ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

IX. KÖTET. XI. SZÁM. 1882.

PERSPECTIV HELYZETŰ ALAKZATOKRÓL.

Dr. KLUG LIPÓT,

REÁL-ISKOLAI TANÁRTÓL.

(A III. osztály ülésén 1882. ápril 17-én bemutatta *Hunyady Jenő.*)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1882.

A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK
a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselv. volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgés. forrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

ÉRTEKEZÉSEK
MATH. TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.

Perspectiv helyzetű alakzatokról.

Dr. Klug Lipót, reál-iskolai tanártól.

(A III. osztály ülésén 1882. ápril 17-én bemutatta Hunyady Jenő.)

A geometriában gyakran találunk oly alakzatokat, melynél az előforduló pontok mindegyikén egyenlő számú egyenesek, körök vagy síkok mennek át, az egyeneseken vagy körökön egyenlő számú pontok fekszenek és az egyeneseken egyenlő számú síkok vannak áthelyezve, végre az egyes síkokban előforduló pontok és egyenesek száma egyenlő. Az ily alakzatok, minthogy az előforduló pontok, egyenesek, körök, síkok, helyzetökre nézve bizonyos szabályszerüséget mutatnak, a helyzet geometria szabályos alakzatainak nevezhetők. Ilyen pl. minden egyszerű vagy teljes n-szög, teljes n-oldal a síkban vagy gömbön; teljes n-szög, vagy teljes n-lap a térben.

Más ily alakzat két perspectiv helyzetű háromszög $A_l\ B_l\ C_l,\ A_m\ B_m\ C_m$, vagy rövidebben jelölve $(ABC)_l$, $(ABC)_m$, a vetitő sugarak és collineatio-tengelylyel együtt. Egyrészt a vetületi központ S, a háromszögek megfelelő BC, CA, AB oldalainak metszőpontjai rendre E, F, G, végre azok szögpontjai, másrészt a collineatio-tengely, a vetitő sugarak és a háromszög oldalai, oly helyzetű 10 pont, illetőleg 10 egyenes, hogy minden ponton három egyenes megy át és minden egyenesben három pont fekszik.

Ez idomban bármely pont a 10 közűl tekinthető vetületi központnak, más, általa már meghatározott 3 pár pont, két perspectiv helyzetű háromszöget képez és a hátralévő három pont a felvett központhoz tartozó collineatio-tengelyben fekszik. Igy: ha A_l tekintetik vetületi központnak, akkor $S\,B_l\,C_l$, $A_m\,G\,F$ perspectiv helyzetű háromszögek collineatio-tengelye $E\,B_m\,C_m$ egyenes; ha E a vetületi központ, $F B_l\,B_m$, $G\,C_l\,C_m$ háromszögek perspectiv helyzetüek; a collineatio-tengely $S\,A_l\,A_m$ egyenes.

Ha ez idomot egy gömb központjából, P-ből a gömbre vetitjük, a gömb felületén 10 legnagyobb kört és 20 pontot nyerünk; e körök mindegyikén 3 pár pont diametral van elhelyezve, minden diametral pontpáron három kör megy át. Minden perspektiv helyzetű háromszögpárnak a síkban megfelel 64 pár perspectiv helyzetű gömbháromszög a gömb felületén; azon két síkháromszög vetitő sugarainak a síkban, e gömbháromszögek szögpontjait vetitő legnagyobb körök a gömb felületén, végre a collineatio-tengelynek a síkban, egy collineatio-kör a gömb felületén.

Ha minden pont megfelelő pontjait a gömb felületén ugyanazon, de egy és két jegygyel ellátott betüvel jelöljük, így pl: az S-nek megfelelő pontjait S'- és S''-el, akkor $A'_l\,B'_l\,C'_l$-hez az

$$A'_m\,B'_m\,C'_m,\ A'_m\,B'_m\,C''_m,\ A'_m\,B''_m\,C'_m,\ A''_m\,B'_m\,C'_m,$$
$$A''_m\,B''_m\,C''_m,\ A''_m\,B''_m\,C'_m,\ A''_m\,B'_m\,C''_m,\ A'_m\,B''_m\,C''_m$$

háromszögek mindegyike perspectiv helyzetü; a vetületi központ S' vagy S'', a collineatio-kör $E'\,F'\,G'\,E''\,F''\,G''$ pontokon megy át.

Két perspectiv helyzetű tetraeder $A_l\,B_l\,C_l\,D_l$, $A_m\,B_m\,C_m\,D_m$, vagy röviden jelölve $(ABCD)_l$, $(ABCD)_m$ szintén ily idomra vezet. Ha a vetületi központot S-el, az $A\,B\,C$ háromszögek oldalainak metszőpontjait mint előbb E, F, G-vel, az AD, BD, CD élek metszőpontjait rendre H, I, K-val jelöljük, mely $E\,F\,G\,H\,I\,K$ pontok a collineatio-síkban fekszenek, akkor egyrészt e sik, a tetraeder lapjai és az élek vetitő síkjai, másrészt a vetületi központ, a tetraederek szögpontjai és az egynevezetű élek metszőpontjai, végre a szögpontokat vetitő sugarak, a tetraeder élek és az egynevezetü tetraeder lapok metsző vonalai, 15 síkot, illetőleg 15 pontot és 20 egyenest határoznak meg. Minden ponton 4 egyenes és 6 sík megy át, minden síkban 4 egyenes és 6 pont fekszik, minden egyenesen 3 sík megy át és 3 pont van elhelyezve. Ez idomban a 15 közűl bármely pont tekinthető vetületi központnak, más, általa már meghatározott 4 pár pont, két perspectiv helyzetű tetraeder szögpontja, a hátralevő 6 pont, a felvett vetületi központhoz tartozó collineatio-síkban fekszik. Igy: ha A_l tekintetik vetületi központnak, akkor $S\ B_l\ C_l\ D_l$. $A_m\ G\ F\ H$ a két tetraeder szögpontja és $B_m\ C_m\ D_m\ E\ I\ K$ a collineatio-sík pontjai; ha E a vetületi központ, $F\ K\ C_l\ C_m$ és $G\ I\ B_l\ B_m$ képezi a tetraederek szögpontjait, $S\ A_l\ A_m\ D_l\ D_m\ H$ pontok az E-hez tartozó collineatio-síkban fekszenek.

Három $(ABC)_l$ $(ABC)_m$, $(ABC)_n$ háromszög, melyek közűl mindegyik a másik kettővel, ugyanazon S vetületi központot illetőleg perspectiv helyzetű, mint ismeretes [1]), három ugyanazon T ponton átmenő collineatio-tengelyt határoz meg. A collineatio-tengelyekben fekvő $(A_l\ B_l,\ A_m\ B_m) = G_{lm}$; $(A_l\ C_l, A_m\ C_m) = F_{lm}$; $(B_l\ C_l, B_m\ C_m) = E_{lm}$ stb. és S, T pontok továbbá a háromszögek szögpontjai, valamint a vetitősugarak a collineatio-tengelyek és a háromszög oldalai, oly csoportosítása 20 pontnak és 15 egyenesnek, hogy minden egyenesen 4 pont fekszik és minden ponton 3 egyenes megy át.

Ez idomban a 20 pont közűl bármelyik tekinthető vetületi központnak, más, általa már meghatározott 9 pont, három perspectiv helyzetű háromszög szögpontja, további 9 pont három collineatio-tengelyben lesz elhelyezve, mely utóbbiak egymást a 20-ik pontban metszik.

Ha T tekintetik vetületi központnak, akkor az E, F, G pontok három perspectiv helyzetű háromszöget képeznek; az egyes collineatio-tengelyek az A, B, C pontokat tartalmazzák, mely utóbbiak S ponton mennek át. — T-t az S ellenpontjának nevezzük.

Ha A_l pont vétetik vetületi központnak, akkor a 3 háromszög szögpontjai:

$$\begin{matrix} S B_l C_l & \\ A_m G_{ml} F_{ml} & \ldots\ldots\ldots\quad \mathrm{I.} \\ A_n G_{nl} F_{nl} & \end{matrix}$$

---

[1]) H. Schröter »Theorie der Kegelschnitte.« §. 11.

az első és második, a második és harmadik, végre az első és harmadik háromszöghöz tartozó collineatio-tengelyek megfelelőleg:

$$\begin{matrix} B_m C_m E_{ml} \\ B_n C_n E_{nl} \\ G_{mn} F_{mn} T \end{matrix} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

egyenesek, melyek E_{mn} pontban találkoznak.

Ha E_{mn} vétetik vetületi központnak, akkor a II. csoport függélyes sorai a perspectiv helyzetü háromszögek szögpontjait, az I. csoport függélyes sorai pedig az egyes collineatio-tengelyekben fekvő pontokat képviselik; e tengelyek A_l-ben E_{mn}-nek ellenpontjában találkoznak.

Ha ez idomot, mint előbb, egy gömb központjából a gömbre vetítjük, 15 legnagyobb kört és 40 pontot nyerünk, e körök mindegyikén 4 pár pont diametral van elhelyezve, minden diametrál pontpáron három kör megy át. Három tetszőleges ugyanazon vetületi központot illetőleg páronkint perspectiv helyzetű háromszögnek a síkban, 8^3 perspectiv helyzetü gömbháromszög felel meg a gömb felületén.

Az utóbb tárgyalt síkidom általánosítását a térre következő tétellel kezdhetjük meg:

»Ha három tetraeder oly helyzetet foglal el, hogy azok szögpontjai négy egymást egy pontban metsző egyenesen vannak elhelyezve, mely utóbbiak közűl három nem fekszik egy síkban, akkor két-két ily tetraeder élei ugyanazon síkban lévő hat pontban találkoznak. E síkok egymást egy egyenesben metszik, mely a három tetraeder lapjait ugyanazon négy pontban döfi át.«

Legyen az előbbi jelölés szerint $(ABCD)_l$, $(ABCD)_m$, $(ABCD)_n$ azon három tetraeder és feküdjenek az

A_l	A_m	A_n	pontok	a	egyenesben
B_l	B_m	B_n	»	b	»
C_l	C_m	C_n	»	c	»
D_l	D_m	D_n	»	d	»

és legyen ez egyenesek metsző pontja S.

Jelöljük mint előbb E, F, G, H, I, K betükkel a tetraederek BC, illetőleg AC, AB, AD, BD, CD éleinek metszőpontjait, mely $EF \ldots K$ betüket, a tetraederek indexeitől átvett két indexxel látjuk el, pl. $(C_m D_m, C_n D_n) = K_{mn}$-nel stb., az

$(ABC)_l$, $(ABC)_m$, $(ABC)_n$ síkok metszőpontját O_d,
$(ABD)_l$, $(ABD)_m$, $(ABD)_n$ » » O_c,
$(ACD)_l$, $(ACD)_m$, $(ACD)_n$ » » O_b,
$(BCD)_l$, $(BCD)_m$, $(BCD)_n$ » » O_a

betükkel.

A mint látható, az

$E_{lm} F_{lm} G_{lm}$, $E_{mn} F_{mn} G_{mn}$, $E_{nl} F_{nl} G_{nl}$ egyenesek metszőpontja O_d
$G_{lm} H_{lm} I_{lm}$, $G_{mn} H_{mn} I_{mn}$, $G_{nl} H_{nl} I_{nl}$ » » O_c
$F_{lm} H_{lm} K_{lm}$, $F_{mn} H_{mn} K_{mn}$, $F_{nl} H_{nl} K_{nl}$ » » O_b
$E_{lm} I_{lm} K_{lm}$, $E_{mn} I_{mn} K_{mn}$, $E_{nl} I_{nl} K_{nl}$ » » O_a

és az

$(ABCD)_l$, $(ABCD)_m$ tetr. collineatio-síkja $(EFGHIK)_{lm}$ sík
$(ABCD)_m$, $(ABCD)_n$ » » $(EFGHIK)_{mn}$ »
$(ABCD)_n$, $(ABCD)_l$ » » $(EFGHIK)_{nl}$ »,

de e három sík mindegyikében benne fekszenek O_a, O_b, O_c, O_d pontok, azért azon három collineatio-sík e g y egyenesben o-ban metszi egymást, mely o egyenes a három tetraeder lapjait ugyanazon négy pontban O_a O_b O_c O_d-ben döfi át.

Ez alakzatban 21 sík, 35 pont és 35 egyenes van kitüntetve; minden síkban 5 egyenes és tiz pont fekszik, minden ponton 6 sík és 4 egyenes megy át, végre minden egyenesen 4 pont fekszik és 3 sík van áthelyezve.

Ez alakzat bármely pontja tekinthető vetületi központnak, más, általa már meghatározott 12 pont, három tetraeder szögpontja, melyek páronkint a felvett vetületi központot illetőleg perspectiv helyzetűek; ezeknek három collineatio-síkja az alakzat egy egyenesében metszi egymást.

Ha A_l vétetik vetületi központnak, akkor a három tetraeder szögpontjai:

$S B_l C_l D_l$
$A_m G_{lm} F_{lm} H_{lm}$
$A_n G_{ln} F_{ln} H_{ln}$

Minthogy

$$(SB_l, A_m G_{lm}) = B_m, \ (SC_l, A_m F_{lm}) = C_m, \ (SD_l, A_m H_{lm}) = D_m,$$
$$(B_l C_l, G_{lm} F_{lm}) = E_{lm}, (B_l D_l, G_{lm} H_{lm}) = I_{lm}, (C_l D_l, F_{lm} H_{lm}) = K_{lm}$$

stb., és

$$(A_m G_{lm}, A_n G_{ln}) = (A_m B_m, A_n B_n) = G_{mn}, (G_{lm} F_{lm}, G_{ln} F_{ln}) = O^d$$
$$(A_m F_{lm}, A_n F_{ln}) = (A_m C_m, A_n C_n) = F_{mn}, (G_{lm} H_{lm}, G_{ln} H_{ln}) = O^c$$
$$(A_m H_{lm}, A_n H_{ln}) = (A_m D_m, A_n D_n) = H_{mn}, (F_{lm} H_{lm}, F_{ln} H_{ln}) = O_b,$$

az első és második, első és harmadik, végre második és harmadik tetraeder éleinek metszőpontjai:

$$\begin{matrix} B_m & C_m & D_m & E_{lm} & I_{lm} & K_{lm} \\ B_n & C_n & D_n & E_{ln} & I_{ln} & K_{ln} \\ G_{mn} & F_{mn} & H_{mn} & O_d & O_c & O_b \end{matrix}$$

pontok, melyek egymást E_{mn} I_{mn} K_{mn} O_a egyenesben metszik.

Ha O_a a vetületi központ, akkor a perspectiv helyzetü tetraederek szögpontjai:

$$\begin{matrix} K_{lm} & K_{mn} & K_{nl} & O_b \\ I_{lm} & I_{mn} & I_{nl} & O_c \\ E_{lm} & E_{mn} & E_{nl} & O_d \end{matrix}$$

pontok és az előbbi rendben vett tetraederek éleinek metszőpontjai:

$$\begin{matrix} D_m & D_n & D_l & H_{mn} & H_{nl} & H_{lm} \\ C_m & C_n & C_l & F_{mn} & F_{nl} & F_{lm} \\ B_m & B_n & B_l & G_{mn} & G_{nl} & G_{lm} \end{matrix}$$

pontok, melyeken átmenő síkok egymást SA_l A_m A_n $= a$ egyenesben metszik.

Ha E_{lm} vétetik vetületi központnak, akkor a perspectiv helyzetű tetraederek szögpotjai:

$$\begin{matrix} B_l & B_m & G_{ml} & I_{ml} \\ C_l & C_m & F_{ml} & K_{ml} \\ E_{ln} & E_{mn} & O_d & O_a \end{matrix}$$

és az előbbi rendben vett tetraederek éleinek metszőpontjai:

$$\begin{matrix} S & A_l & A_m & D_l & D_m & H_{lm} \\ B_m & G_{nl} & G_{mn} & I_{nl} & I_{mn} & O_c \\ C_n & F_{nl} & F_{mn} & K_{nl} & K_{mn} & O_b \end{matrix}$$

pontok, melyeken átmenő síkok egymást H_{ln} H_{mn} A_n D_n egyenesben metszik.

Ha ez alakzathoz egy negyedik tetraedert hozunk, ismét szabályos alakzatra vezettetünk.

Legyen e végből $(ABCD)_o$ egy uj tetraeder, melynek A_o, B_o, C_o, D_o szögpontjai rendre az előbbi alakzatból ismert a, b, c, d egyenesen fekszenek. — Jelöljük e tetraederek éleinek metszőpontjait az előbbiekével, mint fönn $E\,F\,G\,H\,J\,K$ betükkel, melyeknek kettős indexe a tekintetbe vett tetraederek indexe szerint lesz meghatározva.

Mint előbb könnyen bebizonyítható, hogy létezik egy l, egy m, egy n egyenes, mely az $(ABCD)_m$, $(ABCD)_n$, $(ABCD)_o$ illetőleg $(ABCD)_n$, $(ABCD)_o$, $(ABCD)_l$ és az $(ABCD)_m$, $(ABCD)_o$, $(ABCD)_l$ tetraederek lapjait ugyanazon L_a, L_b, L_c, L_d, illetőleg M_a, M_b, M_c, M_d, végre N_a, N_b, N_c, N_d pontokban metszi, hol az *abcd* indexxel ellátott LMN betük megfelelőleg a BCD, ACD, ABD, ABC, tetraeder lapoknak metszését jelentik, az l, m, n egyenesekkel.

Az *lmno* egyenesek közűl kettő-kettő egy síkban fekszik, mely a tetraederek egyik collineatio-síkja. Igy: az $(ABCD)_l$, $(ABCD)_o$ tetraederek collineatio-síkja $(EFGHIK)_{lo}$ átmegy m, n egyeneseken.

Innen következik, hogy a felvett tetraederek hat collineatio-síkja egymást négy egyenesben metszi, melyek ugyanazon T ponton mennek át.

E vizsgálódás eredménye a fönnebbi síkidom általánosítása a térre, mely eredmény egybefoglalva így hangzik:

»Ha négy tetraeder oly helyzetet foglal el, hogy azok szögpontja négy egymást egy pontban metsző egyenesen vannak elhelyezve, mely utóbbiak közűl három nem fekszik egy síkban, akkor két-két ily tetraeder élei egy síkban fekvő hat pontban találkoznak; e síkok egymást négy ugyanazon ponton átmenő egyenesben metszik.

Ez egyenesek bármelyike a felvett tetraeder közűl az egyenes által meghatározott háromnak lapjait ugyanazon négy pontban metszi. Azon négy egyenesen fekvő tizenhat pont, négy uj tetraeder szögpontját képezi, melyből az eredeti tetraederek oly módon származtathatók, mint az uj tetraederek az eredetiekből.«

Hogy e tétel utolsó részét bebizonyíthassuk, meg kell mutatnunk, hogy azon egyenes, mely pl. $(LMNO)_a$, $(LMNO)_b$, $(LMNO)_c$ tetraederek lapjait ugyanazon négy pontban metszi, d egyenes, és azon metsző pontok D_I D_{III} D_{II} D_0 pontok.

Minthogy

$$(LMN)_a \equiv (BCD)_0$$
$$(LMN)_b \equiv (ACD)_0$$
$$(LMN)_c \equiv (ABD)_0$$

és a jobb oldalon lévő síkok közös pontja D_0, azért

$(LMN)_a$, $(LMN)_b$, $(LMN)_c$ síkok egymást D_0-ban metszi
$(LMO)_a$, $(LMO)_b$, $(LMO)_c$ » » D_{II} » »
$(LNO)_a$, $(LNO)_b$, $(LNO)_c$ » » D_{III} » »
$(MNO)_a$, $(MNO)_b$, $(MNO)_c$ » » D_I » »,

melylyel tételünk utolsó része is be van bizonyítva.

Könnyen belátható továbbá, hogy míg az $(ABCD)$ tetraederek collineatio-síkjai ugyanazon indexxel ellátott $EFGHJK$ pontokon mennek át, addig az $(LMNO)$ tetraederek collineatio-síkjai a különböző indexxel ellátott E, vagy F.. K pontokat tartalmazzák. Az egész alakzat azon szabályszerűséget mutatja, melyet már a fennebbieknél láttunk.

Ez alakzatban ugyanis a kitüntetett pontok száma 70, melyeknek mindegyikén 6 sík és 4 egyenes megy át; a síkok száma 28, minden síkban 6 egyenes és 15 pont fekszik; az egyenesek száma 56, minden egyenesen 3 sík megy át és 5 pont van elhelyezve, végre minden síkban 1 ponton át csak 2 egyenes van átfektetve.

Az S és ellenpontja T, ez idomban sem bir különös helyzettel, mert a 70 pont közűl bármelyik tekinthető vetületi központnak, más, általa már meghatározott 16 pont, négy perspectiv helyzetü tetraeder szögpontja, a további pontok a tetraederek hat collineatio-síkjában fekszenek, mely síkok a 70 pont egyikén mennek át.

Ha A_l vétetik vetületi központnak, akkor a négy tetraeder szögpontjai:

$$\begin{array}{llll} S & B_l & C_l & D_l \\ A_m & G_{ml} & F_{ml} & H_{ml} \\ A_n & G_{nl} & F_{nl} & H_{nl} \\ A_o & G_{ol} & F_{ol} & H_{ol}, \end{array}$$

az első és második, első és harmadik, első és negyedik, második és harmadik, második és negyedik, végre harmadik és negyedik tetraeder éleinek metszőpontjai rendre:

$$\begin{array}{llllll} B_m & C_m & D_m & E_{lm} & I_{lm} & K_{lm} \\ B_n & C_n & D_n & E_{ln} & I_{ln} & K_{ln} \\ B_o & C_o & D_o & E_{lo} & I_{lo} & K_{lo} \\ G_{mn} & F_{mn} & H_{mn} & O_d & O_c & O_b \\ G_{mo} & F_{mo} & H_{mo} & N_d & N_c & N_b \\ G_{no} & F_{no} & H_{no} & M_d & M_c & M_b \end{array}$$

pontok; de a három első sor pontjain átmenő $(BCD)_m$, $(BCD)_n$, $(BCD)_o$ síkok közös pontja L_a, azért A_l ellenpontja L_a lesz.

Ha L_a vétetik vetületi központnak, akkor a négy tetraeder szögpontjai:

$$\begin{array}{llll} E_{mn} & E_{no} & E_{om} & L_d \\ I_{mn} & I_{no} & I_{om} & L_c \\ K_{mn} & K_{no} & K_{om} & L_b \\ O_a & M_a & N_a & T \end{array}$$

és az előbbi rendben vett tetraederek éleinek metszőpontjai

$$\begin{array}{llllll} B_m & B_n & B_o & G_{mn} & G_{no} & G_{om} \\ C_m & C_n & C_o & F_{mn} & F_{no} & F_{om} \\ E_{ml} & E_{nl} & E_{ol} & O_d & M_d & N_d \\ D_m & D_n & D_o & H_{mn} & H_{no} & H_{om} \\ I_{ml} & I_{nl} & I_{ol} & O_c & M_c & N_c \\ K_{ml} & K_{nl} & K_{ol} & O_b & M_b & N_b \end{array}$$

pontok, de $(OMN)_d$, $(OMN)_c$, $(OMN)_b$ síkok közös pontja A_l, azért, mint előre látható volt L_a ellenpontja A_l és a szabály

ABCD vagy *LMNO* pontok ellenpontjainak képzésére könynyen leolvasható.

Az E_{lm} vetületi központhoz tartozó tetraederek szögpontjai

$$\begin{matrix} B_l & B_m & G_{ml} & I_{ml} \\ C_l & C_m & F_{ml} & K_{ml} \\ E_{nl} & E_{mn} & O_d & O_a \\ E_{ol} & E_{mo} & N_d & N_a \end{matrix}$$

és az előbbi rendben vett tetraederek éleinek metszőpontjai

$$\begin{matrix} S & A_l & A_m & D_l & D_m & H_{lm} \\ B_n & G_{nl} & G_{mn} & I_{nl} & I_{mn} & O_c \\ B_o & G_{ol} & G_{om} & I_{ol} & I_{om} & N_c \\ C_n & F_{nl} & F_{mn} & K_{nl} & K_{mn} & O_b \\ C_o & F_{ol} & F_{om} & K_{ol} & K_{om} & N_b \\ E_{no} & M_d & L_d & M_a & L_a & T \end{matrix}$$

mely pontokon átmenő síkok egymást H_{on}-ben metszik; ennek ellenpontja E_{lm}. Az első és utolsó sík ugyanis az *AD* ill. *ML* élek vetitősíkja, mely síkok H_{on}-et tartalmazzák; a második síkban G_{on} I_{on} benn foglaltatik, mivel az G_{nl} G_{mn} I_{nl} I_{mn} pontokon átmegy; H_{on} pont pedig G_{on} I_{on} egyenesen fekszik, azért a második és hasonlókép a többi három sík átmegy H_{on} ponton.

Az E_{lm} pont ellenpontját megtaláljuk, ha *EFGHIK* teljes négy oldalban az *E*-nek átellenes pontját *H*-t, az *lmno* complexióból vett és *E* indexében elő nem forduló indexekkel látjuk el. Így könnyen felirható, hogy G_{lo}-nak ellenpontja K_{mn}, mivel a teljes négy oldalban *G*-nek átellenes pontja *K*.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.

II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.

III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.

IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr.

VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.

VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan trigonometriája . . . . 20 kr

VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.

IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.

II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.

III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.

IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.

V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.

VI. Dr. Gruber Lajos. 24 η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.

VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.

VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.

IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.

X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.

II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.

III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.

IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.

V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.

VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.

VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.

VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

Budapest, 1882. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.