ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
IX. KÖTET. X. SZÁM. 1882.

NÉHÁNY DETERMINÁNS-EGYENLETRŐL.

HUNYADY JENŐ
L. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1882. április 17.)

Ára 10 kr.

BUDAPEST, 1882.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

Eddig külön megjelent
ÉRTEKEZÉSEK
a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvények alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselv. volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgés. forrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erőmütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

ÉRTEKEZÉSEK
A MATH. TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.

Néhány determináns-egyenletről.

Hunyady Jenő, lev. tagtól.

(Előadta a III. osztály ülésén 1882. április 17-én.)

Cayley Arthúr, akadémiánk mathem. és természettudományi osztályának külföldi levelező tagja, a Borchardt-féle »Mathematikai Journál« 83-dik kötetében [1]) és a »Quarterly Journal of pure and applied mathematics« 15-dik kötetében [2]) tizenöt identikus determináns-egyenletet vezetett le, első értekezésében az (abc) sat. symbolumok alatt a következő determinánst értvén:

$$(abc) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{stb.},$$

holott második értekezésében az (1 2 3) sat. symbolumok alatt a következő determinánsok értendők:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} \quad \text{sat.}$$

A jelen sorok legközelebbi feladata a Cayley-féle determináns-egyenletek levezetése, mely levezetés folytán egy részt két háromszög perspectiv helyzetének föltételét tizenegy egy-

[1]) Further investigations on the double ϑ-functions. 230. és 231. ll.

[2]) Note on a theorem in determinants. 55—57. ll.

mástól különböző alakban és ezen alakoknak egymásközötti összefüggését nyerjük, más részt pedig az egyenes hat pontjára nézve az involutió föltételét hét, alakilag egymástól különböző egyenletben és ez utóbbiaknak egymás közötti összefüggését nyerjük, a mint ez utóbbi egyenleteket Hesse más alkalomból (Borchardt mathem. Journáljának 63-dik kötetében 179—185. ll.) más úton vezette le. Továbbá még a determinláns-egyenleteknek egy másik czyklusát vezetjük le, mely geometriailag a kúpszeleteknek analytikai elméletében értékesíttetik. Végre több Hessetől nyert eredményt vezetünk le.

1. A következő soroknak:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}$$

bármely három sorából képezett determinánst, mint például:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \text{ stb.}$$

determinánsokat röviden (abc), $(aa'x)$-sel stb. jelöljük.

2. Vizsgálataink kiindulópontját a következő determináns:

$$D = \begin{vmatrix} a_2a'_3 - a_3a'_2 & a_3a'_1 - a_1a'_3 & a_1a'_2 - a_2a'_1 \\ b_2b'_3 - b_3b'_2 & b_3b'_1 - b_1b'_3 & b_1b'_2 - b_2b'_1 \\ c_2c'_3 - c_3c'_2 & c_3c'_1 - c_1c'_3 & c_1c'_2 - c_2c'_1 \end{vmatrix} \quad . . (1)$$

képezi. Ha ugyanis ezen determinánst a következővel sokszorozzuk:

$$(aa'x) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \quad . . . . (I)$$

a sokszorozás eredménye a következő lesz:

$$D(aa'x) = \begin{vmatrix} o & o & (aa'x) \\ (abb') & (a'bb') & (bb'x) \\ (acc') & (a'cc') & (cc'x) \end{vmatrix}$$

$$= (aa'x) \begin{vmatrix} (abb') & (a'bb') \\ (acc') & (a'cc') \end{vmatrix}$$

vagy az egyenlő tényezők elhagyása után:

$$D = \begin{vmatrix} (abb') & (a'bb') \\ (acc') & (a'cc') \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ha továbbá az (1) alatti egyenletet még egymásután a következő determinánsokkal sokszorozzuk:

$$(bb'x) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

$$(cc'x) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

akkor a sokszorozások eredményei a következők lesznek:

$$D(bb'x) = \begin{vmatrix} (baa') & (b'aa') & (aa'x) \\ o & o & (bb'x) \\ (bcc') & (b'cc') & (cc'x) \end{vmatrix}$$

$$= (bb'x) \begin{vmatrix} (bcc') & (b'cc') \\ (baa') & (b'aa') \end{vmatrix}$$

$$D(cc'x) = \begin{vmatrix} (caa') & (c'aa') & (aa'x) \\ (cbb') & (c'bb') & (bb'x) \\ o & o & (cc'x) \end{vmatrix}$$

$$= (cc'x) \begin{vmatrix} (caa') & (c'aa') \\ (cbb') & (c'bb') \end{vmatrix}$$

vagy az egyenlő tényezők elhagyása után

$$D=\begin{vmatrix}(bcc') & (b'cc')\\ (baa') & (b'aa')\end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$D=\begin{vmatrix}(caa') & (c'aa')\\ (cbb') & (c'bb')\end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

3. A (2), (3) és (4) alatti egyenletek a következő azonos kettős egyenletre vezetnek:

$$\begin{aligned}&(abb')\,(a'cc')-(acc')\,(a'bb')=\\ &=(bcc')\,(b'aa')-(baa')\,(b'cc')=\\ &=(caa')\,(c'bb')-(cbb')\,(c'aa') \quad \ldots\ldots \quad (5)\end{aligned}$$

Ha pedig ezen egyenletben a, b, c-t változatlanul hagyjuk, holott a', b', c'-t cyclicusan fölcseréljük, akkor még a következő egyenleteink vannak:

$$\begin{aligned}&(abc')\,(b'ca')-(b'bc')\,(aca')=\\ &=(bca')\,(c'ab')-(bab')\,(c'ca')=\\ &=(cab')\,(a'bc')-(cbc')\,(a'ab') \quad \ldots\ldots \quad (6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(aba')\,(c'cb')-(c'ba')\,(acb')=\\ &=(bcb')\,(a'ac')-(a'cb')\,(bac')=\\ &=(cac')\,(b'ba')-(b'ac')\,(cba') \quad \ldots\ldots \quad (7)\end{aligned}$$

Ha továbbá még az (5) alatti egyenletben egymásután b'-t c-vel, c'-t a-val és a'-t b-vel felcseréljük, akkor még a következő egyenleteket nyerjük:

$$\begin{aligned}&(abc)\,(a'b'c')-(ab'c')\,(a'bc)=\\ &=(bb'c')\,(caa')-(baa')\,(cb'c')=\\ &=(b'aa')\,(c'bc)-(b'bc)\,(c'aa') \quad \ldots\ldots \quad (8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(c'bb')\,(a'ca)-(c'ca)\,(a'bb')=\\ &=(bca)\,(b'c'a')-(bc'a')\,(b'ca)=\\ &=(cc'a')\,(abb')-(cbb')\,(ac'a') \quad \ldots\ldots \quad (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(aa'b')\,(bcc')-(acc')\,(ba'b')=\\ &=(a'cc')\,(b'ab)-(a'ab)\,(b'cc')=\\ &=(cab)\,(c'a'b')-(ca'b')\,(c'ab) \quad \ldots\ldots \quad (10)\end{aligned}$$

Ha végre az (5)—(10) alatti egyenletekben a következő jelöléseket vezetjük be:

$$\begin{aligned}(abc)(a'b'c') &= A\\ (aba')(cb'c') &= B\\ (abb')(ca'c') &= C\\ (abc')(ca'b') &= D\\ (aca')(bb'c') &= E\\ (acb')(ba'c') &= F\\ (acc')(ba'b') &= G\\ (aa'b')(bcc') &= H\\ (aa'c')(bcb') &= I\\ (ab'c')(bca') &= J\end{aligned}$$

akkor ezek a következő egyenletekbe mennek át:

$$\left.\begin{aligned}G-C= H-B= I-E\\ D+E= J+C= F-H\\ B-F=-I-D=-G-J\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}A-J=-E+B=H-I\\ -E-G=A-F=-C-I\\ H-G=-C+B=A-D\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (12)$$

melyek a Cayley-től adott tizenöt egyenletet magukban foglalják, csak még megjegyzendő, hogy a (12) alatti rendszer azon egyenletei, melyek A-t nem foglalják magukban, a (11) alatti rendszer három első egyenletének ismétlései.

4. Megint az (1) alatti egyenletből kiindúlva, azt egymásután a következő determinánsokkal:

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (IV)$$

$$(a'bc) = \begin{vmatrix} a_1' & a'_2 & a'_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (V)$$

$$(ab'c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1' & b_2' & b_3'\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (VI)$$

$$(abc') = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(VII)}$$

$$(a'b'c') = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(VIII)}$$

$$(ab'c') = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b'_1 & b'_2 & b_3' \\ c'_1 & c'_2 & c_3' \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(IX)}$$

$$(a'bc') = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1' & c_2' & c'_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(X)}$$

$$(a'b'c) = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(XI)}$$

sokszorozzuk; a sokszorozás eredményei a következők lesznek:

$$D(abc) = \begin{vmatrix} o & (baa') & (caa') \\ (abb') & o & (cbb') \\ (acc') & (bcc') & o \end{vmatrix}$$

$$= (abb')\,(bcc')\,(caa') + (acc')\,(baa')\,(cbb') \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$D(a'bc) = \begin{vmatrix} o & (baa') & (caa') \\ (a'bb') & o & (cbb') \\ (a'cc') & (bcc') & o \end{vmatrix}$$

$$= (a'bb')\,(bcc')\,(caa') + (a'cc')\,(baa')\,(cbb') \quad \ldots \quad (14)$$

$$D(ab'c) = \begin{vmatrix} o & (b'aa') & (caa') \\ (abb') & o & (cbb') \\ (acc') & (b'cc') & o \end{vmatrix}$$

$$= (abb')\,(b'cc')\,(caa') + (acc')\,(b'aa')\,(cbb') \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$$D(abc') = \begin{vmatrix} o & (baa') & (c'aa') \\ (abb') & o & (c'bb') \\ (acc') & (bcc') & o \end{vmatrix}$$

$$= (abb')\,(bcc')\,(c'aa') + (acc')\,(baa')\,(c'bb') \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$D\,(a'b'c') = \begin{vmatrix} o & (b'aa') & (c'aa') \\ (a'bb') & o & (c'bb') \\ (a'cc') & (b'cc') & o \end{vmatrix}$$

$$= (a'bb')\,(b'cc')\,(c'aa') + (a'cc')\,(b'aa')\,(c'bb') \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$D\,(ab'c') = \begin{vmatrix} o & (b'aa') & (c'aa') \\ (abb') & o & (c'bb') \\ (acc') & (b'cc') & o \end{vmatrix}$$

$$= (abb')\,(b'cc')\,(c'aa') + (acc')\,(b'aa')\,(c'bb') \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$$D\,(a'bc') = \begin{vmatrix} o & (baa') & (c'aa') \\ (a'bb') & o & (c'bb') \\ (a'cc') & (bcc') & o \end{vmatrix}$$

$$= (a'bb')\,(bcc')\,(c'aa') + (a'cc')\,(baa')\,(c'bb') \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$D\,(a'b'c) = \begin{vmatrix} o & (b'aa') & (caa') \\ (a'bb') & o & (cbb') \\ (a'cc') & (b'cc') & o \end{vmatrix}$$

$$= (a'bb')\,(b'cc')\,(caa') + (a'cc')\,(b'aa')\,(cbb') \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

5. Ha az (1) alatti egyenletben a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; sat. az a, b sat. pontoknak homogén viszonykoordinátáit fejezik ki, akkor a D determináns eltűnése mértanilag az abc és $a'b'c'$ háromszögek perspectiv helyzetét fejezi ki; de a (2) — (4), valamint a (13) — (20) alatti egyenletekben D-t tizenegy, egymástól formailag különböző alakban állítottuk elő, a miért az abc és $a'b'c'$ háromszögök perspectiv helyzetét kifejező egyenletet szintén tizenegy, egymástól formailag különböző egyenletben állíthatjuk elő; az említett egyenletek a következők:

$$\left.\begin{array}{l}(abb')\,(a'cc')-(acc')\,(a'bb')=o\\(bcc')\,(b'aa')-(baa')\,(b'cc')=o\\(caa')\,(c'bb')-(cbb')\,(c'aa')=o\end{array}\right\}\quad\ldots\quad(21)$$

$$\left.\begin{array}{l}(abb')\,(bcc')\,(caa')+(acc')\,(baa')\,(cbb')=o\\(a'bb')\,(bcc')\,(caa')+(a'cc')\,(baa')\,(cbb')=o\\(abb')\,(b'cc')\,(caa')+(acc')\,(b'aa')\,(cbb')=o\\(abb')\,(bcc')\,(c'aa')+(acc')\,(baa')\,(c'bb')=o\\(a'bb')\,(b'cc')\,(c'aa')+(a'cc')\,(b'aa')\,(c'bb')=o\\(abb')\,(b'cc')\,(c'aa')+(acc')\,(b'aa')\,(c'bb')=o\\(a'bb')\,(bcc')\,(c'aa')+(a'cc')\,(baa')\,(c'bb')=o\\(a'bb')\,(b'cc')\,(caa')+(a'cc')\,(b'aa')\,(cbb')=o\end{array}\right\}\ldots\,(22)$$

Az ezen egyenletek között fennálló összefüggést a (2)—(4) és (13)—(20) alatti egyenletek fejezik ki.

6. Nem kerülte ki figyelmünket, hogy a már többször idézett (2)—(4) és (13)—(20) alatti egyenletek azon összefüggéseket is magukban foglalják, mely az egyenes hat pontja közötti involutió feltételének hét különböző alakja között fennáll.

Ha ugyanis az (1) alatti egyenletben az a_1, a_2, a_3, mennyiségeket a^0, a^1, a^2, által, a a'_1, a'_2, a'_3 mennyiségeket a'^0, a'^1, a'^2 által stb. pótoljuk, a hol a o, 1, 2 alatt exponenseket azaz kitevőket értünk, akkor az (1) alatti egyenlet a következőbe megy át:

$$D=\begin{vmatrix}aa'^2-a'a^2 & a^2-a'^2 & a'-a\\ bb'^2-b'b^2 & b^2-b'^2 & b'-b\\ cc'^2-c'c^2 & c^2-c'^2 & c'-c\end{vmatrix}$$

$$=(a-a')\,(b-b')\,(c-c')\begin{vmatrix}-aa' & a+a' & -1\\ -bb' & b+b' & -1\\ -cc' & c+c' & -1\end{vmatrix}$$

$$=(a-a')\,(b-b')\,(c-c')\begin{vmatrix}1 & -(a+a') & aa'\\ 1 & -(b+b') & bb'\\ 1 & -(c+c') & cc'\end{vmatrix}$$

és ha ezen egyenletben az $(a-a')$ sat. különbséget aa'. sat. az

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a+a') & aa' \\ 1 & -(b+b') & bb' \\ 1 & -(c+c') & cc' \end{vmatrix}$$

determinánst pedig Δ-val jelöljük, akkor a fentebbi egyenletet még így irhatjuk:

$$D = aa'.\, bb'.\, cc'\, \Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

7. Az (abc), $(aa'b)$ sat. symbolumok alatt a fentebb körülirt helyettesítéseknél fogva most a következő determinánsokat értjük:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ =(a-b)\,(b-c)\,(c-a) \\ = ab.\, bc.\, ca. \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a' & a'^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ =(a-a')\,(a'-b)\,(b-a) \\ = aa'.\, a'b.\, ba. \end{matrix}$$

A (2), (3) és (4) alatti egyenletek, melyek a következők:

$$D = (abb')\,(a'cc') - (acc')\,(a'bb')$$
$$D = (bcc')\,(b'aa') - (baa')\,(b'cc')$$
$$D = (caa')\,(c'bb') - (cbb')\,(c'aa')$$

a bennök előforduló (abb') sat. determinánsoknak $ab.\, bb'.\, b'a.$ sat. kifejtése által a következő egyenletekre vezetnek:

$$D = bb'.\, cc'.\, \{ab.\, ab'.\, a'c.\, a'c'. - ac.\, ac'.\, a'b.\, a'b'.\} \quad . \quad . \quad (24)$$

$$D = cc'.\, aa'.\, \{bc.\, bc'.\, b'a.\, b'a'. - ba.\, ba'.\, b'c.\, b'c'.\} \quad . \quad . \quad (25)$$

$$D = aa'.\, bb'.\, \{ca.\, ca'.\, c'b.\, c'b'. - cb.\, cb'.\, c'a.\, c'a'.\} \quad . \quad . \quad (26)$$

A (13)—(16) alatti egyenleteknél fogva áll, hogy még továbbá:

$$D = \frac{1}{(abc)} \{(abb')\,(bcc')\,(caa') + (acc')\,(baa')\,(cbb')\}$$

$$D=\frac{1}{(a'bc)}\{(a'bb')\,(bcc')\,(caa')+(a'cc')\,(baa')\,(cbb')\}$$

$$D=\frac{1}{(ab'c)}\{(abb')\,(b'cc')\,(caa')+(acc')\,(b'aa')\,(cbb')\}$$

$$D=\frac{1}{(abc')}\{(abb')\,(bcc')\,(c'aa')+(acc')\,(baa')\,(c'bb')\}$$

Ha pedig ezen egyenletekben az (abc) sat. determinánsokat kifejtjük, akkor találjuk, hogy:

$$D=-aa'.\,bb'.\,cc'.\,(ab'.\,bc'.\,ca'.+a'b.\,b'c.\,c'a.) \quad . \quad . \quad (27)$$

$$D=-aa'.\,bb'.\,cc'.\,(ab.\,b'c.\,c'a'.+a'b'.\,bc'.\,ca.) \quad . \quad . \quad (28)$$

$$D=-aa'.\,bb'.\,cc'.\,(ab.\,b'c'.\,ca'.+a'b'.\,bc.\,c'a.) \quad . \quad . \quad (29)$$

$$D=-aa'.\,bb'.\,cc'.\,(ab'.\,bc.\,c'a'.+a'b.\,b'c'.\,ca.) \quad . \quad . \quad (30)$$

Meg kell említenünk, hogy ha a (17)—(20) alatti egyenletekkel hasonlóan járunk el, hogy akkor megint ezen egyenletekre jövünk. A (23)—(30) alatti egyenletek összehasonlításából, ha $aa'.bb'.cc'.$ tényezővel osztunk, találjuk hogy

$$\triangle=\frac{1}{aa'.}\{ab.\,ab'.\,a'c.\,a'c'.-a'b.\,a'b'.\,ac.\,ac'.\}$$

$$=\frac{1}{bb'.}\{bc.\,bc'.\,b'a.\,b'a'.-b'c.\,b'c'.\,ba.\,ba'.\}$$

$$=\frac{1}{cc'.}\{ca.\,ca'.\,c'a.\,c'a'.-c'a.\,c'a'.\,cb.\,cb'.\}$$

$$=\;-\;\{ab'.\,bc'.\,ca'.+a'b.\,b'c.\,c'a.\}$$

$$=\;-\;\{ab.\,b'c.\,c'a'.+a'b'.\,bc'.\,ca.\}$$

$$=\;-\;\{ab.\,b'c'.\,ca'.+a'b'.\,bc.\,ca'.\}$$

$$=\;-\;\{ab'.\,bc.\,c'a'.+a'b.\,b'c'.\,ca.\}$$

Ha ezen egyenletekben $a,\ a'\,;\ b,\ b'\,;\ c,\ c'$ alatt egy egyenes hat pontjának távolságát egy abban fölvett állandó ponttól értjük, akkor $\triangle$-nak eltünése kifejezi, hogy a kérdéses hat pont involutióban van s így a (31) alatti egyenleteknél fogva hat pont involutió föltételét a következő egyenletek fejezik ki: [1])

$$\left.\begin{array}{l} ab.\ a'b'.\ a'c.\ a'c'-a'b.\ a'b'.\ ac.\ ac'=o \\ bc.\ bc'.\ b'a.\ b'a'-b'c.\ b'c'.\ ba.\ ba'=o \\ ca.\ ca'.\ c'b.\ c'b'-c'a.\ c'a'.\ cb.\ cb'=o \\ \quad ab'.bc'.ca'+a'b.b'c.c'a=o \\ \quad ab.b'c.c'a'+a'b'.bc'.ca=o \\ \quad ab.b'c'.ca'+a'b.bc.ca'=o \\ \quad ab'.bc.c'a'+a'b.b'c'.ca=o \end{array}\right\} \ldots\ldots (32)$$

8. A (13)—(20) alatti egyenletekből a determináns egyenleteknek egy új cyclusát vezetjük le, ha nevezetesen a (13), (14), (15) és (16) alatti egyenleteket, egymásután a (17), (18), (19) és (20) alatti egyenletekkel össszehasonlítjuk, mi által a következő egyenleteket nyerjük:

$$\frac{1}{(abc)}\{(abb')(bcc')(caa')+(acc')(baa')(cbb')\}=$$
$$=\frac{1}{(a'b'c')}\{(a'bb')(b'cc')(c'aa')+(a'cc')(b'aa')(c'bb')\}\ldots(33)$$

$$\frac{1}{(a'bc)}\{(a'bb')(bcc')(caa')+(a'cc')(baa')(cbb')\}=$$
$$=\frac{1}{(ab'c')}\{(abb')(b'cc')(c'aa')+(acc')(b'aa')(c'bb')\}\ldots(34)$$

$$\frac{1}{(ab'c)}\{(abb')(b'cc')(caa')+(acc')(b'aa')(caa')\}=$$
$$=\frac{1}{(a'bc')}\{(a'bb')(bcc')(c'aa)+(a'cc')(baa')(c'aa')\}\ldots(35)$$

$$\frac{1}{(abc')}\{(abb')(bcc')(c'aa')+(acc')(baa')(c'bb')\}=$$
$$=\frac{1}{(a'b'c)}\{(a'bb')(b'cc')(caa')+(a'cc')(b'aa')(cbb')\}\ldots(36)$$

---

[1]) Lásd Hesse már előbb idézett »Zur Involution« czímű értekezésén kivűl még »Analytische Geometrie des Raumes« czímű munkájának harmadik kiadásában 107—109. lapokon a (27), (28), (33) és (34) alatti egyenleteket.

melyek még így is irhatók:

$$(aba')(acc')(bcb')(a'b'c')-(abc)(aa'c')(ba'b')(cb'c')=$$
$$=(abb')(aca')(bcc')(a'b'c')-(abc)(aa'b')(bb'c')(ca'c').\;(37)$$

$$(abb')(aa'c')(bca')(cb'c')-(aba')(ab'c')(bcb')(ca'c')=$$
$$=(acc')(aa'b')(bca')(bb'c')-(aca')(ab'c')(bcc')(ba'b').\;(38)$$

$$(acc')(aa'b')(bcb')(ba'c')-(acb')(aa'c')(bcc')(ba'b')=$$
$$=(abb')(aca')(ba'c')(cb'c')-(aba')(acb')(bb'c')(ca'c').\;(39)$$

$$(abc')(aca')(ba'b')(cb'c')-(aba')(acc')(bb'c')(ca'b')=$$
$$=(abc')(aa'b')(bcb')(ca'c')-(abb')(aa'c')(bcc')(ca'b').\;(40)$$

9). Ha a (37)—(40) alatti egyenletekben a, b, c, a', b', c'-t 1, 2, 3, 4, 5, 6-tal pótoljuk, akkor (123) sat. alatt a következő determinánst értjük:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

a fönttebbi egyenletek pedig a következőkbe mennek át:

$$(124)(136)(235)(456)-(123)(146)(245)(356)=$$
$$=(125)(134)(236)(456)-(123)(145)(256)(346)\ldots.(41)$$

$$(125)(146)(234)(356)-(124)(156)(235)(346)=$$
$$=(136)(145)(234)(256)-(134)(156)(236)(245)\ldots.(42)$$

$$(136)(145)(235)(246)-(135)(146)(236)(245)=$$
$$=(125)(134)(246)(356)-(124)(135)(256)(346)\ldots.(43)$$

$$(126)(134)(245)(356)-(124)(136)(256)(345)=$$
$$=(126)(145)(235)(346)-(125)(146)(236)(345)\ldots.(44)$$

Ha továbbá a (43) alatti egyenletekben 3, 5, 4, 6-nak cyclikus felcseréléseit képezzük, akkor a következő három egyenletet nyerjük:

$$-(135)(146)(236)(245)+(136)(145)(235)(246)=$$
$$=-(124)(156)(236)(345)+(126)(145)(234)(356)\ldots(45)$$

$$(136)(145)(235)(246)-(135)(146)(236)(245)=$$
$$=(126)(134)(235)(456)-(123)(146)(256)(345)\ldots(46)$$

$$-(135)(146)(236)(245)+(136)(145)(235)(246)=$$
$$=-(123)(156)(245)(346)+(125)(136)(234)(456)\ldots(47)$$

Ha azután a (43) és a (45)—(47) alatti egyenletekben 3-at 6-tal, 4-et pedig 5-tel felcseréljük, akkor még a következő négy egyenletet nyerjük:

$$(136)(145)(235)(246)-(135)(146)(236)(245)=$$
$$=-(124)(156)(235)(346)+(125)(146)(234)(356)\ldots(48)$$

$$-(135)(146)(236)(245)+(136)(145)(235)(246)=$$
$$=(125)(134)(236)(456)-(123)(145)(256)(346)\ldots(49)$$

$$(136)(145)(235)(246)-(135)(146)(236)(245)=$$
$$=-(123)(156)(246)(345)+(126)(135)(234)(456)\ldots(50)$$

$$-(135)(146)(236)(245)+(136)(145)(235)(246)=$$
$$=(126)(134)(245)(356)-(124)(136)(256)(345)\ldots(51)$$

Ha végre az (50) alatti egyenletben egymásután 4-et 5-tel, 4-et 6-tal és 2-t 6-tal felcseréljük, akkor még a következő három egyenletre jövünk:

$$(136)(145)(234)(256)-(134)(156)(236)(245)=$$
$$=(126)(134)(235)(456)-(123)(146)(256)(345)\ldots\ldots(52)$$

$$-(134)(156)(236)(245)+(136)(145)(234)(256)=$$
$$=(124)(135)(236)(456)-(123)(145)(246)(356)\ldots\ldots(53)$$

$$-(123)(145)(246)(356)+(124)(135)(236)(456)=$$
$$=(126)(135)(245)(346)-(125)(136)(246)(345)\ldots\ldots(54)$$

A (41)—(54) alatti egyenleteket a következőképen állíthatjuk össze:

$$(136)(145)(235)(246)-(135)(146)(236)(245)=$$
$$=(126)(135)(234)(456)-(123)(156)(246)(345)=$$

$$
\begin{aligned}
&=(125)(134)(246)(356)-(124)(135)(256)(346)= \\
&=(125)(136)(234)(456)-(123)(156)(245)(346)= \\
&=(126)(134)(245)(356)-(124)(136)(256)(345)= \\
&=(126)(145)(234)(356)-(124)(156)(236)(345)= \\
&=(125)(134)(236)(456)-(123)(145)(256)(346)= \\
&=(125)(146)(234)(356)-(124)(156)(235)(346)= \\
&=(126)(134)(235)(456)-(123)(146)(256)(345)= \\
&=(126)(145)(235)(346)-(125)(146)(236)(345)= \\
&=(124)(136)(235)(456)-(123)(146)(245)(346)= \\
&=(136)(145)(234)(256)-(134)(156)(236)(245)= \\
&=(135)(146)(234)(256)-(134)(156)(235)(246)= \\
&=(126)(135)(245)(346)-(125)(136)(246)(345)= \\
&=(124)(135)(236)(456)-(123)(145)(246)(356)= \dots \quad (55)
\end{aligned}
$$

10. Ha az x_i, y_i, z_i mennyiségeket, mint az i pont homogén koordinátáit fogjuk fel, akkor:

$$(136)(145)(235)(246)-(135)(146)(236)(245)=o,^{1)} \dots (56)$$

egyenlet fejezi ki, hogy az 1, ... 6 pontok ugyanazon kúpszelet kerületén feküsznek, és így az (55) alatti egyenletekből következik, hogy a (46) alatti egyenlet még tizennégy egyenletet von maga után (az *i. h.* a (14) alatti egyenlet az (1)—(13) és (15) alattiakat vonja maga után).

Az (55) alatti egyenletek mutatják, hogy az *i. h.* a (1)—(15) alatti egyenleteknek egyikéből, miként következik a többi tizennégy.

11. Ha továbbá az (1)—(4) és (13)—(16) alatti egyenletekben az a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; sat. mennyiségek alatt hat ugyanazon kúpszeleten fekvő pontnak a koordinátáit értjük, akkor, mivel a kúpszelet tetszőleges pontjának x_1, x_2, x_3 koordinátái, mint egy változó x paraméter másodfokú függvényei kifejezhetők, az említett hat pont paraméter-értékeit a, b, c, a', b', c'-vel jelölvén az a_1, a_2, a_3, sat. mennyiségeket a következőképen fejezhetjük ki:

---

[1]) Lásd a szerző következő czímű értekezését: »A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól« 8. l. (14) alatti egyenletét. [Ért. a math. tud. köréből IV. köt.]

$$a_1=A_1+B_1a+C_1a^2 \qquad a'_1=A_1+B_1a'+C_1a'^2$$
$$a_2=A_2+B_2a+C_2a^2 \qquad a'_2=A_2+B_2a'+C_2a'^2$$
$$a_3=A_3+B_3a+C_3a^2 \qquad a'_3=A_3+B_3a'+C_3a'^2$$

$$b_1=A_1+B_1b+C_1b^2 \qquad b'_1=A_1+B_1b'+C_1b'^2$$
$$b_2=A_2+B_2b+C_2b^2 \qquad b'_2=A_2+B_2b'+C_2b'^2$$
$$b_3=A_3+B_3b+C_3b^2 \qquad b'_3=A_3+B_3b'+C_3b'^2$$

$$c_1=A_1+B_1c+C_1c^2 \qquad c'_1=A_1+B_1c'+C_1c'^2$$
$$c_2=A_2+B_2c+C_2c^2 \qquad c'_2=A_2+B_2c'+C_2c'^2$$
$$c_3=A_3+B_3c+C_3c^2 \qquad c'_3=A_3+B_3c'+C_3c'^2$$

Ha ezen értékeit az a_1, a_2, a_3; sat. mennyiségeknek az (1) alatti egyenletbe helyettesítjük, akkor ha az

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = (ABC) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

determinánsban az A_i, B_i, C_i elemek együtthatóit α_i, β_i, γ_i,-val jelöljük, találjuk, hogy:

$$a_2a'_3-a_3a'_2=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a'_2 & a'_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_2+B_2a+C_2a^2 & A_3+B_3a+C_3a^2 \\ A_2+B_2a'+C_2a'^2 & A_3+B_3a'+C_3a'^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a' & a'^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} C_2 & A_2 \\ C_3 & A_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ a'^2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a' \end{vmatrix}$$

$$=\alpha_1aa'(a'-a)+\beta_1(a^2-a'^2)+\gamma_1(a'-a)$$
$$=(a-a')\,\{-\alpha_1aa'+\beta_1(a+a')-\gamma_1\}$$

hasonlóképen találjuk, hogy:

$$a_3a'_1-a_1a'_3=(a-a')\,\{-\alpha_2aa'+\beta_2(a+a')-\gamma_2\}$$
$$a_1a'_2-a_2a'_1=(a-a')\,\{-\alpha_3aa'+\beta_3(a+a')-\gamma_3\}$$

valamint továbbá, hogy:

$$b_2b'_3-b_3b'_2=(b-b')\,\{-\alpha_1bb'+\beta_1(b+b')-\gamma_1\}$$
$$b_3b'_1-b_1b'_3=(b-b')\,\{-\alpha_2bb'+\beta_2(b+b')-\gamma_2\}$$
$$b_1b'_2-b_2b'_1=(b-b')\,\{-\alpha_3bb'+\beta_3(b+b')-\gamma_3\}$$

$$c_2c'_3-c_3c'_2=(c-c')\,\{-\alpha_1cc'+\beta_1(c+c')-\gamma_1\}$$
$$c_3c'_1-c_1c'_3=(c-c')\,\{-\alpha_2cc'+\beta_2(c+c')-\gamma_2\}$$
$$c_1c'_2-c_2c'_1=(c-c')\,\{-\alpha_3cc'+\beta_3(c+c')-\gamma_3\}$$

A D determináns értéke tehát a nevezett helyettesítések mellett a következő lesz:

$$D=aa'.bb'.cc'\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-a.a' & a+a' & -1\\ -b.b' & b+b' & -1\\ -c.c' & c+c' & -1\end{vmatrix},$$

ha megint aa'. alatt $a-a'$-t sat. értünk. Miután továbbá

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=(ABC)^2$$

akkor, ha még a 6. számban bevezetett jelölést használjuk, a fentebbi egyenlet a következőbe megy át:

$$D=aa'.bb'.cc'.\,(ABC)^2\Delta\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(58)$$

Szintén könnyen találjuk, hogy az ezen szám elején megemlített helyettesítések mellett a (2)—(4) alatti egyenletek a következőkbe mennek át:

$$D=bb'.cc'.(ABC)^2\,\{ab.ab'.a'c.a'c'.-ac.ac'.a'b.a'b'.\}\;.\;.\;(59)$$
$$D=cc'.aa'.(ABC)^2\,\{bc.bc'.b'a.b'a'.-ba.ba'.b'c.b'c'.\}\;.\;.\;(60)$$
$$D=aa'.bb'.(ABC)^2\,\{ca.ca'.c'b\,c'b'.-cb.cb'.c'a.c'a'.\}\;.\;.\;(61)$$

a (13)—(16) egyenletek pedig a következőkbe:

$$D=-\,aa'.bb'.cc'.(ABC)^2\,\{ab'.bc'.ca'.+a'b.b'c.c'a.\}\;.\;.\;.\;(62)$$
$$D=-\,aa'.bb'.cc'.(ABC)^2\,\{ab.b'c.c'a'.+a'b'.bc'.ca.\}\;.\;.\;.\;(63)$$
$$D=-\,aa'.bb'.cc'.(ABC)^2\,\{ab.b'c'.ca'.+a'b'.bc.c'a.\}\;.\;.\;.\;(64)$$
$$D=-\,aa'.bb'.cc'.(ABC)^2\,\{ab'.bc.c'a'.+a'b.b'c'.ca.\}\;.\;.\;.\;(65)$$

Az (58)—(65) alatti egyenletek összehasonlítása ismét a (32) alatti egyenletekre vezet.

A mostani felfogásban a (32) alatti egyenletek azt fejezik ki, hogy egy és ugyanazon kúpszelet hat pontja, mint a, b, c, a', b', c' két abc és $a'b'c'$ perspectiv háromszögnek a csúcsai.

Ha a (32) alatti egyenleteknek ezen interpretátióját a 7. számban adott interpretátióval összehasonlítjuk, akkor, ha a kúpszeletet és az egyenest egymással projectiv vonatkozásba hozzuk, a következő Hessetől [1]) eredő tételre vezettetünk: »Ha a kúpszelet a, b, c, a', b', c' pontjai az abc és $a'b'c'$ perspectiv háromszögök csúcsai, akkor ezen hat pontnak megfelelő hat pontja az egyenesen három involutióban álló pontpárt képez, és megfordítva.«

12. Hesse »Ein Übertragungsprincip« czímű értekezésében, mely a Bochardt-féle Journál 66-ik kötetében (15—21. ll.) jelent meg, a sík ∞^2 pontjait és az egyenes ∞^2 pontpárait olyképen vonatkoztatja egymásra, hogy a sík adott pontjának az egyenesben egy pontpár és megfordítva az egyenes adott pontpárának a síkban egy pont felel meg. Az említett vonatkozást a sík pontjai és az egyenes pontpárai között a következő egyenlet fejezi ki:

$$A\lambda^2+B\lambda+C=o,$$

mely egyenletben az A, B, C együtthatók a sík x, y, z pontjának vonalos függvényei.

Hat pontnak $(x_1, y_1, z_1; \ldots\ldots x_6, y_6, z_6)$, mely ugyanazon kúpszelet kerületén fekszik, az egyenesben hat pontpár felel meg, melyek egy bizonyos megszorításnak vannak alávetve. Az ilyen hat pontpárt Hesse másodrendű involutióban álló hat pontpárnak nevezi (az i. h. 19. l.). Ezen értekezést a másodrendű involutióban lévő hat pontpár feltételének felkeresésével fejezzük be.

Az $x_1, y_1, z_1; \ldots\ldots x_6, y_6, z_6$ pontoknak megfelelőleg az A, B, C mennyiségek értékeit $A_1, B_1, C_1; \ldots\ldots A_6, B_6, C_6$-tal jelöljük, e szerint tehát a kúpszelet hat pontjának az egyenesben a következő hat pontpár felel meg:

$$\left.\begin{array}{l} A_1\lambda^2+B_1\lambda+C_1=o \\ A_2\lambda^2+B_2\lambda+C_2=o \\ A_3\lambda^2+B_3\lambda+C_3=o \\ A_4\lambda^2+B_4\lambda+C_4=o \\ A_5\lambda^2+B_5\lambda+C_5=o \\ A_6\lambda^2+B_6\lambda+C_6=o \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (66)$$

[1]) Schlömilch Zeitschrift für Math. u. Physik 11. Jhrg. 408. ll.

feltéve, hogy ezen egyenletek gyökei rendre a, a'; b, b'; c, c'; d, d'; e, e'; f, f'; akkor ezen mennyiségek határozzák meg az egyenes hat pontpárát. A (66) alatti egyenletek együtthatói és azok gyökei között a következő egyenletek állanak:

$$\left.\begin{array}{ll} B_1=-A_1(a+a'), & C_1=A_1.a.a' \\ B_2=-A_2(b+b'), & C_2=A_2.b.b' \\ B_3=-A_3(c+c'), & C_3=A_3.c.c' \\ B_4=-A_4(d+d'), & C_4=A_4.d.d' \\ B_5=-A_5(e+e'), & C_5=A_5.e.e' \\ B_6=-A_6(f+f'), & C_6=A_6.f.f' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (67)$$

Ha már most ki akarjuk fejezni, hogy az 1, ... 6 pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek, akkor a következő egyenletünk van:

$$(123)(146)(256)(345)-(456)(235)(134)(126)=0 \text{ [1]} \ldots (68)$$

mely egyenletben (123) sat. alatt a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \text{ stb.,}$$

érthetjük, miután az A_i, B_i, C_i mennyiségeket az i pont koordinátáinak tekinthetjük.

Ha továbbá a (68) alatti egyenlet (123) sat. tényezőiben a B és C mennyiségek értékeit a (67) alatti egyenletekből helyettesítjük, akkor a közösen előforduló A tényezők elhagyása után a következő egyenletet nyerjük:

---

[1]) Lásd a szerző következő czimű értekezését »A kúpszeleten fekvő hat pont stb.« Akad. ért. a math. tud. köréből. IV. köt.

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a+a') & a.a' \\ 1 & -(b+b') & b.b' \\ 1 & -(c+c') & c.c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -(a+a') & a.a' \\ 1 & -(d+d') & d.d' \\ 1 & -(f+f') & f.f' \end{vmatrix} .$$

$$. \begin{vmatrix} 1 & -(b+b') & b.b' \\ 1 & -(e+e') & e.e' \\ 1 & -(f+f') & f.f' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -(c+c') & c.c' \\ 1 & -(d+d') & d.d' \\ 1 & -(e+e') & e.e' \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -(d+d') & d.d' \\ 1 & -(e+e') & e.e' \\ 1 & -(f+f') & f.f' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -(b+b') & b.b' \\ 1 & -(c+c') & c.c' \\ 1 & -(e+e') & e.e' \end{vmatrix} .$$

$$. \begin{vmatrix} 1 & -(a+a') & a.a' \\ 1 & -(c+c') & c.c' \\ 1 & -(d+d') & d.d' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -(a+a') & a.a' \\ 1 & -(b+b') & b.b' \\ 1 & -(f+f') & f.f' \end{vmatrix} = o \ldots (69)$$

mely egyenlet kifejezi, hogy az $a, a'; \ldots\ldots f, f'$ pontpárak másodrendü involutióban vannak; ezen egyenletnek végre még a (31) alatti egyenletek következtében a következő alakot adhatjuk:

$$\{ab'.bc'.ca'.+a'b.b'c.c'a.\} \{ad'.df'.fa'.+a'd.d'f.f'a.\} .$$

$$. \{be'.ef'.fb'.+b'e.e'f.f'b.\} \{cd'.de'.ec'.+c'd.d'e.e'c.\} -$$

$$- \{de'.ef'.fd'.+d'e.e'f.f'd\} \{bc'.ce'.eb'.+b'c.c'e.e'b.\} .$$

$$. \{ac'.cd'.da'.+a'c.c'd.d'a.\} \{ab'.bf'.fa'.+a'b.b'f.f'a.\} \ldots (70)$$

mely egyenlet világosan mutatja, hogy ha az $a, a'; b, b'; c, c'$ pontpárak elsőrendű involutióban vannak, hogy akkor a hátralevő $d, d'; e, e'; f, f'$ pontpárak szintén elsőrendű involutiót képeznek.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.

II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.

III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.

IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában 40 kr.

VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.

VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktan trigonometriája . . . . 20 kr.

VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.

IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.

II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.

III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.

IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.

V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.

VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.

VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr

VIII. Konkoly Miklós A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én é. az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.

IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.

X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876-ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.

II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.

III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.

IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.

V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.

VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.

VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.

VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.

II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.

III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr

IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.

VI. Hunyady Jenő. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében . . . . 10 kr.

VII. Konkoly Miklós. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón . . . . 10 kr.

VIII. Dr. Weinek László. Az instrumentális fényhajlás szerepe egy Vénus-átvonulás photographiai felvételénél . . . . . . 20 kr.

IX. Suppan Vilmos. Kúp- és hengerfelületek önálló ferde vetitésben. (Két táblával.) . . . . 10 kr.

X. Dr. Konek Sándor. Emlékbeszéd Weninger Vincze l. t. fölött. 10 kr.

XI. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1879-ben. . . . . 10 kr

XII. Konkoly Miklós. Hullócsillagok radiatio pontjai, levezetve a magyar korona területén tett megfigyelésekből 1871—1878 végéig 20 kr.

XIII. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1879-ben. (Egy tábla rajzzal.) . . . . 20 kr.

XIV. Konkoly Miklós. Adatok Jupiter és Mars physikájához. 1879. (Három tábla rajzzal.) . . . . 30 kr.

XV. Réthy Mór. A fény törése és visszaverése homogén isotrop átlátszó testek határán. Neumann módszerének általánositásával és bővitésével. (Székf. ért.) . . . . 10 kr.

XVI. Réthy Mór. A sarkitott fényrezgés elhajlitó rács által való forgatásának magyarázata, különös tekintettel Fröhlich észleteire. . . 10 kr.

XVII. Szily Kálmán. A telitett gőz nyomásának törvényéről. . 10 kr.

XVIII. Hunyady Jenő. Másodfoku görbék és felületek meghatározásáról. 20 kr

XIX. Hunyady Jenő. Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva. . . . 20 kr.

XX. Dr. Fröhlich Izor. Az állandó elektromos áramlások elméletéhez. 10 kr.

XXI. Hunyady Jenő. Tételek a componált determinánsoknak egy különös neméről. . . . . 10 kr.

XXII. Kőnig Gyula. A raczionális függvények általános elméletéhez. 10 kr.

XXIII. Silberstein Salamon. Vonalgeometriai tanulmányok . 20 kr.

XXIV. Hunyady János. A Steiner-féle kritériumról a kúpszeletek elméletében. . . . . 10 kr.

XXV. Hunyady Jenő. A pontokból vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok. 10 kr.

Budapest, 1882. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.