontokat különben arról lehet felismerni, hogy bennök $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ zeró vagy végtelen nagygyá lesz; e pontokat valóban, hallgatva ugyan, de kirekesztettük már bizonylatunkban is, melyekben $\xi'\ \eta'\ \zeta'$-tel mint *mennyiségekkel* bántunk.

A confocális ellipticus coordináták azon neménél, melyet a következőkben alkalmazni fogunk, ép ezen eset lép föl.

Legyenek ugyanis coordináta-rendszerünk alap-felületei confocális forgási ellipsoidok, hyperboloidok s ezeknek meridiánusai, s jelöljük a P, p gyupontoknak, illetőleg valamely tetszőleges M pontnak cartesiusi összrendezőit $\alpha_, \beta_, \gamma_,$, $\alpha\ \beta\ \gamma$, x y z betükkel; legyen továbbá

$$13)\left\{\begin{array}{l} R^2 = (x-\alpha_,)^2 + (y-\beta_,)^2 + (z-\gamma')^2 \\ r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 \\ h^2 = (\alpha-\alpha_,)^2 + (\beta-\beta_,)^2 + (\gamma-\gamma_,)^2 \end{array}\right\}$$

Θ azon szög, melyet az M pont meridiánusa valamely tetszőlegesen választott elsővel képez, s végre $180^\circ - P\widehat{M}p = w$.

Lészen ez esetben:

$$14\left\{\begin{array}{l} \xi = R + r \\ \eta = R - r \\ \zeta = \Theta \end{array}\right.$$

következőleg

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 + 2\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dr}{dx}$$

$$\left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dR}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2 + 2\frac{dR}{dy}\cdot\frac{dr}{dy}$$

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 = \left(\frac{dR}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 + 2\frac{dR}{dz}\cdot\frac{dr}{dz}$$

melyekből a 7) egyenletek elsejének és

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = 1$$

$$\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dr}{dx} + \frac{dR}{dy}\cdot\frac{dr}{dy} + \frac{dR}{dz}\frac{dr}{dz} = -\operatorname{Cos} w$$

vonatkozásoknak segélyével lészen. . . $\xi' = \dfrac{1}{2 \sin \frac{1}{2} w}$

ép igy található. . . . . $\eta' = \dfrac{1}{2 \cos \frac{1}{2} w}$

hogy pedig végre. . . . . $\zeta' = \dfrac{Rr \sin w}{h}$

az közvetlenűl foly az MPp háromszögből, melynek e vonal épen magasságát képezi.

A szóban lévő derékszögü rendszerhez tartozó térelemnek főbb méretei ennélfogva

$$15)\left\{\begin{aligned}\xi' d\xi &= \frac{d\,(R+r)}{2\sin\frac{w}{2}}\\ \eta' d\eta &= \frac{d\,(R-r)}{2\cos\frac{w}{2}}\\ \zeta' d\zeta &= Rr\sin w\frac{d\Theta}{h}\end{aligned}\right.$$

s a következő képletben fellépő $d\eta\, d\xi$ végte len kicsinyek mértékéül dn-et választván, a fentebbi transformáló képlet (8) a következő alakot veendi föl:

$$16)\ldots\frac{2}{h}\int\lambda d\zeta = \int\left(\frac{d\lambda}{d\xi}\cdot\frac{1}{Rr\cos^2\frac{1}{2}w}\frac{d\eta}{dn} - \frac{d\lambda}{d\eta}\frac{1}{Rr\sin^2\frac{1}{2}w}\frac{d\xi}{dn}\right)d\omega$$

Ezen képlet alkalmazásakor kireszkesztendők lesznek az ω felületnek a Pp egyenes által való átdöfései, miután ezekben $w=o$, vagy π. —

IV. Jelöljön K egy tetszőleges állandót; Φ és ψ olyan függvényeket, melyek valamely ω felületrendszer által határolt τ térben deriváltjaikkal egyetemben végesek és egyértelműek s a

$$17)\ldots\ldots\ \Delta\Phi + k^2\Phi = o$$

differentiális egyenletnek megoldásai, hol

$$\Delta\Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}.$$

Legközelebbi feladatunk lészen ψ-nek a τ tér tetszőleges, csakhogy határától véges távolba eső, p pontjában való értékét ψ_p-t az ω felület-rendszerre kiterjesztendő egészletek által kifejezni.

Kiindulási pontul Green tétele szolgál, mely jelen esetben a következő alakot veszi föl:

$$18)\ldots\int\psi\frac{d\Phi}{dn}d\omega = \int\Phi\frac{d\psi}{dn}d\omega$$

mely egészletek a τ tért határoló összes felület-rendszerre terjesztendők ki. A normális + része a tér belsejébe esik.

Ezen egyenletbe

$$\Phi = \frac{e^{kr\sqrt{-1}}}{r}$$

függvényt helyettesitnünk csak úgy lesz megengedve, ha elébb a p pontot kirekesztjük a τ térből. A kirekesztést ω gömbfelület segélyével fogjuk eszközölni, melynek a p pont középpontját képezi. Az igy módositott térben Φ függvényünk a 17) egyenletnek megoldását képezvén, a 18) következőleg lesz irható:

$$19)\int \psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega + \int \psi_{,} \frac{d\Phi_{,}}{dn_{,}} d\omega_{,} = \int \Phi \frac{d\psi}{dn} d\omega + \int \Phi_{,} \frac{d\psi_{,}}{dn_{,}} d\omega_{,}$$

S ezen egyenlet kitűzött feladatunk megoldására vezet, mihelyt felvett gömbünk $r_{,}$ sugarát zeróhoz engedjük közeledni. K-val ugyanis a p pontból egység sugárral irt gömbfelületet jelölvén lészen $d\omega_{,} = r_{,}^{2}\, d\,K$, s igy ha még $i = \sqrt{-1}$:

$$\int \psi_{,} \frac{d\Phi'}{dn_{,}} d\omega_{,} = ik \int \psi_{,} r_{,} e^{ik r_{,}}\, dK - \int \psi_{,} e^{ik r_{,}}\, dK$$

$$\int \Phi_{,} \frac{d\psi_{,}}{dn_{,}} d\omega_{,} = 4\pi r_{,} e^{ik r'}$$

úgy hogy $r_{,}$-nek zeróhoz való közeledtével lészen

$$\int \psi_{,} \frac{d\Phi_{,}}{dn_{,}} d\omega_{,} = -\, 4\pi\, \psi_{p} \text{ és } \int \Phi_{,} \frac{d\psi_{,}}{dn_{,}} d\omega_{,} = o$$

a minélfogva a 19) egyenletből a következő lesz:

$$20) \ldots -4\pi\,\psi_{p} = \int \frac{e^{ikr}}{r} \frac{d\psi}{dn} d\omega - \int \psi \frac{d\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)}{dn} d\,\omega$$

s ez egyszersmind legutóbb kitüzött feladatunk megoldását képezi.

Megjegyezvén, hogy azon müveleteknél fogva, a melyek használatával a 20) egyenletre jöttünk, $\frac{e^{ikr}}{r}$ symbolice az x y z pontból a p pontba megérkező hullámmozgás $\frac{\cos(kr + 2\pi\, nt)}{r}$ potentiálját is jelölheti, — hol t az időt, n a másodperczben történő hullámrezgések számát jelenti s

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ lévén a hullám hoszsza, — a talált 20) egyenletet következőképen foglalhatjuk szavakba:

Minden függvény, mely valamely térben a

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$$

differentiális egyenletnek megfelel, a tér tetszőleges pontjában két egészlet összegével azonos; az egyik egészlet olyan hullámmozgás potentiáljának tekinthető, mely az ω felületen $-\frac{1}{4\pi}\frac{d\psi}{dn}$ *amplitudéval, a második ellenben olyanénak, mely az ω felület egyik oldalán* $+\frac{1}{4\pi}\frac{\psi}{2dn}$, *másik oldalán* $-\frac{1}{4\pi}\frac{\psi}{2dn}$ *amplitudéval terjed ki*, 2dn lévén az ellenkező rezgésben lévő pontoknak egyensúlyi helyzetükben való távola.*)

A mennyiben pedig az 1) egyenletnek megfelelő függvények mind megannyi hullámmozgás potentiáljainak (illetőleg fénymozgás mennyiségeinek) tekinthetők, a kimondott tétel egyszersmind a Huyghens-féle elvnek legáltalánosabb s a használt müveleteknél fogva tökéletesen szigorú kifejezése.

2. §.

Legyen már most P valamely homogen, polarisált fényt kiárasztó s p az általa megvilágitott pont. E két pont legyen egymástól valamely sötét Ω felület által elválasztva melyen azonban ς vonal-rendszertől határolt nyilások léteznek. Legyen ψ_p azon függvény, mely a leirt körülmények között a p pontban való megvilágitás kifejezéseül szolgál.

A megelőző tétel segélyével könnyű volna ψ_p-nek a tér tetszőleges pontjára vonatkozott kiszámítása, ha ψ és $\frac{d\psi}{dn}$ függvények értéke *csak egy* olyan felületrendszeren ismeretes volna, a mely az adott nyilásokat teljesen béfödi.** Miután azonban e függvényeknek ilyen felületrendszeren való értéke eddigelé még a legegyszerübb esetben se volt feltalálható,

*) Helmholtz, Crelle Journal Bd 57.

**) Hiszen az Ω fölületen e függvények föltétel szerint zeróval egyenlők.

azért kénytelenek vagyunk azon kétségen kivül csak közelitőleg, sőt a nyilások határvonalain semmikép se érvényes hypothesishez folyamodni, miszerint a fényhullámzás valamely, a nyilásokat elfödő, különben ismeretlen ω felületrendszerig úgy terjed ki, mintha az Ω ernyő ott se volna.

E fölvétel mellett az ω felületrendszerig

$$\psi = A \frac{\cos(k\,R + 2\pi nt)}{R}$$

hol A állandót jelent, vagy Gauss symbolicus jelölésével élve

$$21) \ldots \quad \psi = A \frac{e^{ikR}}{R}$$

mely előbbi függvényből az aethernek u, v, w, elongatiói az x, y, z tengelyek irányában a következő képletek szerint számitandók ki.

$$21_a) \ldots \quad u_{,} = o \quad , v_{,} = -\frac{d\psi}{d\gamma} \quad , w_{,} = \frac{d\psi}{d\beta}$$

S a 21)-nek a 20)-ba való helyettezése által a tetszőleges p pontban támadó diffractió tüneményének kiszámítására a következő képlet ered:

$$22) \ldots \psi_p = -\frac{A\,ik}{4\pi} \int \frac{e^{ik\,(R+r)}}{R\,r} \frac{d\,(R-r)}{dn} d\omega$$

$$-\frac{A}{4\pi} \int \frac{e^{ik\,(R+r)}}{Rr} \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dn} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dn} \right) d\omega$$

mely egészletek csak az ω rendszerre terjesztendők ki. Megjegyzendő azonban, hogy ezen képlet csak úgy adhat helyes eredményt, ha $\Omega + \omega$ zárt felület a P és p pontokat egymástól teljesen elválasztja; mert csak ezen esetben felelhet meg 21) ben felvett ψ függvényünk a 17) egyenletnek, az $\Omega + \omega$ $+ \omega$, által határolt egész térben. A normális végre az 1. §. IV. értelmében az $\Omega + \omega$ zárt felület azon oldalán veendő $+$ jegygyel, a mely p felé van fordulva.

A 22) képlet kifejezte ψ_p függvényt a 16) transformáló képlet alkalmazása által egyszerűbb alakra fogjuk hozhatni

A 14) jelölések használatával ugyanis a 22) egyenlet igy is irható:

$$23)\ \psi_p = \frac{A}{4\pi}\int\left[\frac{e^{ik\xi}}{Rr}\cdot\frac{2\eta}{\xi^2-\eta^2}\cdot\frac{d\xi}{dn}-\frac{e^{ik\xi}}{Rr}\left(\frac{2\xi}{\xi^2-\eta^2}-ik\right)\right]\frac{d\eta}{dn}\,d\omega$$

s a jobboldalon lévő egészletnek az idézett transformáló képletével való összehasonlitása a következő differentiális egyenletek megfejtését tüzi legközelebbi feladatunkkúl:

$$24)\ldots\begin{cases}\dfrac{d\lambda}{d\eta}=-e^{ik\xi}\dfrac{2\eta}{\xi^2-\eta^2}\sin^2\dfrac{w}{2}\\[2ex]\dfrac{d\lambda}{d\xi}=-e^{ik\xi}\left(\dfrac{2\xi}{\xi^2-\eta^2}-ik\right)\cos^2\dfrac{w}{2}\end{cases}$$

Miután pedig

$$\cos^2\frac{w}{2}=\frac{h^2-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}$$

$$\sin^2\frac{w}{2}=-\frac{h^2-\xi^2}{\xi^2-\eta^2}$$

azért a 24) egyenletek igy is irhatók:

$$24_a)\begin{cases}\dfrac{d\lambda}{d\eta}=e^{ik\xi}\dfrac{d}{d\eta}\left(\cos^2\dfrac{w}{2}\right)\\[2ex]\dfrac{d\lambda}{d\xi}=e^{ik\xi}\left[\dfrac{d}{d\xi}\left(\cos^2\dfrac{w}{2}\right)+ik\cos^2\dfrac{w}{2}\right]\end{cases}$$

következőleg

$$25)\ \ldots\ \lambda=e^{ik\xi}\cos^2\frac{w}{2}+\text{Constans.}$$

Ezen állandó azonban a végeredményből úgyis kiesvén *a diffractio kiszámítására a sötét ernyő nyilásait határoló vonalrendszerre kiterjesztendő következő egészlet szolgál:*

$$26)\ \ldots\ \psi_p=\frac{A}{2\pi h}\int e^{ik(R+r)}\cos^2\frac{w}{2}d\Theta$$

hol w azon szöget jelenti, melyet a fénysugár irányában $+$ jegygyel vett R és r egymással képez. —

Eddig hallgatva föltételeztük, hogy az ω felületrendszer nem metszi a Pp egyenest. Az ellenkező esetet azonban könnyű lesz eldönteni azok szerint, a miket az 1. §. III. végén megjegyeztünk; de közvetlenül is a következő módon.— Gondoljuk, hogy az ω felületrendszer nem metszi a Pp egyenest ez esetben az Ω ernyő szükségkép metszi azt. Váltsák már most fel szerepeiket ω és Ω; legyen az előbbi az ernyő s az utóbbi a nyilásokat befödő felületek rendszere. A megfelelő diffractiót kifejező függvény legyen $-\psi'_p$-vel jelölve. — Világos hogy $\psi_p + \psi_p'$ a p-t körülvevő zárt felületre kiterjesztett azon egészletet jelenti, a mely a p pontnak minden diffractio nélkül történendő megvilágitását fejezi ki: azaz

$$\psi_p + \psi_p' = \frac{A\,e^{ikh}}{h}$$

a minélfogva lészen

$$27)\ldots\ldots -\psi'_p = -\frac{A\,e^{ikh}}{h} + \frac{A}{2\pi h}\int e^{ik(R+r)} \cos^2\frac{w}{2}\,d\Theta$$

A 26) és 27)-ben föllépő egészletet gyakran kényelmesebb egy másik alakjában alkalmazni, melyben $d\Theta$ helyett az ς határvonal eleme lép föl. — Jelöljük ezen alak levezetésének céljából v-vel azon szöget, melyet ds elem a hozzátartozó R és r sugarakat tartalmazó síkkal képez; lészen ekkor

$$\frac{\zeta' d\zeta}{ds} = \sin v$$

mig más részről 15) segélyével:

$$\frac{\zeta' d\zeta}{ds} = \frac{d\Theta}{ds}\,\frac{Rr \sin w}{h}$$

következésképp

$$28)\ldots\ldots \psi_p = \frac{A}{4\pi}\int \frac{ds \sin v}{Rr\,tg\,\frac{1}{2}w}\,e^{ik(R+r)};$$

II. A 27) képlet többek között a következő tételre vezet:

Ha a P és p között lévő ernyő nyilása olyan kör, melynek egyenletei R = constans, r = constans, — akkor a p-ben megérkező fényhullám intenzitása:

$$I = \left[A\frac{k}{h}\left(1 \mp \cos^2\frac{w}{2} \cos\,(h,r)\right)\sin(h,x)\right]^2$$

hol (h,x) és (h,r) azon szögeket jelölik, melyeket $\overline{Pp}$ az X-tengelylyel, illetőleg a r fénysugárral képez, — s a felső vagy alsó jegy érvényes a szerint, a mint R+r—h a fényhullámok páros vagy páratlan számú félhosszával egyenlő.

Ugyanis

$$\psi_p' = -\frac{A}{h}\left(e^{ikh} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik(R+r)\cos^2\frac{w}{2}} d\Theta\right)$$

következőleg lészen 21$_a$) szerint, — ha tekintetbe veszszük, hogy $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ végtelen nagynak tehető, symbolice:

$$v_{,} = A\,\frac{ik}{h}\left[e^{ikh}\cos(h,z) - \frac{e^{ik(R+r)\cos^2\frac{1}{2}w}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(r,z)\,d\Theta\right]$$

Ámde ismeretes gömbháromszögtani tétel szerint:

$$\cos(r,z) = \cos(h,r)\cos(h,z) - \sin(h,r)\sin(h,z)\cos\Theta$$

következéskép

$$v_{,} = A\frac{ik}{h}\left[e^{ik\,h} - e^{ik(R+r)} - \cos^2\frac{w}{2}\cos(h,r)\right]\cos(h,z)$$

Ép igy

$$-w_{,} = A\,\frac{ik}{h}\left[e^{ikh}\quad e^{ik(R+r)}\quad \cos^2\frac{w}{2}\cos(h,r)\right]\cos(h,y)$$

A p-beni világosság intensitása lészen tehát:

$$I = \mathrm{mod}\,(v_{,}^2 + w_{,}^2) = \left(A\frac{k}{h}\sin(h,x)\right)^2\left[1 + \cos^4\frac{w}{2}\cos^2(h,r)\right.$$

$$\left. -\, 2\cos^2\frac{w}{2}\cos(h,r)\cos k\,(R+r-h)\right]$$

úgy hogy ha felteszszük, miszerint

$$R+r-h = 2n.\frac{\lambda}{2}\ldots\ldots \quad a)$$

illetőleg

$$R+r-h = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2}\ldots\ldots \quad b)$$

akkor lészen:

$$I = \left[A\frac{k}{h}\sin(h,x)\left(1 \mp \cos^2\frac{w}{2}\cos(h,r)\right)\right]^2$$

Ezen tétel azért érdekes, mert szerinte azon esetben, a midőn a köralaku nyilás olyan szük, hogy w és (h,r) szögek cosinusai az egységgel egyenlőknek tehetők, lészen

$$I=4\left(A\frac{k}{h}\sin(h,x)\right)^2 \text{ vagy } I=o$$

a szerint, a mint b) vagy a) érvényes mig a világitás intensitása p-ben különben diffractio nélkül a következő mennyiség által volna adva:

$$I=\left[A\frac{k}{h}\sin(h,x)\right]^2$$

III. A 28) egészletet könnyű teljesen kiszámitani azon esetben, a midőn a sötét ernyő nyilásai csupán sokszögek által határoltatnak s méreteik azon kivül R és r-hez képest oly kicsínyek, hogy R és r iránya a sokszögek összes pontjaiban változatlannak tekinthető. E sokszögek különben tetszőlegesek s térbeliek is lehetnek. —

A 28) ez esetben a következővé egyszerűsbűl:

$$29)\ldots\ldots\psi=\frac{A}{4\pi\, Rr\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}w}\int ds\,\sin v\, e^{ik(R+r)}$$

Válaszszunk coordinátáк rendszeréül olyan három sikot, melyek egyike a R és r fénysugarakkal párhuzamos, másodika a R s harmadika a r irányára merőleges; legyen $M_n\ M_{n+1}$ a sokszögű határvonalnak egy oldala s jelöljük ez oldal tetszőleges M pontjának, illetőleg végpontjainak választott rendszerünk síkjaitól való távolait p', R', r', p'_n, R'_n, r'_n, p'_{n+1} R'_{n+1}, r'_{n+1} betükkel; legyen végre a második és harmadik coordináta-síknak a fénylő, illetőleg megvilágitott ponttól vett távola R_0 és r_0. —

Az $M_n\ M_{n+1}$ egyenesnek egyenletei lesznek:

$$30)\left\{\begin{aligned} R'-R'_n&=\frac{R'_{n+1}-R'_n}{p'_{n+1}-p'_n}(p'-p'_n)\\ r'-r'_n&=\frac{r'_{n+1}-r'_n}{p'_{n+1}-p'_n}(p'-p'_n)\end{aligned}\right.$$

s ezen egyenesnek M pontjában

$$31)\left\{\begin{aligned} &R=R_0+R'\\ &r=r_0+r'\\ &ds\,.\sin v=dp'\end{aligned}\right.$$

A 30) és 31) kifejezéseknek a 29) egyenletbe való helyezése után pedig lészen

$$\psi = \frac{A e^{ik(R_0+r_0)}}{4\pi R r \operatorname{tg}\frac{w}{2}} \sum_n \int_{p'_n}^{p'_{n+1}} dp' e^{ik X}$$

hol... $X = \frac{R'_{n+1} - R'_n - (r'_{n+1} - r'_n)}{p'_{n+1} - p'_n} (p' - p'_n) + (R'_n - r'_n)$

s végre

$$32) \ldots \psi = \frac{A e^{ik(R_0+r_0)}}{4\pi R r \operatorname{tg}\frac{w}{2}} \sum_n \frac{e^{ik(R'_{n+1} - r'_{n+1})} - e^{ik(R'_n - r'_n)}}{R'_{n+1} - r'_{n+1} - (R'_n - r'_n)} (p'_{n+1} - p'_n)$$

az összeg a nyilást határoló sokszögek minden oldalára lévén kiterjesztendő. A sokszög csúcsainak sorrendje az 1. §. 12) egyenletét megelőző megjegyzés szerint döntendő el.

3. §.

I. Képletünket a Fresnel-félével és a Gausséival összehasonlitandók, a diffractiót okozó nyilásokat a fénylő s a megvilágitott ponttól vett távolukhoz képest, valamint a fényhullám hosszát is, a vizsgálat megkönnyitésének czéljából, végtelenűl kicsinyeknek fogjuk föltételezni, s itt is azon esetre szoritkozni, a midőn az ernyőnek azon része, a melyen nyilások vannak, sík.

Legyen R és r fénysugaraknak ezen sík normálisával bézárt hegyes szöge α illetőleg β; lészen

$$\frac{dR}{dn} = \cos\alpha \text{ és } \frac{-dr}{dn} = \cos\beta$$

miután $+dn$ a siknak azon oldalára esík, a melyen p fekszik. Ezeknek a 22)-be való helyettezése által a diffractío kifejezéséül a következőt nyerjük:

$$\psi = \frac{Aik}{4\pi} \int \frac{e^{ik(R+r)}}{Rr} (\cos\alpha + \cos\beta)\, d\omega$$

$$- \frac{A}{4\pi} \int \frac{e^{ik(R+r)}}{Rr} \left(\frac{1}{R}\cos\alpha + \frac{1}{r}\cos\beta \right) d\omega$$

mely képlet sokkal egyszerűbb alakot vesz fel, mihelyt első föltételünket felhasználjuk. Válaszszunk e czélból egységűl olyan hosszat, mely a nyilások dimensióihoz képest véges. R és r ezen egységekben végtelen nagyok, mig k általában véges (végtelen kicsiny semmi esetre se) lesz.

Ennélfogva $\frac{1}{R}\cos\alpha + \frac{1}{r}\cos\beta$ elenyésző lesz k (cos α + cos β)-hoz képest s igy az egész második egészlet is az elsőhöz képest.*) Lészen tehát:

$$33) \ldots \psi = \frac{A\,ik}{4\pi}(\cos\alpha + \cos\beta)\int \frac{e^{ik(R+r)}}{Rr}\,d\omega$$

Minthogy továbbá w szöget állandónak tekinthetjük, azért a 26) képletből a következő foly:

$$34) \ldots \psi = \frac{A}{2\pi h}\cos^2\frac{w}{2}\int e^{ik(R+r)}\,d\Theta$$

Más részről Fresnel és Gauss megfelelő diffractió képleteit ψ_f és ψ_g, $\psi_{g'}$-tel jelölvén, a behozott állandóktól eltekintve lészen:

$$35) \ldots \psi_f = \frac{Aik}{4\pi}\int \frac{e^{ik(R+r)}}{Rr}\,d\omega$$

$$36) \ldots \psi_g = \frac{A}{4\pi h}\int e^{ik(R+r)}\,d\Theta$$

$$37) \ldots \psi_{g'} = \frac{Aik}{4\pi}\,\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin w}\int \frac{e^{ik(R+r)}}{Rr}\,d\omega$$

Összehasonlitván már most a 33) — 37) egészleteket a következő vonatkozásokat nyerjük:

$$38) \ldots \psi_f : \psi_g : \psi = \frac{1}{\cos\alpha + \cos\beta} : \frac{1}{1 + \cos w} : 1$$

$$39) \ldots \psi_{g'} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin w}\,\psi_f$$

E vonatkozásokból pedig az foly, hogy

1) ψ_f, ψ_g, ψ s a 3) alatt emlitendő esetet kivéve $\psi_{g'}$ is mindig együtt enyésznek el, és ennélfogva a segélyökkel ki-

*) Kirchhoff tetszóleges alaku nyilásokról is bebizonyitotta optikai előadásaiban, miszerint:

$$\int \frac{e^{ik(R+r)}}{Rr}\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\right)d\omega = o \,.\,. \text{ ha } k = \infty \text{ és } R + r = \text{constans}$$

nem része a nyilásra födött felületnek.

számitott diffractio-spectrumok sötét helyei azonosak lesznek hogy

2) ψ_f, ψ_g, ψ és ψ_{g_I} modulusai a bennök szereplő változóknak általában különböző értékei mellett érik el legnagyobb és legkisebb értékeiket s ennélfogva spectrumaik legvilágosabb helyei nem lesznek azonosak; hogy

3) ψ_g és ψ azonosokká válnak, a midőn w zeróval egyenlő, mig ugyanezen esetben

$$\psi_g = \psi_f \cos\alpha \text{ és } \psi_{g_I} = \psi_f \sin\alpha \frac{d\beta}{dw}$$

úgy hogy in specie azon esetben, ha a diffractió síkja az ernyőére merőlegesen áll s ennélfogva

$$\beta - \alpha = w, \text{ azaz} \frac{d\beta}{dw} = 1,$$

lészen

$$\psi_{g_I} = \psi_f \sin\alpha$$

Igy tehát mig ψ_f modulusa, miként tudjuk, akkor éri el legnagyobb értékét, a midőn $\alpha = o$, addig ψ_{g_I} ugyanekkor zeróval egyenlő. — *Ennélfogva ψ_{g_I} a kisérlet eredményeivel nem fér össze.*

Feleslegesnek tartom azon számításaim közlését, a melyek a 2) pont alatt emlitett egymás közti eltéréseire vonatkoznak a ψ_f ψ_g és ψ diffractió képleteknek. Számitásaimból kitünt, *hogy ezen eltérések a legkedvezőtlenebb esetekben sem múlhatják fölül az erre vonatkozó kisérletekben várható észleleti hibákat.*

Külömben nem is itt rejlik képleteink hibája. A diffractió tüneményének mindazon részletei, a melyek ezen képletekből kiolvashatók, olyan pontossággal találhatók fel az észleletekben is, hogy e' tekintetben semmi kifogásunk se lehet. Hiányuk az, hogy az észletekben több rendbeli olyan jelenség is lép fel, melynek képleteinkben még csak nyoma sincs.*)

A tárgyalt három képlet egyenlő mértékben egyezvén meg az észleletekkel, azon kérdés, hogy melyiket fogadjuk el a tudomány mostani álláspontján, csak az által dőlhet el, hogy

*) Quincke, Pogg. Ann. Bd. 146. 149.

melyik nyujt általánosabb alkalmazhatást s melyik alaposabb. S az első tekintetben a Fresnel-féle mögötte áll a másik kettőnek, mig végre csak a Helmholtz-féle tételből levezetett tarthat *némi* alaposságra igényt.

II. Végezetül még azon esetre vagyok bátor figyelmeztetni, a melyben Gauss 36) alatti diffractió-képlete a Fresnel-féléből egyenesen levezethető.

Ha ugyanis a nyilás olyan gömbön fekszík, a melynek közzéppontja a fénylő pont, akkor a 35) egészletet a nyilást befödő gömbrészre terjeszthetjük ki, a melyen pedig-len:

$$d\omega = \frac{Rr}{h} dr\, d\Theta$$

Ugy hogy

$$\psi_f = \frac{A\, ik}{4\pi} \int d\Theta \int dr \; e^{ik(R+r)}$$

mely egyenletből ugyanazon eljárás szerint, a melyet az 1. § 12) egyenletének levezetésekor követtünk, a nyilás határvonalára kiterjesztendő következő egészlet foly:

$$\psi_f = \frac{A}{4\pi h} \int e^{ik(R+r)} \, d\Theta$$
