ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
IX. KÖTET. XIII. SZÁM. 1882.

AZ ALGEBRAI EGYENLETEK ELMÉLETÉHEZ.

KÖNIG GYULA
L. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén, 1881. nov. 14.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1882.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az Akadémia épületében.)

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

Második kötet.

Harmadik kötet.

ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

Az algebrai egyenletek elméletéhez.

König Gyula l. tagtól.

(Előadta a III. osztály ülésén, 1881. nov. 14.)

Hogy miképen lehet Galois elméletét valamely (együtthatói által) valóban adott egyenlet vizsgálatánál értékesíteni, ez tudtommal eddigelé nem tárgyalt kérdés. Jelen dolgozatomban oly módszert közlök, melynek segítségével e vizsgálat legfontosabb része, a resolvensek összes különböző fajainak fölállítása, mindenkor végezhető. Erre támaszkodva, sikerül azután általános kritériumot megállapitani arra nézve, vajjon valamely adott egyenlet »részben« vagy »teljesen« algebrailag oldható-e vagy sem, és emez ismertető jel egyszersmind kapcsolatban áll oly módszerrel, mely az algebrai megoldást valóban meg is adja, ámbár — a tárgy természetéhez képest — ekkor hosszadalmas voltuk miatt, majdnem kivihetetlen számításokat kell végezni.

Dolgozatom folytatása mutatja, hogy a kijelölt módszerek más algebrai kérdések tárgyalásánál is igen jó szolgálatot tehetnek. Segítségökkel tárgyalom a harmadik czikkben ama tételek sorát, melyek törzsszám-hatvány rendű csoportokra vonatkoznak. Egyszersmind teljesen részletezhetem az oly egyenletek algebrai megoldását, melyeknél a csoport-rendszám ily jellegű.

Ezzel kapcsolatban áll végre az algebrailag oldható egyenletek egy nagy osztályának elmélete, mely legegyszerűbben az által jellemezhető, hogy a megoldásra szükséges irraczionális operácziók sorrendje tetszés szerint változtatható. Az Abel nevét viselő egyenlètek — mint speciális esetek — szintén ebbe az osztályba tartoznak.

1.

Adott egyenlet resolvensei.

Minden algebrai probléma megoldottnak tekinthető, ha sikerült azt a következő két elemi alapföladatra visszavezetni.

1. Adott egyenlet gyökeiből képezett symmetrikus függvények kifejezése az együtthatók által.

2. Adott egész függvények irreduktibilis tényezőinek meghatározása bármikép megállapított raczionalitási körre vonatkozólag.*)

E második föladatra nézve még hozzá lehet tenni, hogy az lényegben még mindig visszavezethető arra, hogy meghatározandók valamely egész számú együtthatókkal ellátott egyenlet egész számú gyökei, a természetes raczionalitási körben.

Az adott $f(x) = 0$ egyenlettől tehát elemi algorithmus segítségével átmehetünk az $F(V) = 0$ által jelölt Galois-féle resolvenshez, a mi megadja az egyenletnek (vagyis csoportjának) rendszámát. Erre nézve ugyanis először $n!$-fokú egyenlet képezendő, melynek együtthatói az eredeti egyenlet gyökeinek symmetrikus függvényei, és az így nyert egyenlet többtagújából azután kiválasztandó az egyik irreduktibilis tényező.

Bármely egyenlet vizsgálata ily módon visszavezethető egy $F(V) = 0$ egyenletre, melyben minden gyök egy tetszőleges gyöknek raczionális függvénye, vagyis a melyben a fok- és rendszám ugyanaz. Az ily egyenleteket — a Klein által bevezetett geometriai felfogáshoz alkalmazkodva — *szabályos* egyenleteknek akarjuk nevezni.

E szabályos egyenleteknek egyik jellemző tulajdonsága, hogy gyökeinek raczionális függvényei — Kronecker kifejezése szerint — csakis »uneigentlich« fajokat alkotnak, azaz, hogy mindegyikök, ha adjunkcziója az egyenlet csoportját

---

*) L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, §. 4.

lejebb szállítja, az $F(V)$ többtagút egyszersmind tényezőkre bontja. Legyen ψ ilynemű függvény, mely $F(V)$-ből kiválasztja az $F_1(V)$ irreduktibilis tényezőt, oly módon, hogy

$$V_1, V_2, \ldots V_k$$

az $F_1(V) = 0$ egyenlet gyökei. Akkor tüstént látható, hogy ψ és a $V_1 \ldots V_k$ gyökök legáltalánosabb symmetrikus függvénye:

$$S_k = (V_1-\mu)(V_2-\mu)\ldots(V_k-\mu)$$

egy és ugyanazon fajhoz tartozik. (Az S_k kifejezésben μ oly raczionális értéknek választandó, hogy S_k-nak a V-k fölcserélései által keletkező összes $\binom{N}{k}$ értéke egymástól különböző legyen.*)

Az $F(V) = 0$ egyenlethez tartozó resolvensek különböző fajai tehát mindannyian nyerhetők, ha a különböző S_k alakokhoz tartozó egyenleteket mind fölállítjuk, az S_k-ban természetesen nemcsak a gyökök számát, de magokat a belépő gyököket is változtatva.

Ha tehát meg akarjuk tudni, vajjon az $f(x) = 0$ és $F(V) = 0$ egyenleteknek van-e r-ed fokú resolvensök, csak azt kell tekintetbe vennünk, hogy létezése esetében egyik gyökének adjunkcziója az $F(V)$-ből kiválaszt oly tényezőt, melynek foka $\frac{N}{r} = k$. Ha ekkor az S_k számára nyerhető $\binom{N}{k}$-ad fokú egyenletet képezzük, akkor ennek az egyenletnek egyik gyöke, vagyis egyike az S_k-ból a V-k fölcserélése által keletkező értékeknek, és a kérdéses resolvens gyöke ugyanazon fajhoz tartozik, azaz az S_k számára képezett egyenlet többtagújának lesz egy r-ed fokú irreduktibilis tényezője. Ha van ilyen, akkor ez már maga meg is adja a keresett resolvenst. Világos, hogy ha több különböző jellegű, de egyenlő fokú resolvense van a vizsgált egyenletnek, akkor a megfelelő többtagúban több megfelelő egyenlőfokú irreduktibilis tényezőt találunk.

*) A tényezőkre bontás föladatának részletes tárgyalására nézve lásd a »Clebsch, Annalen« XV. kötetében megjelent értekezésemet: »Ueber Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhängende Eliminationsprobleme.«

E szerint, *ha el akarjuk dönteni, vajjon az $f(x) = 0$ egyenletnek van-e (irreduktibilis) r-ed fokú resolvense, először az N-ed fokú Galois-féle resolvens $F(V) = o$ képezendő, azután áttérünk az*

$$S_k = (V_1 - \mu) \dots (V_k - \mu)$$

számára képezhető $\binom{N}{k}$-adfokú egyenletre, melynek együtthatói a V-k symmetrikus függvényei. Legyen ez az egyenlet:

$$\Phi_k = 0;$$

akkor az $f(x) = 0$ egyenleteknek akkor és csak akkor lesz (irreduktibilis) r-edfokú resolvense, ha Φ_k-nek van irreduktibilis r-edfokú tényezője. E tényezők külön-külön zérussal egyenlítve, adják az r-edfokú resolvensek összes fajait.

Teljesen kijelölt miveletsor az, mely a kérdéses föladat megoldását adja, és a mint mindjárt látható, azt is megtudhatjuk, vajjon a nyert resolvensek holoedrikusak-e vagy pedig meriedrikusak. Rendszámuk ugyanis mindig meghatározható, és ez az első esetben N, a másodikban N valamely osztója leend.

2.

Az algebrai oldhatóság általános ismertető jelei.

Hogy eldöntsük, vajjon az $f(x) = 0$ egyenlet algebrailag oldható-e vagy sem, mindenekelőtt átmegyünk a megfelelő szabályos egyenletre:

$$F(V) = 0,$$

melynek fok- és rendszáma — törzstényezőkre bontva — legyen:

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}.$$

Ha ez az egyenlet algebrailag oldható, akkor megoldása mindenesetre egy $p_1, p_2 \dots$ vagy p_l-edfokú Abel-féle egyenlet megoldásával kezdődik, és ez $F(V) = 0$ resolvense, mely $F(V)$-t fölbontja $\frac{N}{p_1}, \frac{N}{p_2} \dots$ vagy $\frac{N}{p_l}$-edfokú tényezőkre. Vajjon valóban van-e az $F(V) = 0$ oly egyenletnek ily resolvense, azt megtudjuk az

$$\Phi_{\frac{N}{p_1}} = 0, \ldots, \Phi_{\frac{N}{p_l}} = 0$$

egyenletek képezése által és az $F(V) = 0$ algebrai oldhatóságának föltétele lesz, hogy emez egyenleteknek legalább egyike:

$$\Phi_{\frac{N}{p_1}} = 0$$

tartalmazzon egy p_1-edfokú irreduktibilis tényezőt. Hogy ez a resolvens valóban algebrai úton eszközölje $F(V) = 0$ fölbontását tényezőkre, kell, hogy az $F(V)$ eme p_1-edfokú tényezője egyszersmind p_1-edrendű legyen.

Ily módon tehát *szükséges és elégséges föltételét nyertük annak, hogy $F(V)$ gyökmennyiségek adjunkcziója által $\frac{N}{p}$-edfokú tényezőkre bontható legyen,* hol p törzsszám.

Ha e föltétel ki van elégítve, a vizsgálatot az $F(V)$ ily módon nyert tényezőinek egyikén ismételjük, és ez elégséges is, mivel az összes tényezők isomorph alkatúak.

Látjuk, hogy ha egymásután következő Abel-féle egyenletek lánczolta által sikerül $F(V)$-ből $\nu = \frac{N}{p_1^{\alpha_1} \ldots p_l^{\alpha_l}}$-adfokú tényezőt kiválasztani, a tényező együthatói $\frac{N}{\nu}$-értékü kifejezések lesznek; fölcserélve tehát emez együtthatók értékét, az $F(V)$-t alkotó összes tényezőket nyerjük.

Ily módon az $f(x) = 0$ és $F(V) = 0$ egyenletek redukczióját annyira viszszük, a mennyire ez egyáltalában gyökmennyiségek bevezetése által lehetséges; ha tehát az egyenlet algebrailag oldható, nemcsak fölismerjük e tulajdonságát, hanem egyszersmind elvégezzük a megoldást, a mennyiben V számára N-értékű kifejezést nyerünk, és ebből az x-ek raczionális úton kiszámíthatók.

Bármily hosszadalmas legyen is az ily módon adott eljárás alkalmazása egyes egyenletekre, mégis van a kifejtett ismertető jelnek elvi jelentősége, a mennyiben az első általános módszert szolgáltatja valamely egyenlet algebrai oldhatóságának vizsgálatára, és az egyenlet gyökeinek algebrai előállítására, ha az lehetséges. Nagyon kétségesnek látszik, vajjon az algebrai oldhatóság kritériuma a fokszám jellegének megszoritása nélkül *lényegesen* más alakban oldható-e? (Világos, hogy a fönnebbi eredmények különben még sokféleképp változtatható alakban lesznek kifejezhetők.) Hogy az algebrai oldhatóság föltételei abban az esetben, midőn az egyenlet foka törzsám, Abel és Galois szerint annyival egyszerűbben fejezhetők ki, oly viszonyokban találja okát, melyek teljesen megszünnek, mihelyt a fokszám összetett. Abban az egyszerűbb esetben a szükséges gyökkivonásoknak nemcsak jellege, de sorrendje is teljesen meg van határozva, és az egyenlet rendszáma már egymagában elégséges az algebrai oldhatóság eldöntésére, a nélkül, hogy a csoport szerkezetét részletesebben kellene tanulmányozni. Emez egyszerűsítések elesnek, mihelyt az egyenlet foka összetett szám.

3.

Irreduktibilis tényezők, melyeknek foka törzsszám-hatvány.

Az 1. czikkben adott módszerek segítségével rövid és egyszerű úton levezethetjük azon algebrai tételeket, melyek a Cauchy által adott — substituczió-csoportokra vonatkozó — alaptételekből és a Sylow által ehhez kötött általánosításokból folynak. Ezek a tételek is új úton lesznek ez által bebizonyítva, mert mindig képezhető egyenlet, melynek csoportját előbb tetszés szerint választottuk.

Ha $F(V) = 0$ szabályos egyenlet, melynek foka $N = p^\alpha Q$, hol p törzsszám és Q többé nem osztható p által, akkor $F(V)$ fölbontható p^α-fokú tényezőkre egy oly φ mennyiség adjunkcziója által, mely maga Q-adfokú irreduktibilis egyenlet gyöke, míg emez egyenlet együtthatói ugyanazon racziona-litási körbe tartoznak, mint az eredeti egyenlet együtthatói.

Hogy az egyenlet csoportjától függetlenül meghatározzunk egy p^α-fokú tényezőt, képezni kell egyenletet, melynek foka:

$$\binom{p^\alpha Q}{p^\alpha} = \frac{p^\alpha Q(p^\alpha Q-1)\ldots(p^\alpha Q-\nu)\ldots(p^\alpha Q-p^\alpha+1)}{p^\alpha\,(p^\alpha-1)\;\ldots\;(p^\alpha-\nu)\;\ldots\;(p^\alpha-p^\alpha+1)}$$

és a melynek együtthatói az eredeti egyenlet gyökének symmetrikus függvényei. Látjuk, hogy az így nyert egyenlet fokszáma nem osztható p-vel, mert $p^\alpha Q-\nu$ és $p^\alpha-\nu$ a p-nek mindig ugyanazon hatványa által osztható. Ez az egyenlet azonban még reduktibilis lehet. — Legyenek irreduktibilis tényezői, $k_1, k_2, \ldots, k_m$-edfokúak. Akkor

$$k_1+k_2+\ldots k_m = \binom{p^\alpha Q}{p^\alpha}.$$

A k számok egyike sem lehet egy; különben $F(V)$ reduktibilis volna. Egyszersmind kell, hogy e számok közül legalább egy, például k_1, relativ törzsszám legyen p-hez, mert különben összegök is osztható volna p által. Az összeg azonban $\binom{p^\alpha Q}{p^\alpha}$ lévén, ez lehetetlen.

E szerint az $F(V)=0$ egyenletnek van egy k_1-edfokú irreduktibilis resolvense. Ha egyik gyöke φ_1, akkor e φ_1 adjunkcziója fölbontja $F(V)$-t $p^\alpha\frac{Q}{k_1}$-edfokú irreduktibilis tényezőkre. Itt $\frac{Q}{k_1}$ mindenesetre egész szám, mert p^α és k_1 relativ törzsszámok.

Ebből következik, hogy k_1 nem lehet nagyobb a Q-nál; de kisebb sem lehet. Ekkor ugyanis φ_1 adjunkcziója oly irreduktibilis tényezőket adnak, melyeknek fokszáma $p^\alpha\frac{Q}{k_1}>p^\alpha$ ellentétben azzal, hogy mihelyt φ_1-et beveszszük a raczionalitási körbe, mindenesetre az $F(V)$-nek raczionális és p^α-adfokú tényezőit kell nyernünk.

Az ily módon nyert Q-adfokú resolvens egyes gyökei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\alpha$ megfelelnek az egyenlet csoportjában tartalmazott p^α-rendű alcsoportoknak. *Ezek mind transformáczió által egymásból leszármaztathatók*, és egyszersmind kimutathatni rólok, hogy *az egyenlet csoportjában tartalmazott bármely oly csoport, melynek rendje a p törzsszám hatványa, egyikökben mint alcsoport foglaltatik.*

Ha ugyanis P ily $p^{\alpha'}$-rendű alcsoport, és ψ oly függvény, mely csakis e csoport substituczióinál marad változatlan, akkor $F(V)$ a ψ adjunkcziója által oly tényezőkre bomlik, melyekben a fok- és rendszám p^{α_i}. Ebben a raczionalitási körben tehát magának az $F(V) =$ egyenletnek rendje szintén p hatványa. Az előbb képezett Q-adfokú resolvens tehát szükségképen szintén szétesik oly tényezőkre, melyeknek foka a p hatványa. Ha az egyes tényezők $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \ldots$ fokúak, akkor

$$Q = p^{\alpha_1} + p^{\alpha_2} + \ldots;$$

de Q nem osztható p-vel; az utolsó reláczió csak úgy lehetséges, hogy legalább egy α kitevő 0. Azaz a ψ függvény adjunkcziója a Q-adfokú resolvensnek legalább egy gyökét megadja raczionális módon, és ez nem más, mint a fönnebb kijelentett tétel.

A nélkül, hogy az ide tartozó tételek sorát még tovább is részletesen tárgyalnám, még csak a következőt akarom itt fölhozni:

Minden (irreduktibilis) egyenlet, melynek foka és rendje ugyanazon p törzsszám hatványa, egy p-edfokú Abel-féle egyenlet megoldása által p egyenlőfokú tényezőre bontható.

Már Sylon bebizonyította az ily egyenletek algebrai oldhatóságát, a most levezetendő tétel a megoldásnál követendő módszert adja.

Legyen az egyenlet foka p^k, hogy ebből egy p^{k-1}-edfokú tényezőt kiválaszszunk, szükséges $S_{p^{k-1}}$ számára egyenletet képezni, melynek együtthatói symmetrikus függvények és melynek foka

$$\binom{p^k}{p^{k-1}} = \frac{p^k\,(p^k-1)\ \ldots\ (p^k-p^{k-1}+1)}{p^{k-1}(p^{k-1}-1)\ldots(p^{k-1}-p^{k-1}+1)}.$$

E fokszám pQ-alakú, hol p és Q relativ törzsszámok. De minthogy az egyenlet rendszáma is p-nek hatványa, kell, hogy az így képezett pQ-adfokú egyenlet szétessék tényezőkre, és hogy az egyes tényezők foka ismét p hatványa legyen. Ha tehát az egyes tényezők $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \ldots$ fokúak, lesz:

$$p^{\alpha_1} + p^{\alpha_2} + \ldots = pQ.$$

Ebből következik, hogy a kitevők nem lehetnek mind annyian az egységnél nagyobbak, mert ekkor pQ, ellentétben előbbeni eredményeinkkel, osztható volna p^2 által. Továbbá egy α sem lehet 0; mert különben az $S_{p^{k-1}}$ számára nyert egyenletnek volna raczionális gyöke, és akkor a vizsgált egyenlet nem volna irreduktibilis. E szerint legalább egy α, például α_1, egyenlő az egységgel. Így tehát a tényezőkre-bontás megtörténik egy *p-edfokú resolvens* által, a melyről egyszersmind látni, hogy *Abel-féle egyenlet, azaz p-edrendű*. Mert kell, hogy rendszáma egy oldalról p hatványa, más oldalról $p!$ tényezője legyen. Ily szám pedig csupán p maga.

4.

Az algebrailag oldható egyenleteknek egy speciális osztályáról.

Ha $f(x) = 0$ algebrai úton oldható egyenlet, a megoldásnál követendő menet a törzsszámoknak egy bizonyos sora által jellemezhető:

$$[p_1], [p_2], \ldots, [p_\varkappa].$$

Először ugyanis képezendő egy p_1-edfokú Abel-féle egyenlet, melynek együtthatói az eredeti raczionalitási körbe tartoznak, azután ezen egyenlet egyik gyökét u_1-et adjungáljuk. Ez megtörténvén, ismét p_2-edfokú Abel-féle egyenlet képezendő, melynek együtthatói általánosságban az u_1 által tágított raczionalitási körbe tartoznak. — (Speciális esetekben lehetséges, hogy u_1 nem lép föl az együtthatókban). Ezután ismét ennek az egyenletnek egyik gyökét adjungáljuk, u_2-t, és úgy tovább, míg végre $u_\varkappa$-t adjungálva, az adott egyenlet öszszes gyökei raczionálisan kifejezhetők.

Raczionális úton nyerhető mennyiségek kiszámításán kivűl tehát $[p_1]$, $[p_2]\ldots$, amaz elementáris operácziókat jelölhetik, melyek az $f(x) = 0$ megoldásánál szükségesek. *Általánosságban a $[p]$ operácziók sorrendje teljesen meg van állapítva.* Bizonyos egyenleteknél azonban lehet a $[p]$ operácziókat különböző sorrendben is végezni, természetesen úgy, hogy a p törzsszámok szorzata állandó marad.

Az algebrai úton oldható egyenletek legegyszerűbb osztályát nyerjük ama követelés által, hogy a $[p]$ operácziók tetszőleges sorrendben legyenek végezhetők. Az így nyert egyenletosztály a legáltalánosabb, melynél a Galois-féle resolvens megoldása még teljesen az először Gauss által használt módszerek alapján történhetik. Ide tartoznak az Abel-féle egyenletek, amaz egyenletek, melyeknek rendszáma törzsszámhatvány és sok más.

Ha az ily egyenlet rendszáma:

$$N = \pi_1^{\alpha_1}\pi_2^{\alpha_2}\ldots\pi_s^{\alpha_s},$$

akkor meglehet kezdeni a megoldást α_1 egymást követő π_1-edfokú Abel-féle egyenlet lánczolatával és ennek megfelelőleg van az egyenlet csoportjának, G-nek egy $\frac{N}{p_1^{\alpha_1}}$-rendű alcsoportja.

A szükséges és elegendő föltétel arra, hogy $f(x) = 0$ a jellemzett egyenletosztályba tartozzék, az, hogy ily csoportja $\frac{N}{\pi_1^{\alpha_1}}$-rendű és invarians) alcsoportokat foglaljon magában* $(i = 1, 2 \ldots 1)$.

Könnyű belátni, hogy e föltétel mindig elegendő; mert a G_1 alcsoportnak megfelel egy α_1 rendű resolvense, $R_1 = 0$; a mikor az

$$R_1 = 0, R_2 = 0, \ldots R_s = 0$$

egyenleteknek egymástól független megoldása teljesen megoldja az $f(x) = 0$ egyenletet, és meg is engedi a p operáczióknak tetszőleges sorrendben való alkalmazását.

Az adott föltétel egyszersmind szükséges is. Kell ugyanis, hogy a megoldást meg lehessen kezdeni α_1 Abel-féle egyenlet lánczolata által, melynek foka π_1. Emez egyenletek helyettesíthetők egy egyetlen $p_1^{\alpha_1}$ rendű egyenlet által. De ekkor ez

$$f(x) = 0 \text{ és } R_1 \ldots R_s = 0$$

egyenletek teljesen aequivalensek, és a két egyenlet gyökei egymás által raczionálisan kifejezhetők. Csoportjaik G és Γ tehát holoedrikus isomorphimus viszonyában állanak. A Γ csoport pedig nem más, mint a $\pi_1^{\alpha_1}, \ldots \pi_s^{\alpha_s}$-rendű és különböző elemekből alkotott $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_s$ csoportok szorzata. Bármely $s-1$ ily csoport szorzata tehát a Γ-nak invarians alcsoportja, és ekkor a G-nek megfelelő alcsoportja szintén ily jellegű.

*) G_1 a G-nek *invariáns* alcsoportja, ha G_1 a G-nek bármely substitucziója által transformálva, magamagába megy át.

Látjuk egyszersmind, hogy a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_s$, szintén a Γ invariáns alcsoportjai, és hogy ennek következtében a G megfelelő alcsoportjai $g_1, g_2, \ldots g_s$, melyeknek rendje $\pi_1^{\alpha_1}, \pi_2^{\alpha_2}, \ldots \pi_s^{\alpha_s}$ szintén invariáns alcsoportok. Minthogy pedig az ily rendszámmal biró alcsoportok mindnyájan transformáczió által keletkeznek egymásból, a G csoport karakterisztikus tulajdonságát végre még úgy is lehet kifejezni, hogy *csak egy-egy* $\pi_1^{d_1}, \ldots \pi_s^{d_s}$*-rendű alcsoportja van.*

Hogy e föltétel nemcsak szükséges — mint a megelőzőkből látjuk, — hanem elégséges is, szintén könnyen kimutatható. Ha t. i. $g_1, g_2, \ldots g_s$ invariáns alcsoportok, akkor $s-1$ ily g szorzata is ilyen, és e szorzat, a mint az isomorph γ-k szorzatából látjuk, $\frac{N}{\pi_1^{\alpha_1}}$-rendű csoport.

A G és Γ kapcsolatából még kitünik, hogy *ha d bármelyik osztója az N-nek, a G csoportnak mindig van egy d-edrendű alcsoportja.*

Ha most már $F(V) = 0$ az $f(x) = 0$ egyenletnek megfelelő szabályos egyenlet, akkor az $R_1 = 0$ resolvens az $F(V)$-t fölbontja $\pi_1^{\alpha_1}$ tényezőre, mely tényezők mindegyike $\frac{N}{\pi_1^{\alpha_1}}$-fokú és rendű; egyszersmind eldönthetjük, vajjon valamely együtthatói által adott egyenlet a tárgyalt osztályba tartozik-e, midőn a symmetrikus függvények segítségével $S_{\frac{N}{\pi_1^{\alpha_1}}}$ számára egyenletet képezünk, és megvizsgáljuk, hogy van-e ebben $\pi_1^{\alpha_1}$-fokú és rendű tényező. Ha ilyen van minden 1-re nézve, akkor az

$$R_1 = 0, R_2 = 0, \ldots R_s = 0$$

egyenletek teljesen megoldják az adott egyenletet. Mindegyik fölbontja az $F(V)$-t $\pi_1^{\alpha_1}$ tényezőre. E tényezők foka megfelelőleg $\frac{N}{\pi_1^{\alpha_1}}$, úgy, hogy

$$F(V) = X_1^{(i)} X_1^{(i)} \ldots X_{\pi_i^{\alpha_i}}^{(i)}.$$

Ebből látjuk, hogy a következő gyeenletek:

$$X_\alpha^{(1)} = 0, X_\beta^{(2)} = 0, \ldots X_\sigma^{(s)} = 0,$$

hol $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ tetszőleges indexek, egy és csak egy közös gyököt tartalmaznak. — Ha ugyanis mindegyik egyenlet tartalmazná a V_1 és V_2 gyököket, ez annyit jelentene, hogy minden egyes $R = 0$ egyenlet, tehát épen úgy az összes $R = 0$ egyenletnek adjunkcziója után $F(V) = 0$ csoportja még tartalmazná azt a substitucziót, mely V_1-et átviszi V_2-be; de ekkor, mint tudjuk, e csoport csakis az identikus substitucziót tartalmazza. *Minden ily rendszer:*

$$X_\alpha^{(1)} = o, \; X_\beta^{(2)} = o, \ldots X_{(\sigma)}^{s} = o$$

megadja az $F(V) = o$ egyenlet egy gyökét, mint az egész rendszer egyetlen közös gyökét, melyet azután a legnagyobb közös osztó módszere szerint lehet meghatározni. Minthogy ugyanis minden gyök föllép, mint az ily rendszer közös gyöke, minthogy továbbá minden rendszer csak egy gyököt szolgáltat és mindössze $\pi_1^{\alpha_1} \ldots \pi_s^{\alpha_s}$ ily rendszer létezik, világos, hogy minden rendszerből egyértékűleg egy gyököt nyerünk.

A mi végre az $Ri = 0$ resolvensek megoldását illeti, az a megelőző czikk végén adott módszer segitségével történik.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.

II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.

III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből. 10 kr.

IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr.

VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.

VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan trigonometriája . . . . 20 kr.

VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.

IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.

II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.

III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.

IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.

V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.

VI. Dr. Gruber Lajos. 24 η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . . 10 kr.

VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.

VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.

IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.

X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.

II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.

III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.

IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.

V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.

VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.

VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.

VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr

Hetedik kötet.

Budapest, 1883. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.