A

VONÁSOS HOSSZMÉRTÉKEK

ÖSSZEHASONLITÁSA FOLYADÉKBAN.

KRUSPÉR ISTVÁN,

R. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1873. ápril 21.)

BUDAPEST.

EGGENBERGER-FÉLE AKAD. KÖNYVKERESKEDÉS.

(Hoffmann és Molnár.)

1873.

Budapest, 1873. Nyomatott az Athenaeum nyomdájában.

A

vonásos hosszmértékek összehásonlitása folyadékban.

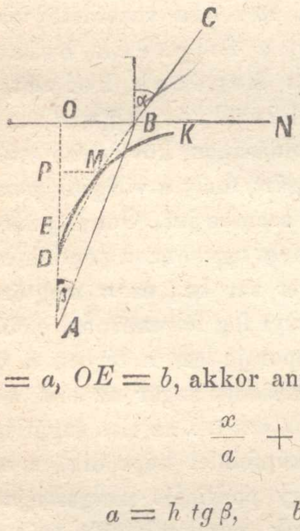
KRUSPÉR ISTVÁN r. tagtól.

(Előadta a III. osztály ülésén 1873. april 21.)

Az ujabb időben megpróbálták a metrologok a vonásos etalonokat is folyadékban hasonlitni össze egymással, mint azt már előbb a véglapos etalonokkal nagy sikerrel eszközölték. Ezen esetben azon kérdés merül fel: minő befolyást gyakorol a folyadék felületén előálló sugártörés a mérés helyes voltára? ez pedig azon optikai feladatra vezethető vissza: meg kell határozni egy, a folyadék belsejében lévő világitó pont képének helyét, ha azt a szem a folyadékon kivül létező valamely pontból nézi. Ennek feloldásához következő módon jutunk. Gondoljunk egy fénysugárt, mely a világitó pontból kiindulván, a megtöretés után a szembe jut. Gondoljunk továbbá egy másik fénysugárt, mely ugyanazon pontból indul ki, de az előbbivel egy kis szöget zár be; ez a megtöretés után is egy kissé különböző irányt fog felvenni az előbbiétől: ezen két tört sugár metszéspontja lesz a térben a világitó pont képének helye. Ezen második sugár az első körül sokféle fekvésben gondolható. Ha azt t. i. az első sugár, mint tengely körül forgatjuk, egy kúpfelület képződik, s ezen kúpnak minden nemzője egy-egy positioját szolgáltatja az emlitett sugárnak. Ezen sugárok mindenikének más-más törött sugár felel meg, de azoknak még is azon közös tulajdonságuk van, hogy meghosszabbitva mindnyájan metszik a világitó pontban gondolt mérőt, minthogy optikai törvények szerint a törés mindig a merő és a beeső sugáron keresztül menő sikban megyen véghez. Ezen sugárok közt hármat lehet különösen figyelembe venni, azoknak a tengelysugárhoz való viszonyát illetőleg, u. m.:

I. Azon sugárt, mely a tengelysugár mellett oldalt fekszik, s azzal ugyanazon szög alatt hajlik a merőhöz. Az ezen sugárnak megfelelő tört sugár is szintén azon szög alatt hajlik a merőhöz, mint a tengelysugáré. Ezen sugár rendszert ugy lehet képzelni, mintha a fénysugár a maga tört sugarával együtt a világitó pont merője, mint tengely körül egy kis szöggel elfordult volna, s a tört sugárok metszés pontja, illetőleg a kép a merőnek azon pontjába esik, hol azt a tengelysugárnak megfelelő tört sugár metszi.

II. Azon sugárt, mely a tengelysugár törési sikjában fekszik, de a merővel egy kissé nagyobb szöget képez, mint a tengelysugár. Az ennek megfelelő kép helyét következő analysis által nyerjük. Legyen a világitó pont A, ennek mélysége a folyadék felszine alatt $AO = h$, AB a fénysugár, tengelysugár, mely az AO merővel β szöget zár be, BC a tört sugár, mely a merővel α szöget képez. Legyen O az összrendezők kezdőpontja, ON az x, OA az y tengely. Legyenek továbbá a BC egyenesnek parameterei



$OB = a$, $OE = b$, akkor annak egyenlete lesz:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

hol $$a = h\, tg\,\beta, \quad b = \frac{a}{tg\alpha} = \frac{h\, tg\,\beta}{tg\,\alpha}.$$

Ezeket helyettesitvén, csekély átváltoztatás után lesz:

$$x + y\, tg\,\alpha = h\, tg\,\beta \;.\;.\;.\; 1)$$

Különbzékeljük ezen egyenletet β szerint, α-t β függvényének vevén, melylyel szoros kapcsolatban áll, ellenben x és y-t állandóknak tekintvén, mi annyit teszen, hogy azoknak értékei mind a fő, mind a különbzékelés által nyert egyenletben azonosok, ezen összrendezők tehát a két vonal metszéspontjához tartoznak; ezen különbzékelés eredménye lesz:

$$y = h \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{\text{Cos}\,\alpha^2}{\text{Cos}\,\beta^2}.$$

Minthogy pedig α és β közt optikai törvények szerint ezen összefüggés létezik:

$$\text{Sin}\,\alpha = n\,\text{Sin}\,\beta \; . \; . \; . \; 2)$$

hol n a törési kitevőt jelenti, ezt különbzékelvén, lesz:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{n} \frac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Cos}\,\beta}$$

s ezt a fentebbi egyenletben helyettesitvén, lesz:

$$y = \frac{h}{n} \frac{\text{Cos}\,\alpha^3}{\text{Cos}\,\beta^3} \; . \; . \; . \; 3).$$

Ha ezen egyenletekben $\beta = o$-nak vétetik, a midőn $\alpha = o$ lesz, s a megfelelő pontnak összrendezőit megkülönböztetés végett o jelzővel irjuk, akkor lesz:

$$y_0 = \frac{h}{n}, \quad x_0 = o \; . \; . \; . \; 4)$$

azaz: ha a szembe jövő sugár merőlegesen áll a folyadék felületére, a kép ezen merőleges vonalban a világitó pont felett látszik, s oldaleltérés teljességgel nincsen. Legyen ezen pont D. Egész általánosságban azonban, akármi legyen az α és β értéke, az 1) 2) 3) egyenletek szolgáltatják a metszéspontnak, illetőleg a képnek összrendezőit. Ha ezen három egyenletből kiküszöbölnők az α és β szögeket, egy egyenletet nyernénk, mely a kép mértani helyéhez tartoznék; de ezen legáltalánosabb kifejezés reánk nézve csekély fontossággal bir, inkább érdekel bennünket azt tudni, hogy ha a fénysugár a merőtől csak olyan kis szögecskével tér el, mint a minő egy górcsőnek látmezeje, mennyivel különbözik a kép helye a D ponttól?

E végre fejtsük ki sorba a 3) egyenletben a Cosinusokat, elhagyván a negyedik és felsőbb rangú tagokat; akkor lesz:

$$y = \frac{h}{n}\left(1 - \frac{3}{2}(\alpha^2 - \beta^2).\right)$$

Minthogy pedig a 2) egyenletből sorba kifejtés által ezen kifejezést nyerjük:

$$\beta = \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^3}{b}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)$$

hol csak a harmadiknál felsőbb rangú tagok vannak elhanyagolva; ezt helyettesitvén, elegendő közelitéssel lesz:

$$y = \frac{h}{n} - \frac{3}{2} h \frac{n^2-1}{n^3} \alpha^2 \ldots 5)$$

s ezt helyettesitvén, az 1) egyenletbe, a tangenseket szintén sorba kifejtvén és elhagyván a harmadiknál felsőbb rangú tagokat, lesz:

$$x = h \frac{n^2-1}{n^3} \alpha^3 \ldots 6).$$

Az 5) egyenletnek még czélszerübb alakot lehet adni, ha az összrendezők kezdő pontját a D pontba átteszszük, az x tengely irányát megtartjuk, de az y-okat alulról fölfelé számláljuk. Ezen esetben a régi y helyett $\frac{h}{n} - y$-t kell tenni, s az egyenlet ezzé válik:

$$y = \frac{3}{2} h \frac{n^2-1}{n^3} \alpha^2 \ldots 7).$$

A 6) és 7) egyenletek szolgáltatják tehát a merő közelében a kép helyének összrendezőit.

Oszszuk el egymással ezen két egyenletet, akkor lesz:

$$x = \frac{2}{3} \alpha y;$$

ez a D ponton keresztül menő DM egyenesnek egyenlete, mely az y tengelylyel $\frac{2}{3}\alpha$ hajlás szöget képez.

Az ezen egyenleteknek megfelelő mértani viszonyokat a fentebbi alakban láthatóvá lehet tenni. Abban M a II. számban fejtegetett kép helye, melynek összrendezői $DP = y$, $PM = x$, a BC sugár érinti az M pontban azon görbét DK, mely a képek mértani helye, s metszi a merőt az E pontban α szög alatt, holott a $PDM \measuredangle$ csak $\frac{2}{3}\alpha$. Ennélfogva még mindig azon feltétel alatt, hogy az α szög csak kis mennyiség, $DE = \frac{1}{3} DP$.

Továbbá E egyszersmind az I. szám alatt vizsgált képnek a helye, melynek összrendezőit megnyerjük, ha az 1) egyenletben $x = o$-nak veszszük, s y-t keressük. Ekképen a DE értéke lesz:

$$DE = \frac{1}{2} h \frac{n^2-1}{n^3} \alpha^2 \ldots 9)$$

mely az előbbi meghatározásnak teljesen megfelel.

Ezen vizsgálódásból azon eredményhez jutunk, hogy az I. és II. szám alatt nyert két kép a szemben ugyanazon irányban, de egy kissé különböző távban látszik.

III. Vegyünk végre az eddig vizsgált két sugár közt egy közbensö harmadikat szemügyre. Ennek hajlás-szöge a merőhöz nagyobb, mint az I. és kisebb, mint a II. szám alatt vizsgált sugáré, ennélfogva a megfelelő törött sugárnak metszés pontja a merővel az előbbiek metszés pontjai közé esik; s minthogy ezen sugár az előbbiektől különböző sikban fekszik, azokkal nem is találkozhatik, hanem elmegyen mellettük.

Foglaljuk össze a nyert eredményeket. A világitó pont képe csak akkor lesz ismét egy pont, ha a tengelysugár a folyadék felületére merőlegesen áll; különben a kép egy kis tért foglal el, melynek kiterjedése annál nagyobb lesz, mennél nagyobb a folyadék magassága a világitó pont felett, s mennél nagyobb a sugár irányának eltérése a merőtől.

IV. Alkalmazzuk most ezen eredményeket a mértékek összehasonlítására. Tegyük fel, hogy a Gambey-féle két górcső be van állitva a két egymás mellett fekvő etalon végpontjaira, oly módon, hogy ezeknek képei a górcsövek látmezejének közepén levő szálakra essenek, s ezen fekvésben a tengelysugárok az etalonok felső lapjára igen közel merőlegesen álljanak. Most toljuk el a kocsit, mig az egyik etalonnak másik végpontja az illető górcső szála alá esik, a szigoru beállitást a kocsi finom csavarjával hozván létre: akkor ha az etalonok hossza különböző, a másik etalon végpontja a górcső közepén kivül fog látszani. Tegyük fel, hogy a górcső tökéletes, azaz: a tárgyat a légben tökéletesen mutatja; ugyanazon tárgyat folyadékon át nézve nem fogja az oly tisztán mutatni. Mert ha a górcsövet annyira kihuzzuk, hogy a tárgy a látmező közepén világosan láttassék, a tárgy szélének I. számu képe a refractio következtében, a sugár ferde fekvése miatt, egy kissé emelkedettebb helyen fog látszani, mint a kép közepe, ennélfogva annak a tárgylencse által alkotott képe egy kissé a diaphragma háta mögé fog esni. De még zavartabb lesz a II. számú kép, minthogy az még magasabban áll, ugy hogy a górcsőben a szemüveg elmozditása nélkül, csak az elsőbb képre lehet irányozni. Ezen képnek emelkedését a 9) egyenletben DE szolgáltatja, s a dolog ugy áll, hogy a tárgy szélső részének távja a tárgylencsétől folyadékon át nézve a górcsővel kisebb, mintha azt a légben néznők, ennélfogva a górcsőben a tárgylencse által alkotott kép a folyadéknál nagyobb lesz, mint a légnél. A képnek ezen nagyobbodása egyrészt a tárgy látszögének, más részt a képtávjának nagyobbodásából ered, és ezen képlettel fejezhető ki

$$t d\alpha + \alpha dt..$$

hol t a képtávot a górcsőben, α pedig a tárgy látszögét jelenti. Nevezzük továbbá a tárgynak hosszméretét k, annak a tárgylencsétőli távját T, annak gyútávját f-nek; akkor ezen mennyiségek közt ezen ismeretes optikai képletek állanak:

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}, \quad \text{és } \alpha = \frac{k}{T}.$$

Különbzékeljük ezen egyenleteket, akkor lesznek:

$$\frac{dT}{T^2} + \frac{dt}{t^2} = o, \quad \text{és } d\alpha = -k\frac{dT}{T^2}$$

honnan következik:

$$dt = -\frac{t^2}{T^2}dT, \quad \text{és } d\alpha = -\alpha\frac{dT}{T.}$$

Ezeket helyettesitvén, s tekintetbe vevén, hogy $dT = - DE$, a górcsőben képződő kép növekedése lesz:

$$\frac{1}{2} h \frac{n^2-1}{n^3} \left(1 + \frac{t}{T}\right) \alpha^3$$

s ez a tárgylencse nagyitásával $\frac{t}{T}$-vel osztva, a tárgynak látszólagos növekedését fogja szolgáltatni, mely egyszersmind a mérésben eredő hibát jelenti. E szerint a folyadék használatából a mérésre háromló hiba lesz:

$$\frac{1}{2} h \frac{n^2-1}{n^3} \left(1 + \frac{t}{T}\right) \alpha^3.$$

Ehhez járul még a górcső szemüvegének parallaxisából eredő hiba, mely abban áll, hogy a kép a diaphragma háta mögött képződvén, a szál annak más pontját látszik metszeni, mintha a kép a szál sikjába esnék. De ezen hibát oldalt elmozditható ocular-cső alkalmazása által csaknem egészen el lehet háritni.

Az itt kifejtett hibaviszonyoknak egy concret esetben való megitélésére szolgáljon egy, körülbelül a tényállásnak megfelelő példa. Legyen $T = 25$ millimeter, $t = 250$ mm., $\alpha =$ arc $20' = 0{\cdot}006$ igen közel, $n = \frac{3}{2}$, $h = 30$ mm. akkor a hiba lesz:

$$0{\cdot}000013 \text{ mm.} = 0{\cdot}013 \text{ Mikron.}$$

Ez olyan csekélység, hogy azt még a nemzetközi etalonok összehasonlitásánál sem szükség tekintetbe venni.