A PÓLUS ÉS A POLÁROK.

A VISZONYOS

POLÁROK ELVE.

HUNYADY JENŐTŐL,

(BENYUJTATOTT AZ 1865. OCTOBER 23-KI ÜLÉSBEN.)

PEST,
EGGENBERGER FERDINÁND M. TUD. AKAD. KÖNYVÁRUSNÁL.
1867.

PEST,

NYOMATOTT EMICH GUSZTÁV MAGY. AKAD. KÖNYVNYOMDÁSZNÁL.

1867.

A PÓLUS ÉS A POLÁROK.

A VISZONYOS POLÁROK ELVE.

HUNYADY JENŐTŐL.

I. A Pólus és a Polárok.

1.) Ha n pontot, melyek ugyanazon egyenesben fekszenek, $a_1, a_2, \ldots a_n$-nel jelölünk, és ugyanazon egyenesben az m pontot úgy választjuk, hogy annak távolsága O állandó ponttól a következő föltétnek feleljen meg:

$$\frac{n}{Om}=\frac{1}{Oa_1}+\frac{1}{Oa_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{Oa_n}\ldots\ldots,\ldots(1)$$

akkor Maclaurin [1]) szerint Om távolság $Oa_1, Oa_2, \ldots\ldots Oa_n$ távolságok harmonikus középarányosa, Poncelet [2]) szerint pedig m pont $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ pontok harmonikus középpontja. Könnyen belátható, hogy az (1) egyenletet a következőkép is írhatjuk:

$$\frac{1}{Om}-\frac{1}{Oa_1}+\frac{1}{Om}-\frac{1}{Oa_2}+\ldots+\frac{1}{Om}-\frac{1}{Oa_n}=0,$$

vagy

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{Oa_i}\right)=0\ldots\ldots\ldots(2).$$

[1]) Lásd Mac-Laurin értekezésének fordítását a harmadrendű vonalokról: E. de Jonquières „Mélanges de géométrie pure" czímü művében, 205. lap.

[2]) Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques (Crelle J. f. d. r. u. a. M. Bd. 3. p. 229.)

Jonquières [1]) a harmonikus középpont fogalmát kitágítá, s a következő értelmezést adta neki:

Ha az m pontot úgy választjuk, hogy a következő n viszony:

$$\frac{ma_1}{Oa_1}, \frac{ma_2}{Oa_2}, \ldots\ldots \frac{ma_n}{Oa_n}$$

p-kénti szorozmányainak összege egyenlő zérussal, akkor az m pont a_1, $a_2 \ldots\ldots a_n$ pontok p-dik fokú harmonikus középpontja. Ha a nevezett szorozmányok összegét a következőkép jelöljük:

$$\Sigma\left(\frac{ma_1}{Oa_1}\cdot\frac{ma_2}{Oa_2}\ldots\ldots\frac{ma_p}{Oa_p}\right),$$

akkor az m pont a

$$\Sigma\left(\frac{ma_1}{Oa_1}\cdot\frac{ma_2}{Oa_2}\ldots\ldots\frac{ma_p}{Oa_p}\right)=0\ \ldots\ldots\ (3)$$

egyenlet által p-félekép van meghatározva, mely egyenlet, ha meggondoljuk, hogy

$$ma_i = Oa_i - Om,$$

még a következő alakot is felveheti:

$$\Sigma\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{Oa_1}\right)\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{Oa_2}\right)\ldots\left(\frac{1}{Om}-\frac{1}{Oa_p}\right)=0 \ldots (4).$$

2.) Ha valamely adott n-ed rendü görbe síkjában O állandó ponton keresztül ahhoz szelőt vonunk, azt O pont körül forgatjuk, és minden szelőre nézve, az első fokú harmonikus középpontot meghatározzuk: akkor a harmonikus középpontok mértani helye az egyenes [2]), és ezen egyenes az adott görbének O pontra, mint pólusra (Pol), vonatkoztatott polárja (Polare).

A polár ezen fogalmát, Cremona szerint, Grassmann [3]) tágítá ki. Ha ugyanis minden szelőben a p-dik fokú harmonikus középpontot meghatározzuk, úgy azok mértani helye p-dik rendü vonal leend, mely az eredeti görbe $(n-p)$-dik polárjának neveztetik. Ez utóbbi értelmezés szerint, ha

[1]) Mémoire sur la théorie des pôles etc. etc. Journal de J. Liouville, 1857. p. 266.

[2]) Jonquières. Mélanges de géométrie pure p. 205.

[3]) Theorie der Centralen (Crelle J. f. d. r. u. a. M. Bd. 24. Seit. 262.)

$Om=R$ és Oa_1, Oa_2, ... Oa_n távolságokat rendre r_1, r_2, ... r_n-nel jelöljük, az $(n-1)$-dik polár egyenlete ;

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_1}\right)=0 \ldots (5),$$

az $(n-2)$-dik polár egyenlete pedig :

$$\Sigma\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_2}\right)=0 \ldots\ldots (6),$$

vagy felbontva

$$\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{R^2}-(n-1)\frac{1}{R}\Sigma\left(\frac{1}{{}_1r}\right)+\Sigma\left(\frac{1.1}{r_1r_2}\right)=0 \ldots\ldots (7).$$

Ha így tovább haladunk, az $(n-p)$-dik polár egyenletéül találjuk :

$$\Sigma\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_2}\right)\ldots\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_p}\right)=0 \ldots (8),$$

vagy felbontva

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n(n-1)..(n-p+1)}{1.2\ldots p}\left(\frac{1}{R}\right)^p- \\ -\frac{(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots(p-1)}\left(\frac{1}{R}\right)^{p-1}\Sigma\left(\frac{1}{r_1}\right)+ \\ +\frac{(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots(p-2)}\left(\frac{1}{R}\right)^{p-2}\Sigma\left(\frac{1}{r_1r_2}\right)+\ldots\ldots=0 \end{array}\right\}\ldots\ldots(9)$$

3.) E szám alatt az n-ed rendű vonal egyenletéből polárjainak egyenleteit fogjuk lehozni, mely czélra legyen :

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n=0\ldots\ldots(10)$$

egyenlet az n-ed rendű vonal egyenlete ép szögletű összrendezőkben, hol u_q a két változó q dik fokú egynemű függvényét jelenti. Ha továbbá ezen egyenletben az

$$x=u+r\cos w$$
$$y=v+r\sin w$$

helyettesítéseket véghez visszük : úgy a (10) egyenlet, — bal oldalát $f(x, y)$-nal jelölvén, — a következőbe megy át :

$$\left.\begin{array}{l} 0=f(u,v)+\left(\frac{df}{du}\cos w+\frac{df}{dv}\sin w\right)r+ \\ +\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2f}{dv^2}\cos^2 w+2\frac{d^2f}{dudv}\cos w\sin w+\frac{d^2f}{dv^2}\sin^2 w\right)r^2+ \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\ \frac{1}{1.2..n}\left(\frac{d^nf}{du^n}\cos^n w+\frac{n}{1}\frac{d^nf}{du^{n-1}dv}\cos^{n-1}w\sin w+\frac{d^nf}{dv^n}\sin^n w\right)r^n \end{array}\right\}.(11)$$

Ezen egyenletből pedig, r-nek n értékét $r_1, r_2 \ldots\ldots r_n$ nel jelölvén, következik, hogy :

$$\Sigma\left(\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{\frac{df}{du}\cos w + \frac{df}{dv}\sin w}{f(u,v)}$$

$$\Sigma\left(\frac{1}{r_1 r_2}\right) = \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\frac{d^2f}{du^2}\cos^2 w + 2\frac{d^2f}{dudv}\cos w\sin w + \frac{d^2f}{dv^2}\sin^2 w}{f(u,v)}$$

$$\Sigma\left(\frac{1}{r_1 r_2 \ldots r_p}\right) = -\frac{(-1)^p}{1.2\ldots p}$$

$$\frac{\frac{d^pf}{du^p}\cos^p w + \frac{p}{1}\frac{d^pf}{du^{p-1}dv}\cos^{p-1} w\sin w + \frac{d^pf}{dv^p}\sin^p w}{f(u,v)}.$$

Ha végre ezen értékeket az (5), (7) és (9) egyenletekbe helyettesítjük, az $(n-1)$, $(n-2)$ és $(n-p)$-dik polár egyenletét a következő alakban nyerjük :

$$R\left(\frac{df}{du}\cos w + \frac{df}{dv}\sin w\right) + nf(u,v) = 0 \ldots\ldots (12)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n(n-1)}{1.2}f(u,v) + (n-1)R\left(\frac{df}{du}\cos w \frac{df}{dv}\sin w\right)\\&+\frac{1}{1.2}R^2\left(\frac{d^2f}{du^2}\cos^2 w + 2\frac{d^2f}{dudv}\cos w\sin w + \frac{d^2f}{dv^2}\sin^2 w = 0\right.\end{aligned}\right\}(13)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}f(u,v) + \frac{(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots(p-1)}\times\\&\times R\left(\frac{df}{du}\cos w + \frac{df}{dv}\sin w\right) +\\&+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2(p-2)}R^2\left(\frac{d^2f}{du^2}\cos^2 w +\right.\\&\left.2\frac{d^2f}{dudv}\cos w\sin w + \frac{d^2f}{dv^2}\sin^2 w\right) + \ldots = 0\end{aligned}\right\}(14)$$

Megjegyzendő, hogy az $(n-1)$, $(n-2)$ és $(n-3)$-dik polárok még egyenes, kúpos és köbös polároknak is neveztetnek.

4.) Ha (u, v) pont a görbén fekszik, úgy :

$$f(u,v) = 0,$$

és ezért az n-ed rendű vonal egyenes polárjának egyenlete a (12) egyenlet szerint :

$$R\left(\frac{df}{du}\cos w + \frac{df}{dv}\sin w\right) = 0,$$

a mely egyenlet

$$Rcosw=x-u$$
$$Rsinw=y-v$$

segélyével még e következő alakot veheti fel:

$$(x-u)\frac{df}{du}+(y-v)\frac{df}{dv}=0 \quad \ldots\ldots (15)$$

A (15) egyenletben, a görbéhez (u,v) pontban vont érintő egyenletére ismerünk; minél fogva a következő tételre jutunk:

„Az n-ed rendű vonalat valamely pontjához tartozó egyenes polár ezen pontban érinti.“

Nem csak az egyenes polár, mely az n-ed rendű vonal valamely pontjához tartozik, érinti a görbét az illető pontban, hanem minden magasabb rendű polár is.

Azon feltételnél fogva, hogy (u, v) pont a görbén fekszik, a kúpos polár egyenlete a (13) egyenlet szerint a következő:

$$(n-1)R\left(\frac{df}{du}cosw+\frac{df}{dv}sinw\right)+$$
$$+\frac{1}{1.2}R^2\left(\frac{d^2f}{du^2}cos^2w+2\frac{d^2f}{dudv}coswsinw+\frac{d^2f}{dv^2}sin^2w\right)=0,$$

vagy ha ebben

$$Rcosw=x-u, \quad Rsinw=y-v,$$

helyettesítéseket véghez visszük, még:

$$\left.\begin{array}{l}(n-1)\left\{\frac{df}{du}(x-u)+\frac{df}{dv}(y-v)\right\}+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2f}{du^2}(x-u)^2+\right.\\ \left.2\frac{d^2f}{dudv}(x-u)(y-v)+\frac{d^2f}{dy^2}(y-v)^2\right\}=0\end{array}\right\}(16)$$

Ezen kúpszelet az eredeti görbét (u, v) pontban érinti, mert ha belőle $\frac{dy}{dx}$ értékét keressük, s azután $x=u$, $y=v$-vel tesszük, tökéletesen azon eredményhez jutunk, mint ha

$$f(x,y)=0,$$

egyenletből $\frac{dy}{dx}$ értékét keresnök, és azután $x=u$, $y=v$ helyettesítéseket véghez vinnők. Ismeretes pedig, hogy ezen feltétel mellett két görbe egymást (u, v) pontban érinti[1]). Hasonlóképen bizonyíthatjuk be, hogy minden magasabb rendü polár, mely a görbe valamely pontjához tartozik, azt egyszersmind ebben a pontban érinti.

5.) A polárok további tulajdonságainak megismertetése czéljából azon sajátságos utat fogjuk követni, melyet Salmon[2]) adott.

Az egyenes, a kúpos, a köbös sat. polárok egyenleteit a következőkép is írhatjuk : (2. sz.)

$$\Sigma\left(\frac{ma_1}{Oa_1}\right)=0, \quad \Sigma\left(\frac{ma_1}{Oa_1}\cdot\frac{ma_2}{Oa_2}\right)=0,$$

$$\Sigma\left(\frac{ma_1}{Oa_1}\cdot\frac{ma_2}{Oa_2}\cdot\frac{ma_3}{Oa_3}\right)=0 \text{ sat.}$$

hol O a pólust; $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ valamely szelő közös pontjait a görbével, és m ezen pontok O pontra vonatkoztatott harmonikus középpontját jelenti. Ezen egyenletekből kitünik, hogy ha oly n-ed fokú egyenletet volnánk képesek alkotni, melynek n gyöke

$$\frac{ma_1}{Oa_1}, \ \frac{ma_2}{Oa_2}, \ldots \frac{ma_n}{Oa_n},$$

úgy abból az illető polárok egyenleteit könnyen lehozhatnók, mert e czélból csak az illető együtthatókat kellene egyenlítenünk zérussal. És valójában nem is lesz nehéz ily egyenlet birtokába jutni.

Ha O és m pontok háromvonalú összrendezőit rendre (x,y,z) és (x_1,y_1,z_1) jelöljük, úgy valamely más a_k pontnak, a mely Om egyenesben fekszik, és azt $\lambda : \mu$ viszonyban osztja, a következő összrendezők felelnek meg :

$$\frac{\mu x_1+\lambda x}{\lambda+\mu}, \ \frac{\mu y_1+\lambda y}{\lambda+\mu}, \ \frac{\mu z_1+\lambda z}{\lambda+\mu}.$$

Ha pedig a_k pont a görbén fekszik, akkor ezen értékek által a görbe egyenletének elégtétetik, és így, ha

$$\varphi(x,y,z)=0,$$

---

[1]) Lásd péld. Navier-Wittstein Lehrbuch der Differential und Integralrechnung 1. Köt. 179. l.

[2]) A Treatise on the higher plane Curves, 54. l. 61. sz.

az n-ed rendü vonal egyenletét háromvonalú összrendezőkben ábrázolja, akkor, miután $\lambda+\mu$ közös osztót az egyenlet egyneműsége miatt, egészen elhagyhatjuk, a következő egyenletnek kell állania :

$$\varphi(\mu x_1+\lambda x,\ \mu y_1+\lambda y,\ \mu z_1+\lambda z)=0,$$

vagy ha

$$\frac{\mu}{\lambda}x_1=h,\quad \frac{\mu}{\lambda}y_1=k,\quad \frac{\mu}{\lambda}z_1=l,$$

ez még e következőbe megy át :

$$\varphi(x+h,\ y+k,\ z+l)=0.$$

Ezen egyenlet bal oldalát pedig Taylor sora szerint kifejtvén, ered :

$$\varphi(x,y,z)+\left(h\frac{d\varphi}{dx}+k\frac{d\varphi}{dy}+l\frac{d\varphi}{dz}\right)$$
$$+\frac{1}{1.2}\left(h^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}+k^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}+l^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}+2kl\frac{d^2\varphi}{dydz}+2lh\frac{d^2\varphi}{dzdx}\right.$$
$$\left.+2hk\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)+\ldots\ldots\ldots=0$$

és ha ebben h, k és l értékeit helyettesítjük és $\varphi(x,y,z)$ függvényt U-val jelöljük, a következő tökéletesen symmetrikus egyenletet nyerjük :

$$\left\{\begin{aligned}
&\lambda^n U+\lambda^{n-1}\mu\left(x_1\frac{dU}{dx}+y_1\frac{dU}{dy}+z_1\frac{dU}{dz}\right)\\
&+\frac{\lambda^{n-2}\mu^2}{1.2}\left(x_1{}^2\frac{d^2U}{dx^2}+y_1{}^2\frac{d^2U}{dy^2}+z_1{}^2\frac{d^2U}{dz^2}+2y_1z_1\frac{d^2U}{dydz}\right.\\
&\qquad\left.+2z_1x_1\frac{d^2U}{dzdx}+2x_1y_1\frac{d^2U}{dxdy}\right)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{\lambda^2\mu^{n-2}}{1.2}\left[x^2\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_1+y^2\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_1+z^2\left(\frac{d^2U}{dz^2}\right)_1\right.\\
&\qquad\left.+2yz\left(\frac{d^2U}{dydz}\right)_1+2zx\left(\frac{d^2U}{dzdx}\right)_1+2xy\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)_1\right]\\
&+\lambda\mu^{n-1}\left[x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1+y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1+z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1\right]\\
&\qquad\qquad+\mu^n(U)_1=0,
\end{aligned}\right.$$

amelyben U_1 U-ból akkép ered, ha abban x,y,z helyett x_1,y_1,z_1-

et helyettesítünk, és hasonlóan ered $\left(\frac{dU}{dx}\right)_1$ $\frac{dU}{dx}$-ből sat., valamint a magasabb rendű differentiál quotiensek is.

Ezen egyenlet $\frac{\mu}{\lambda}$-ra nézve n-ed fokú; n gyöke azon n viszonyt adja, a melyben Om egyenest a görbe metszi, és így az egyenes, kúpos, sat. polárok egyenletei a következők :

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1+y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1+z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1=0\;.\;.\;.\;.\;.(17)$$

$$x^2\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_1+y^2\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_1+z^2\left(\frac{d^2U}{dz^2}\right)_1+2yz\left(\frac{d^2U}{dydz}\right)_1$$
$$+2zx\left(\frac{d^2U}{dzdx}\right)_1+2xy\left(\frac{d^2U}{dxdy}\right)=0\ldots\ldots(18)$$

sat. [1])

6) Az első, második, sat. polárok egyenletei a következők :

$$x_1\frac{dU}{dx}+y_1\frac{dU}{dy}+z_1\frac{dU}{dz}=0$$

$$x_1{}^2\frac{d^2U}{dx^2}+y_1{}^2\frac{d^2U}{dy^2}+z_1{}^2\frac{d^2U}{dz^2}+2y_1z_1\frac{d^2U}{dydz}+2z_1x_1\frac{d^2U}{dzdx}$$
$$+2x_1y_1\frac{d^2U}{dxdy}=0,$$

ezekből pedig látjuk, hogy a második polár egyenlete ép úgy képeztetik az elsőéből, valamint az első polár egyenlete képeztetett az adott n-ed rendű vonal egyenletéből. Hasonlóan látjuk, hogy a harmadik polár egyenlete is ép úgy vezettetik le a másodikéból, valamint a második polár egyenlete az elsőéből, és így tovább. Mindezekből a következő tételre jutunk :

„Az n-ed rendű vonal p-dik polárja szintén polárja az ugyanazon pólusra vonatkoztatott első, második, ...(p—1)-dik polároknak.“

---

[1]) A (17) (18) sat. egyenletek baloldalai szintén nevezetes algebrai viszonylatban állanak az U eredeti alakhoz, és az eredeti alak Covariansainak neveztetnek. (Lásd Salmon „Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen“ deutsch von Fiedler p. 130—132. Art. 78, 79.)

7.) Az egyenes polár egyenlete a következő:

$$x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1+y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1+z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1=0,$$

a mely a viszonylatot fejezi ki a polár valamely pontjának x, y, z összrendezői, és a pólus x_1, y_1, z_1 összrendezői között. Ha ezen egyenletben az első pontot tekintjük állandónak, mely esetben annak összrendezőit x_2, y_2, z_2-vel jelöljük, a másodikat pedig változónak, úgy az a következőbe megy át:

$$x_2\frac{dU}{dx}+y_2\frac{dU}{dy}+z_2\frac{dU}{dz}=0,$$

mely az (x_2, y_2, z_2) pont első polárjának egyenlete (5. sz.). Mindezeknél fogva a következő tételre jutunk.

„Azon pontok mértani helye, melyeknek egyenes polárjai ugyanazon egy állandó ponton mennek keresztül, az ez utóbbi pontnak megfelelő első polár."

Ha pedig feltesszük, hogy x_1, y_1, z_1 pont a görbében fekszik, akkor tudjuk, hogy az ahhoz tartozó egyenes polár a görbét abban érinteni fogja, és így az előbbi tételből egyszersmind a következő is következik:

„Az n-ed rendű vonalon kivüli pontból az ahhoz vont érintők érintési pontjai az azon ponthoz tartozó első poláron fekszenek."

Mivel pedig az első polár foka $(n-1)$, azért áll a következő tétel:

„Az n-ed rendű vonalhoz egy a görbén kivüli pontból $n(n-1)$ érintő lehetséges."

Továbbá tudjuk, hogy a görbe valamely pontjához tartozó első polár azt azon pontban egyszerűen érinti; mivel pedig az egyszerű érintési pont két átmetszési pontnak tekintendő, tehát még a következő tétel is áll:

„Az n-ed rendű vonal valamely pontjából ahhoz $[n(n-1)-2]$ érintő lehetséges."

Ezen szám első tételéből még megfejthetjük, hogy hány pólus felel meg az egyenesnek, azt az n-ed rendű vonal polárjául tekintvén.

E kérdés megoldására szükséges, hogy az egyenes két pontját figyelembe vegyük. Az $(x_1 y_1 z_1)$ ponton keresztül menő egyenesek pólusai, az idézett tétel szerint,

$$x_1\frac{dU}{dx}+y_1\frac{dU}{dy}+z_1\frac{dU}{dz}=0$$

$(n-1)$-ed rendű vonalban fekszenek, valamint az (x_2, y_2, z_2) ponton keresztül menő egyenesek pólusai, ugyanazon tétel szerint,

$$x_2\frac{dU}{dx}+y_2\frac{dU}{dy}+z_2\frac{dU}{dz}=0$$

$(n-1)$-ed rendű vonalban fekszenek.

Az (x_1,y_1,z_1) és (x_2,y_2,z_2) pontokat összekötő egyenes pólusai csak is a fentebbi két görbében feküdhetnek egyidejüleg; minek következtében azok a két $(n-1)$-ed rendű görbe átmetszési pontjai, és így számuk $=(n-1)^2$. Ezek szerint a kúpszelet polárjának egy pólus, a harmadrendű vonal polárjának pedig négy pólus felel meg.

8.) Könnyen beláthatólag nem csak az egyenes és első polár között létezik azon viszonylat, melyet az előbbi szám első tételében kimondtunk; hanem ép úgy a kúpos és a második polár, valamint a köbös és a harmadik polár között, és végre az $(n-p)$-dik és p-dik polár között is; minél fogva a következő általános tétel kimondására jogosíttatunk fel:

„*Azon pontok mértani helye, melyeknek $(n-p)$-dik polárjai ugyanazon egy adott ponton mennek keresztül, az adott ponthoz tartozó p-dik polár.*“

9.) Hátra van még azon esetek kipuhatolása, melyek megmutatják, hogy miként viszonylanak a polárok az eredeti görbe singularitásaihoz.

Ha a kezdőpont q-szoros pont, akkor $U=0$ egyenletben a legalacsonyabb tagok x és y-ra nézve q-dik fokúak lesznek, minél fogva az első polár egyenletében

$$x_1\frac{dU}{dx}+y_1\frac{dU}{dy}+z_1\frac{dU}{dz}=0$$

a tagok egészen a $(q-1)$-dik fokig hiányzanak és így látjuk, hogy a kezdőpont az első polárban $(q-1)$-szeres pont. Hasonlóan hiányzanak a második polárban a tagok egészen a $(q-2)$-dik fokig, mivel annak egyenletében a második differentiál qnotiensek fordulnak elö, és így a második polárban a kezdőpont $(q-2)$-szeres pont lesz, sat. Mindezekből a következő tétel ered:

„*Ha valamely n-ed rendű algebrai görbének egy q-szoros pontja van, akkor az a p-dik polárban, hol* $p < q$, *mint* $(q-p)$-*szeres pont mutatkozik.*"

10.) Ha továbbá a q-szoros pont érintői közöl kettő összeesik, akkor

$$u_q = 0$$

egyenletnek, melyből a q-szoros pont érintőit nyerjük[1]), két egyenlő gyöke van, minél fogva az

$$\frac{du_q}{dx} \text{ és } \frac{du_q}{dy}$$

kifejezéseknek egyszerű tényezője lesz, és így az első polár egyenletében a legalacsonyabb fokú tagok is, mint

$$x_1 \frac{du_q}{dx} + y_1 \frac{du_q}{dy},$$

fogják azon kettős gyököt, mint egyszerű tényezőt, tartalmazni, s a hol $z_1 \frac{dU}{dz}$ nem tartalmaz tagokat, melyek x és y-ra nézve q fokon alóliak volnának. Mindezekből világosan látjuk, hogy az n-ed rendű vonal q-szoros pontjához tartozó kettős érintő, mint egyszerű érintő lép föl az eredeti görbe első polárjában.

És ha egy q-szoros pontnál

$$u_q = 0$$

egyenletnek k-szoros gyöke van, melynek k-szoros érintő felel meg: akkor azon tényező u_q-nak minden első differentiál quotiensében $(k-1)$-szer, minden második differentiál quotiensében $(k-2)$-szer fog előfordúlni, sat.

E szerint egészen általánosan áll, hogy a k-szoros érintő az eredeti görbe q-szoros pontjában, az eredeti görbe első polárjában, mint $(k-1)$-szeres érintő ugyanazon $(q-1)$

---

[1]) Lásd p. a szerző értekezését „Ueber die fundamentalen Eigenschaften der algebraischen Curven etc. etc." Inaugural-Dissertation (Göttingen, Vandenhöck und Rupprecht) 24. l.

szeres pontban fog fellépni, valamint annak második polárjában, mint (k—2)-szeres érintő ugyanazon (q—2)-szeres pontban sat., miknél fogva a következő általános tételhez jutottunk :

„*A k-szoros érintő az eredeti görbe q-szoros pontjában, mint* (k—p)*-szeres érintő fog fellépni az eredeti görbe p-dik polárjának ugyanazon* (q—p)*-szeres pontjában, feltételezve, hogy* $p < k < q$".

11.) Miután a kettős pontban a görbe két egymásután következő pontja esik össze, azért minden azon keresztül menő egyenes a görbét két pontban metszi, minélfogva minden azon keresztül menő egyenes érintőnek tekintetik. De ha az ily álérintőket (Pseudotangenten[1]) a valódi érintők számából levonjuk, akkor, mivel az első polár átmetszési pontja az eredeti görbe kettőspontjában kettőnek számíttatik, és az első polár az eredeti görbe minden kettőspontján keresztül megy, egy a görbén kivüli pontból az n-ed rendű vonalhoz, ha az δ kettősponttal bír,

$$n(n—1)—2\delta$$

érintő lehetséges.

Ha pedig az n-ed rendű vonal még azonkivül k visszafordulási ponttal (Rückkehrpunkt) bír, akkor egy a görbén kivüli pontból az n-ed rendű vonalhoz

$$n(n—1)—2\delta—3k$$

érintő lehetséges; mivel az eredeti görbe visszfordulási pontjának érintője szintén érintője az eredeti görbe első polárjának (10. sz.), és így minden visszfordulási pont három átmetszési pontnak tekintetik.

Ha az n-ed rendű vonal q-szoros ponttal bír, akkor az az első polárban mint (q—1)-szeres pont lép fel (9. sz.), és ezért a görbén kivüli pontból lehetséges érintők száma $q(q—1)$ egységgel kisebbítendő.

Ha pedig végre még a q-szoros pont k-szoros érintővel bírna, akkor az érintők száma még (k—1) egységgel kisebbítendő.

---

[1]) E kifejezés nem azon értelemben veendő, mint azt Plücker használta (Theorie der algebraischen Curven p. 210.)

II. A viszonyos polárok elve.

12.) Az előbbiekből következik, hogy ha egy kúpszelet és azon kivül egy pont adva levén, ezen pontnak a kúpszeletre nézve csak egy, t. i. az egyenes polár felel meg, és viszont, valamely adott egyenesnek a kúpszeletre nézve szintén csak egy pont fog, mint pólus megfelelni.

Ezt előre bocsátván, legyen az adott kúpszelet egyenlete x, y, z háromvonalú összrendezőkben a következő:

$$U=ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy=0,$$

az adott pont összrendezői pedig (u, v, w); akkor, miután az első polár egyenlete x_1, y_1, z_1 pontra nézve:

$$x_1\frac{dU}{dx}+y_1\frac{dU}{dy}+z_1\frac{dU}{dz}=0,$$

az adott kúpszelet polárjának, u, v, w pontot mint pólust tekintvén, a következő egyenlet felel meg:

$$(ax+b''y+b'z)u+(b''x+a'y+bz)v+(b'x+by+a''z)w=0..(1)$$

a mely még a következő alakot is fölveheti:

$$(au+b''v+b'w)x+(b''u+a'v+bw)y+(b'u+bv$$
$$+a''w)z=0......(2).$$

Az (1) egyenlet mutatja, hogy (u, v, w) valamely adott pont összrendezőit jelentvén, neki mindig egy egyenes felel meg; mit különben már előre is tudtunk.

De a (2) egyenlet mutatja, hogy ha x, y, z valamely adott pont összrendezői, úgy az x, y, z pontnak is egy egyenes fog megfelelni, melynek egyenlete a (2) alatti egyenlet.

Mindezekből látjuk, hogy két oly rendszerhez jutottunk, melyben egy adott pontnak az elsőben egy bizonyos egyenes felel meg a másodikban, és viszont egy adott pontnak a második rendszerben egy bizonyos egyenes az elsőben. Ezen viszonyosságot, mely a két rendszer között létezik, a viszonyos polárok elvének (Le principe des polaires réciproques) nevezzük. Ezen elvet Poncelet[1]) hozta be a mértanba.

---

[1]) Traité des propriétés projectives des figures. Paris 1822. p. 122.— Mémoire sur la théorie des polaires réciproques (Crelle J. f. d. r. u. a. M. 4. Bd. p. 1.)

13.) „Két egyenes u',v',w' átmetszési pontjának polárja az illető egyenesek x',y',z' és x'',y'',z'' pólusait tartalmazza, és megfordítva, két x',y',z' és x'',y'',z'' pont polárjai egymást az ezen pontokon keresztül fektetett egyenes megfelelő pólusában metszik".

Mert ha az (1) egyenletet rövidség okáért a következőkép írjuk :

$$f(x,y,z,u,v,w)=0........(3),$$

úgy, az x',y',z' és x'',y'',z'' pontok polárjaira e következő egyenletek állanak :

$$f(x',y',z',u,v,w)=0$$
$$f(x'',y'',z'',u,v,w)=0,$$

ezeknek pedig elég tétetik, ha u, v, w helyett u', v', w'-t helyettesítünk, u', v', w' a két egyenes átmetszési pontjának összrendezőit jelentvén. Ennélfogva azok a következőkbe mennek át :

$$f(x',y',z',u',v',w')=0......(4)$$
$$f(x'',y'',z'',u',v',w'=0.....(5).$$

Ha pedig u',v',w' pont polárját keressük, úgy a (3) egyenlet fogja ezt adni, mely e jelen esetben a következőbe megy át:

$$f(x,y,z,u',v',w')-0......(6),$$

ennek pedig a (4) és (5) egyenleteknél fogva, ha x,y,z helyett x',y',z', és x'',y'',z'',-t helyettesítünk, elégtétetik.

Az imént bebizonyitott tételből e következő ered :

„*Ha három vagy több pont ugyanazon egyenesben fekszik akkor azok polárjai egymást ugyanazon egy pontban, az illető egyenes pólusában, metszik ; és megfordítva, ha három vagy több egyenes egymást ugyanazon egy pontban metszi, akkor az ezen egyeneseknek megfelelő pólusok ugyanazon egy egyenesben a közös átmetszési pont polárjában fekszenek.*"

E tételt még a következőkép is kifejezhetjük :

„*Ha valamely pont ugyanazon egyenesben halad, úgy azon pont polárja valamely állandó pont körül, az egyenes pólusa körül, forog, s megfordítva.*"

14.) Ezek szerint, ha valamely sokszög adva van, úgy egy másikat szerkeszthetünk, melynek szögpontjai az eredeti oldalakra nézve pólusok ; miből a viszonyos polárok elve szerint következik, hogy ez utóbbi sokszög oldalai az eredeti szögpontokra nézve (azokat mint pólusokat tekintvén) polárok. Miután ezen viszonylatok az oldalok számától és nagyságától tökéletesen függetlenek, azért azok érvényesek még akkor is, ha a sokszögek helyébe görbék lépnek. Igy az adott görbe érintőinek pólusai valamely második görbén fekszenek, mely az eredeti görbe viszonyos polár görbéjének, vagy röviden csak viszonyos polárjának neveztetik. Viszont ezen viszonyos polár érintőinek pólusai az eredeti görbén fekszenek.

Ha az adott görbe n-ed rendű, akkor ez az egyenes által n pontban metszetik. Ezen n átmetszési pont polárjai, melyek a viszonyos polár érintői, egymást ugyanazon egy pontban metszik (13. sz.) és ezen görbe semminemű más érintője ez utóbb nevezett ponton keresztül nem mehet, mivel, ha az valóban történhetnék, okvetlen következnék, hogy az n-ed rendű vonal az egyenes által több, mint n pontban metszetik, a mi lehetetlen. Ezeknél fogva az n-ed rendű vonal viszonyos polárja általában n-ed osztályú, miután valamely görbe osztályát az érintők száma, mely ahhoz valamely pontból lehetséges, határozza meg. E szerint az n-ed rendű vonal osztálya $n(n—1)$. (7. sz.) Innét pedig a viszonyos polárok elve szerint a következő tétel ered:

„*Az n-ed rendű vonal viszonyos polárja általában $n(n—1)$ rendű*“.

15.) A viszonyos polárok elve szerint képesek vagyunk tételeket n-ed rendű vonalakról n-ed osztályúakra tüstént átvinni; így p. a következő tételből:

„*Az n-ed rendű vonal $\frac{n(n+3)}{2}$ adott pont által tökéletesen meg van határozva.*“
tüstént ered:

„*Az n-ed osztályú vonal $\frac{n(n+3)}{2}$ adott érintő által tökéletesen meg van határozva*“.
Továbbá a következő tételből:

Oly n-ed rendű vonalak, melyek $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ adott ponton mennek keresztül, egymást még $\left(\frac{n(n-3)}{2}+1\right)$ állandó pontban metszik."

„*Oly n-ed osztályú vonalak, melyek* $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)$ *adott egyenest érintenek, még* $\left(\frac{n(n-3)}{2}+1\right)$ *állandó egyenest is érintenek.*"

Két m *és* n *rendű görbe* m.n *közös ponttal bir.* [1])

E tételből a következő ered :

Két m *és* n *osztályú görbe* m.n *közös érintővel bir.*

Miután pedig az m-ed és n-ed rendü vonalak $m(m-1)$-ed és $n(n-1)$-ed osztályúak, azért az előbbi tételből még a következő ered :

„Két m és n rendű görbe :

$$mn(m-1)(n-1)$$

közös érintővel bir."

E tételt Jacobi [2]) a pároknak elméletétől egészen függetlenül bebizonyitá.

16.) Könnyen belátható, hogy az eredeti görbe valamely kettőspontjának kettős érintő (Doppeltangente) felel meg annak viszonyos polárjában, ép úgy valamely visszafordulási pontnak az eredeti görbében, fordulati érintő annak viszonyos polárjában; és viszont kettős érintőnek és fordulati érintőnek az eredeti görbében, kettős pont és visszafordulási pont felel meg annak viszonyos polárjában. Általán pedig valamely q-szoros pontnak az eredeti görbében mindig q-szoros érintő felel meg annak viszonyos polárjában.

17.) Az előbbi szám alattiaknál fogva ha föltesszük, hogy n a görbe rendjét, ν a görbe osztályát, δ a görbe kettőspontjainak számát, τ a görbe kettősérintőinek számát, $\varkappa$ a görbe visszafor-

[1]) Azon tételekre nézve, melyekből kiindultunk, lásd a szerző értekezését „Über die fundamentalen Eigenschaften der algebr. Curven etc."

[2]) Beweis des Satzes, dass eine Curve n-ten Grades im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten hat. (Crelle J. Bd, 40. pag. 257).

dulási pontjainak számát, ι a görbe fordulati érintői (v. pontjainak) számát jelenti, úgy a következő képletek állanak :

1-ször. A 11. szám szerint :

$$\nu = n(n-1)-2\delta-3\varkappa \;\ldots\ldots\; (7)$$

s így, ha a viszonyos polárra átmegyünk

$$n=\nu(\nu-1)-2\tau-3\iota \;\ldots\ldots\; (8)$$

2-szor.

$$\iota=3n(n-2)-6\delta-8\varkappa\iota \;\ldots\ldots\; (9).$$

a viszonyos polárok elvénél fogva pedig

$$\varkappa=3\nu(\nu-2)-6\tau-8\iota \;\ldots\ldots\; (10)$$

Ha továbbá a (8) egyenletbe ν és ι értékeit a (7) és (9) egyenletekből helyettesítjük, ered :

$$\left.\begin{array}{l} 2\tau=n(n-2)(n^2-9)-2(2\delta+3\varkappa)(n^2-n-6)+4\delta(\delta-1) \\ \quad +9\varkappa(\varkappa-1)+12\delta\varkappa \end{array}\right\}(11)$$

a viszonyos polárok elvénél fogva pedig :

$$\left.\begin{array}{l} 2\delta=\nu(\nu-2)(\nu^2-9)-2(2\tau+3\iota)(\nu^2-\nu-6)+4\tau(\tau-1) \\ \quad +9\iota(\iota-1)+12\tau\iota \end{array}\right\}(12)$$

A (7)—(12) képletek azok, a melyeket Plücker[2]) hozott le először. Ezen képletek egymástól nem függetlenek; nevezetesen oly viszonylatban állanak egymáshoz, hogy bármely háromból a többi három következik. Ennélfogva ha n, ν, δ, τ, $\varkappa$ és ι mennyiségek közül három adva van, azok a többi három megtalálására szolgálnak.

Sok esetben elégséges, ha n, ν, δ, τ, $\varkappa$ és ι mennyiségek közül csak kettő van adva [3]).

18.) Azon mértani igazság, hogy az n-ed rendű vonal viszonyos polárja

$$n(n-1)$$

rendű, ezen $n(n-1)$ rendű vonal viszonyos polárja pedig csak n-ed rendű, holott annak tulajdonképen

---

[1]) Plücker „System der anal. Geom. etc." p. 266.

Plücker „Theorie der algebr. Curven etc." p. 208. Salmon „A Treatise on the higher plane Curves" p. 74.

[2]) „Theorie der algebr. Curven" p. 211.

[3]) Clebsch : „Über die Singularitäten alg. Curven" (Crelle J. Bd. 64. p. 98) és „Über die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie" (Crelle J. Bd. 63, p. 189).

$$n(n-1)\{n(n-1)-1\}$$

rendűnek kellene lenni, mi által annak rendje

$$n(n-1)\{n(n-1)-1\}-n=n^3(n-2)$$

egységgel sülyedt, látszólagosan képtelenségnek tünik fel. Poncelet e látszólagos képtelenség okát az eredeti görbe kettős érintőiben és fordulati érintőiben látta, mert az eredeti görbe kettős érintőjének és fordulati érintőjének a viszonyos polárban kettőspont és visszafordulási pont felel meg. Továbbá bármely algebrai görbében minden kettős pont két egységgel, és minden visszafordulási pont három egységgel kisebbíti az eredeti görbe viszonyos polárjának rendjét; ha tehát az n-ed rendű vonal τ kettős érintővel és ι fordulati érintővel bir, ennek a viszonyos polárja τ kettős ponttal és ι visszafordulási ponttal fog bírni; és így ha ennek megint viszonyos polárját keressük, akkor ennek rendje:

$$2\tau+3\iota$$

egységgel kisebbítendő. Már most a fentebb említett látszólagos képtelenség magyarázatára csak az bizonyítandó be, hogy

$$n^3(n-2)=2\tau+3\iota.$$

Jacobi [1]) szerint pedig

$$2\tau=n(n-2)(n^2-9)$$

valamint Plücker [2]) szerint

$$\iota=3n(n-2)$$

ha végre τ és ι ezen értékeit a fentebbi egyenletbe helyettesítjük, látjuk, hogy annak ezek által elégtétetik; s a látszólagos képtelenség tökéletesen meg van magyarázva.

19.) Végre az n-ed rendű vonal viszonyos polárjának egyenletét keressük, az eredeti görbe egyenlete adva lévén

Legyen e czélra:

$$F(x,y,z)=0 \;\ldots\ldots\; (13.)$$

---

[1]) Crelle J. Bd. 40, p. 237. Lásd a szerzőtől „Über die fund. Eig. der alg. Curven etc." p. 25; és Clebsch: Bemerkung zu Jacobi's Beweis für die Anzahl der Doppeltangenten (Crelle J. Bd. 63, p. 186)

[2]) „System der anal. Geom. etc." p. 264.

az n-ed rendű vonal egyenlete háromvonalú összrendezőkben, továbbá a kör egyenlete ugyanezen összrendezőkben:

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

akkor (u,v,w) pont polárjának egyenlete a körre nézve leend:

$$ux+vy+wz=0 \quad \ldots\ldots (14)$$

Megjegyezvén, hogy a (14) egyenesnek a (13) görbét minden pontjában érintenie kell, mivel a viszonyos polár bármely pontjának az eredeti görbe egy bizonyos érintője felel meg, s mivel a (13) görbe az (x,y,z) pontban a következő érintővel bír:

$$x\frac{dF}{dx}+y\frac{dF}{dy}+z\frac{dF}{dz}=0 \quad \ldots\ldots.(15)$$

a (14) és (15) egyenletek összehasonlításából a következő egyenletekhez jutunk:

$$\left.\frac{dF}{dx}=u,\ \frac{dF}{dy}=v,\ \frac{dF}{dz}=w\ \right\} \ldots\ldots (16)$$

ezeket a (14) egyenlettel összekötvén, és belőlök x,y,z mennyiségeket kiküszöbölvén a kívánt egyenlethez jutunk.

Alig szükséges tán megjegyezni, hogy e feladat tökéletesen azonos azon feladattal, melyben valamely n-ed rendű vonal pont-összrendezők közötti egyenletéből annak egyenletét vonal-összrendezőkben keressük [1])

Ha például az

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy=0 \quad \ldots\ldots (17)$$

kúpszelet viszonyos polárjának egyenletét keressük, a (16) egyenletek a következőkbe mennek át:

$$\begin{aligned} ax+b''y+b'z-u&=0\\ b''x+a'y+bz-v&=0\\ b'x+by+a''z-w&=0 \end{aligned}$$

és ha ezekből és a (14) egyenletből x,y,z-t kiküszöböljük, a következő egyenlethez jutunk:

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & u\\ b'' & a' & b & v\\ b' & b & a'' & w\\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \ldots (18)$$

[1]) Salmon más uton hozza le a viszonyos polár egyenletét (az i. h. 98. l. 107 sz.) Lásd szintén Clebsch „Über symbolische Darstellung algebraischer Formen“ (Crelle J. Bd. LIX. pag 35, §. 11).

mely az adott kúpszelet viszonyos polárját fejezi ki. A határzó felbontása által az még a következő alakot veheti fel:

$$(19.)\left\{\begin{array}{l}0=(a'a''-b^2)u^2+(a''a-b'^2)v^2+(aa'-b''^2)w^2+\\+2(b'b''-ab)vw+2(b''b-a'b')wu+2(bb'-a''b'')uv\end{array}\right.$$

21.) A harmad rendű vonal, melynek egyenlete e következő legyen:

$$F=a_1x^3+b_2y^3+c_3z^3+3(a_2x^2y+a_3x^2z+b_1xy^2+b_3y^2z+\\ c_1xz^2+c_2yz^2)+6dxyz=0 \ldots\ldots (20)$$

viszonyos polárjának egyenletét megkapjuk, ha

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dF}{dx}=u,\ \frac{dF}{dy}=v.\ \frac{dF}{dz}=w\\ ux+vy+wz=0\end{array}\right\}(21)$$

egyenletekből x,y,z-t kiküszöböljük.

Látjuk, hogy az első három egyenlet x,y,z-re nézve másodfokú, a miért ez esetben a kiküszöbölés nem oly egyszerűen véghez vihető, mint az előbbi példában. A kivánt kiküszöbölés véghezvitelére Hesse[1]) után, egy sajátságos utat fogunk követni, mely lehetségessé teszi, hogy az egész feladatot megint olyanná átváltoztassuk, melyben x,y,z mennyiségeket csak négy vonalos egyenletből kell kiküszöbölnünk. Mielőtt arra áttérnénk, még egy nevezetes tételt fogunk bebizonyítani az egynemű függvényekről.

„Ha $(n-1)$ homogén, egész, n változó közötti p-dik fokú függvény, valamint szintén egy homogén, ugyanazon n változó közötti q-dik fokú függvény adva van és azok együtt eltünnek, akkor egyszersmind az említett n függvény határzója is eltünik[2]), és e határzó első részletes differentiál-hányado-

---

[1]) „Über die ganzen homogenen Functionen von der dritten und vierten Ordnung zwischen drei Variabeln" (Crelle J. B. 41. pag. 288).

[2]) Általában x_1, x_2, ... x_n változók közötti n függvény, mint f_1, f_2, ... f_n adva lévén, úgy ha $f_{ik}=\frac{df_i}{dx_k}$, az

$$\left|\begin{array}{cccc}f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n}\\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn}\end{array}\right|$$

határzó az emlitett n függvény határzójának neveztetik (Baltzer „Theorie und Anw. der Determinanten" 2. Aufl. p. 119, § 12, 1).

sai ugy viszonylanak egymáshoz mint a q-dik fokú függvény első részletes differentiál-hányadosai."

Ha u_1, u_2 .... u_{n-1} jelentik az $(n-1)$ p-dik, fokú függvényeket és u_n a q-dik fokú függvényt, akkor Euler tétele szerint :

$$\left.\begin{array}{l} x_1\frac{du_1}{dx_1}+x_2\frac{du_1}{dx_2}+\ldots\ldots x_n\frac{du_1}{dx_n}=pu_1 \\ x_1\frac{du_2}{dx_1}+x_2\frac{du_2}{dx_2}+\ldots\ldots x_n\frac{du_2}{dx_n}=pu_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1\frac{du_n}{dx_1}+x_2\frac{du_n}{dx_2}+\ldots\ldots x_n\frac{du_n}{dx_n}=qu_n \end{array}\right\} \quad (22.)$$

Legyen továbbá :

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx_1} & \frac{du_1}{dx_2} & \ldots & \frac{du_1}{dx_n} \\ \frac{du_2}{dx_1} & \frac{du_2}{dx_2} & \ldots & \frac{du_2}{dx_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{du_n}{dx_1} & \frac{du_n}{dx_2} & \ldots & \frac{du_n}{dx_n} \end{vmatrix} = \Delta$$

és ha a (22) egyenleteket rendre

$$\frac{d\Delta}{d\left(\frac{du_1}{dx_1}\right)}=U_1;\quad \frac{d\Delta}{d\left(\frac{du_1}{dx_2}\right)}=U_2;\ \ldots\ldots \frac{d\Delta}{d\left(\frac{du_1}{dx_n}\right)}=U_n,$$

szorozzuk ered :

$$x_1\Delta=p\{u_1U_1+\ldots.u_nU_n\}+(q-p)u_nU_n\ldots\ldots(23)$$

innét pedig látható, hogy u_1, u_2,.....u_n függvények eltüntével, :

$$\Delta=0.$$

Ha továbbá a (23) egyenletet x_1.....x_n szerint differentiáljuk, ered :

$$\left.\begin{aligned}
x_1\frac{d\Delta}{dx_1}-(p-1)\Delta &= p\left\{u_1\frac{dU_1}{dx_1}+u_2\frac{dU_2}{dx_1}+..u_n\frac{dU_n}{dx_1}\right\} \\
&\quad +(q-p)\left\{u_n\frac{dU_n}{dx_1}+U_n\frac{du_n}{dx_1}\right\} \\
x_1\frac{d\Delta}{dx_2} &= p\left\{u_1\frac{dU_1}{dx_2}+u_2\frac{dU_2}{dx_2}+..u_n\frac{dU_n}{dx_2}\right\} \\
&\quad +(q-p)\left\{u_n\frac{dU_n}{dx_2}+U_n\frac{du_n}{dx_2}\right\} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_1\frac{d\Delta}{dx_n} &= p\left\{u_1\frac{dU_1}{dx_n}+u_2\frac{dU_2}{dx_n}+..u_n\frac{dU_n}{dx_n}\right\} \\
&\quad +(q-p)\left\{u_n\frac{dU_n}{dx_n}+U_n\frac{du_n}{dx_n}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

tekintetbe vévén, hogy

$$\frac{du_1}{dx_1}U_1+\frac{du_2}{dx_1}U_2+\ldots\ldots\frac{du_n}{dx_1}U_n=\Delta$$

és
$$\frac{dx_1}{dx_k}U_1+\frac{du_2}{dx_k}U_2+\ldots\ldots\frac{du_n}{dx_k}U_n=0$$

midőn $k=2,3,\ldots\ldots n$.

Ha végre ezen egyenletekben a változók azon értékeit helyettesítjük, melyeknél $u_1\ \ldots\ldots u_n$ eltünnek s ennélfogva Δ is, úgy a rövidség kedvéért $\frac{p-q}{x_1}U_n=\lambda$ tévén, a (24) egyenletek a következőkbe mennek át:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Delta}{dx_1}+\lambda\frac{du_n}{dx_1}&=0 \\
\frac{d\Delta}{dx_2}+\lambda\frac{du_n}{dx_2}&=0 \\
&\cdots \\
\frac{d\Delta}{dx_n}+\lambda\frac{du}{dx_n}&=0
\end{aligned}\right\}\ldots(25)$$

a melyekből a fennebbi tétel második része kiviláglik.

22.) Ismét visszatérünk feladatunkhoz, melynek meg fejtésével az értekezést bevégezzük.

A feladat további megfejtése végett a (21) egyenletekben a három elsőt fogjuk egynemüsíteni, mit elérhetünk, ha

$\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$ kifejezésekben x,y,z helyett $\frac{x}{\frac{t}{\sqrt{2}}}, \frac{y}{\frac{t}{\sqrt{2}}}, \frac{z}{\frac{t}{\sqrt{2}}}$

irunk; mi által a (21) egyenletek e következőkbe mennek át:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dF}{dx}-u\frac{t^2}{2}=0 \\ &\frac{dF}{dy}-v\frac{t^2}{2}=0 \\ &\frac{dF}{dz}-w\frac{t^2}{2}=0 \\ &ux+vy+wz=0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(26)$$

így tehát x,y,z,t változók között három egynemű, másodfokú és egy első fokú függvényünk van, melyek x,y,z,t bizonyos értékeinél eltünnek. E szerint, ha az illető négy függvény határzóját Θ-val jelöljük, az előbbi számban adott tétel szerint:

$$\frac{d\Theta}{dx}+\lambda u=0, \frac{d\Theta}{dy}+\lambda v=0, \frac{d\Theta}{dz}+\lambda w=0.$$

Ha pedig a következő határzót:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2F}{dx^2} & \frac{d^2F}{dxdy} & \frac{d^2F}{dxdz} & u \\ \frac{d^2F}{dxdy} & \frac{d^2F}{dy^2} & \frac{d^2F}{dydz} & v \\ \frac{d^2F}{dxdz} & \frac{d^2F}{dydz} & \frac{d^2F}{dz^2} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

Δ-val jelöljük, mely határzó x,y,z szerint, valamint u,v,w szerint is egynemű és másodfokú, akkor

$$\Theta=-t\Delta$$

és ha Θ ezen értékét a fennebbi három egyenletbe helyettesítjük $\frac{\lambda}{t}=\mu$ tesszük és azokhoz még:

$$ux+vy+wz=0,$$

egyenletet kapcsoljuk, a következő egyenletekre jutunk:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Delta}{dx}-\mu u=0 \\ &\frac{d\Delta}{dy}-\mu v=0 \\ &\frac{d\Delta}{dz}-\mu w=0 \\ &ux+vy+wz=0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(27)$$

Ezen egyenletek x,y,z és μ szerint egynemü vonalos egyenletek, minél fogva azokból x,y,z és μ kiküszöbölése könnyen eszközölhető.

Ha Δ-t képezzük és a kijelölt mütételeket véghez visszük, a következő alakú vonalos egyenletekre jutunk :

$$\left.\begin{array}{ll} 2A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z-u\mu & =0 \\ A_{12}x+2A_{22}y+A_{23}z-v\mu & =0 \\ A_{13}x+A_{23}y+2A_{33}z-w\mu & =0 \\ ux+vy+wz & =0 \end{array}\right. \quad \ldots(28)$$

ezekből pedig, ha x,y,z,μ-t kiküszöböljük, ered :

$$\begin{vmatrix} 2A_{11} & A_{12} & A_{13}-u \\ A_{12} & 2A_{22} & A_{23}-v \\ A_{13} & A_{23} & 2A_{33}-w \\ u & v & w \quad 0 \end{vmatrix} =0 \ldots(29.)$$

melyben A_{ik} mennyiségeknek a következő értékek felelnek meg :

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}=(b_1c_1-d^2)u^2+(a_1c_1-a_3{}^2)v^2+(a_1b_1-a_2{}^2)w^2 \\ \quad +2(a_2a_3-a_1d)vw+2(a_2d-a_3b_1)wu+2(a_3d-a_2c_1)uv \\ A_{22}=(b_2c_2-b_3{}^2)u^2+(a_2c_2-d^2)v^2+(a_2b_2-b_1{}^2)w^2 \\ \quad +2(b_1d-a_2b_3)vw+2(b_1b_3-b_2d)wu+2(b_3d-b_1c_2)uv \\ A_{33}=(b_3c_3-c^2{}_2)u^2+(a_3c_3-c_1{}^2)v^2+(a_3b_3-d^2)w^2 \\ \quad +2(c_1d-a_3c_2)vw+2(c_2d-b_3c_1)wu+2(c_1c_2-c_3d)uv \\ A_{23}=(b_2c_3-b_3c_2)u^2+(a_2c_3+a_3c_2-2c_1d)v^2+(a_2b_3 \\ \quad +a_3b_2-2b_1d)w^2+2(d^2+b_1c_1-a_3b_3-a_2c_2)vw+2(b_1c_2 \\ \qquad\qquad -b_2c_1)wu+2(b_3c_1-b_1c_3)uv \\ A_{13}=(b_1c_3+b_3c_1-2c_2d)u^2+(a_1c_3-a_3c_1)v^2+(a_1b_3 \\ \quad +a_3b_1-2a_2d)w^2+2(a_2c_1-a_1c_2)vw+2(d^2+a_2c_2 \\ \qquad\qquad -b_1c_1-a_3b_3)wu+2(a_3c_2-a_2c_3)uv \\ A_{12}=(b_1c_2+b_2c_1-2b_3d)u^2+(c_1a_2+c_2a_1-2da_3)v^2 \\ \quad +(a_1b_2-a_2b_1)w^2+2(a_3b_1-a_1b_3)vw+2(a_2b_3-a_3b_2)wu \\ \qquad\qquad +2(d^2+a_3b_3-a_2c_2-b_1c_1)uv \end{array}\right\} (30.)$$

Ha végre a (29) egyenletben a határzót felbontjuk, A_{ik} mennyiségek értékeit helyettesítjük és az egyenletet u,v,w szerint rendezzük, a (20) egyenlet által kifejezett harmadrendü vonal viszonyos polárjának egyenletét a következő alak alatt nyerjük :

$$\left.\begin{aligned}
&A_1u^6+A_2v^6+A_3w^6\\
&+6\{B_1u^5v+C_1u^5w+B_2v^5w+C_2v^5u+B_3w^5u\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+C_3w^5v\}\\
&+3\{D_1u^4v^2+E_1u^4w^2+D_2v^4w^2+E_2v^4u^2+D_3w^4u^2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+E_3w^4v^2\}\\
&+6\{F_1u^4vw+F_2v^4wu+F_3w^4uv\}\\
&+2\{G_1u^3v^3+G_2v^3w^3+G_3w^3u^3\}\\
&+6\{H_1u^3v^2w+I_1u^3vw^2+H_2v^3w^2u+I_2v^3wu^2\\
&H_3w^3u^2v+I_3w^3uv^2\}+6Ku^2v^2w^2=0
\end{aligned}\right\}\quad(31.)$$

a melyben $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ sat. együtthatóknak a következő értékek felelnek meg:

$$A_1=b^2{}_2c_3{}^2+4b_3{}^3c_3+4b_2c_2{}^3-3b_3{}^2c_2{}^2-6b_2b_3c_2c_3$$
$$A_2=c_3{}^2a_1{}^2+4c_1{}^3a_1+4c_3a_3{}^3-3c_1{}^2a_3{}^2-6c_3c_1a_3a_1$$
$$A_3=a_1{}^2b_2{}^2+4a_2{}^3b_2+4a_1b_1{}^3-3a_2{}^2b_1{}^2-6a_1a_2b_1b_2$$

$$\begin{aligned}
B_1=&b_3{}^2c_1c_2+b_2b_3c_1c_3+2b_2c_2c_3d+2b_3c_2{}^2d+3b_1b_3c_2c_3-b_1b_2c_3{}^2\\
&-2b_1c_2{}^3-2b_2c_1c_2{}^2-4b_3{}^2c_3d\\
B_2=&c_1{}^2a_2a_3+c_3c_1a_2a_1+2c_3a_3a_1d+2c_1a_3{}^2d+3c_2c_1a_3a_1\\
&-c_2c_3a_1{}^2-2c_2a_3{}^3-2c_3a_2a_3{}^2-4c_1{}^2a_1d\\
B_3=&a_2{}^2b_3b_1+a_1a_3b_3b_2+2a_1b_1b_2d+2a_2b_1{}^2d+3a_3a_2b_1b_2\\
&-a_3a_1b_2{}^2-2a_3b_1{}^3-2a_1b_3b_1{}^2-4a_2{}^2b_2d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1=&c_2{}^2b_1b_3+c_3c_2b_1b_2+2c_3b_3b_2d+2c_2b_3{}^2d+3c_1c_2b_3b_2-c_1c_3b_2{}^2\\
&-2c_1b_3{}^3\;\;2c_3b_1b_3{}^2-4c_2{}^2b_2d\\
C_2=&a_3{}^2c_2c_1+a_1a_3c_2c_3+2a_1c_1c_3d+2a_3c_1{}^2d+3a_2a_3c_1c_3\\
&-a_2a_1c_3{}^2-2a_2c_1{}^3-2a_1c_2c_1{}^2-4a_3{}^2c_3d\\
C_3=&b_1{}^2a_3a_2+b_2b_1a_3a_1+2b_2a_2a_1d+2b_1a_2{}^2d+3b_3b_1a_2a_1\\
&-b_3b_2a_1{}^2-2b_3a_2{}^3-2b_2a_3a_2{}^2-4b_1{}^2a_1d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1=&3b_1{}^2c_3{}^2+4a_2c_2{}^3+2a_2b_2c_3{}^2+12b_1c_1c_2{}^2+4b_2c_1{}^2c_2\\
&+4a_3b_3{}^2c_3+16b_3c_3d^2-b_3{}^2c_1{}^2-8b_3c_1c_2d-4c_2{}^2d^2-2a_3b_3c_2{}^2\\
&-2a_3b_2c_2c_3-6b_1b_3c_1c_3-6a_2b_3c_2c_3-12b_1c_2c_3d\\
&-4b_2c_1c_3d\\
D_2=&3c_2{}^2a_1{}^2+4b_3a_3{}^3+2b_3c_3a_1{}^2+12c_2a_2a_3{}^2+4c_3a_2{}^2a_3\\
&+4b_1c_1{}^2a_1+16c_1a_1d^2-c_1{}^2a_2{}^2-8c_1a_2a_3d-4a_3{}^2d^2-2b_1c_1a_3{}^2\\
&-2b_1c_3a_3a_1-6c_2c_1a_2a_1-6b_3c_1a_3a_1-12c_2a_3a_1d-4c_3a_2a_1d\\
D_3=&3a_3{}^2b_2{}^2+4c_1b_1{}^3+2c_1a_1b_2{}^2+12a_3b_3b_1{}^2+4a_1b_3{}^2b_1
\end{aligned}$$

$$+4c_2a_2^2b_2+16a_2b_2d^2-a_2^2b_3^2-8a_2b_3b_1d-4b_1^2d^2-2c_2a_2b_1^2$$
$$-2c_2a_1b_1b_2-6a_3a_2b_3b_2-6c_1a_2b_1b_2-12a_3b_1b_2d-4a_1b_3b_2d$$

$$E_1=3c_1^2b_2^2+4a_3b_3^3+2a_3c_3b_2^2+12c_1b_1b_3^2+4c_3b_1^2b_3$$
$$+4a_2c_2^2b_2+16c_2b_2d^2-c_2^2b_1^2-8c_2b_1b_3d-4b_3^2d^2-2a_2c_2b_3^2$$
$$-2a_2c_3b_3b_2-6c_1c_2b_1b_2-6a_3c_2b_3b_2-12c_1b_3b_2d-4c_3b_1b_2d$$

$$E_2=3a_2^2c_3^2+4b_1c_1^3+2b_1a_1c_3^2+12a_2c_2c_1^2+4a_1c_2^2c_1$$
$$+4b_3a_3^2c_3+16a_3c_3d^2-a_3^2c_2^2-8a_3c_2c_1d$$
$$-4c_1^2d^2-2b_3a_3c_1^2-2b_3a_1c_1c_3-6a_2a_3c_2c_3-6b_1a_3c_1c_3$$
$$-12a_2c_1c_3d-4a_1c_2c_3d$$

$$E_3=3b_3^2a_1^2+4c_2a_2^3+2c_2b_2a_1^2+12b_3a_3a_2^2+4b_2a_3^2a_2$$
$$+4c_1b_1^2a_1+16b_1a_1d^2-b_1^2a_3^2-8b_1a_3a_2d-4a_2^2d^2-2c_1b_1a_2^2$$
$$-2c_1b_2a_2a_1-6b_3b_1a_3a_1-6c_2b_1a_2a_1-12b_3a_2a_1d-4b_2a_3a_1d$$

$$F_1=5b_1b_2c_1c_3+4a_3b_2c_2^2+4a_2b_3^2c_3+2b_2c_1c_2d+2b_1b_3c_3d$$
$$+10b_1c_2^2d+10b_3^2c_1d-11b_1b_3c_1c_2-2a_2b_2c_2c_3-2a_3b_2b_3c_3$$
$$-2a_3b_3^2c_2-2a_2b_3c_2^2-8b_3c_2d^2-4b_2c_3d^2-3b_1^2c_2c_3-3b_2b_3c_1^2$$

$$F_2=5c_2c_3a_2a_1+4b_1c_3a_3^2+4b_3c_1^2a_1+2c_3a_2a_3d+2c_2c_1a_1d$$
$$+10c_2a_3^2d+10c_1^2a_2d-11c_2c_1a_2a_3-2b_3c_3a_3a_1$$
$$-2b_1c_3c_1a_1-2b_1c_1^2a_3-2b_3c_1a_3^2-8c_1a_3d^2-4c_3a_1d^2$$
$$-3c_2^2a_3a_1-3c_3c_1a_2^2$$

$$F_3=5a_3a_1b_3b_2+4c_2a_1b_1^2+4c_1a_2^2b_2+2a_1b_3b_1d+2a_3a_2b_2d$$
$$+10a_3b_1^2d+10a_2^2b_3d-11a_3a_2b_3b_1-2c_1a_1b_1b_2-2c_2a_1a_2b_2$$
$$-2c_2a_2^2b_1-2c_1a_2b_1^2-8a_2b_1d^2-4a_1b_2d^2-3a_3^2b_1b_2$$
$$-3a_1a_2b_3^2$$

$$G_1=6a_3b_3c_1c_2+3a_1b_3c_2c_3+9a_2b_3c_1c_3+3a_3b_2c_1c_3+9a_3b_1c_2c_3$$
$$+18b_1c_1c_3d+18a_2c_2c_3d+6b_3c_1^2d+6a_3c_2^2d+12c_1c_2d^2-a_1b_2c_3^2$$
$$-2a_1c_2^3-2b_2c_1^3-9a_2b_1c_3^2-18b_1c_1^2c_2-18a_2c_1c_2^2$$
$$-24a_3b_3c_3d-16c_3d^3$$

$$G_2=6b_1c_1a_2a_3+3b_2c_1a_3a_1+9b_3c_1a_2a_1+3b_1c_3a_2a_1+9b_1c_2a_3a_1$$
$$+18c_2a_2a_1d+18b_3a_3a_1d+6c_1a_2^2d+6b_1a_3^2d+12a_2a_3d^2$$
$$-b_2c_3a_1^2-2b_2a_3^3-2c_3a_2^3-9b_3c_2a_1^2-18c_2a_2^2a_3-18b_3a_2a_3^2$$
$$-24b_1c_1a_1d-16a_1d^3$$

$$G_3=6c_2a_2b_3b_1+3c_3a_2b_1b_2+9c_1a_2b_3b_2+3c_2a_1b_3b_2+9c_2a_3b_1b_2$$
$$+18a_3b_3b_2d+18c_1b_1b_2d+6a_2b_3^2d+6c_2b_1^2d+12b_3b_1d^2$$
$$-c_3a_1b_2^2-2c_3b_1^3-2a_1b_3^3-9c_1a_3b_2^2-18a_3b_3^2b_1-18c_1b_3b_1^2$$
$$-24c_2a_2b_2d-16b_2d^3$$

$$H_1 = 2b_2c_1^2d + 2a_3b_1b_3c_3 + 4b_1c_3d^2 + 10b_1b_3c_1^2 + a_1b_3c_2^2$$
$$+13a_2b_3c_1c_2 + 12a_3b_3c_2d + 8c_2d^3 + 9a_2b_1c_2c_3 + a_1b_2c_2c_3$$
$$+6a_3b_2c_3d - 6b_1^2c_1c_3 - 4a_2b_2c_1c_3 - 5a_3b_2c_1c_2 - 8a_2c_2^2d$$
$$-11a_3b_1c_2^2 - 2b_1c_1c_2d - 4a_3b_3^2c_1 - 16b_3c_1d^2$$
$$-2a_1b_3^2c_3 - 10a_2b_3c_3d$$

$$H_2 = 2c_3a_2^2d + 2b_1c_2c_1a_1 + 4c_2a_1d^2 + 10c_2c_1a_2^2 + b_2c_1a_3^2$$
$$+13b_3c_1a_2a_3 + 12b_1c_1a_3d + 8a_3d^3 + 9b_3c_2a_3a_1$$
$$+b_2c_3a_3a_1 + 6b_1c_3a_1d - 6c_2^2a_2a_1 - 4b_3c_3a_2a_1 - 5b_1c_3a_2a_3$$
$$-8b_3a_3^2d - 11b_1c_2a_3^2 - 2c_2a_2a_3d - 4b_1c_1^2a_2 - 16c_1a_2d^2$$
$$-2b_2c_1^2a_1 - 10b_3c_1a_1d$$

$$H_3 = 2a_1b_3^2d + 2c_2a_3a_2b_2 + 4a_3b_2d^2 + 10a_3a_2b_3^2 + c_3a_2b_1^2 +$$
$$13c_1a_2b_3b_1 + 12c_2a_2b_1d + 8b_1d^3 + 9c_1a_3b_1b_2 + c_3a_1b_1b_2 +$$
$$6c_2a_1b_2d - 6a_3^2b_3b_2 - 4c_1a_1b_3 - 5c_2a_1b_3b_1 - 8c_1b_1^2d - 11c_2a_3b_1^2$$
$$-2a_3b_3b_1d - 4c_2a_2^2b_3 - 16a_2b_3d^2 - 2c_3a_2^2b_2 - 10c_1a_2b_2d$$

$$I_1 = 2c_3b_1^2d + 2a_2c_1c_2b_2 + 4c_1b_2d^2 + 10c_1c_2b_1^2 + a_1c_2b_3^2$$
$$+13a_3c_2b_1b_3 + 12a_2c_2b_3d + 8b_3d^3 + 9a_3c_1b_3b_2 + a_1c_3b_3b_2$$
$$+6a_2c_3b_2d - 6c_1^2b_1b_2 - 4a_3c_3b_1b_2 - 5a_2c_3b_1b_3 - 8a_3b_3^2d$$
$$-11a_2c_1b_3^2 - 2c_1b_1b_3d - 4a_2c_2^2b_1 - 16c_2b_1d^2 - 2a_1c_2^2b_2$$
$$-10a_3c_2b_2d$$

$$I_2 = 2a_1c_2^2d + 2b_3a_2a_3c_3 + 4a_2c_3d^2 + 10a_2a_3c_2^2 + b_2a_3c_1^2$$
$$+13b_1a_3c_2c_1 + 12b_3a_3c_1d + 8c_1d^3 + 9b_1a_2c_1c_3 + b_2a_1c_1c_3$$
$$+6b_3a_1c_3d - 6a_2^2c_2c_3 - 4b_1a_1c_2c_3 - 5b_3a_1c_2c_1 - 8b_1c_1^2d$$
$$-11b_3a_2c_1^2 - 2a_2c_2c_1d - 4b_3a_3^2c_2 - 16a_3c_2d^2 - 2b_2a_3^2c_3$$
$$-10b_1a_3c_3d$$

$$I_3 = 2b_2a_3^2d + 2c_1b_3b_1a_1 + 4b_3a_1d^2 + 10b_3b_1a_3^2 + c_3b_1a_2^2$$
$$+13c_2b_1a_3a_2$$
$$+12c_1b_1a_2d + 8a_2d^3 + 9c_2b_3a_2a_1 + c_3b_2a_2a_1 + 6c_1b_2a_1d$$
$$-6b_3^2a_3a_1 - 4c_2b_2a_3a_1 - 5c_1b_2a_3a_2 - 8c_2a_2^2d - 11c_1b_3a_2^2$$
$$-2b_3a_3a_2d - 4c_1b_1^2a_3 - 16b_1a_3d^2 - 2c_3b_1^2a_1 - 10c_2b_1a_1d$$

$$K = 4d^2(a_2c_2 + b_1c_1 + a_3b_3) - 8d^4 - 8d(a_1b_3c_2 + a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3)$$
$$+(a_1b_2c_1c_2 + a_1b_1b_3c_3 + a_2a_3b_2c_3) - 4a_1b_2c_3d + 18d(a_2b_3c_1$$
$$+a_3b_1c_2) + 4(a_2^2c_2^2 + b_1^2c_1^2 + a_3^2b_3^2 - 19(a_3b_1b_3c_1 + a_2b_1c_1c_2$$
$$+a_2a_3b_3c_2) + 5(a_2^2b_3c_3 + a_3^2b_2c_2 + a_3b_1^2c_3 + a_1b_3^2c_1 + a_2b_2c_1^2$$
$$+a_1b_1c_2^2)$$

A *(*31) egyenlet bal oldala

$$a_1x^3 + b_2y^3 + c_3z^3 + 3(a_2x^2y + a_3x^2z + b_1xy^2 + b_3y^2z + c_1xz^2$$
$$+c_2yz^2) + 6dxyz,$$

a hármas harmadfokú alakra nézve még tisztán algebrai szempontból tekintve is nevezetes jelentőséggel bir, és a hármas harmadfokú alak (Ternäre cubische Form) hozzávaló alakjának (Zugehörige Form) neveztetik. [1]

Lásd : Aronhold „Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen“ (Crelle J. Bd. 55, pag. 185.)