ANALIZIS.

BEVEZETÉS A MATHEMATIKA RENDSZERÉBE.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MEGBIZÁSÁBÓL

IRTA

KŐNIG GYULA.

ELSŐ KÖTET.

BUDAPEST.

KIADJA AZ EGGENBERGER-FÉLE KÖNYVKERESKEDÉS.

(HOFFMANN ÉS MOLNÁR.)

1887.

Ára 5 frt 60 kr.

A magyar tudományos akadémia támogatásával kiadásunkban megjelenik:

ANALIZIS.

BEVEZETÉS A MATHEMATIKA RENDSZERÉBE.

IRTA

Dr. Kőnig Gyula

MŰEGYETEMI NY. R. TANÁR, AKADÉMIAI L. TAG.

Az egészben 110—120 ívre (3 kötetben) tervezett, nagyszabású munka, mely szakirodalmunknak egy jelentékeny hézagát pótolja, az érdekelt közönség részéről annyival inkább várhat kedvező fogadtatást, minthogy a tárgy természete megengedte, hogy a szerző tekintetbe vegye úgy azon olvasók igényeit, kik csak az analizis fontosabb fejezeteit tanulmányozzák, mint azokét, kik a mathematikai módszerek és eredmények mai állásáról részletesebb és teljesebb áttekintést kivánnak szerezni.

A második kötet az integrálszámitást és a többváltozós függvények elméletét, a harmadik a differencziálegyenletek elméletét és a variácziószámitást fogja tárgyalni.

Budapest, 1887 február havában.

Eggenberger-féle könyvkereskedés
(Hoffmann és Molnár).

ANALIZIS.

BEVEZETÉS A MATHEMATIKA RENDSZERÉBE.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MEGBIZÁSÁBÓL

IRTA

KŐNIG GYULA.

ELSŐ KÖTET.

BUDAPEST.

KIADJA AZ EGGENBERGER-FÉLE KÖNYVKERESKEDÉS.

(HOFFMANN ÉS MOLNÁR.)

1887.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ELŐSZÓ.

Midőn e munka első kötetét a nyilvánosságnak átadom, első sorban kötelességem a magyar tudományos Akadémiának hálámat kifejezni ama támogatásáért, mely a terjedelmes munkának kiadását lehetővé tette; köszönettel kell még megemlékeznem Suppán Vilmos és Tőtőssy Béla urakról, kik a rajzok elkészítésével — továbh Rados Gusztáv és Ignácz urakról, kik az egész könyv reviziójával támogattak a kiadás munkájában, valamint végre a Franklin-társulat nyomdájáról, mely a munka külső kiállítására nagy gondot fordított.

Föntartom magamnak, hogy esetleg az egész munka befejezése után visszatérjek azon elvekre, melyek a megirásnál vezéreltek. Jelenleg — netaláni félreértések elkerülése végett — csak azt kivánom megjegyezni, hogy az előforduló idézetek tisztán didaktikai czélnak szolgálnak, azaz csak oly munkákra hivatkozom, melyeket az olvasónak a könyv tárgyalásainak kiegészítésére ajánlok. Ez irányban kiterjeszkedni a tisztán történeti érdekre is, a mire természetesen az idézet egymagában nem elég, már tekintettel a terjedelemre sem volt lehetséges.

Budapest, 1887. február.

Kőnig Gyula.

TARTALOMJEGYZÉK AZ ELSŐ KÖTETHEZ.

HARMADIK SZAKASZ.

A complex számok.

NEGYEDIK SZAKASZ.

Végtelen műveletsorozatok.

FÜGGELÉK AZ ÁLTALÁNOS SZÁMTANHOZ.

Determinánsok és lineár alakok.

MÁSODIK RÉSZ.

ELEMI FÜGGVENYTAN.

ELSŐ SZAKASZ.

A függvénytan alapfogalmai.

MÁSODIK SZAKASZ.

A differencziálhányados.

HARMADIK SZAKASZ.

Az elemi függvények elmélete.

Az *analizis* a mennyiségek vonatkozásainak és e vonatkozások törvényeinek leirására szolgáló módszereket tárgyalja.

Mennyiség a tárgyak minden — valóságos vagy csak lehetséges — tulajdonsága, mely bizonyos megállapitások után (mérték-egység s ú. t.) számok segítségével teljesen leirható.

Szám minden oly fogalom, melynek tartalma a közönséges egész számok (a legszorosabb értelemben vett számok) segítségével teljesen megadható.

A közönséges egész számok a *számlálás* folyamata által keletkeznek. Hogy mikép történik a számlálás és mikép származik ebből a közönséges egész számok sorának képzete, ennek megvizsgálása még a lélektan föladata. A számlálás és a közönséges egész számok sora adják a tapasztalati anyagot, melyből az analizis fogalmainak kifejtése kiindul.

*

E definicziók alapján minden szám mennyiség, de a mennyiség az általánosabb fogalom. Igy pl. idő, hossz, terület mennyiségek, melyek bizonyos megállapitások után számok által meghatározhatók, de nem számok. A meghatározás — «mérés» — módjának megállapitása után, az illető szám, vagy számok megadják a megfelelő mennyiséget, a mi e logikailag teljesen különnemü fogalmaknak sokszor összezavarását okozta.

Minden mennyiségnek megfelel egy vagy több — azt jellemző — szám, ezek ú. n. *mérőszámai*. E megállapítások után *rövidítés*-képen megengedhető az ily kifejezés, mint «mennyiségek szorzata» a hosszabb mennyiségek mérőszámainak szorzata helyett. Mennyiség változása szintén csak tulajdonságainak, azaz mérőszámainak változásából áll. A mennyiségnek magának, azaz neménekváltozása az volna, hogy p. hosszból idő lesz. Igy tehát «változó mennyiség» alatt is rendesen a mennyiség változó mérőszáma értendő, míg a mennyiség neme ugyanaz marad.

ELSŐ RÉSZ

ÁLTALÁNOS SZÁMTAN.

ELSŐ SZAKASZ.

A RACZIONÁLIS SZÁMOK.

I.

A közönséges egész számok. A négy alapművelet.

A számlálás.

1\. A *számlálás* folyamata *meghatározott sorrendben* adja a közönséges (egész) számokat, az *egy*től kezdve:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{s ú. t.}$$

Ha a e sorozatban később lép föl, mint b, akkor *a nagyobb*, mint b és megfordítva *b kisebb*, mint a. Jelekben:

$$a > b\,,\quad b < a.$$

Hogy a és b egyenlő, jelekben:

$$a = b,$$

egyszerűen annyit mond, hogy a különböző a és b jelek *ugyanazt* a számot jelentik.

A közönséges (egész) számok sorozata határtalan, azaz bármennyire folytattuk is e számok képezését, mindig újból ismételhetjük a számlálás egyes lépését, a mi által új, az utóljára nyert számnál nagyobb számhoz jutunk.

A sorozat minden egyes számával együtt adva van a *legközelebbi nagyobb szám*, mely a sorozatban közvetetlenül utána következik, valamint — ha az adott szám nem egy — *a legközelebbi kisebb szám*, mely azt közvetetlenül megelőzi.

Az összeadás.

2. Az 1 és a, vagy a és 1 *összege* az a-hoz legközelebb nagyobb számot jelenti, melynek jelei:

$$a+1 = 1+a. \tag{1.}$$

Általánosságban két szám * összege *recursiv* módon az

$$(a+1)+(b+1) = \{(a+b)+1\}+1 \tag{2.}$$

szabály által van adva.** Az a és b számok az összeg *tagjai*.

Minden oly értelmezése az összegnek, melynél ez *többfélekép* nyerhető, elvileg helytelen, nemcsak azért, mert akkor külön bebizonyítandó, hogy e különböző utakon ugyanazon összeghez jutunk, hanem leginkább, mert akkor az értelmezés szükséges meghatározások mellett még fölösleges részt is tartalmaz.

Ha egyszer az

$$1+1=2,\quad 2+1=3,\ldots$$

jeleket bevezettük, az a és b számok összege a (2.) alatt álló szabály értelmében mindig *egy* meghatározott módon lesz képezendő. Péld.

$$6+4 = \{(5+3)+1\}+1$$

$$5+3 = \{(4+2)+1\}+1$$

$$4+2 = \{(3+1)+1\}+1 = \{4+1\}+1 = 5+1 = 6,$$

tehát

$$5+3 = (6+1)+1 = 7+1 = 8$$

$$6+4 = (8+1)+1 = 9+1 = 10.$$

Ha

$$a+b = b+a, \tag{I.}$$

akkor az összegnek (2.) alatt álló értelmezése következtében egyszersmind:

$$(a+1)+(b+1) = (b+1)+(a+1).$$

---

* Ha e fejezetben — röviden — számokról beszélünk, természetesen mindenkor közönséges egész számok értendők, hisz más számokat *itt* még nem is ismerünk.

** A *zárjel*ben álló kifejezés mindenkor *egy* szám egységes jele gyanánt tekintendő.

Az (I.) által kifejezett törvény tehát általánosságban helyes, mert helyes, ha a vagy b az egység, a mint ez az összegnek értelmezéséből (1.) közvetetlenül foly.

Ha az összeg képezését *összeadás*nak és az a, b számokat *összeadandók*nak nevezzük, e törvény *az összeadásnak commutativ elve*, mely szerint *az összeadandók sorrendje fölcserélhető.*

3. Az összeadás második alaptörvenye, az *associativ elv* bennfoglaltatik az

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{(II).}$$

egyenlőségben, mely szerint *összeg hozzáadása a tagok egymásutáni hozzáadása által történik.*

E törvényt először amaz egyszerűbb esetben bizonyítjuk, midőn $c = 1$, azaz:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1. \qquad (3.)$$

Arra az esetre, hogy a is egyenlő az egységgel, az

$$1 + (b + 1) = (1 + b) + 1$$

az első alaptörvény alkalmazásából foly.

Föltéve, hogy a (3.) egyenlet igaz, az

$$(a + 1) + (b + 1)$$

mely (2.) szerint:

$$= \{(a + b) + 1\} + 1$$

(3.) szerint ismét

$$= \{a + (b + 1)\} + 1,$$

és így végre az (I.)-et egyenlőségünk mindkét oldalán alkalmazva:

$$(b + 1) + (a + 1) = \{(b + 1) + a\} + 1.$$

Ha tehát a (3.)-ban kifejezett törvény helyes az a és b számokra, helyes marad a $b + 1$ és a számokra is. Ha most a helyébe $b + 1$-et, b helyébe a-t teszünk, e következtetés értelmében helyes marad akkor is, ha a és b helyébe $a + 1$ és $b + 1$ jutnak. De a (3.) igaz, ha $a = 1$, bármi legyen b és így igaznak van bizonyítva mindazon esetekre, *midőn a nem nagyobb szám b-nél.*

A (3.) helyes továbbá, ha csak $b = 1$. Ha a is egy, ez a megelőzőkből foly; ha a nem egy, mindenkor $c + 1$ alakú összegnek vehető és ekkor (2.) szerint valóban:

$$(c+1)+(1+1)=\{(c+1)+1\}+1.$$

Ismét átmehetünk — mint mindig — a és b-től $a+1$ és $b+1$-re, ha a bármely szám és b az egység, azaz (3.) akkor is igaz, *ha a nem kisebb szám a b-nél* és így a (3.) egyenlet helyesnek bizonyult, bár minő számok is a és b.

A második törvény helyes lévén, ha $c=1$, általánosságban is be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy $c+1$-re is érvényes, ha c-re érvényes volt. De valóban (3.)

$$a+\{b+(c+1)\}=a+\{(b+c)+1\}$$

$$=\{a+(b+c)\}+1,$$

és, minthogy a (II.)-t itt érvényesnek veszszük:

$$=\{(a+b)+c\}+1,$$

a mi ismét (3.) szerint:

$$=(a+b)+(c+1);$$

és evvel az associativ elv teljes bebizonyítása megtörtént.

4. Az összeadás két alaptörvénye értelmében e hat kifejezés:

$$(a+b)+c\,,\quad (b+c)+a\,,\quad (c+a)+b$$

$$(b+a)+c\,,\quad (c+b)+a\,,\quad (a+c)+b$$

mind egyenlő. Közös értéküket *az a, b és c számok összegének* nevezzük és

$$a+b+c$$

-vel jelöljük, mely alakban *az összeadandók sorrendje* ismét *fölcserélhető*.

Általánosságban n összeadandó: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ esetében e számok összege, melyet p. az adott elrendezésben

$$(\ldots.(((a_1+a_2)+a_3)+a_4)+\ldots)+a_n$$

által értelmezhetünk, az összeadandók elrendezésétől független. Minthogy két és 3 összeadandó esetére a tételt már bebizonyítottuk, az n-ről $n+1$-re való következtetés megadja teljesen a tételt. Az a_1, $a_2 \ldots a_{n+1}$ számok összege

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1}$$

alakban írható, mely az előbbiek szerint ugyancsak:

$$\lfloor a_1 + a_2 + \ldots + a_n \rfloor + a_i + a_{n+1}$$
$$= \lfloor a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} \rfloor + a_i$$

— hol az új [ ] zárjelben az a_i hiányzik. — A zárjelben álló kifejezés, mint n szám összege, tetszőlegesen rendezhető, az a_i is tetszőleges tagot jelent és így *bárhány tag összege a tagok elrendezésétől független.*

Minthogy minden szám a megelőzőből az egység hozzáadása által keletkezik, minden szám csupa egységek összeadása által származtatható:

$$2 = 1 + 1\,, \quad 3 = 1 + 1 + 1\,, \text{ s. ú. t.}$$

Az eddigiekben a számok egyedül a helyeket jelezték a számsor egymásutánjában, tisztán *rendszámok* (ordinális számok) voltak, és — a mi külön hangsúlyozva legyen — úgy itt az összeadásnál, mint később a többi műveletnél a művelet helyes értelmezése után ez elégséges a műveletben kifejezett számkapcsolat törvényeinek megállapítására. A számok amaz alakja, melyben mint egységek összege vannak adva, átvezet *sarkszám* (cardinális szám) értelmezésükhez, melyben az a szám az ily módon benne foglalt egységek «szám»-át, mondhatnók számosságát jellemzi.

Utoljára a «szám» szónak más az értelme mint előbb, melyet németben az «Anzahl» szó által lehet a «Zahl» itt különben használt értelmétől megkülönböztetni.

A szorzás.

5. Az 1 és *a vagy a* és 1 *szorzata* magát az a számot jelenti. Jelekben:

$$1 \,.\, a = a \,.\, 1 = a \tag{1.}$$

A szorzás jele pont, mely azonban kihagyható, ha az illető kifejezés értelmezése nem lesz ez által kétséges; tehát többnyire csak a tizes számrendszerben kiírt számok közt lesz kiteendő.

Általánosságban két szám szorzata *recursiv* módon az

$$(a + 1)\,(b + 1) = ab + a + b + 1 \tag{2.}$$

szabály által van adva. Az a és b számok a szorzat *tényezői* vagy *szorzói.*

Két szám szorzata ismét az adott értelmezés alapján csak *egy* meghatározott módon képezhető, p.

$$6.4 = 5.3 + 5 + 3 + 1$$

$$5.3 = 4.2 + 4 + 2 + 1$$

$$4.2 = 3.1 + 3 + 1 + 1 = 3 + 3 + 1 + 1 = 8$$

és így:

$$5.3 = 15\ ,\ 6.4 = 24.$$

Ha

$$ab = ba, \tag{I.}$$

akkor a szorzatnak (2.) alatt álló értelmezése következtében egyszersmind:

$$(a+1)(b+1) = (b+1)(a+1)$$

Az (I.) által kifejezett törvény tehát általánosságban helyes, mert helyes, ha a vagy b az egység, a mint ez a szorzat értelmezéséből (1.) közvetetlenül foly.

Ha a szorzat képezését *szorzás*nak nevezzük, e törvény a szorzás *commutativ elve*, mely szerint *a tényezők sorrendje fölcserélhető.*

6. A szorzás második alaptörvénye, a *distributiv elv* bennfoglaltatik az

$$a(b+c) = ab + ac \tag{II.}$$

egyenlőségben, mely szerint *összeg szorzása az egyes tagok szorzása és az így nyert szorzatok összeadása által történhetik.*

Világos ugyanis, hogy, ha a II. helyes, ez közvetetlenül akárhány tagból álló összegekre tágítható, mert p.

$$\begin{aligned} a(b+c+d) &= a\{(b+c)+d\} \\ &= a(b+c) + ad \\ &= ab + ac + ad. \end{aligned}$$

A (II.) által kifejezett törvényt először amaz egyszerűbb esetre bizonyitjuk, midőn $c = 1$, azaz:

$$a(b+1) = ab + a \tag{3.}$$

Arra az esetre, hogy a is egyenlő egygyel, az

$$1(b+1) = b+1$$

közvetetlenül a szorzás értelmezéséből foly.

Föltéve, hogy a (3.) egyenlet helyes, az

$$(a+1)(b+1) = ab+a+b+1$$

jobboldala így is írható:

$$= a(b+1) + b+1,$$

és így végre (I.) alkalmazásával:

$$(b+1)(a+1) = (b+1)a + (b+1)1.$$

Ha tehát a (3.)-ban kifejezett törvény helyes az a és b számokra, helyes marad a $b+1$ és a számokra is. Ha most a helyébe $b+1$-et, b helyébe a-t teszünk, e következtetés értelmében helyes marad akkor is, ha a és b helyébe $a+1$ és $b+1$ jutnak. De a (3.) igaz, ha $a=1$, bármi legyen b ((1.) szerint) és így igaznak van bizonyítva mindazon esetekre, *midőn a nem nagyobb szám b-nél.*

A (3.) helyes továbbá, ha csak $b=1$. Ha a szintén egy, ez az előbbiekből foly. Ha a nem 1, akkor $d+1$ alakban írható és ekkor (2.) szerint:

$$(d+1)(1+1) = d+d+1+1 = (d+1)+(d+1)$$

Ismét átmehetünk — mint mindig — a és b-től $a+1$ és $b+1$-re, ha a bármely szám és b az egység, a miből végre az is következik, hogy a (3.) helyes, *ha a nem kisebb szám a b-nél,* és így most már a (3.) az a és b tetszőleges értékeinél helyesnek bizonyult.

A második törvény helyes lévén, ha $c=1$, általánosságban is be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy $c+1$-re is érvényes, ha c-re érvényes volt. De valóban:

$$a\{b+(c+1)\} = a\{(b+c)+1\}$$
$$= a(b+c)+a$$

és minthogy a (II.)-t itt érvényesnek veszszük:

$$= ab+ac+a$$

és végre a (3.) szerint

$$= ab+a(c+1),$$

a mivel a distributiv elv teljes bebizonyítása megtörtént.

7. A szorzás harmadik alaptörvénye, az *associativ elv* szerint:

$$a(bc) = (ab)c. \qquad \text{(III.)}$$

Ez (1.) szerint helyes, ha $c=1$, tehát ismét csak kimutatandó, hogy $c+1$-re érvényes marad, ha érvényes volt c-re nézve. De valóban (II.) szerint

$$a\{b\,(c+1)\} = a\,(bc+b) = a\,(bc)+ab$$

és minthogy itt a (III.)-at érvényesnek veszszük:

$$= (ab)\,c+ab$$

a mi ismét II. szerint valóban:

$$= (ab)\,(c+1).$$

A szorzás alaptörvényei értelmében e hat kifejezés:

$$(ab)\,c\;,\;(bc)\,a\;,\;(ca)\,b$$

$$(ba)\,c\;,\;(cb)\,a\;,\;(ac)\,b$$

mind egyenlő. Közös értéküket az a, b és c számok szorzatának nevezzük és abc-vel jelöljük, mely alakban a *szorzók sorrendje ismét fölcserélhető.*

Általánosságban n szorzó: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ esetében e számok szorzata, melyet p. az adott elrendezésben

$$(\ldots((a_1\,a_2)\,a_3)\ldots)\,a_n$$

által értelmezhetünk, a szorzók elrendezésétől független. Minthogy 2 és 3 szorzó esetére a tételt már bebizonyítottuk, az n-ről $n+1$-re való következtetés megadja teljesen a tételt. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ számok szorzata

$$(a_1\ldots a_n)\,a_{n+1}$$

alakban írható, mely az előbbiek szerint ugyancsak:

$$[a_1\ldots a_n]\,a_i\,a_{n+1} =$$

$$= [a_1\ldots a_{n+1}]\,a_i$$

— hol az új [ ] zárjelben az a_i hiányzik. A zárjelben álló kifejezés, mint n szám szorzata, tetszőlegesen rendezhető, az a_i tetszőleges tagot jelent és így *bárhány tényező szorzata az elrendezéstől független.*

Az a és b számoknak előbb nyert

$$a = 1+1+1+\ldots\;(a\text{-szor})\;,\; b = 1+1+\ldots,\;(b\text{-szer})$$

alakjaiból végre most még az ab szorzatnak két összegalakja foly:

$$b+b+b+\ldots,\;(a\text{-szor})\text{ és } a+a+\ldots(b\text{-szer.})$$

A kivonás.

8. *Ha a nagyobb b-nél, mindenkor találni a számsorban egy — és csak egy — számot, mely b-hez hozzáadva, a-t adja.* Mert ha b-hez hozzáadom a számsor egymásután következő tagjait, egymásután megkapom az összes b-nél nagyobb számokat és mindegyiket — tehát a-t is — csak egyszer.

Az ily módon nyert számot az a és b számok különbségének nevezzük és

$$a—b$$

által jelöljük. A különbség képezése teszi a *kivonás* műveletét; a a *kisebbitendő*, b a *kivonandó*. E megállapitások értelmében az $a—b$ jelnek — egyelőre — *csak akkor van értelme*, ha $a>b$.*

A kivonás értelmezése szerint:

$$(a—b)+b=a \qquad \text{(I.)}$$

és ha

$$a=b+x \quad \text{vagyis} \quad x=a—b,$$

$$c=d+y \quad \text{«} \quad y=c—d,$$

akkor:

$$a+c=b+d+x+y \text{ vagyis } x+y=(a+c)—(b+d)$$

a mi a *különbségek összeadásának törvényét* adja:

$$(a—b)+(c—d)=(a+c)—(b+d), \qquad \text{(II.)}$$

Az $a=b+x$-ből továbbá még foly, ha mindkét oldalon p. a k számot hozzáadjuk:

$$(a+k)=(b+k)+x,$$

és e szerint minden különbség végtelen sok alakban irható:

$$a—b=(a+k)—(b+k) \qquad \text{(III.)}$$

Ha $a—b>c—d$ akkor a *különbségek kivonása* a következő törvény szerint történik:

$$(a—b)—(c—d)=a+d—(b+c) \qquad \text{(IV.)}$$

mert (II.) szerint:

* Talán nem árt már itt figyelmeztetni, hogy a fogalmak pontos kifejtésénél a zérus csak a negativ számokkal egyidőben lesz értelmezendő.

$$(a+d) - (b+c) + (c-d) = (a+c+d) - (b+c+d) =$$

a mi (III.) szerint csakugyan: $a-b$.

A *különbségek szorzásának törvénye* az

$$ak = bk + xk$$

-ből így írható

$$k(a-b) = ka - kb, \qquad \text{(V.)}$$

és végre *két különbség szorzatát nyerjük* az

$$ac = (b+x)(d+y) = bd + xd + yb + xy$$

egyenlőségből, mert az előbbiek szerint:

$$\begin{aligned} bd + xd + yb &= bd + (a-b)\,d + (c-d)\,b \\ &= (a-b)\,d + cb \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} xy &= ac - [(a-b)\,d + cb] = ac - [(ad+cb) - bd] = \\ &= ac + bd - (ad+cb) \end{aligned}$$

végre:

$$(a-c)(b-d) = ac + bd - ad - cb = ac + bd - (ad+cb), \qquad \text{(VI.)}$$

ha a kivonás jelének többször egymásután való előfordulásának értelmét következőkép állapítjuk meg:

$$A - B - C = (A - B) - C = A - (B + C), \qquad \text{(VII.)}$$

hol az utóbbi két kifejezés egyenlő volta (III.)-ból következik. Evvel ellentétben, mint szintén (III.)-ből igazolható:

$$A - (B - C) = A + C - B. \qquad \text{(VIII.)}$$

Az osztás.

9. Ha a b számot rendre megszorozzuk a közönséges egész számok sorával, a

$$b,\ 2b,\ 3b, \ldots .\ xb, \ldots$$

számok sorozatát nyerjük. E sorozat *aequidistáns* számokat szolgáltat, azaz két egymásután következő számnak különbsége e szorzatban mindenkor egyenlő b-vel.

Minden szám, mely e sorozatban bennfoglaltatik, a b *többszöröse (multipluma)*, még pedig xb a b-nek x-szerese.

Ha a a b többszöröse, mindenkor találni egy — és csak egy — számot, mely b-vel szorozva a-t adja. Az ily módon nyert számot az *a* és *b hányadosának* (*quotiensé*-nek) nevezzük és

$$\frac{a}{b} \text{ vagy } a : b$$

által jelöljük. A hányados képezése teszi az *osztás* műveletét; *a* az *osztandó*, vagy számláló, *b* pedig az *osztó* vagy *nevező*. E megállapodások értelmében az $\frac{a}{b}$ jelnek — egyelőre — *csak akkor van értelme*, ha *a* a *b*-nek többszöröse.

Minden szám mint hányados írható, ha nevezőnek az 1-et veszszük:

$$c = \frac{c}{1}.$$

Az osztás értelmezése szerint:

$$\frac{a}{b} \cdot b = a, \qquad \text{(I.)}$$

és ha:

$$a = bx \quad \text{vagyis} \quad x = \frac{a}{b},$$

$$c = dy \quad \text{«} \quad y = \frac{c}{d},$$

akkor:

$$ac = bdxy \text{ vagyis } xy = \frac{ac}{bd},$$

e szerint *a hányadosok szorzásának törvénye*:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \text{(II.)}$$

Az $a=bx$-ből továbbá még foly, ha mindkét oldalon k-val szorozunk:

$$ak = bkx,$$

mely szerint minden hányados végtelen sok alakban írható:

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}. \qquad \text{(III.)}$$

A *hányadosok összeadásának törvényét* megkapjuk, ha azon egyenlőségeket, melyek x és y-t értelmezik, d-vel illetőleg b-vel szorozzuk:

$$ad = bdx\ ,$$
$$bc = bdy,$$

és most összeadunk:

$$ad + bc = bd\,(x + y),$$

azaz:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \text{(IV.)}$$

hol azonban *a nyert hányados még esetleg kifejezhető kisebb számokban*, a (III.) értelmében, ha ugyanis számláló és nevező ugyanazon egy k szám többszöröse.

II.

A pozitiv és negativ egész számok. A zérus.

10. Uj és általánosabb számokhoz az által jutunk, hogy a már meglévő számok közül kettőt vagy többet egy *számcsoport*ba egyesítünk és e számcsoportnak azután csak bizonyos tulajdonságait veszszük tekintetbe a többiek teljes mellőzésével. A számcsoportban vizsgált tulajdonságok összessége adja az új «szám»-nak teljes fogalmát.

A bevezetendő fogalmak megválasztásában tulajdonképen azon gyakorlati követelés dönt, hogy az új számok segítségével a tapasztalatok oly részletei is számok által teljesen leirhatók legyenek, melyekre nézve ez a már rendelkezésünkre álló számok segítségével nem lehetséges. A tudomány történeti fejlödése mutatja, hogy e gyakorlati követelés érvényesítése eredményeiben összevág amaz általános ismerettani követeléssel, hogy meglévő ismereteinket általánosabb kategoriák fölállítása által egyesitsük és osztályozzuk. A szám fogalmának kifejtésére alkalmazva, ez a következő elvhez vezet: A szám fogalmának általánosítása oly módon történjék, hogy a meglévő számkörben csak részben és föltételesen értelmezett műveletek (mint p. a kivonás a köz. eg. számok körében) az új számkörben általánosan és föltétlenül legyenek értelmezhetők.

Ily módon elöször is két számból, egy első a és egy második b számból képezett csoportot vizsgálunk és e csoportban *csak azt nézzük, hogy a és b a számsorban mikép van egymáshoz képest elhelyezve* és hogy, ha a és b nem egyenlők, mily nagy a kisebb*

* Az a a b-re nézve a számsorban háromféleképp lehet *elhelyezve.* Az a vagy megelözi a b-t, vagy követi a b-t, vagy — mintegy átmenetileg — egyenlö lehet b-vel. Az a és b kölcsönös elhelyezését a számsorban tehát mindenkor e három alakzat egyike jellemzi:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

számnak a nagyobból való kivonása által nyert különbség. Az a és b által így meghatározott számfogalom összes tartalmát egyelőre képviselje az

$$\{a\,,\,b\}$$

jel. E szerint mindenek előtt, bármi közönséges egész szám is k, lesz:

$$\{a+k,\ b+k\} = \{a\,,\,b\}\,, \tag{I.}$$

a hol az $=$ jel annyit jelent, hogy a két fogalom összes tartalmában azonos, mert

$$a+k \gtreqless b+k,$$

a mint

$$a \gtreqless b,$$

végre a $>$, ill. $<$ jel lévén érvényes, lesz:

$$(a+k)-(b+k) = a-b, \quad \text{ill.} \quad (b+k)-(a+k) = b-a.$$

E szerint az $\{a\,,\,b\}$ számok háromfélék:

először: azok, melyekben az első és második szám egyenlő. De (I.) szerint:

$$\{a\,,\,a\} = \{b\,,\,b\}\,,$$

bármicsoda is a vagy b. E szerint csak *egy* ily szám létezik, melyet új jellel jelölünk, 0, és *zérus*nak nevezünk;

másodszor: azon számok, melyeknek jellemző csoportjában az első szám nagyobb a másodiknál. Jellemző alakjuk:

$$\{a+k,\ a\}\,,$$

értelmük ugyanaz marad, bármely közönséges egész számot jelentse is a, mert ismét (I.) szerint:

$$\{a+k,\ a\} = \{b+k,\ b\}\,;$$

harmadszor: azon számok, melyeknek jellemző csoportjában az első szám kisebb a másodiknál és melyeknek jellemző alakja:

$$\{a,\ a+k\}.$$

Értelmök ismét az a-tól független.

Az $\{a+k, a\}$ által jellemzett számokat ezentúl *pozitiv egész számok*nak nevezzük, az $\{a, a+k\}$ által jellemzetteket pedig *negativ egész számok*nak.

Minthogy az a választása e számoknál egészen közömbös, világos, *hogy minden közönséges egész számnak megfelel egy pozitiv és épen úgy egy negativ egész szám, valamint viszont minden pozitiv, illetőleg negativ egész számnak egy közönséges egész szám*. A megfelelő számok k és $\{a+k, a,\}$ illetőleg $\{a, a+k\}$.

Eddigelé a pozitiv és negativ egész számok a közönséges egész számokkal szemben lényegesen új számfogalmak; az összeadás, s ú. t. műveletei az eddigi értelmezések alapján ezekre nem is alkalmazhatók és tetszésünktől függ, hogy mit akarunk e számkörben összeadás s ú. t. alatt érteni.

Ha azonban az $\{a\ , b\}$ és $\{c\ , d\}$ számok összeadását, szorzását úgy értelmezzük, hogy pozitiv számok esetében a k-, illetőleg l-nek megfelelő

$$\{a+k, a\} \text{ és } \{b+l, b\}$$

számok összege és szorzata ismét a $k+l$ és kl-nek megfelelő számok, akkor a pozitiv számok tulajdonságai teljesen azonos kifejezést nyernek a közönséges számokéival. Minden a k, l, m .... számokra vonatkozó igazság helyes marad az $\{a+k, a\}$, $\{b+l, b\}$, $\{c+m, c\}$ ... számokra is; azaz *a pozitiv egész számok azonosok lesznek a közönséges egész számokkal; a zérus és a negativ egész számok bevezetése által pedig az előbb vizsgált számsor tágítása történik*. Minthogy pedig, ha $\{a\ , b\}$ pozitiv számot jelent, a megfelelő közönséges egész szám, nem más, mint az $a-b$ különbség, kell, hogy az $\{a\ , b\}$ és $\{c\ , d\}$ tetszőleges egész számok összeadása és szorzása formálisan ugyanazon törvény által legyen adva, mint az $a-b$ és $c-d$ különbségeké.

E szerint *az összeg és szorzat értelmezései* az új számkörben:

$$\{a\ , b\} + \{c\ , d\} = \{a+c, b+d\} \tag{II.}$$

$$\{a\ , b\} \ . \ \{c\ , d\} = \{ac+bd, ad+bc\} \tag{III.}$$

11. A (II.)-ből mindenek előtt következik, hogy:

$$\{a\ , b\} + \{k\ , k\} = \{a+k, b+k\} = \{a\ , b\}$$

azaz ha A bármicsoda számot jelent:

$$A+0=A$$

A zérus tehát oly szám, melynek hozzáadása nem változtatja egy számnak sem értékét.

Az $\{a\,,\,b\}$ és $\{c\,,\,d\}$ számok különbsége alatt itt is — ha létezik — azt az $\{x\,,\,y\}$ számot értjük melyre nézve:

$$\{a\,,\,b\}=\{c\,,\,d\}+\{x\,,\,y\}\,; \tag{1.}$$

közvetetlenül látni, hogy:

$$A-0=A,$$
$$A-A=0.$$

Az egész szamok körében a különbség mindig képezhető és csak egy bizonyos számot jelent. Ha k elég nagy közönséges egész szám és

$$x=a+k-c,$$
$$y=b+k-d,$$

akkor (1.) valóban helyes lesz, és ha még ezenkívül:

$$\{a\,,\,b\}=\{c\,,\,d\}+\{u\,,\,v\},$$

akkor:

$$\{c+x,\,d+y\}=\{c+u,\,d+v\},$$

a mi csak úgy lehetséges, ha

$$x-y=u-v \quad \text{vagy} \quad y-x=v-u,$$

azaz $\{x\,,\,y\}=\{u\,,\,v\}$, a mi bebizonyítandó volt.

Minden egész szám mint két pozitiv szám különbsége irható:

$$\{a\,,\,b\}=\{a+k,\,k\}-\{b+l,\,l\}.$$

Az eddigiek szerint valóban:

$$\{a\,,\,b\}+\{b+l,\,l\}=\{a+b+l,\,b+l\}=\{a+k,\,k\}.$$

12. A közönséges egész számok minden tulajdonságukban megegyeznek a pozitiv számokkal. Minden számlálás eredménye tehát a megfelelő pozitiv szám által is jellemezhető. A közönséges egész számok a számsornak most történt tágitása után mint ilyenek nem is szerepelnek többé és jeleik 1, 2... a,.. a megfelelő pozitiv számok jelzésére használhatók. Minthogy pedig minden szám mint két pozitiv szám különbsége irható, az eddig használt számcsoportok csak átmeneti jelzéseknek tekintendők és *az* $\{a, b\}$ *számot* $a - b$ *alakban irhatjuk*, hol e különbség pozitiv, negativ számot vagy zérust jelenthet és ezen általánositott különbségre nézve minden az 5. czikkben lehozott törvény érvényben marad. Mert az új jelzésben ismét (II.) és (III.) szerint

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d),$$

$$(a-b)(c-d) \quad = ac+bd-(ac+bd).$$

hol most már a, b, c, d bármicsoda pozitiv számokat jelenthetnek.

Minthogy minden negativ számnak $\{k, k+a\}$ megfelel egy pozitiv szám $\{k+a, k\}$ úgy, hogy:

$$\{k+a, k\}+\{k, k+a\}=0,$$

végre még *a negativ számokra is igen egyszerű jelzést nyerünk:*

$$\{k, k+a\}=0-a,$$

melyben még szokásos az elől álló 0-t elhagyni.

A $-a$-nak megfelelő pozitiv számot, mint $0+a$-t képzelhetjük, melyet azután szintén rövidebben $+a$-nak, vagy egész egyszerűen a-nak irunk.

A $+A$ *és* $-A$ *jelek alatt ezentúl mindig* $0+A$, *ill.* $0-A$-t *értünk*. Igy tehát:

$$+(+A)=A, +(-A)=-A, -(+A)=-A,$$

$$-(-A)=+A, +0=-0=0.$$

Igy végre két szám (legyen ez pozitiv, 0, vagy negativ), összeadása, kivonása, szorzása a következő szabályok szerint lesz eszközlendő:

$$A+0=A; \quad A-0=A; \quad 0-A=-A; \quad 0.A=0,$$

és a harmadik képlet részletezve:

$$0-(+a)=-a \quad ; \quad 0-(-a)=+a.$$

Végre általánosan:

$$(+a)+(+b)=+(a+b), \qquad +(a)-(+b)=+(a-b)=-(b-a),$$
$$(+a)+(-b)=+(a-b)=-(b-a), \qquad (+a)-(-b)=+(a+b),$$
$$-(a)+(+b)=-(a-b)=+(b-a), \qquad -(a)-(+b)=-(a+b),$$
$$-(a)+(-b)=-(a+b), \qquad -(a)-(-b)=-(a-b)=+(b-a).$$

$$(+a)(+b)=+(ab),$$
$$(+a)(-b)=-(ab),$$
$$(-a)(+b)=-(ab),$$
$$(-a)(-b)=+(ab).$$

a mely képletekben, ha a, b pozitiv számokat vagy 0-t jelentenek, az elemekben előforduló szabályok szigorú megállapítását nyertük.

A közönséges egész számokra vonatkozólag az I. szakaszban kifejezett általános törvények érvényben maradnak tetszőleges egész számokra is, a mi mostani tárgyalásaink alapján közvetetlenül igazolható.

Péld. Az 5. czikk (I.) képletének megfelelőleg.

$$\{a, b\}\,\{c, d\} = \{c, d\}\,\{a, b\} = \{ac+bd,\ ad+bc\} \text{ s ú. t.}$$

13. Az oly szorzatot, melynek tényezői egyenlők, *hatvány*-nak nevezzük, még pedig, ha az egyenlő tényezők száma n, n-edik hatványnak. A második és harmadik hatvány helyett a négyzet és köb elnevezések is használtatnak. Ha az egyenlő tényezők értéke a, az n-edik hatvány rövidebb jele: a^n, hol a az *alap*, n a *kitevő*.

Az a^n jelnek — egyelőre — csak akkor van értelme, ha n pozitiv egész szám; mert tényezők számának megolvasása csak ilyenre vezethet.

A hatványok szorzatértelméből közvetetlenül foly *az egyenlő alapból képezett hatványok szorzási törvénye:*

$$a^m\, a^n = a^{m+n}, \tag{I.}$$

a következő, különben közvetetlenül is igazolható képletek:

$$a^{n_1}\, a^{n_2} \ldots a^{n_k} = a^{n_1+n_2+\ldots+n_k},$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

már az (I.)-nek egyszerű folyományai.

A 0-nak minden hatványa 0; az 1-nek minden hatványa 1.

Páros hatvány az, melynek kitevője páros szám, azaz a 2 többszöröse; páratlan hatvány az, melynek kitevője páratlan szám, azaz nem többszöröse a 2-nek.

A -1-nek minden páratlan hatványa -1, minden páros hatványa $+1$.

Az a-val együtt a^n is mindig különböző a 0, 1 és -1 számoktól. Pozitiv számokra vonatkozólag világos, hogy az egynél nagyobb számok szorzata mindig nagyobb az egynél; ha pedig az alap negativ, akkor (I.) szerint:

$$(-a)^n = (-1)^n\, a^n$$

a mi ismét csak akkor lehet 0, illetőleg $+1$ vagy -1, ha $a=0$, ill. 1.

Egységnek nevezünk minden oly számot, melynek valamely hatványa egyenlő egygyel. Az egész számok sorában tehát két egység fordul elő, 1 és -1. Az elsőt *pozitiv egységnek*, a másodikat *negativ egységnek* mondjuk.

14. Bármely a számból a pozitiv vagy negativ egység akárhányszor ismételt hozzáadása által folyton új számot képezhetünk; e folyamatot ismét számlálásnak nevezve, az egész számok sorában *két irányban számlálhatunk* tovább, *pozitiv irányban* a $+1$, *negativ irányban* a -1 hozzáadása által.

A tetszőleges a számból kiindulva, e kettős irányban történő számlálás soha sem akad meg oly módon, mint a közönséges számok sorában az 1-nél és e mellett minden szám egyszer — és csak egyszer — lép föl. Mert minden egész szám egy, és csak egyféleképírható $a+x$ alakban.

Az egész számokat a számlálás folyamata által *meghatározott sorrendben* nyerjük:

$$\ldots,\ a-2,\ a-1,\ a,\ a+1,\ a+2,\ldots$$

Az egész számok e sorozata mindkét irányban határtalan.

Az a szám kisebb vagy nagyobb mint b, a mint a-ból kiindulva, pozitiv vagy negativ irányban tovább számlálva, nyerjük a b-t. Ez úgy is fejezhető ki, hogy

$$a<b\,,\quad a=b\,,\quad \text{vagy}\quad a>b,$$

a mint az $a - b$ különbség negativ, zérus, vagy pozitiv, azaz:

$$a - b < 0\,, \quad a - b = 0\,, \quad \text{vagy} \quad a - b > 0.$$

Az oly két számot, melynek összege 0, ellentett számoknak nevezzük. Az ellentett számok csak «előjel»-ben különböznek, azaz a-nak megfelel mint ellentett szám $-a$ és megfordítva.

Az a szám *absolut értéke* alatt értjük a $0 - a$ és $a - 0$ különbségek közül azt, melynek értéke pozitiv. Az a szám absolut értékét

$$|a|$$

-val jelöljük. Igy tehát, ha a pozitiv, $|a| = a$, és ha a negativ, $|a| = -a$.

A zérusra nézve pedig legyen $|0| = 0$.

Ha az I. fejezetnek az osztásra vonatkozó czikkében az ott előforduló jelek alatt nem közönséges egész számokat, hanem bárminő egész számokat értünk és még megállapitjuk, hogy az osztó v. nevező (b, d) nem lehet 0, az összes ottani tárgyalások változatlanul érvényesek maradnak.

A zérusra e tárgyalások nem terjeszthetők ki, mert a 0-nak minden többszöröse ismét csak 0.

Az osztás művelete tehát még az egész számok körében sem végezhető föltétlenül; erre ismét új számnem, a törtszámok bevezetése szükséges.

III.

Az egész számok oszthatósága.

Az osztók.

15. Ha a, b, c három egész szám és $a = bc$, akkor a a b többszöröse és b az a osztója. Az oszthatóságnak két alaptétele:

Ha k az l nek és l az m-nek osztója, akkor k az m-nek is osztója.

T. i. $l = ka$ és $m = lb$-ből közvetetlenül foly $m = k\,(ab)$.

Ha k az l-nek és k' az l'-nek osztója, akkor kk' osztója az ll'-nek.

Ha ugyanis $l = ka$ és $l' = k'a'$, akkor $ll' = (kk')\,(aa')$.

Ha d osztója k-nak és l-nek, akkor egyszersmind osztója $kx + ly$-nak is, bárminő egész számok legyenek is x és y.

Mert $k = da$ és $l = db$.-tól ismét foly, hogy:

$$kx + ly = d\,(ax + by),$$

hol a-val és b-vel együtt $ax+by$ is egész szám.

Az $a = bc$-ből mindig:

$$a = (-b)\,(-c) \text{ és } -a = b\,(-c)$$

tehát: A *b-vel együtt $-b$ is mindig osztója az a-nak.*

Az a-nak bármely osztója egyszersmind $-a$-nak is osztója. Vagyis az a és $-a$ osztóinak sorozata ugyanaz.

Minden szám osztja a 0-t, mert $0 = k\,.\,0$, bárminő szám is k.

Ha valamely számnak minden osztóját keressük, elég ennek pozitiv osztóit meghatározni, mert a negativ osztók ezekből az előjel megváltoztatása által képezhetők. Ha a vizsgált szám negativ, a megfelelő pozitiv számot vehetjük helyette. Igy tehát csak a pozitiv számok pozitiv osztóit kell keresnünk.

Az oszthatósági viszonyok vizsgálatában tehát a közönséges (vagy pozitiv) egész számokra szorítkozhatunk. Megfelelőleg az oszthatóság tárgyalásánál — ha nem is mondjuk ki külön — minden előforduló szám ilyennek tekintendő.

Az osztó alapértelmezése szerint az a osztója nem lehet nagyobb a-nál. Az a összes osztóit megkapjuk tehát, ha az

$$1, 2, 3, \ldots a - 1, a$$

sorozatból a megfelelő számokat kikeressük, a mi mindig meghatározott számú kisérlet segítségével történhetik.

Az egység és a vizsgált szám maga mindig bennfoglaltatik az osztók sorozatában; de az $1\,.\,a$ nem adja az a-t valódi szorzat alakjában; minden más d osztó segítségével a számot dd' alakban irhatjuk.

Az a minden osztóját, mely nem 1 vagy a, *valódi osztó*nak nevezzük.

Az oly számot, melynek nincs valódi osztója, *törzsszám*nak nevezzük; ilyen p. 2, 3, 5.

Minden szám, melynek van valódi osztója, *összetett szám*; p. $62 = 2.\,31$.

Ha d és d' az n két oly osztója, melyeknek szorzata $dd' = n$, akkor ezeket konjugált osztóknak nevezzük.

Ha

$$1, d_1, d_2, .. d_i, .. n$$

az n osztóinak teljes sorozata, akkor

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots \frac{n}{d_i}, \ldots 1$$

ismét az osztók teljes sorozata. E számok mind osztók és mind különbözők, minthogy pedig számuk is megegyezik az összes osztóké-val, szükségkép ezeknek teljes sorozatát adják.

Közös osztók.

16. Az a és b *közös osztóit*, azaz azon számokat, melyek a-t és b-t is osztják, meghatározhatjuk vagy direkt kisérletek útján, vagy recursiv módon.

Ha a a b többszöröse, akkor a b minden osztója osztja az a-t is, és evvel a kérdés el van intézve. Ha a a b többszörösei között nem fordul elő, akkor e többszörösek képezésében végre az a-nál nagyobbat nyerünk. — Legyen például még $bq_1 < a$ és először $b\,(q_1+1) > a$. Akkor okvetetlenül: *

$$a = bq_1 + r_1$$

hol r valamely szám e sorozatból:

$$1, 2, 3, \ldots b-1$$

vagyis

$$0 < r_1 < b.$$

Az a és b számok közös osztóinak sorozata azonos a b és r_1 számok közös osztóinak sorozatával, mert a II. alaptétel értelmében a és b minden közös osztója $r_1 = a - bq_1$-ban is bennfoglaltatik és megfordítva r_1 és b minden közös osztója a-nak is osztója.

Ha $a < b$, akkor $q_1 = 0$ és $r_1 = b$, azaz az a és b számok helyébe lépnek a b és a számok.

De föltételezhetjük, hogy $a > b$, és ekkor az a, b közös osztóinak meghatározása kisebb számpár vizsgálatára van vissza-vezetve, t. i. a b, r számpárban $b < a$, és $r_1 < b$.

* Az elemi számtan elnevezései szerint a-t b-vel osztjuk; q_1 a *hányados egész számú része*, r_1 pedig a *maradék*.

Ha ezt az eljárást többször ismételjük:

$$a = bq_1 + r_1 ,$$
$$b = r_1 q_2 + r_2 ,$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 ,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

akkor $r_2 < r_1$, $r_3 < r_2, \ldots$, és az a, b számok közös osztói ugyanazok, mint a b és r_1, r_1 és r_2, r_2 és $r_3, \ldots$ számoké. A vizsgálandó számpár e kisebbítése mindaddig folytatható, míg az r számok közt nem találunk zérust. Minthogy pedig már $r_1 < b$, és az r-ek folyton kisebbednek, ez legfölebb b osztás után minden esetre megtörténik. Ha általánosságban p. $r_{m+1} = 0$, akkor az utolsó egyenletek:

$$r_{m-2} = r_{m-1}\, q_m + r_m ,$$
$$r_{m-1} = r_m\, q_{m+1} .$$

és így végre *az a és b közös osztói azonosak az* r_m *osztóival.* T. i. azonosak az előbbiek szerint az r_{m-1} és r_m közös osztóival, de itt r_m osztója lévén r_{m-1}-nek, az eredmény az ép adott egyszerűbb módon is fogalmazható.

Azt a számot, melynek osztói egyszersmind az a és b összes közös osztói, az a és b számok *legnagyobb közös osztójának* mondjuk.

A legnagyobb közös osztó értelmezése itt — mint a későbbiekből majd kitünik — legjellemzőbb tulajdonságára lett alapítva; e mellett az, hogy a pozitiv közös osztók sorozatában valóban a legnagyobb, csak mellékes.

A legnagyobb közös osztó lehet egy is; ekkor azt mondjuk, hogy a és b *relativ törzsszámok*, vagy hogy a-nak és b-nek *nincs közös osztója* (t. i. közös valódi osztója).

Megfelelőleg, az a és b-ről azt mondva, hogy *van közös osztójuk*, ez mindig annyit jelent, hogy van közös valódi osztójuk, azaz hogy legnagyobb közös osztójuk az 1-től különböző szám.

Ha három számnak, a_1, a_2 és a_3-nak keressük közös osztóit, és az a_1, a_2-nek már meghatároztuk legnagyobb közös osztóját, D_1-t, akkor a_1, a_2 és a_3 közös osztói azonosak a D_1 és a_3 közös osztóival. A D_1 és a_3 legnagyobb közös osztója, D_2, tehát egyszersmind az

a_1 a_2 és a_3 legnagyobb közös osztója, t. i. ismét az a szám, melynek összes osztói egyszersmind az a_1, a_2 és a_3 összes közös osztói.

Hasonlókép nyerjük akárhány szám legnagyobb közös osztóját. *Ha az* a_1 a_2.. a_n *számok legnagyobb közös osztója* D, *akkor:*

$$a_1 = a_1' D\,,\; a_2 = a_2' D, \ldots\; a_n = a_n' D,$$

és az a_1', $a_2' \ldots a_n'$ *relativ törzsszámok*; mert ha e számoknak volna közös valódi osztójuk p. d, akkor az a_1.. a_n számoknak közös osztója volna dD, és D nem lehetne a legnagyobb közös osztó.

Minden szám, mely a_1 és a_2-nek is többszöröse, az a_1 és a_2 *közös többszöröse.* Ha $a_1 = a_1' D$ és $a_2 = a_2' D$, akkor minden ily közös többes $ka_1' D$ alaku, de hogy ez $a_2' D$ által osztható legyen, kell, hogy ka_1' osztható legyen a_2' által. Minthogy azonban, D alatt a legnagyobb közös osztót értve, a_1' és a_2' relativ törzsszámok, ez csak úgy lehetséges, ha k-nak osztója a_2', azaz $k = la_2'$.

Minden közös többszörös tehát $la_1' a_2' D = l \frac{a_1 a_2}{D}$ alakú, azaz többszöröse az $\frac{a_1 a_2}{D}$-nek, az ú. n. *legkisebb közös többszörösnek.*

Több szám a_1 a_2, a_3... legkisebb közös többszörösét most már úgy képezzük, hogy először a_1 és a_2-ét számítjuk, M_1-et, azután M_1 és a_3-ét, s ú. t.

Ha a_1 és a_2 relativ törzsszámok, legkisebb közös többszörösük nem más mint szorzatuk a_1 a_2.

Hasonlóképen ha a_1 $a_2 \ldots a_n$ relativ törzsszámok, úgy hogy bármely két szám e sorozatból relativ törzsszám, akkor legkisebb többszörösük ismét nem más mint szorzatuk: a_1 $a_2 \ldots a_n$.

17. Arra az esetre, midőn a és b relativ törzsszám, az előbb kifejtett egyenlőségek rendszerében $r_m = 1$, és e rendszer maga:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1\,, \\ b &= r_1 q_2 + r_2\,, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ r_i &= r_{i+1}\, q_{i+2} + r_{i+2}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{m-2} &= r_{m-1}\, q_m + 1. \end{aligned}$$

Ha ezen egyenlőségeknek mindkét oldalát egy tetszőleges

A számmal megszorozzuk, lesz:

$$aA = bq_1 A + r_1 A,$$
$$bA = r_1 q_2 A + r_2 A,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_i A = r_{i+1} q_{i+2} A + r_{i+2} A,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{m-2} A = r_{m-1} q_m A + A,$$

mely sorozatból fontos következtetést vonunk. Az oszthatóság alaptételei szerint ugyanis az aA és b közös osztói bennfoglaltatnak a b és $r_1 A$ közös osztói sorozatában, a b és $r_1 A$ közös osztói ismét az $r_1 A$ és $r_2 A$ közös osztói sorozatában és így tovább következtetve, végre az $r_{m-2} A$ és $r_{m-1} A$ közös osztói az A osztói sorozatában. A nyert eredményt — mint közvetetlenül látni, következőkép is fogalmazható.

Ha a és b relativ törzsszámok, akkor — bármely szám is A — az aA és b minden közös osztója egyszersmind közös osztója A-nak és b-nek.

E tételnek két fontos részletezése a következő:

I) *Ha a és b relativ törzsszámok és aA-nak osztója b, akkor b magának A-nak is osztója.* Ekkor ugyanis aA és b-nek közös osztója lévén b, ez osztja az előbbi tétel értelmében b-t és A-t.

II) *Ha a és b, valamint A és b relativ törzsszámok, akkor aA és b szintén relativ törzsszámok.* A bevezetett föltétel alapján A és b-nek egyedüli közös osztója az egység és így aA és b-nek sem lehet más közös osztója.

Ez utóbbi tétel ismét más irányban általánosítható:

Legyen $a_1, a_2, \ldots a_m$ és $b_1, b_2, \ldots b_n$ a számok két oly sorozata, hogy bármely a és b összeállítása két relativ törzsszámot ad, akkor az $a_1 a_2 \ldots a_m$ és $b_1 b_2 \ldots b_n$ szorzatok szintén relativ törzsszámok.

Minthogy a_1 és b_1, a_2 és b_1 relativ törzsszámok, $a_1 a_2$ és b_1 is ilyenek, a_3 és b_1 szintén ilyenek, tehát ugyanez áll $a_1 a_2 a_3$ és b_1-re, és úgy tovább végre $a_1 a_2 \ldots a_m$ és b_1-re. — Hasonlókép relativ törzsszámok $a_1 a_2 \ldots a_m$ és $b_2, \ldots,$ tehát $a_1 a_2 \ldots a_m$ és $b_1 b_2, \ldots,$ végre $a_1 a_2 \ldots a_m$ és $b_1 b_2 \ldots b_n$.

Ha végre az a-k és b-k mind egyenlők, az utólsó tételből a következő lesz:

Ha a és b relativ törzsszamok, a^m és b^n is relativ törzsszámok.

Ha most már a és b bárminő pozitiv vagy negativ egész számok, az a és b legnagyobb közös osztója ugyanaz, mint az $|a|$ és $|b|$ számoké; így p. a és b relativ törzsszámok, ha $|a|$ és $|b|$ ilyenek. Minthogy tehát az oszthatósági viszonyok csak az illető számok absolut értékeitől függnek, az imént levezetett tételek érvényesek maradnak, ha az a és b jelek alatt bárminő pozitiv vagy negativ egész számot értünk.

A zérusnak természetesen kivételes szerep jut; mert minden számmal osztható.

Elsőfokú határozatlan egyenlet.

18. *Az elsőfokú és két ismeretlent tartalmazó határozatlan egyenlet* alatt az

$$Ax - By = M \tag{1.}$$

alakot értjük, melyben A, B, M adott (poz. vagy neg.) egész számok, míg x, y szintén mint egész számok úgy határozandók meg, hogy az (1.)-ből egyenlőség legyen. Az így nyert értékekről azt mondjuk, hogy az egyenletet «kielégítik,» az egyenletnek megfelelnek. Ezen értékek meghatározása teszi az egyenlet *megoldását.*

Minthogy az A és B legnagyobb közös osztója egyszersmind $Ax+By$ vagyis M-nek osztója, *a megoldás lehetetlen, ha A és B legnagyobb közös osztója nem foglaltatik szintén mint osztó az M-ben.*

Az ellenkező esetben, ha e legnagyobb közös osztó D és:

$$A = A'D\,,\ B = B'D\,,\ M = M'D$$

az (1.)-ből a következőt is nyerni:

$$A'x - B'y = M', \tag{2.}$$

mely az eredeti egyenlettel *azonos föladatot* ád, mert minden x, y értékrendszer, mely megoldása az (1.)-nek, kielégíti a (2.)-t is és megfordítva.

Föltéve most már, hogy A és B relativ törzsszámok, bebizonyitjuk, hogy *ha x_0, y_0 egy megoldás,*:

$$x = x_0 + Bt\,, y = y_0 + At \tag{3.}$$

— *bárminő szám legyen is t — szintén megoldás, még pedig úgy, hogy az* (1) *minden megoldása a* (3)-*ból származtatható t speczializálása által.*

Hogy x_0 és y_0-nal a (3.) is megoldás, azt a direkt helyettesítés mutatja; hogy minden megoldás ily alakú, szintén könnyen belátható. Legyen ugyanis x, y az (1.) bárminő megoldása; akkor

$$Ax - By = M\,,\ Ax_0 - By_0 = M,$$

tehát:

$$A(x - x_0) = B(y - y_0).$$

Ha e kifejezések közös értékét T-vel jelöljük, T osztható A-val és B-vel, tehát AB-vel is és így:

$$T = ABt,$$

hol t, úgy mint T, egész szám; tehát valóban

$$x - x_0 = Bt\,, y - y_0 = At.$$

A megoldások száma tehát határtalan; minden egész számnak megfelel egy bizonyos megoldás; különböző egész számoknak különböző megoldás.

A föladat teljes tárgyalására ezután elég, *egy* megoldást találni. *Ha*

$$a = |A|\,, b = |B|$$

elég az

$$ax - by = 1 \tag{4.}$$

egyenlet egy megoldását keresni.

Legyen ez p. ξ, η, továbbá

$$A = e_1 a\,, B = e_2 b$$

hol e_1, e_2 a pozitiv vagy negativ egységet jelentik. Akkor

$$a\xi - b\eta = 1,$$

és:

$$e_1 a \,.\, Me_1\xi - e_2 b \,.\, Me_2\eta = M$$

azaz $Me_1\xi$, $Me_2\eta$ az (1.) megoldása.

* Az ellenkező esetben fölcseréljük x és y szerepét; a és b nem lehet egyenlő, mert akkor közös osztójuk volna.

19. Ezen egyenlet megoldása szoros kapcsolatban áll ama számtani eljárással, mely az a, b számok legnagyobb közös osztójának meghatározására szolgált. Föltéve ugyanis, hogy a a nagyobb szám és ismét:

$$a = bq_1 + r_1,$$

akkor az

$$ax - by = 1 \tag{1.}$$

egyenletből lesz:

$$b\,(q_1 x - y) + r_1 x = 1\,.$$

Ha tehát a

$$bx' - r_1 y' = 1 \tag{2.}$$

egy megoldását találtuk, akkor az (1.)-re nézve:

$$x = -y'\,,\; y = -(q_1 y' + x')$$

A (2.)-ben az a, b számpár helyett ismét a kisebb b, r_1 számpár áll, a mi a föladat redukcziójának, egyszerűsítésének tekintendő. Ha ezt az eljárást többször ismételjük és tekintetbe veszszük, hogy a és b relativ törzsszámok lévén, végre egy $r_k = 1$ maradékhoz jutunk, az egyenletek, melyekre egymásután visszavezetjük a föladatot:

$$\begin{aligned} ax - by &= 1\,, \\ bx' - r_1 y' &= 1\,, \\ r_1 x'' - r_2 y'' &= 1\,, \\ \cdots\cdots &\,, \\ r_{k-2}\, x^{(k-1)} - r_{k-1}\, y^{(k-1)} &= 1\,, \\ r_{k-1}\, x^{(k)} - y^{(k)} &= 1\,, \end{aligned} \tag{3.}$$

mely egyenletek megoldásai közt a következő kapcsolat áll fönn:

$$\begin{aligned} x &= -y'\,; & y &= -(q_1 y' + x')\,, \\ x' &= -y''\,; & y' &= -(q_2 y'' + x'')\,, \\ x'' &= -y'''\,; & y'' &= -(q_3 y''' + x''')\,, \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ x^{(k-1)} &= -y^{(k)}; & y^{(k-1)} &= -(q_k\, y^{(k)} + x^{(k)})\,. \end{aligned} \tag{4.}$$

Az $x^{(k)}$ és $y^{(k)}$ egész számú értékei, melyek az utolsó $r_{k-1}\, x^{(k)} - y^{(k)} = 1$ egyenletnek megfelelnek közvetetlenül fölirhatók; t. i. ha t tetszőleges egész szám.

$$x^{(k)} = t\,,\quad y^{(k)} = q_{k+1} \,.\, t - 1\,,$$

mert ha $r_k = 1$, akkor $r_{k-1} = 1 \,.\, q_{k+1} + 0 = q_{k+1}$.

Minthogy csak egy megoldást keresünk, t zérusnak vehető és ekkor:

$$x^{(k)} = 0\,, \quad y^{(k)} = -1\,.$$

Ha a (4.) alatti egyenletekben az x-ek értékét mindenütt az y-ok által fejezzük ki, végre a következő összefüggéseket nyerjük:

$$\begin{aligned}
y &= y'' - q_1 y'\,, \\
y' &= y''' - q_2 y''\,, \\
y'' &= y^{\mathrm{IV}} - q_3 y'''\,, \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
y^{(k-2)} &= y^{(k)} - q_{k-1}\, y^{(k-1)}\,, \\
y^{(k-1)} &= +\, q_k \\
y^{(k)} &= -1\,.
\end{aligned} \tag{5.}$$

Az y-ok számítása tehát a következő könnyen érthető schema szerint történik:

$$\begin{array}{llll}
 & q_k\,, & q_{k-1}\,, & \\
y^{(k)} = -1, & y^{(k-1)} = q_k, & y^{(k-2)} = y^{(k)} - q_{k-1}\, y^{(k-1)}, & \\
 & & \ldots \quad q_2 & q_1\,. \\
 & & \ldots\, y' = y''' - q_2 y'' & y = y'' - q_1 y'.
\end{array}$$

Ha p. az adott egyenlet $17\,x - 13\,y = 1$, akkor

tehát:
$$17 = 13\,.\,1 + 4\,, \quad 13 = 4\,.\,3 + 1\,, \mid \quad 4 = 1\,.\,4 + 0\,, \quad (k = 2),$$

$$\begin{array}{ccc}
. & 3\,, & 1\,, \\
-1\,, & 3\,, & -4\,,
\end{array}$$

azaz:

$$x = -3\,, \quad y = -4\,;$$

és ebből p. a $17\,x - 13\,y = -2$ általános megoldása:

$$x = 6 + 13\,t\,, \quad y = 8 + 17t.$$

Euler algorithmusa.

20. Ha a megelőző czikk (5.) alatti egyenletrendszerében a következő relácziók alapján

$$y = (-1)^{k+1}\,\eta\,, \quad y^{(i)} = (-1)^{k+i+1}\,\eta^{(i)}$$

az y-ok helyébe behozzuk az η-kat, e rendszer lesz:

$$\begin{aligned}
\eta &= q_1 \eta' + \eta'',\\
\eta' &= q_2 \eta'' + \eta''',\\
\eta'' &= q_3 \eta''' + \eta^{IV},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\eta^{(k-2)} &= q_{k-1}\, \eta^{(k-1)} + \eta^{(k)},\\
\eta^{(k-1)} &= q_k,\\
\eta^{(k)} &= 1.
\end{aligned}$$

A $q_1, q_2, .. q_k$ adott számok lévén, ezen vonatkozások alapján az η-k egymásután kiszámíthatók és így a q-k elegendő adatokat szolgáltatnak az η-k meghatározására. Ezt az összefüggést röviden a következő symbolum által jelölhetjük:

$$\eta = [q_1, q_2 \ldots q_k].$$

Ha az első egyenletet elhagyjuk, akkor η' épen úgy függ $q_2 \ldots q_k$-tól, azaz irhatjuk, hogy:

$$\eta' = [q_2 \ldots q_k],$$

és ép úgy általánosságban:

$$\eta^{(i)} = [q_{i+1}, q_{i+2} \ldots q_k].$$

Rendszerünk egy tetszőleges egyenlete:

$$\eta^{(m)} = q_{m+1}\, \eta^{(m+1)} + \eta^{(m+2)}$$

az új jelölésben:

$$[q_{m+1}, q_{m+2}, q_{m+3} \ldots q_k] = q_{m+1} [q_{m+2}, q_{m+3} \ldots q_k] + [q_{m+3} \ldots q_k], \quad (1.)$$

mely képlet *az új symbolikus számalak értelmezését és recursiv számítási módját* adja, ha még hozzá teszszük, hogy

$$[q_k] = 1.$$

Ebből:

$$[q_{k-1}, q_k] = q_{k-1}\, q_k + 1, \text{ s ú. t.}$$

Világos — más oldalról —, hogy mindenkor lehet két számot a-t és b-t úgy meghatározni, hogy az

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \\ b &= r_1 q_2 + r_2 \\ & \cdots\cdots \\ r_i &= r_{i+1}\, q_{i+2} + r_{i+2} \\ & \cdots\cdots \\ r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + 1 \\ r_{k-1} &= 1 \,.\, q_{k+1} \end{aligned}$$

rendszerben $q_1\, q_2 \ldots q_k$, q_{k+1} tetszőlegesen választott számok. Ekkor visszafelé menve, meg lesz határozva r_{k-1}, $r_{k-2} \ldots r_i \ldots$ és végre b, valamint a, melyek egyszersmind a megelőzők értelmében, mindig relativ törzsszámok lesznek. A legnagyobb közös osztó elméletéből az is világos, hogy minden relativ törzsszámpár ily egyenletrendszerből nyerhető.

Ha ezen egyenletrendszerhez még hozzá csatoljuk ezt: $r_k = 1$, akkor ép oly alaku mint az η-kra vonatkozó, csak hogy q_k után még q_{k+1} is föllép, azaz a és b az előbb bevezetett symbolum alapján így is irható:

$$\begin{aligned} a &= [q_1, q_2 \ldots q_k, q_{k+1}], \\ b &= [q_2, q_3 \ldots, q_k, q_{k+1}]. \end{aligned}$$

De az előbbi fejtegetések értelmében:

$$-ay' - by = 1,$$

vagyis:

$$a\eta' - b\eta = (-1)^{k+1},$$

a mi a tárgyalás alatt lévő alakzatra a következő alapvető tulajdonságot adja:

$$[q_1, q_2 \cdots q_k, q_{k+1}]\,[q_2, \ldots q_k] - [q_2 \ldots q_k, q_{k+1}]\,[q_1 \ldots q_k] = (-1)^{k+1} \quad (2.)$$

mely levezetésénél fogva helyes, akárhány és akárminő számok is a q-k.

A vizsgált számalak most lehozott sajátságából az is következik, hogy *értéke nem változik, ha a q-kat megfordított sorrendben írjuk*, azaz:

$$[q_1, q_2 \ldots q_{k-1}\, q_k] = [q_k, q_{k-1}, \ldots q_2, q_1]. \quad (3.)$$

E tétel helyes, ha $k = 2$; ekkor ugyanis:

$$[q_1, q_2] = [q_2, q_1] = q_1 q_2 + 1$$

és helyes marad $k+1$-re, ha helyes volt k-ra. Mert (2.) szerint:

$$[q_{k+1}, q_k, \dots q_2 q_1] [q_k \dots q_2] - [q_k \dots q_1] [q_{k+1} \dots q_2] = (-1)^{k+1};$$

de itt, ha épen a tételt érvényesnek veszszük, midőn a q-k száma $k+1$ -nél kisebb:

$$[q_2 \dots q_k] = [q_k \dots q_2],$$

$$[q_k \dots q_1] [q_{k+1} \dots q_2] = [q_2 \dots q_{k+1}] [q_1 \dots q_k],$$

és így ami bebizonyítandó volt:

$$[q_1 \dots q_{k+1}] = [q_{k+1}, \dots q_1].$$

Végre még a következő az utolsó q-któl kiinduló, *második recursiv képletet* nyerjük:

$$[q_1 q_2 \dots q_k] = [q_1 \dots q_{k-1}] q_k + [q_1 \dots q_{k-2}], \tag{4.}$$

mely a

$$[q_k, \dots q_1] = q_k [q_{k-1} \dots q_1] + [q_{k-2} \dots q_1]$$

képletből keletkezik, ha minden zárjelben a q-k sorrendjét megfordítjuk.

Ezen Euler által kifejtett algorithmus, mint majd később látjuk, szoros kapcsolatban áll a láncztörtek elméletével; most még segítségével a határozatlan egyenletekre vonatkozó eredményeket is rövidebben fogalmazhatjuk:

Ha a és b relativ törzsszámok, melyeknél a legnagyobb közös osztó számítása a k-adik osztásnál adja maradék gyanánt az egységet és az ezen osztásnal föllépő hányadosok $q_1 q_2 \dots q_k$, *akkor az*

$$ax - by = 1$$

egyenletnek egyik megoldása:

$$x = (-1)^{k+1} [q_2, \dots q_k], \; y = (-1)^{k+1} [q_1, q_2 \dots q_k].$$

A számok előállítása törzsszámokból.

21. Visszatérve az oszthatósági viszonyok elemzésére, — a történt megállapítások értelmében — ismét pozitiv egész számokra szorítkozunk.

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1 \\
b &= r_1 q_2 + r_2 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
r_i &= r_{i+1}\, q_{i+2} + r_{i+2} \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
r_{k-2} &= r_{k-1}\, q_k + 1 \\
r_{k-1} &= 1 \, . \, q_{k+1}
\end{aligned}$$

rendszerben $q_1\, q_2 \ldots q_k,\, q_{k+1}$ tetszőlegesen választott számok. Ekkor visszafelé menve, meg lesz határozva $r_{k-1}, r_{k-2}, \ldots r_i \ldots$ és végre b, valamint a, melyek egyszersmind a megelőzők értelmében, mindig relativ törzsszámok lesznek. A legnagyobb közös osztó elméletéből az is világos, hogy minden relativ törzsszámpár ily egyenletrendszerből nyerhető.

Ha ezen egyenletrendszerhez még hozzá csatoljuk ezt: $r_k = 1$, akkor ép oly alaku mint az η-kra vonatkozó, csak hogy q_k után még q_{k+1} is föllép, azaz a és b az előbb bevezetett symbolum alapján így is irható:

$$\begin{aligned}
a &= [q_1, q_2 \ldots q_k, q_{k+1}], \\
b &= [q_2, q_3 \ldots, q_k, q_{k+1}].
\end{aligned}$$

De az előbbi fejtegetések értelmében:

$$-\, ay' - by = 1,$$

vagyis:

$$a\eta' - b\eta = (-1)^{k+1},$$

a mi a tárgyalás alatt lévő alakzatra a következő alapvető tulajdonságot adja:

$$[q_1, q_2 \ldots q_k, q_{k+1}]\,[q_2, \ldots q_k] - [q_2 \ldots q_k, q_{k+1}]\,[q_1 \ldots q_k] = (-1)^{k+1} \quad (2.)$$

mely levezetésénél fogva helyes, akárhány és akárminő számok is a q-k.

A vizsgált számalak most lehozott sajátságából az is következik, hogy *értéke nem változik, ha a q-kat megforditott sorrendben irjuk*, azaz:

$$[q_1, q_2 \ldots q_{k-1}\, q_k] = [q_k, q_{k-1}, \ldots q_2, q_1]. \qquad (3.)$$

E tétel helyes, ha $k = 2$; ekkor ugyanis:

$$[q_1, q_2] = [q_2, q_1] = q_1 q_2 + 1$$

és helyes marad $k+1$-re, ha helyes volt k-ra. Mert (2.) szerint:

$$[q_{k+1}, q_k, \ldots q_2 q_1] [q_k \ldots q_2] - [q_k \ldots q_1] [q_{k+1} \ldots q_2] = (-1)^{k+1};$$

de itt, ha épen a tételt érvényesnek veszszük, midőn a q-k száma $k+1$ -nél kisebb:

$$[q_2 \ldots q_k] = [q_k \ldots q_2],$$

$$[q_k \ldots q_1] [q_{k+1} \ldots q_2] = [q_2 \ldots q_{k+1}] [q_1 \ldots q_k],$$

és így ami bebizonyítandó volt:

$$[q_1 \ldots q_{k+1}] = [q_{k+1}, \ldots q_1].$$

Végre még a következő az utólsó q-tól kiinduló, *második recursiv képletet* nyerjük:

$$[q_1 q_2 \ldots q_k] = [q_1 \ldots q_{k-1}] q_k + [q_1 \ldots q_{k-2}], \qquad (4.)$$

mely a

$$[q_k, \ldots q_1] = q_k [q_{k-1} \ldots q_1] + [q_{k-2} \ldots q_1]$$

képletből keletkezik, ha minden zárjelben a q-k sorrendjét megfordítjuk.

Ezen Euler által kifejtett algorithmus, mint majd később látjuk, szoros kapcsolatban áll a láncztörtek elméletével; most még segítségével a határozatlan egyenletekre vonatkozó eredményeket is rövidebben fogalmazhatjuk:

Ha a és b relativ törzsszámok, melyeknél a legnagyobb közös osztó számítása a k-adik osztásnál adja maradék gyanánt az egységet és az ezen osztásnal föllépő hányadosok $q_1 q_2 \ldots q_k$, akkor az

$$ax - by = 1$$

egyenletnek egyik megoldása:

$$x = (-1)^{k+1} [q_2, \ldots q_k], \; y = (-1)^{k+1} [q_1, q_2 \ldots q_k].$$

A számok előállítása törzsszámokból.

21. Visszatérve az oszthatósági viszonyok elemzésére, — a történt megállapítások értelmében — ismét pozitiv egész számokra szorítkozunk.

A pozitiv egész számok sorából kiválaszthatjuk kisérleti úton a törzsszámok sorozatát:

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots.$$

egyszerűen úgy, hogy az egymásután következő számokat megvizsgáljuk arra nézve, hogy van-e valódi osztójuk vagy sem.

A törzsszámok sorozata határtalan, azaz bárminő törzsszám is P, mindig létezik egy P-nél nagyobb törzsszám. Legyen ugyanis $p, q \ldots P$ a törzsszámok teljes sorozata P-ig; akkor e számok szorzata az egység hozzáadása után oly számot ad, mely a P-ig előforduló törzsszámok egyikével sem osztható; e szám tehát vagy maga törzsszám, vagy legalább egy P-nél nagyobb törzsszámmal osztható.

A törzsszámok általános törvénye, azaz oly szabály, mely P-ből mindig a közvetetlenül reá következő törzsszámot adná, nem ismeretes.

Minden összetett szám mint törzsszámok szorzata irható. Ha n ily szám, akkor ennek legkisebb valódi osztója p_1 mindenesetre törzsszám; mert különben e valódi osztónak minden valódi osztója ismét osztaná az n-et és p_1 nem volna a legkisebb valódi osztó. Tehát:

$$n = p_1 n',$$

az n' most vagy törzsszám, vagy pedig a használt következtetés ismétlésével:

$$n' = p_2 n'',$$

hol p_2 ismét törzsszám és a p_1-nél nem kisebb. Minthogy az $n', n'' \ldots$ számok e következtetések ismétlésénél folyton kisebbednek, végre mindig törzsszámhoz kell jutnunk, mert ha ez már előbb nem történt, a második tényező végre kettő lenne.

Igy tehát az

$$n = p_1 p_2 \ldots p_{k-1} p_k$$

alakot nyerjük, melyben n meg van adva, mint k törzsszám szorzata. A szorzat keletkezésénél fogva:

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots \leq p_k.$$

Az természetesen előfordulhat, hogy több egymásután következő p egyenlő.

Minden összetett szám csak egyféleképen irható, mint törzsszá-

mok szorzata. Ha ugyanis n-nek még egy második szorzatalakja is létezik:

$$n = q_1 q_2 \dots q_{l-1} q_l,$$

akkor e szorzatban a törzstényezőket szintén nagyságuk szerint rendezve gondolhatjuk. De ekkor szükségkép:

$$p_1 = q_1.$$

Ha ugyanis e számok egyike, például p_1 kisebb q_1-nél, akkor n második alakjában csupa a p_1-nél nagyobb, tehát p_1-től különböző törzsszámok szorzata állna. De e törzsszámok mindegyike, tehát szorzatuk n szintén relativ törzsszám a p_1-hez, a mi lehetetlen, mert hisz az n első alakjánál fogva p_1 osztója az n-nek.

Most már ugyanezt a következtetést ismételhetjük az

$$n' = p_2 p_3 \dots p_k = q_2 q_3 \dots q_l$$

számon, melyből ismét:

$$p_2 = q_2.$$

A következtetések e sorozatából végre még:

$$k = l;$$

mert ha e számok egyike, például k kisebb az l-nél, akkor, miután bebizonyítottuk, hogy

$$p_k = q_k,$$

azt nyernők, hogy

$$1 = q_{k+1} \dots q_l$$

a mi ellentmondást foglal magában, mert a q-k az egységnél nagyobb egész számokat jelentenek.

Ha az n szorzatalakjában az egyenlő tényezőket a hatvány jelének segítségével összefoglaljuk, *az összetett szám általános alakja*:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}.$$

A törzsszámok tehát bizonyos tekintetben az elemek, melyekből minden egész szám össze van téve (szorzás által).

22. Ha d az n osztója, ez nem tartalmazhat (szorzat-alakjában) oly P törzsszámot, mely az n alakjában nem fordúl elő; mert P a d-nek, tehát az n-nek is osztója volna, a mi lehetetlen. — A d nem is tartalmazhatja a $p_1 \dots p_r$ törzsszámokat nagyobb kitevővel, mint a minővel n-ben előfordulnak. Ha például osztható volna $p_1^{\alpha_1+a}$-val, akkor az n számára is

$$n = p_1^{\alpha_1+a}\, m$$

következnék és ebből

$$\frac{n}{p_1^{\alpha_1}} = p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} = p_1^a\, m$$

a mi ismét lehetetlen.

Ha $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, akkor a következő szorzat:

$$(1+p_1+\ldots p_1^{\alpha_1})\,(1+p_2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\ldots(1+p_r+\ldots+p_r^{\alpha_r}) \qquad \text{(A)}$$

tagjaiban az n összes osztóit, mindegyikét csak egyszer és így tehát végértékében az összes osztóknak (1 és n beleértésével) *összegét adja.*

Közvetetlenül világos, hogy a szorzat minden egyes tagja az n osztója. Bármelyik osztó is

$$d = p_a^{\alpha_a}\, p_b^{\alpha_b} \ldots p_e^{\alpha_e},$$

ezt egyszer és csak egyszer nyerjük, ha a $p_a, p_b \ldots p_e$-t tartalmazó szorzókból a $p_a^{\alpha_a}, p_b^{\alpha_b} \ldots p_e^{\alpha_e}$ tagot veszszük, a többiekből pedig az egységet.

Ha n egy egyetlen törzsszám hatványa, p^α, akkor összes osztói:

$$1, p, \ldots p^\alpha,$$

számuk pedig $\alpha+1$. Ha az n osztóinak számát $S(n)$, osztóinak öszszegét $\Sigma(n)$-nel jelöljük, a nyert tétel alapján:

$$S(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}) = S(p_1^{\alpha_1})\; S(p_2^{\alpha_2}) \ldots\; S(p_n^{\alpha_n}), \qquad (1.)$$

$$\Sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}) = \Sigma(p_1^{\alpha_1})\; \Sigma(p_2^{\alpha_2}) \ldots \Sigma(p_r^{\alpha_r}), \qquad (2.)$$

Ha az n-ben foglalt törzsszámokat több osztályba sorozzuk

$$\begin{array}{l} p_{a_1}, p_{a_2}, \ldots \\ p_{b_1}, p_{b_2}, \ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ p_{e_1}, p_{e_2}, \ldots \end{array}$$

ugy hogy minden törzsszám egy és csak egy osztályban fordúl elő és az első, második,.., utolsó osztályba tartozó törzszámokat — mindegyiket az n-ben előforduló hatványon — külön-külön szorozzuk; akkor $P_1, P_2 \ldots P_e$-vel jelölve e szorzatokat, lesz:

$$n = P_1 P_2 \ldots P_e,$$

mely szorzatban ismét *bármelyik két tényező relativ törzsszám.*

Ha most

$$1, \delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)} \ldots P_i$$

a P_i osztóinak teljes sorozata, akkor az

$$(1+\delta_1^{(1)}+\ldots+P_1)(1+\delta_1^{(2)}+\ldots+P_2)\ldots(1+\delta_1^{(e)}+\ldots+P_e) \qquad \text{(B)}$$

szorzat tagjaiban ismét az n összes osztóit, mindegyikét csak egyszer és így végértékében az összes osztóknak összegét adja.

Ez egyszerűen az előbb adott analog tétel folyománya, mert a (B) szorzatnak például i-edik tényezője nem egyéb, mint a történt beosztás értelmében az i-edik osztályba tartozó törzsszámoknak megfelelő, (A)-ban előforduló tényezők szorzata.

E szerint az (1.) és (2.) alatt álló képletek általánosított alakja:

$$S(P_1 P_2 \ldots P_e) = S(P_1)\, S(P_2) \ldots S(P_e), \qquad (3.)$$

$$\Sigma(P_1 P_2 \ldots P_e) = \Sigma(P_1)\, \Sigma(P_2) \ldots \Sigma(P_e). \qquad (4.)$$

Számok, melyeknek egy adott n számmal közös osztójuk nincsen.

23. Az a és b, $-a$ és b, b és $-a$, végre $-a$ és $-b$ számpároknak közös osztója ugyanaz lévén, azon számok meghatározásában, melyeknek nincs az adott n-nel közös osztójuk, elég lesz n-et pozitiv egész számnak venni, mert $-n$-re nézve ugyanazokat a számokat nyerjük. Elég lesz továbbá, ha a megfelelő pozitiv egész számokat keressük, mert a többieket ezekből az előjel változtatása által nyerhetjük.

Föladatunk tehát az lesz, hogy a pozitiv egész számok sorából kikeressük azokat, melyeknek egy bizonyos pozitiv egész számmal nincs közös osztójuk; de ez is még tovább egyszerűsíthető. Bármely a föltételeknek megfelelő a szám

$$a = kn + r$$

alakban irható, hol $r < n$ és nem 0, mert ha a az n többese, akkor természetesen a és n nem relativ törzsszám. De ekkor a és n-nek legnagyobb közös osztója ugyanaz mint n és r-é. Tehát a és n csak akkor relativ törzsszámok, ha r és n ilyenek. Ha tehát

$$r_1\, r_2 \ldots r_l$$

az $1, 2, \ldots n$ sorozat azon tagjai, melyeknek nincs n-nel közös osztójuk, akkor minden ily pozitiv egész szám bennfoglaltatik az

$$r_1 + nt\,,\; r_2 + nt\,, \ldots\, r_l + nt$$

alakokban, hol t tetszőleges egész szám. (Könnyű látni, hogy a megfelelő negativ számokat is megkapjuk, ha t-nek negativ egész számú értéket adunk). E szerint a következő kérdésre kell megfelelnünk:

Hány szám létezik az $1, 2 \ldots n-1, n$ *sorozatban, melynek nincs n-nel közös osztója?*

E számok számát, mely n-nel együtt természetesen meg van adva, $\varphi(n)$-nel szokás jelölni. Adott n-nél természetesen $\varphi(n)$-t egyenesen megolvasás által nyerhetjük. P.

$$\varphi(2) = 1\,,\; \varphi(3) = 2\,,\; \varphi(4) = 2\,,\; \varphi(35) = 24.$$

A $\varphi(1)$ evvel még nincs értelmezve; de a következőkben kényelmes lesz, ha ezen jelnek is adunk értelmet, még pedig legyen:

$$\varphi(1) = 1.$$

A φ jel segítségével még valamivel általánosabb probléma is megoldható. T. i.

Az $1, 2 \ldots n$ *sorozatban, ama számoknak, melyeknek legnagyobb, n-nel közös osztójuk d, száma* $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$. T. i. e sorozatban d-vel osztható:

$$d\,,\; 2d\,, \ldots\, kd\,, \ldots \frac{n}{d}\, d\,;$$

hogy pedig kd és $n = \frac{n}{d}\, d$-nek legnagyobb közös osztója d legyen, arra szükséges és elegendő, hogy k és $\frac{n}{d}$ relativ törzsszámok legyenek. A fölirt számok közül tehát valóban $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$-nél lesz meg a követelt tulajdonság.

Bizonyos egyszerűbb esetekben a $\varphi(n)$ általános meghatározása igen könnyű. Ha először is n törzsszám, minden az n-nél kisebb szám relativ törzsszám az n-hez. Tehát

$$\varphi(p) = p - 1. \tag{1.}$$

Ha n továbbá egy egyetlen törzsszám hatványa, p^α, akkor minden szám, melynek van p-vel közös osztója, p-vel osztható és így tehát az $1, 2 \ldots p^\alpha$ sorozatból kihagyandó:

$$p, 2p, \ldots, \frac{p^\alpha}{p} p,$$

azaz mindössze $\frac{p^\alpha}{p}$ szám. E szerint:

$$\varphi(p^\alpha) = \frac{p^\alpha}{p}(p-1). \tag{2.}$$

24. A $\varphi(n)$ meghatározását tetszőleges n-nél a következő tételre alapitjuk, mely a φ-jelnek egy alapvető tulajdonságát adja: *Legyen* $1, d_1 \ldots d_i \ldots n$ *az* n *osztóinak teljes sorozata akkor:*

$$\varphi(1) + \varphi(d_1) + \ldots + \varphi(d_i) + \ldots + \varphi(n) = n. \tag{3.}$$

Az $1, 2, \ldots n$ számokat osztályozhatjuk ugyanis a szerint, a mint legnagyobb közös osztójuk n-nel $1, d_1, \ldots d_i \ldots n$. Mert eme legnagyobb közös osztó mindenesetre n-nek osztója. Ezen osztályozás tehát kimeríti az n számot és mindegyiküket egy bizonyos osztályba sorozza. De oly szám, melynek legnagyobb közös osztója n-nel d_i, e sorozatban $\varphi\left(\frac{n}{d_i}\right)$ van és így:

$$\varphi\left(\frac{n}{1}\right) + \varphi\left(\frac{n}{d_1}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{n}{d_i}\right) + \ldots \varphi(1) = n;$$

de az itt a φ jel alatt álló számok ismét az n osztóinak teljes sorozatát adják (15. cz.) és így az utoljára nyert egyenlet azonos a (3.)-mal.

Ha most már $n = P_1 P_2$, hol P_1 és P_2 relativ törzsszámok, akkor:

$$\varphi(n) = \varphi(P_1)\,\varphi(P_2) \tag{4.}$$

E tétel először is helyes, ha P_1 és P_2 törzsszámok. Tudjuk ugyanis, hogy, ha p és q törzsszámok:

$$p = 1 + \varphi(p),$$

$$q = 1 + \varphi(q),$$

tehát:

$$pq = 1 + \varphi(p) + \varphi(q) + \varphi(p) \, . \, \varphi(q)$$

Másoldalról a pq összes osztói $1, p, q$ és pq lévén a (3.) szerint:

$$pq = 1+\varphi(p) + \varphi(q) + \varphi(pq).$$

És így valóban:

$$\varphi(pq) = \varphi(p)\,\varphi(q). \tag{5.}$$

Föltéve most már, hogy P_1, ill. P_2 több r, illetőleg s különböző vagy egyenlő törzsszám szorzata, bebizonyítjuk, hogy a tétel reájuk nézve helyes, ha helyes az oly Q_1 és Q_2 relativ törzsszámokra, melyekre nézve a törzstényezők száma r', s' úgy származtatható r és s-ből, hogy az egyik számot kisebbítjük, a másikat pedig vagy meghagyjuk, vagy szintén kisebbítjük.

Ily módon eljárva, a tétel p. helyes lesz; ha $r = 1$, $s = 2$, vagy $r = 2$, $s = 1$, mert helyes, ha $r = 1$, $s = 1$. — Továbbá érvényes ha $r = 2$, $s = 2$, s ú. t., végre minden r és s-re.

Legyen tehát a P_1 és P_2 osztóinak teljes sorozata:

$$1, \delta_1' \ldots \delta_i' \ldots P_1 \text{ és } 1, \delta_1'' \ldots \delta_j'' \ldots P_2$$

akkor (3.) szerint:

$$P_1 = \varphi(1) + \varphi(\delta_1') + \ldots + \varphi(\delta_i') + \ldots + \varphi(P_1)$$
$$P_2 = \varphi(1) + \varphi(\delta_1'') + \ldots + \varphi(\delta_j'') + \ldots + \varphi(P_2)$$

és tekintetbe véve, hogy $\varphi(1) = 1$, ebből:

$$P_1 P_2 = \varphi(1) + \varphi(\delta_1') + \varphi(\delta_1'') + \ldots + \varphi(\delta_i')\,\varphi(\delta_j'') + \ldots + \varphi(P_1)\,\varphi(P_2);$$

de kivéve a P_1, P_2 osztópárt a δ_i', δ_j'' osztókban a törzstényezők száma mindig megfelel az előbb fölállított föltételnek és így

$$\varphi(\delta_i')\,\varphi(\delta_j'') = \varphi(\delta_i'\,\delta_j''),$$

míg a $\delta_i'\,\delta_j''$ szorzatok a 19. czikk értelmében a $P_1\,P_2$ öszes osztóit adják. E szerint

$$P_1\,P_2 = \varphi(1) + \varphi(d_1) + \ldots + \varphi(P_1)\,\varphi(P_2);$$

továbbá

$$P_1\,P_2 = \varphi(1) + \varphi(d_1) + \ldots + \varphi(P_1\,P_2),$$

hol $1, d_1, d_2, \ldots P_1\,P_2$ a $P_1\,P_2$ összes osztóinak sorozata és $P_1\,P_2$ most fölírt két alakja csak az utolsó tagban különbözik; de ekkor ezeknek is egyenlőknek kell lenniök és tehát:

$$\varphi(P_1\,P_2) = \varphi(P_1)\,\varphi(P_2).$$

Ha most már $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, akkor

$$P_1 = p_1^{\alpha_1},\ P_2 = p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

tehető és

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\, \varphi(p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}) = \frac{p_1^{\alpha_1}}{p_1} (p_1 - 1)\, \varphi(p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}).$$

Az utóbbi φ alakban e fölbontást ismételhetjük és ezt mindaddig folytatva, míg a φ jel alatt csak $p_r^{\alpha_r}$ marad meg, végre a $\varphi(n)$ általános meghatározása a következő képlet által történik:

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}) = \frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}}{p_1 p_2 \ldots p_r} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_r - 1), \quad (5.)$$

a mi még, hasonlóan mint az osztók száma és összegénél, úgy is írható:

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\, \varphi(p_2^{\alpha_2}) \ldots \varphi(p_r^{\alpha_r}).$$

IV.

A törtszámok.

A törtszámok értelmezése és az alapmüveletek.

25. Az egész számok körében az osztás föladata — azaz oly szám meghatározása, mely b-vel szorozva, a-t adja — csak akkor lehetséges, ha b az a osztója, minden más esetben kivihetetlen. Ama követelés, hogy az osztás eredményét tetszőleges a és b számokra vonatkozhatólag értelmezhessük, tehát ismét csak *új* számok bevezetése által teljesíthető. Ugyane számokra vezet ama gyakorlati szükség, hogy a «mérés» eredményeit számok által jellemezhessük.

Az a és b számokból tehát ismét új számfogalmat alkotunk, az értelmezéseket úgy választva, hogy, ha a a b többszöröse, az új szám az $\frac{a}{b}$ hányadossal minden tulajdonságában megegyezzék.

Az a és b-ből ily módon meghatározandó számfogalom összes tartalmát egyelőre ismét e jel:

$$\{a, b\}$$

képviselje, melyben megkülönböztetendő az *első* és *második szám*. Czélunknak megfelelőleg az $\{a, b\}$ tulajdonságai mindenesetre úgy állapítandók meg, hogy *bármicsoda a zérustól különböző egész szám is k és l, mindig legyen :*

$$\{ak, bk\} = \{al, bl\} \tag{1.}$$

valamint megfordítva a $\{p, q\}$ és $\{r, s\}$ számok csak akkor legyenek egyenlők, ha találhatunk oly a, b, és 0-tól különböző k, l számokat, hogy

$$p = ak\,,\; q = bk\,,$$
$$r = al\,,\; s = bl\,. \tag{2.}$$

A $k = 0$ eset befogadása után két lehetőséggel állunk szemben. Vagy fönntartani kivánjuk az ujonan értelmezett $=$ jelre, hogy ha $A = B$ és $A = C$, akkor egyszersmind $B = C$ és akkor az összes $\{a, b\}$ számok egyenlők lennének $\{0, 0\}$-sal; tehát nem adhatják az egész számok sorának általánosítását. Vagy föladjuk az egyenlőség elvét, de ekkor vizsgálatunk nem tekinthető többé a számtan általánosításának, mert formális alaptörvényeinek érvényesége megszünik. Ez az első példa amaz az analizisben gyakran föllépő tüneményre, hogy *egyes* számértékek valóban kivételesek, úgy hogy e kivétel újabb általánosítás által meg nem szüntethető.

Az, hogy $A = B$ és $A = C$-ből ne következzék $B = C$ első pillanatra — úgy látszik — nem csak a számtan körén belül, hanem egyáltalában lehetetlen. A látszólagos logikai absurdum megszünik, ha meggondoljuk, hogy az egyenlő szó és jele itt nem azonosságot jelent, hanem egyszerűen azt, hogy B az A-ból bizonyos módon származtatható. Célszerű az $=$ jelet csak akkor használni, ha az előbb idézett u. n. egyenlőség elve fönnáll, itt tehát a tárgyalás ilynemű fogalmazásánál, mely azonban előbbi megjegyzésünk értelmében nem tartozik a mathematikába, az egyenlő szót és jelét mással kellene fölcserélni.

Az egyenlő számok képviselőjének mindig azt vehetni, melyben az értelmező számpár számainak absolut értékei lehető kicsinyek: ha tehát a-nak és b-nek van közös osztója és $a = a'd, b = b'd$ az $\{a, b\}$-től áttérhetünk $\{a', b'\}$-re. Ha d-nek a legnagyobb közös osztót veszszük, két relativ törzsszámból álló számpárra jutunk, melyet tovább kisebbíteni nem lehet. Mert ha (2.)-ben p és q relativ törzsszámok k okvetetlenül $+1$ vagy -1 és így ha $\{p, q\} = \{r, s\}$, mindenesetre

$$|r| \geq |p|, |s| \geq |q|.$$

Szintúgy belátni, hogy *ha p és q, r és s relativ törzsszámok, csak úgy lehet*

$$\{p, q\} = \{r, s\},$$

ha

$$p = r\,,\; q = s \quad \text{vagy} \quad p = -r\,,\; q = -s$$

Mert ekkor ugy k, mint l csak $+1$ vagy -1 lehet, a miből az állított tétel világos.

Igy tehát $\{p, q\} = \{-p, -q\}$. Ellenben $\{p, q\}$ és $\{p, -q\}$, $\{p, q\}$ és $\{-p, q\}$ csak akkor lesznek egyenlők, ha akár p, akár q zérus. Ha t. i. az értelmező számok egyike 0, akkor:

$$\{a, 0\} = \{-a, 0\}, \{0, a\} = \{0, -a\}$$

Minthogy azonban továbbá $\{a, 0\} = \{b, 0\}$ és $\{0, a\} = \{0, b\}$ ha sem a, sem b nem 0, zérust tartalmazó számpárokból csak három különböző szám keletkezik:

$$\{1, 0\}, \{0, 0\}, \{0, 1\}$$

Ily módon az $\{a, b\}$ számoknál az a, b számpárnak csak következő tulajdonságait tekintjük, minden egyéb sajátsága mellőzésével:

Először, ha az a, b számok közt zérus is van, vajjon csak az első, vagy csak a második helyen, vagy végre mindkét helyen áll-e zérus?

Másodszor, ha az a, b számok közt nincs zérus, vajjon melyek az a, b-ből keletkező relativ törzsszámok, ha a, b legnagyobb közös osztójával osztunk. Minthogy pedig $\{a, b\}$ helyett $\{-a, -b\}$ is írható, az a, b előjelei nem is jönnek tekintetbe, hanem csak az vajjon a-nak és b-nek ugyanaz-e az előjele vagy különböző. A második esetben tehát *az $\{a, b\}$ tulajdonságai adva vannak* (1.) *az $\frac{|a|}{D}$ és $\frac{|b|}{D}$ relativ törzsszámok által, ha D az $|a|$ és $|b|$ legnagyobb osztója és* (2.) *az ab előjele által,* mely természetesen pozitiv vagy negativ, amint a és b előjele megegyező vagy különböző.

E szerint az új számnem összes számait megkapjuk — $\{0, 0\}$ és $\{1, 0\}$-on kívül — ha b helyére minden pozitiv számot teszünk és a helyébe azután minden ehhez relativ törzsszámot pozitiv és negativ előjellel.

Ebből is látni, hogy az új számok sokasága egészen más, mint az egész számoké. Minthogy a b-hez relativ törzsszámok sorozata határtalan, a b helyébe pedig bármely egész szám tehető a különböző $\{a, b\}$ oly határtalan sorozatot képeznek, melynek minden egyes tagja ismét a számok határtalan sorozatából áll.

Ha az egész számok sokaságát — mint szokásos — *végtelen* *nagy*nak nevezzük, *az* $\{a, b\}$ *számok sokasága az egész számok sokaságahoz képest kétszeresen végtelen nagy.*

E számok közt az $\{a, 1\}$ számok sokasága ugyanaz mint a közönséges egész számoké, azaz az $\{a, 1\}$ számnak megfelel mindenkor *egy* szám, az a, és a-nak ismét *egy* bizonyos szám, $\{a, 1\}$. T. i. az által, hogy a második helyen 1 áll (különben —1 ugyanezt a szolgálatot tenné) elértük, hogy $\{a, 1\}$ és $\{a', 1\}$ csak akkor lehet egyenlő, ha $a = a'$.

26. Eddigelé az $\{a, b\}$ számok az egész számokkal szemben lényegesen új számfogalmak; az összeadás s ú. t. műveletei az eddigi értelmezések alapján ezekre nem is alkalmazhatók és tetszésünktől függ, hogy mit akarunk e számkörben összeadás, s ú. t. alatt érteni.

Ha azonban az $\{a, b\}$ és $\{c, d\}$ számok összeadását, szorzását úgy értelmezzük, hogy azon esetben, ha ezeknek az előbbi megállapítás értelmében *megfelelnek* a k és l egész számok, az $\{a, b\}$ és $\{c, d\}$ összegének illetőleg szorzatának ismét megfelelnek a $k+l$ és kl számok, akkor azon számoknak, melyek $\{a, 1\}$ alakra hozhatók, tulajdonságai az egész számokéival teljesen azonos kifejezést nyernek. Minden a $k, l, m, \ldots$ számokra vonatkozó igazság helyes marad az $\{k, 1\}$, $\{l, 1\}$, $\{m, 1\} \ldots$ számokra is azaz *az* $\{a, 1\}$ *vagy az ezek összességével identikus* $\{a, —1\}$ *számok azonosak lesznek az egész számokkal, azon* $\{a, b\}$ *számok pedig, melyeknek legegyszerűbb alakjában* b *nem* 1, *vagy* —1, *az eddig vizsgált számsor általánosítását eszközlik.*

Természetesen a műveletek úgy értelmezendők, hogy egyenlő számok egyenlő eredményhez vezessenek. Erre nézve még megjegyzendő, hogy azok és csak azok az $\{a, b\}$ számok, melyekben a a b többese, írhatók úgy, hogy a második szám 1 legyen. Ekkor pedig az

$$\{a, b\} = \left\{\frac{a}{b}, 1\right\}$$

-nek megfelelő egész szám $\frac{a}{b}$. Kell tehát, hogy az $\{a, b\}$ és $\{c, d\}$ számok összeadása és szorzása formálisan ugyanazon törvények által legyen adva, mint az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ hányadosoké.

Azaz a vizsgált számokra nézve az összeadás és szorzás értelmezése:

$$\{a, b\} + \{c, d\} = \{ad + bc, bd\}, \qquad \text{(I.)}$$

$$\{a, b\}\,\{c, d\} = \{ac, bd\}, \qquad \text{(II.)}$$

hol természetesen az eredmény nem változik, ha az $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ jelek helyett a velük aequivalens $\{ak, bk\}$, $\left\{\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right\}$ s ú. t. jelek bármelyikét használjuk, hol k bármely a 0-tól különböző egész szám, t pedig az a és b valamely közös osztója.

27. Az $\{a, b\}$ számokat, ha b nem zérus, *raczionális* számoknak nevezzük. Az $\{1, 0\}$ és $\{0, 0\}$-t, melyeknek nem sokára teljes kizárása szükségesnek mutatkozik, egyelőre mint *kivételes alakokat* vizsgáljuk.

Már az összeadási képlet bizonyítja ezen alakok kivételes voltát. Mert ha A bármely raczionális szám:

$$\{1, 0\} + A = \{1, 0\},$$

$$\{0, 0\} + A = \{0, 0\}.$$

Azaz $\{1, 0\}$ és $\{0, 0\}$ nem változnak bármely raczionális szám hozzáadása által.

Ellenben a raczionális számokra nézve érvényes marad az összeg azon alaptulajdonsága, hogy *$A+B$ és $A+C$ csak akkor egyenlők, ha $B = C$.* Föltéve ugyanis, hogy:

$$\{a, b\} + \{x, y\} = \{a, b\} + \{u, v\},$$

ebből következik:

$$\{ay + bx, by\} = \{av + bu, bv\},$$

és minthogy sem y sem v nem 0, továbbá:

$$\{avy + bvx, bvy\} = \{avy + buy, bvy\}$$

tehát minthogy b sem 0, végre

$$vx = uy.$$

Ha e szorzatok közös értékét T-vel jelöljük, végre valóban:

$$\{x, y\} = \left\{\frac{T}{v}, \frac{T}{u}\right\} = \{uT, vT\} = \{u, v\},$$

ha t. i. u nem 0, mert v nem lehet 0. Ha $u = 0$, akkor x-nek is 0-nak kell lennie. Tehát ismét:

$$\{x, y\} = \{u, v\} = \{0, 1\}.$$

E szerint *a kivonás föladatának a raczionális számok körében mindig egy és csak egy megoldás felel meg.* Az

$$\{a, b\} + \{x, y\} = \{c, d\}$$

identitás lesz, ha:

$$\{x, y\} = \{c, d\} - \{a, b\} = \{bc - ad, bd\}, \qquad \text{(III.)}$$

és az előbbi tétel értelmében más törtszám a föladatnak nem felelhet meg.

Ellenben a kivételes alakokra nézve:

$$\{1, 0\} - \{1, 0\} = A\,,\ \{1, 0\} - A = \{1, 0\} \quad \text{s ú. t.}$$

a hol A tetszőleges raczionális szám.

Hasonlókép állanak a dolgok a szorzás és osztásra nézve. Ha A a $\{0, 1\}$-től különböző raczionális szám:

$$\{1, 0\}\, A \qquad = \{1, 0\},$$

míg

$$\{1, 0\}\, \{0, 1\} = \{0, 0\},$$

$$\{0, 0\}\, A \qquad = \{0, 0\}.$$

Ellenben a raczionális számokra érvényes marad a szorzat azon alaptulajdonsága, hogy *ha A nem felel meg a* 0-*nak, AB és AC csak akkor egyenlők, ha $B = C$.* Föltéve ugyanis, hogy:

$$\{a, b\}\, \{x, y\} = \{a, b\}\, \{u, v\},$$

ebből következik:

$$\{ax, by\} = \{au, bv\},$$

$$\{avx, bvy\} = \{auy, bvy\},$$

és minthogy a nem 0, továbbá:

$$vx = uy,$$

tehát ép úgy mint előbb:

$$\{x, y\} = \{u, v\}.$$

E szerint *az osztás föladatának a raczionális számok körében, ha az osztó nem* 0, *mindig egy és csak egy megoldás felel meg.* Az

$$\{a, b\}\, \{x, y\} = \{c, d\}$$

identitás lesz, ha:

$$\{x, y\} = \frac{\{c, d\}}{\{a, b\}} = \{bc, ad\}, \qquad \text{IV.}$$

hol $\{bc, ad\}$ ismét raczionális szám és nem kivételes alak, mert sem a sem d a föltételek értelmében nem lehet 0 és az előbbi tétel értelmében más raczionális szám a föladatnak nem felelhet meg.

Az osztás kivihetetlen marad a $\{0, 1\}$ osztóval akkor is, ha a kivételes $\{1, 0\}$ és $\{0, 0\}$ alakokat behozzuk. Mert

$$\{0, 1\}\{1, 0\} = \{0, 0\}, \{0, 1\}\{0, 0\} = \{0, 0\}.$$

Tehát egyáltalában bármely $\{x, y\}$ számmal szorozva $\{0, 1\}$ mindig csak $\{0, a\}$ számokat ad.

A raczionális számok körében az alapműveletek, kivéve az osztás amaz esetét, midőn az osztó $\{0, 1\}$, *meghatározott egyértelmű műveletek,* azaz mindenkor egy és csak egy meghatározott számhoz vezetnek. E műveleteknek egész számokra vonatkozólag megállapított általános törvényei változatlanul érvényesek maradnak, ha az e törvények kijelentésében előforduló tetszőleges egész számok helyébe tetszőleges raczionális számokat teszünk, a mint ez a műveletek új értelmezéséből (I—IV) és az illető képletek direkt igazolásából foly.

Az $\{1, 0\}$ és $\{0, 0\}$ kiveteles alakok bevezetése az osztásra vonatkozó megszorítást nem szünteti meg, hanem ellenkezőleg a műveleti törvények e formális általánositását — mint már láttuk — megzavarja. Igy két egyenlő szám különbsége nem volna mindig 0, hanem az $\{1, 0\}$ esetében bármely raczionális szám lehetne.

Nem lehetne többé, bármi számokat értve x, y, z alatt az $x+y = x+z$-ből következtetni, hogy $y = z$. S ú. t. E két alak bevezetése tehát semmiféle előnynyel nem jár, hanem ellenkezőleg új kivételeket hoz be azon általános törvényeknél, melyeknek megtartása volt a számfogalom általánosításánál követendő eljárás módszertani alapelve.

Az $\{1, 0\}$ *és* $\{0, 1\}$ *tehát új számok értelmezésére nem alkalmasak és ezentúl teljesen kizárandók lesznek.*

E kizárás után a $\{p, q\}$ és $\{r, s\}$ *számok egyenlőségének föltétele* egyszerűen:

$$ps = qr.$$

A 25. czikk (2.) alatti képletéből ez mint szükséges föltétel foly, de most elegendő is; mert ha p és q legnagyobb közös osztója k, r és s-é pedig l, tehát $p=ak$, $q=bk$, továbbá $r=cl$, $s=dl$, akkor kell, hogy $ad=bc$ legyen; de itt a és b, c és d relativ törzsszámok, tehát a-nak c-vel és c-nek a-val oszthatónak kell lennie vagyis $a=c$ és épenúgy $b=d$ vagy végre:

$$\{p,q\} = \{r,s\}$$

28. Az egész számok és az $\{a,1\}$ raczionális számok minden tulajdonságukban megegyeznek. Minden amazokra vonatkozó eredmény tehát a megfelelő raczionális szám által is jellemezhető. E két számnem a számtan körében azonos és így az $\{a,1\}$ szám jelzésére egyszerűen az a jel és az egész szám neve használható. Azon raczionális számokat, melyeknek legegyszerűbb alakja nem $\{a,1\}$, *törtszámok*nak nevezzük. A raczionális számok tehát vagy egész, vagy törtszámok. Minthogy pedig

$$\{a,b\} = \frac{\{a,1\}}{\{b,1\}} = \frac{a}{b}$$

szerint minden raczionális szám mint két egész szám hányadosa irható, az eddig használt számcsoportok csak átmeneti jelzésnek tekintendők és *az* $\{a,b\}$ *számot ezentúl* $\frac{a}{b}$ *alakban irjuk*, hol a a számláló, b a nevező, a mivel a törtszámok közönséges jelzését bevezettük. Ezen általánosított hányadosra a 9. czikkben lehozott törvények érvényesek maradnak. Mert (I.) és (II.) szerint:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Az $\frac{a}{b}$ *jelnek nincs (számtani) értelme, ha* $b=0$; azaz a 0-sal nem lehet osztani.

A használt kifejezés teljesen megfelel a törtszámok alkalmazásánál előforduló tényleges viszonyoknak. Ha p. az A és B egyenes vonalakban foglalt hosszegységek száma a és b és egy második mérésnél a B vonalat veszszük hosszegységnek, akkor az A-ban foglalt új hosszegységek száma $\frac{a}{b}$. De ha $b=0$, akkor B nem használható mint hosszegység (mert nincs kiterjedése, tehát nem is vonal) és így az $\frac{a}{0}$ valóban semmit sem mondó, értelem nélküli alak.

Tisztán számtanilag is $\frac{a}{b}$ az a szám, mely b-vel szorozva a-t adja; de ha $b = 0$, akkor ily szám nem létezik és a raczionális számsor tágítása által nem is nyerhető a számtani alapelvek megsértése nélkül. *A 0 e kirekesztése az osztásnál elkerülhetetlen.* Mert ha volna egy a szám, úgy hogy:

$$0 . a = a,$$

és a szorzás törvényei változatlanok maradnának, akkor

$$0 . (a + b) = a.$$

Tehát vagy többértelmű művelet volna az osztás, mert $\frac{a}{0}$ lehet a és $a + b$ vagy pedig volna:

$$a + b = a,$$

és ekkor két egyenlő szám különbsége bármicsoda szám lehetne, azaz a kivonás nem volna egyértelmű művelet.

Ha $+A$ és $-A$ ismét $0 + A$ és $0 - A$ helyett áll, akkor

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b},$$

és így elégséges oly törtjeleket használni, hol számláló és nevező pozitiv egész szám.

Ha p és q pozitiv, a $\frac{p}{q}$-t *pozitiv*, a $-\frac{p}{q}$-t *negativnak* mondjuk, mely elnevezés arra az esetre, midőn p a q többszöröse, a megfelelő egész számoknál tett megállapitásokkal megegyezik, tehát amaz elnevezés általánositása.

Az $\frac{a}{b}$ és $-\frac{a}{b}$, melyek közül, ha a nem 0, az egyik pozitiv, a másik negativ és melyeknek összege 0, ismét *ellentett számok.*

Az $\frac{a}{b}$ szám *absolut értéke* alatt értjük ismét az $\frac{a}{b} - 0$ és $0 - \frac{b}{a}$ különbségek közül azt, melynek értéke pozitiv. E szerint:

$$\left|-\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|,$$

valamint továbbá:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

A raczionális számok ismét összehasonlithatók nagyságukra nézve. Az A-ról azt mondjuk, hogy *nagyobb* vagy *kisebb*, mint B,

$$A > B\,,\ A < B$$

a mint az $A - B$ pozitiv vagy negativ. Ha $A - B$ sem pozitiv, sem negativ, hanem 0, akkor $A = B$.

E szerint minden pozitiv szám nagyobb mint 0, minden negativ szám kisebb mint 0.

Valamely szám, p. u az A és B közt *fekszik*, ha $A < u < B$.

Az A-t *valódi tört*nek nevezzük, ha $|A| < 1$; *áltört*nek, ha $|A| > 1$. E szerint $\frac{a}{b}$ valódi vagy áltört, a mint

$$|a| < |b| \quad \text{vagy} \quad |a| > |b|.$$

Ha tehát nem $|a| = |b|$, a mikor $\frac{a}{b} = \pm 1$, az $\frac{a}{b}$ és $\frac{b}{a}$ számok közül az egyik valódi, a másik áltört.

Ha A és B szorzata 1, mint p. $\frac{a}{b}$ és $\frac{b}{a}$-é, az A és B számok *reciprok számok*nak neveztetnek. Mint reciprok számok csak $+1$ és -1 felelnek meg önmaguknak.

Minden áltört vagy egész szám, vagy egész szám és valódi tört összege. Ha az $\frac{a}{b}$ áltört pozitiv, akkor a lehet többszöröse a b-nek és akkor $\frac{a}{b}$ egész szám; a másik esetben

$$a = bq + r$$

irható, hol q, r egész számok továbbá $r < b$, tehát végre:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

Ebből a $-\frac{a}{b}$ esete is világos.

Minden raczionális szám, mely nem egész szám, két egymás után következő egész szám között fekszik. Az előbbi jelzések megtartásával $\frac{a}{b}$ a q és $q+1$ közt fekszik, $-\frac{a}{b}$ pedig $-q$ és $-q-1$ közt. Az $\frac{a}{b}$-ben foglalt legnagyobb egész számot $\mathcal{E}\left(\frac{a}{b}\right)$-vel jelöljük, úgy hogy ismét az előbbi jelekkel:

$$\mathcal{E}\left(\frac{a}{b}\right) = q\,,\ \mathcal{E}\left(-\frac{a}{b}\right) = -(q+1)$$

Az $\mathcal{E}$ jel értelmét úgy is fejezhetjük ki, hogy $\mathcal{E}(A)$ *azon egész* *szám, melyre nézve $A - \mathfrak{E}(A)$ pozitiv és az egységnél kisebb.* Az $\mathfrak{E}$ definicziója egész számú A-ra is kiterjeszkedik; ekkor $\mathfrak{E}(A) = A$.

29. Meghatározott számmal levő raczionális számok, melyek közt egyenlők is lehetnek:

$$r_1, r_2, \ldots r_{n-1}, r_n$$

mindenkor *nagyságuk szerint rendezhetők,* azaz oly egymásutánjuk állapítható meg, hogy bármelyikük a megelőzőknél vagy *sohasem kisebb* vagy *sohasem nagyobb.* Erre nézve képezzük bármelyik r_i és minden más r_k különbségét és r_k-t az r_i elé vagy utána (a második esetben megfordítva) teszszük, a mint $r_i - r_k$ pozitiv vagy negativ. Az r_i-vel egyenlő tagok közvetlenül r_i-hez csatolandók és sorrendjük természetesen közömbös. Most az r_i elé és utána jövő számokat ugyanezen elv szerint rendezzük; s ú. t. Ez által vagy *soha nem kisebbedő számok sorozatát:*

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \ldots \leq r_n;$$

vagy *soha nem nagyobbodó számok sorozatát:*

$$r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \ldots \geq r_n$$

nyerjük. Ha az r-ek közt nincsenek egyenlők, ezek *nagyobbodó,* ill. *kisebbedő számok sorozatai.*

Két raczionális szám közt mindig csak meghatározott számú egész szám fekszik.

Ha r_1 és r_2 bármely raczionális szám, mindig vannak határtalan számmal raczionális számok, melyek r_1 és r_2 közt feküsznek.

P. ha n bármicsoda pozitiv egész szám:

$$r_1 + \frac{r_2 - r_1}{n+1},\ r_1 + 2\frac{r_2 - r_1}{n+1}, \ldots r_1 + k\frac{r_2 - r_1}{n+1}, \ldots r_1 + n\frac{r_2 - r_1}{n+1}$$

n ily szám lesz. Ezeken a számokon is látni, hogy számuk határtalan; de egész direkt módon is képezhető az r_1 és r_2 közt fekvő számok határtalan sorozata:

$$r_2 - \frac{r_2 - r_1}{2},\ r_2 - \frac{r_2 - r_1}{3},\ r_2 - \frac{r_2 - r_1}{4}, \ldots,\ r_2 - \frac{r_2 - r_1}{n}, \ldots$$

mely valóban határtalanul folytatható.

A tárgyak egy bizonyos sokasága megszámlálható (abzählbar), ha ezek úgy vonatkoztathatók a pozitiv egész számok sorára, hogy *minden egyes tárgyhoz (a sokaság minden eleméhez) egy és csak egy meghatározott szám tartozzék, különböző tárgyakhoz (elemekhez) pedig különböző számok.*

Első pillanatra talán feltünő, de mégis igen egyszerűen bizonyitható, hogy:

A raczionális számok sokasága megszámlálható sokaság.

Vegyük először az egynél nem nagyobb pozitiv számokat, már úgy írva, hogy a számláló és nevező relativ törzsszám. Rendezzük ezeket először nevezőjük szerint, úgy hogy a kisebb nevezőjű megelőzze azt, a melynek nevezője nagyobb. Az ugyanazon nevezővel ellátottakat irjuk pedig egyszerűen nagyobbodó sorrendben. Igy a következő sorozatot kapjuk:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$

Világos, hogy így egyet és minden pozitiv valódi törtet fölirunk, még pedig úgy, hogy minden ilyennek megfelel egy bizonyos sorszám.

Ha most e sor elé írjuk a 0-t és e sor egy-egy tagja, r helyébe a következő négyet teszszük:

$$r, -r, \frac{1}{r}, -\frac{1}{r},$$

az összes raczionális számok ily sorozatát nyerjük; és minden raczionális szám az által jellemezhető, hogy sorszámát (egy pozitiv egész számot) megadjuk.

Hatványok tetszőleges egész számú kitevővel.

30. Eddigelé mint hatvány kitevője csak pozitiv egész szám volt használható. Ha a zérusnak, illetőleg a $-k$ negativ egész számnak, mint kitevőnek jelentését következőkép értelmezzük:

$$a^0 = 1,$$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k},$$

az a^m és a^n hatványok hányadosa, mely eddig a mint

$$m > n, \; m = n, \; m < n$$

három különböző alakban lett volna irandó:

$$a^{m-n}, 1, \frac{1}{a^{n-m}},$$

mindig ugyanazon módon lesz kifejezhető:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

A hatványjelzés ezen általánosítása nemcsak jogosult, hiszen a bevezetett jelek újak, hanem czélszerű is, mert az általánosított hatványalakra nézve az előbb megállapitott műveleti törvények érvényesek maradnak. Azaz:

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

bármicsoda egész számok legyenek is m és n; ha m vagy n, vagy mindkettő nem pozitiv szám, az illető hatványalak értékének behelyettesítése által a képletek közvetetlenül igazolhatók.

Közönséges láncztörtek.

31. Ha $\frac{a}{b}$ pozitiv és nem egész szám, a és b relativ törzsszámok és $q_0 = \mathfrak{E}\left(\frac{a}{b}\right)$, akkor:

$$a = bq_0 + r_0$$

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b}$$

hol r_0 és b ismét relativ törzsszámok és $r_0 < b$. Ha r_0 és b-re a legnagyobb közös osztó kikeresésére szolgáló eljárást alkalmazzuk, lesz:

$$b = r_0 q_1 + r_1$$

$$r_0 = r_1 q_2 + r_2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$r_{k-2} = r_{k-1} q_k + 1$$

$$r_{k-1} = q_{k+1}.$$

Az első egyenletből:

$$\frac{b}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0}$$

vagy:

$$\frac{r_0}{b} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{r_0}}$$

A többiekből hasonlókép:

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{k-1}}{r_{k-2}} = \frac{1}{q_k + \frac{r_k}{r_{k-1}}}$$

$$\frac{r_k}{r_{k-1}} = \frac{1}{q_{k+1}}$$

A nyert értékeket visszafelé behelyetesítve, lesz:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{\cdot}{\cdot \; \cdot + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{q_{k+1}}}}}}$$

Ez az úgynevezet *közönséges láncztört*, ellentétben az *általános láncztört* alakjával, melyben az egyes részlet-törtek számlálói nem egyenlők egygyel és a nevezők nem egész számok, hanem mindketten tetszőleges számok. A q-k a láncztört egymás után következő hányadosai; czélszerű q_0-t «zérusodik» hányadosnak nevezni, azután q_1 az első, s ú. t. Térkimélés végett e láncztörtet néha röviden így jelöljük:

$$q_0 + \frac{1}{q_1} \dot{+} \frac{1}{q_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{q_{k+1}}$$

hol a $\dot{+}$ fölé tett pont azt jelenti, hogy az utána következő alak nem a törthez, hanem ennek nevezőjéhez csatolandó. Ezen leginkább az általános láncztörtnél használandó jelzést közönséges láncztörtnél a következő még egyszerűbbel cseréljük föl:

$$(q_0, q_1, q_2, \dots q_k, q_{k+1}),$$

melynek értelmezése a következő recursiv képletekben foglaltatik:

$$(q_0, q_1, \dots q_k, q_{k+1}) = q_0 + \frac{1}{(q_1 \dots q_k, q_{k+1})}$$

$$= \left(q_0, q_1 \dots, q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right)$$

32. Ama megfordított föladat, a közönséges láncztört alakjából vagyis a hányadosokból visszakövetkeztetni az eredeti $\frac{a}{b}$ törtre, EULER algorithmusa segítségével közvetetlenül megoldható. A megelőző czikk elején fölírt egyenletek ugyanis teljesen megegyeznek a 20-ik czikkben állókkal, csakhogy a q és r számok sorozata q_0 és r_0-al kezdődik q_1 és r_1 helyett, de ez csak az elnevezések változása és így

$$\frac{a}{b} = \frac{[q_0, q_1, \dots, q_k, q_{k+1}]}{[q_1, q_2 \dots q_{k+1}]}.$$

A láncztörtből a q_m-hoz hozzáadandó rész elhagyása által keletkező alakzatot, mely $k = 0$ és 1 legegyszerűbb esetek kivételével ismét láncztört, a láncztört *m-edik közeledő törtjének* nevezzük és $\frac{S_m}{N_m}$-val jelöljük. De ép úgy mint előbb

$$\frac{S_m}{N_m} = (q_0, q_1, \dots q_m)$$

-ből következik

$$\frac{S_m}{N_m} = \frac{[q_0, q_1 \dots q_m]}{[q_1 \dots q_m]},$$

még pedig úgy, hogy az előbb végzett tárgyalások értelmében külön:

$$S_m = [q_0, \dots q_m], \; N_m = [q_1 \dots q_m],$$

és e számértékek már relativ törzsszámok.

Az első közeledő törtek:

$$\frac{S_0}{N_0} = \frac{q_0}{1}, \; \frac{S_1}{N_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1},$$

és általánosságban a 20. czikk (4.) képlete értelmében:

$$\frac{S_m}{N_m} = \frac{q_m S_{m-1} + S_{m-2}}{q_m N_{m-1} + N_{m-2}} \tag{1.}$$

E képlet alapján valamely láncztört a következő, könnyen érthető schema szerint számítható. Ha p. az adott láncztört: (1, 2, 4, 5, 3, 1), lesznek a közeledő törtek:

$$\begin{array}{l} q_k = \quad 1,\quad 2,\quad 4,\quad 5,\quad 3,\quad 1 \\ \dfrac{S_k}{N_k} = \dfrac{1}{1}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{13}{9}, \dfrac{68}{47}, \dfrac{217}{150}, \dfrac{285}{197} \end{array}$$

hol $\frac{285}{197}$ a láncztört értéke.

A 20. czikk (2) képlete a mostani jelölések szerint, ha S_m, N_m, S_{m-1} és N_{m-1}-re alkalmazzuk, átmegy a következőbe:

$$S_m N_{m-1} - S_{m-1} N_m = (-1)^{m+1}, \tag{2.a}$$

a mi még a következő alakban is írható:

$$\frac{S_m}{N_m} - \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{N_{m-1} N_m}. \tag{2.b}$$

A közeledő törtek keletkezésénél fogva világos, hogy

$$S_0, S_1, S_2 \ldots \text{ és } N_0, N_1, N_2 \ldots$$

növekedő pozitiv egész számok sorozatai, tehát

$$\frac{1}{N_0 N_1}, \frac{1}{N_1 N_2}, \frac{1}{N_2 N_3}, \ldots$$

folyton kisebbedő számok.

Ennek következtében:

$$\begin{aligned} \frac{S_m}{N_m} - \frac{S_{m-2}}{N_{m-2}} &= \frac{(-1)^{m-1}}{N_{m-1} N_m} + \frac{(-1)^{m-2}}{N_{m-2} N_{m-1}} \\ &= (-1)^{m-2} \left(\frac{1}{N_{m-2} N_{m-1}} - \frac{1}{N_{m-1} N_m} \right) \end{aligned}$$

pozitiv vagy negativ, a mint m páros vagy páratlan, azaz ugyancsak m páros vagy páratlan jellege szerint $\frac{S_m}{N_m}$ nagyobb vagy kisebb, mint $\frac{S_{m-2}}{N_{m-2}}$. E szerint

$$\frac{S_0}{N_0}, \frac{S_2}{N_2}, \frac{S_4}{N_4}, \ldots \tag{A}$$

növekedő számok sorozata, ellenben

$$\frac{S_1}{N_1}, \frac{S_3}{N_3}, \frac{S_5}{N_5}, \ldots \tag{B}$$

kisebbedő számok sorozata.

Általánosságban az m-edik közeledő tört így is írható:

$$\frac{S_m}{N_m}=\frac{S_0}{N_0}+\left(\frac{S_1}{N_1}-\frac{S_0}{N_0}\right)+\left(\frac{S_2}{N_2}-\frac{S_1}{N_1}\right)+\ldots+\left(\frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}-\frac{S_{m-2}}{N_{m-2}}\right)+\left(\frac{S_m}{N_m}-\frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}\right),$$

vagyis:

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_m}{N_m}=\frac{S_0}{N_0}+\frac{1}{N_0N_1}-\frac{1}{N_1N_2}+\frac{1}{N_2N_3}-\ldots+(-1)^{m-2}\frac{1}{N_{m-1}N_{m-2}}\\ +(-1)^{m-1}\frac{1}{N_mN_{m-1}},\end{aligned}\right| \tag{3.}$$

hol a jobb oldalon a tagok előjele a másodiktól kezdve váltakozik.

Ugyanígy kifejezhető a láncztört maga, mely nem más mint $\frac{S_{k+1}}{N_{k+1}}$ és így:

$$\frac{S_{k+1}}{N_{k+1}}-\frac{S_m}{N_m}=(-1)^m\frac{1}{N_{m+1}N_m}+(-1)^{m+1}\frac{1}{N_{m+2}N_{m+1}}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{N_{k+1}N_k}$$

$$=(-1)^m\left(\frac{1}{N_{m+1}N_m}-\frac{1}{N_{m+2}N_{m+1}}+\ldots+(-1)^{k-m}\frac{1}{N_{k+1}N_k}\right),$$

hol a zárjelben álló tagok előjele váltakozó, a tagok absolut értéke pedig mindig kisebbedik. E szerint minden negativ tag a megelőző pozitivval egyesítve pozitivot ád és maga az egész zárjelben álló összeg pozitiv, így tehát *a láncztört értéke,* $\frac{S_{k+1}}{N_{k+1}}$ *nagyobb a párosrendű közeledő törteknél és kisebb a páratlan rendűeknél.* Végre ugyancsak az utolsó kifejezés azt is mutatja, hogy:

$$\left|\frac{S_{k+1}}{N_{k+1}}-\frac{S_m}{N_m}\right|$$

azaz *az m-edik közeledő tört és a láncztört különbségenek absolut értéke annál kisebb, minél nagyobb m.*

T. i. e különbségek absolut értékei m és $m+1$-re:

$$\Delta_m=\frac{1}{N_{m+1}N_m}-\frac{1}{N_{m+2}N_{m+1}}+\frac{1}{N_{m+3}N_{m+2}}-\ldots$$

$$\Delta_{m+1}=\qquad\frac{1}{N_{m+2}N_{m+1}}-\frac{1}{N_{m+3}N_{m+2}}+\ldots$$

azaz:

$$\Delta_m - \Delta_{m+1} = \frac{1}{N_{m+1}\,N_m} - 2\frac{1}{N_{m+2}N_{m+1}} + 2\frac{1}{N_{m+3}\,N_{m+2}} - \dots$$
$$= \frac{1}{N_m\,N_{m+1}\,N_{m+2}}(N_{m+2} - 2N_m) + \text{poz. szám},$$

de $N_{m+2} - 2N_m$ mindenesetre pozitiv; mert

$$N_{m+2} = q_{m+2}\,N_{m+1} + N_m\,,$$

és q_{m+2} legalább is 1, míg $N_{m+1} > N_m$; tehát $\Delta_m - \Delta_{m+1}$ valóban pozitiv.

A közeledő tört elnevezését indokolja végre a következő fontos tétel.

A láncztört értékét bármely tört csak akkor közelítheti meg jobban, mint $\frac{S_m}{N_m}$, *ha nevezője nagyobb mint* N_m. Ha az ily tört p. $\frac{A}{B}$ és a láncztört értéke röviden L, akkor mindenesetre:

$$\frac{S_m}{N_m},\ \frac{A}{B},\ L,\ \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}$$

a számoknak vagy soha nem kisebbedő, vagy soha nem nagyobbodó sorozatát képezik és így az

$$\frac{S_m}{N_m} - \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}} \text{ és } \frac{A}{B} - \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}$$

egyenlő előjelű különbségek; még pedig az elsőnek absolut értéke nagyobb a másodikénál, tehát minthogy mindkét kifejezés előjele, ugyanaz mint $(-1)^{m-1}$-é:

$$\frac{1}{N_{m-1}\,N_m} > (-1)^{m-1}\frac{AN_{m-1} - BS_{m-1}}{BN_{m-1}},$$

hol az előzmények szerint $(-1)^{m-1}(AN_{m-1} - BS_{m-1})$ okvetetlenül pozitiv egész szám, tehát BN_{m-1}-gyel szorozva, $\frac{B}{N_m}$ nagyobb egy pozitiv egész számnál es így $B > N_m$.

E következtetés csak akkor nem helyes, ha a jobb oldalon álló kifejezés 0, de ekkor

$$\frac{A}{B} = \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}$$

nem más mint az m—1-edik közeledő tört, melyre nézve a tétel szintén helyes.

Általános láncztörtek.

33. Az általános láncztört alakja:

$$\frac{p_0}{q_0}+\cfrac{p_1}{q_1+\cfrac{p_2}{q_2+\cfrac{\ddots}{\ddots+\cfrac{p_k}{q_k+\cfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}}}}}$$

mely ismét rövidebben írva:

$$\frac{p_0}{q_0}+\frac{p_1}{q_1}\dot{+}\frac{p_2}{q_2}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{p_k}{q_k}\dot{+}\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}},$$

hol $\frac{p_0}{q_0}$ megelőzi a tulajdonképeni láncztörtet és megfelelőleg a rövidített jelölésnél az első $+$ jel fölött nincsen pont.

A láncztört m-edik közeledő törtje alatt itt is a következő kifejezést értjük

$$\frac{S_m}{N_m}=\frac{p_0}{q_0}+\frac{p_1}{q_1}\dot{+}\frac{p_2}{q_2}\dot{+}\ldots\dot{+}\frac{p_m}{q_m},$$

hol S_m és N_m a kiszámításnál keletkező tört nevezőjét jelentik, *esetleges rövidítés nélkül,* míg:

$$\frac{S_0}{N_0}=\frac{p_0}{q_0}$$

Ekkor:

$$\frac{S_1}{N_1}=\frac{p_0\,q_1+q_0\,p_1}{q_0\,q_1}$$

és

$$\frac{S_2}{N_2}=\frac{p_0\left(q_1+\frac{p_2}{q_2}\right)+q_0\,p_1}{q_0\left(q_1+\frac{p_2}{q_2}\right)}=$$

$$=\frac{S_1\,q_2+S_0\,p_2}{N_1\,q_2+N_0\,p_2}.$$

Általánosságban is:

$$\frac{S_m}{N_m}=\frac{S_{m-1}\,q_m+S_{m-2}\,p_m}{N_{m-1}\,q_m+N_{m-2}\,p_m}, \tag{1.a}$$

mert e képlet érvényben marad $m+1$-re nézve, ha m-re helyes volt.

$\frac{S_{m+1}}{N_{m+1}}$ ugyanis $\frac{S_m}{N_m}$-ből azáltal keletkezik, hogy q_m helyébe $q_m+\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ -et teszünk. Tehát:

$$\frac{S_{m+1}}{N_{m+1}}=\frac{S_{m-1}\left(q_m+\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right)+S_{m-2}\,p_m}{N_{m-1}\left(q_m+\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}\right)+N_{m-2}\,p_m}=$$

$$=\frac{(S_{m-1}\,q_m+S_{m-2}\,p_m)\,q_{m+1}+S_{m-1}\,p_{m+1}}{(N_{m-1}\,q_m+N_{m-2}\,p_m)\,q_{m+1}+N_{m-1}\,p_{m+1}}=$$

$$=\frac{S_m\,q_{m+1}+S_{m-1}\,p_{m+1}}{N_m\,q_{m+1}+N_{m-1}\,p_{m+1}},$$

a mi bebizonyítandó volt. Megjegyzendő, hogy ez a kezdetben tett megállapítás értelmében csak rövidebb irásmód e helyett:

$$S_m=S_{m-1}\,q_m+S_{m-2}\,p_m,$$

$$N_m=N_{m-1}\,q_m+N_{m-2}\,p_m. \qquad (1.b)$$

Ebből:

$$S_m\,N_{m-1}-N_m\,S_{m-1}=-(S_{m-1}\,N_{m-2}-N_{m-1}\,S_{m-2})\,p_m$$

Minthogy pedig:

$$S_1\,N_0-N_1\,S_0=q_0^2 p_1,$$

lesz továbbá:

$$S_2N_1-N_2S_1=-q_0^2\,p_1p_2$$

$$S_3N_2-N_3S_2=q_0^2\,p_1p_2p_3$$

és ép úgy átalánosságban:

$$S_mN_{m-1}-N_mS_{m-1}=(-1)^{m-1}\,q_0^2\,p_1p_2\dots p_m, \qquad (2.a)$$

vagy

$$\frac{S_m}{N_m}-\frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}=(-1)^{m-1}q_0^2\,\frac{p_1\,p_2\dots p_m}{N_{m-1}\,N_m}. \qquad (2.b)$$

Az m-edik közeledő tört tehát így is írható:

$$\frac{S_m}{N_m}=\frac{S_0}{N_0}+\left(\frac{S_1}{N_1}-\frac{S_0}{N_0}\right)+\left(\frac{S_2}{N_2}-\frac{S_1}{N_1}\right)+\dots+\left(\frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}-\frac{S_{m-2}}{N_{m-2}}\right)+\left(\frac{S_m}{N_m}-\frac{S_{m-1}}{N_{m-1}}\right)$$

vagyis

$$\frac{S_m}{N_m}=\frac{p_0}{q_0}+q_0^2\left(\frac{p_1}{N_0N_1}-\frac{p_1p_2}{N_1N_2}+\frac{p_1p_2p_3}{N_2N_3}-\dots+\right.$$

$$\left.+(-1)^{m-2}\frac{p_1\dots p_{m-1}}{N_{m-2}N_{m-1}}+(-1)^{m-1}\frac{p_1\dots p_m}{N_{m-1}\,N_m}\right) \qquad (3.)$$

34. *Ha a p és q számok mindannyian pozitivok*, az (1.b) képletek értelmében S_m és N_m minden m-re nézve szintén pozitiv lesz. Minthogy pedig:

$$\frac{p_1 p_2 \cdots p_m}{N_{m-1} N_m} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_m}{N_{m-1}(N_{m-1} q_m + N_{m-2} p_m)}$$

és ezen esetben az $N_{m-1} q_m$ kihagyása a nevezőt kisebbíti, a törtet tehát nagyobbítja, végre:

$$\frac{p_1 p_2 \cdots p_m}{N_{m-1} N_m} < \frac{p_1 \cdots p_{m-1}}{N_{m-2} N_{m-1}}. \tag{4.}$$

Azonban:

$$\frac{S_m}{N_m} - \frac{S_{m-2}}{N_{m-2}} = (-1)^{m-2} q_0^2 \left(\frac{p_1 \cdots p_{m-1}}{N_{m-2} N_{m-1}} - \frac{p_2 \cdots p_m}{N_{m-1} N_m} \right),$$

és így

$$\frac{S_0}{N_0}, \frac{S_2}{N_2}, \frac{S_4}{N_4}, \ldots, \text{ és } \frac{S_1}{N_1}, \frac{S_3}{N_3}, \frac{S_5}{N_5}, \ldots$$

növekedő, illetőleg kisebbedő számok sorozatai.

Végre még a (4.) következőkép is fejezhető ki, hogy:

$$\left| \frac{S_m}{N_m} - \frac{S_{m-1}}{N_{m-1}} \right|,$$

két egymásután következő közeledő tört különbségének absolut értéke annál kisebb, minél nagyobb a közeledő törtek rendszáma, m.

V.

Az algebrai egyenletek megoldásának föladata.

Az algebrai egyenletek problémája.

35. Egész számok összeadása, kivonása vagy szorzása mindig ismét egész számhoz vezet. Ezért e három műveletet és minden belőlük összeállitott művelet-sorozatot *egész művelet*nek nevezzük.

Raczionális számok összeadása, kivonása, szorzása és osztása, (az osztásnál természetesen a 0 mint osztó nem fordulván elő) mindig ismét raczionális számhoz vezet. Ezért a négy alapműveletet és minden belőlük összeállitott művelet-sorozatot *raczionális művelet*nek nevezzük, melynek tehát speciális esete az egész művelet.

Minden raczionális művelet épen ugy megfordítható, mint a négy alapművelet. Azaz ha bizonyos $a, b, c, \ldots$ számokból valamely meghatározott művelet által a K számot nyerjük, megfordítva fölvehetjük K-t a probléma adatai közé és kereshetjük p. a megfelelő értékét, a mikor tehát az adott számértékek: $b, c \ldots$ és K. E föladat nem más mint az algebrai egyenletek megoldásának problémája.

Ha az ismeretlen és még meghatározandó számértéket szokásos módon x-szel jelöljük, a probléma a következő analitikai fogalmazást nyeri:

$$\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n} = K.$$

Minden az x és bizonyos számértékekből a négy alapművelet által keletkező kifejezés ugyanis a baloldalon álló alakra hozható, melyet *az x-re nézve raczionális kifejezés*nek nevezünk.

Ha x oly számérték, melynek behelyettesítésénél a baloldal értéke valóban K, a nevező e behelyettesítés után nem lehet 0, mert különben a számítás az osztásnál megakad és nem juthatunk K-hoz; szabad tehát a nevezővel szorozni és ekkor ugyanazon x-re nézve:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0, \qquad (1.)$$

mely alakot az u. n. *rendezés* által nyerjük. A baloldalt itt az x-re nezve — az x legnagyobb hatvány kitevője szerint — *n-edfokú egész kifejezés*nek mondjuk; maga az (1.) *n-edfokú algebrai egyenlet*, melyben x, az ismeretlen úgy határozandó meg, hogy (1.) identitás legyen. Az x-nek ily módon meghatározott értékei az egyenlet *gyökei*, maga az x meghatározása az egyenlet *megoldása.*

Az algebrai egyenletek megoldásának problémája tehát nem más, mint a raczionális műveletek megfordításának föladata.

A raczionális számok körében a megfejtendő kérdés tehát a következő: *Melyek azon raczionális számok, melyek x helyébe téve, az x egy bizonyos n-edfokú egész kifejezését zérussá teszik?*

Az algebrai egyenletek raczionális gyökei.

36. Adva lévén az

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

egyenlet, végre meg föltehetjük, hogy *az összes A együtthatók egész* *számok,* mert ha az A-k közt törtszámok is vannak, szorozhatunk a nevezők legkisebb közös többesével, a mi által a föladat nem változik. Ha most már van egy raczionális szám $\frac{p}{q}$, mely az egyenlet gyöke, akkor e raczionális számra nézve természetesen föltehetjük, hogy már legegyszerűbben van fölírva, azaz p-nek és q-nek nincs közös osztója. Ekkor:

$$A_0 \frac{p^n}{q^n} + A_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{p}{q} + A_n = 0,$$

és minthogy q nem 0, ha q^n-nel szorzunk:

$$A_0 p^n + A_1 p^{n-1} q + \ldots + A_{n-1} p q^{n-1} + A_n q^n = 0,$$

és ebből:

$$A_0 p^n = -q(A_1 p^{n-1} + \ldots + A_n q^{n-1}),$$

$$A_n q^n = -p(A_0 p^{n-1} + \ldots + A_{n-1} q^{n-1}),$$

azaz, minthogy itt csupán csak egész számok fordulnak elő, $A_0 p^n$ osztható q által és $A_n q^n$ ismét p által; vagy végre minthogy p és q relativ törzsszámok, A_0 osztható q által, A_n pedig p által.

Ha tehát egy adott egyenletnek (egész számú együtthatókkal) *van raczionális gyöke, e gyök számlálója osztja az utolsó együtthatót, nevezője pedig a legmagasabb együtthatót.*

Ha tehát A_0 és A_n pozitiv osztói:

$$1, t_1 \ldots t_i \ldots A_0 \text{ ill. } 1, d_1 \ldots d_j \ldots A_n,$$

akkor csak a $\pm \frac{d_j}{t_i}$ számok lehetnek az egyenlet raczionális gyökei. De e számok meghatározott számmal vannak, mindegyiknek behelyettesítése által meggyőződünk, vajjon gyöke-e az egyenletnek vagy sem és így tehát *meghatározott kisérletsor az egyenlet összes raczionális gyökeit adja.*

Látszólagos kivétel csak akkor van, ha $A_n = 0$.* De ha mindjárt általánosabban föltészszük, hogy

$$A_n = A_{n-1} = \ldots = A_{n-k+1} = 0,$$

* Annak, hogy $A_0 = 0$ természetesen nincs értelme. Ekkor ugyanis a legmagasabb együttható A_1, vagy ha ez is eltünik, A_2 s ú. t. és az egyenlet nem is n-ed, hanem alacsonyabb fokú.

akkor most az egyenlet baloldala:

$$x^k (A_0 x^{n-k} + \ldots + A_{n-k}),$$

mely mint szorzat csak úgy lesz 0, hogy vagy x^k és tehát x is 0, vagy pedig x az

$$A_0 x^{n-k} + \ldots + A_{n-k} = 0$$

alacsonyabb fokú egyenletnek gyöke.

A nyert tételnek egy fontos részletezése a következő:

Oly egyenletnek, melynek legmagasabb együtthatója az egység, többi együtthatója pedig egész szám, raczionális gyöke csak egész szám lehet, de törtszám soha.

Ekkor ugyanis q, a raczionális gyök nevezője, az 1-nek tartozik osztója lenni; tehát $q = 1$ vagy -1.

Igy p. az $x^3+5x-6=0$ csak *egy* raczionális gyöke van: 1; a mint ez a lehetséges értékek:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

megvizsgálása mutatja.

A $3x^3 + 5x - 2 = 0$ egyenletnek *nincs* raczionális gyöke. Itt a megvizsgálandó számok: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$.

Végre, hogy a 3-adfokú egyenleteknél lehetséges esetek mindegyike föl legyen sorolva, a következő egyenletnek:

$$4x^3 + 12x^2 - x - 3 = 0$$

három raczionális gyöke van: -3, $-\frac{1}{2}$, és $\frac{1}{2}$.

37. *A raczionális gyökök előfordulta algebrai egyenleteknél azonban mindig csak kivételes esetnek tekintendő.* Foglaljuk össze mindig egy sorozatba azon n-edfokú egyenleteket, melyekben minden együttható, kivéve p. A_{n-1}-et, ugyanaz. Az egy ily sorozatba tartozó egyenletek sokasága megegyezik az egész számok sokaságával. Mindezen egyenleteknek, minthogy bennük A_0 és A_n ugyanaz, csak néhány meghatározott raczionális szám felelhet meg mint gyök, p.

$$r_1, r_2 \ldots r_i \ldots r_k.$$

De ha e számok valamelyike, p. r_i gyök, akkor kell, hogy:

$$A_0 r_i^n + A_1 r_i^{n-1} + A_2 r_i^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r_i + A_n = 0$$

legyen, azaz, ha A_n és tehát r_i sem 0:

$$A_{n-1} = -\frac{A_0 r_i^n + A_1 r_i^{n-1} + \ldots + A_{n-2} r_i^2 + A_n}{r_i};$$

minden r_i-nek megfelel tehát az A_{n-1} meghatározott értéke, mely azonban ezért még nem egész szám.

Az egyenletek minden ily határtalan sorozatában tehát legfölebb k-nak van raczionális gyöke, a többieknek pedig, melyek határtalan számmal vannak, raczionális gyök nem felelhet meg.

Különös fontosságuk van az $x^n = R$ alakú egyenleteknek. Ebben az esetben az egyenlet gyökeit *az R n-edik* gyökeinek nevezzük.

Ha R egész szám, az egyenlet raczionális gyöke csak egész szám lehet. Ha p. a ily gyök és törzstényezőkre bontott alakja $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, akkor

$$R = p_1^{n\alpha_1} p_2^{n\alpha_2} \dots p_r^{n\alpha_r},$$

azaz minden R-ben előforduló törzsszám kitevője n-nel osztható. Az ily számokat *teljes n-edik hatványoknak* nevezzük. Igy p. ha p törzsszám, az $x^n = p$ egyenletnek soha sincs raczionális gyöke. Ha R törtszám, p. $\frac{P}{Q}$, hol P és Q relativ törzsszám és $\frac{a}{b}$ az $x^n = R$ egyenlet gyöke, hol a és b-nek szintén nincs közös osztója, akkor szükségkép:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{P}{Q},$$

még pedig mivel a^n és b^n is relativ törzsszám,

$$a^n = P, \; b^n = Q,$$

azaz az R számlálója és nevezője is teljes n-edik hatvány. Ebben az esetben magát a törtet is úgy nevezzük és tehát: *Az $x^n = R$ egyenletnek nincs raczionális gyöke, ha csak R nem teljes n-edik hatvány.*

Átmenet az irraczionális és complex számokhoz.

38. Az algebrai egyenlet megoldása mint számtani művelet megegyezik az eddig tárgyalt megfordított műveletekkel, a kivonással és osztással annyiban, hogy abban a számkörben, melyben eredetileg értelmezzük, nem mindig lehetséges, és ez által a számfogalom általánositására utal. Egy másik tekintetben azonban lényegesen különbözik, hogy t. i. míg a kivonás és osztás, ha az illető számkörben egyáltalában lehetséges volt, mindig csak egy meghatározott számértékhez vezetett, itt, mint a 36. czikk példái mutatják, esetleg több számérték is megfelelhet.

Az alapműveletek *egyértelműsége* (Eindeutigkeit) tehát itt megszünik és helyébe esetleges *többértelműség* lép. Ennek viszonyai azonban természetesen csak akkor lesznek elemezhetők, mikor a számfogalom czélszerű általánosítása által sikerült az algebrai egyenletek megoldásának műveletére is általános érvényű törvényeket fölállitani.

Arra nézve, hogy a számfogalom ezen általánosítása mikép történjék, alapvető jelentőségű dolog, hogy az algebrai egyenlet megoldásánál akkor is, midőn ez raczionális számokban lehetetlen, két teljesen különböző esettel van dolgunk.

Az első esetben ugyanis még lehetséges a föladat megközelitő megoldása raczionális számok által. Ez alatt a következőt értjük: Legyen rövidség kedvcért az egyenlet többtagúja $f(x)$; ha nincs is oly raczionális szám, melyre nézve $f(r)=0$, még lehetséges oly r raczionális számot meghatározni, hogy

$$|f(r)|<\delta,$$

hol δ egy tetszőlegesen választott, bármily kis számérték, p. $\frac{1}{1000}$ vagy $\frac{1}{1000000}$. Igy történik p. az elemekben az $x^2=2$ egyenlet megoldása az által, hogy a 2-ből négyzetgyököt vonunk.

A második esetben a raczionális számok a föladatnak még megközelitő megoldását sem adhatják. Igy p. x^2+2, minthogy minden raczionális szám négyzete pozitiv, ha x helyébe bárminő raczionális számot teszünk, mindig nagyobb mint 2; az $x^2+2=0$ egyenlet raczionális számok által megközelitőleg sem oldható meg, azaz ha p. csak $\delta=\frac{1}{10}$, nincs oly raczionális szám, melyre nézve $|x^2+2|<\frac{1}{10}$.

E két eset egész külön tárgyalást kiván; az első az *irraczionális* számok, a második pedig a *complex* számok értelmezéséhez vezet, mely utóbbiak a raczionális és irraczionális számok összességével, a *valós* számokkal szemben ismét általánosabb számfogalmak.

A complex szám a legáltalánosabb számfogalom, melyre az analizis rendszerének kifejtésénél szükségünk van.

Az algebrai egyenlet megoldásának követelése azonban még nem vezet a legáltalánosabb valós ill. complex szám alakhoz. Minthogy azonban ezen utóbbinak tárgyalása bizonyos tekintetben még egyszerűbb, mint a speczialisé, czélszerű lesz még, a föladatunkban foglalt és a következőkben elemzendő általános szempontot kifejteni, mely egyszersmind a valós és complex szám vizsgálatát egymástól elkülöníti.

39. Mindenekelőtt a következő — az egyenletek részletes elméletében is fontos — tételt bizonyítjuk.

Bármely egyenletnél:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

az u helyettesítésének eredménye absolut értékére nézve:

$$|A_0u^n + A_1u^{n-1} + \ldots + A_{n-1}u + A_n|$$

nagyobb a pozitiv a-nál, ha

$$|u| > 1 + \frac{M+a}{|A_0|}$$

hol M az A_1, $A_2 \ldots A_n$ együtthatók absolut értékei közt a legnagyobbat jelenti.

Ekkor ugyanis mindenesetre; minthogy a legkedvezőtlenebb esetben csupa levonás történik:

$$|A_0u^n+A_1u^{n-1}+\ldots+A_n| \geq |A_0||u|^n - M(|u|^{n-1}+\ldots+|u|+1)$$

$$> |A_0||u|^n - \frac{M|u|^n}{|u|-1},$$

mert

$$|u|^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{|u|^n - 1}{|u|-1} < \frac{|u|^n}{|u|-1};$$

de végre

$$|A_0||u|^n - \frac{M|u|^n}{|u|-1} = \Big(|A_0||u| - (|A_0| + M)\Big)\frac{|u|^n}{|u|-1}$$

szintén pozitiv, ha $|u|$ a föltételnek megfelelőleg választatott; $\frac{|u|^n}{|u|-1}$ már nagyobb mint 1, ha $|u| > 1$; ha pedig

$$|u| > 1 + \frac{M+a}{|A_0|},$$

akkor

$$|A_0||u|-(|A_0|+M)>a$$

szintén pozitiv; tehát $|A_0u^n+\ldots+A_n|$ valóban az a pozitiv számnál is nagyobb.

40. *Minden tárgyalandó egyenletben ezentúl a legmagasabb együtthatót pozitivnak veszszük,* ami, ha esetleg -1-gyel szorzunk, mindig elérhető. A megelőző czikkben bebizonyított tétel alapján azon egyenletek, melyeknek raczionális gyökei vannak és azok, melyeknek megközelítő megoldása lehetséges, egy *közös* sajátság által jellemezhetők, mely világosság kedvéért először az elsőfokú egyenleten legyen föltüntetve.

Az elsőfokú egyenlet $A_0x+A_1=0$, melynek egyetlen gyöke $-\frac{A_1}{A_0}$, a raczionális számokat két osztályba választja szét. Az első osztályba tartozzék minden r szám, melyre nézve $|A_0r+A_1|$ és $|A_0r'+A_1|$ is nagyobb egy bizonyos különben szabadon választott pozitiv a értéknél, ha $r'>r$; a második osztályba mindazok, melyekre nézve ez nem áll. Közvetetlenül látni, hogy az első osztályba tartozó raczionális számok, ha $-\frac{A_1}{A_0}$ az egyenlet gyöke az $\frac{a-A_1}{A_0}$-nál nagyobb raczionális számok, a másodikba pedig $\frac{a-A_1}{A_0}$ és az ennél kisebb számok tartoznak.

Általánosságban az

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=0$$

egyenlet alapján szintén osztályozzuk a raczionális számokat; valamely r szám az első osztályba tartozzék, ha

$$|A_0r'^n+A_1r'^{n-1}+\ldots+A_n|$$

egy bizonyos, különben szabadon választott pozitiv a számnál nagyobb, mihelyt $r'>r$; minden más esetben r a második osztályba tartozzék.

Világos, hogy r-rel együtt r', ha nagyobb mint r, szintén első osztályú szám; az első osztályú számok tehát mind nagyobbak a másodosztályuaknál. Első osztályú szám az előbb bebizonyított tétel szerint mindig létezik; minden szám ilyen, mely $1+\frac{M+a}{A_0}$-nál nagyobb; ellenben meglehet, hogy kisebb a-nál bizonyos egyenletre nézve másodosztályú szám nincsen; p. ily egyenlet $x^2+2=0$, mert akárminő az r, mindig r^2+2 nagyobb mint 2. Bizonyos egyenletek tehát az a bármely pozitiv értékénél a raczionális számok sokaságát két részre osztják, mások nem.

Kimutatjuk, hogy *minden egyenlet, melynek raczionális vagy megközelítő megoldása lehetséges, a raczionális számok sokaságát két részre osztja, bárminő is a pozitiv a szám.*

Az elsőkre nézve ez világos, mert ha r a gyök, akkor r helyettesítése 0-t ad és nem pozitiv számot; tehát r és minden r-nél kisebb szám másodosztályú szám, bárhogyan választottuk is az a pozitiv számot

Ha megközelítő megoldás lehetséges, úgy van egy r szám, melyre nézve

$$|A_0r^n+A_1r^{n-1}+\ldots+A_n|=\varepsilon,$$

hol $\varepsilon<\delta$, és δ tetszőlegesen, akármily kis pozitiv számnak vehető és most az r helyettesítése, az a nál kisebbet ad, hacsak δ-t az a-nál kisebbnek vettük; p. $\frac{1}{2}a$-nak.

Ellenben *az oly egyenleteknél, melyeknek nem lehet megközelítő megoldását adni raczionális számokban, az a elég kis értékeinél, minden raczionális szám első osztályú.* Ha t. i. akármily kis a-ra nézve lehetne egy számot, r-et meghatározni, hogy

$$|A_0r^n+A_1r^{n-1}+\ldots+A_n|<a,$$

akkor ez annyit jelentene, hogy ellentétben föltevésünkkel egyenletünknek raczionális számok segítségével lehet megközelítő megoldását adni.

41. A raczionális számok sokaságát tehát két osztályba lehet szétválasztani, úgy hogy az első osztály bármely száma nagyobb a második osztály bármely számánál. Ez legegyszerűbben egy raczionális szám r által történik, úgy hogy az első osztályba minden r-nél nagyobb szám tartozik, a második osztályba r és minden r-nél kisebb szám. De a raczionális számok e szétválasztása úgy is történhetik, hogy ily határoló szám nem létezik.

P. az $x^2-2=0$ egyenlet segítségével, ha $a=1$. Ekkor a másodosztályú raczionális számok közt nem lehet többé — úgy mint előbb — egy legnagyobbat kijelölni.

Tegyük föl, hogy r ilyen; mindenesetre $r \geq \frac{3}{2}$; mert $\frac{3}{2}$ másodosztályú; továbbá $r^2 - 2$ nem lehet 1, mert 3 nem teljes négyzet, tehát:

$$\frac{1}{4} < r^2 - 2 < 1.$$

Most már, ha p. $r^2 - 2 = 1 - \lambda$, hol $0 < \lambda < \frac{3}{4}$, lehet egy pozitiv ρ számot meghatározni úgy, hogy:

$$\rho^2 + 2r\rho < \lambda,$$

p. ha

$$\rho = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{r^2}.$$

Ekkor valóban:

$$\rho^2 + 2\rho r = \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{r^4} + \frac{\lambda}{r} = \lambda\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{4}\frac{\lambda}{r^4}\right),$$

és itt:

$$\lambda < \frac{3}{4}, \quad r \geq \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{4r^4} \leq \frac{1}{4\left(\frac{3}{2}\right)^4},$$

$$\frac{1}{r} \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4}\frac{\lambda}{r^4} < \frac{1}{27},$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{4}\frac{\lambda}{r^4} < \frac{19}{27},$$

és így valóban:

$$\rho^2 + 2\rho r < \frac{19}{27}\lambda$$

$$(r+\rho)^2 - 2 = r^2 - 2 + \rho^2 + 2\rho r < 1 - \lambda + \frac{19}{27}\lambda < 1,$$

tehát bárhogy vettük fel r-et, $r + \rho$ is másodosztályú szám.

E szerint a raczionális számok szétválaszthatók két osztályba úgy, hogy minden az első osztályba foglalt szám nagyobb bármely a második osztályba tartozó számnál, a nélkül azonban, hogy lehetne azért egy r raczionális számot mint oly határt kijelölni, hogy minden r-nél nagyobb szám az első osztályba tartozik. Hogy e szétválasztás a megelőzőkben egyenlet segítségével történt, az mellékes; döntő, hogy ily osztályozás egyáltalában lehetséges. A raczionális számok sokaságának e tulajdonsága vezet a valós számok általános értelmezéséhez.

MÁSODIK SZAKASZ.

IRRACZIONÁLIS SZÁMOK ÉS HATÁRÉRTÉKEK.

I.

Az irraczionális számok bevezetése.*

Általános értelmezések.

42. Bármely raczionális szám r «érték»-ével együtt adva van egyszersmind *helyzete* bármely más raczionális számra, R-re vonatkozólag, azaz eldönthető, hogy az $r \gtreqless R$ által jellemzett három lehetőség közt melyik áll fönn. De megfordítva, ha adva van r-nek helyzete minden más R-re nézve, akkor természetesen egyszersmind adva van az r számértéke

Mikor az utóbbi módon definiálunk raczionális számot, tekintetbe kell vennünk — nehogy az értelmezés maga ellenmondásokat tartalmazzon — hogy az $r<R$, vagy $r>R$ állítás nem csupán az r és R közt állapít meg bizonyos viszonyt, hanem teljesen kifejtve a következőket jelenti:

1.*a*) Ha $r<R$, akkor egyszersmind kisebb, mint minden az R-nél nagyobb szám.

1.*b*) Ha $r>R$, akkor egyszersmind nagyobb, mint minden az R-nél kisebb szám.

2.) Ha $r<R$, vagy $r>R$ (de nem $r=R$), mindig vannak oly számok is, melyek r és R közt feküsznek, azaz e számok egyikénél kisebbek, a másiknál pedig nagyobbak.

Ha most már van oly eljárásunk, melynek segítségével bár-

---

* Heine «Die Elemente der Functionenlehre» czímű értekezésében (Crelle, Journal, 74. kötet) találni először közzétéve Weierstrass-nak előadásaiban adott alapvető tárgyalásait, valamint a (hallei) Cantor-tól származó, «szabályos» számsorozatok fontos segédeszközét.

mely szám helyzetét r-re nézve meglehet határozni, úgy ez fölosztja a raczionális számok sokaságát két részre, az r-nél nagyobb és az r-nél kisebb számok osztályára. Emez osztályozásnál legfölebb egy szám maradhat ki, különben az értelmezés még hiányos; mert ha a megállapítás p. r_1 és r_2-re nézve hiányzik, akkor hiányzik minden r_1 és r_2 közt fekvő számra nézve is. Ha tudnók, hogy $r>R$ és p. $R>r_2$, akkor az is ismeretes, hogy $r>r_2$. — Ha az értelmezések tehát az előbb kifejtett föltételnek eleget tesznek, akkor az r raczionális szám nem lehet más, mint amaz egyedüli szám, melyre nézve az értelmezés hiányzik.

Igy p. a következő megállapítás «Az r szám nagyobb vagy kisebb, mint R, a mint $2R-3$ pozitiv vagy nem» ellenmondást tartalmaz. Mert ha $R=\frac{3}{2}$, a helyettesítés 0-t ad és így $r>\frac{3}{2}$; de ekkor kellene 2.) szerint r és $\frac{3}{2}$ közt számoknak lenniök, melyek szintén kisebbek r-nél; de ez nem lehetséges, mert bármely $\frac{3}{2}$-nél nagyobb szám $\frac{3}{2}+a$ alakban írható hol a pozitiv és minden ily számra $2(\frac{3}{2}+a)-3=2a$ *pozitiv*, tehát minden ily szám már nagyobb mint r. Hogy az értelmezést kijavítsuk, a $2R-3=0$ esetét ki kell vennünk az r-nél kisebb számok köréből. De ép úgy nem tehetjük e számot az r-nél nagyobb számok közé. Az értelmezés csak a következő alakban lehetséges; «Az r szám nagyobb vagy kisebb, mint R, a mint $2R-3$ pozitiv vagy negativ.» Most már nem tartalmaz ellenmondást, és — a mint kell — egy számra nem ád $\gtrless$ viszonyt, e szám $\frac{3}{2}$ és így $r=\frac{3}{2}$.

Az ily értelmezés, ha adatai teljesek és mind megférnek egymással, — mint tüstént látni, a raczionális számokat két osztályba sorozza, az r-nél nagyobb és az r-nél kisebb számok osztályába és csak egy szám létezik, az r maga, mely egyik osztályba se tartozik.

De ily értelmézés úgy is lehetséges, hogy adatai ellenmondást nem tartalmaznak, de egy szám sem marad ki az osztályozásból, azaz adataink nem vezetnek egy raczionális r számhoz.

Igy lesz ez minden osztályozásnál, melyet a megelőző fejezet értelmében és oly egyenlet segítségével végezünk, melynek raczionális gyöke nincs, de még megközelítőleg megoldható.

Igen egyszerű példa a következő: «Legyen r kisebb vagy nagyobb mint R, a mint R^2-2 pozitiv vagy negativ, ha R pozitiv vagy 0; r nagyobb mint R, ha R negativ.» E definiczio nem tartalmaz ellenmondást. Ha ugyanis R^2-2 pozitiv, $(R+a)^2-2$ szintén pozitiv (a alatt pozitiv számot értve). Ép úgy, ha R pozitiv és $R-a$ is pozitiv még, akkor R^2-2 negativ értékeinél:

$$(R-a)^2-2=R^2-2-a(2R-a)$$

is negativ, mert R^2-2 negativ, a és $2R-a$ pozitiv. De itt egy szám sem marad ki az osztályozásból, mert oly raczionális szám, melyre nézve r^2-2 nem pozitiv, vagy negativ, egyáltalában nincs.

Az ily osztályozása a raczionális számoknak egy új és általánosabb szám, a valós szám fogalmához vezet, melyet következőkép értelmezhetünk.

A valós szám adva van azáltal, hogy helyzetét minden raczionális számra vonatkozólag megadjuk. Ez annyit jelent, hogy ha p. A az ily valós szám jele, e számfogalom tulajdonságainak összessége abból áll, hogy bármely raczionális számra nézve meg van mondva, hogy $A>r$, vagy $A<r$. (Ha $A=r$, akkor a valós szám raczionális.)

A valós számok ezen értelmezése szerint *két valós szám A es B egyenlő, ha minden raczionális szám, mely A-nál nagyobb vagy kisebb, egyszersmind nagyobb vagy kisebb a B-nél.* Ekkor ugyanis tulajdonságaik összességében megegyeznek.

Az oly valós számot, mely nem raczionális szám, irraczionális számnak nevezzük.

Igy p. az előbb tárgyalt példa a $\sqrt{2}$ pozitiv értékének nevezett szám pontos értelmezését adja.

Nem szorúl bővebb magyarázatra, hogy a valós számok bevezetése által eleget teszünk ama gyakorlati követelésnek, hogy minden hossznak legyen ú. n. mérőszáma, olymódon, hogy a hosszak nagysági viszonya mindenkor kifejezést találjon a megfelelő mérőszámok nagysági viszonyában. — A tiszta analizis körén belül a valós számok az egyenletek megoldásának műveletét teszik általánosságban kivihetővé, azon esetre, ha az egyenlet raczionális számokban megközelítőleg megoldható. (A másik eset majdan a complex számokra vezet.)

Szabályos számsorozatok.

43. Minden valós szám értelmezése, vagy — a mi evvel összeesik — a raczionális számok megfelelő osztályozása eredetileg minden egyes raczionális számra vonatkozólag tartalmaz egy-egy adatot. Ezen adatok azonban nem függetlenek egymástól és így első föladatunk, ezekből a szükséges és elegendő adatokat kikeresni.

A valós számoknak legjellemzőbb és — mint majd bebizonyítjuk — egyszersmind általános értelmezése az ú. n. *szabályos számsorozatok* segítségével történik.

Legyen

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots a_{n+k}, \ldots$$

a raczionális számoknak sorozata, melynek származási törvénye adva van, azaz melyben ha a tagok egészen a_n-ig adva vannak, a_{n+1} mindig bizonyos meglévő utasítás alapján képezhető. Világos, hogy az n, k számok — a tagok mutatói — mint számlálás eredményei, mindig pozitiv egész számok.

Az a-k sorozata szabályos számsorozatot alkot, ha, bármicsoda pozitiv szám is δ, mindig lehet egy δ-hez tartozó pozitiv egész számot, ν-t meghatározni, úgy hogy $|a_n - a_{n+k}| < \delta$, ha csak $n > \nu$, bárminő nem negativ egész szám is k.

Ily szabályos számsorozatok p.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

melyeknek származási törvénye az «általános tag», $\frac{1}{n}$, ill. $\frac{1}{2^n}$ által van megadva, melyből minden tagot nyerünk, ha n helyébe egymás-után a közönséges egész számok sorát teszszük. Hogy e sorozatok szabályosak, kitünik abból, hogy az elsőre nézve $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right| = \frac{k}{n(n+k)}$, minthogy $\frac{k}{n+k} < 1$, mindig kisebb mint $\frac{1}{n}$. Ha tehát $\frac{1}{n} < \delta$, azaz $n > \frac{1}{\delta}$, az illető föltétel ki van elégítve.

A másodiknál $\left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+k}}\right| = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+k}} < \frac{1}{2^n}$ és annál inkább még $< \frac{1}{n}$. Tehát itt is, ha $n > \frac{1}{\delta}$, lesz: $|a_n - a_{n+k}| < \delta$.

Minden ú. n. végtelen tizedes tört ily szabályos számsorozat rövidített alakjának tekinthető, melyből annyi tagot tudunk kiírni, a hány számjel ismeretes a tizedes törtből. Igy p. 1·41421 ...-ből a következő sorozat lesz

$$1{\cdot}4,\ 1{\cdot}41,\ 1{\cdot}414,\ 1{\cdot}4142,\ 1{\cdot}41421, \ldots$$

melyet akármennyire folytathatunk a tizedes törtel együtt, (mint p. a négyzetgyök meghatározására szolgáló elemi eljárásnál.) Hogy minden végtelen tizedes tört *szabályos* számsorozatot ad, onnét következik, hogy most a_n alatt értve azt a véges tizedes törtet, melyet az első n deczimális hely megtartása által nyerünk, $|a_n - a_{n+k}|$ oly tizedes tört, melyben az első n helyen csupa 0 áll és azután még k hely van, akárminő számokkal betöltve; tehát

$$|a_n - a_{n+k}| < \frac{1}{10^n},$$

és ez ismét kisebb lesz mint δ, ha csak $n > \frac{1}{\delta}$, mert $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$.

Ha ν és δ összetartozó értékek, azaz $|a_\nu - a_{\nu+k}| < \delta$, függetlenül a k-tól, akkor minden a_ν után következő tagja a sorozatnak $a_\nu - \delta$ és $a_\nu + \delta$ közt fekszik. Ha ugyanis volna:

$$a_{\nu+k} = a_\nu - \delta - s \quad \text{vagy} \quad a_{\nu+k} = a_\nu + \delta + s,$$

hol s zérus vagy pozitiv szám, akkor $|a_\nu - a_{\nu+k}| = \delta + s$ lenne és ez a föltevéssel ellentétben nem $< \delta$.

44. A szabályos számsorozatok értelmezése még a következő, alaki tekintetben általánosabb módon is fogalmazható:

Az a-k sorozata szabályos számsorozatot alkot, ha bármicsoda pozitiv szám is ε, mindig lehet egy ε-hez tartozó pozitiv egész számot ν-t meghatározni, úgy hogy $|a_{n+l} - a_{n+k}| < \varepsilon$, ha csak $n > \nu$, bárminő nem negativ számok is k és l.

Ha $|a_n - a_{n+k}| < \delta$ a k minden ertékénél, hacsak $n > \nu$, akkor

$$|a_{n+l} - a_{n+k}| < 2\delta$$

mert mind a két szám $a_n - \delta$ és $a_n + \delta$ közt fekszik; ha tehát a tetszőlegesen választható δ jeléül az ε-nal együtt szintén tetszőleges $\frac{1}{2}\varepsilon$-et veszszük, a föltétel új alakját nyerjük.

Valamely számsorozat vizsgálatánál előnyösebb lesz a föltétel eredeti alakja; elméleti tárgyalásoknál ellenben a második alak mint általánosabb fog jobb szolgálatot tenni. (Ha $l = 0$, az első alakot nyerjük belőle.)

Ha valamely szabályos számsorozatban minden pozitiv számhoz, δ-hoz, lehet egy egész számú n-et kijelölni, úgy, hogy:

$$|a_{n+k}| < \delta$$

bármicsoda nem negativ egész szám is k, akkor a sorozat számairól *azt mondjuk, hogy minden határon túl kisebbednek*, azaz bármicsoda (kis) szám is δ, a sorozat tagjainak absolut értékei egy bizonyos helytől kezdve ennél is kisebbek.

Minden szabályos sorozatban, melynek tagjai nem kisebbednek minden határon túl, a tagok előjele egy bizonyos a_n-től kezdve ugyanaz marad.

Ha a_{n+k} és a_{n+l} ellenkező előjelűek, akkor

$$|a_{n+k} - a_{n+l}| = |a_{n+k}| + |a_{n+l}|$$

csak úgy lehet ε-nál kisebb, ha $|a_{n+k}|$ és $|a_{n+l}|$ külön-külön kisebbek ε-nál. Ha tehát már a_n úgy választatott, hogy $|a_{n+k} - a_{n+l}| < \varepsilon$ és bármely a_{n+k} után következik egy ellenkező előjelű a_{n+l}, akkor kell, hogy, bárminő nem negativ egész szám is k, mindig $|a_{n+k}| < \varepsilon$ legyen, tehát a sorozat számai minden határon túl kisebbednek.

Közvetetlenül világos ebből, hogy:

Ha valamely szabályos számsorozatban, bármily nagy is n, az a_n után még mindig találkoznak különböző előjelű számok, a számsorozat tagjainak absolut értéke minden határon túl kisebbedik.

Továbbá:

Minden szabályos számsorozatban, ha tagjainak absolut értéke nem kisebbedik minden határon túl, az összes tagok egy bizonyos a_ν-n túl két pozitiv vagy két negativ szám között feküsznek.

Ha ν és δ összetartozó számok, akkor az $|a_{\nu+l} - a_{\nu+k}| < \delta$-ból — ép úgy mint előbb — az is következik, hogy $a_{\nu+l}$ az $a_{\nu+k} - \delta$ és $a_{\nu+k} + \delta$ közt fekszik, bárminő nem negativ egész számok is k és l. Hogy e két kifejezés mindig ellenkező előjelű legyen, csak úgy lehetséges, ha szorzatuk $a^2_{\nu+k} - \delta^2$ mindig negativ, vagyis minden k-ra:

$$|a_{\nu+k}| < \delta.$$

de ekkor a sorozat tagjainak absolut értéke minden határon túl kisebbedik.

Végre még jegyezzük meg, hogy, *ha* $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ *szabályos számsorozat és* r *bármely raczionális szám, akkor*

$$a_1 - r, \; a_2 - r, \ldots, a_n - r, \ldots$$
$$r - a_1, \; r - a_2, \ldots, r - a_n, \ldots$$

szintén szabályos számsorozatok, a mi közvetetlenül abból foly, hogy:

$$|a_n - r - (a_{n+k} - r)| = |r - a_n - (r - a_{n+k})| = |a_{n+k} - a_n|.$$

45. Valamely számsorozat szabályos voltát a legegyszerűbb esetekben a következő *ismertető jelek* mutatják.

Ha az $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ *sorozatban egy bizonyos n-től kezdve mindig* $a_{n+1} \geq a_n$, *de e mellett bármely* a_n *után következő* a_{n+k} *kisebb egy bizonyos H számnál, a számsorozat szabályos.* Az ellenkező föltevés ugyanis azt mondja, hogy egy bizonyos pozitiv δ-ra nézve $|a_{n+k} - a_n|$, vagyis most $a_{n+k} - a_n$ nem marad mindig kisebb mint δ, akármily nagynak veszszük is n-t. Tehát van egy a_{n_1}, úgy hogy:

$$a_{n_1} \geq a_n + \delta;$$

de ekkor a_{n_1} után van ismét egy a_{n_2}, melyre nézve:

$$a_{n_2} \geq a_{n_1} + \delta,$$

Ilymódon akárhány $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots a_{n_r}$ számot határozhatunk meg, úgy hogy végre még:

$$a_{n_r} \geq a_{n_{r-1}} + \delta.$$

Az egyenlőtlenségek összecsatolása által lesz:

$$a_{n_r} \geq a_n + r\delta.$$

De a δ adott pozitiv szám, r tetszőleges pozitiv egész szám és ha ezt úgy veszszük, hogy:

$$r > \frac{H - a_n}{\delta}$$

akkor $a_{n_r} > H$, a mi a föltevéssel ellenkezik. A tétel úgy is fejezhető ki, hogy:

Soha nem kisebbedő számok sorozata vagy szabályos, vagy pedig számai bármely adott számnál is nagyobbak lesznek.

Ebből foly továbbá:

Ha az $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ *sorozatban egy bizonyos n-től kezdve mindig* $a_{n+1} \leq a_n$, *de e mellett bármely* a_k *után következő* a_{n+k} *nagyobb egy bizonyos G számnál, a számsorozat szabályos.* Ekkor ugyanis

$$G - a_1, G - a_2, \ldots, G - a_n, \ldots$$

az előbbi tétel értelmében szabályos sorozat; mert $G - a_{n+1} \geq G - a_n$ és $G - a_{n+k}$ kisebb, mint 0. De a megelőző czikk végén adott tétel szerint ekkor azon sorozat is szabályos, melynek általános tagja:

$$G-(G-a_n)=a_n.$$

A tétel még a következő alakban is fogalmazható:

Soha nem nagyobbodó számok sorozata vagy szabályos, vagy pedig számai bármely adott számnál is kisebbek lesznek.

Ez természetesen úgy értendő, hogy bármely adott negativ számnál is kisebbek lesznek, azaz a számok absolut értékei, ha a számsorozat nem szabályos, ép úgy, mint előbb bármely számnál nagyobbak lesznek.

A valós számok és a szabályos számsorozatok kapcsolata.

46. Az $a_1, a_2, \dots a_n \dots$ szabályos számsorozat a következő módon határoz meg egy bizonyos, a «hozzá tartozó» A valós számot:

Az A szám nagyobb vagy kisebb valamely r raczionális számnál, ha az

$$a_1-r,\ a_2-r,\ \dots a_n-r,\ \dots$$

sorozat minden tagja egy — különben tetszőleges — n-edik tagtól kezdve pozitiv vagy negativ és $|a_n-r|$ egy meghatározott pozitiv számnál nagyobb marad.

Az A ezen értelmezésénél azonban még bebizonyítandó, hogy előbbi tárgyalásaink értelmében (42. czikk) teljes és nem foglal magában ellenmondásokat.

Könnyű látni, hogy ha $A>r$ és $r>r'$, egyszersmind $A>r'$; mert ha egy bizonyos n-től kezdve a_n-r pozitiv, $a_n-r+(r-r')$ szintén pozitiv és nagyobb mint a_n-r. Épen ugy világos, hogy ha $A<r$ és $r<r'$, egyszersmind $A<r'$.

Az értelmezés legfölebb egy raczionális számra nem alkalmazható, t. i. midőn, bármicsoda pozitiv szám is δ,

$$|a_{n+k}-r|<\delta$$

egy bizonyos, különben tetszőleges n-re nézve. De ez az eset legfölebb egy raczionális számnál fordulhat elő. Ha ugyanis egyszersmind volna:

$$|a_{n+k}-r'|<\delta,$$

hol r az r'-től különböző szám és így különbségük szintén egy bizonyos meghatározott raczionális szám, akkor lenne

$$|(a_{n+k}-r)-(a_{n+k}-r')|<2\delta,$$

de ha a tetszőleges δ-t például $\frac{|r'-r|}{2}$-nek veszszük, e szerint $|r-r'|<|r-r'|$ volna, a mi absurdum.

Legfölebb egy r szám van tehát, melyre nézve n választása által $|a_{n+k}-r|<\delta$ tehető; ha ily szám létezik, A nem más mint e raczionális érték. (Lásd az egyenlőség definiczióját 42. végén). Mert minden más r' szám kisebb vagy nagyobb az A-nál, a mint kisebb vagy nagyobb az r-nél. Ha ugyanis $r'>r$, akkor

$$a_{n+k}-r'=a_{n+k}-r+r-r'$$

negativ lesz, mert $|a_{n+k}-r|$ a tetszőleges δ-nál kisebbé tehető, és így ha pozitiv is, az összegnek előjelét, mely $r-r'$-el negativ, nem változtathatja meg. Hasonlókép a másik esetben.

Ha ily r szám nincsen, az a-sorozat a raczionális számok sorában elő nem forduló, tehát irraczionális számot értelmez.

47. *Két szabályos számsorozat:*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

akkor és csak akkor értelmezi ugyanazt az A számot, ha bármicsoda pozitiv szám is δ, lehet egy n-et kijelölni, úgy, hogy:

$$|a_{n+k}-b_{n+k}|<\delta,$$

bárminő nem negativ egész szám is k. Mert ha p. $a_{n+k}-r$ egy bizonyos n-től kezdve mindig egyenlő előjelű és $|a_{n+k}-r|>G$, akkor

$$b_{n+k}-r=a_{n+k}-r+(b_{n+k}-a_{n+k}),$$

és ha csak n-et oly nagynak veszszük, hogy $|a_{n+k}-b_{n+k}|<\frac{1}{2}G$, a $b_{n+k}-r$ ugyanoly előjelű lesz, mint $a_{n+k}-r$ és $|b_{n+k}-r|$ nagyobb lesz mint $\frac{1}{2}G$. Tehát az r szám, hacsak maga nem felel meg az a-sorozatnak, ugyanoly módon lesz elhelyezve az a és b sorozatok által értelmezett valós számokra vonatkozólag.

Csak az az eset marad fönn, mikor nem lesz egy bizonyos

n-re nézve $|a_{n+k} - r| > G$, a mi minthogy szabályos számsorozattal van dolgunk, csak akkor történhetik, ha az n valamely értékére nézve:

$$|a_{n+k} - r| < \delta,$$

vagyis az a-sorozatnak megfelelő valós szám r. De ekkor a b-sorozatnak is r felel meg. Mert:

$$|b_{n+k} - r| = |b_{n+k} - a_{n+k} + (a_{n+k} - r)|$$

és így:

$$|b_{n+k} - r| < |b_{n+k} - a_{n+k}| + |a_{n+k} - r|$$

De n úgy választható, hogy

$$|b_{n+k} - a_{n+k}| < \tfrac{1}{2}\delta, \ |a_{n+k} - r| < \tfrac{1}{2}\delta,$$

és ekkor tehát az n kellő megállapításánál egyszersmind:

$$|b_{n+k} - r| < \delta.$$

Megfordítva, ha minden raczionális számra nézve, legfölebb egynek kivételével, egy bizonyos n-től kezdve $a_{n+k} - r$ és $b_{n+k} - r$ egyenlő előjelű, akkor nem lehetséges, hogy több mint egy r az a_{n+k} és b_{n+k} közt feküdjék, de ha $a_{n+k} - b_{n+k} = \delta$ akkor p. $b_{n+k} + \frac{1}{3}\delta$, $b_{n+k} + \frac{2}{3}\delta$ két ily szám volna; kell tehát, hogy az n kellő választása által

$$|a_{n+k} - b_{n+k}| < \delta$$

valóban mindig elérhető legyen.

Legyen $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n \ldots$ oly számsorozat, melyre nézve az n kellő választása után $|\delta_{n+k}| < \delta$, hol δ tetszőlegesen választott positiv szám, a k pedig nem negativ egész szám. Akkor a nyert eredmény így is fogalmazható:

Ha az A szám értelmezésére szolgáló valamelyik számsorozat $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$, akkor az összes A értelmezésere szolgáló sorozatok:

$$a_1 + \delta_1, a_2 + \delta_2, \ldots, a_n + \delta_n, \ldots$$

ha t. i. a δ-k bárminő az előbbi megállapításnak megfelelőleg választott számok. Ebből foly még:

Hogy ha az A szám értelmezésére szolgáló

$$a_1 \, a_2 \ldots a_n \ldots$$

sorozatból egy tetszőleges határtalan sorozatot:

$$a_{r_1}, a_{r_2} \dots a_{r_n}, \dots$$

kiválasztunk, hol t. i. $r_1\, r_2 \dots r_n$ nagyobbodó pozitiv egész számok sorozata, akkor ez utóbbi számsorozat ugyancsak az A számot értelmezi. Egyszerűen mert a_{r_n} nem más mint egy a_{n+k} hol k pozitiv egész szám. És így, valóban egy bizonyos n-től kezdve $|a_n - a_{r_n}| < \delta$, bármicsoda pozitiv szám is δ.

Egy raczionális szám, r legegyszerűbben azon számsorozat által lesz értelmezhető, melynek minden tagja r, és így az összes r értelmezésére szolgáló számsorozatok:

$$r + \delta_1, r + \delta_2, \dots, r + \delta_n, \dots$$

Ha $r = 0$, még különösen kiemelendő eredmény gyanánt nyerjük, hogy *minden az előbbi megállapításoknak megfelelő*

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \dots$$

sorozat a 0-t *értelmezi.*

48. *Minden valós szám szabályos számsorozat által értelmezhető;* azaz bármikép történjék is az A valós szám értelmezése, mindig képezhetünk oly szabályos sorozatot, melynek használata az eredeti értelmezés adatait teljesen pótolja, és melynek segítségével bármely raczionális számra nézve meghatározhatjuk A helyzetét.

Mindenek előtt kikeresünk két egész számot, g-t és h-t, melyekre nézve $g < A < h$; az egész számok sorában g-től h-ig legyen K_0 az utolsó, mely nem nagyobb A-nál; úgy hogy

$$K_0 \leq A, \; K_0 + 1 > A.$$

Azután egy tetszőleges 1-nél nagyobb egész számot X-et választva, a

$$\frac{K_0 X}{X}, \; \frac{K_0 X + 1}{X}, \; \frac{K_0 X + 2}{X}, \dots \frac{(K_0 + 1) X}{X}$$

számok sorából kiválasztjuk ismét az utolsót, mely nem nagyobb A-nál, legyen ez $\frac{K_1}{X}$, ugy hogy:

$$\frac{K_1}{X} \leq A, \; \frac{K_1 + 1}{X} > A.$$

Ismételjük ezt az eljárást a következő számokon:

$$\frac{K_1X}{X^2}, \frac{K_1X+1}{X^2}, \frac{K_1X+2}{X^2}, \dots \frac{(K_1+1)X}{X^2},$$

ezek között megállapítjuk a $\frac{K_2}{X^2}$ számot úgy, hogy:

$$\frac{K_2}{X^2} \leqq A, \frac{K_2+1}{X^2} > A.$$

Ezen eljárást akárhányszor ismételjük, úgy hogy általánosságban egy K_n egész számot nyerünk melyre nézve

$$\frac{Kn}{X^n} \leqq A, \frac{Kn+1}{X^n} > A.$$

Ez által két számsorozatot nyerünk:

$$K_0, \frac{K_1}{X}, \frac{K_2}{X^2}, \dots, \frac{Kn}{X^n}, \dots, \quad (1.)$$

$$K_0+1, \frac{K_1+1}{X}, \frac{K_2+1}{X^2}, \dots, \frac{Kn+1}{X^n}, \dots, \quad (2.)$$

melyek a 45. czikk értelmében szabályosak, mert az első sorozat számai soha nem kisebbednek és mindig kisebbek K_0+1-nél, a második sorozat számai soha nem nagyobbodnak és mindig nagyobbak K_0-nál. De a két sorozat ugyanazt a számot értelmezi, mert

$$\frac{Kn+1}{X^n} - \frac{Kn}{X^n}$$

vagyis $\frac{1}{X^n}$ kisebb lesz a tetszőlegesen választott δ-nál, ha p. egyszerűen $n > \frac{1}{\delta}$, mert $\frac{1}{X^n} < \frac{1}{n}$. Legyen e szám K.

Ha ugyanis egy bizonyos n-től kezdve $\frac{K_n}{X^n} - r$ pozitiv és egy bizonyos g számnál nagyobb, azaz $r < K$, akkor $r < \frac{K_n}{X^n}$ és így egyszersmind $r < A$; ha megfordítva $\frac{Kn+1}{X^n} - r$ negativ és egy bizonyos h számnál kisebb, azaz $r > K$, akkor $r > \frac{K_n+1}{X^n}$ és így egyszersmind $r > A$. A K szám tehát nem más, mint A, és így *a tetszőlegesen értelmezett valós szám A egyszersmind adva van az* (1.) *vagy* (2.) *sorozat által.*

Midőn az A maga is raczionális szám, R, akkor:

$$\frac{K_n}{X^n} \leq R < \frac{K_n + 1}{X^n}$$

és így

$$\left|\frac{K_n}{X^n} - R\right| \quad \text{és} \quad \left|\frac{K_n + 1}{X^n} - R\right|$$

kisebb mint $\frac{1}{X^n}$ (vagy legfölebb evvel egyenlő), tehát a tetszőleges δ-nál kisebb, ha $n > \frac{1}{\delta}$.

Az (1.) sorozat az irraczionális számnak különösen fontos értelmezési alakja. Az áttérés $\frac{K_n}{X^n}$-től a reá következő tagra $\frac{K_{n+1}}{X^{n+1}}$-re az által történik, hogy a

$$\frac{K_n X}{X^{n+1}}, \frac{K_n + 1}{X^{n+1}}, \ldots \frac{K_n X + X}{X^{n+1}}$$

számok sorából kikeressük azt, mely még nem nagyobb A-nál; az utolsó ez soha nem lehet, mert ez $\frac{K_n + 1}{X^n}$ már nagyobb volt A-nál. E szerint

$$\frac{K_{n+1}}{X^{n+1}} - \frac{K_n}{X^n} = \frac{\mathfrak{k}_{n+1}}{X^{n+1}}$$

hol $\mathfrak{k}_{n+1}$ csak ezen egész számok egyike lehet: $0, 1, 2, \ldots X-1$. Ha ezt $n = 1, 2, \ldots$-re alkalmazzuk, sorozatunk tagjai lesznek:

$$K_0, K_0 + \frac{\mathfrak{k}_1}{X}, K_0 + \frac{\mathfrak{k}_1}{X} + \frac{\mathfrak{k}_2}{X^2}, \ldots$$

és általánosságban

$$\frac{K_n}{X^n} = K_0 + \frac{\mathfrak{k}_1}{X} + \frac{\mathfrak{k}_2}{X^2} + \ldots + \frac{\mathfrak{k}_{n-1}}{X^{n-1}} + \frac{\mathfrak{k}_n}{X^n}, \quad (\mathfrak{k}_i = 0, 1, 2, \ldots X-1)$$

Ha $X = 10$, ez nem más, mint azon alak, melyet röviden *végtelen tizedes törtnek* szokás nevezni és melyet már az elemekben az irraczionális számok ábrázolására használnak. Ha 10 helyett tetszőleges egész számot használunk, p. X-et, ezen alapra vonatkozólag a deczimális törteknek analogjait lehet képezni; és ezeknek általános alakja épen az, a melyet most nyertünk.

Különösen fontos még az $X = 2$ esete, a *binar számrendszeré*, mely azért lesz különösen egyszerű, mert minden $\mathfrak{k}$ csak 0 vagy 1 lehet.

E szerint e kijelentés $A = 1{\cdot}41421\ldots$, annyit jelent, hogy:

$$1 < A < 2,\ 1{\cdot}4 < A < 1{\cdot}5,\ 1{\cdot}41 < A < 1{\cdot}42,\ 1{\cdot}414 < A < 1{\cdot}415,$$
$$1{\cdot}4142 < A < 1{\cdot}4143,\ \text{s ú. t.}$$

II.

A valós számok alaptulajdonságai. Határértékek.

Alapmüveletek valós számokon.

49. Midőn valamely valós szám A adva van a hozzátartozó

$$a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$$

számsorozat által, ezen értelmezés teljesen független a számsorozat akárhány első tagjának értékétől. Mert ha p. az első r szám helyébe az egészen tetszőleges $b_1, b_2, \ldots b_r$ számokat teszszük, a többit pedig meghagyjuk, akkor az új sorozat:

$$b_1, b_2, \ldots, b_r, a_{r+1}, \ldots, a_n, \ldots$$

ugyanazt a számot adja, mert ha csak $n > r$ a megfelelő tagok különbsége 0, tehát egy tetszőlegesen választott pozitiv számnál kisebb. (47. cz).

Az A szám értéke tehát a sorozatnak csak tetszőlegesen későn következő tagjaitól függ vagyis az a_n értékeitől, ha n már nagyobb egy tetszőleges számnál. Az $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ számsorozathoz tartozó számot ennek megfelelőleg lim. a_n-nel jelöljük, hol — ha szükséges — még kijelentjük külön, hogy n azon szám, mely a számsorozat tagjait adja, ha helyébe egymásután a pozitiv egész számok sorát teszszük. E szerint azt, hogy A az $a_1\ a_2 \ldots a_n \ldots$ sorozat által értelmezett szám ezentúl így írjuk:

$$A = \lim.\ a_n \quad (n = 1, 2, \ldots k, k+1 \ldots)$$

vagy röviden csak $A = \lim.\ a_n$. Az n-re vonatkozó külön kijelentés csak később lesz fontos, midőn majd a lim. jelnek általánositása történik. Ezt majd úgy mondjuk, hogy A az a_n-nek *limese, határértéke,* mely kifejezés-mód jogosult volta mostani tárgyalásainkból majd önként kiviláglik.

A lim. a_n jel használata természetesen föltételezi, hogy ez valami valós számot jelent; különben a jelnek az eddigiek alapján nincs értelme. Erre természetesen szükséges és elegendő, hogy az a_n által megadott számsorozat szabályos legyen. Ezt ezentúl röviden ugy mondjuk, hogy *a_n-nek van határértéke* és csak akkor használható egyszersmind a lim. a_n jel.

Úgy mint eddig, a δ, ε, valamint a ϑ, η görög betűket tetszőlegesen választható pozitiv raczionális számok jelzésére akarjuk használni, hol mindenkor a fontos az, hogy ezek *tetszőlegesen kicsiny* számok is lehetnek. Ugyane betűk, mutatókkal ellátva, pedig mindenkor oly számsorozat tagjait jelentsék, melyeknek ha csak e mutatót elég nagynak veszszük, absolut értékei tetszőlegesen kis számnál, tehát δ-nál is kisebbek lesznek; úgy hogy p.

$$|\delta_{n+k}| < \delta$$

egy bizonyos n-re és tetszőleges nem negativ egész k-ra nézve, bárminő kis pozitiv szám is δ. Mostani jelzésünkben:

$$\lim. \delta_n = 0,$$

mert a $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$ számsorozat ekkor a 0-ra vezet.

Hogy az $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ számsorozatnak van határértéke, e szerint úgy is fejezhető ki, hogy lim. $(a_{n+k} - a_n) = 0$.

Ekkor a következő egyszerű tételeket nyerjük, melyeket folytonos alkalmazásuk miatt jó itt összeállítani.

Ha lim. $a_n = A$, *egy tetszőleges valós számmal és* lim. $\delta_n = 0$, *akkor;*

$$\lim. (a_n + \delta_n) = \lim. a_n = A \tag{1.}$$

$$\lim. (a_n \delta_n) = 0. \tag{2.}$$

Az első egyenlet nem más, mint a 47. czikkben tárgyalt tétel új fogalmazása. Egy speciális esete legyen még külön kiemelve, mely szerint:

$$\lim. (\delta_n + \varepsilon_n) = 0.$$

és ebből ismét:

$$\lim. (a_n + \delta_n + \varepsilon_n) = \lim. a_n \text{ s ú. t.} \tag{3.}$$

A második egyenlet bebizonyítására megjegyezzük, hogy a_n egy szabályos számsorozat általános tagja; tehát egy bizonyos n-től kezdve $|a_{n+k}| < H$, hol H egy bizonyos meghatározott pozitiv szám.

Ugyancsak egy bizonyos n-től kezdve $|\delta_{n+k}| < \delta$. Ha tehát az n-et oly nagynak veszszük, hogy mind a két egyenlőtlenség fönnálljon és a δ választása úgy történt, hogy p. $\delta < \frac{\varepsilon}{H}$, akkor egyszersmind;

$$|a_n \delta_n| < \varepsilon,$$

a mi a (2.) egyenlettel teljesen egyértelmű. Ennek is speciális esete:

$$\lim. (\delta_n \varepsilon_n) = 0.$$

Ha lim. $a_n = A$, *egy a 0-tól különböző különben tetszőleges valós szám és* lim. $\delta_n = 0$, *akkor:*

$$\lim. \left(\frac{\delta_n}{a_n}\right) = 0.$$

Ekkor ugyanis egyszersmind egy bizonyos n-től kezdve $|a_{n+k}| > G$, hol G egy bizonyos meghatározott pozitiv szám, valamint $|\delta_{n+k}| < \delta$. Ha tehát n-et oly nagynak veszszük, hogy mind a két egyenlőtlenség fönnálljon és a δ választása úgy történik, hogy p. $\delta < G\varepsilon$ akkor egyszersmind $\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{G}$ és

$$\left|\frac{\delta_n}{a_n}\right| < \varepsilon,$$

a mi tételünk kifejezése.

50. *Valós számok összegét és szorzatát* az eddigiek csak arra az esetre értelmezik, midőn mind a két összeadandó vagy szorzó raczionális. Az általános értelmezés szabad választása tehát csak azon föltételnek van alávetve, hogy raczionális számok esetére az eddigi eredményeket adja. Az ellenkező esetben a bevezetendő műveletek nem volnának az összeadás, illetőleg szorzás általánosításai. E szerint ha lim. a_n és lim. b_n két valós szám, összegük és szorzatuk adva legyen a következők által:

$$\lim. a_n + \lim. b_n = \lim. (a_n + b_n) \qquad \text{(I.)}$$

$$\lim. a_n \lim. b_n = \lim. (a_n b_n) \qquad \text{(II.)}$$

Először is bebizonyitandó, hogy a jobboldalon (valós) számok jelei állanak, azaz hogy $a_n + b_n$ és $a_n b_n$-nek van határértéke. A föltétel szerint van oly n, melyre nézve

$$|a_{n+k} - a_n| < \delta, \quad |b_{n+k} - b_n| < \varepsilon$$

ha tehát δ-t és ε-t kisebbnek veszszük p. $\frac{1}{2}\eta$-nál akkor:

$$|(a_{n+k}+b_{n+k})-(a_n+b_n)|<|a_{n+k}-a_n|+|b_{n+k}-b_n|<\eta$$

a mi a_n+b_n-re nézve a határérték létezését bizonyítja.

Ugyanily módon látni, miután

$$a_{n+k}\,b_{n+k}-a_n\,b_n=(a_{n+k}-a_n)(b_{n+k}-b_n)+a_n\,(b_{n+k}-b_n)+$$
$$+b_n\,(a_{n+k}-a_n),$$

hogy:

$$\lim.\ (a_{n+k}\,b_{n+k}-a_n\,b_n)=0\,,$$

mert a megelőző czikk tételeinek értelmében $\lim.\ (a_{n+k}-a_n)=0$, $\lim.\ (b_{n+k}-b_n)=0$; ez pedig annyit mond, hogy $a_n\,b_n$-nek is van határértéke.

Kimutatandó még másodsorban, hogy az A és B összegének, illetőleg szorzatának értelmezése független az A és B jellemzésének alaki különbségeitől. Ha $A=\lim.\ a_n$ és $B=\lim.\ b_n$, az összeg és szorzat értékének nem szabad változnia, ha ezek helyett az A és B bármely alakját azaz $\lim.\ (a_n+\delta_n)$ és $\lim.\ (b_n+\varepsilon_n)$-t használjuk. Ezekre nézve az I. és II. szerint lesz:

$$\lim.\ (a_n+\delta_n)+\lim.\ (b_n+\varepsilon_n)=\lim.\ (a_n+b_n+\delta_n+\varepsilon_n)$$
$$=\lim.\ (a_n+b_n)$$

és:

$$\lim.\ (a_n+\delta_n)\lim.\ (b_n+\varepsilon_n)=\lim.\ (a_n\,b_n+a_n\,\varepsilon_n+b_n\,\delta_n+\delta_n\,\varepsilon_n)$$
$$=\lim.\ (a_n\,b_n)\,.$$

Végre harmadszor, ha A és B raczionális számok, tehát $a_n=r_1+\delta_n$, $b_n=r_2+\varepsilon_n$ akkor valóban:

$$r_1+r_2=\lim.\ (r_1+\delta_n)+\lim.\ (r_2+\varepsilon_n)=\lim.\ (r_1+r_2+\delta_n+\varepsilon_n)=$$
$$=\lim.\ (r_1+r_2)=r_1+r_2\,,$$

$$r_1 r_2=\lim.\ (r_1+\delta_n)\ \lim.\ (r_2+\varepsilon_n)=$$
$$=\lim.\ (r_1\,r_2+r_1\,\varepsilon_n+r_2\delta_n+\delta_n\,\varepsilon_n)=$$
$$=\lim.\ (r_1\,r_2)=r_1\,r_2\,.$$

51. Az *$A - B$ különbség*, vagyis azon szám, mely B-hez hozzáadva, A-t adja, most szintén általánosságban képezhető. Lesz:

$$\lim. a_n - \lim. b_n = \lim. (a_n - b_n).$$

Hogy először is $\lim. (a_n - b_n)$ számot jelent, azaz hogy $a_n - b_n$-nek van határértéke, ismét abból következik, hogy mindenesetre lehet egy n-et meghatározni úgy, hogy:

$$|a_{n+k} - a_n| < \delta, \ |b_{n+k} - b_n| < \varepsilon,$$

és ha most δ-t és ε-t kisebbnek veszszük $\frac{1}{2}\eta$-nál, akkor ismét:

$$|(a_{n+k} - b_{n+k}) - (a_n - b_n)| < |a_{n+k} - a_n| + |b_{n+k} - b_n| < \eta.$$

Hogy $\lim. (a_n - b_n)$ és $\lim. b_n$ összege valóban $\lim. a_n$, az összeadás értelmezéséből világos.

A kivonás a valós számok körében is *egyértelmű* művelet, azaz mindig egy és csak egy számhoz vezet. Mert ha p. volna

$$\lim. a_n + \lim. x_n = \lim. b_n$$
$$\lim. a_n + \lim. y_n = \lim. b_n$$

akkor ebből következnék, hogy:

$$\lim. a_n + \lim. x_n = \lim. a_n + \lim. y_n,$$

azaz:

$$\lim. (a_n + x_n) = \lim. (a_n + y_n),$$

a mi csak úgy lehetséges, ha egy bizonyos n-re nézve:

$$|(a_{n+k} + x_{n+k}) - (a_{n+k} + y_{n+k})| = |x_{n+k} - y_{n+k}| < \delta,$$

de ekkor $\lim. x_n = \lim. y_n$.

52. A *$\frac{B}{A}$ hányados*, vagyis azon szám képezése, mely A-val szorozva B-t adja, most szintén általánosságban végezhető, kivéve, ha $A = 0$. Ebben az esetben minden szám, 0-sal szorozva, 0-t ad [49. cz. (2.) és 50. cz. (II.)] és így ez az eset itt épen úgy kizárandó mint előbb. *Ha tehát A nem 0*, lesz:

$$\frac{\lim. b_n}{\lim. a_n} = \lim. \frac{b_n}{a_n}$$

Hogy először is $\frac{b_n}{a_n}$-nek van határértéke, ismét abból következik, hogy egy bizonyos n-re nézve:

$$|a_{n+k}-a_n|<\delta\,,\ |b_{n+k}-b_n|<\varepsilon\,,$$

és azonkívül most, minthogy lim. a_n nem 0, még:

$$|a_{n+k}|>G\,,$$

hol G egy meghatározott pozitiv (raczionális) szám.

Ennek következtében

$$\left|\frac{b_{n+k}}{a_{n+k}}-\frac{b_n}{a_n}\right|=\frac{|a_n\,b_{n+k}-b_n\,a_{n+k}|}{|a_{n+k}|\,|a_n|}<\frac{|a_n\,b_{n+k}-b_n\,a_{n+k}|}{G^2}\,;$$

de ezenkívül:

$$|a_{n+k}|<H\,,\ |b_{n+k}|<H'$$

és így:

$$|a_n\,b_{n+k}-b_n\,a_{n+k}|=|a_n(b_{n+k}-b_n)-b_n(a_{n+k}-a_n)|<H\varepsilon+H'\delta.$$

Ha most már δ-t és ε-t úgy választjuk, hogy

$$H\varepsilon+H'\delta<G^2\eta$$

$\left(\text{p. } \varepsilon<\frac{G^2}{2H}\eta\,,\ \delta<\frac{G^2}{2H'}\eta\,,\right)$, akkor valóban:

$$\left|\frac{b_{n+k}}{a_{n+k}}-\frac{b_n}{a_n}\right|<\eta\,.$$

Hogy azután lim. $\frac{b_n}{a_n}$ és lim. a_n szorzata valóban lim. b_n, a szorzás értelmezéséből világos.

Az osztás végre a valós számok körében is, természetesen ha az osztó nem 0, *egyértelmű* művelet, azaz mindig egy és csak egy számhoz vezet. Mert ha p. volna:

$$\text{lim. } a_n \text{ lim. } x_n = \text{lim. } b_n\,,$$

$$\text{lim. } a_n \text{ lim. } y_n = \text{lim. } b_n\,,$$

akkor ebből következnék:

$$\text{lim. } a_n \text{ lim. } x_n = \text{lim. } a_n \text{ lim. } y_n\,,$$

azaz:

$$\text{lim. } (a_n\,x_n) = \text{lim. } (a_n\,y_n)\,,$$

a mi csak úgy lehetséges, hogy egy bizonyos n-re

$$|a_{n+k}\, x_{n+k} - a_{n+k}\, y_{n+k}| < \delta\,,$$

$$|a_{n+k}|\,|x_{n+k} - y_{n+k}| < \delta\,,$$

és minthogy $|a_{n+k}| > G$,

$$|x_{n+k} - y_{n+k}| < \frac{\delta}{G}\,,$$

vagyis ha δ-t $G\eta$-nak veszszük, kisebb a tetszőleges η-nál, azaz $\lim.\, x_n = \lim.\, y_n$.

53. Minden valós szám (a 0 kivételével) vagy *pozitiv* vagy *negativ*, a mint 0-nál nagyobb vagy kisebb. A mint $\lim.\, a_n$ pozitiv vagy negativ, egy bizonyos n-től kezdve a_{n+k} is mindig pozitiv vagy negativ. (46. cz.)

Az A szám ismét nagyobb B-nél, egyenlő B-vel, vagy kisebb a B-nél:

$$A > B\,,\ A = B\,,\ A < B\,,$$

a mint az $A - B$ különbség pozitiv, 0, vagy negativ.

Azon esetre, midőn B raczionális szám, e definiczió a régivel megegyezik és így ennek jogos általánositása. Ekkor ugyanis a B oly számsorozat által értelmezhető, melynek minden tagja egyenlő r-rel és ebből látni, hogy az illető föltételek ugyanazok, mint előbb.

Az $A \gtreqless B$ állítások részletes értelme most is ugyanaz marad, mint raczionális számoknál. (42. cz.)

Ha $A = \lim.\, a_n$, akkor a szorzási tétel értelmében $-A = \lim.\, (-a_n)$. Az A absolut értéke, $|A|$ alatt ismét az $A - 0$ és $0 - A$ különbségek közül azt értjük, a mely pozitiv és most is

$$|A + B| \leq |A| + |B|$$

t. i. ha nem egyenlő evvel, akkor ez $\big||A| - |B|\big|$.

Ha $A = \lim.\, a_n$, akkor, ha a_m egy bizonyos meghatározott tagja a számsorozatnak

$$A - a_m = \lim.\, (a_n - a_m)\,,$$

minthogy pedig n oly nagynak vehető, hogy $|a_{n+k} - a_n|$ egy tetszőlegesen választott δ-nál kisebb, lehet az m-et oly nagynak venni, hogy $A - a_{m+k}$ bármily szabadon választott kis értéknél is kisebb. *Ha csak elég messze haladunk az a_n raczionális számok sorában, ezek tetszőlegesen megközelíthetik az A számot azonban a nélkül, hogy e számmal egyenlők lehetnének, ha A irraczionális. Az $A = \lim. a_n$ ily módon valóban ez a_n számoknak (a raczionális számok sorában nem mindig elérhető) határa. A megközelítés pontossága a δ szám által van adva.*

Az A, B számok megközelítései a_m, b_n úgy vehetők, hogy az $A+B$, $A-B$, AB és (ha B nem 0) $\frac{A}{B}$ tetszőleges pontos megközelítésben adva legyenek $a_m + b_n$, $a_m - b_n$, $a_m b_n$, $\frac{a_m}{b_m}$ által.

Ha ugyanis m-et és n-et oly nagynak veszszük, hogy

$$|A - a_m| < \tfrac{1}{2}\delta, \; |B - b_n| < \tfrac{1}{2}\delta$$

egyszersmind

$$|A \pm B - (a_m \pm b_n)| < \delta.$$

Továbbá:

$$AB - a_m b_n = (A - a_m)(B - b_n) + a_m(B - b_n) + b_n(A - a_m),$$

hol még egy bizonyos m, illetőleg n-től kezdve:

$$|a_m| < H, \; |b_n| < H'.$$

és végre H és H' az 1-nél nagyobbnak vehetők.

Ha tehát $\eta < 1$, és a_m, b_n-t úgy választjuk, hogy:

$$|A - a_m| < \frac{\eta}{3H'}, \; |B - b_n| < \frac{\eta}{3H},$$

akkor $|AB - a_m b_n| < \eta$.

Végre ha $\lim. b_n$ nem 0, ugyancsak az osztásnál (52. cz.) végzett számítások értelmében m-et és n-t úgy is lehet választani, hogy $\left|\frac{A}{B} - \frac{a_m}{b_n}\right| < \eta$.

Numerikus számításoknál az irraczionális számok helyébe a megközelítő (raczionális) értékeket teszszük és ez által az eredmény helyett is ennek megközelítését nyerjük. E megközelítés pontossága tetszőlegesen fokozható, úgy hogy a tapasztalati adatokat (melyeknél minden mérés szintén csak megközelítő eredményt ad) teljesen kifejezheti.

Határértékek általános értelmezése.

54. A határértékeknek utoljára kifejtett tulajdonságai alapján a határértékek értelmezése átvihető azon általánosabb esetre is, midőn az alapul szolgáló számsorozat tagjai: $a_1\, a_2, \ldots a_n \ldots$ többé nem raczionális, hanem tetszőleges valós számok.

Az $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ tetszőleges valós számok sorozatának vagy az a_n kifejezésnek határértéke alatt, midőn n a pozitiv egész számok során keresztül minden határon túl növekszik, az oly A számot értjük, melyre nézve, bármicsoda pozitiv szám is δ, lehet egy (poz. eg.) n-et úgy meghatározni, hogy

$$|a_{n+k} - A| < \delta, \tag{1.}$$

bármicsoda nem negativ egész szám is k.

A föltétel arra, hogy ily határérték létezzék, kifejezhető függetlenül a határ értékétől. Ekkor ugyanis kell, hogy lehessen egy n-et úgy meghatározni, hogy:

$$|a_{n+k} - a_{n+l}| < \eta, \tag{2.}$$

hol ismét η tetszőleges pozitiv szám, k és l pedig tetszőleges nem negativ egész számok.

Ha ugyanis n-et úgy határozzuk meg, hogy $|a_{n+k} - A| < \frac{1}{2}\eta$, akkor egyszersmind $|a_{n+l} - A| < \frac{1}{2}\eta$, és a kettőből az előbb fölirt egyenlőtlenség is következik. Ennek csak látszólag speciális esete:

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon,$$

mert ebből ismét az előbbi alakra térhetünk át.

Az $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ számsorozatot, mely most nem áll raczionális, hanem tetszőleges valós számokból, ismét *szabályos*nak nevezzük, ha a (2.) által kifejezett föltételnek eleget tesz; és így *csak szabályos számsorozatoknak van* határértékök.

Megforditva *minden szabályos számsorozatnak van meghatározott határértéke*, azaz van egy — és csak egy — A szám, melynek jele ismét lim. a_n, és mely az (1.) által adott sajátságot mutatja.

Legyen ugyanis $\delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_n, \ldots$ a raczionális számok egy folyton kisebbedő sorozata, melyre nézve lim. $\delta_n = 0$.

Akkor a megelöző czikk értelmében lehet minden α_n-hez egy a_n *raczionális* számot meghatározni úgy, hogy

$$|\alpha_n - a_n| < \delta_n.$$

Hasonlóképen következik, hogy:

$$|\alpha_{n+k} - a_{n+k}| < \delta_{n+k} < \delta_n.$$

E szerint továbbá:

$$|(\alpha_{n+k} - \alpha_n) - (a_{n+k} - a_n)| < 2\delta_n$$

és az α_n szabályos számsorozat lévén, elég nagy n-nél:

$$|\alpha_{n+k} - \alpha_n| < \varepsilon.$$

Ha tehát az n-ek sorában annyira megyünk, hogy $\delta_n < \frac{1}{4}\eta$ és hogy az utolsó egyenlőtlenség $\varepsilon = \frac{1}{2}\eta$-ra is ki legyen elégítve, egyszersmind:

$$|a_{n+k} - a_n| < \eta,$$

azaz $a_1, \ldots a_n, \ldots$ szabályos számsorozat és A *nem más mint az* α_n *határértéke*, azaz:

$$A = \lim. \alpha_n = \lim. a_n.$$

Tudniillik lehet most az n-et oly nagynak venni, hogy:

$$|a_{n+k} - a_n| < \tfrac{1}{3}\eta, \; |\alpha_n - a_n| < \tfrac{1}{3}\eta, \; |\alpha_n - A| < \tfrac{1}{3}\eta$$

és ekkor egyszersmind

$$|a_{n+k} - A| < \eta.$$

Több mint egy szám soha nem felelhet meg, mert ha egyszerre

$$|a_{n+k} - A| < \delta \text{ és } |a_{n+k} - B| < \delta,$$

akkor egyszersmind volna:

$$|A - B| < 2\delta,$$

a mi lehetetlen ha A és B különböző és a tetszőleges δ-t például az $|A - B|$ felénél kisebbnek veszszük.

Minden tetszőleges valós számokból álló számsorozat:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$$

tehát így is írható:

$$a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \ldots a_n + \varepsilon_n, \ldots$$

hol az a-k raczionális számok, az ε-ok pedig minden határon túl kisebbednek. Azaz ismét lehet egy n-et meghatározni úgy, hogy $|\varepsilon_{n+k}| < \delta$. Közvetetlenül világos az előbbiekből, hogy ismét:

$$\lim. \varepsilon_n = 0,$$

$$\lim. \alpha_n = \lim. (a_n + \varepsilon_n) = \lim. a_n .$$

A tetszőleges számok határértékeire vonatkozó műveleti szabályok változatlanok maradnak. Most is:

$$\lim. \alpha_n + \lim. \beta_n = \lim. (\alpha_n + \beta_n);$$

ha ugyanis

$$\alpha_n = a_n + \varepsilon_n, \quad \beta_n = b_n + \vartheta_n,$$

akkor

$$\lim. \alpha_n + \lim. \beta_n = \lim. (a_n + \varepsilon_n) + \lim. (b_n + \vartheta_n) = \lim. a_n + \lim. b_n =$$
$$= \lim. (a_n + b_n) = \lim. (a_n + b_n + \varepsilon_n + \vartheta_n) = \lim. (\alpha_n + \beta_n).$$

Hasonlóképen:

$$\lim. \alpha_n \lim. \beta_n = \lim. \alpha_n \beta_n$$

Mert ismét:

$$\lim. \alpha_n \lim. \beta_n = \lim. a_n \lim. b_n = \lim. (a_n b_n) =$$
$$= \lim. (a_n b_n + \varepsilon_n b_n + \vartheta_n a_n + \varepsilon_n \vartheta_n) = \lim. \alpha_n \beta_n.$$

Ezekből pedig a megfordított műveletekre vonatkozólag is folynak a megfelelő tételek. Most ugyanis a kivonás és osztás külön tárgyalást nem igényel; mert valós számokra vonatkozólag a műveletek egyértelműsége már meg van állapitva. Az osztásnál, ha lim. β_n az osztó, természetesen lim. $\beta_n = 0$ ismét kivételt alkot.

55. Ha valamely

$$\omega_1 \, \omega_2 \ldots \omega_n \ldots$$

számsorozat olyan, hogy bármicsoda (nagy) pozitiv szám is ω, lehet egy n-et meghatározni, melyre nézve

$$|\omega_{n+k}| > \omega$$

a k minden nem negativ egész értékénél, a sorozat nem lehet szabályos, mert a sorozat tagjai nem maradnak két meghatározott érték G és H között. Ha t. i. ezek bárminők, mindig lehet ω-t $|G|$ és $|H|$-nál nagyobbnak venni és elég nagy n-nél tehát ω_n nem fekszik G és H között.

Hogy a számsorozatok e tulajdonságát röviden kifejezhessük, azt mondjuk, hogy ekkor ω_n *határértéke végtelen nagy* és ezt így írjuk

$$\lim.\ \omega_n = \infty.$$

Itt csak a szó átvitt értelmében van szó határértékről és az előbbi esetet, midőn a számsorozat szabályos, ettől úgy különböztetjük meg, hogy ekkor *véges és meghatározott* határértékről beszélünk. A ∞ *jel*, mint ilyen, szintén meghatározott, de *nem véges*, a mi egyszerűen tagadó értelmű, hogy t. i. nem jelent számot. A ∞ jel csak mint egy bizonyos nem szabályos számsorozat jellemző tulajdonsága szerepel és *nem számérték*, azaz nem tartozik a definiált valós számok körébe.

Az alapműveletek formális törvényei nem is terjeszthetők ki erre. Könnyű látni, hogy ha $\lim.\ \omega_n = \infty$, és $\lim.\ a_n$ véges akkor:

$$\lim.\ (a_n + \omega_n) = \infty, \lim.\left(\frac{a_n}{\omega_n}\right) = 0,$$

és ha $\lim.\ a_n$ nem 0:

$$\lim.\ (a_n\,\omega_n) = \infty, \tag{I.}$$

mert $|a_n|$ két véges határ G és H közt fekszik, ellenben $|\omega_n|$ egy tetszőleges nagy számnál nagyobbá, tehát $\frac{1}{|\omega_n|}$ egy tetszőleges kis számnál is kisebbé tehető.

Ellenben, ha $\lim.\ \varepsilon_n = 0$ és $\lim.\ \omega_n = \infty$, akkor $\lim.(\varepsilon_n\omega_n)$-re nézve általános megállapitás nem lehetséges, hanem az $\varepsilon_n\omega_n$ számsorozat akármilyen lehet.

Az a_n kifejezésnek tehát vagy nincs határértéke és ekkor a $\lim.\ a_n$ határozatlan, azaz e jelnek nincs értelme, vagy van határértéke és ekkor $\lim.\ a_n$ véges és meghatározott számot, vagy ∞-t jelent.

56. A határértékek alakjában adott számokra vonatkozó műveleti törvények megfordítva irva:

$$\lim.\ (a_n \pm \beta_n) = \lim.\ a_n \pm \lim.\ \beta_n,$$

$$\lim.\ (a_n\beta_n) = \lim.\ a_n \lim.\ \beta_n, \tag{II.}$$

$$\lim.\left(\frac{a_n}{\beta_n}\right) = \frac{\lim.\ a_n}{\lim.\ \beta_n},\ \text{ha } \lim.\ \beta_n \text{ nem } 0,$$

mint oly szabályok értelmezhetők, melyek összeg, szorzat vagy hányados határértékét adják, ha az összeadandók, s ú. t. határértéke adva van.

Az (I.) és (II.) képletek segítségével így már sok határérték lesz kiszámítható, különösen ha tekintetbe veszszük, hogy lim. a_n *kiszámítása előtt a_n bármicsoda identikus módon átalakítható.* Igy:

$$\lim. n = \infty,$$

és ebből

$$\lim. \left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

valamint, ha r bárminő pozitiv egész szám;

$$\lim. \left(\frac{1}{n^r}\right) = \left(\lim. \frac{1}{n}\right)^r = 0.$$

Továbbá:

$$\lim. \left(\frac{A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \ldots + A_1 n + A_0}{B_r n^r + B_{r-1} n^{r-1} + \ldots + B_1 n + B_0}\right) =$$

$$= \lim. \left(\frac{A_r + A_{r-1}\frac{1}{n} + \ldots + A_1 \frac{1}{n^{r-1}} + A_0 \frac{1}{n^r}}{B_r + B_{r-1}\frac{1}{n} + \ldots + B_1 \frac{1}{n^{r-1}} + B_0 \frac{1}{n^r}}\right),$$

hol azután a számláló és nevező oly összeg, melyre nézve minden tag határértéke, kivéve az elsőét, 0 és így *a keresett határérték:* $\frac{A_r}{B_r}$, ha B_r nem 0. Ez utóbbi esetben ha tehát s pozitiv egész szám és $< r$, hasonló módon:

$$\lim. \left(\frac{A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \ldots + A_1 n + A_0}{B_{r-s} n^{r-s} + \ldots B_1 n + B_0}\right) = \infty.$$

Ha $|A|$ *az egységnél nagyobb, akkor* lim. $A^n = \infty$. T. i. a sorozat két egymásutan következő tagjának absolut értékei mindenkor egy meghatározott pozitiv számnál $|A| - 1$-nél nagyobb különbséget adnak: t. i.

$$|A^n| - |A^{n-1}| = |A|^n - |A|^{n-1} = |A|^{n-1}(|A| - 1).$$

E szerint:

$$|A|^n > |A|^{n-1} + |A| - 1,$$

és:
$$|A|^2 > 2|A| - 1 .$$
$$|A|^3 > 3|A| - 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|A|^k > k|A| - (k-1)$$

ha tehát k-t elég nagy poz. egész számnak veszszük, $|A^k|$ minden határon túl növekszik, azaz lim. $A^n = \infty$.

Közvetetlenül világos, hogy lim. $(1^n) = 1$.

Lim. $(-1)^n$ *határozatlan*, azaz $(-1)^n$-nek nincs határértéke; a megfelelő számsorozat ugyanis, melynek tagjai fölváltva $+1$ és -1, nem szabályos és tagjainak absolut értéke nem is növekszik minden határon túl.

Ha $|a|$ *az egységnél kisebb, akkor* lim. $a^n = 0$. Ekkor ugyanis $\frac{1}{|a|} > 1$ és így

$$\text{lim. } (a^n) = \text{lim. } \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n} = 0 .$$

Határértékeket kiszámitani, annyit tesz, mint a megfelelő számoknak legegyszerűbb jeleit keresni. Minthogy eddig csak a raczionális számokra vonatkozólag vannak ily jeleink, a «kiszámitás» most még csak akkor történhetik, ha az illető határérték raczionális szám.

Az irraczionális számok egyes fontos osztályai számára — minők p. a gyökvonásnál, a körmérésnél s ú. t. föllépő számok — külön jeleket vezetünk be.

57. A számot mindig az illető határérték definiálja, ha ez t. i. véges és meghatározott. Általánosságban egy adott kifejezés határértékére nézve csak is ezt lehet kimutatni. Hogy ez mikép történik, arra itt — egyelőre — csak néhány egyszerű példa álljon; először a

$$\text{lim. } \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\} \text{ és lim. } \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

határértékeket tárgyaljuk. Közvetetlenül látni, hogy:

$$(a + b)^k > a^k + ka^{k-1} b ,$$

ha $a \geq 0$ *és* $a + b$ *pozitiv, k pedig az egységnél nagyobb egész* *szám.* Mert a tétel helyes marad $(k+1)$-re, ha helyes volt k-ra nézve. Ekkor ugyanis $a+b$-vel szorozva:

$$(a+b)^{k+1} > (a^k + ka^{k-1}b)(a+b)$$
$$> a^{k+1} + (k+1)a^k b + ka^{k-1}b^2 > a^{k+1} + (k+1)a^k b;$$

míg ha $k=2$, világos, hogy $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 > a^2+2ab$.

Ha e tételt

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} = \left(1-\frac{1}{m}+\frac{1}{m(m+1)}\right)^{m+1}$$

-re alkalmazzuk, úgy hogy:

$$a = 1-\frac{1}{m}, \quad b = \frac{1}{m(m+1)}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

akkor

$$\left(1-\frac{1}{m}+\frac{1}{m(m+1)}\right)^{m+1} > \left(1-\frac{1}{m}\right)^{m+1} + \frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m,$$

és ebből:

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1-\frac{1}{m}\right)^m. \tag{1.}$$

Azaz $\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$, ha $m = 1, 2, \ldots n, \ldots$ folytonosan nagyobbodó számok sorozata; minthogy azonban e számok egyszersmind mint valódi törtek pozitiv egész hatványai az egynél soha nem lehetnek nagyobbak,

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

a 45. czikkben adott tétel szerint *véges és meghatározott szám.*

Hasonlóképen, ha:

$$a = 1+\frac{1}{m}, \quad b = -\frac{1}{m(m+1)},$$

$$1+\frac{1}{m+1} = 1+\frac{1}{m}-\frac{1}{m(m+1)},$$

akkor nyerjük, hogy:

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} - \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m,$$

és

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m; \tag{2.}$$

tehát az $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ számsorozat számai is folyton nagyobbodnak; de úgy, hogy a 4-nél mindig kisebbek.

Az előbbiek szerint ugyanis, ha csak $m>2$, akkor

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^m > \frac{1}{4}.$$

Ha tehát valamely m-re nézve

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 4,$$

akkor egyszersmind

$$\left(1-\frac{1}{m^2}\right)^m > 1,$$

$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{m^2}\right)^m$

$4 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 1$

de ez lehetetlen, mert valódi tört pozitiv egész hatványa nem lehet 1-nél nagyobb. Tehát:

$$\lim. \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

szintén *véges és meghatározott szám*. Ha e számnak — melynek tulajdonságait később részletesen jellemezzük — rövid jele gyanánt az e betűt használjuk, *még bebizonyítható, hogy:*

$$\lim. \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}. \qquad (3.)$$

Az (1.) és (2.)-ből egyszersmind:

$$\left(1-\frac{1}{(m+1)^2}\right)^{m+1} > \left(1-\frac{1}{m^2}\right)^m$$

és e számok ismét 1 alatt maradnak, tehát

$$\lim. \left(1-\frac{1}{m^2}\right)^m$$

mindenesetre véges és meghatározott szám, még pedig ≤ 1. De kisebb mint egy nem lehet; mert ha

$$\left(1-\frac{1}{m^2}\right)^m < a < 1$$

azon m-re nézve is, melyet úgy határozunk meg, hogy a^m kisebb a tetszőlegesen választott δ-nál, akkor

$$\left(1-\frac{1}{m^2}\right)^{m^2} < \delta;$$

de ekkor $\lim. \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{m^2} = 0$ volna, míg a 47. cz. szerint:

$$\lim. \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{m^2} = \lim. \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{4} \, .$$

Tehát:

$$\lim. \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^m = 1 \, , \tag{4.}$$

és így valóban

$$\lim. \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim. \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\lim. \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{\lim. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \, .$$

Az algebrai egyenletek valós gyökei.

58. *Minden oly algebrai egyenletnek, mely a raczionális számok körében megközelítőleg megoldható, van egy valós gyöke*, azaz ha az egyenlet* $f(x) = 0$, van egy oly valós szám a, melyre nézve $f(a)$ valóban *egyenlő* zérussal.

Hogy egyenletünk a raczionális számok körében megközelítőleg megoldható, annyit jelent, hogy bármicsoda pozitiv szám is δ, mindig lehet egy raczionális számot, r-et úgy meghatározni, hogy $|f(r)| < \delta$. Világos, hogy ekkor egyszersmind $f(r)$ is kisebb, mint δ; t. i. $f(r)$ vagy negativ és ekkor mindig $< \delta$, vagy pozitiv és ekkor $|f(r)| = f(r)$.

Föltehetjük, hogy az egyenlet legmagasabb együtthatója, A_0 pozitiv és ekkor bebizonyítjuk a következő tételt:

Ha az $f(x) = 0$ egyenlet legmagasabb együtthatója pozitiv, ha továbbá, bármicsoda pozitiv szám is δ, van egy raczionális szám r, melyre nézve $f(r) < \delta$, akkor mindig létezik egy valós szám ξ, mely az egyenlet gyöke, azaz melyre nézve $f(\xi) = 0$.

A tétel e fogalmazása *látszólag* általánosabb, mint az előbbi. Hogy minden megközelítőleg megoldható egyenlet a most jellemzett osztályba tartozik, a megelőzők szerint világos; hogy azonban megfordítva minden ily egyenlet megközelítőleg megoldható, külön lesz még bebizonyítandó.

* A $f(x)$ itt egyszerű rövidítés $A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$ helyett; tételünk, valamint bebizonyítása, ugyanaz marad, ha az A-k alatt nem egész számokat, hanem bárminő valós számokat értünk.

Két eset fordulhat elő; az r kellő választása által $f(r)$ vagy negativ is lesz; vagy pedig, ámbár minden δ-nál kisebbé tehető, mégis mindig pozitiv marad; hogy valamely r-re nézve $f(r)$ zérus, az annyit jelentene, hogy az egyenletnek van valós, még pedig raczionális gyöke. A két esetet külön tárgyaljuk.

a) Ha az r bizonyos értékénél $f(r)$ negativ is lesz, akkor az $f(x)$ kifejezés segítségével meghatározhatunk egy ξ számot azon megállapitás értelmében, hogy R nagyobb legyen mint ξ, ha $f(x)$ pozitiv, midőn R-et vagy az R-nél nagyobb számot teszünk x helyébe; R ellenkezőleg kisebb mint ξ, ha R vagy az R-nél kisebb szám helyettesítése $f(x)$-et negativvá teszi. Az osztályozás minden raczionális számra alkalmazható, ha az egyenletnek nincs raczionális gyöke, mert ekkor $f(R)$ soha sem 0. (Ha van raczionális gyök, a tétel nem szorul bebizonyításra).

E szám ξ az egyenlet gyöke, mert ha

$$\xi = \lim. x_n$$

akkor lehet oly $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ pozitiv számok sorát meghatározni, hogy $\lim. \varepsilon_n = 0$ és

$$x_n - \varepsilon_n < \xi < x_n + \varepsilon_n,$$

és így

$$f(x_n + \varepsilon_n)$$

mindig pozitiv, tehát

$$\lim. f(x_n) = \lim. f(x_n + \varepsilon_n) \geqq 0.$$

Más oldalról $x_n - \varepsilon_n$ és ξ közt mindenesetre van egy raczionális szám, melyet $x_n - \eta_n$-nel jelölhetni, (hol $\eta_n < \varepsilon_n$) és a melyre nézve $f(x_n - \eta_n)$ negativ. Mert ha $f(x)$ pozitiv minden $x_n - \varepsilon_n$ és ξ közt fekvő raczionális számra, a ξ definicziójával jutnánk ellentétbe és kellene hogy legyen: $x_n - \varepsilon_n > \xi$. E szerint:

$$\lim. f(x_n) = \lim. f(x_n - \eta_n) \leqq 0,$$

a mi egyszerre csak úgy lehetséges, ha:

$$\lim. (A_0 x_n^m + A_1 x_n^{m-1} + \ldots + A_m) = A_0 (\lim. x_n)^m +$$
$$+ A_1 (\lim. x_n)^{m-1} + \ldots + A_m =$$
$$= A_0 \xi^m + A_1 \xi^{m-1} + \ldots + A_m = 0.$$

b) Ha $f(x)$ másodszor minden raczionális szám behelyettesítésénél pozitiv eredményt ad, de bárminő pozitiv szám is δ, van egy r szám, melyre nézve $f(r) < \delta$, akkor, ha $\delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_n$ a kisebbedő pozitiv számok oly sorozata, melyre nézve $\lim. \delta_n = 0$, az $f(x) - \delta_n = 0$ egyenletnek van egy valós gyöke, melyet ξ_n-nel jelölünk, mert ha r az a szám, melyre nézve $f(r) < \delta_n$, $f(r) - \delta_n$ negativ lesz, tehát az egyenlet az *a)* alatt tárgyalt esethez tartozik. Az egyenletnek több valós gyöke is lehet; de ξ_n legyen azon szám, melyet az *a)* alatti módon határozunk meg. De ugyanerre a ξ_n számra

$$f(\xi_n) = \delta_n < \delta_{n-1}$$

és így $\lim. f(\xi_n) = 0$. Másodoldalról $\lim. \xi_n$ meghatározott szám. T. i.

$$\xi_{n+1} < \xi_n\,,$$

mert a megállapitások szerint bármicsoda pozitiv szám is a, mindig $f(\xi_n + a) - \delta_n$ pozitiv és nem 0, tehát ha $\xi_{n+1} \geq \xi_n$, $f(\xi_{n+1}) - \delta_n$ pozitiv vagy 0 és így $f(\xi_{n+1}) - \delta_{n+1}$ a zérustól különböző, pozitiv szám volna.

A $\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n \ldots$ sorozat tehát folyton kisebbedő számokból áll; de e kisebbedés nem mehet minden határon túl, ha t. i. volna:

$$|\xi_{n+k}| < 1 + \frac{M+1}{|A_0|}$$

akkor a 39. cz. értelmében $|f(\xi_{n+k})|$ nagyobb volna 1-nél és $f(\xi_{n+k}) - \delta_{n+k}$ nem lehetne 0. A ξ_n tehát $-1 - \frac{M+1}{|A_0|}$-nál nagyobb azon n-től kezdve, melyre nézve először δ_n kisebb az egynél. Igy tehát $\lim. \xi_n$ meghatározott szám és ha ezt ξ-vel jelöljük:

$$f(\lim. \xi_n) = f(\xi) = 0\,.$$

Ez ugyanis a

$$\lim. \left(f(\xi_n) - \delta_n\right) = 0$$

-ból következik, mert:

$$\lim. \left(f(\xi_n) - \delta_n\right) = \lim. \left(f(\xi_n)\right) = f(\lim. \xi_n) = f(\xi)\,.$$

59. Tételünknek egy — gyakran alkalmazott — speczialis esete, a következő:

Ha az

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

egyenletben az A_0 és A_m előjele ellenkező, az egyenletnek mindig van pozitiv valós gyöke.

Ekkor ugyanis — szükség esetén — 1-gyel szorozva, elérhetni, hogy A_0 pozitiv és A_m negativ; ekkor pedig x helyébe 0-t téve, $f(x)$-ből A_m, tehát *negativ* érték lesz, és az egyenlet az *a)* alatt tárgyalt osztályhoz tartozik.

Hogy a gyök pozitiv, abból foly, hogy az adott megállapitások értelmében $\xi > 0$, épen mert $f(0)$ negativ.

Végre még könnyű belátni, hogy *minden egyenlet, melynek van valós gyöke, a raczionális számok körében megközelítőleg megoldható.* Mert a gyök ξ kifejezhető lim. x_n alakban, hol minden x_n raczionális szám és minthogy lim. $f(x_n) = f(\lim. x_n) = 0$, mindig lesz:

$$|f(x_n)| < \delta\,,$$

bármicsoda pozitiv szám is δ, ha csak n-et elég nagynak veszszük.

III.

A gyökkivonás. — A hatvány általánositása.

Pozitiv számok pozitiv gyökei.

60. *Minden oly számot (m alatt pozitiv egész számot értve), mely m-edik hatványra emelve, az A-t adja, az A m-edik gyökének nevezzük.* (Négyzetgyök, köbgyök). Már a legegyszerűbb eset, melyben p.

$$2^2 = 4\,,\ (-2)^2 = 4$$

mutatja, hogy több mint egy ily szám is lehetséges. E számok közös jele $\sqrt[m]{A}$. Az $\sqrt[m]{A}$ meghatározása a *gyökkivonás* művelete által történik. Egyértelmű és a valós számok körében mindig kivihető művelethez jutunk, ha a föladatot a következő megszorítással tárgyaljuk:

Meghatározandó az oly pozitiv szám a, melynek m-edik hatványa egyenlő a pozitiv A-val.

Közvetetlenül látni, hogy két pozitiv szám nem felelhet meg a föladatnak; mert ha ilyen a és b és p. $a > b$, akkor egyszersmind $a^m > b^m$ és így nem lehetséges, hogy $a^m = b^m = A$.

Hogy egy ily szám mindig létezik, abból világos, hogy a megfelelő számok egyszerűen az $x^m - A = 0$ egyenletnek gyökei, melyek közt a megelőző tárgyalások értelmében mindig van egy pozitiv szám. Most e szám meghatározását e fejtegetésektől függetlenül végezzük, még pedig, bárminő pozitiv szám legyen is A.

Legyen X bármicsoda az egységnél nagyobb, az egyszerűség kedvéért egész szám. Akkor

$$0, \left(\frac{1}{X^n}\right)^m, \left(\frac{2}{X^n}\right)^m, \ldots, \left(\frac{K_n}{X^n}\right)^m, \left(\frac{K_n+1}{X^n}\right)^m, \ldots$$

nagyobbodó pozitiv számok sora. Legyen e sorozatban $\left(\frac{K_n}{X^n}\right)$ az utolsó, mely nem nagyobb A-nál, úgy hogy

$$\left(\frac{K_n}{X^n}\right)^m \leq A < \left(\frac{K_n+1}{X^n}\right)^m.$$

$A < \frac{K_n+1}{X^n}$

$A > \frac{K_{n+1}}{X^{n+1}}$

Ha n helyett ép úgy $n+1$-et teszünk, ismét:

$$\left(\frac{K_{n+1}}{X^{n+1}}\right)^m \leq A < \left(\frac{K_{n+1}+1}{X^{n+1}}\right)^m.$$

Minthogy az X^n nevezővel képezett számok az X^{n+1} nevezőjűek sorában is bennfoglaltatnak

$$\left(\frac{K_n X}{X^{n+1}}\right)^m \text{ és } \left(\frac{(K_n+1)X}{X^{n+1}}\right)^m$$

alakban, mindenesetre

$$\left(\frac{K_n+1}{X^n}\right)^m \geq \left(\frac{K_{n+1}}{X^{n+1}}\right)^m \geq \left(\frac{K_n}{X^n}\right)^m,$$

$$\left(\frac{K_n}{X^n}\right)^m \leq \left(\frac{K_{n+1}+1}{X^{n+1}}\right)^m \leq \left(\frac{K_n+1}{X^n}\right)^m.$$

E szerint:

$$K_0^m, \left(\frac{K_1}{X}\right)^m, \left(\frac{K_2}{X^2}\right)^m, \ldots, \left(\frac{K_n}{X^n}\right)^m, \ldots$$

soha nem kisebbedő számoknak sorozata, és ép úgy

$$(K_0+1)^m, \left(\frac{K_1+1}{X}\right)^m, \left(\frac{K_2+1}{X^2}\right)^m, \ldots, \left(\frac{K_n+1}{X^n}\right)^m$$

soha nem nagyobbodó számoknak sorozata, még pedig úgy, hogy az első számsorozat tagjai nem lehetnek nagyobbak $(K_0+1)^m$-nél, a második sorozatban állók pedig nem lehetnek kisebbek K_0^m-nál.

Ebből azután következik hogy

$$K_0, \frac{K_1}{X}, \frac{K_2}{X^2}, \dots \frac{K_n}{X^n}, \dots$$

szintén soha nem kisebbedő számok sorozata, melyek egyszersmind kisebbek K_0+1-nél és hasonlókép

$$K_0+1, \frac{K_1+1}{X}, \frac{K_2+1}{X^2}, \dots, \frac{K_n+1}{X^n}, \dots$$

soha nem nagyobbodó számok sorozata, melyek egyszersmind nagyobbak K_0-nál. Egyszerűen azért, mert ha a és b pozitiv számok $a \gtreqless b$, a mint $a^m \gtreqless b^m$, ha m pozitiv egész szám.

E szerint lim. $\frac{K_n}{X^n}$ és lim. $\frac{K_n+1}{X^n}$ meghatározott pozitiv valós számok, még pedig

$$\lim. \frac{K_n}{X^n} = \lim. \frac{K_n+1}{X^n}$$

mert $\frac{1}{X^n}$, ha n-et elég nagynak veszszük, bárminő pozitiv δ-nál is kisebb lesz.

De ekkor, minthogy az m-edik hatvány képezése a lim.-jel alatt is történhetik:

$$\lim. \left(\frac{K_n}{X^n}\right)^m = \lim. \left(\frac{K_n+1}{X^n}\right)^m$$

meghatározott valós szám, még pedig A. A határértékek egyenlősége miatt, ha csak n-et elég nagynak veszszük:

$$\left(\frac{K_n+1}{X^n}\right)^m - \left(\frac{K_n}{X^n}\right)^m < \delta;$$

de

$$\left(\frac{K_n+1}{X^n}\right)^m - A < \left(\frac{K_n+1}{X^n}\right)^m - \left(\frac{K_n}{X^n}\right)^m < \delta$$

és így

$$A = \lim. \left(\frac{K_n}{X^n}\right)^m = \lim. \left(\frac{K_n+1}{X^n}\right)^m,$$

de ekkor a pozitiv A pozitiv m-edik gyöke, ha A-t ily módon fejezzük ki mint határértéket, lesz:

$$\lim. \frac{K_n}{X^n} = \lim. \frac{K_n+1}{X^n}.$$

Ama föladat, oly pozitiv számot x-et meghatározni, melynek (m alatt pozitiv egész számot értve) m-dik hatványa, egyenlő A-val, külön tárgyalást nem igényel, mert ha

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m} = A,$$

akkor megfordítva

$$x^m = \frac{1}{A},$$

de ezen egyenletnek ismét csak egy pozitiv gyök felelhet meg, és így a pozitiv A pozitiv — m-dik gyöke nem más mint az $A^{-1} = \frac{1}{A}$ pozitiv m-edik gyöke.

A valós számok sorában oly szám, melynek négyzete (vagy bármi páros hatványa) negativ számmal egyenlő, nincsen, mert minden számnak négyzete vagy 0, vagy pozitiv.

Ha a-nak négyzete A, akkor $(-a)^2$ is A. A négyzetgyök kivonásának föladata, ha A pozitiv (nem 0), kétféleképen oldható meg; t. i. negativ megoldás is csak egy lehetséges; ha t. i. $(-a)^2 = (-b)^2 = A$; akkor egyszersmind $a^2 = b^2 = A$, tehát $a = b$. Nem fölösleges még egyszer hangsúlyozni, hogy $\sqrt{A}$ *kétértelmű* jel, és hogy a sokszor használt $+\sqrt{A}$-ban a $+$ egészen fölösleges, mert $\sqrt{A}$ magában is csak annyit mond, hogy «azon számok egyike, melyeknek négyzete A».

Tört-kitevők.

61. Míg az $\sqrt[m]{\ }$ jelet a többértelmű gyökkivonás számára tartjuk fönn, a most megállapitott pozitiv alapra vonatkozó egyértelmű műveletet a következőképen jelezzük.

Azt a pozitiv számot, melynek q-adik hatványa egyenlő a pozitiv A-nak p-edik hatványával, $A^{\frac{p}{q}}$-nak irjuk. Az ily módon bevezetett tört-kitevőkre nézve mindenek előtt áll, hogy az

$$A^{\frac{p}{q}} = B^{\frac{p}{q}}, \text{ és } A = B$$

egyenletek közül mindegyik a másiknak következménye. Mindegyikből ugyanis hatványozás által lesz $A^p = B^p$, de minthogy pozitiv számból csak egy módon lehet bárminő gyököt meghatározni, ebből viszont mind a két egyenletet nyerjük.

A jelzés jogosult voltára azonban még szükséges, hogy $A^{\frac{p}{q}}$ valóban csak a $\frac{p}{q}$ hányadostól, nem pedig külön-külön a p és q számoktól függjön. Valóban lesz, a mint erre szükséges és elegendő:

$$A^{\frac{pk}{qk}} = A^{\frac{p}{q}},$$

mert mindkét szám qk-adik hatványa A^{pk}.

Ha még meggondoljuk, hogy A első gyöke az A maga, azt is látni, hogy a jelzés összhangzatban van az előbb használt hatvány alakokkal, és ha $\frac{p}{q}$ egész szám, $A^{\frac{p}{q}}$ ezen egész számú hatványt jelenti. Ha végre negativ tört a kitevő,

$$A^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{A^{\frac{p}{q}}}.$$

Az általánosított hatványjelzés czélszerű volta, abból tünik ki, hogy a hatványozás műveleti szabályai változatlanok maradnak, azaz most is:

$$A^{\frac{p}{q}} A^{\frac{r}{s}} = A^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = A^{\frac{ps+qr}{qs}},$$

és:

$$\left(A^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = A^{\frac{pr}{qs}}$$

mely számok egyenlök, mert qs-edik hatványaik egyenlők. E hatványok képezésénél ugyanis tekintetbe veendő azon speciális eset, hogy*

$$\left(A^{\frac{p}{q}}\right)^{r} = (A^{r})^{\frac{p}{q}},$$

mert mindkét szám q-adik hatványa $= A^{pr}$.

Az 1-nek minden tört hatványa ismét 1.

Ha t pozitiv raczionális szám, A és A^t egyszerre nagyobb vagy kisebb az egynél. Mert az egységnél nagyobb (ill. kisebb) számból

* Ez a jellemző különbség a tört kitevő és a gyökjel közt. Így p. $(a^{\frac{1}{2}})^2 = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a$, míg:

$$(\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{a^2} = \pm a,$$

minden a szó szorosabb értelmében vett hatványozásnál és a pozitiv gyök meghatározásánál is ismét az egységnél nagyobb (ill. kisebb) számot nyerünk.

Negativ kitevőnél a recziprok értékre térünk át. Ekkor tehát A^{-t} nagyobb vagy kisebb, mint egy, amint A kisebb vagy nagyobb az 1-nél.

62. *Ha $A > 1$, és $t_1 < t_2$ akkor egyszersmind $A^{t_1} < A^{t_2}$.* Mert:

$$\frac{A^{t_2}}{A^{t_1}} = A^{t_2 - t_1}$$

mint A pozitiv hatványa az 1-nél nagyobb, tehát a számláló nagyobb a nevezőnél. Ép úgy látni, hogy:

Ha $A < 1$ és $t_1 < t_2$, akkor $A^{t_1} > A^{t_2}$.

Ha a pozitiv t kitevőt elég kicsinynek veszszük, mindig

$$|A^t - 1| < \delta$$

tehető, hol δ tetszőleges pozitiv szám.

Ha először is $A > 1$, A^t is nagyobb mint egy. Ha p. a t értékét $\frac{1}{m}$ alakban veszszük föl, hol m poz. egész szám

$$A^{\frac{1}{m}} < 1 + \delta$$

(és tehát A^t is ha $t < \frac{1}{m}$), hacsak

$$A < (1 + \delta)^m$$

a mire elég, ha (57. cz.).

$$A < 1 + m\delta$$

vagy végre

$$m > \frac{A-1}{\delta} \text{ vagyis } t < \frac{\delta}{A-1}.$$

Ha másodszor $A < 1$, A^t is kisebb mint 1. Ebben az esetben tehát

$$1 - \delta < A^{\frac{1}{m}},\ (1 - \delta)^m < A$$

vagy pedig

$$\frac{1}{A} < \left(\frac{1}{1-\delta}\right)^m,\ \frac{1}{A} < \left(1 + \frac{\delta}{1-\delta}\right)^m$$

a mire ha már $\delta < 1$, ismét elég ha

$$\frac{1}{A} < 1 + m\,\frac{\delta}{1-\delta}$$

vagy végre

$$m > \left(\frac{1}{A} - 1\right)\frac{1-\delta}{\delta}, \text{ vagy } t < \frac{A\delta}{(1-A)(1-\delta)}.$$

Ezt az eredményt még következőkép is lehet kifejezni: *Ha lim.* $\delta_n = 0$, *akkor lim.* $(A^{\delta_n}) = 1$.

Irraczionális kitevők.

63. Bármely irraczionális szám x mint raczionális számok határa, $x = \lim. x_n$ lévén kifejezhető, *az irraczionális kitevőjű hatvány általános értelmezése (az alapot mindig pozitivnak véve) a következőképen adható.*

$$A^{\lim. x_n} = \lim. (A^{x_n}).$$

Az értelmezés jogosult, ha először lim. (A^{x_n}) valóban mindig véges és meghatározott szám, ha másodszor raczionális határ esetében nem ad az eddigiektől különböző eredményt és harmadszor a hatványok formális műveleti szabályai most is változatlanok maradnak.

Minden valós számot oly módon lehet határérték alakjában kifejezni, (48. cz.) hogy $x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots$ soha nem kisebbedő számok, melyek egyszersmind mindannyian egy bizonyos H számnál kisebbek. De ekkor.

$$A^{x_1}, A^{x_2}, \ldots A^{x_n}, \ldots$$

soha nem kisebbedő vagy soha nem nagyobbodó számok sorozata, melyek az első esetben mindig kisebbek, a második esetben pedig mindig nagyobbak A^H-nál. Tehát lim. (A^{x_n}) véges és meghatározott szám. De az x minden más értelmezése ily alakú, lim. $(x_n + \varepsilon_n)$, hol lim. $\varepsilon_n = 0$, tehát akkor is:

$$\lim. (A^{x_n + \varepsilon_n}) = \lim. (A^{x_n}) \lim. (A^{\varepsilon_n}) = \lim. A^{x_n}.$$

Ha x raczionális szám, p. r, akkor $x = \lim. (r + \varepsilon_n)$ és ekkor

$$A^x = \lim. (A^{r+\varepsilon_n}) = \lim. A^r \lim. A^{\varepsilon_n} = A^r.$$

A mi végre a hatványok műveleti törvényeit illeti, legyen

$$x = \lim. x_n, \ y = \lim. y_n;$$

akkor

$$A^x A^y = \lim.(A^{x_n}) \lim.(A^{y_n}) = \lim.(A^{x_n+y_n})$$
$$= A^{\lim.(x_n+y_n)} = A^{x+y}$$

és még:

$$(A^x)^y = \left(\lim_x. A^{x_n}\right)^{\lim.\, y_n} = \lim_y. \left((\lim_x. A^{x_n})^{y_n}\right) =$$
$$= \lim_y. \left(\lim_x. A^{x_n y_n}\right) = \lim_y. (A^{x y_n}) = A^{xy}.$$

Könnyen kimutatható, hogy az előbb raczionális t-kre bebizonyított tételek tetszőleges valós számokra is érvényesek, jelesen ismét: *Ha*

$$t_1 < t_2,$$

akkor:

$$A^{t_1} < A^{t_2} \text{ vagy } A^{t_1} > A^{t_2},$$

a mint:

$$A > 1 \text{ vagy } A < 1.$$

Pozitiv számok valós logarithmusai.

64. *Ha a és b pozitiv számok, mindig létezik egy és csak egy valós szám x, melyre nézve:*

$$a^x = b.$$

E szám a b-nek a-logarithmusa és jele $({}^a\log. b)$.

Az ${}^a\log. b$ zárjelbe foglalása itt fölöslegesnek látszik; ez csak azért történik, hogy a jelzést később ne kelljen megváltoztatni; midőn a complex számok bevezetése után a logarithmus képezése minden számra kivihető lesz, de végtelen sok értelmű műveletben. Ekkor a zárjel a most kiszámítandó valós érték jelölésére szolgál, míg ${}^a\log. b$ az összes értékeket jelenti, ép úgy mint $\sqrt[k]{a}$.

A ${}^{10}\log. b$-t egyszerűen $\log. b$-nek szokás irni; ezek a Briggs-féle vagy közönséges logarithmusok.

Hogy ismét több mint egy ily szám nem lehetséges a valós számok sorában, onnét világos, hogy ha ezek p. ξ_1 és ξ_2, akkor a^{ξ_1} és a^{ξ_2} is különböző.

Az egyetlen megfelelő ξ szám mindig meghatározható a következő módon: *Az r raczionális szám kisebb vagy nagyobb a ξ-nél, a mint $a^r - b$ előjele $(\cancel{1 - a})$ előjelével megegyezik vagy sem.*

$a - 1$

Minthogy ugyanis, ha $r_1 < r_2$, egyszersmind*

$$(a^{r_1} - b)(a - 1) < (a^{r_2} - b)(a - 1),$$

látni, hogy a ξ szám értelmezése minden az ily definiczióhoz kötött mellékföltételnek is eleget tesz. Ha van oly r, melyre nézve $a^r - b$ sem pozitiv, sem negativ, hanem 0, akkor $\xi = r$, és a logarithmus meghatározása raczionális számhoz vezet. Minden más esetben ξ nem lehet raczionális szám, de akkor is

$$({}^a\log. b) = \xi .$$

A bebizonyítás teljesen úgy történik itt az $a^x = b$ *transcendens* egyenletnél, mint előbb az algebrai egyenleteknél. (58. cz. a.). Ha $\xi = \lim. x_n$, akkor lehet az $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots$ pozitiv számok sorozatát meghatározni, úgy hogy $\lim. \varepsilon_n = 0$ és

$$x_n - \varepsilon_n < \xi < x_n + \varepsilon_n ;$$

így tehát

$$a^{x_n + \varepsilon_n} - b$$

előjele mindig az ellenkező, mint $(a-1)$-é. Tehát

$$\lim. (a^{x_n + \varepsilon_n} - b) \geqq 0 , \text{ vagy } \leqq 0 \qquad (1.)$$

a mint $a - 1$ pozitiv vagy negativ. — Más oldalról $x_n - \varepsilon_n$ és ξ közt mindig van egy raczionális szám, melyet $x_n - \eta_n$-nal jelölhetni ($\eta_n < \varepsilon_n$), és a melyre nézve $a^{x_n - \eta_n} - b$ előjele megegyezik $(1 - a)$ előjelével. Különben épen $x_n - \varepsilon_n$ nem volna kisebb a ξ-nél. Tehát:

$$\lim. (a^{x_n - \eta_n} - b) \leqq 0 \text{ vagy } \geqq 0 \qquad (2.)$$

a mint $a - 1$ pozitiv vagy negativ. De

$$\lim. (a^{x_n + \varepsilon_n} - b) = \lim. (a^{x_n - \eta_n} - b) = a^\xi - b ,$$

és az (1) és (2) csak úgy állhat fönn együtt, ha

$$a^\xi - b = 0 .$$

---

* Az $a-1$ szorzó használatával egyszerűen egyesítjük az $a > 1$ és $a < 1$ eseteket.

65. A logarithmusnál is fönnáll az eddigi határműveleti szabályokkal analog tétel, mely szerint:

$$\lim.\,({}^a\log.\,x_n) = ({}^a\log.\,(\lim.\,x_n)),$$

hol azonban a logarithmus értelmezéséhez képest kell, hogy az $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ számsorozat tagjai (egy bizonyostól kezdve) mind pozitiv számok legyenek.

A tétel bebizonyítására elég megjegyezni, hogy:

$$a^{\lim.\,({}^a\log.\,x_n)} = \lim.\,a^{({}^a\log.\,x_n)} = \lim.\,x_n$$

a mi valóban annyit mond, hogy $({}^a\log.\,(\lim.\,x_n)) = \lim.\,({}^a\log.\,x_n)$.

Ha $\lim.\,x_n = 0$, a levezetett képlet jobb oldala elveszti értelmét, mert ${}^a\log.\,0.$ nem véges és meghatározott szám.

Ebben az esetben, mint könnyű látni, a következő meghatározás lép helyébe:

Ha $\lim.\,\delta_n = 0$, *akkor* $\lim.\,({}^a\log.\,\delta_n) = \infty$. Hasonlóképen:

Ha $\lim.\,\omega_n = \infty$, *akkor* $\lim.\,({}^a\log.\,\omega_n) = \infty$.

Ha $\lim.\,y_n = y$ *pozitiv*, és $\lim.\,x_n = x$, akkor:

$$\lim.\,(x_n\,({}^a\log.\,y_n)) = x\,{}^a\log.\,y\,;\quad \lim.\,({}^a\log.\,y_n^{x_n}) = ({}^a\log.\,y^x),$$

és ha ezen egyenlő számokat az a-hoz mint kitevőket illesztjük:

$$\lim.\,y_n^{x_n} = y^x$$

IV.

A kör- és szögmérési számok.

A középértékek.

66. Ha a és b két pozitiv szám, akkor $(ab)^{\frac{1}{2}}$ az a és b *geometriai*, $\frac{a+b}{2}$ e számok *számtani* közepe. Ha *föltételezzük, hogy a* ~~*nagyobb*~~, *mint b,* akkor egyszersmind:
kisebb

$$a < (ab)^{\frac{1}{2}} < \frac{a+b}{2} < b\,,$$

a mi közvetlenül, helyesnek bizonyúl, ha a négyzetek nagyságát hasonlítjuk össze. Ezekre nézve ugyanis:

$$a^2 < ab < \frac{a^2+b^2}{4} + \frac{ab}{2} < b^2;$$

mert e számok egymásból keletkeznek a

$$a(b-a), \frac{(a-b)^2}{4} \text{ és } \frac{3b^2-a^2-2ab}{4} = \frac{b^2-a^2+2b(b-a)}{4}$$

pozitiv számok hozzáadása által. Továbbá azt is látni, hogy

$$a < (ab)^{\frac{1}{2}} < \frac{(ab)^{\frac{1}{2}} + b}{2} < b.$$

Ha az a és b geometriai közepét a_1-el és az a_1 és b számtani közepét b_1-el jelöljük, azután az a_1 és b_1-ből ugyanígy képezzük a_2-t és b_2-t, ezekből ismét a_3 és b_3-t és úgy tovább akkor ily módon a számoknak kettős sorozatát nyerjük:

$$a, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots; \quad b, b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$$

melyek közül az elsőnek számai folyton nagyobbodnak, de b-nél kisebbek maradnak, mig a második sorozat számai folyton kisebbednek, de a-nál nagyobbak maradnak.

Igy tehát lim. a_n és lim. b_n véges, meghatározott számok, melyekről még bebizonyíthatjuk, hogy egymással egyenlők. Az előbbiek szerint:

$$b_1 - a_1 = \frac{b-(ab)^{\frac{1}{2}}}{2} < \frac{b-a}{2}.$$

Ép úgy:

$$b_2 - a_2 < \frac{b_1-a_1}{2}.$$

Tehát még:

$$b_2 - a_2 < \frac{b-a}{2^2},$$

és általánosságban:

$$b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n}$$

azaz az n választása által $b_n - a_n$ bármely δ-nál kisebbé tehető. És így végre lim. $a_n =$ lim. b_n.

Az a és b számok tehát ezen eljárás alapján egy bizonyos meghatározott számhoz vezetnek, melyet $L(a,b)$-vel jelölünk. l. Pothat

65. A logarithmusnál is fönnáll az eddigi határműveleti szabályokkal analog tétel, mely szerint:

$$\lim.\,({}^a\log.\,x_n) = ({}^a\log.\,(\lim.\,x_n)),$$

hol azonban a logarithmus értelmezéséhez képest kell, hogy az $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ számsorozat tagjai (egy bizonyostól kezdve) mind pozitiv számok legyenek.

A tétel bebizonyítására elég megjegyezni, hogy:

$$a^{\lim.\,({}^a\log.\,x_n)} = \lim.\,a^{({}^a\log.\,x_n)} = \lim.\,x_n$$

a mi valóban annyit mond, hogy $({}^a\log.\,(\lim.\,x_n)) = \lim.\,({}^a\log.\,x_n)$.

Ha $\lim.\,x_n = 0$, a levezetett képlet jobb oldala elveszti értelmét, mert ${}^a\log.\,0.$ nem véges és meghatározott szám.

Ebben az esetben, mint könnyű látni, a következő meghatározás lép helyébe:

Ha $\lim.\,\delta_n = 0$, *akkor* $\lim.\,({}^a\log.\,\delta_n) = \infty$. Hasonlóképen:
Ha $\lim.\,\omega_n = \infty$, *akkor* $\lim.\,({}^a\log.\,\omega_n) = \infty$.

Ha $\lim.\,y_n = y$ *pozitiv*, és $\lim.\,x_n = x$, akkor:

$$\lim.\,(x_n\,({}^a\log.\,y_n)) = x\,{}^a\log.\,y\,; \quad \lim.\,({}^a\log.\,y_n^{x_n}) = ({}^a\log.\,y^x),$$

és ha ezen egyenlő számokat az a-hoz mint kitevőket illesztjük:

$$\lim.\,y_n^{x_n} = y^x$$

IV.

A kör- és szögmérési számok.

A középértékek.

66. Ha a és b két pozitiv szám, akkor $(ab)^{\frac{1}{2}}$ az a és b *geometriai*, $\frac{a+b}{2}$ e számok *számtani* közepe. Ha *föltételezzük, hogy a* ~~*nagyobb*~~, *mint b*, akkor egyszersmind:
kisebb

$$a < (ab)^{\frac{1}{2}} < \frac{a+b}{2} < b\,,$$

a mi közvetlenül, helyesnek bizonyul, ha a négyzetek nagyságát hasonlítjuk össze. Ezekre nézve ugyanis:

$$a^2 < ab < \frac{a^2+b^2}{4} + \frac{ab}{2} < b^2;$$

mert e számok egymásból keletkeznek a

$$a(b-a), \frac{(a-b)^2}{4} \text{ és } \frac{3b^2-a^2-2ab}{4} = \frac{b^2-a^2+2b(b-a)}{4}$$

pozitiv számok hozzáadása által. Továbbá azt is látni, hogy

$$a < (ab)^{\frac{1}{2}} < \frac{(ab)^{\frac{1}{2}} + b}{2} < b.$$

Ha az a és b geometriai közepét a_1-el és az a_1 és b számtani közepét b_1-el jelöljük, azután az a_1 és b_1-ből ugyanígy képezzük a_2-t és b_2-t, ezekből ismét a_3 és b_3-t és úgy tovább akkor ily módon a számoknak kettős sorozatát nyerjük:

$$a, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots; \quad b, b_1, b_2, \ldots b_n \ldots$$

melyek közül az elsőnek számai folyton nagyobbodnak, de b-nél kisebbek maradnak, mig a második sorozat számai folyton kisebbednek, de a-nál nagyobbak maradnak.

Igy tehát lim. a_n és lim. b_n véges, meghatározott számok, melyekről még bebizonyíthatjuk, hogy egymással egyenlők. Az előbbiek szerint:

$$b_1 - a_1 = \frac{b-(ab)^{\frac{1}{2}}}{2} < \frac{b-a}{2}.$$

Ép úgy:

$$b_2 - a_2 < \frac{b_1-a_1}{2}.$$

Tehát még:

$$b_2 - a_2 < \frac{b-a}{2^2},$$

és általánosságban:

$$b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n}$$

azaz az n választása által $b_n - a_n$ bármely δ-nál kisebbé tehető. És így végre lim. $a_n =$ lim. b_n.

Az a és b számok tehát ezen eljárás alapján egy bizonyos meghatározott számhoz vezetnek, melyet $L(a,b)$-vel jelölünk. *l. Pótlás*

A Ludolfi szám.

67. Legyen a valamely körbe beirt és körülirt szabályos n-szög területének mérő száma: I_n és C_n, hol hosszegységnek a kör sugarát, és természetesen területegységnek az e sugárból képezett négyzetet veszszük. Akkor az egyenes vonalak által határolt idomokra vonatkozó területmérési szabályok értelmében, — a mint azt közvetetlenül a geometriai szemlélet is mutatja, — e sorozatokban:

$$I_3,\ I_4,\ldots,\ I_n,\ldots$$

$$C_3,\ C_4,\ldots\ C_n,\ldots$$

az elsőnek számai folyton nagyobbodnak, de kisebbek maradnak bármely C_n-nél, a másodiknak számai folyton kisebbek lesznek, de nagyobbak maradnak I_n-nél.

E szerint lim. I_n és lim. C_n meghatározott számok, melyek még egymással egyenlők.

Minden az I és C sorozatból tetszőlegesen kiválasztott határtalan sorozat ugyanazon értékhez vezet, mint a teljes sorozat. Csak a $2^n k$ által kifejezett oldalszámmal biró polygonokra vonatkozó számokat tartjuk meg és e sorozatok:

$$I_k,\ I_{2k},\ldots\ I_{2^n k},\ldots$$

$$C_k,\ C_{2k},\ldots\ C_{2^n k},\ldots$$

A planimetria tételei szerint:

$$\frac{1}{I_{2k}}=\left(\frac{1}{I_k}\,\frac{1}{C_k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{C_{2k}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_{2k}}+\frac{1}{C_k}\right),$$

azaz a fölirt számok recziprok értékei úgy keletkeznek egymásból, mint az előbbi czikkben a_1 b_1 az a,b-ből s ú. t.

Tehát:

$$\lim.\ \frac{1}{I_{2^n k}}=\lim.\ \frac{1}{C_{2^n k}}\cdot$$

és így a nevezőben álló kifejezések határértékei is egyenlők, és végre

$$\lim.\ I_n=\lim.\ C_n.$$

E számot, az u. n. Ludolfi számot, π-vel szokásos jelölni, és így, minthogy p. $I_4 = 2$, $C_4 = 4$, lesz

$$\frac{1}{\pi} = L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\pi = 3{,}14159\ldots$$

*A kör területének** mérőszáma alatt azon közös határértéket értjük, melyhez a beirt és körülirt szabályos sokszögek területeinek mérőszámai az oldalszám növekedésével mindinkább közelednek. Ez tehát, ha a kör sugara a hosszegység, nem más mint π, és ha a sugár mérőszáma nem egy, hanem r, — különböző sugárú körök hasonlósága következtében — általánosságban $r^2\pi$.

68. *A kör kerületének* mérőszáma alatt azon közös határértéket értjük, melyhez a beirt és körülirt szabályos sokszögek kerületeinek mérőszámai az oldalszám növekedésével mindinkább közelednek. Minthogy e kerület mérőszámát a területéből mindig az által nyerjük, hogy, ha r a kör sugara, $\frac{1}{2}$ r-rel osztunk, a kör kerületének mérőszáma $2r\pi$.

A *forgás* alatt valamely egyenes vonal oly helyváltozását értjük, melynél e vonal egy bizonyos pontja helyét változatlanul megtartja. A forgás a síkban történik, ha az egyenes vonal mindig ugyanazon egy síkban marad. A *síkforgás nagysága* jellemezhető a *forgási szög* által, mely a síknak az egyenes vonal kezdet- és véghelyzete közt fekvő része. A szög mérőszámát az elemi geometria többnyire úgy fejezi ki, hogy a sík negyedrészét 90 fokra osztja, és a szög nagyságának mérésénél az 1°-nyi szöget használja egységnek. Világos, hogy ezen eljárásnál a 90 mint egészen önkényesen választott szám befolyást gyakorol a mérőszám értékére. Ez a szám (90) bármely más számmal felcserélhető volna, a mint meg is kisérlették, helyette a sok tekintetben kényelmesebb 100-at használni.

* *A görbe vonalak által határolt idomok területe* alatt értendő menynyiséget később majd egész általánosságban értelmezzük; a mikor a mostani megállapítások is általánosabb szempontból új megvilágítást nyernek. Itt a fősúly azon fekszik, hogy a π *tisztán arithmetikai* értelmezést nyert, mely azonban tartalmánál fogva egyszersmind föltünteti e számnak szerepét a körmérésnél.

Más módon állapítjuk meg a szögek mérőszámait, ha nagyságát egy megfelelő körív hossza által jellemezzük. De ekkor a kör szabadon választható sugara ép oly önkényes elem, mint előbb a sík negyedrészének beosztási száma.

Absolut mérőszámát nyerjük a szögnek, ha nem a megfelelő körívet, hanem a körív viszonyát a kör sugarához választjuk jellemző adatnak, mely a szöget teljesen megadja, még pedig a nélkül, hogy e meghatározásba valamely fölösleges számadat belépne.

Midőn a sin. x, cos. x, ... s ú. t. alakokat az analizisba bevezetjük, ez csak úgy történhetik, hogy ezek az x számból bizonyos módon kiszámítható számokat jelentenek. E szerint az x itt nem jelenthet soha fokokat, vagy hosszat, hanem mindig a szög absolut mérőszámát adja. Hogy a sinus vagy cosinus mindig meghatározott szám, azt a geometriai tapasztalat mutatja, hol e számok, mint egy adott szög segítségével megszerkeszthető vonalak viszonyai jelentkeznek. A geometriában azután valóban csak a tapasztalat, a szemlélet mutatja, hogy e számok változatos tulajdonságai mind egymással megegyeztethetők.

Áttérünk ettől a goniometriai számok számtani értelmezéséhez, ha e tapasztalati adatokból kiválasztjuk azokat, melyek egy bizonyos x-hez a sin. x, cos. x számértékét, mindig és mindig csak egyfélekép adják meg. Ha e számtani értelmezésből azután még a sinus és cosinus alaptulajdonságait kifejtjük, a sin. x és cos. x-alakok az analizis körén belül ép oly az x-en végzendő *müveletek jelei* lesznek, mint p. x^2 vagy $x^{\frac{1}{2}}$. Az előbbiekben foglalt geometriai megjegyzések csak előleges tájékoztatásul szolgálnak, de az analizis rendszere minden geometriai vonatkoztatás nélkül lesz kifejtendő.

A szögmérési számok értelmezése.

69. Megállapítjuk először, hogy:

$$\cos. \frac{\pi}{2} = 0, \sin. \frac{\pi}{2} = 1 \qquad (1.)$$

legyen, hol a π-vel jelölt szám mint $L\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ számtani értelmezést nyert; és ezután a $\frac{\pi}{2}$-ből folytatott felezés által keletkező számokra:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \ldots, \frac{\pi}{2^{n-1}}, \frac{\pi}{2^n}, \frac{\pi}{2^{n+1}}, \ldots$$

nézve a következő *recursiv* képletek adják meg a sin. x, cos. x jelek értelmét:

$$\cos. \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1+\cos. \frac{\pi}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \sin. \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1-\cos. \frac{\pi}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos. \frac{\pi}{8} = \left(\frac{1+\cos. \frac{\pi}{4}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \sin. \frac{\pi}{8} = \left(\frac{1-\cos. \frac{\pi}{4}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos. \frac{\pi}{2^n} = \left(\frac{1+\cos. \frac{\pi}{2^{n-1}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \sin. \frac{\pi}{2^n} = \left(\frac{1-\cos. \frac{\pi}{2^{n-1}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

a mely képletekből közvetetlenül látni, hogy:

$$\cos. \frac{\pi}{2} < \cos. \frac{\pi}{4} < \cos. \frac{\pi}{8} < \ldots < \cos. \frac{\pi}{2^n} < \ldots$$

$$\sin. \frac{\pi}{2} > \sin. \frac{\pi}{4} > \sin. \frac{\pi}{8} > \ldots > \sin. \frac{\pi}{2^n} > \ldots$$

de e mellett, bármilyen pozitiv egész szám is n,

$$\cos. \frac{\pi}{2^n} < 1, \sin. \frac{\pi}{2^n} > 0.$$

mert ha az első egyenlőtlenség bármely n-re érvényes, érvényes marad $n+1$-re is, a mint ezt cos. $\frac{\pi}{2n-1}$ értelmezése mutatja, ekkor pedig a sin. $\frac{\pi}{2^n}$ valóban mindig pozitiv.

Az értelmezett számok tehát mindannyian pozitiv valódi törtek, (ha n nem 0).

Az eddigiekből az is foly, hogy cos. $\frac{\pi}{2^n}$ és sin. $\frac{\pi}{2^n}$ -nek véges meghatározott határértéke van. Ha ezt már tudjuk, a határérték kiszámítása nagyon egyszerű. T. i.

$$\cos.^2 \frac{\pi}{2n} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos. \frac{\pi}{2n-1}\right)$$

és ha mindkét oldalon áttérünk a határra, minthogy

$$\lim.\left(\cos.\frac{\pi}{2n}\right)=\lim.\left(\cos.\frac{\pi}{2n-1}\right)$$

lesz, ha e határértéket ξ-vel jelöljük:

$$\xi^2=\tfrac{1}{2}(1+\xi)$$

vagyis:

$$2\xi^2-\xi-1=2(\xi-1)(\xi+\tfrac{1}{2})=0,$$

a mi csak úgy lehetséges, ha ξ vagy 1, vagy $-\frac{1}{2}$, de a második érték lehetetlen, mert nagyobbodó pozitiv számok határértéke, ha van ilyen, mindenesetre pozitiv, és így:

$$\lim.\left(\cos.\frac{\pi}{2n}\right)=1,$$

és ebből:

$$\lim.\left(\sin.\frac{\pi}{2n}\right)=0. \tag{3.}$$

70. Az értelmezést kiterjesztjük a $\frac{\pi}{2n}$ minden pozitiv többesére a következő képletek által:

$$\left.\begin{aligned}\cos.\,(k+1)\,\frac{\pi}{2n}&=\cos.\,k\frac{\pi}{2n}\cos.\frac{\pi}{2n}-\sin.\,k\frac{\pi}{2n}\sin.\frac{\pi}{2n},\\ \sin.\,(k+1)\,\frac{\pi}{2n}&=\sin.\,k\frac{\pi}{2n}\cos.\frac{\pi}{2n}+\cos.\,k\frac{\pi}{2n}\sin.\frac{\pi}{2n},\end{aligned}\right| \tag{4.}$$

melyeknek alapján $\cos.\frac{\pi}{2n}$, $\sin.\frac{\pi}{2n}$ a (2.)-ből adva lévén, egymás után $\cos.2\frac{\pi}{2n}$ és $\sin.2\frac{\pi}{2n}$, $\cos.3\frac{\pi}{2n}$ és $\sin.3\frac{\pi}{2n}$, s ú. t. kiszámithatók.

Minthogy azonban, mikor így a $\frac{\pi}{2n}$ többszöröseinek sinusát és cosinusát számítjuk, újból megkapjuk a $\frac{\pi}{2^{n-1}}$, $\frac{\pi}{2^{n-2}}\cdots$ többszöröseiét is, külön bebizonyítandó, hogy a mennyire $\cos.k\frac{\pi}{2n}$, $\sin.k\frac{\pi}{2n}$ a már előbb kiszámított értékek sorába tartozik, az új eredmény a régivel megegyezik.

Ha $n=1$, e nehézség nem áll fönn, mert akkor a $\frac{\pi}{2}$ többszöröseire vonatkozó számokat először kapjuk. Föltehetjük tehát, hogy a (4.) nem ád ellenmondást egy bizonyos n-ig, és bebizonyítandó csak az, hogy $n+1$-re nézve is az eredmények, a mennyiben nem újak, a régiekkel megegyeznek.

Erre nézve mindenek előtt megjegyezzük, hogy a (4.) képletek a következő általánosabb alakban irhatók:

$$\left.\begin{aligned} \cos.\,(k+l)\frac{\pi}{2n} &= \cos.\,k\frac{\pi}{2n}\cos.\,l\frac{\pi}{2n} - \sin.\,k\frac{\pi}{2n}\sin.\,l\frac{\pi}{2n}, \\ \sin.\,(k+l)\frac{\pi}{2n} &= \sin.\,k\frac{\pi}{2n}\cos.\,l\frac{\pi}{2n} + \cos.\,k\frac{\pi}{2n}\sin.\,l\frac{\pi}{2n}, \end{aligned}\right| \quad (5.)$$

a mi mindenesetre a (4.)-gyel identikus, ha $l=1$; föltéve, hogy, egy bizonyos l-ig az eredmény ugyanaz, mint (4.)-ből, e megegyezés $l+1$-re is fönnmarad. Mert:

$$\cos.\,k\frac{\pi}{2n}\cos.\,(l+1)\frac{\pi}{2n} - \sin.\,k\frac{\pi}{2n}\sin.\,(l+1)\frac{\pi}{2n} =$$

$$= \cos.\,k\frac{\pi}{2n}\left(\cos.\,l\frac{\pi}{2n}\cos.\frac{\pi}{2n} - \sin.\,l\frac{\pi}{2n}\sin.\frac{\pi}{2n}\right) -$$

$$- \sin.\,k\frac{\pi}{2n}\left(\sin.\,l\frac{\pi}{2n}\cos.\frac{\pi}{2n} + \cos.\,l\frac{\pi}{2n}\sin.\frac{\pi}{2n}\right) =$$

$$= \left(\cos.\,k\frac{\pi}{2n}\cos.\,l\frac{\pi}{2n} - \sin.\,k\frac{\pi}{2n}\sin.\,l\frac{\pi}{2n}\right)\cos.\frac{\pi}{2n} -$$

$$- \left(\cos.\,k\frac{\pi}{2n}\sin.\,l\frac{\pi}{2n} + \sin.\,k\frac{\pi}{2n}\cos.\,l\frac{\pi}{2n}\right)\sin.\frac{\pi}{2n} =$$

$$= \cos.\,(k+l)\frac{\pi}{2n}\cos.\frac{\pi}{2n} - \sin.\,(k+l)\frac{\pi}{2n}\sin.\frac{\pi}{2n} = \cos.\,(k+l+1)\frac{\pi}{2n},$$

Egész hasonló átalakítás végezhető a második egyenletnél, és így a (4.)-ből mindenesetre az (5.) alatti egyenletek is folynak és megfordítva.

Tehát $\cos.\,r\frac{\pi}{2n}$, $\sin.\,r\frac{\pi}{2n}$ az (5.)-ból is kiszámitható és az eredmény ugyanaz, akárhogy bontjuk föl a pozitiv egész r-et két nem negativ egész szám összegére.

Az eredmények csak akkor foglaltatnak az előbb számitott értékek sorában ha r páros szám. A mi először az $r=2$ esetét illeti, a (4.)-ből:

$$\cos.\,2\frac{\pi}{2n} = \cos.^2\frac{\pi}{2n} - \sin.^2\frac{\pi}{2n}$$

$$\sin.\,2\frac{\pi}{2n} = 2\sin.\frac{\pi}{2n}\cos.\frac{\pi}{2n}$$

de a (2.)-ből:

$$\cos.^2 \frac{\pi}{2n} = \frac{1 + \cos. \frac{\pi}{2n-1}}{2}, \ \sin.^2 \frac{\pi}{2n} = \frac{1 - \cos. \frac{\pi}{2n-1}}{2}$$

és így valóban:

$$\cos.^2 \frac{\pi}{2n} - \sin.^2 \frac{\pi}{2n} = \cos. \frac{\pi}{2n-1};$$

mig épen ily módon:

$$2 \sin. \frac{\pi}{2n} \cos. \frac{\pi}{2n} = 2 \left(\frac{1 - \cos. \frac{\pi}{2n-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 + \cos. \frac{\pi}{2n-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{2n-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 - \cos. \frac{\pi}{2n-2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sin. \frac{\pi}{2n-1}.$$

Föltéve most már, hogy eredményeink helyesek bármely páros számra, p. $2s$-re nézve, helyesek maradnak $2s + 2$, a reá következő páros számra is. Mert most (4.) vagy (5.) szerint föltevéseink mellett:

$$\cos. (2s+2) \frac{\pi}{2n} = \cos. 2s \frac{\pi}{2n} \cos. 2 \frac{\pi}{2n} - \sin. 2s \frac{\pi}{2n} \sin. 2 \frac{\pi}{2n}$$

$$= \cos. s \frac{\pi}{2n-1} \cos. \frac{\pi}{2n-1} - \sin. s \frac{\pi}{2n-1} \sin. \frac{\pi}{2n-1},$$

a mi megegyezik $\cos (s+1) \frac{\pi}{2n-1}$ előbb nyert értékével. Hasonló számítást végezhetünk a sinusra nézve.

Igy tehát a sinus és cosinus művelet értelme meg van állapítva a $\frac{\pi}{2n}$ minden pozitiv egész számú többszörösére.

71. Ha a (4.) egyenletek közül az elsőt $\sin. \frac{\pi}{2n}$, a másodikat $\cos. \frac{\pi}{2n}$ szorozzuk és kivonunk; lesz

$$\sin. (k+1) \frac{\pi}{2n} \cos. \frac{\pi}{2n} - \cos. (k+1) \frac{\pi}{2n} \sin. \frac{\pi}{2n} = \sin. k \frac{\pi}{2n} \left(\cos.^2 \frac{\pi}{2n} + \sin.^2 \frac{\pi}{2n}\right)$$

a mi a (2.)-ből véve $\cos. \frac{\pi}{2n}$ és $\sin. \frac{\pi}{2n}$ értékeit, továbbá $= \sin. k \frac{\pi}{2n}$. Hasonlókép:

$$\cos (k + 1) \frac{\pi}{2n} \cos. \frac{\pi}{2n} + \sin. (k+1) \frac{\pi}{2n} \sin. \frac{\pi}{2n} = \cos. k \frac{\pi}{2n}$$

vagyis k helyébe $l - 1$-et irva:

$$\left.\begin{aligned}\cos.\,(l-1)\frac{\pi}{2n} &= \cos.\,l\frac{\pi}{2n}\cos.\,\frac{\pi}{2n}+\sin.\,l\frac{\pi}{2n}\sin.\,\frac{\pi}{2n}\\ \sin.\,(l-1)\frac{\pi}{2n} &= \sin.\,l\frac{\pi}{2n}\cos.\,\frac{\pi}{2n}-\cos.\,l\frac{\pi}{2n}\sin.\,\frac{\pi}{2n}\end{aligned}\right|\qquad(6.)$$

Ezen egyenletek adott számok közti relácziót fejeznek ki, ha $l>1$. *Ha $l \leqq 1$ kiterjesztik a sin. és cos. müveletek értelmezését* 0-ra *és a $\frac{\pi}{2n}$ negativ többszöröseire.* Tehát e megállapítás szerint:

$$\cos.\,0=1,\ \sin.\,0=0, \qquad (7.a)$$

és általánosságban,

$$\cos.\left(-k\frac{\pi}{2n}\right)=\cos.\,k\frac{\pi}{2n},$$

$$\sin.\left(-k\frac{\pi}{2n}\right)=-\sin.\,k\frac{\pi}{2n}, \qquad (7.b)$$

mely képletek helyesek, ha $k=0$, vagy 1, és ismét érvényeseknek bizonyíthatók $k+1$-re, ha k-ra helyesek voltak. Mert (6.) és (7.) szerint.:

$$\cos.\,(-k-1)\frac{\pi}{2n}=\cos.\left(-k\frac{\pi}{2n}\right)\cos.\,\frac{\pi}{2n}+\sin.\left(-k\frac{\pi}{2n}\right)\sin.\,\frac{\pi}{2n}=$$

$$=\cos.\,(k+1)\frac{\pi}{2n},\ \text{s ú. t.}$$

Végre a (4.) képletek most helyesek maradnak, bármicsoda egész szám is k, a mint azt a (6.) és (7.) tekintetbevételénél közvetetlenül látni. Ép úgy az (5.) alatt állók, melyek pozitiv l-re ép úgy vezethetők le (4.)-ből, mint előbb, negativ l esetére pedig a $\cos.\,(-k-l)\frac{\pi}{2n}$, $\sin.\,(-k-l)\frac{\pi}{2n}$ képezése által igazolhatók.

Ezután még bármicsoda egész szám is k, lesz:

$$\cos.^2 k\frac{\pi}{2n}+\sin.^2 k\frac{\pi}{2n}=1 \qquad (8.)$$

a mi (7.a) és (2.) szerint helyes, ha $k=0$ és 1 és minden más k-ra teljes indukczió által igazolható. Mert (4.) szerint:

$$\cos.^2(k+1)\frac{\pi}{2n}+\sin.^2(k+1)\frac{\pi}{2n}=$$

$$\left(\cos.^2 k\frac{\pi}{2n}+\sin.^2 k\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos.^2\frac{\pi}{2n}+\sin.^2\frac{\pi}{2n}\right)=\cos.^2 k\frac{\pi}{2n}+\sin.^2 k\frac{\pi}{2n}.$$

azaz a kérdéses kifejezés értéke nem változik, ha $\frac{\pi}{2^n}$ egész szorzóját egygyel nagyobbnak vagy kisebbnek veszszük, tehát valóban k minden egész számú értékénél 1.

72. A kiterjesztést oly számokra, melyek nem többesei valamely $\frac{\pi}{2^n}$-nek, a következő tétel készíti elő.

Bármicsoda pozitiv egész szám is n, mindig:

$$\left.\begin{array}{l} 1 > \cos.\frac{\pi}{2^n} > \cos.2\frac{\pi}{2^n} > \ldots > \cos.k\frac{\pi}{2^n} > \ldots > \cos.2^{n-1}\frac{\pi}{2^n} (=0) \\ 0 < \sin.\frac{\pi}{2^n} < \sin.2\frac{\pi}{2^n} < \ldots < \sin.k\frac{\pi}{2^n} < \ldots < \sin.2^{n-1}\frac{\pi}{2^n} (=1) \end{array}\right| (9.)$$

Ha $n=2$, a cos. és sin.-jel alatt csak $\frac{\pi}{4}$ és $\frac{\pi}{2}$ áll, és a tétel már a (2.) egyenletekben foglaltatik. Általános bebizonyításánál ismét n-ről $n+1$-re megyünk át. Az első két szám, mely a cos. és sin.-jel alatt áll, $\frac{\pi}{2^n}$ és $\frac{\pi}{2^{n-1}}$, melyekre, szintén (2.) szerint, a tétel mindig helyes.

Az $(n+1)$-re vonatkozó sorozatok a (9.)-ből az által keletkeznek, hogy

$$\cos.k\frac{\pi}{2^n} \text{ és } \cos.(k+1)\frac{\pi}{2^n}, \text{ ill. } \sin.k\frac{\pi}{2^n} \text{ és } \sin.(k+1)\frac{\pi}{2^n}$$

közé beigtatjuk még a

$$\cos.(2k+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}, \text{ ill. } \sin.(2k+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

számot. De ha tekintetbe veszszük, hogy (4.) szerint:

$$\cos.k\frac{\pi}{2^n} = \cos.2k\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\cos.(2k+1)\frac{\pi}{2^{n+1}} = \cos.k\frac{\pi}{2^n}\cos.\frac{\pi}{2^{n+1}} - \sin.k\frac{\pi}{2^n}\sin.\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

$$\cos.(k+1)\frac{\pi}{2^n} = \cos.k\frac{\pi}{2^n}\cos.\frac{\pi}{2^n} - \sin.k\frac{\pi}{2^n}\sin.\frac{\pi}{2^n},$$

tüstént látni, hogy valóban:

$$\cos.k\frac{\pi}{2^n} > \cos.(2k+1)\frac{\pi}{2^{n+1}} > \cos.(k+1)\frac{\pi}{2^n},$$

mert az összeg első része mindig kisebb, a levonandó mindig nagyobb lesz.

Hasonlókép a második sorozatra nézve (6.) és (5.)-ből:

$$\sin.(k+1)\frac{\pi}{2^n} = \sin.2(k+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\sin.(2k+1)\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sin.(k+1)\frac{\pi}{2^n}\cos.\frac{\pi}{2^{n+1}} - \cos.(k+1)\frac{\pi}{2^n}\sin.\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

$$\sin.k\frac{\pi}{2^n} = \sin.(k+1)\frac{\pi}{2^n}\cos.\frac{\pi}{2^n} - \cos.(k+1)\frac{\pi}{2^n}\sin.\frac{\pi}{2^n};$$

és ebből úgy mint előbb:

$$\sin.k\frac{\pi}{2^n} < \sin.(2k+1)\frac{\pi}{2^{n+1}} < \sin.(k+1)\frac{\pi}{2^n}.$$

73. Ha most már x bármicsoda valós szám, a 48. cz. eljárása szerint, $\frac{x}{\pi}$ megközelíthető két számsorozat által

$$\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2^2}, \ldots, \frac{k_n}{2^n}, \ldots$$

$$\frac{k_1+1}{2}, \frac{k_2+1}{2^2}, \ldots, \frac{k_n+1}{2^n}, \ldots$$

úgy hogy

$$x = \lim.k_n\frac{\pi}{2^n} = \lim.(k_n+1)\frac{\pi}{2^n},$$

még pedig oly módon, hogy az első számsorozat tagjai mindig nagyobbodnak, és $k_n\frac{\pi}{2^n} \leqq x$, a másodiknak tagjai pedig kisebbednek és $(k_n+1)\frac{\pi}{2^n} > x$.

Akkor legyen:

$$\left.\begin{aligned} \sin.x &= \lim.\sin.k_n\frac{\pi}{2^n} = \lim.\sin.(k_n+1)\frac{\pi}{2^n}, \\ \cos.x &= \lim.\cos.k_n\frac{\pi}{2^n} = \lim.\cos.(k_n+1)\frac{\pi}{2^n}, \end{aligned}\right\} \quad (10.)$$

hol természetesen ismét bebizonyítandó, hogy e határértékek véges és meghatározott számok, valamint az is, hogy az egy sorban állók valóban egyenlők.

Ezt először azon esetre végezzük, midőn

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

Hogy ekkor lim. sin. $k_n \frac{\pi}{2^n}$ véges és meghatározott szám, a 45. cz. értelmében abból következik, hogy:

$$\sin. k_n \frac{\pi}{2^n} \leqq \sin. k_{n+1} \frac{\pi}{2^{n+1}} < 1,$$

ezen utóbbi állítás pedig helyes, mert sin. $2k_n \frac{\pi}{2^{n+1}}$ és sin. $k_{n+1} \frac{\pi}{2^{n+1}}$ a (9.) alakjára és a 2^{n+1} nevezővel képezett sorozatban bennfoglaltatik.

Ép úgy látni, hogy lim. cos. $k_n \frac{\pi}{2^n}$ véges és meghatározott szám, mert,

$$\cos. k_n \frac{\pi}{2^n} \geqq \cos. k_{n+1} \frac{\pi}{2^{n+1}} > 0.$$

és ekkor végre

$$\lim. \sin. (k_n+1) \frac{\pi}{2^n} = \lim. \sin. k_n \frac{\pi}{2^n} \lim. \cos. k_n \frac{\pi}{2^n} +$$

$$+ \lim. \cos. k_n \frac{\pi}{2^n} \lim. \sin. \frac{\pi}{2^n} = \lim. \sin. k_n \frac{\pi}{2^n}.$$

valamint hasonlóképen a cosinusra nézve.

Ha x nem fekszik 0 és $\frac{\pi}{2}$ közt, akkor egész általánosságban:

$$r \frac{\pi}{2} \leq x < (r+1) \frac{\pi}{2},$$

hol r valami egész szám és így:

$$x = r \frac{\pi}{2} + x'$$

hol x' eleget tesz az előbb x számára megállapított föltételeknek. Ekkor irható

$$x = \lim. \left(r \frac{\pi}{2} + k_n \frac{\pi}{2^n}\right) = \lim. \left(r \frac{\pi}{2} + (k_n+1) \frac{\pi}{2^n}\right),$$

és látni, hogy

$$\sin. x = \lim. \sin. \left(r \frac{\pi}{2} + k_n \frac{\pi}{2^n}\right) = \lim. \sin. \left(r \frac{\pi}{2} + (k_n+1) \frac{\pi}{2^n}\right),$$

$$\cos. x = \lim. \cos. \left(r \frac{\pi}{2} + k_n \frac{\pi}{2^n}\right) = \lim. \cos. \left(r \frac{\pi}{2} + (k_n+1) \frac{\pi}{2^n}\right)$$

véges és meghatározott szám, ha csak tekintetbe, veszszük, hogy $r\frac{\pi}{2}$ szintén a $\frac{\pi}{2^n}$ egészszámú többese, és így a lim.-jel alatt ismét lehet az (5.) képletek segítségével átalakítani.

74. *Ha:*

$$0 \leqq a < b \leqq \frac{\pi}{2},$$

akkor egyszersmind:

$$0 \leqq \sin. a < \sin. b \leqq 1,$$

$$1 \geqq \cos. a > \cos. b \geqq 0,$$

hol az egymás alatt álló alsó vagy felső jelek mindenütt egyidejűleg helyesek.

A tétel egyszerűen abból foly, hogy ha a és b, mint fölvettük, különböző számok, és p.

$$a = \lim. (k_n+1)\frac{\pi}{2^n}, \; b = \lim. l_n \frac{\pi}{2^n},$$

akkor lehet egy n-et kijelölni, melytől fogva $(k_n+1)\frac{\pi}{2^n}$ kisebb, $l_n\frac{\pi}{2^n}$ pedig nagyobb egy tetszőleges a és b közt fekvő számnál, mely szintén $m\frac{\pi}{2^r}$ alakúnak vehető. De ekkor ezen n-től kezdve

$$\sin. (k_n+1)\frac{\pi}{2^n} < \sin. m\frac{\pi}{2^r} < \sin. l_n\frac{\pi}{2^n},$$

$$\cos. (k_n+1)\frac{\pi}{2^n} > \cos. m\frac{\pi}{2^r} > \cos. l_n\frac{\pi}{2^n},$$

még pedig úgy hogy a

$$\sin. m\frac{\pi}{2^r} - \sin. (k_n+1)\frac{\pi}{2^n}, \; \sin. l_n\frac{\pi}{2^n} - \sin. m\frac{\pi}{2^r}, \text{ s ú. t.}$$

különbségek folyton *nagyobbodnak*. Tehát

$$\lim. \sin. (k_n+1)\frac{\pi}{2^n} < \sin. m\frac{\pi}{2^r} < \lim. \sin. l_n\frac{\pi}{2^n},$$

$$\lim. \cos. (k_n+1)\frac{\pi}{2^n} > \cos. m\frac{\pi}{2^r} > \lim. \cos. l_n\frac{\pi}{2_n}.$$

a mi nem más mint a kijelentett tétel.

Ebből továbbá következik, hogy *ha lim.* $\delta_n = 0$, *akkor egyszersmind:*

$$\lim. \sin. \delta_n = 0, \; \lim. \cos. \delta_n = 1,$$

mert ha csak az n-et elég nagynak veszszük, ekkor $|\delta_n| < \frac{\pi}{2^k}$, bármily nagy pozitiv egész szám is k. De ekkor:

$$0 < |\sin.\delta_n| < \sin.\frac{\pi}{2^k}$$

$$1 > |\cos.\delta_n| > \cos.\frac{\pi}{2^k}$$

azaz a (3.) miatt n növekedésével $\sin.\delta_n$ tetszőlegesen megközelíti a 0-t, $|\cos.\delta_n|$ vagy minthogy a 0 közelében a cosinus mindig pozitiv, maga $\cos.\delta_n$ is tetszőlegesen megközelíti az 1-et, és ez nem más, mint a kimondott tétel.

75. A sinus és cosinus műveletek amaz általános tulajdonságai, melyeket az (5.), (7.b) és (8.) képletek kifejeznek, fönnállanak akkor is, ha e jelek alatt nem $\frac{\pi}{2^n}$ egész többszörösei állanak. Azaz *bárminő valós számok is x és y, mindig:*

$$\cos.(x+y) = \cos.x\cos.y - \sin.x\sin.y\,, \tag{11.}$$

$$\sin.(x+y) = \sin.x\cos.y + \cos.x\sin.y\,,$$

$$\sin.(-x) = -\sin.x,\ \cos.(-x) = \cos.x\,, \tag{12.}$$

$$\sin.^2 x + \cos.^2 x = 1. \tag{13.}$$

A bebizonyítás mindezen képleteknél ugyanazon az úton halad és így elég lesz, azt p. az utolsóra részletezni.

Ha x az adott módon határérték alakjában van kifejezve; akkor:

$$\sin.^2 x + \cos.^2 x = \left(\lim.\sin.k_n\frac{\pi}{2^n}\right)^2 + \left(\lim.\cos.k_n\frac{\pi}{2^n}\right)^2 =$$

$$= \lim.\left(\sin.^2 k_n\frac{\pi}{2^n} + \cos.^2 k_n\frac{\pi}{2^n}\right) = \lim.1 = 1.$$

Ebből végre látni, hogy *$\sin.x$ és $\cos.x$ értelmezése teljesen független attól, hogy x mi módon van határérték alakjában adva.*

Mert ha p. a megállapított módon $x = \lim.x_n$, akkor legáltalánosabb értelmezése

$$x = \lim.(x_n + \delta_n)$$

és ekkor

$$\lim.\sin.(x_n+\delta_n) = \lim.(\sin.x_n\cos.\delta_n + \cos.x_n\sin.\delta_n) =$$
$$= \lim.\sin.x_n = \sin.x,$$

$$\lim.\cos.(x_n+\delta_n) = \lim.(\cos.x_n\cos.\delta_n - \sin.x_n\sin.\delta_n) =$$
$$= \lim.\cos.x_n = \cos.x.$$

76. Tekintettel gyakori alkalmazásukra álljanak még itt az (I.) és (II.) összefoglalásából keletkező képletek:

$$\begin{aligned}
&\cos.\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin.x, &&\sin.\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos.x,\\
&\cos.(x+\pi) = -\cos.x, &&\sin.(x+\pi) = -\sin.x,\\
&\cos.\left(x+3\frac{\pi}{2}\right) = \sin.x, &&\sin.\left(x+3\frac{\pi}{2}\right) = -\cos.x,\\
&\cos.(x+2\pi) = \cos.x, &&\sin.(x+2\pi) = \sin.x,
\end{aligned} \tag{14.}$$

melyeknek speciális esetei:

$$\begin{aligned}
&\cos.(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos.k\pi = (-1)^k\\
&\sin.(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k,\ \sin.k\pi = 0.
\end{aligned} \tag{15.}$$

bármicsoda egész szám is k.

A tg. x és cot. x nem új műveletjelek, hanem értelmezésük egyszerűen:

$$\text{tg.}\,x = \frac{\sin.x}{\cos.x},\ \cot.x = \frac{\cos.x}{\sin.x}.$$

A (II.)-ben foglalt egyenleteket egymással osztva:

$$\begin{aligned}
\text{tg.}(x+y) &= \frac{\text{tg.}\,x + \text{tg.}\,y}{1-\text{tg.}\,x\,\text{tg.}\,y},\\
\cot.(x+y) &= \frac{\cot.x\cot.y - 1}{\cot.x + \cot.y},
\end{aligned} \tag{16.}$$

valamint még:

$$\text{tg.}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\cot.x,\ \text{tg.}(x+\pi) = \text{tg.}\,x,$$

$$\cot.\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\text{tg.}\,x,\ \cot.(x+\pi) = \cot.x,$$

mert ha csak az n-et elég nagynak veszszük, ekkor $|\delta_n| < \frac{\pi}{2^k}$, bármily nagy pozitiv egész szám is k. De ekkor:

$$0 < |\sin.\, \delta_n| < \sin.\, \frac{\pi}{2^k}$$

$$1 > |\cos.\, \delta_n| > \cos.\, \frac{\pi}{2^k}$$

azaz a (3.) miatt n növekedésével $\sin.\, \delta_n$ tetszőlegesen megközelíti a 0-t, $|\cos.\, \delta_n|$ vagy minthogy a 0 közelében a cosinus mindig pozitiv, maga $\cos.\, \delta_n$ is tetszőlegesen megközelíti az 1-et, és ez nem más, mint a kimondott tétel.

75. A sinus és cosinus műveletek amaz általános tulajdonságai, melyeket az (5.), (7.b) és (8.) képletek kifejeznek, fönnállanak akkor is, ha e jelek alatt nem $\frac{\pi}{2^n}$ egész többszörösei állanak. Azaz *bárminő valós számok is x és y, mindig:*

$$\cos.\, (x + y) = \cos.\, x \cos.\, y - \sin.\, x \sin.\, y\,, \tag{11.}$$

$$\sin.\, (x + y) = \sin.\, x \cos.\, y + \cos.\, x \sin.\, y\,,$$

$$\sin.\, (-x) = -\sin.\, x,\ \cos.\, (-x) = \cos.\, x\,, \tag{12.}$$

$$\sin.^2 x + \cos.^2 x = 1. \tag{13.}$$

A bebizonyítás mindezen képleteknél ugyanazon az úton halad és így elég lesz, azt p. az utolsóra részletezni.

Ha x az adott módon határérték alakjában van kifejezve; akkor:

$$\sin.^2 x + \cos.^2 x = \left(\lim.\, \sin.\, k_n \frac{\pi}{2^n}\right)^2 + \left(\lim.\, \cos.\, k_n \frac{\pi}{2^n}\right)^2 =$$

$$= \lim.\, \left(\sin.^2 k_n \frac{\pi}{2^n} + \cos.^2 k_n \frac{\pi}{2^n}\right) = \lim.\, 1 = 1.$$

Ebből végre látni, hogy *$\sin.\, x$ és $\cos.\, x$ értelmezése teljesen független attól, hogy x mi módon van határérték alakjában adva.*

Mert ha p. a megállapított módon $x = \lim.\, x_n$, akkor legáltalánosabb értelmezése

$$x = \lim.\, (x_n + \delta_n)$$

és ekkor

$$\lim.\sin.(x_n+\delta_n) = \lim.(\sin.x_n\cos.\delta_n + \cos.x_n\sin.\delta_n) =$$
$$= \lim.\sin.x_n = \sin.x,$$

$$\lim.\cos.(x_n+\delta_n) = \lim.(\cos.x_n\cos.\delta_n - \sin.x_n\sin.\delta_n) =$$
$$= \lim.\cos.x_n = \cos.x.$$

76. Tekintettel gyakori alkalmazásukra álljanak még itt az (1.) és (11.) összefoglalásából keletkező képletek:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos.\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin.x, && \sin.\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos.x,\\
&\cos.(x+\pi) = -\cos.x, && \sin.(x+\pi) = -\sin.x,\\
&\cos.\left(x+3\frac{\pi}{2}\right) = \sin.x, && \sin.\left(x+3\frac{\pi}{2}\right) = -\cos.x,\\
&\cos.(x+2\pi) = \cos.x, && \sin.(x+2\pi) = \sin.x,
\end{aligned}\right\} \quad (14.)$$

melyeknek speciális esetei:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos.(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0, \ \cos.k\pi = (-1)^k\\
&\sin.(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k, \ \sin.k\pi = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (15.)$$

bármicsoda egész szám is k.

A tg. x és cot. x nem új műveletjelek, hanem értelmezésük egyszerűen:

$$\text{tg}.x = \frac{\sin.x}{\cos.x}, \ \text{cot}.x = \frac{\cos.x}{\sin.x}.$$

A (11.)-ben foglalt egyenleteket egymással osztva:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{tg}.(x+y) = \frac{\text{tg}.x + \text{tg}.y}{1-\text{tg}.x\,\text{tg}.y},\\
&\text{cot}.(x+y) = \frac{\text{cot}.x\,\text{cot}.y - 1}{\text{cot}.x + \text{cot}.y},
\end{aligned}\right\} \quad (16.)$$

valamint még:

$$\text{tg}.\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\text{cot}.x, \ \text{tg}.(x+\pi) = \text{tg}.x,$$

$$\text{cot}.\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\text{tg}.x, \ \text{cot}.(x+\pi) = \text{cot}.x,$$

végre:

$$\text{tg. } k\pi = 0, \quad \text{cot. } (2k+1)\frac{\pi}{2} = 0.$$

A tg. x illetőleg cot. x alaknak, mint számtani műveletek jelének, ha cos. x, illetőleg sin. x zérus *nincs értelme*; ekkor ugyanis az előirt műveletek sorában bennfoglaltatnék a zérussal való osztás.

Ebben az esetben a megfelelő határértékre vonatkozólag kimondhatjuk, hogy *ha lim. cos.* $x_n = 0$, *akkor lim. tg.* $x_n = \infty$, *és ha lim. sin.* $x_n = 0$, *akkor lim. cot.* $x_n = \infty$. Az az eset ugyanis, hogy lim. sin. x_n és lim. cos. x_n egyszerre 0, nem fordulhat elő, mert négyzeteik összege egyenlő az egységgel.

A körmérési számok.

77. *Oly valós szám, melynek sinusa vagy cosinusa kisebb a —1-nél vagy nagyobb egynél, nem létezik*; a mennyiben a megelőzők szerint minden valós szám sinusa és cosinusa -1 és $+1$ közt fekszik, e határok beleértésével.

Ellenben, *ha*

$$-1 \leq u \leq 1$$

mindig van egy és csak egy oly szám ξ_l, *melyre nézve cos.* $x = u$, *és*

$$l\pi \leq x \leq (l+1)\pi,$$

bármicsoda egész szám is l.

Hogy e föltételeknek megfelelő több, mint egy szám nincsen, könnyen kimutatható. Ha ugyanis cos. $\xi_l =$ cos. ξ'_l, akkor ξ_l és ξ'_l vagy $l\pi$ és $(l+\frac{1}{2})\pi$, vagy $(l+\frac{1}{2})\pi$ és $(l+1)\pi$ közt fekszik (a határok beleértésével), különben ama számok már az előjelben különböznének; ha pedig most már ξ_l és ξ'_l nem egyenlők, akkor a 74. czikk elején adott tétel értelmében cos. ξ_l és cos. ξ'_l sem lehetnek egyenlők.

Az egyetlen megfelelő ξ_l számot meghatározzuk a következő módon. *Bármely* $k_n\frac{\pi}{2^n}$ *alakú szám, mely* $l\pi$ *és* $(l+1)\pi$ *közt fekszik kisebb vagy nagyobb a* ξ_l*-nél, a mint* $(-1)^l$ *cos.* $k_n\frac{\pi}{2^n}$ *nagyobb vagy kisebb a* $(-1)^l$ *u-nál.*

Ha valamely $k_n \frac{\pi}{2^n}$ alakú számra nézve cos. $k_n \frac{\pi}{2^n} = u$, a föladat már meg van oldva; tehát ez az eset többé nem lesz tekintetbe veendő. Ha most már minden n-re nézve k_n-t úgy határozzuk meg, hogy

$$k_n \frac{\pi}{2^n} \leq \xi_l < (k_n + 1)\frac{\pi}{2^n},$$

akkor mindenek előtt

$$\xi_l = \lim. k_n \frac{\pi}{2^n} = \lim. (k_n + 1) \frac{\pi}{2^n};$$

és

$$\cos. k_n \frac{\pi}{2^n}, \quad \cos. \xi_l, \qquad \cos. (k_n + 1) \frac{\pi}{2^n},$$

továbbá

$$\lim. \cos. k_n \frac{\pi}{2^n}, \quad \cos. \xi_l, \quad \lim. \cos. (k_n + 1) \frac{\pi}{2^n}$$

vagy nem nagyobbodó vagy nem kisebbedő számok, a mint l páros vagy páratlan; de a két határérték egyenlő lévén ez csak úgy nem ad ellenmondást, ha

$$\lim. \cos. k_n \frac{\pi}{2^n} = \cos. \left(\lim. k^n \frac{\pi}{2^n}\right) = \cos. \xi_l = u.$$

Mindazon számoknak, melyeknek cosinusa u-val egyenlő, közös jele: arccos. u (olv. arcus cosinus u) úgy, hogy cos. (arccos. u)$=u$. Az arccos. mint műveleti jel *végtelen sok értelmű*, mert a számok határtalan sora, jelzésünkben

$$, \ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$$

megfelel a föladatnak. Ezek közül ξ_0, mely 0 és π közt fekszik (a határok beleértésével) elég az összes többi érték kifejezésére, melyek a

$$\xi_0 + 2l\pi, \; -\xi_0 + 2l\pi$$

alakokban bennfoglaltatnak, ha l tetszőleges egész számot jelent. A kiirt értékek ekkor $2l\pi$ és $(2l+1)\pi$ illetőleg $(2l-1)\pi$ és $2l\pi$ közt feküsznek.

Csak akkor, midőn $u = \pm 1$, lesz $\xi_0 = 0$, és ekkor a megfelelő értékek száma, ámbár még mindig határtalan, «fél annyira» sülyed, a mennyiben most mindig csak 2π távolságban találni ilyent, t. i. a $2l\pi$ alakú számokat.

A ξ_0-t gyakran az arc. cos. u *főértékének* nevezzük és (arccos. u)-val jelöljük, hol a különben fölösleges zárjel kifejezi a választandó érték korlátozását.

A sin. $x = u$ egyenlet megoldása nem új föladat, mert ez így is irható:

$$\cos.\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -u$$

tehát a keresett értékek:

$$x = \arccos.(-u) - \frac{\pi}{2},$$

a mi «ugyanannyi» érték, mint előbb. Ha $(\text{arc.}\cos.(-u)) = \xi_0$, akkor

$$\eta_0 = \xi_0 - \frac{\pi}{2}$$

$-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ közt fekszik, és minthogy $-\xi_0 - \frac{\pi}{2} = -\pi - \eta_0$, végre

$$\eta_0 + 2l\pi,\ \pi - \eta_0 + 2l\pi$$

az összes értékek sorozata, melyek közül a kiirtak

$$(2l - \tfrac{1}{2})\pi \text{ és } (2l + \tfrac{1}{2})\pi, \text{ ill. } (2l + \tfrac{1}{2})\pi \text{ és } (2l + \tfrac{3}{2})\pi$$

közt feküsznek.

Csak akkor, midőn

$$\eta_0 + 2l\pi = \pi - \eta_0 + 2l'\pi$$

vagyis midőn (az η_0 megszorítása miatt) $\eta_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, és így $u = \pm 1$, olvad össze felére a megoldások száma, melyeknek alakja ekkor $\frac{\pi}{2} + 2l\pi$ vagy $-\frac{\pi}{2} + 2l\pi$.

A $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ közt fekvő értékét ismét *főértéknek* nevezzük és (arcsin. u)-val jelöljük; míg ama számoknak, melynek sinusa egyenlő u-val, közös jele arcsin. u, és így sin. (arcsin. u) $= u$.

Oly x meghatározása, melyre nézve

$$\cos.\, x = u,\ \sin.\, x = v$$

csak akkor lehetséges, ha $u^2 + v^2 = 1$. Ha e föltétel ki van elégítve, x mindig úgy választható, hogy

$$2l\pi \leq x < 2(l + 1)\pi$$

legyen. A cos. $x = u$ egyenletnek két megoldása felel meg e föltételnek:

$$\xi_0 + 2l\pi,\ -\xi_0 + 2(l + 1)\pi,$$

s e számok mindegyikére nézve a sinus absolut értéke $= |v|$, de sin. $(\xi_0+2l\pi)$ és sin. $(-\xi_0+2(l+1)\pi)$ ellenkező előjelű és így csak egyik lesz v, míg a másik $-v$.

A tg. $x=u$ egyenlet megoldása vagy önállóan tárgyalható ugyanazon módon, mint a megelőzőké, vagy tekintettel a tg. jel értelmezésére, így is irható: $\frac{\sin. x}{\cos. x}=u$. De ekkor kell, hogy x mindenesetre oly számérték legyen, melyre nézve, ha cos. x értékét egyelőre μ-vel jelöljük:

$$\cos. x=\mu, \quad \sin. x=\mu u$$

tehát mindenekelőtt: $\mu^2+\mu^2 u^2=1$, a miből μ két értékét nyerjük:

$$\mu_1=(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \mu_2=-\mu_1=-(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

A tg. $x=u$ egyenletnek megfelelő értékek sorozata tehát nem más mint a

$$\cos. x=\mu_1, \quad \sin. x=\mu_1 u$$

$$\cos. x=\mu_1, \quad \sin. x=-\mu_1 u$$

egyenlet rendszereknek külön-külön megfelelő értékek összessége; de ha az első rendszernek megfelelő érték x_0, akkor $x_0+\pi$ megfelel a másodiknak; és így az értékek mind $x_0+l\pi$ alakban irhatók, hol l tetszőleges egész szám.

Ezek közt mindig van egy, mely $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt fekszik, az úgynevezett főérték, melyet (arctg. u)-val jelölünk, míg a megfelelő számok közös jele: arctg. u és így tg. (arctg. u) $=u$.

A cot. $x=u$ egyenlet végre azonos a tg. $x=\frac{1}{u}$-val és így nem kíván új tárgyalást.*

---

* Az arcsin-x, s ú. t. jelek a régibb arc. (sin $=x$) irásmódból keletkeztek, mely egyszerű rövidítése a következő kijelentésnek: «azon arcus (ív), melynek sinusa egyenlő x-szel».

HARMADIK SZAKASZ.

A COMPLEX SZÁMOK.

I.

A complex számok értelmezése és alaptulajdonságaik.

A másodfokú egyenlet valós gyökei.

78. A másodfokú egyenlet:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

melyben a, b, c tetszőleges valós számok, de a nem 0, (különben az egyenlet nem volna másodfokú), megoldása előtt a-val szorozható és ekkor

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

alakban irható. Minthogy x-szel együtt $ax + \frac{b}{2}$ valós, és ennek négyzete 0 vagy pozitiv, *a másodfokú egyenletnek csak akkor lehet valós gyöke, ha $b^2 - 4ac$ nem negativ.*

Ekkor pedig:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a mi a $\sqrt{b^2 - 4ac}$ kétértelműségének megfelelőleg *két gyököt* ad, kivéve midőn $b^2 - 4ac = 0$, a mikor csak egy szám felel meg az egyenletnek, t. i. $-\frac{b}{2a}$. Ha $b^2 - 4ac$ pozitiv, a másodfokú egyenlet két gyöke szétválasztott alakban:

$$x_1 = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}.$$

79. A másodfokú egyenlet általános alakjában a-val osztunk:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

és $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ helyett a következő kapcsolat alapján a p, q számokat hozzuk be:

$$2p = -\frac{b}{a},$$

$$p^2 - q^2 u = \frac{c}{a},$$

hol $|u|$ egészen szabadon választható (0 kivételével), az u előjelét pedig úgy állapitjuk meg, hogy

$$q^2 = \frac{1}{u}\left(p^2 - \frac{c}{a}\right)$$

pozitiv legyen. Ekkor a másodfokú egyenlet:

$$x^2 - 2px + p^2 - q^2 u = 0,$$

és gyökei egyszerűen akkor valósak, ha u nem negativ. Ekkor a két gyök $p + q\sqrt{u}$. A miből még látni, hogy egészen mindegy, hogy q számára a $\sqrt{\frac{1}{u}\left(p^2 - \frac{c}{a}\right)}$ melyik értékét veszszük, mert a kétértelműség a $\sqrt{u}$ által is már teljesen ki lesz fejezve.

A másodfoku egyenlet tehát mint a $p + q\sqrt{u}$ számpár képviselője tekinthető; e számpár számait:

$$p + qu^{\frac{1}{2}} \text{ és } p - qu^{\frac{1}{2}}$$

konjugált számoknak nevezhetjük és u kezdettől fogva adott szám lévén, $(p, q)_1$ és $(p, q)_2$-vel jelölhetjük.

A complex számok bevezetésénél alapvető jelentőségű azon megjegyzés, hogy konjugált számokra vonatkozó műveleti szabályok teljesen egyforma módon adhatók meg. Tudni illik a

$$(p, q) + (r, s) = (p + r, q + s)$$

$$(p, q)(r, s) = (pr + qsu, ps + qr)$$

egyenlően helyesek, akár a $\sqrt{u}$ pozitiv, akár pedig negativ értékével dolgozunk, azaz a zárjelhez akár az 1, akár a 2 mutatót csatoljuk.

A complex számok bevezetése.

80. Ama követelés, hogy a másodfokú egyenlet kivétel nélkül megoldható legyen, ismét csak a számfogalom általánosítása alapján teljesíthető.

Két valós számból, p- és q-ból ismét új — általánosabb — számot képezhetünk, melynek értelmezésébe azonban most a p és q számok minden tulajdonságát bele foglaljuk, valamint a p és q ily összekapcsolásánál azt is megkülönböztetjük, vajjon a p és q számok közül melyik az első, melyik a második?

Ha tehát a p és q, illetőleg r és s összekapcsolásából származó számokat, az ú. n. *complex számokat* egyelőre $\{p, q\}$ és $\{r, s\}$-sel jelöljük, első sorban az értlemezés következménye, hogy *a* $\{p, q\}$ *és* $\{r, s\}$ *számok csak akkor egyenlők, ha* $p = r$ *és* $q = s$.

Ebből mindenekelőtt látni, hogy a complex számok sokasága egészen más mint a valós számoké. Már azon számok, melyekben az első szám p, sokaságukra nézve megegyeznek a valós számokkal, mert a második helyre bármely valós szám juthat. De ezenkívül p helyébe is minden valós számot tehetünk. Ha tehát most a valós számok sokaságát röviden végtelen nagynak mondjuk, a complex számok sokasága *a valós számokéhoz képest kétszeresen végtelen nagy.*

Ama complex számok sokasága, melyekben a második szám mindig ugyanaz, p. 0, teljesen megfelel a valós számok sokaságának, azaz a $\{p, 0\}$ complex szám megadja a p valós számot és viszont.

Eddigelé a $\{p, q\}$ complex számok a valós számokkal szemben lényegesen új fogalmak; az összeadás s ú. t. műveletei az eddigi értelmezések alapján ezekre nem is alkalmazhatók és tetszésünktől függ, hogy mit akarunk e számkörben összeadásnak s ú. t. mondani

Ha azonban a $\{p, q\}$ és $\{r, s\}$ számok összeadását és szorzását úgy értelmezzük, hogy azon esetben, ha bennök a második szám 0, és így az előbbi megállapítás értelmében megfelelnek nekik a p es r valós számok, e számok összegének, illetőleg szorzatának ismét megfelelnek a $p + r$ és pr valós számok, akkor azon complex számoknak, melyeknek alakja $\{p, 0\}$, tulajdonságai a valós számokéval teljesen azonos kifejezést nyernek.

Minden a $p, q, r, \ldots$ valós számokra vonatkozó igazság helyes marad a $\{p,0\}$, $\{q,0\}$, $\{r,0\}$, ... alaku számokra is, *azaz a* $\{p,0\}$ *számok azonosak lesznek a valós számokkal,* míg ama $\{p,q\}$ számok, melyekben q nem zérus, az eddig vizsgált számkör általánosítását eszközlik.

Ezen első föltételnek megfelelőleg azonban a $\{p,q\}$ és $\{r,s\}$ összege vagy szorzata még akárhányféleképp értelmezhető. Hogy az új számok a másodfokú egyenlet általános megoldását eszközöljék, ez ismét az összeg és szorzat értelmezésének helyes választása által lesz elérhető. Az erre vezető utat megadják a megelőző czikk utolsó tárgyalásai. Ott is ily $\{p,q\}$ számokkal volt dolgunk, melyekben az összeg és szorzat valóban eleget tesz az első föltételnek. Ezek meg is adják a másodfokú egyenlet megoldását, ha ennek utoljára használt alakjában u pozitiv, azaz a gyökök valósak. Előre is belátni, hogy negativ u esetében czélunknak megfelelő számokat nyerünk. Ez még annyiban egyszerűsíthető, hogy u-t -1-nek veszszük, a mennyiben tudjuk, hogy u absolut értéke a 0 kizárása után szabadon volt választható.

E szerint a complex számok összegét és szorzatát a következőkép értelmezzük:

$$\{p,q\}+\{r,s\}=\{p+r,\ q+s\}, \tag{I.}$$

$$\{p,q\}\ .\ \{r,s\}=\{pr-qs,\ ps+qr\} \tag{II.}$$

Az értelmezés czélszerűségét, melyet eddig előleges meggondolás csak valószínűvé tett, e számok részletes tulajdonságainak vizsgálata majd teljes világosságra hozza.

81. Mindenekelőtt a complex számokat lehető kevés független elemből iparkodunk előállítani, a mi egyszersmind a $\{p,q\}$ jelzést egyszerűsíti. Minthogy

$$\{p,q\}=\{p,0\}+\{0,q\},$$

de $\{p,0\}$ jeléül egyszerűen p-t használjuk, csak a $\{0,q\}$ számalakok részére kellene új jelt bevezetni; de ismét (II.) szerint:

$$\{0,q\}=\{q,0\}\ \{0,1\},$$

és így az összeadási és szorzási műveletjelek használata mellett elég, ha egy új szám, a $\{0,1\}$ részére új jelt használunk. Legyen röviden e jel i, tehát:

$$i = \{0, 1\},$$

ekkor végre a $\{p, q\}$ számot mint összeget

$$p + qi$$

alakban írhatjuk.

A complex számok körében is föntartjuk az *egység* amaz értelmezését, mely szerint egység minden szám, melynek valamely hatványa egyenlő 1-gyel. De:

$$i^2 = \{0, 1\}\{0, 1\} = \{-1, 0\} = -1.$$

és így $i^4 = 1$.

Tehát az i szám egység, az úgynevezett *képzetes (imaginär) egység* és vele együtt $-i = \{0, -1\}$ is.

Minden $\{0, q\} = qi$ szám *képzetes** szám és *így minden complex számot mint valós és képzetes szám összegét lehet fölfogni.*

Két képzetes szám $\{0, q\} = qi$ és $\{0, s\} = si$ csak akkor egyenlő, ha q és s azaz *a képzetes egység valós szorzói egyenlők.*

És végre *két complex szám $p + qi$ és $r + si$ csak akkor egyenlő, ha a valós és képzetes részek külön-külön egyenlők.*

Hogy az új számok körében negativ számból valóban lehet négyzetgyököt vonni, vagyis az

$$x^2 = -A$$

egyenletet megoldani, közvetetlenül világos. Legyen A egyik négyzetgyöke a, azaz

$$\{a, 0\}^2 = \{A, 0\}$$

akkor

$$\{0, a\}^2 = \{-a^2, 0\} = \{-A, 0\} = -A$$

tehát a $\sqrt{-A}$ jel itt újból két értelmű, egyszerűen:

$$\sqrt{-A} = i\sqrt{A}.$$

Az i maga is végre a valós számok körében használt műveletjelek segítségével kifejezhető; mert ha A helyébe 1-et teszünk:

---

* Vagy *tisztán képzetes*, ha t. i. a mi különben nem ajánlható, a complex számokat nevezzük képzeteseknek.

$$\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = \pm i,$$

úgy hogy i nem más mint a kétértelmű $\sqrt{-1}$ egyik értéke.

E szerint az i magasabb hatványaira nézve:

$$i^2 = -1\,,\; i^3 = -i\,,\; i^4 = 1\,, \quad \text{s ú. t.}$$

Az alapműveletek.

82. E fejtegetések értelmében a $p+qi$ és $r+si$ összegének és szorzatának értelmezése úgy is fogalmazható, hogy *az* i-t $\sqrt{-1}$-nek *olvasva*, tekintet nélkül arra, hogy az illető alaknak nincs értelme a valós számok körében, *a közönséges algebrai szabályok szerint járunk el.* Mert (I.) és (II.)-ben $\{p,q\}$ helyébe $p+qi$-t írva, ezek végre lesznek:

$$(p+qi)+(r+si)=(p+r)+(q+s)i, \tag{I.}$$

$$(p+qi)\,(r+si)=pr-qs+(ps+qr)i, \tag{II.}$$

a mi az épen adott szabálynak megfelel, ha $\sqrt{-1}^2$ helyett ismet -1-et teszünk.

A mi most már a megforditott műveleteket illeti, a *kivonást* illetőleg közvetetlenül látni, hogy:

$$(p+qi)-(r+si)=p-r+(q-s)i\,. \tag{III.}$$

Az *osztás* a complex számok körében szintén egyértelmű művelet, ismét mint előbb amaz eset kivételével, midőn az osztó zérus. (Az előbbi megállapitások szerint csak úgy lehet $r+si=0$, ha külön-külön $r=0\,,\ s=0\,.$)

A

$$\frac{p+qi}{r+si}$$

hányados nem más mint az oly $x+yi$ complex szám, melyre nézve:

$$p+qi=(r+si)\,(x+yi),$$

vagyis

$$p+qi=rx-sy+(sx+ry)i\,;$$

de ekkor a valós és képzetes részek külön-külön egyenlők tartoznak lenni és így:

$$p = rx - sy,$$

$$q = sx + ry.$$

Ebből végre

$$rp + sq = (r^2 + s^2)x,$$

$$sp - rq = -(r^2 + s^2)y,$$

és így, ha csak nem* $r = 0$, $s = 0$, x és y megvan határozva és velök együtt:

$$\frac{p+qi}{r+si} = \frac{rp+sq}{r^2+s^2} + \frac{rq-sp}{r^2+s^2}i. \tag{IV.}$$

Az I—IV. képletekből foly, hogy az alapműveleteknek minden a valós számok körében érvényes törvénye a complex számok körében is helyes marad, a mi egyszerűen minden egyes képleten igazolható.

83. Ide csatoljuk még — ámbár ez a gyökkivonás általános elméletének csak speciális esete — a complex számok *négyzetgyökének* kiszámítását, vagyis a

$$z^2 = a + bi$$

egyenlet megoldását complex számokban. Hogy $z = x + yi$ az egyenletnek megfeleljen, kell, hogy legyen:

$$(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi,$$

vagyis a valós és képzetes részek egyenlőségét külön kiírva:

$$x^2 - y^2 = a, \; 2xy = b.$$

Minthogy a valós számok esetére a föladatot már megoldottuk, föltehetjük most, hogy b nem 0 és ekkor a második egyenlet mutatja, hogy sem x, sem y nem lehet 0. De ekkor ugyanebből:

$$y = \frac{b}{2x},$$

és ezt az első egyenletbe behelyettesítve, x^2-tel szorozva és rendezve

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0;$$

ebből x^2-et, mint másodfokú egyenletből meghatározhatjuk:

* Ha r és s zérus, akkor x és y együtthatója eltünik és e számok nem határozhatók meg; bármi is $x+yi$, szorzata 0-sal itt is mindig 0.

$$x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

de az így nyert két érték közül csak az használható, melyben a gyökjelt pozitivnak veszszük, mert az

$$a^2 < a^2 + b^2$$

kapcsolat alapján egyszersmind

$$|a| < (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

és így $a - (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ mindenesetre negativ. De az x valós értékeit keressük és így ezek a következő egyenletnek tartoznak eleget tenni:

$$x^2 = \frac{a+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

a hol ugyancsak az előbbiek szerint a jobb oldal mindig pozitiv és így x két értéke:

$$x = \sqrt{\frac{a+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{2}} = \pm\left(\frac{a+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Az x minden értékéhez a $2xy = b$ egyenlet alapján egy bizonyos meghatározott y tartozik:

$$y = \pm\frac{b}{2}\left(\frac{2}{a+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

a mi még, ha számlálóban és nevezőben az

$$\left(\frac{-a+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

értékkel szorzunk, átmegy ebbe:

$$y = \pm\frac{b}{2}\frac{(-a+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \pm\left(\frac{-a+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

és így végre:

$$x + yi = \sqrt{a+bi} = \pm\left\{\left(\frac{a+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + i\left(\frac{-a+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

tehát a $\sqrt{a+bi}$ itt is *kétértékű*, úgy hogy a két érték -1-gyel való szorzás által egymásba megy át.

A complex számok körében a másodfokú egyenlet

$$ax^2 + bx + c = 0$$

még azon legáltalánosabb esetben is megoldható ha a, b, c bármicsoda complex számok. Ugyanezen műveletek mint előbb most is mutatják, hogy

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

a mi ismét kétértelmű kifejezés, úgy hogy a másodfokú egyenletnek mindig két különböző gyöke van, kivéve midőn $b^2 - 4ac = 0$, a mikor később kifejtendő szempontból azt mondjuk, hogy a két gyök egyenlő. A gyök értéke ekkor $-\frac{b}{2a}$.

Complex számok absolut értéke.

84. Az $a + bi$ és $a - bi$ complex számokat *conjugált* számoknak nevezzük. *Conjugált számok összege és szorzata valós, az utóbbi mindig pozitiv:*

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a\,;\; (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Az $a + bi$ complex szám *absolut értéke* alatt az $a^2 + b^2$ pozitiv előjelű négyzetgyökét értjük:

$$|a + bi| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

E jelzés és elnevezés az előbb történt megállapitásokkal megegyezik, mert ha $a + bi$ valós, azaz $b = 0$, a absolut értéke most is azt jelenti, mit előbb.

Az absolut érték értelmezésének ily általánositását indokolja még az a körülmény, hogy az absolut értékek alaptulajdonsága most is érvényes marad. T. i.

Az összeg absolut értéke soha sem lehet nagyobb a tagok absolut értékeinek összegénél. Azaz, ha $u_1, u_2 \ldots u_n$ bárminő complex számok:

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_n| \leq |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|. \tag{1.}$$

Ha először az összeadandók száma kettő, és részletesebben:

$$u_1 = a_1 + b_1 i\,,\; u_2 = a_2 + b_2 i\,,$$

akkor valóban:

$$\left((a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq (a_1^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}} + (a_2^2 + b_2^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$

mert a négyzetekre nézve is:

$$(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leqq a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2(a_1^2+b_1^2)^{\frac{1}{2}}(a_2^2+b_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

vagyis:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 \leqq (a_1^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}} (a_2^2 + b_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

a mit ismét avval igazolunk, hogy négyzetre emelünk:

$$a_1^2 a_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 \leqq a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + b_1^2 b_2^2.$$

Ez t. i. így is irható:

$$0 \leqq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

a mi közvetetlenül világos.

Két összeadandóról igen könnyű átmenni háromra és ú. t.

T. i. most már

$$|u_1 + u_2 + u_3| \leqq |u_1 + u_2| + |u_3|$$
$$\leqq |u_1| + |u_2| + |u_3|,$$

tehát így folytatva a dolgot, a tétel helyesnek bizonyul n-tagú összegre nézve, ha $n-1$-tagúnál érvényes volt.

Két tagú összegnél a tételnek még következő kiegészítése is adható:

$$|u_1 + u_2| \geqq |u_1| - |u_2|.$$

Ha ugyanis $v = u_1 - u_2$, akkor

$$|u_1| \leqq |v| + |u_2|,$$

és így

$$|v| \geqq |u_1| - |u_2|.$$

Ha most u_2 helyébe $-u_2$-t teszünk, végre:

$$|u_1 + u_2| \geqq |u_1| - |u_2|$$

A tétel természetesen csak akkor ad valóban alsó határt, ha az összeg első tagjának azt veszszük, melynek absolut értéke nagyobb; különben csak azt mondja, hogy egy pozitiv szám nagyobb egy negativnál. Tekintettel erre a tételt így fejezzük ki:

$$|u_1 + u_2| \geqq \big||u_1| - |u_2|\big|. \tag{2.}$$

85. Szorzatok absolut értékére vonatkozólag mindig:

$$|u_1 u_2| = |u_1| |u_2|; \tag{3.}$$

azaz *a szorzat absolut értéke egyenlő a szorzók absolut értékeinek szorzatával*, mert a (3.)-ból közvetetlenül foly:

$$|u_1 u_2 u_3| = |u_1|\,|u_2|\,|u_3|,$$

és hasonlóképen bárhány szorzóra nézve.

A bebizonyítás egyszerűen a jelzett alakok részletes kiirása által történik. Ha ugyanis

$$u_1 = p_1 + q_1 i,\ u_2 = p_2 + q_2 i,$$

$$u_1 u_2 = p_1 p_2 - q_1 q_2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1) i;$$

akkor (3.) egyenesen azt mondja, hogy:

$$\left((p_1 p_2 - q_1 q_2)^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (p_1^2 + q_1^2)^{\frac{1}{2}}\,(p_2^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

a mi közvetetlenül világossá lesz, ha a jobb oldalon a $\frac{1}{2}$ hatvány alatt szorzunk és azután a zárjelen belül a műveleteket végrehajtjuk.

Az u absolut értékét az $u = p + qi$-ből mint szorzót kiemelve, a complex számot fontos szorzatalakban nyerjük:

$$u = |u|\left(\frac{p}{|u|} + \frac{q}{|u|}\,i\right),$$

hol az első szorzó, az absolut érték, pozitiv, míg a második szorzónak ama jellemző sajátsága van, hogy absolut értéke az egység. T. i.

$$\frac{p^2}{|u|^2} + \frac{q^2}{|u|^2} = 1$$

mert $|u|^2 = p^2 + q^2$.

Ha u absolut értéke egy, akkor bármicsoda egész szám is n, az u^n absolut értéke szintén egy.

Ha $|u| > 1$, akkor

$$|u|,\ |u^2|,\ \ldots,\ |u^n| = |u|^n,\ \ldots$$

minden határon túl nagyobbodó sorozatot alkotnak, azaz $\lim. |u^n| = \infty$.

Hasonlóképen ha $|u| < 1$, $\lim. |u^n| = 0$.

Complex határértékek.

86. A határértékek általános értelmezése (54. cz.) most szóról szóra alkalmazható complex számokra is.

Legyen $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ a complex számok határtalan sorozata, melynek általános törvénye ismeretes, azaz melynek bárhány tagját bizonyos szabály szerint tudjuk képezni. Ekkor természetesen a_n részletes alakja is ismeretes, p.

$$a_n = \rho_n + \sigma_n i.$$

Az $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ tetszőleges complex számok sorozatának vagy az $a_n = \rho_n + \sigma_n i$ kifejezés határértéke alatt, midőn n a pozitiv egész számok során keresztül minden határon túl növekszik, az oly A számot értjük, melyre nézve, bármicsoda pozitiv szám is δ, lehet egy (poz. eg.) n-et úgy meghatározni, hogy

$$|a_{n+k} - A| < \delta,$$

bármicsoda nem negativ egész szám is k.

Hogy ily határérték p. $A = R + Si$ egyáltalában létezzék, kell tehát, hogy legyen, (ha a és A részletes alakját az adott föltételbe behelyettesítjük):

$$(\rho_{n+k} - R)^2 + (\sigma_{n+k} - S)^2 < \delta^2,$$

de ez csak ugy lehetséges, ha külön-külön:

$$(\rho_{n+k} - R)^2 < \delta^2, \; (\sigma_{n+k} - S)^2 < \delta^2$$

mert különben e pozitiv számok összege annál kevésbé kisebb δ^2-nél. De ebből ismét:

$$|\rho_{n+k} - R| < \delta, |\sigma_{n+k} - S| < \delta$$

azaz kell, hogy lim. ρ_n és lim. σ_n véges meghatározott számok legyenek. Megfordítva, ha e föltételek ki vannak elégítve, akkor az n kellő választásánál

$$(\rho_{n+k} - R)^2 + (\sigma_{n+k} - S)^2 < 2\delta^2,$$

és igy

$$|a_{n+k} - A| < 2^{\frac{1}{2}}\delta,$$

a mi az eredeti föltétellel összeesik, mert $2^{\frac{1}{2}}\delta$ csak úgy tetszőleges pozitiv szám, mint δ maga.

Az eredményt következőképen foglalhatjuk össze:

Az $\alpha_n = \rho_n + \sigma_n i$ kifejezésnek akkor és csak akkor van véges és meghatározott határértéke, azaz lim. $(\rho_n + \sigma_n i)$ *csak akkor jelent számot, ha a ρ_n és σ_n valós kifejezéseknek meg van e tulajdonságuk, és akkor egyszerűen:*

$$\lim.\ \alpha_n = \lim.\ (\rho_n + \sigma_n i) = \lim.\ \rho_n + i \lim.\ \sigma_n\,,$$

a mivel minden számitás az előbbi esetre van visszavezetve.

Ha η_n oly törvényt követ, hogy egy bizonyos n-re és minden nem negativ egész k-ra nézve:

$$|\eta_{n+k}| < \delta,$$

bármicsoda pozitiv szám is δ, akkor ha η_n részletes alakja:

$$\eta_n = \delta_n + \varepsilon_n i\,,$$

egyszersmind:

$$\delta_{n+k}^2 + \varepsilon_{n+k}^2 < \delta^2$$

és igy $|\delta_{n+k}| < \delta$, $|\varepsilon_{n+k}| < \delta$. Azaz:

Ha η_n absolut értéke, ha csak n-et elég nagynak veszszük, egy tetszőlegesen választott pozitiv δ-nál kisebbé tehető, akkor lim. $\eta_n = 0$.

Ebből közvetetlenül következik, hogy, *ha* $|u| < 1$, *akkor* lim. $(u^n) = 0$, mert u^n absolut értéke $|u|^n$, a mi n növekedésével minden határon túl fogy.

Ha az $\omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_n \ldots$ complex számok sorozatának az a tulajdonsága van, hogy ha csak n-et elég nagynak veszszük, tagjainak absolut értéke egy tetszőlegesen választott ω pozitiv számnál is nagyobb, akkor ezt ismét, úgy mint ω valós értékeinél, röviden így fejezzük ki:

$$\lim.\ \omega_n = \infty,$$

és azt mondjuk, hogy *az ω_n határértéke végtelen nagy.*

Minden más esetben az α_n kifejezésről azt mondjuk, hogy nincs határértéke; és ekkor a lim. α_n jelnek — ha t. i. sem számot, sem ∞-t nem jelent — nincs értelme.

Az összegek, szorzatok és hányadosok határértékeinek kiszámítására adott szabályok, az 56. cz. II. alatt adott képletei most is változatlanul érvényesek maradnak.

Ugyanis, ha p. $a_n = \rho_n + \sigma_n i$, $a'_n = \rho'_n + \sigma'_n i$, és lim. a'_n, nem 0, azaz lim. ρ'_n és lim. σ'_n nem mindkettő 0, akkor:

$$\lim. \frac{a_n}{a'_n} = \lim. \left(\frac{\rho_n \rho'_n + \sigma_n \sigma'_n}{\rho'^2_n + \sigma'^2_n} + \frac{\rho'_n \sigma_n - \rho_n \sigma'_n}{\rho'^2_n + \sigma'^2_n} i \right).$$

és ez valóban ugyanaz mint:

$$\frac{\lim. a_n}{\lim. a'_n} = \frac{\lim. \rho_n + i \lim. \sigma_n}{\lim. \rho'_n + i \lim. \sigma'_n} = \frac{\lim. \rho_n \lim. \rho'_n + \lim. \sigma_n \lim. \sigma'_n}{\lim. \rho'^2_n + \lim. \sigma'^2_n} +$$

$$+ i \frac{\lim. \rho'_n \lim. \sigma_n - \lim. \rho_n \lim. \sigma'_n}{\lim. \rho'^2_n + \lim. \sigma'^2_n}.$$

Hasonlókép az összeg és szorzat egyszerűbb képleteinél.

II.

A valós és complex számok geometriai ábrázolása.*

A valós számok és az egyenes vonal.

87. Egy adott egyenes vonalon fölveszünk két tetszőleges pontot O-t és E-t, az első legyen a *kezdőpont*, a második az *egységpont*. Ha az O és E végpontok által meghatározott vonaldarabot hosszegységnek veszszük, ennek segítségével minden más P pontnak, mely az O ugyanazon oldalán fekszik, mint E, távolsága O-tól, vagyis az OP vonaldarab hossza *megmérhető és e hossz mérőszáma egy bizonyos pozitiv valós szám lesz.* (A valós számok általános értelmezése ép úgy történt, hogy e mérés mindenkor kivihető legyen).

* Az analizis rendszeres kifejtésében geometriai tárgyalásokat nem használhat, mert ezeknek utolsó alapjai — akár axiomáknak, akár föltevéseknek vegyük őket — mindenkor oly külső szemlélettel állnak kapcsolatban, melytől teljesen független minden számtani igazság. Ez természetesen nem zárja ki, hogy a számok abstrakt vonatkozásait geometriai viszonyokon érzékítsük, valamint azt sem, hogy az analizis geometriai (valamint egyéb természettudományi) *alkalmazásai* által a kifejtett módszereknek tudományos értékét és jelentőségét föltüntessük.

Vonaldarabok hosszának mérésénél oly módon csatolunk minden hosszhoz egy-egy jellemző számot, hogy a hosszabb vonaldarabhoz nagyobb szám tartozzék és megfordítva. Adva lévén a hosszegység, a planimetria egyszerű szerkesztései megadják mindazon vonaldarabokat, melyeknek hossza raczionális mérőszám által van adva. Ha most már az OP mérőszámát nagyobbnak vagy kisebbnek mondjuk egy bizonyos raczionális számnál, a mint az OP maga hosszabb vagy rövidebb, mint az e raczionális mérőszámnak megfelelő vonal, az OP mérőszáma tényleg mint valós szám lesz értelmezve. Ez pedig pozitiv, mert ha csak OE-t elég sok részre osztjuk, e részek egyike végre rövidebb lesz OP-nél. Itt a geometriai viszonyoknak *leirása* történik és így elfogadjuk, mint a szemlélet egyik eredményét, hogy az OE hossz folytonos felezése által pontokhoz juthatunk, melyek a P-nél közelebb feküsznek O-hoz.

Különböző pontokat választva, P-t és P'-t, az OP és OP' mérőszámai különbözők lesznek, egyszerűen azért mert n-et elég nagynak véve OE n-ed része a PP' hossznál kisebbé tehető és ekkor van ismét egy oly k egész szám, hogy a $\frac{k}{n}$ mérőszámnak megfelelő OK hossz K végpontja P és P' közé esik és így OP és OP' mérőszámai közül az egyik kisebb lesz $\frac{k}{n}$-nél, a másik pedig ugyane számnál nagyobb.

Megfordítva minden (pozitiv) mérőszámhoz az egyenes vonalnak egy és csak egy — az E-vel az O-nak ugyanazon oldalán fekvő — pontja tartozik; e tétel nem lehet bebizonyítás tárgya, mert egyszerűen az egyenesnek, mint pontsornak, a geometriai szemléleten alapuló felfogását jellemzi.*

Ha a mérőszám raczionális, a planimetria legegyszerűbb szerkesztései megadják a hozzá tartozó pontot. Ha a mérőszám nem raczionális, akkor a raczionális számok sorozata által tetszőlegesen megközelíthető, azaz ama szám a raczionális a_n és $a_n + \varepsilon_n$ közt fekszik, hol $|\varepsilon_n|$, hacsak n-et elég nagynak veszszük, tetszőleges kicsinynyé tehető. A keresett pont tehát egy vonaldarabka belsejében tartozik feküdni, melynek hossza tetszőleges kicsinynek választható. Az irraczionális mérőszám — ily módon fejezzük ki e meghatározást — első sorban ú. n. *vonalelemet* határoz meg. Hogy oly egyenesdarabon, melynek végpontjai úgy változnak, hogy minden határon túl

* Hogy mennyire igazak a geometria axiomái, vagy mennyire helyesek e tudomány föltevései, azt itt nem elemezzük; e helyen egyszerűen fölhasználjuk az analizis módszereit a geometriai, mint *tapasztalati* viszonyoknak pontos leirására.

egymáshoz közelednek, mindig van oly *pont*, melyhez úgy az egyik, mint a másik végpont minden határon túl közeledik, az ú. n. *folytonos* voltának részletes kifejezése. Az egyenes e tulajdonságát nem adja sem a tapasztalat, sem a bebizonyítás; az természetfölfogásunknak egy szükséges következménye, melyben minden változás időbeli változással lesz összekapcsolva és melyben az időelem — minden határon túl kisebbedő időtartam — és időpont — múlt és jövő határa — reánk nézve elválaszthatatlanul összeforr.

Teljesen azonos megállapításokat hozunk be az egyenes ama pontjaira nézve, melyek O-nak az E-vel ellentétes oldalán feküsznek. Ha e pontok mérőszámai gyanánt a negativ számokat veszszük és végül az O-nak megfelelő mérőszám gyanánt a zérust, akkor *az egyenes vonalnak minden pontjának megfelel egy bizonyos valós szám és megfordítva minden valós számnak a vonalnak egy bizonyos pontja.* Az egyenes vonal pontjainak és a valós számoknak e kölcsönös vonatkoztatása *kölcsönösen egyértelmű;* ha a P pontnak megfelel a p szám, akkor a p számnak ismét megfelel a P pont.

Egy pont helyzet-változása * az egyenesen úgy történik, hogy a neki megfelelő valós szám nagyobb vagy kisebb lesz; e szerint azt mondjuk, hogy a pont *pozitiv,* illetőleg negativ irányban halad tovább. Ha a PQ *vonaldarabot* vagy *távolságot* mint ily helyváltozást fogjuk föl, ez megkülönböztetendő a QP-től, mert ott a pont első helyzete volt P, a második Q; itt megfordítva az első helyet Q, a második P.

A QP vonaldarabot vagy távolságot *hosszára és irányára* nézve jellemzi a

$$p-q$$

szám, ha a P és Q-nak megfelelő számok p és q. Itt $|p-q|$ a tulajdonképeni hosszat adja, a $p-q$ előjele pedig az irányt, Világos, hogy ekkor PQ-nek megfelel $q-p$.

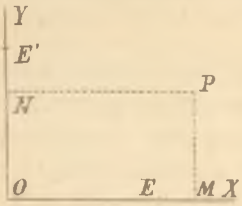
A merevnek képzelt vonaldarab eltolásánál, mikor sem a hossz, sem az irány nem változik, a $p-q$ is változatlan marad, mert e helyzet-változtatásnál p és q ugyanavval az a számmal növekszik vagy kisebbedik.

---

* Hogy *mikép* változtatja különben helyzetét a pont, azaz hogy mikép jut P-ből Q-ba, itt egyáltalában még nem jő tekintetbe.

A complex számok és a sík.

88. A síkban fölveszünk két egyenesvonalt, mely egymást derékszög alatt metszi. Metszőpontjuk legyen O. A határtalan egyeneseket röviden OX, ill. OY-nal jelöljük. Minden egyenesen adva van az egységpont, E és E', természetesen úgy, hogy az OE és OE' hosszak egyenlők. E pontok egyszersmind megadják az illető egyenesen a pozitiv haladási irányt.



1. ábra.

Bármely P pontja a síknak, az által, hogy az OY és OX-szel párhuzamos egyeneseket vonunk P-n keresztül, melyek az OX ill. OY vonalat M-ben, illetőleg N-ben metszik, meghatározza az OM és ON vonaldarabokat és egyszersmind ezeknek mérőszámait p_1-et és p_2-t; valamint megfordítva e számok p_1 és p_2 — hol a sorrend szerint az első az OX-en, a második az OY-on fekvő vonaldarabot jellemzi — megadják OM és ON-t, valamint ezek által a P-t is, mint ama derékszögű parallelogramm negyedik szögpontját, melynél a másik három szögpont O, M és N.

A p_1 és p_2 valós számok a P pont koordinátái ama Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben, melyben OX az *abscissák* és OY az *ordináták* tengelye. Megfelelőleg p_1 a P pont abscissája, p_2 ordinátája. Ugyanígy nevezzük az OM és ON vonaldarabokat, melyeknek nemcsak hossza, hanem iránya is tekintetbe jő. (A mennyiség és mérőszám e közös elnevezésére vonatkozólag lásd a bevezető sorokban foglalt megjegyezést). A P pont rövid jele ekkor: (p_1, p_2).

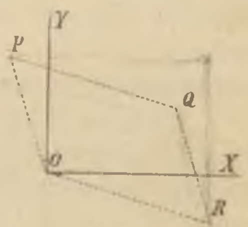
A p_1 és p_2 valós számok — ugyanily sorrendben — meghatározzák a $p_1 + p_2 i$ complex számot, valamint e complex szám ismét a p_1 és p_2 valós számokat.

A sík minden pontjának e megállapítások után megfelel egy bizonyos complex szám és megfordítva minden complex számnak a sík egy bizonyos pontja. E vonatkoztatás ismét *kölcsönösen egyértelmű*; ha a P pontnak megfelel a $p_1 + p_2 i$ szám, akkor megfordítva $p_1 + p_2 i$-nek megfelel a P pont.

Az OX vonal pontjainak megfelelnek a valós számok; az OY vonal pontjainak a képzetes számok így tehát E, E' és O-nak az 1, i, és 0.

A $p_1 + p_2 i$ szám a P-vel együtt jellemzi az OP vonaldarabot úgy hosszára, mint irányára nézve és ha e vonaldarabnak csak e tulajdonságait veszszük szemügyre, $p_1 + p_2 i$ az OP mérőszáma lesz.

89. Bármely a síkban adott vonaldarab PQ megegyezik egy O-tól kiinduló OR vonaldarabbal hosszra és irányra nézve, ha t. i. az O, P, és Q szögpontok által meghatározott parallelogramm negyedik, P-nek által ellenében fekvő szögpontja R. Ekkor ugyanis a PQ és OR vonaldarabok párhuzamosak és egyenlő hosszúak. Ha a merev PQ-t maga magával párhuzamosan eltoljuk, míg P az O-ba esik, a P pont koordinátái p_1, illetőleg p_2-vel kisebbednek, (mert mindegyik 0 lesz). De ugyanily változás történik a Q pont koordinátáival és ezek lesznek, ha a Q-nak megfelelő szám $q_1 + q_2 i$ volt:



2. ábra.

$$q_1 - p_1,\ q_2 - p_2.$$

E szerint az OR mérőszáma vagy az R-nek megfelelő mérőszám $(q_1 - p_1) + (q_2 - p_2)i$. Vagy rövidebben:

Ha a P és Q-nak megfelelő számok $p = p_1 + p_2 i$ és $q = q_1 + q_2 i$, akkor a PQ vonaldarab hosszra és irányra nézve adva van a $q - p$ szám által.

A QP-t természetesen épen úgy jellemzi $p - q$. A PQ vagy QP-nek tisztán hosszát pedig $|p - q|$ adja. Mert az analitikai geometria elemei szerint e távolság:

$$(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$$

négyzetgyökének pozitiv értéke.

E fejtegetések más fogalmazásban a complex számok *összeadásának és kivonásának geometriai ábrázolását* adják. Közvetetlenül következik ugyanis:

Ha a p és r számoknak megfelelő pontok P és R, akkor a $p + r$ összegnek megfelel a Q pont, melyet mint az O, P és R szögpontokkal biró parallelogrammnak negyedik, O-val *szemben fekvő szögpontját nyerjük.*

Ha a p és q számoknak megfelelő pontok P és Q, akkor a $q-p$ különbségnek megfelel az R pont, melyet mint az O, P és Q szögpontokkal bíró parallellogrammnak negyedik, P-vel szemben fekvő negyedik szögpontját nyerjük.

Igen gyakran — különösen a mechanika szerkesztő részeiben — hosszuk és irányukra nézve adott *vonaldarabok* (erők) *összeadása és kivonása* alatt ama vonaldarab meghatározását értjük, melynek (complex) mérőszáma, az eredetileg adott vonaldarabok mérőszámainak összege vagy különbsége.

E szerint (l. a 2. ábrát): $OP+OR=OP+PQ=OQ$. Az ebből levonható szabály egyszerűen az, hogy a hozzáadandó vonaldarabot oly helyzetbe hozzuk, melynél kezdőpontja az első sorban adott vonaldarab végpontjával összeesik. Ekkor helyzete teljesen meg van adva, mert iránya ismeretes. Az így keletkező tört vonal kezdő és végpontjának összekötése adja a keresett összeget.

Minthogy $AB+BA=0$, az AB levonása és BA hozzáadása ugyanazon eredményhez vezet és így p. $OQ-OP=OQ+PO=$ $=OQ+QR=OR$.

Ha $P_1, P_2 \ldots P_k$ egy tetszőleges polygon egymásután következő szögpontjai, akkor

$$P_1P_2+P_2P_3+\ldots+P_{k-1}P_k=P_1P_k,$$

hol AB mindig az A és B pontokat összekötő vonaldarabot jelenti hosszára és irányára nézve.

90. *Ha A és B a sík két pontja és a, b az ezeknek megfelelő számok, akkor minden az AB vonaldarabban fekvő pontnak megfelelő szám alakja $a+\vartheta(b-a)$, hol ϑ valami 0 és 1 közt fekvő pozitiv szám és megfordítva ϑ alatt ily számot értve, minden $a+\vartheta(b-a)$ alakú számnak egy az AB vonalon A és B közt fekvő pont felel meg.*

Ha $a=a_1+a_2i$ és $b=b_1+b_2i$, tehát az A és B pont koordinátái a_1, a_2 illetőleg b_1, b_2 akkor ama P pont koordinátái, mely az AB vonaldarabban fekszik és melyre nézve például $AP:PB=1:\lambda$, az analitikai geometria elemei szerint lesznek:

$$\frac{b_1+\lambda a_1}{1+\lambda}, \quad \frac{b_2+\lambda a_2}{1+\lambda}$$

melyek még így is írhatók:

$$a_1 + \frac{1}{1+\lambda}(b_1 - a_1)\,,\ a_2 + \frac{1}{1+\lambda}(b_2 - a_2)$$

és így a P-nek megfelelő szám valóban $a + \vartheta(b - a)$ alakú, mert $\frac{1}{1+\lambda}$ egynél kisebb pozitiv szám, a λ szükségképen pozitiv lévén. (AP és PB-nek ugyanis iránya az AB egyenesen egyenlő, épen mert P az A és B *közt* fekszik).

Megfordítva az $a + \vartheta(b - a)$ szám azt a pontot adja, melynek koordinátái:

$$a_1 + \vartheta(b_1 - a_1)\,,\ a_2 + \vartheta(b - a_2).$$

Ha λ-t az

$$\frac{1}{1+\lambda} = \vartheta$$

egyenletből meghatározzuk, lesz

$$\lambda = \frac{1-\vartheta}{\vartheta},$$

és így, minthogy $0 < \vartheta < 1$, λ mindig pozitiv. A P pont koordinátái tehát

$$\frac{b_1+\lambda a_1}{1+\lambda}\,,\ \frac{b_2+\lambda a_2}{1+\lambda}\,,$$

és ez nem más, mint azon az AB vonaldarabon, A és B közt fekvő pont, melyre nézve $AP : PB = 1 : \lambda$.

A complex számok trigonometrikus alakja.

91. Minden complex szám, $p = p_1 + p_2 i$, mint már láttuk, szorzatalakban:

$$(p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p_1}{(p_1^2+p_2^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{p_2}{(p_1^2+p_2^2)^{\frac{1}{2}}}\, i\right)$$

írható. A második tényező szintén meghatározott műveletek által egy számból állítható elé. A

$$\cos.\ \varphi = \frac{p_1}{(p_1^2+p_2^2)^{\frac{1}{2}}}\,,$$

$$\sin.\ \varphi = \frac{p_2}{(p_1^2+p_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

egyenletek ugyanis, minthogy a jobboldalon álló kifejezések négyzeteinek összege nem más mint egy, mindig megoldhatók es ha például a

$$0 < \varphi < 2\pi$$

föltételnek megfelelő megoldás α, minden

$$\alpha + 2k\pi$$

alakú érték, hol k tetszőleges egész szám, szintén amaz egyenletek megoldása.

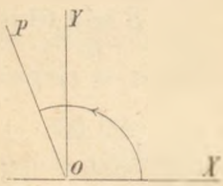
Minden complex szám $p_1 + p_2 i$ tehát

$$r(\cos.\varphi + i \sin.\varphi)$$

alakban is irható, hol az r és φ számok még a következő föltételeknek alávethetők:

$$r > 0\,,\; 2k\pi \leq \varphi < 2(k+1)\pi\,.$$

Itt r nem más mint az ú. n. absolut érték, mely a geometriai ábrázolásban az OP vonal hosszát adja, tekintet nélkül az irányra; $\cos.\varphi + i \sin.\varphi$ pedig az úgy nevezett *iránytényező*, mely a benne foglalt φ *argumentum* által megadja az OP irányát, még pedig azon szög absolut mérőszáma által, melyet ez az OX vonallal bezár. E szög úgy lesz mérendő, hogy OX és OY derékszöget zárjon be, tehát az OX az OY felé forog, vagy — a mint ezt szokás kifejezni — az óramutatóéval ellenkező irány veendő pozitivnak.



3. ábra.

Ha a p szám vagy P pont meghatározására szolgáló p_1, p_2 számadatokat fölcseréljük az r, φ számadatokkal, ez geometriailag annyit tesz, hogy a Descartes-féle derékszögű koordinátáktól átmegyünk polár-koordinátákhoz. Ez az átmenet adva van egyrészt a

$$p_1 = r \cos.\varphi\,,\; p_2 = r \sin.\varphi \qquad (1.)$$

egyenletek által, másrészt ezeknek r és φ szerinti megoldása által.

Az (1.) egyenletek négyzetre emelése és összeadása visszavezet a már ismeretes

$$r = (p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

eredményhez; a mi pedig a φ definitiv előállítását illeti, a φ értékei mindenesetre az

$$\left(\text{arc. tg. } \frac{p_2}{p_1}\right) + k\pi$$

értékek közt foglaltatnak, de úgy, hogy a k-nak vagy csak páros vagy csak páratlan számnak szabad lennie, a mint t. i.

$$\left(\text{arc. tg. } \frac{p_2}{p_1}\right) \text{ vagy } \left(\text{arc. tg. } \frac{p_2}{p_1}\right) + \pi$$

helyes érték. Ezt azonban könnyű eldönteni. T. i. a zárjelbe zárt érték előbbi megállapításaink szerint $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt fekszik; és így az első helyes, ha φ «az első vagy negyedik quadránsban» fekszik, azaz ha p_1 pozitiv előjelű, az ellenkező esetben a második alak választandó.

Hogy ezt képletben kifejezhessük vezessük be a

$$\text{sgn. } a = \frac{a}{|a|}$$

jelzést. (Signum a). Valós számoknál tehát sgn. a vagy $+1$ vagy -1, a mint a pozitiv vagy negativ. Akkor a választandó érték mindig kifejezhető

$$\left(\text{arc. tg. } \frac{p_1}{p_2}\right) + \frac{1 - \text{sgn } p_1}{2} \pi$$

által és így végre az (1.) egyenletekből:

$$\varphi = \left(\text{arc. tg. } \frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{1 - \text{sgn. } p_1}{2} \pi + 2k\pi.$$

A dolog alapvető jelentősége miatt még egyszer hangsúlyozzuk, hogy midőn a $p_1 + p_2 i$ számot «trigonometrikus» alakban irjuk: r (cos. $\varphi + i$ sin. φ), az argumentum φ végtelen sok értéke választható. Ha egyéb megállapítás vagy a számítás folytatólagos menete ezt megengedi, akkor legyen mindig a φ értéke a 2π-nél kisebb pozitiv szám vagy 0. Ha a complex számból valós lesz, az argumentum 0 vagy π, a mint t. i. a szám pozitiv vagy negativ.

92. *Két complex szám szorzata* a trigonometrikus alakban új és igen egyszerű szabály szerint képezhető. Ha t. i. e számok:

$$u_1 = r_1 (\text{cos. } \varphi_1 + i \text{ sin. } \varphi_1), \quad u_2 = r_2 (\text{cos. } \varphi_2 + i \text{ sin. } \varphi_2),$$

akkor

$$u_1 u_2 = r_1 r_2 \Big[\cos.\ \varphi_1 \cos.\ \varphi_2 - \sin.\ \varphi_1 \sin.\ \varphi_2 +$$

$$+ i\,(\sin.\ \varphi_1 \cos.\ \varphi_2 + \sin.\ \varphi_2 + \cos.\ \varphi_1)\Big]$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos.\ \overline{\varphi_1 + \varphi_2} + i \sin.\ \overline{\varphi_1 + \varphi_2}\right)$$

A szorzat tehát ismét hasonló alakban van adva, melyben az absolut érték a szorzók absolut értékeinek szorzata és az argumentum a szorzók argumentumainak összege.

Ha ép úgy mint előbb az OP és OQ vonalok összeadásáról, most OP és OQ «szorzásáról» beszélünk, ez alatt ama geometriai szerkesztést értjük, melynél először meghagyva OP irányát, hosszát az $1:r$ arányban nagyobbítjuk, és azután az így keletkező vonaldarabot O körül φ szöggel forgatjuk. (Itt r és φ az OQ-nak megfelelő $r\,(\cos.\ \varphi + i \sin.\ \varphi)$ complex számból van adva. A forgás pozitiv iránya pedig ismét az, melyben a pozitiv OX először a pozitiv OY irányba megy át, vagyis a rajzban az óramutató irányával ellenkező). Ez ismét a szorzási művelet geometriai ábrázolását adja.

A complex számoknak *osztása* a trigonometrikus alakban a

$$\frac{r_1\,(\cos.\ \varphi_1 + i \sin.\ \varphi_1)}{r_2\,(\cos.\ \varphi_2 + i \sin.\ \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos.\ \overline{\varphi_1 - \varphi_2} + i \sin.\ \overline{\varphi_1 - \varphi_2}\right)$$

képlet szerint történik; mert

$$(\cos.\ \varphi_2 + i \sin.\ \varphi_2)\,\big(\cos.\ (-\varphi_2) + i \sin.\ (-\varphi_2)\big) = 1.$$

Akárhány szorzó szorzata hasonló szabály szerint képezhető. Ha e szorzók

$$u_k = r_k\,(\cos.\ \varphi_k + i \sin.\ \varphi_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

akkor egymásután $u_1 u_2$, $u_1 u_2 u_3$-at képezve s. ú. t., lesz végre:

$$u_1 u_2 \ldots u_n = r_1 r_2 \ldots r_n \left(\cos.\ \overline{\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n} + i \sin.\ \overline{\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n}\right).$$

Ha e képletben végre a szorzókat mind egyenlőknek veszszük:

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n,$$

(ha t. i. minden φ-t először $2k\pi$ hozzáadása által a 0 és 2π határok közé hozzuk) akkor az úgynevezett Moivre-*féle képletet* nyerjük, mely a complex számoknak egész kitevőjű hatványát adja a trigonometrikus alakban, t. i.

$$[r(\cos.\varphi + i\sin.\varphi)]^n = r^n(\cos.n\varphi + i\sin.n\varphi).$$

A képlet levezetésénél fogva csak pozitiv egész n-re érvényes, mert n mint szorzók száma lépett föl. Közvetetlenül meggyőződhetünk arról, hogy negativ egész kitevőnél is érvényes. Mert:

$$[r(\cos.\varphi + i\sin.\varphi)]^{-n} = r^{-n}\frac{1}{(\cos.n\varphi + i\sin.n\varphi)}$$

$$= r^{-n}\left(\cos.(-n\varphi) + i\sin.(-n\varphi)\right).$$

Ha pedig $n = 0$, mindkét oldalon az 1 áll; a Moivre-féle képlet tehát minden egész n-re érvényes.

93. A megelőzők alapján *mindig lehet oly számot meghatározni, melynek n-edik hatványa egyenlő egy adott*

$$A = r(\cos.\varphi + i\sin.\varphi)$$

szám m-edik hatványával, (m és n alatt pozitiv egész számokat értve). T. i. közvetetlenül látni, hogy

$$r^{\frac{m}{n}}\left(\cos.\frac{m\varphi}{n} + i\sin.\frac{m\varphi}{n}\right) \tag{a.}$$

ily szám, mert n-edik hatványa valóban: $r^m(\cos.m\varphi + i\sin.m\varphi) = A^m$.

De e szám képezése nem független a φ választásától. P. a legegyszerűbb esetben, ha $m = 1$, $n = 2$ a φ-t fölcserélve $\varphi + 2\pi$-vel,

$$r^{\frac{1}{2}}(\cos.\tfrac{1}{2}\varphi + i\sin.\tfrac{1}{2}\varphi)$$

helyett ezt nyerjük:

$$r^{\frac{1}{2}}(\cos.(\tfrac{1}{2}\varphi + \pi) + i\sin.(\tfrac{1}{2}\varphi + \pi)) = r^{\frac{1}{2}}(\cos.\tfrac{1}{2}\varphi + i\sin.\tfrac{1}{2}\varphi)(\cos.\pi + i\sin.\pi)$$

$$= -r^{\frac{1}{2}}(\cos.\tfrac{1}{2}\varphi + i\sin.\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Ez kapcsolatban van avval, hogy a $\sqrt[n]{A^m}$ többértelmű jel által adott számcsoportból nem birunk tetszőleges A esetében egyet kiválasztani úgy, hogy ez $A^{\frac{m}{n}}$-el jelölve a hatványozás törvényeit pontosan követné. Ha p.

$A^{\frac{m}{n}}$-et úgy állapítjuk meg, hogy az (a.) alatt álló érték legyen és benne φ a 2π-nél kisebb pozitiv szám vagy 0, akkor p. $A = \cos. \frac{3\pi}{2} + i \sin. \frac{3\pi}{2}$ esetében:

$$(A^2)^{\frac{1}{2}} = (\cos. \pi + i \sin. \pi)^{\frac{1}{2}} = \cos. \frac{\pi}{2} + i \sin. \frac{\pi}{2}$$

nem volna $A^{\frac{2}{2}} = A$, hanem $\sqrt{A^2}$ másik értéke: $-A$.

A hatvány egyértékü értelmezése, ha az A alap nem pozitiv, még egész másnemű megállapitásokat követel, melyekre később visszatérünk, de a régibb kézikönyvek azon állítása, hogy a Moivre-féle tétel tört kitevőkre is helyes, minden értelmet nélkülöz, mert nincs is megmondva, hogy nem pozitiv A esetében $A^{\frac{m}{n}}$ micsoda számot jelent. Az illető fejtegetésben csak annyi igaz, hogy — mint e czikk elején kifejtettük — az $\sqrt[n]{A^m}$ egyik értéke mindig az (a) kifejezés által van adva.

III.

A gyökkivonás általános elmélete.

Az n-edik gyök értékei.

94. A complex számok körében a gyökkivonás föladata minden számra nézve megoldható és kivételt nem szenvedő általános törvényekhez vezet. Első sorban *a pozitiv egység n-ik gyökeit* vizsgáljuk.

Ama számok, melyeknek n-edik hatványa 1, és melyeknek csoportját $\sqrt[n]{1}$-gyel jelöljük, az

$$x^n = 1$$

egyenlet megoldásai, és megforditva minden gyöke ezen egyenletnek a követelt sajátságot mutatja. Ha

$$x = r\,(\cos. \varphi + i \sin. \varphi),$$

a föladat oly pozitiv r, és oly 2π-nél kisebb, és nem negativ φ meghatározását követeli, melyre nézve

$$r^n\,(\cos. n\varphi + i \sin. n\varphi) = 1,$$

vagyis, ha a valós és képzetes részeket, melyek külön-külön egyenlők tartoznak lenni, külön irjuk:

$$r^n \cos. n\varphi = 1$$

$$r^n \sin. n\varphi = 0.$$

Ebből mindenekelőtt, ha négyzetre emelünk és összeadunk:

$$r^{2n} = 1,$$

vagyis minthogy r pozitiv:

$$r = 1.$$

Ezután a φ meghatározására lesz:

$$\cos. n\varphi = 1, \quad n\varphi = 0,$$

mely egyenletek általános megoldása:

$$n\varphi = 2k\pi, \quad \varphi = \frac{2k\pi}{n},$$

hol k tetszőleges egész szám. Hogy azonban $0 \leq \varphi < 2\pi$ legyen, k-nak csak a következő értékeket szabad adnunk:

$$0, 1, 2, \ldots n-2, n-1.$$

E szerint az $x^n = 1$ egyenlet gyökei, vagyis az egység n-edik gyökének értékei:

$$\alpha_k = \cos. \frac{2k\pi}{n} + i \sin. \frac{2k\pi}{n}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

n számból álló értékcsoport.

Közvetetlenül látni, hogy α_l, bármi egész szám is l, az egység n-edik gyöke, de nem új érték, hanem a fölsoroltak közt található. T. i. l mindig az n két egymásután következő többszöröse között fekszik, úgy hogy:

$$qn \leq l < (q+1)n$$

vagyis

$$l = qn + k \qquad (k = 0, 1, \ldots n-1).$$

E szerint pedig:

$$\alpha_l = \cos. \left(2q\pi + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin. \left(2q\pi + \frac{2k\pi}{n}\right) = \alpha_k.$$

Az $\sqrt[n]{1}$ értékcsoportjából a valós számokat nyerjük a k oly választásánál, melyre nézve $\sin. \frac{2k\pi}{n} = 0$. Ilyen mindenekelőtt $k=0$, melynek megfelel $\alpha_0 = 1$, az n kitevő minden értékénél.

Minthogy $\frac{2k\pi}{n} < 2\pi$, a sinus még csak akkor lehet 0, ha $\frac{2k}{n} = 1$, vagyis ha $k = \frac{n}{2}$; de k-nak egész számnak kell lennie; tehát csak midőn a kitevő páros szám, találunk még egy valós gyököt:

$$\alpha_{\frac{n}{2}} = \cos. \pi + i \sin. \pi = -1.$$

A többi — complex — gyök száma páros: t. i. páratlan n-nél $n-1$, páros n-nél $n-2$. Közvetetlenül látni, hogy kettő-kettő mindig conjugált érték. T. i.

$$\alpha_{n-k} = \cos. \frac{2(n-k)\pi}{n} + i \sin. \frac{2(n-k)\pi}{n} =$$

$$= \cos. \frac{2k\pi}{n} - i \sin. \frac{2k\pi}{n}$$

az α_k conjugált értéke.

Csak ha $n-k=k$, azaz ha $k = \frac{n}{2}$, és n páros szám, vagy ha $k=0$, esik össze a két conjugált érték, a mi visszavezet a valós értékekhez.

Az $x^3 - 1 = 0$ egyenlet így is irható:

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0;$$

és minthogy szorzat csak úgy lehet zérus, ha egyik tényezője zérus, közvetetlenül látni, hogy az egység complex köbgyökei:

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

t. i. az $x^2 + x + 1 = 0$ egyenlet gyökei, a miből egyszersmind:

$$\cos. \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin. \frac{2\pi}{3} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

95. Az $\sqrt[n]{A}$ értékcsoportját, vagyis az

$$x^n = A$$

egyenlet gyökeit a megelőzők segítségével könnyen képezhetjük. Ha

$$A = r(\cos. \varphi + i \sin. \varphi)$$

az A részletes alakja, akkor egy megfelelő értéket mindjárt föl-irhatunk. Ez:

$$\xi_0 = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos. \frac{\varphi}{m} + i \sin. \frac{\varphi}{m}\right).$$

Ebből a többi keresett érték könnyen levezethető. Ha t. i. x bármely szám, melynek n-ik hatványa A, akkor minthogy szintén $\xi_0^n = A$, mindig:

$$\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^n = 1$$

és igy $\frac{x}{\xi_0}$ az egység bármely n-edik gyöke lehet. Tehát végre az $x^n = A$ egyenlet megoldásai, vagy az $\sqrt[n]{A}$ értékei:

$$\xi_0, \xi_0 \alpha_1, \ldots \xi_0 \alpha_{n-2}, \xi_0 \alpha_{n-1},$$

melyek még ξ_0 és α_k értékeinek részletes alakját tekintetbe véve, következőképen is irhatók:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos. \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin. \frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots n-1).$$

Megjegyzendő, hogy A nem határozta meg teljesen a φ-t, hanem ez még ama mellékföltételnek megfelelőleg választható, hogy

$$2l\pi \leqq \varphi < 2(l+1)\pi$$

legyen; ξ_0 tehát az $\sqrt[n]{A}$ bármelyik értékét jelentheti, melyből azután, az egységgyökökkel szorozva, a többieket nyerjük.

A többiek között φ az $A = r(\cos. \varphi + i \sin. \varphi)$ alakjában úgy is választható, hogy:

$$-\pi \leqq \varphi < \pi.$$

Az e választásnak megfelelő ξ_0 értékében, minthogy $n \geqq 2$, a valós rész mindig pozitiv. Az ily módon meghatározott ξ_0 értékét ismét az $\sqrt[n]{A}$ *főértékének* nevezzük és $(\sqrt[n]{A})$-val jelöljük. Pozitiv A esetében ez nem más, mint $A^{\frac{1}{n}}$. (L. a 93. czikk jegyzetét).

Az $\sqrt[n]{1}$ értékcsoportjából a valós számokat nyerjük a k oly választásánál, melyre nézve sin. $\frac{2k\pi}{n} = 0$. Ilyen mindenekelőtt $k=0$, melynek megfelel $\alpha_0 = 1$, az n kitevő minden értékénél.

Minthogy $\frac{2k\pi}{n} < 2\pi$, a sinus még csak akkor lehet 0, ha $\frac{2k}{n} = 1$, vagyis ha $k = \frac{n}{2}$; de k-nak egész számnak kell lennie; tehát csak midőn a kitevő páros szám, találunk még egy valós gyököt:

$$\alpha_{\frac{n}{2}} = \cos.\, \pi + i \sin.\, \pi = -1.$$

A többi — complex — gyök száma páros: t. i. páratlan n-nél $n-1$, páros n-nél $n-2$. Közvetetlenül látni, hogy kettő-kettő mindig conjugált érték. T. i.

$$\alpha_{n-k} = \cos.\, \frac{2(n-k)\pi}{n} + i \sin.\, \frac{2(n-k)\pi}{n} =$$

$$= \cos.\, \frac{2k\pi}{n} - i \sin.\, \frac{2k\pi}{n}$$

az α_k conjugált értéke.

Csak ha $n - k = k$, azaz ha $k = \frac{n}{2}$, és n páros szám, vagy ha $k = 0$, esik össze a két conjugált érték, a mi visszavezet a valós értékekhez.

Az $x^3 - 1 = 0$ egyenlet így is irható:

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0;$$

és minthogy szorzat csak úgy lehet zérus, ha egyik tényezője zérus, közvetetlenül látni, hogy az egység complex köbgyökei:

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

t. i. az $x^2 + x + 1 = 0$ egyenlet gyökei, a miből egyszersmind:

$$\cos.\, \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin.\, \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

95. Az $\sqrt[n]{A}$ értékcsoportját, vagyis az

$$x^n = A$$

egyenlet gyökeit a megelőzők segítségével könnyen képezhetjük. Ha

$$A = r\,(\cos.\, \varphi + i \sin.\, \varphi)$$

az A részletes alakja, akkor egy megfelelő értéket mindjárt föl-irhatunk. Ez:

$$\xi_0 = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos.\frac{\varphi}{m} + i\sin.\frac{\varphi}{m}\right).$$

Ebből a többi keresett érték könnyen levezethető. Ha t. i. x bármely szám, melynek n-ik hatványa A, akkor minthogy szintén $\xi_0^n = A$, mindig:

$$\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^n = 1$$

és igy $\frac{x}{\xi_0}$ az egység bármely n-edik gyöke lehet. Tehát végre az $x^n = A$ egyenlet megoldásai, vagy az $\sqrt[n]{A}$ értékei:

$$\xi_0,\ \xi_0\alpha_1, \dots \xi_0\alpha_{n-2},\ \xi_0\alpha_{n-1},$$

melyek még ξ_0 és α_k értékeinek részletes alakját tekintetbe véve, következőképen is irhatók:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos.\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin.\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \dots n-1).$$

Megjegyzendő, hogy A nem határozta meg teljesen a φ-t, hanem ez még ama mellékfoltételnek megfelelőleg választható, hogy

$$2l\pi \leq \varphi < 2(l+1)\pi$$

legyen; ξ_0 tehát az $\sqrt[n]{A}$ bármelyik értékét jelentheti, melyből azután, az egységgyökökkel szorozva, a többieket nyerjük.

A többiek között φ az $A = r(\cos.\varphi + i\sin.\varphi)$ alakjában úgy is választható, hogy:

$$-\pi \leq \varphi < \pi.$$

Az e választásnak megfelelő ξ_0 értékében, minthogy $n \geq 2$, a valós rész mindig pozitiv. Az ily módon meghatározott ξ_0 értékét ismét az $\sqrt[n]{A}$ *főértékének* nevezzük és $(\sqrt[n]{A})$-val jelöljük. Pozitiv A esetében ez nem más, mint $A^{\frac{1}{n}}$. (L. a 93. czikk jegyzetét).

Az egység gyökeinek tulajdonságai.

96. Ha α_k az egység valamelyik n-edik gyöke, t. i.

$$\alpha_k = \cos.\frac{2k\pi}{n} + i\sin.\frac{2k\pi}{n},$$

és d a legkisebb pozitiv egész szám, melyre nézve $\alpha_k^d = 1$, akkor azt mondjuk, hogy α_k a d *kitevőhez tartozik.*

Adott egységgyöknél könnyen meghatározhatjuk azt a kitevőt, melyhez tartozik. Hogy t. i.

$$\alpha_k^d = \cos.\frac{2kd\pi}{n} + i\sin.\frac{2kd\pi}{n} = 1$$

legyen, arra kell, hogy $\frac{kd}{n}$-nek egész számú értéke legyen. Vagyis továbbá, ha k és n legnagyobb közös osztója δ, tehát:

$$k = k'\delta,\ n = n'\delta,$$

$\frac{k'd}{n'}$ is egész szám, de itt k' és n' már relativ törzsszám, és így végre kell, hogy d osztható legyen n'-nel; a legkisebb pozitiv egész szám, mely e föltételnek eleget tesz, n' maga, és így tehát:

Ha k és n legnagyobb közös osztója δ, akkor α_k az $\frac{n}{\delta}$ kitevőhöz tartozik.

Minthogy az összes n-edik egységgyököket nyerjük, ha k fölvesz minden egész számu értéket 0-tól $n - 1$-ig, vagy — a mi ugyanazt az eredményt adja — egytől n-ig, látni, hogy n-nek bármely osztója legyen is d, mindig van oly egységgyök, mely a d kitevőhez tartozik, még pedig számra nézve $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$, mert a fölsorolt egész számok közt ennyi van, melynek legnagyobb, n-nel közös osztója d.

E szerint az egység n-edik gyökei közt $\varphi(n)$ van, mely magához az n kitevőhez tartozik. Ezeket *primitiv egységgyököknek* nevezzük.

97. Ha α az egység n-edik gyöke, közvetetlenül látni, hogy ennek minden hatványa is ilyen. Mert

$$(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r = 1.$$

Ha α a d kitevőhez tartozik, akkor

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{d-1}$$

csupa különböző n-edik egységgyök. Hogy e számok mindannyian ilyenek, az előbbiekből világos. Ha a $0, 1, \ldots d-1$ sorozatban most már r és s, hol $s > r$, két oly egész szám, melyre nézve

$$\alpha^s = \alpha^r,$$

akkor $\alpha^{s-r} = 1$ volna. De $s-r$ nem lehet nagyobb $d-1$-nél és így a d-nél kisebb kitevőjű hatványa α-nak 1 volna, a mi a föltevéssel ellenkezik.

Ha jelesen α primitiv gyök, akkor e sorozat:

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-2}, \alpha^{n-1}$$

n különböző n-edik egységgyököt, tehát *az összes n-edik egységgyököket* adja.

Minthogy pedig, ha α nem 1:

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = 0$$

az n-edik egységgyökök összege 0, a mit röviden így irunk:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha_k = 0.$$

Hasonlóképen lesz, ha α ismét primitiv gyök, és r *nem többszöröse az n-nek*:

$$1 + \alpha^r + \alpha^{2r} + \ldots + \alpha^{(n-1)r} = \frac{1-\alpha^{rn}}{1-\alpha^r} = 0,$$

vagyis:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha_k^r = 0;$$

míg, *ha r az n többszöröse,* amaz összeg minden tagja 1, és így ebben az esetben:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha_k^r = n.$$

98. *Ha m és n legnagyobb közös osztója d, az*

$$\alpha^m = 1 \text{ és } \alpha^n = 1$$

egyenlet közös gyökei, vagyis ama számok, melyek mindkét egyenlet *gyökei, meg vannak adva, mint az*

$$a^d = 1$$

egyenlet gyökei.

Ekkor t. i. lehet két egész számot r-et és s-et meghatározni úgy, hogy

$$mr + ns = d$$

legyen. És ha a valóban ama két egyenlet mindegyikének gyöke, akkor egyszersmind:

$$(a^m)^r\,(a^n)^s = a^d = 1.$$

Hogy megfordítva az $a^d = 1$ egyenlet minden gyöke egyszersmind kielégíti ama két egyenletet, az közvetetlenül világos.

IV.

Algebrai és transcendens számok.

Az algebrai számok összessége.

99. *Algebrai számnak nevezünk minden oly számot, mely egész számú együtthatókkal képezett n-edfokú algebrai egyenletnek gyöke.*

Az algebrai számok összessége megszámlálható.

Mindenekelőtt világos, hogy minden algebrai szám, mint végtelen sok algebrai egyenlet gyöke szerepelhet. Ha ugyanis amaz algebrai szám az $f(x) = 0$ egyenlet gyöke és $g(x) = 0$ bármicsoda algebrai egyenlet, az

$$f(x)\,g(x) = 0$$

egyenlet szintén olyan, mely amaz algebrai számot mint gyököt tartalmazza; mert a szorzat eltünik, ha egyik tényezője 0.

Minthogy az algebrai egyenlet fokszáma nem sülyedhet 1 alá, amaz egyenletek közt, melyeknek gyöke a vizsgált szám, mindendenesetre vannak olyanok, melyeknek foka a lehető legalacsonyabb. *Ha még továbbá követeljük, hogy ezen lehető alacsony fokú egyenletnek összes együtthatói ne tartalmazzanak közös osztót, és hogy továbbá a legmagasabb együttható pozitiv legyen, akkor mindig egy és csak ily egyenlet létezik.* Ha t. i. ugyanaz a szám eleget tenne az

$$A_0x^\nu + A_1x^{\nu-1} + \ldots + A_{\nu-1}x + A_\nu = 0$$

$$B_0x^\nu + B_1x^{\nu-1} + \ldots + B_{\nu-1}x + B_\nu = 0$$

egyenleteknek, akkor föltevéseink szerint sem A_0 sem B_0 nem lehet 0, mert különben ama szám már egy $\nu-1$-edfokú egyenletnek is gyöke volna. De ha most az első egyenletben B_0, a második egyenletben A_0-al szorzunk, e szám még eleget tenne a

$$(B_0A_1 - A_0B_1)x^{\nu-1} + \ldots + (B_0A_{\nu-1} - A_0B_{\nu-1})x + B_0A_\nu - A_0B_\nu = 0$$

$\nu-1$-edfokú egyenletnek, a mi föltevéseinkkel ellenkezik. Ez az utolsó alak nem is szolgálhat tehát gyökök meghatározására, a mi csak úgy lehetséges, ha minden együttható zérus, azaz:

$$B_0A_i = A_0B_i, \quad (i = 1, 2, \ldots \nu).$$

Ha tehát A_0 és B_0 legnagyobb közös osztója D, akkor

$$\frac{B_0}{D}A_i = \frac{A_0}{D}B_i,$$

és minthogy $\frac{B_0}{D}$ és $\frac{A_0}{D}$ relativ törzsszámok, A_i osztható $\frac{A_0}{D}$-vel és hasonlókép B_i osztható $\frac{B_0}{D}$-vel, azaz az első egyenlet minden együtthatója osztható $\frac{A_0}{D}$-vel, a második egyenlet minden együtthatója $\frac{B_0}{D}$-vel.

De ily közös osztó nincs, kell tehát, hogy $\frac{A_0}{D}$ és $\frac{B_0}{D}$ egyenlő legyen 1-gyel. (-1 esete nem fordulhat elő, mert A_0 és B_0 pozitiv, és a legnagyobb közös osztót D-t is pozitivnak veszszük). Tehát:

$$A_0 = B_0 = D$$

és ebből

$$A_i = B_i \quad (i = 1, 2 \ldots \nu)$$

azaz a két különbözőnek fölvett egyenlet teljesen azonos.

100. *Bármely algebrai egyenletben a gyökök száma soha sem lehet nagyobb az egyenlet fokánál.* Ezen állítás közelebbi meghatározása, mely szerint az (egyenlő vagy különböző) gyökök száma mindig egyenlő a fokszámmal, az egész függvények részletes elméletében lép föl.

bizonyos sorszám, n és megfordítva. De e föltevésből is az következik majd, hogy — vele ellentétben — két tetszőlegesen választott valós szám α és β közt, mindig van oly valós szám, mely ama sorozatban nem fordúl elő. A föltevés tehát lehetetlen.

Ha p. $\alpha < \beta$, keressük ki az u- sorozatban az első számokat α' és β'-t, melyek α és β közt feküsznek. Ha ismét $\alpha' < \beta'$, akkor megállapítjuk az első számokat az u sorozatban, melyek α' és β' közt feküsznek. Ezek legyenek α'' és β'', hol ismét $\alpha'' < \beta''$. És u. t.

E folyamat esetleg megakadhat a p-edik ismétlésnél, úgy hogy $\alpha^{(p)}$ és $\beta^{(p)}$ közt az u sorozatnak vagy csak egy száma (ω) foglaltatik, vagy egy sem. De $\alpha^{(p)}$ és ω, valamint ω és $\beta^{(p)}$ vagy a második esetben $\alpha^{(p)}$ és $\beta^{(p)}$ közt, mindenesetre vannak valós számok, melyek tehát nem volnának az u- sorozatban föllelhetők. Tehát az előbb leirt folyamatnak vég nélkül ismételhetőnek kell lennie. Ekkor az

$$\alpha, \alpha', \ldots \alpha^{(p)}, \ldots$$

$$\beta, \beta' \ldots \beta^{(p)}, \ldots$$

mindig folytatható számsorozatokat nyerjük, még pedig az elsőnek számai, a képezési törvény értelmében, mindig nagyobbodnak, de β-nál kisebbek maradnak; a második sorozatban foglalt számok ellenben folyton kisebbednek, de úgy, hogy e mellett mindig α-nál nagyobbak maradnak. Minden egyes számsorozatnak van tehát határértéke. Legyen

$$A = \lim. \alpha_n, \quad B = \lim. \beta_n.$$

De ekkor ismét sem A, sem B nem foglaltathatik az u- sorozatban. Az ellenkező esetben p. A a sorozatnak egy bizonyos, mondjuk q-adik tagja volna, azaz u_q; de u_q semmiesetre sem fekszik $\alpha^{(q)}$ és $\beta^{(q)}$ közt. Mert az α, β számok képezésénél, ha előbb nem mindenesetre a q-adik ismétlésnél fölhasználjuk u_q-t is és így u_q az

$$\alpha', \ldots \alpha^{(q)}; \beta', \ldots \beta^{(q)}$$

számok egyike és valóban nem fekszik $\alpha^{(q)}$ és $\beta^{(q)}$ közt. Ellenben A mindenesetre $\alpha^{(q)}$ és $\beta^{(q)}$ közt fekszik, és így nem lehet semmiféle u_q szám. Tehát valóban van mindig az u-sorozaton kivül új valós szám, vagy mint a tételt még fogalmazhatjuk :

A valós számoknak bármely megszámlálható sokasága soha sem meríti ki a valós számok összességét; hanem bármelyik $\alpha \ldots \beta$ számközben vannak oly valós számok, melyek nem tagjai ama megszámlálható sokaságnak.

Minthogy a complex számok összessége a valós számok összességét, mint részt magában foglalja, világos hogy ép *ily tétel a complex számok összességére is érvényes.* Mert ha ez megszámlálható volna, a nem valós számok kihagyása után is ilyen maradna, a mi az előbbiek szerint nem lehetséges.

Minden oly szám, mely nem algebrai, *transcendens* szám. Az előbbiekből az is következik, hogy *transcendens számok csakugyan léteznek, még pedig már a valós számok sorában.* Mert az ellenkező esetben minden valós szám algebrai volna, és így a valós számok összessége megszámlálható sokaság volna, a mi az előbbiek szerint nem helyes.

Általános módszereink, annak megitélésére, vajjon egy adott szám algebrai-e vagy transcendens, nincsenek. Hogy az eddigiekben e és π-vel jelölt számok nem algebrai számok, csak legújabban bizonyították be az elsőre nézve HERMITE,* a másodikra nézve LINDEMANN.**

* «Sur la fonction exponentielle.» Comptes rendus, T. LXXVII. 1873.

** «Über die Zahl π.» Mathematische Annalen, Bd. XX, 1882.

NEGYEDIK SZAKASZ.

VÉGTELEN MŰVELETSOROZATOK.*

I.

Végtelen sorok általános elmélete.

Végtelen sor. — Összetartás.

103. Legyen adva a számok egy bizonyos sorozata:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$$

mely valami megadott általános törvény értelmében határtalanul folytatható és melyben n az u_n tagnak mutatója vagy indexe. *Ekkor az*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.}$$

végtelen sor alakja jelenti az e sorban foglalt n első tag összegének határértékét, (ha n a pozitiv egész számok során keresztül minden határon túl növekszik), vagyis a következő számértéket:

$$\lim. (u_1 + u_2 + \ldots + u_n). \tag{2.}$$

E sor rövidített** jele: $\sum\limits_0^{\infty} u_n$; az n-edik tag, u_n az ú. n. *álta-*

* A tárgy szigorú elméletének alapját adták.

Cauchy, Cours d'analyse algébrique, Paris, 1821.

Abel, Recherches sur la série binomiale, Crelle, Journal, 1. köt. (Oeuvres complètes, Tome I.)

** Általánosságban (k és l egész számok)

$$\sum_k^l {}_n u_n$$

jelenti mindama számok összegét, melyeket u_n-ből nyerünk, ha n helyébe minden egész számot teszünk k-tól l-ig, e határok beleértésével. Az összegezési index, itt n, ha kétség nem forog fenn, ki is hagyható, a mint ez már a szövegben történt.

lános tag. Világos, hogy e jelnek, valamint az (1.) alatt álló részletesebben kiirt alaknak, *csak akkor van értelme, ha ama határérték véges és meghatározott, a mely esetben magát a sort összetartónak, konvergensnek mondjuk.*

Minden más esetben a sort, mely ekkor nem jelent számot, *széttartó*nak vagy *divergens*nek nevezzük.

A széttartás esetei közt külön fölemlítendő a *szorosabb értelemben vett széttartó* soroké, midőn t. i. az első n tag összegének határértéke végtelen, ilyen p. az

$$1+1+1+\ldots+1+\ldots$$

esete, a hol az első n tag összege egyenlő n-nel és $\lim. n=\infty$; továbbá:

az *ingadozó vagy oscilláló* soroké, a hol ama határérték nem meghatározott szám, de az első n tag összegének absolut értéke — bárhogyan válaszszuk is az n-et — mindig véges határ alatt marad. Ilyen p. a

$$-1+1-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$$

mely sorban $u_n=(-1)^n$; és az első n tag összege — a mint n páratlan vagy páros vagy -1 vagy 0.

Néha kényelmesebb jelzést nyerünk, ha a sor tagjainak számlálását egy *«zérusodik»* taggal kezdjük, vagyis a sort így irjuk:

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

rövidebben: $\sum\limits_0^\infty u_n$. Világos, hogy ez tisztán csak az elnevezés változtatása. Igy p. az úgynevezett *vegtelen geometriai haladvány*:

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+q^n+\ldots \tag{3.}$$

a mint q^{n-1} vagy q^n-et veszszük általános tagnak,

$$\sum_1^\infty q^{n-1} \qquad \text{vagy} \qquad \sum_0^\infty q^n$$

-nak irható.

Valamely sor összetartásának vizsgálata, mely egyszersmind a felett dönt, vajjon az illető soralaknak van-e számértelme, a (2.) alatt álló határérték vizsgálatával azonos. Igy p. *a* (3.) *alatt álló végtelen geometriai haladvány akkor és csak akkor összetartó, ha:*

$$|q|<1.$$

Ebben az esetben ugyanis az első n tag összege, hacsak nem $q=1$,

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}; \qquad (4.)$$

és minthogy $\lim. q^n=0$, ha $|q|<1$, ebben az esetben

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$$

összetartó és értéke: $\frac{1}{1-q}$.

Ha ellenben $|q|>1$, akkor $\lim. q^n=\infty$ és a sor szorosabb értelemben széttartó.

Szintúgy, ha $q=1$, a mikor a sorból az ép előbb példa gyanánt fölirt alakot nyerünk.

Ha végre $|q|=1$, de nem $q=1$, akkor q^n-nek és így (4.)-nek sincs meghatározott határértéke, tehát a sor széttartó.

Általánosságban valamely sor n első tagjának összeadása, valamint az összeg határértékének vizsgálata nem oly egyszerű, mint a most tárgyalt példánál. A tárgy nagy fontossága mellett szükséges tehát az összetartási föltételek részletes kifejtése, az összetartás — kényelmesebben kezelhető — ismertető jeleinek megállapítása.

Az összetartás általános ismertető jele.

104. Ha a vizsgálandó sor:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

és az első n tag összegét röviden S_n-nel jelöljük, úgy hogy:

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ldots S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,$$

akkor a sor összetartása fölött dönt a $\lim. S_n$ határérték, mely ismét véges és meghatározott, ha az

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

számsorozat szabályos. Ekkor $\lim. S_n$, melyet még röviden S-sel — mutató nélkül — jelölünk, a végtelen sor *értéke* vagy *összege*. Az összetartás föltétele tehát a következő: Bármicsoda pozitiv szám is δ, kell, hogy egy hozzá tartozó, pozitiv egész N-et meghatározhassunk úgy, hogy a k tetszőleges pozitiv egész számú értékénél:

$$|S_{n+k} - S_n| < \delta,$$

ha csak $n > N$. Ugyanezt rövidebben így is irhatjuk:

$$\lim_{n=\infty} (S_{n+k} - S_n) = 0,$$

hol a lim. jelnél az n-et, melyre a határátmenet vonatkozik, külön kiirjuk, mert a következőkben a k-ra vonatkozólag is történik majd határátmenet.

Az S_n és S_{n+k} jelentésénél fogva:

$$S_{n+k} - S_n = u_{n+1} + \ldots + u_{n+k},$$

nem más, mint a végtelen sor tagjainak sorozata az $n+1$-ediktől az $n+k$-adikig. Ha e tagok összegét röviden $R_{n,k}$-val jelöljük, végre az összetartási föltételt, mely — mint az eddigiekből látni — *szükséges és elegendő*, következőkép fogalmazhatjuk:

Az $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ végtelen sor akkor és csak akkor összetartó, ha a k tetszőleges pozitiv egész számú értéke mellett $\lim_{n=\infty} R_{n,k} = 0$.

Ha az adott sorból az első n tagot, hol n meghatározott pozitiv egész szám, elhagyjuk és az ez által keletkező ú. n. *maradék*, azaz az

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$$

sor értékének megitélésére szolgáló számsorozatot képezzük, ez nem más, mint:

$$R_{n,1},\ R_{n,2}, \ldots, R_{n,k}, \ldots$$

mely az S sorozattal együtt szabályos, mert:

$$R_{n,k} = S_{n+k} - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n),$$

és a levonandó meghatározott véges szám. Legyen

$$\lim_{k} R_{n,k} = R_n,$$

a hol R_n nem más, mint az eredeti sorral egyidőben összetartó maradéksor, akkor végre az összetartás általános föltételének a következő egyszerű alak adható:

Az $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ végtelen sor akkor és csak akkor összetartó, ha $\lim. R_n = 0$.

Ennek bebizonyítására ki kell mutatnunk, hogy a föltétel első alakjából mindig következik a második és a másodikból megfordítva ismét az első.

Csakugyan az, hogy $\lim_{n} R_{n,k} = 0$ annyit mond, hogy

$$|R_{n,k}| < \delta,$$

ha $n > N$, a k bármely pozitiv egész számú értékénél. Ha tehát az n-et elég nagynak veszszük, az R_n-et definiáló számsorozat minden tagjának absolut értéke kisebb mint δ, tehát egyszersmind $|R_n| < \delta$, azaz:

$$\lim. R_n = 0.$$

Megfordítva, ha $\lim. R_n = 0$, és tehát, bármicsoda pozitiv egész szám az l, egyszersmind $\lim. R_{n+l} = 0$, akkor az értelmezés alapján:

$$R_n = \lim_{k}. R_{n,k}, \; R_{n+l} = \lim_{k}. R_{n+l,k},$$

tehát

$$R_n - R_{n+l} = \lim_{k}.(R_{n,k} - R_{n+l,k}) = \lim_{k}. R_{n,l} = R_{n,l};$$

és így, ha most n-re vonatkozólag térünk át a határra, csakugyan:

$$\lim. R_{n,l} = \lim. R_n - \lim. R_{n+l} = 0$$

bármicsoda pozitiv egész szám is l.

Az összetartási föltétel most nyert alakjai közül a második inkább elméleti értékű, az első pedig az, melyet egyes sorok vizsgálatánál alkalmazunk. Amannál ugyanis a lim. jel alatt máris végtelen sor (R_n) értéke szerepel, melynek elemzése az eredeti föladattal legalább is egyenlőrangú nehézségeket támaszt.

105. Az összetartásnak egy igen egyszerű, szükséges de nem elegendő föltétele a megelőzőkből közvetetlenül leolvasható. *Valamely sor összetartására mindenesetre szükséges, hogy az általános tag határértéke,* lim. u_n *zérus legyen.*

T. i. u_n nem egyéb mint $R_{n-1,1}$; a föltétel tehát az előbb adottak sorában bennfoglaltatik.

Hogy e föltétel azonban nem elegendő, arra már aránylag igen egyszerű soralakok szolgálhatnak például. Igy az úgynevezett *har-*

monikus sor:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

széttartó daczára annak, hogy az általános tag határértéke, $\lim.\frac{1}{n}=0$. Ennél ugyanis:

$$R_{n,n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n},$$

$$R_{n,n}>n.\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

azaz $R_{n,n}$ az n minden értékénél nagyobb $\frac{1}{2}$-nél, a mi az előbb levezetett összetartási föltétellel ellenkezik.

106. *Ha*

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

folyton kisebbedő, pozitiv számok sorozata, melyekre nézve $\lim.p_n=0$, *akkor a* $(-1)^{n+1}p_n$ *általános taggal képezett sor:*

$$p_1-p_2+p_3-p_4+\ldots+(-1)^{n+1}p_n+(-1)^{n+2}p_{n+1}+\ldots$$

mindig összetartó. Ekkor ugyanis:

$$R_{n,k}=(-1)^{n+2}(p_{n+1}-p_{n+2}+p_{n+3}-\ldots+(-1)^{k-1}p_{n+k}),$$

és így:

$$|R_{n,k}|=(p_{n+1}-p_{n+2})+(p_{n+3}-p_{n+4})+\ldots+(p_{n+k-1}-p_{n+k})$$

$$=p_{n+1}-(p_{n+2}-p_{n+3})-\ldots-(p_{n+k-2}-p_{n+k-1})-p_{n+k},$$

vagy pedig:

$$|R_{n,k}|=(p_{n+1}-p_{n+2})+(p_{n+3}-p_{n+4})+\ldots+p_{n+k}$$

$$=p_{n+1}-(p_{n+2}-p_{n+3})-\ldots-(p_{n+k-1}-p_{n+k}),$$

a mint k páros vagy páratlan. De mindkét esetben a zárjelben álló számértékek az eredeti megállapitások értelmében pozitivok és így mindenesetre

$$p_{n+1}-p_{n+2}<|R_{n,k}|<p_{n+1};$$

de minthogy $\lim.p_{n+1}=\lim.p_{n+2}=0$, még pedig függetlenül a k

értékétől, mindig

$$\lim_{n} R_{n,k} = 0.$$

a mi bebizonyítandó volt.

Igy p. a váltakozó előjelekkel vett harmonikus sor:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

összetartó.

A vizsgált sor értékét S-sel jelölve, közvetetlenül látni, hogy

$$S_{2k} < S,\ S_{2k+1} > S$$

mert $\lim. S_{2k}$ és $\lim. S_{2k+1} = S$ és $S_2, S_4, \ldots, S_{2k}, \ldots$ folyton nagyobbodó, $S_1, S_3, \ldots, S_{2k+1}, \ldots$ folyton kisebbedő számok sorozata.

Igy az előbb például fölhozott sor értéke $\frac{1}{2}$ és 1, vagy pontosabbban $\frac{7}{12}$ és $\frac{5}{6}$ között fekszik, s ú. t.

107. *Ha*

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

a számoknak határtalan sorozata, melyre nézve $\lim. a_n = 0$, *akkor az a sor, melynek általános tagja:* $(a_n - a_{n+1})$ t. i.

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) + \ldots$$

összetartó és értéke a_0.

Ebben az esetben egyszerűen S_n-et képezhetjük; lesz

$$S_n = a_0 - a_{n+1}$$

és így csakugyan:

$$\lim. S_n = S = a_0.$$

Ily számsorozat p.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots,$$

hol most $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ és így:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)};$$

tehát e sor:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$

összetartó és értéke vagy összege 1.

Hasonlókép nyerni az

$$1, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{2k+1}, \ldots, \frac{1}{nk+1}, \ldots$$

számsorozatból, hol k egy bizonyos meghatározott szám, a következő eredményt:

$$\sum_0^\infty \frac{k}{(nk+1)[(n+1)k+1]} = \frac{k}{k+1} + \frac{k}{(k+1)(2k+1)} + \frac{k}{(2k+1)(3k+1)} + \ldots$$
$$= 1.$$

108. *Ha valamely összetartó sorban akárhány egymásután következő tag helyébe, mint egyetlen tagot ezeknek összegét teszszük és ezt a sor akárhány helyén ismételjük, az ez által keletkező sor ismét összetartó és értéke is ugyanaz, mint az eredeti soré.*

Az így átalakított sornak megfelelő határérték ekkor ugyanis oly számsorozat által lesz értelmezve, mely az eredetileg adott sornak megfelelő sorozatból egyes tagok kihagyása által keletkezik, de ekkor, mint tudjuk, a határérték nem változik.

Igy keletkezik p. a váltakozó előjellel vett harmonikus sorból két-két egymásután következő tag egyesítése által, a következő, szintén összetartó és az idézett sorral egyenlő soralak:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} + \ldots$$

Ha $\sum\limits_0^\infty u_n$ *és* $\sum\limits_0^\infty v_n$ *két összetartó sor, melyeknek értéke* S, *illetőleg* S', *akkor*

$$\sum_0^\infty (au_n + bv_n)$$

szintén összetartó sor és értéke $aS + bS'$.

Ha ugyanis az ama sorok értékét definiáló számsorozatok általános tagja S_n, ill. S'_n, akkor közvetetlenül látni, hogy ez az új sornál: $aS_n + bS'_n$, melynek határértéke csakugyan $aS + bS'$.

E tétel így is irható:

$$a\sum_0^\infty u_n + b\sum_0^\infty v_n = \sum_0^\infty (au_n + bv_n),$$

és ennek speciális esete, ha $b = 0$, a következő:

$$a\sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty au_n,$$

mely szerint *valamely végtelen sor szorzása az a számértékkel úgy történik, hogy a sor minden tagját a-val szorozzuk.*

Tételünk egy másik speciális esete *két összetartó végtelen sor összeadását vagy kivonását* adja:

$$\sum_0^\infty u_n \pm \sum_0^\infty v_n = \sum_0^\infty (u_n \pm v_n).$$

Ha még tekintetbe veszszük, hogy valamely összetartó végtelen sor ilyen marad és értékét sem változtatja, ha akárhány helyen véges számmal zérusokat igtatunk tagjai közé, mint új tagokat, a $\sum u_n$ és $\sum v_n$ sorok összeadása úgy is történhetik, hogy fölváltva az első és második sorból veszünk

$$k_1, k_2, \ldots k_m, \ldots \quad \text{illetőleg} \quad l_1, l_2 \ldots l_m$$

tagot és ezekből alakítunk új végtelen sort.

Kiemelendő, hogy az u és v-tagok külön-külön, mint az indokolásból kitünik, egyelőre csakis az eredeti sorrendben követhetik egymást; ellenben tetszésünktől függ, hogy az egyik sor micsoda tagjai közé rakjuk a második sor tagjait a sorrend változtatása nélkül.

Ha a $\sum\limits_0^\infty u_n$ *összetartó végtelen sorban, melynek értéke* S, *az első* k *tag*

$$u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$$

helyébe tetszőleges más számokat:

$$v_0, v_1, \ldots v_{k-1}$$

rakunk, az ez által keletkező új sor:

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_{k-1} + \sum_k^\infty u_n$$

szintén összetartó és értéke:

$$S+v_0+v_1+\ldots+v_{k-1}-(u_0+u_1+\ldots+u_{k-1}).$$

Az új sor értékét ugyanis oly számsorozat értelmezi, melynek általános tagja:

$$S_n+\sum_0^{k-1} v_{k-1}-\sum_0^{k-1} u_{k-1},$$

és ennek határértéke az előbb fölirt kifejezés.

Föltétlen és föltételes összetartás.

109. Az összetartó végtelen soroknak eddig tárgyalt tulajdonságai megegyeznek a véges összegek tulajdonságaival. Az összeadás alaptörvényei azonban nem terjeszthetők ki mindig arra az esetre, midőn az összeadandók száma minden határon túl növekszik. Ezt először egy egyszerű példán mutatjuk. A következő sor:

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\ldots \tag{1.}$$

melynek általános törvénye a páros és páratlan helyszámú tagokra külön-külön: *

$$u_{2n-1}=\frac{1}{n},\ u_{2n}=-\frac{1}{n}$$

összetartó és értéke 0, mert $S_{2n}=0$, $S_{2n+1}=\frac{1}{n+1}$ és így $\lim. S_n=0$.

A következő sor pedig:

$$1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n-1}+\ldots \tag{2.}$$

szintén összetartó és értéke nagyobb mint $\frac{1}{2}$. Ha t. i. a 2. és 3., 5.

* Czélszerű lesz, e helyen fölemlíteni, hogy az u_n jelzés csak annyit mond, hogy bizonyos utasítás alapján adott n-nél a hozzá tartozó u_n kiszámítása végezhető. Hogy u_n az n segítségével kész *képlet*ben adva legyen, azt egyáltalában nem követeljük, annálkevésbé tehát, hogy ez az eddig tárgyalt művelet elek segítségével történhessék. Különben a jelen esetben ez — ámbár fölöslegesen bonyodalmas módon — a következőképen eszközölhető:

$$u_m=\frac{1+(-1)^{m+1}}{2}\,\frac{2}{m+1}-\frac{1+(-1)^m}{2}\,\frac{2}{m}$$

és 6.,… általánosságban a $3n-1$ és $3n$-edik tagot egyesítjük, a mi által az előbbiek szerint értéke nem változik, lesz:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots$$

mely sor értékét már megvizsgáltuk.

Már pedig az (1.) és a (2.) is az

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots$$

sorok minden tagjának fölhasználásával keletkezik, úgy hogy (1.)-ben minden pozitiv tag után irunk egy negativ tagot, (2.)-ben pedig csak két pozitiv tag után jön egy negativ tag.

Az (1.) *és* (2.) *sorok tehát csak a tagok elrendezésében különböznek és mégis különböző értékük van;* e soroknak többé nincsen összeg-jellegük; az összegnek ugyanis alaptulajdonsága, hogy az összeadandók sorrendjétől független.

110. Két végtelen sor $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ és $\sum\limits_{1}^{\infty} v_n$ általánosságban *ugyanazon tagokból* áll, ha az első sor bármely tagja u_k előfordul meghatározott mutatóval a $\sum\limits_{1} v_n$ sor tagjai közt és megfordítva a második sor bármely tagja, v_l, szintén meghatározott mutatóval a $\sum\limits_{1} u_n$ sor tagjai közt. A két sor ekkor csak a tagok elrendezésében különbözik.

Az oly sort, mely a tagok bármely elrendezésénél összetartó és ugyanazt az értéket adja, *föltétlenül összetartó*nak nevezzük, míg az oly sor, melynek akár az összetartása, akár értéke a tagok bizonyos elrendezéséhez van kötve, *föltételesen összetartó* sor.* (Az elnevezés onnét származik, hogy az utóbbi esetben a tagok ugy is lesznek rendezhetők, hogy a sor széttartson).

* A föltételes összetartás tüneményét először LEJEUNE-DIRICHLET észlelte. (Abhandl. der Berliner Akad. 1837)

A

$$\sum_1^\infty u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

végtelen sor föltétlenül összetartó, ha a sor tagjainak absolut értékeiből képezett sor:

$$\sum_1^\infty |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

összetartó.

A $\sum_1^\infty u_n$ sor az adott föltétel mellett mindig összetartó; mert:

$$R_{n,k} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k}$$

és így

$$|R_{n,k}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+k}|$$

de a jobboldalon álló kifejezés nem más, mint (a $\sum_0^\infty |u_n|$-re vonatkozólag képezett) $R'_{n,k}$, mely a föltétel szerint n nagyobbodásával, a 0 határhoz közeledik, tehát egyszersmind:

$$\lim_n . R_{n,k} = 0,$$

és $\sum_0^\infty u_n$ összetartó.

Legyen most már a $\sum_0^\infty u_n$ sor tagjainak valamely más elrendezésében:

$$\sum_1^\infty v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots v_n + \ldots$$

és

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$$

a tagok száma, mely a $\sum_1^\infty v_n$ sorból veendő, hogy a $\sum^\infty u_n$ sornak

$$1, 2, \ldots n$$

első tagja azokban már bennfoglaltassék. Legyen továbbá ismét a $\sum_1^\infty u_n$ sor k első tagjának összege S_k és hasonlókép a $\sum_1^\infty v_n$ sor l első tagjának összege S'_l.

Akkor a

$$S'_{i_1}, S'_{i_2}, \ldots S'_{i_n} \ldots$$

számsorozat szabályos és a megfelelő határérték ugyanaz mint az

$$S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$$

számsorozaté, melyről a $\sum_1^\infty u_n$ összetartása miatt, tudjuk, hogy szabályos. Mert $S'_{i_n} - S_n$ az

$$u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots u_{j_n}$$

tagok néhányainak összege, hol j_n egy bizonyos az n-hez tartozó pozitiv egész szám és így

$$|S'_{i_n} - S_n| < |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{j_n}|;$$

vagyis minthogy a jobboldal nem más, mint $R_{n, j_n - n}$ és ez a föltétel szerint az n nagyobbítása által minden határon túl kisebbíthető:

$$\lim. S'_{i_n} = \lim. S_n.$$

De ekkor végre

$$S'_1, S'_2, \ldots S'_n \ldots$$

is szabályos számsorozat és

$$\lim. S'_n = \lim. S'_{i_n} = \lim. S_n.$$

T. i. ha m oly nagy, hogy S'_m már az u-sor első n tagját tartalmazza, akkor

$$S'_{m+r} - S'_m$$

az

$$u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+r}$$

tagok néhányainak összege, hol r ismét bizonyos az m-hez tartozó szám és így

$$|S'_{m+r} - S'_m| < R'_{n,r},$$

azaz az S'_m sorozatnak van meghatározott határértéke. De ez ekkor nem lehet más, mint az S'_{i_n} sorozaté, mely az S'_m számok sorából kiemelt számok sorozata (L. a 47. czikk végén).

E tétel szerint oly sor, melynek tagjai egy bizonyos m-ediktől kezdve mind pozitivok, ha egyáltalában összetartó, mindig föltétlenül összetartó; mert az első m tag az összetartási viszonyokra egyáltalában nincs befolyással és ezeken túl az eredeti sor és a tagok absolut értékeiből képezett sor ugyanaz.

Minthogy továbbá ezen esetben $S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots$ folyton nagyobbodó számok sorozata, melyek vagy véges határhoz közelednek, vagy pedig bármely pozitiv számnál is nagyobbak lesznek, végre kimondhatjuk, hogy:

Oly sor, melynek tagjai egy bizonyos m-ediktől kezdve mind pozitivok, vagy föltétlenül összetartó, vagy pedig — szorosabb értelemben — széttartó sor.

111. Valamely sor föltétlen összetartását e tételek alapján igen gyakran megadja *a sorok összehasonlításának elve:*

Legyen $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ *egy pozitiv tagból álló és összetartó sor; ha ekkor a* $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ *sor tagjai olyanok, hogy egy bizonyos m-edik tagtól kezdve:*

$$|u_n| \leq a_n$$

akkor a $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ *sor is föltétlenül összetartó.* Minthogy ugyanis:

$$R_{n,k} = u_{n+1} + \ldots + u_{n+k}$$

és ebből továbbá, ha csak $n > m$,

$$\begin{aligned} |R_{n,k}| &\leq |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+k}| \leq \\ &\leq a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}, \end{aligned}$$

végre pedig a $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ összetartása miatt az n növesztésével az utolsó kifejezés minden határon túl kisebbíthető, a $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$, mint a $\sum\limits_{1}^{\infty} |u_n|$ sorokra vonatkozólag képezett $\lim\limits_{n} R_{n,k}$ csakugyan 0.

E tétel alapján *összetartónak* ismerjük föl a következő fontos soralakot:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

valamint általánosabban *a következő sorokat:*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\mu}}$$

hol μ *a* 2-nél *nem kisebb pozitiv szám.* Mert — a mint láttuk (107. czikk.) — összetartó a következő sor:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)};$$

minthogy pedig $\mu > 2$, tehát:

$$\frac{1}{(n+1)^\mu} \leqq \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)},$$

egyszersmind összetartó:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)^\mu},$$

és így a föntebb fölírt sor is, mely ettől csak az egy, mint kezdő tag hozzácsatolása által különbözik.

112. A föltételes összetartás oly soroknál, melyek egy bizonyos tagtól kezdve valós és egyenlő előjelű tagokból állanak, nem léphet föl. Ha a sor tagjai pozitivok maradnak, ez az előbbi eredmény, ha pedig a tagok negativok, a sort, az által, hogy —1-gyel szoroztunk, az ilyenből levezetettnek tekinthetjük, a mi közvetetlenül mutatja állításunk igazságát.

Valós tagokból álló végtelen soroknál tehát föltételes összetartás csak akkor léphet föl, ha bármeddig folytatva is a tagok képezését, azok között mindig vannak pozitiv *és* negativ számok.

Legyen $\sum_1^\infty u_n$ ily *kevert előjelű* sor és ebben

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_n$$

$$-b_1, -b_2, \ldots, -b_n, \ldots$$

a különirt pozitiv, ill. negativ tagok sorozata, úgy hogy az a-k és b-k mind pozitiv számok.

Ekkor négy esetet lehet megkülönböztetnünk:

a) *A* $\sum_1^\infty a_n$ *és* $\sum_1^\infty b_n$ *sorok mindegyike összetartó*, még pedig, mivel pozitiv tagokból állanak, föltétlenül összetartó. Ekkor a $\sum_1^\infty a_n - \sum_1^\infty b_n$ különbség úgy képezhető, hogy az egyes sorokban a tagokat akárhogy rendezzük és a $\sum_1^\infty b_n$ sor tagjait akárhol illesztjük a $\sum_1^\infty a_n$ tagjai közé. Ama különbség értéke ez által nem változik, de ez más kifejezésben annyit mond, hogy ekkor a $\sum_1^\infty u_n$ sor föltétlenül összetartó.

b) *A* $\sum_1^\infty a_n$ *és* $\sum_1^\infty b_n$ *sorok közül az egyik összetartó, a másik* *széttartó.* Ekkor az

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

képezésénél n-et oly nagynak vehetjük, hogy a széttartó sor tagjaiból már m lépjen föl az összegben és az m-et ismét oly nagynak, hogy a széttartó sor tagjainak összege egy tetszőlegesen választott N-nél nagyobb legyen. Ha pedig az összetartó sor összege C, akkor az n e választásánál

$$|S_n| > N - C,$$

és így $\lim. S_n = \infty$, azaz *a* $\sum\limits_1^\infty u_n$ *sor széttartó, a szó szorosabb értelmében.*

c) *A* $\sum\limits_1^\infty a_n$ *és* $\sum\limits_1^\infty b_n$ *sorok széttartók, még pedig úgy, hogy* $\lim. a_n$ *és* $\lim. b_n$ *nem mindkettő zérus.* Ekkor, bármennyire megyünk S_n képezésében, mindig föllépnek számok, melyek egy bizonyos pozitiv számnál nagyobb értékváltozást idéznek elő, tehát $\sum\limits_1^\infty u_n$ mindenesetre *széttartó vagy ingadozó.*

d) *A* $\sum\limits_1^\infty a_n$ *és* $\sum\limits_1^\infty b_n$ *sorok széttartók, de úgy hogy* $\lim. a_n$ *és* $\lim. b_n$ *zérus. Ekkor* $\sum\limits_1^\infty u_n$ *sor mindig föltételesen összetartó, még pedig úgy, hogy a tagok kellő elrendezése után a sor összege egy egészen szabadon választott C szám.**

A $\sum\limits_1^\infty u_n$ tagjainak elrendezését, melynél a sor értéke C lesz, következőkép érjük el. Vegyünk először a $\sum\limits_1^\infty a_n$ sorból annyi tagot, hogy az összeg már nagyobb mint C, de úgy hogy az utolsó még fölvett tag nélkül még C-nél kisebb volna; azután (negativ előjellel) annyi tagot a $\sum\limits_1^\infty b_n$ sorból, míg az összeg ismét kisebb C-nél, de úgy, hogy ha egy taggal kevesebbet vettünk volna, az összeg még nagyobb lenne C-nél; azután ismét annyi a-tagot, míg az összeg ismét épen nagyobb lesz C-nél és úgy tovább. Akkor S_n eltérése C-től soha sem lesz nagyobb mint ama tag absolut értéke, melynél az S_n összegben utoljára történik az előjel változása. Minthogy pedig e tagok absolut értéke minden határon túl kisebbedik, $S_n - C$ is minden határon

* E tétel RIEMANN-tól származik. «Über die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihen.» (1854.) «Gesammelte Werke.» pag. 221.

túl kisebbedik és
$$\lim . S_n = C.$$

A sor tagjai úgy is rendezhetők, hogy $\sum\limits_1^{\infty} u_n$ széttartó legyen. Bármily nagy is n, mindig lehet (minthogy $\sum\limits_1^{\infty} a_n$ széttartó sor) egy k pozitiv egész számot meghatározni, hogy
$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}$$
nagyobb legyen C-nél. Ha tehát az a tagokból mindig annyit veszünk, hogy összegük nagyobb C-nél és ezek után teszünk mindig egy b tagot, akkor, minthogy $\lim . b_n = 0$, e tagsorozat az S_n-et mindig egy bizonyos véges számmal nagyobbítja, mely p. $\frac{C}{2}$-nél nagyobb lesz, ha n elég nagy. És ekkor természetesen $\lim . S_n = \infty$.

Igy p. a 109. czikkben adott sor a következő elrendezésben:
$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n} + \ldots$$
széttartó lesz, mert az egymást követő pozitiv tagok összege mindig nagyobb $\frac{1}{2}$-nél. T. i.
$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^n} > 2^{n-1} . \frac{1}{2^n} .$$

113. A 110. czikkben adott tétel e tárgyalások alapján most következőkép egészíthető ki: *A $\sum\limits_1^{\infty} u_n$ végtelen sor akkor és csak akkor föltétlenül összetartó, ha a sor tagjainak absolut értékeiből képezett sor, $\sum\limits_1^{\infty} |u_n|$ összetartó.*

Ha a sor tagjai valósak, ez a megelőző czikkben foglalt eredményeknek egyszerű következménye. T. i. $\sum\limits_1^{\infty} |u_n|$ mindig $\sum\limits_1^{\infty} (a_n + b_n)$ alakban írható és ez csak az a) esetben összetartó, ez egyszersmind az egyetlen, melyben föltétlen összetartással van dolgunk.

Ha a sor tagjai egész általánosan complex számok és p.
$$u_n = s_n + i t_n ,$$

akkor

$$\sum_1^n u_n = \sum_1^n (s_n + it_n) = \sum_1^n s_n + i\sum_1^n t_n$$

és így, ha az $\sum_1^\infty s_n$ és $\sum_1^\infty t_n$-re vonatkozólag képezett összegeket S' és S''-sel jelöljük:

$$S_n = S_n' + iS_n''$$

Hogy tehát $\sum_1^\infty u_n$ összetartó legyen, azaz hogy S_n-nek véges és meghatározott határértéke legyen, kell, hogy $\lim. S_n'$ és $\lim. S_n''$ véges és meghatározott számokat jelentsenek és ekkor:

$$\lim. S_n = \lim. S_n' + i \lim. S_n''.$$

A $\sum_1^\infty (s_n + it_n)$ complex tagokból álló sor tehát akkor és csak akkor összetartó, ha a $\sum_1^\infty s_n$ és $\sum_1^\infty t_n$ valós sorok külön-külön összetartók; valamint csak akkor föltétlenül összetartó, ha az utóbbi sorok is ilyenek. A $\sum_1^\infty u_n$ sorozat tagjainak sorrendjét változtatva tudniillik a $\sum_1^\infty s_n$ és $\sum_1^\infty t_n$ sorok tagjainak sorrendje is változik; és a mint ily módon e valós sorok értéke változik, vagy sem, a $\sum_1^\infty u_n$-é is változik vagy változatlan marad.

Ha a complex számok trigonometrikus alakját használjuk és p.

$$u_n = r_n (\cos. \varphi_n + i \sin. \varphi_n),$$

ugy hogy $|u_n| = r_n$, akkor a megfelelő valós sorok:

$$\sum_1^\infty r_n \cos. \varphi_n \quad \text{és} \quad \sum_1^\infty r_n \sin. \varphi_n,$$

melyek csakugyan föltétlenül összetartók, vagy sem, amint $\sum_1^\infty r_n$ összetartó vagy széttartó.

Ha t. i. $\sum_1^\infty r_n$ összetartó, akkor minthogy:

$$r_n |\cos. \varphi_n| \leq r_n,$$
$$r_n |\sin. \varphi_n| \leq r_n,$$

és továbbá:

$$|r_n \cos. \varphi_n| = r_n |\cos. \varphi_n|, \; |r_n \sin. \varphi_n| = r_n |\sin. \varphi_n|,$$

a $\sum_1^\infty r_n \cos. \varphi_n$ és $\sum_1^\infty r_n \sin. \varphi_n$ sorok is föltétlenül összetartók lesznek. (111. cz.)

Megfordítva, ha e sorok föltétlenül összetartók, velük együtt összetartók:

$$\sum_1^\infty r_n |\cos. \varphi_n| \quad \text{és} \quad \sum_1^\infty r_n |\sin. \varphi_n|,$$

továbbá pedig, minthogy:

$$r_n |\cos. \varphi_n| \, |\cos. \varphi_n| \leq r_n |\cos. \varphi_n|,$$

$$r_n |\sin. \varphi_n| \, |\sin. \varphi_n| \leq r_n |\sin. \varphi_n|,$$

összetartók a következő pozitiv tagú sorok:

$$\sum_1^\infty r_n |\cos. \varphi_n|^2 = \sum_1^\infty r_n \cos.^2 \varphi_n \quad \text{és} \quad \sum_1^\infty r_n \sin.^2 \varphi_n$$

valamint végre a két sor összege, mely nem egyéb mint:

$$\sum_1^\infty r_n (\cos.^2 \varphi_n + \sin.^2 \varphi_n) = \sum_1^\infty r_n .$$

114. Ezek után a sorok összehasonlításának elve még a következő második tétellel bővíthető:

Legyen $\sum_1^\infty a_n$ egy pozitiv tagokból álló és széttartó sor; ha ekkor a $\sum_1^\infty u_n$ sor tagjai olyanok, hogy egy bizonyos m-edik tagtól kezdve:

$$|u_n| \geq a_n$$

akkor a $\sum_1^\infty u_n$ sor nem lehet föltétlenül összetartó. Ama speczialis esetben midőn a $\sum_1^\infty u_n$ sor tagjai is pozitivok, e sor tehát szintén széttartó lesz.

Ekkor ugyanis a $\sum_1^\infty |u_n|$ sorra vonatkozólag képezett $R_{n,k}$ kifejezés:

$$|u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+k}| \geq a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}$$

és így e kifejezés bármily nagynak vegyük is n-et, a k bizonyos értékeinél, egy véges számnál nagyobb marad. Azaz $\sum_1^\infty |u_n|$ nem lehet összetartó, és így $\sum_1^\infty u_n$ sem lehet föltétlenül összetartó.

Ebből következik, hogy *midőn μ az 1-nél nem nagyobb valós szám, a*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^\mu} = \sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)^\mu}$$

sorok mindig széttartók. Mert széttartó a

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n}$$

sor és ha $\mu < 1$,

$$\frac{1}{n^\mu} > \frac{1}{n}.$$

Hozzá csatolva ezt az előbb (111. cz.) nyert eredményhez *a* $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\mu}$ *összetartó, ha $\mu > 2$, széttartó, ha $\mu \leq 1$.* A még hiányzó esetet, hol μ 1 és 2 közt fekszik, a következő czikkben tárgyaljuk.

115. *Ha $\sum_0^\infty u_n$ föltételesen összetartó sor, a 108. czikk elején adott eljárás segítségével, egymásután következő tagok összevonása által oly sor képezhető, mely föltétlenül összetartó és melynek értéke ugyanaz.*

Legyen ugyanis $\sum_0^\infty a_n$ — különben tetszőlegesen választott — pozitiv tagokból álló és összetartó sor. A $\sum_0^\infty u_n$ összetartása következtében mindenkor lehet egy ν_i számot úgy meghatározni, hogy a k bármely értékénél

$$|R_{n,k}| < a_i,$$

ha $n \geq \nu_i$.

Ha tehát:

$$U_0 = u_0 + \ldots + u_{\nu_1},\ U_1 = u_{\nu_1+1} + \ldots + u_{\nu_2}, \ldots$$
$$\ldots, U_m = u_{\nu_m+1} + \ldots u_{\nu_{m+1}}, \ldots$$

e sor:

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_m + \ldots$$

értékére nézve megegyezik $\sum_0^\infty u_n$-nel és föltétlenül összetartó mert:

$$|U_m| = |R_{\nu_m, \nu_{m+1} - \nu_m}| < a_m.$$

A sorok ilynemű átalakítására vonatkozó és gyakran alkalmazandó megjegyzés a következő:

Ha a $\sum\limits_0^\infty U_m$ *összetartó sorból az által, hogy* U_m *helyébe a vele egyenlő*

$$u_{\nu_m+1}+\ldots+u_{\nu_{m+1}}$$

összeget rakjuk, a $\sum\limits_0^\infty u_n$ *sort képezzük, ez nem lesz mindig összetartó; de ha összetartó, akkor:*

$$\sum_0^\infty u_n=\sum_0^\infty U_m\,.$$

Az állítás első részének igazolására elég egy példát fölhozni. Igy az

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$$

összetartó sor ily átalakítása az

$$\frac{1}{n^2}=1-\frac{n^2-1}{n^2}$$

képlet segítségével a következő:

$$1+1-\frac{3}{4}+1-\frac{8}{9}+1-\frac{15}{16}+\ldots$$

széttartó (ingadozó) sorhoz vezet. Állításunk második részének bizonyítására legyen:

$$U_0+\ldots+U_{n-1}=S_n\,;\ u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}=s_n$$

akkor az $S_1, S_2 \ldots S_n$ számsorozat tagjai az $s_1, s_2 \ldots s_n$ számsorozatban előforduló számok határtalan sorozata, minthogy pedig lim. s_n a föltétel szerint véges és meghatározott, egyszersmind:

$$\text{lim.}\,S_n=\text{lim.}\,s_n\,.$$

Ha azonban az U és u számok mind pozitivok, akkor a $\sum\limits_0^\infty u_n$ *mindig összetartó, ha* $\sum\limits_0^\infty U_m$ *összetartó, azaz, ha pozitiv tagokból álló összetartó sorban az egyes tagokat fölbontjuk bárhány pozitiv részre, az új sornak mindig ugyanaz az értéke, mint az eredetileg adott sornak.*

Ekkor ugyanis az $s_1 \ldots s_n \ldots$ sorozat oly módon alakul az $S_1 \ldots S_n$ sorozatból, hogy p. S_k és S_{k+1} közé jut $s_l, s_{l+1}, \ldots s_{l+i}$;

azaz az s sorozat is csupán nagyobbodó számokból áll, de minthogy minden s után következik megint egy S, az s-ek is egy bizonyos véges határ alatt maradnak. Tehát lim. s_n véges és meghatározott szám; azaz $\sum\limits_0^\infty u_n$ összetartó, tehát értéke $\sum\limits_0^\infty U_m$.

Ezen az alapon megvizsgálhatjuk a

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{1+\sigma}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \frac{1}{3^{1+\sigma}} + \frac{1}{4^{1+\sigma}} + \ldots$$

sort, ha $\sigma > 0$, mely a megelőző tétel szerint összetartására és értékére nézve megegyezik a következő sorral:

$$\sum_0^\infty {}_\lambda \left(\frac{1}{(2^\lambda)^{1+\sigma}} + \frac{1}{(2^\lambda+1)^{1+\sigma}} + \ldots + \frac{1}{(2^{\lambda+1}-1)^{1+\sigma}} \right);$$

hol az egyes tagok már összeg alakban vannak megadva és ha az összeg helyett ennek tagjait veszszük sortagoknak, az előbb fölirt sort nyerjük. De itt:

$$\frac{1}{(2^\lambda)^{1+\sigma}} + \frac{1}{(2^\lambda+1)^{1+\sigma}} + \ldots \frac{1}{(2^{\lambda+1}-1)^{1+\sigma}} < \frac{2^\lambda}{(2^\lambda)^{1+\sigma}} = \frac{1}{(2^\lambda)^\sigma},$$

(a tagok száma ugyanis

$$(2^{\lambda+1} - 1) - (2^\lambda - 1) = 2^{\lambda+1} - 2^\lambda = 2^\lambda,$$

és minden tag kisebb az elsőnél), ez a sor pedig

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2^\lambda)^\sigma} = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2^\sigma}\right)^\lambda$$

mint geometriai haladvány, melyben a hányados $\frac{1}{2^\sigma} < 1$, csakugyan összetartó, tehát végre $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ is.

Összefoglalva ezt az előbb nyert eredményekkel, *e sor:*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^\mu}$$

összetartó, ha $\mu > 1$, *széttartó, ha* $\mu \leq 1$.

116. *Legyen*

$$a_0, a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots$$

pozitiv, soha nem nagyobbodó számok sorozata, úgy hogy $a_{n-1} - a_n$ pozitiv vagy zérus. Ha továbbá ismét

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

akkor a

$$\sigma_n = \sum_0^{n-1} a_i u_i = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_{n-1} u_{n-1}$$

kifejezés még így is irható:

$$\sigma_n = (a_0 - a_1) s_1 + (a_1 - a_2) s_2 + \ldots (a_{n-2} - a_{n-1}) s_{n-1} + a_{n-1} s_n.$$

Ha tehát az $s_1, s_2, \ldots s_n$ absolut értékei egy bizonyos H számnál kisebbek, végre:

$$|\sigma_n| < a_0 H.$$

Ha most továbbá fölteszszük, hogy $\sum\limits_0^\infty u_n$ *összetartó sor, akkor*

$$\sum_0 a_n u_n = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n + \ldots$$

szintén összetartó sor lesz. Mert ha az e sorra vonatkozó maradékokat ρ-val jelöljük:

$$\rho_{n,k} = a_n u_n + a_{n+1} u_{n+1} + \ldots + a_{n+k-1} u_{n+k-1},$$

akkor

$$|\rho_{n,k}| < a_n h,$$

hol h csak az

$$R_{n,0}, R_{n,1}, \ldots R_{n,k}$$

számok absolut értékeinél nagyobbnak veendő. De az n-et elég nagynak véve, $|R_{n,k}|$ függetlenül a k-tól, egy tetszőleges δ-nál is kisebbé tehető; míg $a_n < a_0$; tehát:

$$|\rho_{n,k}| < a_0 \delta$$

azaz: $\lim. \rho_{n,k} = 0$.

E tétel fontos speciális esete az, midőn $a_n = a^n$ és a az egynél kisebb pozitiv szám. Az ezen esetre vonatkozó eredményt azonban még általánosabban így is fejezhetjük ki:

Ha az n minden oly értékénél, mely egy bizonyos k számnál nagyobb, $|u_n|$ kisebb egy meghatározott számnál G-nél és $|a| < 1$, *akkor* $\sum_1^\infty u_n a^n$ *szintén, még pedig föltétlenül összetartó sor.*

Tudva ugyanis, hogy $\sum_1^\infty |a^n|$ és tehát $\sum_1^\infty G|a^n|$ is összetartó, hogy továbbá egy bizonyos k-adik tagtól

$$|u_n a^n| < G|a^n|,$$

állításunk csakugyan helyesnek bizonyul. (111. cz.)

117. Egyszerűség kedveért ezentúl fölteszszük, hogy a pozitiv, és 1-nél kisebb, a mi különben csak mellékes megszorítás, de céljainkra elegendő.

Legyen $\sum_0^\infty u_n$ *összetartó;* ekkor $\sum_0^\infty u_n a^n$ föltétlenül összetartó, és a megfelelő maradéksor

$$\rho_n = u_n a^n + u_{n+1} a^{n+1} + \dots$$

absolut értéke egy tetszőlegesen választott δ-nál is kisebb lesz, ha n egy bizonyos N-nél nagyobb. Általánosságban a sor más-más lesz, a mint a értékét másképp választjuk és megfelelőleg N is más. Alapvető tulajdonsága e soroknak, hogy *lehet egy N-et meghatározni úgy, hogy*

$$|\rho_n| < \delta,$$

ha $n > N$, bármicsoda az 1-nél nem nagyobb pozitiv számérték is a.

A megfelelő $\sum_0 u_n$ sorra nézve, mely egyszersmind az $a = 1$ esetet képviseli, lehet mindenesetre egy N-et úgy meghatározni, hogy a k minden pozitiv egész értékénél

$$|R_{n,k}| < \delta,$$

ha $n > N$; a 116. czikk tárgyalásai alapján ugyanekkor:

$$|\rho_{n,k}| < a^n \delta \leq \delta,$$

és végre, minthogy $\rho_n = \lim_k \rho_{n,k}$, állításunk értelmében:

$$|\rho_n| < \delta.$$

Az n ily választásánál természetesen egyszersmind: $|R_n| < \delta$.

Ebből végre a következő alkalmazásai által igen fontos tételt nyerjük.

A $\sum_0^\infty u_n$ *és* $\sum_0^\infty u_n a^n$ *összetartó sorok különbségének absolut értéke egy tetszőleges* ε*-nál is kisebbé tehető, az által, hogy a pozitiv, és 1-nél kisebb értékét az egyhez elég közel veszszük.*

Ha N-et úgy választjuk, hogy $|R_n|$ és $|\rho_n|$ kisebb $\frac{1}{3}\varepsilon$-nál, ha $n > N$, akkor a

$$\sum_0^\infty u_n - \sum_0^\infty u_n a^n = \left(\sum_0^N u_n - \sum_0^N u_n a^n\right) + R_N - \rho_N$$

kifejezésben még csak a úgy határozandó meg, hogy

$$\left|\sum_0^N u_n - \sum_0^N u_n a^n\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

legyen; akkor csakugyan:

$$\left|\sum_0^\infty u_n - \sum_0^\infty u_n a^n\right| < \left|\sum_0^N u_n - \sum_0^N u_n a^n\right| + |R_N| + |\rho_N| < \varepsilon.$$

Az a e meghatározása következőkép eszközölhető. A kérdéses kifejezésre nézve

$$\left|\sum_0^N u_n(1-a^n)\right| < (1-a^N)\sum_0^N |u_n|,$$

mert ha a pozitiv és 1-nél kisebb, mindig:

$$1-a < 1-a^2 < 1-a^3 < \ldots$$

Hogy pedig

$$(1-a^N)\sum_0^N |u_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

legyen arra a úgy választandó, hogy:

$$a > \left(1 - \frac{\varepsilon}{3\sum_0^N |u_n|}\right)^{\frac{1}{N}},$$

a mi ε elég kis értékeinél mindig megegyeztethető ama másik követeléssel, mely szerint $a < 1$.

II.

Végtelen sorok szorzása és többszörös sorok.

Segédtételek.

118. *Ha* $\sum\limits_{0} a_n$ *föltétlenül összetartó sor és* lim. $\beta_n=0$, *akkor:*

$$\lim.(a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\ldots+a_k\beta_{n-k}+a_{k+1}\beta_{n-k-1}+\ldots+a_{n-1}\beta_1+a_n\beta_0)=0.$$

A limes jel alatt álló kifejezés absolut értéke mindenesetre nem nagyobb, mint:

$$|a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\ldots a_k\beta_{n-k}|+|a_{k+1}\beta_{n-k-1}+\ldots+a_{n-1}\beta_1+a_n\beta_0|,$$

Ha e kifejezések közül az elsőt A, a másodikat B-vel jelöljük, továbbá lesz:

$$B\leq|a_{k+1}||\beta_{n-k-1}|+\ldots+|a_{n-1}||\beta_1|+|a_n||\beta_0|.$$

Minthogy pedig lim. $\beta_n=0$, van egy pozitiv H szám, úgy hogy minden i-nél $|\beta_i|<H$, tehát:

$$B<\{|a_{k+1}|+\ldots+|a_{n-1}|+|a_n|\}H.$$

De $\sum\limits_{0}|a_n|$ összetartó; lehet tehát egy K számot meghatározni, úgy hogy, ha csak $k>K$,

$$|a_{k+1}|+\ldots+|a_n|<\delta,$$

hol δ tetszőlegesen választott pozitiv szám és ekkor:

$$B<H\delta.$$

A mi pedig A-t illeti:

$$A<|a_0||\beta_n|+|a_1||\beta_{n-1}|+\ldots+|a_k||\beta_{n-k}|;$$

miután k-t a K-nál nagyobb számnak vettük, lehet most ismét, minthogy lim. $\beta_n=0$, egy N számot találni úgy hogy $|\beta_{n-k+i}|<\delta'$, az i minden nem negativ egész értékénél, ha csak $n>k+N$. Az n ily választása után:

$$A<\{|a_0|+\ldots+|a_k|\}\delta',$$

vagy végre, ha $\sum\limits_0^\infty |a_n|$ véges értéke röviden s,

$$A < s\delta'$$

De ekkor:

$$|a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_0| < H\delta + s\delta';$$

vagy végre ha a tetszőlegesen választható δ-t és δ'-t úgy választjuk

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2H}, \quad \delta' = \frac{\varepsilon}{2s},$$

hol ε ismét tetszőleges, e kifejezés absolut értéke elég nagy n-nél kisebb lesz ε-nél, és határértéke 0, a mi bebizonyítandó volt.

119. *Ha $\sum\limits_0^\infty \beta_n$ összetartó sor és $a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ soha nem nagyobbodó pozitiv számok sorozata, melyekre nézve lim. $a_n = 0$, akkor ismét:*

$$\lim. (a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0) = 0.$$

Ha ismét a lim. jele alatt álló kifejezést két részre, A és B-re bontjuk föl, akkor B-re közvetetlenül alkalmazhatók a 116. cz. elején álló meggondolások, hol most

$$s_0 = \beta_{n-k-1}, \; s_1 = \beta_{n-k-1} + \beta_{n-k-2}, \ldots,$$

melyeknek absolut értékei, minthogy $\sum\limits_0^\infty \beta_n$ összetartó és ezek nem mások, mint az eredetileg R_{ij}-vel jelölt kifejezések, egy bizonyos véges határ, H alatt maradnak. Ha tehát K-t úgy választjuk, hogy $a_i < \delta$, ha $i > K$, akkor:

$$B < H\delta.$$

A mi pedig A-t illeti, a már idézett tétel szerint:

$$A < a_0 G$$

ha G a

$$|\beta_n|, |\beta_n + \beta_{n-1}|, \ldots, |\beta_n + \beta_{n-1} + \ldots + \beta_{n-k}|$$

számoknál nagyobb. Ha azonban $n-k$-t egy bizonyos N-nél nagyobbnak veszszük, azaz:

$$n > K + N,$$

e kifejezés:

$$\beta_{n-k+i} + \beta_{n-k+i} + \ldots + \beta_n$$

(ismét a $\sum\limits_0 \beta_n$ összetartó sorra vonatkozólag képezett $R_{n-k+i,\,k-i}$) kisebb lesz egy tetszőlegesen választott δ'-nél az i minden nem negativ egész értékénél, azaz

$$A < a_0 \delta',$$

a miből, úgy mint előbb, következik, hogy a vizsgált határérték 0.*

A Cauchy-Mertens-féle tétel.

120. Ha $\sum\limits_0^\infty u_n$ és $\sum\limits_0^\infty v_n$ két összetartó végtelen sor, melyeknek értéke U, ill. V, akkor e számok szorzása a soralakokon is végezhető, p. úgy, hogy az u-sor minden tagját $V = \sum\limits_0^\infty v_n$-nel szorozzuk. Az eredmény — részletesen kiírva — a következő:

$$\begin{array}{l} u_0 (v_0 + v_1 + \ldots + v_m + \ldots) + \\ + u_1 (v_0 + v_1 + \ldots + v_m + \ldots) + \\ + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ + u_n (v_0 + v_1 + \ldots + v_m + \ldots) + \\ + \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \end{array}$$

tehát ismét végtelen sor, melyben azonban minden tag értéke ismét végtelen sor alakjában van adva.

Két végtelen sor szorzata azonban oly közönséges végtelen sor alakjában is adható, melynek n-edik tagját az adott sorok első n tagján végzett (véges számú) összeadás és szorzás által nyerjük. Első sorban a következő tételt** tárgyaljuk:

Ha $\sum\limits_0^\infty u_n$ *és* $\sum\limits_0^\infty v_n$ *két összetartó sor, melyek közül legalább egy*

* E tételeket inkább csak a gyakran használandó módszer jobb föltüntetése végett bocsátjuk előre; számuk nagyban szaporítható, de czélszerűbb, az egyes helyeken az itt adott eljárást külön-külön alkalmazni.

** Tételünket Cauchy bizonyította be először, de csak arra az esetre, midőn mindkét sor föltétlenül összetartó. («Cours d'analyse algèbrique.» Paris 1821.) A föntebb adott általánosabb fogalmazásban Mertens-től származik. (Journal f. d. r. u. a. Math. 79. köt. 1875.)

föltétlenül összetartó, akkor a $\sum\limits_0 t_n$ *sor, melynek általános törvénye:*

$$t_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0,$$

szintén összetartó és:

$$\sum_0^\infty t_n = \left(\sum_0^\infty u_n\right)\left(\sum_0^\infty v_n\right)$$

Ha a t-sor első tagjait részletesen kiírjuk:

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots$$

a véges összegek szorzatával rokon alakja közvetetlenül föltünik. Azonban a szorzás részletes tárgyalásából majd kitünik, hogy a véges összegekre vonatkozó műveleti szabályok itt sem vihetők át megszorítás nélkül a végtelen összegek, vagyis sorok esetére.

Ha ismét:

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$
$$S_n' = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

akkor az $S_n S_n'$ szorzat tagjai a következő táblázatba foglalhatók:

$$\begin{array}{l} u_0 v_0 + u_0 v_1 + \ldots + u_0 v_n + \\ + u_1 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_1 v_n + \\ + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ + u_n v_0 + u_n v_1 + \ldots + u_n v_n. \end{array}$$

Ha megfelelőleg a $\sum\limits_0 t_n$ sorra vonatkozólag:

$$S_n'' = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0),$$

akkor közvetetlenül látni, hogy ez összeg egyes tagjai azok, melyek az előbb fölirt táblázatban — könnyen érthető kifejezéssel élve — az $u_n v_0, \ldots, u_0 v_n$ diagonálisban, és e fölött, tőle balra foglalnak helyet. E szerint még:

$$S_n'' = S_n S_n' - \big(u_n (v_1 + \ldots + v_n) + u_{n-1} (v_2 + \ldots + v_n) + \ldots + \\ + u_2 (v_{n-1} + v_n) + u_1 v_n\big)$$

Legyen most például — a mi különben közömbös — $\sum\limits_0^\infty u_n$ a föltétlenül összetartó sor és D_n a jobboldalon levonandó kifejezés, akkor csakugyan bebizonyíthatjuk, hogy:

$$\lim. D_n = 0.$$

Ebből azután következik, ha az előbb fölírt alakzatban átmegyünk a határra, hogy:

$$\lim. S''_n = \lim. S_n \lim. S_n,$$

a mi nem más, mint a bebizonyitandó tétel.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy az

$$R_{n,k} = v_n + v_{n+1} + \ldots v_{n+k}$$

kifejezésben a $\sum\limits_0^\infty v_n$ összetartása miatt van mindig egy a tetszőlegesen választott δ'-hoz tartozó N' szám úgy hogy, a k minden nem negativ egész értékénél:

$$|R'_{n,k}| < \delta',$$

hacsak $n > N'$.

Ha $n \leqq N'$ az $R'_{n,k}$ alakok k nagyobbodásával a véges és meghatározott R'_n-hez közelednek, tehát absolut értékükre nézve szintén egy bizonyos szám alatt maradnak; azaz végre van egy H' szám, úgy hogy i és j minden értékénél:

$$|R'_{ij}| < H'.$$

Ugyanez áll szóról-szóra a $\sum\limits_0^\infty |u_n|$ sorra nézve, azaz, ha

$$\bar{R}_{i,k} = |u_i| + |u_{i+1}| + \ldots + |u_{i+k}|,$$

akkor van egy H szám, melyre nézve az i és k minden értékénél

$$\bar{R}_{i,k} < H.$$

De van azonkívül még egy a tetszőlegesen választott $\bar{\delta}$-hoz tartozó, $\bar{N}$ szám, úgy hogy

$$\bar{R}_{n,k} < \bar{\delta},$$

ha $n < \bar{N}$.

Most már:

$$|D_n| \leqq |u_n(v_1 + \ldots + v_n) + \ldots + u_{n-k}(v_{k+1} + \ldots + v_n)| +$$
$$+ |u_{n-k-1}(v_{k+2} + \ldots + v_n) + \ldots + u_2(v_{n-1} + v_n) + u_1 v_n|. \quad (1)$$

Továbbá:

$$|u_{n-k-1}(v_{k+2}+\ldots+v_n)+\ldots+u_1v_n|\leqq|u_{n-k-1}||R_{k+2,n-k-2}|+$$
$$+|u_{n-k-2}||R'_{k+3,n-k-3}|+\ldots+|u_1||R_{n,0}|.$$

Ha tehát k-t az N'-nél nagyobbnak veszszük, a mi elég nagy n-nél lehetséges, akkor a jobboldalon álló szorzatok második tényezője kisebb δ'-nál és az egész vizsgált kifejezés:

$$\leqq(|u_1|+\ldots+|u_{n-k-1}|)\delta'$$
$$\leqq H\delta'.$$

Az első (1.)-ben előforduló kifejezés:

$$|u_n(v_1+\ldots+v_n)+\ldots+u_{n-k}(v_{k+1}+\ldots+v_n)|\leqq|u_n||v_1+\ldots+v_n|+\ldots$$
$$+\ldots+|u_{n-k}||v_{k+1}+\ldots+v_n|\leqq(|u_{n-k}|+\ldots+|u_n|)H$$

és ha most k előbb megállapitott értéke mellett n-et úgy választjuk, hogy

$$n-k>N$$

akkor végre e kifejezés:

$$\leqq H'\delta.$$

Ha most ε egy tetszőleges pozitiv szám és

$$\delta'\leqq\frac{\varepsilon}{2H},\ \delta<\frac{\varepsilon}{2H'},$$

akkor végre elég nagy n-nél:

$$|D_n|\leqq H'\delta+H\delta'\leqq\varepsilon.$$

azaz $\lim. D_n=0$.

Abel tétele.

121. *Ha e sorok:*

$$\sum_0^\infty u_n,\ \sum_0^\infty v_n,\ \sum_0^\infty t_n=\sum_0^\infty(u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots+u_nv_0)$$

mindannyian összetartók, akkor mindig:

$$\sum_0^\infty t_n = (\sum_0^\infty u_n)(\sum_0^\infty v_n).$$

E tétel * értelmében a szorzási eljárás mindig alkalmazható — akár föltétlenül, akár föltétesen — összetartó sorokra, ha a segítségével nyert sor összetartó. Bebizonyítása után az előbbi eredmények — evvel kapcsolatosan — következőkép lesznek kifejezhetők:

A $\sum_0^\infty t_n$ *sor mindig összetartó, ha a* $\sum_0^\infty u_n$, $\sum_0^\infty v_n$ *soroknak legalább egyike föltétlenül összetartó.*

Ha a három soralak mindegyike véges és meghatározott számot jelent, akkor mindenesetre

$$(\sum_0^\infty u_n)(\sum_0^\infty v_n) - \sum_0^\infty t_n = \varDelta$$

szintén ily szám. Bebizonyítandó, hogy ez zérus.

Ha $|\alpha| < 1$, , a $\sum_0^\infty u_n\alpha^n$, valamint a többi megfelelőleg képezett sor föltétlenül összetartó, és tehát az előbb levezetett tétel értelmében

$$(\sum_0^\infty u_n\alpha^n)(\sum_0^\infty v_n\alpha^n) - \sum_0^\infty t_n\alpha^n = 0$$

az α minden -1 és $+1$ közt fekvő valós értékénél.

A $\sum_0^\infty u_n\alpha^n$ és $\sum_0^\infty v_n\alpha^n$ szorzásánál ugyanis a szorzat gyanánt föllépő sor általános tagja:

$$u_0v_n\alpha^n + u_1\alpha \,.\, v_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + u_n\alpha^n \,.\, v_0 = t_n\alpha^n.$$

E szerint az α jellemzett értékeinél mindig:

$$\varDelta = (\sum_0^\infty u_n)(\sum_0^\infty v_n) - (\sum_0^\infty u_n\alpha^n)(\sum_0^\infty v_n\alpha^n) - (\sum_0^\infty t_n - \sum_0^\infty t_n\alpha^n) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[(\sum_0^\infty u_n - \sum_0^\infty u_n\alpha^n)(\sum_0^\infty v_n + \sum_0^\infty v_n\alpha^n) + (\sum_0^\infty u_n + \sum_0^\infty u_n\alpha^n)(\sum_0^\infty v_n - \sum_0^\infty v_n\alpha^n)\Big]$$

$$- (\sum_0^\infty t_n - \sum_0^\infty t_n\alpha^n).$$

* Lásd Abel előbb idézett értekezését.

Az α-t mint pozitiv és 1-nél kisebb számot ugy lehet választani, (117. cz.) hogy

$$|\sum_0^\infty u_n - \sum_0^\infty u_n\alpha^n|, \ |\sum_0^\infty v_n - \sum_0^\infty v_n\alpha^n|, \ |\sum_0^\infty t_n - \sum_0^\infty t_n\alpha^n|$$

mindannyian kisebbek legyenek egy tetszőlegesen választott ε pozitiv számnál. Ha a $\sum\limits_0^\infty u_n$ és $\sum\limits_0^\infty v_n$ véges és meghatározott értékeit U ill. V-vel jelöljük, akkor még:

$$|\sum_0^\infty u_n\alpha^n| < |U| + \varepsilon < 2|U|,$$

$$|\sum_0^\infty v_n\alpha^n| < |V| + \varepsilon < 2|V|,$$

és így végre:

$$|\Delta| < \varepsilon\left(\tfrac{3}{2}(|U| + |V|) + 1\right)$$

Ha pedig Δ nem zérus és ε-t ugy választjuk, hogy:

$$\varepsilon < \frac{|\Delta|}{\frac{3}{2}(|U|+|V|)+1},$$

a mi mindenesetre meg van engedve, akkor a $|\Delta| < |\Delta|$ ellenmondáshoz jutunk. Kell tehát valóban, hogy legyen:

$$\Delta = 0.$$

122. Ha $\sum\limits_0^\infty u_n$ és $\sum\limits_0^\infty v_n$ mindketten föltétesen összetartó sorok, a $\sum\limits_0^\infty t_n$ sor valóban összetartó és széttartó is lehet, azaz általánosságban a szorzási eljárásra nézve a megelőző czikkben foglalt eredményeknél többet nem is lehet megállapitani. Mindkét esetre egy-egy példát hozunk föl.

a) Legyen:

$$\sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty v_n = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \ldots,$$

mely a 106. czikk tétele szerint összetartó. Ekkor:

$$t_n = (-1)^n\left(\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(3(n-1))^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Ezen összeg $n+1$ tagból áll, az összeg tagjainak általános alakja:

$$\frac{1}{(k(n+2-k))^{\frac{1}{2}}}. \quad (k=1,\ldots n+1)$$

Azonban: *

$$k(n+2-k) \leqq \left(\frac{n+2}{2}\right)^2,$$

és így:

$$|t_n| \geqq (n+1)\frac{2}{n+2} \geqq 1,$$

ha t. i. a $(-1)^n$ elhagyása után minden tagban a nevezőt a nála nem kisebb $\frac{n+2}{2}$-vel fölcseréljük és ez által az illető tag értékét kisebbítjük.

E szerint lim. t_n nem 0; és a $\sum\limits_0^\infty t_n$ sor széttartó.

b) Legyen:

$$\sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty v_n = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

ismét összetartó sor. Ekkor:

$$t_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3(n-1)} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right).$$

---

* Ha x, és y két valós szám, mely azon föltételhez van kötve, hogy:

$$x+y=A,$$

akkor:

$$xy \leqq \frac{A^2}{4}.$$

Az x, y bármely megfelelő értékpárja ugyanis $\frac{A}{2}+d$ és $\frac{A}{2}-d$ alakban irható, és ekkor csakugyan:

$$xy = \left(\frac{A}{2}+d\right)\left(\frac{A}{2}-d\right) = \frac{A^2}{4} - d^2 < \frac{A^2}{4}.$$

A fönt előforduló esetben $A = n+2$, míg k és $n+2-k$ ez összeg fölbontása két részre és így csakugyan

$$k(n+2-k) \leqq \frac{(n+2)^2}{4}.$$

Összefoglalva ezen összegben az első és utolsó, 2-ik és utolsó előtti tagot, s ú. t. (ezek mindig egyenlők) kimerítjük az összes tagokat, ha n páratlan (azaz a tagok száma $n+1$ páros), vagy marad egy középső tag, és így az előjelt is mellőzve, lesz *páratlan* n-nél:

$$|t_n| = 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{\frac{n+1}{2}\,\frac{n+3}{2}}\right),$$

páros n-nél:

$$|t_n| = 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{\frac{n}{2}\,\frac{n+4}{2}}\right) + \frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}.$$

Itt a zárjelben álló összeg mindkét esetben következőkép irható.

$$T_n = \frac{1}{1}\,\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{k}\,\frac{1}{n+2-k} +$$
$$+ \frac{1}{k+1}\,\frac{1}{n-k+1} + \ldots + \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{n+2-\nu}$$

hol ν, a mint n páros, vagy páratlan $\frac{n}{2}$ vagy $\frac{n+1}{2}$, a mit egyszerre így lehet kifejezzünk:

$$\nu = \mathcal{E}\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Ha röviden a T_n-nek az első és második sorban álló részét $A_{n,k}$ és $B_{n,k}$-val jelöljük, mindenekelőtt

$$B_{n,k} < \frac{1}{k+1}\,\frac{\nu-k}{n+2-\nu},$$

mely kifejezés $B_{n,k}$-ból úgy származik, ha minden tagban az első és második tényező helyett a náluk nem kisebb $\frac{1}{k+1}$ és $\frac{1}{n+2-\nu}$ számokat teszszük; de $\nu - k < n + 2 - \nu$, és így (természetesen $k < \nu$)

$$B_{n,k} < \frac{1}{k+1}.$$

Az összeg első részére vonatkozólag hasonló módon lesz:

$$A_{n,k} < \frac{k}{n+2-k}.$$

Ha tehát

$$\frac{1}{k+1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k+1 > \frac{2}{\varepsilon},$$

és

$$\frac{k}{n+2-k} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > \frac{k+(k-2)\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{1}{2}\varepsilon},$$

a mi mellett ε kis értékeinél egyszersmind

$$n < 2k,$$

akkor végre:

$$T_n = A_{n,k} + B_{n,k} < \varepsilon$$

és így lim. $T_n = 0$, és evvel együtt

$$\lim. t_n = 0.$$

A $\sum\limits_0^\infty t_n$ sornak azonban oly speciális alkata van, melynél az összetartásnak ezen általánosságban csak szükséges föltétele egyszersmind elegendő is. Sorunk összetartása a következő általános tétel közvetetlen következménye.

123. *Ha $a_0, a_1, \dots a_n \dots$ soha nem nagyobbodó pozitiv számok sorozata, melyekre nézve lim. $a_n = 0$, és így tehát*

$$\sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty (-1)^n a_n$$

legalább föltétesen összetartó sor, ha továbbá $\sum\limits_0^\infty v_n = \sum\limits_0^\infty (-1)^n b_n$ szintén összetartó, akkor a:*

$$\sum_0^\infty t_n = \sum_0^\infty (-1)^n (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)$$

*sor összetartásának szükséges és elegendő föltétele:***

$$\lim. t_n = \lim. (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) = 0.$$

A következő jelzések bevezetése után:

$$U_m = u_{2m} + u_{2m+1} = a_{2m} - a_{2m+1}$$
$$V_m = v_{2m} + v_{2m+1} = b_{2m} - b_{2m+1}$$

* A b_n-ek, ép úgy mint a v_n-ek az összetartási föltételnek megfelelnek, de különben tetszőlegesen választhatók. Hogy v_n helyett $(-1)^n b_n$-et irunk, csak azért történik, hogy a képletek egyszerűbb alakot nyerjenek.

** Pringsheim, Mathematische Annalen, XXI. kötet, p. 326.

a következő sorok

$$\sum_0^\infty U_m = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \dots$$
$$\sum_0^\infty V_m = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + \dots$$

összetartók lesznek, mert a $\sum_0^\infty u_n$, $\sum_0^\infty v_n$ - ből keletkeznek két-két egymásután következő tag összefoglalása által, még pedig $\sum_0^\infty u_m$ föltétlenül összetartó, mert csupán pozitiv tagokból áll. Tehát

$$(\sum_0^\infty u_n)(\sum_0^\infty v_n) = (\sum_0^\infty U_m)(\sum_0^\infty V_m) =$$
$$= \sum_0^\infty (U_0 V_m + U_1 V_{m-1} + \dots + U_{m-1} V_1 + U_m V_0),$$

hol az utolsó sor szintén összetartó. Ha e sor általános tagját T_m-mel jelöljük:

$$\sum_0^m T_m = \sum_0^m \{(a_0 - a_1)(b_{2m} - b_{2m+1}) + (a_2 - a_3)(b_{2m-2} - b_{2m-1}) + \dots +$$
$$(a_{2m-2} - a_{2m-1})(b_2 - b_3) + (a_{2m} - a_{2m+1})(b_0 - b_1)\} =$$
$$= \sum_0^{2m+1} t_n + (a_1 b_{2m+1} + a_3 b_{2m-1} + \dots + a_{2m-1} b_3 + a_{2m+1} b_1)$$
$$= \sum_0^{2m+2} t_n - (a_0 b_{2m+2} + a_2 b_{2m} + \dots + a_{2m} b_2 + a_{2m+2} b_0).$$

Ha tehát:

$$\lim. \tau_1 = \lim. (a_0 b_{2m+2} + a_2 b_{2m} + \dots + a_{2m+2} b_0) = 0,$$
$$\lim. \tau_2 = \lim. (a_1 b_{2m+1} + a_3 b_{2m-1} + \dots + a_{2m+1} b_1) = 0,$$

akkor csakugyan

$$\lim_m. \sum_0^{2m+1} t_n = \lim_m. \sum_0^{2m+2} t_n = \lim_m. \sum_0^m T_m,$$

azaz a kijelentett tételnek megfelelőleg:

$$\sum_0^\infty t_n = (\sum_0^\infty u_n)(\sum_0^\infty v_n),$$

Ami pedig a még kiszámitandó határértéket illeti:

$$\tau_1 - \tau_2 = \sum_0^{m+1} k (a_{2k} b_{2m-2k+2} - a_{2k+1} b_{2m-2k+1}) =$$

$$= \sum_0^m k \left\{ (a_{2k} - a_{2k+1}) (b_{2m-2k+2} + b_{2m-2k+1}) + \right.$$
$$\left. + (a_{2k} + a_{2k+1}) (b_{2m-2k+2} - b_{2m-2k+1}) \right\};$$

de

$$\lim. \sum_0^m k \left\{ (a_{2k} - a_{2k+1}) (b_{2m-2k+2} + b_{2m-2k+1}) \right\} = 0$$

a 118. cz. értelmében, mert ha

$$\alpha_k = a_{2k} - a_{2k+1}, \quad \beta_k = b_{2k+1} + b_{2k+2},$$

akkor csakugyan $\sum_0 \alpha_n$ föltétlenül összetartó és lim. $\beta_n = 0$.

Hasonlóképen

$$\lim. \sum_0^m k \left\{ (a_{2k} + a_{2k+1}) (b_{2m-2k+2} - b_{2m-2k+1}) \right\} = 0$$

a 119. czikk értelmében, mert ha most

$$\alpha_k = a_{2k} + a_{2k+1}, \quad \beta_k = b_{2k+2} - b_{2k+1}$$

akkor $\alpha_0, \alpha_1 \ldots$ soha nem nagyobbodó pozitiv számok sorozata, melyekre nézve lim. $\alpha_n = 0$, míg $\sum_0 \beta_n = \sum_0 V_n$ összetartó sor. Tehát:

$$\lim. (\tau_1 - \tau_2) = 0,$$

és ha tekintetbe veszszük, hogy $\tau_1 + \tau_2 = t_{2m+2}$, akkor a tételben kimondott föltétel értelmében:

$$\lim. (\tau_1 + \tau_2) = 0,$$

végre ezekből csakugyan:

$$\lim. \tau_1 = \lim. \tau_2 = 0,$$

a mi még bebizonyítandó volt.

Többszörös sorok.

124. Legyen adva a számok határtalan sorozata oly általános törvény segítségével, mely az

$$n_1, n_2, \ldots n_p$$

mutatók minden nem negativ egész számokból álló értékrendszeréhez megadja a hozzá tartozó számot. Ennek jele legyen:

$$u_{n_1, n_2, \ldots n_p}.$$

Ha e számok sorozatából kiveszszük mindazokat, melyekben

$$n_1 \leqq \nu_1, n_1 \leqq \nu_2, \ldots, n_p \leqq \nu_p,$$

keletkezik az úgy nevezett p-szeres összeg:

$$\sum_0^{\nu_p} {}^{n_p} \cdots \sum_0^{\nu_2} {}^{n_2} \sum_0^{\nu_1} {}^{n_1} u_{n_1\, n_2 \ldots n_p}.$$

Ha $p=1$, a számsor alakja megegyezik az eddig tárgyalttal, és a mint láttuk, — bizonyos esetekben — a számsorozat mint ilyen, vagy pontosabban beszélve, az ennek számait értelmező általános törvény — meghatároz egy bizonyos számértéket, a $\sum_0^{\infty} u_n$ végtelen sor összegét, ha ez t. i. föltétlenül összetartó. A föltétes összetartás esetében ez többé nem áll, hanem csak akkor jutunk egy bizonyos érték megalapitásához, ha a számsorozat tagjainak egymásutánját, mint a meghatározását új elemét bevezetjük.

A most adott számsorozatból hasonló módon képezünk p-szeresen végtelen sort, melynek először is jele:

$$\sum_0^{\infty} {}^{n_p} \cdots \sum_0^{\infty} {}^{n_2} \sum_0^{\infty} {}^{n_1} u_{n_1\, n_2 \ldots n_p}.$$

vagy rövidebben:

$$\sum_0^{\infty} {}^{n_p, \ldots, n_1} u_{n_1\, n_2 \ldots n_p}.$$

Ama határtalan számsorozatnak, vagy mint most mondjuk, *a p-szeresen végtelen sornak van összege* — és ez összeg *akkor S* — *ha lehet egy véges, meghatározott számot S-et meghatározni, melynek a következő tulajdonságai vannak: Az ε alatt egy tetszőleges (kicsiny) pozitiv számot értve, lehet a számsorozatból meghatározott számmal lévő tagokat úgy kijelölni, hogy e tagok összege Σ lévén:*

$$|\Sigma - S| < \varepsilon,$$

és hogy továbbá, ha e tagok összegéhez még akárhány tagot hozzácsatolunk, az új összegre, mely p. Σ' legyen, szintén álljon, hogy:

$$| \Sigma' - S | < \varepsilon.$$

Ha van ily szám S, a végtelen sort *föltétlenül összetartónak* mondjuk.

Hogy több, mint egy ily szám nem lehetséges, könnyen belátható. Legyen S_1 és S_2 két ily szám, és Σ'_1, Σ'_2 a tagoknak két oly összege, hogy

$$| \Sigma'_1 - S_1 | < \varepsilon, \; | \Sigma'_2 - S_2 | < \varepsilon,$$

akkor képezzük mindazon tagok összegét, melyek Σ'_1 vagy Σ'_2-ben előfordulnak. Legyen ez Σ', akkor a definicziók értelmében, minthogy Σ' úgy Σ'_1, mint Σ'_2-ből a tagok szaporítása által keletkezik:

$$| \Sigma' - S_1 | < \varepsilon, \; | \Sigma' - S_2 | < \varepsilon$$

és ebből:

$$| S_1 - S_2 | < 2\varepsilon.$$

E szerint a két szám különbségének absolut értéke egy tetszőlegesen választható pozitiv számnál is kisebb volna, azaz: $S_1 = S_2$.

125. Hogy a p-szeresen végtelen sor *föltétes összetartásáról*, vagyis azon összegek határértékéről beszélhessünk, melyekhez a tagok egymásutánjának megállapítása után jutunk, ha a tagszámot szakadatlanúl növesztjük, szükséges az $u_{n_1 n_2 \ldots n_p}$ által jellemzett számsorozat rendezési viszonyait megállapítani.

Mindenekelőtt könnyű belátni, hogy a most vizsgált számsorozat tagjait lehet egyszerűen határtalan számsorozatban is kiírni. Ez más fogalmazásban annyit jelent, hogy ama sokaság, melynek egy-egy eleme az $n_1, n_2 \ldots n_p$ mutatóknak egy-egy nem negativ egész számokból álló értékrendszere, megszámlálható sokaság; tehát az $u_{n_1 n_2 \ldots n_p}$ számsorozat és a $0, 1, 2, \ldots n, \ldots$ határtalan sorozat úgy vonatkoztathatók egymásra, hogy az egyik sorozat egy bizonyos — meghatározott mutató rendszer által jellemzett — tagjának megfelel a másik sorozat egy bizonyos, meghatározott mutató által jellemzett tagja és viszont; még pedig úgy, hogy ha $u_{n_1 n_2 \ldots n_p}$-nek megfelel u_n, ismét u_n-nek megfelel $u_{n_1 n_2 \ldots n_p}$. Különösen két ily vonatkoztatás, illetőleg az $u_{n_1 n_2 \ldots n_p}$ számsorozat két elrendezése szokott használtatni.

a) Két tag közül irjuk előre azt, melyben a mutatók összege kisebb. Tehát $u_{m_1 m_2 \dots m_p}$ az $u_{n_1 n_2 \dots n_p}$ elé vagy utána kerül, a mint

$$m_1 + m_2 + \dots m_p \lesseqgtr n_1 + n_2 + \dots + n_p;$$

ama tagok pedig, melyekben a mutatók összege egyenlő, úgy rendezzük, hogy azt a tagot írjuk előre, melyben, ha p. a k-adik mutató az első, mely nem egyenlő a két tagban, $m_k < n_k$.

A kétszeresen végtelen számsorozatnál, például, melynek tagjait részletesen legjobban következő módon jellemezzük:

$$\begin{array}{cccccccc}
u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} & \dots & u_{0n_2} & \dots \\
u_{10} & u_{11} & {}_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n_2} & \dots \\
u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n_2} & \dots \\
u_{30} & u_{31} & u_{32} & u_{33} & \dots & u_{3n_2} & \dots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \\
u_{n_1 0} & u_{n_1 1} & u_{n_1 2} & u_{n_1 3} & \dots & u_{n_1 n_2} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Ezen elrendezés a következő:

$$u_{00},\ u_{01},\ u_{10},\ u_{02},\ u_{11},\ u_{20}, \dots u_{0n},\ u_{1,n-1},\ u_{2\,n-2}, \dots u_{n0}, \dots$$

a mit ugy lehet leirni, hogy ama táblázatban, melynek alakja egy négyzet vagy parallelogramm két oldalának szakadatlan nagyobbodásából keletkezik, a négyzetek egymásután következő diagonálisaiban fekvő (a táblázatban vonások által összekötött) tagokat irjuk egymásután, az egyes diagonálisokban fekvő tagokat pedig felülről lefelé.

Hogy e berendezésnél minden u-nak egy bizonyos helyszám felel meg, és hogy e helyszám megfordítva megadja az illető u-t, az közvetetlenül világos.

b) A második elrendezés a következő. Ha $a_1, a_2, \dots a_p$ a mutatókhoz tartozó bizonyos meghatározott számok, és az $m_1 - a_1$, $m_2 - a_2, \dots m_p - a_p$, ill. $n_1 - a_1$, $n_2 - a_2, \dots n_p - a_p$ számok legnagyobbika M, illetőleg N az $u_{m_1 m_2 \dots m_p}$ az $u_{n_1 n_2 \dots n_p}$ elé vagy utána kerül, a mint $M < N$, vagy $M > N$.

Azon tagok sorából pedig, melyekben $M = N$, irjuk utolsóknak azokat, melyekben $m_1 = a_1 + M$, eléjök azokat, melyekben $m_2 = a_2 + M$, s ú. t. ezen osztályokat ugyanazon szabályok szerint rendezve, de az m_1 ill. $m_2 \dots$ mutatót már most teljesen mellőzve.

Igy p. ha $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, a kétszeresen végtelen számsorozat elrendezése következő módon jellemezhető:

$$\begin{array}{cccccc}
u_{00} & u_{01} & u_{02} & \dots & u_{0,n_1-1} & \dots \\
u_{10} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1,n_1-1} & \dots \\
u_{20} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,n_1-1} & \dots \\
u_{30} & u_{31} & u_{32} & \dots & u_{3,n_1-1} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
u_{n_1 0} & u_{n_1 1} & u_{n_1 2} & & u_{n_1,n_1-1} & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

hol az egymásután következő osztályok vonások által vannak elkülönítve, és az egyes osztályokban, melyek a parallelogramm két oldalának felelnek meg, a tagok sorrendje meg van adva, ha azokat fölülről lefelé, és ha u_{n_1,n_1-1}-hez értünk, ismét balfelé olvassuk.

E berendezések leirása, mint mindjárt megjegyezhetjük, azt is mutatja, hogy bármely egyszerűen végtelen számsorozat tagjait p-szeresen végtelen sorozatba is lehet elhelyezni. Igy lesz az $u_1, u_2 \dots u_n \dots$ sorozatból a $b)$ alatt tárgyalt módon az $a_1 = a_2 = 0$ esetnek megfelelőleg a következő kétszeresen végtelen sorozat:

$$\begin{array}{cccccccc}
u_0 & u_1 & u_4 & u_9 & \dots & u_{n^2} & \dots \\
u_3 & u_2 & u_5 & u_{10} & \dots & u_{n^2+1} & \dots \\
u_8 & u_7 & u_6 & u_{11} & \dots & u_{n^2+2} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
u_{n^2+2n} & & \dots & & \dots & u_{n^2+n} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Szintúgy könnyű belátni, hogy azon megállapitás, mely szerint a mutatók minden nem negativ egész számú értéket nyerhetnek, csak egyszerűségénél fogva kényelmes megállapitás. Mellőzve

14*

azon változtatást, melyben a mutató nem a $0, 1 \ldots$, hanem a $k, k+1, \ldots$ értékeket veszi föl, a hol egyszerűen $v_{n+k} = u_n$, és hasonló egyszerű átalakításokat, a két irányban végtelen sorok is könnyen az eddigi alakra hozhatók. Ha az n minden egész számú értékéhez tartozik az u_n egy meghatározott értéke, ha továbbá e számsorozatot $v_0, v_1, v_2, \ldots v_n$ következőkép definiáljuk:

$$v_0 = u_0, \; v_1 = u_1, \; v_2 = u_{-1}, \; v_3 = u_2, \; v_4 = u_{-2}, \ldots$$
$$v_{2n-1} = u_n, \; v_{2n} = u_{-n}, \ldots$$

akkor a $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} u_n$ és $\sum\limits_{0}^{\infty} v_n$ sorok ugyanazon tagokból állanak, ámbár különböző elrendezésben.

A $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}$ által adott elrendezésnél:

$$\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots$$

még a sorrend külön értelmezendő; ekkor egy bizonyos u_k-tól jobb és balfelé haladva két összeget képezünk, mely azután egyesitendő. E szerint:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n = u_0 + \sum_{1}^{\infty} u_n + \sum_{1}^{\infty} u_{-n}.$$

126. Bármely számsorozat összes elrendezéseit egy közönséges $u_0, u_1 \ldots u_n$ számsorozat elrendezéseiből nyerhetjük, mert először ilyenre mehetünk át, és a további átalakításoknál ebből indulhatunk ki.

A megelőző fejezetben már tanulmányoztuk azokat az átalakításokat, melyeknél a tagok egymásutánja változást szenved, de az egyszerű soralak változatlan marad. A megelőző czikk azt mutatja, hogy ezenkívül még az egyszerű számsorozat helyébe k-szoros sorozat léphet, hol k tetszőleges; ha t. i. a tagok egymásutánjának fölcserélése után az adott eljárások segítségével az egyszerű sorozatból k-szoros sorozatot készítünk.

Mindezen tárgyalt és tárgyalandó átalakítások közös vonása, hogy a két sorozat ugyanazon tagokból áll, azaz, hogy minden tag, melyet az egyik elrendezésben a mutatók meghatározott értékrendszere jellemez, a másik elrendezésben, mint a mutatók valamely más meghatározott értékrendszerének megfelelő tag szintén előfordul.

A véges összegek analogiája azonban a sorozatoknak még más és általánosabb berendezéseihez vezet. Az összegnek azon képezése mellett, melynél egy első taghoz egymásután hozzácsatoljuk a 2-ik, 3-ik tagot s ú. t. és melyet eddig egyedűl használtunk a soroknál, általánosabban úgy is járhatunk el, hogy az összeg tagjait először több osztályba sorozzuk, először az egy osztályba tartozó tagok összegét képezzük és azután ezen osztályösszegeket meghatározott sorrendben ismét összeadjuk. Az egyes osztályösszegek képezése természetesen ismét ily módon történhetik. Ily berendezés határtalan számsorozatnál ismét új végösszegekhez vezet. Az eljárás módja a következő lesz:

Megállapitunk egy általános törvényt, mely szerint minden $u_{n_1 n_2 \ldots n_p}$ egy bizonyos meghatározott osztályba, C_k, tartozik. Az osztályok sorozata:

$$C_0, C_1, \ldots C_i, \ldots C_k, \ldots$$

lehet véges vagy ismét határtalan. Minden osztályban az összeadás módja meglévén adva, az egyes osztály összegek legyenek:

$$S_0, S_1, \ldots S_i, \ldots S_k, \ldots$$

Akkor végre a $\sum_0^\infty u_{n_1 n_2 \ldots n_p}$ sor összege az illető elrendezésben e véges vagy végtelen sor:

$$S_0 + S_1 + \ldots + S_k + \ldots$$

Az egyes osztályokba tartozó tagok száma lehet véges vagy ismét határtalan. Az utóbbi esetben adva lehet közvetetlenül a tagok egymásutánja, és az osztályösszeg alatt akkor értjük az illető végtelen sor értékét; vagy pedig az illető C_i osztályra vonatkozólag ismételhetjük az előbbi eljárást, és fölbontjuk ezt véges vagy határtalan számú alosztályra:

$$C_{i1}, C_{i2}, \ldots C_{i3}, \ldots$$

Ezekre nézve ismét ugyanez áll, míg végre ezen eljárás k-adrangú alosztályok képezésével véget ér, melyeknek belsejében az összes tagok egymásutánja meg van adva, mit úgy is lehet kifejezni, hogy a $k+1$-edrangú alosztályok egy-egy tagból állanak.

Ha valahol az egyik képezendő sor az adott elrendezésben nem összetartó, akkor ott természetesen az egész eljárás megszakad, mert az illető összeg nem véges, meghatározott szám, és maga az eredetileg adott sor az illető elrendezésben széttartó, azaz nem vezet meghatározott végösszeghez.

Itt azután a szó szoros értelmében p-szeresen végtelen sorokat nyerünk, a mikor kétszeresen végtelen sor az oly (közönséges) végtelen sor, melynek minden egyes tagja szintén ilyen; háromszorosan végtelen a kétszeresen végtelen sor alakjában adott tagokból alakuló közönséges végtelen sor, vagy közönséges végtelen sor alakú tagokból alakuló kétszeresen végtelen sor s ú. t.

Egyik legegyszerűbb ily fölbontása a $\Sigma u_{n_1 n_2}$ sornak, ha a C_i osztályba azon tagokat sorozzuk, melyekben az első mutató i, az egy-egy osztályba tartozó tagokat pedig a második mutató nagysága szerint rendezzük. Ez az osztályozás képét találja az előbb fölirt táblázatban; az egy *sor*ban álló tagok egy-egy osztályt alkotnak, e tagok összeadása után — ha összegük a fölirt sorrendben véges — az egymás alatt álló sorok az utoljára képezendő végtelen sor egyes tagjait képviselik, mely utóbbi sor azután az illető elrendezésben $\Sigma u_{n_1 n_2}$ összege. — Ép úgy lehet először *oszlopon*ként osztályozni, vagyis az egyenlő második mutatóval biró, a táblázatban egymás alatt álló tagokat először összefoglalni s ú. t.

A lehetséges berendezések nagy változatosságából kiemeljük még azt, melynél az osztályok száma határtalan, és a $C_0, C_1, C_2, \ldots C_k, \ldots$ osztályban foglalt tagok száma

$$r_0, r_1, r_2, \ldots r_k, \ldots,$$

minden határon túl növekedő egész számok sorozata által van adva.

Igy ha például a 125. czikkben *a)* és *b)* alatt álló alakzatok értelmében ezen egyes osztályok a diagonálisokban, vagy a parallelogramm két oldalában fekvő tagok. Ekkor az első esetben:

a) $C_0: u_{00}; C_1: u_{01}, u_{10}; C_2: u_{02}, u_{11}, u_{20}; \ldots; C_n: u_{0n}, u_{1,n-1}, \ldots u_{n,0}; \ldots$

a második esetben:

b) $C_0: u_{00}, u_{10}; C_1: u_{01}, u_{11}, u_{21}, u_{20}; \ldots C_{n_1-1}: u_{0,n_2-1}, u_{1,n_2-1}, \ldots u_{n_1,n_2-1} \ldots u_{n_1,0}; \ldots$

Ezek az elrendezések *nem ugyanazok*, mint az ott adottak, az itt végleg kiszámitandó:

$$S_0 + S_1 + S_2 + \ldots$$

sor ugyanis lehet összetartó, míg S_i-nek az illető tagokra való fölbontása által, mi az ott tárgyalt elrendezést adja, ama sor széttartóvá válhat.

127. Hogy a különböző elrendezési viszonyok e részletes leirása nem fölösleges, onnét tünik ki, hogy ugyanazon határtalan számsorozat valóban különböző elrendezésekben különböző «összeg»-ekhez vezet. Ezt ismét először egyes példákon mutatjuk.

Legyen p.

$$u_{n_1 n_2} = \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{(n_1+1)^{\frac{1}{2}}(n_2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(-1)^{n_2}}{(n_2+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \quad (n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ha itt először mindazon tagok összegét képezzük, melyekben az első mutató ugyanaz, i, még pedig a második mutató növekedése által adott sorrendben, ez lesz:

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^i}{(i+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^{n_2}}{(n_2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^i}{(i+1)^{\frac{1}{2}}} \sum_0^\infty \frac{(-1)^{n_2}}{(n_2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^i}{(i+1)^{\frac{1}{2}}} K,$$

ha t. i. a tényező gyanánt fellépő összetartó sor értékét K-val jelöljük. Ha pedig az így nyert összegeket ismét összeadjuk az első mutató növekedése által adott sorrendben, lesz:

$$K \sum_0^\infty{}_i \frac{(-1)^i}{(i+1)^{\frac{1}{2}}} = K^2,$$

tehát e berendezésnél véges és meghatározott értéket nyerünk.

Ha pedig az egy-egy diagonálisban álló tagokat foglaljuk össze (l. az előbb adott *a)* schemát), akkor a C_n osztályba tartozó tagok összege:

$$t_n = (-1)^n \left(\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(3(n-1))^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

és $\sum_0^\infty t_n$, a mint a 122. czikkben *a)* alatt láttuk, *széttartó* sor.

Épen megfordítva állanak a dolgok ama kétszeresen végtelen sorozatnál, melyre nézve:

$$u_{n_1 n_2} = \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_1+1}\right)\frac{1}{n_2+1}, \qquad \begin{pmatrix} n_1 = 1, 2, 3\ldots \\ n_2 = 0, 1, 2\ldots \end{pmatrix}$$

$$u_{0,n_2} = -\frac{1}{n_2+1}, \qquad (n_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ha itt először mindazon tagok összegét képezzük, melyekben az első mutató ugyanaz, lesz:

$$k_1 \sum_0^{\infty} \frac{1}{n_2+1}$$

tehát széttartó sor, és az illető sorrendnél nem jutunk véges, meghatározott értékhez. (Szintúgy ha először az ugyanazon második mutatóval ellátott tagokat egyesítjük, a mikor összetartó sort nyerünk, de a másodízben végzendő összegezés széttartó sorhoz vezet).

Ha pedig az egy-egy diagonálisban álló tagokat foglaljuk össze, akkor a C_n osztályba tartozó tagok összeadásánál $t_0 = -1$, míg ha $n = 1, 2, \ldots$, akkor:

$$t_n = -\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n-1} + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{1}{1}\right) - \left(\frac{1}{1}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n+1}\frac{1}{1}\right),$$

tehát

$$\sum_0^n t_i = -\left(\frac{1}{1}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n+1}\frac{1}{1}\right),$$

de az itt álló kifejezés határértéke (l. 122. cz. *b*)) zérus és így $\sum_0^{\infty} t_n$ összetartó sor, melynek értéke 0.

128. Visszatérve már most a 124. czikk értelmezéseihez, mindenekelőtt kiemelendő, hogy az

$$u_{n_1 n_2 \ldots n_p} \; (n_1, \ldots, n_p = 0, 1, \ldots) \text{ és } u_n \; (n = 0, 1, \ldots)$$

által adott számsorozatok közt — a mi az általuk jellemzett számokat illeti — nincsen különbség. Egész általánosságban lehetett törvényeket megállapitani, melyeknek értelmében az $n_1 n_2 \ldots n_p$ egy meghatározott értékrendszere megadja az n egy meghatározott értékét, és ez az utóbbi ismét az $n_1 \ldots n_p$ értékrendszert szolgáltatja. Tehát lehet mindig a p-szeres számsorozatból egy közönséges számsorozatot alkotni, úgy hogy annak bármely mutató-rendszerből meghatározott tagja, mint az utóbbinak meghatározott mutató segítségével jellemzett tagja is szerepel és megfordítva. Ezek után: *Ha az*

$$u_{n_1 \dots n_p} \; (n_1, \dots n_p = 0, 1, \dots) \text{ és } u_n \; (n = 0, 1 \dots)$$

által jellemzett számsorozatok ugyanazon tagokból állanak, akkor arra, hogy az $u_{n_1 \dots n_p}$ *számsorozatnak legyen összege, vagyis, hogy a* $\sum\limits_{0}^{\infty} {}_{n_p} \dots \sum\limits_{0}^{\infty} {}_{n_1} u_{n_1 \dots n_p}$ *sor föltétlenül összetartó legyen, szükséges és elegendő, hogy a* $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n$ *sor föltétlenül összetartó legyen.**

Ha ugyanis a $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n$ széttartó, akkor nincs oly szám S, hogy $|\sum\limits_{0}^{n} u_n - S| < \varepsilon$, ha csak $n > N$, a milyennek pedig kellene lennie, ha ama számsorozatnak összege S volna, és az n-et oly nagynak vennők, hogy $\sum\limits_{0}^{n} u_n$ már mindazokat a tagokat tartalmazná, melyek a Σ' összeget (124. czikk) adják; ekkor $\sum\limits_{0}^{n} u_n$ az ott Σ'-val jelölt összegnek vehető, de $|\Sigma' - S|$ *nem* volna mindig ε-nál kisebb.

Ha a $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n$ föltétesen összetartó, vegyük azt a sorrendet, melyben a valós részekből képezett sor összegének absolut értéke és annál inkább $|\sum\limits_{0}^{\infty} u_n|$ is $> |S| + P$, hol P valamely meghatározott pozitiv szám. Akkor $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n = S'$ és $S' - S$ bizonyos meghatározott véges szám; de ekkor ismét lehet egy n-et meghatározni, úgy, hogy ha $n > N$,

$$|\sum_{0}^{n} u_n - S'| < \varepsilon.$$

Ha pedig egyszersmind az n-et oly nagynak veszszük, hogy ama Σ' összeg minden tagját tartalmazza, akkor egyszersmind kellene, hogy

$$|\sum_{0}^{n} u_n - S| < \varepsilon$$

* E tétel egyszersmind mutatja, hogy a föltétlen összetartás régi és új értelmezése valóban azonos, csakhogy itt az illető számsorozatnak azon berendezései is tekintetbe jönnek, melyeknél az többszörösen végtelen sorozat alakjában van adva.

legyen; de ekkor volna $|S - S'| < 2\varepsilon$, a mi lehetetlen, mert ε tetszőleges, és $|S - S'|$ meghatározott véges szám.

Ha végre $\sum\limits_0^\infty u_n$ föltétlenül összetartó, és e sor összegét nevezzük S-nek, akkor csakugyan lehet egy N-et kijelölni, úgy, hogy ha $n > N$,

$$|\sum_0^n u_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

legyen, és ugyanekkor még:

$$|u_{n+1}| + \ldots |u_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2};$$

tehát akár hány tagot adjunk még a $\sum\limits_0^n u_n$ összeghez, az ez által képezett Σ' összegre nézve, valamint Σ-re nézve is lesz

$$|\Sigma u_n - S| < \varepsilon, \; |\Sigma' - S| < \varepsilon,$$

azaz ekkor a számsorozatnak van összege és ez $= \sum\limits_0^\infty u_n$.

129. *Ha a* $\sum\limits_0^\infty{}^{n_p} \cdots \sum\limits_0^\infty{}^{n_1} u_{n_1 \ldots n_p}$ *sor föltétlenül összetartó, akkor a megfelelő számsorozatból az előbb leirt berendezések bármelyikével képezett és bárhányszorosan végtelen sornak összege ugyanaz lesz, tehát az előbbi jelzést használva* $\sum\limits_0^\infty u_n$.

Ha először is egyszerűen végtelen sorban rendezünk, ez világos, mert egy ilyen $\sum\limits_0^\infty u_n$, és ez föltétlenül összetartó; a többi egyszerűen végtelen sor pedig ebből keletkezik, ha a tagok sorrendjét változtatjuk.

Vegyük mozt az ehhez legközelebb álló esetet, midőn a számsorozat tagjait beosztjuk az osztályok véges vagy határtalan sorozatába:

$$C_0, C_1, \ldots, C_k, \ldots$$

és minden osztályban megállapitjuk a tagok egymásutánját. Igy keletkeznek az egyes osztályokból az

$$S_0, S_1, \ldots S_k, \ldots$$

egyszerűen végtelen sorok, és ezekből végre az

$$S_0 + S_1 + \ldots + S_k + \ldots$$

kétszeresen végtelen sor, mint végösszeg.

Legyen ismét $\sum_0^\infty u_n$ a tagok összességéből képezett végtelen sor, mely föltétlenül összetartó. Akkor először belátható, hogy az $S_0, S_1 \ldots S_k, \ldots$-val jelzett sorok egyenként föltétlenül összetartó sorok, mert mindegyikük a $\sum_0^\infty u_n$-ből kiemelt tagok sorozata.

Másodszor föltétlenül összetartó most ez a sor is:

$$S_0 + S_1 + \ldots + S_k + \ldots$$

Ha ugyanis a $\sum_0^\infty |u_n|$-ből az S_i-vel analog módon képezett sort $\bar{S}_i$-vel jelöljük, akkor

$$|S_i| \leq \bar{S}_i,$$

ha továbbá — a mi mindig lehetséges — egy N-et úgy határozunk meg, hogy

$$\sum_{n+1}^\infty |u_m| < \varepsilon,$$

ha $n > N$, és végre a k-t oly nagynak veszszük, $(k > K)$ hogy a $\sum_0^n u_m$ összeg minden tagja már az $S_0, S_1, \ldots S_k$ sorok képezésénél fölhasználva legyen, akkor csakugyan:

$$\begin{aligned} |S_{k+1}| + |S_{k+2}| + \ldots + |S_{k+l}| &\leq \bar{S}_{k+1} + \ldots + \bar{S}_{k+l} \\ &\leq \sum_{n+1}^\infty |u_m| < \varepsilon, \end{aligned}$$

vagyis $\sum_0^\infty S_n$ föltétlenül összetartó.

A fölvett jelek ugyanily értelmezésénél

$$S_0 + S_1 + \ldots + S_k - \sum_0^n u_m$$

az $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ sorból keletkezik tagok kihagyása által; absolut értéke tehát kisebb, mint $\sum_{n+1}^\infty |u_m|$-é és annál inkább kisebb mint ε. Az n növekedésével a k is mindig nagyobb egész szám lesz;

ha tehát $n > N$ és $k > K$, akkor

$$\left|\sum_0^k S_n - \sum_0^n u_m\right| < \varepsilon$$

és végre:

$$\sum_0^\infty S_n = \sum_0^\infty u_n,$$

a mi bebizonyítandó volt.

Világos most már a tétel következő toldaléka, egyelőre szintén csak egyszerűen vagy kétszeresen végtelen sor alakjára vonatkozólag.

Pozitiv tagokból álló sor föltétlenül összetartó, hacsak egy tetszőleges elrendezésben véges és meghatározott összeghez vezet.

Mert ekkor $\sum_0^\infty u_n$ és $\sum_0^\infty |u_n|$ ugyanaz, és így vagy $\sum_0^\infty |u_n|$ föltétlenül összetartó és ekkor minden elrendezés ugyanezt az összeget adja; vagy $\sum_0^n u_n$ összege n-nel minden határon tul növekszik és ekkor, ha ismét $\sum_0^n u_n$ minden tagját az S_0, S_1, ... S_k sorok képezésénél fölhasználtuk,

$$\sum_0^k S_k > \sum_0^n u_n,$$

tehát $\sum_0^\infty S_n$ is széttartó.

A végleges általánosítás nagyon egyszerű. Mert ha minden S_i helyébe ismét kétszeresen végtelen sor lép, bármely berendezés újból csak az S_i összeghez vezet és a végeredmény ugyanaz, mint előbb. Szintúgy tehát, ha csak a 3-ik, ... p-edik alosztályok foglalandók össze egyszerű sorokban. Tehát tételeink általánosan helyesek.

Közvetlenül belátható még, hogy: a $\sum_0^\infty {}^{n_p} \ldots \sum_0^\infty {}^{n_1} u_{n_1 \ldots n_p}$ *sor akkor és csak akkor föltétlenül összetartó, ha* $\sum_0^\infty {}^{n_p} \ldots \sum_0^\infty {}^{n_1} |u_{n_1 \ldots n_p}|$ *bármely tetszőlegesen választott elrendezésben véges értékhez vezet.*

130. Valamely p-szeresen végtelen sor *egy bizonyos elrendezésnél föltételesen összetartó*, ha az összeg képezésének e megállapított módja mellett véges és meghatározott értékhez vezet, mely azonban nem minden elrendezésnél ugyanaz. Az előbbiek szerint ez nem történhetik soha pozitiv tagokból álló sornál; továbbá akkor sem, ha lim. u_n nem zérus. Hogy lim. $u_n = 0$, az t. i. p-szeresen végtelen számsorozatnál úgy fejezhető ki, hogy, bárminő pozitiv szám is ε, csak véges számmal legyenek az $n_1 \ldots n_p$ mutatók oly rendszerei, melyekre nézve

$$|u_{n_1\, n_2 \ldots n_p}| > \varepsilon.$$

Ha egy bizonyos E-re nézve ez nem áll, akkor már az egyik utolsó alosztályból alakuló végtelen sorban akár mennyire megyünk, mindig vannak tagok, melyeknek absolut értéke nagyobb E-nél, és már e sor széttartó; azaz ama sorozat, akárminő berendezést választottunk, soha sem vezet véges és meghatározott összeghez.

Hogy tehát valamely számsorozat föltétesen összetartó sorrá rendezhető legyen, arra szükséges és elegendő, hogy $\sum\limits_0^\infty |u_n|$ *széttartó és lim.* $u_n = 0$ *legyen, és ha* $u_n = v_n + w_n i$, *végre a* $\sum\limits_0^\infty v_n$, $\sum\limits_0^\infty w_n$ *sorok tagjai kevert előjelüek legyenek.*

E föltételek az előbbiek szerint szükségesek; hogy elegendők, azt tudjuk az egyszerűen végtelen sorok elméletében tárgyalt elrendezésekből.

Pozitiv tagokból álló sor tehát ismét csak föltétlenül lehet összetartó.

A $\sum\limits_0^\infty {}_{n_p} \cdots \sum\limits_0^\infty {}_{n_1} u_{n_1 \ldots n_p}$ sor *föltétlenül széttartó*, ha semmi féle elrendezésben nem vezet véges és meghatározott összeghez, és ez mindig megtörténik, ha $\sum\limits_0^\infty {}_{n_p} \cdots \sum\limits_0^\infty {}_{n_1} |u_{n_1 \ldots n_p}|$ nem összetartó és u_n-nek vagy nincs határértéke vagy ez nem 0.

Ama sor végre *egy bizonyos elrendezésben széttartó*, ha e mellett nem vezet véges és meghatározott értékhez, de más elrendezéseknél ily értéket nyerünk.

131. Minthogy a föltétlenül összetartó sorok vizsgálata a megelőzők szerint mindig egyszerűen végtelen sorokéra van visszavezetve, az utóbbiak tárgyalásánál nyert tételek amazokra is közvetetlenül átvihetők. Igy p.

Ha $\sum\limits_0^\infty{}^{n_p} \ldots \sum\limits_0^\infty{}^{n_1} v_{n_1 \ldots n_p}$ *föltétlenül összetartó, és a mutatók minden értékrendszerénél (vagy ily rendszerek véges számmal való kizárása után) mindig*

$$|u_{n_1 \ldots n_p}| \leqq |v_{n_1 \ldots n_p}|$$

akkor a $\sum\limits_0^\infty{}^{n_p} \ldots \sum\limits_0^\infty{}^{n_1} u_{n_1 \ldots n_p}$ *sor is föltétlenül összetartó.*

Továbbá a végtelen geometriai haladványra vonatkozó tétel általánosítása:

Hogy a

$$\sum_0^\infty{}^{n_p} \ldots \sum_0^\infty{}^{n_1} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_p^{n_p}$$

sor föltétlenül összetartó legyen, arra a szükséges és elegendő föltételek:

$$|a_1| < 1, |a_2| < 1, \ldots, |a_p| < 1.$$

Ha az $a_1, a_2 \ldots a_p$ absolut értékeit $a_1, a_2 \ldots a_p$-vel jelöljük, megvizsgálandó a következő sor:

$$\sum_0^\infty{}^{n_p} \ldots \sum_0^\infty{}^{n_1} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_p^{n_p},$$

mely csupán pozitiv tagokból áll és így tehát föltétlenül összetartó, ha bármely elrendezésben véges és meghatározott összeghez vezet.

Foglaljuk össze a vizgálandó számsorozat tagjait osztályokba úgy, hogy a C_k osztály mindazon tagokat tartalmazza, melyekben legalább egy mutató egyenlő k-val, a többi pedig ennél nem nagyobb. Ekkor

$$S_0 + S_1 + \ldots + S_k = \sum_0^k{}^{n_p} \ldots \sum_0^k{}^{n_1} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_p^{n_p}$$
$$= \left(\sum_0^k{}^{n_1} a_1^{n_1}\right)\left(\sum_0^k{}^{n_2} a_2^{n_2}\right) \ldots \left(\sum_0^k{}^{n_p} a_p^{n_p}\right),$$

és ha k minden határon túl növekszik, ennél a berendezésnél, és így minden másnál is, a sor összege:

$$\sum_0^\infty S_n = \frac{1}{1-a_1} \frac{1}{1-a_2} \frac{1}{1-a_p}.$$

Tudva már most, hogy a fölirt sor föltétlenül összetartó, összegét ugyanily berendezésben képezhetjük és ekkor egész hasonló módon:

$$\sum_{0}^{\infty} {}^{n_p} \cdots \sum {}^{n_1} a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_p^{n_p} = \frac{1}{1-a_1} \frac{1}{1-a_2} \frac{1}{1-a_p}.$$

Ha az $u_{n_1 n_2 \ldots n_p}$ $(n_1 \ldots, n_p = 0, 1, \ldots)$ számsorozat minden tagjának absolut értéke egy bizonyos meghatározott G pozitiv számnál kisebb, ha továbbá $|a_1| < 1$, $|a_2| < 1, \ldots, |a_p| < 1$, akkor a

$$\sum_{0} {}^{n_p} \cdots \sum_{0} {}^{n_1} u_{n_1 n_2 \ldots n_p} a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_p^{n_p}$$

sor föltétlenül összetartó.

Mert föltétlenül összetartó:

$$\sum_{0}^{\infty} {}^{n_p} \cdots \sum_{0} {}^{n_1} G a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_p^{n_p},$$

és a mutatók minden értékrendszerére nézve:

$$|u_{n_1 n_2 \ldots n_p} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_p^{n_p}| < G a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_p^{n_p}.$$

Az Eisenstein-féle sorok.[*]

132. Az analizisben jelentékeny szerepe van a következő, *p-szeres sornak:*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{n_p} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{n_1} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_p^2)^{\alpha}}$$

hol az $n_1, n_2, \ldots, n_p$ fölvehetnek minden egész számú értékrendszert az $n_1 = 0$, $n_2 = 0, \ldots n_p = 0$ kivételével. E sor föltétlenül összetartó lesz, ha $2\alpha > p$.

Foglaljuk össze ismét egy C_k osztályba mindazon tagokat, melyekben legalább egy mutató absolut értéke k, a többié pedig ennél nem nagyobb. Lássuk mindenek előtt, hogy C_k hány tagot foglal magában.

A C_k tagjait alosztályokba sorozzuk, a mint $1, 2 \ldots i \ldots p$ mutató absolut értéke egyenlő k-val és megfelelőleg $p-1$, $p-2$, $\ldots, p-i \ldots$ mutatóé, vagy végre egyé sem kisebb k-nál. Ha p. i

[*] Crelle, Journal, 35. köt., 153. old.

mutató absolut értéke k, akkor e mutatók értéke csak $+k$ és $-k$ lehet; a többieké 0, ± 1, $\pm 2, \ldots, \pm (k-1)$, összesen $2k-1$ érték. Ezáltal ha meg van állapitva, hogy mely mutatók értéke legyen $\pm k$, mindössze

$$2^i (2k-1)^{p-i}$$

tagot nyerünk; de az i mutató a p közül többféleképp választható. Legyen a lehetséges választások száma* $A_p^{(i)}$, mely szám közelebb meghatározására nincs szükségünk; elég lesz megjegyezni, hogy i szám irandó föl, melyek közt egyik sem nagyobb p-nél, tehát mindenesetre $A_p^{(i)} < p^i < p^p$.

Tehát a C_k osztály azon tagjainak száma, melyben i mutató absolut értéke k, a többié pedig kisebb:

$$2^i A_p^{(i)} (2k-1)^{p-i}.$$

Ebből végre a C_k osztály összes tagjai:

$$\nu_k = 2A_p^{(1)}(2k-1)^{p-1} + 2^2 A_p^{(2)}(2k-1)^{p-2} + \ldots + \\ + 2^i A_p^{(i)}(2k-1)^{p-i} + \ldots + 2^p A_p^{(p)}.$$

Mind e tagok két könnyen megállapitható határ között feküsznek; t. i. a nevező legkisebb, ha az egyik mutató $\pm k$, a többi zérus, legnagyobb, ha minden egyes mutató $\pm k$. E szerint, ha $u^{(k)}$ valamely a C_k osztályba tartozó tag

$$\frac{1}{k^{2\alpha}} > u^{(k)} > \frac{1}{(pk^2)^\alpha}$$

Ha tehát ismét S_k a C_k osztály tagjainak összege:

$$\frac{\nu_k}{k^{2\alpha}} > S_k > \frac{1}{p^\alpha} \frac{\nu_k}{k^{2\alpha}},$$

és ebből látni, hogy $\sum\limits_1 S_k$ e sorral:

$$\sum_1^\infty \frac{\nu_k}{k^{2\alpha}}$$

egyidőben lesz összetartó vagy széttartó.

* Ez különben nem egyéb, mint a p elemből képezhető i-tagú kombinácziók száma.

Ha a v_k értékét részletesen kiírjuk és $(2k-1)^{p-1}$-gyel számlálóban és nevezőben osztunk, e sor lesz:

$$\sum_1^\infty {}_k \frac{2A_p^{(1)} + 2^2 A_p^{(2)}(2k-1)^{-1} + \cdots + 2^i A_p^{(i)}(2k-1)^{-(i-1)} + \cdots + 2^p A_p^{(p)}(2k-1)^{-(p-1)}}{k^{2\alpha}(2k-1)^{1-p}}.$$

A számláló itt k növekedésével a $2A_p^{(1)}$ határhoz közeledik és így ez a sor ismét egyidőben összetartó vagy széttartó a következővel:

$$\sum_1^\infty {}_k \frac{1}{k^{2\alpha}(2k-1)^{1-p}} = \sum_1^\infty \frac{k^{1-p}}{(2k-1)^{1-p}} \frac{1}{k^{2\alpha-p+1}};$$

és minthogy ismét itt

$$\lim_{k} \frac{k^{1-p}}{(2k-1)^{1-p}} = \lim_{k} \left(2 - \frac{1}{k}\right)^{p-1} = 2^{p-1},$$

e sor végre ugyanakkor összetartó vagy széttartó, a mikor a

$$\sum_1^\infty {}_k \frac{1}{k^{2\alpha-p+1}},$$

azaz (115. czikk), midőn $2a > p$.

133. Legyen rövid jelzésben

$$\varphi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

hol a_{11}, a_{12}, a_{22} bizonyos meghatározott valós számok és a_{11} nem 0. Ekkor ugyanezen alak még így is írható:

$$\varphi(x_{11}x_2) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} x_2^2.$$

Ha tehát $a_{11} > 0$, és $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, φ az x_1 és x_2 minden valós értékénél pozitiv lesz, kivéve, ha $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$, a mikor $\varphi = 0$. Megfordítva, hogy φ mindig pozitiv legyen, kivéve, midőn x_1 és $x_2 = 0$, arra szükséges is, hogy $a_{11} > 0$ legyen, mert midőn $x_2 = 0$ és x_1 tetszőleges, $\varphi = a_{11}x_1^2$, valamint hogy legyen $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, a mit abból látni, hogy ha p. $x_2 = 1$, és $x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$, akkor

$$\varphi = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}},$$

a hol a nevező pozitiv; hogy φ is pozitiv legyen, kell tehát, hogy a számláló is ilyen legyen.

Hogy tehát $\varphi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$, *hol* a_{11} *nem* 0, *«pozitiv alak» legyen, azaz az* x_1 *és* x_2 *minden valós értékénél, kivéve midőn* x_1 *és* x_2 *zérus, pozitiv legyen (az a együtthatók valós számok lévén), arra szükséges és elegendő föltételek:*

$$a_{11} > 0,\ a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Ha φ pozitiv alak, a_{22} is pozitiv, mert különben $a_{11}\,a_{22}$ zérus vagy negativ, és ekkor $a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2$ sem pozitiv.

Ha $a_{11} = 0$, φ soha sem lehet pozitiv alak, kivéve ha a_{12} is 0,

$$\varphi = x_2(2a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2)$$

és ha p. $x_2 = -1$, és $x_1 = \frac{1 + a_{22}}{2a_{12}}$, akkor $\varphi = -1$.

Ha $a_{11} = a_{12} = 0$, akkor $\varphi = a_{22}x_2^2$, és föltételünk $a_{22} > 0$; de ekkor φ nem is tartalmazza x_1-et.

Ha ξ_1 és ξ_2 két oly valós érték, melyre nézve

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1,$$

tehát $|\xi_1| \leq 1$ és $|\xi_2| \leq 1$, akkor

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) < |a_{11}| + |a_{22}| + 2|a_{12}|.$$

Ha továbbá $\varphi(x_1, x_2)$ pozitiv alak a 0-tól különböző a_{11} együtthatóval, a mikor a_{22} is > 0, és G az

$$\frac{1}{2}\,\frac{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}},\ \frac{1}{2}\,\frac{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}}$$

számok kisebbikét jelenti, akkor, ha ismét $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$, mindig

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) \geq G.$$

Ugyanis

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} x_2^2 =$$

$$= \frac{1}{a_{22}}(a_{22}x_2 + a_{12}x_1)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{12}} x_1^2 .$$

Ha tehát $\varphi(x_1, x_2) < G$, akkor egyszersmind

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} x_2^2 < G ,$$

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}}{a_{22}} x_1^2 < G ,$$

de ebből tekintetbe véve G értékét

$$x_1^2 < \tfrac{1}{2},\ x_2^2 < \tfrac{1}{2},$$

és így tehát $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Az adott ξ_1, ξ_2 értékeknél tehát $\varphi(\xi_1, \xi_2) \geq G$.

E szerint *ha $\varphi(x_1, x_2)$ pozitiv alak, melyben a_{11} nem 0, az összszos $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ értékek, melyeket fölvesz, ha $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$, két pozitiv (a 0-tól is különböző) határ, G és H közt feküsznek.*

Ebből aztán önként következik, hogy *az x_1 és x_2 minden valós értékénél* ($x_1 = 0_1\, x_2 = 0$ kivételével)

$$\frac{\varphi(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

szintén G és H közt fekszik; egyszerüen azért, mert

$$\xi_1 = \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}},\ \xi_2 = \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

négyzeteinek összege 1 és ama kifejezés nem egyéb mint $\varphi(\xi_1, \xi_2)$.

134. E tárgyalások alapján kimondhatjuk, hogy *e sor*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \frac{1}{a_{11}n_1^2 + 2a_{12}n_1n_2 + a_{22}n_2^2},$$

hol az összeadás kiterjed n_1 és n_2 minden egész számú értékrendszerére az $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ kivételével, hol továbbá a_{11} és $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ pozitiv számok, a_{12} és a_{22} valósak, föltétlenül összetartó.

E sor tagjai mind pozitivok, és minthogy n_1, n_2 minden értékére

$$a_{11} n_1^2 + 2a_{12} n_1 n_2 + a_{22} n_2^2 > G (n_1^2 + n_2^2),$$

a sor tagjai rendre kisebbek egy már összetartónak ismert sor tagjainál, t. i.

$$\frac{1}{a_{11} n_1^2 + 2a_{12} n_1 n_2 + a_{22} n_2^2} < \frac{1}{G} \frac{1}{n_1^2 + n_2^2}.$$

A tétel még bővíthető: *Ugyanazon föltételek mellett föltétlenül összetartó a következő sor is:*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \frac{1}{a_{11} n_1^2 + 2a_{12} n_1 n_2 + a_{22} n_2^2 + b_1 n_1 + b_2 n_2 + c}$$

a b_1, b_2 és c minden valós értékénél.

Az n_1 és n_2 minden értékrendszerénél, melyben n_1 *vagy* n_2 nagyobb az N-nél

$$\left| \frac{b_1 n_1 + b_2 n_2 + c}{n_1^2 + n_2^2} \right| < (|b_1| + |b_2| + |c|) \frac{1}{N}$$

és ha ezt az értéket, mely N kellő választása által még tetszőleges kicsinynyé is tehető, δ-val jelöljük, akkor végre ama véges számmal levő tagok kivételével, melyekben n_1 *és* n_2 nem nagyobb N-nél

$$\left| \frac{1}{a_{11} n_1^2 + 2a_{12} n_1 n_2 + a_{22} n_2^2 + b_1 n_1 + b_2 n_2 + c} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{a_{11} n_1^2 + 2a_{12} n_1 n_2 + a_{22} n^2} \right| \left| \frac{1}{1 + \dfrac{b_1 n_1 + b_2 n_2 + c}{a_{11} n_1^2 + 2a_{12} n_1 n_2 + a_{22} n^2}} \right|$$

$$< \frac{1}{n_1^2 + n_2^2} \frac{1}{G - \delta}$$

a miből, ha p. δ-t $\frac{1}{2}G$-nek veszszük, tételünk közvetetlenül foly.

Példaképen tárgyaljuk a következő fontos soralakot:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \frac{1}{(\omega n_1 + \omega' n_2 + z)^2},$$

hol ismét n_1, n_2 minden egész számú értékrendszert fölvesz az $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ kivételével és

$$\omega = a + b\,i,\ \omega' = a' + b'i,\ z = x + y\,i\,,$$

$ab' - a'b$ nem zérus, z pedig tetszőleges complex szám.

A sor föltétlen összetartását az absolut értékek során vizsgáljuk, de

$$|\omega n_1 + \omega' n_2 + z|^2 = (an_1 + a'n_2 + x)^2 + (bn_1 + b'n_2 + y)^2$$
$$= (a^2 + b^2)\,n_1^2 + 2(aa' + bb')n_1 n_2 + (a'^2 + b'^2)n_2^2 +$$
$$+ (2ax + 2by)n_1 + (2a'x + 2b'y)n_2 + x^2 + y^2\,;$$

de itt

$$a^2 + b^2 > 0$$
$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - (aa' + bb')^2 = (ab' - a'b)^2 > 0,$$

így a megelőző tételek közvetetlenül alkalmazhatók és a vizsgált sor föltétlenül összetartó.

Mint ama sorban foglalt tagok sorozata, most még föltétlenül összetartó ez is:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\ \frac{1}{(\omega n + z)^2}$$

mely csak azon tagokat tartalmazza, hol $n_1 = 0$, és minthogy ω' megfelelőleg adva gondolható, ω egészen tetszőleges szám. E sor összetartása a használt módszerek segítségével önállóan is igazolható.

III.

Pozitiv tagú sorok részletes vizsgálata.

A pozitiv tagú sorok legegyszerűbb esetei.

135. A föltétlen összetartás vizsgálata mindig csak az absolut értékek sorának, tehát pozitiv tagú sornak részletes vizsgálatát követeli. Ezekkel foglalkozva, legyen, hogy a tételek érvényességének e megszorítása már a jelekben is kifejezést találjon :

$$\sum_0^{\infty} A_n = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$$

a pozitiv számokból alakuló sorok általános jele.

A $\sum\limits_0^{\infty} A_n$ *sor* $\begin{matrix}\textit{összetartó,}\\ \textit{széttartó,}\end{matrix}$ *ha* $A_n^{\frac{1}{n}}$ *mindig* $\begin{matrix}\textit{kisebb}\\ \textit{nagyobb}\end{matrix}$ *egy bizonyos pozitiv* ρ *számnál, mely maga is* $\begin{matrix}\textit{kisebb,}\\ \textit{nagyobb,}\end{matrix}$ *mint egy, mihelyt n nagyobb egy bizonyos meghatározott N számnál.*

Ekkor ugyanis:

az első esetben:	a második esetben:
$A_n < \rho^n$,	$A_n > \rho^n$,

hacsak $n > N$ és így a sor maradékára nézve:

$$R_n < \rho^n(1+\rho+\rho^2+\ldots), \qquad R_n > \rho^n(1+\rho+\rho^2+\ldots),$$

tehát, a mint ρ kisebb vagy nagyobb, mint 1 és

$$\lim. \rho^n = 0, \qquad \lim. \rho^n = \infty,$$

$1+\rho+\rho^2+\ldots = \frac{1}{1-\rho}$, $1+\rho+\rho^2+\ldots$ minden határon túl növekszik,

végre:

$$\lim. R_n = 0, \qquad \lim. R_n = \infty,$$

a mi bebizonyítandó volt.

Különösen egyszerű lesz a tétel, ha $A_n^{\frac{1}{n}}$-nek véges és meghatározott határértéke van.

Ha $\lim. A_n^{\frac{1}{n}} = G$, *a* $\sum\limits_0 A_n$ *összetartó vagy széttartó, a mint G kisebb vagy nagyobb az* 1*-nél; a* $G = 1$ *esete kétes marad.*

Ha ugyanis G az 1-től különbözik és H a G és 1 közt fekszik, tehát:

az első esetben:	a második esetben:
$G < H < 1$,	$G > H > 1$,

akkor van egy N szám, úgy hogy, ha $n > N$, mindig:

$$A_n^{\frac{1}{n}} < H < 1, \qquad A_n^{\frac{1}{n}} > H > 1,$$

épen mivel $\lim. A_n^{\frac{1}{n}} = G$.

Tehát a sor kielégíti az előbb kifejtett föltételeket.

136. *A* $\sum\limits_0^\infty A_n$ *sor* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{összetartó,}}{\textit{széttartó,}}$ *ha* $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ *mindig* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{kisebb}}{\textit{nagyobb}}$ *egy bizonyos pozitiv* ρ *számnál, mely maga is* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{kisebb,}}{\textit{nagyobb,}}$ *mint egy, mihelyt n nagyobb egy bizonyos meghatározott N számnál.*

Ekkor ugyanis

az első esetben:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} < \rho,\ \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} < \rho, \ldots$$

$$\ldots \frac{A_{n+k}}{A_{n+k-1}} < \rho,$$

a második esetben:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} > \rho,\ \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} > \rho, \ldots$$

$$\ldots \frac{A_{n+k}}{A_{n+k-1}} > \rho,$$

hacsak $n > N$ és ugyanekkor az egyenlőtlenségek szorzása által:

$$\frac{A_{n+k}}{A_n} < \rho^k. \qquad\qquad \frac{A_{n+k}}{A_n} > \rho^k.$$

Igy tehát a sor maradékára nézve, mely most

$$R_n = A_n\left(1 + \frac{A_{n+1}}{A_n} + \frac{A_{n+2}}{A_n} + \ldots\right)$$

alakban írható, ha ugyancsak $n > N$,

$$R_n < A_n(1 + \rho + \rho^2 + \ldots). \qquad\qquad R_n > A_n(1 + \rho + \rho^2 + \ldots).$$

De most:

$$\lim. A_n = 0; \qquad\qquad \lim. A_n = \infty;$$

mert

$$A_{N+k} < A_N \rho^k, \qquad\qquad A_{N+k} > A_N \rho^k,$$

hol A_N egy bizonyos meghatározott pozitiv szám és

$$\lim_k. \rho^k = 0. \qquad\qquad \lim_k. \rho^k = \infty.$$

Továbbá:

$1 + \rho + \rho^2 + \ldots = \frac{1}{1-\rho}$, $1 + \rho + \rho^2 + \ldots$ minden határon túl növekszik,

tehát:

$$\lim. R_n = 0, \qquad\qquad \lim. R_n = \infty,$$

a mi bebizonyítandó volt.

Különösen egyszerű lesz a tétel, ha $\frac{A_{n+1}}{A_n}$-nek véges és meghatározott határértéke van.

Ha lim. $\frac{A_{n+1}}{A_n} = G$, *a* $\sum\limits_0 A_n$ *sor összetartó vagy széttartó, a mint G kisebb vagy nagyobb az* 1*-nél; a* $G=1$ *esete kétes marad.*

Ha ugyanis G az 1-től különbözik és H a G és 1 közt fekszik, tehát:

az első esetben:	a második esetben:
$G < H < 1$	$1 < H < G$,

akkor van egy N szám, úgy hogy, ha $n > N$, mindig:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} < H < 1, \qquad \frac{A_{n+1}}{A_n} > H > 1,$$

épen, mivel lim. $\frac{A_{n+1}}{A_n} = G$.

Tehát a sor kielégíti az előbb kifejtett föltételeket.

Igy p. összetartó:

$$\sum_0^\infty \frac{A^n}{1.2\ldots(n-1)n} = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \ldots$$

az A minden (poz.) értékénél, mert

$$\text{lim.}\frac{A_{n+1}}{A_n} = \text{lim.}\left(\frac{A^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)} : \frac{A^n}{1.2\ldots(n-1)n}\right) = \text{lim.}\frac{A}{n+1} = 0.$$

Hasonlókép összetartó

$$\sum_0^\infty n\rho^{n-1} = 1 + 2\rho + 3\rho^2 + 4\rho^3 + \ldots,$$

ha ρ pozitiv valódi tört. Mert ekkor:

$$\text{lim.}\frac{A_{n+1}}{A_n} = \text{lim.}\frac{(n+1)\rho^n}{n\rho^{n-1}} = \rho\,\text{lim.}\frac{n+1}{n} = \rho < 1.$$

137. Gyakori alkalmazása miatt külön kiemeljük a következő, különben a megelőző számításokban teljesen bennfoglalt eredményt:

Ha lim. $A_n^{\frac{1}{n}}$ *vagy* lim. $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ *az* 1*-nél kisebb, akkor mindig* lim. $A_n = 0$.

Ha p. ρ pozitiv valódi tört és σ bárminő valós szám, akkor:

$$\text{lim.}\frac{\rho^n}{n^\sigma} = 0.$$

mert:

$$\lim.\left(\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)^\sigma}:\frac{\rho^n}{n^\sigma}\right)=\lim.\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\sigma}\rho=\rho<1$$

A levezetett két összetartási föltétel lényegben azon alapszik, hogy a vizsgálandó sort összehasonlítjuk egy bizonyos geometriai haladványnyal. A határérték megitélésére rendesen a második alak sokkal kényelmesebb; evvel szemben azonban az a hátránya van ennek, hogy csak a tagok bizonyos elrendezésénél használható. A $\lim. A_n^{\frac{1}{n}}$ a tagok egymásutánjától független; mert ennél csak az vizsgálandó, hogy minők a viszonyok elég nagy n-nél.

Ellenben a második alak használatánál két *egymásután következő* tag hányadosa képezendő és ez a tagok elrendezésétől függ. Igy p. a geometriai haladvány egyszerű esetében, (hol $\rho<1$):

$$1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{2n-1}+\rho^{2n}+\ldots$$

$\frac{A_{n+1}}{A_n}=\rho$; de ha itt az első és második, ..., $2n$—1 és $2n$-edik tagot mindig fölcseréljük, lesz

$$\rho+1+\rho^3+\rho^2+\ldots\rho^{2n}+\rho^{2n-1}+\rho^{2n+2}+\ldots$$

akkor $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ egymásután $\frac{1}{\rho}$ és ρ^3, tehát fölváltva kisebb, nagyobb mint egy.

Minthogy azonban pozitiv tagú soroknál a tagok sorrendje közömbös, *egyszer mindenkorra megállapíthatjuk, hogy a sor tagjai nagyságuk szerint legyenek rendezve*, úgy, hogy:

$$A_0\geq A_1\geq A_2\geq\ldots A_n\geq A_{n+1}\geq\ldots$$

Világos, hogy csak ennél a sorrendnél alkalmazhatjuk a második összetartási föltételt, mellőzve természetesen az egynéhány kezdő tagban mutatkozó eltérést. Mert ha bármennyire haladva a sorban lesz oly n, melynél *nem* $A_n\geq A_{n+1}$, akkor $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ sem lehet kisebb az egynél.

138. Uj és a most nyert eredményeknél általánosabb érvényű összetartási föltételeket nyerünk, ha a geometriai haladványok helyett a

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mu}}$$

alakú sorokat használjuk az összehasonlításra, a mely sorok, mint előbb láttuk, összetartók, ha $\mu > 1$, széttartók, ha $\mu \leqq 1$.

A $\sum_{0}^{\infty} A_n$ *sor összetartó, ha létezik egy bizonyos, az egynél nagyobb* μ *szám, melyre nézve* $A_n n^{\mu}$ *mindig kisebb egy véges meghatározott pozitiv* H *számnál, hacsak* $n > N$; *ellenben széttartó, ha* $A_n n$ *nagyobb marad egy véges meghatározott, a 0-tól különböző* G *számnál, hacsak* $n > N$.

Ekkor ugyanis

az első esetben: $A_n < \frac{H}{n^{\mu}}$, a második esetben: $A_n > \frac{G}{n}$,

ha $n > N$; a sor maradékára nézve:

$$R_n < H\left(\frac{1}{n^{\mu}} + \frac{1}{(n+1)^{\mu}} + \ldots\right), \qquad R_n > G\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \ldots\right),$$

tehát a zárjelben álló sor az első esetben összetartó, a másodikban széttartó lévén:

$$\lim. R_n = 0, \qquad \lim. R_n = \infty,$$

a mi bebizonyitandó volt:

Különösen egyszerű a tétel, ha van egy μ szám, melynél $\lim. A_n n^{\mu}$ véges és meghatározott szám.

Ha $\lim. A_n n^{\mu}$ *a 0-tól különböző véges és meghatározott szám, a* $\sum_{0}^{\infty} A_n$ *sor összetartó vagy széttartó, a mint* $\mu > 1$ *vagy pedig* $\leqq 1$.

Legyen $\lim. A_n n^{\mu} = E$, akkor, ha n nagyobb egy bizonyos N-nél,

$$G < A_n n^{\mu} < H$$

a hol G és H az N választása által az E-hez tetszőleges közel hozhatók, tehát szintén a 0-tól különböző, még pedig pozitiv véges számok; tehát ugyancsak ha $n > N$, a két esetben:

$$A_n n^\mu < H, \quad \text{illetőleg} \quad A_n n^\mu > G$$

és annálinkább, minthogy $\mu \leqq 1$

$$A_n n > G,$$

a mi az előbb nyert föltételekkel azonos.

A most kifejtett összetartási föltétel a 135. czikkben kifejtettet mint speciális esetet magában foglalja; mert ha

$$A_n^{\frac{1}{n}} < \rho < 1, \qquad A_n^{\frac{1}{n}} > \rho > 1,$$

akkor

$$A_n n^\mu < \rho^n n^\mu, \qquad A_n n > \rho_n n,$$

és tekintettel a ρ értékére (137. czikk):

$$\lim. \rho^n n^\mu = 0, \qquad \lim. \rho^n n = \infty,$$

tehát egyszersmind:

$$\lim. A_n n^\mu = 0. \qquad \lim. A_n n = \infty.$$

139. Ugyancsak a $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\mu}$ sorokkal való összehasonlítás oly összetartási föltételt is szolgáltat, melyben $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ szerepel.

A $\sum_0^\infty A_n$ *sor* $\substack{\textit{összetartó} \\ \textit{széttartó}}$, *ha* $\frac{n+1}{n}\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ $\substack{\textit{kisebb} \\ \textit{nagyobb}}$ *mint egy, a μ-nek valamely az egynél* $\substack{\textit{nagyobb} \\ \textit{nem nagyobb}}$ *értékénél, minden n-re nézve, mely >N.*

A föltételek értelmében:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} < \frac{n^\mu}{(n+1)^\mu}, \qquad \frac{A_{n+1}}{A_n} > \frac{n^\mu}{(n+1)^\mu},$$

$$\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} < \frac{(n+1)^\mu}{(n+2)^\mu}, \qquad \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} > \frac{(n+1)^\mu}{(n+2)^\mu},$$

tehát:

$$\frac{A_{n+2}}{A_n} < \frac{n^\mu}{(n+2)^\mu} \qquad \frac{A_{n+2}}{A_n} > \frac{n^\mu}{(n+2)^\mu},$$

és általánosságban:

$$\frac{A_{n+k}}{A_n} < \frac{n^\mu}{(n+k)^\mu}, \qquad \frac{A_{n+k}}{A_n} > \frac{n^\mu}{(n+k)^\mu}.$$

E szerint egy n-edik tagtól kezdve, hol $n > N$:

$$A_{n+k} < A_n n^\mu \frac{1}{(n+k)^\mu}, \qquad A_{n+k} > A_n n^\mu \frac{1}{(n+k)^\mu},$$

és így az N-edik tagtól kezdve a sor tagjai kisebbek, ill. nagyobbak az

$$A_n n^\mu \sum_0^k \frac{1}{(n+k)^\mu} \text{ összetartó} \qquad A_n n^\mu \sum^k \frac{1}{(n+k)^\mu} \text{ széttartó}$$

sor tagjainál, a mi bebizonyítandó volt.

Ha $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ egy bizonyos, az egységtől különböző számnál kisebb, illetőleg nagyobb, a föltételek mindig ki vannak elégítve és így a 136. czikk összetartási föltétele a mostaninak speciális esete.

A 135. és 138., valamint a 136. és 139. czikkben levezetett tételek csak kezdő tagjai az összetartási föltételek oly határtalan sorozatainak, melyekben minden ujból levezetett föltétel a megelőzőket, mint speciális eseteket magában foglalja, tehát a soroknak mindig tágabb osztályaira vonatkozik, a nélkül azonban, hogy — bármennyire haladjunk is — még csak ama sorokra nézve, melyeknél $\lim. A_n^{\frac{1}{n}} = 1$, mindig definitiv eredményhez vezető föltételekhez jutnánk.

Az $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ hányadost tartalmazó föltételeket, melyek a másik sorozattal szemben nem adnak ujat, és alakilag is kevésbé általánosak, ámbár esetleg kényelmesebben kezelhetők, a további, pozitiv tagú sorokra vonatkozó és inkább elméleti értékű tárgyalásoknál egészen mellőzzük.

A logarithmikus összetartási föltételek.

140. Mindenekelőtt néhány a következőkben gyakran előforduló *határérték kiszámításával* foglalkozunk. A 137. czikk elején adott tétel értelmében, *ha α az 1-nél nagyobb és σ tetszőleges valós szám:*

$$\lim. \left(\frac{1}{\alpha^n} : \frac{1}{n^\sigma}\right) = 0.$$

és ebből:

$$\lim. \frac{\mu^n}{n^\sigma} = \infty, \quad \lim. \frac{n^\sigma}{\mu^n} = 0. \qquad (1.)$$

Jelöljük a következőkben valamely a szám (valós) μ-logarithmusát (${}^\mu\log. a$) helyett röviden lg. a-val, midőn a logarithmus-rendszer alapszámát, μ-t az 1-nél nagyobbnak veszszük.

Legyen most már

$$\mu^n = k_n,$$

hol tehát $k_1, k_2, \ldots k_n \ldots$ folyton növekedő pozitiv számok sorozata és $\lim. k_n = \infty$. Akkor

$$n = \lg. k_n.$$

Tehát:

$$\lim. \frac{(\lg. k_n)^\sigma}{k_n} = 0.$$

Legyen l_n a legnagyobb k_n-ben foglalt egész szám, akkor:

$$k_n = l_n(1+\rho_n),$$

hol

$$0 < \rho_n < \frac{1}{l_n}, \ \lim. l_n = \infty, \ \lim. \rho_n = 0,$$

és

$$\frac{(\lg. k_n)^\sigma}{k_n} = \frac{(\lg. l_n)^\sigma}{l_n}\left(1 + \frac{\lg. (1+\rho_n)}{\lg. l_n}\right)^\sigma \frac{1}{1+\rho_n}$$

Ebből:

$$\frac{(\lg. l_n)^\sigma}{l_n} = (1+\rho_n)\frac{(\lg. k_n)^\sigma}{k_n}\left(1 + \frac{\lg. (1+\rho_n)}{\lg. l_n}\right)^{-\sigma}$$

végre pedig:

$$\lim. \frac{(\lg. l_n)^\sigma}{l_n} = 0.$$

Tekintetbe véve, hogy:

$$k_{n+1} = \mu k_n,$$

tüstént látni, miszerint

$$l_{n+1} < \mu(l_n + 1),$$

és annál inkább minden l_n és l_{n+1} közt fekvő egész számra, λ_n-re nézve:

$$l_n < \lambda_n < l_n \mu \left(1 + \frac{1}{l_n}\right),$$

vagyis:

$$\lambda_n = l_n a\,, \qquad \mu < a < 2\mu$$

Tehát, ha $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots$ oly számok sorozata, hogy általánosságban λ_n az l_n és l_{n+1} közt fekszik, ugyanazon következtetéseket használva mint előbb:

$$\lim. \frac{(\lg. \lambda_n)^\sigma}{\lambda_n} = \lim. \frac{(\lg. l_n + \lg. a)^\sigma}{l_n a} =$$

$$= \lim. \frac{(\lg. l_n)^\sigma}{l_n} \lim. \frac{\left(1 + \frac{\lg. a}{\lg. l_n}\right)^\sigma}{a} = 0,$$

és így végre:

$$\lim. \frac{(\lg. n)^\sigma}{n} = 0\,,$$

mert minden egész szám előfordul az l_n vagy λ_n sorozatokban.

Ha τ tetszőleges pozitiv szám, és az utoljára nyert alakzatban τ-adik hatványra emelünk és végül $\sigma\tau$ helyett, mely σ-val együtt tetszőleges valós szám, ismét σ-t írunk, lesz:

$$\lim. \frac{(\lg. n)^\sigma}{n^\tau} = 0\,, \quad (\tau > 0). \tag{2.}$$

Tételünknek igen egyszerű általánosítása, melyre vonatkozólag a számításokat nem szükséges ismételni, a következő:

Ha $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n \ldots$ a pozitiv számoknak minden határon túl növekedő sorozata, akkor:

$$\lim. \frac{(\lg. \omega_n)^\sigma}{\omega_n^\tau} = 0, \quad (\tau > 0). \tag{3.}$$

141. Valamely pozitiv a szám logarithmusának ismét képezhetjük logarithmusát és úgy tovább; e műveletsorozat rövid jelzésére legyen:

$$\lg._2 a = \lg. (\lg. a)$$
$$\lg._3 a = \lg. (\lg. (\lg. a))$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\lg._m a = \lg. (\ldots (\lg. (\lg. a)) \ldots)$$

Hogy $\lg._m a$ az eddigiek szerint képezhető legyen (a logarithmus általános elméletében majd, hogy $\lg._m a$ valós szám legyen) kell, hogy $\lg._{m-1} a$ pozitiv legyen, tehát ismét $\lg._{m-2} a$ pozitiv legyen, és ugy tovább. E föltételek könnyen kifejthetők.

Hogy $\lg. a$ pozitiv legyen, arra kell, hogy legyen $a > 1$.

Hogy $\lg._2 a$ pozitiv legyen, kell, hogy legyen $\lg. a > 1$, vagyis $a > \mu$.

Hogy $\lg._3 a$ pozitiv legyen, kell, hogy legyen

$$\lg._2 a > 1\,,\quad \lg. a > \mu\,,\quad a > \mu^{\mu}$$

És általánosságban tehát, ha a következő jelzéseket használjuk,

$$\mu_0 = 1,\ \mu_1 = \mu,\ \mu_2 = \mu^{\mu_1},\ \mu_3 = \mu^{\mu_2},\ldots \mu_m = \mu^{\mu_{m-1}},$$

$lg._m a$ a valós számok sorában található, vagyis $lg._{m-1} a$ pozitiv, ha

$$a > \mu_{m-1}$$

hol μ a logarithmus-rendszernek 1-nél nagyobb alapszáma.

Ha ω_n minden határon túl növekedő, pozitiv számokból álló sorozatnak általános tagja, akkor

$$\lim. \lg._m \omega_n = \infty$$

Ha $m = 1$, ez a 65. czikk végén álló tétel; de ha $m-1$-re helyes, akkor m-re is érvényes marad a tétel, mert

$$\lg._m \omega_n = \lg. (\lg._{m-1} \omega_n)\,,$$

és $\lg._{m-1} \omega_n$-nek megvannak az ω-k számára megállapitott tulajdonságai, t. i. határtalanul növekedő számok, melyek pozitivok lesznek, mihelyt $\omega_n > \mu_{m-1}$.

Ezekután, a (3.) alatti képletben ω_n helyett $\lg._{m-1} \omega_n$-et téve, ismét lesz:

$$\lim. \frac{(\lg._m \omega_n)^\sigma}{(\lg._{m-1} \omega_n)^\tau} = 0, \quad (\sigma \text{ tetszől. valós szám, } \tau > 0) \qquad (4.)$$

továbbá:

$$\lim. \frac{(\lg._r \omega_n)^R}{(\lg._s \omega_n)^S} \qquad (5.)$$

(hol R és S pozitiv számok), 0 vagy ∞, a mint $r > s$, vagy $r < s$. Ez

t. i. az első esetben így is írható:

$$\lim. \left(\frac{(\lg._r \omega_n)^R}{(\lg._{r-1} \omega_n)^S} \frac{(\lg._{r-1} \omega_n)^S}{(\lg._{r-2} \omega_n)^S} \cdots \frac{(\lg._{s+1} \omega_n)^S}{(\lg._s \omega_n)^S}\right),$$

hol minden egyes tényező határértéke 0; a második esetben egészen hasonló módon járhatunk el.

Valamint végre, *ha az R-ek és S-ek pozitiv számok,* általánosan:

$$\lim. \frac{(\lg._r \omega_n)^R (\lg._{r+1} \omega_n)^{R_1} \ldots (\lg._{r+k} \omega_n)^{R_k}}{(\lg._s \omega_n)^S (\lg._{s+1} \omega_n)^{S_1} \ldots (\lg._{s+l} \omega_n)^{S_l}} \tag{6.}$$

0 *vagy* ∞, *a mint* $r > s$, *vagy* $r < s$. Az első esetben már e határérték

$$\lim. \frac{(\lg._r \omega_n)^R (\lg._{r+1} \omega_n)^{R_1} \ldots (\lg._{r+k} \omega_n)^{R_k}}{(\lg._s \omega_n)^S} =$$

$$= \lim. \frac{(\lg._r \omega_n)^R}{(\lg._s \omega_n)^{\frac{S}{k+1}}} \cdot \frac{(\lg._{r+1} \omega_n)^{R_1}}{(\lg._s \omega_n)^{\frac{S}{k+1}}} \cdots \frac{(\lg._{r+k} \omega_n)^{R_k}}{(\lg._s \omega_n)^{\frac{S}{k+1}}}$$

is 0; annál inkább a (6.) alatt álló. A második eset ebből önként világos, ha a reciprok kifejezés határértékét veszszük.

Az $r = s$ esete természetesen nem lesz külön vizsgálandó, mert $\lg._n \omega_n$ csak a számlálóban áll, kiesik, vagy csak a nevezőben áll, a mint $R \gtreqless S$.

E szerint, *ha röviden:*

$$A_n^{a_0, a_1 \ldots a_m} = \frac{1}{n^{a_0} (\lg. n)^{a_1} (\lg._2 n)^{a_2} \ldots (\lg._m n)^{a_m}}, (n = r, r+1, \ldots)(r > u_m),$$

hol $a_0, a_1 \ldots a_m$ *tetszőleges nem negativ számok, melyek azonban nem mindannyian egyenlők zérussal, akkor:*

$$\lim. A_n^{a_0, a_1 \ldots a_m} = 0,$$

de úgy, hogy:

$$\lim. \frac{A_n^{a_0, a_1 \ldots a_m}}{A_n^{b_0, b_1 \ldots b_m}} = \lim. \frac{1}{n^{a_0 - b_0} (\lg. n)^{a_1 - b_1} (\lg._2 n)^{a_2 - b_2} \ldots (\lg._m n)^{a_m - b_m}}$$

egyenlő 0 *vagy* ∞, *a mint az*

$$a_0-b_0,\ a_1-b_1, \ldots a_m-b_m$$

különbségek sorában az első el nem tűnő pozitiv vagy negativ, végre azon határérték 1, ha e különbségek mind egyenlők zérussal

Ha a (3)-ban σ helyébe 1-et teszünk, ez még következőkép is irható:

$$\lim.\left(\lg.\left(\omega_n^{\frac{1}{\omega_n^{\tau}}}\right)\right) = 0\,, \quad (\tau > 0)$$

vagy ha e számértékeket mint kitevőket a μ-hez, illesztjük:

$$\lim.\left(\omega_n^{\frac{1}{\omega_n^{\tau}}}\right) = 1\,, \tag{7.}$$

és ebből ha $\omega_n = n,\ \tau = 1$,

$$\lim.\left(n^{\frac{1}{n}}\right) = 1\,; \tag{8.}$$

ha továbbá $\omega_n = \lg. n\,,\ \tau = 1$

$$\lim.\left((\lg. n)^{\frac{1}{\lg. n}}\right) = 1.$$

Minthogy pedig $\frac{\lg. n}{n}$ határértéke 0, továbbá még (a 70. cz. alapján)

$$\lim.\left((\lg. n)^{\frac{1}{\lg. n}}\right)^{\lim. \frac{\lg. n}{n}} = \lim.\left((\lg. n)^{\frac{1}{n}}\right) = 1,$$

és ép úgy

$$\lim.\left((\lg._m n)^{\frac{1}{n}}\right) = 1. \tag{9.}$$

és végre még ebből: *

---

* E tárgyalások azt is mutatják, hogy a 135. és 138. czikkben tárgyalt összetartási föltételeknél föllépett kétes esetek valóban előfordúlnak; így ha A_n a most adott alakok bármelyike, a 135. cz. szerint vizsgálandó határérték mindig egy. Ha továbbá:

$$A_n = \frac{1}{n\,(\lg. n)^{a_1}\,(\lg._2 n)^{a_2} \ldots (\lg._m n)^{a_m}}\,,$$

akkor $\lim. A_n n^{\mu}$ sohasem a 0-tól különböző véges szám, hanem 0, ha $\mu < 1$, és ∞, ha $\mu > 1$.

$$\lim. \left(A_n^{a_1, a_2 \ldots a_m}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

142. *Ha a_n és β_n két pozitiv számokból álló számsorozat általános tagja, melyekre nézve $\lim. a_n$ és $\lim. \beta_n$ végtelen, de $\frac{a_n}{\beta_n}$ a 0 tól különböző véges és meghatározott szám, akkor:*

$$\lim. \frac{\lg. a_n}{\lg \beta_n} = 1.$$

Tudniillik, ha $\lim. \frac{a_n}{\beta_n} = g$, akkor $\lim. \lg. \frac{a_n}{\beta_n} = \lg. g$ és így:

$$\lg. a_n - \lg. \beta_n = \lg. \frac{a_n}{\beta_n} = \lg. g + \delta_n,$$

hol $\lim. \delta_n = 0$, tehát:

$$\frac{\lg. a_n}{\lg. \beta_n} - 1 = \frac{\lg. g + \delta_n}{\lg. \beta_n},$$

de $\lim. \beta_n$-nel együtt $\lim. \lg. \beta_n$ is ∞; és így, ha áttérünk a határra, a jelzett tételt nyerjük.

Általánosabban ugyanily föltételek mellett:

$$\lim. \frac{\lg._m a_n}{\lg._m \beta_n} = 1.$$

Föltéve hogy a tétel $m-1$-re helyes (a mint azt $m=1$-re nézve valóban bebizonyítottuk), e sorozatok $\lg._{m-1} a_n$ és $\lg._{m-1} \beta_n$ az a_n és β_n-re vonatkozó föltételeket kielégítik, t. i. pozitiv és minden határon tul növekedő számok és — épen az $m-1$-re vonatkozó föltevés alapján —

$$\lim. \frac{\lg._{m-1} a_n}{\lg._{m-1} \beta_n} = 1,$$

a tétel tehát m-re érvényes, ha $m-1$-re helyes volt, a mivel általános bebizonyítása is megtörtént.

143. Legyen δ_n és ε_n két számsorozat általános tagja, melyeknek mindegyikére:

$$\lim. \delta_n = 0, \; \lim. \varepsilon_n = 0.$$

Ha $\lim. \frac{\delta_n}{\varepsilon_n}$ meghatározott (de nem szükségkép véges) érték, a következő rövid kifejezésmódot vezetjük be.

Ha $\lim. \frac{\delta_n}{\varepsilon_n} = 0$, a δ-sorozat számai *gyorsabban* kisebbednek, mint az ε-sorozat számai.

Ha $\lim. \frac{\delta_n}{\varepsilon_n} = \infty$, a δ-sorozat számai *lassab*ban kisebbednek, mint az ε sorozat számai.

Ha végre $\lim. \frac{\delta_n}{\varepsilon_n}$ a 0-tól különböző véges szám, akkor a δ és ε-sorozat számai *egyenlő mertékben* kisebbednek.

A $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^\mu}$ alakokban oly végtelen sorokkal találkoztunk, melyek összetartók, ha $\mu > 1$, ámbár tagjai bármely összetartó geometriai haladvány tagjainál lassabban kisebbednek. Ha ez t. i. $\sum \frac{1}{\mu'^n}$, akkor a 140. cz. (1.) képlete szerint

$$\lim. \left(\frac{1}{n^\mu} : \frac{1}{\mu'^n}\right) = \lim. \frac{\mu'^n}{n^\mu} = \infty.$$

A következő soralakok, (a logarithmusok alapszáma* az 1-nél nagyobb pozitiv szám)

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n\,(\lg. n)^\mu}$$

ismét összetartók, ha $\mu > 1$, széttartók, ha $\mu \leq 1$, ámbár tagjai lassabban kisebbednek a $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^{\mu'}}$ összetartó sorok bármelyikének tagjainál.

Az utolsó megjegyzést közvetetlenül igazoljuk avval, hogy

$$\lim. \left(\frac{1}{n\,(\lg. n)^\mu} : \frac{1}{n^{\mu'}}\right) = \lim. \frac{n^{\mu'-1}}{(\lg. n)^\mu} = \infty$$

a 140. cz. (2.) képlete alapján, mert $\mu' > 1$ és így $\mu' - 1$ pozitiv.

Ami a sor összetartására vonatkozó állitást illeti, mindenekelőtt megjegyezzük, hogy pozitiv tagú sorral lévén dolgunk, szabad az összetartás vizsgálata előtt akárhány tagot akárhány helyen e tagok összege által helyettesiteni. Egyesítsük egy összegbe mindazon tagokat, melyben

---

* A tárgyalás folytonossága úgy hozta magával, hogy a logarithmusok alapszáma eddig szintén μ-vel jelöltetett; külön kiemeljük, hogy ez csak azon egy megszorításnak van alávetve, hogy az 1-nél nagyobb legyen, de a most μ-vel jelölt értékkel nincsen semmiféle kapcsolatban.

$$n = 2^\lambda, 2^\lambda + 1, \ldots 2^{\lambda+1} - 1,$$

úgy hogy a vizsgálandó sor általános tagja:

$$C_\lambda = \frac{1}{2^\lambda(\lg. 2^\lambda)^\mu} + \frac{1}{(2^\lambda+1)(\lg.(2^\lambda+1))^\mu} + \ldots + \frac{1}{(2^{\lambda+1}-1)(\lg.(2^{\lambda+1}-1))^\mu};$$

de ez kisebb, mint azon összeg, melyet nyerünk ha minden tag helyébe az elsőt irjuk. A tagok száma 2^λ lévén, lesz

$$C_\lambda < \frac{1}{\lg.(2^\lambda)^\mu} = \frac{1}{\lambda^\mu} \frac{1}{(\lg. 2)^\mu}$$

tehát C_λ kisebb, a

$$\sum_1^\infty {}_\lambda \frac{1}{(\lg. 2)^\mu} \frac{1}{\lambda^\mu} = \frac{1}{(\lg. 2)^\mu} \sum_1^\infty {}_\lambda \frac{1}{\lambda^\mu}$$

sor általános tagjánál, mely sor pedig összetartó, mert $\mu > 1$.

Evvel tételünknek az összetartásra vonatkozó része be van bizonyítva. A tételben foglalt másik állitást illetőleg, a C_λ-t kisebbítjük, ha minden tag helyébe ezt irjuk:

$$\frac{1}{2^{\lambda+1}(\lg.(2^{\lambda+1}))^\mu}$$

tehát:

$$C_\lambda > \frac{1}{2} \frac{1}{(\lg.(2^{\lambda+1}))^\mu} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\lambda+1)^\mu} \frac{1}{(\lg. 2)^\mu}$$

tehát C_λ nagyobb a

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2(\lg. 2)^\mu} \frac{1}{(\lambda+1)^\mu} = \frac{1}{2(\lg. 2)^\mu} \sum_1^\infty \frac{1}{(\lambda+1)^\mu}$$

sor általános tagjánál, mely sor pedig széttartó, ha $\mu \leq 1$.

Az adott alakú sorok vizsgálata tehát megtörtént a μ minden értékére nézve.

144. A $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\mu}, \sum_1^\infty \frac{1}{n^\mu}, \sum_2^\infty \frac{1}{n(\lg. n)^\mu}$ csak kezdő tagjai egy a sorok egész osztályaiból álló határtalan sorozatnak, melyben minden egyes sorosztály a fölirt soroknál észlelt tulajdonságokat mutatja. *E sorosztályok általános alakja:*

$$\sum_\nu^\infty \frac{1}{n \lg. n \lg._2 n \ldots \lg._{m-1} n (\lg._m n)^\mu}$$

hol ν oly nagynak veendő, hogy a sor tagok mind pozitivok legyenek és m tetszőleges pozitiv egész szám. *E sorok összetartók ismét, ha* $\mu > 1$, *széttartók, ha* $\mu \leq 1$.

A bebizonyításnál föltételezzük, hogy a tételt $m-1$-re már helyesnek ismerjük és ekkor kimutatjuk, hogy m-re is helyes. Minthogy pedig az előbb tárgyalt soralak nem más, mint az $m=1$ esete, evvel valóban tételünk általános bebizonyítása is megtörtént.

Ha a sortagokat ismét úgy mint előbb összevonjuk, a vizsgálandó sor általános tagja, melytől eltérő alakja csak az első tagnak lehet, lesz:

$$C_\lambda = \frac{1}{2^\lambda \lg. 2^\lambda . \lg._2 2^\lambda \ldots \lg._{m-1} 2^\lambda (\lg._m 2^\lambda)^\mu} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(2^{\lambda+1}-1)\lg.(2^{\lambda+1}-1) \ldots (\lg._m (2^{\lambda+1}-1))^\mu},$$

de itt is:

$$C_\lambda < \frac{1}{\lg. 2^\lambda \lg._2 2^\lambda \ldots \lg._{m-1} 2^\lambda (\lg._m 2^\lambda)^\mu},$$

a mi még, tekintetbe véve hogy $\lg. 2^\lambda = \lambda \lg. 2$ így is irható:

$$C_\lambda < \frac{1}{\lg. 2} \frac{1}{\lambda \lg. (\lambda\vartheta) \lg._2 (\lambda\vartheta) \ldots \lg._{m-2} (\lambda\vartheta) (\lg._{m-1} (\lambda\vartheta))^\mu}$$

hol a rövidebb irás kedvéért a lg.2 pozitiv számot ϑ-val jelöltük. De:

$$\lim_\lambda . \frac{\lambda . \lg. \lambda \quad \lg._2 \lambda \quad \ldots \lg._{m-2} \lambda \quad (\lg._{m-1} \lambda)^\mu}{\lambda . \lg. (\lambda\vartheta) \lg._2 (\lambda\vartheta) \ldots \lg._{m-2} (\lambda\vartheta) (\lg._{m-1} (\lambda\vartheta))^\mu} = 1,$$

mert a 142. czikkben adott tétel értelmében, minden a számláló és nevező $1, 2, \ldots k$-adik tényezőből képezett hányadosnak határértéke külön is egy. Ez az eredmény úgy is fejezhető ki, hogy:

$$g_\lambda \frac{1}{\lambda \lg. \lambda \ldots \lg._{m-2} \lambda (\lg._{m-1} \lambda)^\mu} < \frac{1}{\lambda \lg. (\lambda\vartheta) \ldots \lg._{m-2} (\lambda\vartheta) (\lg._{m-1} (\lambda\vartheta))^\mu} <$$
$$< h_\lambda \frac{1}{\lambda . \lg. \lambda \ldots \lg._{m-2} \lambda (\lg._{m-1} \lambda)^\mu},$$

hol g_λ és h_λ a λ-t elég nagynak véve az egyhez tetszőlegesen közel hozható; tehát ha csak λ egy bizonyos meghatározott számnál nagyobb, g_λ és h_λ helyébe a λ-tól független értékeket is lehet tenni, p. $\frac{1}{2}$ és 2-t.

Minthogy pedig a tételt $m-1$-re érvényesnek veszszük, sorunk, tagjai egy bizonyos λ-tól kezdve, ha $\mu>1$, kisebbek egy összetartónak ismert sor általános tagjánál, tehát a sor maga is összetartó.

A $\mu<1$ eset megvizsgálásánál kiindulunk abból, hogy, mint könnyű látni, megint:

$$C_\lambda > \frac{1}{2}\,\frac{1}{\lg.2^{\lambda+1}\lg._2 2^{\lambda+1}\ldots\lg._{m-1}2^{\lambda+1}(\lg._m 2^{\lambda+1})^\mu},$$

a mi ismét a $\lg.2^{\lambda+1}=(\lambda+1)\lg.2$ tekintetbe vételével így is irható:

$$C_\lambda > \frac{1}{2\lg.2}\,\frac{1}{(\lambda+1)\lg.(\lambda+1)\vartheta\lg._2(\lambda+1)\vartheta\ldots\lg._{m-2}(\lambda+1)\vartheta(\lg._{m-1}(\lambda+1)\vartheta)^\mu},$$

a miből az előbb fölirt határérték és az ebből nyert egyenlőtlenség alapján, ha λ helyett $\lambda+1$-et irunk, következik, hogy:

$$C_\lambda > \frac{1}{4\lg.2}\,\frac{1}{(\lambda+1)\lg.(\lambda+1)\lg._2(\lambda+1)\ldots\lg._{m-2}(\lambda+1)(\lg._{m-1}(\lambda+1))^\mu}.$$

De itt $\mu<1$, m helyett pedig a jobboldalon $m-1$ áll és így sorunk általános tagja ismét nagyobb egy már széttartónak ismert sor megfelelő tagjánál; tehát sorunk maga is széttartó.

A most vizsgált sorokat használva az összehasonlításra, keletkezik az összetartási föltételek ama határtalan sorozata (t. i. az m minden poz. egész számú értékének megfelelőleg egy), melyről a 139. czikk végén tettünk emlitést. Ezen összetartási föltételek általánosságban következőkép fogalmazhatók.

A $\sum\limits_0^\infty A_n$ *sor összetartó, ha létezik egy bizonyos az* 1*-nél nagyobb* μ *szám, melyre nézve*

$$A_n\,.\,n\lg.n\lg._2 n\ldots(\lg._m n)^\mu$$

mindig kisebb egy véges meghatározott pozitiv H *számnál, hacsak* $n>N$; *ellenben széttartó, ha e kifejezés,* μ *helyébe* 1*-et téve mihelyt* $n>N$, *nagyobb marad egy véges meghatározott, a* 0*-tól különböző* G *számnál.*

A bebizonyitás szóról szóra megegyezik a 138. czikkben használttal, csakhogy n^μ helyébe most $n\lg.n\ldots(\lg_m n)^\mu$ lép, úgy hogy ennek ismétlését itt egészen mellőzhetjük. Tételünk átmegy az ott tárgyaltba, ha $m = 0$ tétetik és $\lg._0 n$ alatt n-t akarjuk érteni.

Végre ismét fölemlítjük külön a tételnek e legegyszerűbb esetét: *Ha*

$$\lim. \left(A_n n \lg. n \lg._2 n \ldots (\lg_m n)^\mu \right)$$

a 0-tól különböző, véges és meghatározott szám, a $\sum\limits_0^\infty A_n$ *sor összetartó vagy széttartó, a mint* $\mu > 1$ *vagy pedig* $\mu \leq 1$.

Bebizonyítása ismét szóról-szóra átvehető a 138. cikkből.

145. Az összetartási föltételeknek most nyert határtalan sorozata arra látszik mutatni, hogy talán ezek mindannyian egyesíthetők egy oly sor $\sum\limits_0 C_n$ fölállításával, melynek a következő sajátsága volna. *Minden sor, melynek tagjai a C-sor tagjainál gyorsabban kisebbednek, összetartó, minden oly sor azonban, melynek tagjai a C-sor tagjainál lassabban kisebbednek, széttartó volna. Ily határt képező sor azonban nem létezhetik.* Maga e határsor vagy széttartó vagy összetartó volna; a két eset lehetetlenségét két külön tétel mutatja, melyek közül az első még Abel *-tól, a második du Bois-Reymond **-tól származik.

Legyen $\sum\limits_0^\infty C_n$ *(pozitiv tagokból álló) széttartó sor; akkor mindig van oly sor, melynek tagjai gyorsabban kisebbednek és mely szintén széttartó.*

A tételt bebizonyítjuk azáltal, hogy valóban fölállítjuk azt a sort, mely az említett sajátságokat mutatja. Ha ismét

$$\begin{aligned} S_n &= C_1 + C_2 + \ldots C_n, \\ R_{n,k} &= C_{n+1} + C_{n+2} + \ldots + C_{n+k}, \\ R_n &= C_{n+1} + C_{n+2} + \ldots, \end{aligned}$$

akkor $\sum\limits_1^\infty \frac{C_n}{S_n}$ csakugyan ily sor lesz. Tagjai gyorsabban kisebbednek, mint a $\sum\limits^\infty C_n$ sor tagjai, mert a sor széttartása miatt $\lim. S_n = \infty$

* «Note sur le mémoire etc.» Oeuvres complétes, tome I.

** «Neue Theorie der Convergenz und Divergenz.» Crelle, Journal, Bd, 76.

és így

$$\lim.\left(\frac{C_n}{S_n}:C_n\right)=\lim.\frac{1}{S_n}=0.$$

Ha az új sorra vonatkozólag az S_n, $R_{n,k}$, R_n-nek megfelelő alakokat s_n, $r_{n,k}$, r_n-nel jelöljük, akkor:

$$r_{n,k}=\frac{C_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{C_{n+2}}{S_{n+2}}+\ldots+\frac{C_{n+k}}{S_{n+k}};$$

minthogy pedig S_{n+1}, S_{n+2}, ... folyton növekedő pozitiv számok sorozata,

$$r_{n,k}>\frac{C_{n+1}+C_{n+2}+\ldots+C_{n+k}}{S_{n+k}};$$

és akármilyen nagy is n, mindig

$$r_{n,k}>\frac{S_{n+k}-S_n}{S_{n+k}}=1-\frac{S_n}{S_{n+k}}.$$

A sor széttartása miatt mindig lehet egy k-t meghatározni,* úgy hogy $R_{n,k}>S_n$, tehát $S_{n+k}>2S_n$, és így $\frac{S_n}{S_{n+k}}<\frac{1}{2}$ és végre:

$$r_{n,k}>\tfrac{1}{2},$$

azaz $\sum\limits_0^\infty\frac{C_n}{S_n}$ valóban széttartó.

A második tétel a következő: *Ha* $\sum\limits_0^\infty C_n$ *(pozitiv tagokból álló) összetartó sor, akkor mindig van oly sor is, melynek tagjai lassabban kisebbednek és mely szintén összetartó.*

Ily sor p. mindig a következő:

$$\sum_1^\infty\frac{C_n}{R_{n-1}^{\frac{1}{2}}},$$

---

* Pozitiv tagokból álló széttartó sornál mindig:

$$\lim.R_n=\infty;$$

ha ugyanis egy bizonyos meghatározott ν-től kezdve $R_n<\omega$, akkor

$$S_n<S_\nu+\omega,$$

és a sor, mely mint pozitiv tagokból álló nem lehet ingadozó, összetartó volna. Tehát akármily nagy is n, $R_{n,k}$ a k választása által S_n-nél nagyobbá tehető.

hol az eddigi jelzéseket megtartjuk. Ekkor mindenek előtt:

$$\lim. \frac{C_n}{R_{n-1}^{\frac{1}{2}}} : C_n = \lim. \frac{1}{R_{n-1}^{\frac{1}{2}}} = \infty,$$

mert az adott sor összetartása miatt $\lim. R_{n-1} = 0$. Ez állításunk első részét igazolja.

A mi pedig a fölirt sor összetartását illeti:

$$r_{n,k} = \frac{C_{n+1}}{R_n^{\frac{1}{2}}} + \frac{C_{n+2}}{R_{n+1}^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{C_{n+k}}{R_{n+k-1}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_{n+1} - R_{n+2}}{R_{n+1}^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{R_{n+k-1} - R_{n+k}}{R_{n+k-1}^{\frac{1}{2}}} <$$

$$< 2\frac{R_n - R_{n+1}}{R_n^{\frac{1}{2}} + R_{n+1}^{\frac{1}{2}}} + 2\frac{R_{n+1} - R_{n+2}}{R_{n+1}^{\frac{1}{2}} + R_{n+2}^{\frac{1}{2}}} + \ldots 2\frac{R_{n+k-1} - R_{n+k}}{R_{n+k-1}^{\frac{1}{2}} + R_{n+k}^{\frac{1}{2}}},$$

vagy végre a jobboldalon álló hányadosok szembeszökő átalakítása után:

$$r_{n,k} < 2\left(R_n^{\frac{1}{2}} - R_{n+1}^{\frac{1}{2}} + R_{n+1}^{\frac{1}{2}} - R_{n+2}^{\frac{1}{2}} + \ldots + R_{n+k-1}^{\frac{1}{2}} - R_{n+k}^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$r_{n,k} < 2\left(R_n^{\frac{1}{2}} - R_{n+k}^{\frac{1}{2}}\right),$$

és így végre csakugyan:

$$\lim_{n}. r_{n,k} = 0.$$

IV.

Végtelen szorzatok.*

Ertelmezések.

146. Legyen adva a számok egy bizonyos sorozata:

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$$

mely bizonyos megadott törvény értelmében határtalanul folytatható. *Ekkor a*

$$\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n, \ldots$$

végtelen szorzat alakja jelenti az e sorozat n első tényezőjéből képezett szorzat határértékét (ha n a pozitiv egész számok során keresztül minden határon túl növekszik) vagyis a következő számértéket:

$$\lim. (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n).$$

E szorzat rövidített** jele: $\overset{\infty}{\Pi} \lambda_n$. Világos hogy e jelnek csak akkor van értelme, ha a határérték véges és meghatározott szám.

Ha lim. $\overset{n-1}{\Pi} \lambda_n$ *a 0-tól különböző véges és meghatározott szám, a* $\Pi \lambda_n$ *végtelen szorzatot összetartónak mondjuk, minden más esetben széttartónak.*

A szettartás esetei közt külön fölemlítendő, azon szorzatoké, melyekre nézve ama határérték 0 vagy végtelen, mint a *szorosabb értelemben vett széttartó* soroké, továbbá azon szorzatok esete, melyekre nézve ama határérték nem meghatározott szám, de min-

* Lásd Weierstrass, «Über die Theorie der analytischen Facultäten» (Crelle, Journal, 51. kötet).

** Általánosságban $\overset{l}{\underset{k}{\Pi_n}} \lambda_n$ jelenti mindazon számok szorzatát, melyeket λ_n-ből nyerünk, ha n helyébe minden egész számot teszünk k-tól l-ig, e határértékek beleértésével. A szorzási mutató, n, ha kétség nem forog fenn, ismét kihagyható, a mint ez például már a szövegben történt.

dig két véges határ között marad, a mely esetben a szorzat ismét *ingadozó.*

Kezdettől fogva kizárjuk azt az esetet, midőn a szorzat egyik tagja, $\lambda_k = 0$, a mennyiben akkor közvetetlenül látni, hogy minden több mint k tényezővel képezett szorzat, tehát a határérték is 0.* Igy p. e végtelen szorzatok:

$$\prod_0^\infty \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \text{ és } \prod_0^\infty \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

széttartók, mert a megfelelő határértékek 0 és ∞. T. i.

$$\lim. \prod_0^{n-1} \left(1 - \frac{1}{m+2}\right) = \lim. \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n}\right) = \lim. \frac{1}{n} = 0$$

és:

$$\lim. \prod_0^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right) = \lim. \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \lim. (n+1) = \infty.$$

Ellenben összetartó a következő végtelen szorzat:

$$\prod_0^\infty \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

Ekkor ugyanis:

$$\prod_0^{n-1} \left(1 - \frac{1}{(m+2)^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \, \frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{1 \,.\, 2 \ldots (n-1)}{2 \,.\, 3 \ldots n} \cdot \frac{3 \,.\, 4 \ldots (n+1)}{2 \,.\, 3 \ldots n} = \frac{n+1}{2n},$$

* Hogy az összetartást itt azon esetekre szorítjuk, midőn a határérték a 0-tól különböző, tulajdonképen csak az elnevezés dolga, tehát mindenesetre meg van engedve. A terminologia ily választása a tételek kifejezését lényegesen egyszerűsíti. Már e helyen arra utalhatunk, hogy ekkor a

$$\prod_0^\infty \lambda_n \text{ és } \prod_0^\infty \frac{1}{\lambda_n}$$

szorzatok egyidőben lesznek összetartók vagy széttartók, t. i. ha az elsőnek megfelelő határérték P, a másodiké $\frac{1}{P}$, és megfordítva.

a miből áttérve a határra:

$$\prod_{0}^{\infty} \frac{1}{1-(n+2)^2} = \frac{1}{2}.$$

Az összetartás általános ismertető jele.

147. Ha a vizsgálandó végtelen szorzatban az első n tag szorzatát röviden P_n-nel jelölöm:

$$P_n = \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1},$$

tehát:

$$P_1 = \lambda_0, \; P_2 = \lambda_0 \lambda_1, \; P_3 = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2, \ldots,$$

akkor a végtelen szorzat összetartása fölött dönt a lim. P_n határérték, melynek azonban nem csak véges és meghatározottnak, hanem 0-tól különbözőnek kell lennie. Ezt úgy fejezhetjük ki, hogy *az összetartásra szükséges és elegendő, hogy lim. P_n és lim. $\frac{1}{P_n}$ véges és meghatározott legyen.*

Ha e föltétel ki van elégítve, akkor természetesen e határértékek egyike sem lesz 0. A két esetet egyesíthetjük és kimondhatjuk, hogy *az összetartásra szükséges és elegendő föltétel:*

$$\lim. \left(\frac{P_{n+k}}{P_n}\right) = 1$$

bármicsoda nem negativ egész szám a k.

Minthogy ugyanis lim. P_{n+k} = lim. P_n, a föltételek első alakjából, szorzás által közvetetlenül következik a második.

A föltétel második alakjából első sorban következtethetjük, hogy $|P_n|$ minden n-re nézve két véges határ között fekszik. Meghatározván egy ν számot úgy, hogy már

$$\left| \frac{P_{\nu+k}}{P_\nu} - 1 \right| < \delta,$$

a hol δ szabadon választható, lesz:

$$|P_{\nu+k} - P_\nu| < |P_\nu| \delta,$$

és ebből:

$$(1-\delta)|P_\nu| < |P_{\nu+k}| < (1+\delta)|P_\nu|,$$

azaz minden P_ν után következő $P_{\nu+k}$ absolut értéke két a 0-tól különböző határ, G és H közt fekszik. Ha tehát $n > \nu$, akkor,

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_n} - 1\right| < \delta,$$

$$|P_{n+k} - P_n| < \delta\,|P_n|,$$

és ha a $|P_n|$ véges fölső határa H, alsó határa G,

$$|P_{n+k} - P_n| < \delta\, H,$$

azaz lim. P_n véges és meghatározott szám, még pedig nem 0, mert $|P_n| > G$, ha, $n > N$; tehát lim. $\frac{1}{P_n}$ is ilyen.

Ha k helyébe 1-et teszünk, az összetartásnak szükséges, de nem elegendő föltételét nyerjük; még pedig, minthogy $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \lambda_n$, ez a következő:

$$\lim.\ \lambda_n = 1.$$

Ha $\lambda_n - 1$ helyett u_n-et irunk, akkor:

$$\lambda_n = 1 + u_n,$$

és a végtelen szorzatnak ezután használandó alakját nyerjük, hol ismét kezdettől fogva kizárjuk azt, hogy valamely u zérus legyen:

$$\prod_0^\infty (1+u_n) = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n)\ldots,$$

melyre nézve *az összetartás szükséges és elegendő föltétele:*

$$\lim_n.\ \prod_n^{n+k} (1+u_m) = 1;$$

az előbb levezetett *csak szükséges föltétel:* lim. $u_n = 0$.

148. A $\prod\limits_0^\infty (1+u_n)$ végtelen szorzat összetartása igen egyszerű kapcsolatban áll a $\sum\limits_0^\infty u_n$ sorával; az első, erre vonatkozólag tárgyalandó tétel a következő:

Ha $\sum\limits_0^\infty a_n$ csupán pozitiv tagokból álló összetartó sor, a $\prod\limits_0^\infty (1+a_n)$ és $\prod\limits_0^\infty (1-a_n)$ végtelen szorzatok is összetartok lesznek.

Minthogy lim. $a_n = 0$, csak meghatározott számmal lesznek oly sortagok, melyeknek absolut értéke nem kisebb az egynél. Ha ezek közül az utolsó a_{k-1}, lesz:

$$\prod_0^\infty (1+a_n) = \prod_0^{k-1} (1+a_n) \prod_0^\infty (1+a_{k+n}),$$

és a jobboldalon álló végtelen szorzat az eredetivel egy időben összetartó vagy széttartó. Más szóval, a tárgyalásnál az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy az összes a számok az egységnél kisebbek. Sőt ép ugy a k-t oly nagynak is vehetjük, hogy a sor öszszege az első k tag kihagyása után p. $\frac{1}{2}$-nél kisebb legyen; így tehát ismét az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy:

$$\sum_0^\infty a_n < \frac{1}{2}.$$

Ha pedig $c_0, c_1, c_2, \ldots$ egyenlő előjelű valós számok, melyeknek absolut értéke egynél kisebb, akkor

$$(1+c_0)(1+c_1) = 1+c_0+c_1+c_0c_1 > 1+c_0+c_1,$$

$$(1+c_0)(1+c_1)(1+c_2) > (1+c_0+c_1)(1+c_2) > 1+c_0+c_1+c_2,$$

$$(1+c_0)(1+c_1)(1+c_2)(1+c_3) > (1+c_0+c_1+c_2)(1+c_3) > $$
$$> 1+c_0+c_1+c_2+c_3,$$

és ép úgy egész általánosságban:

$$\prod_0^n (1+c_n) > 1+\sum_0^n c_n.$$

E szerint:

$$\prod_0^n (1-a_m) > 1-\sum_0^n a_m,$$

vagyis minthogy $\sum_0^n a_m < \frac{1}{2}$, végre minden n-nél:

$$\prod_0^n (1-a_m) > \frac{1}{2};$$

minthogy pedig

$$(1-a_0),\ (1-a_0)(1-a_1),\ (1-a_0)(1-a_1)(1-a_2)$$

egymásból az által keletkeznek, hogy az 1-nél kisebb pozitiv számmal szorzunk, a $\prod_0^n (1-a_m)$ számsorozat tagjai folyton kisebbednek, de $\frac{1}{2}$-nél nagyobbak maradnak, tehát $\prod_0^\infty (1-a_n)$ valóban véges és meghatározott, a 0-tól különböző szám.

A $\prod_0^\infty (1+a_n)$ helyett a reciprok értekekből képezett végtelen szorzatot vizsgáljuk, mely az előbbiek szerint avval egyidőben összetartó; de

$$\frac{1}{1+a_n} = 1 - \frac{a_n}{1+a_n};$$

minthogy pedig

$$\frac{a_n}{1+a_n} < a_n,$$

a $\sum\limits_0^\infty \frac{a_n}{1+a_n}$ összetartó; vele együtt a $\prod\limits_0^\infty \left(1 - \frac{a_n}{1+a_n}\right) = \prod\limits_0^\infty \frac{1}{1+a_n}$ szorzat és végre $\prod\limits_0^\infty (1 + a_n)$ is.

Arra az esetre, ha a $\sum\limits_0^\infty a_n$ széttartó, az eredmény a következő:

Ha $\sum\limits_0^\infty a_n$ csupán pozitiv tagokból álló és széttartó végtelen sor a $\prod\limits_0^\infty (1+a_n)$ és $\prod\limits_0^\infty (1-a_n)$ végtelen szorzatok is széttartók, még pedig:

$$\lim. \prod_0^n (1+a_m) = \infty, \ \lim. \prod_0^n (1-a_m) = 0.$$

Ekkor ugyanis

$$\prod_0^n (1+a_m) > 1 + \sum_0^n a_m,$$

azaz a sor első n tagjával együtt minden határon túl növekszik.

A $\sum\limits_0^\infty a_n$-nel együtt $\sum\limits_0^\infty \frac{a_n}{1-a_n}$ is széttartó, tehát

$$\lim. \prod_0^n \left(1 + \frac{a_m}{1-a_m}\right) = \infty;$$

de $1 + \frac{a_n}{1-a_n}$ az $1 - a_n$ recziprók értéke és így:

$$\lim. \prod_0^n (1 - a_m) = 0.$$

149. *Ha $\sum\limits_0^\infty u_n$ föltétlenül összetartó sor, a $\prod\limits_0^\infty (1+u_n)$ végtelen szorzat is mindig összetartó.*

E szorzatra vonatkozólag:

$$\frac{P_{n+k}}{P_n} = (1+u_n)\,(1+u_{n+1})\ldots(1+u_{n+k-1});$$

de itt

$$|(1+u_n)\ldots(1+u_{n+k-1})| < (1+|u_n|)\ldots(1+|u_{n+k-1}|).$$

Minthogy azonban a $\prod\limits_0^\infty (1+|u_n|)$ szorzat összetartó, a jobboldalon álló kifejezés, ha n-et egy helyesen meghatározott N-nél nagyobbnak veszszük, kisebb lesz, mint $1+\delta$, hol δ tetszőlegesen választható.

Szintúgy ha ismét már $|u_n|<1$,

$$|(1+u_n)\ldots(1+u_{n+k-1})|>(1-|u_n|)\ldots(1-|u_{n+k+1}|)$$

és ez nagyobbá tehető egy $1-\delta'$ számnál, hol δ' tetszőlegesen választható. Azaz ha n elég nagy, p. N,

$$1-\delta'<\left|\frac{P_{n+k}}{P_n}\right|<1+\delta$$

vagy más kifejezésben

$$\lim.\left|\frac{P_{n+k}}{P_n}\right|=\lim.\frac{|P_{n+k}|}{|P_n|}=1$$

a miből, ismét úgy mint a 147. czikk elején következik, hogy $|P_n|$ az n minden értékénél két véges és a 0-tól különböző határ, G és H közt fekszik, hol G nem zérus.

Minthogy pedig $P_{n+k}=(1+u_n)\,P_n$, és úgy tovább, közvetetlenül fölirhatjuk a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned}P_{n+1}-P_n&=u_n\,P_n\\P_{n+2}-P_{n+1}&=u_{n+1}\,P_{n+1}\\&\ldots\ldots\ldots\\P_{n+k}-P_{n+k-1}&=u_{n+k-1}\,P_{n+k-1}\end{aligned}$$

ezekből

$$P_{n+k}-P_n=u_n\,P_n+u_{n+1}\,P_{n+1}+\ldots+u_{n+k-1}\,P_{n+k-1}$$

tehát

$$\begin{aligned}P_{n+k}-P_n|&<|u_n|\,|P_n|+|u_{n+1}|\,|P_{n+1}|+\ldots+|u_{n+k-1}|\,|P_{n+k-1}|\\&<H\,(|u_n|+|u_{n+1}|+\ldots+|u_{n+k-1}|)\end{aligned}$$

de $\sum_0^\infty|u_n|$ összetartó lévén, a második tényező az n választása által a k-tól függetlenül tetszőlegesen kisebbíthető, tehát:

$$\lim.\,(P_{n+k}-P_n)=0,$$

azaz lim. P_n véges és meghatározott érték, még pedig nem 0, mert $|P_n|>G$.

Föltétlen és föltételes összetartás.

150. Két végtelen szorzat, $\prod_{0}^{\infty}(1+u_n)$ és $\prod_{0}^{\infty}(1+v_n)$ ugyanazon tényezőkből áll, vagyis csak a tényezők sorrendjében különbözik, ha minden meghatározott mutatóval ellátott u_k előfordúl szintén meghatározott mutatóval, mint v_l, a v számok sorában, és megfordítva minden meghatározott mutatóval ellátott v_l szintén meghatározott mutatóval, mint u_k az u számok sorában.

Két végtelen szorzatnak, mely csak a tényezők elrendezésében különbözik, értéke különböző lehet.

Legyen p. $u_n = (-1)^n \frac{1}{n+1}$, akkor:

$$\prod_{0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\frac{1}{n+1}\right) = (1+1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots$$
$$\dots\left(1+\frac{1}{2m-1}\right)\left(1-\frac{1}{2m}\right)\dots$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\dots\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m-1}{2m}\dots$$

tehát:

$$\prod_{0}^{2m-2}\left(1+(-1)^n\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2m}{2m-1}\cdot\prod_{0}^{2m-1}\left(1+(-1)^n\frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

és így ama végtelen szorzat értéke az egység. Ellenben

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots$$
$$\dots\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\left(1+\frac{1}{4k+3}\right)\left(1-\frac{1}{2k+2}\right)\dots,$$

mely ugyanazon tényezőkből áll, mindig $\frac{4}{3}$-nál nagyobb értéket ád. Ha először is a tényezők számát 3-mal oszthatónak veszszük, az első 3 tényező szorzata $\frac{4}{3}$, a reá következők pedig hármasával csoportosítva, mindig az 1-nél nagyobbak. T. i.

$$\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\left(1+\frac{1}{4k+3}\right)\left(1-\frac{1}{2k+2}\right) = \frac{(4k+2)(4k+4)(2k+1)}{(4k+1)(4k+3)(2k+2)}$$
$$= \frac{16k^3+32k^2+20k+4}{16k^3+32k^2+19k+3}$$

hol a számláló csakugyan nagyobb a nevezőnél. Ha a tényezők száma nem osztható 3-mal, még hozzálép mint szzorzó

$$1 + \frac{1}{4k+1} \text{ vagy } \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right)\left(1 + \frac{1}{4k+3}\right)$$

az egységnél nagyobb szám, tehát szintén $\frac{4}{3}$-nál nagyobb eredményt nyerünk. A szorzat különben összetartó, mert ha k elég nagy, ezen szorzók hozzálépése az eredményt tetszőleges kis számmal változtatja; a föntebbi hármas csoportosításában pedig:

$$\prod_0^\infty \left(\frac{16k^3+32k^2+20k+4}{16k^3+32k^2+19k+3}\right) = \prod\left(1 + \frac{k+1}{16k^3+32k^2+19k+3}\right)$$

a végtelen sorzat összetartó; a

$$\sum^\infty \frac{k+1}{16k^3+32k^2+19k+3}$$

sor t. i. szintén összetartó, mert minden k-ra az egytől kezdve

$$\frac{k+1}{16k^3+32k^2+19k+6} = \frac{1+\frac{1}{k}}{16k^2+32k+19+\frac{3}{k}} < \frac{2}{16k^2},$$

és $\sum_1^\infty \frac{1}{8k^2}$ szintén összetartó.

151. Az oly végtelen szorzatot, mely a tényezők bármely elrendezésénél összetartó és mindig ugyanazt az értéket adja, *föltétlenül összetartónak* nevezzük; míg oly végtelen szorzat, melynek akár összetartása, akár csak értéke a tényezők elrendezésétől függ, *föltételesen összetartó.*

A $\prod_0^\infty (1+u_n)$ *végtelen szorzat akkor és csak akkor föltétlenül összetartó, ha a* $\sum_0^\infty u_n$ *sor föltétlenül összetartó.* Minthogy már tudjuk, hogy ekkor a végtelen szorzat összetartó, csak az lesz bebizonyítandó, hogy 1.) ebben az esetben föltétlenül összetartó, és 2.) hogy a végtelen szorzat soha sem lehet föltétlenül összetartó, ha a megfelelő sor nem ilyen.

Mindkét állítást először *valós u*-k esetében igazoljuk.

Legyenek a végtelen szorzatnak első és második elrendezésénél az 1, 2... n tényezőből képezett szorzatok:

$$P_1, P_2 \ldots P_n \ldots,$$
$$P'_1, P'_2 \ldots P'_n \ldots,$$

akkor mindenesetre (136. cz.) lim. P_n és lim. P'_n véges és meghatározott, a 0-tól különböző számok. Legyen

$$i_1, i_2, \ldots i_n \ldots$$

a tényezők száma, mely a második elrendezésnél veendő, úgy hogy az első elrendezésnek

$$1, 2, \ldots n$$

első tényezője már a szorzatban benfoglaltassék. Akkor

$$P'_{i_1}, P'_{i_2} \ldots P'_{i_n} \ldots$$

számsorozat, mint szabályos számsorozatban álló számok sorozata, ismét szabályos és ugyanazon határértékhez vezet, mint

$$P_1, P_2, \ldots P_n \ldots$$

Mert:

$$P'_{i_n} - P_n = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1})\left\{(1+u_{\nu_1})\ldots(1+u_{\nu_k})-1\right\}$$

hol $u_{\nu_1} \ldots u_{\nu_k}$ az u-sorozatban u_{n-1} után álló tagok. Továbbá:

$$(1-|u_{\nu_1}|)\ldots(1-|u_{\nu_k}|) \leq (1+u_{\nu_1})\ldots(1+u_{\nu_k}) \leq (1+|u_{\nu_1}|)\ldots(1+|u_{\nu_k}|)$$

és annál inkább, ha az $u_{\nu_1} \ldots$ sorozat helyett az összes u_n és u_{ν_k} közt álló számokat fölhasználjuk:

$$\prod_n^{\nu_k}(1-|u_m|) \leq (1+u_{\nu_1})\ldots(1+u_{\nu_k}) \leq \prod_n^{\nu_k}(1+|u_m|).$$

Minthogy azonban az előbbiek szerint a két határ n növekedésével az egységhez közeledik, lesz

$$\lim.\ (1+u_{\nu_1})\ldots(1+u_{\nu_k}) = 1.$$

És ebből:

$$\lim.\ (P'_{i_n} - P_n) = 0$$

tehát végre:

$$\lim.\ P_n = \lim.\ P'_{i_n} = \lim.\ P'_n,$$

azaz a külön böző elrendezések, ha $\sum_0^\infty u_n$ föltétlenül összetartó, ugyanazon értékhez vezetnek.

17*

Ha most már a $\sum_0 u_n$ sor nem föltétlenül összetartó, de a mint ez a végtelen szorzat összetartására szükséges, lim. $u_n = 0$, akkor a sor tagjai, bármennyire haladjunk, szükségkép kevert előjelűeknek lesznek föltételezendők; az ellenkező esetben a sor széttartó, és a szorzat határértéke ∞ vagy 0, a mint a tagok végül pozitiv vagy negativ előjelűek maradnak.

Legyenek most már a pozitiv és negativ tagokból külön képezett sorok $\sum_0^\infty a_n$ és $\sum_0^\infty b_n$ mindketten széttartók; akkor a

$$\prod_0^m (1+a_n) \text{ és } \prod_0^m (1-b_n)$$

szorzatoknak határértéke ∞, ill. 0. Ekkor bármily nagy is az m mutató, lehet egy k számot meghatározni ugy, hogy a

$$\prod_m^{m+k} (1+a_n), \prod_m^{m+k} (1-b_n)$$

szorzatok közt az első nagyobb legyen egy tetszőlegesen választott ω számnál, a második pedig kisebb egy szintén tetszőlegesen választott δ számnál.

Ekkor ismét a $\prod (1+u_n)$ szorzat elrendezését ugy lehet megállapitani, hogy határértéke egy tetszőlegesen választott C szám legyen. Szóról-szóra ismételjük erre vonatkozólag a 109. cikkben *d)* alatt mondottokat, egyszerűen sor és tag helyébe mindenütt a szorzat és tényező szókat téve.

Ha csak a $\sum_0^\infty a_n$ vagy csak a $\sum_0^\infty b_n$ széttartó, a szorzat határértéke ∞, illetőleg 0.

152. Ha most már *az u-k általánosságban complex számok:*

$$u_n = v_n + iw_n$$

és

$$1 + v_n + iw_n = r_n (\cos. \varphi_n + i \sin. \varphi_n),$$

akkor

$$\prod_0^n (1+u_m) = \prod_0^n r_m \left(\cos. \sum_0^n \varphi_m + i \sin. \sum_0^n \varphi_m\right)$$

és a szorzat föltétlen összetartására szükséges, hogy a $\prod\limits_0^\infty r_m$ szorzat és a $\sum\limits_0^\infty \varphi_m$ sor föltétlenül összetartó legyen. Igaz ugyan, hogy a $\sum\limits_0^\infty \varphi_m$ kizárólag a 2π többeseivel változhatna; de ily változás nem idézhető elő a tagok sorrendjének fölcserélése által. Ha ugyanis $\sum\limits_0^\infty \varphi_m$ föltételesen összetartó, akkor a rendezés által fölvehet minden valós értéket és $\prod\limits_0^\infty (1+u_m)$ nem volna föltétlenül összetartó.

A mi először az absolut értékek szorzatát illeti, a $\prod\limits_0^n r_m$ helyett kényelmesebben a vele egyidőben összetartó* $\prod\limits_0^n r_m^2$-et vizsgáljuk, ez részletesen kiirva:

$$\prod_0^n r_m^2 = \prod_0^n (1+2v_m+v_m^2+w_m^2),$$

ha pedig $\sum\limits_0^\infty u_n$, és így tehát $\sum\limits_0^\infty v_n$ és $\sum\limits_0^\infty w_n$ is föltétlenül összetartók, a $\sum\limits_0^\infty (2v_m+v_m^2+w_m^2)$ is ilyen és végre az absolut értékekből képezett végtelen szorzat is.

Az absolut értékek szorzatának föltétlen vagy föltételes összetartása fölött tehát a

$$\sum_0^\infty (2v_m+v_m^2+w_m^2)$$

sor ugyan-e tulajdonsága dönt.

Az utóbbi sor azonban csak akkor lehet föltétlenül összetartó, ha $\sum\limits_0^\infty v_n$ és $\sum\limits_0^\infty (v_m^2+w_m^2)$ külön-külön ilyenek.

---

* Ha t. i. $\prod\limits_0^n r_m$ véges és meghatározott (0-tól különböző) határhoz közeledik, akkor ugyanez történik $\prod\limits_0^n r_m \cdot \prod\limits_0^n r_m = \prod\limits_0^n r_m^2$-tel is, ha megfordítva ilynemű kifejezésünk van: $\prod\limits_0^n r^2$, és határértéke A^2, akkor $\prod\limits_0^n r_m$ értékei vagy $+A$ vagy $-A$-hoz közelednek; de $\prod\limits_0^n r_m$ pozitiv, és így ezen értékek egyike p: $-A$ mindenkor kizárandó, tehát csakugyan lim. $\prod\limits_0^n r_m = A$.

Complex u-k esetében tehát $\prod(1+u_n)$ még lehetne föltétlenül összetartó, ha az absolut értékek szorzata ilyen; de épen ebben az esetben a $\sum\limits_0 \varphi_n$ sor soha sem lehet föltétlenül összetartó, ha csak nem $\sum\limits_0 w_n$ föltétlenül összetartó. Ebből azonban ekkor következik, hogy $\sum\limits_0^\infty v_n$, tehát végre $\sum\limits_0^\infty u_n$ is föltétlenül összetartó. A $\sum\limits_0^\infty w_n$ sorral együtt t. i. $\sum w_n^2$ is föltétlenül összetartó; tehát ép ilyen:

$$\sum_0^\infty (2v_n + v_n^2 + w_n^2) - \sum_0^\infty w_n^2 = \sum_0^\infty v_n(2+v_n)$$

evvel együtt végre $\sum\limits_0^\infty v_n$ is.

Általánosságban (φ_n-nek mindig $+\pi$ és $-\pi$ közt fekvő értékét véve) a határok egyikének kizárásával:

$$\sin.\ \varphi_n = \frac{w_n}{\left[(1+v_n)^2 + w_n^2\right]^{\frac{1}{2}}},\ \cos.\ \varphi_n = \frac{1+v_n}{\left[(1+v_n)^2 + w_n^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

és így minthogy lim. sin. $\varphi_n = 0$, lim. cos. $\varphi_n = 1$, lesz lim. $\varphi_n = 0$, és

$$\sin.\ |\varphi_n| > (1-\delta_n)\,|w_n|,$$

hol lim. $\delta_n = 0$.

Ha most már $\sum\limits_0^\infty |\varphi_n|$ összetartó, akkor, hacsak n-et egy bizonyos N-nél nagyobbnak veszszük, mindig:

$$\sum_{n+1}^{n+k} |\varphi_m| < \varepsilon$$

hol ε oly kicsinynek van választva, hogy cos. $\varepsilon > 1-\eta$, az η tetszőlegesen választott (kis) pozitiv szám lévén. Más oldalról: *

* Ha $a_1, a_2 \ldots a_k$ pozitiv számok, melyeknek összege is kisebb egy bizonyos ε számnál, mely ε ismét még oly kicsiny, hogy cos. $\varepsilon > 1-\eta$, hol η tetszőlegesen választott (kis) pozitiv szám, akkor

$$\sin.\ (a_1 + a_2) > (1-\eta)\,(\sin.\ a_1 + \sin.\ a_2)$$

és itt a_2 helyébe $a_2 + a_3$-at téve

$$\sin.\ (a_1 + a_2 + a_3) > (1-\eta)\sin.\ a_1 + (1-\eta)^2\,(\sin.\ a_2 + \sin.\ a_3)$$

$$\sin.\left(\sum_{n+1}^{n+k}|\varphi_m|\right) > (1-\eta)\sin.|\varphi_{n+1}| + (1-\eta^2)\sin.|\varphi_{n+2}| + \ldots +$$
$$+ (1-\eta)^k \sin.|\varphi_{n+k}|$$
$$> \frac{1}{2}\sum_{1}^{k}{}^{i}(1-\eta)^i\,|w_{n+i}|,$$

ha t. i. n egyszersmind oly nagy, hogy $\delta_n < \frac{1}{2}$, és még:

$$\sin.\left(\sum_{n+1}^{n+k}|\varphi_m|\right) > \frac{1}{2}(1-\eta)^k \sum_{1}^{k}{}^{i}|w_{n+i}|.$$

Föltéve, hogy $\sum\limits_{0}^{\infty}|w_n|$ széttartó, bármely n-nél lehet egy K-t meghatározni, úgy hogy p.

$$\sum_{1}^{k}{}^{i}|w_{n+i}| > 1,$$

hacsak $k \geq K$, valamint azután az η-t oly kicsinynek vehetjük, hogy egyszersmind:

$$(1-\eta)^K > \frac{1}{2} \text{ és } \eta < \frac{1}{32}.$$

Ekkor:

$$\sin.\left(\sum_{n+1}^{n+K}|\varphi_m|\right) > \frac{1}{4},$$

de ez ellenmondásban áll avval, hogy $\sum\limits_{0}^{\infty}|\varphi_n|$ összetartó; az n ugyanis már úgy választatott, hogy

$$\sum_{n+1}^{n+K}|\varphi_m| < \varepsilon,$$

$$\sin.\left(\sum_{n+1}^{n+K}|\varphi_m|\right) < \sin.\varepsilon < (2\eta-\eta^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{4}.$$

és általánosságban:

$$\sin.(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_r) > (1-\eta)\sin.\alpha_1 + (1-\eta)^2\sin.\alpha_2 + \ldots$$
$$\ldots (1-\eta)^{r-1}(\sin.\alpha_{r-1} + \sin.\alpha_r)$$

és annál inkább

$$\sin.(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r) > (1-\eta)\sin.\alpha_1 + (1-\eta)^2\sin.\alpha_2 + \ldots +$$
$$+ (1-\eta)^{r-1}\sin.\alpha_{r-1} + (1-\eta)^r\sin.\alpha_r$$

Tehát a $\sum\limits_0^\infty \varphi_n$ és evvel együtt a $\prod\limits_0^\infty (1+u_n)$ nem lehet föltétlenül összetartó, ha $\sum\limits_0^\infty w_n$ nem szintén ilyen sor.

Ha ellenben $\sum\limits_0^\infty |w_n|$ összetartó, minthogy

$$\sin. |\varphi_n| < |w_n|,$$

egy bizonyos N úgy választható, hogy

$$\sum_{n+1}^{n+k} \sin. |\varphi_i| < \sum_{n+1}^{n+k} |w_i| < \varepsilon,$$

ha csak $n > N$, de minthogy elég nagy n-nél egyszersmind $|\varphi_n|$ tetszőleges kicsiny, továbbá: *

$$\left|\sin. \sum_{n+1}^{n+k} |\varphi_i|\right| < \sum_{n+1}^{n+k} \sin. |\varphi_i| < \varepsilon,$$

és így tehát először is elég nagy n-nél:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+k} |\varphi_i| - r\pi\right| < \delta,$$

hol δ tetszőlegesen kicsiny, és r egész szám, de ez az r szám a k választásától egészen független. Ha ugyanis

$$\left|\sum_{n+1}^{n+k+1} |\varphi_i| - s\pi\right| < \delta,$$

akkor

$$\left||\varphi_{n+k+1}| - (s-r)\pi\right| < 2\delta.$$

---

* Ha $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$ bármicsoda valós számok, a

$$\sin. (\beta_1 + \beta_2) = \sin. \beta_1 \cos. \beta_2 + \sin. \beta_2 \cos. \beta_1$$

képletből következik, hogy:

$$|\sin. (\beta_1 + \beta_2)| \leqq |\sin. \beta_1| + |\sin. \beta_2|.$$

Ha itt β_2 helyébe $\beta_2 + \beta_3$-at irunk:

$$|\sin. (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3| \leqq |\sin. \beta_1| + |\sin. (\beta_2 + \beta_3| \leqq |\sin. \beta_1| + |\sin. \beta_2| + |\sin. \beta_3|,$$

és ép úgy általánosságban:

$$|\sin. \sum_1^n \beta_i| \leqq \sum_1^n |\sin. \beta_i|$$

De

$$\cos.\ \varphi_n = \frac{1+v_n}{\sqrt{(1+v_n)^2+w_n^2}}\,,\ \lim.\ \cos.\ \varphi_n = 1\,,$$

lim. $|\varphi_n|$ tehát a 2π többese, minthogy azonban φ_n-nek mindig π és $-\pi$ közt fekvő értékét vettük, végre lim. $\varphi_n = 0$; a mi csak úgy lehetséges, ha $r = s$. Ekkor végre $r = 0$, mert csak ez az érték felelhet meg, ha p. $k = 2$.

Ekképen $\sum\limits_{n+1}^{n+k}|\varphi_i| < \delta$; és a $\sum\limits_0^{\infty}|\varphi_i|$ sor összetartó; *ha tehát lim.* $u_n =$ *lim.* $(v_n+w_n i) = 0$ *és* $\sum\limits_0^{\infty} w_n$ *föltétlenül összetartó, a végtelen szorzat argumentuma véges és meghatározott határértékhez közeledik.*

A $\Pi(1+u_n)$ *végtelen szorzat tehát akkor és csak akkor föltétlenül összetartó, ha a* $\sum\limits_0^{\infty} u_n$ *sor föltétlenül összetartó.*

153. A megelőző tárgyalások alapján kimondhatjuk még a következő tételt.

Legyenek $\sum\limits_0^{\infty} v_n$ *és* $\sum\limits_0^{\infty} w_n^2$ *föltétlenül összetartó sorok, ellenben* $\sum\limits_0^{\infty} w_n$ *oly széttartó sor, melynek tagjai egy bizonyostól kezdve egyenlő előjelűek; legyen továbbá:*

$$\prod_0^n (1+u_m) = \prod_0^n (1+v_m+w_m i) = P_n = P_n' + P_n'' i\,;$$

akkor lim. $|P_n|$ *véges és meghatározott, a* 0*-tól különböző érték; ellenben* P_n' *és* P_n''*, ámbár absolut értékük mindig kisebb egy bizonyos véges számnál, nem közelednek meghatározott értékhez, hanem véges határok közt ingadoznak.*

Az állítás első része világos onnét, hogy a bevezetett föltevések mellett $\sum\limits_0^{\infty}(2v_n+v_n^2+w_n^2)$ valóban föltétlenül összetartó; azt is közvetetlenül látni, hogy:

$$P_n'^2 + P_n''^2 = |P_n|^2$$

tehát:

$$P_n'^2 \leq |P_n|^2\,,\ P_n''^2 \leq |P_n|^2,$$

azaz végre:

$$|P_n'| \leq |P_n|\,,\ |P_n''| \leq |P_n|.$$

Ha tehát H oly véges szám, mely a $|P_n|$ számsorozat minden tagjánál nagyobb — és ilyen csakugyan létezik, akkor e szerint $|P'_n|$ és $|P''_n|$ is kisebb marad H-nál.

Az eddig használt jelzések megtartásával végre

$$P'_n = |P_n| \cos. \sum_0^n \varphi_n ,$$

$$P''_n = |P_n| \sin. \sum_0^n \varphi_n .$$

Minthogy azonban itt a φ_n számok végre előjelüket megtartják, ugyanazon n-től kezdve a $\sin. \varphi_n$ és végre a φ_n számok előjele is állandó lesz. Tehát nemcsak a $\sum_0^\infty |\varphi_n|$, hanem már $\sum_0^\infty \varphi_n$ is széttartó. Ha tehát n bárminő pozitiv egész szám, akkor lehet egy k-t úgy választani, hogy $\left|\sum_{n+1}^{n+k} \varphi_m\right|$ például $\frac{\pi}{4}$-nél nagyobb legyen; minthogy azonban $\lim. \varphi_n = 0$, a k választása egyszersmind úgy történhetik, hogy ugyan az érték $\frac{\pi}{3}$-nál kisebb legyen; erre csak az szükséges, hogy amaz n-től kezdve már $|\varphi_{n+l}| < \frac{\pi}{12}$; mert ekkor a növekedés állandó irányban és minden egyes φ hozzáadásánál $\frac{\pi}{12}$-nél kevesebbel történik. De így bármily nagy n-nél:

$$\sin. \sum_0^n \varphi_m \text{ és } \sin. \sum_0^{n+k} \varphi_m$$

két különböző szám és így P''_n értékei, minthogy $|P_n|$ ezalatt meghatározott értékhez közeledik, csakugyan ingadoznak. Azt is látni, hogy a $|P''_n|$ számsorozatot folytatva, mindig újból találkozunk oly értékekkel, melyek a $|P_n|$-hez, és olyanokkal, melyek a 0-hoz tetszőleges közel állanak, a mennyiben a tagszám szaporításával $\sum_0^n \varphi_n$ a $\frac{\pi}{2}$-nek majd páros majd páratlan többszöröseihez tetszőlegesen közel jut.

A P'_n és P''_n közt fennálló kapcsolatnál fogva ugyanily ingadozása lesz P'_n-nek is. Az oly n-nél ugyanis, melynél $|P''_n|$ igen közel jut 0-hoz, $|P'_n|$ igen közel lesz $|P_n|$-hez és megfordítva.

*A Gauss-Weierstrass-féle összetartási föltételek.**

154. Legyen $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ oly szabályos számsorozat, mely különben tetszőleges, de melynek számai között 0 nem fordúl elő. A számsorozatnak megfelelő határérték, lim. a_n legyen röviden a. Akkor a következőkben azon sorokat vizsgáljuk, melyeknek általános tagja:

$$u_n = \prod_0^n a_m,$$

és amely *sorok származási törvénye*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a_{n+1}$$

által is adható, ama megszorítással, hogy lim. a_n *véges és meghatározott érték.* Ekkor u_0 még szabadon választható, de világos, hogy az u_0 különböző megállapítása csak annyiban változtat a soron, hogy minden tagja ugyanazon számmal lesz szorozva, ami az összetartási viszonyokon nem változtat.

Azon esetek, midőn $|a|$ nem 1, a megelőzőkben már teljesen tárgyaltattak (132. cz.). Ha t. i. $|a| > 1$, akkor a $\sum |u_n|$ sor nem csak széttartó, de még lim. $|u_n| = \infty$. Minthogy tehát lim. u_n nem 0, a $\sum\limits_0^\infty u_n$ sor széttartó lesz.

Ha $|a| < 1$, akkor még a $\sum |u_n|$ sor is összetartó; mert lim. $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |a| < 1$; tehát $\sum\limits_0^\infty u_n$ föltétlenül összetartó.

Legyen tehát végre $|a| = 1$. Akkor, ha

$$U_n = \frac{u_n}{a^n} \quad u_n = a^n U_n$$

tétetik, lesz:

$$\text{lim.} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{lim.} \left(\frac{u_{n+1}}{a^{n+1}} : \frac{u_n}{a^n}\right) = 1,$$

tehát *a vizsgálat a következő soréra van visszavezetve:*

---

* A mennyiben valós számokra szorítkozunk, GAUSS értekezésében: «Disquisitiones circa seriem infinitam etc.» (Werke, Bd. III); egész általánosságban WEIERSTRASS idézett dolgozatában.

$$\sum_0^\infty u_n a^n$$

hol $\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, és $|a| = 1$; a nagy U betű helyett ismét kis u-t irtunk, de föltételezve, hogy $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$; első sorban a $\sum_0^\infty u_n$, azután a $\sum_0^\infty u_n a^n$ sorral foglalkozunk. A vizsgálat természetesen kapcsolatban áll a 132. és 135. czikkben levezetett speczialis tételekkel.

155. A vizsgálat a következő föltevések alatt történik, melyek az alapvető függvények soralakjának tárgyalásánál elégségesek:

Létezik egy pozitiv egész szám μ, *úgy hogy*

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1 = \frac{a + \delta_n}{n^\mu} \qquad (1.)$$

hol $\lim. \delta_n = 0$; *még pedig oly módon, hogy létezik ismét egy pozitiv egész szám*, ν, *úgy hogy:*

$$\delta_n = \frac{c + \varepsilon_n}{n^\nu}$$

hol ismét $\lim. \varepsilon_n = 0$.

Minthogy μ és ν legalább is egyenlő egygyel, e föltevések alapján $\sum_1^\infty \frac{\delta_n}{n^\mu}$ *mindenkor föltétlenül összetartó sor*, a mint ez a sor részletes alakjából:

$$\sum_1^\infty \frac{c + \varepsilon_n}{n^{\mu+\nu}},$$

hol $\mu + \nu \geq 2$ tüstént kiviláglik.

Tekintettel arra, hogy az u-k itt általánosságban complex számok, legyen még részletesen kiirva:

$$a = g + hi; \quad \delta_n = \vartheta_n + \eta_n i,$$

hol természetesen $\lim. \vartheta_n = 0$, $\lim. \eta_n = 0$.

Az (1.)-ből:

$$u_n = u_{n-1}\left(1 + \frac{a + \delta_n}{n^\mu}\right),$$

de ép úgy

$$u_{n-1} = u_{n-2}\left(1 + \frac{a+\delta_{n-1}}{(n-1)^\mu}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1 = u_0\left(1 + \frac{a+\delta_1}{1^\mu}\right),$$

vagy végre:

$$\left.\begin{aligned} u_n = u_0\left(1+\frac{a+\delta_1}{1^\mu}\right)\left(1+\frac{a+\delta_1}{2^\mu}\right)\cdots \\ \cdots\left(1+\frac{a+\delta_{n-1}}{(n-1)^\mu}\right)\left(1+\frac{a+\delta_n}{n^\mu}\right). \end{aligned}\right| \quad (2.)$$

E szerint

$$\lim.\, u_n = u_0 \prod_1^\infty \left(1 + \frac{a+\delta_n}{n^\mu}\right)$$

ha $\mu > 1$, véges és meghatározott, a 0-tól különböző érték, mert $\sum\limits_1^\infty \frac{a+\delta_n}{n^\mu}$ ekkor föltétlenül összetartó sor.

Egy első eredmény, melyet ennek alapján kimondhatunk, a következő:

Ha μ az 1-nél nagyobb, akkor a $\sum\limits_0^\infty u_n a^n$, *hol* $|a| = 1$, *sem föltétlenül, sem föltételesen nem lehet összetartó, tehát* $\sum\limits_0^\infty |u_n|$ *is széttartó, még pedig egyszerűen azért, mivel* lim. u_n *nem* 0.

156. Áttérve azon esetre, midőn $\mu = 1$, először ismét kiválasztandók azon esetek, midőn lim. $|u_n|$ és így lim. u_n sem 0.

Az a és δ_n részletes értékei tekintetbe vételével:

$$|u_n| = |u_0| \prod_1^n \left(1 + 2\frac{g+\vartheta_n}{n} + \frac{(g+\vartheta_n)^2+(h+\eta_n)^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

ha $g > 0$, e szorzók mindegyike nagyobb az 1-nél, mihelyt $|\vartheta_n| < g$; és így lim. $|u_n|$, mely nem más, mint az u_0-szoros végtelen szorzat, vagy a 0-tól különböző, véges érték, vagy ∞.

Ha tehát $\mu = 1$, *és* a-nak *valós része*, $g > 0$, *a* $\sum\limits_0^\infty u_n a^n$ *és* $\sum\limits_0^\infty |u_n|$ *sorok ismét széttartók, oly módon, hogy* lim. u_n *nem* 0.

Ha $\mu = 1$, *és* a-nak *valós része*, $g = 0$, *akkor az* $|u_n|$ *szorzatalakja ismét mutatja, hogy* lim. u_n *nem zérus.* T. i. lim. $|u_n|$ a 0-tól különböző véges és meghatározott érték, a mint ez a megfelelő végtelen soroknak föltétlen összetartásából következik. A 153-ik czikk értelmében azt is tudjuk, hogy ekkor u_n-nek nincs véges és meghatározott határértéke, hanem u_n véges határok közt ingadozik.

Ha végre $\mu = 1$, és $g < 0$, akkor lim. $u_n = 0$. Ha behozzuk az

$$A_n = \prod_m^n \left(1 + 2\frac{g}{n} + \frac{g^2 + h^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

kifejezést, hol $m > 2|g|$ és tehát A_n-nek egy tényezője sem 0, akkor

$$\left(\frac{|u_n|}{A_n}\right)^2 = \prod_0^{m-1}\left(1 + 2\frac{g+\vartheta_n}{n} + \frac{(g+\vartheta_n)^2 + (h+\eta_n)^2}{n^2}\right) \cdot$$

$$\prod_m^n \left(\frac{1 + 2\frac{g+\vartheta_n}{n} + \frac{(g+\vartheta_n)^2 + (h+\eta_n)^2}{n^2}}{1 + \frac{2g}{n} + \frac{g^2 + h^2}{n^2}}\right),$$

hol az első tényező minden egyes szorzójával együtt a 0-tól különböző szám: a második tényező pedig még:

$$\prod_m^n \left(1 + \frac{\frac{2\vartheta_n}{n} + \frac{2g\vartheta_n + \vartheta_n^2 + 2h\eta_n + \eta_n^2}{n^2}}{1 + \frac{2g}{n} + \frac{g^2+h^2}{n^2}}\right) = \prod_m^n (1 + v_n)$$

alakban is irható, hol $\sum_0^\infty \frac{\vartheta_n}{n}$ és $\sum_0^\infty \frac{\eta_n}{n}$-nel együtt $\sum_0^\infty v_n$ is föltétlenül összetartó, tehát $\prod^\infty (1 + v_n)$ a zérustól különböző szám; azaz lim. $\left(\frac{|u_n|}{A_n}\right)^2$ és végre lim. $\frac{|u_n|}{A_n}$ is a 0-tól különböző.

Van tehát két pozitiv szám G és H, úgy hogy:

$$G\,A_n < |u_n| < H\,A_n.$$

Tehát ha lim. $A_n = 0$, akkor lim. $|u_n|$ is zérus. Ha A_n helyett A_n^2-et vizsgáljuk, lesz:

$$(\text{lim. } A_n)^2 = \prod_m^\infty \left(1 + 2\frac{g}{n} + \frac{g^2 + h^2}{n^2}\right)$$

$$= \prod_m^\infty \left[1 + \frac{g}{n}\left(2 + \frac{g}{n} + \frac{h^2}{gn}\right)\right];$$

de ép ugy mint $\sum\limits_0^\infty \frac{g}{n}$ e sor is

$$\sum_0^\infty \frac{g}{n}\left(2+\frac{g}{n}+\frac{h^2}{gn}\right)$$

föltétlenül széttartó, de tagjai negativ előjelűek; tehát a végtelen szorzat zérus felé közeledik: azaz lim. A_n^2, vele együtt lim. A_n és végre tehát lim. u_n is zérus.

157. Áttérve már most a $\sum\limits_0 u_n a^n$ föltétlen összetartására, vagyis a $\sum\limits_0^\infty |u_n|$ sor összetartására, mindenekelőtt világos, hogy

$$\lim. \frac{|u_n|}{A_n}$$

a 0-tól különböző, meghatározott érték lévén $\sum\limits_0^\infty |u_n|$ *és* $\sum\limits_0^\infty A_n$ *egyidőben összetartók vagy széttartók*; a vizsgálat tehát az utóbbi, egyszerűbb soron történhetik.

A sor összetartásáról természetesen csak akkor lehet szó, ha $a=1$ *és* $g<0$; *mert csak ekkor lesz* lim. $u_n=0$.

A $\sum\limits_0^\infty A_n$ sor helyébe ismét meg egyszerűbbet tehetünk. Most:

$$A_n=\prod_m^n\left(1+2\frac{g}{n}+\frac{g^2+h^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

legyen továbbá;

$$A'_n=\prod_m^n\left(1+\frac{g}{n}\right),$$

akkor ismét:

$$\left(\frac{A_n}{A'_n}\right)^2=\prod_m^n\left(1+\frac{h^2}{n^2\left(1+\frac{g}{n}\right)^2}\right),$$

és ez, minthogy $\sum\limits_m^\infty \frac{h^2}{n^2}$ is föltétlenül összetartó, a 0-tól különböző határértéket ád. Tehát lim. $\frac{A_n}{A'_n}$ a 0-tól különböző meghatározott szám és igy $\sum\limits_0^\infty A'_n$, a $\sum\limits_0 A_n$ és végre $\sum\limits_0 |u_n|$-nel egyidőben összetartó vagy széttartó.

A $\sum\limits_{m} A'_n$ sor megvizsgálásánál is:

$$A'_n - A'_{n-1} = \frac{g}{n} A'_{n-1},$$

és ebből:

$$nA'_n - (n-1) A'_{n-1} = (g+1) A'_{n-1}.$$

Hasonlóképen:

$$(n-1) A'_{n-1} - (n-2) A'_{n-2} = (g+1) A'_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(m+1) A'_{m+1} - mA'_m = (g+1) A'_m,$$

és ezek összeadása által

$$(g+1)(A'_m + \ldots + A'_{n+1}) = nA'_n - mA'_m.$$

Ha először is g *nem* $= -1$, akkor:

$$\sum_m^\infty A'_n = \frac{1}{g+1} (\lim. nA'_n - mA'_m).$$

(m meghatározott véges szám) és igy a sor összetartása a lim.(nA'_n) alaktól függ. De nA'_n mint szorzat irható:

$$nA'_n = mA'_m \frac{(m+1) A'_m}{mA'_m} \cdots \frac{nA'_n}{(n-1) A'_{n-1}}$$

azaz:

$$\lim. (nA'_n) = mA'_m \prod_{m+1}^\infty \frac{nA'_n}{(n-1) A'_{n-1}} = mA'_m \prod_{m+1}^\infty \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\left(1 + \frac{g}{n}\right)$$

$$= mA'_m \prod_{m+1}^\infty \left(1 + \frac{g+1}{n-1}\right),$$

a miből újból látni, hogy, ha g pozitiv, $\lim. nA'_n = \infty$, és tehát $\sum\limits_m^\infty A'_n$ széttartó.

$\sum\limits_m^\infty A'_n$ *és vele* $\sum\limits_0^\infty |u_n|$ *széttartó, ha* $g > -1$; *ha ellenben* $g < -1$, a $\sum\limits_m^\infty A'_n$, $\sum\limits_m^\infty A_n$, *valamint* $\sum\limits^\infty |u_n|$ *összetartó,* mert a szorzat ekkor 0-hoz közeledik, $\sum\limits_m^\infty \frac{g+1}{n-1}$ negativ tagokból álló, széttartó sor lévén; tehát:

$$\lim.\, nA'_n = 0$$

és így $\sum_m^\infty A'_n = -\frac{1}{g+1} m A'_m$.

A hátralevő $g = -1$ esetet illetőleg, ekkor

$$A'_n = \prod_m^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m}{m+1} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{m-1}{n},$$

tehát:

$$\sum_m^n A'_n = (m-1)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

ebből pedig:

$$\lim.\, \sum_m^n A'_n = \infty,$$

azaz a $\sum_m^\infty A'_n$ sor *széttartó.*

A $\sum_0^\infty |u_n|$ sor a bevezetett föltevések mellett csak akkor összetartó, ha $\mu = 1$ és $g < -1$.

158. Az eddigi tárgyalások a

$$\sum_0^\infty u_n a^n$$

sorra vonatkozólag, hol $|a| = 1$, megadták a föltétlen összetartás eseteit. E sor azonban még föltételesen összetartó is lehet, mikor t. i. $\sum_0^\infty |u_n|$ széttartó. Minthogy most is $\lim. u_n = 0$ mindenesetre az erre szükséges föltétel, és e mellett $\sum_0^\infty |u_n|$ csak akkor széttartó, ha

$$\mu \leq 1, \quad -1 \leq g < 0,$$

a $\sum_0^\infty u_n a^n$ csak ezen utóbbi föltevés mellett lesz még tovább vizsgálandó. Visszatérve u_n eredeti alakjára:

$$u_n = u_0 \prod_1^n \left(1 + \frac{g + hi + \varepsilon_n}{n}\right),$$

ezt ismét összehasonlítjuk a következővel:

$$a_n = \prod_1^n \left(1 + \frac{g + hi}{n}\right);$$

ekkor:

$$t_n = \frac{u_n}{a_n} = u_0 \prod_1^n \left(1 + \frac{\delta_n}{n + g + hi}\right).$$

A $\sum\limits_m^\infty \frac{\delta_n}{n + g + hi}$ sor a $\sum\limits_m^\infty \frac{\delta_n}{n}$ sorral együtt föltétlenül összetartó, tehát

$$P = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{\delta_n}{n + g + hi}\right)$$

véges és meghatározott, a 0-tól különböző szám. Ha még rövidség kedvéért:

$$T = u_0 P,$$

akkor:

$$\text{lim. } t_n = T,$$

a 0-tól különböző érték.

Továbbá, ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\delta_n = \frac{c + \varepsilon_n}{n^\nu},$$

hol ν pozitiv egész szám, lesz:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = 1 + \frac{\delta_n}{n + g + hi} = 1 + \frac{c + \varepsilon_n}{n^\nu (n + g + hi)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^{1+\nu}} \frac{c + \varepsilon_n}{1 + \frac{g + hi}{n}} = 1 + \frac{K_n}{n^{1+\nu}}$$

hol lim. $K_n = c$, és $1 + \nu \geqq 2$, vagyis $1 + \nu = 2 + \sigma$, hol σ nem negativ egész szám. E szerint

$$t_n - t_{n-1} = \frac{K_n \, t_{n-1}}{n^{2+\sigma}} = \frac{v_n}{n^{2+\sigma}}$$

hol lim. $v_n = cT$. Ha n helyébe egymásután $m + 1, m + 2, \ldots n$-et teszünk, lesz:

$$t_{m+1} - t_m = \frac{v_{m+1}}{(m+1)^{2+\sigma}},$$

$$t_{m+2} - t_{m+1} = \frac{v_{m+2}}{(m+2)^{2+\sigma}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_n - t_{n-1} = \frac{v_n}{n^{2+\sigma}},$$

és összeadva:

$$t_n - t_m = \sum_{m+1}^{n} \frac{v_i}{i^{2+\sigma}}.$$

Minthogy lim. v_n véges és meghatározott érték, van egy V pozitiv szám, melynél kisebb minden v_i-nek absolut értéke, és így:

$$|t_n - t_m| < V \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{i^{2+\sigma}}.$$

vagy végre, ha n-et minden határon tul növesztjük

$$|t_m - T| < V \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\sigma}},$$

a mi ismét:*

$$< V\frac{1}{m},$$

* Lesz ugyanis:

$$\sum_{K}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\sigma}} = \sum_{K}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{n^\sigma}$$

$$\leqq \frac{1}{K^\sigma} \sum_{K}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$< \frac{1}{(K-1)^\sigma} \sum_{K}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$$

$$< \frac{1}{(K-1)^\sigma} \sum_{K}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(K-1)^{1+\sigma}}$$

vagy ismét K helyébe $m+1$-et téve:

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\sigma}} \leqq \frac{1}{m^{1+\sigma}} < \frac{1}{m}$$

és ebből:

$$t_m = T + V\frac{\gamma_m}{m}$$

hol γ_m absolut értéke az 1-nél kisebb, vagy végre

$$t_m = T + \frac{c_m}{m},$$

hol c_m az m minden értékénél véges, t. i. $|c_m| < V$.

159. Meg lévén állapítva, hogy mikép közelítik meg a t_m számok a T határt, visszatérhetünk az adott sor vizsgálatára. Lesz ugyanis:

$$u_n = t_n a_n = T a_n + \frac{c_n a_n}{n}.$$

Ha tehát röviden:

$$s_n = u_n a^m + \ldots + u_n a^n$$
$$S_n = a_m a^m + \ldots + a_n a^n$$

$$S_n' = \frac{1}{m} c_m a_m a^m + \frac{1}{m+1} c_{m+1} a_{m+1} a^{m+1} + \ldots + \frac{1}{n} c_n a_n a^n,$$

akkor:

$$s_n = T S_n + S_n'$$

és $\sum\limits_0^\infty u_n a^n = \sum\limits_0^{m-1} u_i a^i + \lim. s_n$ lévén, sorunk összetartása az S_n és S_n' kifejezésektől függ.

Ezek közül lim. S_n' mindig véges és meghatározott érték, mert a

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} c_n a_n a^n$$

sor föltétlenül összetartó. Minthogy $|c_n| < V$, és $|a| = 1$, elég kimutatni a

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} a_n$$

sor föltétlen összetartását. De e sorra nézve két egymásután következő tag hányadosa:

$$\frac{1}{n}a_n : \frac{1}{n-1}a_{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{g+hi}{n}\right)$$
$$= 1 + \frac{g-1+hi}{n} - \frac{g+hi}{n^2}$$

és itt $g-1<-1$, mert g negativ, tehát a tárgyalás alatt levő sor csakugyan föltétlenül összetartó az előbb (157. cz.) adott tételek értelmében.

És így végre látni, hogy *a* $\sum\limits_0^\infty u_n a^n$ *sor akkor és csak akkor összetartó, ha*

$$\sum_m^\infty a_n a^n$$

összetartó, azaz ha lim. S_n véges és meghatározott érték. Ennek megitélése végett képezzük $(1-a)\,S_n$-et. Ez:

$$(1-a)S_n = a_m a^m + (a_{m+1}-a_m)a^{m+1} + \ldots + (a_n - a_{n-1})a^n - a_n a^{n+1},$$

vagy az a-k értékeinek tekintetbe vételével:

$$(1-a)\,S_n = a_m a^m + (g+hi)\left(\frac{1}{m+1}a_m a^{m+1} + \frac{1}{m+2}a_{m+1}a^{m+2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{1}{n}a_{n-1}a^n\right) - a_n a^{n+1},$$

de itt a zárjelben álló összeg határértéke ugyancsak a 157. czikk értelmében véges és meghatározott, mig lim. $a_n = 0$, tehát a $\sum\limits_m^\infty a_n a^n$ sor valóban összetartó. Kivételt képez még az $a=1$ esete, mert ekkor az $1-a$ szorzó zérus, és így nem következik az előbbiekből, hogy lim. S_n véges és meghatározott érték.

De ebben a kivételes esetben:

$$S_n = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n,$$

és:

$$a_n - a_{n-1} = \frac{g+hi}{n}a_{n-1}$$

vagyis:

$$na_n - (n-1)\,a_{n-1} = (g+hi+1)\,a_{n-1}.$$

Hasonlóképen:

A $\sum\limits_{m}^{\infty} A'_n$ sor megvizsgálásánál is:

$$A'_n - A'_{n-1} = \frac{g}{n} A'_{n-1},$$

és ebből:

$$nA'_n - (n-1) A'_{n-1} = (g+1) A'_{n-1}.$$

Hasonlóképen:

$$(n-1) A'_{n-1} - (n-2) A'_{n-2} = (g+1) A'_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(m+1) A'_{m+1} - mA'_m = (g+1) A'_m,$$

és ezek összeadása által

$$(g+1) (A'_m + \ldots + A'_{n+1}) = nA'_n - mA'_m.$$

Ha először is g *nem* $= -1$, akkor:

$$\sum_m^\infty A'_n = \frac{1}{g+1} (\text{lim. } nA'_n - mA'_m).$$

(m meghatározott véges szám) és így a sor összetartása a lim.(nA'_n) alaktól függ. De nA'_n mint szorzat irható:

$$nA'_n = mA'_m \frac{(m+1) A'_{m+1}}{mA'_m} \cdots \frac{nA'_n}{(n-1) A'_{n-1}}$$

azaz:

$$\text{lim. } (nA'_n) = mA'_m \prod_{m+1}^{\infty} \frac{nA'_n}{(n-1) A'_{n-1}} = mA'_m \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left(1 + \frac{g}{n}\right)$$

$$= mA'_m \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{g+1}{n-1}\right),$$

a miből újból látni, hogy, ha g pozitiv, lim.$nA'_n = \infty$, és tehát $\sum\limits_m^\infty A'_n$ széttartó.

$\sum\limits_m^\infty A'_n$ *és vele* $\sum\limits_0^\infty |u_n|$ *széttartó, ha* $g > -1$; *ha ellenben* $g < -1$, a $\sum\limits_m^\infty A'_n$, $\sum\limits_m^\infty A_n$, *valamint* $\sum\limits_0^\infty |u_n|$ *összetartó*, mert a szorzat ekkor 0-hoz közeledik, $\sum\limits_m^\infty \frac{g+1}{n-1}$ negativ tagokból álló, széttartó sor lévén; tehát:

$$\lim. nA'_n = 0$$

és így $\sum_m^\infty A'_n = -\frac{1}{g+1} mA'_m$.

A hátralevő $g = -1$ esetet illetőleg, ekkor

$$A'_n = \prod_m^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m}{m+1} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{m-1}{n},$$

tehát:

$$\sum_m^n A'_n = (m-1)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

ebből pedig:

$$\lim. \sum_m^n A'_n = \infty,$$

azaz a $\sum_m^\infty A'_n$ sor *széttartó*.

A $\sum_0^\infty |u_n|$ sor a bevezetett föltevések mellett csak akkor összetartó, ha $\mu = 1$ és $g < -1$.

158. Az eddigi tárgyalások a

$$\sum_0^\infty u_n a^n$$

sorra vonatkozólag, hol $|a| = 1$, megadták a föltétlen összetartás eseteit. E sor azonban még föltételesen összetartó is lehet, mikor t. i. $\sum_0^\infty |u_n|$ széttartó. Minthogy most is $\lim. u_n = 0$ mindenesetre az erre szükséges föltétel, és e mellett $\sum_0^\infty |u_n|$ csak akkor széttartó, ha

$$\mu \leq 1, \quad -1 \leq g < 0,$$

a $\sum_0^\infty u_n a^n$ csak ezen utóbbi föltevés mellett lesz még tovább vizsgálandó. Visszatérve u_n eredeti alakjára:

$$u_n = u_0 \prod_1^n \left(1 + \frac{g + hi + \varepsilon_n}{n}\right),$$

ezt ismét összehasonlítjuk a következővel:

$$a_n = \prod_1^n \left(1 + \frac{g + hi}{n}\right);$$

ekkor:

$$t_n = \frac{u_n}{a_n} = u_0 \prod_1^n \left(1 + \frac{\delta_n}{n + g + hi}\right).$$

A $\sum\limits_m^\infty \frac{\delta_n}{n+g+hi}$ sor a $\sum\limits_m^\infty \frac{\delta_n}{n}$ sorral együtt föltétlenül összetartó, tehát

$$P = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{\delta_n}{n + g + hi}\right)$$

véges és meghatározott, a 0-tól különböző szám. Ha még rövidség kedvéért:

$$T = u_0 P,$$

akkor:

$$\lim.\ t_n = T,$$

a 0-tól különböző érték.

Továbbá, ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\delta_n = \frac{c + \varepsilon_n}{n^\nu},$$

hol ν pozitiv egész szám, lesz:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = 1 + \frac{\delta_n}{n + g + hi} = 1 + \frac{c + \varepsilon_n}{n^\nu (n + g + hi)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^{1+\nu}} \frac{c + \varepsilon_n}{1 + \frac{g + hi}{n}} = 1 + \frac{K_n}{n^{1+\nu}}$$

hol $\lim.\ K_n = c$, és $1 + \nu \geqq 2$, vagyis $1 + \nu = 2 + \sigma$, hol σ nem negativ egész szám. E szerint

$$t_n - t_{n-1} = \frac{K_n\, t_{n-1}}{n^{2+\sigma}} = \frac{v_n}{n^{2+\sigma}}$$

hol $\lim.\ v_n = cT$. Ha n helyébe egymásután $m + 1, m + 2, \ldots n$-et teszünk, lesz:

$$t_{m+1}-t_m=\frac{v_{m+1}}{(m+1)^{2+\sigma}},$$

$$t_{m+2}-t_{m+1}=\frac{v_{m+2}}{(m+2)^{2+\sigma}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_n-t_{n-1}=\frac{v_n}{n^{2+\sigma}},$$

és összeadva:

$$t_n-t_m=\sum_{m+1}^{n}\frac{v_i}{i^{2+\sigma}}.$$

Minthogy lim. v_n véges és meghatározott érték, van egy V pozitiv szám, melynél kisebb minden v_i-nek absolut értéke, és így:

$$|t_n-t_m|<V\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{i^{2+\sigma}}.$$

vagy végre, ha n-et minden határon tul növesztjük

$$|t_m-T|<V\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+\sigma}},$$

a mi ismét:*

$$<V\frac{1}{m},$$

* Lesz ugyanis:

$$\sum_{K}^{\infty}\frac{1}{n^{2+\sigma}}=\sum_{K}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^\sigma}$$

$$\leqq\frac{1}{K^\sigma}\sum_{K}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$<\frac{1}{(K-1)^\sigma}\sum_{K}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}$$

$$<\frac{1}{(K-1)^\sigma}\sum_{K}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{(K-1)^{1+\sigma}}$$

vagy ismét K helyébe $m+1$-et téve:

$$\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+\sigma}}\leqq\frac{1}{m^{1+\sigma}}<\frac{1}{m}$$

és ebből:

$$t_m = T + V\frac{\gamma_m}{m}$$

hol γ_m absolut értéke az 1-nél kisebb, vagy végre

$$t_m = T + \frac{c_m}{m},$$

hol c_m az m minden értékénél véges, t. i. $|c_m| < V$.

159. Meg lévén állapítva, hogy mikép közelítik meg a t_m számok a T határt, visszatérhetünk az adott sor vizsgálatára. Lesz ugyanis:

$$u_n = t_n a_n = Ta_n + \frac{c_n a_n}{n}.$$

Ha tehát röviden:

$$s_n = u_n \alpha^m + \ldots + u_n \alpha^n$$
$$S_n = a_m \alpha^m + \ldots + a_n \alpha^n$$

$$S_n' = \frac{1}{m} c_m a_m \alpha^m + \frac{1}{m+1} c_{m+1} a_{m+1} \alpha^{m+1} + \ldots + \frac{1}{n} c_n a_n \alpha^n,$$

akkor:

$$s_n = TS_n + S_n'$$

és $\sum\limits_0^\infty u_n \alpha^n = \sum\limits_0^{m-1} u_i \alpha^i + \lim. s_n$ lévén, sorunk összetartása az S_n és S_n' kifejezésektől függ.

Ezek közül $\lim. S_n'$ mindig véges és meghatározott érték, mert a

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} c_n a_n \alpha^n$$

sor föltétlenül összetartó. Minthogy $|c_n| < V$, és $|\alpha| = 1$, elég kimutatni a

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} a_n$$

sor föltétlen összetartását. De e sorra nézve két egymásután következő tag hányadosa:

$$\frac{1}{n}a_n : \frac{1}{n-1}a_{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{g+hi}{n}\right)$$
$$= 1 + \frac{g-1+hi}{n} - \frac{g+hi}{n^2}$$

és itt $g-1 < -1$, mert g negativ, tehát a tárgyalás alatt levő sor csakugyan föltétlenül összetartó az előbb (157. cz.) adott tételek értelmében.

És így végre látni, hogy *a* $\sum\limits_0^\infty u_n\alpha^n$ *sor akkor és csak akkor összetartó, ha*

$$\sum_m^\infty a_n\alpha^n$$

összetartó, azaz ha lim. S_n véges és meghatározott érték. Ennek megitélése végett képezzük $(1-\alpha)\,S_n$-et. Ez:

$$(1-\alpha)S_n = a_m\alpha^m + (a_{m+1}-a_m)\alpha^{m+1} + \ldots + (a_n - a_{n-1})\alpha^n - a_n\alpha^{n+1},$$

vagy az a-k értékeinek tekintetbe vételével:

$$(1-\alpha)\,S_n = a_m\alpha^m + (g+hi)\left(\frac{1}{m+1}a_m\alpha^{m+1} + \frac{1}{m+2}a_{m+1}\alpha^{m+2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{1}{n}a_{n-1}\alpha^n\right) - a_n\alpha^{n+1},$$

de itt a zárjelben álló összeg határértéke ugyancsak a 157. czikk értelmében véges és meghatározott, mig lim. $a_n = 0$, tehát a $\sum\limits_m a_n\alpha^n$ sor valóban összetartó. Kivételt képez még az $\alpha = 1$ esete, mert ekkor az $1-\alpha$ szorzó zérus, és így nem következik az előbbiekből, hogy lim. S_n véges és meghatározott érték.

De ebben a kivételes esetben:

$$S_n = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n,$$

és:

$$a_n - a_{n-1} = \frac{g+hi}{n}a_{n-1}$$

vagyis:

$$na_n - (n-1)\,a_{n-1} = (g+hi+1)\,a_{n-1}.$$

Hasonlóképen:

A $\sum\limits_{m} A'_n$ sor megvizsgálásánál is:

$$A'_n - A'_{n-1} = \frac{g}{n} A'_{n-1},$$

és ebből:

$$nA'_n - (n-1) A'_{n-1} = (g+1) A'_{n-1}.$$

Hasonlóképen:

$$(n-1) A'_{n-1} - (n-2) A'_{n-2} = (g+1) A'_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(m+1) A'_{m+1} - mA'_m = (g+1) A'_m,$$

és ezek összeadása által

$$(g+1) (A'_m + \ldots + A'_{n+1}) = nA'_n - mA'_m.$$

Ha először is g *nem* $= -1$, akkor:

$$\sum_m^\infty A'_n = \frac{1}{g+1} (\lim.\ nA'_n - mA'_m).$$

(m meghatározott véges szám) és így a sor összetartása a lim.(nA'_n) alaktól függ. De nA'_n mint szorzat irható:

$$nA'_n = mA'_m \frac{(m+1) A'_m}{mA'_m} \cdots \frac{nA'_n}{(n-1) A'_{n-1}}$$

azaz:

$$\lim.\ (nA'_n) = mA'_m \prod_{m+1}^{\infty} \frac{nA'_n}{(n-1) A'_{n-1}} = mA'_m \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left(1 + \frac{g}{n}\right)$$

$$= mA'_m \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 + \frac{g+1}{n-1}\right),$$

a miből újból látni, hogy, ha g pozitiv, lim.$nA'_n = \infty$, és tehát $\sum\limits_m^\infty A'_n$ széttartó.

$\sum\limits_m^\infty A'_n$ *és vele* $\sum\limits_0^\infty |u_n|$ *széttartó, ha* $g > -1$; *ha ellenben* $g < -1$, *a* $\sum\limits_m^\infty A'_n$, $\sum\limits_m A'_n$, *valamint* $\sum\limits_m^\infty |u_n|$ *összetartó*, mert a szorzat ekkor 0-hoz közeledik, $\sum\limits_m^\infty \frac{g+1}{n-1}$ negativ tagokból álló, széttartó sor lévén; tehát:

$$\lim.\; nA'_n = 0$$

és így $\sum_m^\infty A'_n = -\frac{1}{g+1} mA'_m$.

A hátralevő $g = -1$ esetet illetőleg, ekkor

$$A'_n = \prod_m^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m}{m+1} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{m-1}{n},$$

tehát:

$$\sum_m^n A'_n = (m-1)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

ebből pedig:

$$\lim.\; \sum_m^n A'_n = \infty,$$

azaz a $\sum_m^\infty A'_n$ sor *széttartó.*

A $\sum_0^\infty |u_n|$ sor a bevezetett föltevések mellett csak akkor összetartó, ha $\mu = 1$ és $g < -1$.

158. Az eddigi tárgyalások a

$$\sum_0^\infty u_n a^n$$

sorra vonatkozólag, hol $|a| = 1$, megadták a föltétlen összetartás eseteit. E sor azonban még föltételesen összetartó is lehet, mikor t. i. $\sum_0^\infty |u_n|$ széttartó. Minthogy most is $\lim. u_n = 0$ mindenesetre az erre szükséges föltétel, és e mellett $\sum_0^\infty |u_n|$ csak akkor széttartó, ha

$$\mu \leq 1, \quad -1 \leq g < 0,$$

a $\sum_0^\infty u_n a^n$ csak ezen utóbbi föltevés mellett lesz még tovább vizsgálandó. Visszatérve u_n eredeti alakjára:

$$u_n = u_0 \prod_1^n \left(1 + \frac{g + hi + \delta_n}{n}\right),$$

ezt ismét összehasonlítjuk a következővel:

$$a_n = \prod_1^n \left(1 + \frac{g + hi}{n}\right);$$

ekkor:

$$t_n = \frac{u_n}{a_n} = u_0 \prod_1^n \left(1 + \frac{\delta_n}{n + g + hi}\right).$$

A $\sum\limits_m^\infty \frac{\delta_n}{n + g + hi}$ sor a $\sum\limits_m^\infty \frac{\delta_n}{n}$ sorral együtt föltétlenül összetartó, tehát

$$P = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{\delta_n}{n + g + hi}\right)$$

véges és meghatározott, a 0-tól különböző szám. Ha még rövidség kedvéért:

$$T = u_0 P,$$

akkor:

$$\text{lim. } t_n = T,$$

a 0-tól különböző érték.

Továbbá, ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\delta_n = \frac{c + \varepsilon_n}{n^\nu},$$

hol ν pozitiv egész szám, lesz:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = 1 + \frac{\delta_n}{n + g + hi} = 1 + \frac{c + \varepsilon_n}{n^\nu (n + g + hi)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n^{1+\nu}} \frac{c + \varepsilon_n}{1 + \frac{g + hi}{n}} = 1 + \frac{K_n}{n^{1+\nu}}$$

hol lim. $K_n = c$, és $1 + \nu \geq 2$, vagyis $1 + \nu = 2 + \sigma$, hol σ nem negativ egész szám. E szerint

$$t_n - t_{n-1} = \frac{K_n\, t_{n-1}}{n^{2+\sigma}} = \frac{v_n}{n^{2+\sigma}}$$

hol lim. $v_n = cT$. Ha n helyébe egymásután $m + 1, m + 2, \ldots n$-et teszünk, lesz:

$$t_{m+1} - t_m = \frac{v_{m+1}}{(m+1)^{2+\sigma}},$$

$$t_{m+2} - t_{m+1} = \frac{v_{m+2}}{(m+2)^{2+\sigma}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$t_n - t_{n-1} = \frac{v_n}{n^{2+\sigma}},$$

és összeadva:

$$t_n - t_m = \sum_{m+1}^{n}{}_i \frac{v_i}{i^{2+\sigma}}.$$

Minthogy lim. v_n véges és meghatározott érték, van egy V pozitiv szám, melynél kisebb minden v_i-nek absolut értéke, és így:

$$|t_n - t_m| < V \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{i^{2+\sigma}}.$$

vagy végre, ha n-et minden határon tul növesztjük

$$|t_m - T| < V \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\sigma}},$$

a mi ismét:*

$$< V \frac{1}{m},$$

* Lesz ugyanis:

$$\sum_{K}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\sigma}} = \sum_{K}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{n^\sigma}$$

$$\leqq \frac{1}{K^\sigma} \sum_{K}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$< \frac{1}{(K-1)^\sigma} \sum_{K}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$$

$$< \frac{1}{(K-1)^\sigma} \sum_{K}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(K-1)^{1+\sigma}}$$

vagy ismét K helyébe $m+1$-et téve:

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\sigma}} \leqq \frac{1}{m^{1+\sigma}} < \frac{1}{m}$$

és ebből:

$$t_m = T + V\frac{\gamma_m}{m}$$

hol γ_m absolut értéke az 1-nél kisebb, vagy végre

$$t_m = T + \frac{c_m}{m},$$

hol c_m az m minden értékénél véges, t. i. $|c_m| < V$.

159. Meg lévén állapítva, hogy mikép közelítik meg a t_m számok a T határt, visszatérhetünk az adott sor vizsgálatára. Lesz ugyanis:

$$u_n = t_n a_n = T a_n + \frac{c_n a_n}{n}.$$

Ha tehát röviden:

$$s_n = u_n a^m + \ldots + u_n a^n$$
$$S_n = a_m a^m + \ldots + a_n a^n$$

$$S_n' = \frac{1}{m} c_m a_m a^m + \frac{1}{m+1} c_{m+1} a_{m+1} a^{m+1} + \ldots + \frac{1}{n} c_n a_n a^n,$$

akkor:

$$s_n = T S_n + S_n'$$

és $\sum_0^\infty u_n a^n = \sum_0^{m-1} u_i a^i + \lim. s_n$ lévén, sorunk összetartása az S_n és S_n' kifejezésektől függ.

Ezek közül lim. S_n' mindig véges és meghatározott érték, mert a

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} c_n a_n a^n$$

sor föltétlenül összetartó. Minthogy $|c_n| < V$, és $|a| = 1$, elég kimutatni a

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} a_n$$

sor föltétlen összetartását. De e sorra nézve két egymásután következő tag hányadosa:

$$\frac{1}{n}a_n : \frac{1}{n-1}a_{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{g+hi}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{g-1+hi}{n} - \frac{g+hi}{n^2}$$

és itt $g-1<-1$, mert g negativ, tehát a tárgyalás alatt levő sor csakugyan föltétlenül összetartó az előbb (157. cz.) adott tételek értelmében.

És így végre látni, hogy *a* $\sum\limits_0^\infty u_n a^n$ *sor akkor és csak akkor összetartó, ha*

$$\sum_m^\infty a_n a^n$$

összetartó, azaz ha lim. S_n véges és meghatározott érték. Ennek megitélése végett képezzük $(1-a)\,S_n$-et. Ez:

$$(1-a)S_n = a_m a^m + (a_{m+1}-a_m)a^{m+1} + \ldots + (a_n - a_{n-1})a^n - a_n a^{n+1},$$

vagy az a-k értékeinek tekintetbe vételével:

$$(1-a)\,S_n = a_m a^m + (g+hi)\left(\frac{1}{m+1}a_m a^{m+1} + \frac{1}{m+2}a_{m+1}a^{m+2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{1}{n}a_{n-1}a^n\right) - a_n a^{n+1},$$

de itt a zárjelben álló összeg határértéke ugyancsak a 157. czikk értelmében véges és meghatározott, mig lim. $a_n=0$, tehát a $\sum\limits_m^\infty a_n a^n$ sor valóban összetartó. Kivételt képez még az $a=1$ esete, mert ekkor az $1-a$ szorzó zérus, és így nem következik az előbbiekből, hogy lim. S_n véges és meghatározott érték.

De ebben a kivételes esetben:

$$S_n = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n,$$

és:

$$a_n - a_{n-1} = \frac{g+hi}{n}a_{n-1}$$

vagyis:

$$na_n - (n-1)\,a_{n-1} = (g+hi+1)\,a_{n-1}.$$

Hasonlóképen:

$$(n-1)\,a_{n-1}-(n-2)\,a_{n-2}=(g+hi+1)\,a_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(m+1)\,a_{m+1}-ma_m=(g+hi+1)\,a_m.$$

És összeadás által:

$$(g+hi+1)\,(a_m+a_{m+1}+\ldots+a_n)=na_n-ma_m.$$

Ha csak nem egy időben $g+1=0$, $h=0$, lim. S_n akkor és csak akkor véges meghatározott érték, ha lim. na_n ilyen.

De

$$na_n=ma_m\frac{(m+1)\,a_{m+1}}{ma_m}\,\frac{(m+2)\,a_{m+2}}{(m+1)\,a_{m+1}}\cdots\frac{na_n}{(n-1)\,a_{n-1}}$$

$$=ma_m\prod_m^{n-1}\Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)\Big(1+\frac{g+hi}{n}\Big)=$$

$$ma_m\prod_m^{n-1}\Big(1+\frac{g+hi+1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}(1+g+hi)\Big)=\prod_m^{n-1}\Big(1+\frac{g+hi+1}{n}+\frac{\zeta_n}{n^2}\Big),$$

hol lim. $\zeta_n=g+hi+1$, véges érték. E szerint:

$$\text{lim.}\,|na_n|=m|a_m|\prod_m^{\infty}\Big(1+2\,\frac{g+1}{n}+\frac{\tau_n}{n^2}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

hol, ha $\zeta_n=\zeta_n'+\zeta_n''i$, még

$$\tau_n=2\zeta_n'+(g+1)^2+\frac{2}{n}(g+1)\,\zeta'+\frac{1}{n^2}\zeta'^2+h^2+\frac{2}{n}h\,\zeta''+\frac{1}{n^2}\zeta''^2.$$

E szerint a lim. $|na_n|$ végtelen szorzatalakja mutatja, hogy e kifejezés végtelen, ha $g+1>0$, zérus, ha $g+1<0$; ha $g+1=0$, de h nem 0, a 153. cz. szerint $|na_n|$-nek van ugyan véges meghatározott határértéke, de na_n maga véges határok közt ingadozik. Ha végre $g+1=0$ és $h=0$, akkor

$$a_n=\prod_m^{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big),$$

az a-sor csupán pozitiv tagokból áll, és a_n nem más mint a 157. czikk végén álló A_n', tehát ugyancsak az ottani tárgyalások értelmében az a-sor széttartó.

Ha tehát $a=1$, vagyis a $\sum\limits_0^{\infty} u_n$ sorral van dolgunk, az eredmény az, hogy *e sor csak akkor összetartó, ha* $g < -1$; *ha* $g = -1$, *és* h *nem* 0 *a sor ingadozó, minden más esetben (a szó szorosabb értelmében) széttartó.*

Czélszerü lesz a nyert eredményeket teljesen összeállítani:

Legyen $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ *a számok oly sorozata, hogy:*

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{a + \varepsilon_n}{n^\mu}$$

hol μ *pozitiv egész szám, és*

$$\delta_n = \frac{c + \varepsilon_n}{n^\nu},$$

hol ν *ismét pozitiv egész szám, és lim.* $\varepsilon_n = 0$; *legyen végre a valós és képzetes részére bontva:*

$$a = g + hi,$$

és α *oly szám, melynek absolut értéke az egység. Akkor e sor:*

$$\sum_0^\infty u_n \alpha^n = u_0 + u_1 \alpha + u_2 \alpha^2 + \ldots + u_n \alpha^n + \ldots$$

föltétlenül összetartó, azaz $\sum_0^\infty |u_n|$ *is összetartó, ha* $\mu = 1$, *és* $g < -1$,

az adott sorrendben összetartó, azaz a nélkűl, hogy $\sum_0^\infty |u_n|$ *is összetartó volna, ha* $\mu = 1$, $g < 0$, *és* α *nem egy*,

ingadozó, ha $\mu = 1$, $g = -1$, h *nem zérus és* $\alpha = 1$,

széttartó minden más esetben.

V.

Végtelen láncztörtek.

Értelmezések.

159. Legyen adva két számsorozat:

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots$$
$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots$$

melyek közül mindegyik bizonyos megadott általános törvény értelmében határtalanul folytatható. *Ekkor a*

$$\frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \cdots + \frac{p_n}{q_n} + \cdots \qquad (1.)$$

végtelen láncztört alakja jelenti a következő kifejezés:

$$\frac{S_n}{N_n} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}$$

határértékét, ha n a pozitiv egész számok során át minden határon túl növekszik.

Világos, hogy a végtelen láncztört neve alatt szereplő alaknak *csak akkor van értelme, ha*

$$\lim. \frac{S_n}{N_n} = \lim. \left(\frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}\right)$$

*véges és meghatározott szám, a mely esetben magát a végtelen láncztörtet összetartónak mondjuk.**

Minden más esetben a végtelen láncztört *széttartó.*

A láncztörtben $\frac{p_n}{q_n}$ ismét az *n-edik részlettört.*

Tekintettel a 33. czikk fejtegetésére a végtelen láncztört összetartásának vizsgálata közvetetlenül visszavezethető megfelelő végtelen sorokéra. Láttuk ugyanis, hogy:

$$\frac{S_n}{N_n} = \frac{p_0}{q_0} + q_0^2\left(\frac{p_1}{N_0 N_1} - \frac{p_1 p_2}{N_1 N_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{N_2 N_3} - \cdots + \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-2}\frac{p_1 \cdots p_{n-1}}{N_{n-2} N_{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{p_1 \cdots p_n}{N_{n-1} N_n}\right)$$

és így $\lim. \frac{S_n}{N_n}$ véges és meghatározott érték vagy sem, azaz *a végtelen láncztört összetartó, vagy széttartó, a mint összetartó vagy széttartó e végtelen sor:*

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{N_{n-1} N_n}. \qquad (2.)$$

---

* Ha a p, q számok között 0 is foglaltatik, akkor

$$\frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}$$

alatt azon szám értendő, melyet nyerünk, ha a jelzett műveletek végrehajtása után helyettesítjük a p, q számok speciális értékét. Világos, hogy a láncztört összetartására az első szükséges föltétel az lesz, hogy az $N_1 N_2 \ldots$ számsorozatban egy bizonyos helyen túl 0 többé ne forduljon elő.

Pozitiv számokból képezett végtelen láncztörtek.

160. Ha a láncztörtnek képezésére használandó p és q számok mindannyian pozitivok, a nyert összetartási föltétel még tovább egyszerüsíthető. Ekkor ugyanis a láncztörtekre vonatkozó régibb tárgyalásaink értelmében (34. czikk), a (2.) sor tagjai — az előjel mellőzésével — folyton kisebbednek; e mellett a sortagok előjele folyton váltakozik; és így *a sor összetartó,* (106. cz.), *ha*

$$\lim. \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{N_{n-1} N_n} = 0. \tag{3.}$$

Az itt a lim. jel alatt álló kifejezés még következőkép is irható:

$$\frac{p_1}{N_0 N_1} \cdot \frac{p_2 N_0}{N_2} \cdot \frac{p_3 N_1}{N_3} \cdots \frac{p_{n-1} N_{n-3}}{N_{n-1}} \cdot \frac{p_n N_{n-2}}{N_n}$$

vagy, minthogy a 33. czikk (1. *b.*) képlete értelmében:

$$\frac{N_{m-2}}{N_m} p_m = 1 - \frac{N_{m-1}}{N_m} q_m, \tag{4.}$$

ama határérték

$$\lim. \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{N_{n-1} N_n} = \frac{p_1}{N_0 N_1} \prod_2^{\infty} \left(1 - \frac{N_{m-1}}{N_m} q_m\right).$$

Ha p és q pozitiv számok, az N-ek is ilyenek, és így $\frac{N_{m-1}}{N_m} q_m$ szintén pozitiv, de a (4.) szerint egynél kisebb. E szerint a vizsgálandó határérték mindig véges és meghatározott, vagy 0, vagy a 0-tól különböző szám. És így végre:

A pozitiv számokkal képezett

$$\frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{p_n}{q_n} \dot{+} \cdots$$

végtelen láncztört összetartó vagy széttartó, a mint a (pozitiv tagokból álló)

$$\sum_1^{\infty} \frac{N_{m-1}}{N_m} q_m \tag{5.}$$

sor széttartó vagy összetartó.

161. Ha az adott láncztörtben a részlettörtek számlálói — a p számok p_1-től kezdve * — mind egyenlők egygyel, a 33. czikk (1. b.) képlete szerint:

$$N_m = N_{m-1}\, q_m + N_{m-2}$$

és ebből:

$$N_m > N_{m-2},$$

tehát

$$N_0, N_2, N_4, \ldots, N_{2k}, \ldots$$
$$N_1, N_3, N_5, \ldots, N_{2k+1}, \ldots$$

növekedő számokból álló sorozatok, és így:

$$\lim. N_{2k},\ \lim. N_{2k+1}$$

vagy pozitiv véges szám, vagy végtelen.

A jelen esetben a (3.) alatt álló összetartási föltétel igen egyszerű alakot nyer:

$$\lim. \frac{1}{N_{n-1}\, N_n} = 0, \tag{6.}$$

és így a láncztört összetartására, minthogy N_{n-1} és N_n mutatói közt az egyik páros, a másik páratlan, szükséges és elegendő föltétel, hogy a lim. N_{2k} és lim. N_{2k+1} határkifejezések közt legalább egy végtelen legyen, a másik ekkor vagy véges pozitiv szám, vagy szintén végtelen és így a (6.) alatt álló föltétel ki van elégítve.

A lim. N_{2k}, lim. N_{2k+1} határértékek közül azonban — mint még bebizonyítjuk — akkor és csak akkor lesz legalább az egyik végtelen, ha a $\sum_1^\infty q_n$ sor széttartó, úgy hogy a mostani esetre a következő egyszerű tételt nyerjük:

A következő alakú végtelen láncztört:

$$\frac{p_0}{q_0} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots + \frac{1}{q_n} + \cdots$$

hol a q-k pozitiv számok, összetartó vagy széttartó, a mint a $\sum_1^\infty q_m$ sor széttartó vagy összetartó.

* Ha egynéhány részlettörtben p. az r-edikig a számlálók egytől különbözők, ez nem változtat a tárgyaláson.

Ha ugyanis a N-ek kapcsolatát kifejező képletben m_1 helyébe egymásután $m-2, m-4, \ldots k+2$-t teszünk, hol k az m-mel együtt páros vagy páratlan szám lesz:

$$\begin{aligned} N_m &= N_{m-1}\, q_m + N_{m-2}, \\ N_{m-2} &= N_{m-3}\, q_{m-2} + N_{m-4}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ N_{k+2} &= N_{k+1}\, q_{k+2} + N_k, \end{aligned}$$

akkor összeadás által lesz:

$$N_m - N_k = N_{k+1}\, q_{k+2} + N_{k+3}\, q_{k+4} + \cdots + N_{m-1}\, q_m.$$

Ha a $\sum_1^\infty q_n$ sor helyett a $\sum_1^\infty q_{2n}$ és $\sum_1^\infty q_{2n-1}$ sorokat veszszük, melyekre nézve

$$\sum_1^\infty q_n = \sum_1^\infty q_{2n} + \sum_1^\infty q_{2n-1},$$

közvetlenül látni, hogy $\sum_1^\infty q_n$ akkor es csak akkor összetartó, ha a $\sum_1^\infty q_{2n}$ és $\sum_1^\infty q_{2n-1}$ sorok mindegyike összetartó. Legyen most már m (és vele k) páros vagy páratlan, a mint e sorok közül az első vagy második széttartó; e széttartó sor maradéka:

$$q_{k+2} + q_{k+4} + \cdots + q_m + \cdots,$$

ha most már lim. N_{m-1} véges érték, akkor N_{k+2r+1} az r minden egész számú értékénél egy bizonyos G számnál nagyobb marad és

$$N_m > N_k + G\,(q_{k+2} + q_{k+4} + \cdots + q_m)$$

azaz lim. $N_m = \infty$. Ha tehát a $\sum_1^\infty q_n$ sor széttartó, lim. N_{m-1} vagy lim. N_m végtelen lesz.

Legyen másodszor a $\sum_1^\infty q_n$ sor összetartó. Az első N-ekre nézve a

$$\begin{aligned} N_0 &= q_0, \\ N_1 &= q_0\, q_1, \\ N_2 &= q_0\,(q_1\, q_2 + 1), \end{aligned}$$

képletekből látni, hogy

de ekkor:

$$N_n < (1+q_0)(1+q_1)\dots(1+q_n);$$

tehát:

$$N_{n+1} = N_n q_{n+1} + N_{n-1},$$

$$\begin{aligned} N_{n+1} &< (1+q_0)(1+q_1)\dots(1+q_n)q_{n+1} + (1+q_0)\dots(1+q_{n-1}) \\ &< (1+q_0)(1+q_1)\dots(1+q_n)q_{n+1} \\ &\qquad + (1+q_0)\dots(1+q_{n-1})(1+q_n), \end{aligned}$$

és így tehát általánosan is

$$N_{n+1} < (1+q_0)\dots(1+q_n)(1+q_{n+1}).$$

Minthogy azonban a $\sum_0^\infty q_n$ sor összetartása miatt $\prod_0^\infty (1+q_n)$ véges és meghatározott pozitiv érték, például P, és H egy bizonyos pozitiv, a P-nél nagyobb szám, lehetséges lesz egy n-et meghatározni, úgy hogy a k minden pozitiv, egész számú értékénél:

$$N_{n+k} < H.$$

és így lim. N_m és lim. N_{m-1} véges szám, a mi — mint a kijelentett tétel második része — még bebizonyítandó volt.

163. *Ha a nevezők mindannyian egész számok, a*

$$q_0 + \frac{1}{q_1} \dot{+} \frac{1}{q_2} \dot{+} \frac{1}{q_3} \dot{+} \cdots$$

végtelen láncztört mindig összetartó; $\sum_0^\infty q_n$ ekkor mindig széttartó. Ez az úgynevezett *közönséges végtelen láncztört alakja*, mely különös fontosságot nyer a következő tétel által:

Minden pozitiv szám egy és csak egyféleképp fejezhető ki közönséges láncztört alakjában; még pedig a láncztört véges vagy végtelen, a mint a kifejezendő szám raczionális vagy irraczionális.

A mi először a *«kifejtés»* lehetőségét illeti, legyen A a kifejtendő szám és

$$q_0 = \mathcal{E}(A),$$

azaz q_0 a legnagyobb egész szám, mely még nem nagyobb A-nál. Ekkor

$$A = q_0 + t_1,$$

hol $t_1 < 1$; vagy ha $t_1 = \frac{1}{A_1}$ tétetik, ismét $A_1 > 1$. Legyen ekkor

$$q_1 = \mathcal{E}(A_1),$$

hol q_1 már nem lehet 0, és ismét

$$A_1 = q_1 + t_2, \quad t_2 = \frac{1}{A_2},$$

hol $A_2 > 1$; továbbá, ha $q_2 = \mathcal{E}(A_2)$

$$A_2 = q_2 + t_3, \quad t_3 = \frac{1}{A_3},$$

hol $A_3 > 1$, és úgy tovább.

Előfordulhat, hogy az egyik t, például $t_{n+1} = 0$: ekkor azonosan:

$$A = q_0 + \frac{1}{q_1} \dot{+} \frac{1}{q_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{q_n};$$

az ellenkező esetben az egész számok határtalan sorozatát nyerjük:

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$$

melyek közül csak q_0 lehet 0; míg minden későbbi $q \geqq 1$. Az előbbiek szerint a

$$q_0 + \frac{1}{q_1} \dot{+} \frac{1}{q_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{q_n} \dot{+} \cdots$$

végtelen láncztört mindenesetre összetartó; értéke pedig — mint könnyen kimutatható — nem más, mint A. Legyen ismét:

$$\frac{S_n}{N_n} = q_0 + \frac{1}{q_1} \dot{+} \frac{1}{q_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{q_n};$$

a q-k keletkezéséből közvetetlenül világos, hogy

$$A = q_0 + \frac{1}{q_1} \dot{+} \frac{1}{q_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{q_{n-1}} \dot{+} \frac{1}{q_n + t_{n+1}}$$

vagy az $\frac{S_{n-1}}{N_{n-1}}$, $\frac{S_{n-2}}{N_{n-2}}$ használata mellett:

$$A = \frac{S_{n-1}(q_n + t_{n+1}) + S_{n-2}}{N_{n-1}(q_n + t_{n+1}) + N_{n-2}},$$

míg:

$$\frac{S_n}{N_n} = \frac{S_{n-1}\, q_n + S_{n-2}}{N_{n-1}\, q_n + N_{n-2}}.$$

E szerint

$$A - \frac{S_n}{N_n} = \frac{(N_{n-1} q_n + N_{n-2}) S_{n-1} - (S_{n-1} q_n + S_{n-2}) N_{n-1}}{(N_{n-1} q_n + N_{n-2}) \left\{N_{n-1} (q_n + t_{n+1}) + N_{n-2}\right\}} t_{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^n t_{n+1}}{N_n (N_n + N_{n-1} t_{n+1})}$$

Minthogy pedig $t_{n+1} < 1$ és $\lim. N_n = \infty$, ebből csakugyan következik, hogy:

$$\lim. \frac{S_n}{N_n} = A.$$

Hogy az A átalakítása közönséges lánczörtté *csak egyféleképp* történhetik, abból következik, hogy ha p.

$$A = r_0 + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \cdots$$

mindenekelőtt világos, hogy $r_0 = \mathfrak{E}(A) = q_0$; tehát az A_1 előbbi jelentésénél:

$$A_1 = r_1 + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \cdots$$

és így $r_1 = \mathfrak{E}(A) = q_1$, és így tovább. Tehát az $r_0, r_1, r_2, \ldots$ egész számok rendre megegyeznek a $q_0, q_1, q_2, \ldots$ számokkal és az A föltételezett kifejtése, nem más mint az eredeti szabálynak megfelelő alak. Ebből azonban az is világos, hogy a lánczört véges vagy végtelen, a mint A raczionális vagy irraczionális. Ha t. i. A raczionális, kell, hogy a kifejtés, mely csak egyféleképp történhetik, megegyezzék ama véges közönséges lánczörttel, melynek alakjában (31. cz.) minden raczionális szám kifejezhető. Ha pedig A irraczionális, a megfelelő lánczört nem lehet véges, mert ennek értéke mindig raczionális szám.

Tetszőleges számokból képezett végtelen lánczörtek.

164. Az általános esetben a nyert összetartási föltételnek (159. cz. [2]) oly átalakítása, melynél ez gyakorlatilag is könnyen kezelhető volna, még csak igen kevés esetben sikerült. Itt a legfontosabb alakok fölsorolására szorítkozunk.

Ha a részlettörtekben, mihelyt $n \geq i$, minden számláló negativ és a hozzá tartozó nevező pozitiv és

$$q_i > |p_i| + 1,$$

a végtelen láncztört

$$\frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \cdots + \frac{p_n}{q_n} + \cdots$$

mindig összetartó.

Világos, hogy a vizsgálat a

$$\frac{p_i}{q_i} + \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} + \cdots + \frac{p_n}{q_n} \cdots$$

láncztörtre szorítkozhatik.

Legyen most némileg változott jelzéssel:

$$\frac{S_n}{N_n} = \frac{p_i}{q_i} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}$$

Akkor:

$$N_i = q_i,$$
$$N_{i+1} = q_i q_{i+1} + p_{i+1};$$

minthogy pedig $q_i > 1$, $q_{i+1} > |p_{i+1}|$, csakugyan $N_{i+1} > 0$; továbbá még:

$$N_{i+1} - N_i > 0,$$

ez ugyanis:

$$q_i (q_{i+1} - 1) - p_{i+1} > q_{i+1} - p_{i+1} - 1 > 0;$$

általánosságban pedig:

$$N_m - N_{m-1} = N_{m-1} q_m + N_{m-2} p_m - N_{m-1} =$$
$$= (q_m + p_m - 1) N_{m-1} - p_m (N_{m-1} - N_{m-2});$$

de ha $N_{m-1} > N_{m-2}$, akkor minthogy $-p_m$ is pozitiv, valamint az eredeti föltevés szerint $q_m + p_m - 1$ is, akkor egyszersmind:

$$N_m > N_{m-1};$$

így tehát $N_i, N_{i+1}, \ldots, N_m, \ldots$ *növekedő pozitiv számok sorozata.*

A mi pedig az $S_i, S_{i+1}, \ldots$ számokat illeti, lesz:

$$S_i = p_i$$
$$S_{i+1} = p_i q_{i+1},$$

tehát $S_i < 0$, $S_{i+1} < 0$, és

$$S_{i+1} < S_i$$

mert $p_i(q_{i+1} - 1)$-ben az első tényező negativ, a második pozitiv. Általánosságban pedig:

$$\begin{aligned} S_m - S_{m-1} &= S_{m-1} q_m + S_{m-2} p_m - S_{m-1} \\ &= (q_m + p_m - 1) S_{m-1} - p_m(S_{m-1} - S_{m-2}); \end{aligned}$$

de ha $S_{m-1} < S_{m-2}$, és S_{m-1} negativ, akkor $S_m - S_{m-1}$ szintén negativ és tehát:

$$S_m < S_{m-1};$$

így tehát S_i, S_{i+1}, $S_{i+2}, \ldots$ *kisebbedő negativ számok sorozata.* E szerint:

$$\frac{S_i}{N_i} > \frac{S_{i+1}}{N_{i+1}} > \cdots > \frac{S_m}{N_m} \cdots$$

De végre még $\frac{S_m}{N_m}$ mindig nagyobb -1-nél, a sorozat első tagjánál ez világos, mert $\frac{S_i}{N_i} = \frac{p_i}{q_i}$ és $|p_i| < q_i$; de továbbá

$$q_i > |p_i| + 1, \quad q_{i+1} > |p_{i+1}|$$

tehát:

$$q_i + \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} > q_i - 1 > |p_i|$$

azaz:

$$\frac{S_{i+1}}{N_{i+1}} = \frac{p_i}{q_i + \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}} > -1.$$

De ép úgy lesz:

$$\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} + \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}} > -1,$$

tehát:

$$\frac{S_{i+2}}{N_{i+2}} = \frac{p_i}{q_i} + \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} + \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}} = \frac{p_i}{q_i - 1 + a},$$

hol a pozitiv szám; tehát végre:

$$\frac{S_{i+2}}{N_{i+2}} > \frac{p_i}{q_i - 1} > -1.$$

Világos, hogy e következtetések sorozata határtalanul folytatható és ezek szerint $\frac{S_i}{N_i}, \frac{S_{i+1}}{N_{i+1}}, \ldots \frac{S_m}{N_m}, \ldots$ folyton kisebbedő számok sorozata, melyek azonban -1-nél mindig nagyobbak maradnak. Igy tehát $\lim. \frac{S_n}{N_n}$ véges és meghatározott érték, azaz a vizsgált láncztört összetartó.

165. *A következő végtelen láncztört*

$$\frac{1}{v_1} \dotplus \frac{v_1^2}{v_2-v_1} \dotplus \frac{v_2^2}{v_3-v_2} \dotplus \cdots \frac{v_n^2}{v_{n+1}-v_n} \dotplus \cdots,$$

mindig egyidőben összetartó vagy széttartó a

$$\sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{1}{v_n}$$

sorral. A v-k tetszőleges mennyiségek, melyek közt azonban, hogy a tétel alkalmazható legyen, a 0-nak nem szabad előfordulnia.

A tétel be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy *a láncztört és a sor megfelelő megközelítő értékei:*

$$\frac{S_n}{N_n} = \frac{1}{v_1} \dotplus \frac{v_1^2}{v_2-v_1} \dotplus \cdots \dotplus \frac{v_{n-1}^2}{v_n-v_{n-1}}$$

$$s_n = \sum_1^n (-1)^{n+1} \frac{1}{v_n}$$

mindig azonosak. Valóban:

$$\frac{S_1}{N_1} = \frac{1}{v_1},$$

$$\frac{S_2}{N_2} = \frac{1}{v_1 + \frac{v_1^2}{v_2-v_1}} = \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}.$$

De ha

$$\frac{S_n}{N_n} = s_n$$

azonosan egyenlő, ezen azonosság helyes marad, ha v_n helyébe $v_n + \frac{v_n^2}{v_{n+1}-v_n}$-et teszünk. Ekkor $\frac{S_n}{N_n}$-ből $\frac{S_{n+1}}{N_{n+1}}$ lesz és így

$$\frac{S_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{v_n + \frac{v_n^2}{v_{n+1} - v_n}} =$$

$$= \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{v_n} + (-1)^{n+2} \frac{1}{v_{n+1}} = s_{n+1},$$

tehát állításunk általánosságban helyes.

Ha adva van egy tetszőleges összetartó sor:

$$\sum_1^n (-1)^{n+1} \frac{1}{v_n},$$

és a megfelelő

$$\frac{1}{v_1} \dot{+} \frac{v_1^2}{v_2 - v_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{v_n^2}{v_{n+1} - v_n} \dot{+} \cdots$$

végtelen láncztörtet képezzük, ez nemcsak összetartó, hanem értéke ugyanaz, mint a soré; úgy hogy az utolsó tétel egyszersmind módszert szolgáltat, melynek segítségével bármely sor alakjában adott számértéket lánctört alakjában lehet kifejezni, vagyis — a mint ezt szokás mondani — *sort láncztörtté lehet átalakítani.*

Igy lesz például, ha a

$$v_n = 2n - 1,$$

$$\frac{v_{n-1}^2}{v_n - v_{n-1}} = \frac{(2n-3)^2}{2},$$

megállapításokat használjuk:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{2} \dot{+} \frac{9}{2} \dot{+} \frac{16}{2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{(2n-3)^2}{2} \dot{+} \cdots$$

A lánctört a Lord Brouncker által adott híres alakzat, mely — mint ezt majd később látjuk — a sorral együtt $\frac{\pi}{4}$ értékét adja.

166. Az utoljára tárgyalt tétel különben csak megfordítása amaz eljárásnak, melynél a lánctörtet átalakítjuk sorrá, szintén úgy, hogy a megfelelő közelítő értékek egyenlők. Ha a sortagok általános törvénye áttekinthető, e módon szintén eldönthetjük a láncztört összetartását.

Ha p. az adott láncztört:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\dots$$

akkor (156. cz. $p_0=0$, $q_0=1$)

$$N_0=1,\ N_1=2,$$
$$N_2=2.2.+2.1=1.2.3,$$
$$N_3=3.1.2.3+3.2=1.2.3.4;$$

Ha pedig $N_{m-1}=1.2\dots(m-1)\,m$, $N_m=1.2\dots m(m+1)$, akkor:

$$N_{m+1}=(m+1)\,N_m+(m+1)\,N_{m-1}=1.2\dots(m+2).$$

E szerint a láncztörtnek megfelelő soralakban:

$$\frac{p_1\dots p_n}{N_{n-1}\,N_n}=\frac{1.\,2.\,3\dots n}{2.\,3\dots n.\,2.\,3\dots(n+1)}=\frac{1}{1.\,2.\,3\dots(n+1)},$$

és így a láncztörtnek megfelelő sor alak:

$$\frac{1}{1.\,2}-\frac{1}{1.\,2.\,3}+\frac{1}{1.\,2.\,3.\,4}-\dots$$

melyet összetartónak ismerünk, és melynek $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$ közt fekvő értéke a láncztörtével azonos. Később ki lesz mutatva, hogy e közös érték nem más, mint $\frac{1}{e}$. (57. cz.)

FÜGGELÉK AZ ÁLTALÁNOS SZÁMTANHOZ.

DETERMINÁNSOK ÉS LINEÁR ALAKOK.*

I.

Kapcsolástani tételek.

Permutácziók.

167. Midőn a tárgyak egy bizonyos sokaságát megszámláljuk, akkor ily módon a tárgyak közt megkülönböztetünk egy elsőt, másodikat, ..., n-ediket és egyszersmind megállapitjuk a tárgyaknak egy bizonyos *elrendezését*, azaz egymásutánját. Ha a tárgyaknak — melyeket a kapcsolástanban *elem*eknek szokás nevezni — jelei gyanánt a megszámlálásnál velük kapcsolatba hozott sorszámokat használjuk, ezen elrendezés képe, az elemek száma n lévén :

$$1, 2, 3, \ldots, (n-1), n.$$

Ha a tárgyaknak ezen számokkal való jelölése zavart okozna, másnemű jelöléseket is lehet használni, például : $a, b, c, \ldots, i, j, k$ vagy $a_1, a_2, \ldots \ldots a_{n-1}, a_n$.

A számlálás ismétlésénél elsőnek vehetjük azt az elemet, melynek sorszáma előbb p. i_1 volt, általánosságban k-adiknak azt, melynek sorszáma előbb i_k volt; ily módon az elemeknek új elrendezését nyerjük, melynek képe :

---

* Az *algebrai alaktan*, vagy *formális algebra*, melynek elemeit tárgyalja e szakasz, nem tartozik szorosan véve az analizis rendszerébe, de ennek nélkülözhetetlen segédeszköze. A mathematika e fejezetét részletesen tárgyalja a következő, kitünő kézikönyv :

BALTZER, Theorie und Anwendung der Determinanten (5. Auflage).

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{n-1}, i_n,$$

hol $i_1, i_2 \ldots i_n$ *a sorrend mellőzésével* megegyezik az $1, 2 \ldots (n-1), n$ sorozattal.

Minden ily elrendezés, mely n elemből az összes elemek fölhasználásával képezhető, ezen elemeknek *permutáczió*ját alkotja.

A permutácziók száma a legegyszerűbb esetekben közvetetlenül megszámlálható. Ha az n elemből képezhető permutácziók számát röviden P_n-nel jelöljuk, lesz:

$$P_1 = 1, P_2 = 2, P_3 = 6.$$

Ugyanis két elemnél a lehetséges elrendezések: 1, 2 és 2, 1; három elemnél:

$$1, 2, 3; \quad 1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2; \quad 3, 2, 1.$$

Általánosságban könnyű látni, hogy:

$$P_n = n\, P_{n-1};$$

mert azon permutácziók száma, melyekben az első helyen egy bizonyos elem áll, adva van a többi $(n-1)$ elem permutáczióinak száma által, mely P_{n-1}. Minthogy pedig az első helyen az elemek bármelyike állhat, az összes permutácziók száma: $n P_{n-1}$.

Az n elemből képezhető permutácziók száma még:

$$P_n = 1 \,.\, 2 \ldots (n-1)\, n.$$

Valóban látni, hogy e képlet helyesen adja meg P_1, P_2, P_3 értékét, ha pedig $P_{n-1} = 1 \,.\, 2 \ldots (n-2)\,(n-1)$, akkor a $P_n = nP_{n-1}$ reláczió mutatja, hogy e meghatározási mód P_n-re nézve is helyes marad.

Az első n egész szám szorzatát n *factoriális*ának nevezzük és számára rövidebb jelzést használunk:

$$n! = 1 \,.\, 2 \ldots (n-1)\, n,$$

(olv. n factoriálisa, vagy n fölkiáltó jellel.)

168. Valamely permutáczióban:

$$i_1\, i_2 \ldots i_k \ldots i_l \ldots i_n$$

két elem, i_k és i_l *helyesen* van elrendezve, vagy *inverziót* képez, a mint

$$i_k < i_l \text{ vagy } i_k > i_l.$$

(Ha az elemek jelei nem az első megszámlálásnál — melylyel itt az összehasonlítás történik — nyert sorszámok, akkor természetesen i_k, i_l helyébe e sorszámok jönnek.)

Ha az adott permutáczióban $i_1, i_2, \ldots i_{n-1}$-et egymásután összehasonlítjuk a reá következő elemekkel, megkapjuk a permutáczióban előforduló *összes inverziók számát.* A mint ez páros, vagy páratlan, magát a permutácziót is *páros* vagy *páratlan*nak nevezzük.

A permutáczió páros vagy páratlan voltát könnyű analitikai módon jellemezni. E szorzat ugyanis:

$$P = \Pi(i_s - i_r) \quad (r = 1, 2, \ldots n-1\,;\ s = r+1\,,\ r+2, \ldots, n),$$

és ez a definicziók értelmében annyi negativ szorzót tartalmaz, a hány inverziót tartalmaz a permutáczió; ez tehát páros vagy páratlan, a mint P pozitiv vagy negativ.

Két permutáczió közül, mely csak annyiban különbözik egymástól, hogy két elem, i_k és i_l helyet cserélt, mindig az egyik páros, a másik páratlan.

E tétel még következőkép is fogalmazható: *Ha valamely permutáczióban két tetszőleges elem egymással helyet cserél, az inverziók száma ezáltal páratlan számmal változik.*

A két permutáczió

$$\ldots i_k \ldots i_l \ldots \quad \text{és} \quad \ldots i_l \ldots i_k \ldots$$

által jellemezhető, hol felteszszük, hogy a ki nem irt helyeken mindkét esetben ugyanazon elemek állanak.

A tétel bebizonyitására a P szorzatot vizsgáljuk, melynek állításunk értelmében a jelzett változtatásnál kell, hogy előjele az ellenkezőbe menjen át. A P-nek csak azon szorzói változnak, melyek i_k-t vagy i_l-et tartalmazzák. Ezek pedig:

$$\begin{gathered}
(i_k - i_1)\,,\ (i_k - i_2)\ ,\ \ldots,\ (i_k - i_{k-1})\,,\\
(i_l - i_1)\ ,\ (i_l - i_2)\ ,\ \ldots,\ (i_l - i_{k-1}),\\
(i_{k+1} - i_k), (i_{k+2} - i_k), \ldots, (i_{l-1} - i_k), (i_l - i_k), (i_{l+1} - i_k), \ldots, (i_n - i_k),\\
(i_l - i_{k+1})\,,\ (i_l - i_{k+2}), \ldots,\ (i_l - i_{l-1}),\\
(i_{l+1} - i_l)\,,\ (i_{l+2} - i_l), \ldots,\ (i_n - i_l).
\end{gathered}$$

Ha most i_k-t és i_l-et egymással fölcseréljük, akkor az első és második sorban álló szorzók egyszerűen helyet cserélnek; evvel tehát nem változik a szorzat értéke. A 3-ik sorból az $(i_l - i_k)$ előtt álló tényezők átmennek a negyedik sorban álló tényezőkbe, de megváltoztatott előjellel, ezek pedig megfordítva átmennek a 3-ik sor épen említett szorzóiba, szintén megváltoztatott előjellel. A szorzathoz ekkor a (-1) páros hatványa hozzálép, mint új tényező; azaz ekkor sem változik a szorzat. Az $i_l - i_k$ után álló szorzók a 3-ik sorban és az ötödik sorban állók egyszerűen helyet cserélnek, ha i_k és i_l helyet változtat. Marad tehát végre $i_l - i_k$, mely átmegy $i_k - i_l$-ba, azaz P átmegy $-P$-be, a mi bebizonyítandó volt.

Az n elemből képezhető páros és páratlan permutácziók száma egyenlő; azaz mindegyik szám $\frac{1}{2}n!$

Irjuk föl az összes különböző $\substack{\text{páros}\\\text{páratlan}}$ permutácziókat; cseréljük föl egymással mindegyikben ugyanazt a két elemet, i_k-t és i_l-et; akkor csupán $\substack{\text{páratlan}\\\text{páros}}$ permutácziókat nyerünk, melyek mindannyian különbözők is, mert különben az eredetiek közt is lettek volna egyenlők. Tehát legalább is annyi $\substack{\text{páratlan}\\\text{páros}}$ permutáczió van, a hány $\substack{\text{páros}\\\text{páratlan}}$. De e két állítás csak ugy egyeztethető össze, hogy a páros és páratlan permutácziók egyenlő számmal vannak; minthogy pedig együttes számuk $n!$, minden osztályban $\frac{1}{2}n!$ permutáczió lesz.

169. *Ha a permutálandó elemek közt egyenlők vannak,* és azon permutácziókat is egyenlőknek veszszük, melyek egyenlő elemek helycseréjénél egymásba mennek át, a permutácziók száma alább száll. Ha például a elem egyenlő, akkor egy bizonyos permutáczióból, ha ezeket az elemeket permutáljuk, a többit pedig meghagyjuk helyén, $a!$ permutáczió lesz, mely azonban egyenlő. És így a még különböző permutácziók száma $\frac{n!}{a!}$.

Ha ezenkívül ismét b elem egymásközt egyenlő, az $\frac{n!}{a!}$ permutáczió közt épen úgy ismét $b!$ lesz egyenlő, és a különböző permutácziók száma leszáll $\frac{n!}{a!\,b!}$-re. Általánosságban:

Ha az n elem közül a, azután b, azután c és úgy tovább mindig egyenlő, a permutácziók száma:

$$\frac{n!}{a!\,b!\,c!\ldots}$$

Mellékesen kiemelhetjük ama számelméleti eredményt, hogy ha

$$a+b+c+\ldots \leq n,$$

e törtalak, mint permutácziók száma, mindig egész számot jelent.

Variácziók.

170. Ha az elrendezéseknél nem használjuk föl az összes rendelkezésünkre álló n elemet, hanem ezek közül csak k-t, akkor *az n elemnek ú. n. k-tagú variáczióit* kapjuk. Az n elem permutácziói tehát nem mások, mint ezen elemek n-tagú variácziói.

A permutácziókból megkapjuk a k-tagú variácziókat, ha belőlük az utolsó $n-k$ elemet kihagyjuk, még pedig e variácziók összességét, mert a permutácziókban is az első k helyen bármicsoda elemek állhatnak tetszőleges sorrendben. De mindegyik variáczió így többször jelentkezik; ha az adott permutáczióban meghagyva az első k elemet, a többi $n-k$-t permutáljuk, mindig ugyanazon variáczióhoz vezető permutácziót nyerünk; ellenben oly permutácziók, melyeknél az első k hely nincs egyenlően betöltve, különböző variácziókhoz vezetnek. E szerint *az n elemből képezhető k-tagú variácziók száma*:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1).$$

Ha n különböző elem áll rendelkezésünkre, de ezen elemek mindegyike akárhányszor használható, akkor a k elemből kepezett elrendezések az *n elemből ismétléssel képezhető k-tagú variácziók. Ezeknek száma :*

$$n .$$

Ekkor ugyanis az első, második, ... k-adik helyre, a többitől függetlenül, az n elem barmelyike helyezhető.

Kombinácziók.

171. Az n elemből — akár ismétléssel, akár e nélkül — képezett variácziók vagy csak az elrendezés által, vagy pedig az által különböznek, hogy nem ugyanazon elemekből állanak. *Az n elemből képezett k-tagú kombinácziók azon csoportok, melyek az n elem közül kiválasztott k elemből képezhetők, de úgy, hogy két csoport* *csak akkor tekintendő különbözőnek, ha nem ugyanazon elemekből áll, míg a sorrend egyáltalában nem jő tekintetbe.*

E kombinácziók ismét *vagy ismétléssel vagy a nélkül* képezhetők, a mint t. i. az n különböző elem mindegyike vagy akárhányszor vagy csak egyszer fordulhat elő az illető kombinaczióban. Az ismétlés nélküli k-tagú kombinácziók száma az ugyanannyi elemből képezhető k-tagú variácziók számából e szerint tüstént levezethető, ha tekintetbe veszszük, hogy ezek közül mindig $k!$ (az egy variáczióból permutálás által levezethető variácziók száma) van, mely csak az elemek sorrendjében különbözik, tehát mindig ugyanazt a kombinácziót adja.

E szerint *az n elemből képezhető ismétlés nélküli kombinácziók száma :*

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)\,(n-k+1)}{1.2\ldots(k-1)\,k.},$$

melyet szokás röviden $\binom{n}{k}$-val jelölni. Az n és k t. i. teljesen jellemzik az alakot; számlálóban és nevezőben k egymás után következő egész szám áll, a számlálóban n-től lefelé, a nevezőben 1-től fölfelé.

Ha n és k pozitiv egész számok, ha továbbá $n \geq k$, akkor az $\binom{n}{k}$ tört alak, mint kombinácziók száma, mindig egész számot jelent.

172. Az $\binom{n}{k}$ számalakoknak, melyek később fejtegetendő fontos szerepük miatt *binomális együtthatók*nak is neveztetnek, néhány folyton alkalmazandó tulajdonsága a következő.

Minden k-tagú kombinácziónak megfelel egy $n-k$-tagú kombináczió, mely t. i. mindazon elemekből áll, melyek a k-tagu kombinaczióban nem fordulnak elő. Világos, hogy különböző k-tagú kombináczióknak különböző $n-k$-tagú kombinácziók felelnek meg. Azaz az n elemből képezhető k-tagú és $n-k$-tagú kombinácziók száma egyenlő :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \text{(I.)}$$

a mi különben a részletesen kiírt számalakokon közvetetlenűl is igazolható.

Az n elem k-tagú kombinácziói vagy nem tartalmaznak egy bizonyos elemet, p. 1-et vagy tartalmazzák ezt. Amazok száma nem más mint az $n-1$ elemből képezhető k-tagú kombinácziók száma:

$\binom{n-1}{k}$; az 1-et tartalmazó kombinácziók számát pedig megkapjuk, ha tekintetbe veszszük, hogy ezek még $n-1$ elem közül $k-1$-et tartalmaznak; a két osztály együtt az összes k-tagú kombinácziókat adja, tehát:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \qquad \text{(II.)}$$

Az n elem k-tagú kombinácziói a $k, k+1, k+2, \dots n$ elemeknek legalább egyikét tartalmazzák, mert a hátralévő elemek száma csak $k-1$, és ezek nem alkothatnak k-tagú kombinácziót.

Ha valamely kombinániczióban előfordul az r elem, de $r+1$, $r+2, \dots, n$ nem foglaltatik benne, akkor azt mondjuk, hogy r a *legmagasabb*, az illető kombináczióban előforduló elem.

Eszerint az n elem k-tagú kombináczióit osztályozhatjuk a szerint, a mint a legmagasabb, bennök előforduló elem $k, k+1, \dots, r, \dots, n$. — Azon kombinácziók száma pedig, melyekben a legmagasabb elem r, miután a többi $k-1$ elem $r-1$ elem sorából választható $\binom{r-1}{k-1}$ Az osztályok együtt megadják az összes k-tagú kombinácziókat, és így:

$$\binom{n}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \dots + \binom{r}{k-1} + \dots + \binom{n-1}{k-1}. \qquad \text{(III.)}$$

Világos, hogy az I—III. képletekben a tárgyalás értelmében *n és k pozitiv egész számok, még pedig $n \geq k$.*

173. *Az n elemből ismétléssel képezhető k-tagú kombinácziók száma:*

$$\binom{n+k-1}{k}$$

A képlet helyes volta világos, ha $k=1$; ekkor az 1-tagú kombinácziók száma $\binom{n}{1} = n$; és valóban mint 1-tagú kombinániczió szerepel minden elem egymagában; tehát ezeknek száma n. — Föltételezve, hogy a képlet helyes a $k-1$-tagú kombinácziókra nézve, kimutatjuk, hogy a k tagúakra is helyes marad, a mivel azután általánosan helyesnek bizonyult.

Osztályozzuk ismét az összes k-tagú kombinácziókat, a mint a legmagasabb bennük előforduló elem, $1, 2, \dots n$. T. i. most még 1 is lehet a kombináczió legmagasabb eleme, ha ez ugyanis csupa 1-ekből áll.

Azon k-tagú kombinácziók számát, melyekben a legmagasabb elem r, megadja azon meggondolás, hogy ezekben az r-en kivül még $k-1$ elem áll, melyek ismétléssel az $1, 2, \ldots r-1, r$ sorozatból választandók. Tehát számuk az r elemből ismétléssel képezhető $k-1$-tagú kombinácziók száma, vagyis, minthogy erre az esetre képletünket érvényesnek veszszük: $\binom{r+k-2}{k-1}$. Az egyes osztályokban foglalt kombinácziók összes száma megadja az összes k-tagú kombinácziók számát és így ez, ha r helyébe minden számot teszünk 1-től n-ig, nem más mint:

$$\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+\ldots+\binom{r+k-2}{k-1}+\ldots+\binom{n+k-2}{k-1}.$$

Ezen összeg azonban a megelőző czikk (III.) képlete szerint összevonható, és ekkor lesz:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

a mi bebizonyítandó volt.

II.

A determinánsok elméletének elemei.

A determinánsok bevezetése.

174. Ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *határozatlan* számok és $A, B, C, \ldots$ meghatározott számok, akkor *az* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *határozatlanok m-edfokú algebrai alakja* alatt értjük az oly összeget, melynek minden tagja

$$C x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

alakú, hol még az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oly nem negativ egész számok, melyeknek összege:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=m.$$

Ha $m=1$, ill. 2, az alakot még *lineár*, ill. *quadratikus vagy négyzetes alak*nak is szokás nevezni.

Az egy határozatlant tartalmazó alak: Cx_1^n; ha a határozatlanok száma $2, 3, \ldots,$ az alakot *binär, ternär,*... alaknak mondjuk.

Az algebrai alakok elmélete e kifejezéseknek oly tulajdonságaival foglalkozik, melyek a határozatlanoknak tulajdonítható speczialis értékrendszerektől függetlenek. Az egyenletrendszerek megoldása ezen elméletnek egyik alkalmazása.

Az elsőfokú vagy lineár alak általánosságban*:

$$u \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m;$$

ha több lineár alakkal egyidőben van dolgunk, czélszerű az összes együtthatókat ugyanazon betűvel jelölni, melyhez két mutatót csatolunk. Az első mutató adja az illető algebrai alak sorszámát; a második pedig azon határozatlanét, melynek együtthatójával van dolgunk; ugy hogy a_{ij} az i-edik lineár alakban az x_j együtthatója. Ha $u_1, u_2, \ldots$ az ily lineár alakok, akkor ezek részletesen:

$$u_i \equiv a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{im} x_m = \sum_{j=1}^{j=m} a_{ij} x_j$$

$$(i = 1, 2, \ldots)$$

Ama követelés, az $x_1, x_2 \ldots x_m$ határozatlanokat úgy meghatározni, hogy az $u_1, u_2, \ldots$ lineár alakok átmenjenek az adott $k_1, k_2 \ldots$ számértékekbe, az *elsőfokú egyenletrendszer*hez vezet:

$$u_1 = k_1, u_2 = k_2, \ldots;$$

az $x_1, x_2 \ldots x_m$ kellő meghatározása teszi az egyenletrendszer *megoldását.*

A legfontosabb eset, melyre a többi visszavezethető, az midőn a most *ismeretlenek*nek nevezett határozatlanok száma, és a lineár alakok, vagyis *egyenletek száma egyenlő*. Ebben az esetben, melylyel itt kizárólag foglalkozunk, ha e szám n, az egyenletrendszer alakja:

$$u_1 = k_1, \; u_2 = k_2, \ldots u_i = k_i, \ldots u_n = k_n. \tag{1.a}$$

vagy részletesen kiirva:

---

* Az $A \equiv B$ jelzés azt jelenti, hogy A és B-nek nemcsak számértéke, de algebrai alakja is azonos. Többnyire akkor használjuk, ha A a B rövidített jele. —

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = k_1, \\ u_2 &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = k_2, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_i &= a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = k_i, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_n &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = k_n, \end{aligned} \qquad (1.b)$$

175. A legegyszerűbb esetek, midőn $n = 2$ vagy 3, a mathematika elemeiből ismeretes egyszerű számítások segítségével tárgyalhatók. Röviden összeállítjuk az ide vonatkozó eredményeket, hogy ez által tájékozhassuk magunkat az általános esetben követendő módszerek iránt.

Ha $n = 2$, az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= k_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= k_2. \end{aligned}$$

Ha itt az első és második egyenletben a_{22} és $-a_{12}$-vel, illetőleg $-a_{21}$ és a_{11}-el szorzunk és azután összeadunk, lesz:

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 &= \quad k_1 a_{22} - k_2 a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 &= -k_1 a_{21} + k_2 a_{11}. \end{aligned}$$

Itt az $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ számértéke, melyet az egyenletrendszer *determinánsának* nevezünk és

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

-vel * jelölünk, dönt az egyenletrendszer jellege fölött.

Ha D nem 0, akkor az x_1 és x_2 *egy* bizonyos, meghatározott véges értékrendszerét nyerjük, mely, mint a helyettesités mutatja, csakugyan megfelel az egyenletrendszernek. Ez a *közönséges eset*, midőn az egyenletrendszernek csak *egy* megoldása van.

Ha $D = 0$ és a jobboldalon álló kifejezések egyike nem 0, ellenmondáshoz jutunk és az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ha $D = 0$ és a jobboldalon álló kifejezések is eltünnek, akkor, mint

* A determináns-jelzés ezen első bevezetésénél meg legyen jegyezve, hogy a választott alak az illető algebrai kifejezésbe belépő összes *elemeket* (az egyes számértékeket) adja, úgy, hogy az egyes elem helye egyszersmind megállapítja, hogy ama kifejezés összerakásánál miképen lesz fölhasználandó.

könnyű látni,

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{k_1}{k_2}, = t$$

és ha e számok közös értéke t, az első egyenlet:

$$a_{21}\,t\,x_1 + a_{22}\,t\,x_2 = k_2\,t$$

alakban irható, tehát mindig ki van elégítve, ha $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = k_2$. Azaz itt az egyik ismeretlen egészen szabadon választható és végtelen sok megoldás létezik; *az egyenletrendszer határozatlan.*

A $D = 0$ tehát kivételes esetet jelez, midőn az egyenletrendszer vagy ellenmondást tartalmaz, vagy pedig határozatlan.

176. Ha $n = 3$, az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= k_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= k_2,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= k_3.
\end{aligned}$$

Ha az első, második és harmadik egyenletet rendre megszorozzuk a következő sorok egyikében álló három tényezővel:

$$\begin{aligned}
&(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}),\ (a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12}),\ (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\\
&(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}),\ (a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13}),\ (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}),\\
&(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),\ (a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11}),\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})
\end{aligned}$$

és összeadunk, akkor eltünnek az x_2 és x_3, az x_3 és x_1, végre pedig az x_1 és x_2 együtthatói, a mint ezt az egyszerű számítások végrehajtása mutatja és a következő egyenleteket nyerjük:

$$\begin{aligned}
D\,x_1 &= K_1,\\
D\,x_2 &= K_2,\\
D\,x_3 &= K_3,
\end{aligned}$$

hol ismét

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

az egyenletrendszernek ugynevezett *determinánsa,* melyet még így is jelölünk:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

A K_1, K_2, K_3 részletesen kifejthető értékeit itt mellőzzük.

Ha D nem 0, ismét a *közönséges* esettel van dolgunk, melyben az egyenletrendszernek egy, és csak egy megoldása van. A kifejtett egyenletekből ugyanis következik, hogy szükségkép

$$x_1 = \frac{K_1}{D},\ x_2 = \frac{K_2}{D},\ x_3 = \frac{K_3}{D},$$

mely értékek, mint megoldások, közvetetlen helyettesítés által igazolhatók.

Ha $D = 0$, kivételes eset lép föl; ekkor általánosságban, ha t. i. K_1, K_2, K_3 nem mindannyian zérusok, az egyenletrendszer *ellenmondást tartalmaz,* mert ebből a $0 = K_1$, $0 = K_2$, $0 = K_3$ lehetetlen relácziók következnek. Ha K_1, K_2, K_3 is eltünik, a részletes tárgyalás mutatja, hogy az egyenletrendszer *határozatlan;* ekkor egy vagy két egyenlettel együtt a többi is mindig ki van elégítve, azaz egy vagy két ismeretlen egészen szabadon választható. E fejtegetéseket, melyek nem sokára egész általánosságban lesznek ismétlendők, most mellőzzük. Czélunk itt csak az volt, hogy $n = 2$ és 3 esetére a D alakkal megismerkedvén, ennek általános értelmezését ez által előkészítsük.

A determinánsok alaptulajdonságai.

177. Az eddig tárgyalt speciális esetek alapján, *az n-edfokú determinánst*, melynek jele:*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1j}, \ldots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots a_{in} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}, \ldots, a_{nj}, \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

következőkép értelmezhető.

* A determinánsok alapgondolata már LEIBNITZ-nál található; ujból föltalálta e számítási módot CRAMER («Analyse des lignes courbes» 1740.); a jelen jelzési mód CAUCHY-tól származik. Alapvető értékezések: CAUCHY, Journal de l'école polytechnique, Cah. 17 és JACOBI, Crelle's Journal 22. köt.

Az n-edfokú determináns n^2 számból, ú. n. elemeiből összerakott egész kifejezés. A bevezetett jelzésnél ezen elemek n sorba és ugyanannyi oszlopba (colonne) vannak elhelyezve, az egymás mellett álló elemek egy-egy sort, az egymás alatt állók egy-egy oszlopot képeznek. Ezen elrendezés mellett a determináns nem egyéb, mint az összes különböző

$$\varepsilon\, a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \ldots a_{r_t s_t} \ldots a_{r_n s_n}$$

alakú szorzatok összege, hol

$$r_1 r_2 \ldots r_t \ldots r_n \quad \text{és} \quad s_1 s_2 \ldots s_t \ldots s_n$$

az $1, 2 \ldots n$ *számok egy-egy permutácziója és* ε *vagy* $+1$, *vagy* -1, *a mint e két permutáczió egyenlő jellegű (páros ill. páratlan), vagy különböző jellegű.*

A mint az a szorzók sorrendjét fölcseréljük, ugyanazon tagja a determinánsnak $n!$ különböző módon lesz fölirható; de ez természetesen a determinánsban csak egyszer szerepel. Hogy e különböző irásmód az előjel meghatározásánál nem vezet különböző eredményekhez, könnyen belátható. Hogy t. i. p. $a_{r_t s_t}$ az első helyre jöjjön, fölcseréljük ezt $a_{r_1 s_1}$-el; de ekkor az r-ek és s-ek permutácziójában két-két elem helyet cserélt, ez által mindegyik permutáczió jellege megváltozott; és így a két permutáczió most is — úgy mint előbb — egyenlő vagy különböző jellegü lesz. A hátralévő szorzók közt bármelyiket lehet hasonló módon a második helyre juttatni s ú. t.

Minden szorzót p. ugy lehet irni, hogy az első mutatók permutácziója $1, 2, \ldots n$ legyen. *A szorzat minden sorból egy és csak egy elemet tartalmaz; hasonlókép minden oszlopból is egy és csak egy elem fordul elő a szorzatban.*

Az n-edfokú általános determináns-alak tagjainak száma tehát n! Mert az első mutatók egy bizonyos permutácziójával összeállítható a második mutatók bármely permutácziója és ez által az összes különböző szorzatokat nyerjük.

Az egyes tagok *előjelszabálya* még következőkép is fogalmazható: *Legyen az*

$$r_1 r_2 \ldots r_t \ldots r_n \quad \text{és} \quad s_1 s_2 \ldots s_t \ldots s_n$$

permutácziókban az inverziók száma J_1, *illetőleg* J_2, *akkor a deter-*

mináns tagjainak alakja:

$$(-1)^{J_1+J_2} a_{r_1 s_1} \dots a_{r_t s_t} \dots a_{r_n s_n}.$$

Ha ugyanis J_1 és J_2 egyidőben páros vagy páratlan, akkor $J_1 + J_2$ páros; ha ellenben az J_1 és J_2 számok közül az egyik páros a másik páratlan, az összeg páratlan és így csakugyan $(-1)^{J_1+J_2}$ az előbbi defincziónak megfelelőleg lesz $+1$ vagy -1.

Az $n=2$ vagy 3 esetében ezen utasitások szerint az előbb részletesen fölirt alakokat nyerjük.

Oly általános tárgyalásoknál, hol a determináns elemeinek szám értékenem szerepel, igen czélszerű lesz a következő, KRONECKER-től származó jelzés:

$$|a_{ij}|_{(i,\, j=1,\, 2, \dots n)}$$

mely egész röviden csak a determináns elemét adja a két vonás közt.

Az $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemek a determináns födiagonálisát alkotják.

A determinánsnak e tagja: $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ a *kezdő tag* vagy *főtag*.

178. A determinánsoknak most adott értelmezéséből közvetetlenül következik néhány alaptulajdonságuk.

Két determinánsnak, $|a_{ij}|$ és $|b_{ij}|$-nek, értéke ugyanaz, ha az egyiknek sorai megegyeznek a másiknak oszlopaival és viszont, azaz ha minden i és j-re $a_{ij} = b_{ji}$.

Ekkor ugyanis a determinánsoknak kifejtett alakjai tagonként egyenlők. A két determináns t. i. tartalmazza az

$$\varepsilon\, a_{r_1 s_1} \dots a_{r_t s_t} \dots a_{r_n s_n}, \text{ ill. } \varepsilon' b_{s_1 r_1}, \dots, b_{s_t r_t} \dots b_{s_n r_n}$$

tagokat, melyek egyenlők, mert $a_{r_1 s_1} = b_{s_1 r_1}$, s ú. t. és még ε és ε' is ugyanaz, t. i. $+1$ vagy -1, a mint az $r_1 \dots r_n$ és $s_1 \dots s_n$ permutácziókban foglalt inverziók számának összege, $J_1 + J_2$ páros vagy páratlan.

Két determinánsnak, mely egymásból az által keletkezik, hogy két sor vagy oszlop egészben egymással helyet cserél, csak az előjelben különböző értéke van. van

Ha a két determináns $|a_{ij}|$ és $|b_{ij}|$, a megállapitás annyit jelent, hogy *a)* $a_{ij} = b_{ij}$, kivéve midőn $i = r$ vagy s, hol r és s két tetszőleges szám az $1, \dots n$ sorozatból; ekkor pedig $a_{rj} = b_{sj}$, $a_{sj} = b_{rj}$; vagy pedig *b)* $a_{ij} = b_{ij}$, kivéve midőn $j = r$, vagy s és ekkor $a_{ir} = b_{is}$, $a_{is} = b_{ir}$.

Ismét a determinánsoknak megfelelő tagjai az *a)* esetben:

$$\varepsilon a_{1j_1} \dots a_{rj_r} \dots a_{sj_s} \dots a_{nj_n} \quad \text{és} \quad \varepsilon b_{1j_1} \dots b_{rj_r} \dots b_{sj_s} \dots b_{nj_n},$$

valamint:

$$-\varepsilon a_{1j_1} \dots a_{rj_s} \dots a_{sj_r} \dots a_{nj_n} \quad \text{és} \quad -\varepsilon b_{1j_1} \dots b_{rj_s} \dots b_{sj_r} \dots b_{nj_n},$$

hol a második sorban álló tagok az első sorban állókból oly módon keletkeznek, hogy egyedül a második mutatók sorában fölcseréljük j_r és j_s-t, tehát valóban ellenkező előjelt nyernek.

Az a-k és b-k előbb megállapított vonatkozásaiból azonban következik, hogy az első sorban álló a-tag és a második sorban álló b-tag minden tényezőjében megegyezik (ezek közt kettő csak helyet cserélt) és csak az előjelben különbözik; hasonlóképen a második sorban álló a-tag és az első sorban álló b-tag. Tehát a $|b_{ij}|$ determináns minden egyes tagját az előjel változtatásával az $|a_{ij}|$ determináns tagjaiból nyerjük, a mi bebizonyítandó volt.

A *b)* eset vagy épen ugy tárgyalható, vagy pedig egyszerűen az előbbi tétel alkalmazásából foly, mely szerint oszlopok és sorok egymással fölcserélhetők.

Ha az $|a_{ij}|$ determinánsban az r-edik és s-edik sornak (vagy oszlopnak) elemei rendre egyenlők, azaz $a_{rj} = a_{sj}$ (vagy $a_{ir} = a_{is}$) az r és s bizonyos értékénél, akkor a determináns értéke 0.

Most ugyanis a determináns maga magához áll oly viszonyban, mint előbb a $|b_{ij}|$-hez. Ha értéke D, kell tehát, hogy $-D$-vel is egyenlő legyen. De $D = -D$ csak úgy lehetséges, ha

$$D = 0.$$

Aldeterminánsok.

179. Ha $i_1, i_2, \ldots i_r$ és $j_1 j_2 \ldots j_r$ az $1, 2, \ldots (n-1), n$ sorozatból választott különböző számok, akkor

$$|a_{i_\varrho j_\varrho}|_{(\varrho=1,\ldots r)} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_2 j_2} \ldots & a_{i_r j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \ldots & a_{i_2 j_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} \ldots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}$$

az eredeti $D = |a_{ij}|$ determináns elemeiből képezett determináns, melynek bármely sorában vagy oszlopában csak oly elemek állanak, melyek a D determinánsnak is egy sorában, illetőleg oszlopában foglaltak helyet. Keletkezése oly módon irható le legegyszerűbben, hogy a D determinánsból kihagyjuk mindazon sorokat és oszlopokat, melyeknek sorszáma nem $i_1, \ldots, i_r$ illetőleg $j_1 \ldots j_r$. Az ily módon keletkező determináns az előbb fölirttal teljesen megegyeztethető, az által, hogy előbb a sorok és azután az oszlopok egymásutánját kellően változtatjuk és így ettől csak előjelben különbözik.

Minden $|a_{i_\varrho j_\varrho}|_{(\varrho=1,\ldots r)}$ alakú determináns a D *aldeteterminánsa*, még pedig az előforduló sorok és oszlopok száma szerint *r-edfokú*, vagy a kihagyott sorok és oszlopok száma szerint *n—r-edik aldeterminánS.*

Ha $i_1 \ldots i_r, i_{r+1} \ldots i_n$ és $j_1 \ldots j_r, j_{r+1} \ldots j_n$ *a sorrend mellőzésével megegyeznek az* $1, 2 \ldots n$ *számok sorozatával akkor a*

$$\Delta = |a_{i_\varrho j_\varrho}|_{(\varrho=1,\ldots r)} \quad \text{és} \quad \Delta' = |a_{i_\sigma j_\sigma}|_{(\sigma=r+1,\ldots,n)}$$

aldeterminánsok szorzatában vagy minden tag egyenlő a D determináns egy tagjával, vagy minden tag egyenlő a D determináns egy megváltoztatott előjelű tagjával.

Legyen a Δ és Δ' determinánsok egy-egy tetszőleges tagja:

$$\varepsilon\, a_{k_1 l_1} \ldots a_{k_r l_r} \quad \text{és} \quad \varepsilon'\, a_{k_{r+1} l_{r+1}} \ldots a_{k_n l_n}, \qquad (a.)$$

hol a sorrend mellőzésével a

$$k_1 \ldots k_r \text{ és } i_1 \ldots i_r, \quad k_{r+1} \ldots k_n \text{ és } i_{r+1} \ldots i_n$$

$$l_1 \ldots l_r \text{ és } j_1 \ldots j_r, \quad l_{r+1} \ldots l_n \text{ és } j_{r+1} \ldots j_n$$

egymással megegyeznek. Ennek csakugyan megfelel a D-ben egy

$$\varepsilon'' a_{k_1 l_1} \dots a_{k_r l_r} a_{k_{r+1} l_{r+1}} \dots a_{k_n l_n} \tag{b.}$$

tag, mely amazoknak szorzata, $+1$ vagy -1-el szorozva, a mint $\varepsilon\varepsilon' = +\varepsilon''$ vagy $-\varepsilon''$. A Δ determináns fölirt tagjától áttérhetünk bármely más tagjához, az által, hogy p. az $l_1 \dots l_r$ mutatókat permutáljuk. E változtatás úgy eszközölhető, hogy mindig két l-et cserélünk föl egymással és ezt — mondjuk — h-szor ismételjük, akkor hogy az illető kifejezés megint tagja legyen Δ-nak, $(-1)^h$-val kell szorozni, mert a permutáczió megtartja, vagy megváltoztatja jellegét, a mint h páros vagy páratlan. Hogy a D megfelelő tagját nyerjük, (b.)-ben ugyanezen változtatásokat kell eszközölnünk a mutatókon és tehát ugyanazon $(-1)^h$-val szorozni. Ha most a Δ' tagjával ugyanígy járunk el, a Δ és Δ' két tetszőleges tagjának szorzatát nyerjük, mely a D megfelelő tagjával az előjel mellőzésével egyenlő, az előjel pedig a két esetben egyenlő vagy különböző, a mint $\varepsilon\varepsilon' = \pm\varepsilon''$, azaz a mint *egy* ily szorzatnál egyenlő vagy különböző volt.

A D két aldeterminánsát *adjungáltnak* nevezzük, ha szorzatuk minden tagja a D-nek egyik tagja. Az előbbiekből világos, hogy *minden aldeterminánsnak egy és csak egy adjungált aldetermináns felel meg.* Ha t. i. az adott aldetermináns bizonyos sorok és oszlopok kihagyása által keletkezett D-ből, adjungált aldetermináns csak az lehet, melyben épen csak az előbb kihagyott sorok és oszlopok maradtak meg. Ezek közt csak két, a kifejtésnél az előjelben különböző alak van, melyek közül azután egy megfelel a föltételnek.

Az adjungált aldetermináns képezése, úgy hogy az előjel még kétes marad, közvetetlenül végezhető. Egy szorzattag összehasonlítása megadja azután az előjelt. Igy a

$$a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

determinánsra vonatkozólag

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} \text{ és } -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} & a_{24} \\ a_{32} & a_{35} & a_{34} \\ a_{52} & a_{55} & a_{54} \end{vmatrix}$$

adjungált aldeterminánsok; mert a kezdő tagok szorzata, mely az első, ill. második alaknál:

$$-a_{11}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{43}\,a_{55}\,,\quad \text{ill.}\quad a_{11}\,a_{22}\,a_{35}\,a_{43}\,a_{54}$$

tagja a D-nek.

180. Ha az n-edfokú determinánsnak $n-1$ sorát és oszlopát kihagyjuk, csak egy elem marad hátra, melyet *elsőfokú* (vagy $n-1$-edik) *aldeterminánsnak* mondhatunk. Adjungált alakja ekkor $n-1$-edfokú. Így p. ugyancsak az előbb fölirt determinánsra vonatkozólag a_{34} és

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

adjungáltak, a kezdő tagok szorzata $-a_{11}\,a_{22}\,a_{34}\,a_{43}\,a_{55}$ ugyanis előfordul D kifejtésében.

Az a_{ij} sorának és oszlopának kihagyása által keletkező aldetermináns, melynél a többi sor és oszlop sorrendje változatlanul meghagyatott, legyen D_{ij}; az a_{ij}-nek adjungált aldeterminánsa A_{ij}; akkor természetesen A_{ij} és D_{ij} legfölebb előjelben különbözik, még pedig:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,D_{ij}\,.$$

Ha $i=1$ és $j=1$, a tétel közvetetlenül világos. Ekkor ugyanis a_{11} és

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

kezdő tagjának szorzata a D kezdő tagja. Megfelelőleg $i+j=2$ és $A_{11} = D_{11}$.

Ha a_{ij} a determináns tetszőleges eleme, cseréljük föl az i-edik sort az $i-1$-edikkel; az így nyert determinánsban az $i-1$-edik sort az $i-2$-dikkal s. ú. t., míg végre az $i-1$-edik ily cserénél a_{ij} az első sorba kerül. Ha most ismét a j-edik oszlopot fölcseréljük a $j-1$-sővel, az így nyert determinánsban a $j-1$-őt a $j-2$-ikkal, és ú. t. míg végre $j-1$ ily csere után a_{ij} az első oszlopba kerül. Ebben a determinánsban, melynek értéke $(-1)^{i+j}\,D$, az a_{ij} az első sor- és oszlopban áll. De ezen első sor és oszlop kihagyása által keletkező aldetermináns D_{ij}, mert a többbi sor és oszlop helye egymásra vonatkozólag nem változott. Tehát

$$a_{ij} \text{ és } D_{ij}$$

adjungált aldeterminánsok a $(-1)^{i+j}$ D-re nézve, azaz szorzatuk ennek tagjait adja. És így végre

$$a_{ij} \text{ és } A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

tagjainak szorzata $(-1)^{i+j}(-1)^{i+j} D$ vagyis D tagjait adja.

Tüstént belátható még, hogy *az a_{ij} A_{ij} szorzat a D mindazon tagjait adja, melyek a_{ij}-t tartalmazzák;* mert a D_{ij} épen mindazon szorzatokból áll, melyek keletkeznek, ha az i-edik sor és j-edik oszlop kivételével, minden sor és oszlopból egy-egy elemet veszünk.

181. Ezek alapján *minden determináns kifejthető bármely sor vagy oszlop elemei szerint,* azaz a következő összeg alakokban irható:

$$\begin{aligned} |a_{ij}| &= a_{i1} A_{i1} + \ldots + a_{ij} A_{ij} + \ldots + a_{in} A_{in} \\ &= a_{1j} A_{1j} + \ldots + a_{ij} A_{ij} + \ldots + a_{nj} A_{nj}. \end{aligned} \tag{1.}$$

T. i. a determináns minden tagja az i-edik sornak (j-edik oszlopnak) egy és csak egy elemét tartalmazza; a tagok osztályozhatók tehát a szerint, a mint ez az illető sornak (oszlopnak) első, második, ... n-edik tagja. De az első osztályba tartozó tagok összege az előbbiek szerint $a_{i1} A_{i1}$ (illetőleg $a_{1j} A_{1j}$) és úgy tovább, a miből azután a determinánsnak előbb fölirt összeg alakja foly.

Az adott eredmény, mint az $n-1$-ed fokú aldeterminánsok közt fönnálló reláczió is fogalmazható és mint ilyen, igen egyszerű általánositásra alkalmas, mely a következő tételhez vezet: *Az*

$$\begin{aligned} &a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \ldots + a_{ij} A_{kj} + \ldots + a_{in} A_{kn} \\ &a_{1j} A_{1l} + a_{2j} A_{2l} + \ldots + a_{ij} A_{il} + \ldots + a_{nj} A_{nl} \end{aligned} \tag{2.}$$

összegek értéke 0, *ha* $i \gtrless k$, *ill.* $j \gtrless l$, *ellenben* D, *ha* $i = k$, *ill.* $j = l$.

A tétel második része az előbb nyert eredmény; az első esetben pedig ezen összegek az oly determinánsok kifejtései, melyekben a k-adik sor (l-edik oszlop) elemei helyébe az i-edik sor (j-edik oszlop) elemeit tettük, a melyekben tehát két sor (oszlop) egyenlő. E szerint e determinánsok és (2.) alatt álló kifejtett értékük is 0.

E szerint például:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,(10-24) - 3\,(1-16) + 5\,(3-20) = -68.$$

$$0 = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

A determinánsok e kifejtett alakjából ismét azoknak néhány alaptulajdonsága foly:

Valamely determináns szorzása egy P számmal úgy történik, hogy egy tetszőlegesen választott sor vagy oszlop minden elemét szorozzuk P-vel.

Ha ugyanis az (1.) alatt álló alakban P-vel szorzunk, az eredmény úgy fogható föl, mint azon determináns kifejtése, melyben a külön kiirt elemek helyett azok P-szerese áll.

*Ha valamely sor vagy oszlop minden eleme adva van mint k tag összege, akkor a determináns előállítható, mint n determináns összege, úgy hogy az illető sorban (oszlopban) az elemek helyett rendre azoknak csak első, csak második,... végre az utolsó determinánsban csak k-adik tagjai állnak, míg a többi sorok (oszlopok) változatlanok maradnak.**

Ha ugyanis

$$a_{ij} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(k)} \quad (j = 1, 2, \ldots n),$$

akkor (1.) így is irható:

$$\begin{aligned} |a_{ij}| = {} & a_{i1}^{(1)} A_{i1} + \ldots + a_{ij}^{(1)} A_{ij} + \ldots + a_{in}^{(1)} A_{in} + \ldots \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \\ & + a_{i1}^{(k)} A_{i1} + \ldots + a_{ij}^{(k)} A_{ij} + \ldots + a_{in}^{(k)} A_{in}, \end{aligned}$$

a hol minden sorban az előbb leirt determinánsok egyike áll.

* Ha az elemek összegalakjában a tagok száma nem mindenütt egyenlő, a tétel alkalmazását a 0-nak, mint hozzáadandónak bevezetése által kell előkészítenünk.

182. E tételek azon a determinánsokkal való számításnál folyton alkalmazott szabályhoz vezetnek, mely szerint *a determinánsok azonos átalakítása* történik.

Bármely determináns értéke változatlan marad, ha egy tetszőleges sor (oszlop) minden elemét egy tetszőleges számértékkel szorozva, az így nyert számokat egy másik tetszőlegesen választott sor (oszlop) elemeihez hozzáadjuk; a mi úgy értendő, hogy ha $a_{i1}, a_{i2} \dots a_{in}$ és $a_{k1}, a_{k2}, \dots a_{kn}$ például a két sor, az utóbbi sor elemei helyébe rendre a következők lépnek:

$$a_{k1} + \lambda a_{i1}, \; a_{k2} + \lambda a_{i2}, \dots, a_{kn} + \lambda a_{in}.$$

Az ily módon képezett determinánsot ugyanis az előbb adott tétel alapján fölbonthatjuk két determináns összegére. Ha a változtatott sorból (oszlopból) az első tagokat veszszük, az eredeti determinánst nyerjük: ha a második tagokkal képezzük a determinánst az i-edik és k-adik sorban (oszlopban) álló elemek csak az állandó λ szorzó hozzálépése által különböznek. Igy tehát e determináns λ-szorosa, tehát a determináns maga is 0. A λ-val ugyanis szorozhatunk az által, hogy az i-edik sor (oszlop) elemeit szorozzuk λ-val, de ekkor az i-edik és k-adik sor elemei egyenlők lesznek.

Az utoljára használt következtetés oly gyakran fordul elő, hogy czélszerű lesz, annak tartalmát külön tételben kiemelni.

Ha valamely determinánsban két sor (oszlop) azon elemei, melyek ugyanazon oszlopban (sorban) állanak egymásba átmennek, ha mindig ugyanazon egy számmal szorzunk, a determináns értéke 0.

Közvetetlenül világos még az előbb adott tétel következő általánositása:

Bármely determináns értéke változatlan marad, ha akárhány tetszőlegesen választott sor (oszlop) elemeit egy minden sorra (oszlopra) vonatkozólag állandó számértékkel szorozva egy másik sornak (oszlopnak) elemeihez hozzáadjuk; azaz — pontosabb kifejezésben — ha p. a determinánsban

$$\begin{array}{lll} a_{k1} & \text{helyébe az} & a_{k1} + \lambda_1 a_{i_1 1} + \lambda_2 a_{i_2 1} + \dots + \lambda_p a_{i_p 1} \\ a_{k2} & \text{«} \quad \text{«} & a_{k2} + \lambda_1 a_{i_1 2} + \lambda_2 a_{i_2 2} + \dots + \lambda_p a_{i_p 2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{kn} & \text{helyébe az} & a_{kn} + \lambda_1 a_{i_1 n} + \lambda_2 a_{i_2 n} + \dots + \lambda_p a_{i_p n} \end{array}$$

kifejezéseket teszszük.

Könnyen beláthatók még a következő gyakran alkalmazott szabályok:

Oly determináns, melynek egyik sorában, vagy oszlopában minden elem zérus, maga is 0.

Oly determináns, melynek egyik sorában (oszlopában) minden elem, egynek kivételével 0, egygyel alacsonyabb fokú determináns alakjában irható; ha t. i. e sor (oszlop) elemei szerint kifejtünk, az összegnek csak egy tagja marad meg.

Oly determináns, melyben a négyzetes schema valamely diagonálisának egyik oldalán álló elemek mind eltünnek, egyenlő a diagonálisban álló tagoknak kellő előjellel ellátott szorzatával. Ha t. i kifejtünk azon sor vagy oszlop elemei szerint, melyben csak egy elem különbözik a zérustól, akkor a determináns értéke gyanánt ezt az elemet kapjuk, szorozva egy $n-1$-ed fokú determinánssal, melynek most ugyanily tulajdonságai vannak. Ezen az eljárás tehát ismételhető s. ú. t.

183. Az adott tételek segítségével minden determináns sokféleképp átalakítható; erre álljon itt néhány gyakran előforduló példa.

$$a)\quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-x_1 & a_{12}-x_2 & \dots & a_{1n}-x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-x_1 & a_{n2}-x_2 & \dots & a_{nn}-x_n \end{vmatrix}$$

ha t. i. az első sort a többi sorból levonjuk, és azután az első oszlop elemei szerint kifejtünk.

$$b)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+z \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} z,$$

ha a harmadik oszlopban álló elemeket a_3+z, b_3+0, c_3+0 alakban irjuk, két determináns összegére szétbontunk, végre még a másodikat a 3-dik oszlop elemei szerint kifejtve.

$$c)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a)\,(c-b)$$

ha az első sort a többiből levonjuk, az első oszlop elemei szerint kifejtünk és azután az első ill. második sor elemeiből $(b-a)$-t és $(c-a)$-t mint közös tenyezőt kiemeljük.

$$d)\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & z & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} z-y & x-z \\ x-y & z-y \end{vmatrix}$$

ha az első oszlophoz a többi oszlopot hozzáadjuk, és azután az első oszlopból az $x+y+z$ tényezőt kiemeljük; a második determinánsban pedig az első sort a többiből levonjuk és azután az első oszlop elemei szerint kifejtünk.

$$e)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 16$$

ha az első determinánsban az első oszlophoz hozzáadjuk a többi oszlopot, a másodikban a második oszlophoz a harmadikat, a harmadikban a harmadik oszlopból levonjuk a negyediket; a negyedikben végre minden a diagonális egyik oldalán fekvő elem 0, a determináns tehát egyenlő a diagonálisban fekvő tagok szorzatával.

Ha a determináns minden eleme adott szám, a determináns végleges kiszámításának föladata legegyszerűbben úgy végezhető, hogy előbb bármely azonos átalakítás utján a determináns egyik elemét egyenlővé teszszük 1-gyel. Ez mindig megtörténhetik, ha az illető elemet, mint közös tényezőt az egész sorból vagy oszlopból kiemeljük. Ha a determinánsok elemei egész számok, akkor ezen átalakítás a determináns elemeinek e jellegét meg is tarthatja, ha t. i. sorok (vagy oszlopok) kivonása vagy összeadása által az előforduló egész számok absolut értékét folyton kisebbítjük, a mi által végre vagy 0, vagy $\pm$ 1-hez jutunk. Az első esetben érintetlenül hagyva a 0 sorát (oszlopát), a 0-t tartalmazó oszlop (sor) egy másik elemének absolut értékét kisebbítjük, míg végre ez is 0 vagy 1. Ha itt is 0-t kapunk, újból ismételjük az eljárást, érintetlenül hagyva a két sort, melyben (ugyanazon oszlop-sorszámmal 0 áll). Ha mindig 0-t nyerünk, végre lesz egy oszlop, melyben vagy minden elem 0 és így *a determináns* 0, vagy pedig minden elem, egy kivételével 0, és így *a determináns $n-1$-ed fokúra átalakítható.*

Ha közben a kisebbített elem értéke $+1$ vagy -1 lett, az utóbbi eset oly módon, hogy két sorban vagy oszlopban -1-gyel, tehát mind össze $+1$-gyel szorzunk, visszavezethető az elsőre.

Ha azután valamely sorban (oszlopban) 1 és ezenkívül $a, b, c, \ldots$ állanak, akkor az 1-et tartalmazó oszlopot (sort) a-val, b-vel, ... szorozva levonjuk az a-t, b-t, ... tartalmazó oszlopból (sorból) és ez által oly sort (oszlopot) nyerünk, melyben minden elem egy kivételével 0, tehát *a determináns ismét átalakítható* $n-1$*-ed fokúvá.*

Ezen eljárás többszörös ismétlése végre az értéket másodfokú determinánsból adja, mely mint szorzatok különbsége tüstént kiszámítható.

A gyakorlatban az eljárás természetesen sokkal rövidebb, mint a műveleteknek ezen általános leirása. *P.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 9 \\ 6 & 8 & -4 & -54 \\ 4 & -5 & -7 & -226 \\ -2 & 5 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 & 9 \\ 6 & -4 & -4 & -54 \\ 4 & -13 & -7 & -226 \\ -2 & 9 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & -4 & -32 & -18 \\ 30 & -13 & -98 & -109 \\ -20 & 9 & 67 & -74 \end{vmatrix}$$

ha t. i. először az első oszlop kétszeresét levonjuk a másodikból; a második determinánst pedig úgy alakítjuk át, hogy a második oszlop -2, 7, és -9 szeresét adjuk az első, harmadik, negyedik oszlophoz.

Folytatólagosan az utolsó determináns:

$$= -\begin{vmatrix} 14 & -32 & -18 \\ 30 & -98 & -109 \\ -20 & 67 & -74 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & -32 & 18 \\ 30 & -98 & 109 \\ -20 & 67 & 74 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & -32 & 18 \\ 2 & -34 & 73 \\ -20 & 67 & 74 \end{vmatrix},$$

ha először a -1-gyel való szorzást a harmadik oszlop elemein végezzük, és azután az első sort kettővel szorozva, a másodikból kivonjuk. Továbbá:

$$= 2\begin{vmatrix} 7 & -32 & 18 \\ 1 & -34 & 73 \\ -10 & 67 & 74 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 206 & -493 \\ 1 & -34 & 73 \\ 0 & -273 & 804 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 206 & -493 \\ -273 & 804 \end{vmatrix} = -62070.$$

ha t. i. az első oszlopból a 2-t kiemeljük, és azután a második sor elemeit -7 és 10-el szorozva adjuk az első, illetőleg harmadik sor elemeihez. Ekkor a determináns másodfokúra redukálható, melyet végre mint szorzatok különbségét kiszámítjuk.

184. *A* Laplace *után nevezett tétel*, melynek prioritása azonban Vandermonde-é, általánosságban valamely determinánsnak aldeterminánsai szerint való kifejtését adja.

Legyenek k tetszőlegesen választott sornak sorszámai i_1, $i_2 \dots i_k$, akkor azon k-adfokú aldeterminánsoknak, melyek e k sort tartalmazzák, száma

$$\mu = \binom{n}{k},$$

mert az illető aldeterminánsok képezésére szükségelt k oszlop ennyiféleképen választható. Ha ez a μ aldetermináns

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\mu,$$

és adjungált aldeterminánsaik rendre:

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\mu,$$

akkor

$$D = \delta_1 \Delta_1 + \delta_2 \Delta_2 + \dots + \delta_\mu \Delta_\mu.$$

Hogy minden ily szorzat a determináns néhány tagját adja, már az előbbiekből ismeretes; tehát még csak kimutatandó, hogy a D minden tagja egy és csak egy ily szorzatban fordul elő. Bármely tag az $i_1 \dots i_k$ mellett álló $j_1 \dots j_k$ második mutatók által csakugyan kijelöli azt az oszlop-kombinácziót, melynek segítségével a megfelelő δ képezendő; hogy ekkor $\delta\Delta$ valóban tartalmazza az illető tagot, közvetetlenül világos.

Ha e kifejtésben a Δ determinánsokra a kifejtésnek most jellemzett módját újból alkalmazzuk, még pedig úgy, hogy az i_{k+1}, $i_{k+2}, \dots i_{k+k'}$ sorszámok által jellemzett k' sorból képezett aldeterminánsokat vesszük, akkor minden Δ mint $\binom{n-k}{k'}$ tag összege lesz előállítva, hol minden tag egy k'- és egy $n-k-k'$-ed fokú aldetermináns szorzata.

Az $n-k-k'$-ad fokú aldeterminánsokon e kifejtés újból ismételhető és így tovább

Legyen $\begin{bmatrix} i_1, i_2 \dots i_k \\ j_1, j_2 \dots j_k \end{bmatrix}$ általánosságban azon k-adfokú aldetermináns, mely az $i_1 \dots i_k$ adik sor és a $j_1 \dots j_k$-adik oszlop fölhasználásával keletkezik. Akkor e kifejtés általános eredménye:

$$D = \sum \varepsilon \begin{bmatrix} i_1, \ldots i_k \\ j_1, \ldots j_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{k+1}, \ldots i_{k+k'} \\ j_{k+1}, \ldots j_{k+k'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{k+k'+1}, \ldots, i_{k+k'+k''} \\ j_{k+k'+1}, \ldots, j_{k+k'+k''} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} i_{k+\ldots+k^{(n-1)}+1}, \ldots i_n \\ j_{k+\ldots+k^{(n-1)}+1}, \ldots j_n \end{bmatrix},$$

hol $i_1 \ldots i_n$ az $1, \ldots n$ elemek egy meghatározott permutácziója; az összeadás pedig kiterjed a $j_1 \ldots j_n$ elemek mindazon permutáczióira, melyek még akkor is különbözők maradnak, ha a j k-nek az egyes zárjeleken belül való elrendezését nem veszszük tekintetbe, úgy hogy az összeg tagjainak száma $\frac{n!}{k!\,k'!\ldots(n-k-k'-\ldots)!}$; az ε szorzó végre $+1$ vagy -1, minthogy az aldeterminánsok mostani jelzésénél az előjel még kétes marad.

Világos végre, hogy e tétel akkor is érvényes, ha az i és j mutatók szerepét fölcseréljük, azaz a sorok helyett az oszlopokból indulunk ki.

III.

Lineár alakok és a szorzási tétel.

Az első fokú (lineár) egyenletrendszer.

185. Az n egyenletből álló és n ismeretlent tartalmazó elsőfokú (lineár) egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}\,x_1 + \ldots + a_{1j}\,x_j + \ldots + a_{1n}\,x_n = k_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_i &= a_{i1}\,x_1 + \ldots + a_{ij}\,x_j + \ldots + a_{in}\,x_n = k_i, \qquad (1.) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= a_{n1}\,x_1 + \ldots + a_{nj}\,x_j + \ldots + a_{nn}\,x_n = k_n. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer determinánsa, D alatt értjük röviden az együtthatókból összeállított determinánst:

$$|a_{ij}|_{(i,j=1,2,\ldots n)}.$$

Az egyenletrendszer megoldásában meg kell különböztetnünk a rendes esetet, mikor D nem 0, és a kivételes esetet, mikor $D = 0$.

Ha először is D nem 0, akkor a determinánsnak

$$D = a_{1j}\,A_{1j} + \ldots + a_{ij}\,A_{ij} + \ldots + a_{nj}\,A_{nj}$$

alakját használva:

$$Dx_j = A_{1j}\,u_1 + \ldots + A_{ij}\,u_i + \ldots + A_{nj}\,u_n,$$

Ha ugyanis $u_1 \ldots u_n$ részletes alakját használjuk és az x-ek szerint rendezünk, a jobboldalon álló kifejezés nem más, mint:

$$\begin{array}{l} (A_{1j}\,a_{11} + \ldots + A_{ij}\,a_{i1} + \ldots + A_{nj}\,a_{n1})\,x_1 + \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \\ + (A_{1j}\,a_{1j} + \ldots + A_{ij}\,a_{ij} + \ldots + A_{nj}\,a_{nj})\,x_j + \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \\ + (A_{1j}\,a_{1n} + \ldots + A_{ij}\,a_{in} + \ldots + A_{nj}\,a_{nn})\,x_n, \end{array}$$

hol a 181. czikk tételei szerint minden együttható, kivéve x_j-ét 0, ez pedig D, tehát valóban

$$= Dx_j.$$

De $u_1, \ldots u_n$ értékei adva vannak és így szükségképen:

$$x_j = \frac{A_{1j}\,k_1 + \ldots + A_{ij}\,k_i + \ldots + A_{nj}\,k_n}{D}.$$

Ugyancsak az előbb idézett tételek azt is mutatják, hogy az $x_1 \ldots x_n$ imént kifejtett értékei valóban kielégítik az egyenletrendszert.

Az x_j értékének számlálója könnyen belátható szabály szerint van képezve. Ha ugyanis D-nek j-edik oszlopában az ott álló elemek helyébe rendre $k_1 \ldots k_n$-et irunk, és e determinánsot a j-edik oszlop szerint kifejtjük, épen e számlálót nyerjük, melyet a D-ből való e származtatása mellett czélszerüen jelölünk D_j-vel.

E szerint kimondhatjuk, hogy *az elsőfokú egyenletrendszernek, ha determinánsa nem 0, egy és csak egy megoldása van, mely az ismeretleneknek következő értékrendszeréből áll:*

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\; x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}. \qquad (2.)$$

Igy p. a következő egyenlet rendszerből:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 4, \\ 3x + 2y - 3z &= 2, \\ x + 10y - z &= 10, \end{aligned}$$

lesz

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 10 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = 96,$$

ha ugyanis először a harmadik oszlopot hozzáadjuk az elsőhez. Továbbá

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 10 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 196$$

és így $z = \frac{24}{49}$ s. ú. t.

186. *Ha az egyenletrendszer determinánsa eltünik, de a nélkül, hogy e determinánsnak minden $n-1$-fokú aldeterminánsa is zérus*, akkor mindenekelőtt az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy az n-edik sor és oszlop kihagyása által keletkező aldetermináns, A_{nn} a 0-tól különböző. Ha t. i. az egyenletek sorrendjét változtatjuk, ez által a determinánsban csak a sorok sorrendje változik; hasonlókép, ha az ismeretlenek egymásutánját máskép állapítjuk meg, ez által a determinánsban csak az oszlopok lesznek egymással fölcserélve. Hogy tehát az el nem tünő aldetermináns sorai és oszlopai az $1, 2 \ldots n-1$ sorszámmal jelzettek legyenek, az egyenletek és ismeretlenek kellő elrendezése által mindig elérhető. Ebben az esetben

$$A_{1n} u_1 + A_{2n} u_2 + \ldots + A_{nn} u_n = 0.$$

Ha ugyanis $x_1 \ldots x_n$ szerint rendezünk (mint az előbbi czikkben) akkor most minden x együtthatója zérus; az x_n-é:

$$A_{1n} a_{1n} + \ldots + A_{nn} a_{nn} = D,$$

mert $D = 0$, a többi pedig ismét a 181. czikk tételei értelmében. Ha most $u_1 \ldots u_n$ helyébe értékeiket teszszük, $k_1 \ldots k_n$-et, lesz:

$$D_n = A_{1n} k_1 + A_{2n} k_2 + \ldots + A_{nn} k_n = 0, \qquad (3.)$$

a mi minthogy A_{nn} nem 0, a k_n-t meghatározza a többi k segítségével, vagy más kifejezésben, *föltétele annak, hogy az egyetlenrendszernek egyáltalában legyen megoldása. Ha e föltétel nincs kielé-*

gítve, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. Föltéve azt, hogy van megoldás, azon ellenmondáshoz jutunk, hogy a 0-tól különböző szám, az utolsó egyenlet baloldala egyenlő zérussal; a föltevés tehát lehetetlen.

Ha ellenben a $D_n = 0$ föltétel ki van elégítve, akkor az egyenletrendszer «egyszerüen határozatlan», azaz van oly megoldás, melyben x_n tetszőlegesen választható, és x_n megállapítása után $x_1 \ldots x_{n-1}$ meghatározott számok.

Ekkor ugyanis az előbbi egyenletekből:

$$A_{1n}(u_1-k_1) + A_{2n}(u_2-k_2) + \ldots + A_{nn}(u_n-k_n) = 0.$$

Ha tehát $x_1 \ldots x_n$ oly számértékek, hogy:

$$u_1 = k_1, \ldots, u_{n-1} = k_{n-1},$$

akkor, minthogy A_{nn} nem 0, egyszersmind

$$u_n = k_n,$$

azaz *ezen utolsó egyenlet az előbbiek következménye* és nem szolgáltat új adatot az ismeretlenek meghatározásánál.

Az első $n-1$ egyenlet pedig valóban olyan, hogy x_n értékének szabad választása után a többi ismeretlenek értékét egyértelmüleg adja, mert ezen egyenletrendszer együtthatóiból képezett determináns

$$|a_{ij}|_{(i,j=1,\ldots n-1)} = A_{nn}$$

a föltevés szerint 0-tól különböző.

187. *Ha az egyenletrendszer determinánsa eltünik, akkor általánosságban föltehetjük, hogy az $m+1$-ed fokú aldeterminánsok mind eltünnek, de az m-ed fokúak közt van legalább egy, a 0-tól különböző.*

Világos, hogy ezen föltevés mellett egyszerre áttekintjük az összes lehető eseteket. T. i. vagy van az $n-1$-fokú aldeterminánsok közt (és ez az előbb tárgyalt eset) a 0-tól különböző, vagy ezek mindannyian zérusok; akkor áttérünk az $n-2$ fokuakhoz és ú. t. Ha előbb ugyanis nem akadunk el nem tünő determinánsokra, akkor ez mindenesetre megtörténik, ha $m=1$; vagyis midőn az első fokú aldeterminánsokat, az egyenletrendszer együtthatóit vizsgáljuk. Az az eset, midőn az összes együtthatók zérussal egyenlők, természetesen nem lesz tekintetbe veendő, a mennyiben ez nem is ád egyenletrendszert.

Föltehetjük továbbá az általánosság megszorítása nélkül, hogy az el nem tünő m-edfokú aldetermináns a következő:

$$|a_{ij}|_{(i,j=1,\dots m)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{vmatrix} = D^{(m)},$$

a mi t. i. ismét az egyenletek és ismeretlenek egymásutánjának kellő megállapítása által mindig elérhető. Ebben az esetben

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} & u_1 \\ \dots\dots\dots & \\ a_{m1} \dots a_{mm} & u_m \\ a_{r1} \dots a_{rm} & u_r \end{vmatrix} = 0; \quad (r = m+1, m+2, \dots n) \qquad (4.)$$

ha ugyanis az utolsó oszlopban kiirjuk az u-k részletes értékeit, akkor ezen n-tagu összegalakoknak megfelelőleg a determinánst előállíthatjuk, mint n determináns összegét. E determinánsokban

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} & a_{1j} x_j \\ \dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} \dots a_{mm} & a_{mj} x_j \\ a_{r1} \dots a_{rm} & a_{rj} x_j \end{vmatrix},$$

ha $j \leq m$, az utolsó oszlop a j-edik oszlop x_j-szerese, tehát értéke 0; ha pedig $j > m$, akkor az x_j szorzó kiemelése után nem más mint az egyenletrendszer determinánsának egy $m+1$-edfokú aldeterminánsa, tehát a föltevés szerint ismét 0.

Az $r = m+1, \dots n$ eseteknek megfelelőleg a (4.) kifejtése által lesz:

$$\begin{aligned} C_{m+1,1}\, u_1 + \dots + C_{m+1,i}\, u_i + \dots + C_{m+1,m}\, u_m + D^{(m)} u_{m+1} &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ C_{m+l,1}\, u_1 + \dots + C_{m+l,i}\, u_i + \dots + C_{m+l,m}\, u_m + D^{(m)} u_{m+l} &= 0 \qquad (5.) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ C_{n,1}\, u_1 + \dots + C_{ni}\, u_i + \dots + C_{n,m}\, u_m + D^{(m)} u_n &= 0. \end{aligned}$$

Ha itt $u_1 \dots u_n$ helyébe $k_1 \dots k_n$-et teszszük, melyekkel az u-k az adott egyenletrendszer értelmében egyenlők tartoznak lenni, akkor ismét *föltételeket nyerünk arra, hogy az egyenletrendszernek legyen megoldása* :

$$C_{r1}k_1+\ldots+C_{ri}k_i+\ldots+C_{rm}k_m+D^{(m)}k_r=0. \quad (r=m+1,\ldots,n) \quad (6.)$$

Ha e föltételek nincsenek kielégítve, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. Föltéve ugyanis, hogy az (1.)-nek megfelelő x értékek léteznek, mindig a (6.)-hoz, azaz a mostani esetben ellenmondáshoz jutunk.

Ha ellenben a (6.) *föltételek ki vannak elégítve, akkor az egyenletrendszer «n—m-szeresen határozatlan», azaz van oly megoldás, melyben $x_{m+1},\ldots,x_n$ szabadon választható, és az $x_{m+1},\ldots,x_n$ megállapítása után $x_1,\ldots,x_m$ meghatározott számok.*

Ha ugyanis az (5.) és (6.) megfelelő egyenleteit egymásból kivonjuk, lesz:

$$C_{r1}(u_1-k_1)+C_{r2}(u_2-k_2)+\ldots+C_{rm}(u_m-k_m)+D^{(m)}(u_r-k_r)=0,$$
$$(r=m+1,\ldots,n).$$

Ha tehát $x_1,\ldots x_n$ oly számértékek, melyek az

$$u_1=k_1,\ldots,u_m=k_m$$

egyenleteket kielégítik, akkor ugyanezen számértékekre nézve, minthogy $D^{(m)}$ nem 0, mindig egyszersmind:

$$u_{m+1}=k_{m+1},\ldots,u_n=k_n,$$

azaz *ezen utóbbi egyenletek az előbbieknek következményei* és nem szolgáltatnak új adatot az ismeretlenek meghatározásánál.

Az első m egyenlet pedig valóban olyan, hogy $x_{m+1},\ldots x_n$ értékének szabad választása után a többi ismeretlent egyértelműleg adja, mert az ezen egyenletrendszer együtthatóiból képezett determináns (hol most csak $x_1\ldots x_m$ szerepelnek, mint ismeretlenek), nem más, mint

$$D^{(m)}=|a_{ij}|_{(i,j=1,\ldots m)}.$$

188. *Homogén elsőfokú egyenletrendszerrel* van dolgunk, ha

$$k_1=0,\ldots k_n=0;$$

ha tehát az egyenletrendszer alakja:

$$u_1=0,\ u_2=0,\ldots,u_n=0.$$

Ha ebben D *nem* 0, csak egy megoldás van és világos, hogy ez nem más, mint:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_n = 0.$$

Ha $D=0$, még pedig részletezve, úgy, hogy az $m+1$-edfokú aldeterminánsok még mind eltünnek, az m-edfokúak közt ellenben van legalább egy, mely nem 0, akkor a homogén egyenletrendszer mindig $n-m$-szeresen határozatlan.

Ekkor ugyanis, miután minden k zérus, a (6.) alatt álló föltételek mindenkor azonosan vannak kielégítve.

Az $u_{m+1} = 0, \ldots, u_n = 0$ fölös egyenletek kihagyása után az egyenletek

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{im} x_m = -a_{i,m+1} x_{m+1} - \ldots - a_{in} x_n$$
$$(i = 1, \ldots m)$$

alakban irhatók, a miből látni, hogy az általános megoldásnak a következő alak adható:

$$x_i = c_{i,m+1} x_{m+1} + \ldots + c_{in} x_n,$$
$$(i = 1 \ldots m)$$

azaz m ismeretlen a többi teljesen határozatlan maradó ismeretlen lineár alakja gyanánt lesz megadva.

Ha az $n-1$-edfokú aldeterminánsok közt van egy a 0-tól különböző, akkor az

$$x_1 = A_{i1} \mu, x_2 = A_{i2} \mu, \ldots, x_n = A_{in} \mu \qquad (7.)$$

mindig az egyenletrendszer általános megoldása, hacsak nem az

$$A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$$

sorozatnak minden tagja zérus. Hogy ezek az értékek, bárhogy válaszszuk is a μ számot, megfelelnek az egyenletrendszernek, a 181. czikk tételeiből közvetetlenül világos.

Ha most már p. A_{ij} nem 0, a μ választása által oly megoldást nyerhetünk a (7.)-ből, melyben x_j értéke tetszőleges. De ezek a megoldások az egyenletrendszer összes megoldásai. Ha ugyanis x_j ezen értékét az egyenlet-rendszerbe bevezetjük és az i-edik egyenletet elhagyjuk, akkor oly rendszert nyerünk, melynek determinánsa nem 0, mely szerint tehát a többi ismeretlennek csak egy bizonyos értékrendszere tartozik az x_j szabadon választott értékére. De ekkor ez nem lehet más, mint a (7.)-ben foglalt megoldás és ez csakugyan általános.

Ebből látni, hogy *ha $D=0$, az i, k, j, l minden értékénél*

$$\begin{vmatrix} A_{ij} & A_{il} \\ A_{kj} & A_{kl} \end{vmatrix} = 0.$$

Ha ugyanis $A_{ij}=0$, és A_{il} nem 0, akkor $A_{kj}=0$, mert ekkor

$$\ldots, x_j = A_{ij}\mu, \ldots, x_l = A_{il}\mu, \ldots$$

az egyenletrendszer általános megoldása; ha A_{kj} nem volna 0, akkor

$$x_j = A_{kj}\mu', \ldots, x_l = A_{kl}\mu', \ldots$$

szintén az általános megoldást adná; de az előbbi alak szerint x_j minden megoldásban 0, és ez nem volna lehetséges, ha A_{kj} nem 0.

E szerint, ha a fölirt másodfokú determináns egyik eleme 0, akkor vagy az ugyanazon sorban, vagy az ugyanazon oszlopban álló második elem is 0, és a tétel helyes.

Még csak azon eset vizsgálandó, midőn a 4 elem egyike sem 0; akkor az előbb fölirt alakok mindketten a megfelelő egyenletrendszer általános megoldását adják; ha μ egy bizonyos 0-tól különböző szám, van e szerint egy szintén 0-tól különböző μ' szám, úgy hogy

$$A_{ij}\mu = A_{kj}\mu'$$
$$A_{kl}\mu' = A_{il}\mu;$$

a miből az egyenleteket szorozva és a 0-tól különböző $\mu\mu'$-vel osztva, végre a tétel értelmében

$$A_{ij}A_{kl} = A_{il}A_{kj}.$$

A nyert eredményt még következőkép fogalmazhatjuk:

Ha D-re vonatkozólag A_{ij} az a_{ij}-nek adjungált aldeterminánsa és $D=0$, akkor az

$$|A_{ij}|_{(i,j=1,2,\ldots,n)}$$

determinánsnak minden másodfokú aldeterminánsa 0.

Lineár alakok.

189. Ha az

$$u \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

lineár alakban minden együttható zérus, akkor azt mondjuk, hogy e lineár alak *azonosan* eltűnik; ekkor ugyanis 0 a határozatlanok *minden* értékrendszerénél. Ennek megfordítása is helyes marad:

Ha valamely lineár alak a határozatlanok bármely értékrendszerénél zérust ád, akkor a lineár alak minden együtthatója külön is zérus.

Ha p. $x_i = 1$, a többi x pedig 0, akkor u átmegy a_i-be, kell tehát, hogy $a_i = 0$ legyen.

Az $u_1, u_2, \ldots u_m$ lineár alakokat egymástól függetleneknek nevezzük, ha a $C_1 = 0$, $C_2 = 0, \ldots C_m = 0$ rendszer kivetelével nem lehet a C_1, $C_2 \ldots C_m$ számok oly rendszerét meghatározni, melynél

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_m u_m$$

azonosan eltűnik.

A fölirt kifejezés azonos eltünése természetesen annyit jelent, hogy a benne előforduló határozatlanoknak minden értékénél eltünik. Ennek megvizsgálásánál a $C_1 u_1 + \ldots + C_m u_m$ kifejezést, mely ismét lineár alak, először is az x-ek szerint rendezzük.

Legyenek részletesen kiirva:

$$u_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \qquad (1.)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

akkor:

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_m u_m = L_1 x_1 + L_2 x_2 + \ldots L_n x_n,$$

hol

$$L_1 = C_1 a_{11} + C_2 a_{21} + \ldots + C_m a_{m1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_n = C_1 a_{1n} + C_2 a_{2n} \qquad + C_m a_{mn}.$$

Az $u_1 \ldots u_m$ lineár alakok tehát akkor és csak akkor függetlenek, ha a

$$\begin{array}{l} C_1 a_{11} + C_2 a_{21} + \ldots + C_m a_{m1} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_1 a_{1n} + C_2 a_{2n} + \ldots + C_m a_{mn} = 0 \end{array} \qquad (2.)$$

elsőfokú egyenletrendszernek, melyben $C_1, \ldots, C_m$ az ismeretlenek, nincs más megoldása, mint

$$C_1 = 0, C_2 = 0, \ldots C_m = 0.$$

A lineár alakok soha sem függetlenek, ha $m > n$, azaz ha a lineár alakok száma nagyobb a határozatlanok számánál, föltéve természetesen, hogy a lineár alakok valóban tartalmazzák az n határozatlant, azaz hogy az

$$a_{1j}, a_{2j}, \ldots a_{mj}$$

sorozat számai közt a j minden értékénél van legalább is egy, a 0-tól különböző.

Ekkor ugyanis hiányos, homogén egyenletrendszerrel van dolgunk, azaz olyannal, melyben az egyenletek száma kisebb az ismeretlenek számánál, és az ilyennek mindig van oly megoldása, melyben nem minden ismeretlen 0.

Ebből ugyanis az előbb tárgyalt esetre térünk át, ha a meglévő egyenleteket többször fölirjuk, a hányszor szükséges, hogy az egyenletek száma is n legyen; a mi által homogén egyenletrendszert nyerünk eltünő determinánssal, melynek megoldásai a követelésnek megfelelnek és természetesen ama hiányos egyenletrendszert is kielégítik.

Ha ellenben $m \leq n$, akkor arra, hogy az $u_1 \ldots u_m$ lineár alakok függetlenek legyenek, szükséges és elegendő, hogy legalább is egy az

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{mm} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

schémából képezhető m-edfokú determinánsok közül ne legyen 0.

A fölirt schémából képezett m-edfokú determináns az olyan, mely a táblázatnak tetszőlegesen választott m sorából áll. (Az oszlopok száma mindig m.)

Elegendő e feltétel, mert az el nem tűnő determináns sorainak megfelelő m egyenlet a (2.)-ből homogén egyenletrendszer el nem tűnő determinánssal, és igy már ezen m egyenletnek, ha a többit nem is veszszük tekintetbe, egyedül a $C_1 = 0, \ldots, C_m = 0$ megoldás felelhet meg.

A föltétel szükséges is, mert ha ezen m-edfokú determinánsok mind eltünnek, csakugyan vannak a (2.)-nek megfelelő értékrendszerek, melyek nem csupán 0-okból állanak.

Vegyük a (2.)-nek m első egyenletét; e rendszer determinánsa eltünik, tehát legalább is egy az egyenletek sorából a többi következménye és kihagyható, legyen ilyen k, akkor ezek helyébe vegyük föl az $m+1$, $m+k$-adik egyenletet; determinánsa ismét eltünik; ismét vannak egyenletek, melyek a többiek következményei. Ezeket kihagyva, vegyük föl helyettük az $m+k+1, \ldots m+k+l$-edik egyenletet. Igy eljárva végre a (2.) helyett egy hiányos homogén egyenletrendszert, vagy legfölebb olyat nyerünk, melyben az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik, de determinánsa eltünik. Mindkét esetben azonban találunk nem csupán zérusokból álló megoldást, mely a tárgyalás értelmében az összes (2.) alatt álló egyenleteket kielégiti.

Ezen eredmények a következő tételben foglalhatók össze:

Az $u_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n$ lineár alakok, hol $i = 1, 2, \ldots m$ akkor és csak akkor függetlenek egymástól, ha az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

schémából képezhető m-edfokú determinánsok nem mindannyian 0-sal egyenlők.

Ha $m > n$, akkor m-edfokú determináns csak úgy képezhető a schémából, ha mint ezt épen a tétel egyöntetüsége végett képzelni akarjuk, a sorokat, melyekben csak n elem áll, 0-okkal folytatjuk, a mikor természetesen minden így nyert determináns 0.

Ha $m \leq n$, akkor a schema n oszlopából tetszőleges módon választható m, a sorok száma m lévén, ez által csakugyan oly összeállítást nyerünk, mely determinánst szolgáltat; még pedig ezek az előbbiektől, mint tüstént látni, csak abban különböznek, hogy az oszlopok soroknak vannak irva és megfordítva. Még külön kiemelendő, hogy:

Ha $m=n$, a táblázat csak egy determinánst szolgáltat, az n határozatlant tartalmazó n lineár alak determinánsát, mely alakok függetlenek vagy sem, a mint e determináns zérustól különböző vagy sem.

190. *Hogy az $u_1, u_2, \ldots u_n$ lineár alakok rendszere pontosan k egymástól független alakot tartalmazzon, azaz hogy ha $v_1, v_2, \ldots v_{k+1}$ ezen alakok sorából tetszőlegesen választottak, soha ne létezzék*

$$C_1 v_1 + \ldots + C_k v_k = 0$$

alakú reláczió (a 0-tól különböző együtthatókkal), ellenben mindig legyen ilyen $k+1$ alak közt:

$$C_1 v_1 + \ldots + C_{k+1} v_{k+1} = 0,$$

arra szükséges és elegendő, hogy az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

schémából képezhető k-adfokú determinánsok közt legyen egy a 0-tól különböző, ellenben a $k+1$-edfokú determinánsok mind eltünjenek.

E tétel, mely az m lineáris alakból álló rendszer viszonyait egész pontosan jellemzi, a megelőzőknek direkt folyománya. Hogy igazságát belássuk, csak azt kell meggondolni, hogy midőn a lineár alakok közül csak k vagy $k+1$-nek összefüggését vizsgáljuk, a fölirt táblázatban is csak a megfelelő k vagy $k+1$ sor lesz tekintetbe veendő.

Ha van egy 0-tól különböző k-adfokú determináns, akkor annak föltétele, hogy minden más alak a k független alak által kifejezhető legyen, az összes $k+1$-edfokú aldeterminánsok eltünése által van adva. Minthogy az m sor és n oszlopból $\binom{m}{k+1}$, ill. $\binom{n}{k+1}$-félekép lehet $k+1$ sort, ill. oszlopot kiválasztani, e föltételek száma eredetileg $\binom{m}{k+1}\binom{n}{k+1}$. *E föltételi egyenletek azonban nem függetlenek egymástól, hanem lehet ezek közül nehányat, számra* *nézve $(m-k)(n-k)$-t kiválasztani, úgy hogy, ha ezek ki vannak elégitve, a többiek szintén ki lesznek elégitve.*

Könnyebb áttekintés végett tegyük föl, hogy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

a 0-tól különböző k-adfokú determináns, a mi ismét a lineár alakok, és ezekben a határozatlanok egymásutánjának kellő megállapítása által mindig elérhető. Megjegyzendő még, hogy ekkor $u_1 \dots u_k$ az egymástól független lineár alakok.

Hogy ekkor u_{k+1} az $u_1 \dots u_k$ által kifejezhető legyen, kell, hogy a

$$\begin{gathered} C_1 a_{11} + C_2 a_{21} + \dots + C_{k+1} a_{k+1,1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 a_{1n} + C_2 a_{2n} + \dots + C_{k+1} a_{k+1,n} = 0, \end{gathered}$$

egyenleteknek legyen egy nem csupán 0-okból álló megoldása.

Az első $k+1$ egyenletnek van ilyen, még pedig ezeknek általános megoldása (mivel egy k-adfokú aldetermináns nem 0):

$$C_1 = \gamma_1 \mu,\ C_2 = \gamma_2 \mu,\ \dots,\ C_{k+1} = \gamma_{k+1} \mu,$$

hol μ tetszőleges és γ_{k+1} nem más, mint az előbb fölirt, el nem tünő k-adfokú determináns. Ebből látni, hogy vagy minden az első $k+1$ egyenletnek eleget tevő megoldás megfelel valamely későbbi egyenletnek, vagy egy sem. Hogy az első esettel legyen dolgunk, kell hogy az első k egyenletből és az r-edik egyenletből (hol $r=k+1,\dots,n$) összeállított rendszer determinánsa 0 legyen. Akkor ugyanis az előbb fölirt megoldások kielégitik mind e rendszereket, vagy más szóval, az n egyenletet. Az igy nyert föltéti egyenletek száma $n-k$.

Hasonlókép vizsgáljuk, vajjon u_{k+2} kifejezhető-e $u_1 \dots u_k$ által. Ekkor az előbbi egyenletek helyébe lép

$$\begin{gathered} C_1 a_{11} + \dots + C_k a_{k1} + C_{k+2} a_{k+2,1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 a_{1n} + \dots + C_k a_{kn} + C_{k+2} a_{k+2,n} = 0, \end{gathered}$$

a mi ismét $n-k$ föltételi egyenletet ád s. ú. t.

Az összes $\binom{m}{k+1}\binom{n}{k+1}$ föltételi egyenletek száma tehát

$(m-k)$ $(n-k)$-*ra redukálható. És ezek* — ha az eredményt mindjárt az u-k és x-ek sorrendjétől függetlenül fejezzük ki — *keletkeznek, ha mindazon* $k+1$*-edfokú determinánsokat teszszük* 0*-sá, melyek egy bizonyos el nem tünő* k*-adfokú determinánst mint aldeterminánst tartalmaznak, azaz ebből egy sor és egy oszlop hozzátoldása által keletkeznek.*

Ama speciális esetben, midőn $u_1 \dots u_{m-1}$ egymástól függetlenek, ama független föltételi egyenletek száma, melyek kifejezik, hogy $u_1 \dots, u_m$ nem független lineár alakok, $n-m+1$ lesz.

A szorzási tétel.

191. Két n-edfokú determinánsból

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots, a_{1j} & \dots a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \dots, a_{ij} & \dots a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots, a_{nj} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ és } B = \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1l} \dots b_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{k1} \dots b_{kl} \dots b_{kn} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_{n1} \dots b_{nl} \dots b_{nn} \end{vmatrix}$$

a sorok összetétele, kompozicziója által uj determinánst képezünk

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} \dots c_{1s} \dots c_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_{r1} \dots c_{rs} \dots c_{rn} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_{n1} \dots c_{ns} \dots c_{nn} \end{vmatrix},$$

ha a c elemeket a következő szabály szerint állítjuk össze az a és b elemekből:

$$c_{rs} = a_{r1} b_{s1} + a_{r2} b_{s2} + \dots + a_{rn} b_{sn}.$$

Ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy c_{rs} *keletkezik, ha az* A r*-edik sorát a* B s*-edik sorával szorozzuk, azaz a megfelelő elemeket szorozzuk, és e szorzatok összegét képezzük.*

Az oszlopok összetétele által keletkezik a C, ha

$$c_{rs} = a_{1r} b_{1s} + a_{2r} b_{2s} + \dots + a_{nr} b_{ns};$$

ekkor c_{rs}, ép ily rövid kifejezésben, az A r-edik oszlopának és a B s-edik oszlopának szorzása által keletkezik.

Az A sorainak és B oszlopainak összetétele által keletkezik a C, ha

$$c_{rs} = a_{r1} b_{1s} + a_{r2} b_{2s} + \ldots + a_{rn} b_{ns},$$

azaz c_{rs} az A r-edik sorának és B s-edik oszlopának szorzata.

Végre az A oszlopainak és B sorainak összetételéből származik a C, ha

$$c_{rs} = a_{1r} b_{s1} + a_{2r} b_{s2} + \ldots + a_{nr} b_{sn},$$

azaz c_{rs} az A r-edik oszlopának es B s-edik sorának szorzata.

A komponált determinánsok e képzése alapvető fontosságú lesz, mert segítségével *két n-edfoku determináns szorzatát ismét n-edfokú determináns alakjában lehet előállítani. Lesz ugyanis:*

$$|a_{ij}|_{(i,j=1\ldots n)} \cdot |b_{kl}|_{(k,l=1\ldots n)} = |c_{rs}|_{(r,s=1\ldots n)},$$

a négy adott mód bármelyike szerint történjék is a c elemeinek összetétele. Különben világos, hogy elég, ha a tételt bebizonyítjuk az összetétel első módjánál. Mert a szorzás előtt az A vagy B determinánsokban, vagy mindkettőben fölcserélhetjük a sorokat az oszlopokkal, és ekkor az első mód szerint a c-k többi alakjait nyerjük. A tétel tehát helyes a c-k mind a négyféle képezési módjánál, ha az elsőnél helyes volt.

A tétel bebizonyitására megjegyezzük mindenekelőtt, hogy a két n-edfoku determináns szorzata közvetetlenül előállitható $2n$-edfokú determináns alakjában.

Ha t. i. a következő négy, egy-egy n-edfokú determinánsnak megfelelő elemcsoportot,

$$\begin{array}{ll} a_{11} \ldots a_{1n} & 0 \ldots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} & 0 \ldots 0 \\ & \\ a_{11} \ldots a_{1n} & b_{11} \ldots b_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} & b_{n1} \ldots b_{nn} \end{array}$$

melyek közül a második csupa 0-okból, a harmadik egészen tetszőleges számokból áll, az a-k és b-k pedig az A és B determináns elemei, az ottani elrendezésben, abban a helyzetben, melyben föl vannak irva, egy $2n$-edfokú determináns elemeinek veszszük, akkor ez az a-k minden értékénél az A és B szorzatával egyenlő, azaz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & 0 \dots 0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & 0 \dots 0 \\ a_{11} \dots a_{1n} & b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots\dots \\ b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vizsgáljuk részletesen a baloldalon álló determináns tagjait. Hogy a 0-tól különböző tagokhoz jussunk, az első n sor elemeinek választásánál ezeket egyszersmind az első n oszlopból kell vennünk, mert a többi oszlopban csupa 0 áll. Tehát azután az $n+1, \dots 2n$-edik sor elemeinek választásánál már csak az $n+1, \dots 2n$-edik oszlop áll rendelkezésünkre, a miből azt is látni, hogy a determinánsnak 0-tól különböző tagjaiban az a-k valóban nem fordulnak elő. Tehát minden ily tag alakja:

$$\varepsilon\, a_{i_1 j_1}\, a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}\, b_{k_1 l_1}\, b_{k_2 l_2} \dots b_{k_n l_n}$$

hol $i_1 \dots i_n$ s. ú. t. a sorrend mellőzésével az $1, 2 \dots n$ sorozattal megegyezik. Az ε előjel az inverziók számából meghatározandó. Ennél tekintetbe veendő, hogy a b_{kl} az $n+k$-adik sorban és $n+l$-edik oszlopban álló elem. Tehát megolvasandó, hogy az

$$i_1 i_2 \dots i_n,\ n+k_1,\ n+k_2, \dots n+k_n \qquad (P_1)$$
$$j_1 j_2 \dots j_n,\ n+l_1,\ n+l_2, \dots n+l_n \qquad (P_2)$$

permutácziókban hány inverzió áll. Legyen ezek száma J_1 és J_2. De $i_1\, i_2 \dots i_n$ a sorrend mellőzésével az $1, 2 \dots n$ sorozattal azonos, és hasonlókép $n+k_1 \dots n+k_n$ az $n+1,\ n+2, \dots 2n$ sorozattal. Tehát az $i_1 \dots i_n$ elemek az $n+k_1 \dots n+k_n$ elemekkel nem képeznek inverziót. Ha tehát az

$$i_1\, i_2 \dots i_n \text{ és } k_1 \dots k_n$$

permutácziókban az inverziók száma J_1' és J_1'' akkor P_1-ben $J_1' + J_1''$. Hasonlóképen ha a

$$j_1 j_2 \dots j_n \text{ és } l_1 \dots l_n$$

permutácziókban az inverziók száma J_2 és J''_2, akkor P_2-ben $J'_1+J''_2$, és így

$$\varepsilon = (-1)^{J'_1+J'_2+J''_1+J''_2}.$$

De az A és B determinánsok kifejezésének egy-egy általános tagja

$$(-1)^{J'_1+J'_2} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_n j_n} \text{ és } (-1)^{J''_1+J''_2} b_{k_1 l_1} \dots b_{k_n l_n}$$

és így e determinánsok szorzatának kifejtése valóban ama $2n$-edfokú determináns tagjait adja, még pedig, mint tüstént látni, mindegyiket, és mindegyiket csak egyszer.

192. Az a-k czélszerű választásánál az A és B szorzatát kifejező $2n$-edfokú determináns azonos átalakítások segítségével a C componált determináns alakjára hozható.*

Legyenek ugyanis a fődiágonálisban álló a-k

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = -1,$$

és a többi $a = 0$.

Akkor a vizsgálandó determináns:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & 0 \dots 0 \\ -1 \dots 0 & b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ 0 \dots -1 & b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Adjuk hozzá

az $n+1$-edik	oszlophoz az 1, 2 ... n-edik			oszlopot,	$b_{11}, b_{12} \dots b_{1n}$-nel	szorozva,
az $n+2$-edik	«	«	«	«	$b_{21}, b_{22} \dots b_{2n}$	« .
. . . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . . . .	. . .
az $n+s$-edik	«	«	«	«	$b_{s1}, b_{s2} \dots b_{sn}$	« .
. . . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . . . .	. . .
a $2n$-edik	«	«	«	«	$b_{n1}, b_{n2} \dots b_{nn}$	« .

* Gordan közleménye Baltzer kézikönyvében, 6-ik §. 8-ik cz.

akkor e determináns lesz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & c_{11} \dots c_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & c_{n1} \dots c_{n} \\ -1 \;\dots 0 & 0 \;\dots 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 \dots -1 & 0 \;\dots 0 \end{vmatrix}.$$

Cseréljük föl itt az 1 és $n+1$, 2 és $n+2$, ... n-edik és $2n$-edik oszlopot, a mi által $(-1)^n$-nel szorzunk, szorozzunk ujból $(-1)^n$-nel az által, hogy az $n+1 \dots 2n$-edik oszlopot -1-el szorozzuk, akkor ismét a determináns eredeti értékét nyerjük. Alakja pedig lesz:

$$\begin{vmatrix} c_{11} \dots c_{1n} & -a_{11}, \dots, -a_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ c_{n1} \dots c_{nn} & -a_{n1}, \dots, -a_{nn} \\ 0 \;\dots 0 & 1 \;, \dots, \; 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 \;\dots 0 & 0 \;, \dots, \; 1 \end{vmatrix};$$

de a megelőző czikk tárgyalásait ujból alkalmazva, ez nem más, mint

$$\begin{vmatrix} c_{11} \dots c_{1n} \\ \dots\dots \\ c_{n1} \dots c_{n} \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} 1 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots 1 \end{vmatrix}$$

szorzata. Az utóbbi determináns értéke 1; és így végre valóban $AB=C$, a mi bebizonyítandó volt.

193. A szorzási tétel alkalmazásának egy különös fontos esete a következő:

Legyen ismét A_{ij} az a_{ij} adjungált aldeterminánsa az $|a_{ij}|$-re vonatkozólag; akkor

$$|a_{ij}| \; |A_{ij}| = |a_{ij}|^n,$$

vagyis:

$$|A_{ij}| = |a_{ij}|^{n-1}.$$

Ebben az esetben ugyanis

$$c_{rs} = a_{r1} A_{s1} + a_{r2} A_{s2} + \dots a_{rn} A_{sn};$$

tehát a determinánsok kifejtésére vonatkozó tételek értelmében

$$c_{rs} = 0 \text{ vagy } |a_{ij}|,$$

a mint $r \gtrless s$ vagy $r = s$. A C determinánsban tehát csak a fődiagonálisban álló elemek különböznek a 0-tól és ezek mindegyikének értéke $|a_{ij}|$, tehát $C = |a_{ij}|^n$.

Álljon itt még néhány más példa

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2 b_1 + a_3 c_1 & a_1 a_2 + a_2 b_2 + a_3 c_2 & a_1 a_3 + a_2 b_3 + a_3 c_3 \\ b_1 a_1 + b_2 b_1 + b_3 c_1 & b_1 a_2 + b_2^2 + b_3 c_2 & b_1 a_3 + b_2 b_3 + b_3 c_3 \\ c_1 a_1 + c_2 b_1 + c_3 c_1 & c_1 a_2 + c_2 b_2 + c_3 c_2 & c_1 a_3 + c_2 b_3 + c_3^2 \end{vmatrix},$$

hol az első esetben sornak sorral, a második esetben sornak oszloppal való összetétele történt.

Az első szorzási alak úgynevezett *szimmetrikus determináns*, azaz az i-edik sor és j-edik oszlopban álló elem egyenlő a j-edik sorban és i-edik oszlopban állóval. Könnyü látni, hogy bármely determináns négyzete, ha sort sorral vagy oszlopot oszloppal teszünk össze, ily szimmetrikus determinánst ád.

Ha a szorzandó determinánsok nem egyenlő fokuak, a kisebb fokút könnyű úgy átalakítani, hogy foka a másikéval megegyezzék. Igy p.

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ p_2 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 0 & 0 \\ p_2 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ s. ú. t.}$$

és e szerint p.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 p_1 + b_1 q_1 & a_1 p_2 + b_1 q_2 & c_1 \\ a_2 p_1 + b_2 q_1 & a_2 p_2 + b_2 q_2 & c_2 \\ a_3 p_1 + b_3 q_1 & a_3 p_2 + b_3 q_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

és általánosan az n-ed és 2-odfokú determinánsok szorzására:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12} & a_{11}a_{21}+a_{12}b_{22} & a_{13} \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{12} & a_{n1}b_{21}+a_{n2}b_{22} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Végre még:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

ha röviden $s_i = a^i + b^i + c^i$.

Lineár átalakítások.

194. Valamely *algebrai alak lineáris átalakítását* végezzük, ha az

$$x_i = b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \dots + b_{in} y_n, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (1.)$$

képletek segítségével, hol $|b_{ij}|$ a 0-tól különböző az $x_1, \dots x_n$ határozatlanok helyébe behozzuk az új $y_1, y_2 \dots y_n$ határozatlanokat.

Ezen átalakításnál az alaknak minden a határozatlanoknak speciális értékeitől független tulajdonsága meg marad őrizve. Ha az x-eket az adott képletek segítségével mint az y-ok lineár alakjait tekintjük, akkor ezek ép úgy fölvehetnek minden tetszőleges értékrendszert, mint mikor közvetlenűl mint határozatlanok szerepelnek. Az (1.) ugyanis mint egyenletrendszer tekinthető, mely, minthogy determinánsa nem 0, az y-oknak egy bizonyos értékrendszerét adja, melynél minden x-nek tetszőlegesen megállapitott értéke lesz. Az x-ek és y-ok e viszonya kölcsönös, mert világos, hogy az y-ok bárhogy megállapitott értékrendszerének megfelel az x-ek egy bizonyos értékrendszere.

Ha az

$$u_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \qquad (2.)$$
$$(i = 1, \dots n)$$

rendszert, n határozatlannak n lineár alakjából álló rendszert, melynek determinánsa $|a_{ij}|$ *a 0-tól különbözik, az* (1.) *képletek segítségével átalakítjuk, akkor az y határozatlanokat tartalmazó lineár alakok rendszere keletkezik:*

$$v_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \ldots + c_{in} y_n, \qquad (3.)$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

melynek determinánsa:

$$|c_{ij}| = |a_{ij}|\,|b_{ij}|,$$

tehát csak akkor 0, *ha* $|a_{ij}| = 0$.

Ez tüstént belátható, ha v_i együtthatóit valóban kiszámítjuk, azaz $u_1, \ldots u_n$-be $x_1 \ldots x_n$ értékeit behelyettesítjük és $y_1 \ldots y_n$ szerint rendezzük. Ekkor valóban

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

és így c_{ij} az $|a_{ij}|$ soraiból és $|b_{ij}|$ oszlopaiból összetett determináns.

E szerint a számítás is mutatja, hogy $u_1 \ldots u_n$ és $v_1 \ldots v_n$ egyidőben független vagy nem független lineár alakok. Hogy általánosabban a $v_1 \ldots v_n$ alakrendszerben ugyanannyi független alak van, mint az $u_1 \ldots u_n$ rendszerben, hogy tovább ha $u_a, u_b, \ldots$ függetlenek egymástól, a megfelelő $v_a, v_b, \ldots$ alakok is függetlenek egymástól, az az összetétel által keletkező determinánsnak következő tulajdonságából foly.

195. *Ha az $|a_{ij}|$ determináns minden k-ad fokú aldeterminánsa 0, és $|b_{ij}|$ a 0-tól különböző, akkor a $|c_{ij}| = |a_{ij}|\,|b_{ij}|$ determinánsának minden k-adfokú aldeterminánsa szintén* 0, *valamint megfordítva a $|c_{ij}|$ összes k-ad fokú aldeterminánsainak eltünéséből ismét következik, hogy az a_{ij} determinánsnak is eltünik minden k-ad fokú aldeterminánsa.*

Ha ugyanis a $|b_{ij}| =$ 0-tól különböző, és az

$$u_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n = k_n \qquad (4.)$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

egyenletrendszertől áttérünk az

$$U_j = b_{j1} u_1 + b_{j2} u_2 + \ldots + b_{jn} u_n = b_{j1} k_1 + \ldots + b_{jn} k_n \qquad (5.)$$
$$(j = 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszerhez, könnyű látni, hogy *a (4.) és (5.) egyenletrendszerek aequivalensek, azaz minden $x_1 \ldots, x_n$ értékrendszer, mely kielégíti a (4)-et, kielégíti az (5.) rendszert is, valamint viszont.*

A tétel első része közvetetlenűl világos, mert ha $u_1 = k_1$ s ú. t. az (5.) egyenletekben a jobb és baloldal azonos lesz. Legyen most megfordítva $x_1 \ldots x_n$ oly értékrendszer, mely az (5.)-öt kielégíti, akkor az értékek, melyeket az u-k fölvesznek, az (5.)-ből kiszámíthatók. Ha itt az u-kat ismeretleneknek tekintjük, az egyenletrendszer determinánsa $|b_{ij}|$ a 0-tól különböző, és így csak egy megoldás létezik, és ez nem más mint $u_1 = k_1$ s ú. t.; azaz a fölvett értékeknél a (4.) egyenletek is ki vannak elégítve.

De ha az (5.) egyenletek baloldalait rendezzük, ezek:

$$U_j = c_{j1} x_1 + c_{j2} x_2 + \ldots + c_{jn} x_n,$$

és ebben:

$$c_{ji} = b_{j1} a_{1i} + b_{j2} a_{2i} + \ldots + b_{jn} a_{ni},$$

azaz az (5.) rendszernek determinánsa az $|a_{ij}|$ és $|b_{ij}|$ összetételénél keletkező determináns. Ha most egyszerűen a k értékeket mind 0-sá teszszük, akkor a (4.) és (5.) egyenletrendszerek mindig megoldhatók, ha $D = 0$, és így a rendszerek határozatlanok, még pedig egyformán határozatlanok tartoznak lenni, azaz a két determinánsban ugyanazon szám jelöli, hogy a hányadfokú aldeterminánsok azok, melyek még mind eltünnek.

Igaz, hogy e következtetésnél tételünk csak akkor van bebizonyítva, ha a $|c_{ij}|$ determináns összetétele *egy* bizonyos módon történt; de világos, hogy a segítségűl vett egyenletrendszerekben az a_{ij} vagy b_{ij} elemek elrendezésében fölcserélhetjük a sorokat az oszlopokkal. Ez által 4 eset keletkezik, melyek mindegyikénél ismételhetni a mostani tárgyalást. A tétel tehát a komponált determináns mind a négy alakjánál helyes.

196. Ha az

$$x_i = b_{i1} y_1 + \ldots + b_{in} y_n \qquad (i = 1 \ldots n)$$

lineár átalakítás képleteiből, mint elsőfokú egyenletrendszerből, az y-okat az x-ek által kifejezzük, az úgynevezett *inverz átalakítás* képleteihez jutunk, melyek

$$y_j = \frac{B_{1j}}{D} x_1 + \frac{B_{2j}}{D} x_2 + \ldots + \frac{B_{nj}}{D} x_n, (j = 1, \ldots n)$$

ha $D = |b_{ij}|$ és B_{ij} a b_{ij} adjungált aldeterminánsa.

Ezen inverz átalakítás determinánsa az eredeti D determináns reciprok értéke. Mert minden sorából kiemelhetjük az $\frac{1}{D}$ tényezőt és ekkor lesz:

$$\frac{1}{D^n}\,|B_{ij}| = \frac{1}{D}.$$

A két inverz átalakítás egymásután való alkalmazása az

$$x_i = x_i$$

képleteket, vagyis az ú. n. *azonos* átalakítást adja.

197. *Ha az*

$$y_i = \gamma_{i1}\,x_1 + \ldots + \gamma_{in}\,x_n \qquad (i = 1, \ldots n)$$

átalakítás együtthatói oly számértékek, hogy

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

akkor az átalakítást orthogonális átalakításnak nevezzük.

Ez úgy értendő, hogy y helyébe mindig az x-ek megfelelő lineár alakját téve, és azután $y_1^2 + \ldots y_n^2$-t a tagjaiban előforduló x-szorzatok szerint rendezve, ez $x_1^2 + \ldots + x_n^2$-et adja.

Az orthogonális átalakítás vizsgálata azért fontos mert valós együtthatók esetében ha $n=2$ vagy 3, és az x-ek, valamint az y-ok derékszögű Descartes-féle koordinátákat jelentenek a síkban, vagy a térben, úgy hogy $x_1 \ldots x_n$, ill. $y_1 \ldots y_n$ egy-egy pont koordinátái, e képletek segítségével leírjuk egy merev pontrendszer tetszőleges forgását a koordináta rendszer kezdőpontja, mint középpont körül, vagy — a mi ugyanaz — e képletek adják a koordináta rendszer forgatásának megfelelő koordináta-átalakítást.

Hogy az átalakítás orthogonális legyen, kell hogy az együtthatók bizonyos föltételeknek eleget tegyenek. Ezeknek kifejtésére valóban kifejezzük $y_1^2 + \ldots + y_n^2$-et az x-ek által. Ekkor $x_r\,x_s$ együtthatója:

$$2\,(\gamma_{1r}\gamma_{1s} + \ldots + \gamma_{nr}\gamma_{ns})$$

hol minden ily együtthatót képezünk, ha r-et az s-nél kisebbnek veszszük, és x_r^2-é:

$$\gamma_{1r}^2 + \gamma_{2r}^2 + \ldots + \gamma_{nr}^2.$$

Hogy tehát az átalakítás orthogonális legyen, arra szükséges és elegendő a következő föltételek sorozata:

$$\begin{aligned} &\gamma_{1r}^2+\ldots+\gamma_{nr}^2=1\,, \quad (r=1\ldots n)\\ &\gamma_{1r}\gamma_{1s}+\ldots+\gamma_{nr}\gamma_{ns}=0, \quad (r<s) \end{aligned} \tag{1.}$$

mert világos, hogy megfordítva, az átalakítás mindig orthogonális, ha e föltételek ki vannak elégítve.

Az orthogonális átalakítás együtthatói tehát nem választhatók *mind* szabadon.

Minden orthogonális átalakítás determinánsa $+1$, *vagy* -1. Tudni illik:

$$|\gamma_{ij}|^2 = |c_{rs}|\,,$$

hol az oszlopok szerinti összetételnél:

$$c_{rs} = \gamma_{1r}\gamma_{1s}+\ldots+\gamma_{nr}\gamma_{ns}\,,$$

tehát (1.) szerint 1 vagy 0, a mint $r=s$, vagy $r \gtrless s$. A $|c_{rs}|$ determinánsban e szerint minden a fődiagonálisban álló elem 1, a többi elem pedig 0, és így $|c_{rs}| = +1$, és így $|\gamma_{ij}|$ vagy $+1$, vagy -1.

Ha ismét a γ-k *orthogonális átalakítás együtthatói és a* $|\gamma_{ij}|$ *determinánsra vonatkozolag* γ_{ij} *adjungált aldeterminánsa* Γ_{ij}, *akkor*

$$\Gamma_{ij} = \varepsilon\,\gamma_{ij}\,,$$

hol $\varepsilon = |\gamma_{ij}|$ *azaz* ± 1.

A következő egyenletrendszernek

$$\gamma_{1r}x_1+\gamma_{2r}x_2+\ldots+\gamma_{nr}x_r=\varepsilon_r$$

$$(r=1\ldots n)$$

hol $\varepsilon_j=\varepsilon$, a többi ε_l pedig 0, l egy tetszőleges a j-től különböző szám az $1\ldots n$ sorozatból, csak egy megoldása van, mert determinánsa nem 0. Az aldeterminánsok alaptulajdonságai szerint (181. cz.)

$$x_1=\varepsilon\,\Gamma_{1j}\,,\ x_2=\varepsilon\,\Gamma_{2j}\,,\ldots\, x_n=\varepsilon\,\Gamma_{nj}$$

megoldása a rendszernek; az (1.) egyenletek szerint pedig

$$x_1=\gamma_{1j}\,,\ x_2=\gamma_{2j}\,,\ldots\, x_n=\gamma_{nj}$$

szintén megoldás. Minthogy pedig csak egy megoldás van, a kettőnek meg kell egyeznie, azaz

$$\varepsilon\,\Gamma_{ij}=\gamma_{ij}\,,$$

vagy minthogy ε a pozitiv vagy negativ egység, ε-nal szorozva:

$$\Gamma_{ij}=\varepsilon\,\gamma_{ij}\,.$$

Az egy sorban álló elemeknek megfelelő aldeterminánsok közt a következő egyenletek állanak fönn:

$$\gamma_{r1} \Gamma_{r1} + \gamma_{r2} \Gamma_{r2} + \ldots + \gamma_{rn} \Gamma_{rn} = \varepsilon,$$
$$\gamma_{r1} \Gamma_{s1} + \gamma_{r2} \Gamma_{s2} + \ldots + \Gamma_{rn} \Gamma_{sn} = 0, \ (r \gtrless s),$$

melyek ha a Γ-k előbb nyert értékeit bevezetjük, átmennek a következő egyenletekbe:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{r1}^2 + \gamma_{r2}^2 + \ldots + \gamma_{rn}^2 &= 1, \\ \gamma_{r1}\gamma_{s1} + \gamma_{r2}\gamma_{s2} + \ldots + \gamma_{rn}\gamma_{sn} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (2.)$$

mely az (1.)-hez analóg, és *az orthogonális átalakítás együtthatói közt fönnálló identitások második rendszere.*

A (2.)-ben foglalt eredményt még következőkép is lehet kifejezni:

Bármely orthogonális átalakításnak

$$y_i = \gamma_{i1} x_1 + \gamma_{i2} x_2 + \ldots + \gamma_{in} x_n \qquad (a)$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

inverz átalakítása a következő alakú:

$$x_j = \gamma_{1j} y_1 + \gamma_{2j} y_2 + \ldots + \gamma_{nj} y_n \qquad (b)$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

és ismét orthogonális átalakítás.

A 196. cz. értelmében ugyanis az inverz átalakítás együtthatói:

$$\gamma'_{ji} = \frac{\Gamma_{ij}}{D} = \gamma_{ij}.$$

Az így keletkező átalakítás együtthatói a

$$\begin{matrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{matrix}$$

táblázatból az által keletkeznek, hogy minden egyes γ_{ij} elemének két mutatóját egymással fölcseréljük. De ez által az (1.) egyenletek baloldalai átmennek a (2.) egyenletek baloldalaiba, és így amaz egyenletek az új átalakítás együtthatóira is érvényesek maradnak; e szerint a (b.) képletek által adott átalakítás szintén orthogonális.

MÁSODIK RÉSZ.

ELEMI FÜGGVÉNYTAN.

Míg a *számtan* meghatározott számok tulajdonságait vizsgálja, addig a *függvénytan* a számok változásának törvényeivel foglalkozik, különösen midőn valamely szám változási módja egy vagy több más szám változásától függ.

E tárgyalásoknál két különböző esettel van dolgunk, a mint az előforduló számoknak *csupán valós* vagy *complex* értékeket is tulajdonítunk. Tekintettel arra, hogy az $a + bi$ szám tulajdonságai mint az a, b valós számpár tulajdonságai értelmezhetők, a két eset között fönnálló különbség tulajdonképen csak ama valós számoknak, melyeknek kapcsolatát vizsgáljuk, számában rejlik, és az egész analizis mint valós számok analizise volna előadható. A modern analizis azonban a complex számok segédeszközét — mert ezek csak ilyennek tekintendők — mindenütt alkalmazza; segítségével ugyanis, a mire eddig is számos példával találkoztunk, általános és egyszerűen áttekinthető törvényekhez emelkedünk ott, hol különben bonyodalmas és kivételeknek alávetett viszonyokat kellene leirnunk.

Természetes azonban, hogy e módszertani segédeszköz csak egy bizonyos határig lesz alkalmazható és ezentúl vagy a complex számok, azaz valós számpárok oly tulajdonságaival kell foglalkoznunk, melyek az egyes valós számok vizsgálatánál nem találnak analog esetre, vagy pedig megfordítva a valós számok oly speciális viszonyait kell elemeznünk, melyeknek számpárokra való általánosítása nem lehetséges.

E szerint a függvénytannak most előadandó és *legegyszerűbb* része azon tárgyalásokat foglalja magában, melyekben az előforduló számok akár csak valósak, akár tetszőleges complex számok lehetnek. *E részben tehát minden egyes tételnek, kivéve a hol egyes alkalmazásoknál az ellenkezőt külön megállapítjuk, kettős értelme lesz,* *a mint az előforduló számoknak kizárólag valós, vagy pedig complex értékeket is tulajdonítunk.**

Később majd tudományunk rendszeres kifejtésében külön kell majd foglalkoznunk a valós és complex számok függvényeinek elméletével.

* Ezt úgy lehet kifejeznünk, hogy mindenütt, a hol a «szám» szót használjuk, ennek helyébe a «valós szám» vagy «complex szám» kifejezést lehet tenni, a mi által két parallel tételt nyerünk, a mi itt egyszer mindenkorra meg legyen jegyezve.

ELSŐ SZAKASZ.

A FÜGGVÉNYTAN ALAPFOGALMAI.

I.

Számok és értékrendszerek tartományai.

Számtartományok.

1. Ha a (valós vagy complex) számok összességéből bármily módon bizonyos számokat kiválasztunk, e számok együttesen ú. n. *számtartományt* alkotnak. Így jutunk p. az egész számok, a raczionális, az algebrai számok tartományához, valamint a valós vagy complex számok tartományához, mely utóbbi minden más tartományt, mint részt magában foglal.

Minden az illető tartományba tartozó szám e tartománynak egy-egy *helyét* (pontját) alkotja.

Általában, ha az A tartomány minden száma a B tartományban bennfoglaltatik, akkor *A a B-nek része.*

Minden tartomány, mely a valós számok tartományának része, *valós tartomány*; *complex tartomány*, ha complex számokat is tartalmaz.

*Az a szám környezeté*nek nevezzük azon x számok összességét, melyekre nézve

$$|x-a|<\delta,$$

hol δ egy tetszőlegesen választott, pozitiv szám, vagy ∞, a mely utóbbi esetben az $|x-a|<\infty$ egyszerűen annyit jelentsen, hogy $x-a$ absolut értéke csak egy tetszőleges nagynak választott pozitiv számnál tartozik kisebb lenni, azaz tetszőlegesen választható.

Midőn az a szám környezetéről beszélünk, akkor többnyire a δ értéke nincs megadva, hanem csak annyi van föltételezve, hogy a δ-nak egy pozitiv értéke (nem 0), vagy a ∞ jel e környezetet teljesen meghatározza.

Igy mondjuk p., hogy a $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$ sor, ha lim. $a_n = 0$, összetartó az x minden oly értékénél, mely a 0 környezetében fekszik, mert tudjuk (I. r. 116. cz.), hogy e sor összetartó, ha $|x| < 1$. (Az a itt zérus.) De lehetséges, hogy a δ-t a sor együtthatóinak ismerete után 1-nél nagyobbnak is vehetjük. Hasonlókép mondjuk, hogy az $\frac{1}{2}$ környezetében fekvő számoknak absolut értéke 1-nél kisebb, s ú. t.

Hogy *minden számnak, mely az a környezetében fekszik, egy bizonyos tulajdonsága van,* e szerint annyit jelent, hogy lehet egy pozitiv δ számot meghatározni ugy, hogy e tulajdonság fönnáll az x számra nézve, ha $|x - a| < \delta$. Hogy e tulajdonság fönnáll még akkor is, ha $\delta = \infty$, ismét annyit jelent, hogy e tulajdonság minden x-nél megvan.

A 0 környezete e szerint mindazon számokat jelenti, melyeknek absolut értéke egy bizonyos, különben tetszőlegesen választott (tetszőleges kicsiny) pozitiv számnál kisebb. Czélszerű, ha hasonló módon összefoglalhatjuk mindazon számokat, melyeknek absolut értéke egy bizonyos, különben tetszőlegesen választott (tetszőleges nagy) számnál nagyobb. E számokról röviden azt mondjuk, hogy a ∞ *környezetét* alkotják, a mit következőkép irhatunk:

$$|x - \infty| < \delta,$$

hol δ egy tetszőleges kis számot jelent, ha t. i. az eddigiekben le nem foglalt $x - \infty$ jelt ekkép értelmezzük: *

$$x - \infty = \frac{1}{x};$$

ezután ama föltétel egyszerűen annyit jelent, hogy

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \delta, \quad |x| > \omega,$$

hol ω ismét tetszőleges (nagy) szám.

* Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionenlehre. pag. 1.— Ezen alapvető értekezések, melyeknek a mai függvénytan nemcsak annyi nagyfontosságú eredményt, hanem alapfogalmainak szigorú kifejtését is köszöni, ez értelemben legyenek itt egyszer mindenkorra idézve.

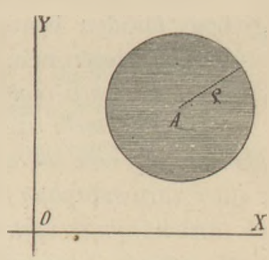
E megállapitások úgy is fogalmazhatók, hogy a számok összességéből álló számtartomány helyeihez még hozzácsatoljuk (adjungáljuk) mint új helyet a ∞-t, melynek azonban nem felel meg szám. Míg a többi hely (szám) megadja környezetét, ezen új (kivételes) hely csak környezetéből van megadva és szigorúan véve nem is más, mint azon számok képzelt — ideális — képviselője, melyeknek absolut értéke egy tetszőleges nagy pozitiv számnál, ω-nál is nagyobb.

Ezután valamely tartomány helyeihez tartozhatik még esetleg a ∞ is.

2. Minthogy a valós számok összessége egy egyenes, a complex számoké pedig egy sík pontjai által ábrázolható, minden számtartomány képét készíthetjük a pontok egy bizonyos sokaságában, melyek mind egy egyenesen, vagy mind egy síkban feküsznek. E geometriai ábrázolás az előforduló viszonyokat igen találóan jellemzi és azért fontos, mert az elvont tárgyalásnak úgy menetét, mint eredményét könnyebben áttekinthető alakban érzékíti.

4. ábra.

Így p. az $|x-a|<\rho$ és $|x-a|\leq\rho$ föltétel által meghatározott számoknak a valós számok körében megfelelnek az $R'R$ vonaldarab pontjai, még pedig az első esetben az R és R' kivételével, a második esetben e pontok hozzá csatolásával, ha ugyanis az a-nak megfelelő pont A és az $R'A$ és AR hosszak közös mérőszáma ρ. (4. ábra).

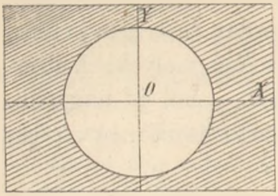


5. ábra.

Hasonlóképen megfelelnek a complex számok körében az $|x-a|<\rho$ föltétel által meghatározott számoknak azon pontok, melyek egy bizonyos kör belsejében feküsznek, ha e kör középpontja az a-nak megfelelő A pont és e kör sugarának hossza ρ. (5. ábra.)

Az $|x-a|\leq\rho$ által meghatározott számtartománynak épen úgy megfelelnek az e kör belsejében és kerületén fekvő pontok.

Az $|x - \infty| < 1$, vagy a mi ugyanaz, az $|x| > 1$ föltétel által meghatározott számtartománynak megfelelnek a valós, illetőleg complex számok körében mindazon pontok, melyeknek távolsága az O ponttól 1-nél nem kisebb.



6. ábra.

A ∞ (kivételes) helynek megfelelő képét találja az egyenesnek «végtelen távol» pontjában, mely szigorúan véve szintén nem tekinthető valóban létezőnek. — A complex számok összességének és a sík pontjainak fölfogása e tekintetben nem azonos, a számoknál egy ∞ helyet veszünk föl, míg a geometria a síknak végtelen távolban fekvő egyeneséről beszél. Az eltérés természetesen csak a bevezetett különböző megállapítások következménye és szükségessé teszi majd később azt, hogy a complex számoknak ábrázolására ne a síkot, hanem a mi ép oly jogosúlt, de jellemzőbb, a gömböt használjuk.

3. A valamely számtartományba tartozó helyek száma lehet véges és meghatározott, vagy határtalan nagy. Az első esetben egyszerűen fölsorolhatjuk az összes, benne foglalt helyeket és evvel természetesen teljesen jellemeztük az illető tartományt. Részletesebb vizsgálatot tehát csak azon eset kíván, mikor a tartományban foglalt helyek száma határtalan.

Valamely tartomány véges, ha van egy bizonyos pozitiv szám G, úgy hogy minden benne foglalt helyre nézve $|x| < G$; ekkor a ∞ hely természetesen nem tartozik a tartományba. Minden más esetben *a tartomány a végtelenbe terjed.*

Ha valamely számtartomány végtelen sok helyet tartalmaz, akkor mindig van egy a hely, (mely azonban nem foglaltatik mindig az illető tartományban) úgy, hogy a-nak tetszőleges kis környezete is a tartománynak végtelen sok helyét tartalmazza. Azaz bármicsoda pozitiv szám is δ, végtelen sok helye van a tartománynak, mely az $|x - a| < \delta$ föltételt kielégíti. Az a hely természetesen lehet a ∞ is. Ha először is, bármicsoda (nagy) pozitiv szám is ω, mindig végtelen sok szám van a tartományban, melyre nézve $|x| > \omega$, azaz előbbi jelzésünk értelmében $|x - \infty| < \frac{1}{\omega}$, akkor a ∞-ben megvan az állított sajátság és a tétel helyes. Az ellenkező esetben lehet egy bizonyos pozitiv számot G_1-et meghatározni, úgy hogy a tartomány ama számai, melyekre nézve $|x| \geq G_1$ csak véges számmal vannak; ha e néhány szám absolut értéke $G', G'', \ldots G^{(n)}$ és péld. G mindezeknél nagyobb pozitiv egész szám, akkor a vizsgált tartomány minden számára nézve $|x| < G$.

Ha először is csupán *valós* számokkal van dolgunk, a tartomány számai mind $-G$ és G közt feküsznek; egy tetszőlegesen választott, 1-nél nagyobb pozitiv egész szám, X segitségével tehát a tartomány számai különböző osztályokba sorozhatók a szerint, a mint a

$$-G+\frac{1}{X}, -G+\frac{2}{X}, \ldots, -G+\frac{2GX-1}{X}$$

sorozatnak egy bizonyos száma az első, mely az illető számnál nagyobb. Az osztályok száma $2\,GX-1$, tehát legalább is *egy* osztály a tartomány végtelen sok számát tartalmazza, melyre nézve tehát:

$$\frac{K_1}{X} \leq x < \frac{K_1+1}{X}.$$

Többször használt eljárás ismétlésével (l. péld. a 83. lapot) az így nyert számokból megint kiválasztjuk azokat, melyekre nézve

$$\frac{K_2}{X^2} \leq x < \frac{K_2+1}{X^2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{K_n}{X^n} \leq x < \frac{K_n+1}{X^n};$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

és a számtartománynak ama számai, melyek e föltételeknek megfelelnek, bármely nagy n-nél végtelen nagy számmal vannak. E mellett $\frac{K_n}{X^n}$ soha nem kisebbedő, $\frac{K_n+1}{X^n}$ soha nem nagyobbodó számok sorozatát adja. Így tehát:

$$\lim.\frac{K_n}{X^n} = \lim.\frac{K_n+1}{X^n} = a$$

véges meghatározott szám, melynek a tételben adott tulajdonsága van. Mert ha n-et oly nagynak veszük, hogy:

$$\frac{K_n+1}{X^n} - \frac{K_n}{X^n} < \delta,$$

hol δ tetszőleges, akkor minden a $\frac{K_n}{X^n}$ és $\frac{K_n+1}{X^n}$ közt fekvő számértékre nézve, minthogy a ugyancsak e két határ közt fekszik,

$$|x-a|<\delta,$$

de más oldalról számtartományunknak ama határok közt végtelen sok száma foglaltatik, tehát az a-nak tetszőleges kis környezetére nézve ugyanez áll.

Az áttérés complex számtartományokra most már nagyon egyszerű. Ha ugyanis a tartományban foglalt számok alakja $u+vi$, akkor lehet először köztük végtelen sok szám, melyben v ugyanaz, péld. $=f$. Az e számokban előforduló valós részekre nézve létezik tehát egy e szám, úgy hogy, bármily kicsiny is δ, végtelen sok u van melyre nézve

$$|u-e|<\delta.$$

Ha tehát $x=e+fi$, akkor az e föltételnek megfelelő u-val képezett végtelen sok $u+fi$ számra nézve

$$|(u+fi)-(e+fi)|<\delta.$$

Ha ugyanazon v-vel csak véges számmal vannak $u+vi$ számok az illető tartományban, akkor a föllépő v-k száma végtelen nagy; különben az egész tartomány számai sem volnának végtelen nagy számmal. Van tehát egy f szám, úgy hogy a

$$|v-f|<\tfrac{1}{2}\delta$$

föltételnek, a δ bármily kis értékénél, végtelen sok v tesz még eleget. Ha csak azon számokat tekintjük, melyekben v-t ezen értékek közül választottuk, akkor a megfelelő u-k száma vagy véges, vagy végtelen. Az első esetben egy bizonyos u-nak, legyen ez péld. e végtelen sok v felel meg és e végtelen sok számra nézve

$$|(e+vi)-(e+fi)|<\tfrac{1}{2}\delta.$$

Ha végre az u-k száma végtelen, akkor van egy e szám, úgy hogy az

$$|u-e|<\tfrac{1}{2}\delta$$

által meghatározott u-k száma is még végtelen. Tehát végtelen sok, szám van, melyekre nézve

$$|u-e|<\tfrac{1}{2}\delta, \quad (v-f)<\tfrac{1}{2}\delta,$$

és így tehát

$$|(u+vi)-(e+fi)|<\delta.$$

Azaz $e+fi$ minden egyes esetben a tétel értelmében meghatározott hely.

Igy péld. az $\frac{1}{n}$ alakú számokból álló tartományra nézve, ha n a 0-tól különböző egész számot jelent, ily hely a 0; hasonlókép az $m+ni$ számtartományra nézve, ha m és n tetszőleges egész számok, a ∞. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ szabályos számsorozat, az a_n számtartományra nézve csak egy ily hely van és ez nem más, mint $A=\lim. a_n$.

4. *A valamely véges valós tartományban foglalt számok* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{fölső}}{\textit{alsó}}$ *határa alatt az oly számot értjük, melynél a tartomány egy száma sem* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{nagyobb,}}{\textit{kisebb,}}$ *de úgy, hogy ha* δ *tetszőleges pozitiv szám és* G *e határ, mindig van a tartományban oly* x *szám, melyre nézve* $|x-G|<\delta$.

Ha a tartományba tartozó számok véges számmal vannak, e határ nem más mint az illető számok legnagyobbika, illetőleg legkisebbike, a mikor épen $|G-G|<\delta$. Ha azonban az illető tartomány végtelen sok számot foglal magában, akkor e számok közt nincs szükségkép legnagyobb vagy legkisebb. Ily tartomány péld. az, mely a pozitiv valódi törtek összességéből áll. Ezek közt nincs legkisebb vagy legnagyobb, mert bármelyik t-nél kisebb a $\frac{1}{2}t$ és nagyobb a $t+\frac{1}{2}(1-t)$, mely számok pedig ismét pozitiv valódi törtek.

Ebben az esetben a fölső, illetőleg alsó határ létezése külön kimutatandó.

Ha X egy meghatározott 1-nél nagyobb egész szám, akkor mindig lehet egy és csak egy K_n egész számot meghatározni, hogy az illető tartományban van még a

$$\frac{K_n}{X^n} \leq x < \frac{K_n+1}{X^n}$$

föltételnek megfelelő szám, ellenben a $\frac{K_n+1}{X^n}$-nél nem kisebb szám már nincsen.

Ha n egymásután következő egész számú értékeinek megfelelőleg meghatározzuk a K_n számokat, akkor ismét $\frac{K_n}{X^n}$ soha nem kisebbedő, $\frac{K_n+1}{X^n}$ soha nem nagyobbodó számok sorát adja, melyek közül az elsők e mellett $\frac{K_1+1}{X}$-nél kisebbek, az utóbbiak $\frac{K_1}{X}$-nél nagyobbak maradnak. Tehát

$$\lim. \frac{K_n}{X^n} = \lim. \frac{K_n+1}{X^n} = G$$

véges, meghatározott szám, még pedig az illető tartománynak fölső határa.

Mert, ha $g > G$, mindig lehet n-et oly nagynak venni, hogy

$$\frac{K_n+1}{X^n} < g,$$

tehát g nem lehet a tartományba tartozó szám. Ellenben $\frac{K_n}{X^n}$ és $\frac{K_n+1}{X^n}$ közt és így tehát G-hez tetszőleges közel mindig van a tartománynak legalább is egy száma.

Az alsó határt vagy teljesen analog eljárás adja, vagy pedig úgy képezhetjük ezt, hogy a tartomány összes számait ellenkező előjellel látjuk el és e számok fölső határát veszszük. Legyen ez $-H$, akkor mindig $-x < -H$, azaz $x > H$; és van egy $-x$ szám, úgy hogy

$$|-x + H| < \delta,$$

azaz van egy x szám úgy, hogy $|x - H|$ tetszőleges kicsiny.

Complex számtartományra vonatkozólag ebből még közvetetlenül foly a következő tétel:

Minden véges tartományra nézve létezik egy pozitiv G szám, úgy hogy minden a tartományba tartozó x számra nézve:

$$|x| < G,$$

még pedig, ha nincs oly szám, melyre nézve $|x| = G$, akkor mindenesetre van olyan, melyre nézve, bármicsoda pozitiv szám is δ,

$$G - |x| < \delta.$$

Hogy a tétel helyességét belássuk, nem szükséges más, mint az adott számok absolut értékeiből képezett tartományra alkalmazni az előbb levezetett eredményt.

Folytonos számtartományok.

5. *Az $x = a$ hely az A tartományon belül fekszik,* (a tartomány *belső* helye), ha nemcsak az a maga, hanem minden ezen a környezetéhez tartozó hely is bennfoglaltatik az A tartományban.

Az $x = a$ hely az A tartományon kívül fekszik, (a tartomány *külső* helye), ha sem a, sem az a környezetébe tartozó helyek nem foglaltatnak az A tartományban.

Minden más esetben az a hely az A tartomány *határhelye,* akár különben bennfoglaltatik e tartományban, akár nem; *közönséges határhelye,* ha az a bármily kicsinyre vett környezetében is vannak oly helyek, melyek az illető tartományon belül feküsznek.

Ha a közönséges határhely, akkor lehet, bármicsoda pozitiv szám is δ_n, oly a tartományon belül fekvő a_n helyet találni, hogy

$$|a - a_n| < \delta_n.$$

Ha tehát a δ-kat úgy választjuk, hogy $\lim. \delta_n = 0$, akkor:

$$\lim. a_n = a.$$

Itt kizárólag oly tartományokat vizsgálunk, melyeknek minden helye vagy a tartományon belül fekszik vagy e tartománynak közönséges határhelye.

Az ily tartomány *folytonos, vagy continuumot alkot,* ha minden a tartományhoz tartozó hely a tartományon belül fekszik és ha továbbá a és b a tartománynak két tetszőleges, a ∞-től különböző helye lévén, lehet a

$$c_1, c_2 \ldots c_n$$

szintén a tartományba tartozó helyek oly sorozatát meghatározni, hogy az

$$a + \vartheta(c_1 - a), \quad c_1 + \vartheta(c_2 - c_1), \ldots, c_n + \vartheta(b - c_n)$$

által meghatározott helyek a ϑ-nak minden 0 és 1 közt fekvő értékénel szintén a tartományhoz tartoznak.* Az a-tól a b-hez ekkor a tar-

* Igy péld az $|x - a| = R$ által meghatározott tartomány, noha complex számok esetében végtelen sok helyet tartalmaz, nem tartozik a most értelmezett tartományok sorába, mert egyáltalában belső helyet nem tartalmaz. Az ily tartományokra a continuum értelmezése még általánosítandó lesz. A folytonos tartomány, a mint azt a szövegben értelmeztük ezen általánosítás után «a (valós vagy complex) számok összességével egyenlő méretű» folytonos tartomány lesz.

tományon belül *folytonos átmenet* lehetséges és természetesen ekkor egyszersmind van folytonos átmenet a b-től az a-hoz. A folytonos átmenet ekkor az $ac_1 \dots c_n b$ *úton* történik.

Az $a + \vartheta (c_1 - a)$ alakú számoknak megfelelnek azon pontok, melyek az a és c_1-nek megfelelő A és C_1 pontokon keresztűl vont egyenesen az A és C_1 végpontok között feküsznek. E számok összességét röviden az ac_1 *számköz*-nek, *intervallum*-nak nevezzük, a geometriai ábrázolásban e számköznek megfelel az AC_1 vonaldarab. Az $ac_1, c_1 c_2, \dots, c_n b$ számközök összességét az $ac_1 c_2 \dots c_n b$ jellemzi, melynek geometriai képviselője az $AC_1 \dots C_n B$ tört vonal.

A (valós vagy complex) számok összessége a legegyszerűbben értelmezett folytonos számtartomány.

A valós, illetőleg complex számokból képezett folytonos tartománynak megfelel az egyenes, vagy a síknak *összefüggő* része, a határpontok kizárásával.

Valamely folytonos tartomány meghatározza mindig közönséges határhelyeit is, azaz azon helyeket, melyeknek tetszőleges kis környezetében vannak még a folytonos tartomány helyei.

Ha valamely tartomány egy folytonos tartomány összes helyeit és ezeken kívül legfölebb még e folytonos tartományhoz tartozó közönséges határhelyeket tartalmaz, a tartományt *összefüggő*-nek nevezzük. Az összefüggő tartományt geometriailag ismét az egyenes, vagy a sík összefüggő része ábrázolja, de a melyhez most a határpontok részben vagy összességükben hozzátartozhatnak. Magától érthető, hogy minden folytonos tartomány összefüggő is.

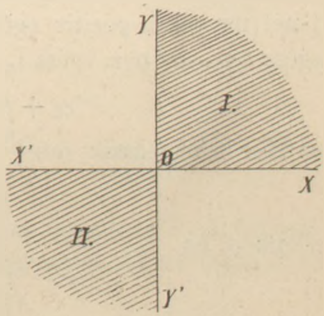
Így p. az $|x-a| < R$, $|x-a| > R$ által meghatározott tartományok *folytonosak*, az $|x - a| \leq R$, $|x-a| \geq R$ által meghatározottak *összefüggők*.

6. Az oly tartományból, melynek minden helye a tartományon belül fekszik, mindig lehet egy folytonos részt kiválasztani. Ha ugyanis a_1 egy tetszőleges helye, a tartománynak mindazon helyei, melyekből az a_1-be folytonos átmenetet lehet eszközölni, az a_1-gyel együtt folytonos tartományt alkotnak. Ily helyek mindig vannak, mert a_1-gyel együtt minden szám x, melyre nézve $|x-a_1|$ kisebb egy bizonyos meghatározott r-nél, a tartományba tartozik és x ből folytonos átmenet lehetséges az a_1-be az $a_1 x$ úton. Az is világos, hogy minden ily módon értelmezett c-vel együtt, a c egész környezete is az értelmezett tartományba tartozik, ez tehát folytonos. Ha az így nyert A_1 tartomány nem foglalja magában az eredetileg adott tartomány minden helyét, akkor az A_1-be nem tartozó helyek közül veszünk ismét egy a_2-t és ebből ép úgy jutunk folytonos tartományhoz, mint a_1-ből. És úgy tovább, azaz:

Minden csupán belső helyekből álló tartomány fölbontható folytonos darabokra, a hol azonban a darabok száma esetleg határtalan.

A belső helyekből és közönséges határhelyekből álló tartományt szintúgy felbonthatjuk részekre, ha e fölosztást először csupán a belső helyekre vonatkozólag végezzük és a határhelyeket az A_1, A_2... részekhez csatoljuk, úgy hogy a határhely tetszőleges kis környezetében legyenek az A_1, A_2... helyei. A közönséges határhely értelmezéséből világos, hogy mindig van legalább egy ily rész, de lehet esetleg több is. Világos, hogy minden ily rész összefüggő; így tehát *minden a kezdetben bevezetett megszorításnak megfelelő tartomány fölbontható összefüggő darabokra*, melyeknek száma esetleg határtalan. E darabok vagy teljesen különváltak, ha közös határhelyük sincsen, mig ha ilyen van, *határhelyekben összefüggnek.*

Így p. a valós számok a 0 kizárása után két folytonos tartományt alkotnak, melyek közül az egyik a pozitiv, a másik a negativ számokat foglalja magában.



7. ábra.

Azon complex számok $(u+vi)$ tartománya, melyekben $uv>0$, két folytonos darabból áll. A geometriai ábrázolásban e tartományok (I.) és (II.) határhelyei az OX és OY, ill. OX' és OY' pontjainak megfelelnek.

Azon complex számok tartománya, melyekre nézve $uv \geqq 0$, két a 0 határhelyben összefüggő darabból áll.

7. A $k_1 k_2 \ldots k_n$ által jellemzett számoknak e jelzésnél egy bizonyos, meghatározott egymásutánjuk is adva van. Két szám közül az egyik megelőzi vagy követi a másikat, a mint a $k_i k_{i+1}$ és $k_j k_{j+1}$ számközökre nézve, a melyekben bennfoglaltatnak, $i<j$ vagy $i>j$;

ha pedig a számköz, melyben előfordulnak, ugyanaz péld. $k_i k_{i+1}$ a mint $k_i + \vartheta_1(k_{i+1} - k_i)$ és $k_i + \vartheta_2(k_{i+1} - k_i)$ alakjukban $\vartheta_1 < \vartheta_2$ vagy pedig $\vartheta_1 > \vartheta_2$.

Ugyanabban a számközben ugyanaz a szám nem fordulhat elő kétszer; ha pedig különböző számközökben ugyanaz a szám újból előfordúl, annyiszor külön egyénnek tekintendő, a hányszor föllép. (A geometriai ábrázolásnál, ha a tört vonal maga-magát metszi, az illető pont, hol ez történik, többszörös pontnak veendő).

Ha a az A tartomány belsejében fekvő hely, az $\bar{a}$ pedig nem, akkor az $ac_1 \ldots c_\nu \bar{a}$ úton mindig találni egy h helyet, mely az A közönséges határhelye, míg a megelőző helyek még mind az A tartományon belül feküsznek; bármikép választottuk is a $c_1 c_2 \ldots c_\nu$ helyeket.

Legyen $c_k c_{k+1}$ az első számköz amaz $ac_1 \ldots c_\nu \bar{a}$ úton, melyen nem tartozik minden hely az A belsejébe; ha előbb nincs, az utolsó $c_\nu \bar{a}$ mindenesetre ilyen. Ekkor c_k még mindenesetre az A-n belül fekszik, különben már a $c_{k-1} c_k$ számközben is már van egy hely, c_k, mely nem fekszik A belsejében. Most pedig X alatt valamely 1-nél nagyobb, pozitiv egész számot értve, lehet minden pozitiv egész n-re egy poz. egész l_n-et meghatározni, úgy hogy

$$c_k + \vartheta\,(c_{k+1} - c_k)$$

az A-n belül fekszik, míg:

$$0 \leqq \vartheta < \frac{l_n}{X^n};$$

ellenben, ha

$$0 < \frac{l_n}{X^n} \leqq \vartheta < \frac{l_n + 1}{X^n} \leqq 1$$

e számok közt legalább egy van, mely nem fekszik A-n belül.

A $\frac{l_n}{X^n}$ alakú számok az n növekedésével soha nem kisebbednek, de 1-nél kisebbek maradnak; van tehát véges és meghatározott határértékük, és a $c_k c_{k+1}$ számközhöz tartozó

$$h = c_k + \left(\lim. \frac{l_n}{X^n}\right)(c_{k+1} - c_k)$$

hely az A közönséges határhelye, mert tetszőleges kis környezetében vannak oly helyek, melyek nem az A tartomány belső helyei és másrészt minden az adott úton előtte fekvő hely, az A belső helye.

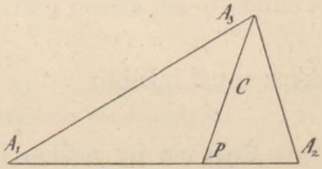
E tételnek egy egyszerű következménye, hogy *a valós számok körében csak a következő folytonos tartományok lehetségesek: a valós számok összessége, az α-nál nagyobb vagy az α-nál kisebb számok tartománya, vagy végre az α-nál nagyobb, de β-nál kisebb számok tartománya, hol az α tetszőleges szám és $\beta > \alpha$.*

Ha ugyanis a a folytonosnak föltételezett tartomány egyik helye és nem tartozik e tartományba minden az a-nál nagyobb szám, akkor az előbbiek szerint van az a-nál nagyobb számok közt egy első, β, mely nem tartozik a tartományba, míg minden a és β közt fekvő szám e tartomány egyik helye. Hasonlóképen jutunk az α számhoz, ha csak nem tartozik e tartományba minden az a-nál kisebb szám.

Complex számtartományok.

8. A complex számok összességéből kiválasztható folytonos tartományok közül különös figyelmet érdemel az, melynek geometriai ábrázolásban *az egy tetszőleges háromszögön belül fekvő pontok* felelnek meg. Legyen ugyanis a_1, a_2, a_3 három oly szám, hogy az

$$a_3 = a_1 + \vartheta(a_2 - a_1)$$



8. ábra.

egyenletből meghatározott ϑ nem valós. Akkor (lásd a 90. czikket) az A_3 nem fekszik az $A_1 A_2$ egyenesen és A_1, A_2, A_3 valóban háromszöget alkotnak. Akkor továbbá az

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3$$

számok, hol az ε-ok pozitiv és 1-nél kisebb számok, melyeknek öszszege egy, folytonos tartományt alkotnak, melynek minden egyes helye (a szó geometriai értelmében) a háromszögön belül fekvő pontot jellemez.

A mi először az utóbbi állítást illeti, a háromszög «belső» pontjához jutunk, ha az $A_1 A_2$ vonaldarabokon fekvő pontok egyikét, P-t összekötjük A_3-mal, akkor minden A_3 és P közt fekvő pontja az $A_3 P$ vonaldarabnak a háromszög belső pontja. Egy az A_1 A_2 vonaldarabon fekvő pontnak megfelel minden

$$a_1 + \vartheta(a_2 - a_1)$$

alakú szám, ha ϑ pozitiv és 1-nél kisebb; ha η is ily szám, minden a háromszögön belül fekvő pontnak megfelel egy

$$a_1 + \vartheta(a_2 - a_1) + \eta[a_3 - a_1 - \vartheta(a_2 - a_1)] =$$
$$= (1 - \vartheta)(1 - \eta)a_1 + \vartheta(1 - \eta)a_2 + \eta a_3$$

alakú szám, hol az a-k együtthatóinak összege valóban egy és az

$$\varepsilon_1 = (1 - \vartheta)(1 - \eta),$$
$$\varepsilon_2 = \vartheta(1 - \eta),$$
$$\varepsilon_3 = \eta$$

egyenletek, minthogy $1 - \vartheta$ és $1 - \eta$ is pozitiv és 1-nél kisebb, valóban az ε-oknak 1-nél kisebb és pozitiv értékeit adják. Valamint megfordítva ezen egyenletek megoldása:

$$\eta = \varepsilon_3,$$
$$\vartheta = \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_3}$$

is mindig 1-nél kisebb pozitiv számokat szolgáltat; mert ha

$$\varepsilon_2 > 1 - \varepsilon_3$$

akkor annál inkább:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 1.$$

Hogy az ily módon értelmezett tartomány folytonos, abból következik, hogy minden szám egy és csak egyféle módon irható az

$$x = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$$

alakban, ha az η-k tetszőleges valós számok, melyeknek összege egy.* Legyen:

$$|(\eta_1 - \varepsilon_1)a_1 + (\eta_2 - \varepsilon_2)a_2 + (\eta_3 - \varepsilon_3)a_3| = \delta_1 + \delta_2 i.$$

---

* Ha ugyanis

$$x = u + vi,$$

és az a-k részletes alakja:

$$a_k = a'_k + a''_k i$$

akkor az η-k a következő elsőfokú egyenletrendszerből határozandók meg:

$$\eta_1 a'_1 + \eta_2 a'_2 + \eta_3 a'_3 = u,$$
$$\eta_1 a''_1 + \eta_2 a''_2 + \eta_3 a''_3 = v,$$
$$\eta_1 \quad + \eta_2 \quad + \eta_3 \quad = 1,$$

Akkor, ha az a-kat fölbontjuk valós és képzetes részükre, ebből:

$$(\eta_1-\varepsilon_1)a_1'+(\eta_2-\varepsilon_2)a_2'+(\eta_3-\varepsilon_3)a_3'=\delta_1$$
$$(\eta_1-\varepsilon_1)a_1''+(\eta_2-\varepsilon_2)a_2''+(\eta_3-\varepsilon_3)a_3''=\delta_2$$
$$(\eta_1-\varepsilon_1)+(\eta_2-\varepsilon_2)+(\eta_3-\varepsilon_3)=0.$$

Az egyenletrendszer determinánsa (a jegyzet szerint) nem 0, tehát

$$\eta_i-\varepsilon_i=A_i'\delta_1+A_i''\delta_2,$$

hol A_i', A_i'' az a_i', a_i''-ből összetett véges meghatározott számok.

Ha tehát $|\delta_1+\delta_2 i|<\delta$ és evvel együtt $|\delta_1|<\delta$ és $|\delta_2|<\delta$, ha továbbá valamely az A_i', A_i'' absolut értékeinél nagyobb számot $\frac{1}{2}A$-val jelölünk, akkor

$$|\eta_i-\varepsilon_i|<A\delta.$$

E szerint abból, hogy

$$|(\eta_1-\varepsilon_1)a_1+(\eta_2-\varepsilon_2)a_2+(\eta_3-\varepsilon_3)a_3|<\delta,$$

mindig következik, hogy

$$\varepsilon_i-A\delta<\eta_i<\varepsilon_i+A\delta.$$

---

a mi valóban minden complex számra az η-k egy meghatározott valós értékrendszerét adja, ha csak nem 0 az egyenletrendszer determinánsa:

$$D=\begin{vmatrix}a_1' & a_2' & a_3'\\ a_1'' & a_2'' & a_3''\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_2'-a_1' & a_3'-a_1'\\ a_2''-a_1'' & a_3''-a_1''\end{vmatrix}.$$

De ha $D=0$, akkor az a_1, a_2, a_3-nak megfelelő pontok a föltevés ellenére egy egyenesen feküdnének; mert

$$\vartheta=\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1}=\frac{a_3'-a_1'+i(a_3''-a_1'')}{a_2'-a_1'+i(a_2''-a_1'')}$$

képzetes része:

$$\frac{(a_2'-a_1')(a_3''-a_1'')-(a_3'-a_1')(a_2''-a_1'')}{(a_2'-a_1')^2+(a_2''-a_1'')^2}$$

(melynek számlálója nem más, mint D) ekkor szintén eltünik.

Könnyű látni, hogy, ha az η-k között van olyan, melynek értéke 0 vagy 1, míg a többi pozitiv valódi tört, a meghatározott számok a háromszögön fekvő pontokhoz tartoznak. Ha, tehát végre az η-k közt van olyan is, mely 0-nál kisebb, vagy 1-nél nagyobb, a háromszögön kivül fekvő ponthoz jutunk.

Ha tehát δ-t oly kicsinynek vesszük, hogy még:

$$\varepsilon_i + A\delta < 1\,, \quad \varepsilon_i - A\delta > 0,$$

azaz δ kisebb a

$$\frac{1-\varepsilon_i}{A}\,, \quad \frac{\varepsilon_i}{A}$$

számok kisebbikénél, akkor az egyenlőtlenség minden megoldása ismét pozitiv és 1-nél kisebb η-kat, azaz a tartományhoz tartozó helyet ad.

A tartomány két helye között

$$x = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3\,, \quad y = \zeta_1 a_1 + \zeta_2 a_2 + \zeta_3 a_3$$

a folytonos átmenet egyszerűen az xy úton eszközölhető. Mert e számköz minden egyéne

$$x + \vartheta\,(y - x) = \sum_{i=1}^{3} (\eta_i + \vartheta\,(\zeta_i - \eta_i))\, a_i$$

szintén a tartomány egyik helye; mert ha ϑ, η_i és ζ_i pozitiv valódi törtek, akkor

$$\eta_i + \vartheta\,(\zeta_i - \eta_i) = (1 - \vartheta)\,\eta_i + \vartheta\,\zeta_i < 1 - \vartheta + \vartheta,$$

tehát kisebb, mint egy és nem 0.

9. Ha a és b két tetszőleges szám, akkor az

$$a + (u + iv)\,(b - a)$$

számok, melyekben u bárminő valós szám és v pozitiv, folytonos tartományt alkotnak, melyeknek geometriai ábrázolásban *az a és b által meghatározott egyenestől balra fekvő félsík pontjai* felelnek meg, ha t. i. az egyenesen azon haladási irányt veszszük alapul, melynél *a-ból b-be* jutunk.

Ekkor ugyanis az $a + u\,(b-a)$ helyről, mely amaz egyenesen fekszik az $a + (u + iv)\,(b - a)$ helyhez jutunk az $iv\,(b - a)$, hozzáadása által, mely minthogy $v\,(b - a)$ iránytényezője $b - a$-éval megegyezik, ebből ugyanazon forgás által keletkezik, mint OY az OX-ből, mely esetben az e tengelyekre szokásos megállapításoknál épen azt mondjuk, hogy az illető pont az egyenestől balra fekszik.

Hogy ama tartomány folytonos, az könnyen belátható. Először is $a + (u + iv)\,(b - a)$ belső hely, mert $v\,|\,b - a\,|$ pozitiv szám és az

$$|\,x - a - (u + iv)\,(b - a)\,| < v\,|\,b - a\,|$$

föltétel segitségével meghatározott számok mind a tartományba tartoznak. Mindenesetre x az

$$x = a + t(b - a)$$

alakban irható, hol

$$t = \frac{x-a}{b-a} = u' + iv';$$

tehát: *

$$|x - a - (u+iv)(b-a)| = |u' - u + i(v' - v)||b-a| > |v' - v||b-a|,$$

de az utoljára nyert érték, ha $v' = -v''$ nem pozitiv, míg v mindenesetre az, nem más, mint

$$(v + v'')|b - a| \geqq v|b-a|,$$

tehát minden x-re nézve, mely az ama föltétel által megszabott környezetbe tartozik, v' ismét pozitiv.

Másodszor, ha a tartomány két száma:

$$c_1 = a + (u_1 + iv_1)(b - a), \quad c_2 = a + (u_2 + iv_2)(b - a),$$

akkor már legegyszerűbben a $c_1 c_2$ számköz minden száma (ϑ pozitiv és 1-nél kisebb):

$$\begin{aligned} c_1 + \vartheta(c_2 - c_1) &= a + (u_1 + iv_1)(b-a) + \vartheta\big((u_2 - u_1) + i(v_2 - v_1)\big)(b-a) \\ &= a + \big\{u_1 + \vartheta(u_2 - u_1) + i\big(v_1 + \vartheta(v_2 - v_1)\big)\big\}(b-a) \end{aligned}$$

szintén a tartományba tartozik, mert

$$v_1 + \vartheta(v_2 - v_1) = (1 - \vartheta)v_1 + \vartheta v_2$$

szintén pozitiv.

Közvetetlenül látni, hogy az $a + u(b - a)$ helyek, hol u valós, a tartomány határhelyei; valamint az sem szorúl bővebb magyarázatra, hogy ha ép úgy a v-t negativ értékekre szorítjuk, az a és b által meghatározott egyenestől jobbra fekvő félsík pontjainak megfelelő tartományhoz jutunk.

A következőkben az AB egyenes által határolt és AB-től

---

* Mert mindig

$$|p + qi| = (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \geqq (q^2)^{\frac{1}{2}} = |q|$$

és épen úgy

$$|p + qi| > |p|.$$

balra fekvő félsíkot röviden az «AB félsíknak» nevezzük. Az AB-től jobbra fekvő félsík ekkor természetesen «BA félsíknak» nevezendő.

Azon számtartomány, melynek az A_1CA_2 szög belsejében fekvő pontok összessége felel meg, most már a következőkép értelmezhető.

a) Ha A_2 az A_1C félsíkban fekszik, megfeleljenek e tartománynak mindazon pontok, melyek A_1C *és* CA_2 félsík belsejében feküsznek.

b) Ha A_2 az A_1C félsíkon kívül (azaz a CA_1 félsíkban) fekszik, megfeleljenek e tartománynak mindazon pontok, melyek az A_1C félsíkban *vagy* a CA_2 félsíkban feküsznek.

c) Ha A_2 az A_1C egyenesen fekszik, határesettel van dolgunk, még pedig ha 1. A_2 az A_1C vonalon a C előtt fekszik, a tartomány csak az A_1C-n C előtt fekvő helyekből áll, tehát egyáltalában belső helye nincs; ha pedig 2. A_2 az A_1C egyenesen C után fekszik, a tartomány az A_1C félsík pontjai által lesz képviselve.

Közvetetlenül belátható, hogy az ilyképen értelmezett tartomány a (*c*, 1) eset kivételével mindig folytonos.

Ha az A_1CA_2 szög belsejében fekvő pontok közül csak azokat hagyjuk meg, melyeknek távolsága C-től egy bizonyos r-nél kisebb, (azaz ha a C és P-nek megfelelő számok c és p, $|c-p|<r$), és végre a CA_1, CA_2 egyeneseken ily távolságban fekvő pontokat K_1 és K_2-vel jelöljük, megkapjuk a K_1CK_2 körsectort, melynek — mint azt tovább nem részletezzük — ismét folytonos (és véges) számtartomány felel meg.

10. Valamely a helynek, a mint az A tartományon belül, vagy azon kívül fekszik, legyen *karakterisztikája* -1 vagy $+1$.

Ha adva van több, számra nézve m tartomány: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, akkor ezeknek *összetétele* (compositio) által uj tartományt nyerünk, melyet

$$A = [A_1, \ldots, A_m]$$

-mel jelölünk és melynek képezési törvénye a következőkben foglalható össze.

Ha az a hely karakterisztikái az $A_1, \ldots, A_m$ tartományokra nézve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, akkor legyen karakterisztikája az A-ra nézve:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m,$$

az eredeti karakterisztikák szorzata.

Ha az a az $A_1 \dots A_m$ tartományok közül néhányra nézve határhely, ez akkor számítandó az A tartományba, ha minden az a egy bizonyos környezetében fekvő hely, mely az $A_1, \dots, A_m$ tartományok egyikére nézve sem határhely, az A tartományon belül fekvő hely.

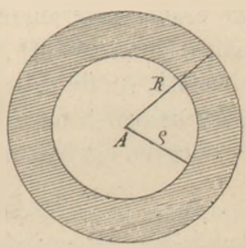
Az első megállapitás, minthogy az illető helyre nézve nemcsak azt mondja, hogy A-hoz tartozik, hanem azt is, hogy A-n belül fekszik, mint értelmezés a szükségesnél többet mond; de könnyű látni, hogy ha a az $A_1 \dots A_m$ tartományoknak belső vagy külső helye, azaz nemcsak a-nak, hanem minden x helynek, melyre nézve $|x-a|$ egy bizonyos δ-nál kisebb, karakterisztikái szintén $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m$, akkor egyszersmind minden ily helyre nézve az A tartományra vonatkozó karakterisztika szintén ε, azaz a nem lehet az A határhelye, hanem ezen kivül vagy ezen belül fekszik.

Igy nyerjük péld. az $|x-a|<r$ és $|x-a|<R$, hol $r<R$, tartományok összetétele által az

$$r<|x-a|<R$$

föltételek által meghatározott tartományt, melynek határhelyei az $|x-a|=r$ és $|x-a|=R$ föltételek által meghatározott számok.

A complex számok körében értelmezve e föltételeket, az összeteendő tartományokat az egy-egy kör belsejében fekvő pontok képviselik. A két kör középpontja ugyanaz; az egyik a másik belsejében fekszik. Az összetétel által keletkező tartomány jellemezve van a két kör által határolt gyűrű-alakú síkrész pontjai által. Könnyű látni, hogy az eredetileg adott tartomány határhelyei az összetett tartományra nézve is ilyenek maradnak.



9. ábra.

Ha az A folytonos tartomány nem tartalmazza a C tartomány egy határhelyét sem, akkor az A tartomány egészben (azaz minden egyes helye) a C-n belül vagy kívül fekszik.

Az A minden egyes helye a C-nek vagy külső, vagy belső helye, ha p. a_1 most belső, és a_2 külső helye volna a C-nek, akkor lehet egy $a_1 k_1 \dots k_n a_2$ utat meghatározni, mely egyrészt az A-nak csak belső helyeit tartalmazza, másrészt a C-nek egy határhelyét magában foglalja. De az A helyei közt a C határhelye egyáltalában nincsen, tehát a_1 és a_2 egyidőben a C-n belül vagy kívül fekvő helyek.

E tételnek a következőkben alkalmazandó speciális esete a következő:

Ha az A folytonos tartomány és valamelyik közönséges határhelye, h környezetében ama számok közül, melyekre nézve $|x-h| < \rho$ a kh és hl számköz összes számai határhelyek és csak ezek, (hol $|k-h| = |h-l| = \rho$), akkor a tartomány belsejébe tartozó számoknak megfelelnek a KHL vagy LHK körsectorok egyikének vagy mindkettőnek belsejében fekvő pontok. (H, K, L, a h, k, l számoknak megfelelő pontok.)

Az egyik körsectorban mindenesetre vannak az A belső helyei, ha nem mindkettőben; mert h bármily kis környezetében vannak A belső helyei; ha tehát az illető körsector belsejének megfelelő helyek közül a_1 az A-nak belső helye és a_2 nem az, akkor az $a_1 a_2$ számköz tartalmazná az A egyik közönséges határhelyét; de ez lehetetlen, mert a hk és kl számközök egyik helye sem eshet össze az $a_1 a_2$ számköz helyeivel.

11. A megelőző megállapítások végre *ama tartomány analitikai értelmezését* adják, *melynek helyeit az egy bizonyos, maga-magát nem metsző $A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ sokszög belsejében fekvő pontok ábrázolják.* Az ily maga-magát nem metsző sokszöget röviden *egyszerű* sokszögnek nevezzük.

Legyen ugyanis $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1$ oly helyek sorozata, hogy az

$$a_1 a_2,\ a_2 a_3,\ \ldots,\ a_{n-1} a_n,\ a_n a_1$$

számközök a két egymásután következő számköz közös határhelye kivételével semmi közös helyet nem tartalmaznak. (Az $a_1 a_2$-t ismét $a_n a_1$ után következőnek tekintjük.) Akkor az $a_1 a_2 \ldots a_n a_1$ egyszerűen zárt útnak megfelelnek egy bizonyos $A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ egyszerű sokszög kerületének pontjai.

A következőkben rövidség kedvéért a geometriai kifejezésmódot használjuk, mely az előbbi megállapítások után azonban közvetetlenül tisztán analitikai értelmezésekre is átfordítható.

Annak eldöntésére, vajjon egy nem az $A_1 A_2 \ldots A_n$ sokszög kerületén fekvő C pont a sokszögön belül vagy azon kívül fekszik, vonjunk a C-n keresztül egy tetszőleges egyenest, mely csak a sokszög egyik csúcspontját, tehát egy oldalát se tartalmazza; ily módon természetesen a C-n keresztül menő végtelen sok egyenes közül legfölebb n lesz kizárva. *A C a sokszögön belül vagy kívül fekszik, a mint a sokszögnek C előtt vagy C után az egyenesen fekvő pontjai páratlan vagy páros számmal vannak.* (A 0 természetesen páros számnak veendő.) Minthogy a sokszögnek legfölebb n pontja fekszik az egyenesen, és a sokszög kerületén tovább haladva e «metszési pontok»-nál, az egyenes által meghatározott félsikok egyikéből a másikba lépünk, az összes metszési pontok száma mindenesetre páros, és az előbb adott két megszámlálási mód ugyanazon eredményhez vezet. Szintúgy nem változik ezen eredmény, ha a C-n keresztül vont vonal irányát változtatjuk; a C-n keresztül vont két egyenesnek C előtt vagy C után fekvő pontjai egy szöget határoznak meg, melybe a sokszög ép annyiszor belép, mint a hányszor kilép. A sokszögnek a két félegyenessel való metszési pontjai tehát páros számmal vannak, és az egy-egy félegyenesen előforduló metszési pontok száma egyidőben páros vagy páratlan.

Az értelmezés helyes volta csak akkor lesz teljesen igazolva, ha a C-vel együtt ennek bizonyos környezete is a sokszögön belül vagy kívül fekszik. Ha ugyanis C nem fekszik a sokszög kerületén, akkor mindig könnyű szerrel lehet egy pozitiv számot, ρ-t kijelölni, úgy hogy a sokszög kerületén fekvő bármely pont távolsága C-től ρ-nál nagyobb. Ha tehát C' távolsága a C-től ρ-nál kisebb, akkor a CC' vonaldarabon nincs a sokszög kerületének pontja és így C' a C-vel együtt a sokszögön kívül vagy belül fekszik.

Az $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ sokszög segítségével értelmezett tartomány folytonos. Legyen ugyanis P_1 és P_2 két pont, mely egyidőben a sokszögön kívül vagy belül fekszik. A $P_1 P_2$ vonaldarabon esetleg nincs a sokszög kerületének pontja. Ha ilyen van, akkor ezek közt találni egy *első* és egy *utolsó* ily pontot. Ha ezek K_1 és K_2, akkor a $P_1 K_1$ és $K_2 P_2$ vonaldarabok minden pontja K_1 és K_2 kivételével P_1 és P_2-vel együtt a sokszögön kívül vagy belül fekszik. De ekkor e vonaldaraboknak a K_1, illetőleg K_2-hez elég közel fekvő K_1' és K_2' pontok tört vonal segítségével úgy köthetők össze, hogy a $K_1' L_1 \dots L_m K_2'$ úton csupán a sokszögön kívül vagy belül fekvő pontok feküsznek. (E törtvonal legegyszerűbben a sokszög oldalaihoz párhuzamos egyenes darabokból állítható össze, a mi analitikailag is könnyen fogalmazható.) De ekkor a $P_1 K_1' L_1 \ldots L_m K_2' P_2$ úton csupán a P_1 és P_2-vel egyenlő jellegű pontok feküsznek, a mi mutatja, hogy *nemcsak a sokszögön belül, hanem egyszersmind a sokszögön kívül fekvő pontok összessége folytonos tartományt alkot.*

12. *Minden $A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ egyszerű sokszög kerületén lehet egy csúcspontot, A_i-t és egy B pontot kijelölni, úgy hogy az $A_i B$ vonaldarab minden pontja a végpontok kivételével a sokszög belsejében fekszik és, ha $n > 3$, az A_i és B között bármely irányban haladva a sokszög kerületén legalább is három csúcspontot találunk, beleszámítva az A_i-t valamint esetleg a B-t is, midőn ez t. i. a sokszög csúcspontja.*

Az A_1-en keresztül egy sem $A_n A_1$, sem $A_1 A_2$-vel össze nem eső egyenest lehet fektetni, melynek pontjai az A_1 egyik oldalán a sokszögön belül, a másik oldalon a sokszögön kívül feküsznek. Ha B a sokszögön belül fekszik, az $A_1 B$ meghosszabbítása által végre egy C ponthoz jutunk, mely a sokszög kerületén fekszik, míg minden A_1 és C között fekvő pont a sokszög belsejéhez tartozik.

Ha C már most a sokszög kerületén az $A_3 A_4 \ldots A_{n-1}$ részben fekszik (a végpontok beleértésével), tételünk be van bizonyítva. Ott van ugyanis az $A_1 C$ kerületi darabon az egyik irányban haladva A_1, A_2 és A_3, a másik irányban A_1, A_n és A_{n-1}.

Az $A_1 A_2$ vagy $A_1 A_n$ vonaldarabokon C természetesen nem fekszik. Hátra vannak még tehát csak azon esetek, midőn C az $A_2 A_3$ vagy $A_{n-1} A_n$ vonaldarabokon fekszik. Ezen esetek egészen egyenlő módon tárgyalhatók. Legyen p. C az $A_2 A_3$ vonaldarabon.

Akkor egy az eddigiekben igen gyakran használt következtetési mód alkalmazásával, C-ből tova haladva az $A_2 A_3$ vonaldarabon A_3 felé, vagy még az $A_1 A_3$ is olyan, hogy minden A_1 és A_3 közt fekvő pont a sokszöghez tartozik (a mikor a tétel ismét be van bizonyítva) vagy pedig találunk C és A_3 között egy *első* C'' pontot, melyre nézve az $A_1 C''$ többé nem mutatja az említett tulajdonságot. (C'' összeeshetik természetesen A_3-mal is.) Ekkor végre az $A_1 C''$ vonaldarab okvetetlenül tartalmazza a sokszög egy csúcspontját, mely A_1 és A_3-tól különböző; minthogy ugyanis $n > 3$, $A_1 A_3$ nem tartozik a sokszög kerületéhez. Legyen e csúcspont A_i, mely természetesen A_2-től is különbözik.

Szintúgy, ha az $A_2 A_3$ vonaldarabon C-től A_2 felé haladunk, találunk egy *első* C' pontot, melyre nézve az $A_1 C'$ vonaldarabnak már nincs azon tulajdonsága, hogy minden A_1 és C' között fekvő pontja a sokszög belsejében fekszik. E vonaldarab akkor ismét tartalmazza a sokszög egy csúcspontját, mely A_1 és A_3-tól különbözik, de A_2-vel most összeeshetik. Legyen ez A_j.

Az $A_1 C' C''$ háromszög belseje most egyszersmind csupán a sokszög belsejébe tartozó pontokat tartalmaz és az $A_i A_j$ egyenes darab minden esetre megfelel tételünk követelményeinek, mert hiszen a sokszög belsejében feküdvén, semmi esetre sem lehet két egymásután következő csúcspont összekötő vonala. (Hogy ez $A_2 A_3$ legyen, az előbbiek szerint ki van már zárva.)

13. Ha a most bebizonyított tételnek megfelelőleg meghatározzuk az A_i és B pontokat, hol B például az A_k és A_{k+1} között fekszik, vagy A_k-val összeesik, akkor ez által két új sokszöget nyerünk:

$$A_i A_{i+1} \ldots A_{k-1} A_k B A_i \quad \text{és} \quad A_i B A_{k+1} A_{k+2} \ldots A_{i-1} A_i,$$

vagy

$$A_i A_{i+1} \ldots A_{k-1} A_k A_i \quad \text{és} \quad A_i A_k A_{k+1} \ldots A_{i-1} A_i.$$

Rövidség kedvéért legyen az eredeti sokszögnek megfelelő tartomány H, az új sokszögeknek megfelelő két tartomány pedig H_1 és H_2.

Ekkor H a H_1 és H_2 összetételénél keletkezik, még pedig úgy, hogy nemcsak a H tartomány minden pontja — az $A_i B$ vonalon fekvő pontok kivételével — a H_1 vagy H_2, és csakis egyiküknek belsejében fekszik, hanem hogy minden a H-n kívül fekvő pont egyszersmind a H_1 és H_2-n kívül fekszik.

Minthogy a sokszögek mindannyian végest artományok, minden esetre vannak oly pontok, melyek mind a három sokszögön kívül feküsznek; ha K ily pont és K_1 bármely más a H-n kívül fekvő pont, akkor K és K_1 összeköthető oly úton, melynek minden pontja a H-n kívül fekszik. Ezen az uton tehát az $A_i B$-nek egy pontján sem megyünk át és így K_1 a K-val együtt egyszersmind a H_1 és H_2-n kívül fekszik.

Ha ellenben I a H tartomány belsejében fekszik, akkor húzzunk I-n keresztűl oly egyenest, mely nem megy keresztűl a H, H_1, H_2

sokszögek csúcspontjain. Ezen egyenesen az I bármely oldalán a II kerületének pontjai páratlan számmal vannak. Ezek közül azon metszési pontok száma, mely a kerületnek $A_i A_{i+1} \ldots A_k B$ (ill. $A_i A_{i+1} \ldots A_k$) darabjában feküsznek egyszersmind a II_1 — azok, melyek a $BA_{k+1} \ldots A_i$ (ill. $A_k A_{k+1} \ldots A_i$) részen vannak, a II_2 metszéspontjai. Összességben a metszéspontok száma páratlan lévén, világos, hogy a kerület egyik részén páros, másik részén páratlan számmal vannak. De a II_1 és II_2 metszéspontjai még az $A_i B$ (ill. $A_i A_k$) vonaldarabon is lehetnek. Ama fél egyenes vagy metszi e vonaldarabot vagy nem. De mindkét esetben ama fél egyenesnek az egyik sokszöggel páros, a másikkal páratlan számú metszéspontja van. Azaz I vagy II_1 vagy II_2 és csak egyikük belsejében fekszik.

E tárgyalásból még külön kiemeljük, hogy *II_1 és II_2-nek közös belső pontja egyáltalában nincsen.* Hozzátéve még, hogy az A_i és B választása következtében a II_1 és II_2 csúcspontjainak száma mindenesetre n-nél kisebb, a végeredményt még következőkép fogalmazhatjuk:

Minden sokszög fölbontható két kisebb oldalszámú sokszögre, úgy hogy minden a sokszög belsejében fekvő pont az új sokszögek egyikében és csak egyikében fekszik, vagy pedig e két sokszög közös határpontja; míg a fölbontás által keletkező sokszögeknek közös belső pontjuk nincsen.

Ha a fölbontás által keletkező sokszögek egyikének vagy mindkettőnek még több mint három oldala van, a fölbontás ujból folytatható, míg végre csupán háromszögekkel van dolgunk és így:

Minden sokszög fölbontható háromszögekre, úgy hogy a sokszög minden belső pontja e háromszögek egyikének és csak egyikének belső pontja, vagy pedig két háromszög közös határpontja; míg a fölbontás által keletkezett háromszögeknek közös belső pontjuk egyáltalában nincs.

Többszörös sokaságok.

14. Adott m szám összeállítása, melyben a számok egymásutánját is tekintetbe vesszük, (m számból álló) *értékrendszert* ád. (Az m külön kijelentése, minthogy egy-egy vizsgálatban mindig ugyanaz, többnyire elmaradhat.) Két ily értékrendszer

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m), \quad (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

tehát csak akkor egyenlő, ha a_1 és b_1, a_2 és b_2, ..., végre a_m és b_m külön egyenlők.

Szemben evvel az m szám oly összeállítását, melynél az m szám egymásutánjára nem vagyunk tekintettel, a mi más tárgyalásoknál szintén előfordul, (m számból álló) *értékcsoport*nak nevezzük. Így p. (1, 2, 3) és (2, 1, 3) különböző értékrendszereket, de ugyanazt az értékcsoportot jelzik.

Az m számból képezhető értékrendszerek összessége, m-méretű, m-szeres kiterjedésű, vagy röviden m-szeres sokaságot alkot. A sokaság maga valós vagy complex, a mint az értékrendszerek összeállítására a valós vagy complex számok összességét használjuk.

Általánosabban a tárgyak — *elemek* — sokaságát *m-szeres sokaságnak* nevezzük *az oly megállapitások bevezetése után,* hogy (legfölebb a tárgyak megszámlálható sokaságának kivételével) minden egyes tárgy legalább egy, legfölebb K (m számból álló) értékrendszert határoz meg, és megfordítva minden (m számból álló) értékrendszer (legfölebb az értékrendszerek megszámlálható sokaságának kivételével) meghatározza ama sokaság legalább egy, legfölebb l elemét. Itt k és l meghatározott pozitiv egész számok. (Az értelmezés oly általánosítását, melynél k vagy l minden határon túl növekszik, e helyen nem tárgyaljuk.)

Így póld. az egy adott síkban fekvő pontok összessége kétszeres sokaságot alkot, mert valamely tetszőlegesen választott derékszögű koordináta rendszerre vonatkozólag bármely pont koordinátái meghatároznak egy két számból álló értékrendszert, valamint viszont minden két számból álló értékrendszer — c számokat mint koordinátákat értelmezve — meghatároz egy-egy pontot. — Hasonlóképen az egy síkban fekvő egyenesek összessége is kétszeres sokaságot alkot. Minden egyenes, ugyancsak derékszögű koordináta rendszerre vonatkoztatva

$$Ax + By = 1$$

alakú egyenlet által jellemezhető és így megadja az (A, B) értékrendszert, valamint ez megfordítva az amaz egyenletnek megfelelő egyenest.

Ugyanígy látni, hogy az egy síkban fekvő körök összessége háromszoros sokaságot alkot. Barmely kör egyenlete:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$$

és megadja az (α, β, R) és $(\alpha, \beta, -R)$ értékrendszereket; míg megfordítva péld. az (a, b, c) értékrendszer az $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ körhöz vezet.

A térbeli pontok vagy síkok összessége 3-szoros, a térbeli egyenesek vagy gömbök összesége 4-szeres sokaságot alkot. — E sokaságok valósak vagy complexek, a mint a geometriában szokásos kifejezés szerint valós elemekre szorítkozunk, vagy kiterjeszkedünk complex elemekre is.

A *valós* $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ értékrendszerek, melyek az

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{m-1}^2 + x_m^2 = 1$$

föltételnek eleget tesznek, $m-1$-szeres valós sokaságot alkotnak. Hogy minden ily értékrendszer az

$$\frac{x_1}{x_m} = a_1, \quad \frac{x_2}{x_m} = a_2, \ldots, \frac{x_{m-1}}{x_m} = a_{m-1}$$

egyenletek alapján meghatároz egy $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ értékrendszert, az közvetetlenül világos; de viszont is az utóbbi egyenletek az eredeti föltétellel együtt az a-k értékrendszeréből meghatározzák az x-ek két értékrendszerét. Ha ugyanis $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}$ az utóbbi egyenletekből vett értékeit az adott föltételbe behelyettesítjük, lesz

$$x_m^2 (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{m-1}^2 + 1) = 1$$

és ha még röviden

$$A^2 = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{m-1}^2 + 1}$$

hol tehát $|A| \leq 1$, akkor az $(a_1, a_2, \ldots a_{m-1})$ a következő $(x_1, \ldots x_m)$ értékrendszereket adja:

$$(a_1 A, \; a_2 A, \ldots, a_{m-1} A, \; A) \quad \text{és} \quad (-a_1 A, \; -a_2 A, \ldots, -A).$$

Az m számból álló értékrendszerek összességét egyéb m-szeres sokaságoktól való megkülönböztetésül *határtalan és sik m-szeres sokaságnak* nevezzük, mely elnevezés onnét származik, hogy ha $m = 1, 2, 3$ valós számok esetében az értékrendszerek, mint egy határtalan egyenes, sík, illetőleg a térben fekvő pontok koordinátái értelmezhetők. Viszont a geometriai terminologia gyakran jó szolgálatot tesz akkor is, midőn $m > 3$, és így az n számból álló értékrendszerek összeségét n-méretű térnek is szokás nevezni, melynek ekkor minden pontját, elemét n koordináta, $x_1, x_2, \ldots x_n$ jellemzi.

Különösen fontos két m-szeres sokaság azon vonatkozása, mely *kölcsönösen egyértelmű*, azaz melyben a két sokaság bármelyikében választott tetszőleges elemnek általánosságban * a másik sokaságnak egy és csak egy eleme felel meg, még pedig úgy, hogy

* «általánosságban» azaz legfölebb egy megszámlálható sokaság kivételével.

ha az első sokaság egyik eleméből, e' a másik sokaság egy bizonyos elemét, e''-t kapjuk, ama vonatkozás ismét e''-től visszavezet az e'-hez. Ily kölcsönösen egyértelmű vonatkozás állítható föl az $1, 2, 3$ számból álló értékrendszerek összessége egyrészt és az egyenes, sík, tér pontjai közt másrészt.

Az ily kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban álló sokaságok elmélete azonos, azaz minden az egyikre nézve megállapitott törvény egyedül az illető sokaságnak megfelelő elnevezések változtatásával átvihető a másikra. Ezen elv az imént fölhozott példánál eléggé ismeretes, t. i. nem más, mint az analitikai geometria módszere.

A határtalan, sík m-szeres complex sokaság és a határtalan, sík $2m$-szeres valós sokaság kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba hozhatók. Ha ugyanis az elsőre nézve

$$x_1 = u_1 + iv_1, \quad x_2 = u_2 + iv_2, \ldots, x_m = u_m + iv_m$$

akkor mint közvetetlenül látni, minden $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ értékrendszer meghatároz egy hozzátartozó $(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_m, v_m)$ értékrendszert, mely utóbbiból ismét összeállíthatjuk az elsőt. — A legegyszerűbb esetben $(m = 1)$ így a complex számok és a két valós számból alkotott értékrendszerek közt fönnálló kapcsolathoz jutunk, melynek igen egyszerű képe a mindkét sokaságnak megfelelő geometriai ábrázolás a síkban.

E vonatkozás egyik fontos következménye, hogy ezentúl *kizárólag valós sokaságok vizsgálatára is szorítkozhatunk, a mennyiben minden n-szeres complex sokaság mint $2n$-szeres valós sokaság is értelmezhető.*

Értékrendszerekből alkotott tartományok.

15. Ha az m számból képezett értékrendszerek összességéből, azaz a határtalan, sík m-szeres sokaságból bármely módon bizonyos értékrendszereket kiválasztunk, ezek az illető sokaságban foglalt *értékrendszerek tartományát* alkotják.

Minden az illető tartományba tartozó értékrendszer az illető tartománynak egy-egy *helyét* (pontját) adja.

Ha az A tartomány minden helye bennfoglaltatik a B tartományban, akkor A a B-nek része.

Az $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ hely környezete alatt értjük mindazon

$(x_1, x_2, \ldots x_m)$ helyeket, melyekre nézve

$$|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 + \ldots + |x_m - a_m|^2 < \delta^2 \qquad (A)$$

hol δ egy tetszőlegesen választott pozitiv szám vagy ∞, a mely utóbbi esetben a föltétel egyszerűen annyit jelentsen, hogy amaz összeg egy tetszőlegesen választott pozitiv számnál kisebb, azaz $x_1, x_2, \ldots x_m$ szabadon választhatók.

A δ-nak, melynek csak valósnak kell lennie, pozitiv értékekre való megszorítása sok esetben kényelmes; így mindjárt ez által a föltétel teljesen megegyezik az előbb (1. cz.) $m = 1$ esetében adott alakkal.

Hogy *minden helynek az* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *hely környezetében egy bizonyos tulajdonsága van*, ismét annyit jelent, hogy lehet egy δ-t meghatározni, mely vagy pozitiv szám vagy végtelen, úgy hogy e tulajdonság fönnáll minden $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ helyen, melyre nézve $|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 + \ldots + |x_m - a_m|^2 < \delta^2$.

Az $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ számára adott föltételből közvetetlenül következik, hogy külön-külön is

$$|x_i - a_i| < \delta\,; \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

mert, ha csak egy i-re nézve $|x_i - a_i| \geq \delta$, akkor egyszersmind

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i|^2 > \delta^2.$$

Ha megforditva az $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ értékrendszerben foglalt számokat az

$$|x_i - a_i| < \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (B)$$

föltételeknek vetjük alá, hol ε_i ismét pozitiv szám vagy végtelen, akkor

$$|x_1 - a_1|^2 + \ldots |x_m - a_m|^2 < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_m^2.$$

Ha tehát az ε-okat úgy választjuk, hogy $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2 < \delta^2$, akkor a (B) föltétel által meghatározott értékrendszerek mind bennfoglaltatnak az (A) által adottak között; valamint megforditva, ha adott ε-ok mellett a δ-t úgy választjuk, hogy δ^2 bármely ε^2-nél kisebb, akkor az (A) által adott értékrendszerek mind bennfoglaltatnak a (B) által adottak közt, mert ekkor (A)-ból következik, hogy:

$$|x_i - a_i|^2 < \delta^2 < \varepsilon_i^2\,.$$

Midőn tehát annak kijelentéséről van szó, hogy valamely tulajdonság fönnáll minden oly helyre nézve, mely $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ környezetében fekszik, a nélkül, hogy az $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ helyek tartományának pontos meghatározása történnék, *a környezetnek az (A) által adott értelmezése fölcserélhető avval, melyet a (B) föltételek szolgáltatnak.* Az egyik alaknak megfelelőleg meghatározott környezet mindig magában tartalmazza ugyanazon helynek a másik alaknak megfelelőleg választott környezetét.

A $(0, 0 \ldots 0)$, azaz a csupán zérusokból álló értékrendszer környezetét e szerint az oly értékrendszerek alkotják, melyekben minden egyes szám absolut értéke egy bizonyos különben tetszőlegesen választott (tetszőlegesen kicsiny) pozitiv számnál kisebb.

Czélszerű, ha hasonló módon összefoglalhatjuk mindazon értékrendszereket, melyekben legalább egy szám absolut értéke egy bizonyos, különben tetszőlegesen választott (tetszőleges nagy) pozitiv számnál nagyobb. Ezen értékrendszerekről ismét azt mondjuk, hogy a ∞ környezetét alkotják. A ∞ környezete alatt tehát azon helyeket értjük, melyekre nézve

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_m|^2 > \omega^2$$

hol ω ismét tetszőlegesen választott pozitiv szám. Erre ugyanis elegendő, ha valamely i-re nézve $|x_i| > \omega$. A ∞ helyre nézve itt ugyanaz áll, a mit a számtartományok esetében erre vonatkozólag (az 1. czikk végén) megjegyeztünk.

Minthogy a határtalan, sík m-szeres valós sokaság $m=1, 2, 3$ esetében egyértelműleg vonatkoztatható valamely egyenes, sík, illetőleg a tér összes pontjainak sokaságára, minden azon sokaságban foglalt tartománynak képe a pontok egy bizonyos sokasága, melyek mind egy egyenesen, egy síkban, végre ha $m=3$, megszorítás nélkül a térben feküsznek. E geometriai ábrázolás a leirandó viszonyoknak ismét igen találó jellemzését adja.

Az $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ környezetének, ha az (A) föltétel szabja meg e környezetet, mindazon pontok felelnek, melyek a mint $m=1, 2, 3$, bizonyos vonaldarab, kör, gömb belsejében feküsznek, melynek középpontja az $(a_1 \ldots a_m)$-nek megfelelő pont.

Ha a környezet értelmezését a (B) föltétel adja, akkor ismét az $(a_1 \ldots a_m)$ környezetének megfelelnek mindazon pontok, melyek bizonyos vonaldarab, derékszögű paralellogramm, parallelepiped belsejében feküsznek, melynek középpontja (diagonálisainak metszési pontja) az $(a_1, \ldots, a_m)$-nek megfelelő pont.

16. Valamely — a határtalan, sík m-szeres sokaságban foglalt — tartomány *véges*, ha van egy pozitiv szám, G, úgy hogy minden benne foglalt $(x_1\, x_2 \ldots x_m)$ helyre nézve

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_m|^2 < G^2.$$

Ekkor a ∞ hely nem tartozik a tartományba; minden más esetben a tartomány *a végtelenbe terjed.*

Ha valamely tartomány végtelen sok helyet tartalmaz, akkor mindig van egy hely, $(a_1, \ldots, a_m)$ — mely azonban nem foglaltatik mindig a tartományban — úgy hogy $(a_1 \ldots a_m)$ tetszőleges kis környezete is a tartománynak végtelen sok helyét tartalmazza. E hely természetesen lehet a ∞ is.

Ha először is, bármicsoda (nagy) positiv szám is ω, mindig van végtelen sok hely, melyre nézve

$$|x_1|^2 + \ldots + |x_m|^2 > \omega^2$$

akkor a ∞ azon hely, melyben az állított sajátság megvan. Az ellenkező esetben lehet egy G_1-t meghatározni, úgy hogy a tartomány ama helyei, melyekre nézve

$$|x_1|^2 + \ldots + |x_m|^2 > G_1^2$$

már csak véges számmal vannak; ha e néhány helyre nézve $\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2$ értéke G', G'',... négyzete és p. G mindezeknél nagyobb pozitiv szám, akkor a tartomány minden helyére nézve:

$$|x_1|^2 + \ldots + |x_m|^2 < G^2,$$

azaz tételünk már csak véges tartományok esetére lesz bebizonyítandó.

E tételnek bebizonyítása a legegyszerűbb esetre, midőn $m=1$, már megtörtént, (l. 3. cz.); tehát elég lesz kimutatni, hogy $m+1$-re is érvényes marad, ha egy bizonyos m-re érvényes volt.

Ha először a tartományban végtelen sok oly értékrendszer van, melyben az $m+1$-edik szám ugyanaz, p. $=a_{m+1}$, akkor az ezen értékrendszerben előforduló $(x_1, x_2, \ldots x_m)$-ekre nézve, minthogy a tétel m-re nézve helyes, létezik egy oly $(a_1 \ldots a_m)$ értékrendszer, hogy az

$$|x_1 - a_1|^2 + \ldots + |x_m - a_m|^2 < \delta^2$$

föltételnek végtelen sok értékrendszer felelnek meg. Minthogy pedig ekkor $x_{m+1} = a_{m+1}$, egyszersmind

$$|x_1 - a_1|^2 + \ldots + |x_m - a_m|^2 + |x_{m+1} - a_{m+1}|^2 < \delta^2.$$

Ha oly értékrendszerek, melyekben az $m+1$-edik számérték ugyanaz, csak véges számmal vannak, akkor mindenesetre az ezen értékrendszerekben fellépő x_{m+1}-ek száma végtelen nagy és minthogy mindegyikre nézve $|x_{m+1}| < G$, létezik mindenesetre egy a_{m+1} szám, úgy hogy a

$$|x_{m+1} - a_{m+1}|^2 < \tfrac{1}{2}\delta^2$$

föltétel által meghatározott x_{m+1}-ek száma végtelen nagy, bármily kicsinynek választottuk is δ-t. Itt csak azon x_{m+1}-eket veszszük, a melyek e föltételnek megfelelnek, akkor a hozzá tartozó $(x_1, \ldots, x_m)$ értékrendszerek száma esetleg véges is lehet, de ekkor ugyanazon $(x_1, \ldots, x_m)$-hez végtelen sok a föltételnek megfelelő x_{m+1} tartozik; és ha amaz értékrendszer $(a_1, \ldots, a_m)$, akkor mindenesetre $(a_1, \ldots a_m, a_{m+1})$ a föltételnek megfelelő hely.

Ha végre az $|x_{m+1} - a_{m+1}|^2 < \frac{1}{2}\delta^2$ föltételnek megfelelő x_{m+1}-ekhez tartozó $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ értékrendszerek száma is végtelen, akkor mindenesetre lehet ezekhez egy $(a_1 \ldots a_m)$ rendszert meghatározni, úgy hogy

$$|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 + \ldots + |x_m - a_m|^2 < \tfrac{1}{2}\delta^2,$$

és így:

$$|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 + \ldots + |x_m - a_m|^2 + |x_{m+1} - a_{m+1}|^2 < \delta^2,$$

azaz $(a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1})$ ismét a tételnek megfelelő hely.

Értékrendszerekből alkotott folytonos tartományok.

17. Az $(a_1, \ldots, a_m)$ hely az A tartományon *belül* fekszik, a tartomány *belső helye,* ha nemcsak e hely maga, hanem egy bizonyos környezete is az A tartományhoz tartozik.

Az $(a_1, \ldots, a_m)$ hely az A tartományon *kivül* fekszik, a tartomány *külső helye*, ha sem $(a_1, \ldots, a_m)$ sem az ennek egy bizonyos környezetéhez tartozó helyek nem tartoznak az A tartományhoz.

Minden más esetben $(a_1, \ldots, a_m)$ az A tartomány *határhelye*, akár különben bennfoglaltatik a tartományban, akár nem; *közönséges határhely* végre, ha bármily kicsinyre vett környezetében vannak a tartomány belső helyei.

Ha $(a_1, \ldots, a_m)$ közönséges határhely, akkor bármicsoda pozitiv szám is δ_n, lehet a tartományon belül fekvő helyet $(a_1^{(n)}, \ldots a_m^{(n)})$ találni, melyre nézve

$$|a_1 - a_1^{(n)}|^2 + \ldots + |a_m - a_m^{(n)}|^2 < \delta_n^2,$$

és annál inkább:

$$|a_1 - a_1^{(n)}| < \delta_n, \ldots, |a_m - a_m^{(n)}| < \delta_n .$$

Ha tehát a δ_n-eket úgy választjuk, hogy $\lim. \delta_n = 0$, akkor

$$\lim. a_1^{(n)} = a_1, \lim. a_2^{(n)} = a_2, \ldots, \lim. a_m^{(n)} = a_m,$$

a mit úgy lehet kifejezni, hogy a közönséges határhely csupán belső helyeken keresztül is tetszőlegesen megközelíthető.

E helyen is csak oly tartományokat vizsgálunk, melyeknek minden helye a tartomány belső helye vagy közönséges határhelye.

Valamely tartomány *folytonos* vagy continuumot alkot, ha minden a tartományhoz tartozó hely a tartománynak belső helye, és ha továbbá $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ és (b_1, b_2, b_m) a tartomány két tetszőleges (csak a ∞-től különböző) helye lévén, lehet a

$$(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots c_m^{(1)}), \ldots (c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \ldots, c_m^{(n)})$$

szintén a tartományhoz tartozó helyek oly sorozatát meghatározni, hogy az

$$(a_1 + \vartheta(c_1^{(1)} - a_1), \ldots, a_m + \vartheta(c_m^{(1)} - a_m)),$$
$$(c_1^{(1)} + \vartheta(c_1^{(2)} - c_1^{(1)}), \ldots, c_m^{(1)} + \vartheta(c_m^{(2)} - c_m^{(1)})), \ldots$$
$$\ldots (c_1^{(n)} + \vartheta(b_1 - c_1^{(n)}), \ldots, c_m^{(n)} + \vartheta(b_m - c_m^{(n)}))$$

értékrendszerekből meghatározott helyek a ϑ-nak minden 0 és 1 közt fekvő értékénél szintén a tartományhoz tartoznak. — Akkor az $(a_1, \ldots, a_m)$-től a $(b_1, \ldots, b_m)$-hez a tartományon belül *folytonos átme-*

net lehetséges, és ekkor ugyancsak van folytonos átmenet $(b_1, \ldots, b_m)$-től $(a_1, \ldots, a_m)$-hez.

Ha az $(x_1, \ldots, x_m)$ helyett röviden x-szel jelöljük, a folytonos átmenet az $ac^{(1)}c^{(2)}\ldots c^{(n)}b$ *úton* történik. Ha $m=2, 3$, és a valós sokaság többször említett geometriai ábrázolását használjuk, ezen út képe egyenes darabokból álló tört vonal, mely egy síkban, illetőleg tetszőlegesen a térben fekszik.

Az $(a_1 + \vartheta(c_1^{(1)} - a_1), \ldots, a_m + \vartheta(c_m^{(1)} - a_m))$ értékrendszereknek megfelelnek azon pontok, melyek, ha A és C' az $(a_1, \ldots, a_m)$ és $(c_1^{(1)}, \ldots, c_m^{(1)})$-nek megfelelő pontok az AC' vonaldarabban feküsznek. Ezen értékrendszerek összességét röviden az $(a_1, \ldots, a_m) \ldots (c_1^{(1)}, \ldots, c_m^{(1)})$ vagy $ac^{(1)}$ *köznek* nevezzük. Ezen viszonyok $m=2$ és 3 esetére közvetetlenül világosak; az elnevezéseket megtartjuk akkor is, ha $m>3$.

Az m számból képezhető értékrendszerek összessége folytonos tartományt alkot.

Folytonos és valós tartománynak, ha $m=2$ vagy 3, megfelel a sík illetőleg tér összefüggő része a határpontok kizárásával.

Ha valamely tartomány egy folytonos tartomány összes helyeit tartalmazza és ezenkivül még csak e folytonos tartomány közönséges határhelyeit részben vagy egészben, a tartományt *összefüggő*nek nevezzük.

Ép úgy, mint a 6. czikkben látni továbbá, hogy *minden csupán belső helyekből álló tartomány fölbontható folytonos darabokra, hol azonban a darabok száma esetleg határtalan.*

Minden csupán belső helyekből és közönséges határhelyekből álló tartomány fölbontható összefüggő darabokra, melyeknek száma esetleg határtalan.

18. Ha tekintetbe veszszük, hogy a most az $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ helyet jelenti, a 6. czikkben kifejtett tétel közvetetlenül érvényben marad m-szeres sokaságoknál is. E tétel következőkép hangzott:

Ha a az A tartomány belső helye, az $\bar{a}$ pedig nem, akkor az $ac^{(1)}c^{(2)}\ldots c^{(n)}\bar{a}$ úton mindig találni egy h helyet, mely az A közönséges határhelye, míg a megelőző helyek még mind az A tartományon belül feküsznek, bármikép választottuk is a $c^{(1)}\ldots c^{(n)}$ helyeket.

A bizonyítás majdnem szóról-szóra átvihető. Legyen $c^{(k)}c^{(k+1)}$ az első intervallum amaz úton, melyen nem minden hely az A belsejébe tartozik; ha előbb nincs, az utolsó $c^{(n)}$ a mindenesetre ilyen. Ekkor $c^{(k)}$ még mindenesetre az A belsejében fekszik; különben már a $c^{(k-1)}c^{(k)}$ közben volna egy hely, t. i. $c^{(k)}$, mely nem belső helye az A-nak.

Most pedig X alatt valamely 1-nél nagyobb, pozitiv egész számot értve lehet minden pozitiv egész n-hez egy pozitiv egész k_n-et meghatározni úgy, hogy

$$(c_1^{(k)} + \vartheta\,(c_1^{(k+1)} - c_1^{(k)}), \ldots (c_m^{(k)} + \vartheta\,(c_m^{(k+1)} - c_m^{(k)})$$

az A-n belül fekszik, míg

$$0 \leqq \vartheta < \frac{l_n}{X^n};$$

ellenben, ha

$$0 < \frac{l_n}{X^n} \leqq \vartheta < \frac{l_n+1}{X^n} \leqq 1,$$

ezen értékrendszerek közt legalább egy van, mely nem fekszik az A-n belül.

Az $\frac{l_n}{X^n}$ alakú számok az n növekedésével soha nem kisebbednek, de l-nél kisebbek maradnak; van tehát véges és meghatározott határértékük:

$$L = \lim. \frac{l_n}{X^n}$$

és a $c_k\,c_{k+1}$ közhöz tartozó

$$(h_1, h_2 \ldots, h_m) \equiv (c_1^{(k)} + L\,(c_1^{(k+1)} - c_1^{(k)}, \ldots, c_m^{(k)} + L\,(c_m^{(k+1)} - c_m^{(k)}))$$

az A közönséges határhelye lesz, melynek a tételben kifejezett sajátsága van.

19. *Az $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ hely (bármely módon meghatározott) környezete folytonos tartományt és m-szeres sokaságot alkot.*

E tétel egyenlőképen helyes, a környezet értelmezésének bármely alakját használjuk is. Először kimutatjuk, hogy *e környezet folytonos tartomány.*

a) Ha az $(a_1, \ldots, a_m)$ környezete alatt mindazon helyeket értjük, melyekre nézve

$$|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 + \ldots + |x_m - a_m|^2 = \delta'^2 < \delta^2 \qquad (1.)$$

és δ'' oly szám, hogy még:

$$\delta'^2 + 2m\delta'\,\delta'' + \delta''^2 < \delta^2\,{}^*;$$

akkor minden $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m)$ értékrendszer, melyre nézve

$$(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \ldots + (\xi_m - x_m)^2 < \delta''^2$$

szintén az a környezetéhez tartozik, mert ekkor:

$$|\xi_i - x_i| < \delta'', \quad |x_i - a_i| < \delta'$$

$$|\xi_i - a_i|^2 \leq |\xi_i - x_i|^2 + |x_i - a_i^2| + 2|x_i - a_i|\,|\xi_i - x_i|$$

és végre:

$$\sum_{i=1}^{m} |\xi_i - a_i|^2 \leq \delta''^2 + \delta'^2 + 2m\delta'\,\delta'' < \delta^2,$$

a mi mutatja, hogy a tartomány minden helye csakugyan belső hely.

A mi a tartomány helyeinek folytonos összeköttetését illeti, kimutatjuk, hogy x és y-nal mindjárt az xy köz is a tartományhoz tartozik, vagyis hogy ha

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i|^2 = |x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 + \ldots + |x_m - a_m|^2 < \delta^2, \quad (1.)$$

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - a_i|^2 = |y_1 - a_1|^2 + |y_2 - a_2|^2 + \ldots + |y_m - a_m|^2 < \delta^2, \quad (2.)$$

és $\qquad u_i = x_i + \vartheta\,(y_i - x_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

hol ϑ a 0 és 1 közt fekszik, akkor egyszersmind

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i - a_i|^2 = |u_1 - a_1|^2 + |u_2 - a_2|^2 + \ldots + |u_m - a_m|^2 < \delta^2. \quad (3.)$$

Az (1.) és (2.) alatt álló egyenlőtlenségek összeadásánál lesz:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{|x_i - a_i|^2 + |y_i - a_i|^2}{2} < \delta^2;$$

* Hogy δ'' amaz egyenlőtlenségnek eleget tegyen, elég ha:

$$\delta' < 1 \text{ és } \delta'' < \frac{\delta^2 - \delta'^2}{2m\delta + 1};$$

akkor csakugyan:

$$\delta'^2 + 2m\delta'\,\delta'' + \delta''^2 < \delta'^2 + 2m\delta\,\delta'' + \delta'' < \delta^2.$$

de ha p és q valós számok, akkor

$$(p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq \geqq 0$$

és ebből:

$$pq \leqq \frac{p^2+q^2}{2}.$$

Tehát

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i|\,|y_i - a_i| \leqq \sum_{i=1}^{m} \frac{|x_i - a_i|^2 + |y_i - a_i|^2}{2} < \delta^2 \qquad (4.)$$

Ha tehát az (1.), (4.) és (2.) egyenlőtlenségeket rendre megszorozzuk $(1-\vartheta)^2, 2\vartheta(1-\vartheta)$ és ϑ^2, melyek mindannyian pozitiv számok, lesz:

$$\sum_{i=1}^{m} ((1-\vartheta)|x_i - a_i| + \vartheta|y_i - a_i|)^2 < \delta^2;$$

de másrészt:

$$|u_i - a_i| = |(1-\vartheta)(x_i - a_i) + \vartheta(y_i - a_i)| \leqq (1-\vartheta)|x_i - a_i| + \vartheta|y_i - a_i|;$$

tehát

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i - a_i|^2 \leqq \sum_{i=1}^{m} ((1-\vartheta)|x_i - a_i| + \vartheta|y_i - a_i|)^2 < \delta^2,$$

a mi bebizonyítandó volt.

b) Ha most az $(a_1, \ldots, a_m)$ hely környezete alatt mindazon helyeket értjük, melyekre nézve

$$|x_i - a_i| = \varepsilon_i' < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

és az η_i számokat az

$$\eta_i < \varepsilon_i - \varepsilon_i'$$

föltételből határozzuk meg, akkor minden $(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m)$ értékrendszer, melyre nézve

$$|\xi_i - x_i| < \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

szintén az a környezetéhez tartozik, mert ekkor

$$|\xi_i - a_i| \leqq |\xi_i - x_i| + |x_i - a_i| < \eta_i + \varepsilon_i' < \varepsilon_i.$$

Ha x és y e környezet két helye, akkor végre ismét az xy köz minden helye már a tartományhoz tartozik. Ha t. i.

$$|x_i - a_i| < \varepsilon_i\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$|y_i - a_i| < \varepsilon_i\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

és ϑ a 0 és 1 közt fekvő szám lévén,

$$u_i = x_i + \vartheta\,(y_i - x_i),$$

akkor csakugyan

$$|u_i - a_i| = |(1 - \vartheta)(x_i - a_i) + \vartheta\,(y_i - a_i)| \leq$$
$$\leq (1 - \vartheta)\,|x_i - a_i| + \vartheta\,|y_i - a_i| < (1 - \vartheta)\,\varepsilon_i + \vartheta\varepsilon_i = \varepsilon_i.$$

20. Hogy az $(a_1, \ldots, a_m)$ hely környezete *m-szeres sokaságnak tekinthető,* ki lesz mutatva, ha e környezet helyeit és az m számból álló értékrendszerek összességét kölcsönösen egyértelmüleg birjuk egymásra vonatkoztatni.

Ez — a környezet (B) alakjának megfelelőleg — megtörténik a következő egyenletek által:

$$z_i = \frac{x_i - a_i}{\varepsilon_i - |x_i - a_i|}\,, \quad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Ezek alapján megfelel minden $(x_1, \ldots, x_m)$ rendszernek egy $(z_1, \ldots, z_m)$ rendszer. De megfordítva minden $(z_1, \ldots, z_m)$ rendszernek egy oly $(x_1, \ldots, x_m)$, mely az a adott környezetéhez tartozik. Tudniillik amaz egyenletekből:

$$|z_i| = \frac{|x_i - a_i|}{\varepsilon_i - |x_i - a_i|}\,,$$

vagyis

$$|x_i - a_i| = \varepsilon_i\,\frac{|z_i|}{1 + |z_i|}\,,$$

a mi csakugyan ε_i-nél kisebb érték. Az $x_i - a_i$-t, absolut értékének meghatározása után, teljesen megadja ama megjegyzés, hogy az eredeti vonatkozás alapján $x_i - a_i$ és z_i argumentuma ugyanaz.

A környezet (A) alakjának megfelelőleg e tárgyalás szintén mutatja, hogy m-szeres sokasággal van dolgunk, ha $m = 1$; mert ekkor az (A) és (B) föltételek azonosak lesznek. Föltéve most már, hogy tételünk $m - 1$-re helyes, csak az lesz kimutatandó, hogy m-re is helyes marad.

Legyen ismét

$$z_m = \frac{|x_m - a_m|}{\delta - |x_m - a_m|}$$

és $(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1})$ azon értékrendszer, mely az

$$|x_1 - u_1|^2 + \ldots + |x_{m-1} - u_{m-1}|^2 < \delta^2 - |x_m - u_m|^2$$

$m-1$-szeres sokaság $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ helyének ugy felel meg, hogy megfordítva az u-nak ismét megfelel az x hely.

Akkor nemcsak $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$-nek megfelel $(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, z)$ hanem megfordítva is $(u_1, \ldots, u_{m-1}, z_m)$-nek $(x_1 \ldots x_m)$; mert z_m-ből megkapjuk x_m-et, és az x_m meghatározása után az $m-1$-szeres sokaság föltételezett tulajdonsága szerint $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}$-et.

II.

Változó és függvény.

Változó mennyiségek.

21. Valamely mennyiség mérőszáma *állandó* vagy *változó*, a mint földeszszük, hogy e mérő szám meghatározása mindig ugyanazt az értéket adja, vagy pedig hogy különböző értékekhez vezethet.

Minthogy az ily állandó vagy változó mérőszám teljesen meg van határozva értéke, azaz egy szám által, ez is megfelel a mennyiség definicziójának és ily értelemben állandó vagy változó mennyiségekről is beszélünk. Szokásos még e mennyiségeket *tiszta* menynyiségeknek nevezni, míg minden más mennyiség ezekkel szemben — minthogy teljes jellemzésükhez az illető tulajdonság neve, (hossz, hő, stb.) lesz még hozzáteendő — *megnevezett* mennyiség.

Az *állandó* meghatározott számérték; mint ilyent betűvel jelöljük, midőn oly következtetéseket akarunk vonni, melyek az épen előforduló speciális számtól függetlenek, és csak azt tételezik föl, hogy e számérték tárgyalásunkban mindig ugyanaz marad.

A *változó* jelölésére is betűt használunk. Ekkor e betű jelentheti a változónak tulajdonítható értékek bármelyikét, de e mellett mindig jellemzi azt a mennyiséget, melyhez ama változó mérőszám tartozik. Így jelölhetjük egy mozgó pontnak bizonyos hosszegységben kifejezett távolságát egy adott ponttól valamely betűvel, p. x-szel; e jelölés használatánál azután azt mondjuk, hogy bizonyos föltételek mellett (p. bizonyos időben) $x=10$.

Midőn e változót jelentő betű oly állításban fordul elő, mely számok vonatkozását adja, e betű a változónak tulajdonítható értékek bármelyikét jelentheti. Más értéket e betű nem jelenthet; ugyanazon állításon belül mindig ugyanazon értéket jelenti.

Ha p. egy változó, x fölvehet minden valós értéket, akkor erre nézve

$$1-x^2=(1-|x|)(1+|x|).$$

Ez igaz, bármicsoda valós szám az x; de ha x helyébe oly számot teszünk, melynek képzetes része nem tűnik el, p. i-t, az eredmény többé nem helyes. Az említett esetben az állítás a következő volna $2=0$. Ép oly kevéssé szabad, az egyenlőség egyik oldalán p. x helyébe 1-et, a másikon 2-t tenni. Ez azonban nem zárja ki, hogy ilyenkor a helyettesítés *véletlenül* helyes eredményt ad; de ama számtani alak nem szolgál emez eredmény kifejezésére.

A mennyire lehet, az állandókat az abéczé elejéből, a változókat a végéről vett betűkkel jelöljük; de e megállapítás nem tartható fönn föltétlenül, a mennyiben a tárgyalás alatt a szempontok, a vizsgálathoz kötött föltételek változhatnak, de azért nem volna czélszerű az illető mennyiség jelzését közben változtatni.

Azon számok összessége, melyek valamely változó értékei gyanánt szerepelhetnek, természetesen számtartományt alkotnak; e tartományt *a változó tartományá*nak nevezzük.

Az analizis az oly változók viszonyainak elemzésével foglalkozik, melyeknek tartománya egy vagy több folytonos, vagy legalább összefüggő részből áll. A legegyszerűbb ily tartományok a valós, illetőleg a complex számok összességéből állanak.

Szemben evvel az oly változók viszonyainak elemzése, melyeknek tartománya megszámlálható sokaságot alkotó helyek összességéből áll — az *arithmetiká*nak legáltalánosabb föladata. Az arithmetika — e fölfogásban — és az analizis két teljesen különvált tudományág; a mennyiben könnyen belátható, hogy oly tartomány, melynek összes helyei megszámlálható sokaságot alkotnak, nem lehet folytonos vagy összefüggő; sőt egyáltalában belső helye sincs. Mert ha csak egy ilyen volna, e helynek egy bizonyos környezete is a tartományhoz tartozik. De már e környezet helyei nem adhatnak megszámlálható sokaságot; annál kevésbé az összes tartomány helyei. E környezet helyei ugyanis és a számok összessége kölcsönösen egyértelműleg vonatkoztathatók egymásra és igy e két tartomány helyeinek összessége egyidőben megszámlálható vagy sem.

De ez utóbbi tartomány helyeinek sokaságáról tudjuk, hogy nem megszámlálható, tehát ez előbbire nézve is ugyanez áll.

Egy független változó függvényei.

22. Valamely egyes változó leirása teljesen megtörtént, ha megadtuk tartományát azaz a változó által fölvehető értékek összességét. Alapvető jelentőségű tárgyalásokhoz jutunk azonban, ha azon vonatkozásokat vizsgáljuk, melyek két vagy több változó között fönnállhatnak.

Két változó, x és y oly vonatkozásban lehet egymáshoz, hogy minden az x tartományához tartozó értéknek megfelel az y tartományának egy bizonyos értéke, és hogy — bármely értékét vesszuk is az y-tartománynak — mindig van legalább egy értéke az x-tartománynak, melynek ez megfelel. Föltéve, hogy e megfelelés módja meg van adva, azaz hogy van egy kész eljárás, melynek segítségével minden szóba jövő x-hez a hozzá tartozó y-t meghatározhatjuk, azt mondjuk, hogy az y értéke az x értékéből, vagy rövidebben y az x-ből meghatározható, vagy szokottabb kifejezésmóddal élve, hogy *y az x-től függ, y az x függvénye*, megkülönböztetésül a tüstént tárgyalandó általánosításoktól, *y az x egyértékű függvénye.*

Szemben az y-nal, mely e fölfogásban (más változótól) *függő változó*, vagy rövidebben *függveny*, az x, melynek értéktartománya közvetetlen fölsorolás alapján van adva, az ugynevezett *független változó.*

Hangsúlyozandó azonban, hogy a független és függő változó e megkülönböztetését csak a mi fölfogásunk viszi be az illető számokba, és hogy ez a fölfogás módosulásával szintén változik. Igy p. kapcsolat van ama szög mérőszáma (α), melyet az óramutató iránya képez ennek egy bizonyos kezdeti állásával és az egy bizonyos pillanattól kezdve lefolyt idő (t) mérőszáma közt; de ezt úgy foghatjuk föl, hogy az idő határozza meg az óramutató állását, a mikor t a független változó és α a t-nek függvénye, vagy hogy megfordítva az óramutató állásából határozzuk meg az időt, a mikor α a független változó és t az α függvénye.

Az x-ek összessége, melyekhez y-értékek tartoznak, vagyis a független változó tartománya adja *a függvény értelmezési tartományát;* mig az y-ok, azaz azon értékek összességét, melyeket a függvény fölvesz, a *függvény értékkészletének* nevezzük.

Valamely *függvény értelmezése* megtörténik azon eljárás leirása által, mely által minden az értelmezési tartományba tartozó x-hez megtaláljuk a hozzá tartozó y-t.

A legegyszerűbb ily eljárás az, midőn x-ből és bizonyos adott számokból meghatározott számtani műveletek segítségével meghatározzuk az y-t. Igy p. az

$$y = 2x + 3$$

meghatározás megállapit egy bizonyos függvényt, melynek értelmezési tartománya a számok összessége. E meghatározás ugyanis azt mondja — a mit majdnem fölösleges hozzátenni, — hogy az x bármely értékét 2-vel szorozva, és e szorzathoz 3-at hozzáadva, keletkezik az y hozzátartozó értéke.

Elenyésző csekély azon esetek száma, midőn ily x-en és más adott számokon végezendő számtani eljárás az *x minden értékénél lehetséges*. Aránylag nagyon egyszerű alakok mint p.

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1} \quad \text{vagy} \quad y = \frac{x - 1}{x - 1}$$

az ellenkezőt mutatják. Ezeknél, ha $x=1$, a nevező 0 lesz, és az osztás nem végezhető. Ha más adat nem áll rendelkezésünkre, a függvény értelmezési tartománya az összes számokból áll $x=1$ kivételével. E helyen a függvényről még semmit sem tudunk. A függvény ama meghatározása szerint minden x-hez a hozzátartozó y az

$$(x-1)y=2x+3 \quad \text{ill.} \quad (x-1)y=(x-1)$$

egyenletből lesz meghatározandó. De ha $x=1$, ezen egyenletekből lesz: $0=5$, ill. $0=0$, melyek, akár mint az egyik esetben képtelenséghez, akár mint a másik esetben egyenlőséghez jutunk, az y-t nem is tartalmazzák, tehát nem is szolgálhatnak ennek meghatározására. A függvény eme meghatározása azonban esetleg kiegészíthető más adatokból legegyszerűbben, ha külön megállapitjuk, hogy y-nak minő számértéke legyen, ha $x=1$.*

* A 0-sal való osztás kivételes voltának ily kiemelése e helyen még kicsinyesnek látszik; de tekintettel a következőkre igen fontos. Itt van az a pont, hol — számos régibb kézikönyvben — a differencziálszámítás elhagyja a számtani alapot és állítólagos metafizikai fejtegetésekbe burkolódzva mindent «magától érthető»-nek állít, épen akkor, midőn minden érthetetlen lesz. Szemben a már az elemekben föllépő tévedésekkel, előre

Hasonlókép megszünhetik a függvény számtani értelmezése több helyen is, mint p. általánosabban az

$$y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)}$$

függvénynél az $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ helyeken.

Ha a függvény számtani értelmezésében határmüveletek is foglaltatnak, a függvény értelmezési tartománya általánosságban lényegesebb megszorítást szenved.

Igy p. az $y = \sin. x$, $y = a^x$ (hol a pozitiv szám) által megadott függvények értelmezése, a használt számmíveletekkel együtt csupán a valós számokra vonatkozik; az $y = \sin. \frac{1}{x^2 - 1}$-é a valós és tisztán képzetes számokra a $+1$ és -1 kivetelével; az $y = (\text{arc.}\sin. x)$-e azon valós számokra, melyeknél $|x| \leq 1$.

A következő függvényvonatkozásnál:

$$y = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

végtelen sor értéke képezendő és így ezen függvény értelmezési tartománya azon x-ekből áll, melyek ama sort összetartóvá teszik; tehát azon complex számokból, melyekre nézve $|x| < 1$. Ott, a hol a függvény értelmezve van, értéke ugyanaz mint az $y = \frac{1}{1 - x}$ függvényé, melynek azonban értelmezési tartománya tágabb, t. i. a számok összessége az 1 kivételével.

23. Két változó x és y oly vonatkozásban lehet egymáshoz, hogy az x tartományához tartozó értékeknek *általánosságban* megfelel az y tartományának m különböző értéke, m számot tartalmazó *értékcsoportja* és hogy — bármely értékét veszszük is az y-tartománynak — mindig van legalább egy helye az x-tartománynak, mely-

már megjegyezzük, hogy, ha y-ról egyebet nem tudunk, mint hogy $(x-1)\,y = (x-1)$, *nem szabad még* föltételeznünk, hogy a függvény «folytonos az $x=1$ helyen». Ha ezt föltételezzük, akkor ebből új következtetést is vonhatunk, t. i. hogy y, akkor is egyenlő lesz 1-gyel, midőn $x=1$. Esetleg ott a függvény el is vesztheti a folytonosságot. Szóval, itt először utalhatunk ama tévedésre, mely speciális függvényeken észlelt tulajdonságokat a függvények összességére alkalmazhatóknak gondol. *A függvények összessége pedig oly túlságosan általános fogalom, hogy erre még semminemű speciális meghatározás nem vonatkozhatik.*

nek ez megfelel. Hogy «általánosságban» minden x-nek az y-nak m értéke felel meg, ez annyit jelent, hogy az x tartományban szabad előfordulnia a helyek egy megszámlálható sokaságának, melyeknek az y-nak kevesebb mint m, de legalább egy értéke felel meg. Föltéve, hogy e megfelelés módja adva van, y az x *m-értékű függvénye*, míg x-et ismét *független változó*nak nevezzük.

A függvény értelmezési tartománya és a függvény értékkészlete alatt ugyanazt értjük most is, mint előbb.

Így a complex számok körében $\sqrt[k]{x}$ k-értékű függvény; értelmezési tartománya a számok összességéből áll; az m érték mindenütt különböző, kivéve az $x=0$ helyen.

A valós számok körében $\sqrt[2k]{x}$ $2k$-értékű függvény, az értelmezési tartomány a nem negativ valós számokból áll; a két érték mindenütt különböző, kivéve, midőn $x=0$.

A complex számok körében $\sqrt[k]{(x-a)(x-b)(x-c)}$ k-értékű függvény; a k érték mindenütt különböző, kivéve az $x=a$, b, c helyeken.

A valós számok körében $\sqrt{1-\sin^4 x\pi}$ kétértékű függvény; értelmezési tartománya az összes valós számokból áll, mert $1-\sin.^4 x\pi$ mindig $\geqq 0$. A függvény két értéke mindenütt különböző, kivéve a hol $\sin.\pi x=\pm 1$, azaz a hol $x=k+\frac{1}{2}$, k tetszőleges egész számot jelentvén.

A complex számok körében

$$\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}$$

hatértékű függvény; értelmezési tartománya a complex számok összessége, az $x=2$ kivételével, a mely helyen a követelt számítás megakad. A függvénynek mindenütt hat különböző értéke van, kivéve az $x=1$ helyen, hol csak két értékhez jutunk, t. i. $\sqrt{-2}$ és az $x=3$ helyen, hol az értékek száma három, t. i. a $\sqrt[3]{2}$ értékcsoportja.

Az y-ok értékcsoportja, mely az egyes x-eknek megfelel, állhat végre általánosságban a számok végtelen, de megszámlálható sokaságából és ekkor y-t az x *végtelen sok értékű függvényé*nek mondjuk, a hol az «általánosságban» megint annyit jelent, hogy az értelmezési tartományban lehet a helyek egy végtelen, de megszámlálható sokasága, hol a függvényértékek száma véges lesz.

Ily végtelen sok értékű függvényeket adnak a következő megállapitások:

$$y = \text{arcsin.}\, x,\quad y = \text{arccos.}\, x,\quad y = \text{arctg.}\, x,\quad y = \text{arccot.}\, x.$$

Ha valamely több értékű függvénynél általános törvényt állapitunk meg, mely szerint az y értékcsoportját rendezzük és ott, hol a csoportba foglalt értékek száma csökken, egyenlő értékek bevezetése által kiegészítjük e számot, végre végtelen sok értéknél esetleg egyebütt is behozunk egyenlő értékeket, — akkor az y-nak mindenütt első, második,..., k-adik,... értékét véve, egyértékű függvényekhez jutunk, melyeknek összessége a többértékű függvényt teljesen jellemzi.

Az ily módon nyert egyértékű függvények *a többértékű függvénynek egyes ágai.*

Igy p. a $\sqrt[3]{x}$ háromértékű függvénynek három ága

$$(\sqrt[3]{x}),\quad \alpha_1(\sqrt[3]{x}),\quad \alpha_2(\sqrt[3]{x}),$$

ha $(\sqrt[3]{x})$ a köbgyök főértékét, α_1 és α_2 az egységnek két képzetes köbgyökét jelenti. Az $x=0$ helyen föllépő 0 értékét ekkor háromszor hozzuk számításba.

Az arccos. x végtelen sok értékű függvény ágai:

$$(\text{arccos.}\, x),\quad (\text{arccos.}\, x) + 2\pi, \ldots,\quad (\text{arccos.}\, x) + 2l\pi, \ldots$$
$$-(\text{arccos.}\, x), -(\text{arccos.}\, x) + 2\pi, \ldots, -(\text{arccos.}\, x) + 2l\pi, \ldots$$

Itt, midőn $x = \pm 1$, a föllépő értéksorozatnak $(0, 2\pi, 4\pi, \ldots)$ minden értékét kétszer vettük, a mi által az ágak elkülönítése természetesebb módon volt eszközölhető.

Egyáltalában az egyes értékcsoportok rendezése bárminő módon történhetik, és e szerint a többértékű függvény fölbontása egyértékű függvényágakra is változik. Minden egyes függvénynél föladatunk lesz a berendezést úgy eszközölni, hogy a keletkező egyértékű függvények lehető egyszerű alkatúak legyenek.

24. Az oly változót, melynek tartománya csupán valós számokból áll, röviden *valós változó*nak nevezzük; az ellenkező esetben a változó *complex változó.*

Valós változóknak csak valós függvényeit kell vizsgálnunk, azaz oly függvényeket, melyeknek értékei szintén csak valósak; az ellenkező esetben a függvényértékek valos részei és képzetes részei (az i szorzó elhagyásával) külön-külön a valós változó valós függvényei, melyek együttesen a complex függvényt teljesen jellemzik.

Valamint a számok jelzésére betűket használunk, midőn e számok speciális értékétől független következtetéseket akarunk vonni, úgy a függvények jellemzésére is hasonló jelzéseket vezetünk be, melyek azután a változónak egy bizonyos, de egyelőre közelebbről meg nem állapitott függvényét jelölik. Ily jelekül (*függvény-karakterisztika*) ismét betűket, első sorban az f betű különböző alakjait használjuk, a mely után a független változót zárjelbe téve irjuk, p. $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$. Ha itt x helyébe számot teszünk, ez a függvénynek hozzátartozó értékét jelenti, p. $f(0)$, $F(a)$, $\varphi(1)$. Ha a függvény kész képlet által van adva, azt, hogy x helyébe adott szám teendő, így is jelöljük:

$$\left(\frac{2x+3}{5+x}\right)_{x=1}$$

Ezek után az ily jelzés $f\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)$ értelme is világos. Az x-ből előbb kiszámitandó $\frac{a+bx}{c+dx}$, és ez szerepel azután mint a független változó értéke, melyhez végre keresendő a függvény értéke.

Itt néha mint p. $f(1+x)$-nél — úgy látszik — kétség támadhatna, vajjon az f függvényjel-e vagy szorzó. De tudjuk az illető tárgyalásban, hogy f nem szám, hanem függvény jele, tehát $f(1+x)$ nem olvasható szorzatnak.

Egyes betűk, mint Γ, Θ és mások le vannak foglalva bizonyos meghatározott függvények jelölésére; a függvények végtelen sokaságával szemben a meghatározott függvények jelölésére szolgáló jelek mindinkább szaporodnak. Többnyire egyes szavakból keletkezett rövidítések, mint p. sin. x, tg. x stb.

Ha a független változó és adott számértékek véges vagy végtelen sorából a négy alapművelet és határátmenetek segítségével mindenkor ugyanazon módon kiszámithatjuk a függvény hozzá tartozó értékét vagy értékcsoportját — a mikor tehát a függvényvonatkozás kész képletek által kifejezhető —; akkor azt mondjuk, hogy *a függvény analitikai kifejezés által van adva.* Tekintettel arra, hogy minden határátmenet eredménye végtelen sor alakjában ábrázolható, t. i.

és $(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1})$ azon értékrendszer, mely az

$$|x_1 - a_1|^2 + \ldots + |x_{m-1} - a_{m-1}|^2 < \delta^2 - |x_m - a_m|^2$$

$m-1$-szeres sokaság $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ helyének ugy felel meg, hogy megfordítva az u-nak ismét megfelel az x hely.

Akkor nemcsak $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$-nek megfelel $(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, z)$ hanem megfordítva is $(u_1, \ldots, u_{m-1}, z_m)$-nek $(x_1 \ldots x_m)$; mert z_m-ből megkapjuk x_m-et, és az x_m meghatározása után az $m-1$-szeres sokaság föltételezett tulajdonsága szerint $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}$-et.

II.

Változó és függvény.

Változó mennyiségek.

21. Valamely mennyiség mérőszáma *állandó* vagy *változó*, a mint fölteszszük, hogy e mérő szám meghatározása mindig ugyanazt az értéket adja, vagy pedig hogy különböző értékekhez vezethet.

Minthogy az ily állandó vagy változó mérőszám teljesen meg van határozva értéke, azaz egy szám által, ez is megfelel a mennyiség definicziójának és ily értelemben állandó vagy változó mennyiségekről is beszélünk. Szokásos még e mennyiségeket *tiszta* mennyiségeknek nevezni, míg minden más mennyiség ezekkel szemben — minthogy teljes jellemzésükhez az illető tulajdonság neve, (hossz, hő, stb.) lesz még hozzáteendő — *megnevezett* mennyiség.

Az *állandó* meghatározott számérték; mint ilyent betűvel jelöljük, midőn oly következtetéseket akarunk vonni, melyek az épen előforduló speciális számtól függetlenek, és csak azt tételezik föl, hogy e számérték tárgyalásunkban mindig ugyanaz marad.

A *változó* jelölésére is betűt használunk. Ekkor e betű jelentheti a változónak tulajdonítható értékek bármelyikét, de e mellett mindig jellemzi azt a mennyiséget, melyhez ama változó mérőszám tartozik. Így jelölhetjük egy mozgó pontnak bizonyos hosszegységben kifejezett távolságát egy adott ponttól valamely betűvel, p. x-szel; e jelölés használatánál azután azt mondjuk, hogy bizonyos föltételek mellett (p. bizonyos időben) $x = 10$.

Midőn e változót jelentő betű oly állításban fordul elő, mely számok vonatkozását adja, e betű a változónak tulajdonítható értékek bármelyikét jelentheti. Más értéket e betű nem jelenthet; ugyanazon állításon belül mindig ugyanazon értéket jelenti.

Ha p. egy változó, x fölvehet minden valós értéket, akkor erre nézve

$$1-x^2=(1-|x|)(1+|x|).$$

Ez igaz, bármicsoda valós szám az x; de ha x helyébe oly számot teszünk, melynek képzetes része nem tűnik el, p. i-t, az eredmény többé nem helyes. Az említett esetben az állítás a következő volna $2=0$. Ép oly kevéssé szabad, az egyenlőség egyik oldalán p. x helyébe 1-et, a másikon 2-t tenni. Ez azonban nem zárja ki, hogy ilyenkor a helyettesítés *véletlenül* helyes eredményt ad; de ama számtani alak nem szolgál emez eredmény kifejezésére.

A mennyire lehet, az állandókat az abécze elejéből, a változókat a végéről vett betűkkel jelöljük; de e megállapítás nem tartható fönn föltétlenül, a mennyiben a tárgyalás alatt a szempontok, a vizsgálathoz kötött föltételek változhatnak, de azért nem volna czélszerű az illető mennyiség jelzését közben változtatni.

Azon számok összessége, melyek valamely változó értékei gyanánt szerepelhetnek, természetesen számtartományt alkotnak; e tartományt *a változó tartományá*nak nevezzük.

Az analizis az oly változók viszonyainak elemzésével foglalkozik, melyeknek tartománya egy vagy több folytonos, vagy legalább összefüggő részből áll. A legegyszerűbb ily tartományok a valós, illetőleg a complex számok összességéből állanak.

Szemben evvel az oly változók viszonyainak elemzése, melyeknek tartománya megszámlálható sokaságot alkotó helyek összességéből áll — az *arithmetiká*nak legáltalánosabb föladata. Az arithmetika — e fölfogásban — és az analizis két teljesen különvált tudományág; a mennyiben könnyen belátható, hogy oly tartomány, melynek összes helyei megszámlálható sokaságot alkotnak, nem lehet folytonos vagy összefüggő; sőt egyáltalában belső helye sincs. Mert ha csak egy ilyen volna, e helynek egy bizonyos környezete is a tartományhoz tartozik. De már e környezet helyei nem adhatnak megszámlálható sokaságot; annál kevésbé az összes tartomány helyei. E környezet helyei ugyanis és a számok összessége kölcsönösen egyértelműleg vonatkoztathatók egymásra és igy e két tartomány helyeinek összessége egyidőben megszámlálható vagy sem.

De ez utóbbi tartomány helyeinek sokaságáról tudjuk, hogy nem megszámlálható, tehát ez előbbire nézve is ugyanez áll.

Egy független változó függvényei.

22. Valamely egyes változó leirása teljesen megtörtént, ha megadtuk tartományát azaz a változó által fölvehető értékek összességét. Alapvető jelentőségű tárgyalásokhoz jutunk azonban, ha azon vonatkozásokat vizsgáljuk, melyek két vagy több változó között fönnállhatnak.

Két változó, x és y oly vonatkozásban lehet egymáshoz, hogy minden az x tartományához tartozó értéknek megfelel az y tartományának egy bizonyos értéke, és hogy — bármely értékét vesszuk is az y-tartománynak — mindig van legalább egy értéke az x-tartománynak, melynek ez megfelel. Föltéve, hogy e megfelelés módja meg van adva, azaz hogy van egy kész eljárás, melynek segitségével minden szóba jövő x-hez a hozzá tartozó y-t meghatározhatjuk, azt mondjuk, hogy az y értéke az x értékéből, vagy rövidebben y az x-ből meghatározható, vagy szokottabb kifejezésmóddal élve, hogy *y az x-től függ, y az x függvénye,* megkülönböztetésül a tüstént tárgyalandó általánosításoktól, *y az x egyértékű függvénye.*

Szemben az y-nal, mely e fölfogásban (más változótól) *függő változó,* vagy rövidebben *függvény,* az x, melynek értéktartománya közvetetlen fölsorolás alapján van adva, az úgynevezett *független változó.*

Hangsúlyozandó azonban, hogy a független és függő változó e megkülönböztetését csak a mi fölfogásunk viszi be az illető számokba, és hogy ez a fölfogás módosulásával szintén változik. Igy p. kapcsolat van ama szög mérőszáma (α), melyet az óramutató iránya képez ennek egy bizonyos kezdeti állásával és az egy bizonyos pillanattól kezdve lefolyt idő (t) mérőszáma közt; de ezt úgy foghatjuk föl, hogy az idő határozza meg az óramutató állását, a mikor t a független változó és α a t-nek függvénye, vagy hogy megfordítva az óramutató állásából határozzuk meg az időt, a mikor α a független változó és t az α függvénye.

Az x-ek összessége, melyekhez y-értékek tartoznak, vagyis a független változó tartománya adja *a függvény értelmezési tartományát;* mig az y-ok, azaz azon értékek összességét, melyeket a függvény fölvesz, a *függvény értékkészletének* nevezzük.

Valamely *függvény értelmezése* megtörténik azon eljárás leirása által, mely által minden az értelmezési tartományba tartozó x-hez megtaláljuk a hozzá tartozó y-t.

A legegyszerűbb ily eljárás az, midőn x-ből és bizonyos adott számokból meghatározott számtani műveletek segítségével meghatározzuk az y-t. Igy p. az

$$y = 2x + 3$$

meghatározás megállapit egy bizonyos függvényt, melynek értelmezési tartománya a számok összessége. E meghatározás ugyanis azt mondja — a mit majdnem fölösleges hozzátenni, — hogy az x bármely értékét 2-vel szorozva, és e szorzathoz 3-at hozzáadva, keletkezik az y hozzátartozó értéke.

Elenyésző csekély azon esetek száma, midőn ily x-en és más adott számokon végezendő számtani eljárás az *x minden értékénél lehetséges*. Aránylag nagyon egyszerű alakok mint p.

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1} \quad \text{vagy} \quad y = \frac{x - 1}{x - 1}$$

az ellenkezőt mutatják. Ezeknél, ha $x = 1$, a nevező 0 lesz, és az osztás nem végezhető. Ha más adat nem áll rendelkezésünkre, a függvény értelmezési tartománya az összes számokból áll $x = 1$ kivételével. E helyen a függvényről még semmit sem tudunk. A függvény ama meghatározása szerint minden x-hez a hozzátartozó y az

$$(x-1)y = 2x+3 \quad \text{ill.} \quad (x-1)y = (x-1)$$

egyenletből lesz meghatározandó. De ha $x = 1$, ezen egyenletekből lesz: $0 = 5$, ill. $0 = 0$, melyek, akár mint az egyik esetben képtelenséghez, akár mint a másik esetben egyenlőséghez jutunk, az y-t nem is tartalmazzák, tehát nem is szolgálhatnak ennek meghatározására. A függvény eme meghatározása azonban esetleg kiegészíthető más adatokból legegyszerűbben, ha külön megállapitjuk, hogy y-nak minő számértéke legyen, ha $x = 1$.*

* A 0-sal való osztás kivételes voltának ily kiemelése e helyen még kicsinyesnek látszik; de tekintettel a következőkre igen fontos. Itt van az a pont, hol — számos régibb kézikönyvben — a differencziálszámítás elhagyja a számtani alapot és állítólagos metafizikai fejtegetésekbe burkolódzva mindent «magától érthető»-nek állít, épen akkor, midőn minden érthetetlen lesz. Szemben a már az elemekben föllépő tévedésekkel, előre

Hasonlókép megszünhetik a függvény számtani értelmezése több helyen is, mint p. általánosabban az

$$y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)}$$

függvénynél az $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ helyeken.

Ha a függvény számtani értelmezésében határmüveletek is foglaltatnak, a függvény értelmezési tartománya általánosságban lényegesebb megszorítást szenved.

Igy p. az $y = \sin. x$, $y = a^x$ (hol a pozitiv szám) által megadott függvények értelmezése, a használt számmíveletekkel együtt csupán a valós számokra vonatkozik; az $y = \sin. \frac{1}{x^2-1}$-é a valós és tisztán képzetes számokra a $+1$ és -1 kivetelével; az $y =$ (arc. sin. x)-é azon valós számokra, melyeknél $|x| \leq 1$.

A következő függvényvonatkozásnál:

$$y = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

végtelen sor értéke képezendő és így ezen függvény értelmezési tartománya azon x-ekből áll, melyek ama sort összetartóvá teszik; tehát azon complex számokból, melyekre nézve $|x| < 1$. Ott, a hol a függvény értelmezve van, értéke ugyanaz mint az $y = \frac{1}{1-x}$ függvényé, melynek azonban értelmezési tartománya tágabb, t. i. a számok összessége az 1 kivételével.

23. Két változó x és y oly vonatkozásban lehet egymáshoz, hogy az x tartományához tartozó értékeknek *általánosságban* megfelel az y tartományának m különböző értéke, m számot tartalmazó *értékcsoportja* és hogy — bármely értékét veszszük is az y-tartománynak — mindig van legalább egy helye az x-tartománynak, mely-

---

már megjegyezzük, hogy, ha y-ról egyebet nem tudunk, mint hogy $(x-1)\,y = (x-1)$, *nem szabad még* föltételeznünk, hogy a függvény «folytonos az $x=1$ helyen». Ha ezt föltételezzük, akkor ebből új következtetést is vonhatunk, t. i. hogy y, akkor is egyenlő lesz 1-gyel, midőn $x=1$. Esetleg ott a függvény el is vesztheti a folytonosságot. Szóval, itt először utalhatunk ama tévedésre, mely speciális függvényeken észlelt tulajdonságokat a függvények összességére alkalmazhatóknak gondol. *A függvények összessége pedig oly túlságosan általános fogalom, hogy erre még semminemű speciális meghatározás nem vonatkozhatik.*

nek ez megfelel. Hogy «általánosságban» minden x-nek az y-nak m értéke felel meg, ez annyit jelent, hogy az x tartományban szabad előfordulnia a helyek egy megszámlálható sokaságának, melyeknek az y-nak kevesebb mint m, de legalább egy értéke felel meg. Föltéve, hogy e megfelelés módja adva van, y az x *m-értékű függvénye*, míg x-et ismét *független változónak* nevezzük.

A függvény értelmezési tartománya és a függvény értékkészlete alatt ugyanazt értjük most is, mint előbb.

Így a complex számok körében $\sqrt[k]{x}$ k-értékű függvény; értelmezési tartománya a számok összességéből áll; az m érték mindenütt különböző, kivéve az $x=0$ helyen.

A valós számok körében $\sqrt[2k]{x}$ $2k$-értékű függvény, az értelmezési tartomány a nem negativ valós számokból áll; a két érték mindenütt különböző, kivéve, midőn $x=0$.

A complex számok körében $\sqrt[k]{(x-a)(x-b)(x-c)}$ k-értékű függvény; a k érték mindenütt különböző, kivéve az $x=a, b, c$ helyeken.

A valós számok körében $\sqrt{1-\sin^4 x\pi}$ kétértékű függvény; értelmezési tartománya az összes valós számokból áll, mert $1-\sin.^4 x\pi$ mindig ≥ 0. A függvény két értéke mindenütt különböző, kivéve a hol $\sin. \pi x = \pm 1$, azaz a hol $x=k+\frac{1}{2}$, k tetszőleges egész számot jelentvén.

A complex számok körében

$$\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}$$

hatértékű függvény; értelmezési tartománya a complex számok összessége, az $x=2$ kivételével, a mely helyen a követelt számítás megakad. A függvénynek mindenütt hat különböző értéke van, kivéve az $x=1$ helyen, hol csak két értékhez jutunk, t. i. $\sqrt{-2}$ és az $x=3$ helyen, hol az értékek száma három, t. i. a $\sqrt[3]{2}$ értékcsoportja.

Az y-ok értékcsoportja, mely az egyes x-eknek megfelel, állhat végre általánosságban a számok végtelen, de megszámlálható sokaságából és ekkor y-t az x *végtelen sok értékű függvényének* mondjuk, a hol az «általánosságban» megint annyit jelent, hogy az értelmezési tartományban lehet a helyek egy végtelen, de megszámlálható sokasága, hol a függvényértékek száma véges lesz.

és $(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1})$ azon értékrendszer, mely az

$$|x_1 - a_1|^2 + \ldots + |x_{m-1} - a_{m-1}|^2 < \delta^2 - |x_m - a_m|^2$$

$m-1$-szeres sokaság $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ helyének ugy felel meg, hogy megfordítva az u-nak ismét megfelel az x hely.

Akkor nemcsak $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$-nek megfelel $(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, z)$ hanem megfordítva is $(u_1, \ldots, u_{m-1}, z_m)$-nek $(x_1 \ldots x_m)$; mert z_m-ből megkapjuk x_m-et, és az x_m meghatározása után az $m-1$-szeres sokaság föltételezett tulajdonsága szerint $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}$-et.

II.

Változó és függvény.

Változó mennyiségek.

21. Valamely mennyiség mérőszáma *állandó* vagy *változó*, a mint fölteszszük, hogy e mérő szám meghatározása mindig ugyanazt az értéket adja, vagy pedig hogy különböző értékekhez vezethet.

Minthogy az ily állandó vagy változó mérőszám teljesen meg van határozva értéke, azaz egy szám által, ez is megfelel a mennyiség definicziójának és ily értelemben állandó vagy változó mennyiségekről is beszélünk. Szokásos még e mennyiségeket *tiszta* menynyiségeknek nevezni, míg minden más mennyiség ezekkel szemben — minthogy teljes jellemzésükhez az illető tulajdonság neve, (hossz, hő, stb.) lesz még hozzáteendő — *megnevezett* mennyiség.

Az *állandó* meghatározott számérték; mint ilyent betűvel jelöljük, midőn oly következtetéseket akarunk vonni, melyek az épen előforduló speciális számtól függetlenek, és csak azt tételezik föl, hogy e számérték tárgyalásunkban mindig ugyanaz marad.

A *változó* jelölésére is betűt használunk. Ekkor e betű jelentheti a változónak tulajdonítható értékek bármelyikét, de e mellett mindig jellemzi azt a mennyiséget, melyhez ama változó mérőszám tartozik. Így jelölhetjük egy mozgó pontnak bizonyos hosszegységben kifejezett távolságát egy adott ponttól valamely betűvel, p. x-szel; e jelölés használatánál azután azt mondjuk, hogy bizonyos föltételek mellett (p. bizonyos időben) $x = 10$.

Midőn e változót jelentő betű oly állításban fordul elő, mely számok vonatkozását adja, e betű a változónak tulajdonítható értékek bármelyikét jelentheti. Más értéket e betű nem jelenthet; ugyanazon állításon belül mindig ugyanazon értéket jelenti.

Ha p. egy változó, x fölvehet minden valós értéket, akkor erre nézve

$$1-x^2=(1-|x|)(1+|x|).$$

Ez igaz, bármicsoda valós szám az x; de ha x helyébe oly számot teszünk, melynek képzetes része nem tűnik el, p. i-t, az eredmény többé nem helyes. Az említett esetben az állítás a következő volna $2=0$. Ép oly kevéssé szabad, az egyenlőség egyik oldalán p. x helyébe 1-et, a másikon 2-t tenni. Ez azonban nem zárja ki, hogy ilyenkor a helyettesítés *véletlenül* helyes eredményt ad; de ama számtani alak nem szolgál emez eredmény kifejezésére.

A mennyire lehet, az állandókat az abéczé elejéből, a változókat a végéről vett betűkkel jelöljük; de e megállapítás nem tartható fönn föltétlenül, a mennyiben a tárgyalás alatt a szempontok, a vizsgálathoz kötött föltételek változhatnak, de azért nem volna czélszerű az illető mennyiség jelzését közben változtatni.

Azon számok összessége, melyek valamely változó értékei gyanánt szerepelhetnek, természetesen számtartományt alkotnak; e tartományt *a változó tartományá*nak nevezzük.

Az analizis az oly változók viszonyainak elemzésével foglalkozik, melyeknek tartománya egy vagy több folytonos, vagy legalább összefüggő részből áll. A legegyszerűbb ily tartományok a valós, illetőleg a complex számok összességéből állanak.

Szemben evvel az oly változók viszonyainak elemzése, melyeknek tartománya megszámlálható sokaságot alkotó helyek összességéből áll — az *arithmetiká*nak legáltalánosabb föladata. Az arithmetika — e fölfogásban — és az analizis két teljesen különvált tudományág; a mennyiben könnyen belátható, hogy oly tartomány, melynek összes helyei megszámlálható sokaságot alkotnak, nem lehet folytonos vagy összefüggő; sőt egyáltalában belső helye sincs. Mert ha csak egy ilyen volna, e helynek egy bizonyos környezete is a tartományhoz tartozik. De már e környezet helyei nem adhatnak megszámlálható sokaságot; annál kevésbé az összes tartomány helyei. E környezet helyei ugyanis és a számok összessége kölcsönösen egyértelműleg vonatkoztathatók egymásra és igy e két tartomány helyeinek összessége egyidőben megszámlálható vagy sem.

és $(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1})$ azon értékrendszer, mely az

$$|x_1 - a_1|^2 + \ldots + |x_{m-1} - a_{m-1}|^2 < \delta^2 - |x_m - a_m|^2$$

$m-1$-szeres sokaság $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ helyének ugy felel meg, hogy megfordítva az u-nak ismét megfelel az x hely.

Akkor nemcsak $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$-nek megfelel $(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, z)$ hanem megfordítva is $(u_1, \ldots, u_{m-1}, z_m)$-nek $(x_1 \ldots x_m)$; mert z_m-ből megkapjuk x_m-et, és az x_m meghatározása után az $m-1$-szeres sokaság föltételezett tulajdonsága szerint $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}$-et.

II.

Változó és függvény.

Változó mennyiségek.

21. Valamely mennyiség mérőszáma *állandó* vagy *változó*, a mint fölteszszük, hogy e mérő szám meghatározása mindig ugyanazt az értéket adja, vagy pedig hogy különböző értékekhez vezethet.

Minthogy az ily állandó vagy változó mérőszám teljesen meg van határozva értéke, azaz egy szám által, ez is megfelel a mennyiség definicziójának és ily értelemben állandó vagy változó mennyiségekről is beszélünk. Szokásos még e mennyiségeket *tiszta* menynyiségeknek nevezni, míg minden más mennyiség ezekkel szemben — minthogy teljes jellemzésükhez az illető tulajdonság neve, (hossz, hő, stb.) lesz még hozzáteendő — *megnevezett* mennyiség.

Az *állandó* meghatározott számérték; mint ilyent betűvel jelöljük, midőn oly következtetéseket akarunk vonni, melyek az épen előforduló speciális számtól függetlenek, és csak azt tételezik föl, hogy e számérték tárgyalásunkban mindig ugyanaz marad.

A *változó* jelölésére is betűt használunk. Ekkor e betű jelentheti a változónak tulajdonítható értékek bármelyikét, de e mellett mindig jellemzi azt a mennyiséget, melyhez ama változó mérőszám tartozik. Így jelölhetjük egy mozgó pontnak bizonyos hosszegységben kifejezett távolságát egy adott ponttól valamely betűvel, p. x-szel; e jelölés használatánál azután azt mondjuk, hogy bizonyos föltételek mellett (p. bizonyos időben) $x = 10$.

Midőn e változót jelentő betű oly állításban fordul elő, mely számok vonatkozását adja, e betű a változónak tulajdonítható értékek bármelyikét jelentheti. Más értéket e betű nem jelenthet; ugyanazon állításon belül mindig ugyanazon értéket jelenti.

Ha p. egy változó, x fölvehet minden valós értéket, akkor erre nézve

$$1-x^2=(1-|x|)(1+|x|).$$

Ez igaz, bármicsoda valós szám az x; de ha x helyébe oly számot teszünk, melynek képzetes része nem tűnik el, p. i-t, az eredmény többé nem helyes. Az említett esetben az állítás a következő volna $2=0$. Ép oly kevéssé szabad, az egyenlőség egyik oldalán p. x helyébe 1-et, a másikon 2-t tenni. Ez azonban nem zárja ki, hogy ilyenkor a helyettesítés *véletlenül* helyes eredményt ad; de ama számtani alak nem szolgál emez eredmény kifejezésére.

A mennyire lehet, az állandókat az abéczé elejéből, a változókat a végéről vett betűkkel jelöljük; de e megállapítás nem tartható fönn föltétlenül, a mennyiben a tárgyalás alatt a szempontok, a vizsgálathoz kötött föltételek változhatnak, de azért nem volna czélszerű az illető mennyiség jelzését közben változtatni.

Azon számok összessége, melyek valamely változó értékei gyanánt szerepelhetnek, természetesen számtartományt alkotnak; e tartományt *a változó tartományá*nak nevezzük.

Az analizis az oly változók viszonyainak elemzésével foglalkozik, melyeknek tartománya egy vagy több folytonos, vagy legalább összefüggő részből áll. A legegyszerűbb ily tartományok a valós, illetőleg a complex számok összességéből állanak.

Szemben evvel az oly változók viszonyainak elemzése, melyeknek tartománya megszámlálható sokaságot alkotó helyek összességéből áll — az *arithmetiká*nak legáltalánosabb föladata. Az arithmetika — e fölfogásban — és az analizis két teljesen különvált tudományág; a mennyiben könnyen belátható, hogy oly tartomány, melynek összes helyei megszámlálható sokaságot alkotnak, nem lehet folytonos vagy összefüggő; sőt egyáltalában belső helye sincs. Mert ha csak egy ilyen volna, e helynek egy bizonyos környezete is a tartományhoz tartozik. De már e környezet helyei nem adhatnak megszámlálható sokaságot; annál kevésbé az összes tartomány helyei. E környezet helyei ugyanis és a számok összessége kölcsönösen egyértelműleg vonatkoztathatók egymásra és igy e két tartomány helyeinek összessége egyidőben megszámlálható vagy sem.

De ez utóbbi tartomány helyeinek sokaságáról tudjuk, hogy nem megszámlálható, tehát ez előbbire nézve is ugyanez áll.

Egy független változó függvényei.

22. Valamely egyes változó leirása teljesen megtörtént, ha megadtuk tartományát azaz a változó által fölvehető értékek összességét. Alapvető jelentőségű tárgyalásokhoz jutunk azonban, ha azon vonatkozásokat vizsgáljuk, melyek két vagy több változó között fönnállhatnak.

Két változó, x és y oly vonatkozásban lehet egymáshoz, hogy minden az x tartományához tartozó értéknek megfelel az y tartományának egy bizonyos értéke, és hogy — bármely értékét vesszuk is az y-tartománynak — mindig van legalább egy értéke az x-tartománynak, melynek ez megfelel. Föltéve, hogy e megfelelés módja meg van adva, azaz hogy van egy kész eljárás, melynek segítségével minden szóba jövő x-hez a hozzá tartozó y-t meghatározhatjuk, azt mondjuk, hogy az y értéke az x értékéből, vagy rövidebben y az x-ből meghatározható, vagy szokottabb kifejezésmóddal élve, hogy *y az x-től függ, y az x függvénye,* megkülönböztetésül a tüstént-tárgyalandó általánosításoktól, *y az x egyértékű függvénye.*

Szemben az y-nal, mely e fölfogásban (más változótól) *függő változó,* vagy rövidebben *függveny,* az x, melynek értéktartománya közvetetlen fölsorolás alapján van adva, az úgynevezett *független változó.*

Hangsúlyozandó azonban, hogy a független és függő változó e megkülönböztetését csak a mi fölfogásunk viszi be az illető számokba, és hogy ez a fölfogás módosulásával szintén változik. Igy p. kapcsolat van ama szög mérőszáma (α), melyet az óramutató iránya képez ennek egy bizonyos kezdeti állásával és az egy bizonyos pillanattól kezdve lefolyt idő (t) mérőszáma közt; de ezt úgy foghatjuk föl, hogy az idő határozza meg az óramutató állását, a mikor t a független változó és α a t-nek függvénye, vagy hogy megfordítva az óramutató állásából határozzuk meg az időt, a mikor α a független változó és t az α függvénye.

Az x-ek összessége, melyekhez y-értékek tartoznak, vagyis a független változó tartománya adja *a függvény értelmezési tartományát;* mig az y-ok, azaz azon értékek összességét, melyeket a függvény fölvesz, a *függvény értékkészletének* nevezzük.

Valamely *függvény értelmezése* megtörténik azon eljárás leirása által, mely által minden az értelmezési tartományba tartozó x-hez megtaláljuk a hozzá tartozó y-t.

A legegyszerűbb ily eljárás az, midőn x-ből és bizonyos adott számokból meghatározott számtani műveletek segítségével meghatározzuk az y-t. Igy p. az

$$y = 2x + 3$$

meghatározás megállapít egy bizonyos függvényt, melynek értelmezési tartománya a számok összessége. E meghatározás ugyanis azt mondja — a mit majdnem fölösleges hozzátenni, — hogy az x bármely értékét 2-vel szorozva, és e szorzathoz 3-at hozzáadva, keletkezik az y hozzátartozó értéke.

Elenyésző csekély azon esetek száma, midőn ily x-en és más adott számokon végezendő számtani eljárás az *x minden értékénél lehetséges*. Aránylag nagyon egyszerű alakok mint p.

$$y = \frac{2x+3}{x-1} \quad \text{vagy} \quad y = \frac{x-1}{x-1}$$

az ellenkezőt mutatják. Ezeknél, ha $x=1$, a nevező 0 lesz, és az osztás nem végezhető. Ha más adat nem áll rendelkezésünkre, a függvény értelmezési tartománya az összes számokból áll $x=1$ kivételével. E helyen a függvényről még semmit sem tudunk. A függvény ama meghatározása szerint minden x-hez a hozzátartozó y az

$$(x-1)\,y = 2x+3 \quad \text{ill.} \quad (x-1)\,y = (x-1)$$

egyenletből lesz meghatározandó. De ha $x=1$, ezen egyenletekből lesz: $0=5$, ill. $0=0$, melyek, akár mint az egyik esetben képtelenséghez, akár mint a másik esetben egyenlőséghez jutunk, az y-t nem is tartalmazzák, tehát nem is szolgálhatnak ennek meghatározására. A függvény eme meghatározása azonban esetleg kiegészíthető más adatokból legegyszerűbben, ha külön megállapitjuk, hogy y-nak minő számértéke legyen, ha $x=1$.*

* A 0-sal való osztás kivételes voltának ily kiemelése e helyen még kicsinyesnek látszik; de tekintettel a következőkre igen fontos. Itt van az a pont, hol — számos régibb kézikönyvben — a differenciálszámítás elhagyja a számtani alapot és állítólagos metafizikai fejtegetésekbe burkolódzva mindent «magától érthető»-nek állít, épen akkor, midőn minden érthetetlen lesz. Szemben a már az elemekben föllépő tévedésekkel, előre

Hasonlókép megszünhetik a függvény számtani értelmezése több helyen is, mint p. általánosabban az

$$y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)}$$

függvénynél az $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ helyeken.

Ha a függvény számtani értelmezésében határmüveletek is foglaltatnak, a függvény értelmezési tartománya általánosságban lényegesebb megszorítást szenved.

Igy p. az $y = \sin. x$, $y = a^x$ (hol a pozitiv szám) által megadott függvények értelmezése, a használt számmíveletekkel együtt csupán a valós számokra vonatkozik; az $y = \sin. \frac{1}{x^2-1}$-é a valós és tisztán képzetes számokra a $+1$ és -1 kivetelével; az $y = (\text{arc.} \sin. x)$-é azon valós számokra, melyeknél $|x| \leq 1$.

A következő függvényvonatkozásnál:

$$y = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

végtelen sor értéke képezendő és így ezen függvény értelmezési tartománya azon x-ekből áll, melyek ama sort összetartóvá teszik; tehát azon complex számokból, melyekre nézve $|x| < 1$. Ott, a hol a függvény értelmezve van, értéke ugyanaz mint az $y = \frac{1}{1-x}$ függvényé, melynek azonban értelmezési tartománya tágabb, t. i. a számok összessége az 1 kivételével.

23. Két változó x és y oly vonatkozásban lehet egymáshoz, hogy az x tartományához tartozó értékeknek *általánosságban* megfelel az y tartományának m különböző értéke, m számot tartalmazó *értékcsoportja* és hogy — bármely értékét veszszük is az y-tartománynak — mindig van legalább egy helye az x-tartománynak, mely-

már megjegyezzük, hogy, ha y-ról egyebet nem tudunk, mint hogy $(x-1)\,y = (x-1)$, *nem szabad még* föltételeznünk, hogy a függvény «folytonos az $x=1$ helyen». Ha ezt föltételezzük, akkor ebből új következtetést is vonhatunk, t. i. hogy y, akkor is egyenlő lesz 1-gyel, midőn $x=1$. Esetleg ott a függvény el is vesztheti a folytonosságot. Szóval, itt először utalhatunk ama tévedésre, mely speciális függvényeken észlelt tulajdonságokat a függvények összességére alkalmazhatóknak gondol. *A függvények összessége pedig oly túlságosan általános fogalom, hogy erre még semminemű speciális meghatározás nem vonatkozhatik.*

nek ez megfelel. Hogy «általánosságban» minden x-nek az y-nak m értéke felel meg, ez annyit jelent, hogy az x tartományban szabad előfordulnia a helyek egy megszámlálható sokaságának, melyeknek az y-nak kevesebb mint m, de legalább egy értéke felel meg. Föltéve, hogy e megfelelés módja adva van, y az x *m-értékű függvénye*, míg x-et ismét *független változó*nak nevezzük.

A függvény értelmezési tartománya és a függvény értékkészlete alatt ugyanazt értjük most is, mint előbb.

Így a complex számok körében $\sqrt[k]{x}$ k-értékű függvény; értelmezési tartománya a számok összességéből áll; az m érték mindenütt különböző, kivéve az $x=0$ helyen.

A valós számok körében $\sqrt[2k]{x}$ $2k$-értékű függvény, az értelmezési tartomány a nem negativ valós számokból áll; a két érték mindenütt különböző, kivéve, midőn $x=0$.

A complex számok körében $\sqrt[k]{(x-a)(x-b)(x-c)}$ k-értékű függvény; a k érték mindenütt különböző, kivéve az $x=a$, b, c helyeken.

A valós számok körében $\sqrt{1-\sin^4 x\pi}$ kétértékű függvény; értelmezési tartománya az összes valós számokból áll, mert $1-\sin.^4 x\pi$ mindig >0. A függvény két értéke mindenütt különböző, kivéve a hol $\sin. \pi x=\pm 1$, azaz a hol $x=k+\frac{1}{2}$, k tetszőleges egész számot jelentvén.

A complex számok körében

$$\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}$$

hatértékű függvény; értelmezési tartománya a complex számok összessége, az $x=2$ kivételével, a mely helyen a követelt számítás megakad. A függvénynek mindenütt hat különböző értéke van, kivéve az $x=1$ helyen, hol csak két értékhez jutunk, t. i. $\sqrt{-2}$ és az $x=3$ helyen, hol az értékek száma három, t. i. a $\sqrt[3]{2}$ értékcsoportja.

Az y-ok értékcsoportja, mely az egyes x-eknek megfelel, állhat végre általánosságban a számok végtelen, de megszámlálható sokaságából és ekkor y-t az x *végtelen sok értékű függvényé*nek mondjuk, a hol az «általánosságban» megint annyit jelent, hogy az értelmezési tartományban lehet a helyek egy végtelen, de megszámlálható sokasága, hol a függvényértékek száma véges lesz.

Ily végtelen sok értékű függvényeket adnak a következő megállapítások:

$$y = \text{arcsin.}\, x, \quad y = \text{arccos.}\, x, \quad y = \text{arctg.}\, x, \quad y = \text{arccot.}\, x.$$

Ha valamely több értékű függvénynél általános törvényt állapítunk meg, mely szerint az y értékcsoportját rendezzük és ott, hol a csoportba foglalt értékek száma csökken, egyenlő értékek bevezetése által kiegészítjük e számot, végre végtelen sok értéknél esetleg egyebütt is behozunk egyenlő értékeket, — akkor az y-nak mindenütt első, második,..., k-adik,... értékét véve, egyértékű függvényekhez jutunk, melyeknek összessége a többértékű függvényt teljesen jellemzi.

Az ily módon nyert egyértékű függvények *a többértékű függvénynek egyes ágai.*

Igy p. a $\sqrt[3]{x}$ háromértékű függvénynek három ága

$$(\sqrt[3]{x}), \quad a_1(\sqrt[3]{x}), \quad a_2(\sqrt[3]{x}),$$

ha $(\sqrt[3]{x})$ a köbgyök főértékét, a_1 és a_2 az egységnek két képzetes köbgyökét jelenti. Az $x=0$ helyen föllépő 0 értékét ekkor háromszor hozzuk számításba.

Az arccos. x végtelen sok értékű függvény ágai:

$$(\text{arccos.}\, x), \quad (\text{arccos.}\, x) + 2\pi, \ldots, \quad (\text{arccos.}\, x) + 2l\pi, \ldots$$
$$-(\text{arccos.}\, x), -(\text{arccos.}\, x) + 2\pi, \ldots, -(\text{arccos.}\, x) + 2l\pi, \ldots$$

Itt, midőn $x = \pm 1$, a föllépő értéksorozatnak $(0, 2\pi, 4\pi, \ldots)$ minden értékét kétszer vettük, a mi által az ágak elkülönítése természetesebb módon volt eszközölhető.

Egyáltalában az egyes értékcsoportok rendezése bárminő módon történhetik, és e szerint a többértékű függvény fölbontása egyértékű függvényágakra is változik. Minden egyes függvénynél föladatunk lesz a berendezést úgy eszközölni, hogy a keletkező egyértékű függvények lehető egyszerű alkatúak legyenek.

24. Az oly változót, melynek tartománya csupán valós számokból áll, röviden *valós változó*nak nevezzük; az ellenkező esetben a változó *complex változó.*

Valós változóknak csak valós függvényeit kell vizsgálnunk, azaz oly függvényeket, melyeknek értékei szintén csak valósak; az ellenkező esetben a függvényértékek valós részei és képzetes részei (az i szorzó elhagyásával) külön-külön a valós változó valós függvényei, melyek együttesen a complex függvényt teljesen jellemzik.

Valamint a számok jelzésére betűket használunk, midőn e számok speciális értékétől független következtetéseket akarunk vonni, úgy a függvények jellemzésére is hasonló jelzéseket vezetünk be, melyek azután a változónak egy bizonyos, de egyelőre közelebbről meg nem állapított függvényét jelölik. Ily jelekül (*függvény-karakterisztika)* ismét betűket, első sorban az f betű különböző alakjait használjuk, a mely után a független változót zárjelbe téve irjuk, p. $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$. Ha itt x helyébe számot teszünk, ez a függvénynek hozzátartozó értékét jelenti, p. $f(0)$, $F(a)$, $\varphi(1)$. Ha a függvény kész képlet által van adva, azt, hogy x helyébe adott szám teendő, így is jelöljük:

$$\left(\frac{2x+3}{5+x}\right)_{x=1}$$

Ezek után az ily jelzés $f\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)$ értelme is világos. Az x-ből előbb kiszámítandó $\frac{a+bx}{c+dx}$, és ez szerepel azután mint a független változó értéke, melyhez végre keresendő a függvény értéke.

Itt néha mint p. $f(1+x)$-nél — úgy látszik — kétség támadhatna, vajjon az f függvényjel-e vagy szorzó. De tudjuk az illető tárgyalásban, hogy f nem szám, hanem függvény jele, tehát $f(1+x)$ nem olvasható szorzatnak.

Egyes betűk, mint Γ, Θ és mások le vannak foglalva bizonyos meghatározott függvények jelölésére; a függvények végtelen sokaságával szemben a meghatározott függvények jelölésére szolgáló jelek mindinkább szaporodnak. Többnyire egyes szavakból keletkezett rövidítések, mint p. sin. x, tg. x stb.

Ha a független változó és adott számértékek véges vagy végtelen sorából a négy alapművelet és határátmenetek segítségével mindenkor ugyanazon módon kiszámíthatjuk a függvény hozzá tartozó értékét vagy értékcsoportját — a mikor tehát a függvényvonatkozás kész képletek által kifejezhető —; akkor azt mondjuk, hogy *a függvény analitikai kifejezés által van adva.* Tekintettel arra, hogy minden határátmenet eredménye végtelen sor alakjában ábrázolható, t. i.

$$\lim . a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + \ldots$$

azt is mondhatjuk, hogy ekkor a függvényt az alapműveletek véges vagy végtelen sorozata értelmezi.

Semmikép sem állíthatjuk, hogy minden függvényvonatkozásnak van analitikai kifejezése. Mellőzve egészen a tapasztalatilag adott ily vonatkozásokat, maga a számtan körében is oly megállapítások lehetségesek, melyek az alapműveletek alkalmazásától merőben különbözők. Ilyen p. már a valós számok körében az $\mathcal{E}(x)$ függvény, mely az x-ben foglalt legnagyobb egész számot jelenti. Vagy $f(x)$, ha megállapítjuk, hogy minden raczionális x-hez a 0, minden irraczionális x-hez az 1 tartozik mint függvényérték. Vagy az x oly függvénye, melynek értéke mindig az x abszolut értékénél nagyobb első törzsszám.

E függvények közül az elsőnek ismerjük egyszerű értelmezéséhez képest elég bonyolódott analitikai kifejezését (trigonometrikus sor segítségével); a másik kettőre nézve ilyen nem ismeretes és valószínűleg — legalább az analizis mai segédeszközeivel — nem is lehetséges.

Hogy ily számtani, de nem az alapműveletek segítségével történő értelmezésnél az analitikai alak minő, arra itt egyszerű példa gyanánt fölemlíthető, hogy a valós számok körében az x absolut értékére nézve:

$$|x| = e^{\frac{1}{2}\log.(x^2)}.$$

A függvénytan egyik fontos föladata, a függvenyeknek bizonyos általános tulajdonságai által jellemzett csoportjaira nézve az analitikai alakot az értelmezési tartomány lehetőleg kiterjedt részében meghatározni.

Változó rendszerek és többváltozós függvények.

25. Egyes változó helyett további általánositásban *m változó rendszerét* vizsgáljuk, melyek egy m számból álló értékrendszer segítségével lesznek meghatározandók.

Az értékrendszerek összessége, melyeket a változórendszer fölvehet, *a változórendszer tartományát* alkotják.

Az analizis első sorban az oly változórendszereket tárgyalja, melyeknek tartománya egy vagy több folytonos vagy legalább összefüggő részből áll. Foglalkozik továbbá az oly változórendszerekkel, melyeknek tartománya az előbb jellemzetteknek kizárólag határhelyeiből áll vagy végre $m-k$-szoros sokaságot alkot, hol $k=0, 1 \ldots \ldots m-1$. Ezen utóbbi eset az előbbieket mint részletezéseket magában foglalja.

Ha most minden a változórendszer bizonyos tartományában fekvő értékrendszernek megfelel az y változó egy bizonyos értéke, akkor *y ezen m változónak, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egyértékű függvénye.* A változórendszer tartománya *e függvény értelmezési tartománya*, az y-nak tulajdonított értékek összessége *a függvény értékkészlete.*

A legegyszerűbb függvényértelmezések megint számtani műveletek segítségével történnek. Igy p.

$$y = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_m x_m^2$$

oly függvény, melynek értelmezési tartománya az $(x_1 \ldots x_m)$ értékrendszerek összessége; mig az

$$y = \frac{2x_1 + 3x_2 - 5}{3x_1 - 4x_2}$$

függvényé az (x_1, x_2) értékrendszerek összessége azoknak kivételével, melyekre nézve

$$3x_1 - 4x_2 = 0.$$

Ha az m változó egy-egy értékrendszerének az y-nak nem egy, hanem általánosságban k (illetőleg végtelen sok) értéke felel meg, akkor y az m változónak k-értékű (illetőleg végtelen sokértékű) függvénye.

Az egyváltozós függvényeknél tárgyalt részleteket itt nem szükséges ismételni. A jelölés csak annyiban változik, hogy a függvénykarakterisztika után a zárjelben az összes változók állnak, p. $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Ha e változórendszernek egy értékrendszere áll e zárjelben, akkor az értékek ugyanazon sorrendben irandók, mint a megfelelő változók.

Igy p. $F(1, 0, -3)$ jelenti a függvény amaz értékét, mely az $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 3$-nak megfelel.

Complex változó, $x = u + vi$, meg van adva értékének valós és a képzetes egységgel szorzott része által, melyek külön-külön valós változók. Ily complex változó complex függvényében a valós és a képzetes egységgel szorzott rész külön-külön két valós változótól függő valós függvény. Complex változók függvényeinek vizsgálata tehát a két valós változótól függő valós függvényekében benn foglaltatik.

Ezen okból «a complex változó függvénye» elnevezést egy szűkebb függvényosztályra szokásos alkalmazni, mely későbbа differencziálhányados tárgyalásánál lesz csak jellemezhető.

III.

Egyértékű függvények folytonossága.

Függvények határértéke.

26. Legyen $f(x)$ oly egyértékű függvény,* melynek értelmezési tartománya magában foglalja az $x=a$ hely bizonyos meghatározott környezetét, azaz mindazon számokat, melyekre nézve $|x-a|<\rho$, legfölebb magának az a helynek kivételével; legyen továbbá $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ szabályos számsorozat, melyre nézve

$$\lim. a_n = a;$$

akkor természetesen van mindig egy positiv egész N, úgy hogy $|a_n - a| < \rho$, ha $n \geqq N$. Az

$$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots$$

sorozat tehát legfölebb N-edik tagjától kezdve meghatározott számokból áll.

Ha az $f(a_n)$-nek határozott határértéke van, midőn $\lim. a_n = a$, mely mindig ugyanaz, bármikép választottuk is különben az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ számsorozatot, azt mondjuk, hogy az $f(a)$ függvénynek van határértéke az $x=a$ helyen, és e határérték alatt $\lim. f(a_n)$-t értjük.

E határérték jele: $\lim\limits_{x=a} f(x)$.

---

* E fejezetben, valamint a következőben, ha nincs is külön kimondva, mindig *egyértékű* függvényekkel foglalkozunk.

Az eredeti lim. $f(a_n)$ jelzésben előfordúl ugyanis még az a_n, melynek speczialis alakjától, hacsak lim. $a_n=a$, ama határérték független tartozik lenni. A határérték teljesen meg van adva, az $f(x)$ függvény alakja, és azon a hely által, mely az x helyébe teendő számok határértéke. A helyes jelzés csak a meghatározásra szükséges adatokat tartalmazza s ilyen épen $\lim\limits_{x=a} f(x)$. Míg tehát a lim. jel magában mindig azon számsorozat határértékét jelenti, mely keletkezik, ha n helyébe a pozitiv egész számok sorát teszszük, és ehhez mutatóul legfölebb — kétség esetében — hozzáteszszük azon betűt, melynek helyébe teendő az illető már megadott szabályos számsorozatot (p. $\lim\limits_{k}$.); addig a $\lim\limits_{x=a}$. azon számsorozatok közös határértékét jelenti, melyek a lim.-jel alatt álló függvényből keletkeznek, ha a változó helyébe *bármely* az a határértékhez közeledő számsorozat tagjait teszszük.

Meglehet ugyanis, hogy az a_n bizonyos választásánál $\lim. f(a_n)$ meghatározott érték; de lim. $f(b_n)$ daczára annak, hogy $\lim. a_n = \lim. b_n = a$, vagy egyáltalában nem meghatározott érték, vagy ha szintén meghatározott, a lim. $f(a_n)$-től különböző. Ekkor természetesen a $\lim\limits_{x=a}. f(x)$ jelzésnek nincs értelme, az $f(x)$ függvénynek az $x=a$ helyen nincs határértéke. Minthogy ezen eset a $\lim\limits_{x=a}$. jel értelmének fölfogására fölötte jellemző, czélszerű lesz ezt mindjárt itt egy példán bemutatni.

Legyen:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{x-1}}+1}.$$

E függvény értelmezése kiterjed a valós számok összességére, $x=1$ kivételével. Minden más helyen a hatvány értéke pozitiv, a nevező tehát 1-nél nagyobb.

Legyen továbbá $a=1$. — Ha most $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, akkor:

$$\lim. f(a_n) = \lim. \frac{1}{2^n+1} = 0,$$

ha pedig $b_n = 1 - \frac{1}{n}$, akkor

$$\lim. f(b_n) = \lim. \frac{1}{2^{-n}+1} = 1;$$

tehát $f(x)$-nek az $x=1$ helyen nincs határértéke, ámbár lim. $f(a_n)$ meghatározott szám.

Vajjon $\lim\limits_{x=a} f(x)$ meghatározott érték-e vagy sem, azt mindig csak az $f(x)$ speciális tulajdonságaiból kiinduló módszerek segítségével lehet eldönteni. A legegyszerűbb esetekben azonban elégséges lesz tekintetbe venni, hogy lim. $x=a$, azaz hogy x egy a-hoz közeledő számsorozat általános tagja; t. i. gyakran a nélkül, hogy e számsorozat speciális alkatát is figyelembe kellene venni, a határértékek kiszámítására előbb adott szabályok már megadják a végeredményt.

Így p. ha lim. $x=0$, lim. $\frac{1}{x}=\infty$, tehát:

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x}=\infty,$$

hol t. i. a számítás alatt x tulajdonképen a_n-nel helyettesítendő, de ezt rövidség kedvéért külön nem végezzük. Hasonlókép:

$$\lim_{x=2} \frac{2x+3}{x-1}=\frac{2 \lim\limits_{x=2} x+3}{\lim\limits_{x=2} x-1}=\frac{2 \cdot 2+3}{2-1}=7,$$

Továbbá:

$$\lim_{x=1} \frac{x^2+5x-6}{x^2+4x-5}=\lim_{x=1} \frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+5)}=\lim_{x=1} \frac{x+6}{x+5}=\frac{7}{6}.$$

Ha az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya magában foglalja a ∞ környezetét, azaz a függvény adva van minden x-re, melynél $|x|>\omega$, akkor a függvénynek határértéke az $x=\infty$ helyen is az eredeti definiczió értelmében megvizsgálható, hol csak a helyébe ∞-t irunk. Ily módon

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{2x+3}{x-1}=\lim_{x=\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2+3 \lim\limits_{x=\infty} \frac{1}{x}}{1-\lim\limits_{x=\infty} \frac{1}{x}}=2$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{x^3+5}{x}=\infty,$$

míg p. a $\sin. x$, $x \sin. x$, $\operatorname{tg.} x$ függvényeknek az $x=\infty$ helyen nincs határértékük, mert ha

$$a_n = 2n\pi,\, b_n = 2n\pi + \tfrac{1}{2}\pi$$

akkor:

$$\lim.\sin. 2n\pi = 0, \lim.\sin.(2n\pi + \tfrac{1}{2}\pi) = 1.$$

Hasonlóképen nincs határértéke $\sin.\frac{1}{x}$-nek az $x = 0$ helyen, mert ha

$$a_n = \frac{1}{2n\pi},\, b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi}$$

$$\lim.\sin.\frac{1}{a_n} = 0, \lim.\sin.\frac{1}{b_n} = 1.$$

27. A következőkben néhány a differencziálási szabályok levezetésénél alapvető határértéket számítunk ki, mely tárgyalás egyszersmind az ily föladatoknál használandó módszerek bemutatására szolgál.

Az $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ függvény értelmezési tartománya kiterjed minden valós x-re, a $-1 < x \leqq 0$ számköz kivételével, a mikor t. i. $1 + \frac{1}{x}$ negativ vagy a nevezőben 0 áll. E függvény határértékére az $x = \infty$ helyen azt találjuk, hogy

$$\lim_{x=\infty}.\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{I.}$$

E bebizonyítandó eredménynek már ismeretes speciális esete a következő:

$$\lim.\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

a midőn t. i. az x helyébe teendő számsorozat a pozitiv egész számok sora. Ha ugyancsak x helyébe a negativ egész számok sorát teszszük, akkor szintén:

$$\lim.\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Mert n helyébe szabad a lim. jel alatt $n+1$-et tenni és így:

$$\lim.\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim.\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \lim.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

$$= \lim.\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \lim.\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim.\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

Ha most már x bármely két egész szám között fekszik:

$$K \leq x < K+1,$$

akkor:

$$\left(1+\frac{1}{K}\right)^x \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{K+1}\right)^x,$$

vagyis

$$\left(1+\frac{1}{K}\right)^K\left(1+\frac{1}{K}\right)^{x-K} \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{K+1}\right)^{K+1}\left(1+\frac{1}{K+1}\right)^{x-(K+1)},$$

hol K-nak az x értékéhez képest történő választása miatt $x - K$ és $K+1-x$ a 0-nál nem lehet kisebb és 1-nél nem lehet nagyobb. Ha most már x helyébe oly számokat teszünk, melyeknek absolut értéke minden határon túl nagyobbodik, akkor a hozzá tartozó K egész szám absolut értéke is minden határon túl nagyobbodik. Vagy pontosabb fogalmazásban ha lim. $x = \infty$, akkor lim. $K = \infty$.

Tehát:

$$\left(1+\frac{1}{K}\right)^0 \leq \left(1+\frac{1}{K}\right)^{x-K} \leq \left(1+\frac{1}{K}\right)^1,$$

$$\left(1+\frac{1}{K+1}\right)^0 \geq \left(1+\frac{1}{K+1}\right)^{x-(K+1)} \geq \left(1+\frac{1}{K+1}\right)^{-1},$$

és így* ha lim. $x = \infty$, végre

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{K}\right)^{x-K} = \lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{K+1}\right)^{x-(K+1)} = 1$$

Ha most végre az $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ számára levezetett egyenlőtlenségben áttérünk az $x = \infty$ határra, lesz:

$$\lim.\left(1+\frac{1}{K}\right)^K \geq \lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \geq \lim.\left(1+\frac{1}{K+1}\right)^{K+1}$$

a mi nem más mint (I.), mivel a szélső értékek mindegyike egyenlő e-vel.

28. Hogy x oly számok sorozata, melyeknek absolut értéke minden határon túl növekszik, azt úgy is jelölhetjük, hogy $x = \frac{1}{z}$, és a

---

* Ha egy bizonyos n-től kezdve $A_n > B_n$, vagy $A_n < B_n$, akkor ebből mindig következik, hogy:

lim. $A_n \geq$ lim. B_n, ill. lim. $A_n \leq$ lim. B_n.

z absolut értéke minden határon túl kisebbedik, azaz lim. $z = 0$. Ha az (I.)-ben e helyettesítést végezzük, lesz belőle:

$$\lim_{z=0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e. \tag{II.}$$

Képleteinknek egyszerű általánosítása:

$$\lim_{x=\infty}. \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a, \tag{III.}$$

$$\lim_{z=0}. (1+az)^{\frac{1}{z}} = e^a, \tag{IV.}$$

hol a bármi valós számot jelenthet, melyek közül a (IV.) ismét a $z = \frac{1}{x}$ helyettesítés végeztével a (III.)-ból származik. Tehát elég a (III.)-at igazolni. Ha $a = 0$, közvetetlenül látni, hogy mindkét oldalon az egység áll; ha az a a 0-tól különböző szám, akkor lim. $\frac{x}{a}$ is ∞, ha lim. $x = \infty$. Tehát szabad (I.)-ben x helyébe $\frac{x}{a}$-t írni és lesz:

$$\lim_{x=\infty}. \left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}} = e$$

Itt mindkét oldalon a-adik hatványra emelünk, (a baloldalon a lim. jel alatt), az eredmény nem más mint (III).

Ha a (IV.)-ben mindakét oldalon az e alapra vonatkozó logarithmusokat veszszük, és a baloldalon a lim. és log. műveletek sorrendjét fölcseréljük, a mi meg van engedve, mert (I. r. 65. cz.) a lim. jel alatt álló számok értéke e^a-hoz közeledik, tehát pozitiv marad, lesz:

$$\lim_{z=0}. \left({}^e\log. (1+az)^{\frac{1}{z}}\right) = a,$$

vagyis:

$$\lim_{z=0}. \left(\frac{1}{z}\, {}^e\log. (1+az)\right) = a. \tag{V.}$$

Ebből még mint speciális eset:

$$\lim_{z=0}. \left(\frac{1}{z}\, {}^e\log. (1+z)\right) = 1. \tag{V.a.}$$

Ha két változó, x és z a következő összefüggésben áll:

$$a^x - 1 = z, \text{ vagyis } x = {}^a\log(1+z),$$

hol tehát, ha lim. $x=0$, egyszersmind lim. $z=0$ és megfordítva, akkor: *

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{z}{{}^a\log.(1+z)}=\frac{z}{{}^e\log.(1+z)}\,{}^e\log.a=\frac{1}{\frac{{}^e\log.(1+z)}{z}}\,{}^e\log.a.$$

És így végre ha áttérünk a lim. $x=0$, és evvel együtt a lim. $z=0$ határra

$$\lim_{x=0}.\frac{a^x-1}{x}={}^e\log.a=\frac{1}{{}^a\log.e}. \qquad \text{(VI.)}$$

Ha e képletben a következő helyettesitést végezzük, μ a 0-tól különböző valós állandó lévén:

$$x=\mu\,{}^a\log.(1+z),\quad z=a^{\frac{x}{\mu}}-1,\quad a^x=(1+z)^\mu,$$

akkor ha lim. $x=0$, egyszersmind lim. $z=0$, tehát:

$$\lim_{z=0}.\left(\frac{(1+z)^\mu-1}{\mu}\;\frac{1}{{}^a\log.(1+z)}\right)={}^e\log.a$$

vagy:

$$\lim_{z=0}.\left(\frac{(1+z)^\mu-1}{z}\;\frac{z\,{}^e\log.a}{{}^e\log.(1+z)}\right)=\mu\,{}^e\log.a$$

Szorozva (V.a.)-val és röviditve ${}^e\log.a$-val:

$$\lim_{z=0}.\frac{(1+z)^\mu-1}{z}=\mu. \qquad \text{(VII.)}$$

29. A trigonometrikus függvények elméletében — ha t. i. sin. x-et, tg. x-et stb. mint az x függvényeit tekintjük — alapvető jelentőségű, hogy ha *x a 0 és $\frac{\pi}{2}$ közt fekszik, akkor mindig*

$$\sin.x<x<\mathrm{tg}.x.$$

---

* Alkalmilag álljon itt a logarithmusra vonatkozó, fönt használt elemi tételek bizonyítása. Ha $a^x=b$, akkor $x={}^a\log.b$; de ha mindkét oldalon a c-logarithmusokat veszszük, egyszersmind:

$$x={}^a\log\,b=\frac{{}^c\log.b}{{}^c\log.a} \qquad (1.)$$

és ha itt $b=c$, tehát ${}^c\log.c=1$, még:

$$^a\log.c=\frac{1}{{}^c\log.a} \qquad (2.)$$

Ezen egyenlőtlenség, melyet a geometria területek összehasonlításával bizonyit, itt számtani úton lesz levezetendő. E czélból a π-nek előbb (I. r. 66. és 67. cz.) adott meghatározására támaszkodunk, mely szerint:

$$\frac{1}{\pi}=L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right);$$

azaz, ha $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$, és most az a_n, b_n számokat az ott adott utasítás értelmében kiszámítjuk, lesz:

$$\lim.\, a_n=\lim.\, b_n=\frac{1}{\pi};$$

továbbá:

$$\ldots a_n>a_{n+1}>\ldots>\frac{1}{\pi};\ \ldots b_n<b_{n+1}<\ldots<\frac{1}{\pi}.$$

Ekkor a és b még így is irható:

$$a=\frac{1}{2\sin.\frac{\pi}{2}},\quad b=\frac{1}{4\operatorname{tg}.\frac{\pi}{4}},$$

ebből:

$$a_1=(ab)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4\sin.\frac{\pi}{4}},$$

$$b_1=\frac{a_1+b}{2}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sin.\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\operatorname{tg}.\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{1}{8}\,\frac{1+\cos.\frac{\pi}{4}}{\sin.\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8\operatorname{tg}.\frac{\pi}{8}}.$$

És úgy általánosságban:

$$a_n=\frac{1}{2^{n+1}\sin.\frac{\pi}{2^{n+1}}},\quad b_n=\frac{1}{2^{n+2}\operatorname{tg}.\frac{\pi}{2^{n+2}}};$$

mert ez helyes, ha $n=1$, és ha egy bizonyos n-re igaz, helyes marad $n+1$-re is. T. i.

$$a_{n+1}=(a_n b_n)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2^{2n+3}\,2\sin.^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n+2}\sin.\frac{\pi}{2^{n+2}}},$$

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2}=\frac{1}{2^{n+3}}\left(\frac{1}{\sin.\frac{\pi}{2^{n+2}}}+\frac{1}{\operatorname{tg}.\frac{\pi}{2^{n+2}}}\right)=\frac{1}{2^{n+3}\operatorname{tg}.\frac{\pi}{2^{n+3}}}.$$

E szerint

$$\frac{1}{2^{n+1}\sin.\frac{\pi}{2^{n+1}}} > \frac{1}{\pi}, \quad \frac{1}{\pi} > \frac{1}{2^{n+2}\,\mathrm{tg.}\frac{\pi}{2^{n+2}}},$$

vagyis, ha az egyenlőtlenségekben $n+1$, ill. $n+2$ helyett n-et irunk és a recziprok értékekre térünk át:

$$\sin.\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n} < \mathrm{tg.}\frac{\pi}{2^n},$$

a mi, mint közvetetlenül látni, $n=1$ és 2-nél is helyes.

Más oldalról a

$$\sin.(u+v) = \sin.u\cos.v + \cos.u\sin v,$$

$$\mathrm{tg.}(u+v) = \frac{\mathrm{tg.}u + \mathrm{tg.}v}{1 - \mathrm{tg.}u.\,\mathrm{tg.}v}$$

képletek mutatják, hogy ha u, v, és (a második képlet miatt) $u+v$ a 0 és $\frac{\pi}{2}$ közt feküsznek* és

$$\sin.u < u.\ \sin.v < v \text{ ill. } \mathrm{tg.}u > u\ \mathrm{tg.}v > v$$

egyszersmind:

$$\sin.(u+v) < u+v < \mathrm{tg.}(u+v).$$

Ha tehát $u_1, u_2 \ldots u_n$ pozitivok és $\sum_1^n u_i < \frac{\pi}{2}$, akkor ép oly egyszerű általánosításban

$$\sin.\sum_1^n u_i < \sum_1^n u_i < \mathrm{tg.}\sum_1^n u_i.$$

Ha most már x a 0 és $\frac{\pi}{2}$ közt fekszik,

$$x = t\frac{\pi}{2},$$

hol t pozitiv valódi tört, mely (a binär számrendszerben, l. a 48. cz. végén) a következő alakban fejezhető ki:

* Ekkor ugyanis $\mathrm{tg.}u$, $\mathrm{tg.}v$, $\mathrm{tg.}(u+v)$ pozitivok, és így $1 - \mathrm{tg.}u.\mathrm{tg.}v$ is pozitiv, de egyszersmind < 1, mert a levonandó pozitiv.

$$t=\lim. t_n,\quad x=\lim.\left(t_n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$t_n=\frac{\mathfrak{k}_1}{2}+\frac{\mathfrak{k}_2}{2^2}+\ldots+\frac{\mathfrak{k}_n}{2^n}<t,$$

hol mirden $\mathfrak{k}$ csak 0 vagy 1 lehet.

E szerint

$$\sin. t_n\frac{\pi}{2}<t_n\frac{\pi}{2}<\operatorname{tg}. t_n\frac{\pi}{2},$$

és ebből ha áttérünk a határra:

$$\sin. x<x<\operatorname{tg}. x,$$

hol a határátmenetnél nem szükséges, a $\gtrless$ jeleket az $=$ jelével kiegészíteni, mert t nem 0 és így van egy első t_m, mely szintén nem 0; de ekkor $\sin. t_m\frac{\pi}{2}$ és t_m, t_m és $\operatorname{tg}. t_m\frac{\pi}{2}$ különbsége nem tűnik el, és e különbség m növekedésénél soha nem kisebbedik.

30. Minthogy $\sin(-x)=-\sin. x$, $\operatorname{tg}.(-x)=-\operatorname{tg}. x$, a levezetett egyenlőtlenség

$$|\sin. x|\leqq|x|\leqq|\operatorname{tg}. x|$$

alakban is irható, a melyben érvényességének határait az $|x|\leqq\frac{\pi}{2}$ föltétel adja, és az $=$ jel csak akkor veendő, ha $x=0$. Ebből még:

$$\frac{1}{|\sin. x|}\geqq\frac{1}{|x|}\geqq\left|\frac{\cos. x}{\sin. x}\right|,$$

vagy $|\sin. x|$-szel szorozva

$$1\geqq\left|\frac{\sin. x}{x}\right|\geqq|\cos. x|.$$

Ha most már x itt bármely a 0 határhoz közeledő számsorozat képviselője, azaz $\lim. x=0$, ekkor a határátmenetnél:

$$1\geqq\lim_{x=0}.\left|\frac{\sin. x}{x}\right|\geqq 1.$$

De $\frac{\sin. x}{x}$ az x tekintetbe jövő értékeinél mindig pozitiv, mert ekkor x és $\sin. x$ egyenlő előjelű, és így végre:

$$\lim_{x=0}.\frac{\sin. x}{x}=1. \qquad \text{(VIII.)}$$

Ebből, ha négyzetre emelünk:

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos.^2 x}{x^2} = 1,$$

továbbá osztva a közvetetlenül helyesnek látható

$$\lim_{x=0} (1+\cos. x) = 2$$

alakkal, lesz még:

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos. x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{(IX.)}$$

és ekkor még:

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos. x}{x} = 0 \qquad \text{(IXa.)}$$

ha ugyanis lim. $x=0$-sal szorozzuk a (IX.)-et.

31. Ha a az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának nem belső, hanem *közönséges határhelye*, akkor mindig lehet oly $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ számsorozatokat fölállítani, melyeknek minden száma az $f(x)$ értelmezési tartományához tartozik, sőt ennek belső helye, míg lim. $a_n = a$. A függvény határértéke az $x=a$ helyen, $\lim\limits_{x=a} f(x)$ akkor épen úgy értelmezhető, mint előbb — azon egyedüli megszorítással, hogy az a_n sorozat tagjai az $f(x)$ értelmezési tartományából választandók. Különben hiszen az $f(a_n)$ jelnek nincs értelme.

Szükség esetében itt külön kijelentendő, hogy mely számok azok, melyeket a határátmenet eszközlésénél szabad használnunk. Így p. ha a változó tartománya az 1-nél nagyobb számokra szoríttatik, lesz:

$$\lim_{x=1} \frac{1}{2^{\frac{1}{x-1}}-1} = 0, \; (x>1).$$

E külön kijelentés fölösleges, ha a változó tartománya öszszeesik a lim. jel alatt álló kifejezés értelmezési tartományával. E kifejezésnél p. $\lim\limits_{x=1} {}^a\log. (x-1)$ magától világos, hogy csak 1-nél nagyobb x-ek használhatók.

Hogy csak a-nál nagyobb (ill. kisebb) változó értékek használandók, azt szükség esetén a $\lim\limits_{x=a+0}$, $\lim\limits_{x=a-0}$ jelekkel fejezzük ki, melyeknek még megfelel:

$$\lim. x = a+0, \; \lim. x = a-0.$$

Hasonló módon fejezhető ki az, hogy a végtelenbe való határátmenet csak a pozitiv (vagy negativ) számokon át történhetik a következő jelekben:

$$\lim_{x=+\infty}. \qquad \lim_{x=-\infty}.$$

melyeknek ismét megfelel:

$$\lim. x = +\infty, \ \lim. x = -\infty.$$

Így p. az ${}^a\log. x$ értelmezési tartománya — a megelőző tárgyalások alapján — a pozitiv számok összességéből áll, a 0 és ∞ e tartomány közönséges határhelyei.

Az I. r. 65. cz. végén álló tételekből közvetetlenül következik:

$$\lim_{x=0}. {}^a\log. x = \infty, \ \lim_{x=\infty}. {}^a\log. x = \infty.$$

Ugyanígy lesz az I. r. 140. czikkében álló (33.) képletből:

$$\lim_{x=\infty}. \frac{|{}^a\log. x|^\sigma}{x^\tau} = 0, \qquad \text{(X.)}$$

ha σ tetszőleges valós szám és $\tau > 0$.

Igaz, hogy e képlet az idézett szöveg szerint csak akkor érvényes, ha a az 1-nél nagyobb pozitiv szám. Mint logarithmus-rendszer alapszáma a az 1-től különböző szám, ha 1-nél kisebb, akkor az

$$a^x = b \quad \text{vagy} \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = b$$

egyenletből következik, hogy:

$${}^a\log. b = -{}^{\frac{1}{a}}\log. b;$$

a miből közvetetlenül látni, hogy (X.), a melyben ép ezért (az első esetben még fölösleges módon) ${}^a\log. x$-nek már absolut értékét irtuk, akkor is helyes, ha $a < 0$.

Ha $z = \frac{1}{x}$, és így midőn $\lim. x = \infty$, $\lim. z = 0$, akkor:

$${}^a\log. x = {}^a\log. 1 - {}^a\log. z = -{}^a\log. z$$

és így a (X.)-ből lesz:

$$\lim_{z=0}. (z^\tau |{}^a\log. z|^\sigma) = 0, \qquad \text{(XI.)}$$

ha ismét σ *bármely valós szám és* $\tau > 0$.

Ha (XI)-ben $\tau = \sigma = 1$ tétetik és az ott álló alakokat az a-hoz illesztjük mint kitevőket, lesz:

$$\lim_{z=0} (z^z) = 1\,, \tag{XII.}$$

a mi természetesen annyit jelent, hogy ha a z elég kis pozitiv értékeinél képezzük z^z-t, e kifejezés értéke *tetszőlegesen* közelhozható az 1-hez.*

Ha ismét az

$$^a\log. z = x, \; z = a^x$$

kapcsolat alapján egy új x változót vezetünk be, akkor lim. $z = 0$-nak megfelel

$$\lim. x = -\infty, \text{ ha } a > 1,$$

$$\lim. x = +\infty, \text{ ha } a < 1.$$

Ha e helyettesítést a (XI.)-ben végezzük, és $\tau = 1$, a második esetben még $\sigma = -\rho$ tétetik, hol ρ *ismét tetszőleges valós szám*, akkor lesz:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x=-\infty} (a^x |x|^\sigma) = 0\,, \; a > 1\,, \\ &\lim_{x=+\infty} \frac{a^x}{x^\rho} = 0\,, \; a < 1\,, \end{aligned}\right\} \tag{XIII.}$$

Ha $z = -x$, akkor, ha lim. $x = \pm\infty$, mindig lim. $z = \mp\infty$, e helyettesítést végezve a (XIII.) alatt álló képletekben, és a reciprok értékeket irva:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{z=+\infty} \frac{a^z}{|z|^\sigma} = \infty\,, \; a > 1, \\ &\lim_{z=-\infty} a^z |z|^\rho = \infty\,, \; a < 1. \end{aligned}\right\} \tag{XIV.}$$

---

* A kezdő gyakran azon tévedésbe esik, hogy azon kifejezésből, melynek határértéke képezendő, egy részt kiragadva, ennek számítja előbb határát, és evvel számít azután tovább. Hogy így nemcsak határozatlan (0 a nevezőben s. ú. t.), hanem hamis eredményhez juthatni, mutatja a (XII.). Ha itt először az alap határértékét veszszük, volna

$$\lim_{z=0} z^z = \lim_{z=0} 0^z = 0,$$

a mi egyszerűen hamis.

A tételek ily írásánál csak azon esetek, midőn σ, ill. ρ pozitiv, tartalmaznak jelentősebb eredményt. Ha σ, ill. $\rho \leqq 0$, a (XIII.) és (XIV.)-ben foglalt állítások már a lim. a^x értékéből világosak.

32. *A függvények határértékének értelmezése közvetetlenül átvihető a több változós függvények esetére.* Ha ugyanis $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ a függvény értelmezési tartományának belső helye vagy közönséges határhelye és

$$a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(n)}, \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

oly számsorozatok, melyek a függvény értelmezési tartományához tartozó helyeket adnak és melyekre nézve

$$\lim. a_i^{(n)} = a_i,$$

ha továbbá lim. $f(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)})$ ugyanazon meghatározott érték, bárminő számsorozatokat választunk is, ha ezek csak az imént megállapitott föltételeket kielégitik, akkor azt mondjuk, hogy *a függvénynek van határértéke az $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ helyen, és e határértéket a következő módon jelöljük:*

$$\lim_{x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n} f(x_1, x_2, \ldots x_m).$$

A legegyszerűbb esetekben ismét elégséges tekintetbe venni, hogy $x_1, x_2 \ldots$ bizonyos szabályos számsorozatok általános tagját képviselik, melyekre nézve

$$\lim. x_1 = a_1,\ \lim. x_2 = a_2, \ldots, \lim. x_m = a_m,$$

és e szerint alkalmazni a határértékek kiszámitására vonatkozó szabályokat. Csak ha e szabályok alkalmazásánál megakadunk (0 a nevezőben, s. ú. t.), térünk át a függvény természetétől függő speciális módszerekre. Így p.:

$$\lim_{x=1,\ y=1} (Ax^2 + Bxy + Cy^2) = A\,(\lim. x)^2 + B \lim. x \lim. y + \\ + C\,(\lim. y)^2 = A + B + C$$

$$\lim_{x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{4}} (\sin. x + \sin. (x+y) + \sin. (x+2y)) = \sin. (\lim. x) + \\ + \sin. (\lim. x + \lim. y) + \sin. (\lim. x + 2 \lim. y) = \\ = \sin. \frac{\pi}{4} + \sin. \frac{\pi}{2} + \sin. \frac{3\pi}{4} = 1 + |\sqrt{2}|.$$

Ha a függvény értelmezési tartománya oly belső helyeket is tartalmaz, melyekre nézve $|x_1|^2+\dots|x_m|^2>\omega$, bármily nagy pozitiv szám is az ω, akkor ∞ e tartomány belső helye vagy közönséges határhelye; és e helyen van a függvénynek határértéke, ha lim. $f(a_1^{(n)},\dots,a_m^{(n)})$ meghatározott érték, mihelyt az illető számsorozatok tagjai olyanok, hogy $|a_1^{(n)}|^2+\dots+|a_m^{(n)}|^2$ az n választása által bármely pozitiv számnál nagyobbá tehető. E határérték jele $\lim\limits_{|x_1|^2+\dots+|x_m|^2=\infty} f(x_1,\dots,x_m)$ vagy röviden $\lim\limits_{\infty} f(x_1,\dots,x_m)$. Így p.

$$\lim_{\infty}(x^2+y^2)=\infty\,;$$

de

$$\lim_{\infty}\left(x+y+\frac{1}{z}\right)$$

határozatlan, mert ha p. lim. $x=\alpha$, lim. $y=\beta$, lim. $z=\infty$, a határérték $\alpha+\beta$, ha lim. $x=\infty$, lim. $y=0$, lim. $z=1$, a határérték ∞.

Igen fontos megjegyzés, hogy több változós függvényeknél már igen egyszerű esetekben, midőn t. i. a függvény értéke a változók értékeiből a négy alapműveletből összeállított véges műveletsorozat segítségével kiszámítható, léphet föl határozatlanság; így p. ha

$$f(x,y)=\frac{2x+y}{x+2y},$$

$\lim\limits_{x=0,\ y=0} f(x,y)$ teljesen határozatlan. Itt a közönséges műveleti szabályok nem vezetnek eredményhez, mert a számláló és nevező határértéke külön-külön zérus.

Hogy egyáltalában a határérték nem független a határátmenet módjától, azt következőképen láthatni. Legyen $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ az x helyébe teendő számsorozat, hol természetesen lim. $a_n=0$; ha most már λ bárminő a 0-tól különböző szám, legyen $\lambda a_1,\dots,\lambda a_n,\dots$ az y helyébe teendő számsorozat, akkor a határmenet e módjánál

$$\lim.\frac{2a_n+\lambda a_n}{a_n+2\lambda a_n}=\frac{2+\lambda}{1+2\lambda}$$

és ez a λ kellő választásánál bármi szám lehet, az $\frac{1}{2}$ kivételével. Mert

$$\frac{2+\lambda}{1+2\lambda}=L$$

lesz, ha

$$\lambda=\frac{2-L}{2L-1}.$$

De $\frac{1}{2}$ is lesz a határérték, ha az x és y számára az $a_1^2, a_2^2, \ldots a_n, \ldots$ és $a_1, a_2 \ldots a_n$ számsorozatokat választjuk. Ekkor ugyanis:

$$\lim.\frac{2a_n^2+a_n}{a_n^2+2a_n}=\lim.\frac{2a_n+1}{a_n+2}=\frac{1}{2}.$$

Végre a ∞ is lehet a határérték, ha például az x és y számára választott számsorozatok:

$$a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots \text{ ill. } (a_1-\tfrac{1}{2})\,a_1, (a_2-\tfrac{1}{2})\,a_2, \ldots, (a_n-\tfrac{1}{2})\,a_n, \ldots,$$

hol $\lim. a_n = 0$, és tehát $\lim. \left((a_n-\frac{1}{2})\,a_n\right)$ szintén 0. Ekkor:

$$\lim.\frac{2a_n+(a_n-\frac{1}{2})\,a_n}{a_n+(2a_n-1)\,a_n}=\lim.\frac{\frac{3}{2}+a_n}{2a_n}=\infty.$$

Ha általánosabban

$$f(x,y)=\frac{Ax+By}{Cx+Dy},$$

e következtetések ép úgy ismételhetők, kivéve azon esetet, midőn:

$$AD-BC=0.$$

Ekkor az

$$\frac{A+B\lambda}{C+D\lambda}=L$$

egyenletben foglalt követelés ki nem elégíthető; mert a λ-nak minden $-\frac{A}{B}=-\frac{C}{D}$-től különböző értékénél

$$\frac{A+B\lambda}{C+D\lambda}=\frac{A}{C}=\frac{B}{D},$$

a mint ezt a nevezőkkel való szorzás közvetetlenül igazolja.

Itt a jobboldalon álló alakok egyike mindenesetre határozott, mert ha C és D egyszerre 0, az $f(x,y)$-nak nincs is értelme.

De ugyanekkor, kivéve a $Cx+Dy=0$ föltételnek megfelelő helyeket, mindenütt

$$\frac{Ax+By}{Cx+Dy}=\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$$

tehát ebben a kivételes esetben a $Cx+Dy=0$ föltételből meghatározott (x,y) értékrendszerek teljes kizárása után:

$$\lim_{x=0,\ y=0}\frac{Ax+By}{Cx+Dy}=\frac{A}{C}=\frac{B}{D}; \qquad (AD-BC=0).$$

Folytonos és szakadásos függvények.

33. Valamely függvény értékét az a helyen (hol a természetesen az értelmezési tartományhoz tartozik) — hogy ezt, ha szükséges, a függvénynek ugyane helyen vett határértékétől élesebben megkülönböztessük — a függvény *helyettesítési értéké*-nek nevezzük, Ezen elnevezés onnét származik, hogy ha a függvény számára analitikai kifejezésünk van, valóban ekkor a változók helyébe, az illető számértékeket teszszük. Ez nem zárja ki, hogy a helyettesítési érték kiszámítását határátmenetek segitségével eszközöljük, mint péld. már az a^x, sin. x s ú. t. függvényeknél.

Valamely függvény folytonos az a helyen, ha e helyen van határértéke és ez a helyettesítési értékkel azonos.

A függvény e tulajdonsága még véges alakban (azaz határátmenetek alkalmazása nélkül) is kifejezhető. Az egyváltozós függvény esetében ezen új fogalmazás a következő módon történik.

Hogy a függvény folytonos az a helyen, az adott definiczó szerint annyit jelent, hogy

$$\lim. f(a_n) = f(a)$$

mihelyt $\lim. a_n = a$; vagy a lim. jel értelme szerint, hogy $|f(a_n) - f(a)|$ bármely tetszőlegesen választott pozitiv számnál kisebbé tehető, ha csak az $a_1 \ldots a_n \ldots$ számsorozatban elég messze megyünk, azaz annyira, hogy $|a_n - a|$ egy bizonyos pozitiv számnál kisebb.

Valamely $f(x)$ függvény folytonos az a helyen, ha egy tetszőlegesen választott pozitiv szám δ megállapitása után mindig lehet egy pozitiv ε-ot meghatározni, ugy hogy

$$|f(x) - f(a)| < \delta,$$

mihelyt az x értéke megfelel az

$$|x - a| < \varepsilon$$

föltételnek.

Ha a az értelmezési tartomány határán fekszik, akkor a folytonosság definicziójánál csak azon x értékek (ill. csak oly számsorozatok) jöhetnek tekintetbe, melyek ama tartomány belsejében feküsznek.

Ugyanigy több változós függvénynél az, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

függvény folytonos az $(a_1, \ldots, a_m)$ helyen, annyit jelent, hogy

$$\lim. f(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots a_m^{(n)}) = f(a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

mihelyt

$$\lim. a_1^{(n)} = a_1, \quad \lim. a_2^{(n)} = a_2, \ldots \lim. a_m^{(n)} = a_m.$$

vagy ismét áttérve a lim. jel jelentésére:

Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ függvény folytonos az $(a_1, \ldots, a_m)$ helyen, ha egy tetszőlegesen választott pozitiv szám δ megállapitása után mindig lehet oly pozitiv $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ számokat meghatározni, hogy

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - f(a_1, \ldots, a_m)| < \delta,$$

mihelyt

$$|x_1 - a_1| < \varepsilon_1, \; |x_2 - a_2| < \varepsilon_2, \ldots, |x_m - a_m| < \varepsilon_m$$

vagy — a mi az előbbi föltétellel a környezet két alakja közt fönnálló kapcsolatnál fogva mindig megegyezik — *mindig lehet egy oly pozitiv ε-t meghatározni, hogy ismét*

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - f(a_1, \ldots, a_m)| < \delta,$$

mihelyt:

$$|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 + \ldots + |x_m - a_m|^2 < \varepsilon^2.$$

A folytonosság vizsgálatának a valamely $f(x)$ függvény által jellemzett számkapcsolatra nézve elvi jelentősége van.

A legegyszerűbb függvény — a függvénynek bizonyos tekintetben határesete — az, midőn $f(x)$, ill. $f(x_1, \ldots, x_m)$ állandó, azaz a változó minden értékénél a függvény értéke ugyanaz.*

Az, hogy a függvény az $x_1 = a_1, \ldots, x_m = a_m$ helyen folytonos, evvel szemben annyit jelent, hogy a függvény megközelítőleg állandónak tekinthető, még pedig úgy, hogy a megközelítésnél elkövetett hiba absolut értéke δ-nál kisebb, ha a vizsgálatot az $(a_1, \ldots, a_m)$ hely egy bizonyos környezetére szorítjuk, hol az ε, illetőleg $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ a környezet jellemzésére szolgáló pozitiv számok a választott megközelítéstől, azaz δ-tól függnek.

Hogy absolut értékére nézve δ-nál kisebb hibával a függvényt egy bizonyos környezetben állandónak lehessen tekinteni, arra — ha ezen állandó értéknek $f(a_1, \ldots, a_m)$-et veszszük — szükséges és

* Midőn a viszonyok egy és több változós függvényeknél teljesen azonosak, a tárgyalást csak egyszer végezzük. Ha képleteinkben m helyébe 1-et teszünk, meg van az egyváltozós függvények speciális esete.

elegendő, hogy e környezetben legyen:

$$|f(x_1,\ldots,x_m)-f(a_1,\ldots,a_m)|<\delta;$$

ez, minthogy δ tetszőleges pozitiv szám, nem más mint a folytonosság föltételének eredeti alakja.

Hogy az $f(x_1,\ldots,x_m)$ függvénynek tulajdonítandó állandó érték bármely ama környezetben előforduló érték lehessen, arra csak a környezetnek az

$$|f(x_1,\ldots,x_m)-f(a_1,\ldots,a_m)|<\tfrac{1}{2}\delta$$

föltételből való meghatározása szükséges. Mert, ha ekkor $(y_1\ldots y_m)$ egy másik e környezetbe tartozó hely, akkor csakugyan:

$$|f(x_1,\ldots,x_m)-f(y_1,\ldots,y_m)|\leq|f(x_1,\ldots,x_m)-f(a_1,\ldots,a_m)|+$$
$$+|f(y_1,\ldots,y_m)-f(a_1,\ldots,a_m)|<\delta.$$

34. Ha az adott függvény az (a függvény értelmezési tartományához tartozó) a helyen nem folytonos, azaz határértéke nem egyezik meg a helyettesítési értékkel, vagy egyáltalában nincs határértéke, akkor azt mondjuk, hogy *a függvény az a helyen szakadásos.* E szerint valamely függvény értelmezési tartományának bármely helyén vagy folytonos vagy szakadásos.

Az a valós függvény, mely a változó raczionális értékeinél 0, irraczionális értékeinél 1, — mint közvetetlenül látni, minden helyen szakadásos.

Az analizisben részletesebben tárgyalt függvények kivétel nélkül olyanok, hogy azon helyek, hol a függvény szakadásos, megszámlálható sokaságot alkotnak. Tekintettel erre azon kifejezés is dívik, hogy «a függvény folytonossága az a helyen megszakad».

A függvény szakadásos voltának legegyszerübb esete az, midőn *van az a helyen véges és meghatározott határérték, de ez nem egyezik meg a helyettesítési értékkel.* Ekkor a szakadást megszüntethetjük, az által, hogy a függvény eredeti értelmezésének egyetlen egy adatát, a függvény helyettesítési értékét az a helyen megváltoztatjuk; épen azért a szakadást ekkor *megszüntethető*-nek mondjuk. (Riemann szerint «hebbar».)

Ilyen volna péld. az a függvény, mely x minden értékénél $=2x+3$, kivéve, midőn $x=1$, a mikor a függvény értéke 0 legyen.

Az analizisben oly függvények, melyeknek megszüntethető szakadásaik vannak, csak egész kivételesen fordulnak elő. Ép ezért, *ha ez a függvényre vonatkozólag meglévő adatokkal nem áll ellenmondásban és az ellenkező nincs külön megemlítve, mindig fölteszszük ezentúl, hogy a függvénynek nincs megszüntethető szakadása.*

E szerint, ha az $f(x)$ függvény értéke az a helyen nem ismeretes, de ismerjük $\lim_{x=a} f(x)$-et, akkor, ha nincs külön megmondva az ellenkező, mindig fölteszszük, hogy $f(a) = \lim_{x=a} f(x)$, azaz hogy a függvény az a helyen folytonos, mert a szakadás, ha ilyen volna, mindenesetre megszüntethető lenne.

Ha valamely függvény értelmezési tartományának egy folytonos részében analitikai alak által van adva, mely e tartományrész egy és csak egy belső helyén használhatatlan lesz, akkor azt mondjuk, hogy a *függvény (analitikai) alakja e helyen határozatlan.* A föladat valamely függvényt meghatározni az oly helyen, hol analitikai alakja határozatlan, mindig azon külön nem említett föltevést foglalja magában, hogy a függvénynek e helyen van véges és meghatározott határértéke.

A föladat megoldása tehát egyszerűen határérték kiszámítását kívánja. Így péld. a $\frac{\sin. x}{x}$ függvény alakja az $x = 0$ helyen határozatlan. Értéke tehát az $x = 0$ helyen:

$$\left(\frac{\sin. x}{x}\right)_{x=0} = \lim_{x=0} \left(\frac{\sin. x}{x}\right) = 1,$$

természetesen föltéve, hogy a függvény értelmezése kiterjed az $x=0$ helyre és hogy a függvénynek nincs megszüntethető megszakadása.

Hasonlókép határozatlan az

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4x - 5}, \quad \varphi(x) = \frac{x - 1}{x - 1}$$

függvények alakja az $x = 1$ helyen. Az említett föltevések mellett:

$$f(1) = \lim_{x=1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4x - 5} = \frac{7}{6}; \quad \varphi(1) = \lim_{x=1} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

Ellenben a $\sin. \frac{1}{x}$ függvénynél, melynek alakja szintén határozatlan az $x = 0$ helyen, ebből a függvény értékére az $x = 0$

reciprok értéke a 0-tól különbözik. A reciprok függvénynek tehát megszüntethető szakadása volna az a helyen.

Ha azonban a helyettesítési értéket ∞-nek állapítjuk meg és ezentúl *a 0 és ∞-t is reciprok értékpárnak* veszszük, akkor a reciprok függvény helyettesítési értékének a 0 veendő, és *a most tárgyalt szakadásos függvények mint olyanok jellemezhetők, melyeknek reciprok függvénye még folytonos.*

36. Azon egyváltozós függvények között, melyek az $x = a$ helyen végtelenek lesznek, a legegyszerűbbek azok, melyeknél *létezik egy pozitiv ρ szám,* úgy hogy* $\lim\limits_{x=a} \left((x-a)^\rho f(x)\right)$ *véges és meghatározott, a 0-tól különböző érték.* Ekkor az $f(x)$ közelebbi meghatározása gyanánt azt mondjuk, hogy $f(x)$ *az $x = a$ helyen ρ-adrendű végtelen lesz.*

Ily ρ szám nincs mindig, de közvetetlenűl belátható, hogy, ha van, csak egy ilyen lehetséges, tehát a függvényre nézve jellemző szám. Ha ugyanis

$$\lim_{x=a} \left((x-a)^\rho f(x)\right) = c$$

$$\lim_{x=a} \left((x-a)^{\rho'} f(x)\right) = c'$$

mindkettő véges és meghatározott, a 0-tól különböző szám, volna, akkor kellene, hogy a két kifejezés hányadosának határértéke

$$\lim_{x=a} (x-a)^{\rho-\rho'}$$

is ilyen legyen. Ez pedig, ha ρ nem egyenlő ρ'-val, vagy 0 vagy végtelen.

Így péld. $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sin. x}$ első rendű, $\frac{1}{1-\cos. x}$ másodrendű végtelen lesz a 0 helyen.

Hogy nem minden függvény, mely az a helyen végtelen, egy-

* Ha $x - a$ nem pozitiv hanem általánosságban complex szám $r(\cos. \varphi + i \sin. \varphi)$, hol az argumentum a $\pi \geqq \varphi > -\pi$ föltétel értelmében van választva, $(x-a)^\rho$ jelentse az $r^\rho (\cos. \rho\varphi + i \sin. \rho\varphi)$ kifejezést, itt csak rövidítésképen, mely a hatványalak függvénytani elméletében találja majd indokolását. Ha $x - a$ pozitiv, $\varphi = 0$ és a jel értelme megmarad.

szersmind meghatározott rendű végtelen, kiviláglik a következő példákból.

E *valós* változó függvénye $A^{\frac{1}{z^2}}$, hol $A > 1$, az $z = 0$ helyen végtelen lesz, de bármicsoda pozitiv szám legyen is ρ, mindig

$$\lim_{z=0} \left(z^{\rho} A^{\frac{1}{z^2}}\right) = \infty,$$

a mint ez közvetetlenül világos, ha a 30. czikkben (XIII.) alatt álló második képletben

$$x = \frac{1}{z^2}, \quad a = \frac{1}{A}$$

tétetik és a reciprok értékre térünk át. Ha lim. $x = \infty$, lim. $z = 0$, és így ez ekkor:

$$\lim_{z=0} z^{2\rho} \left(\frac{1}{A}\right)^{-\frac{1}{z^2}} = \infty,$$

a mi az előbb adott állítással azonos; mert a ρ-val együtt 2ρ is tetszőleges szám. Ily függvényről azt mondjuk, hogy az illető helyen *végtelenjének rendszáma végtelen nagy, ha t. i.* $\lim_{x=a} \left((x-a)^{\rho} f(x)\right)$ *a* ρ *minden pozitiv értékénél* ∞.

Ellenben az $^{n}\log. x$, mely a $x = 0$ helyen végtelen lesz, oly függvény, melyre nézve e helyen *végtelenjének rendszáma végtelen kicsiny, t. i.* $\lim_{x=a} \left((x-a)^{\rho} f(x)\right)$ *a* ρ *minden pozitiv értékénél* 0; mert bármily kis pozitiv szám is a τ, a 30. cz XI. képlete szerint:

$$\lim_{x=0} (x^{\tau}\ {}^{n}\log. x) = 0.$$

Ha ellenben azt mondjuk, hogy $f(x)$ az a helyen *zerusodrendű* végtelen, az annyit jelent, hogy $\lim_{x=a} (x-a)^0 f(x) = \lim_{x=a} f(x)$, azaz magának a függvénynek határértéke véges és meghatározott.

Végre az

$$y = x^{-\left(1+\sin^2 \frac{1}{x}\right)}$$

szintén végtelen a 0 helyen; de végtelenjének rendszáma teljesen határozatlan, mert

$$\lim_{x=0} \left(x^{\alpha}\, x^{-\left(1+\sin^2 \frac{1}{x}\right)}\right)$$

végtelen ugyan, ha $a < 1$ és 0, ha $a > 2$ mert

$$1 \leqq 1 + \sin.^2 \frac{1}{x} \leqq 2;$$

de ha $1 < a < 2$, ama határérték teljesen határozatlan; x helyébe lehet oly számsorozatot tenni, hogy a határátmenet eredménye $\lim\limits_{x=0} x^{a-A}$-val egyenlő legyen, hol A bármely szám 1 és 2 közt. A határérték maga tehát 0, 1, vagy végtelen, a mint a választott $A < a, = a$ vagy $> a$. E czélból

$$a_n = \frac{1}{(\text{Arc. sin. } |\sqrt{A-1}|) + 2n\pi}$$

teendő, a mikor:

$$1 + \sin.^2 \frac{1}{a_n} = A,$$

és a_n a 0-hoz közeledő pozitiv szám, ha, mint kell A az 1 és 2, tehát $|\sqrt{A}-1|$ a 0 és 1 közt fekszik.

37. E megállapitások egyszersmind a folytonos és egyváltozós függvényeknek egy fontos osztályzását adják, mely ama helyekre vonatkozik, hol értékük 0. Az ily helyen a reciprok függvény végtelen lesz.

Az $f(x)$ függvény az $x = a$ helyen ρ-adrendű zérus lesz, ha a reciprok függvény ugyanott ρ-adrendű végtelen, vagyis ha van egy bizonyos, pozitiv ρ szám, melyre nézve $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)}{(x-a)^\rho}$ *véges és meghatározott, a 0-tól különböző érték.* Az illető föltétel első alakjában az, hogy

$$\lim_{x=a} \left((x-a)^\rho \frac{1}{f(x)}\right)$$

véges és meghatározott, a 0-tól különböző érték legyen; de evvel együtt a reciprok érték is mindig ilyen és ez át vezet a föltételnek előbb adott, szokottabb alakjára. — A megelőzőkből következik, hogy ily ρ szám nincs mindig és hogy több mint egy semmi esetre sem lehetséges.

Így péld. e függvény $\cos. x - 1$, az $x = 0$ helyen másodrendű zérus, mert

$$\lim_{x=0} \frac{\cos. x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

továbbá $(x^2 - 2x + 1)\cos.\frac{\pi x}{2}$ az $x = 1$ helyen 3-adrendű zérus, mert:

$$\lim_{x=1}.\frac{(x^2 - 2x + 1)\cos.\frac{\pi x}{2}}{(x-1)^3} = -\frac{\pi}{2}.$$

Ugyanis

$$\lim_{x=1}.\frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = 1,$$

$$\lim_{x=1}.\frac{\cos.\frac{\pi x}{2}}{x-1} = \lim_{z=0}.\frac{\cos.\left(\frac{\pi}{2} + \frac{z\pi}{2}\right)}{z} = \lim_{z=0}.\frac{-\sin.\frac{\pi z}{2}}{\frac{\pi z}{2}}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

ha t. i. $x - 1 = z$, hol, ha $\lim. x = 1$, $\lim. z = 0$ lesz.

Ha $A > 1$, az $A^{-\frac{1}{z^2}}$ függvény a $z = 0$ helyen zérus lesz, még pedig *végtelen magasrendű* zérus, mert bármily nagy pozitiv szám is ρ, mindig

$$\lim_{z=0}.\frac{A^{-\frac{1}{z^2}}}{z^\rho} = 0,$$

a mint ez a megelőző czikk képletéből, hol a recziprok érték áll, közvetetlenül következik.

Hasonlókép világos, hogy $\frac{1}{{}^a\log.x}$ *végtelen kis rendű zérus* az $x = 0$ helyen, mert

$$\lim_{x=0}.\frac{1}{x^\tau\,{}^a\log.x} = \infty$$

a τ minden pozitiv értékénél.

Hogy $f(x)$ az a helyen 0-rendű zérus, ismét annyit jelent, hogy $\lim_{x=a}.f(x)$ a 0-tól különböző véges, meghatározott érték.

Hasonlókép látni, hogy $x^{1+\sin^2\frac{1}{x}}$ az $x = 0$-ban zérus lesz ugyan, de *határozatlan rendű* zérus.

38. *A ∞ jel bevezetése a függvény értelmezési tartományába* bizonyos esetekben ép oly czélszerű, mint az előbbiek szerint e jel fölvétele a függvény értékkészletébe. Ha ugyanis a függvénynek a végtelenben meghatározott határértéke van, (véges vagy ∞) akkor ugyanezt veszszük a függvény helyettesítési értékének a végte-

nek a végtelenben. E szerint legyen ezentúl:

$$f(\infty) = \lim_{x=\infty} f(x),$$

és

$$\left(f(x_1, \ldots x_n)\right)_{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = \infty} = \lim_{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = \infty} f(x),$$

hol egyszersmind látni, hogy e helyettesitési érték hogy jelölendő. Ha most e határérték véges, azt mondjuk, hogy *a függvény a* ∞-*ben folytonos*, ha végtelen, *a függvény a* ∞-*ben maga is végtelen lesz.* Ha a határérték a ∞-ben általánosabban nem véges *és* meghatározott, *a függvény a* ∞-*ben szakadásos.*

Így péld. $\frac{1}{x^2+5}$ a ∞-ben folytonos, határértéke 0, x^2+5 a végtelenben végtelen lesz, míg a^x-nek a végtelenben nincs is határértéke, mert a $\lim_{x=+\infty} a^x$, $\lim_{x=-\infty} a^x$ közül az első zérus, a második ∞, ha $a<1$ és e két érték csak helyet cserél, ha $a>1$.

A 0 vagy ∞ rendjére vonatkozó megállapitások egy változós függvénynél ez esetben nem változnak, hanem csak tekintetbe veendő, hogy $a=\infty$ és ekkor az $(x-\infty)$ jel értelme $\frac{1}{x}$.

E szerint az $f(x)$ a ∞-ben határozott, ρ-adrendű végtelen, ha van egy oly pozitiv ρ szám, hogy

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x^\rho}$$

a 0-tól különböző véges és meghatározott szám; továbbá az $f(x)$ a ∞-ben határozott, ρ-adrendű zérus, ha van egy oly pozitiv ρ szám, hogy

$$\lim_{x=\infty} \left(x^\rho f(x)\right)$$

a 0-tól különböző, véges és meghatározott szám.

Így x^2+5 a ∞-ben másodrendű végtelen, $\frac{1}{x^2+5}$ ugyanott másodrendű zérus lesz.

Ép úgy ismét az $a^{(x)}$ valós függvény, ha $a>1$, a ∞-ben végtelen magasrendű végtelen lesz, ha $a<1$ ugyanott végtelen magas rendű zérus.

Végre $\left(\frac{1}{x^2}\right)^{1+\sin^2 x}$ $(x^2)^{1+\sin^2 x}$ a ∞-ben 0, ill. ∞ lesz; de e 0 vagy ∞ rendszáma határozatlan.

39. A 0 és ∞ rendszámának ezen esetleges megállapitása a függvények bizonyos egyszerűbb osztályainál a következő fontos tételhez vezet:

Ha két függvény $f(x)$ és $\varphi(x)$ egy bizonyos $x = a$ helyen egyenlő rendű 0 vagy ∞ lesz, akkor $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ és $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ e helyen folytonosak és mindkettőnek ott a 0-tól különböző értéke van.

Ekkor a mint $f(x)$ és $\varphi(x)$ 0 vagy végtelen *

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{(x-a)^\rho} \quad \text{és} \quad \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\rho}$$

vagy pedig

$$\lim_{x=a} \left((x-a)^\rho f(x)\right) \quad \text{és} \quad \lim_{x=a} \left((x-a)^\rho \varphi(x)\right)$$

véges és meghatározott, a 0-tól különböző értékek. Tehát (osztás segítségével)

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \text{és} \quad \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

s ilyen. Azaz az illető hányadosok által ábrázolt függvényeknek van az a helyen határértékük. E függvények analitikai alakja az a helyen határozatlan ugyan $\left(\frac{0}{0}\right)$; minthogy azonban a megszüntethető szakadásokat kizártuk, helyettesítési értékük a határértékkel egyenlőnek veendő.

Ha két függvény $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $x = a$ helyen egyidőben meghatározott, de nem egyenlő rendszámú zérus vagy végtelen lesz; akkor $\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (és vele együtt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ is) e helyen 0 vagy ∞, még pedig, ha a függvények az a helyen $\frac{\text{zérusok}}{\text{végtelenek}}$, a mint a számlálóban álló függvény rendszáma $\frac{\text{nagyobb}}{\text{kisebb}}$ vagy $\frac{\text{kisebb}}{\text{nagyobb}}$ a nevezőben álló függvényénél.

Ekkor ugyanis a két esetnek megfelelőleg:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \left((x-a)^{\rho-\sigma} \frac{\frac{f(x)}{(x-a)^\rho}}{\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\sigma}} \right) = C \lim_{x=a} \left((x-a)^{\rho-\sigma}\right),$$

* Közvetetlenül látni, hogy a számítás az $a = \infty$ esetet is magában foglalja, a mikor ismét csak mindenütt $x - \infty$ helyébe $\frac{1}{x}$ teendő.

vagy:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \left((x-a)^{\sigma-\rho} \frac{(x-a)^{\rho} f(x)}{(x-a)^{\sigma} f(x)}\right) = C' \lim_{x=a} \left((x-a)^{\sigma-\rho}\right).$$

a hol C és C' a 0-tól különböző, véges és meghatározott számok, az $x-a$ hatványának határértéke pedig csakugyan a tételnek megfelelőleg 0 vagy végtelen.

40. *Több változós függvényeknél* a zérus vagy végtelen rendjének értelmezései következőképen általánositandók. — Ha az $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ függvényben, mely az $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ belső* helyen 0 vagy végtelen lesz,

$$x_1 - a_1 = c_1 t^{\alpha_1}, \quad x_2 - a_2 = c_2 t^{\alpha_2}, \ldots, x_m - a_m = c_m t^{\alpha_m}$$

tétetik, hol $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ tetszőlegesen választott pozitiv számokat jelentenek és $c_1 \ldots c_m$ a 0-tól különböző állandók, akkor ez átmegy az *egy* t változó függvényébe. A t értékeiből ugyanis megkapjuk $x_1, \ldots x_m$-et és ezekből a függvény értékét. Ezen egy változós függvény $F(t)$ értelmezési tartománya mindazon t-értékekből áll, melyekre nézve $(x_1, \ldots x_m)$ azután az eredeti függvény értelmezési tartományához tartozik. E szerint $t=0$ az értelmezési tartomány belső helye, ha $(a_1 \ldots a_m)$ ilyen volt az eredeti függvényre nézve.

Ha az $F(t)$ függvény a $t=0$ helyen meghatározott rendszámú 0 vagy végtelen a $c_1, \ldots, c_m$ tetszőleges és az $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tetszőleges pozitiv értékeinél, (hol a «meghatározott» rendszám végtelen kicsiny vagy végtelen nagy is lehet), akkor az $f(x_1, \ldots, x_m)$ függvényről is azt mondjuk, hogy meghatározott rendű zérus vagy végtelen. Rendszám azért nincsen, hanem ennek helyébe jő az α és c állandók igen rendhagyó függvénye, melynek vizsgálatával azonban itt nem szükséges foglalkoznunk.

Így péld. $ax+by$, hol sem a, sem b nem 0, meghatározott rendű zérus az $x=0$, $y=0$ helyen, mert a helyébe lépő egyváltozós függvény

$$ac_1 t^{\alpha_1} + bc_2 t^{\alpha_2}$$

α_1 vagy α_2-rendű zérus a mint $\alpha_1 <$ vagy $> \alpha_2$; ha $\alpha_1 = \alpha_2$, átalá-

* Csak az ilyenre szorítjuk itt a tárgyalást; ha a ∞-ben fekvő helyre térünk át, kell tehát, hogy a függvény a ∞ környezetében adva legyen.

nosságban a zérus rendszáma szintén a_1, kivéve az $ac_1 + bc_2 = 0$ esetét, midőn e rendszám ∞.

Ha a vagy b zérus, akkor egy változós függvénynyel van dolgunk.

A végtelenben fekvő helyre vonatkozó vizsgálat csak új változók bevezetésével lehetséges. Legyen:

$$z_i = \frac{x_i - a_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i - a_i|^2}, \qquad (i = 1, \ldots m) \tag{1.}$$

áttérve az absolut értékekre, azután négyzetre emelve és összeadva, lesz:

$$\sum_{i=1}^{m} |z_i|^2 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i - a_i|^2}, \tag{2.}$$

tehát amaz egyenletek megfordításával:

$$x_i - a_i = \frac{z_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} |z_i|^2} \tag{3.}$$

A mint e vonatkoztatásokból látni, minden $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ helynek az $(a_1, \ldots, a_m)$ kivételével megfelel egy bizonyos $(z_1 \ldots, z_m)$ hely és megfordítva minden $(z_1, \ldots, z_m)$ helynek a $(0, \ldots, 0)$ kivételével egy bizonyos $(x_1, \ldots, x_m)$; úgy hogy a vonatkoztatás kölcsönös. Azonkívül, ha $|x_1 - a|^2 + \ldots + |x_m - a_m|^2 > \omega$, akkor $|z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2 < \frac{1}{\omega}$ és megfordítva; azaz az egyik sokaság 0-környezetének megfelel a másikban a ∞ környezete.

A geometriai ábrázolás esetében minden P pontnak megfelel egy P' pont, úgy hogy a PP' egyenes keresztül megy O-n, a koordináta rendszer kezdőpontján és $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = 1$.

E helyettesítés által az $f(x_1, \ldots, x_m)$ függvény átmegy egy $F(z_1, \ldots, z_m)$ függvénybe és az (1.) és (3.) alapján egymásnak megfelelő helyeken a függvény értékei ugyanazok. E szerint:

$$\left(f(x_1,\ldots,x_m)\right)_{|x_1|^2 + \ldots + |x_m|^2 = \infty} = \lim_{|x_1|^2 + \ldots + |x_m|^2 = \infty} f(x_1,\ldots,x_m) =$$

$$= \lim_{z_1 = 0 \ldots z_m = 0} F(z_1, \ldots, z_m)$$

és végre az $f(x_1, \ldots, x_m)$ zérusa vagy végtelenje a ∞-ben meghatározott, ha az $F(z_1, \ldots, z_m)$ függvényé a $(0 \ldots 0)$ helyen ilyen.

A képletek részletezése egyváltozós függvényeknél mutatja, hogy az új értelmezés a régit magában foglalja, a mennyiben a két határérték valós változók esetében ugyanaz, complex változóknál pedig két konjugált szám, tehát egyidőben a 0-tól különböző, véges és meghatározott számok.

A 39. cz. tételei nem vihetők át több változós függvényekre.

41. A megelőző tárgyalások a szakadásos függvényeknek további jellemzésére szolgálnak.

A meg nem szüntethető szakadás *lényegtelen*, ha az illető függvény a szakadás helyének környezetében mint ama helyen meghatározott rendű zérussá levő függvények hányadosa állítható elő; az ellenkező esetben a szakadás *lényeges*. Az elnevezés indokolására szolgálhat azon megjegyzés, hogy a lényegtelen szakadás esetében az illető hely környezetében a függvény elemzése a számlálóban és nevezőben álló folytonos függvényekére vezethető vissza.

A 39. czikk tárgyalásaiból közvetetlenül világos, hogy egy változós függvény, ha az a helyen lényegtelen szakadása van, e helyen mindig meghatározott rendű végtelen lesz. Viszont minden függvénynek, mely az a helyen meghatározott rendű végtelen, e helyen lényegtelen szakadása van.

Mert ha $\lim\limits_{x=a} (x-a)^\rho f(x)$ a 0-tól különböző véges és meghatározott szám, akkor $(x-a)^\rho f(x)$ az a helyen folytonos és 0-od-rendű zérus és:

$$f(x) = \frac{(x-a)^\rho f(x)}{(x-a)^\rho}.$$

Ha adva van egy complex változó függvénye, melynél a változó valós értékeinél valós függvény értékek lépnek föl, akkor ama complex függvény mintegy magában foglalja azon valós függvényt. *Az eddigi megállapításokból foly — de tévedések elkerülése végett különkiemelendő — hogy a valós és a megfelelő complex függvénynél az egyes helyeknek jellege, a mi a folytonosságot vagy a megszakadást illeti, nem szükségkép ugyanaz.* A complex változó esetében a határátmenet módja sokkal változatosabb mint az előbbi esetben;

lehet, hogy valós változó esetében van határérték, complex változó esetében pedig nincs.

Így p. legyen a $z = x + yi$ complex változónak függvénye

$$E(z) = e^{x}(\cos. y + i \sin. y),$$

úgy ez valós változó esetében, mikor $y = 0$, átmegy ebbe

$$E(x) = e^{x}.$$

E szerint $E\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, mint valós függvény, az $x = 0$ helyen folytonos, ellenben mint complex függvény

$$E\left(-\frac{1}{z^2}\right) = E\left(-\frac{1}{x^2 - y^2 + 2xyi}\right) = E\left(\frac{(y^2 - x^2) + 2xyi}{(y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2 + 4x^2y^2}}\left(\cos. \frac{2xy}{(y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2} + i \sin. \frac{2xy}{(y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2}\right)$$

és itt az $x = 0$, $y = 0$ helyen a határérték a határátmenet módja szerint teljesen különböző lehet. Ha például a tisztán képzetes számokon át közelítjük meg 0-t, azaz x-et kezdettől fogva zérusnak veszszük, lesz a határérték:

$$\lim_{y=0} . e^{\frac{1}{y^2}} = \infty,$$

míg előbb 0 volt.

Míg tehát $e^{-\frac{1}{x^2}}$ az $x = 0$ helyen folytonos, addig az «általánosítása» gyanánt tekintendő $E\left(-\frac{1}{z^2}\right)$-nek ugyane helyen lényeges szakadása van.

A folytonos függvények alaptulajdonságai.

42. Ha h absolut értékét elég kicsinynek veszszük, $x + h$ tetszőleges közel jut az x-hez; e szerint azt, hogy az $f(x)$ függvény az x helyen folytonos, következő módon is lehet kijelenteni:

$$\lim_{h=0} . \left(f(x + h) - f(x)\right) = 0.$$

Hasonlókép több változónál:

$$\lim_{h_1=0, \ldots, h_m=0} . \left(f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_m + h_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\right) = 0.$$

Az egyes változókhoz hozzátoldott h értékét *a változó növekményének* nevezzük, hol az itt általánosabb értelemben vett, hozzáadást jelentő «növekmény» nem épen a szó szorosabb értelmében nagyobbodást jelent.

Ha x növekménye h, vagy $x_1, \ldots x_m$ növekményei $h_1, \ldots, h_m$, akkor *a függvény megfelelő növekménye* azaz azon érték, melyet $f(x)$ illetőleg $f(x_1, \ldots, x_m)$-hez hozzá kell adni, hogy belőle $f(x+h)$, ill. $f(x_1 + h_1, \ldots, x_m + h_m)$ legyen lesz:

$$f(x+h) - f(x), \text{ ill.}$$

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_m + h_m) - f(x_1, \ldots, x_m).$$

Azt, hogy valamely — független vagy függő — változó határértékére kell áttérnünk és hogy e határérték zérus, röviden úgy fejezzük ki, hogy *az illető változó végtelen kicsiny lesz.* Egyes speciális esetekben már előbb bevezettük e kifejezésmódot, melynek a «végtelen» szó használata mellett is teljesen szigorú számtani értelme van.

Ha a változónak értékéhez hozzáadjuk a növekményt, a változó értékét *változtatjuk;* és e szerint a növekmény nem egyéb mint a változó eredeti értékének és változtatott értékének különbsége, differencziája. Ez értelemben az $y = f(x)$ *függvény növekményének jelölésére* a

$$\Delta y = \Delta f(x)$$

alakot használjuk, hol Δ (differenczia) műveletjelnek tekintendő. Ugyanígy természetesen a független változó növekménye Δx lesz. A Δ jel úgy értendő, hogy Δx tetszőlegesen választott, de meghatározott értékének megfelelőleg, képezzük $\Delta f(x)$-et, úgy hogy:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Ha ugyanazon független változónak több függvényét vizsgáljuk egyidőben, $\Delta f(x)$, $\Delta \varphi(x) \ldots$ mind az *ugyanazon* Δx-szel képezett növekményt jelentik.

Az $f(x+h) - f(x)$ az x egy bizonyos értéke mellett a $h=0$ környezetében a h függvénye, mely a $h = 0$ helyen maga is zérus. Mint ilyen esetleg határozott rendű 0 lesz, azaz létezik egy bizonyos pozitiv ρ szám, úgy hogy:

$$\lim. \frac{f(x+h)-f(x)}{h^{\rho}}$$

a 0-tól különböző véges és meghatározott szám. Ekkor *a függvény növekménye az x helyen ρ-adrendű végtelen kicsiny lesz.*

Ha két függvény $f(x)$ és $\varphi(x)$ növekménye egy bizonyos helyen ρ-ad, ill. σ-adrendű végtelen kicsiny lesz, akkor a függvények növekményeiből képezett hányadosnak határértéke

$$\lim_{h=0} \frac{f(x-h)-f(x)}{\varphi(x-h)-\varphi(x)}$$

ugyane helyen 0, a 0-tól különböző véges és meghatározott szám, vagy végtelen, a mint $\rho > \sigma$, $\rho = \sigma$ vagy pedig $\rho < \sigma$.

Így péld. az x^2, $(x-1)^2$ függvények növekménye az $x = 1$ helyen első-, illetőleg másodrendű végtelen kicsiny lesz. Mert

$$\lim_{h=0} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h=0} \frac{2h+h^2}{h} = 2,$$

$$\lim_{h=0} \frac{(1+h-1)^2-0}{h^2} = \lim. \frac{h^2}{h^2} = 1,$$

vagy az előbb bevezetett jelzésben:

$$\lim_{\Delta x=0} \left(\frac{\Delta(x^2)}{\Delta x}\right)_{x=1} = 2$$

$$\lim_{\Delta x=0} \left(\frac{\Delta(x-1)^2}{(\Delta x)^2}\right)_{x=1} = 1$$

és ebből

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta((x-1)^2)}{\Delta(x^2)} = 0$$

Az infinitezimális módszerek, melyek az analizis főtartalmát teszik, azon alapúlnak, hogy a folytonos függvények egy igen terjedelmes és fontos osztályánál a függvénynövekmény végtelen kisebbedésének egy bizonyos, meghatározott mérőszáma van, ha ezt a független változó növekményének végtelen kisebbedésére, mint mértékegységre vonatkoztatjuk; még pedig úgy, hogy e mérőszám megállapítása független egészen attól, hogy a független változó növekménye miképen *közeledik a 0-hoz, hacsak a függvény növekményei a független változó megállapitott növekményeinek megfelelőleg képeztetnek.*

Ha a $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$, és $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n, \ldots$ számsorozatoknak határértékei lim. δ_n és lim. ε_n egyenlők zérussal, akkor — régibb megállapitásaink értelmében, (I. r. 141. cz.) — a δ-knak a 0-hoz való közeledése, kisebbedése gyorsabb vagy lassubb az ε-okénál, a mint lim. $\frac{\delta_n}{\varepsilon_n} = 0$, vagy ∞; a δ-k és ε-ok egyenlő mértékben kisebbednek, ha lim. $\frac{\delta_n}{\varepsilon_n}$ a 0-tól különböző véges és meghatározott szám. Ujból hangsúlyozandó, hogy lim. $\frac{\delta_n}{\varepsilon_n}$ határozatlan is lehet és ekkor a δ-k és ε-ok kisebbedése egyáltalában nem hasonlitható össze.*

A folytonos függvény növekményére nézve a végtelenig való kisebbedés mérőszáma tehát nem egyéb mint a végtelen kis növekmény rendszáma, ha ilyen létezik; mert ha a $f(x)$ és $\varphi(x)$ végtelen kis növekményeinek (egy bizonyos helyen) rendszámai ρ és σ, akkor, mint az előbbiekből közvetetlenül világos, a $\Delta f(x)$ a $\Delta\varphi(x)$-nél gyorsabban vagy lassabban közeledik a 0-hoz, a mint $\rho > \sigma$, illetőleg $\rho < \sigma$, végre egyenlő mértékben kisebbednek, ha $\rho = \sigma$.

Az összehasonlitás még akkor is lehetséges, ha a végtelen kis növekmény rendszáma «végtelen kicsiny», vagy «végtelen nagy», a mennyiben ezen esetben az illető függvény növekményei lassabban, illetőleg gyorsabban kisebbednek bármely oly függvény növekményeinél, melynél a végtelen kis növekmény rendszáma véges és meghatározott a 0-tól különböző szám.

Így péld. az $x=0$ helyen x^2 növekményei gyorsabban kisebbednek, mint sin. x növekményei, mert tudjuk hogy $\Delta(x^2)$ az $x=0$ helyen másodrendű végtelen kicsiny, míg

$$\lim_{\Delta x=0} \left(\frac{\Delta(\sin. x)}{\Delta x}\right)_{x=0} = \lim_{\Delta x-a} \frac{\sin. \Delta x - \sin. 0}{\Delta x} = 1$$

tehát Δ sin. x elsőrendű végtelen kicsiny.

---

* Ilyen eset p. az hol

$$\delta_n = \varepsilon_n \sin. \frac{1}{\varepsilon_n}, \; \varepsilon_n = \frac{2}{n\pi}$$

a mikor

$$\frac{\delta_n}{\varepsilon_n} = \sin. \frac{n\pi}{2}$$

tehát a mint n-nek, négygyel osztva, maradéka 0, 1, 2 vagy 3 lesz: 0, 1, 0 vagy —1.

Alapvető fontosságú azon eset, midőn $f(x)$ növekményei nem kisebbednek lassabban a független változó növekményeinél, azaz midőn $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ első vagy magasabbrendű végtelen kicsiny, tehát

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

véges és meghatározott szám (esetleg 0).

E határérték, mely nem más mint a függvény *differencziálhányadosa* az x helyen, nagy jelentőségéhez képest külön szakaszban lesz tárgyalandó; ezelőtt azonban még a folytonos függvényeknek elemzését még más irányban kell kiegészítenünk.

43. E vizsgálatokban jelentékeny szerepe van a következő segédtételnek: *Ha az $f(x_1, \ldots, x_m)$ függvény az $x=a$ helyen folytonos, akkor egy tetszőlegesen választott pozitiv δ megállapítása után, meg lehet határozni egy pozitiv számot ε-t, úgy hogy az*

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - f(c_1, \ldots, c_m)| < \delta \qquad (33)$$

egyenlőtlenség ki lesz elégítve, ha

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i - c_i|^2 < \varepsilon^2,$$

nemcsak akkor, midőn (mint előbb) a c hely a-val összeesik, hanem általánosabban, ha

$$\sum_{i=1}^{m} |c_i - a_i|^2 < \varepsilon^2.$$

A függvény folytonossága miatt mindenesetre van egy pozitiv η szám, úgy hogy

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - f(a_1, \ldots, a_m)| < \tfrac{1}{2}\delta$$

ha $\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i|^2 < \eta^2$. Legyen most $\varepsilon = \frac{1}{2}\eta$; ha ekkor

$$\sum_{i=1}^{m} |c_i - a_i|^2 < \varepsilon^2 \text{ és } \sum_{i=1}^{m} (x_i - c_i)^2 < \varepsilon^2,$$

akkor mindenesetre (l. a 19. cz.-et):

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i|^2 \leqq \sum (|x_i - c_i| + |c_i - a_i|)^2 < 4\varepsilon^2 = \eta^2$$

tehát:

$$|f(x_1,\ldots,x_m)-f(a_1,\ldots,a_m)|<\tfrac{1}{2}\delta,$$
$$|f(c_1,\ldots,c_m)-f(a_1,\ldots,a_m)|<\tfrac{1}{2}\delta,$$

és ezekből, a mint bebizonyítandó volt:

$$|f(x_1,\ldots,x_m)-f(c_1,\ldots,c_m)|<|f(x_1,\ldots,x_m)-f(a_1,\ldots,a_m)|+$$
$$+|f(c_1,\ldots,c_m)-f(a_1,\ldots,a_m)|<\delta.$$

E tétel könnyen azon *téves* következtetésre csábít, hogy ha az $f(x_1,\ldots,x_m)$ az a helyen folytonos, folytonos egyszersmind minden oly c helyen, melyre nézve $\sum_{i=1}^{m}|c_i-a_i|^2$ egy bizonyos pozitiv számnál kisebb. Erre nemcsak szükséges, hogy az $|f(x_1,\ldots,x_m)-f(c_1,\ldots,c_m)|<\delta$ minden δ-nál megoldható legyen, hanem hogy ε a δ bármely értékénél egy bizonyos η-nál nagyobb maradjon. Különben a δ kisebbedésével az a környezete, melyre ama tétel áll, szintén kisebbedhetik, és a bármely c-re vonatkozó következtetések megakadnak, ha a δ-nak elég kis értékeit veszszük.

Hogy csakugyan vannak függvények, melyek egy bizonyos a helyen folytonosak, ámbár e hely tetszőleges közelében szakadásosak, azt a következő egyszerű példa is mutatja:

Legyen az $f(x)$ valós függvény a 0 és 2 közt következőkép adva:

ha $\quad 0<x<\frac{1}{2}\quad$ legyen $f(x)=1$,

ha $\quad \frac{1}{2}\leq x<\frac{2}{3}\quad$ » $\quad f(x)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}$,

ha $\quad \frac{2}{3}<x<\frac{3}{4}\quad$ » $\quad f(x)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$,

. . . .

ha $\quad \frac{K-1}{K}\leq x<\frac{K}{K+1}\quad$ » $\quad f(x)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{K^2}$,

. . . .

ha $\quad x=1\quad$ » $\quad f(x)=s=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{K^2}+\ldots$

(végtelen sor),

ha végre $x=1+p$ hol $0<p\leq 1$, akkor legyen $f(1+p)=f(1-p)$.

A függvény értékei, mint látni, 0-tól 1-ig folyton nőnek, 1-től 2-ig folyton fogynak. Szakadása van az $x=\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \frac{K-1}{K}, \ldots$ és hasonlóképen $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{4}$, $1+\frac{1}{5}, \ldots 1+\frac{1}{K}, \ldots$ helyeken. Tehát az $x=1$ hely környezetében, bármily kicsinyre szabjuk is ezt, végtelen sok szakadása van. Mindamellett függvényünk az $x=1$ helyen folytonos. Az

$$|f(x)-f(1)|<\delta$$

egyenlőtlenség a követelt módon a δ minden pozitiv értékénél megoldható. Minthogy ugyanis $\sum\limits_1 \frac{1}{n^2}$ összetartó sor, lehet a k oly értékét találni

$$\frac{1}{K^2}+\frac{1}{(K+1)^2}+\ldots<\delta$$

hacsak $K>k$. Ha tehát

$$|x-1|<\frac{1}{K},$$

vagyis

$$\frac{K-1}{K}<x<\frac{K+1}{K},$$

mindig

$$|f(x)-f(1)|<\frac{1}{(K+1)^2}+\frac{1}{(K+2)^2}+\ldots<\delta.$$

E feltünő körülmény oka e függvénynél természetesen abban rejlik, hogy a függvénynek az 1 közelében folyton vannak ugyan ugrásszerű értékváltozásai; de az értékváltozás nagysága ezen ugrásoknál az 1 megközelítésével minden határon tul kisebbedik.

44. A megelőző példa mutatja, hogy az oly függvény, mely egy bizonyos helyen folytonos, e körülmény daczára is az illető helynek minden bármely kis környezetében is az elemekből megszokott függvényalakokétól teljesen elütő, «rendhagyó» jelleget mutathat. Ez a folytonosságban kifejezett tulajdonságoknak kiegészítésére vezet.

Legyen A egy folytonos és véges tartomány, mely az $f(x_1,\ldots,x_m)$ értelmezési tartományának része. Az $f(x_1,\ldots,x_m)$ e tartományon belül egyenletesen folytonos, ha bármely pozitiv δ-hoz lehet egy pozitiv*

* Heine. Crelle, Journal 74. köt. (Lásd a megjegyzést a 73. lapon.)

ε-t meghatározni, úgy hogy

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - f(a_1, \ldots a_m)| < \delta,$$

mihelyt

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i|^2 < \varepsilon^2,$$

hol azonban most $(a_1, \ldots, a_m)$ az A tartomány bármely helyét jelenti. Előbb $(a_1, \ldots, a_m)$ csak egy bizonyos meghatározott helyet jelentett.

Evvel szemben ugyanis az is lehetséges, hogy egy bizonyos δ és a hozzátartozó ε-nak a tartomány bármely helyén való megállapítása után mindig van egy az A-ba tartozó $a^{(1)}$ hely, melyben a függvény folytonos ugyan, de arra, hogy $|f(x_1, \ldots, x_m) - f(a_1^{(1)}, \ldots, a_m^{(1)})| < \delta$ legyen, kell, hogy $\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i^{(1)}|^2 < \varepsilon'^2$ vétessék, hol $\varepsilon' < \varepsilon$.

Hogy az $f(x_1, \ldots, x_m)$ az A tartományban egyenletesen folytonos legyen, arra mindenesetre szükséges, hogy a függvény ama tartománynak bármely egyes a helyén folytonos legyen; mert különben amaz egyenlőtlenség már egy bizonyos helyre nézve nem elégíthető ki, annál kevésbé egyidőben a tartomány minden helyére nézve. Lássuk most már közelebbről a viszonyokat, ha a függvény az A tartományban nem egyenletesen folytonos, ámbár a tartomány minden egyes helyén folytonos.

Akkor van egy δ pozitiv szám, ugy hogy az

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - f(a_1, \ldots, a_m)| < \delta$$

egyenlőtlenség nem elégíthető ki a tartomány minden helyére nézve a $\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i|^2 < \varepsilon^2$ föltétel által, bármily kicsinynek veszszük is az ε-et. Azaz ha

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

pozitiv és folyton kisebbedő számok, melyekre nézve lim. $\varepsilon_n = 0$, akkor van az $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(n)} \ldots$ a tartományba tartozó helyeknek egy határtalan sorozata, úgy hogy még

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - f(a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)})| > \delta,$$

ámbár $\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i^{(n)}|^2 < \varepsilon_n^2$. Az $a^{(1)} \ldots a^{(n)} \ldots$ helyek mind a véges A tartományba tartoznak, van tehát egy a hely, melynek tetszőleges kis környezetében az $a^{(1)} \ldots a^{(n)} \ldots$ sorozatnak végtelen sok helye található. E szerint az a hely az A-nak vagy belső helye vagy közönséges határhelye. Ezen a helyen ekkor a függvény semmi esetre sem folytonos. Ha ugyanis az a helyen folytonos, akkor e helynek lehet egy bizonyos környezetét kijelölni, úgy hogy minden e környezeten belül fekvő c helyre nézve

$$|f(x_1, \ldots x_m) - f(c_1, \ldots, c_m)| < \delta$$

ha $\sum_{i=1}^{m} |x_i - c_i|^2 < \varepsilon^2$, de e környezeten belül végtelen sok $a^{(n)}$-t találni, és ezekre nézve, ha csak a megfelelő ε_n sorozatban az ε-nál kisebb értékig megyünk, $|f(x_1, \ldots, x_m) - f(a_1^{(n)}, \ldots, a_m^{(n)})| > \delta$, ámbár $\sum_{i=1}^{m} |x_i - a_i^{(n)}|^2 < \varepsilon_n^2 < \varepsilon^2$.

E szerint, ha valamely függvény az A tartományon belül mindenütt folytonos, de még sem egyenletesen folytonos, kell, hogy e tartománynak egy határhelyén szakadásos legyen. (Az a ugyanis, mely helyen a függvény nem folytonos, nem lehet belső hely, tehát közönséges határhely). E szerint kimondhatjuk a következő tételt:

Ha valamely függvény egy bizonyos folytonos és véges tartományon belül, valamint e tartomány minden határhelyén folytonos, akkor a függvény e tartományban egyenletesen folytonos.

Különben a tétel — a mint könnyü látni — valamivel általánosabban is fogalmazható. Azon tárgyalásnál, mely a függvény megszakadását bizonyítja az A tartomány egyik határhelyén, kizárólag az A-ban vagy ennek határán fekvő helyeket használtunk. És így *az egyenletes folytonosságra elég, ha a függvény folytonosságának vizsgálatánál csak az A-n belül és A határán fekvő helyeket veszszük tekintetbe*, azaz úgy járunk el, mintha a függvény értelmezési tartománya is csak ezen helyekből állana.

A függvény értelmezési tartományának határhelyein természetesen szintén csak a tartomány belső és határhelyei jönnek tekintetbe.

Igy például $\frac{1}{x}$ az 1-től 2-ig terjedő számkörben egyenletesen folytonos; mert folytonos e számkörön belül és a két határhelyen. Hogy ekkor

$$\left|\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|h|}{|x|\,|x+h|} < \delta$$

legyen, arra minthogy p. $|x|$ és $|x+h|$ nagyobb $\frac{1}{2}$-nél, elég ha

$$4|h| < \delta;$$

mert mindenesetre

$$\frac{|h|}{|x|\,|x+h|} < 4|h|.$$

Ellenben $\frac{1}{x}$ a 0-tól 1-ig terjedő számközben nem egyenletesen folytonos, a minek oka az, hogy $\frac{1}{x}$ a 0 helyen nem folytonos. Csakugyan bármily kicsiny is ε, lehet egy (a 0-hoz elég közel fekvő) x-et találni, melyre nézve ámbár $|h| < \varepsilon$, mégis a δ tetszőleges nagy értékénél is:

$$\frac{|h|}{|x|\,|x+h|} > \delta.$$

Minthogy pedig:

$$\frac{|h|}{|x|\,|x+h|} > \frac{|h|}{|x|},$$

ez mindenesetre megtörténik, ha $|x| < \frac{|h|}{\delta}$.

45. *Ha valamely függvény egy bizonyos folytonos és véges tartományon belül és ennek minden határhelyén folytonos, ha továbbá a tartományon belül a függvény értékei tetszőlegesen közel jutnak egy bizonyos K értékhez, akkor ama tartománynak van egy belső vagy határhelye, hol a függvény helyettesítési értéke K.*

Ha $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$ pozitiv kisebbedő számok sorozata, melyekre nézve lim. $\delta_n = 0$, akkor a tételben kifejezett föltétel értelmében, minden δ_n-hez lehet egy $(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$ helyet meghatározni, úgy hogy

$$|f(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) - K| < \delta_n.$$

Az $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ helyek sorozata határtalan, és mindannyi egy véges tartományban fekszik; van tehát egy $(x_1, \ldots, x_m)$ hely, melynek bármely kis környezetében e sorozat végtelen sok helye fekszik, és mely hely maga a tartománynak vagy belső vagy közönséges határhelye. E helyen csakugyan:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = K.$$

Ha a függvény értéke e helyen a K-tól különböző K' volna, tehát $|K - K'|$ nem 0. akkor lehetne e helynek oly környezetét megállapitani, hogy minden e környezetben foglalt $(z_1 \ldots, z_m)$ helyre nézve:

$$|f(z_1, \ldots, z_m) - K'| < \frac{|K-K'|}{2}.$$

De e környezetben végtelen sok $x^{(n)}$ hely van; a z tehát úgy is választható, hogy

$$|f(z_1, \ldots, z_m) - K| < \delta_n$$

hol δ_n bármely (kis) pozitiv szám lehet. De ekkor volna:

$$|K-K'| \leq |K-f(z_1, \ldots, z_m)| + |f(z_1, \ldots, z_m) - K'| < \frac{|K-K'|}{2} + \delta_n,$$

a mi képtelenség, ha például δ_n-et $\frac{1}{4}|K-K'|$-nél kisebbnek veszszük. Kell tehát, hogy $|K-K'| = 0$ legyen, vagyis $K = K'$, a mi bebizonyítandó volt.

46. Valamely függvény *menetét* vagy *folyását* egy folytonos tartományon belül megvizsgáljuk, ha a független változónak (vagy független változók rendszerének) tulajdonítandó értékek (értékrendszereknek) kellően választott egymásutánját veszszük alapúl, és a megfelelő sorrendben tekintjük a függvényértéket. Ezen egymásután választása természetesen úgy történjék, hogy ez által magunknak a függvény alkatáról átnézetes képet készítsünk.

Egy változós valós függvénynél e megállapítások nagyon egyszerűek. A folytonos tartomány ekkor nem más, mint egy véges, vagy határtalan számköz, melyben a független változó értékeinek egymásutánját úgy lehet megadni, hogy az értékeket mindig növekedő, vagy mindig fogyó sorrendbe teszszük. Ily értelme van annak, ha a független változó a-tól b-ig, vagy b-től a-ig megy.

Ha azonban a változók száma 1-nél nagyobb, vagy akár csak egy, de complex változóval van dolgunk, akkor valamely folytonos tartományon belül az átmenet az a és b helyek közt végtelen sok módon eszközölhető már akkor is, ha az eddig használt «egyenes darabokból összeállított» $ac^{(1)} \ldots c^{(n)}b$ utakra szorítkozunk. Hisz a $c^{(1)}$ például bármely az a egy bizonyos környezetében fekvő hely lehet. Még sokkal nagyobb e változatosság, ha valamely $c^{(k)}c^{(k+1)}$ köz* által megállapított értékrendszerek helyett, melyeknek egy-

* Az a t és b-t ekkor $c^{(0)}$ és $c^{(n+1)}$ jelölik.

másutánja a ϑ szám értékei által van megadva, más *folytonos* utat választunk a $c^{(k)}$ és $c^{(k+1)}$ közt. Ily *folytonos* út alatt értjük a helyeknek azon egymásutánját, melyet az

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$$

folytonos függvények adnak meg bizonyos föltételek mellett. (Az x-ek itt már valós változókat jelentenek, eredetileg complex változók esetében, ezeknek valós, illetőleg i-vel szorzott részét, vagy, a mi evvel egyre megy, a φ ekkor a valós t változó complex függvényének tekintendő). A $\varphi_i(t)$ függvények legyenek ugyanis úgy választva, hogy ha a t értéke $t^{(k)}$, ill. $t^{(k+1)}$, legyen:

$$\varphi_i(t^{(k)}) = c_i^{(k)},\ \varphi_i(t^{(k+1)}) = c_i^{(k+1)}.$$

Ha pedig t a $t^{(k)}$ és $t^{(k+1)}$ közt fekszik, akkor a $\varphi_i(t)$ $(i=1,\ldots m)$ értékrendszer az adott tartományba tartozó helyet adjon. A φ függvények mindig e föltételnek megfelelőleg választhatók. Mert például már

$$\varphi_i(t) = c_i^{(k)} \frac{t - t^{(k+1)}}{t^{(k)} - t^{(k+1)}} + c_i^{(k+1)} \frac{t - t^{(k)}}{t^{(k+1)} - t^{(k)}}$$

ily függvény alakokat szolgáltat. Hogy t. i. a t-nek $t^{(k)}$ és $t^{(k+1)}$ közt fekvő értékei a tartományba tartozó helyeket adnak, ez esetben abból világos, hogy még

$$\varphi_i(t) = c_i^{(k)} + \frac{t - t^{(k)}}{t^{(k+1)} - t^{(k)}} (c_i^{(k+1)} - c_i^{(k)});$$

és ha t a $t^{(k)}$-tól $t^{(k+1)}$-ig megy, $\frac{t - t^{(k)}}{t^{(k+1)} - t^{(k)}}$ fölvesz minden értéket 0-tól 1-ig, tehát ugyanazon helyeket adja, mint az előbb ϑ-nak nevezett mennyiség, azaz e függvények a $c^{(k)}$ $c^{(k+1)}$ közt szolgáltatják.

A φ függvények változójának, t-nek $t^{(0)}, t^{(1)}, \ldots t^{(2)} \ldots t^{(n+1)}$ értékeit úgy választva, hogy ezek növekedő vagy fogyó számok sorozatát adják, végre a $\varphi(t)$-t mint $t^{(0)}$ és $t^{(n+1)}$ közt folytonos függvényt kapjuk, és a következő általános értelmezést adhatjuk, a hol még csak az $^{(n+1)}$ jelzőt vonással helyettesítjük.

Az $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ változó rendszer folytonos utat ir le az $(a_1^{(0)}, \ldots a_m^{(0)})$ helytől az $(a_1', a_2', \ldots, a_m')$-ig, ha az $x_i = \varphi_i(t)$ foly-

tonos függvényeket még a

$$\varphi_i(t^{(0)}) = a_i^{(0)},\ \varphi_i(t') = a_i'$$

föltételeknek megfelelőleg választjuk, es a változó értékrendszereinek egymásutánját a t valós értékeinek sorrendje szerint állapítjuk meg, hol t a t_0-tól egészen t'-ig megy.

Adott függvénynél a φ függvények még úgy választandók, hogy a keletkező értékrendszerek mind a vizsgálandó folytonos tartományhoz tartozzanak, a mi az előbbiek szerint mindig lehetséges.

Ha ama megállapítások már mind megtörténtek, azt mondjuk hogy az $(x_1, \ldots, x_m)$ változó rendszer *adott utat ír le.*

Adott úton a több változós függvény egy változós függvény lesz, mert a t megadja az x-eket, és ezek a függvényértéket.

Ha az eredetileg adott függvény folytonos, az így keletkező egy változós függvény szintén folytonos. Mert ha a t növekményét elég kicsinynek veszszük, a $\varphi(t)$ függvény növekménye is tetszőlegesen kicsinynyé tehető, és e fölfogásban

$$F(\varphi_1(t+\Delta t), \ldots, \varphi_m(t+\Delta t)) - F(\varphi_1(t), \ldots \varphi_m(t))$$

a származott egyértékű függvény növekménye, mely nem más mint

$$F(x_1+h_1, \ldots, x_m+h_m) - F(x_1 \ldots x_m)$$

és tehát tetszőlegesen kicsinyíthető, ha a Δt-t és evvel együtt a $h_i = \varphi_i(t+\Delta t) - \varphi_i(t)$ különbségeket elég kicsinyeknek veszszük.

A mondottak magukban foglalják a következő eredményt, melyet fontossága miatt külön kiemelünk: *Az*

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\ ,\quad x_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

egyenletek együtt a t változó függvényét $y = F(t)$ értelmezik, melynek értelmezési tartománya mindazon t értékekből áll, melyek minden egyes φ függvény értelmezési tartományában benfoglaltatnak és az f értelmezési tartományába tartozó x-rendszereket adnak. Az F függvény egyértékű, ha a φ-k és f egyértékű függvények; e függvény folytonos a t helyen, ha a φ függvények folytonosak e helyen és az f függvény folytonos a megfelelő $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ helyen.

47. *Valós változók valós függvényeinél* a folytonos függvények alaptulajdonságai még a következő, e függvények elméletében alapvető tételekkel egészítendők ki.

Ha az $x_1, \ldots x_m$ valós változók valós függvénye $f(x_1, \ldots, x_m)$ valamely folytonos és véges tartománynak minden belső és határhelyén folytonos, akkor az e helyeknek megfelelő függvényértékek közt van egy legnagyobb és egy legkisebb (maximum és minimum). (WEIERSTRASS tétele).

Mindenekelőtt van egy H pozitiv szám, úgy hogy bármely tekintetbe jövő helyre nézve $|f(x_1, \ldots, x_m)| < H$. Az ellenkező esetben lehetne egy helyet találni, melyen

$$|f(x_1, \ldots, x_m)| > \omega,$$

bármily (nagy) pozitiv szám is ω. Ha ekkor $\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$ növekedő pozitiv számok sorozata, melyre nézve $\lim \omega_n = \infty$, e sorozat minden egyes tagjára nézve volna egy hely, melyen a függvény absolut értéke nagyobb mint ω. E helyek, melyek mind egy véges tartományban vagy ennek határán feküsznek, végtelen számmal vannak és egy szintén ama véges tartományban vagy annak határán fekvő helyet adnak, melynek bármily kis környezetében ama helyek végtelen számmal találhatók, és a mely helynek e tetszőleges kis környezetében a függvény absolut értéke a tetszőlegesen választott ω_n-nél is nagyobb. De föltevéseink értelmében a függvény ama helyen folytonos, és ily hely környezetében a függvény absolut értékei mindig egy bizonyos határ alatt maradnak. Az elemzett eset tehát nem fordulhat elő és a jellemzett H szám mindig létezik.

Az adott folytonos tartomány belsejének és határhelyeinek megfelelő függvényértékek tehát véges számtartományt alkotnak, melynek van felső határa G és alsó határa G', úgy hogy minden előforduló érték G'-nél nagyobb, de G-nél kisebb. De végre a G és és G' a függvény értékei közt valóban előfordulnak. Mert, a mint a számtartományok elméletében bebizonyítottuk (4. cz.) van ekkor a vizsgált számok (most függvényértékek) közt olyan, mely G-től, illetőleg G'-től egy tetszőlegesen választott δ számnál kevesebbel különbözik és ekkor a 45. cz. értelmében a függvény értékei közt bennfoglaltatik a G és G' is, melyek természetesen a vizsgált tar-

mely a szerint pozitiv vagy negativ, a mint az ismeretlen legmagasabb hatványának együtthatója és az ismeretlentől ment tag ellenkező vagy egyenlő előjelű.

Ha az egyenlet:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

akkor bebizonyítandó, hogy az

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

függvénynek a 0 és P, illetőleg a 0 és $-P$ helyettesítésénél (hol P egy különben tetszőlegesen választható pozitiv szám) ellenkező előjelű értékei vannak, a miből az előbbiek szerint következik, hogy az illető határok közt van egy x érték, melynél az y értéke 0, amely tehát az egyenlet gyöke.

Az y függvény a következő alakban is irható:

$$y = A_0 x^n \left(1 + \frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x} + \ldots \frac{A_{n-1}}{A_0}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{A_n}{A_0}\frac{1}{x^n}\right);$$

hol a második tényező határértéke, ha lim. $x = \infty$, az egység. Ez annyit jelent, hogy a második tényező értéke, ha $x = \pm P$, hacsak P elég nagy pozitiv szám, tetszőleges közel jut az 1-hez, tehát mindenesetre pozitiv. Tehát

$$f(P) \quad \text{és} \quad A_0 P^n$$
$$f(-P) \quad \text{és} -A_0 P^n$$

(minthogy n páratlan szám) egyenlő előjelűek. Ellenben

$$f(0) = A_n.$$

Tehát, a mint A_0 és A_n ellenkező vagy egyenlő előjelűek, $f(P)$ és $f(0)$ vagy $f(-P)$ és $f(0)$ ellenkező előjelűek: azaz az y az x-nek valamely 0 és P, illetőleg a 0 és $-P$ közt fekvő értékénél tehát az első esetben pozitiv, a második esetben negativ x értéknél eltűnik, ami bebizonyítandó volt.

Függvények menetének geometriai ábrázolása.

49. Ha y az x valós változó valós függvénye, akkor a változó bármely értéke összeállítva a függvénynek valamelyik hozzátartozó értékével számpárt ad, mely — ha a síkban egy derékszögű koordinátarendszer van megadva — mint valamely P pont két koordinátája tekinthető. Ha tehát a változó egy bizonyos tartományát veszszük alapúl, a függvény menetét e tartományban, a jellemzett módon meghatározott P pontok összessége ábrázolja, a mennyiben e pontok mindegyike egy bizonyos x-hez a hozzá tartozó függvényértékek egyikét adja. E pontok összessége geometriai alakzat; az ily geometriai alakzat *rajzolható*, ha föltéve, hogy mérő és rajzoló eszközeink ideális pontosságot adnak,* az alakzatnak minden pontját tetszőlegesen választott megközelítéssel tudjuk ábrázolni, még pedig teljesen befejezhető, csak véges műveletsorozatot követelő szerkesztés alapján, daczára annak, hogy a jellemzendő pontok nem száma természetesen végtelen nagy. Közvetetlenül belátni, hogy minden geometriai alakzat rajzolható; igy p. az a függvény, mely az x minden raczionális értékénél 1, minden irraczionális értékénél 2, oly pontok sokaságát adja, mely rajz által nem jellemezhető. Hogy e pontokat mind ábrázoljuk, két az x-tengelylyel párhuzamos egyenest kellene rajzolnunk, melyekből azonban a raczionális (vagy irraczionális) abscissáknak megfelelő pontokat nem birjuk kihagyni. Így tehát e rajz az x ama kétértékű függvényét ábrázolná, mely az x minden értékénél 1 vagy 2, a mi természetesen egészen más, mint az adott függvényalak.

A megfelelő geometriai alak azonban mindig rajzolható, midőn az oly egyértékű függvény menetét ábrázolja, mely az ab számköz minden helyén (a határok beleértésével) folytonos.

Többértékű függvényekkel külön nem foglalkozunk, a menynyiben ezeket előbb fölbontjuk egyértékű függvényágaira.

Ha az $f(x)$ az ab számközben (a határhelyek beleértésével) folytonos, akkor egy tetszőleges pozitiv δ megállapítása után lehet

* azaz hogy ideális egyenest és kört tudunk rajzolni, és az elsőkön hosszakat teljes pontossággal tudunk lemérni, *bárminő* is e hossznak mérőszáma.

egy pozitiv ε-t meghatározni, úgy hogy (midőn például $a < b$,) ha $a \leq x \leq b$, mindig

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \delta,$$

mihelyt

$$|h| \leq \varepsilon.$$

Az ε meghatározása után képezhetjük az

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$$

számsorozatot, melyben a tagok száma $(n+2)$ véges és meghatározott és a mely megfelel azon föltételnek, hogy

$$x_{i+1} - x_i \leq \varepsilon, \quad (i = 0, \ldots, n+1)$$

legyen, $(x_0 = a,\ x_{n+1} = b)$. Akkor, ha ξ_i egy x_i és x_{i+1} közt fekvő számértéket jelent (e határok beleértésével), tehát:

$$\xi_i = x_i + \vartheta(x_{i+1} - x_i), \quad 0 \leq \vartheta \leq 1,$$

$$f(\xi_i) = f(x_i) + \eta'\delta, \quad f(\xi_i) = f(x_{i+1}) + \eta''\delta$$

hol η' és η'' értékei a -1 és $+1$ közt feküsznek e határok beleértésével. Vagy szimmetrikusabb irásban, ha $0 \leq \vartheta \leq 1$, az első egyenletet $1-\vartheta$-val, a másodikat ϑ-val szorozva

$$f(\xi_i) = f(x_i) + \vartheta\,(f(x_{i+1}) - f(x_i)) + (\eta'(1-\vartheta) + \eta''\vartheta)\delta$$

$$= f(x_i) + \vartheta\,(f(x_{i+1}) - f(x_i)) + \eta\delta$$

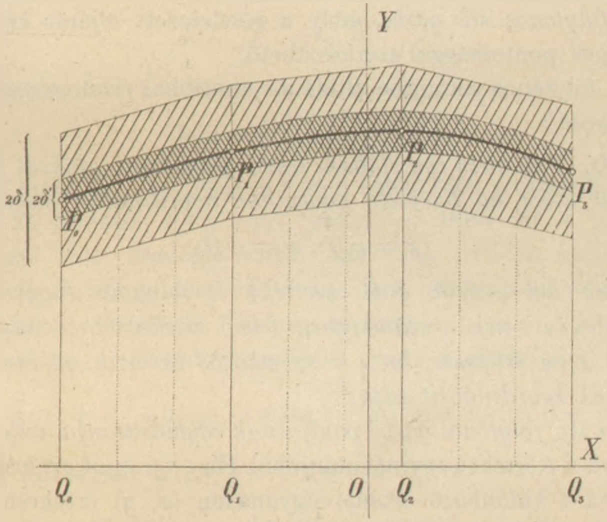
hol ismét $-1 \leq \eta \leq 1$. Mert

$$|\eta'(1-\vartheta) + \eta''\vartheta| \leq |\eta'|(1-\vartheta) + |\eta''|\vartheta \leq 1 - \vartheta + \vartheta.$$

Ha tehát az $(x_i, f(x_i))$ számpárokat, mint koordinátákat értelmezzük, és fölrakjuk a $P_0, P_1, P_2, \ldots$ pontokat (az $OQ_0, \ldots$ abscissák és $Q_0 P_0, \ldots$ ordinátákkal), először is (termeszetesen a rajzoló és mérő eszközök képzelt ideális pontossága mellett) megkapjuk a geometriai alakzat $P_0, P_1, \ldots P_{n+1}$ pontjait pontosan. Ha most az egymásután következő pontokat egyenesek segítségével összekötjük a $P_0 P_1 \ldots P_n P_{n+1}$ tört vonal az $y = f(x)$-nek megfelelő geometriai alakzatot oly megközelítéssel adja, melynél a hiba δ-nál soha nem nagyobb. Ha ugyanis a változónak egy ξ_i értékét veszszük, és e tört vonalon azon pont ordinátáját keressük, melynek abscissája $\xi_i = x_i + \vartheta(x_{i+1} - x_i)$, akkor ez: *

$$f(x_i) + \vartheta(f(x_{i+1}) - f(x_i)),$$

míg a geometriai alakzatnak megfelelő pont ordinátája ettől legfölebb $\pm\delta$-val tér el.



10 ábra.

Ha tehát a Q_0P_0, $Q_1P_1, \ldots$ ordinátákon $P_0, P_1, \ldots$ fölött és alatt δ távolságban egy pontot rakunk föl és e fölső és alsó pontokat ismét törtvonalakkal kötjük össze, akkor e két szélső törtvonal (a végső ordinátarészekkel együtt) egy *polygonális sík-sávot ád, melynek belsejében vagy határán fekszik az $y = f(x)$-nek megfelelő geometriai alakzat minden pontja,* és mely ennek megközelítő képét adja, a mennyiben minden pontja csak a sávban foglalt ordinátadarabon ingadozhat. Megjegyzendő még, hogy az ily módon képzett síksáv területe $2\delta(b - a)$, tehát δ-val együtt minden határon túl kisebbedő pozitiv szám.

Ugyanezen eljárás ismételhető most már a $\delta_1, \delta_2 \ldots$ kisebbedő pozitiv számokkal, a mikor a rajzban nem sokára eljutunk oda,

* Mert a $P_i P_{i+1}$ egyenes pontjait (I. r. 90. cz.) épen a

$$x_i + \vartheta(x_{i+1} - x_i), \; f(x_i) + \vartheta(f(x_{i+1}) - f(x_i))$$

koordináták jellemzik.

hogy a $2\delta_n$ szélességgel szerkesztett síksáv a szemlélőnek már ú. n. folytonos görbe vonal képét nyujtja. (A rajz a δ három értékének megfelelő viszonyokat mutatja, melyek közül a legkisebb már vonal képét adja.)

Azon geometriai alakzat, mely az $y=f(x)$ függvény menetét ábrázolja az ab számközben, hol a függvény folytonos, *minden pontjában folytonos sík görbe,* mely a részletezett eljárás értelmében tetszőleges pontossággal szerkeszthető.

A folytonos sík görbe általános analitikai értelmezése ugyanis a következő:

50. *Valamely egy síkban fekvő geometriai alakzat folytonos síkgörbét alkot, ha bármely pontjának koordinátáit megadják az*

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$$

*egyenletek (hol $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ egyertékű és folytonos függvények, ha $a \leq t \leq b$), a t-nek e számközben fekvő értékeinél, és megfordítva minden x, y értékpár, ha t e számközbe tartozik, az alakzat egy pontjának koordinátáit adja.**

Az ily *folytonos görbe pontjainak egymásutánja* teljesen meg van adva a t értékek egymásutánjából. Ha — a mint gyakran előfordúl — a t különböző értékei ugyanazon (x, y) értékrendszerhez vezetnek, akkor az ennek megfelelő pontot az alakzat *többszörös pontjá*nak nevezzük; és annyiszor olvassuk e pontot, a hány különböző t-érték adja amaz (x, y) értékrendszert.

Ezen geometriai alakzat az $y=f(x)$ által adottat természetesen magában foglalja; visszatérünk hozzá, ha $\psi(t)=t$.

Megközelítő ábrázolása ugyanazon módszerekkel történik, mint előbb az $y=f(x)$-é.

Legyen ugyanis ismét egy tetszőlegesen választott pozitiv δ megállapitása után ε azon pozitiv szám, melynél

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\leq\delta \text{ és } |\psi(x+h)-\psi(x)|\leq\delta,$$

* Az $y=f(x)$ vagy $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ által megadott (x, y) értékpárok összességének megfelelő pontok összességét általánosságban *sík görbé*nek nevezzük, ha az f, illetőleg φ és ψ függvények nincsenek megszorításnak alávetve. De világos, hogy ezen — túlságosan általános — értelmezés ép oly kevéssé lehet részletes elemzés kiindulópontja, mint a megfelelő legáltalánosabb valós függvényé.

ha

$$|h| \leqq \varepsilon.$$

Az ε-nak egyszerűen a két egyenlőtlenség külön megoldásából származó ε' és ε'' számok kisebbike veendő.

Ezután képezhetjük ismét az

$$a, t_1, t_2, \ldots t_n, b$$

számsorozatot, melyben ha $a < b$, (és $a = t_0$, $b = t_{n+1}$)

$$t_{i+1} - t_i < \varepsilon.$$

Ha most $P_0, \ldots, P_{n+1}$ a t ezen értékeinek megfelelő pontok, azaz P_i koordinátái $\psi(t_i)$, $\varphi(t_i)$, akkor — mint itt a megelőző tárgyalással való analogia miatt már csak röviden vázoljuk — a $P_0\, P_1\, P_n \ldots P_{n+1}$ tört vonal az illető alakzatnak megközelítése gyanánt tekinthető. Ekkor ugyanis a t_i és t_{i+1} közt fekvő $\tau_i = t_i + \vartheta(t_{i+1} - t_i)$-nak megfelelő pont koordinátái volnának

$$\varphi(t_i) + \vartheta(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i),)\ \psi(t_i) + \vartheta((\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)),$$

míg ezek valóságban $\varphi(\tau_i)$, $\psi(\tau_i)$. De

$$\varphi(\tau_i) - \varphi(t_i) - \vartheta(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) = \eta'\delta,$$

$$\psi(\tau_i) - \psi(t_i) - \vartheta(\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)) = \eta''\delta,$$

hol, ha τ_i a $t_i\, t_{i+1}$ számköz határhelyeit is jelentheti, ismét

$$0 < \vartheta \leqq 1, \quad -1 \leqq \eta' \leqq 1, \quad -1 \leqq \eta'' < 1.$$

E szerint ha P' a tört vonalon fekvő pont és P a geometriai alakzatnak megfelelő helyesen meghatározott pontja

$$PP'^2 = \eta'^2\delta^2 + \eta''^2\delta^2 \leqq 2\delta^2$$

Azaz ha P'-et veszszük P helyett, oly pontokat cserélünk föl, melyeknek távolsága $\delta|\sqrt{2}|$-nél nem nagyobb.

Ha most a $P_0 \ldots P_{n+1}$-hez a $\delta|\sqrt{2}|$ távolságban párhuzamos törtvonalakat szerkesztünk és a keletkező síkrészt a P_0 és P_{n+1}-ből a $\delta|\sqrt{2}|$ sugárral rajzolt félkörökkel kiegészítjük, ismét *síksávot* szerkesztünk, mely magában foglalja a geometriai alakzat minden pontját, és mely, midőn elég kicsinynek veszszük a δ-t, a szemlélőnek az illető folytonos görbe képét adja, amennyiben ennek pontjaival együtt csak tőlük tetszőleges kis távolságban fekvő pontokat foglal magában.

Minden nehézség nélkül térhetni át végre még az

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)$$

egyenletrendszerre, mely ép úgy értelmezi a *folytonos térbeli görbét*, melynek ismét speciális esete az, midőn $\varphi(t) = t$, vagyis az egyenletek:

$$y = f(x),\ z = g(x).$$

51. A függvényvonatkozás ama megközelítő kifejezésének, melyet a megelőző czikkekben leginkább geometriai szempontból kifejtettünk, tisztán analitikai tárgyalásoknál is nagy jelentősége van. Nemcsak midőn ama függvényvonatkozás a tapasztalatból ered, és így az összes változók értékei mérések alapján, tehát csak megközelítőleg vannak adva, hanem az elmélet körén belül is, mihelyt a végzendő műveletek sorában határátmenet is előfordul, a számeredményt nem adhatjuk meg pontosan, hanem megközelítőleg (deczimális tört alakjában). A mit ekkor a függvényből ismerünk, nem annak pontos menete, hanem épen az, a mit a geometriai ábrázolásnál ama síksáv jellemez.

Ha az (x, y) összetartozó értékpárok helyett csak az ismeretes, hogy $x+\eta'$, $y+\eta''$ a változó és függvény összetartó értékei hol $|\eta'|$ és $|\eta''|$ egy bizonyos δ-nál kisebb számok, akkor a függvény menetének egy bizonyos megközelítése, úgynevezett *függvénysáv* van adva.*

Ha a változó és a függvény összetartozó értékeit táblában rakjuk össze, ez mindig ily függvénysávot ád és e mellett már föltételezzük a függvény folytonosságát azon számtartományban, melyet a tábla átkarol. Mert bármily terjedelmes is a tábla, mindig csak a változó értékeinek egy véges értéksorozatához adja a függvényértékeket, és a változó úgy mint a függvény értékeit (ha irraczionálisak), csak bizonyos megközelítésben szolgáltatja.

Egyszerű példa erre az ismeretes logarithmus-tábla, hol az úgynevezett interpoláczió épen nem más mint a táblában nem fog-

* Lásd Klein, Matth. Annalen, Bd. XXII, pag. 249.

lalt értékeknek az előbb kifejtett elvek értelmében való megközelítése, míg a táblában foglalt (logarithmus) értékek szintén csak bizonyos megközelítésben helyesek.

52. *Két valós változó két valós függvénye,* ha ezek egy bizonyos tartományban egyértékűek és folytonosak,

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y)$$

a változók és függvények értékrendszerei közt oly vonatkozást ád, melyet a geometriai ábrázolásban *két síkrész rokonságá*nak nevezünk. Ha ugyanis a változók értékrendszerét (x, y)-t mint egy bizonyos sík egyik pontjának koordinátáit értelmezzük, és hasonlókép a függvények értékrendszerét (u, v)-t, mint egy második sík pontjának kordinátáit, akkor az első síknak minden (az illető tartományban) fekvő pontja a második sík egy bizonyos pontját határozza meg.

Az ily módon az f, g függvénypár által megállapított geometriai rokonságnak egy alaptulajdonsága a 46. czikk alapján tüstént belátható. Ha ugyanis a változók értékrendszereit képviselő síkban egy (a két függvény értelmezési tartományaiban fekvő) folytonos utat írunk le, akkor e rokonság alapján az ez úton fekvő pontok összességének ismét folytonos utat alkotó pontok sokasága felel meg. Ha az első síkban fekvő folytonos út $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, akkor a függvényrendszer síkjában megfelelő pontok $u = f(\varphi(t), \psi(t))$, $v = g(\varphi(t), \psi(t))$ es ezek az f és g folytonossága miatt ismét folytonos utat ábrázolnak.

Ha $u + vi$ az $x + yi$ complex változó complex függvénye, akkor itt u és v külön-külön az x, y valós változók valós függvényei. Ha tehát ismét $x + yi$-t és $u + vi$-t mint két sík pontjainak megfelelő számokat tekintjük, a mondottak ebben a fölfogásban is változatlanok maradnak.

MÁSODIK SZAKASZ.

A DIFFERENCZIÁLHÁNYADOS.

I.

A differencziálhányados jelentése és értelmezése.

A differencziálhányados bevezetése.

53. A legegyszerűbb függvényvonatkozás az *arányos változás* fogalmából keletkezik. *Két változó arányosan változik, ha növekményeik viszonya állandó.* Ha tehát x és $y=f(x)$ arányosan változnak és például az $x=a$-hoz tartozik $f(a)$, akkor

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=K,$$

vagyis:

$$f(x)=Kx+f(a)-Ka;$$

ha röviden az $f(a)-Ka$ számértéket L-lel jelöljük, lesz:

$$y=f(x)=Kx+L,$$

az u. n. *lineáris* (elsőfoku) *egész függvény.* Ez tehát az egyetlen függvényalak, mely a változó és függvény arányos változását adja; mert megfordítva is — mint közvetetlenül látni — ha $f(x)=Kx+L$ mindig:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=K.$$

K az *arányossági tényező;* fölemlítendő külön ama speciális eset, midőn $K=0$ és ennek megfelelőleg a függvényből állandó lesz.

Nemcsak az elmélet, hanem a tapasztalat szempontja is — mert a bevezetendő alapfogalom épen az, mely a természettüneményeknek helyes fölfogását és pontos leirását lehetővé teszi — ráutal arra, hogy a most jellemzett legegyszerűbb eset után áttérjünk oly függvények vizsgálatára, melyeknél a változó és függvény értékváltozása — a mennyire ez lehetséges — megközelítőleg arányos. E szerint legközelebbi tárgyalásaink czélja következőkép fejezhető ki:

Vizsgáljuk az oly egyértékű $f(x)$ függvényeket, melyeknél, ha egy adott x helyből indulunk ki és e hely egy bizonyos környezetére szorítkozunk, a függvény és változó növekményeinek viszonya megközelítőleg egy C állandóval egyenlő, még pedig oly hibával, melynek absolut értéke a tetszőlegesen választott δ-nál kisebb.

E követelés analitikai fogalmazása igen egyszerű; kell, hogy a vizsgált x helynek megfelelőleg találhassunk egy C állandót és egy pozitiv ε-t, úgy hogy

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-C\right|<\delta,$$

mihelyt:

$$|h|<\varepsilon.$$

E föltétel a lim. jel segítségével kifejezve végre az, hogy

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

véges és meghatározott érték legyen. Ezen érték (C) az, melyet ekkor a függvény vizsgálatában az x hely környezetében megközelítőleg arányossági tényezőnek tekinthetni.

Ha valamely $f(x)$ függvényre nézve egy bizonyos x helyen $\lim\limits_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ véges és meghatározott érték, akkor azt mondjuk, hogy *a függvény az x helyen differencziálható és e határérték* Leibnitz *elnevezése szerint nem más mint a függvény differencziálhányadosa az x helyen*, (Newton-nál az $f(x)$ fluxiója). A differencziálhányados általános fogalmát egyidejüleg, de egymástól függetlenül Leibnitz * és Newton ** állították föl; ezen alapvető

* «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus etc.» Acta eruditorum, 1684.

** Philosophiae naturalis principia mathematica. 1687.

fogalom bevezetésével a mathematikai tudományok új korszaka kezdődik.

Ha a függvény az x helyen differenczialható, akkor ugyane helyen mindig folytonos is. Mert az

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = C, \quad \text{és} \quad \lim. h = 0$$

egyenletek szorzásából mindig:

$$\lim_{h=0} \big(f(x+h) - f(x)\big) = 0.$$

Hogy tehát valamely az x helyen folytonos függvény ugyanott differencziálható is legyen, arra (l. 42. cz.) szükséges és elegendő, hogy a függvény növekménye e helyen első vagy magasabb rendű végtelen kicsiny legyen. Az első esetben a differencziálhányados a 0-tól különböző, véges szám, a második esetben 0.

Gyakran azt is mondjuk, hogy valamely (folytonos) függvény differencziálhányadosa egy bizonyos helyen végtelen. Ez természetesen annyit jelent, hogy ama határérték ∞, vagyis hogy a függvény növekménye az illető helyen az elsőnél alacsonyabb rendű végtelen kicsiny. Ez gyakran kényelmes kifejezésmód, de a függvény ama helyen nem tartozik többé a megközelítőleg arányosan változó függvények osztályába. Ezen eset megkülönböztetendő attól, midőn a függvény az x helyen nem folytonos és azért ama határérték határozatlan vagy nem is képezhető.

Ha x a függvény értelmezési tartományának határhelye, akkor a határátmeneti szabályok értelmében, a határátmenetnél csak az oly h-értékek jönnek tekintetbe, melyekre nézve $x+h$ a függvény értelmezési tartományába tartozik

Az $f(x)$ differencziálhányadosának értéke természetesen függ az x értékétől és így *az $f(x)$ differencziálhányadosa ismét az x függvénye, melynek értelmezési tartománya mindazon helyekből áll, hol $f(x)$ differencziálható.*

54. Egyes függvényeknél a differencziálhányados képezése, a *differencziálás* művelete tehát egy határérték kiszámítását követeli. Az eddig tárgyalt függvényeket e szempontból rendszeresen kell majd áttekintenünk. Itt most az első tájékozás kedvéért egy pár egyszerű példa legyen csak fölhozva.

Az $y = C$ függvénynek, melynek a változó minden értékének ugyanazon állandó (constans) függvényérték felel meg, differencziálhányadosa mindenütt 0; az $y = Kx + L$ függvényé K, mi abból következik, hogy ekkor mindig

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = K,$$

tehát a határérték, midőn lim. $h = 0$, szintén K.

Az x^2 minden x-helyen folytonos és differencziálható függvény, differencziálhányadosa $2x$. Mert

$$\lim_{h=0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h=0} (2x + h) = 2x.$$

Az $\frac{1}{x}$ mindenütt folytonos és differencziálható függvény, az $x = 0$ hely kivételével. Differencziálhányadosát mindenütt, a hol ilyen van, megadja a $-\frac{1}{x^2}$ kifejezés. Mert:

$$\lim_{h=0} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{h=0} \left(-\frac{1}{x(x+h)}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad |x| \gtrless 0.$$

A 0 helyen differencziálhányadosról nem lehet szó; mert nincs véges és meghatározott függvényérték.

Az $x^{\frac{1}{2}}$ függvény értelmezési tartománya az összes nem negatív valós számokból áll és ezen egész tartományban folytonos, valamint az $x = 0$ hely kivételével differencziálható. A differencziálhányados adva van mindenütt az $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ képlet által. Ha tudniillik

$$(x + h)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} h\, x^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon$$

tétetik, akkor ε a h függvénye és ha lim. $h = 0$, egyszersmind lim. $\frac{\varepsilon}{h} = 0$. Ha ugyanis négyzetre emelünk, lesz:

$$0 = \tfrac{1}{4} h^2 x^{-1} + 2(x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} h\, x^{-\frac{1}{2}})\, \varepsilon + \varepsilon^2,$$

vagy, ha h-val osztunk és áttérünk a lim. $h = 0$ határra,

$$0 = \lim_{h=0} \left(\frac{\varepsilon}{h} (2x^{\frac{1}{2}} + h\, x^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon)\right)$$

a mi, minthogy a második tényéző határértéke $2x^{\frac{1}{2}}$ és így x-szeegyütt a 0-tól különböző, csak úgy lehetséges, ha:

$$\lim_{h=0} \frac{\varepsilon}{h} = 0.$$

E szerint végre:

$$\lim_{h=0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{h} = \lim_{h=0} \frac{\frac{1}{2} h\, x^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon}{h} = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}.$$

A 0 helyen végre a függvény növekménye $h^{\frac{1}{2}}$, tehát a végtelen kis növekmény rendszáma $\frac{1}{2} < 1$; a differencziálhányados e helyen végtelen.

55. A differencziálhányadosnak nevezett határérték, mint az analizis tárgyalásaiban leggyakrabban előforduló művelet eredménye, lehető röviden és jellemzően lesz jelölendő.

A szokott jelzés kapcsolatban áll avval, melyet a növekmények számára már előbb bevezettünk és mely szerint, ha ismét, $y = f(x)$ lévén,

$$\Delta x = h, \quad \Delta y = f(x+h) - f(x)$$

az $y = f(x)$ differencziálhányadosát mindenek előtt így irhatjuk:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

E kifejezést továbbá úgy rövidítjük, hogy a $\lim_{\Delta x = 0}$ művelet külön kijelentését elhagyva, e határátmenetet a Δ módosítása által jelezzük, t. i. Δ helyett d-t irunk, a mi által az y differencziálhányadosának végleges jele:

$$\frac{dy}{dx}.$$

E jelzésnél, melynek a differencziál*hányados* neve is megfelel, azonban mindig szem előtt tartandó, hogy a hányadoséhoz hasonló alakja van ugyan, de nem hányados, mert a dx és dy különkülön nem számérték, hanem minden határon túl kisebbedő menynyiségek symboluma, az ú. n. *differencziál.* A dx, dy csak úgy lehetne számmá, ha a határátmenetet valóban elvégezzük, de ekkor ama kifejezésből $\frac{0}{0}$ lenne, a minek semmi értelme sincs. Ez természetesen még nem szól ama jelzés czélszerűsége ellen. Csakugyan ilyennek mutatkozik, mert igen gyakran — ámbár *nem mindig* — midőn differencziálhányadosok közt fönnálló vonatkozást fejezünk ki egyenletben, ezen egyenlet akkor is helyes volna, ha dx és dy alatt bárminő számértékeket értenénk; a minek azután következménye, hogy ily esetekben az elemi műveleti szabályokat a $\frac{dy}{dx}$-re úgy alkalmazhatjuk, mintha az hányados volna. Ez azonban minden egyes esetben külön bebizonyítandó.

A $\frac{dy}{dx}$ alak szigorú értelmezése az, hogy benne $\frac{d}{dx}$ egységes (egy egyetlen jelt helyettesítő) műveletjel, mely követeli, hogy az y függvénynek differencziálhányadosát képezzük.* Így keletkeznek azután, ha y helyébe részletesen kiirt függvény alakok lépnek, a következő jelzések:

$$\frac{d(x^2)}{dx}, \quad \frac{d(1+\sin . x)}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\left(1+\frac{\sin . x}{x}\right), \quad \frac{d}{dx}(\text{arctg. } x) \quad \text{s ú. t.}$$

Ha a differencziálhányados értékéről egy bizonyos $x = a$ helyen, tehát számértékről van szó, az $x = a$ helyettesítés követelése jelző alakjában irandó, péld.

$$\left(\frac{d(x^2)}{dx}\right)_{x=a} = 2a, \quad \left(\frac{d(x^2)}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} = 1;$$

az alakzatban x helyébe a-t irni nem lehet, mert ekkor $\frac{d(a^2)}{dx}$ az a^2 differencziálhányadosát jelenti; a^2 pedig nem is függ x-től, állandó, tehát

$$\frac{d(a^2)}{dx} = 0.$$

* E fölfogásnak megfelelőleg megkisérlették mint a differencziálás műveletének jelét a (nagy) D betűt használni, melyhez — szükség esetében — a független változót, mint jelzőt teszszük, péld. $D\sin . x$, $D_x\sin . x$. Egyéb hátrányai miatt e jelzés azonban az irodalomban ma már csak ritkán található.

E mellett még egy másik jelzést is használunk, mely nem alkalmas ugyan arra, hogy speciális függvényalakokra alkalmazzuk, de általános függvényalakoknál a differencziálhányadosnak egyes adott helyen föllépő számértékét rövidebben jelzi.

Tekintettel arra, hogy az $y = f(x)$ függvény differencziálhányadosa ismét az x függvénye, ezen új függvényre oly karakterisztikát használhatunk, mely az $f(x)$-ből való származását világosan föltünteti. Ily alapon $f(x)$ *differencziálhányadosát* y'*-nal*, $f'(x)$*-szel is jelöljük és* $y' = f'(x)$*-et az* $y = f(x)$ *leszármaztatott, derivált függvényének, vagy rövidebben leszármaztatásának, deriváczíójának* (Lagrange) *is nevezzük.* Ekkor természetesen az $f(x)$ differencziálhányadosának értékét az $x = a$ helyen röviden $f'(a)$-nak irhatjuk.

Igy péld. ha $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$.

56. Az $y = f(x)$-ből ezekután következik, hogy

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \qquad \frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x),$$

mely egyenletben tehát egyik oldalon a kijelentett művelet, a másik oldalon a kiszámított eredmény jelképe áll. Ezen egyenletet még a következő alakban is irjuk:

$$dy = f'(x)\,dx, \qquad d\,f(x) = f'(x)\,dx$$

mely gyakran nemcsak a tört elkerülése következtében kényelmes, hanem a további számitására (mint p. integrácziónál, bizonyos differencziálegyenletek tárgyalásánál) a legczélszerűbb.

Ezen alaknak ismét csak szimbolikus jelentése van, a menynyiben a dx-szel előbb «osztani» kell, azaz az egyik oldalról előbb át kell vinni a másikra mint nevezőt, hogy alakunk számok vonatkozását adja.

Ugyanez a jelentése a megfelelő, szavakban foglalt állításnak, hogy *valamely függvény differencziálja alatt értjük a függvény differencziálhányadosának és a független változó differencziáljának szorzatát.*

E mellett azonban azon alak még mint megközelítőleg helyes egyenletnek rövid kifejezése is értelmezhető.

A differencziálhányados értelmezése szerint:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\eta,$$

hol lim. $\eta=0$, vagyis:

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\eta\,.\,\Delta x.$$

Az hogy $|\eta|$ egy adott δ-nál kisebb legyen, elérhető mindig az által, hogy $|\Delta x|$-et egy bizonyos ε-nál kisebbnek veszszük. Ha ekkor

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x$$

tétetik, a hiba $(\eta\,\Delta x)$ nem csak Δx-szel együtt minden határon túl kisebbedik, hanem még az elkövetett hiba viszonya a Δx-hez, $\frac{\eta\,\Delta x}{\Delta x}=\eta$ is minden határon túl kisebbedik.

Az ily módon elért megközelítés kiváló pontossága geometriai ábrázolás segítségével lesz legjobban megvilágítható. Ha a Δy és $f'(x)\,\Delta x$ számértékeit (egy bizonyos hosszegység megállapítása után) egy egyenesben vagy egy síkban pontok által ábrázoljuk, e pontok távolsága $|\eta\,.\,\Delta x|$ lesz, tehát $<\delta|\Delta x|$, ha $|\Delta x|<\varepsilon$. De még akkor is, ha a rajz méreteit $\frac{1}{\Delta x}$ arányban nagyobbítjuk, hol $|\Delta x|$ kisebbedésével $\frac{1}{\Delta x}$ *minden határon túl növekszik*, az elkövetett hiba mindig kisebb marad az eredetileg tetszőleges kicsinynek választott δ-nál.

Előbb bevezetett kifejezéseket használva végre úgy is mondhatjuk ki azt, hogy $\Delta y-f'(x)\,\Delta x$ *az elsőnél magasabb rendű végtelen kicsiny lesz* és ugyanezt az értelmet adhatjuk végre a

$$dy=f'(x)\,dx$$

egyenletnek is.

A helyett, hogy Δx, Δy végtelen kicsiny *lesz* (a mely kifejezés pontos értelmét a 41. czikkben adtuk), azt is mondjuk, hogy dx és dy végtelen kicsiny. E szerint dy első vagy magasabbrendű végtelen kicsiny, a mint $f'(x)$ a 0-tól különböző, véges szám vagy 0; ellenben $dy-f'(x)\,dx$ mindig az elsőnél magasabb rendű végtelen kicsiny; vagy végre $dy-f'(x)\,dx$ *zérus, az elsőnél magasabb rendű végtelen kis mennyiség elhanyagolásával*. És ezt a megszorítást mindig a fölirt egyenletalakhoz hozzátartozónak kell tekintenünk.

Általánosabban is, ha y, z, u, az x differencziálható függvényei, az

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,du + \ldots = 0$$

kijelentés értelme, hogy $A\,\varDelta x + B\,\varDelta y + C\,\varDelta z + D\,\varDelta u + \ldots$ az $\varDelta x$-nél magasabb rendű végtelen kicsiny lesz, más kifejezésben, hogy $A\,dx + B\,dy + \ldots$ az elsőnél magasabbrendű végtelen kicsiny, vagyis végre 0 az elsőnél magasabbrendű végtelen kicsinyek elhanyagolásával. Evvel összeesik az alakzatnak, mint szimbolikus egyenletnek fölfogása, melyből értelmét úgy nyerjük, hogy «dx-szel osztunk», tehát:

$$A + B\frac{dy}{dx} + C\frac{dz}{dx} + D\frac{du}{dx} + \ldots = 0$$

Így p. ha $y = C$, $dy = 0$; vagy:

$$d\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2x^3}\,d(x^2) = 0$$

mert:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2x^3}\,\frac{d}{xd}(x^2) = 0.$$

57. Adott függvényalak differencziálásánál az eredmény lényegesen függ az előforduló betűk jelentésétől. Így p. ha $x + y$ differencziálandó x szerint, a differencziálhányadost egészen különböző függvényalakok adják, a mint az y jelentését különböző módon van megadva. Így p. ha y az x-től független, a differencziálhányados 1; ha y az x-szel változik, úgy hogy $y = 3x - 5$, lesz $x + y = 4x - 5$ és a differencziálhányados 4 s ú. t. Szemben evvel mindig szem előtt tartandó, hogy a $\frac{d}{dx}$ jel oly művelet jele, melynél minden az illető kifejezésben előforduló mennyiség jele *értelmére* vonatkozólag megvizsgálandó és e szerint képezendő az illető függvény növekménye.

E mellett azonban a differencziálás — mint *formális* művelet — gyakran úgy is lesz végrehajtandó, hogy az illető kifejezésben minden a független változóétól különböző jel ettől független mennyiség jelének tekintendő. Az ily differencziálást, melynél az x növesztésének megfelelő függvénynövesztést esetleg csak *részben* eszközöljük, *parcziális* differencziálásnak nevezzük; szemben evvel az oly differencziálás, melynél minden előforduló mennyiség értelmére is tekintettel vagyunk, *totális* vagy *teljes* differencziálás. Megfelelőleg beszélünk *totális* és *parcziális differencziálhányadosról.*

Hogy e kettőt egymástól megkülönböztessük, a parcziális differencziálás jelölésénél a d betűt némileg módosítjuk és az ú. n. «gömbölyű» vagy «parcziális» d-t (∂) használjuk.

Így tehát:

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial(x+y)}{\partial y} = 1$$

a második esetben is $\frac{\partial}{\partial y}$ azt jelentvén, hogy a differencziálás úgy történik, hogy az y-t független változónak, minden más mennyiséget, a jelen esetben x-et, ettől függetlennek tekintjük. Evvel szemben $\frac{d(x+y)}{dx}$ függ az y jelentésétől és hasonlókép $\frac{d(x+y)}{dy}$. Ez utolsó alakból csak azt tudjuk, hogy y a független változó; de míg nincs megállapitva, hogy x és y minő kapcsolatban áll, a $\frac{d}{dy}$ művelet nem végezhető. Igy p. ha mint előbb $y = 3x - 5$ azaz $x = \frac{y+5}{3}$ lesz $\frac{d}{dy}(x+y) = \frac{4}{3}$; ha x az y-tól független, akkor ismét 1, s ú. t.

Alig szükséges ezután hozzátenni, hogy a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{df}{dx}$ egészen különböző függvény alakokat jelenthetnek. Természetes, hogy a $\frac{\partial}{\partial x}$ tisztán formális jelentése mellett a ∂y, s ú. t., többé nem alkalmas ama szimbolikus értelmezésekre, melyeket a dy, s ú. t. jelekhez kötöttünk.

Az $f(x_1, \ldots, x_m)$ egy bizonyos hely környezetében úgy is változtatható, hogy csak *egy* változónak p. x_i-nek eszközöljük növesztését, míg a többi változó értékét egyszerűen meghagyjuk. Ebben a fölfogásban az $f(x_1, \ldots, x_m)$ az egyetlen x_i változó függvénye; és mint ilyennek megvizsgálhatjuk folytonosságát és differencziálhányadosát. Az ez értelemben képezett differencziálhányados *az f függvény parcziális differencziálhányadosa x_i szerint* és ezt az előbbi megállapitások szerint rendesen

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_i}$$

-vel jelöljük; ámbár megjegyzendő, hogy itt a $\frac{d f(x_1, \ldots, x_m)}{d x_i}$ magában véve *még* ép oly jogosult, mert hiszen meg van mondva, hogy $x_1, \ldots, x_m$ független változók és így $x_1, \ldots, x_m$, épen x_i kivételével, x_i-től független. Czélszerű azonban ily esetekben a ∂ használata, mert a tárgyalás alatt esetleg oly megállapodás léphet föl, hogy x_1, s ú. t., részben vagy mind az x_i bizonyos függvényei, azaz hogy a függvény változása *bizonyos úton* történik, a mikor azután a $\frac{d}{dx_i}$ két különböző jelentésben volna használandó és a két eset valami új módosítás által megkülönböztetendő.*

Igy p.

$$\frac{\partial(x^2 y)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y} = x^2,$$

vagy ha $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Álljon még itt részletesen:

$$\left(\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1}\right)_{x_1 = a_1, \ldots, x_m = a_m} = \left(\frac{d f(x_1, a_2, \ldots, a_m)}{d x_1}\right)_{x_1 = a_1}$$

$$\left(\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_2}\right)_{x_1 = a_1, \ldots, x_m = a_m} = \left(\frac{d f(a_1, x_2, \ldots, a_m)}{d x_2}\right)_{x_2 = a_2} \quad \text{s ú. t.}$$

a mi az előbb adott definicziók fogalmazása egyenletek alakjában.

A differencziálhányados geometriai és mechanikai jelentése.

58. Ha P és Q valamely folytonos görbének két pontja, akkor a P és Q-n keresztül menő egyenes e görbe *metszője*; e metsző egye-

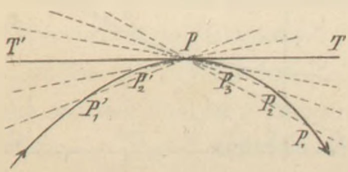
---

* Az ily alkalmi módosításai a jelzésnek különben bonyolódottabb tárgyalásoknál kikerülhetetlenek, így p. ha az $f(x_1, \ldots, x_m)$-nek változását két vagy több különböző módon egyidőben tárgyaljuk; de ezeket akkor a föladat szükségletéhez képest vezetjük csak be, p. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ vagy $\frac{(\partial f)}{(\partial x_i)}$ s ú. t.

nesen a pozitiv irány az, melynél P megelőzi vagy követi a Q-t, ép úgy a mint megelőzi vagy követi e pontot a görbén.

Valamely folytonos görbének a P pontban van érintője, ha lehet a P ponton keresztül egy PT egyenest vonni úgy hogy, ha P_n a görbe egy másik pontja, ama szög mérőszáma, melyet a P_n és P-n keresztül menő metsző egyenes pozitiv iránya a PT-vel bezár, absolut értékére nézve vagy közvetetlenül, vagy a 2π többesének levonása után egy tetszőleges δ-nál kisebbé tehető az által, hogy a P_n pont távolságát P-től egy bizonyos ε-nál kisebbnek veszszük. A PT egyenes ekkor a görbe érintője a P pontban. Az érintő tehát — rövid kifejezésben — *a pozitiv irányban vett metszők határfekvése.*

Ha megfordítva adva van az érintő a P pontban, PT, akkor, ha P-t összekötjük a görbének valamely más a P-hez elég közel fekvő pontjához, e metsző iránya tetszőleges megközelítéssel adva van az érintő iránya által. Ily értelemben röviden azt mondjuk, hogy *az érintő adja a görbe irányát a P pontban.*



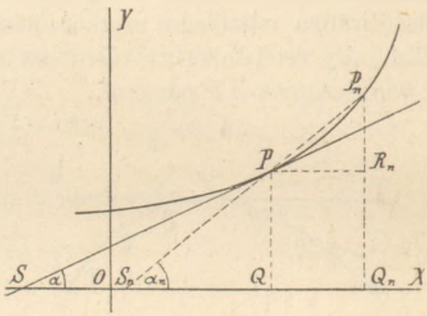
11. ábra.

Hogy a két egyenes által bezárt szög egyértelműleg legyen adva, szükséges, hogy a két egyenesen a pozitiv haladási irány meg legyen állapítva, hogy adva legyen a pozitivnak veendő forgási irány, mely közönségesen az óramutatóéval ellenkező irány és hogy végre meg legyen mondva, hogy a két egyenes közül, melyik végez forgást a síkban és melyik tartja meg helyzetét. Ekkor a két egyenes által bezárt szög azt a síkrészt jelenti, mely a mozgó egyenes pozitiv forgásából keletkezik, ezt mindaddig folytatva, míg a két egyenes iránya összeesik. Ehhez természetesen a párhuzamosság a szó közönséges értelmében nem elég; hanem kell, hogy ha két paralléla amaz egyeneseken az A, B, ill. A' B' pontokat metszi ki, hogy A ép úgy megelőzze vagy kövesse a B-t, mint a másik vonalon A' megelőzi vagy követi az A', ill. B'-t. Az ellenkező esetben a két egyenes 180° nyi szöget képez.

Megjegyzendő még, hogy az általános — itt is követendő — szokás szerint, midőn azon szögről beszélünk, melyet valamely vonal a *PT-vel képez*, ez utóbbit, PT-t veszszük azon egyenesnek, mely a forgást végzi.

Ily érintője nincs minden folytonos görbének és ha van is, nincs minden pontban. Az érintő kérdése analitikai fogalmazásban nem más mint az, vajjon bizonyos folytonos valós függvényeknek van e differencziálhányadosuk vagy sem?

A kérdést itt csak azon szűkebb föltevés mellett tárgyaljuk, hogy a kérdéses P körül lehet egy bizonyos sugárral kört vonni, azaz a P-nek egy bizonyos környezetét meghatározni, úgy hogy a folytonos görbének a kör belsejében fekvő darabja kellően választott derékszögű koordinátarendszerre vonatkozólag kifejezhető egy $y=f(x)$ egyenlet által, melyben természetesen $f(x)$ folytonos és egyértékű függvény és x bizonyos határok p. a és b között marad.*



12. ábra.

E föltevés mellett legyen P azon pont, melyben az érintő létezését és esetleg fekvését meg akarjuk határozni és e pont koordi-

* E megszorítás geometriai értelme az, hogy van egy egyenes, melyre a P körül vont kör belsejében fekvő görberészt vetítve, a görbe különböző pontjainak egyszersmind különböző vetületi pontok felelnek meg és e vetületi pontok összessége egy meghatározott egyenes darab összes pontjaiból áll. Majdnem minden görbe, melynek elemzését az alkalmazott tudományok követelik, (így az «algebrai» görbék mindannyian és a «transcendens» görbék egy nagy osztálya) fölbontható oly részekre, melyek a bevezetett föltételnek megfelelnek és melyekre nézve tehát a szöveg tárgyalása alapján, ha e részeket külön vizsgáljuk, az érintés problémája teljesen elvégezhető.

nátái x, y. Ha P_n egy a P közelében fölvett pont, ennek koordinátái $x + \Delta x, y + \Delta y$-nal jelölhetők, hol az $y = f(x)$ folytonossága miatt, mindenesetre $\lim\limits_{\Delta x = 0} \Delta y = 0$.

Ha a P_n pont ordinátáját megvonjuk, $P_n Q_n$-t és a P-ből az OX tengelyhez vont párhuzamos egyenes ezt R_n-ben metszi, akkor

$$\Delta x = PR_n \quad \Delta y = R_n P_n$$

és mint látni, Δx, Δy egy derékszögű háromszög befogóinak mérőszámai, melynek átfogója PP_n. Ama szögnek, melyet az OX_n vonallal képez, mérőszáma α_n és így:

$$\text{tg. } \alpha_n = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1.}$$

Az (1.) alatti egyenlet nemcsak a rajz esetében, de általánosságban is teljesen pontos; t. i. nemcsak az absolut értékekre, hanem az előjelekre nézve is helyes. Minthogy ugyanis minden x-nek csak egy y felel meg a P és P_n összekötő egyenese nem lehet párhuzamos OY vagy QP-vel; a történt megállapítások értelmében e metsző pozitiv iránya az, melynél a QP egyenes baloldaláról jobb oldalára lépünk. E szerint ama szögnek, melyet e metsző OX vagy PR_n-nel képez, mérőszáma mindig $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt fekszik, még pedig $-\frac{\pi}{2}$ és 0 vagy 0 és $\frac{\pi}{2}$ közt a mint Δx és Δy ellenkező vagy egyenlő előjelű számok. Ha $\Delta y = 0$, α_n is zérus. E szerint tg. α_n és $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ az előjelre nézve is megegyezik és még végre

$$\alpha_n = \left(\text{arctg. } \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

hol a zárjel, mint ismeretes, az arctg. főértékét jelzi.

Hogy most már a görbének a P pontban legyen érintője, például PT, mely az OX-szel α nagyságú szöget képez, arra szükséges és elegendő, hogy $|\alpha_n - \alpha|$ egy tetszőleges δ-nál is kisebbé tehető, ha P_n távolságát a P-től elég kicsinynek veszszük; tehát kell, hogy $\lim\limits_{\Delta x = 0} \alpha_n$ véges és meghatározott szám legyen és ekkor a PT hajlásszögéből

$$\alpha = \lim_{\Delta x = 0} \alpha_n$$

szintén meg van határozva. Minthogy $-\frac{\pi}{2} < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$, mindenesetre $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Ha most már α a $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$-től különbözik,

$$\lim. \operatorname{tg}. \alpha_n = \operatorname{tg}. \alpha$$

szintén véges és meghatározott érték, és vele együtt

$\lim\limits_{\Delta x=0}. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$ is; ha pedig $\alpha = \lim. \alpha_n = \frac{\pi}{2}$ vagy $-\frac{\pi}{2}$, akkor $\lim. \operatorname{tg}. \alpha_n = +\infty$ vagy $-\infty$; a mennyiben a $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$, minthogy α_n a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt fekszik, mindig csak egy oldalról közelíthetők meg, és így egy bizonyos x_n-től kezdve tg. α_n mindig pozitiv vagy mindig negativ. E szerint végre, a mint α vagy $\frac{\pi}{2}$ vagy $-\frac{\pi}{2}$, lesz

$$\lim_{\Delta x=0}. \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \text{ vagy } -\infty.$$

Az $y = f(x)$ görbének, hol $f(x)$ az a-tól b-ig folytonos és egyértékű függvény, egy bizonyos P pontjában, melyet az a és b közt fekvő x abscissa jellemez, akkor és csak akkor van érintője, ha az $f(x)$ függvény differencziálhányadosa e helyen véges és meghatározott érték, a mikor az érintőnek az OX-szel képezett α szöge, mely $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt fekszik, meg van határozva

$$\operatorname{tg}. \alpha = y' = f'(x)$$

egyenletből; vagy pedig midőn az $f(x)$ differencziálhányadosa meghatározott előjelű végtelen lesz, a mikor $\alpha = \frac{\pi}{2}$ vagy $-\frac{\pi}{2}$, a mint ezen előjel pozitiv vagy negativ.

Az érintő egyenlete e vizsgálatok alapján szintén adva van. Ez oly egyenes, mely keresztül megy a $P(x, y)$ ponton; míg az X-tengelylyel képezett szögének tangense: tg. $\alpha = f'(x)$. Ha tehát ξ, η a futó koordináták, az egyenlet:

$$\eta - y = f'(x)(\xi - x).$$

A normális a P pontban azon egyenes, mely keresztül megy a P ponton, és az érintőre függélyesen áll, egyenlete tehát

$$\eta - y = -\frac{1}{f'(x)}(\xi - x).$$

Az érintő egyenletének ezen alakja csak akkor lesz használhatatlan, ha $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, tehát $f'(x)$ végtelen lesz; de ebben az esetben közvetetlenűl világos, hogy az érintő egyenlete

$$\xi = x.$$

A normális egyenlete adott alakjában nem használható, ha $f'(x)$ zérus vagy végtelen lesz, azaz ha α zérus vagy pedig $\pm \frac{\pi}{2}$, de ezen esetekben ismét világos, hogy a keresett egyenlet:

$$\xi - x = 0, \quad \text{ill. } \eta - y = 0.$$

59. Az $y = f(x)$ görbe, hol ismét $f(x)$ az a és b közt egyértékű és folytonos függvény, mihelyt $f(x)$-nek egy bizonyos e határok közt fekvő helyen nincs véges és meghatározott, vagy legalább határozott előjelű végtelen differencziálhányadosa, a megfelelő P pont környezetében a most jellemzett viszonyoktól eltérőleg bonyolódottabb alakot, ú. n. *singularitást* mutat. E singularitások legegyszerűbbike, a *szögpont,* — mint az eddigi tárgyalások alkalmazása — már e helyen legyen bemutatva.

Ha az összes P-n keresztülmenő metszők nem is közelednek határfekvéshez, meglehet, hogy ez megtörténik külön-külön, ha csak azon vonalakat vizsgáljuk, melyek a P-t összekötik a P pont előtt fekvő P_n, vagy a P pont után fekvő P_n pontokkal, és a P_n, illetőleg P_n pontok távolsága P-től minden határon túl kisebbedik. Ekkor az egyik vonalseregnek megfelel egy PT', a másiknak egy PT egyenes, de ezek nem esnek össze és a képezhető érintő alakzat $T'PT$ nem egyenes, hanem tört vonal. *A P pont ekkor a görbének szögpontja.* (Eckpunkt, point saillant, point anguleux).

Ez az eset lép föl, ha — a mondottakat analitikailag fogalmazva — $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *sem nem véges és meghatározott érték, sem pedig határozott előjelű végtelen, ha azonban külön-külön a*

$$\lim_{\Delta x = -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ és } \lim_{\Delta x = +0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

kifejezések mindegyike vagy véges és meghatározott érték, vagy pedig határozott előjelű végtelen.

Ilyen p. az

$$y = \frac{Cx}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

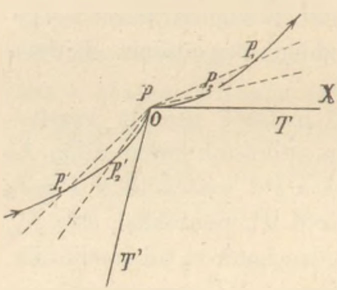
egyenletnek megfelelő görbe azon pontja, melyben $x=0$ és $y=0$.

Hogy az y függvény folytonos, az minden helyre, az $x=0$ kivételével, közvetetlenül világos. Minthogy azonban $1+e^{\frac{1}{x}}>1$ az x bármely a 0-tól különböző értékénél és így

$$\frac{|x|}{1+e^{\frac{1}{x}}}<|x|,$$

lesz

$$\lim_{x=0}. |y| = \lim_{x=0}. \left|\frac{Cx}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right| \leq \lim_{x=0}. |Cx| = 0.$$



13. ábra.

Ha tehát y helyettesítési értékét az $x=0$ helyen, hol a határérték 0, szintén 0-nak teszszük, a vizsgálandó függvény folytonos lesz minden x-re nézve.

A $\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$ alakzat az $x=0$ helyen az

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

alakzatból (minthogy $x=0$, és $f(x)=0$) lesz:

$$\lim. \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=0}\right] = \lim. \frac{C}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}};$$

minthogy pedig

$$\lim_{\Delta x=-0}. e^{\frac{1}{\Delta x}} = 0, \quad \lim_{\Delta x=+0}. e^{\frac{1}{\Delta x}} = +\infty$$

lesz:

$$\lim_{\Delta x=-0}. \frac{C}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}} = C, \quad \lim_{\Delta x=+0}. \frac{C}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 0.$$

És így tehát a metszők egyik sorozatának határfekvése, egy $T'P$ egyenes, melynél az OX tengelylyel való hajlásszögre (α') nézve: tg. $\alpha' = C$, míg a metszők másik sorozatának határfekvése PT, melynél a hajlásszög $\alpha = 0$.

A mellékelt ábra e viszonyokat mutatja, midőn $C = 5$.

60. A szögpont egy speciális esetével van dolgunk, midőn $T'P$ és PT egy egyenesbe esnek ugyan össze, de ellentett irányúak. Ekkor α' és α különbsége π, de minthogy α' és α nem eshetnek a $-\frac{\pi}{2} \ldots \frac{\pi}{2}$ intervallumon kívül, ez csak úgy lehetséges, ha a két hajlásszög közül az egyik $-\frac{\pi}{2}$, a másik $+\frac{\pi}{2}$. Ekkor ú. n. *elsőfajú visszatérő ponttal* vagy *csúcscsal* (point de rebroussement) van dolgunk, melynek *analitikai föltétele* (természetesen mindig a görbe egyenletének tárgyalt alakja mellett) az, hogy a

$$\lim_{\Delta x = -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{és} \quad \lim_{\Delta x = +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

kifejezések mindegyike az illető helyen határozott előjelű végtelen legyen; de az egyik pozitiv, a másik negativ előjelű.

Ily viszonyokat mutat az

$$y^3 = x^2$$

egyenlet által jellemzett görbe az $x = 0$ helyen, hol y is eltűnik. Amaz egyenlet, melyben x és y valós változókat jelentenek, az y-t mindenütt megadja mint az x egyértékű függvényét, mert x^2 pozitiv, e pozitiv értéknek pedig csak egy valós — pozitiv — köbgyöke van, és ez y.

Az y függése az x-től kifejezhető az

$$y = |x|^{\frac{2}{3}}$$

egyenlet segítségével is, melynél mindjárt látni, hogy y mindenütt az x-nek nemcsak egyértékű, de folytonos függvénye is. Ekkor:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=0} = \left(\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right)_{x=0} = \frac{|\Delta x|^{\frac{2}{3}}}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \, |\Delta x|^{-\frac{1}{3}}$$

Könnyű látni, hogy

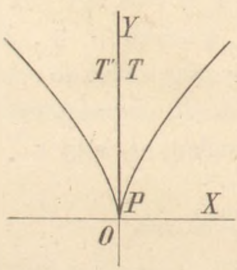
$$\lim_{\Delta x = -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1, \quad \lim_{\Delta x = +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1,$$

mert a Δx tekintetbe jövő értékeinél a vizsgált hányados mindig -1, ill. $+1$. Továbbá

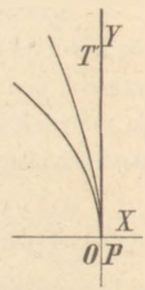
$$\lim_{\Delta x=0} |\Delta x|^{-\frac{1}{3}} = +\infty$$

és így a mi függvényünkre nézve az $x=0$ helyen:

$$\lim_{\Delta x=-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty, \quad \lim_{\Delta x=+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty.$$



14. ábra.



15. ábra.

A mellékelt ábra mutatja a görbe alakját a (0,0) pont környezetében. A visszatérő pont neve abban leli magyarázatát, hogy ha a PT-re függélyesen álló egyenest veszszük X-tengelynek (mint a rajzban) a görbe a P pontban a felső és alsó félsík határára érkezik, de ha tovább haladunk a görbén, nem megyünk át mint közönségesen a másik félsíkba, hanem *visszatérünk* ugyanazon félsíkba, melyből a P-be érkeztünk.

Az OY tengelyre nézve (mely ekkor a PT-vel összeesik) még a közönséges viszonyok állanak fönn. Ha erre nézve azonban a görbe menete az említett értelemben szintén visszatérő (lásd a 15. ábrát) akkor az illető P pont *másodfajú visszatérő pont* vagy *csúcs*. Ez csak az «elsőfajú» jelző magyarázatára álljon itt, mert a másodfajú visszatérő pont egész eltérő jellegű singularitás. A P pontban van ugyanis az eredeti értelmezés szerint érintő, de nincs oly egyértékű $f(x)$ függvény, melynek behozatalával a görbét a P pont környezetében $y=f(x)$ alakú egyenlet jellemezhetné.

61. A differencziálhányados mechánikai jelentésének bemutatásánál a legegyszerűbb esetre szorítkozunk, midőn valamely pontnak egy egyenesen történő mozgása irandó le. E mozgás teljesen meg van adva, midőn minden — egy bizonyos időponttól számított — időre (t) megadjuk a pont helyzetét, szintén egy bizonyos helyzetétől (O) számított távolsága, azaz a pont koordinátája (x) által; ekkor

$$x=\varphi(t)$$

a t-nek egyértékű függvénye. A mozgás folytonos — és természetfölfogásunk követeli, hogy ilyennek tételezzük föl — ha a φ függvény minden tekintetbe jövő helyen folytonos, azaz ha kellő rövid időtartamra szorítkozunk, a mozgó pont útja, helyváltozása is tetszőleges kicsinynyé lesz.

A mozgás egyenletes, ha a befutott út hossza az azalatt lefolyt idővel arányos. Azaz ha egy bizonyos t_0 időben a pont koordinátája x_0, és egy másik tetszőleges t-nek megfelel x, akkor

$$\frac{x-x_0}{t-t_0}=c$$

hol c állandó, a *sebesség*, melylyel a mozgás történik. Ekkor

$$x=ct+a\,,\quad \frac{dx}{dt}=c$$

és a a pont helye a $t=0$ időben.

Ha a mozgás nem egyenletes, a helyváltozás egy bizonyos t idő közelében ismét a $\frac{dx}{dt}$ differencziálhányados segítségével jellemezhető.

Ha a t és $t+\Delta t$ időkben a pont helyét az x és $x+\Delta x$ koordináták jellemzik, akkor a $t\ldots t+\Delta t$ időközben *a pont középsebessége* $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, ez alatt azon sebességet értve, melylyel a pont, ha mozgása egyenletes lett volna, az $x\ldots x+\Delta x$ útat a $t\ldots t+\Delta t$ időben megtette volna. A Δt növekmény változásával e $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ középsebesség folyton változó értékeket vehet föl. Hogy a t időhöz közel a mozgást megközelítőleg egyenletesnek vehessük, itt is ép úgy mint a megközelítőleg arányos változásnál, melynek viszonyait (53. cz.) itt csak más elnevezések alatt újból elemezzük, szükséges, hogy $\lim\limits_{\Delta t=0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ véges és meghatározott érték legyen. Ekkor tehát lehet egy időtartamot kijelölni, melyen belül a középsebesség ama határértéktől egy tetszőlegesen választott δ-nál kevesebbel tér el.

Ama határérték nem más, mint a $\frac{dx}{dt}$ differencziálhányados, melyet a *mozgó pont sebességének* nevezünk *a t időben*. Ily módon átviszszük időpontra a sebesség fogalmát, mely eredetileg csak időközökre vonatkozott.

II.

Az elemi függvények differencziálása.

Az összeg, szorzat és hányados.

62. Legközelebbi föladatunk, az ú. n. *elemi függvényeknek*, melyek t. i. a számtanban tárgyalt számvonatkoztatásoknak egyszerű átfordításai, folytonosságát és differencziálhányadosát megvizsgálni, a mi egyszersmind alkalmat nyujt arra, hogy az ily módon már rendelkezésünkre álló függvényalakokat rendszeresen áttekintsük. E végből azonban mindenek előtt néhány folyton alkalmazandó általános differencziálási szabály lesz tárgyalandó.

Ha u és v differencziálható függvények, akkor az u+v összeg is ilyen és:*

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \tag{I.a}$$

Mert ha a Δx növekménynek megfelelnek a Δu és Δv növekmények, lesz:

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

* A differencziálhányados vizsgálata általában és így minden itt tárgyalandó tétel mindig egy bizonyos x helyre vonatkozik. Azaz ha u és v *egy bizonyos x helyen* differencziálhatók, akkor *e helyen* $u+v$ is differencziálható, s. í. t.

E tétel közvetetlenül átvihető n összeadandóra:

$$\frac{d}{dx}(u_1+u_2\ldots+u_n)=\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\ldots+\frac{du_n}{dx};\qquad \text{(I.}b\text{)}$$

e szerint az összeg egyszerűen «tagonként» differencziálandó.

Ha u és v differencziálható függvények, akkor az uv szorzat is ilyen és:

$$\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx},\qquad \text{(II.}a\text{)}$$

mert:

$$\frac{d(uv)}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x=0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+$$

$$+\lim_{\Delta x=0}\left(\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}.$$

Ha az $u_1\,u_2\,u_3$ szorzatban először $u_2\,u_3$-at egy tényezőnek veszszük, akkor a 3 tényező szorzatára nézve lesz:

$$\frac{d(u_1u_2u_3)}{dx}=u_2u_3\frac{du_1}{dx}+u_1\frac{d(u_2u_3)}{dx}=u_2u_3\frac{du_1}{dx}+u_1u_3\frac{du_2}{dx}+u_1u_2\frac{du_3}{dx};$$

E képletet jobb áttekintés végett még következőkép irjuk:

$$\frac{d(u_1u_2u_3)}{dx}=u_1u_2u_3\left(\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\frac{1}{u_3}\frac{du_3}{dx}\right)$$

hol az $u_1=0$, stb csak látszólagos kivétel t. i. $\frac{u_1u_2u_3}{u_1}$ megelőző megállapitások értelmében akkor is $u_2\,u_3$-nak veendő, mikor $u_1=0$.

Ezen alakjában a tétel közvetetlenül általánosítható m tényezőre, t. i.

$$\frac{d(u_1u_2\ldots u_m)}{dx}=$$

$$=u_1u_2\ldots u_m\left(\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\frac{1}{u_3}\frac{du_3}{dx}+\ldots+\frac{1}{u_m}\frac{du_m}{dx}\right)\qquad \text{(II.}b\text{)}$$

A tétel helyes, ha $m=2$ vagy 3. Minden pozitiv egész m-re helyes, mert m-ről átmehetünk $m+1$-re. Ha ugyanis $u_1\ldots u_m\,u_{m+1}$-ben az $u_1\ldots u_m$-et először egy tényezőnek veszszük, és azután a (II.b)-t alkalmazzuk, lesz:

$$\frac{d(u_1 u_2 \dots u_m u_{m+1})}{dx} = u_1 \dots u_m u_{m+1}\left(\frac{1}{u_1 \dots u_m}\frac{d(u_1 \dots u_m)}{dx} + \frac{1}{u_{m+1}}\frac{du_{m+1}}{dx}\right) =$$

$$= u_1 \dots u_m u_{m+1}\left(\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \dots + \frac{1}{u_m}\frac{du_m}{dx} + \frac{1}{u_{m+1}}\frac{du_{m+1}}{dx}\right),$$

a mi nem más, mint a (II.b) kiterjesztése m-ről $m+1$-re.

A szorzási tétel egy speciális esete, midőn az egyik tényező állandó, a mikor:

$$\frac{d(Cu)}{dx} = C\frac{du}{dx} \tag{II.c}$$

a mi direkt úton is tüstént igazolható.

Ha végre a most levezetett képletben az u-kat mind egyenlővé teszszük, $u_1 = u_2 = \dots = u_m = u$, akkor a következő eredményhez jutunk:

Ha u differencziálható függvény, akkor az u minden pozitiv egész hatványa is ilyen, és

$$\frac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx} \tag{III.a}$$

Az m az egyenlővé tett tényezők számát jelenti, tehát a képletben — egyelőre — csak pozitiv egész számot jelenthet.

63. *Ha u és v differencziálható függvények és az illető helyen v nem 0, akkor $\frac{u}{v}$ is differencziálható és:*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \tag{IV.}$$

Ugyanis:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x=0}\frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0}\left(\frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(v+\Delta v)}\right).$$

Ha v nem 0, a második tényezőnek véges és meghatározott határértéke van, $\frac{1}{v^2}$ és így:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right).$$

Ebből még: *Ha u differencziálható függvény és az illető hely nem 0, akkor u minden egész hatványa is ilyen és ismét:*

$$\frac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}. \qquad \text{(III.b)}$$

A tétel ismeretes, ha m pozitiv egész szám. Ha m negativ egész szám, p. $m=-k$, a hol azután k pozitiv; akkor a hányados differencziálására vonatkozó szabályt kell csak alkalmazni és lesz:

$$\frac{d(u^{-k})}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{u^k} = \frac{-ku^{k-1}\frac{du}{dx}}{u^{2k}} = (-k)\,u^{(-k)-1}\frac{du}{dx},$$

a mi ha $-k$ helyébe ismét m-et irunk, átmegy a (III.b) képletbe. — Ha $m=0$, akkor $u^0=1$, és differencziálhányadosa 0. Képletünk tehát erre az esetre is helyes.

Függvény függvénye.

64. Ha

$$y=f(u), \quad u=\varphi(x)$$

egyértékű függvények, akkor e két alak együttesen az y-t is megadja, mint az x egyértékű függvényét. Értelmezési tartománya mind azon x-ekből áll, melyek a $\varphi(x)$ értelmezési tartományába tartoznak és az $f(u)$ értelmezési tartományában foglalt u-kat szolgáltatnak. Ezen értelemben

$$y=f(\varphi(x))$$

irható.

Ha $u=\varphi(x)$ egy bizonyos x helyen differencziálható, továbbá $y=f(u)$ a megfelelő u helyen differencziálható, akkor y, mint x függvénye amaz x helyen szintén differencziálható és:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} \qquad \text{(V.)}$$

Ez az úgynevezett *közvetett differencziálás elve.* Lesz ugyanis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

Itt világos, hogy:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx};$$

a mi pedig $\lim\limits_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$-t illeti, a föltevések értelmében mindenesetre:

$$\lim_{\Delta u=0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}.$$

Ha most a $\lim. \Delta u = 0$ határátmenetet fölcseréljük a $\lim. \Delta x = 0$ határátmenettel, akkor minthogy Δx-szel mindenesetre Δu is eltünik és $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ véges és meghatározott határértékhez közeledik, *bármikép* történjék is a Δu kisebbítése, ugyane határértékhez kell jutnunk, ha Δu kisebbítése a $\lim. \Delta x = 0$ föltételnek megfelelőleg történik. Tehát:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u=0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

a mi közvetetlenül átmegy az (V.)-be.

Igy p. tudva azt, hogy $\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$, lesz:

$$\frac{d u^{\frac{1}{2}}}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dx}.$$

Vagy ha $y = (1 + x^2)^2$, a mi úgy is irható, hogy:

$$y = u^2, \quad u = 1 + x^2,$$

lesz

$$\frac{dy}{du} = 2u, \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

és így

$$\frac{dy}{dx} = 4(1 + x^2)x.$$

Inverz függvények.

65. Ha $x = \varphi(y)$ az y egyértékű függvénye, akkor e vonatkozás alapján y is fölfogható mint az x függvénye, $y = f(x)$, ha t. i. x-hez tartozónak tekintjük az y azon értékeit, melyeknél $\varphi(y)$ az illető x-et adja. Az így keletkező $f(x)$ függvény természetesen általánosságban többértékű. Ily vonatkozás mellett $x = \varphi(y)$ és $y = f(x)$ *inverz függvények;* az egyik függvény a másiknak *megfordítottja.*

Ha a megfordított függvénynél általános szabályok segítségével az x-hez tartozó y-ok közül egy bizonyos tartományban mindig egyet kiválasztunk, akkor $f(x)$-et ezen tartományban az értelmezés ezen új adatának hozzácsatolásával *egyértékűvé teszszük*. Igy p. ha $x = y^2$, $y = \sqrt{x}$, ez kétértékű függvény; de ha hozzáteszszük, hogy $\sqrt{x}$ azon értékét vegyük, melyben az argumentum φ úgy van választva, hogy

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

vagyis a $\sqrt{x}$ értékei közül a főérték veendő, akkor e megszorítás után $y = (\sqrt{x})$ egyértékű lesz.

Legyen $x = \varphi(y)$ az y egyértékű függvénye; legyen Y e függvény értelmezési tartományának egy oly része, melynek különböző helyein $\varphi(y)$-nak mindig különböző értékei vannak. Az Y tartomány helyeihez tartozó x értékek összessége egy bizonyos számtartományt alkot, melyet X-szel jelölünk. Akkor az $x = \varphi(y)$ megfordítottja:

$$y = f(x)$$

*az X tartományban egyértékű lesz, azon megállapítás hozzácsatolásánál, hogy minden x-hez az Y tartományban foglalt y tartozzék.**

Legyen most már az Y tartomány összefüggő, továbbá olyan, hogy $\varphi(y)$ az Y tartományban és minden határhelyén folytonos, végre az Y-nak azon határhelyein, melyek nem tartoznak a tartományba, se vegyen föl $\varphi(y)$ oly értéket, mely e tartomány egyik helyének megfelel;

legyen továbbá az X tartomány is összefüggő;

akkor az $y = f(x)$ egyértékűvé tett függvény az X tartomány belsejében folytonos;

ha továbbá valamely y helyen az x differencziálható és $\frac{dx}{dy}$ nem 0, akkor az $y = f(x)$ a megfelelő x helyen szintén differencziálható és az ily módon képezett differenczálhányadosok $\frac{dx}{dy}$ és $\frac{dy}{dx}$ recziprok értékek;

* Csak mellékesen legyen megjegyezve, hogy azon esetben, ha X és Y több véges számú folytonos részből álló tartományok, az inverz függvények elve változatlanúl fönnáll és a tétel bebizonyítása is csak lényegtelenül módosúl.

*ha végre valamely y helyen x differencziálhányadosa 0 vagy végtelen lesz, akkor x differencziálhányadosa y szerint — a megfelelő y helyen — szintén a recziprok értéket veszi föl, t. i. az első esetben végtelen lesz és a második esetben 0.**

Ha ily módon $\frac{dy}{dx}$-et a $\frac{dx}{dy}$-ból kiszámítjuk, e számítás közönségesen y-ban kifejezve adja a differencziálhányadost; ha ebből a differencziálhányadosnak szokásos, a független változóban való kifejezéséhez akarunk jutni, természetesen még az $y = f(x)$ helyettesítés végzendő.

Legyen most már x és y az X és Y tartományok két összetartozó helye. Akkor minden $x + \Delta x$-nek megfelel egy bizonyos $y + \Delta y$ és viszont ezen $y + \Delta y$-nek az eredeti $x + \Delta x$; természetesen a mennyiben a Δx és Δy növekmények még lehetségesek, azaz nem vezetnek ki esetleg az X, Y tartományokból. E lehetséges Δx növekmények közt vannak mindig olyanok, melyeknek absolut értéke tetszőlegesen kicsiny, a mennyiben mindenesetre vannak az x tetszőleges közelében az X tartomány helyei. A föltevés szerint $x = \varphi(y)$ az y helyen folytonos, azaz $\lim. \Delta x = 0$, ha $\lim. \Delta y = 0$.

Bebizonyítandó először is, hogy $y = f(x)$ is folytonos az x helyen, azaz hogy megfordítva $\lim. \Delta y = 0$, ha $\lim. \Delta x = 0$.

Az ellenkező föltevés azt jelentené, hogy lehet egy pozitiv δ-t találni, úgy hogy

$$|\Delta y| \geqq \delta, \quad \text{ha} \quad |\Delta x| < \varepsilon$$

* A következőkben adandó bebizonyításnak lényeges pontja, hogy az egyértékűvé tett megfordított függvény folytonos és differencziálható. Mint minden határérték kiszámításánál először meggyőződést kell szereznünk a felől, hogy $\frac{dy}{dx}$ valóban meghatározott érték. E föltevés jogtalan bevezetése mellett az eredmény helyes volta semmikép sincs biztosítva. Ha e döntő pontot mellőzzük, a bizonyításnak aránylagos komplikácziója elesik és több kézikönyv mintájára a következőkép járhatunk el:

Az x-et fölfoghatjuk mint az $x = \varphi(y)$, $y = f(x)$ egyenletek alapján közvetve adott függvényét az x-nek. Míg tehát direkte képezve x differencziálhányadosa x szerint az 1, e fölfogásnál az eredmény $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. És így a mi bebizonyítandó volna:

$$1 = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx}$$

bármily kis pozitiv szám is legyen az ε; azaz $|\Delta x| = |\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)|$ tetszőlegesen kisebbíthető akkor is, ha $|\Delta y| \geq \delta$. Ha $y + \Delta y$ helyett y'-t irunk, ez úgy is fejezhető ki, hogy

$$\varphi(y') - \varphi(y)$$

is tetszőlegesen kisebbíthető, míg

$$|y' - y| \geq \delta,$$

hol pedig y', valamint y az Y tartomány helye.

Hagyjuk ki az Y tartományból azon y' helyeket, melyekre nézve

$$|y' - y| \leq \delta' < \delta$$

hol a δ'-t oly kicsinynek veszszük, hogy az e kihagyásnál Y-ból keletkező Y' tartomány complex változók esetében ismét összefüggő legyen, valós változók esetében pedig egy vagy két összefüggő részből álljon; * e tartomány határhelyei nem lehetnek mások, mint az Y határhelyei és az $|y' - y| = \delta'$ föltételnek megfelelő y' számok, a mennyiben Y belső helyei voltak. Ezen Y' tartományban $|\varphi(y') - \varphi(y)|$ tetszőlegesen közel jut a 0-hoz; tehát a 45.czikk ér-

* Ha Y valós tartomány p. az $\alpha\,\beta$ számköz és y' belső helye, akkor közvetetlenül világos, hogy két tartományt nyerünk, ha az y' egy kis környezetét egy a vonaldarab belsejében fekvő vonaldarabkát) kihagyunk, ezek t. i. az $\alpha \ldots y' - \delta$ és $y' + \delta \ldots \beta$ számközök; ha pedig y' határhely és p. a tartomány a zy' vagy $y'z$ számközből áll e kihagyás után a $z \ldots (y' - \delta)$ vagy $(y' + \delta) \ldots z$ számköz marad meg.

Legyen másodszor Y complex tartomány.

Ha ekkor, bármily kicsinynek veszszük is δ'-t, Y' nem volna összefüggő, ez annyit jelentene, hogy két a Y'-ban fekvő hely nem köthető össze csupán belső helyekből álló úton. A két Y'-ban fekvő hely Y-ban is fekszik és itt minden esetre van átmenet oly úton, mely az Y-nak csak belső helyeit tartalmazza. Ha ez az út nem megy át a y'-on, akkor a y' környezete úgy választható, hogy ezen útnak egy helye sem fekszik e környezetben és az út Y'-nak is csak belső helyeit tartalmazná. De ha y' az Y belső helye, minden a y'-on keresztülmenő út fölcserélhető egy olyannal, melynek minden z helyére nézve $|z - y'|$ egy bizonyos δ'-nál nagyobb és így ebben az esetben Y' is összefüggő. Ha y' határhely és Y-ban volna két hely, melyet csak y' segítségével lehetne összekötni, Y nem volna összefüggő, hanem a föltevés ellenére csak határhelyben összefüggő.

telmében van az Y'-on belül vagy határán egy y_1, melyre nézve $\varphi(y_1) - \varphi(y) = 0$. De ezen y_1 az Y-nak is az y-tól különböző belső vagy határhelye; a mi az Y tartomány választásánál fogva nem lehetséges. Tehát föltevésünk lehetetlen; vagyis kell, hogy $\lim. \Delta y = 0$ legyen, ha $\lim. \Delta x = 0$, azaz $f(x)$ az x helyen folytonos függvény, a mi első sorban bebizonyítandó volt. De most már

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

hol azonban a határátmenet jelzésére ép úgy irható $\lim_{\Delta y = 0}$ és az is mindegy, vajjon Δx-ből határozzuk meg Δy-t, vagy megfordítva Δy-ból Δx-et, tehát

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)},$$

és így, a mint $\lim\limits_{\Delta y = 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ zérus, a 0-tól különböző érték, vagy ∞, a $\frac{dy}{dx}$ végtelen, a 0-tól különböző érték, vagy 0 lesz.

Igy p. ha valós változók körében:

$$x = y^2, \quad y = x^{\frac{1}{2}},$$

az x és y tartományai az összes nem negativ valós számokból állanak, az X és Y-ra vonatkozó föltételek tehát ki vannak elégítve. És így ezen inverz egyértékű függvények differencziálhányadosai egymásból kiszámíthatók. Ha például tudjuk, hogy

$$\frac{dx}{dy} = 2y,$$

akkor ebből következik, hogy:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} y^{-1} = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},$$

az előbb (54. cz.) levezetett eredménynek megfelelőleg. Az $x = 0$ helyre e vizsgálat nem vonatkozik, mert a megfelelő $y = 0$ az Y határhelye, de közvetetlenül látni, hogy a differencziálhányados ott végtelen lesz, mert:

$$\lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=0} = \lim_{\Delta x = 0} \left((\Delta x)^{-\frac{1}{2}}\right) = \infty,$$

a mi azután az általános képletből is kiolvasható, ha ismét a 0-t és ∞-t mint reciprok értékeket tekintjük.

Raczionális egész és tört függvények. Gyökfüggvények.

66. Ha a hatvány differencziálására vonatkozó képletben (III. a) u helyébe x-et teszünk lesz:

$$\frac{d(x^m)}{dx} = m\,x^{m-1}.$$

Az x-nek *raczionális egész függvénye* (vagy rövidebben egész függvénye), minden

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_n x^n$$

alakú kifejezés, mely az x legmagasabb hatványa szerint *n-ed fokú egész függvény.*

Mint összeg tagonként differencziálható; minden egyes tag pedig oly függvénynek, melynek differencziálhányadosa már ismeretes, szorzata állandóval. Tehát:

$$y' = \frac{dy}{dx} = a_1 + 2\,a_2 x + \ldots + k\,a_k x^{k-1} + \ldots + n\,a_n x^{n-1}$$

Az x raczionális tört függvénye, vagy rövidebben raczionális függvénye két egész függvény hányadosa, melynek differencziálhányadosa tehát az $\frac{u}{v}$-re adott szabály szerint kiszámítható. Kivételt tesznek azok a számértékek, melyeknél a nevező eltünik, ezeknek száma (I. r. 100. cz.) legfölebb egyenlő a nevező fokával.

A raczionális egész függvény tehát minden helyen, a raczionális tört függvény minden helyen, legfölebb n hely kivételével, (hol n a nevező fokát jelenti) folytonos és differencziálható függvény. E kivételes helyek részletesebb vizsgálatát a tört függvények nem sokára tárgyalandó részletes elméletének tartjuk fönn. Igy p.

$$y = \frac{1+x}{1-x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)\frac{d}{dx}(1+x) - (1+x)\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2};$$

kivételes hely csupán $x = 1$, a hol a függvény végtelen lesz; vagy:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 3x + 4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 3x + 4)\frac{d}{dx}(x^2 + 2x + 5) - (x^2 + 2x + 5)\frac{d}{dx}(x^2+3x+4)}{(x^2 + 3x + 4)^2} =$$

$$= \frac{(x^2 + 3x + 4)(2x + 2) - (x^2 + 2x + 5)(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 4)^2}.$$

Az $y = \frac{1 - x^2}{1 - x}$-nek kivételes helye $x = 1$; de y így is irható:

$$y = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 - x)}.$$

Minthogy pedig megszüntethető megszakadások ki vannak zárva és az $x = 1$ hely kivételével

$$y = 1 + x,$$

ezen alakzat az $x = 1$ helyen is megadja a függvény értékét, vagyis ez a függvény általános, de egyszerűsített alakja.

A pozitiv egész kitevőkre levezetett szabály negativ egesz kitevőknél is érvényben marad, a mint azt már a 63. czikkben (III. b képlet) láttuk.

67. *Az általánosabb hatványalakok* sorából először az

$$y = x^{\frac{1}{n}}$$

függvényt tárgyaljuk, hol n alatt pozitiv egész számot értünk, melynek értelmezési tartománya az összes nem negativ valós számokból áll. Ebből megfordítás által:

$$x = y^n.$$

Ez két inverz egyértékű függveny; az y tartománya szintén a nem negativ valós számokból áll; és az adott egyenletek e számoknak kölcsönösen egyértelmű vonatkoztatását adják. Az inverz függvények elve (65. cz.) tehát az adott függvényre alkalmazható és minthogy:

$$\frac{dx}{dy} = n\, y^{n-1},$$

lesz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} y^{1-n} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Ha $x = 0$, a differencziálhányados végtelen lesz.

Ebből az

$$y = x^r$$

hol r tetszőleges raczionális szám, szintén levezethető. Az r ugyanis $\frac{m}{n}$ alakban irható, hol m bármilyen egész szám, n pozitiv egész szám. Akkor

$$y = (x^m)^{\frac{1}{n}},$$

és a függvény függvényére vonatkozó elv (64. cz.) használatával

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}(x^m)^{\frac{1}{n}-1} \cdot m\, x^{m-1}$$

$$= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Azaz végre

$$\frac{d(x^r)}{dx} = r\, x^{r-1}, \qquad (1.)$$

mely szerint *a raczionális kitevőjű hatványnál az egész számú kitevőre levezetett szabály föltétlenül érvényben marad.*

Csak a 0 hely lesz külön tekintetbe veendő, hol $u^{\frac{1}{n}}$ differencziálhányadosa nem véges és meghatározott érték. De e helyen

$$f(x+h) - f(x) = f(h) = h^r,$$

vagyis a növekmény r-edrendű végtelen kicsiny lesz. Azaz x^r differencziálhányadosa az $x = 0$ helyen 0 vagy végtelen lesz, a mint $r > 1$, vagy $r < 1$; ha $r = 1$, akkor e helyen is 1, úgy mint mindenütt, ekkor $y = x$ lévén. Az $x = 0$ helyre vonatkozó eredmények is az általános képletből kiolvashatók, ha a 0 és ∞-t ismét mint reczíprok értékeket fogjuk föl.

68. *A valós számok körére szorítkozva,* e tárgyalások az $\sqrt[n]{x}$ függvényre is megadják az eredményeket.

Ha először is *a gyökkitevő páros szám;*

$$y = \sqrt[2k]{x}$$

akkor a függvény értelmezési tartománya a nem negativ valós számokból áll; az y két értékű. Egyértékűvé teszszük, ha megállapítjuk, hogy $\sqrt[2k]{x}$-nek mindig pozitiv, illetőleg mindig negativ értéke veendő, (ha $x = 0$, természetesen $y = 0$). A függvény két egyértékű ága $x^{\frac{1}{2k}}$ és $-x^{\frac{1}{2k}}$. Bármely ágat jelentse is $\sqrt[2k]{x}$, mindig

$$\frac{d}{dx}\sqrt[2k]{x} = \frac{1}{2k}\frac{\sqrt[2k]{x}}{x}$$

a mi — ép úgy mint a következő képletek — a hatvány képletéből fölirható, ha a gyökkitevő reciprokját hatványkitevőnek tekintjük és x^{r-1}-nek mindig az $x^r . x^{-1}$ szorzatot veszszük.

Ha a gyökkitevő páratlan szám:

$$y = \sqrt[2k+1]{x}$$

akkor a függvény értelmezési tartománya az összes valós számokból áll és — a gyöknek csak egy valós értéke lévén — a függvény már egyértékű. Pozitiv x környezetében

$$\sqrt[2k+1]{x} = x^{\frac{1}{2k+1}}, \qquad (x \geqq 0)$$

a differencziálási szabály tehát ugyanaz, mint a tört hatványnál. Negativ x mellett

$$\sqrt[2k+1]{x} = -(-x)^{\frac{1}{2k+1}}$$

és így ekkor a közvetett differencziálás elvénél fogva:

$$\frac{d}{dx}\sqrt[2k+1]{x} = \frac{1}{2k+1}(-x)^{\frac{1}{2k+1}-1} =$$

$$= \frac{1}{2k+1}\frac{\sqrt[2k+1]{x}}{x};$$

ugyanaz a képlet, mint pozitiv x esetében. Kimondhatjuk tehát mindössze, hogy *akár páros, akár páratlan kitevőnél mindig a függvény egész értelmezési tartományában*

$$\frac{d}{dx}\sqrt[m]{x} = \frac{1}{m}\frac{\sqrt[m]{x}}{x}, \qquad (2.)$$

hol a két oldalon az $\sqrt[m]{x}$ ugyanazon értéke veendő és a képlet a hatványéból tüstént fölirható; mert evvel teljesen analog, ha tekintetbe veszszük a gyökkitevő és hatványkitevő analogiáját. Ebből az után még:

$$\frac{d}{dx}\sqrt[m]{u} = \frac{1}{m}\,\frac{\sqrt[m]{u}}{u}\,\frac{du}{dx},$$

ha u az illető x környezetében tetszőleges valós, vagy tetszőleges nem negativ értékű függvény, a mint t. i. m páratlan, vagy páros.

69. *Complex változók* körében a gyökfüggvény

$$y = \sqrt[n]{x}$$

általánosságban n-értékű függvény; csak az $x = 0$ hely tesz kivételt, hol a függvénynek mind az n értéke egyenlő lesz. E függvény értelmezése szerint az

$$x = y^n$$

egyértékű függvény megfordítása. Az inverz függvények elve alkalmazható lesz, ha az ott kifejtett föltételsorozatnak megfelelő Y tartományt jelölünk ki. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a 0 e tartomány belső helye nem lehet; mert a 0-nak bármily kis környezetét vegyük, ennek belsejében mindig lesz n szám, mely az x ugyanazon értékéhez vezet.

Ellenben az Y tartomány kijelölhető úgy, hogy az inverz függvény $y = \sqrt[n]{x}$ egy a 0-tól *különböző, különben tetszőlegesen választott x_0 környezetében* folytonos és differencziálható egyértékű függvény legyen.

Legyen p. x_0 és y_0 két ama függvényvonatkozás alapján összetartozó érték. Ha az y általános complex alakja $y = r(\cos.\varphi + i \sin.\varphi)$ és $y_0 = r_0(\cos.\varphi_0 + i\sin.\varphi_0)$, határozzuk meg az Y-ba tartozó helyeket e föltétel alapján:

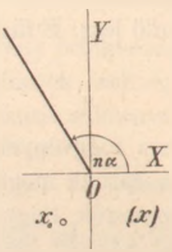
$$a < \varphi < a + \frac{2\pi}{n},$$

hol a oly érték, hogy

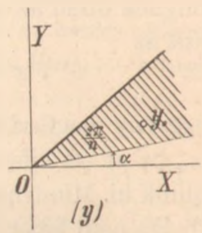
$$a < \varphi_0 < a + \frac{2\pi}{n}$$

Az Y tartomány — mint közvetetlenül látni — az egy $\frac{2\pi}{n}$ nagyságú szög belsejében fekvő helyeket tartalmazza; a szög csúcsa a 0-pont. (E viszonyok geometriai ábrázolása a 16. és 17. ábrában.)

Az Y tartomány összefüggő; $x = y^n$ e tartomány belsejében és határán, mint mindenütt folytonos; és végre az Y belső helyeinek megfelelő x-értékek egymás közt és a határhelyeknek megfelelő értékektől különböznek, mert két y csak akkor adja ugyanazon x-et, ha absolut értékeik egyenlők és az argumentumok különbsége $\frac{2\pi}{n}$ többese; a mi, ha az egyik y belső hely, a másik belső vagy határhely, nem lehetséges. — Az ezen Y-nak megfelelő X tartomány a complex számok összességéből áll azon számok kivételével, melyeknek argumentuma $n\alpha$, tehát szintén folytonos tartomány.



16. ábra.



17. ábra.

Megjegyzendő még, hogy ha továbbá megállapítjuk, hogy azon x számokhoz, melyeknek argumentuma $n\alpha$, például azon y-ok tartozzanak, melyekre nézve $\varphi = \alpha + \frac{2\pi}{n}$ (és nem α), az $y = \sqrt[n]{x}$ minden x-re egyértékű, de az X tartomány határhelyein nem folytonos; mert világos, hogy a mint x-et a kivételes vonal egyik vagy másik oldaláról közelítjük meg, az y-ban φ egyenlő lesz $\alpha + \frac{2\pi}{n}$ vagy α-val.

Ha y_0-t pozitiv számnak veszszük és $\alpha = -\frac{\pi}{n}$, e megállapítások az $\sqrt[n]{x}$ főértékét adják.

Az X és Y tartományok választása az inverz függvény elvének megfelel és így minthogy

$$\frac{dx}{dy} = n\,y^{n-1} = n\,(\sqrt[n]{x})^{n-1} = n\,x\,\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

lesz:

$$\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{1}{n}\,\frac{\sqrt[n]{x}}{x}.$$

ugyanazon képlet mint előbb valós változók esetében; a képlet két oldalán természetesen $\sqrt[n]{x}$ *ugyanazon* értéke áll.

Az eredmény az Y tartomány speciális választásától független; elég kimondani, hogy $\sqrt[n]{x}$ az x környezetében úgy választandó, hogy ott folytonos legyen. Ha $\sqrt[n]{x}$ magán az x helyen meg van adva, az elég is; mert az $\sqrt[n]{x}$ többi értéke (ha x nem 0) evvel szemben véges meghatározott különbséget mutatnak, mely az x-hez elég közel tetszőleges keveset változik.

A 0 helyen végre, akárhogy teszszük egyértékűvé az $\sqrt[n]{x}$-et, a differencziálhányados mindig végtelen lesz, mert, ha $x = 0$

$$\lim_{\Delta x = 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = \lim_{\Delta x = 0} |\Delta x|^{\frac{1}{n}-1}.$$

Ha tehát a következő példákban az x értéke úgy van választva, hogy a gyökjel alatt álló kifejezés nem 0, a differencziálhányados véges és meghatározott; a differencziálhányadosban a $\sqrt{\ }$ jel ugyanazon értéke veendő, mint az eredeti alakban. A gyökkifejezések pedig folytonosan változóknak tekintendők. P.

$$y = x^2 + \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} \frac{d}{dx}(1-x^2) - (\sqrt[3]{x})^{-2} \cdot \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$= 2x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Vagy:

$$y = (x + \sqrt{x}) \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}) \sqrt{a^2 - x^2} - 2x(x + \sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x-a}{x-b}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x-b}{x-a}}^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{x-a}{x-b}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x-b}{x-a}}^2 \frac{a-b}{(x-b)^2}.$$

Logarithmus és exponencziális függvény.

70. A *logarithmust*, mint függvényt megadja az

$$y = {}^a\log. x$$

egyenlet, hol a logarithmusrendszer alapszáma a egytől különböző pozitiv számérték. E függvény értelmezési tartománya az eddigiek alapján az összes pozitiv számokból áll, a függvénynek hozzátartozó értékkészlete pedig a valós számok összességéből.

A logarithmus differencziálhányadosa e tartomány belsejében véges és meghatározott érték; még pedig

$$\frac{d}{dx}({}^a\log. x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{{}^e\log. a}$$

T. i.

$$\frac{d}{dx}({}^a\log. x) = \lim_{h=0}.\frac{{}^a\log.(x+h) - {}^a\log. x}{h} = \lim_{h=0}.\Big(\frac{1}{h}\,{}^a\log.\big(1+\frac{h}{x}\big)\Big) =$$

Itt $\frac{h}{x} = z$ téve, hol lim. h és lim. z egyszerre 0 (mert x egy bizonyos pozitiv szám és nem 0); továbbá a 28. czikkben (V. a) alatt adott határképletet használva, továbbá:

$$= \frac{1}{x}\lim_{z=0}.\Big(\frac{1}{z}\,{}^a\log.(1+z)\Big) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{{}^e\log. a}\lim_{z=0}.\Big(\frac{1}{z}\,{}^e\log.(1+z)\Big) =$$

$$= \frac{1}{x}\,\frac{1}{{}^e\log. a}.$$

A mint ezen eredmény mutatja, a logarithmus differencziálása legegyszerűbb, midőn az alapszám e. Ezen esetben a logarithmusokat *természetes logarithmusoknak* nevezzük. Jelzésükre röviden az l. betűt használjuk, úgy hogy ezentúl

$$\mathrm{l.}\, x = {}^e\log. x$$

(Régibb jelzés: log. nat. x.). E jelzéssel:

$$\frac{d\,\mathrm{l.}\,x}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (3.)$$

$$\frac{d\,{}^a\log. x}{dx} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\mathrm{l.}\,a} \qquad (4.)$$

Az analizisban kizárólag a természetes logarithmusokat alkalmazzuk; másnak tárgyalása nem szükséges, mert ${}^a\log. x$ tulajdonságai az

$$ {}^a\log. x = \frac{\mathrm{l}. x}{\mathrm{l}. a} $$

összefüggés alapján a l. x-éiből közvetetlenül leolvashatók.

A (3.) és (4.) képleteket összekötve a közvetett differencziálás elvével, lesz:

$$ \frac{d\,\mathrm{l}. u}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, $$

$$ \frac{d\,{}^a\log. u}{dx} = \frac{1}{u}\frac{1}{\mathrm{l}. a}\frac{du}{dx}, $$

hol természetesen a differencziálás csak oly x-re vonatkozik, melyre nézve u pozitiv.

Ha $x=0$, a l. x végtelen lesz; e helyen tehát a differencziálásnak nincs értelme.

Ha az ${}^a\log. b$ alakban nem a b-t, hanem az a-t tekintjük változónak, egy a logarithmustól eltérő függvényalak keletkezik: $y = {}^x\log. b$, melynek értelmezési tartománya szintén a pozitiv számokból áll. E függvény nem szokott az analizisban tárgyaltatni, mert nem új függvény, t. i. a logarithmus által kifejezhető. Világos, hogy

$$ {}^x\log. a = \frac{1}{{}^a\log. x} = \frac{\mathrm{l}. a}{\mathrm{l}. x}. $$

Ebből még:

$$ \frac{d\,{}^x\log. a}{dx} = -\frac{\mathrm{l}. a}{x}\frac{1}{(\mathrm{l}. x)^2} $$

Ha $y = \mathrm{l}. (x + \sqrt{1 + x^2})$, akkor

$$ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} $$

Hasonlókép:

$$ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,\mathrm{l}.\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = $$

$$ = \frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}\left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right) = \frac{1}{x^2-1}. $$

71. A hatványalakból két függvény keletkezik, a mint az alapszámot vagy a kitevőt tekintjük változónak; az első esetben az *általános hatvány*, a második esetben az *általános exponencziális függvény*. Az utóbbi alakja:

$$y = a^x,$$

hol a adott pozitiv szám és számtani tárgyalásaink alapján az értelmezés kiterjed az összes valós számokra. E függvény egész tartományában folytonos és differencziálható. Lesz:

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \lim_{h=0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h=0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \mathrm{l}.\, a$$

(a 28. cz. VI. képletét használva). Az eredmény ismét legegyszerűbb, ha az alap e. Az e^x-et röviden *exponencziális függvénynek* nevezzük, az a^x általános exponencziális függvénynyel szemben. A differencziálási képletek:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \quad \frac{de^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}, \tag{5.}$$

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \mathrm{l}.\, a, \quad \frac{da^u}{dx} = a^u . (\mathrm{l}.\, a) \frac{du}{dx}. \tag{6.}$$

Különben a^x ismét e^x-szel szemben nem új függvény. T. i.

$$a^x = e^{x(\mathrm{l}.\, a)},$$

a miből differencziálhányadosa is levezethető.

Az $y = a^x$ és $x = {}^a\log. y$ inverz és már egyértékű függvények, Az X és Y tartományoknak egyszerűen az eredeti értelmezési tartományok vehetők.

E szerint:

$$\frac{da^x}{dx} \frac{d\,{}^a\log. y}{dy} = 1;$$

és így ha p. az exponencziális függvény, $y = a^x$ differencziálhányadosa ismeretes, ebből ismét

$$\frac{d\,{}^a\log. y}{dy} = \frac{1}{a^x} \frac{1}{\mathrm{l}.\, a} = \frac{1}{y} \frac{1}{\mathrm{l}.\, a}$$

72. Az *általános hatványalak:*

$$y = x^u$$

hol μ tetszőleges valós szám, visszavezethető az exponencziálls függvényre; mert egyszersmind

$$y = e^{\mu (\mathrm{l}.\, x)};$$

mindkét alakban a függvény értelmezési tartománya a pozitiv számokból áll. Differencziálhányadosa az utolsó alakból képezve:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\mu\, \mathrm{l}.\, x} \frac{\mu}{x} = \mu\, x^{\mu-1}.$$

Tehát az általános hatványalakra nézve, az előbb tárgyalt raczionális kitevő esetével (1.) megegyezőleg:

$$\frac{d\,(x^{\mu})}{d\,x} = \mu\, x^{\mu-1} \tag{7.}$$

Önállóan is levezethetjük e szabályt a 28. cz. VII. alatti határképlet alapján, $(\frac{h}{x} = z)$

$$\frac{d\,(x^{\mu})}{d\,x} = \lim_{h=0} \frac{(x+h)^{\mu} - x^{\mu}}{h} = x^{\mu-1} \lim_{h=0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{h}{x}}$$

$$= x^{\mu-1} \lim_{z=0} \frac{(1+z)^{\mu} - 1}{z} = \mu\, x^{\mu-1}.$$

Ennek ismét következménye

$$\frac{d\, u^{\mu}}{d\,x} = \mu\, u^{\mu-1} \frac{d\,u}{d\,x}.$$

Ugyanígy tárgyalható a következő általánosabb alak:

$$y = u^{v}$$

hol u az illető x környezetében pozitiv értékeket tartozik fölvenni. Természetesen v is valós. Ekkor:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d}{dx} e^{v (\mathrm{l}.\, u)} = e^{v (\mathrm{l}.\, u)} \left(\frac{v}{u} \frac{du}{dx} + (\mathrm{l}.\, u) \frac{dv}{dx}\right),$$

vagy $e^{v(\mathrm{l}.\, u)}$ helyébe ismét u^{v}-t irva:

$$\frac{d\,(u^{v})}{d\,x} = v\, u^{v-1} \frac{d\,u}{d\,x} + u^{v}\, (\mathrm{l}.\, u) \frac{d\,u}{d\,x}. \tag{8.}$$

Például:

$$\frac{d\,(x^x)}{d\,x} = x^x + x^x \,\mathrm{l}.\, x = x^x\,(1 + \mathrm{l}.\, x)$$

$$\frac{d}{d\,x}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}\, x^{\frac{1}{x}-1} + x^{\frac{1}{x}}\,(\mathrm{l}.\, x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= x^{\frac{1}{x}-2}\,(1 - \mathrm{l}.\, x),$$

mely eredmények a (8.) képlet direkt alkalmazása nélkül is levezethetők, ha az egyes esetekben $x^x = e^{x\,\mathrm{l}.\,x}$ s ú. t. iratik.

A trigonometrikus és cziklometrikus függvények.

73. A megfelelő műveletek tárgyalása alapján

$$y = \sin.\, x\,, \quad y = \cos.\, x$$

az x minden valós értékére értelmezett, folytonos és differencziálható függvények. Még pedig

$$\frac{d \sin.\, x}{dx} = \cos.\, x\,, \quad \frac{d \cos.\, x}{d\,x} = -\sin.\, x\,.$$

Ezekből ismét (9.)

$$\frac{d \sin.\, u}{dx} = \cos.\, u\,\frac{du}{dx}\,, \quad \frac{d \cos.\, u}{dx} = -\sin.\, u\,\frac{du}{dx}\,.$$

Tudni illik:

$$\frac{d \sin.\, x}{d\,x} = \lim_{h=0}.\frac{\sin.\,(x+h) - \sin.\, x}{h} = \lim_{h=0}.\left(\sin.\, x\,\frac{\cos.\, h - 1}{h} + \cos.\, x\,\frac{\sin.\, h}{h}\right)$$

$$= \sin.\, x \lim_{h=0}.\,\frac{\cos.\, h - 1}{h} + \cos.\, x \lim_{h=0}.\,\frac{\sin.\, h}{h}\,.$$

a mi a 30. cz. VIII. és IX.a alatt álló képletei alapján végre $\cos.\, x$. Hasonlókép:

$$\frac{d \cos.\, x}{d\,x} = \lim_{h=0}.\frac{\cos.\,(x+h) - \cos.\, x}{h} = \lim_{h=0}.\left(\cos.x\,\frac{\cos.h - 1}{h} - \sin.x\,\frac{\sin.h}{h}\right)$$

tagonként végezve a határátmenetet, az eredmény végre $-\sin.\, x$.

A 9. alatt álló képletek nem függetlenek egymástól. Például, minthogy

$$\cos. x = \sin. \left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

ujból

$$\frac{d \cos. x}{dx} = \frac{d}{dx} \sin. \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos. \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin. x.$$

A többi trigonometrikus függvény legkönnyebben tárgyalható a sin. és cos.-ból összetett alakjukban és lesz:

$$\frac{d \operatorname{tg}. x}{dx} = \frac{1}{\cos.^2 x}, \qquad \frac{d \cot. x}{dx} = -\frac{1}{\sin.^2 x}$$

$$\frac{d \sec. x}{dx} = \operatorname{tg}. x \sec. x, \qquad \frac{d \operatorname{cosec}. x}{dx} = -\cot. x \operatorname{cosec}. x. \tag{10.}$$

Mert:

$$\frac{d \operatorname{tg}. x}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\sin. x}{\cos. x} = \frac{\cos. x \frac{d \sin. x}{dx} - \sin. x \frac{d \cos. x}{dx}}{\cos.^2 x} = \frac{1}{\cos.^2 x},$$

$$\frac{d \cot. x}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\cos. x}{\sin. x} = \frac{\sin. x \frac{d \cos. x}{dx} - \cos. x \frac{d \sin. x}{dx}}{\sin.^2 x} = -\frac{1}{\sin.^2 x},$$

$$\frac{d \sec. x}{dx} = \frac{d}{dx} (\cos. x)^{-1} = -(\cos. x)^{-2} (-\sin. x) = \operatorname{tg}. x . \sec. x,$$

$$\frac{d \operatorname{cosec}. x}{dx} = \frac{d}{dx} (\sin. x)^{-1} = -(\sin. x)^{-2} \cos. x = -\cot. x . \operatorname{cosec}. x.$$

Példaképen még fölemlítjük a következő, később használandó képleteket:

$$\frac{d}{dx} \mathrm{l}. \sin. x = \frac{1}{\sin. x} \frac{d \sin. x}{dx} = \cot. x,$$

$$\frac{d}{dx} \mathrm{l}. \cos. x = \frac{1}{\cos. x} \frac{d \cos. x}{dx} = -\operatorname{tg}. x,$$

$$\frac{d}{dx} \mathrm{l}. \operatorname{tg}. \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}. \frac{x}{2}} \frac{d}{dx} \operatorname{tg}. \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tg}. \frac{x}{2}} \frac{1}{\cos.^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2 \sin. \frac{x}{2} \cos. \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin. x};$$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{l.\,tg.}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin.\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos.\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sin.\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\cos.\,x}.$$

Ha $y=\cos.\,x+i\sin.\,x$, akkor:

$$\frac{dy}{dx}=-\sin.\,x+i\cos.\,x=i\,(\cos.\,x+i\sin.\,x)=i\,y\,;$$

e függvény differencziálhányadosa tehát mindenkor az eredeti függvény és egy állandó szorzata. A következőkben nagy jelentőségű lesz, hogy e tulajdonságot közösen birja az általános exponencziális függvénynyel. T. i.

$$y=e^{ax},\quad \frac{dy}{dx}=a\,e^{ax}=a\,y,$$

csakhogy e függvény értelmezésének megfelelőleg a valós.

74. Az $x=\sin.\,y$ függvény megfordításából keletkezik az

$$y=\mathrm{arcsin.}\,x,$$

mely függvény, mint a megfelelő számművelet, végtelen sok értékű és melynek értelmezési tartománya a

$$-1\leq x\leq 1$$

föltételnek megfelelő számokat foglalja magában.

Hogy az arcsin. x-re az inverz függvények elvét alkalmazhassuk, mindenekelőtt meghatározandó egy oly Y tartomány, melynek helyei csupán különböző x értékeket adnak. Közvetetlenül belátható, hogy a $\frac{\pi}{2}$ bármely páratlan többese e tartománynak nem lehet belső helye; mert

$$\sin.\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}+\delta\right)=\sin.\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}-\delta\right)$$

lévén, e hely bármily környezetében mindig van két szám, mely a sinusnak ugyanazon értéket adja.

Ha ellenben az Y tartományt a

$$(2k-1)\frac{\pi}{2}<y<(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

föltétel segítségével szabjuk meg, akkor minden helyének a sinus más értéke felel meg; és világos, hogy ily módon az Y tartománynak a lehető legnagyobb kiterjedést adtuk.

A k minden egész számú értékének az arcsin. x-nek egy egyértékű ága felel meg, még pedig, ha $k = 0$, nem más mint az (arcsin. x), a főérték, mely függvényág értékei $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt feküsznek. — A k bármely értékénél az X tartomány a $-1 \ldots +1$ számköz számaiból áll.

Minden ily egyértékű ág differencziálása közvetetlenül elvégezhető, mert Y összefüggő, sin. y az Y tartomány minden helyén folytonos és végre az Y tartomány két tetszőleges helyén a hozzátartozó x értékek különbözők. Végre az X tartomány is összefüggő. Tehát ha $y =$ arcsin. x, $x =$ sin. y

$$\frac{d\,\text{arc. sin.}\,x}{d\,x} = \frac{1}{\frac{d\,y}{d\,x}} = \frac{1}{\cos.\,y}$$

és y értékét visszatéve:

$$\frac{d\,\text{arcsin.}\,x}{d\,x} = \frac{1}{\cos.\,\text{arcsin.}\,x},$$

hol természetesen a két oldalon az arcsin. x *ugyanazon ága* szerepel. E képlet, tekintetbe véve, hogy:

$$\sin.^2 \text{arcsin.}\,x + \cos.^2 \text{arcsin.}\,x = 1,$$

$$\sin.\,\text{arcsin.}\,x = x,$$

még egyszerűsithető, mert e szerint:

$$\cos.\,\text{arcsin.}\,x = \sqrt{1 - x^2}$$

hol azonban a négyzetgyökjel nem kétértelműséget fejez ki, hanem azt, hogy a két érték közötti választás még kétséges. E kétség könnyen eloszlatható. Az arcsin. x ágai ugyanis kétfélék,* olyanak

* *Két szám kongruens*, ha különbségük egy bizonyos A többese. *Két függvény kongruens egy bizonyos tartományban*, ha e tartomány minden helyén a függvényértékek különbsége az A ugyanazon többesével egyenlő. Az A szám, az illető *kongruenczia modulusa*, a tárgyalásban természetesen egyszer mindenkorra meg van adva.

melyek a *főértékkel* (arcsin. x)-szel *kongruensek* t.i. ettől állandóan a 2π egy bizonyos többesével különböznek, vagy pedig $-(\text{arcsin.}x)+\pi$ -vel *kongruensek*, azaz ismét ettől állandóan a 2π egy bizonyos többesével különböznek. Minthogy pedig a főértéknek, mely $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt fekszik, cosinusa soha sem negativ, a negativ előjellel vett főértéké a π páratlan többesének hozzátoldása után soha sem pozitiv, a végeredményt úgy mondhatjuk ki, hogy

$$\frac{d\,\text{arcsin.}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

hol a két oldalon egyidőben veendők a főértékkel egyenlő, illetőleg kongruens, vagy nem egyenlő, ill. inkongruens függvényágak.

Ha $x = \pm 1$, azaz $y = (2k \pm 1)\frac{\pi}{2}$, akkor sin. y differencziálhányadosa: cos. $\frac{(2k \pm 1)\pi}{2} = 0$, az inverz függvény differencziálhányadosa tehát ∞ lesz; a mely eredmény a 0 és ∞-nek reciprok értékeknek való fölfogása mellett képletünkben szintén bennfoglaltatik.

Hogy kongruens függvényágaknak differencziálhányadosai nem különböznek, onnét is világos, hogy ha $\varphi(x)$ az egyik függvényág, a másik lesz $\varphi(x) + C$; ekkor pedig $\frac{d}{dx}(\varphi(x) + C) = \frac{d}{dx}\varphi(x)$.

75. A többi ciklometrikus függvény tárgyalása vagy önnállóan, az arcsin. x-nél használt módszerek segítségével vagy épen az arcsin. x-re vonatkozólag lehozott eredmények alapján történhetik. Az eredmények összeállítása:

$$\frac{d\,\text{arcsin.}\,x}{dx} = \frac{1}{\text{cos. arcsin.}\,x}, \quad \frac{d\,\text{arccos.}\,x}{dx} = -\frac{1}{\text{sin. arccos.}\,x},$$

$$\frac{d\,\text{arctg.}\,x}{dx} = \text{cos.}^2\,\text{arctg.}\,x, \quad \frac{d\,\text{arccot.}\,x}{dx} = -\,\text{sin.}^2\,\text{arccot.}\,x;$$

ha az eredeti függvények segítségével fejezzük ki a differencziálhányadosokat; itt ismét a két oldalon mindig *ugyanazon függvényágak veendők.* Vagy pedig a közönségesen használt képletek, a mikor a differencziálhányados alakja *algebrai:*

$$\frac{d\,\text{arcsin.}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d\,\text{arccos.}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\frac{d\,\text{arctg.}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d\,\text{arccot.}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{11.}$$

Az első sorban álló képletekben a két oldalon egyidőben veendők a főértékkel kongruens vagy inkongruens függvényágak.

A mi itt először az $y = \text{arccos.}\,x$ függvényt illeti, mely az $x = \cos.\,y$ megfordításából keletkezik, közvetetlenül világos a

$$\sin.\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos.\,y = x$$

egyenletből, hogy:

$$\frac{\pi}{2} - y = \text{arcsin.}\,x,$$

azaz:

$$\text{arccos.}\,x = \frac{\pi}{2} - \text{arcsin.}\,x; \tag{a}$$

a hol, ha az $\text{arcsin.}\,x$ főértékét vesszük, azaz a függvény értékei $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt választatnak, $\text{arccos.}\,x$-nek is főértékét kapjuk, azaz $\text{arccos.}\,x$ értékei 0 és π közt lesznek. Tehát az $\text{arccos.}\,x$-nek a főértékkel kongruens ágai, itt akkor keletkeznek, ha az $\text{arcsin.}\,x$-nek is ily ágát veszszük. Ha ellenben az $\text{arcsin.}\,x$ egy másik ágát veszszük, mely $-(\text{arcsin.}\,x) + \pi + 2k\pi$, akkor az $\text{arccos.}\,x$ megfelelő ága:

$$(\text{arcsin.}\,x) - \frac{\pi}{2} + 2l\pi = -(\text{arccos.}\,x) + 2l\pi,$$

azaz kongruens a $-(\text{arccos.}\,x)$ ággal, melyben 0 és $-\pi$ közt fekvő értékek szerepelnek. Az (a) differencziálása most már a

$$\frac{d\,\text{arccos.}\,x}{d\,x} = -\frac{d\,\text{arcsin.}\,x}{d\,x} = -\frac{1}{\cos.\,\text{arcsin.}\,x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

eredményhez vezet, hol csakugyan a két oldalon ismét egyidőben főértékkel kongruens vagy inkongruens alakok állanak.

Mint inverz függvény tárgyalva

$$\frac{d\,\text{arccos.}\,x}{d\,x} = \frac{1}{\frac{d\,y}{d\,x}} = -\frac{1}{\sin.\,y} = -\frac{1}{\sin.\,\text{arccos}\,x}.$$

Különben ismét az (a) képletből világos, hogy

$$\sin.\operatorname{arccos}.x = \cos.\operatorname{arcsin}.x\,,$$

ha a két oldalon egy időben a főértékkel kongruens vagy inkongruens ágak állanak.

75. Az $\operatorname{arctg}.x$ önálló tárgyalása az előzőleg vizsgált függvényekénél egyszerűbb, mert összes ágai kongruensek, azaz ha ismét $(\operatorname{arctg}.x)$, a főérték alatt azon ágat értjük, melynek függvény értékei $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt feküsznek, akkor bármely más ág $(\operatorname{arc.tg}.x) + l\pi$ alakban ábrázolható, hol l tetszőleges egész szám.

Mint az $x = \operatorname{tg}.y$ függvény megfordítására, az $\operatorname{arctg}.x$-re az inverz függvények elve alkalmazható a következő megállapítások mellett. Az Y tartomány álljon az

$$(2k-1)\frac{\pi}{2} < y < (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

föltételnek megfelelő számokból *; a megfelelő X tartomány a valós számok összességéből áll.

Az Y és X e választása megfelel az inverz függvény elvénél követelt föltételeknek és így:

$$\frac{d\operatorname{arctg}.x}{dx} = \frac{1}{\frac{d\operatorname{tg}.y}{dy}} = \cos^2 y = \cos^2 \operatorname{arctg}.x:$$

tekintettel a

$$\operatorname{tg}.^2 u = \frac{1-\cos.^2 u}{\cos.^2 u}\,,\quad \cos.^2 u = \frac{1}{1+\operatorname{tg}.^2 u}$$

képletekre még:

$$\cos.^2 \operatorname{arctg}.x = \frac{1}{1+(\operatorname{tg}.\operatorname{arctg}.x)^2} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Az $\operatorname{arccot}.x$ tárgyalása legegyszerűbben történik az

$$x = \cot.y = \frac{1}{\operatorname{tg}.y}$$

összefüggés alapján; melyből

$$y = \operatorname{arccot}.x = \operatorname{arc.tg}.\frac{1}{x}$$

* A határhelyek itt kiesnek a tartományból, mert a függvény e helyen végtelen lesz.

hol az arctg. főértékével együtt ismét az arccot.-ét is kapjuk. Ez tehát szintén $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt fekvő függvényértékeket ád. Lesz tehát a közvetett differencziálás elvének használatával:

$$\frac{d\,\text{arccot.}\,x}{d\,x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Minthogy az arctg. x és az arccot. x egyértékű ágai mind kongruensek, t. i. csak a π többesével különböznek, a differencziálhányados a függvényág választásától teljesen független.

Mint példa álljon még itt a ritkán használt arcsec. x és arccosec. x függvények differencziálhányadosa. E függvények értelmezési tartománya a -1-nél nem nagyobb és $+1$-nél nem kisebb számokból áll.

Ha $y =$ arcsec. x, azaz $x = \text{sec.}\,y = \frac{1}{\cos.\,y}$, akkor $\cos.\,y = \frac{1}{x}$, végre tehát:

$$\text{arcsec.}\,x = \text{arccos.}\,\frac{1}{x};$$

$$\frac{d\,\text{arcsec.}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}},$$

hol a két oldalon ismét egyidőben állanak a főértékkel kongruens vagy inkongruens függvényágak. Az (arcsec. x) ép úgy mint az $\left(\text{arccos.}\,\frac{1}{x}\right)$ a 0 és π közt fekvő értékeket veszi föl. E képletnek rövid alakja:

$$\frac{d\,\text{arcsec.}\,x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

ha — mint sok kézikönyvben — *megjegyzés nélkül* áll, helytelen, mert ekkor a négyzetgyöknek előjele uj meghatározáson alapszik (ugyanaz mint tg. arcsec. x-é) és másképp választandó, a mint x pozitiv vagy negativ. Az adott differencziálási képlet rövidebben irva lehet még:

$$\frac{d\,\text{arcsec.}\,x}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}$$

hol ekkor az előjel ismét *csak* a gyöktől függ és meghatározása ismét mint eddig az, hogy a két oldalon egyidőben állanak a főértékkel kongruens vagy inkongruens ágak. A főértéknél, tehát itt is a négyzetgyök pozitiv előjele szerepel. Hasonlókép találni:

$$\frac{d \operatorname{arccosec.} x}{d x} = -\frac{1}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 (x^2 - 1)}}$$

77. Az elemi függvények, melyeknek differencziálását eddig áttekintettük, három csoportra oszthatók. E csoportok jellemző tulajdonságai, melyek később a függvények fontos osztályozásának megalapitására szolgálnak, már most is kiemelendők, a mennyiben a levezetett differencziálási szabályok áttekintését megkönnyitik. A beosztásnál döntő szempontokat azonban csak az elemi függvények részletes elméletében lehet majd kiemelni.

Az első csoportba tartoznak a raczionális egész függvények, a raczionális tört függvények és a gyökfüggvények, melyek a differencziálásnál mindig ugyanazon osztályba tartozó függvényalakokat adnak. E függvények mindannyian az általánosságban csak később értelmezendő *algebrai függvények* közé tartoznak.

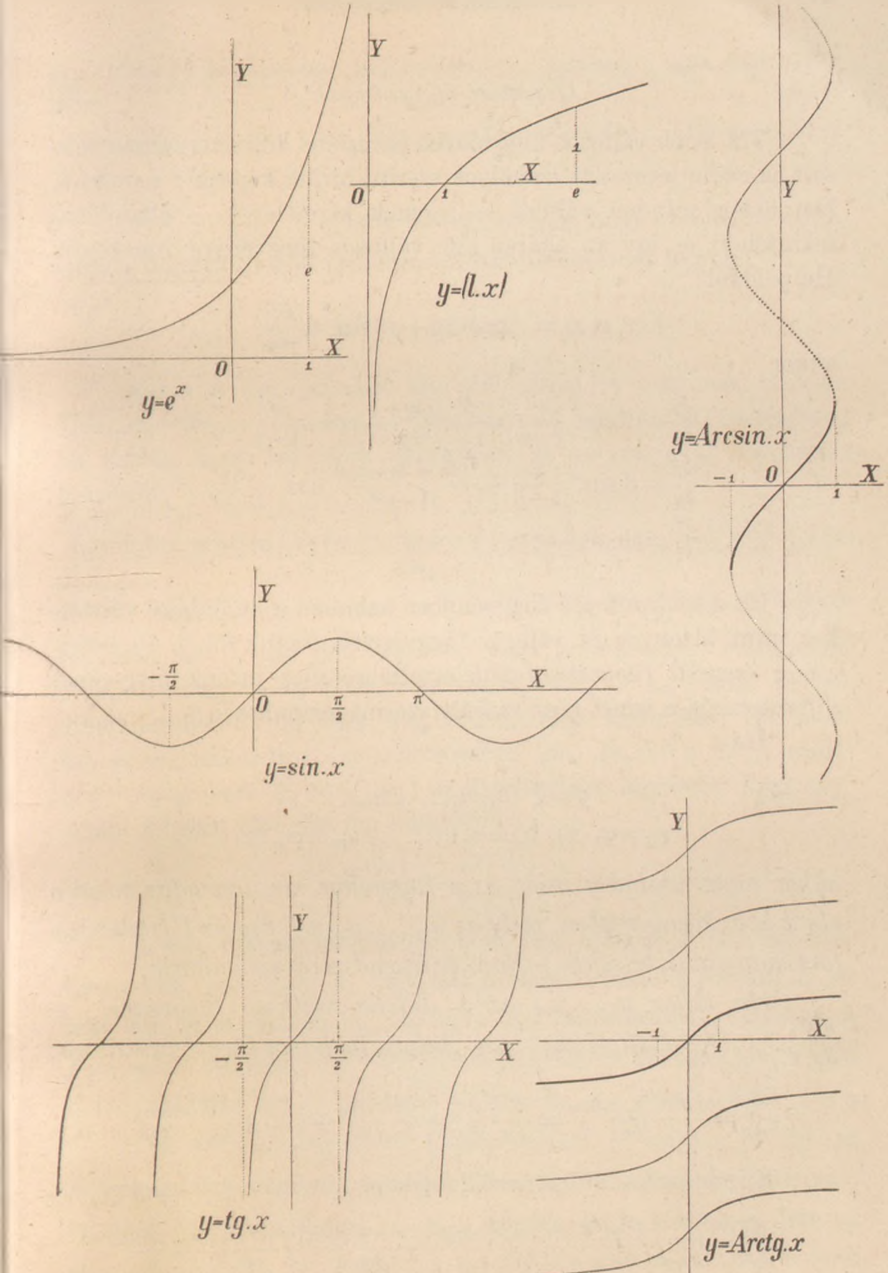
A második csoportba tartoznak az exponencziális és trigonometrikus függvények, melyek szintén a differencziálásnál hasonalakú függvényeket adnak.

A harmadik csoportot alkotják végre a másodsorban említett függvények megfordításai, a logarithmus és a cziklometrikus függvények, melyeknek differencziálhányadosa algebrai függvény.

A levezetett eredmények kellő átgondolására itt még rajzokat mellékelünk, melyek az elemekből kevésbé megszokott 6 főalakra a függvény menetének geometriai ábrázolását adják. A végtelen sok értékű arc. sin. x-nél a főérték és a vele kongruens függvényágak a többiektől oly módon vannak megkülönböztetve, hogy amazok ábrázolására kihuzott, emezekére pontozott vonalak használtattak.

E mellett az a két ág, melynek egyikével bármelyik kongruens, vastagabban van kivonva. — Az arctg. x ábrázolásánál a viszonyok annyival egyszerűebbek, hogy az ágak mind kongruensek.

A cos. x, arcos. x, cot. x, arccot. x ábrázolására szolgáló idomok elmaradhattak, a mennyiben ezek a közlöttekből az x, illetőleg y-tengelynek $\frac{1}{2}\pi$-vel való eltolásánál keletkeznek.


Y
X
0
1
e
y=e^x
Y
X
0
1
e
1
y=(l.x)
Y
X
−1
0
1
y=Arcsin.x
Y
X
−π/2
0
π/2
π
y=sin.x
Y
X
−π/2
π/2
y=tg.x
Y
X
−1
1
y=Arctg.x

18.—23. ábra.

Összetett függvények.

78. Több változós függvények parcziális differencziálhányadosait az eddig levezetett szabályok szerint birjuk képezni; a mennyiben akkor minden változó — egynek kivételével — állandónak tekintendő, és így az eljárás egy változós függvényre vonatkozik. Ha például:

$$f(x,y,z)=(2x+3y+z)\sin.\frac{x}{1-y},$$

akkor

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\sin.\frac{x}{1-y}+\frac{2x+3y+z}{1-y}\cos.\frac{x}{1-y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3\sin.\frac{x}{1-y}+\frac{(2x+3y+z)x}{(1-y)^2}\cos.\frac{x}{1-y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\sin.\frac{x}{1-y}.$$

Ha a többváltozós függvényben azonban a különböző változókat mint bizonyos új változó függvényeit fogjuk föl (l. 46. czikk) akkor *összetett függvényalakok* értelmezéséhez jutunk, melyeknek differencziálása ismét kész szabály szerint történhetik.

Ha

$$y=F(u_1,u_2,\ldots,u_m),$$

$$u_1=\varphi_1(x),\ u_2=\varphi_2(x),\ldots,u_m=\varphi_m(x),$$

akkor egyszersmind y mint az x függvénye meg lesz adva minden oly x hely környezetében, mely az $u_1,\ldots,u_m$-nek egy az F értelmezési tartományának belsejébe tartozó értékrendszerét szolgáltatja.

Ha ekkor $u_1\ldots u_m$ az x differencziálható függvényei, és $\frac{\partial F}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial F}{\partial u_m}$ az illető $(u_1,\ldots,u_m)$ helyen folytonos függvények, akkor:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dF(u_1.u_2,\ldots,u_m)}{dx}=\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial u_m}\frac{du_m}{dx}.$$

Kiindulunk a differencziálhányados általános értelmezéséből:

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{F(u_1+\Delta u_1,u_2+\Delta u_2,\ldots,u_m+\Delta u_m)-F(u_1,u_2\ldots u_m)}{\Delta x},$$

a mi még így is irható:

$$\lim_{\Delta x=0} \left(\frac{F(u_1+\Delta u_1, u_2+\Delta u_2, \ldots, u_m+\Delta u_m) - F(u_1, u_2+\Delta u_2, \ldots u_m+\Delta u_m)}{\Delta u_1} \frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \right.$$
$$\left. + \frac{F(u_1, u_2+\Delta u_2, \ldots u_m+\Delta u_m) - F(u_1, u_2 \ldots u_m)}{\Delta x} \right).$$

A $\frac{\partial F}{\partial u_1}$, $\frac{\partial F}{\partial u_2}$, ... alakok új függvények, hogy ezekben a változóknak helyettesítendő értékrendszereit jelölhessük, legyen:

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = F_i(u_1, \ldots, u_m).$$

Ekkor a lim. jel alatt álló első hányados nem más, mint az $F(u_1, u_2+\Delta u_2, \ldots, u_m+\Delta u_m)$ függvénynek különbségi hányadosa, ha tisztán u_1-et tekintjük változónak és ez Δu_1-gyel növekszik. E szerint

$$\frac{F(u_1+\Delta u_1, u_2+\Delta u_2, \ldots, u_m+\Delta u_m) - F(u_1, u_2+\Delta u_2, \ldots, u_m+\Delta u_m)}{\Delta u_1} =$$
$$= F_1(u_1, u_2+\Delta u_2, \ldots, u_m+\Delta u_m) + \varepsilon$$

hol lim. $\varepsilon=0$, ha lim. $\Delta u_1=0$. Mert a föltételek értelmében $F(u_1, u_2+\Delta u_2, \ldots u_m+\Delta u_m)$ az $(u_1, u_2+\Delta u_2 \ldots u_m+\Delta u_m)$ helyen differencziálható, ha csak $\Delta u_2, \ldots \Delta u_m$ elég kicsinyek. Ha most lim.$\Delta x=0$, akkor lim. $\varepsilon=0$, de továbbá lim. $\Delta u_2=0$ s. ú. t.; minthogy pedig végre $F_1(u_1 \ldots u_m)$ az illető helyen folytonos függvény, a lim. jel alatt álló első tag határértéke:

$$F_1 \frac{du_1}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx}.$$

A második tag határértéke nem más mint az F differencziálhányadosa, ha ebben u_1 változatlan marad; azaz ha például u_1 értéke az illető helyen a_1, az $u_2 \ldots u_m$ közvetítésével értelmezett $F(a_1, u_2 \ldots u_m)$ függvény differencziálhányadosa. Ha tehát erre a tétel helyes, akkor $F(u_1 \ldots u_m)$-re is helyes, de *egy* u-nál a tétel még a $\frac{\partial F}{\partial u}$-ra vonatkozó megszorító föltétel nélkül is helyes, és így az $F(u_1, u_2, \ldots, u_m)$-re vonatkozó szabály általánosan érvényes; ugyanis most $F_2(a_1, u_2, \ldots, u_m)$ mindenesetre folytonos lesz az $a_2, \ldots, a_m$ helyen, ha $F_2(u_1, \ldots, u_m)$ folytonos az $(a_1, \ldots, a_m)$ helyen s. ú. t., (hol $a_2, \ldots, a_m$ az $u_2, \ldots, u_m$ függvények értekei az x helyen).

Különben a parcziális differencziálhányadosok folytonosságára vonatkozó föltételek a tétel egyszerűsítése végett túlságosan szűk alakban adattak. Mint a tárgyalásból kiviláglik, a következő föltételek is elégségesek:

Ha $u_1, \ldots, u_m$ *értékei egy bizonyos* x *helyen* $a_1, a_2, \ldots a_m$, *akkor elegendő az összetett függvények differencziálási szabályának alkalmazására, ha*

$$\begin{array}{ll} F_1(a_1, u_2, u_3, \ldots, u_m) & \text{az } (, a_2, \ldots, a_m) \\ F_2(a_1, a_2, u_3, \ldots, u_m) & \text{az } (a_3, \ldots, a_m) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ F_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-2}, a_{m-1}, u_m) \text{ az } a_m & \end{array}$$

helyen folytonos függvények.

E szabály több eddig levezetett eredmény összefoglalását és általánosítását adja; így például ha $y = u^v$, akkor most

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial(u^v)}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial(u^v)}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$
$$= vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v(\text{l}.\, u)\frac{dv}{dx}.$$

79. A levezetett szabálynak oly fogalmazást is adhatunk, melynél az magának az $F(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ többváltozós függvénynek jellemzésére szolgál.

Képletünk érvényes, bárminő módon állapítsuk meg is az $u_1, \ldots, u_m$ függését a hozzálépő x változótól, hacsak az illető helyen ezek x differencziálható függvényei. A parcziális differencziálhányadosokra vonatkozó föltétel pedig tisztán csak az F függvényre vonatkozik. E megjegyzés után irjuk az eredményt ismét szimbolikus alakban:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2}du_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_m}du_m,$$

melynek számjelentése ismét csak akkor lesz, ha minden tagban a dx-et, mint «nevezőt» hozzácsatoljuk. Ezen alakot *az* $F(u_1, \ldots, u_m)$ *teljes differencziáljának* nevezzük; a függvény változásának megközelítő jellemzésére épen úgy használható, mint a megfelelő, egyváltozós függvényre vonatkozó alak (56. cz.).

Ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\frac{du_i}{dx}=\frac{\Delta u_i}{\Delta x}+\eta_i,\quad \frac{dF}{dx}=\frac{\Delta F}{\Delta x}+\varepsilon$$

hol lim. $\eta_i=0$, és lim. $\varepsilon=0$, ha lim. $\Delta x=0$, a levezetett szabály következőkép is irható:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\Delta u_1}{\Delta x}+\frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\Delta u_2}{\Delta x}+\ldots\frac{\partial F}{\partial u_m}\frac{\Delta u_m}{\Delta x}+H,$$

hol

$$H=\eta_1\frac{\partial F}{\partial u_1}+\eta_2\frac{\partial F}{\partial u_2}+\ldots+\eta_m\frac{\partial F}{\partial u_m}-\varepsilon$$

és így lim. $H=0$, ha lim. $\Delta x=0$; vagy végre

$$\Delta F=\frac{\partial F}{\partial u_1}\Delta u_1+\frac{\partial F}{\partial u_2}\Delta u_2+\ldots+\frac{\partial F}{\partial u_m}\Delta u_m+H'$$

hol $H'=H.\,\Delta x$. Ezen alak értelmezése a Δx-től egészen függetlenné tehető.

Minthogy ugyanis $\frac{du_1}{dx},\ldots\frac{du_m}{dx}$ véges meghatározott értékek, $\Delta u_1\ldots\Delta u_m$ első *vagy* magasabbrendű végtelen kicsinyek, ha ezeket a Δx kisebbedésére vonatkoztatjuk. H pedig mindig az elsőnél magasabbrendű végtelen kicsiny lesz, mert

$$\frac{H'}{\Delta x}=H$$

határértéke 0, ha lim. $\Delta x=0$.

E szerint

$$\Delta F-\frac{\partial F}{\partial u_1}\Delta u_1-\ldots-\frac{\partial F}{\partial u_m}\Delta u_m,$$

hacsak az út jellemzésére használt függvények az illető helyen differencziálhatók, *bármi úton változzék is a függvény, elsőnél magasabb rendű végtelen kicsiny lesz,* és ez azon jelentés, melyet a czikk elején fölirt szimbolikus alaknak tulajdonítunk.

80. Ha a független változó complex, a mikor ezt a szükséges részletezés végett

$$z=x+yi$$

alakban irjuk, akkor e complex változó függvénye $f(z)$ az eddigiek értelmében oly complex változót $u+vi$-t jelent, melynek valós és képzetes része x és y által teljesen meg van adva. Azaz u és v mindegyik az x, y valós változók valós függvénye. Ily jelentésben használja Cauchy a complex változó függvényének elnevezését, és világos, hogy ekkor e függvények elmélete azonos egy két valós változótól függő valós függvénypár elméletével.

Könnyen belátható, hogy az ily értelemben vett $f(z)$ csak egész kivételesen lesz a z szerint differencziálható függvény. Így p. legyen $u=x$, $v=-y$, azaz:

$$f(z)=f(x+iy)=x-iy.$$

Ha ekkor a h növekménynek kisebbedő pozitiv értékeket tulajdonítunk, akkor

$$\lim_{h=0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h=0} \frac{x+h-iy-(x-iy)}{h} = 1;$$

ha ellenben a h növekmények helyett az ih növekményeket veszszük, h alatt ismét kisebbedő pozitiv számot értve, akkor $x+iy$-ból lesz $x+iy+ih$, azaz y növekszik h-val, tehát

$$\lim_{h=0} \frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} = \lim. \frac{x-i(y+h)-(x-iy)}{ih} = -1;$$

tehát az $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ határértéke különböző a határátmenet módja szerint, azaz a függvény nem differencziálható.

Hogy $f(z)$ differencziálható legyen, annak szükséges föltételét könnyen fölismerhetjük.

Mint az előbbi példában, vizsgáljuk meg a két esetet, midőn Δz kisebbedése tisztán valós és midőn tisztán képzetes számokon keresztül történik. Az első esetben $\Delta z=h$, a másodikban $\Delta z=ih$, hol lim. $h=0$, és h valós változó.

Az első esetben $x+iy$ változása fölfogható mint csupán az x valós részének változása és a különbségi hányados határértéke: $\frac{\partial f}{\partial x}$; a második esetben az $x+iy$-ból csak az y változik, növekménye h; és így a különbségi hányados

$$\frac{f(x+i(y+h))-f(x+iy)}{ih}$$

és a határérték $-i\frac{\partial f}{\partial y}$. Ha van differencziálhányados, e két értéknek meg kell egyeznie, e szerint *ha $f(z)$ a z helyen differencziálható legyen, akkor mindenesetre:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0; \tag{A}$$

vagy tekintetbe véve, hogy $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, még

$$\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y} = 0.$$

Itt elkülöníthetjük a valós és képzetes részt, a mikor az (A) föltétellel egyenértékű két egyenlethez jutunk:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{B}$$

E föltétel egyszersmind elégséges; azaz ha valamely függvény egy bizonyos tartomány belsejében eleget tesz az (A) vagy (B) föltételnek, akkor e folytonos tartomány minden belső helyen egyszersmind a z differencziálható függvénye. A tételnek e megfordítása azonban csak a CAUCHY-RIEMANN-féle függvénytani elméletek alapján bizonyítható be kielégítő módon és azért e helyen még nem tárgyalható.

A föltételeknek egy harmadik alakja még a következő megondolásból keletkezik. Legyen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = U + iV,$$

tehát:

$$i\frac{\partial f}{\partial y} = -U - iV$$

akkor az f teljes differencziálja a következő alakban irható:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (U+iV)(dx+idy), \tag{C}$$

hol a jobb oldalon álló kifejezés úgy értendő, hogy a szorzat formálisan képezendő, mintha dx és dy számértékek volnának. Hogy df a (C) alakban irható, ismét az (A) és (B) föltételekkel egyenértékű követelés.*

* Arra az esetre, midőn a Δx és Δy növekmények végtelen kisebbedése úgy történik, hogy az x, y összetartó értékek egy bizonyos $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ úton feküsznek, míg $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ a megfelelő t helyen differen-

RIEMANN* szerint valamely $f(z)$-t akkor mondjuk *a z complex változó függvényének,* ha az (A) föltételnek eleget tesz, míg CAUCHY ekkor a z complex változó *monogén* függvényének nevezi; újabban a francziák (BRIOT és BOUQUET) a *holomorph* függvény elnevezését is használják.

Tagadhatatlanul legczélszerűbb, ha e függvényosztály általános tárgyalása induktiv úton történik, a mely úton a függvényeknek előállítása hatványsorok alakjában adja meg a kiinduló pontot. E fölfogás teszi alapját a WEIERSTRASS-tól származó módszereknek, az *analitikai függvények* elméletének. Analitikai függvény — nem ugyan első definicziója alapján, de végeredményben — minden valamely összefüggő complex tartományban differencziálható függvény.

A következőkben az $f(z)$ alatt, ha z complex változó, mindig a z differencziálható függvényét akarjuk érteni, a mi (ha nem is az értelmezés alakja, de az eredményre nezve) RIEMANN terminologiájával megegyezik és a legelterjedtebb elnevezés.

Ki nem fejtett függvények.

81. Ha adva van azon számtani (vagy egyéb) eljárás, mely szerint x-ből a hozzá tartozó y kiszámítható, akkor y az x *kifejtett, explicite adott* (egy vagy többértékű) függvénye.

Ha ellenben az x és y kapcsolatáról csak az ismeretes, hogy

$$F(x, y) = 0,$$

ha x és y helyébe ama függvényvonatkozás szerint összetartozó

---

cziálható függvények, a (C) föltétel mutatja, hogy $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ meghatározott határértékhez közeledik, mert:

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta t=0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta t} : \frac{\Delta z}{\Delta t}\right) = U + iV + \lim_{\Delta t=0} \frac{\varepsilon}{\Delta t},$$

hol az előbbiek szerint $\lim_{\Delta t=0} \frac{\varepsilon}{\Delta t} = 0$. De ez a $\frac{\Delta t}{\Delta x + i\Delta y}$ határértékénél föl-léphető eseteket nem meríti ki; hisz például a Δx és Δy teljesen határozatlan rendű végtelen kicsinyek lehetnek!

* RIEMANN, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Göttingen 1851., és R. összes munkáiban.

értékeket teszünk, akkor ezen alakban y az x *ki nem fejtett, implicite adott függvénye,* mely ismét egy- vagy többértékű lehet. Természetesen amaz egyenlet csak azon (x, y)-okat adja, melyek az F értelmezési tartományába tartoznak.

Ha y az x egyértékű és differencziálható függvénye, melynél $x=a$-nak például megfelel $y=b$, és e függvény az $x=a$ hely környezetében kielégíti az

$$F(x,y)=0$$

egyenletet, akkor e helyen a $\frac{dy}{dx}$ *kiszámítható a*

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

egyenletből, ha $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=a}$ az $y=b$ helyen *az y folytonos függvénye; természetesen föltéve, hogy* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *nem* 0.*

És ekkor:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Ha $\frac{\partial F}{\partial y}$ zérus, de szintén folytonos az $x=a$, $y=b$ helyen, míg $\frac{\partial F}{\partial x}$ e helyen nem 0, akkor y differencziálhányadosa végtelen lesz.

Ha ugyanis az $F(x, y)$-ban y az x oly függvénye, hogy $F(x, y)$ állandóan 0, akkor $\frac{dF(x,y)}{dx}$ is 0, a mi, ha e differencziálhányadost a levezetett szabály szerint részletezzük, megadja az előbb adott szabályt.

Bővebb indokolás nélkül említjük a tétel következő általánosítását. Ha y, z az x két egyértékű függvénye, mely az $x=a$ helyen hol $y=b$, $z=c$ kielégíti az

$$F_1(x,y,z)=0,$$
$$F_2(x,y,z)=0$$

* A mint majd nemsokára látjuk, a rendes függvényalakoknál $\frac{\partial F}{\partial y}$ eltünése azt mutatja, hogy az illető $x=a$ hely a függvénynek kivételes helye, melyen nem differencziálható, vagy melynek környezetében nem tehetjük egyértékűvé.

egyenleteket, akkor az illető helyen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ kiszámítható a

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$$

egyenletekből, ha $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{x=a}$, $\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_{x=a}$ folytonosak a (b, c) helyen és $\left(\frac{\partial F_1(a,y,z)}{\partial y}\right)_{y=b}$, $\left(\frac{\partial F_2(a,y,z)}{\partial y}\right)_{y=b}$ folytonosak a $z=c$ helyen; természetesen föltéve, hogy az illető helyen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}$$

nem zérus.

82. Például a kúpszeletek általános egyenletét tárgyaljuk. Legyen ez:

$$F(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

mely, ha először is a_{22} nem 0, megadja y-t mint az x kétértékű függvényét. Az y kifejtett alakját könnyű kiirni:

$$a_{22}y = -a_{12}x - a_{23} + \sqrt{(a_{12}x+a_{23})^2 - a_{22}(a_{11}x^2+2a_{13}x+a_{33})}.$$

Ha tehát x nem azon két érték egyike, melynél a gyökjel alatt álló kifejezés eltűnik, akkor az x és a hozzá tartozó y megállapitása, valamint azon követelés, hogy a függvény folytonos legyen, megadja az y-t egyértékűleg és tudva már, hogy az y differencziálható függvény:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{12}x+a_{22}y+a_{23}},$$

hol a differencziálhányados kifejezésében nemcsak x, hanem a hozzá tartozó függvényérték is előfordúl.

A nevezőben álló érték, mint az y megoldott alakja mutatja, nem más, mint a gyökkifejezés egyik értéke, tehát csak ott lesz 0, hol az y két értéke összeesik. E helyekhez közeledve a differencziálhányados általánosságban végtelen lesz; kivéve ha egyidőben:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}=a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0,$$

de ekkor, minthogy

$$F(x,y)=\tfrac{1}{2}x\frac{\partial F}{\partial x}+\tfrac{1}{2}y\frac{\partial F}{\partial y}+a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0,$$

egyszersmind

$$\tfrac{1}{2}F_1=a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0,$$

a mi tehát csak akkor történhetik, ha ($a_{21}=a_{12}, a_{31}=a_{13}, a_{32}=a_{23}$)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0;$$

a mikor egyszersmind a gyökjel alatt álló kifejezés:

$$R=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})x^2+2(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})x+a_{23}^2-a_{22}a_{33}$$

teljes négyzet. Ez ugyanis megtörténik, ha

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{12}^2-a_{11}a_{22} & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \\ a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} & a_{23}^2-a_{22}a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}D$$

eltűnik, a mikor $F(x,y)$ két elsőfokú tényező szorzata:

$$a_{22}F(x,y)=\big((a_{12}x+a_{22}y+a_{23}+\sqrt{R}\big)(a_{12}x+a_{22}y+a_{23}-\sqrt{R}\big).$$

E szerint az $F(x,y)$ kúpszelet érintője bármely (x,y) pontban adva van (58. cz.) a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(\eta-y)=0$$

egyenlet által, kivéve oly helyen, hol $\frac{\partial F}{\partial x}$ és $\frac{\partial F}{\partial y}$ eltűnik. De ily hely csak akkor van, ha $\Delta=0$, vagyis ha a kúpszelet egyenespárrá fajul. E helyen akkor F_1 és vele együtt

$$\tfrac{1}{2}x\left(a_{12}\frac{\partial F}{\partial y}-a_{22}\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\tfrac{1}{2}\left(a_{23}\frac{\partial F}{\partial y}-a_{22}F_1\right)=R$$

A binomiális együtthatók alaptulajdonságait már fölsoroltuk az I. rész 172. czikkében (I—III.).

Nem ugyan a most levezetett alakjában, hanem midőn $b=1$, tehát:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots + \binom{n}{n}x^n,$$

e kifejezés, de csak érvényességi körének bizonyos megszorítása mellett, általánositható lesz azon esetekre is, midőn az n kitevő nem pozitiv egész szám, a mikor belőle az ú. n. *binomiális sor* (végtelen sor) keletkezik.

Szorzatok differencziálhányadosai.

87. Az $y=uv$ szorzat magasabb differencziálhányadosainak ismerete sok függvényalaknál megadja a differencziálhányadosok képezésének általános törvényét. A $\frac{d^n}{dx^n}(uv)$ alakjának ismeretéhez leggyorsabban a következő induktiv úton jutunk. Lesz:

$$\begin{aligned}
y' &= u^{(0)}v^{(1)} + u^{(1)}v^{(0)}\\
y'' &= u^{(0)}v^{(2)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(2)}v^{(0)}\\
y''' &= u^{(0)}v^{(3)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + u^{(3)}v^{(0)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

E differencziálhányadosok sora, ha a differencziálást a képletekben zárjelbe tett mutatóval jelöljük, föltünő analogiát mutat az $u+v$ egymásután következő egész hatványaival, ha ezeknek kifejtését is úgy irjuk, hogy u és v mindegyik tagban előforduljon, szükség esetében természetesen 0 kitevővel. Lesz:

$$\begin{aligned}
(u+v)^1 &= u^0v^1 + u^1v^0\\
(u+v)^2 &= u^0v^2 + 2u^1v^1 + u^2v^0\\
(u+v)^3 &= u^0v^3 + 3u^1v^2 + 3u^2v^1 + u^3v^0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Itt t. i. $u+v$ hatványa átmegy az uv illető differencziálhányadosába, ha az u és v kitevőit zárjelbe teszszük, azaz a differencziálás rendjét jelző mutatókká változtatjuk át.

A megfelelő általános képlet volna e szerint:

$$\begin{aligned}\frac{d^n(uv)}{dx^n} &= u^{(0)}v^{(n)}+\binom{n}{1}u^{(1)}v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u^{(2)}v^{(n-2)}+\ldots+ \\ &+\binom{n}{k-1}u^{(k-1)}v^{(n-k+1)}+\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}+\ldots+u^{(n)}v^{(0)},\end{aligned} \tag{7.}$$

melynek általános érvényességét kimutatjuk, ha átviszszük n-ről $n+1$-re. De a két oldalon újból differencziálva és két egymásután következő szorzat differencziálhányadosában mindig a hasonló tagokat egyesítve:

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}(uv)}{dx^{n+1}} &= u^{(0)}v^{(n+1)}+\left(1+\binom{n}{1}\right)u^{(1)}v^{(n)}+\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)u^{(2)}v^{(n-1)}+\ldots \\ &+\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)u^{(k)}v^{(n-k+1)}+\ldots+u^{(n+1)}v^{(0)},\end{aligned}$$

a mi a binomiális együtthatók ismeretes kapcsolatánál fogva, mely szerint:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}.$$

átmegy a (7.) alatt álló képletbe, ha abban n helyett $n+1$-et irunk.

88. Legyen $y=(\text{arcsin.}\, x)$, akkor:

$$\frac{d\,(\text{arcsin.}\, x)}{dx}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}};$$

és

$$\frac{d^{n+1}\,(\text{arcsin.}\, x)}{dx^{n+1}}=\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right);$$

minthogy pedig (l. a (2.) képletet)

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^{-\frac{1}{2}} &= \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\tfrac{1}{2}-k+1\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-k}= \\ &=(-1)^k\,\frac{1.3\ldots(2k-1)}{2^k}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}-k},\end{aligned}$$

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$\begin{aligned}(-1)^{n-k}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\tfrac{1}{2}-n+k+1\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-n+k} &= \\ =\frac{1.3\ldots(2\,(n-k)-1)}{2^{n-k}}\,(1-x)^{-\frac{1}{2}-n+k},\end{aligned}$$

lesz:

$$\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=(-1)^k\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-n}\times$$

$$\times\frac{1.3...(2k-1)}{(2n-1)(2n-3)...(2(n-k)+1)}\binom{n}{k}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k,$$

és e szerint:*

$$\frac{d^{n+1}(\text{arcsin.}\,x)}{dx^{n+1}}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x)^n}\Big[1-\frac{1}{2n-1}\binom{n}{1}\frac{1-x}{1+x}+$$

$$+\frac{1.3}{(2n-1)(2n-3)}\binom{n}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\ldots$$

$$+\frac{1.3.5.}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\binom{n}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\tag{8.}$$

$$\ldots+(-1)^k\frac{1.3\ldots(2k-1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}\binom{n}{k}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k+$$

$$+\ldots+(-1)^n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\Big].$$

89. Ugyane módszer adja az

$$y=(\text{arctg.}\,x)$$

magasabb differencziálhányadosait, ha ismét tekintetbe veszszük, hogy

$$\frac{d(\text{arctg.}\,x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{x+i}\,\frac{1}{x-i};$$

azonban egyszerűbb az eljárás, ha e differencziálhányados következő fölbontását használjuk:

$$\frac{d(\text{arctg.}\,x)}{dx}=\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right).$$

Ekkor közvetetlenül:

$$\frac{d^{n+1}(\text{arctg.}\,x)}{dx^{n+1}}=\frac{i}{2}n!(-1)^n\left(\frac{1}{(x+i)^{n+1}}-\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right)\tag{9.}$$

A jobboldal itt az i előfordulta mellett is valós számérték,

---

* Az $\frac{1.3\ldots(2k-1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}$ tényező elveszti értelmét, ha $k=0$, de a differencziálhányadosok kifejezéséből könnyű látni, hogy ekkor helyébe az egység jő.

mert ha i-t $-i$-vel fölcseréljük, nem változtatja értékét. Ha pedig valamely complex kifejezésben

$$A + Bi = A - Bi,$$

akkor okvetetlenül $B = 0$. A jelzett műveletek végrehajtásánál tehát i magától kiesik. Különben az arctg. x differencziálhányadosainak kifejezése igen átnézetes és könnyebben alkalmazható alakba megy át az

$$u = \frac{\pi}{2} - (\text{arctg.}\, x) = \frac{\pi}{2} - y$$

érték behozása mellett. Ez ugyanis, minthogy (arctg. x) értékének határai $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$, mindig a 0 és π közt fekszik. Ekkor, minthogy

$$x = \text{tg.}\, y,$$

lesz:

$$\cos. u = \sin. y = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sin. u = \cos. y = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

és

$$\cos. u \pm i \sin. u = \frac{x+i}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

E szerint:

$$\frac{d^{n+1}(\text{arctg.}\, x)}{dx^{n+1}} = n!\,(-1)^n \frac{i}{2} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \left(\frac{1}{(\cos. u + i \sin. u)^{n+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(\cos. u - i \sin. u)^{n+1}} \right),$$

és a Moivre-féle képlet alapján

$$\frac{1}{(\cos. u + i \sin. u)^m} - \frac{1}{(\cos. u - i \sin. u)^m} = \cos. mu - i \sin. mu -$$

$$- (\cos. mu + i \sin. mu) = -2i \sin. mu;$$

tehát:

$$\frac{d^{n+1}(\text{arctg.}\, x)}{dx^{n+1}} = n!\,(-1)^n \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin. (n+1) u,$$

vagy minthogy $\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin. u$, végre:

$$\frac{d^{n+1}(\text{arctg.}\, x)}{dx^{n+1}} = n!\,(-1)^n \sin.^{n+1} u \sin. (n+1) u, \qquad (9.a)$$

$$\left(u = \frac{\pi}{2} - (\text{arctg.}\, x)\right)$$

Későbbi alkalmazásai miatt még megjegyezzük, hogy midőn $x=0$, y is zérus és $u=\frac{\pi}{2}$ tehát

$$\left(\frac{d^{2k+1}(\text{arctg.}\,x)}{dx^{2k+1}}\right)_{x=0}=(2k)!\,(-1)^k,\qquad\qquad (10.)$$
$$\left(\frac{d^{2k}(\text{arctg.}\,x)}{dx^{2k}}\right)_{x=0}=0,$$

hol az első képlet indokolására még megjegyezzük, hogy:

$$\sin.\,(2k+1)\frac{\pi}{2}=\sin.\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos.\,k\pi=(-1)^k.$$

90. A bonyolódott alak, melyhez aránylag egyszerű függvények magasabb differencziálhányadosainak kifejtésénél jutunk, néha a differencziálhányadosoknak egy másik, ú. n. *recursiv kiszámítási módját* teszi kivánatossá, melynél minden ily differencziálhányados meghatározását a megelőző alacsonyabbrendű differencziálhányadosokból *algebrai úton* végezzük. Az algebrai út itt lényeges, mert hiszen differencziálási műveletek alapján ily recursiv kiszámítás a magasabbrendű differencziálhányadosok első értelmezéséből foly. Legyen ismét

$$y=(\text{arcsin.}\,x);$$

akkor

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

a mely egyenletekből még

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0.$$

Ha itt a szorzat differencziálására adott képlet segítségével n-szer differencziálunk és az y differencziálhányadosai szerint rendezünk, lesz:

$$(1-x^2)\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}-(2n+1)x\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-n^2\frac{d^ny}{dx^n}=0,$$

vagy végre a kivánt recursiv képlet:

$$\frac{d^{n+2}(\text{arcsin.}\,x)}{dx^{n+2}}=\frac{(2n+1)x\dfrac{d^{n+1}(\text{arcsin.}\,x)}{dx^{n+1}}+n^2\dfrac{d^n(\text{arcsin.}\,x)}{dx^n}}{1-x^2}\qquad (11.)$$

Ismét külön kiirjuk a későbbi alkalmazások miatt e differencziálhányadosok speciális értékeit, ha $x=0$. Lesz:

$$\left(\frac{d^{n+2}(\text{arcsin.}\,x)}{dx^{n+2}}\right)_{x=0} = n^2\left(\frac{d^n(\text{arcsin.}\,x)}{dx^n}\right)_{x=0}$$

és ebből, minthogy az első és második differencziálhányados értéke e helyen 1, illetőleg 0, lesz:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^{2k}(\text{arcsin.}\,x)}{dx^{2k}}\right)_{x=0} &= 0\,,\\ \left(\frac{d^{2k+1}(\text{arcsin.}\,x)}{dx^{2k+1}}\right)_{x=0} &= 1^2.\,3^2\ldots(2k-1)^2.\end{aligned} \tag{12.}$$

Hasonló módon jutunk recursiv képlethez az

$$y = (\text{arctg.}\,x)$$

számára. Ekkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}\,;$$

tehát:

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 1\,;$$

és ismét n-szer differencziálva:

$$(1+x^2)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + 2nx\frac{d^n y}{dx^n} + n(n-1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0,$$

amiből ismét $x=0$ esetében a

$$\left(\frac{d^{n+1}(\text{artg.}\,x)}{dx^{n+1}}\right)_{x=0} + n(n-1)\left(\frac{d^{n-1}(\text{arctg.}\,x)}{dx^{n-1}}\right)_{x=0} = 0$$

képletekhez, és evvel együtt a (10.) alatt álló eredményekhez jutunk.

Az $y = \text{tg.}\,x$ függvény magasabb differencziálhányadosainak recursiv meghatározására az

$$y\cos.\,x = \sin.\,x$$

vonatkozásból indulunk ki. Ismét n-szer differencziálva:

$$y^{(n)}\cos.\,x - \binom{n}{1}y^{(n-1)}\sin.\,x - \binom{n}{2}y^{(n-2)}\cos.\,x + \binom{n}{3}y^{(n-3)}\sin.\,x +$$
$$+\binom{n}{4}y^{(n-4)}\cos.\,x - \ldots = \sin.\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

vagyis: *

$$y^{(n)} = \frac{\sin.\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}{\cos.\, x} + \left(\binom{n}{1} y^{(n-1)} - \binom{n}{3} y^{(n-3)} + \binom{n}{5} y^{(n-5)} - \ldots\right) \mathrm{tg}.\, x +$$

$$+ \binom{n}{2} y^{(n-2)} - \binom{n}{4} y^{(n-4)} + \binom{n}{6} y^{(n-6)} - \ldots \qquad (14.)$$

E differencziálhányadosok értékei az $x=0$ helyen mint *tangencziális együtthatók* az analizis több problemájában szerepelnek. Legyen röviden

$$\tau_n = \left(\frac{d^n\, \mathrm{tg}.\, x}{dx^n}\right)_{x=0};$$

akkor a (14.)-ből

$$\tau_n - \binom{n}{2} \tau_{n-2} + \binom{n}{4} \tau_{n-2} - \ldots = \sin.\, \frac{n\pi}{2}, \qquad (15.)$$

amiből látni, hogy $\tau_{2k}=0$, a páratlan mutatóval ellátott τ-k pedig egész számok. Az elsők ezek közül:

$$\tau_1 = 1,\ \ \tau_3 = 2,\ \ \tau_5 = 16,\ \ \tau_7 = 272, \ldots$$

A független változók fölcserélése.

91. Ha x és t oly változók, melyek bizonyos tartományokon belül kölcsönösen egyértelmű vonatkozásban állanak, úgy hogy az illető tartományokban x a t-nek és t az x-nek egyértékű függvénye, akkor minden az x-től függő y egyszersmind függvénye a t-nek és viszont. Ha most egyszer y t mint az x, egyszer mint a t függvényét tekintjük, akkor a *független változóknak fölcserélése* történik, és evvel kapcsolatban azon föladat keletkezik, hogy az y-nak mint a t függvényének differencziálhányadosaiból az y-nak mint az x függvényének differencziálhányadosait meghatározzuk; föltéve természetesen, hogy e differencziálások lehetségesek, és hogy x és t az inverz függvények elve által követelt kapcsolatban állanak.

* A képletben előforduló sorozatok addig folytatandók, míg az $\binom{n}{k} y^{(n-k)}$ tagban k nem nagyobb az n-nél; a mi különben a képletben is kifejezést talál az által, hogy egyrészt ekkor $\binom{n}{k} = 0$, másrészt ez esetben $y^{(n-k)}$ többé nincs értelmezve.

Minthogy y a t-nek közvetve adott függvénye, mindenesetre:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt},$$

és így

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},$$

a mi a probléma megoldása az első differencziálhányadosra nézve. Megjegyzendő, hogy a $\frac{dy}{dx}$, *szimbolikus* alaknak tekintve, azt az eredményt már ki is fejezi; ha ugyanis t a független változó, $\frac{dy}{dx}$-nek nincs jelentése; hanem csak rövidítés, melynél a dt-t mint «osztót», a számlálóban és nevezőben kihagytuk. Most már a közvetett differencziálás segítségével a magasabb differencziálhányadosokat is kiszámítjuk. Lesz:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\,\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\,\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3},$$

ha ugyanis előbb $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$-ek képezzük és ezt $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$-vel szorozzuk.

E képletet ismét rövid, szimbolikus alakban irhatjuk, ha ugyanis számlálóban, nevezőben mindenütt a dt^3-at kihagyjuk:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}.$$

A képlet alkatára nézve jó megjegyezni, hogy úgy is értelmezhető, hogy a d betű a t szerint szerint képezendő differencziálhányados jele. Ha így tovább megyünk, lesz még, mindjárt a rövidebb szimbolikus alakban:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(dx)^2\,d^3y-3dx\,d^2x\,d^2y+3dy\,(d^2x)^2-dx\,dy\,d^3x}{dx^5}.$$

Ha $t=x$, e képletek identikusok lesznek, mert

$$\frac{dx}{dx}=1,\quad \frac{d^2x}{dx^2}=0,\ldots$$

Ha $t=y$, akkor e képletek az inverz függvények magasabb differencziálhányadosainak összefüggését adják; így lesz p.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},\ \text{s. u. t.}$$

IV.

A differencziálható függvények alaptulajdonságai.

Az integrálszámítás alaptétele.

92. *Ha az $f(x)$ függvény egy bizonyos x helyen differencziálható és e helyen $|f'(x)|<\delta$, akkor ha $\delta<\delta'$, mindig lehet egy pozitiv ε-ot meghatározni, úgy hogy*

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<\delta',$$

hacsak $|h|\leq\varepsilon$.

Ha ugyanis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ a kisebbedő pozitiv számok végtelen sorozata, melyben $\lim. \varepsilon_n = 0$ és lehetne oly h_n-t meghatározni, hogy

$$\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right|\geq\delta',$$

ámbár $|h_n|<\varepsilon_n$, az n minden elég nagy pozitiv egész értékénél, akkor egyszersmind volna:

$$\lim.\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right|\geq\delta',$$

azaz $|f'(x)|\geq\delta'$, a mi a föltevéssel ellenkezik.

A levezetett eredmény előkészítésül szolgál egy oly tételre, melynek az összes e szakaszban foglalt további tárgyalások elvileg csak alkalmazásai. E tétel a következő:

Ha az ab úton (az a és b beleértésével) azaz minden x-re, mely

$$x=a+\vartheta(b-a) \qquad (0\leq\vartheta\leq1)$$

alakban irható,

$$|f'(x)|<\delta,$$

akkor, ha csak δ' a δ-nál nagyobb pozitiv szám,

$$|f(x)-f(a)|<\delta'|x-a|.$$

Minthogy $|f'(a)|<\delta$, lehet a megelőzők értelmében egy ε-t meghatározni, úgy hogy

$$|f(a+h)-f(a)|<\delta'|h|$$

ha $|h|\leqq\varepsilon$, azaz ha $a+h=x'$ tétetik

$$|f(x')-f(a)|<\delta'|x'-a| \tag{1.}$$

midőn $|x'-a|\leqq\varepsilon$.

A tétel tehát helyes az ax' számközben, hol $x'=a+\vartheta'(b-a)$. Ha $\vartheta'\geqq 1$, a tétel be van bizonyítva; ha $\vartheta'<1$, akkor az x' helyen ismét $f'(x')<\delta$, és így

$$|f(x'')-f(x')|<\delta'|x''-x'|,$$

ha

$$|x''-x'|<\varepsilon_1,$$

vagyis az $x'\,b$ számköz helyeire szorítkozva, ha

$$(\vartheta-\vartheta')|b-a|\leqq\varepsilon_1,\quad \vartheta\leqq\vartheta'+\frac{\varepsilon_1}{b-a}=\vartheta''.$$

Ha most összeállítjuk az

$$|f(x')-f(a)|<\delta'|x'-a|,$$

$$|f(x'')-f(x')|<\delta'|x''-x'|$$

egyenlőtlenségeket, ezekből annál inkább

$$|f(x'')-f(a)|<\delta'|x''-a|;$$

mert az $x''-x'$ és $x'-a$ számokban az argumentum ugyanaz és így $|x''-x'|+|x'-a|=|x''-a|$; azaz a tétel helyes az ax'' számközben, hol $x''=a+\vartheta''(b-a)$. Ha $\vartheta''\geqq 1$, a tétel be van bizonyítva: ha $\vartheta''<1$, ismét áttérhetünk egy $x'''=a+\vartheta'''(b-a)$ helyre és bebizonyítjuk az előbbiek ismétlésével, hogy a tétel az ax''' számközben is helyes. Igy lépésenként tágítva a számközt, melyben a tétel érvényes, vagy elérjük végre a lépések kellő számu ismétlése által a b-t, vagy — a mi szintén lehetséges — a számköz e folytonos tágításánál soha sem jutunk b-ig. Az egymásután következő

$$x^{(n)}=a+\vartheta^{(n)}(b-a)$$

számokban a $\vartheta',\vartheta'',\ldots,\vartheta^{(n)},\ldots$ növekedő pozitiv számok sorozata, melyek mindig az 1-nél kisebbek maradnak. De ezen esetben van meghatározott határértékük:

$$\lim.\,\vartheta^{(n)} = \vartheta_1, \quad \lim.\,x^{(n)} = a + \vartheta_1(b-a) = x_1.$$

Tételünk akkor az ax_1 számközben is érvényes, hol $x_1 = a + \vartheta_1(b-a)$. Ha ugyanis ezen állítás ellenére volna

$$|f(x_1) - f(a)| \geq \delta' |x_1 - a|,$$

daczára annak, hogy egy az x_1-hez tetszőlegesen közel fekvő $x^{(n)}$-re nézve

$$|f(x^{(n)}) - f(a)| < \delta' |x^{(n)} - a|,$$

akkor mindenesetre ebből következnék, hogy

$$|f(x_1) - f(a)| - |f(x^{(n)}) - f(a)| > \delta' (|x_1 - a| - |x^{(n)} - a|),$$

és ebből minthogy ismét $x_1 - a$ és $x^{(n)} - a$ argumentuma ugyanaz, még inkább:

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x^{(n)})}{x_1 - x^{(n)}} \right| > \delta'.$$

De ez lehetetlen; mert $f'(x_1) < \delta$ és $x^{(n)}$ az x_1-hez tetszőleges közel fekvő számérték.

A tétel e szerint az ax_1 számközre helyes; és eredeti fogalmazásában is be van bizonyítva, ha $\lim.\,\vartheta^{(n)} = 1$. (Nagyobb mint egy nem lehet, mert különben már a $\vartheta_1 \ldots \vartheta_n \ldots$ sorozatban volna az 1-nél nagyobb szám és már előbb végeztünk volna.)

A tételt ezután megint tágíthatjuk egy x_1 után fekvő számig; de e meggondolásokat nem szükséges tovább részletezni.

A tétel mindenesetre helyes a számköz egy bizonyos részében, de elvesztheti esetleg még érvényét bizonyos a b-hez közelebb fekvő számokra nézve. Akkor igen gyakran használt eljárás értelmében volna az ab számközben egy c hely, úgy hogy a tétel helyes a számköz ac részében, de elvesztené érvényét egy c után következő, de ehhez tetszőlegesen közel fekvő helyen. Ez azonban nem lehetséges, mert a mint láttuk, ha a tétel c-ig helyes, akkor helyes minden számig, mely a c egy bizonyos környezetében fekszik. Ily c tehát az ab számközben nincsen és tételünk végre az egész ab számközre is érvényes.

93. E tételnek közvetetlen folyománya most már a következő: *Ha az ab úton (az a és b beleértésével), azaz minden x-re, mely $x = a + \vartheta(b-a)$ alakban irható, hol $0 \leq \vartheta \leq 1$, az $f(x)$ differencziálhányadosa eltünik, akkor ugyanezen úton $f(x)$ mindig egyenlő $f(a)$-val, azaz állandó.*

Mert ekkor $|f'(x)| < \delta$, bármily kis pozitiv szám is δ és a δ', mely csak δ-nál nagyobb tartozik lenni, szintén bármily kis pozitiv szám lehet. Ha most már

$$|f(x) - f(a)| = K,$$

hol K nem 0 és δ'-t például $\frac{K}{|x-a|}$-nak veszszük, akkor tételünk értelmében

$$K = |f(x) - f(a)| < \frac{K}{|x-a|}|x-a| < K,$$

a mi lehetetlen; tehát kell, hogy $K = 0$, azaz $f(x) = f(a)$ legyen.

Igen gyakran használjuk még a tétel következő alakját.

Ha az $f(x)$ függvény differencziálhányadosa valamely összefüggő tartomány minden helyén zérus, akkor a függvénynek e tartományban mindenütt állandó értéke van.

Ha ugyanis a és b e tartomány két tetszőleges helye, akkor lehet egy $ac_1c_2 \ldots c_m b$ útat kijelölni úgy, hogy az ac_1, $c_1c_2, \ldots c_m b$ számközök minden helye a tartományba tartozzék. De e helyeken $f'(x)$ mindenütt 0; tehát $f(a) = f(c_1) = f(c_2) = \ldots = f(c_m) = f(b)$; azaz a függvénynek értéke a tetszésünk szerint kiválasztott a és b helyeken ugyanaz.

Ezen utolsó fogalmazásban a tétel megforditása a differencziálszámitás ama legegyszerűbb állitásának, hogy ha valamely függvény egy folytonos tartományban állandó értékű, differencziálhányadosa e tartomány helyein egyenlő zérussal. Ama megforditásnál a «folytonos» jelzőt fölcserélhettük az általánosabb «összefüggő»-vel, mert amaz állitás, hogy van a függvénynek differencziálhányadosa, biztositja ott egyszersmind folytonosságát, míg természetesen abból, hogy a tartomány helyein állandó, a határhelyekre nézve ilynemű következtetést nem vonhatunk.

Adva lévén bizonyos tartományban valamely (egy- vagy többértékű) függvény, az integrálszámitás alapproblemája oly függgvény meghatározását követeli, melynek különböző egyértékű ágai a differenicziálásnál épen az adott függvényt reprodukálják. Adva lévén p. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, az ily értelemben hozzátartozó függvény $y = \arcsin. x$.

A levezetett tétel az integrálszámítás alaptétele, a mennyiben, — a megoldás lehetőségének esetében — megállapítja a lehetséges különböző megoldások számát és összefüggését t. i. ezeket mind további számítás nélkül egy megoldásból megadja.

Ha p. az $f(x)$ függvényhez, melynek értelmezése kiterjed egy bizonyos összefüggő tartományra, találtunk egy $F(x)$ függvényt, úgy hogy e tartomány minden helyén

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

és $F_1(x)$ egy másik függvény, melyre nézve szintén $\frac{dF_1(x)}{dx} = f(x)$, akkor közvetetlenül látni, hogy e két függvény különbségének differencziálhányadosa 0, t. i.

$$\frac{d}{dx}\left(F_1(x) - F(x)\right) = \frac{dF_1}{dx} - \frac{dF}{dx} = 0\,;$$

a miből következik, hogy $F_1(x) - F(x)$ az egész összefüggő tartományban állandó, azaz

$$F_1(x) = F(x) + C.$$

És megfordítva, bárminő értéket tulajdonítsunk a C állandónak, $F(x) + C$ differencziálhányadosa mindig $f(x)$.

Azaz: *Oly függvény, melynek differencziálhányadosa egy bizonyos összefüggő tartományban $f(x)$, ha ilyen egyáltalában létezik, mindig végtelen sok van. Ha egy közülök $F(x)$, akkor $F(x) + C$, hol C tetszőlegesen választható állandó, e függvények összességét ábrázolja.* Egy-egy ily függvényalakban természetesen C megtartja az egyszer mindenkorra választott értéket.

A problémát, ha megoldása lehetséges, megszoríthatjuk ugy, hogy már *csak egy megoldáshoz jussunk*, ha t. i. követeljük, hogy a meghatározandó függvénynek az értelmezési tartomány egy bizonyos a helyén meghatározott A értéke legyen. Erre szükséges, hogy

$$F(a) + C = A$$

legyen, a mi megadja a tetszőleges állandónak tulajdonitandó értéket: $C = A - F(a)$. Ez legtöbbnyire úgy történik, hogy egy helyet,

a-t adunk meg hol a függvény értéke (A) zérus legyen. Ekkor $C = -F(a)$ veendő.

Ha az $f(x)$ több különvált tartományban van megadva és $F(x)$ differencziálhányadosa e különvált tartományok mindegyikében $f(x)$, akkor abból, hogy valamely függvény differencziálhányadosa $f(x)$ csak az következik, hogy egy-egy összefüggő tartományban e függvény $F(x) + C$; de a különvált tartományokban a C állandónak különböző értékei lehetnek. Igy p. ha valamely függvény differencziálhányadosa $-\frac{1}{x^2}$, akkor az $x = 0$ hely nem tartozik az értelmezési tartományba. Ha tehát valós számokkal van dolgunk, a pozitiv és negativ számok két különvált tartományrészt adnak és a függvény lehet pozitiv x-nél $\frac{1}{x} + C_1$, negativ x-nél $\frac{1}{x} + C_2$. Ha ellenben a complex számok körében történik a vizsgálat a keresett függvény $\frac{1}{x} + C$ és C az x minden értékénél ugyanaz, mert a complex számok összessége a 0 kizárása után is folytonos tartományt alkot.

94. A most elemzett problémánál a kérdést rendesen nem az $f(x)$ függvényre, hanem az $f(x)dx$ differencziálra vonatkozólag fogalmazzuk; azaz úgy fejezzük, ki a föladatot, hogy *oly függvény keresendő, melynek differencziálja $f(x)\,dx$.* Ez a dolog lényegére nézve egészen közömbös ugyan; de előnyösebb, mert ekkor a bevezetendő jelzés később általánosabban is használható marad.

Azon függvények összességét, melyeknek differencziálja $f(x)dx$, következőkép jelöljük:

$$\int f(x)\,dx,$$

az $f(x)\,dx$ *határozatlan integrálja*, a mint ezt egy másik, evvel szoros kapcsolatban álló és hasonló módon jelölendő alaktól, a *határozott integrál*tól való megkülönböztetés végett nevezzük.

Az $\int f(x)\,dx$ e megállapítások értelmében végtelen sok értékű függvényt jelent; t. i. ha például $F(x)$ oly függvény, hogy:

$$\frac{dF}{dx} = f(x),$$

akkor:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

azaz a függvény alakjában föllép egy *határozatlan, additiv állandó* melynek bármi érték tulajdonítható.

E függvényt teljesen meghatározzuk, ha megadjuk azon helyet, hol a függvény értéke 0; ezt a függvényt

$$\int_a f(x)\,dx$$

-szel szokás jelölni; ez az előbbiek szerint $F(x) - F(a)$. Meglehet, hogy a függvény a C bizonyos értékénél az értelmezési tartományban soha sem lesz 0. De ebben az esetben is a használt jelzés elégséges; mert ha általánosságban a határozatlan integrál azon értéket akarjuk jelölni, mely az a helyen A, akkor ez

$$\int_a f(x)\,dx + A.$$

Mindezen jelzéseknek természetesen csak ama föltevés mellett van értelmük, hogy egyáltalában létezik egy $F(x)$ függvény, melynek differencziálja $f(x)\,dx$. Hogy a függvények mily osztályánál és mily terjedelemben jogosult e föltevés, azt most még nem vizsgálhatjuk meg és így jelenleg az integrálszámitás részleteivel nem is foglalkozhatunk még. Azonban mint minden megforditott műveletnél, minden az eredeti műveletre vonatkozó szabály, itt a differencziálási szabály, egy-egy integrálási szabályt is ád. Igy a

$$d\,F(x) = f(x)\,dx$$

reláczióból mindig következik, hogy

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

természetesen a változó ugyanazon tartományában, melyben a differencziálási szabály érvényes volt.

Igy p. minthogy $d \sin. x = \cos. x\,d x$ lesz

$$\int \cos. x\,dx = \sin. x + C, \quad \int_{\frac{\pi}{2}} \cos. x\,dx = \sin. x - 1, \quad \int_0 \cos. x\,dx = \sin. x;$$

vagy ép úgy következik a $d\,\mathrm{l}.\,x = \frac{1}{x}\,dx$, $d\mathrm{l}.(-x) = \frac{1}{x}\,dx$ szabályokból:

$$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}.\,x + C, \quad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}.\,(-x) + C,$$

a mely képletek közül az első pozitiv, a másik negativ x-értéknél használandó. A két képletnek összefüggése csak akkor lesz világos, ha a logarithmus értelmezését complex változókra kiterjesztjük; különben már most is az

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \mathrm{l.}\,(x^2)$$

alakban egyesíthetők.

95. A határozatlan integrálok részletes tárgyalását külön fejezetnek fönntartva, itt csak a legegyszerűbb eseteket említjük. *Valamely integrálási szabály igazolható*, ha kimutatjuk, hogy a differencziálásnál helyes eredményt ad:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

helyes, ha

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) = \frac{dF(x)}{dx};$$

mert világos, hogy az integrál értelmezése szerint

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x), \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

míg azonban:

$$\int d\,f(x) = f(x) + C.$$

Igy azután:

$$\int C\,f(x)\,dx = C\int f(x)\,dx, \tag{I.}$$

$$\int (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\,dx = \int u_1\,dx + \int u_2\,dx + \ldots + \int u_n\,dx. \tag{II.}$$

A legegyszerűbb eset az egész függvény integrálása. Az integrál ugyanis ismét egész függvény és a két függvény kapcsolata fönnáll minden x-re nézve. Ha először is a hatvány differencziálási szabályát a következő alakban irjuk:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n, \quad \frac{d}{dx}\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = (x-a)^n$$

akkor ebből:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int (x-a)^n\,dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C, \tag{III.}$$

és ha az egész függvényt mindjárt egy a hely környezetében kifejtett alakjában irjuk:

$$g(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_k(x-a)^k+\ldots+c_n(x-a)^n$$

lesz az (I.) és (II.) alkalmazásával:

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx = C + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \ldots + \\ + \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + \ldots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1};\end{aligned} \qquad \text{(IV.)}$$

ha a tetszőleges állandók összegét, mely ismét csak ilyen, C-vel jelöljük. Az első tagnak megfelelőleg $\int c_0 dx = c_0(x-a)+C_0$-t irtunk, hogy a tagok törvénye meg ne bomoljék, ámbár ezt rövidebben c_0x+C_0'-nak is irhattuk volna; a két alak közt természetesen nincs különbség; mert $C_0' - c_0 a$, a mi C_0-val együtt tetszőleges állandó, C_0' helyébe irható. — A C meg van adva, ha az integrálfüggvény $G(x)$ értékét megadjuk az $x=a$ helyen és ekkor $C=G(a.)$ Igy p.

$$\int(2+4x^3+3x^5-x^6)\,dx = C+2x+x^4+\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{7}x^7.$$

A véges Taylor-sor.

96. Ha az $f(x)$ függvény a z helyen differencziálható, akkor a differencziálhányadosa értelméből közvetetlenül

$$f(z+h)=f(z)+hf'(z)+\eta,$$

hol h-val együtt nemcsak η, de még $\frac{\eta}{h}$ is eltünik; ismerve tehát a függvénynek és első differencziálhányadosának értékét egy bizonyos helyen, e hely környezetében a növesztett függvény kifejezhető megközelítőleg mint a növekmény első fokú egész függvénye, úgy hogy a hiba az elsőnél magasabb rendű végtelen kicsiny, midőn a növekmény végtelen kicsiny.

Ha itt a függvény adott helyét z helyett a-val, a (változó) növesztett értéket pedig $a+h$ helyett x-szel jelöljük, akkor $h=x-a$ és a függvény ép említett tulajdonságát kifejezik az

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\eta,$$

$$\lim_{x=a}\frac{\eta}{x-a}=0$$

egyenletek.

Oly függvényeknél, melyeknek egy adott helyen nemcsak első, hanem második, ..., n-edik differencziálhányadosuk van, e tétel olykép általánosítható, hogy e hely környezetében a függvény kifejezhető megközelítőleg mint a növekmény k-adfokú egész függvénye, úgy hogy midőn a növekmény végtelen kicsiny, a hiba k-adrendűnél magasabb fokú végtelen kicsiny.

A tétel általános fogalmazásához jutunk, ha előbb egész függvényeket vizsgálunk, melyeknél a tétel a 85. czikkben adott kifejtés közvetetlen következménye. Ezek szerint ugyanis

$$g(x) = g(a) + g'(a)\frac{x-a}{1} + g''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + \\ + g^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + \ldots g^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \eta_k, \qquad (1.)$$

hol

$$\eta_k = g^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots + g^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!},$$

és tehát csakugyan nemcsak $\lim\limits_{x=a}\eta = 0$, hanem szintén még

$$\lim_{x=a}\frac{\eta_k}{(x-a)^k} = 0. \qquad (2.)$$

Megjegyezhető, hogy ez nemcsak akkor helyes, midőn $k < n$, a mely esetet a számításnál első sorban szem előtt tartottunk, hanem akkor is ha $k > n$, mert ekkor egyszerűen $g^{(k+1)}(a)$, s ú. t. mind azonosan 0; velük együtt η_k is és így a határértékre vonatkozó állítás most is helyes.

Bebizonyítjuk, hogy az (1.) és (2.)-ben foglalt állítás mindig igaz, bárminő függvény is $f(x)$, hacsak az a helyen k-szor differencziálható, azaz

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a), \ldots, f^{(k)}a$$

véges meghatározott számok. Az η_k a k-adiknál magasabbrendű végtelen kicsiny lesz; de speciális alakja természetesen más lesz, ha az $f(x)$ nem egész függvény.

97. A bebizonyítandó állítás tulajdonképen a tételek végtelen sorát foglalja magában; melyek részletesen kiirva :

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{(x-a)}{1}+\eta_1$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\eta_2,$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\eta_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots+f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}+\eta_k,$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{(x-a)}{1}+\ldots+f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}+$$

$$+f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^{(k+1)}}{(k+1)!}+\eta_{k+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

hol mindenütt

$$\lim_{x=a}.\frac{\eta_k}{(x-a)^k}=0\,;$$

és természetesen föl van tételezve, hogy az előforduló differencziálhányadosak valóban képezhetők. Ezen bármely ismételten differencziálható függvényre alkalmazható soralakot nevezzük *véges Taylor-sornak*, mely az egymásután következő képletekben az első, másod-, ... k-adrendű tagig van kifejtve; míg η_k az illető sor *maradéktagja.*

E képletek sorozatában az első a differencziálhányados értelmének direkt következménye és mint ilyen a megelőző czikk elején már föl lett említve. A TAYLOR-sor általános tárgyalásában tehát elég a k-adik képletet helyesnek föltenni és ebből a $k+1$-edik igazságára következtetni.

A gondolatmenet jobb föltüntetésére azonban a legspeciálisabb esetet, a második képlet levezetését külön tárgyaljuk. Ekkor föl van tételezve, hogy $f(x)$-nek az a helyen van második és így $f'(x)$-nek első differencziálhányadosa. Tehát az első, ekkor érvényes képletet $f'(x)$-re alkalmazva:

$$f'(x)=f'(a)+f''(a)\frac{x-a}{1}+\vartheta_1(x)$$

hol

$$\lim_{x=a}.\frac{\vartheta_1(x)}{x-a}=0.$$

Az $f(x)$-nek az a helyen a föltevés szerint van második differencziálhányadosa, tehát $f'(x)$ ugyane helyen differencziálható és annál inkább folytonos. Ugyane tulajdonsága megvan tehát az

$$f'(z) - f'(a) - f''(a)\frac{z-a}{1} = \vartheta_1(z)$$

alaknak, mely az a helyen eltünik. Ha tehát x-et az a-hoz elég közel veszszük, $\vartheta_1(z)$ absolut értéke egy tetszőlegesen választható pozitiv δ-nál kisebb lesz mindazon számokra nézve, melyeknél

$$|z-a| \leq |x-a|.$$

A $\vartheta_1(z)$ absolut értékeinek e számokra nézve van tehát felső határuk, melyet $\theta_1(x)$-szel jelölünk és könnyű belátni, hogy

$$\lim_{x=a} \frac{\theta_1(x)}{x-a} = 0;$$

mert a fölső határra vonatkozó alaptétel szerint (4. czikk.), midőn p. $x = x_n$, van egy z_n szám, melyre nézve

$$|z_n - a| \leqq |x_n - a|,$$

és

$$|\vartheta_1(z_n)| \leqq \theta_1(x_n) < |\vartheta_1(z_n)| + |x_n - a|^2;$$

továbbá

$$\lim. \left\{\left|\frac{\vartheta_1(z_n)}{z_n-a}\right| \left|\frac{z_n-a}{x_n-a}\right|\right\} \leqq \lim. \frac{\theta_1(x_n)}{|x_n-a|} < \lim. \left\{\left|\frac{\vartheta_1(z_n)}{z_n-a}\right| \left|\frac{z_n-a}{x_n-a}\right| + |x_n-a|\right\}$$

Itt $|z_n - a| \leqq |x_n - a|$, tehát ha $\lim. x_n = a$, egyszersmind $\lim. z_n = a$; minthogy továbbá

$$\lim. \frac{\vartheta_1(z_n)}{z_n - a} = 0,$$

$$\left|\frac{z_n-a}{x_n-a}\right| \leqq 1,$$

a kérdéses érték fölső és alsó határával együtt zérus lesz.

E szerint végre, ha z az xa számközben foglaltatik és E az 1-nél nagyobb, de 1-hez bármily közel fekvő pozitiv szám; lesz:

$$\left|f'(z) - f'(a) - f''(a)\frac{z-a}{1}\right| < E\,\theta_1(x).$$

Az itt előforduló kifejezés nem más, mint

$$f(z) - f(a) - f'(a)\frac{z-a}{1} - f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!}$$

differencziálhányadosa, mely azonkívül, mint közvetetlenül látni, az a helyen zérus lesz. A 92. cziknek alkalmazásával ebből tehát következik, hogy

$$\left| f(x) - f(a) - f'(a)\frac{x-a}{1} - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}\right| < E\,\theta_1(x)\,|x-a|$$

vagy, ha

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \eta_2$$

tétetik,

$$\left|\frac{\eta_2}{(x-a)^2}\right| \leqq E\,\frac{\theta_1(x)}{|x-a|},$$

tehát végre, a mi bebizonyítandó:

$$\lim_{x=a}.\ \frac{\eta_2}{(x-a)^2} = 0.$$

98. Ugyan-e gondolatmenet átvezet általánosságban a k-adik képlettől a $k+1$-edikhez. *Föltevésünk tehát most, hogy minden $f(x)$ függvényre nézve, melynek az a helyen még k-adik differencziálhányadosa is van, lesz:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots + f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + \ldots + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \eta_k,$$

hol

$$\lim_{x=a}.\ \frac{\eta_k}{(x-a)^k} = 0.$$

Ebből pedig bebizonyítandó, hogy, ha az $f(x)$ függvénynek még $k+1$-edik differencziálhányadosa is van az a helyen, épen úgy:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots + f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + \ldots +$$
$$+ f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} + \eta_{k+1},$$

hol:

$$\lim_{x=a}.\ \frac{\eta_{k+1}}{(x-a)^{k+1}} = 0.$$

A bevezetett föltevések mellett a tétel alkalmazható az $f'(x)$ függvényre és így:

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)\frac{x-a}{1} + \ldots + f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots +$$
$$+ f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \vartheta_k(x),$$

hol

$$\lim_{x=a} \frac{\vartheta_k}{(x-a)^k} = 0.$$

Föltevéseink értelmében $f(x)$ az a helyen $k+1$-szer differencziálható, $\vartheta_k(z)$ tehát ugyan e helyen k-szor differencziálható és így mindenesetre folytonos. Ha tehát x-et az a-hoz elég közel veszszük, $\vartheta_k(z)$ absolut értéke egy tetszőlegesen választható pozitiv δ-nál kisebb lesz mindazon számokra nézve, melyeknél:

$$|z-a| \leq |x-a|.$$

A $\vartheta_k(z)$ absolut értékeinek mindezen számokra nézve van tehát fölső határuk, melyet $\Theta_k(x)$-szel jelölünk és pontosan úgy mint előbb látni, hogy

$$\lim_{x=a} \frac{\Theta_k(x)}{(x-a)^k} = 0.$$

E szerint végre, ha z az xa számközben foglaltatik és E az 1-nél nagyobb, de az 1-hez bármily közel fekvő pozitiv szám, lesz:

$$\left| f'(z) - f'(a) - f''(a)\frac{z-a}{1} - \ldots - f^{(i)}(a)\frac{(z-a)^{i-1}}{(i-1)!} - \ldots - f^{(k+1)}(a)\frac{(z-a)^k}{k!} \right| < E\,\Theta_k(x).$$

Az itt előforduló kifejezés nem más, mint

$$f(z) - f(a) - f'(a)\frac{(z-a)}{1} - f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!} - \ldots - f^{(i)}(a)\frac{(z-a)^i}{i!} - \ldots - f^{(k+1)}(a)\frac{(z-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

differencziálhányadosa, mely azonkívül, mint közvetetlenül látni, az a helyen eltünik. A 92. czikknek alkalmazásával ebből tehát ismét következik, hogy

$$\left| f(x) - f(a) - \ldots - f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} - \ldots - f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \right| < E\,\Theta_k(x)|x-a|,$$

vagy ha

$$f(x) = f(a) + \ldots + f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + \ldots + f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)} + \eta_{k+1}$$

tétetik,

$$\frac{\eta_{k+1}}{(x-a)^{k+1}} \leq E\,\frac{\Theta_k(x)}{|x-a|^k}$$

és így végre

$$\lim_{x=a} \frac{\eta_{k+1}}{(x-a)^{k+1}} = 0,$$

a mi bebizonyítandó volt.

99. A véges TAYLOR-sor a függvénytannak fundamentális törvénye, mely szerint tehát *a k minden pozitiv egész számú értékénél*

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots + f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + \ldots + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \eta_k,$$

$$\lim. \frac{\eta_k}{(x-a)^k} = 0, \tag{I.}$$

melyhez más megszorítás nem lép, mint az, hogy a képletben előforduló $f(a), f'(a) \ldots f^{(k)}(a)$ jeleknek számértékük legyen.

A függvénytannak ezen alapvető törvényét még két más alakban is használjuk, mely az (I.)-nek bárcsak lényegtelen módosítása, mégis a tárgy fontossága miatt külön fölemlítendő.

Ha ugyanis

$$\frac{\varepsilon_k (x-a)^k}{k!} = \eta_k, \quad \varepsilon_k = k! \frac{\eta_k}{(x-a)^k}$$

tétetik, akkor

$$\lim_{x=a} \varepsilon_k = 0,$$

és így TAYLOR sora még következőkép is irható:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots + f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + \ldots + \left(f^{(k)}(a) + \varepsilon_k\right)\frac{(x-a)^k}{k!},$$

$$\lim_{x=a} \varepsilon_k = 0. \tag{II.}$$

E kifejtések végre *bármely helyre* vonatkozhatnak, hol a függvény k-szor differencziálható. Ha e fölfogásnak megfelelőleg a tetszőleges a helyébe z-t irunk és x helyébe $z+h$, akkor $x-a$ helyébe h jön és végre a lim. $x=a$-nak megfelel lim. $h=0$, tehát a TAYLOR sorának ezen alakja lesz:

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)\frac{h}{1} + \ldots + f^{(i)}(z)\frac{h^i}{i!} + \ldots + \left(f^{(k)}(z) + \varepsilon_k\right)\frac{h^k}{k!},$$

$$\lim_{h=0} \varepsilon_k = 0. \tag{III.}$$

Az utolsó alakból még fontos határképlet vezethető le.

Ha ezt ugyanis

$$f(z+h)-f(z)-f'(z)\frac{h}{1}-\ldots-f^{(i)}(z)\frac{h^i}{i!}-\ldots-f^{(k-1)}(z)\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}=$$
$$=(f^{(k)}z+\varepsilon_k)\frac{h^k}{k!}$$

alakban irjuk, akkor közvetlenűl látni, hogy:

$$\lim_{h=0}\frac{f(z+h)-f(z)-f'(z)\frac{h}{1}-\ldots-f^{(i)}(z)\frac{h^i}{i!}-\ldots-f^{(k-1)}(z)\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}}{h^k}=\frac{1}{k!}f^{(k)}(z).\quad\text{(IV.)}$$

E képlet még másképp is értelmezhető. Ha $k=1$, akkor

$$f^{(k-1)}(z)\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}=f^{(0)}(z)\frac{h^0}{0!}=f(z),$$

és képletünk átmegy a differencziálhányados közönséges definicziójába. És hasonlókép a (IV.)-ben álló általános alak fölfogható mint a *k-adik differencziálhányadosnak új, de a réginél általánosabb értelmezése.* Míg ugyanis előbb az

$$f^{(k)}(z)=\lim_{h=0}\frac{f^{(k-1)}(z+h)-f^{(k-1)}(z)}{h}$$

képlet alapján a k-adik differencziálhányados képezésénél fölhasználtuk a $k-1$-edik differencziálhányados értékeit nemcsak az illető helyen, hanem ennek környezetében is, addig az új értelmezés csak az eredeti függvénynek használja értékeit és tehát esetleg akkor is használható marad, ha az $f(z)$ a z helyen differencziálható, de e tulajdonságot a z hely bármely kis környezetében sem tartja meg. Ekkor p. a második differencziálhányadosra:

$$\tfrac{1}{2}f''(z)=\lim_{h=0}\frac{f(z+h)-f(z)-f'(z)h}{h^2},$$

s. ú. t. Az általános értelmezés tehát következőkép hangzik: *Ha valamely függvénynek a z helyen van első, második, ..., k—1-edik differencziálhányadosa és*

$$k!\lim_{h=0}\frac{f(z+h)-f(z)-\ldots-f^{(k-1)}(z)\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}}{h^k}$$

véges és meghatározott szám, akkor ezt a függvény k-adik differencziálhányadosának nevezzük.

Ezen értelmezés az előbbit, mint speczialis esetet magában foglalja, mert ha az előbbi értelemben van k-adik differencziálhányados, ez, mint a megelőző fejtegetések mutatják, nem más mint a most is így nevezett érték. Az új értelmezés elfogadása után az eddigi eredményeken nem történik változás; amennyiben ugyanis magasabbrendű differencziálhányadosok kiszámításáról volt szó, ez magától érthető, mert ez épen oly függvényekre vonatkozott, melyeknél már a szűkebb értelmezés is alkalmazható volt. A mi pedig a véges Taylor-sornak elméletét illeti, az a magasabbrendű differencziálhányadosok mostani értelmezésének közvetetlen következménye. Mert ha a (IV.)-ben álló határérték véges és meghatározott és ezt nevezzük $\frac{1}{k!}f^{(k)}(z)$-nek, akkor a III. a (IV.)-ben foglalt állításnak csak más fogalmazása.*

Folytonos differencziálhányadosok.

100. Ha az adott függvény k-adik differencziálhányadosa a z helyen folytonos, azaz $\lim_{z'=z} f^{(k)}(z') = f^{(k)}(z)$, vagy midőn egyes z helyen a k-adik differencziálhányados végtelen lesz, $\lim_{z'=z} f^{(k)}(z')$ szintén végtelen, akkor e differencziálhányados kifejezhető, mint egy két változós függvény határértéke.** Ezen alakot, melyet gyakran lesz alkalmunk használni, legjobban a megelőző tárgyalásokhoz csatoljuk.

* Minthogy ekkor Taylor sora a differencziálhányadosok értelmezésének direkt folyománya, azt lehetne első pillanatra hinni, hogy tárgyalásaink sokkal egyszerübbek volnának, ha ezt a definicziót használtuk volna a bevezetésre. De egy kis meggondolás mutatja, hogy akkor a megelőző fejtegetések ismét elkerülhetetlenek, midőn a magasabb differencziálhányadosok kiszámítására módszert akarunk kifejteni, azaz ki akarjuk mutatni, hogy bizonyos föltételek mellett, midőn t. i. a k-adik differencziálhányados ismét differencziálható, ennek differencziálása adja a $k+1$-edik differencziálhányadost.

** Hogy a z helyen lehet differencziálhányados, a nélkül, hogy

$$\lim_{z'=z} f'(z') = f'(z)$$

annak egyszerű példája az

Ha a megelőző czikk (IV.) képletében $z+h$ és z helyébe z'', illetőleg z'-t irunk, lesz:

$$\lim_{z'-z''=0} \frac{f(z'')-f(z')-f'(z')\frac{z''-z'}{1}-\ldots f^{(i)}(z')\frac{(z''-z')^i}{i!}-\ldots-f^{(k-1)}(z')\frac{(z''-z')^{k-1}}{(k-1)}}{(z''-z')^k} = \frac{1}{k!}f^{(k)}(z'),$$

és továbbá, az $f^{(k)}(z)$ a z helyen folytonos lévén:

$$f^{(k)}(z') = f^{(k)}(z) + \zeta,$$

hol

$$\lim_{z'=z} \zeta = 0.$$

De ha megállapitjuk, hogy

$$\lim.\ z' = z,\ \lim.\ z'' = z,$$

akkor evvel egyszersmind:

$$\lim.\ (z'' - z') = 0,$$

és így

$$\lim_{z''=z,\, z'=z} \frac{f(z'')-f(z')-f'(z')\frac{z''-z'}{1}-\ldots-f^{(i)}(z')\frac{(z''-z')^i}{i!}-\ldots-f^{(k-1)}(z')\frac{(z''-z')^{k-1}}{(k-1)!}}{(z'-z')^k} = \frac{1}{k!}f^{(k)}(z) \tag{A}$$

Kiemeljük e képlet két legegyszerűbb esetét, midőn $k=1$ vagy 2, a mikor:

$$\lim_{z'=z,\, z''=z} \frac{f(z'')-f(z')}{z''-z'} = f'(z), \tag{1.}$$

$$\lim_{z'=z,\, z''=z} \frac{f(z'')-f(z')-f'(z')(z''-z')}{(z''-z')^2} = \tfrac{1}{2}f''(z), \tag{2.}$$

föltéve, hogy $f'(z)$, illetőleg $f''(z)$ a z helyen folytonosak.

$$f(x) = x^2 \sin. \frac{1}{x}.$$

Ennek differencziálhányadosa a 0 helyen $f'(0) = \lim_{h=0} h \sin. \frac{1}{h} = 0$; míg minden más helyen

$$f'(x) = 2x \sin. \frac{1}{x} - \cos. \frac{1}{x}$$

és így $\lim_{x=0} f'(x)$ nem lesz $f'(0)=0$, hanem teljesen határozatlan.

Határozatlan alakok.

101. A véges Taylor-sor egyik legegyszerűbb alkalmazása az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *függvény határértékének kiszámítása egy oly a helyen, hol $f(a)$ és $\varphi(a)$ eltűnik, tehát a helyettesítés a $\frac{0}{0}$ határozatlan alakhoz vezet.* (L. a 413. oldalt.) Föltéve, hogy a függvénynek az a helyen nincs megszüntethető megszakadása, e határérték egyszersmind az $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ értéke az a helyen.

Ekkor, minthogy épen $f(a)$ és $\varphi(a)$ mindkettő zérus, lesz:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \lim_{x=a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}$$

Ha tehát $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, $\lim\limits_{x=a} \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} = \varphi'(a)$

és $\varphi'(a)$ a 0-tól különböző érték, akkor:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Ugyanezen képlet kifejezi az eredményt, midőn $f'(a)$ a 0-tól különböző érték, de $\varphi'(a)=0$, ha ugyanis ekkor $\frac{f'(a)}{0}$ alatt ∞-t értünk. Így lesz például, mint már előbbről ismeretes:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin. x}{x} = \left(\frac{\cos. x}{1}\right)_{x=0} = 1,$$

vagy pedig

$$\lim_{x=1} \frac{x^2+3x-4}{2x^2+5x-7} = \left(\frac{2x+3}{4x+5}\right)_{x=1} = \frac{5}{9}.$$

E szabály többé nem alkalmazható, ha $f'(a)$ és $\varphi'(a)$ mindketten eltűnnek.

Hogy a szabálynak mindjárt legáltalánosabb alakját adjuk, tegyük föl, hogy az $f(x)$, $\varphi(x)$ függvénypárnak $f(a)$, $\varphi(a)$-val együtt még első, második, ... $k-1$-edik differencziálhányadosai az a helyen eltűnnek, ellenben $f^{(k)}(a)$, $\varphi^{(k)}(a)$ meghatározott számértékek ugyan, de nem mindketten 0-sal egyenlők. Akkor

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)\frac{x-a}{1}-\ldots-f^{(k-1)}(a)\frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}}{\varphi(x)-\varphi(a)-\varphi'(a)\frac{x-a}{1}-\ldots-\varphi^{(k-1)}(a)\frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}} =$$

vagy még a lim. jel alatt számlálóban és nevezőben $(x-a)^k$-val osztva és külön-külön áttérve a határra:

$$= \frac{\frac{1}{k!} f^{(k)}(a)}{\frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(a)} = \frac{f^{(k)}(a)}{\varphi^{(k)}(a)}$$

azaz a k-adik differencziálhányadosok hányadosa, a mi akkor is helyes marad, ha $f^{(k)}(a)$ a 0-tól különböző, de $\varphi^{(k)}(a)=0$, ha ismét $\frac{f^{(k)}(a)}{0}$ alatt ∞-t értünk.

Ha e differencziálások sorában többé nem differencziálható alakhoz jutunk, akkor az egész következtetés megakad, és szabályunk többé nem alkalmazható.

A szabály képletben következőkép fogalmazható:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x=a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \ldots = \lim_{x=a} \frac{f^{(k)}(x)}{\varphi^{(k)}(x)}$$

ha az a helyen az $f(a)$, $\varphi(a)$; $f'(a)$, $\varphi'(a)$, $\ldots$, $f^{(k-1)}(a)$, $\varphi^{(k-1)}(a)$; $f^{(k)}(a)$, $\varphi^{(k)}(a)$ *értékpárok az utolsó kivételével mind 0-ok; az utolsóban pedig legalább egy a 0-tól különböző, a másik pedig véges meghatározott szám.* Így p.

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg.} x - x}{\operatorname{tg.} 2x - 2x} = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{2\left(\frac{1}{\cos^2 2x} - 1\right)} = \lim_{x=0} \frac{\frac{2 \sin. x}{\cos^3 x}}{\frac{4 \sin. 2x}{\cos^3 2x}} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{\frac{2(3-2\cos^2 x)}{\cos^4 x}}{\frac{8(3-2\cos^2 2x)}{\cos^4 2x}} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{x=0} \left(\frac{\sin. x - x}{x^4}\right) = \lim_{x=0} \frac{\cos. x - 1}{4x^3} = \lim_{x=0} \frac{-\sin. x}{12x^2} = \lim_{x=0} \frac{-\cos. x}{24x} = \infty,$$

$$\lim_{z=-1} \frac{\operatorname{l.}(z+2)}{z+1} = \lim_{z=-1} \frac{\frac{1}{z+2}}{1} = 1.$$

102. Midőn valamely függvény analitikai alakja egy bizonyos helyen használhatatlan lesz, ez nem történik szükségképen úgy, hogy a helyettesités ott a $\frac{0}{0}$ határozatlan alakhoz vezet; a határérték kiszámítása azonban gyakran visszavezethető az előbb adott szabályra.

Így p. ha $f(a)$ és $\varphi(a)$ zérus, akkor az $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}$ függvénynél az a helyettesítése az $\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$ határozatlan alakhoz vezet; a határérték e helyen azonban:

$$\lim_{x=a} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}\right) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x) - f(x)}{\varphi(x)\, f(x)}$$

és ezen átalakítás után ismét a $\frac{0}{0}$ jellemezte alakkal van dolgunk.

Például

$$\lim_{x=2} \left(\frac{1}{x^2 + 3x - 10} - \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x=2} \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x-2)(x^2 + 3x - 10)} =$$

$$= \lim_{x=2} \frac{-2x - 2}{x^2 + 3x - 10 + (x-2)(2x+3)} = \infty;$$

$$\lim_{x=2} \left(\frac{7}{x^2 + 3x - 10} - \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x=2} \frac{-x^2 + 4x - 4}{(x-2)(x^2 + 3x + 10)} =$$

$$= \lim_{x=2} \frac{-2x + 4}{x^2 + 3x - 10 + (x-2)(2x+3)} = \lim_{x=2} \frac{-2}{6x+2} = -\frac{1}{7}.$$

Ha az a helyen $f(x)$ zérus és $\varphi(x)$ végtelen lesz, akkor $f(x)\varphi(x)$ az a helyen a $0 . \infty$ határozatlan alakot adja, melyet $f(x) : \frac{1}{\varphi(x)}$-nek irhatunk és így szintén visszavezetjük a $\frac{0}{0}$-ra. Például:

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{l.}\frac{\pi}{2x}\,\mathrm{tg.}\,x\right) = \lim_{x=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathrm{l.}\frac{\pi}{2x}}{\mathrm{cot.}\,x}\right) = \lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin.^2 x}} = \frac{2}{\pi}.$$

Ha az $(f(x))^{\varphi(x)}$ függvény az a helyen a 0^∞ határozatlan alakhoz vezet, akkor:

$$\lim_{x=a} \left(f(x)^{\varphi(x)}\right) = \lim_{x=a} e^{\varphi(x)\,\mathrm{l.}\,f(x)} = e^{\lim\limits_{x=a} \varphi(x)\,\mathrm{l.}\,f(x)};$$

és az új határérték az épen előbb jellemzett osztályba tartozik.

Igy például:

$$\lim_{x=0}\left((1+x+2x^2)^{\frac{1}{2x+x^2}}\right)=e^{\lim\limits_{x=0}\frac{\mathrm{l.}\,(1+x+2x^2)}{2x+x^2}}=e^{\frac{1}{2}},$$

mert:

$$\lim_{x=0}\frac{\mathrm{l.}\,(1+x+2x^2)}{2x+x^2}=\lim_{x=0}\frac{\frac{1+4x}{1+x+2x^2}}{2+2x}=\tfrac{1}{2};$$

vagy:

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}}\left(\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\mathrm{tg.}\,x}\right)=e^{\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg.}\,x.\,\mathrm{l.}\frac{\pi}{2x}\right)}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

E szabályok segítségével újra meghatározhatjuk a 27., 28. és 30-ik czikkben kiszámított határértékeket. (I—IX.). A határértékek e megállapítása nem tekintendő új bebizonyításnak, mert hiszen a most fölhasznált differencziálási szabályokat viszont ama határértékek szolgáltatták; mindamellett e megjegyzésnek van gyakorlati haszna; a differencziálási szabályok ismerete után t. i. ama határértékek igen rövid, fejben végezhető számítás után rögtön fölírhatók, például:

$$\lim_{x=0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x=0}\frac{a^x\,(\mathrm{l.}\,a)}{1}=\mathrm{l.}\,a,$$

$$\lim_{z=0}\frac{(1+z)^\mu-1}{z}=\lim_{z=0}\frac{\mu\,(1+z)^{\mu-1}}{1}=\mu.$$

A levezetett szabályok természetesen mindenkor csak ama föltevés mellett helyesek, hogy azon helyen, hol $f(x)$ és $\varphi(x)$ egyszerre eltünnek, mindkét függvénynek véges és meghatározott $1, 2, \ldots, k$-adik differencziálhányadosa van, mindaddig míg egy bizonyos k-nál $f^{(k)}(a)$ és $\varphi^{(k)}(a)$ nem mindkettő zérus.*

---

* Sok kézikönyv kiterjeszti a $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x=a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ szabályt arra az esetre is, midőn $\lim\limits_{x=a} f(x)=\infty$, és $\lim\limits_{x=a}\varphi(x)=\infty$, valamint akkor is érvényesnek állítja, midőn $a=\infty$. Ez általánosságban nem igaz; hanem csak akkor, ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ *valós változóknak* bizonyos föltételeknek megfelelő függvényei. E mellett azonban e szabályoknak többé nincs gyakor-

A szabály akkor is használhatatlan, ha az $f(x)$ és $\varphi(x)$ függvényeknek minden bármily magasrendű differencziálhányadosa 0. Hogy ily függvények, melyek azért az a környezetében semmikép sem állandók, legalább valós változók körében csakugyan léteznek, azt a következők miatt is czélszerű lesz egy példán megmutatni. Ilyen ugyanis az x valós változó függvénye

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

E függvény analitikai alakja az $x = 0$ helyen nem használható, de tudjuk, hogy

$$\lim_{x=0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0;$$

és így egyszersmind (a megszüntethető megszakadások kizárásával) $f(0) = 0$.

A differencziálhányados

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

a mint ezt a differencziálási szabályok minden helyre, $x=0$ kivételével, igazolják. Hogy ezen képlet az $x=0$ helyen, hol értéke határértékével (31. cz. (XIV.), tehát 0-sal egyenlőnek veendő, szintén a differencziálhányadost adja, külön bebizonyítandó oly módon, hogy $f'(0)$-t direkt uton képezzük. Lesz:

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}},$$

a mi az épen idézett határképlet értelmében csakugyan 0.

---

lati értékük, mert az $f(x)$ és $\varphi(x)$ előleges elemzése ugyanazt a munkát kivánja, mint a határérték direkt meghatározása. Hogy ama szabály csakugyan helytelen, azt igen egyszerű példa is mutathatja. Világos, hogy

$$\lim_{x=\infty} \frac{x + \sin. x}{x} = 1$$

mert hiszen $\sin. x$ mindig -1 és $+1$ közt fekszik. De ha a számlálót és nevezőt külön differencziáljuk, lenne $\lim_{x=\infty} (1 + \cos. x)$, a mi teljesen határozatlan kifejezés.

Az említett tételnél szükséges megszorításokra nézve l. Rouquet, Nouv. Annales de math., 2. S. T. XVI. és Stolz: Math. Annalen. Bd. XV.

Hasonlókép lesz most:

$$f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

a mi a 0 helyen, hol a közönséges differencziálási szabályok nem alkalmazhatók, szintén helyes; mert

$$f''(0) = \lim_{h=0} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h=0} \frac{2}{h^4} e^{-\frac{1}{h^2}} = 0.$$

E következtetések kiterjeszthetők bármely differencziálhányadosra. Könnyen kimutathatjuk ugyanis hogy mindig

$$f^{(k)}(x) = \left(\frac{A^{(k)}_{3k}}{x^{3k}} + \frac{A^{(k)}_{3k-1}}{x^{3k-1}} + \ldots + \frac{A^{(k)}_{k+2}}{x^{k+2}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Az $f'(x)$, $f''(x)$, csakugyan ezen alak alá sorozható, és ha ebből $f^{(k+1)}(x)$-et képezzük, lesz:

$$f^{(k+1)}(x) = \left(\frac{A^{(k)}_{3k}}{x^{3k}} + \ldots + \frac{A^{(k)}_{k+2}}{x^{k+2}}\right) \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} -$$

$$-\left(\frac{3k\,A^{(k)}_{3k}}{x^{3k+1}} + \ldots + \frac{(k+2)\,A^{(k)}_{k+2}}{x^{k+3}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{A^{(k+1)}_{3(k+1)}}{x^{3(k+1)}} + \ldots + \frac{A^{(k+1)}_{(k+1)+2}}{x^{(k+1)+2}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Ismét $f^{(k+1)}(x)$ ezen alakja a 0 helyen is helyes eredményt ád, mert úgy mint előbb látni, hogy $f^{(k+1)}(0) = 0$.

Az $e^{-\frac{1}{x^2}}$ függvénynek tehát minden bármily magasrendű differencziálhányadosa az $x=0$ helyen zérussal egyenlő.

V.

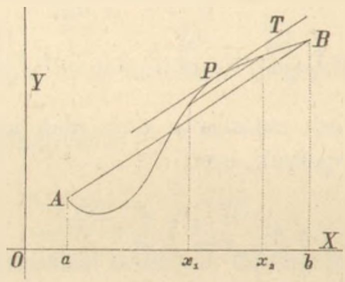
Valós változók valós és differencziálható függvényei és a megfelelő görbék alakjai.

Rolle tétele és a véges Taylor-sor.

103. *Ha az $f(x)$ valós változó valós (és egyértékű) függvénye az ab számközben az a és b helyek beleértésével mindenütt folytonos, és ugyanott $f'(x)$ is mindenütt folytonos, legfölebb egyes z helyek kivételével, hol $f'(z)$ meghatározott előjelű végtelen lesz, de ahol* *ekkor* $\lim_{z'=z} f'(z')$ *szintén meghatározott (ugyanoly előjelű) végtelen, akkor mindig van az ab számközben egy a és b-től különböző* ξ *hely, úgy hogy:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

E tételnek igen egyszerű geometriai jelentése van. Az $y=f(x)$ ekkor egy A és B közt elterülő folytonos görbét jelent, melynél minden abscissának a és b közt a görbének egy és csak egy pontja felel meg, és melynek minden pontjában van meghatározott érintője. E föltételek mellett van A és B között egy P pont, melynek



24. ábra.

érintője párhuzamos az AB egyenessel. T. i. közvetetlenül világos, hogy azon szög tangense, melyet AB az x-tengelylyel képez, nem más mint $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, mely a tétel értelmében egyenlő $f'(\xi)$-szel, azaz az érintő hajlásszögének tangensével.

Ha az ab felezési pontja a_1, azaz $a_1-a=b-a_1$, akkor:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a_1)}{b-a_1}\,\frac{b-a_1}{b-a}+\frac{f(a_1)-f(a)}{a_1-a}\,\frac{a_1-a}{b-a}$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{f(b)-f(a_1)}{b-a_1}+\frac{f(a_1)-f(a)}{a_1-a}\right).$$

Ha röviden

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=M,$$

akkor

$$\frac{f(b)-f(a_1)}{b-a_1}+\frac{f(a_1)-f(a)}{a_1-a}=2M,$$

és igy az

$$\frac{f(b)-f(a_1)}{b-a_1},\quad \frac{f(a_1)-f(a)}{a_1-a}=\frac{f(a)-f(a_1)}{a-a_1}$$

kifejezések vagy mindketten egyenlők M-mel, vagy pedig az egyik kisebb, a másik nagyobb M-nél.

E kifejezések az

$$F(z) = \frac{f(z) - f(a_1)}{z - a_1}$$

függvény értékei az a, illetőleg b helyen. De e függvény az egész ab számközben folytonos, a mi minden helyen az a_1 kivételével a függvény alakjából világos. Az a_1 helyen a függvény analitikai alakja határozatlan: de ha először is $f'(a_1)$ veges és meghatározott szám, van határértéke, t. i.

$$\lim_{z=a_1} \frac{f(z) - f(a_1)}{z - a_1} = f'(a_1),$$

és ha ezt veszszük a függvény értékének az a_1 helyen, a függvény itt is folytonos, mert ekkor épen:

$$\lim_{z=a_1} F(z) = F(a_1).$$

Ha most $F(z)$ az a és b helyen egyszer M-nél kisebb, egyszer M-nél nagyobb értéket vesz föl, van a és b közt egy b_1 hely, úgy hogy

$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = M.$$

(Ha b_1 összeesik a_1-gyel, az utolsó egyenlet baloldala helyébe $f'(a_1)$ jő és a tétel máris be volna bizonyítva.) Ha $F(b)$ és $F(a)$ mindkettő egyenlő M-mel, akkor b_1 helyébe egyszerűen a vagy b tehető.

Ha most végre $f'(a_1)$ meghatározott előjelű végtelen lesz, akkor lehet egy pozitiv és tetszőleges kicsiny δ-t meghatározni, úgy hogy

$$|F(a_1 - \delta)| > P, \quad |F(a_1 + \delta)| > P,$$

hol P tetszőleges nagy pozitiv szám, míg $f'(a_1 - \delta)$ és $f'(a_1 + \delta)$ egyenlő előjelű számok. Ekkor végre az ab számköz egyik határhelyén (a vagy b-ben) a függvény értéke M-nél $\begin{smallmatrix}\text{kisebb,}\\ \text{nagyobb,}\end{smallmatrix}$ míg $a_1 - \delta$ és $a_1 + \delta$-ban $\begin{smallmatrix}+P\text{-nél nagyobb}\\ -P\text{-nél kisebb}\end{smallmatrix}$, hol P tetszőleges pozitiv szám; így tehát a és $a_1 - \delta$, vagy b és $a_1 + \delta$ közt van ismét egy hely, b_1, hol $F(b_1) = M$.

Ha az a_1 és b_1-t nagyságuk szerint rendezve x_1' és x_1''-nek nevezzük, e szerint *van a és b közt két hely x_1' és x_1'', melyekre nézve*

$$a \leqq x_1' < x_1'' \leqq b,$$

és

$$x_1'' - x_1' \leqq \frac{b-a}{2},$$

míg

$$\frac{f(x_1'') - f(x_1')}{x_1'' - x_1'} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = M.$$

Ha ezen első lépésnél nem jutottunk már a kivánt tulajdonságokkal fölruházott helyhez, akkor az előbbiekben elemzett eljárást ismételve, meghatározunk két helyet, x_2'' és x_2'-t úgy hogy

$$x_1' \leqq x_2' < x_2'' \leqq x_1'',$$

$$x_2'' - x_2' < \frac{x_1'' - x_1'}{2} < \frac{b-a}{4}$$

és ismét

$$\frac{f(x_2'') - f(x_2')}{x_2'' - x_2'} = M.$$

Megjegyzendő, hogy e második lépésnél x_2' és x_2'' már az ab belsejében feküsznek, azaz a és b-től különbözők. Ha ugyanis először x_1' és x_1''-nek a_1 és a (vagy b) volt is veendő, az új a_1' már az $a_1 a$ számköznek egy a-tól különböző helyével állítható össze.

Ha közben nem jutunk is a keresett helyhez, ezen eljárás meghatározza az

$$x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots$$

soha nem kisebbedő és

$$x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$$

soha nem nagyobbodó számok sorozatát, melyeknek határértéke egyenlő, minthogy:

$$x_n'' - x_n' < \frac{b-a}{2^n}.$$

E közös határérték:

$$\lim.\, x_n' = \lim.\, x_n'' = \xi$$

nem más mint a keresett hely, a melyre nézve

$$f'(\xi) = M.$$

Minthogy ugyanis $\lim_{x=\xi} f'(x) = f'(\xi)$, akkor is ha $f'(\xi) = \infty$, a 100. cz. fejtegetései értelmében lesz még

$$f'(\xi) = \lim_{x''=\xi,\, x'=\xi} \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'},$$

és így egyszersmind:

$$f'(\xi) = \lim. \frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n}.$$

Minthogy végre pedig az itt a lim. jel alatt álló kifejezés az n minden értékénél M-mel egyenlő, a határérték, vagyis $f'(\xi)$ szintén M. Minthogy pedig $x'_2 < \xi \leqq x''_2$, ξ sem a, sem b-vel nem egyenlő.

A kifejtett tétel egy fontos speciális esetéhez jutunk, midőn $f(a) = f(b)$ és így $f'(\xi) = 0$, s ez az ú. n. Rolle *tétele*:

Ha az $f(x)$ függvény értéke az a és b helyeken ugyanaz, ha e függvény továbbá az ab számközben az a és b helyek beleértésével mindenütt folytonos és ugyanott $f'(x)$ is mindenütt folytonos, legfölebb egyes z helyek kivételével, hol $f'(z)$ meghatározott előjelű végtelen lesz, de ekkor $\lim_{z'=z} f'(z')$ ugyanott szintén meghatározott (ugyanoly) előjelű végtelen, akkor mindig van az ab számközben egy a és b-től különböző ξ hely, hol:

$$f'(\xi) = 0.$$

104. E tétel a véges Taylor-sornak valós függvényekre vonatkozó új levezetését adja, mely a megelőző általános tárgyalástól egészen független és ámbár a függvényre vonatkozólag a szükségesnél szükebb körű megszorításokat hoz be, a maradéktag ekkor föllépő alakja miatt szintén igen fontos és figyelemre méltó.

Föltéve ugyanis, hogy $f(z)$-nek az a helyen van első,..., k-adik, $k+1$-edik differencziálhányadosa és hogy ezen utolsó differencziálhányados $f^{(k+1)}(z)$ az ax számközben (a és x beleértésével) folytonos, $f(x)$ kifejezhető az ú. n. véges Taylor-sor alakjában:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots + f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} +$$

$$\ldots + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + f^{(k+1)}\big(a + \vartheta(x-a)\big)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

hol $0 \leqq \vartheta \leqq 1$.

(A most bevezetett speciális föltevésekből tehát a *maradéktagnak*

$$\eta_k = f^{(k+1)}\big(a + \vartheta(x-a)\big)\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

alakja következik.)

Ha x alatt meghatározott számot értünk, mindenesetre

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots + f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!} + \ldots$$

$$\ldots + f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + P\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

tehető, ha P ugyanis az ép ezen (reá nézve elsőfokú) egyenletből vett érték. De ekkor

$$\Phi(z) = f(z) - f(a) - f'(a)\frac{z-a}{1} - \ldots - f^{(i)}(a)\frac{(z-a)^i}{i!} - \ldots$$

$$\ldots - f^{(k)}(a)\frac{(z-a)^k}{k!} - P\frac{(z-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

0 lesz a $z = a$, és $z = x$ helyen, az első helyen azonosan, a másodikon a P kellően meghatározott értéke miatt. E függvény azonkívül differencziálhányadosával együtt folytonos az x-számköz minden helyén, és így Rolle tétele szerint van egy (a és x-től különböző)

$$\xi_1 = a + \vartheta_1(x-a)\ ,\ (0 < \vartheta_1 < 1)$$

hely, hol e függvény differencziálhányadosa eltűnik. E differencziálhányados azonban egyszerűen

$$\Phi'(z) = f'(z) - f'(a) - \ldots - f^{(i)}(a)\frac{(z-a)^{i-1}}{(i-1)!} -$$

$$\ldots f^{(k)}(a)\frac{(z-a)^{k-1}}{(k-1)!} - P\frac{(z-a)^k}{k!}$$

és így $\Phi'(z)$ ismét 0 az a és ξ_1 helyeken. De $\Phi''(z)$ folytonos az $a\ \xi_1$

$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} \ldots f^{k+1}(a+\eta_{k+1})\frac{(x-a)}{(k+1)!}$

számközben, mely hiszen az ax-nek része, és így van ismét egy (a és ξ_1-től különböző)

$$\xi_2 = a + \vartheta_2(x-a) \ , \ (0 < \vartheta_2 < \vartheta_1 < 1)$$

hely, hol $\Phi''(z)$ eltűnik. Azonkívül $\Phi''(z)$ még 0 megint a 0 helyen; és így van ismét egy ξ_3 szám, melyre nézve $\Phi'''(z)$ egyenlő 0-sal. Ezt az eljárást újból és újból ismételve, végre van egy ξ hely, mely az ax számközben fekszik, de a-tól és x-től különböző, hol

$$\Phi^{(k+1)}(z) = f^{(k+1)}(z) - P$$

eltűnik, azaz

$$P = f^{(k+1)}(\xi) = f^{(k+1)}(a + \vartheta(x-a)) \ , \ (0 < \vartheta < 1);$$

a maradéktagnak most választott alakja pedig

$$\eta_k = P \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

lévén, ez nem más, mint az előzetesen fogalmazott tétel.

Nem fölösleges kiemelni, hogy a ϑ-ról tudjuk ugyan, hogy az x minden számba jövő értékénél 0 és 1 közt fekszik, de azért természetesen nem állandó, hanem x-nek függvénye.

Függvények növekedése és fogyása. Szélső értékek.

105. A valós x változó egyértékű és valós függvénye, $f(x)$ az a helyen *növekszik*, ha az a egy bizonyos környezetében $f(x)$ a szerint nagyobb vagy kisebb $f(a)$-nál, a mint x nagyobb vagy kisebb a-nál.

Az $f(x)$ függvény az a helyen *fogy*, ha az a egy bizonyos környezetében $f(x)$ a szerint nagyobb vagy kisebb $f(a)$-nál, a mint x megfordítva kisebb vagy nagyobb az a-nál.

Rövidebben kifejezve: az $f(x)$ az a helyen növekszik, illetőleg fogy, ha minden az a egy bizonyos környezetében fekvő x-re nézve $f(x) - f(a)$ és $x - a$ egyenlő, illetőleg ellenkező előjelűek, vagy pedig, a mint az

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

különbségi hányados mindig pozitiv, illetőleg mindig negativ.

$\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x)+\eta$ $\lim\limits_{x=a} \eta = 0$

$f(x) = f(a) + \{f'(a)+\eta\}(x-a)$

Az $f(x)$ függvénynek az a helyen *szélső értéke* van, ha az a egy bizonyos környezetében $f(x)$ mindig nagyobb, illetőleg mindig kisebb, mint $f(a)$. Az első esetben a függvény értéke az a helyen *minimum*, a második esetben *maximum*. (Legkisebb, legnagyobb érték, t. i. az illető környezetben.)

E megállapítások értelme azon görbénél, mely az $y = f(x)$ függvény menetét ábrázolja, szintén egészen egyszerű.

Ha az $f(x)$ függvény az a helyen növekszik, illetőleg fogy, az $y = f(x)$ ábrázolta görbe a megfelelő helyen az $(a, f(a))$ pontban *emelkedik*, illetőleg *leszáll*, t. i. ha a pontokat a növekedő abscissák irányában gondoljuk befutva, a pont helyének e változása közben az ordináták (a magasságok) nagyobbodnak, illetőleg kisebbednek.

Ha az $f(x)$ függvénynek az a helyen szélső értéke van, az $y = f(x)$ ábrázolta görbénél a megfelelő hely — az $(a, f(a))$ pont — *tetőpont* (kulmináczió pontja), még pedig *fölső* vagy *alsó tetőpont*, amint ama szélső érték maximum vagy minimum. Ekkor ugyanis akár a növekedő, akár a kisebbedő abscissák irányában menjünk tovább, az ordináták (magasságok) az első esetben egy darabig folyton kisebbednek, a második esetben pedig folyton nagyobbodnak.

A függvény magatartása egy bizonyos helyen nem sorozható szükségképen a most jellemzett esetek egyike alá; akkor sem, ha az $f(x)$ az illető helyen folytonos. Így p. az $y = x \sin. \frac{1}{x}$ az $x = 0$ helyen maga is 0 és folytonos; de a 0 hely tetszőleges közelében lehet úgy pozitiv mint negativ értékeket találni, a melyeknél a függvénynek különböző előjelű értékei vannak. A 0 helyen e függvény nem növekszik, se nem fogy; valamint szélső értéke sincs. E függvénynek a 0 hely bármily kis környezetében végtelen sok szélső értéke van, a mi az előbb fölsorolt legegyszerűbb viszonyoktól lényegesen eltérő eset.

A legegyszerűbb eset, hol a függvény az a egy bizonyos környezetében állandó, mintegy átmenet a fogyás és növekedés között; az ábrázoló görbének egy bizonyos darabja az $(a, f(a))$ pont körül az X-tengelylyel párhuzamos egyenes.

106. *Ha az $f(x)$ függvénynek differencziálhányadosa az a helyen, $f'(a)$ pozitiv, illetőleg negativ, akkor az $f(x)$ az a helyen növekszik, illetőleg fogy.*

$f(x) = f(a) + f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a)) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Ekkor ugyanis a Taylor sorának legegyszerűbb esetét ($k=1$) használva minden x-re az a egy bizonyos környezetében

$$f(x)=f(a)+(f'(a)+\varepsilon_1)(x-a)$$

de $f'(a)+\varepsilon$, ha x az a-hoz elég közel fekszik, minthogy $\lim\limits_{x=a}\varepsilon_1=0$, az $f'(a)$-val egyenlő előjelű, és így $f(x)-f(a)$ és $x-a$ egyenlő vagy ellenkező előjelű, a mint $f'(a)$ pozitiv vagy negativ.

Ha az $f'(a)$ zérus, e tétel nem használható. Közelfekvő általánositása ekkor a következő:

Ha az $f(x)$ függvénynek $k+1$-edik differencziálhányadosa az első, mely az a helyen nem 0 és e differencziálhányados véges és meghatározott szám, akkor:

1. ha k páros szám, a függvény az a helyen növekszik vagy fogy, a mint $f^{(k+1)}(a)$ pozitiv vagy negativ;

2. ha k páratlan szám, a függvénynek az a helyen szélső értéke van, még pedig minimum- vagy maximummal van dolgunk, a mint $f^{(k+1)}(a)$ pozitiv vagy negativ.

Ekkor ugyanis a Taylor-sornak általános alakját használva, mely azonban most az $f'(a)$, $f''(a)$, $\ldots f^{(k)}(a)$ eltűnése miatt igen egyszerű, lesz minden az a egy bizonyos környezetében fekvő x-re:

$$f(x)=f(a)+(f^{(k+1)}(a)+\varepsilon_{k+1})\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!},$$

Itt $f^{(k+1)}(a)$ nem 0; ha x az a hoz elég közel fekszik, ε_{k+1} tetszőleges kicsiny. Ha tehát k páros szám,* és így $k+1$ páratlan, $(x-a)^{k+1}$ és $x-a$ egyenlő előjelűek; tehát végre $f(x)-f(a)$ és $x-a$ egyenlő vagy különböző előjelűek, a mint $f^{(k+1)}(a)$ pozitiv vagy negativ, a mi tételünk első részét bizonyítja.

Ép oly könnyen belátható a tétel második része: ha k páratlan, tehát $k+1$ páros szám, $\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$ mindig pozitiv és $f(x)-f(a)$ előjele az a egy bizonyos környezetében mindig megegyezik $f^{(k+1)}(a)$ előjelével; azaz $f(x)-f(a)$ mindig pozitiv, illetőleg mindig negativ, vagy más kifejezésben $f(x)$ mindig nagyobb, illetőleg mindig kisebb

* Ha $k=0$, visszatérünk az előbb tárgyalt legegyszerűbb esethez.

az $f(a)$-nál, azaz végre $f(a)$ minimum, illetőleg maximum, a mint $f^{(k+1)}(a)$ pozitiv vagy negativ.

Így p. az $y=e^x$ függvény minden helyen növekszik, mert a differencziálhányados, mely ismét e^x, minden x-re nézve pozitiv; a megfelelő görbe minden pontjában emelkedik. (L. a rajzot a 497. lapon).

Az $y=\sin.x$ függvény növekszik vagy fogy, a mint a differencziálhányados $y'=\cos.x$ pozitiv vagy negativ, azaz növekszik, ha

$$2l\pi-\frac{\pi}{2}<x<2l\pi+\frac{\pi}{2};$$

fogy, ha

$$(2l+1)\pi-\frac{\pi}{2}<x<(2l+1)\pi+\frac{\pi}{2},$$

a hol l bárminő egész számot jelent. Ha $x=2l\pi-\frac{\pi}{2}$ vagy $2l\pi+\frac{\pi}{2}$, az első differencziálhányados 0, a második differencziálhányados $-\sin.x$ tehát $+1$ vagy -1, a függvénynek megfelelő értéke -1, illetőleg $+1$ minimum, illetőleg maximum.

A megfelelő görbe tehát az

$$-\frac{5\pi}{2}\ldots-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\ldots\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\ldots\frac{5\pi}{2},\ldots$$

szélső abscissáknak megfelelő síkrészekben emelkedik, a

$$\ldots,-\frac{3\pi}{2}\ldots-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\ldots\frac{3\pi}{2},\ldots$$

síkrészekben leszáll; azon pontjai, hol az abscissák

$$\ldots,-\frac{5\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ldots \text{illetőleg}\ldots -\frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ldots$$

alsó, illetőleg felső tetőpontok. (Lásd a rajzot a 497. lapon.)

Ha az $f(x)$ függvénynek az a helyen nem minden differencziálhányadosa folytonos és ujból differencziálható függvény, vagy ha az a helyen az összes differencziálhányadosok 0-sal egyenlők, a nélkül, hogy a függvénynek az a hely környezetében állandó értéke volna, akkor azt mondjuk, hogy *a az $f(x)$ függvény kivételes helye.* A közönségesen előforduló egyszerűbb függvényeknél a kivételes helyek úgy oszlanak el, hogy mindig lehet véges számközt kijelölni bármely kivételes helyre nézve, melyben ez az *egyedüli* kivételes hely. De lesz alkalmunk e tárgyalásokban is oly függvényalakokkal foglalkozni, melyeknél bizonyos helyek bármily kis környezetében végtelen sok kivételes hely foglaltatik, sőt olyanokkal, melyeknél — a mi a szélső eset — minden helynek megvan e tulajdonsága vagyis melyeknél minden hely kivételes hely.

107. *Az $y = f(x)$ függvény ama nem kivételes helyeinek meghatározása, hol a függvénynek értéke maximum vagy minimum,* a megelőzők értelmében következőkép történik:

Kikeressük először azon helyeket, hol az első differencziálhányados $f'(x) = 0$; a mit úgyis fejezünk ki, hogy megoldjuk az $f'(x) = 0$ egyenletet. Ha e helyek összessége

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

akkor megnézzük, hogy e helyek mindegyikén a hányadik differencziálhányados az első mely a differencziálhányadosok sorában nem 0. Ha ez az l-edik, és l páratlan szám, akkor az illető ξ elejtendő, mert nem szolgáltat szélső értéket; e helyen a függvény növekszik vagy fogy. Ha ellenben l páros szám, ξ szélső értéket ád, még pedig minimumot vagy maximumot, amint $f^{(l)}(\xi)$ pozitiv vagy negativ.

Kivételes helyen is lehet a függvénynek szélső értéke, a mi a függvény egyszerűbb alkatánál könnyen fölismerhető. Így ha $f(x)$ az a helyen nem differencziálható, de $\lim\limits_{x=a-0} f'(x)$ és $\lim\limits_{x=a+0} f'(x)$ meghatározott előjelűek (akár a 0-tól különböző véges szám, akár $+\infty$, vagy $-\infty$), ez annyit mond, hogy ha x az a-hoz elég közel fekszik és p. $x < a$, akkor $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ és $\lim\limits_{x=a-0} f'(x)$ előjele ugyanaz, tehát ekkor $f(x) - f(a)$ mindig pozitiv vagy mindig negativ és így $f(a)$ nagyobb vagy kisebb mint minden $f(x)$, melyre nézve x elég közel fekszik az a-hoz és a-nál kisebb. Hasonlókép az a-nál nagyobb x-ekre nézve.

Így tehát $f(x)$-nek az a-ban szélső értéke van, ha $\lim\limits_{x=a-0} f'(x)$ és $\lim\limits_{x=a+0} f'(x)$ meghatározott de ellenkező előjelűek; meg pedig minimum vagy maximum, a mint $\lim\limits_{x=a+0} f'(x)$ pozitiv vagy negativ.

Például az

$$f(x) = \frac{5x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 2x$$

függvénynek az $x = 0$ helyen, hol $f(0) = 0$, szélső értéke van, még pedig maximum, mert (lásd 59. czikk)

$$\lim_{x=-0} f'(x) = +3, \quad \lim_{x=+0} f'(x) = -2.$$

Kiemelendő még azon eset, midőn a a valós függvény értelmezési tartományának határhelye, azaz az a-nál kisebb (vagy nagyobb) változó-értékek nem jönnek tekintetbe. Ekkor, ha a nem kivételes hely, $f(x)$ az x-nek minden megvizsgálandó értékénél az a elég kis környezetében az $f(a)$-nál nagyobb, illetőleg kisebb; az $f(x)$ tehát a-ban növekszik vagy fogy; bizonyos tekintetben $f(a)$ szélső érték is, mert az a másik oldalára, hol ellenkező jellegű $f(x)$-ek lehetnének, nem megyünk át. Ezen értékeket nem szokás a szélső értékek közé fölvenni, a mennyiben a viszonyokat teljesen jellemezzük, ha azt mondjuk, hogy $f(x)$ «az a-tól kezdve» növekszik vagy fogy.

Így p. az $f(x) = x^r$ értelmezési tartománya a pozitiv számokból áll, ehhez hozzácsatolhatjuk a 0-t is mert (31. cz. XII.)

$$\lim_{x=0} x^r = 1,$$

és így $f(0) = 1$. A 0 helytől kezdve a függvény fogy, mert ha h a 0-hoz elég közel fekvő pozitiv számot jelent, mindig:

$$h^h < 1.$$

Ekkor ugyanis a h (l. h) kifejezés, melyben h pozitiv az (elég kis) h logarithmusával együtt negativ.

108. A függvények ama helyeinek meghatározása, hol szélső értékük van, a gyakorlatban folyton előforduló föladat, melyre azért szükséges lesz néhány példát bemutatni. Világos, hogy e probléma teljesen befejezett tárgyalása föltételezi az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldását, azaz egy bizonyos függvényosztály részletes elemzését. Csak a mennyiben ez megtörtént, adhatunk teljes feleletet a fölvetett kérdésre.

a) Az $y = a\,x^2 + bx + c$ függvénynek, (mely mindenütt differencziálható) csak ott lehet szélső értéke, hol

$$y' = 2\,a\,x + b = 0\ , \quad x = -\frac{b}{2a};$$

ez minimum vagy maximum, a mint

$$y'' = 2a,$$

vagyis a pozitiv vagy negativ.

Geometriai értelmezésben az $y = ax^2 + bx + c$ görbének (parábola) mindig van tetőpontja; ez azon pont, melynek abscissája $-\frac{b}{2a}$; ez alsó vagy fölső tetőpont, a mint a pozitiv vagy negativ.

b) Az $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvénynek (mely mindenütt differencziálható) csak ott lehet szélső értéke, hol

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Ha tehát $4b^2 - 12ac$ negativ, (valós függvényről lévén szó, a, b, c, d valós számokat jelentenek) e másodfokú egyenletnek két gyöke complex szám; azaz oly (valós) x, melynél $y' = 0$ nincsen; a függvénynek tehát nincs is szélső értéke.

Ha $4b^2 - 12ac = 0$, az egyenletnek két gyöke egyenlő és valós, és ugyane gyök kielégíti az

$$6ax + 2b = 0$$

egyenletet is. (I. r. 78. cz.). Ezen x-re nézve tehát nem csak y', hanem

$$y'' = 6ax + 2b$$

is 0, míg a harmadik differencziálhányados $6a$ nem 0. E szerint nincs szélső érték.

Ha végre $4b^2 - 12ac$ pozitiv, van két különböző valós gyök x_1 és x_2; a másodfokú egyenletre vonatkozó elemi tételek szerint ekkor:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 3a(x - x_1)(x - x_2)$$

és így a második differencziálhányados:

$$y'' = 3a(2x - x_1 - x_2)$$

a miből tüstént látni, hogy ha p. $x_1 < x_2$, és a pozitiv, x_1 maximumot, x_2 minimumot ád. Ha pedig a negativ, akkor megfordítva a kisebb gyök ád minimumot, a nagyobbik maximumot.

Az eredmények geometriai értelmezését az olvasóra bízzuk.

c) Az $y = x^n e^{ax}$ függvénynek (a negativ szám, n poz. eg. szám), mely mindenütt differencziálható, szélső értéke csak ott lehet, hol

$$y' = n\,x^{n-1} e^{ax} + a x^n e^{ax} = e^{ax} x^{n-1} (n + a\,x)$$

eltűnik; tehát csak az

$$x_1 = -\frac{n}{a}, \quad x_2 = 0$$

helyeken. Minthogy

$$y'' = a^2 e^{ax} x^n + 2n\,a\,e^{ax} x^{n-1} + n(n-1) e^{ax} x^{n-2},$$

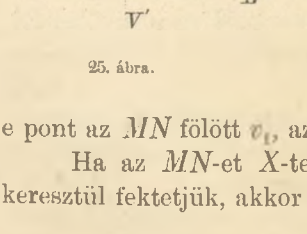
és

$$(y'')_{x=-\frac{n}{a}} = a\,e^{-n} \left(-\frac{n}{a}\right)^{n-1}$$

negativ, $x_1 = -\frac{n}{a}$ maximumnak felel meg.

Az $x_2 = 0$ helyen, ha $n > 2$, a második differencziálhányados szintén 0. Hogy a dolgot mindjárt n bármely értékére elvégezzük, képezzük az $y = x^n e^{ax}$-nek általánosan k-adik differencziálhányadosát. Ez a 87. cz. értelmében csak akkor tartalmaz x nélküli, tehát az $x=0$ helyettesítésnél el nem tünő tagot, ha k legalább is n. Az n-edik differencziálhányadosban e tag: $n!\,e^{ax}$ vagy tehát:

$$(y^{(n)})_{x=0} = n!$$



25. ábra.

Ha tehát n páratlan szám, e helyen a függvény növekszik és nincs szélső értéke; ha ellenben n páros szám, az $x = 0$ helyen a függvénynek minimuma van.

d) Az MN egyenesen meghatározandó ax X pont úgy, hogy egy mozgó pont az AB utat lehető legrövidebb időben tegye meg, föltéve, hogy e pont az MN fölött v_1, az MN alatt v_2 (pozitiv) sebességgel mozog.

Ha az MN-et X-tengelynek veszszük és az y tengelyt A-n keresztül fektetjük, akkor az A és B koordinátái $(0, a)$ és (c, b).

Az X ponté $(x, 0)$; és így:

$$AX = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad XB = (b^2 + (c - x)^2)^{\frac{1}{2}};$$

Az AXB befutására szükséges idő az x függvénye, t. i.

$$T(x) = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{v_1} + \frac{(b^2 + (c - x)^2)^{\frac{1}{2}}}{v_2}.$$

E függvény minimum lehet, ha

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{c - x}{v_2 (b^2 + (c - x)^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Képezzük mindjárt a második differencziálhányadost. Ez

$$T''(x) = \frac{1}{v_1} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \frac{b^2}{(b^2 + (c - x)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mely az x minden értékénél pozitiv, tehát a $T'(x) = 0$ megoldásából származó x értékek a $T(x)$-nek csak minimumát adhatják. De abból, hogy $T''(x)$ mindig pozitiv, az is következik, hogy $T'(x)$ mindig növekedő függvény, mely tehát legfölebb egyszer tünhetik el, de másrészt

$$T'(0) = -\frac{c}{v_2 (b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad T'(c) = \frac{c}{v_1 (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}};$$

tehát $T'(0)$ és $T'(c)$ ellenkező jelűek, és így van egy és csak egy x érték, mely 0 és c között fekszik és a melynél $T'(x)$ eltűnik, tehát itt $T(x)$ minimum lesz.

Ha a $T'(x) = 0$ egyenletet rendezzük, negyedfokú egyenlethez jutunk, melyre áttérni annál kevésbbé czélszerű, minthogy a gyökkifejezések eltávolítása a problémához nem tartozó, idegen gyököket hoz be. Az X pont helyének meghatározása geometriai úton ama megjegyzés alapján történhetik, hogy (lásd a rajzot)

$$\frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos.\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin.\,\alpha$$

$$\frac{c - x}{(b^2 + (c - x)^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos.\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin.\,\beta$$

tehát

$$\frac{\sin.\,\alpha}{\sin.\,\beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

(az optikának ú. n. törési törvénye), a mi az X-nek igen egyszerű szerkesztését adja.

c) Ha az $y=f(x)$ görbe valamely (x, y) pontjában a normálist szerkesztjük, melynek egyenlete

$$\xi - x + y'(\eta - y) = 0,$$

és e normális valamely pontjára (ξ, η)-ra nézve, keressük a görbének azon pontját, melynek távolsága (ξ, η)-tól minimum vagy maximum, ekkor az (x, y) pont általánosságban (a normalis legfölebb egy pontjának kivételével) megfelel e követelésnek. Tudniillik, hogy e távolság, vagy vele együtt ennek négyzete

$$D^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$

szélső érték legyen kell, hogy a differencziálhányados

$$\frac{d}{dx}(D^2) = -2\left((\xi - x) + (\eta - y)\,y'\right) = 0$$

legyen, a mi nem más, mint föltétele annak, hogy (ξ, η) az (x, y) normálisán feküdjék. A második differencziálhányados

$$\frac{d^2}{dx^2}(D^2) = -2\left(-1 - y'^2 + (\eta - y)\,y''\right)$$

vizsgálata mutatja, hogy ez csak akkor 0, ha

$$\eta_1 = y + \frac{1 + y'^2}{y''},$$

$$\xi_1 = x - \frac{1 + y'^2}{y''}\,y',$$

hol az η_1-hez tartozó ξ_1 értéket a normális egyenletéből vettük. Ezen pontja a normálisnak az $y=f(x)$ görbének és az x értékének speciális megállapitása nélkül a most tárgyalt problémára vonatkozólag nem vizsgálható meg.

A normális bármely más pontjára vonatkozólag az eredményt a (ξ_1, η_1) bevezetésével igen egyszerűen fogalmazhatjuk. T. i. a második differencziálhányadosra nézve ekkor az η_1 értékét tekintetbe véve

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}(D^2) = -(1 + y'^2)\left(-1 + \frac{\eta - y}{1 + y'^2}\,y''\right) = -(1 + y'^2)\left(-1 + \frac{\eta - y}{\eta_1 - y}\right)$$

$$= (1 + y'^2)\,\frac{\eta - \eta_1}{y - \eta_1}$$

A második differencziálhányados tehát pozitiv vagy negativ, a mint $\eta - \eta_1$ és $y - \eta_1$ egyenlő vagy ellenkező előjelüek. De $\eta - \eta_1$ csak akkor változtatja előjelét, ha η átmegy az η_1 értéken. A normális azon felében, mely a (ξ_1, η_1) egyik oldalán terül el és az (x, y) pontot magában foglalja, az előjelek egyenlők, az illető távolság minimum, a másikban pedig maximum.

A (ξ_1, η_1) az $y = f(x)$ görbének az (x, y) ponthoz tartozó *görbületi középpontja*, az a kör, melynek középpontja (ξ_1, η_1) és mely az (x, y) ponton keresztül megy, az $y = f(x)$ görbe *görbületi köre* az (x, y) pontban. Itt csak mellékesen jutottunk e görbületi középponthoz, melynek vizsgálata egészen más szempontokból a görbék elméletében alapvető jelentőségű lesz.

Ha $y'' = 0$, nincs a normálisnak oly pontja, melyre nézve ama második differencziálhányados 0. Ekkor azt is mondhatjuk, hogy η_1 végtelen lesz; és a görbületi középpont a normálisnak végtelen távolságban fekvő pontja. Ez az eset lép föl az egyenes minden pontjában.

Görbék érintkezése. Inflexiós pontok. Asymptoták.

109. Az $y = f(x)$ görbének egy bizonyos (x, y) pontjában az $y' = f'(x)$ differencziálhányados *az emelkedés mérőszámának* tekinthető. A leszállást természetesen negativ emelkedésnek veszszük. Ha ugyanis két görbének, $y = f(x)$ és $\eta = \varphi(\xi)$ egy közös pontja van, azaz az a helyen $f(a) = \varphi(a)$, akkor az $(a, f(a))$ közös pontban *az $y = f(x)$ görbe gyorsabban vagy lassabban emelkedik az $\eta = \varphi(\xi)$ görbénél a mint $f'(a)$ nagyobb vagy kisebb a $\varphi'(a)$-nál.* Ekkor ugyanis az ordináták különbsége az a környezetében x növekedésével folyton növekszik, vagy fogy, a mint

$$\left(\frac{d}{dx}\left(f(x) - \varphi(x)\right)\right)_{x=a} = f'(a) - \varphi'(a),$$

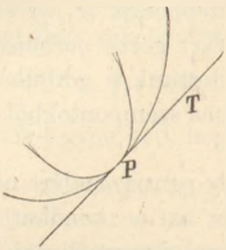
a 0-nál nagyobb vagy kisebb.

A két görbéről ebben az esetben azt mondjuk, hogy *az $(a, f(a))$ pontban metszik egymást.*

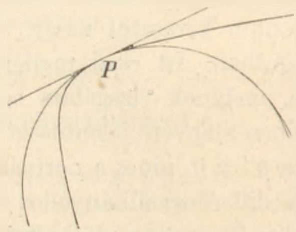
Ha az $x = a$ helyen nemcsak $f(a) = \varphi(a)$, hanem $f'(a) = \varphi'(a)$, a két görbének közös érintője van, a mit úgy szokás kifejezni, hogy *a két görbe az $(a, f(a))$ pontban egymást érinti. Az érintés k-adrendű*, ha $\varphi'(a)$ és $f'(a)$, $\varphi''(a)$ és $f''(a) \ldots \varphi^{(k)}(a)$ és $f^{(k)}(a)$ egyenlők ellenben $\varphi^{(k+1)}(a)$ és $f^{(k+1)}(a)$ többé nem egyenlők. Ezen általános esetben az

$$f(x) - \varphi(x)$$

ordinátakülönbségnek csak $k+1$-edik differencziálhányadosa lesz a 0-tól különböző szám és a mint az érintés páratlan vagy páros rendű, különböző geometriai viszonyokkal lesz dolgunk.



26. ábra.



27. ábra.

Ha ugyanis az érintés páratlan rendű, azaz k páratlan szám, akkor az $f(x) - \varphi(x)$ értéke az a helyen szélső érték, mert az első differencziálhányados e helyen 0 és az első e helyen el nem tünő differencziálhányadosnak rendszáma, $k+1$ páros. (Természetesen föl van tételezve, hogy $f^{(k+1)}(a) - \varphi^{(k+1)}(a)$ véges és meghatározott szám; és a megállapitás szerint nem 0.) De a függvény ama szélső értéke 0; azaz $f(x) - \varphi(x)$ az a egy bizonyos környezetében mindig pozitiv vagy mindig negativ, ha t. i. kiveszszük az a-t magát, hol ama különbség 0. Ekkor ha mindig az egyenlő abscissáknak megfelelő pontokat hasonlitjuk össze, az $y = f(x)$ görbenek pontja vagy mindig magasabban vagy mindig mélyebben fekszik az $\eta = \varphi(\xi)$ görbének megfelelő pontjánál; kivéve természetesen az a abscissának megfelelő pontokat, melyek összeesnek (L. a 26. ábrát).

Ha az érintés páros rendű, azaz k páros szám, akkor az $f(x) - \varphi(x)$ az a hely környezetében növekszik vagy fogy; minthogy pedig $f(x) - \varphi(x)$ az a helyen zérus, e különbség az a egyik oldalán pozitiv, a másik oldalon negativ. Azaz ha ismét az egyenlő abscissáknak megfelelő pontokat hasonlitjuk össze, az a egyik oldalán az $y = f(x)$ görbének pontjai feküsznek magasabban, a másik oldalon ellenben az $\eta = \varphi(\xi)$ görbe pontjai. (L. a 27. ábrát, mély hyperbolát és ennek görbületi körét ábrázolja.)

Azon körülménynél fogva, hogy (nem degeneráló) kúpszelet és egyenes között más mint elsőrendű érintés nem lehetséges, szokva vagyunk az érintés nevével a 26. ábrában képviselt alaki viszonyokat egyesíteni és evvel szemben a páros rendű érintésnél azt mondhatjuk, hogy ott egyidőben érintés és metszés történik; az érintkező görbék egyszersmind metszik egymást. A metszés jellemzője ekkor az $f(x) - \varphi(x)$ jelváltozása az a környezetében, az érintésé az érintők azonossága.

110. Ha a megelőző czikk tárgyalásait az $y = f(x)$ görbére és az (x, y) pontban vont érintőjére

$$\eta - y = y'(\xi - x)$$

alkalmazzuk, új és fontos adatokat szerzünk a görbe alakjának jellemzésére az (x, y) pont környezetében. Ekkor e helyen

$$\frac{d\eta}{d\xi} = y',$$

tehát az érintés első vagy magasabbrendű; de η-nak ξ szerinti magasabb differencziálhányadosai mind zérusok. Ha y'' nem 0 ama helyen, az érintés csakis elsőrendű és

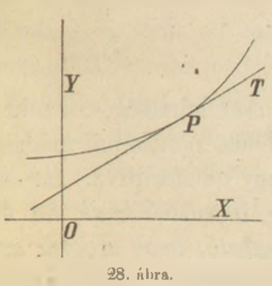
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \left(f''(x) + \varepsilon\right)\frac{h^2}{2!}; \qquad \lim_{h=0} \varepsilon = 0$$

ha továbbá az érintőt veszszük most az $\eta = \varphi(\xi)$ görbének, $\varphi(x) = y$, $\varphi'(x) = y'$,

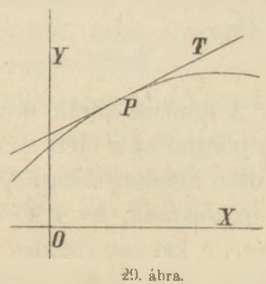
$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,h;$$

es minthogy $f(x) = \varphi(x)$, $f'(x) = \varphi'(x)$ és $\varphi''(x) = 0$,

$$f(x+h) - \varphi(x+h) = \left(f''(x) + \varepsilon\right)\frac{h^2}{2!}; \qquad \lim_{h=0} \varepsilon = 0$$



28. ábra.



29. ábra.

azaz *a görbe vagy az érintő ordinátái a nagyobbak, a mint* $f''(x)$ *pozitiv vagy negativ. Az első esetben azt mondjuk, hogy a görbe alulról nézve convex, a második esetben a görbe alulról nézve concav.*

Ha $f''(x)$ szintén 0, akkor ezen következtetés többé nem lehetséges.

Tegyük föl általánosan, hogy a vizsgált helyen $f''(x), \ldots f^{(k)}(x)$ mindannyian zérussal egyenlők és $f^{(k+1)}(x)$ az első 0-tól különböző, de véges és meghatározott differencziálhányados.

Ekkor a Taylor sora az $y = f(x)$ görbe ordinátáit az x környezetében következőleg adja:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + \left(f^{(k+1)}(x) + \varepsilon\right) \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\,; \qquad \lim_{h=0}.\ \varepsilon = 0\,;$$

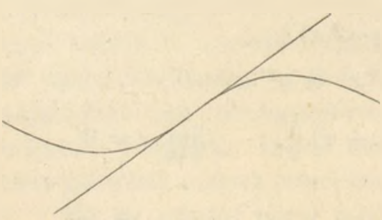
míg

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)\,h.$$

Ismét $f(x) = \varphi(x)$, $f'(x) = \varphi'(x)$; tehát:

$$f(x+h) - \varphi(x+h) = \left(f^{(k+1)}(x) + \varepsilon\right) \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\,.$$

Ha k páros szám, az eredmények az előbbi czikkből ismeretesek: t. i. páros rendű érintés történik a görbe és az egyenes közt; az érintő úgynevezett *inflexiós érintő* és az érintési pont *inflexiós*



30. ábra.

31. ábra.

pont. A mint az ábrák mutatják két eset lehetséges, a mint t. i. a görbe pontjai az x előtt az érintő megfelelő pontjainál magasabban, az x után alacsonyabban feküsznek vagy megfordítva. *Az első esettel van dolgunk, ha* $f^{(k+1)}(x)$ *negativ, a másodikkal, ha* $f^{(k+1)}(x)$ *pozitiv.* A két *eset röviden úgy jellemezhető, hogy a görbe az érintő alá száll, vagy pedig az érintő fölé emelkedik;* de e mellett természetesen a görbe érintőjével együtt akár emelkedhetik, akár leszállhat.

Még egyszerűbben jellemezzük e viszonyokat, ha meggondoljuk, hogy $f^{(k+1)}(x)$-nek az $f''(x)$ $k-1$-edik, tehát páratlan rendű differencziálhányadosa és minthogy ez az $f'(x)$ differencziálhányadosai sorában az első, mely 0-tól különbözik, $f''(x)$ e helyen növekszik vagy fogy, azaz minthogy $f''(x)$ zérus, negativ értékekből átmegy pozitiv értékekhez vagy megfordítva, a mint $f^{(k+1)}(x)$ pozitiv vagy negativ.

Ha egy bizonyos x helyen $f''(x)=0$ és az első utána el nem tünő differencziálhányados, a $k+1$-edik páratlan rendszámú, akkor az (x, y) pont a görbe inflexiós pontja, hol átmegy convexből concávba, vagy concávból convexbe, a mint $f^{(k+1)}(x)$ negativ vagy pozitiv.

Ha ellenben $f''(x)=0$ és az első utána el nem tünő differencziálhányados $f^{(k+1)}(x)$ páros rendszámú, a görbe és érintőjének érintkezése páratlan rendü és az előbb fölirt $f(x+h)-\varphi(x+h)$ különbség értékéből látjuk, hogy *a görbe vagy az érintő ordinátái nagyobbak a mint $f^{(k+1)}(x)$ pozitiv vagy negativ, azaz a görbe ismét az első esetben alulról nézve convex, a második esetben pedig concáv.*

Összefoglalva az összes eddigi, a görbe convex vagy concav voltára, továbbá az inflexiós pontokra vonatkozó eredményeket, ezek a következők:

Ha egy bizonyos x helyen az $f(x)$ első differencziálhányadosa után az első el nem tünő differencziálhányados a $k+1$-edik és ez véges, meghatározott szám, akkor

1. ha k páratlan szám, az $y=f(x)$ görbe az x hely környezetében alulról nézve convex vagy concav, a mint $f^{(k+1)}(x)$ pozitiv vagy negativ.

2. ha k páros szám, az $y=f(x)$ görbének az x helyen inflexiós pontja van és a görbe ott concavből convexbe, vagy convexből concávba megy át, a mint $f^{(k+1)}(x)$ pozitiv vagy negativ.

Az utolsó részt e szabályból legkönnyebben úgy jegyezzük meg, hogy $f^{(k+1)}(x)$ előjele a görbének alakját megadja az x hely *után*.

Az $y=f(x)$ görbének azonban még akkor is lehet inflexiós pontja, ha az x helyen $f'(x)$ végtelen lesz. Már tudjuk hogy, ha ekkor

$$\lim_{h=-0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{és} \quad \lim_{h=+0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

meghatározott, de ellenkező előjelű végtelen, csúcs lép föl; ha azonban e két határérték egyidőben $+\infty$, vagy $-\infty$, akkor a görbe egyszersmind metszi az érintőt és az illető pont inflexiós pont. Természetesen föl van tételezve, hogy az $y=f(x)$ egyértékű és folytonos függvény, mely az x mindkét oldalán van meg adva. Ha a vizsgált görberész épen ott végződik, hol $f'(x)$ végtelen lesz, akkor mint egyáltalában egy görbedarab *végpontjában* e kérdések, melyek épen a görbe alkatát az x *ket* oldalán vizsgálják, többé nem tárgyalhatók.

111. *Az inflexiós pontok meghatározása* valamely $y=f(x)$ görbére nézve e szerint ismét kész szabályok szerint történik. Inflexiós pont ott van, hol $f'(x)$ meghatározott előjelű végtelen lesz, továbbá még ott, hol $f''(x)=0$ és az első $f''(x)$ után el nem tünő differencziálhányados véges és meghatározott szám és páratlan rendszámú.

Igy p. az $y=\text{arctg.}\,x$ bármely ágán egy inflexiós pont van; t. i.

$$y'=\frac{1}{1+x^2}$$

valós x-re nézve egyáltalában nem lesz végtelen; a második differencziálhányados pedig

$$y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

csak az $x=0$ helyen. Ugyanitt

$$y'''=\frac{8x^2}{(1+x^2)^3}-\frac{2}{(1+x^2)^2}$$

értéke -2; tehát e helyen a görbe átmegy convexből concavba. A görbe alakjának ismeretére még az inflexiós érintőnek fekvése (hajlásszöge az X tengelylyel) is szükséges. De ezen szögre nézve

$$\text{tg.}\,a=(y')_{x=0}=1,$$

azaz az inflexiós érintő a $(0,0)$ pontban az X-tengelylyel $45°$-nyi szöget képez. (L. az ábrát a 497. oldalon.)

Az

$$y=\sin^2 x-2\sin.\,x$$

görbének, minthogy

$$y'=2\sin.\,x\cos.\,x-2\cos.\,x$$

soha nem lesz végtelen, csak ott lehet inflexióspontja, hol,

$$y'' = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 2\sin. x = -4\sin^2 x + 2\sin. x + 2$$

eltünik. Azaz az inflexiós pontok abscissáit megadja a következő egyenlet:

$$2\sin.^2 x - \sin. x - 1 = 0,$$

melynek megoldásai:

$$\sin. x = 1, \quad \sin. x = -\tfrac{1}{2},$$

vagy végre:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, \quad x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6}.$$

De továbbá:

$$y''' = 2\cos. x\,(1 - 4\sin. x)$$

$$y^{(4)} = -2\sin. x\,(1 - 4\sin. x) - 8\cos^2 x = 16\sin^2 x - 2\sin. x - 8$$

Az $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ helyek tehát *nem* inflexiós pontok, mert ekkor y''' zérus és $y^{(4)} = +6$. E pontokban a görbe alúlról nézve convex. Különben könnyű látni, hogy e pontok *alsó tetőpontok*, mert ha $\sin. x = 1$, akkor $y' = 0$ és ekkor is y'' és y''' eltünése, $y^{(4)}$ pozitiv értéke a kijelentett eredményhez vezet.

Ellenben $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$ és $x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6}$ *inflexiós pontokat adnak;* mert ekkor

$$y''' = 6\cos. \frac{\pi}{6}, \quad \text{ill.} \quad y''' = 6\cos. \frac{5\pi}{6}.$$

A pontok első sorozatában, a görbe concávból convexbe, a második sorozatban convexből concávba megy át.

Hogy e tárgyalás a következő czikkekre is mindjárt például szolgálhasson, a többi tetőpont meghatározásával mindjárt elvégezzük az egész görbe discussióját. Minthogy

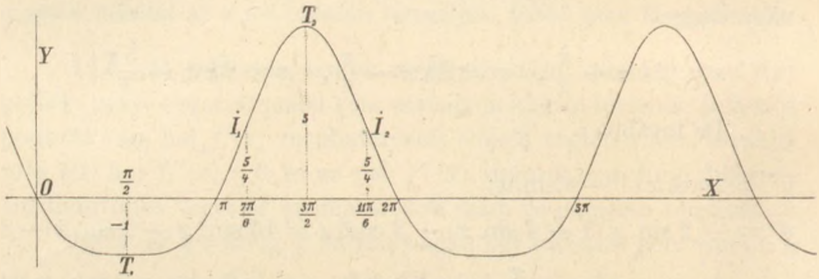
$$y' = 2\cos. x\,(\sin. x - 1),$$

ezek ott vannak hol $\sin. x = 1$, — ezen esetet már tárgyaltuk, — és a hol $\cos. x = 0$, tehát

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

Az első esetben már tudjuk, hogy a görbe megfelelő pontjai alsó tetőpontok; t. i. ismét $\sin. x = 1$; míg a második esetben $\sin. x = -1$, tehát $y'' = -4$, tehát felső tetőponttal van dolgunk.

Ha még tekintetbe veszszük, hogy $y = \sin. x (\sin. x - 2)$ csak ott lesz 0, hol $x = k\pi$ és hogy elég a görbét $x = 0$ és $x = 2\pi$ közt szerkeszteni, mert csupán ehhez kongruens darabokból áll, akkor a görbe alakjáról teljes áttekintésünk van; a mint ezt a 32. ábra mutatja.



32. ábra.

112. Ha az $y = f(x)$ első és második differencziálhányadosa az x helyen véges és meghatározott, akkor az a követelés, hogy az $y = f(x)$ görbével az (x, y) pontban legalább is másodrendű érintkezésben álló kört találjunk, a görbületi körhöz vezet. Bármely kör egyenlete

$$(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 = R^2,$$

és hacsak ξ nem egyenlő a $\xi_1 \pm R$ értékek egyikével, η a ξ-nek egyértékű és differencziálható függvénye, mihelyt a ξ-hez tartozó η értéket megállapítottuk. Ekkor a ki nem fejtett függvények differencziálására vonatkozó szabályt használva, minthogy ξ_1, η_1, R állandók:

$$\xi - \xi_1 + (\eta - \eta_1)\frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + (\eta - \eta_1)\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0.$$

A követelés értelmében a ξ_1, η_1, R állandók úgy határozandók meg, hogy, midőn $\xi = x$, η egyik értéke y legyen és azután, midőn $\xi = x$, $\eta = y$, egyszersmind legyen:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = y', \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = y''.$$

E három föltétel kielégíthető, ha az előbb fölirt 3 egyenletben,

$\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ helyébe x, y, y', y''-t irva, lehetséges a ξ_1, η_1, R-et úgy meghatározni, hogy az egyenletek identitások legyenek; azaz megoldandó az

$$\begin{aligned} (x-\xi_1)^2 &+ (y-\eta_1)^2 = R^2, \\ (x-\xi_1) &+ (y-\eta_1)\, y' = 0, \\ 1+y'^2 &+ (y-\eta_1)\, y'' = 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer. De ez nagyon egyszerű; az utolsó egyenlet megadja η_1-et, a második az η_1 értékének behelyettesítése után ξ_1-et, az első végre ekkor R-t, mely mint kör sugara pozitivnak veendő. Lesz:

$$\xi_1 = x - \frac{1+y'^2}{y''}\, y', \quad \eta_1 = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

$$R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Itt csakugyan a kör középpontja (ξ_1, η_1) nem más mint az a pont, melyet előbb görbületi középpontnak neveztünk és a kör maga, minthogy az x, y ponton keresztül megy, a görbületi kör.

Hogy a görbületi kör a föladatnak csakugyan megfelel, a számitásból világos, hacsak a $\xi = x$, $\eta = y$ pont nem a kör ama két pontjának egyike, melyeket kezdettől fogva ki kellett zárni. De ha $x = \xi_1 \pm R$, akkor $y - \eta_1 = 0$ volna, a mi nem lehetséges mert

$$y - \eta_1 = -\frac{1+y'^2}{y''}$$

a y' és y'' bármely véges értékeinél a 0-tól különböző véges szám. *Kivételt tesz egyedül azon eset, hol* $y'' = 0$, a mikor ξ_1. η_1 a kör középpontja nem is határozható meg. Ekkor a görbületi középpont «a végtelenben fekszik», azaz nincs is görbületi kör, hanem mint az $y'' = 0$ esetében tudjuk, az érintő egyenesnek legalább is másodrendű érintkezése van az $y = f(x)$ görbével, és ezen egyenest tekintjük a görbületi kör képviselőjének. E kör akkor — a szokásos kifejezés szerint — a középpontnak a végtelenbe való távozásával egyenessé fajult.

113. Ha $y = f(x)$ az x-nek minden egy bizonyos a-nál nagyobb, vagy minden egy bizonyos a-nál kisebb x-re folytonos az $y = f(x)$ görbének egy a növekedő, vagy fogyó x-ek irányában a végtelenbe menő ága van. Ezen ágnak alaki viszonyai bizonyos esetekben igen egyszerűen jellemezhetők, ha t. i. van egy $y = Ax + B$ egyenes, úgy hogy az $y = f(x)$ és $y = Ax + B$ görbék ugyanazon abscissának megfelelő pontjai tetszőleges közel jutnak egymáshoz, ha lim. x egyenlő $+\infty$, ill. $-\infty$-nel. Ezen egyenes ekkor az $y = f(x)$ görbének *asymptotája*, melynek geometriai jelentése az, hogy ha csak $|x|$ nagyobb egy bizonyos ω-nál, az egész görbe egy síksávban fekszik, mely az $y = Ax + B + \delta$ és $y = Ax + B - \delta$ vonalak közt fekszik, hol δ tetszőleges kicsinynek vehető.

Hogy ily asymptóta létezzék, arra tehát kell, hogy midőn lim. $x = +\infty$, ill. lim. $x = -\infty$, legyen: *

$$\lim_{x=+\infty} (f(x) - Ax - B) = 0,$$

a miből mindenesetre következik:

$$\lim_{x=+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - A\right) = 0,$$

Az első föltétel tehát az, hogy

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

véges és meghatározott szám legyen, mely ekkor meg is adja az A-t. Azután pedig kell, hogy

$$\lim_{x=+\infty} (f(x) - Ax)$$

szintén véges és meghatározott szám legyen és ha e határérték ilyen, ez nem más, mint B.

Igy p. az $y = e^x$ görbe a pozitiv és negativ x-ek irányában a ∞-be megy. De

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x} = \infty;$$

tehát a növekedő x-ek irányában a végtelenbe menő ágnak nincs asymptotája; ellenben

* A $\lim\limits_{x=+\infty}$ jelzésben a külön tárgyalandó, de teljesen analóg $\lim\limits_{x=+\infty}$ és $\lim\limits_{x=-\infty}$ eseteket egyesítjük.

$$\lim_{x=-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

tehát $A = 0$ és

$$\lim_{x=-\infty} \left(f(x) - Ax\right) = \lim_{x=-\infty} e^x = 0;$$

tehát *az asymptóta* $y = 0$, *vagyis az X-tengely.*

A következő egyenlet:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

(hol $ad - bc$ nem 0, a mikor y állandó és c sem 0, a mikor y elsőfokú egész függvény volna) mint könnyű látni, hyperbolát ábrázol, melynek a pozitiv és negativ x-ek irányában a végtelenbe menő ága van. Minthogy pedig

$$\lim_{x=\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x=\pm\infty} \frac{ax+b}{cx^2+dx} = 0,$$

továbbá

$$\lim_{x=\pm\infty} \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \frac{a}{c},$$

e két ág közös asymptotája az $y = \frac{a}{c}$ egyenes.

E példa egyszersmind figyelmeztet egy esetre, mely az eddigi értelmezésben nincs belefoglalva. Ha ugyanis $\lim\limits_{x=a-0} f(x)$, vagy $\lim\limits_{x=a+0} f(x)$ meghatározott előjelű végtelen, akkor a görbének szintén a végtelenbe menő ága van, a melyen azonban x nem lesz végtelen, hanem a-hoz közeledik. Ekkor *az* $x = a$ *egyenesnek is asymptota jellege lesz;* mert ha az $x = a + \delta$ és $x = a - \delta$ által határolt síksávot veszszük, akkor bármily nagy az ω, a görbének vannak pontjai, melyek a koordináták kezdőpontjától ω-nál nagyobb távolságban feküsznek és e mellett mindig ama síksávban foglaltatnak.

E szerint kiegészítve az előbbi példa tárgyalását

$$\lim_{x=-\frac{d}{c}\pm 0} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty,$$

azaz a görbe, midőn bármely oldalról az $x = -\frac{d}{c}$ abscissához közeledik, a végtelenbe megy. — E két görbeág közös asymptotája

$x = -\frac{d}{c}$. — Az a, b, c, d adott értékeinél az olvasó könnyen elkészítheti e hyperbola rajzát, melynek asymptotái, mint láttuk, a koordináta tengelyekkel párhuzamos egyenesek

A következő görbének

$$y = \frac{\sin. x}{x} + Ax + B$$

asymptotája (mindkét irányban) az $y = Ax + B$ egyenes; mert

$$\lim_{x=\infty}. \frac{y}{x} = \lim. \left(\frac{\sin. x}{x^2} + A\right) = A,$$

$$\lim_{x=\infty}. \left(\frac{\sin. x}{x} + Ax + B - Ax\right) = B.$$

Megemlítendő, hogy az asymptotát gyakran mint az érintők határfekvését értelmezik, midőn az érintési pont egy bizonyos ágon a végtelenbe megy. Később majd látjuk, hogy ha ily egyenes létezik, ez csakugyan mindig asymptota, sőt *algebrai* görbéknél minden asymptota így származtatható. Az asymptota most adott értelmezése azonban általánosabb, mint ezt az utolsó példa mutatja. Ennél

$$y' = A + \frac{\cos. x}{x} - \frac{\sin. x}{x^2}$$

és $\lim_{x=\infty}. y' = A$. De hogy az érintő

$$\eta - y = y'(\xi - x), \quad \eta = y'\xi + y - xy'$$

midőn lim. $x = \infty$, meghatározott határfekvésbe menjen át, kellene még, hogy

$$\lim_{x=\infty}. (y - xy') = \lim_{x=\infty}. \left(\frac{\sin. x}{x} + Ax + B - Ax - \cos. x + \frac{\sin. x}{x}\right)$$

$$= B - \lim_{x=\infty}. \cos. x.$$

meghatározott érték legyen; ez pedig teljesen határozatlan. Azaz a mint x minden határon túl növekszik, az érintő mindinkább megközelíti az $y = Ax$ egyenessel való párhuzamos fekvést; de ezen egyenestől való távolsága (az Y-tengelyen mérve) ekkor folyton $B-1$ és $B+1$ közt ingadozik.

114. Ha adva van egy *görbe egyenlete:*

$$F(x, y) = 0,$$

azaz a görbe azon (x, y) pontok összességéből áll, melyeknek koordinátái az $F(x, y)$-ba behelyettesítve, ezt zérussá teszik, akkor az F függvény egyszerűbb alkatánál a megelőző vizsgálatok segítségével a görbének alaki viszonyai teljesen elemezhetők.

Az $F(x, y) = 0$ egyenlet alapján az y általánosságban az x többértékű függvénye, melynek először is értelmezési tartománya állapítandó meg, azaz most azon x-értékek összessége, melyeknek valós y felel meg. Fölbontjuk továbbá a függvényt egyértékű ágaira és kiválasztjuk a kivételes helyeket. Ezeknek környezetében a függvény speciális alkatának megfelelőleg kell a görbe idomát megállapítani. A folytonos intervallumokban keressük azon helyeket, hol y' és y'' eltünik, a mi egyidőben a tetőpontokat és inflexióspontokat adja. Evvel egyszersmind megkapjuk azon közöket, hol a görbe emelkedik és leszáll, valamint azokat, a hol concav, ill. convex. Ha még a görbének metszési pontjait az X tengelylyel keressük, azaz azon x-eket, hol $y = 0$, a görbe alakjáról elég jó áttekintésünk lesz; a görbe rajzolásánál természetesen még kellő számú pont lesz a kivánt megközelítéssel megszerkesztendő.

A *lemniscata* egyenlete:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2 (x^2 - y^2) = 0$$

hol c pozitiv állandó, a miből:

$$y^2 = -(x^2 + c^2) + \sqrt{c^4 + 4c^2 x^2}\ ;$$

a négyzetgyök kétértékűsége következtében minden x-hez az y^2 két és y négy értéke tartozik.

Az y^2 csak akkor lehet pozitiv, ha a négyzetgyököt pozitiv előjellel veszszük, de ekkor is kell, hogy legyen:

$$|\sqrt{c^4 + 4c^2 x^2}| \geqq x^2 + c^2,$$

azaz:

$$c^4 + 4c^2 x^2 \geqq x^4 + 2c^2 x^2 + c^4,$$

$$x^2 < 2c^2.$$

Hogy y valós legyen, x e szerint a $c|\sqrt{2}| \ldots - c|\sqrt{2}|$ intervallumban választandó; minden ily x-nek két ellenkező előjelű y felel meg, kivéve midőn y zérus, azaz

$$|\sqrt{c^4+4c^2x^2}| = x^2+c^2,$$

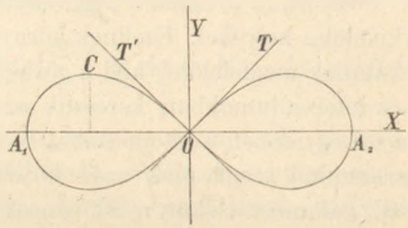
vagyis

$$x = \pm c|\sqrt{2}|, \quad \text{és} \quad x = 0.$$

A görbe tehát két egyértékű ágból áll:

$$y = \pm\left((c^4+4c^2x^2)^{\frac{1}{2}} - (x^2+c^2)\right)^{\frac{1}{2}};$$

mindegyikben x a $\pm 2^{\frac{1}{2}}c$ határok közt veendő. A további vizsgálatnál a pozitiv ágra szorítkozhatunk, mely az y előjelének változtatásával a másik ágat is megadja.



33. ábra.

A differencziálhányados általános alakja legjobban a függvény ki nem fejtett alakjából ítélhető meg, ebből:

$$y' = \frac{x}{y}\,\frac{c^2-x^2-y^2}{c^2+x^2+y^2},$$

a görbének szélső helyein ($x = \pm 2^{\frac{1}{2}}c$, $y = 0$) ez végtelen lesz. Ott tehát a görbe érintője függélyes az X-tengelyre. Az $x = 0$, $y = 0$ helyen a y' számlálója és nevezője, $\frac{\partial F}{\partial x}$ és $\frac{\partial F}{\partial y}$ egyidőben 0, tehát ezen alakból semmi következtetés sem vonható. E helyen $f(0) = 0$, tehát

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\left((c^4+4c^2h^2)^{\frac{1}{2}} - (c^2+h^2)\right)^{\frac{1}{2}}}{h}.$$

De ha

$$(c^4+4c^2h^2)^{\frac{1}{2}} = c^2+2h^2+\varepsilon$$

tétetik, akkor ha lim. $h = 0$, lim. ε is 0, de továbbá még:

$$4h^4+2(c^2+2h^2)\varepsilon+\varepsilon^2 = 0;$$

vagyis:

$$4h+2(c^2+2h^2)\frac{\varepsilon}{h^3}+\frac{\varepsilon^2}{h^3} = 4h+\frac{\varepsilon}{h^3}\left(2(c^2+2h^2)+\varepsilon\right) = 0,$$

azaz, minthogy a zárjelben álló kifejezés határértéke $2c^2$ és nem 0, még okvetetlenül:

$$\lim_{h=0} . \frac{\varepsilon}{h^3} = 0$$

E szerint:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(h^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{h}$$

$$= \pm\left(1+\frac{\varepsilon}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a mint h pozitiv vagy negativ. Tehát végre:

$$\lim_{h=-0} . \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -1, \quad \lim_{h=+0} . \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = +1;$$

azaz a $(0,0)$ pont a görbe fölső ágának szögpontja, melynek viszonyait a $T'OT$ törtvonal jellemzi, hol a $T'OX$ szög mérőszáma $\frac{3\pi}{4}$, a TOX-é pedig $\frac{\pi}{4}$.

A tetőpontok meghatározása azon megjegyzésből történik, hogy y' csak ott 0, hol

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

a mi összeállítva a görbe egyenletével még az

$$x^2 - y^2 = \frac{c^2}{2}$$

egyenletet adja. Végre ebből:

$$x = \pm\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} c,$$

és minthogy a görbe fölső ágát vizsgáljuk, a hozzátartozó ordináta, $y = \frac{c}{2}$. Hogy e pontok felső tetőpontok, kitünik a második differencziálhányados vizsgálatából, mely

$$y'' = -\frac{3c^6(x^2-y^2)}{y^3(c^2+x^2+y^2)^3},$$

és e helyeken negativ.

Most végre azt is tudjuk, hogy a görbe felső ága az A_1C_1, C_1O, OC_2, C_2A_2 darabokban hol C_1 és C_2 a két tetőpont, fölváltva emelkedik és leszáll. Ezen intervallumokban ugyanis erre nézve változás nem történhetik, mert közben a differencziálhányados folytonos és sehol nem 0.

A második differencziálhányados végre csak ott tünhetik el, hol

$$x^2 - y^2 = 0\,,$$

tehát még a görbe egyenletéből:

$$x^2 + y^2 = 0\,;$$

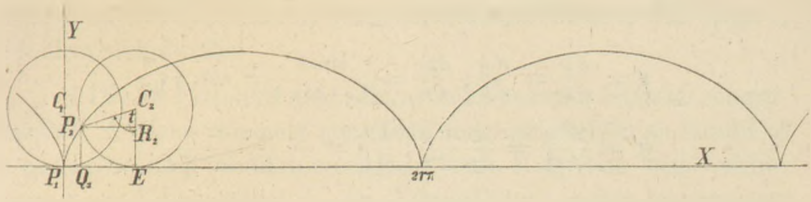
azaz hol $y = 0$, de ott az y'' nevezője is 0, e helyen y'' határozatlan, a mi megfelel annak, hogy e helyen már első differencziálhányados sem létezett. Ismét az A_1O, és OA_2 intervallumokban y'' megtartja előjelét, mert folytonos és nem lesz 0. Tehát A_1O-ban és OA_2-ben mindenütt negativ, mint C_1 és C_2-ben, azaz a görbe fölső ága a O pont kivételével mindenütt alulról nézve concav.

Minthogy végre a görbe alsó ága tüstént levezethető a másikból (nem más mint amannak tükörképe az X tengelyre vonatkozólag), a gyüjtött adatok megadják a görbének alakját, a mint ez a 33. ábrában látható.

115. *A közönséges cyclois* azon görbe, melyet a körnek bármely pontja leír, midőn a kör egyenesen tova gördűl. E gördülő mozgás alatt a körnek következő helyváltozását értjük. Az adott L egyenes a kört minden helyzetében érinti, még pedig úgy, hogy a kör az egyenesnek mindig ugyanazon oldalán fekszik. Más kifejezésben, a kör középpontja egy L' egyenesen halad tovább, mely L-lel párhuzamos és melynek távolsága L-től nem más mint a kör sugara, r. E szerint a kör helyzetét mindenkor középpontjának helyzete jellemzi. Ha most már a kör középpontja C_1-ből C_2-be megy át, ezalatt még a körnek P pontja átmegy P'-be, úgy hogy a $P'\,P$ körív hossza egyenlő a $C_1\,C_2$ egyenesdarab hosszával.

Az L egyenest vegyük X-tengelynek; az Y-tengely pedig menjen keresztül a kör középpontján, midőn ez oly helyzetben van, hogy a vizsgált pontban történik az L érintése. A mozgás jellemzésére igen czélszerűen használhatjuk a gördülési szöget (t), melyet $C_2\,P_2$ a $C_2\,E$-vel, azaz a körnek a mozgó pont felé vont sugara az érintési pont felé vont sugárral bezár. Ennek segítségével a P_2 koordinátái

$$x = P_1E - Q_2E, \quad y = P_2Q_2 = C_2E - C_2R_2\,.$$



34. ábra.

hol a gordülő mozgás értelme szerint $\overline{P_1E}$ a P_2E korívvel, tehát rt-vel egyenlő, továbbá $\overline{C_2E} = r$, végre:

tehát:
$$Q_2E = r \sin. t, \quad C_2R_2 = r \cos. t;$$
$$x = r(t - \sin. t), \quad y = r(1 - \cos. t), \tag{1.}$$

Ezen egyenletek megadják y-t, mint az x egyértékű függvényét; mert

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos. t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = r \sin. t, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = r \cos. t;$$

$\frac{dx}{dt}$ soha nem negativ; ott a hol 0, t. i. midőn $\cos. t = 1$, x második differencziálhányadosa is eltünik, a harmadik pedig pozitiv; tehát x mint a t függvénye mindig növekszik; vagy végre különböző t-knek mindig különböző x értékek felelnek; az x értékek tartománya szintén az összes valós számokból áll, azaz végre az $x = r(t - \sin. t)$ egyenlet megadja a t-t is, mint az x egyértékű függvényét, még pedig minden valós x-re.

E szerint y a t és t az x, vagy végre y az x-nek is mindenütt egyértékű függvénye; tehát egyértékű függvényágakra többé nem kell fölbontani. Az elemi függvények segítségével t mint az x függvénye nem irható föl, tehát y sem. De ez nem okoz bajt, a mennyiben következtetéseinket — még egyszerűbben is — a ki nem fejtett és közvetve adott függvényalakon (1.) végezhetjük.

Mindenekelőtt látni, hogy a görbe ordinátái soha sem negativok; és csak ott lesz $y = 0$, azaz a görbének az X tengelylyel közös pontja, hol $\cos. t = 1$, azaz $t = 2k\pi$, tehát végre ott, hol

$$x = 2k\pi . r.$$

A differencziálhányadosok:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\sin. t}{1 - \cos. t} = \cot. \tfrac{1}{2} t,$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dx} : \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4r \sin.^4 \frac{1}{2} t}.$$

E szerint y' meghatározott érték azon helyek kivételével, hol $\frac{dx}{dt} = 0$, de ekkor egyszersmind $\frac{dy}{dt} = 0$, t. i. a $t = 2k\pi$, vagy $x = 2k\pi . r$ helyeken. De e helyeken, $x = 2k\pi r$, $t = 2k\pi$, minthogy lim. Δx és lim. Δt egyidőben lesz $+0$ vagy -0, még:

$$\lim_{\Delta x = \pm 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t = \pm 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} : \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta t = \pm 0} \frac{1 - \cos. \Delta t}{\Delta t - \sin. \Delta t} = \pm \infty.*$$

E szerint az $x = 2k\pi r$, $y = 0$ pontok *elsőfajú csúcspontok*, a melyekig a görbe leszáll, a melyektől kezdve pedig ismét emelkedik.

Minden más helyen y' véges és meghatározott, pozitiv vagy negativ, a mint t a $2k\pi$ és $(2k+1)\pi$, vagy pedig $(2k+1)\pi$ és $(2k+2)\pi$ közt fekszik. E szerint *a görbe a* $2kr\pi \ldots (2k+1)r\pi$ *intervallumokban emelkedik, a* $(2k+1)r\pi \ldots (2k+2)r\pi$ *intervallumokban leszáll.* Már ebből is világos, hogy az $x = (2k+1)r\pi$ *helyek felső tetőpontok.* Itt ugyanis $y' = 0$, a második differencziálhányados pedig $-\frac{1}{4r}$, negativ. A második differencziálhányados mindig véges és meghatározott negativ szám, kivéve az $x = 2k\pi r$ helyeket, hol azonban a görbének csúcspontja van, tehát a második differencziálhányadosnak nincs is értelme. A görbe két-két csúcspontja közt mindig alúlról nézve concav.

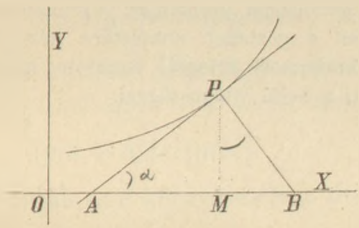
Jegyezzük meg végre, hogy az $x + 2kr\pi$-nek a k bármely egész számú értékénél ugyanazon y felel meg; a görbe tehát végte-

---

* Hogy e határérték végtelen, azt a $\lim_{x=0} \frac{1 - \cos. x}{x - \sin. x}$ közönséges tárgyalása, mint határozatlan alaké közvetetlenül mutatja; az előjelre vonatkozólag csak megjegyzendő, hogy ama kifejezés mindig pozitiv vagy mindig negativ, a mint Δt pozitiv vagy negativ; t. i. mindig $|\Delta t| > |\sin. \Delta t|$; a nevező előjelét tehát Δt adja meg, míg a számláló természetesen pozitiv.

len sok egymásmellé rakott kongruens darabból áll, a mi végre a 34. ábra alakját adja.

116. Ide csatoljuk még néhány néha használt kifejezés magyarázatát. A görbe valamely pontjában megszerkesztvén az érintőt és a normálist, ezek — általánosságban, ha t. i. egyikük sem párhuzamos az X-tengelylyel — az X-tengelylyel együtt háromszöget adnak, melyben az érintő és a normális által képezett oldalokat is *tangens*nek és *normális*nak szokás nevezni. Ha az X tengelyt alapnak tekintjük, e háromszög magassága az érintési pont ordinátája y. Az elemzett háromszög ezáltal két derékszögű háromszögre



35. ábra.

lesz fölbontva, melyekben a harmadik oldalt (t. i a tangens, ill. normális projekczióját az X-tengelyre) *subtangens*, ill. *subnormális*nak nevezzük.

A mellékelt rajzban

$$Tg. = PA,\ Nm. = PB,\ Sbtg. = AM,\ Sbnm. = MB$$

Minthogy még tg. $\alpha = y'$, e háromszögek közvetetlenül föloldhatók. T. i. az előjel mellőzésével:

$$Tg. = \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}, \qquad Sbtg. = \frac{y}{y'}$$

$$Nm. = y\sqrt{1+y'^2}, \quad Sbnm. = yy'.$$

Az előjel természetesen attól függ, hogy e vonaldarabokat mily irányban veszszük. Különben ezen elnevezéseket csak teljesség kedvéért, mint régebben többet használtakat, említjük föl. E tisztán a választott koordinátarendszertől függő vonalhoszszak semmivel sem járulnak az illető görbe jellemzéséhez.*

* E tárgyalások végén nem lesz fölösleges külön kiemelni, hogy e geometriai vizsgálatok itt csak mint a differencziálszámítás elemeinek egyszerű alkalmazásai találják helyüket. Hogy ezek még nem adják az illető problémák kielégítő analitikai megoldását, az már a definiczióknak (p. érintés) formális, nem geometriai tartalmából és a speczialis koordinátarendszer választásától függő eredményekből is világos. Így például azon körülmények, hogy az ábrázoló függvény kivételes viszonyokat mutat, mert az érintő az X-tengelyre merőleges, hogy p. már a kör vizsgálatánál ezt az egyszerű alakot két (egyértékű függvényeknek megfelelő) darabra kell fölbontani, — mind már arra utalnak, hogy az előadott módszerek nem a probléma természetének megfelelők. Az analizis módszereinek további kifejtésével az ide tartozó geometriai problémák is rendszeresen lesznek még tárgyalandók. Különösen a görbület elméletére nézve megjegyzendő, hogy az ívhossz, tehát a határozott integrál ismerete nélkül, annak még föladata sem fejthető ki a kellő világossággal.

HARMADIK SZAKASZ.

AZ ELEMI FÜGGVÉNYEK ELMÉLETE.

I.

Raczionális egész és tört függvények.

Az algebra alaptétele.

117. *Ha a $g(x)$ n-edfokú egész függvénynek értéke az a helyen nem 0, akkor mindig lehet egy $a+h$ helyet meghatározni, melyen:*

$$|g(a+h)|<|g(a)|.$$

Ha $g(x)$-et kifejtjük az a környezetében, mindenesetre:

$$g(a+h)=g(a)+g'(a)\frac{h}{1}+\ldots+g^{(k)}(a)\frac{h^k}{k!}+\ldots+g^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}.$$

Esetleg lehetséges, hogy $g'(a)$, $g''(a),\ldots$ eltünnek. Ekkor van egy *első* érték e sorozatban $g^{(k)}(a)$, mely nem 0; mert ha $g'(a),\ldots g^{(n)}(a)$ mind eltünnek, akkor $g(x)$ mindig egyenlő $g(a)$-val, azaz állandó, mely eset természetesen kezdettől fogva kizártnak tekintendő. Ezt tekintetbe véve:

$$\begin{aligned}\frac{g(a+h)}{g(a)}&=1+\frac{g^{(k)}(a)}{g(a)}\frac{h^k}{k!}+\frac{g^{(k+1)}}{g(a)}\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}+\ldots+\frac{g^{(n)}(a)}{g(a)}\frac{h^n}{n!}\\&=1+Ch^k(1+C_1h+\ldots+C_{n-k}h^{n-k})\end{aligned}$$

hol a $C, C_1,\ldots C_{n-k}$ állandók és C nem 0.

Ha h_1 a

$$Ch^k=-1$$

egyenlet egyik megoldása, akkor t alatt pozitiv állandót értve, Ch^k mindig negativ, ha

$$h=h_1 t.$$

A zárjelben álló kifejezés:

$$1 + C_1 h_1 t + C_2 h_1^2 t^2 + \ldots + C_{n-k} h_1^{n-k} t^{n-k}$$

a t egész függvénye és a $t = 0$ helyen 1; tehát $1 + \varphi(t)$ alakban irható, hol $\lim_{t=0} \varphi(t) = 0$. E szerint

$$\frac{g(a + h_1 t)}{g(a)} = 1 - t^k (1 + \varphi(t)).$$

Minthogy $\lim_{t=0} \varphi(t) = 0$, és

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + i \varphi_2(t),$$

még:

$$\lim. \varphi_1(t) = 0, \quad \lim. \varphi_2(t) = 0,$$

és végre:

$$\left| \frac{g(a + h_1 t)}{g(a)} \right|^2 = \left(1 - t^k (1 + \varphi_1(t))\right)^2 + t^{2k} \varphi_2(t)^2 =$$

$$= 1 - t^k \left[2 + 2\varphi_1(t) - t^k \left((1 + \varphi_1(t))^2 + \varphi_2(t)^2 \right) \right]$$

Ha t elég kicsiny, a zárjelben álló kifejezés tetszőleges közel jut 2-hez és így az 1-ből levonandó érték pozitiv, de egyszersmind, ismét ha t elég kicsiny, 1-nél kisebb. Tehát

$$\left| \frac{g(a + h_1 t)}{g(a)} \right|^2 < 1$$

Ugyanez áll ekkor a négyzet jele alatt álló kifejezésre is és így csakugyan:

$$|g(a + h)| < |g(a)|$$

ha $h = h_1 t$, hol h_1 a $Ch^k = -1$ egyenlet megoldása és t elég kis pozitiv valódi tört.

A levezetett eredményből közvetetlenül áttérhetünk *az algebra alaptételére, mely szerint minden algebrai egyenletnek van (valós vagy complex) gyöke.*

E tétel természetesen úgy is fogalmazható, hogy van egy hely, melyen a $g(x)$ egész függvény értéke 0.

A $|g(x)|$ értékeinek mindenesetre van alsó határuk; azaz egy G érték, melyre nézve mindig

$$|g(x)| \geq G,$$

és egyszersmind mindig vannak, bármicsoda pozitiv szám is δ_n, oly x_n helyek, hogy

$$G < |g(x_n)| + \delta_n.$$

A tárgyalást ugyanis azon x-ekre szoríthatjuk, melyekre nézve $|x| < R$, hol R azon föltételből van meghatározva, hogy $|g(x)|$ nagyobb maradjon a szabadon választott a-nak megfelelő $|g(a)|$-nál, ha $|x| > R$. (Lásd I. r. 39. czikk), melynek tárgyalása szóról szóra átvihető complex változó és complex együtthatók esetére). Ha $g(a)$ nem 0 — a mely esetben tételünk már is helyesnek bizonyult volna — az $|x| < R$ föltételnek megfelelő $g(x)$ értékek véges tartományt alkotnak, és a $|g(x)|$-eknek a 4. czikk értelmében csakugyan van alsó hataruk, G, mely természetesen $|g(a)|$-nál kisebb.

De ebből ismét következik, hogy $G = 0$; mert ha G a 0-tól különböző, pozitiv szám, akkor van egy h érték úgy, hogy $|g(x+h)| < |g(x)| = G$, azaz G nem volna a $|g(x)|$ értékek alsó határa. Minthogy $G = 0$ és van egy x hely, hol $g(x) = G$, végre tehát látni, hogy csakugyan van oly x, melyre nézve $g(x)$ eltünik.

118. Legyen

$$g(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n,$$

és A_0 nem 0, tehát $g(x)$ n-edfokú egész függvény; ha most a_1 oly érték, hogy $g(a_1) = 0$, akkor $g(x)$-et kifejtve az a_1 környezetében:

$$g(x) = g'(a_1)\frac{x-a_1}{1} + g''(a)\frac{(x-a_1)^2}{2!} + \ldots + g^n(a_1)\frac{(x-a_1)^n}{n!}$$

$$= (x - a_1)\, g_1(x),$$

hol $g_1(x)$, mint közvetetlenül látni, $n-1$-edfokú egész függvény, melyben az $n-1$-ső hatvány együtthatója $\frac{g^{(n)}(a_1)}{n!}$ ugyanaz, mint az n-edik hatványé $g(x)$-ben, t. i. A_0.

A $g_1(x)$ függvényre nézve ismét találni egy a_2 helyet, melyen $g_1(a_2) = 0$ és tehát

$$g_1(x) = (x - a_2)\, g_2(x),$$

hol $g_2(x)$ ismét $n-2$-edfokú egész függvény és a legmagasabb hatvány együtthatója A_0. Ezen eljárás folytatásával végre

$$g_{n-2}(x)=(x-a_{n-1})\,g_{n-1}(x),$$

hol

$$g_{n-1}(x)=A_0x+B=A_0(x-a_n)$$

ha a $g_{n-1}(x)=0$ egyenlet gyökét $\left(-\frac{B}{A_0}\right)$ ismét a_n-nel jelöljük.

Ezen eredmények összeállítása adja *az n-edfokú egész függvénynek gyöktényezőkre bontott alakját:*

$$g(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=$$
$$=A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

mely újból mutatja, hogy $a_1, a_2, \ldots a_n$ a $g(x)=0$ egyenlet gyökei és hogy más, az a számok sorozatában nem foglalt érték nem lehet a $g(x)=0$ egyenlet gyöke. Mert ha x e számoktól különbözik, minden szorzó a 0-tól különböző, tehát a szorzat, $g(x)$ sem lehet 0.

Ha az a helyen nemcsak $g(x)$, hanem $g'(x)$ is 0, akkor a a $g(x)=0$ egyenlet többszörös gyöke; pontosabban a az egyenlet k-szoros gyöke, ha $g(a), g'(a), \ldots g^{(k-1)}(a)$ eltünnek, ellenben $g^{(k)}(a)$ a 0-tól különbözik.

Ha a a $g(x)=0$ egyenlet k-szoros gyöke, akkor $g(x)$-et az a környezetében kifejtve:

$$g(x)=g^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}+\ldots+g^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$
$$=(x-a)^k g_{n-k}(x)$$

hol $g_{n-k}(x)$ az x-nek $n-k$-adfokú egész függvénye. Ellenben ekkor nem lehetséges, hogy:

$$g(x)=(x-a)^{k+1}g_{n-k-1}(x);$$

mert a mint a differencziálás ezt közvetetlenül mutatja, ekkor $g^{(k+1)}(a)$ föltevésünk ellenére szintén 0 volna.

Az első alakban tehát $g_{n-k}(x)$ az a behelyettesítésné nem 0; mert különben

$$g_{n-k}(x)=(x-a)\,g_{n-k-1}(x)$$

volna és $g_{n-k}(x)$ e részletes alakja, a $g(x)$-be behelyettesitve, a lehetetlennek bizonyított $(x-a)^{k+1}\,g_{n-k-1}(x)$-hez vezetne.

Ha tehát a az egyenlet k-szoros gyöke, az $a_1, a_2, \ldots a_n$ sorozatban pontosan k szám egyenlő a-val és az $x-a$ gyöktényező a k-adik hatványon fordul elő. Hogy több, mint k szám nem lehet a-val egyenlő, azt az előbbiekből tudjuk. Ha kevesebb mint k szám egyenlő a-val, akkor

$$g(x)=(x-a)^{k'}\,g_{n-k'}(x) \qquad (k'<k)$$

és a $g_{n-k'}(x)=0$ egyenletnek többé a nem gyöke, azaz $g_{n-k'}(a)$ nem 0. De ekkor $g^{(k')}(a)$ már nem volna 0 és tehát a nem is k-szoros gyök.

Ebből látni, hogy a gyöktényezőkre bontott alak a számítás menetétől független. Mert ha

$$a_1, a_2, \ldots, a_r$$

az $a_1, \ldots a_n$ sorozatban előforduló különböző számok, ama szorzatban csak az $(x-a_1), \ldots, (x-a_r)$ tényezők fordúlhatnak elő, még pedig ha $a_1, a_2, \ldots, a_r$ általános $k_1, k_2, \ldots, k_r$-szeres gyök pontosan a $k_1, k_2, \ldots, k_r$-edik hatványon. Tekintettel a többszörös gyökökre az egész függvény gyöktényezőkre bontott alakja még:

$$g(x)=A_0\,(x-a_1)^{k_1}\,(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_r)^{k_r},$$

hol $a_1, a_2, \ldots, a_r$ most már különböző számok és $k_1+k_2+\ldots+k_r=n$.

Ha a gyökök megszámlálásánál minden gyököt annyiszor olvasunk, a hányszoros gyöke az egyenletnek, akkor *minden n-edfokú algebrai egyenletnek n gyöke van,* hol a megolvasás módja épen ugy lett megállapítva, hogy a tétel fogalmazásába ne kelljen kivételes eseteket fölvennünk.

Minthogy a akkor és csak akkor a $g(x)=0$ egyenlet többszörös gyöke, ha $g(a)$ és $g'(a)$ zérus, a többszörös gyökök föllépését még a következő tételben jellemezhetjük:

A $g(x)=0$ egyenletnek csak akkor van többszörös gyöke, ha a $g(x)=0$ és $g'(x)=0$ egyenleteknek van közös gyökük. A $g(x)=0$ és $g'(x)=0$ egyenletek minden közös gyöke a $g(x)=0$ többszörös gyöke; még pedig, ha a a $g(x)=0$ k-szoros gyöke, ugyane szám a

$g'(x)=0$ *egyenletnek* $k-1$*-szeres gyöke.* Az a helyen ugyanis $g'(x)$-nek $k-1$-edik differencziálhányadosa az első, mely nem 0.

Ha $k=1$, az a a második egyenletben 0-szoros gyök, azaz nem gyök.

Jegyezzük meg még itt, hogy *ha $g(x)$ minden együtthatója valós és $a=p+qi$ a $g(x)=0$ egyenlet k-szoros gyöke, akkor a conjugált értéke $\beta=p-qi$ szintén a $g(x)=0$ egyenlet k-szoros gyöke.*

Ekkor ugyanis minden x-re:

$$g(x)=(x-p-qi)^k g_{n-k}(x).$$

vagy ha a $g_{n-k}(x)$-ben az együtthatók valós és képzetes részét elkülönítjük:

$$g(x)=(x-p-qi)^k \left(g^{\mathrm{I}}_{n-k}(x)+i\,g^{\mathrm{II}}_{n-k}(x)\right)$$

Ha itt a jobboldalon — x-et valósnak véve — a valós és képzetes részt elkülönítjük, az i-vel szorzott rész az x egész függvénye, mely az x minden valós értékénél 0, mert ekkor $g(x)$ képzetes része 0; de az ily egész függvény minden együtthatója 0. Ha pedig i helyett $-i$-t irunk, csak ezen azonosan eltünő egész függvény előjele változik, azaz a kifejezés változatlan marad és így csakugyan:

$$g(x)=(x-p+qi)^n \left(g^{\mathrm{I}}_{n-k}(x)-i\,g^{\mathrm{II}}_{n-k}(x)\right).$$

119. Ha a $g(x)=0$ egyenlet összes gyökei meg vannak adva, minden gyöknek többszörösségi fokával együtt, akkor a $g(x)$ egy szorzási állandó mellőzésével teljesen meg van adva; az előbb használt jelzések alkalmazásával:

$$g(x)=C(x-a_1)^{k_1}\ldots(x-a_r)^{k_r}.$$

Az így keletkező egyenletek — mint ilyenek — teljesen æquivalensek. A $g(x)$, mint függvény, teljesen meg van adva, ha adva van értéke egy egyéb β helyen. Ha $g(\beta)=B$, akkor x helyébe β-t téve:

$$B=C(\beta-a_1)^{k_1}\ldots(\beta-a_r)^{k_r}$$

a mi megadja a C értékét. Minthogy β nem gyök, B nem lehet 0, és így természetesen C sem 0.

E fejtegetésből is következtethetünk arra, hogy *ha valamely $g(x)$ függvénynél több mint n érték van, melynél $g(x)$ zérus, akkor $g(x)$ azonosan eltünik, azaz minden együtthatója zérus.* Mert ekkor épen C zérus volna. Különben ezen eredmény csak speciális esete a következő fontos tételnek:

Mindig létezik egy és csak egy n-edfokú egész függvény, mely az

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$n+1$ *(különböző) helyen a tetszőlegesen választott*

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$$

értékeket veszi föl.

Hogy ily függvény van, azt *a* LAGRANGE *interpolláczió-képlete,* mely e függvényt megadja, közvetetlenül mutatja. Ez a következő:

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\,y_1 + \ldots +$$

$$+ \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\,y_i + \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\,y_n,$$

hol az y_i szorzójában a számláló a

$$\prod_{m=0}^{n}{}^{(i)}(x-x_m)$$

szorzat *az $x-x_i$ tényező kihagyásával,* a mire az i jelző figyelmeztet, ép ily jelzéssel a nevező pedig $\prod_{m=0}^{n}{}^{(i)}(x_i-x_m)$. Ha tehát $x=x_i$, minden tag elesik, kivéve azt, melyben y_i előfordul és ennek együtthatója akkor az egység.

Hogy több mint egy, e föltételeknek megfelelő egész függvény nincsen, szintén könnyen belátható. Ha p. $g(x)$ és $G(x)$ ilyenek, akkor $g(x)-G(x)$ szintén n-edfokú egész függvény, mely az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ helyeken, tehát mindössze $n+1$ helyen 0 lesz. De akkor kell hogy, $g(x)-G(x)$-ben az x minden hatványának együtthatója zérus legyen, vagyis hogy $g(x)$ és $G(x)$-ben az egyenlő hatványok együtthatói egyenlők legyenek. De ekkor épen $g(x)$ és $G(x)$ azonos függvényalakok.

120. Ha a $g(x)$ n-edfokú egész függvényt először az x fogyó hatványai szerint rendezett alakban és másodszor gyöktényezőkre bontott alakjában irjuk:

$$g(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_k x^{n-k} + \ldots + A_n,$$

$$g(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n),$$

akkor e két kifejezés az x minden értékénél azonos; ha tehát a szorzatalakban a szorzást végrehajtjuk, kell, hogy az x különböző hatványainak együtthatói ugyanazok legyenek, mint az első alakban. Ezen összehasonlítás a következő képletekhez vezet, melyek *a $g(x) = 0$ egyenlet gyökei és együtthatói között fönnálló kapcsolatra* nézve igen jellemzők:

$$A_0 \Sigma a_1 = - A_1,$$

$$A_0 \Sigma a_1 a_2 = A_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_0 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_k = (-1)^k A_k,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A_0 a_1 a_2 \ldots a_n = (-1)^n A_n.$$

Itt a $\Sigma a_1 a_2 \ldots a_k$ jelzésnél az összeg jele kiterjed az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemeknek minden k-tagú kombinácziójára, melyek az összeadásnál azután szorzatoknak tekintendők. Avval, hogy az összeg jele alatt kiirjuk az első ily kombinácziót, az egész összeget jellemezzük.

Hogy csakugyan $(-1)^k A_0 \Sigma a_1 a_2 \ldots a_k$ az x^{n-k} együtthatója, arról könnyű meggyőződni. Hogy ugyanis a szorzat oly tagjához jussunk, melyben x^{n-k} előfordúl, $n - k$ tényezőben veendő x és k tényezőben a második tag, a mi csakugyan az a-k közül bármely k elemnek szorzásához vezet, mindig a $(-1)^k$ együtthatóval. Hozzálép még végre az elől álló A_0 tényező.

A most fölirt képletek baloldalán föllépő kifejezéseknek egy igen nevezetes sajátságuk van. Ha t. i. bennök az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

elemeket rendre fölcseréljük az

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$$

elemekkel, hol $i_1, i_2, \ldots i_n$ az $1, 2, \ldots n$ bármely permutácziója, akkor az illető kifejezésnek még alakja sem változik. Minden kifejezést, melynek e tulajdonsága van, az $a_1, a_2, \ldots a_n$-re vonatkozólag *szimmetrikus* kifejezés. Mint e helyen már nem tárgyalandó — a szó szorosabb értelmében algebrai — vizsgálatok kiinduló pontját megemlítjük még azon fontos tételt, hogy minden raczionális egész kifejezés, mely az $a_1, a_2, \ldots a_n$-re vonatkozólag szimmetrikus, mint épen a fönt bevezetett kombinatorikus összegek raczionális egész kifejezése, tehát egyszersmind mint $\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \ldots, \frac{A_n}{A_0}$ egész kifejezése irható.

Az egész függvények oszthatósága.

121. *Legyen*

$$g(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

$$g_1(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_n,$$

két m-ed, ill. n-edfokú egész függvény és $m \geqq n$ *akkor mindig lehet egy csak egy az n-ediknél alacsonyabb fokú* $r(x)$ *egész függvényt meghatározni, úgy hogy azonosan:*

$$B_0^{m-n+1} g(x) = g_1(x)\, q(x) + r(x).$$

hol $q(x)$ *is azután egy bizonyos egész függvény, melynek foka mindig* $m-n$. *Ha* $m = n$, *akkor* $q(x)$ *állandó. A* $q(x)$ *és* $r(x)$ *együtthatói a* $g(x)$ *és* $g_1(x)$ *együtthatóiból csupán összeadás, kivonás és szorzás által keletkeznek, azaz ezen együtthatókból képezett egész kifejezések.* (Ha tehát $g(x)$ és $g_1(x)$ együtthatói egész számok, a $q(x)$ és $r(x)$ együtthatói is ilyenek.*)

Hogy először is $q(x)$ fokának meghatározása helyes, könnyen belátható. Minthogy ugyanis $m \geqq n$, a jobboldal akkor és csak akkor kezdődik az x-nek épen m-edik hatványával, ha $q(x)$ az x-nek $m-n$-edfokú egész függvénye, a föltétel szerint legfölebb $n-1$-ed fokú $r(x)$ t. i. semmi esetre sem tartalmazza az x^n-t.

* Közvetetlenül látni, hogy ez nem más, mint azon eljárás jellemzése, mely az elemekben, mint az x fogyó hatványai szerint rendezett kifejezések osztása szerepel. Az egyes lépéseknél ott csak B_0 jut a nevezőbe; a «hányados» és «maradék» együtthatóit a B_0 kellő hatványaival szorozva, itt mindjárt megszabadítottuk e nevezőtől.

Hogy e meghatározás mindig és csak egy módon lehetséges, azt az ú. n. «osztás» végrehajtása mutatja, mely pontos fogalmazásban nem más mint elsőfoku egyenletrendszer megoldása.

Ha ugyanis részletesen:

$$q(x) = K_0 x^{m-n} + K_1 x^{m-n-1} + \ldots + K_i x^{m-n-i} + \ldots + K_{m-n},$$

akkor kell, hogy

$$r(x) = B_0^{m-n+1} g(x) - g_1(x) q(x)$$

$$= B_0^{m-n+1}(A_0 x^m + \ldots + A_m) - (B_0 x^n + \ldots + B_n)(K_0 x^{m-n} + \ldots + K_{m-n})$$

rendezése után az $x^m, x^{m-1}, \ldots, x^n$ együtthatói mind egyenlők legyenek 0-sal. Ezen követelés a következő egyenletrendszerhez vezet:

$$\begin{aligned}
B_0^{m-n+1} A_0 &= B_0 K_0, \\
B_0^{m-n+1} A_1 &= B_1 K_0 + B_0 K_1, \\
B_0^{m-n+1} A_2 &= B_2 K_0 + B_1 K_1 + B_0 K_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_0^{m-n+1} A_i &= B_i K_0 + B_{i-1} K_1 + \ldots + B_0 K_i, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_0^{m-n+1} A_{m-n} &= B_{m-n} K_0 + B_{m-n-1} K_1 + \ldots + B_0 K_{m-n}.
\end{aligned}$$

Minthogy B_0 nem 0, ezen egyenletek csakugyan meghatározzák egymásután $K_0, K_1, \ldots K_{m-n}$-et, még pedig mint az A és B együtthatók egész kifejezését. Az egyenletrendszer determinánsa ugyanis B_0^{m-n+1}, és így az ismeretlenek általános meghatározásánál, ha a számlálóban e determináns egyik oszlopa helyett a baloldalon álló tagokat irjuk, minden tagból, tehát a determinánsból is kiemelhető B_0^{m-n+1}, és így végre a K_i alakjából a B_0^{m-n+1} nevező is eltávolítható.

A K együtthatók e meghatározása után végre $r(x)$ szintén meghatározott egész függvény, mely x-nek legfölebb $n-1$-edik hatványát tartalmazza.

122. A gyakorlatban ezen osztás igen gyakran azon esetben végezendő mikor

$$g_1(x) = x - a;$$

ekkor $B_0 = 1$, $B_1 = -a$, $n = 1$, és így a $q(x)$ meghatározására szolgáló egyenletek lesznek:

$$\begin{aligned} K_0 &= A_0 \\ K_1 &= A_1 + a K_0 = \\ K_2 &= A_2 + a K_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_i &= A_i + a K_{i-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{m-1} &= A_{m-1} + a K_{m-2}; \end{aligned}$$

valamint végre ekkor $r(x)$ 0-odfokú egész függvény, azaz állandó, még pedig:

$$r = A_m + a K_{m-1}.$$

Minthogy ekkor az x minden értékénél:

$$g(x) = (x - a)\, q(x) + r,$$

az x helyébe a-t téve, még látni, hogy:

$$r = g(a).$$

Ez igen egyszerű számítási módhoz vezet, az ú. n. *rövidített osztás*hoz; ha t. i. sorba irjuk az $A_0, A_1, \ldots A_m$ együtthatókat, akkor a $q(x)$ hányados együtthatói, az $x - a$ osztó esetében következőkép keletkeznek. Az első együttható A_0, ezt megszorozzuk a-val és hozzáadjuk A_1-t, ekkor keletkezik K_1; ezt megszorozzuk a-val és hozzáadjuk A_2-t, ez nem más mint K_2; és úgy tovább. Ha végre a hányados utolsó együtthatóját ismét megszorozzuk a-val és hozzáadjuk A_m-et, még meghatározzuk az osztás maradékát, r-t. A számítást legczélszerűbben a következő táblázat szerint rendezzük be:

$$\begin{array}{r|l} & A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{m-1},\ A_m \\ \hline a & K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_{m-1},\ \underline{r} \end{array}$$

Czélszerű, ha a maradékot úgy mint az a táblázatban történt, külsőleg is elválasztjuk a hányados együtthatóitól.

Ha p. $g(x) = 5x^4 - x^2 + x - 2$, és $a = -2$, akkor:

$$\begin{array}{r|l} & 5,\quad 0,\ -1,\ +1,\ -2 \\ \hline -2 & 5,\ -10,\ 19,\ -37,\ \underline{|72} \end{array}$$

A mi rövid összevonásban a következő teljes eredményt adja:

$$5x^4 - x^2 + x - 2 = (x+2)(5x^3 - 10x^2 + 19x - 37) + 72.$$

123. Ha a maradék $r(x)$ azonosan 0, akkor amaz osztási eljárás eredménye:

$$B_0^{m-n+1}\,g(x) = g_1(x)\,q(x),$$

és $g_1(x)$ a $g(x)$ osztója. *Általánosan a $g_1(x)$ egész függvény a $g(x)$ egész függvény osztója, ha van egy második $g_2(x)$ egész függvény, úgy hogy:*

$$g(x) = g_1(x)\,g_2(x).$$

Ha ekkor a $g_1(x)$ legmagasabb hatványának együtthatója B_0 és $g(x)$, ill. $g_1(x)$ fokszáma m és n, akkor — mint előbb, okvetetlenül $m \geq n$, és

$$B_0^{m-n+1}\,g(x) = g_1(x)\,q(x),$$

ha t. i. $q(x) = B_0^{m-n+1}\,g_2(x)$, tehát $g_2(x)$ együtthatói ismét a $g(x)$ és és $g_1(x)$ együtthatóiból összerakott raczionális kifejezések.

Hogy $g_1(x)$ a $g(x)$ osztója legyen, arra tehát a szükséges és elegendő föltétel az, hogy az előbb elemzett eljárás értelmében képezett $r(x)$ egész függvény azonosan 0 legyen.

Ha $g_1(x)$ a $g(x)$ osztója, akkor $Cg_1(x)$ is osztó; mert ekkor $g_1(x)$ legmagasabb együtthatója B_0C és megfelelőleg

$$(B_0C)^{m-n+1}\,g(x) = Cg_1(x)\,C^{m-n}\,q(x).$$

A $Cg_1(x)$ osztók — bármilyen állandó a C — *nem lényegesen különböző osztók;* egy ilyen mindnyájuk képviselőjének választható p. $g_1(x)$. Minden állandó a $g(x)$ függvény osztójának tekinthető; mert

$$g(x) = 1 \,.\, g(x)$$

és 1-gyel együtt C is osztó; az x-et nem tartalmazó osztók közös képviselője tehát az egység.

Ha $g_1(x)$ a $g(x)$ osztója, akkor, mint a $g(x) = g_1(x)\,g_2(x)$ alakból közvetetlenül látni, a $g_1(x) = 0$ egyenlet minden gyöke előfordul a $g(x) = 0$ egyenlet gyökei közt, még pedig e gyök többszörösségi foka a $g_1(x) = 0$ egyenletben nem lehet nagyobb mint a $g(x) = 0$

egyenletben. Mert ha a $g_1(x)$ és a $g_2(x)$-et is fölbontjuk gyöktényezőkre, a $g(x)$ az ama gyöknek megfelelő tényezőt legalább is azon hatványon tartalmazza, mint $g_1(x)$. Az egész függvények oszthatósági viszonyainak elemzése nem kivánja meg az algebra alaptételének ismeretét, vagy — gyakorlatilag kifejezve — a $g(x)=0$ egyenlet megoldását. Az erre vonatkozólag közbeszőtt megjegyzések az illető alakok jelentését más szempontból jellemzik; de, mi épen a gyakorlat szempontjából is fontos, minden ide vonatkozó számítás a $g(x)=0$ egyenlet gyökeinek ismerete nélkül végezhető, és csak az első három alapművelet alkalmazását követeli.

Az egész függvények oszthatóságának elmélete, ha a nem lényegesen különböző osztóknak mindig csak egy képviselőjét veszszük tekintetbe, majdnem teljes analogiát mutat az egész számok oszthatóságának elméletével (I. r. 23. l. és t.), és azért most elégséges lesz, ezt egyes pontokban egész röviden vázolni. Igy p. épen úgy, mint az idézett helyen: Ha $g_1(x)$ osztója $g(x)$ és $h(x)$-nek, akkor bárminő egész függvények $G(x)$ és $H(x)$, $g_1(x)$ egyszersmind osztója $g(x)\,G(x)+h(x)H(x)$-nek. S. ú. t.

124. Két egész függvény *közös osztója* minden egész függvény, mely úgy az egyiknek, mint a másiknak osztója. Minden egész függvény osztója az 1, és evvel együtt bármely állandó. Épen ezért ezt az osztót nem is veszszük tekintetbe, hanem azt mondjuk, hogy a két egész függvénynek van vagy nincsen közös osztója, a mint van vagy nincsen oly közös osztó, mely az x-nek igazi egész függvénye (nem 0-od fokú, azaz állandó).

Hogy a $g(x)$ és $h(x)$ egész függvényeknek van közös osztójuk, az tehát annyit is jelent, hogy a $g(x)=0$, $h(x)=0$ egyenleteknek van közös gyökük.

Két egész függvénynek mindig meg lehet határozni ú. n. *legnagyobb közös osztó*ját, azaz oly egész függvényt, hogy ennek minden osztója a két egész függvény közös osztója, és megfordítva e két egész függvény minden közös osztója ama legnagyobb közös osztónak is osztója. Hogy a két egész függvénynek nincs közös osztója, az annyit jelent, hogy a legnagyobb közös osztó az egység.

Két egész függvény, $g(x)$ és $h(x)$ legnagyobb közös osztója igen egyszerű eljárás alapján határozható meg. Legyen a két függvény között $g(x)$ az, melynek foka (m) nem kisebb a $h(x)$ fokánál (n).

Akkor — most csak $h(x)$-et irunk a 121. cz. $g_1(x)$-e helyett — lehet egy legfölebb $(n-1)$-edfokú $r_1(x)$ és egy $m-n$-ed fokú $q_1(x)$ egész függvényt meghatározni, úgy hogy :

$$a_1 g(x) = h(x)\, q_1(x) + r_1(x)$$

hol röviden a_1 a $h(x)$ legmagasabb együtthatójának kellő hatványát jelenti. De e képlet mutatja egyszersmind, hogy $g(x)$ és $q_1(x)$ minden közös osztója egyszersmind $r_1(x)$-nek is osztója, valamint $h(x)$ és $r_1(x)$ minden közös osztója egyszersmind osztója $g(x)$-nek. Azaz $g(x)$ és $h(x)$ minden közös osztója egyszersmind közös osztója $h(x)$ és $r_1(x)$-nek; valamint megfordítva $h(x)$ és $r_1(x)$ minden közös osztója egyidőben közös osztója $g(x)$ és $h(x)$-nek. A probléma ilymódon egyszerűsítve lett; mert egy m- és egy n-edfokú egész függvény, hol $m \geq n$, közös osztói helyett egy n-ed és egy legfölebb $n-1$-ed fokú egész függvény közös osztói lesznek meghatározandók. Ezekre nézve az eljárást ismételve :

$$a_2 h(x) = r_1(x)\, q_2(x) + r_2(x),$$

es újból :

$$a_3 r_1(x) = r_2(x)\, q_3(x) + r_3(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_l r_{l-2}(x) = r_{l-1}(x)\, q_l(x) + r_l.$$

Ezen eljárásnál az $r_1(x), r_2(x), \ldots$ egymásután legfölebb $n-1$, $n-2, \ldots$ foku egész függvények. Legfölebb n, de esetleg kevesebb lépés után végre az illető $r(x)$ 0-adfokú, azaz állandó lesz; a mit az egyenletekben úgy jelöltünk, hogy nem $r_l(x)$-et, hanem csak r_l-et irunk, hol természetesen $l < n$.

Ha az x-et nem tartalmazó r_l maradékhoz jutottunk, a vizsgálat be van fejezve. Ha r_l nem 0, akkor $g(x)$, $h(x)$ legnagyobb közös osztója az egység. Mert minden közös osztójuk egyszersmind r_l osztója, és ennek az x (valódi) egész függvénye nem lehet osztója.

Ha $r_l = 0$, akkor $r_{l-1}(x)$ a $g(x)$ és $h(x)$ legnagyobb közös osztója; mert $g(x)$ és $h(x)$ minden közös osztója egyszersmind $r_{l-2}(x)$ és $r_{l-1}(x)$ közös osztója és megfordítva. De $r_{l-1}(x)$ most az $r_{l-2}(x)$ osztója; és így végre $r_{l-1}(x)$ minden osztója $r_{l-2}(x)$ és $r_{l-1}(x)$ közös osztója; azaz $r_{l-1}(x)$ a keresett legnagyobb közös osztó.

Az egész eljárás különben az algebra első elmeiből ismeretes;

de alapvető jelentősége miatt itt egészen pontos alakban volt fogalmazandó.

Ha a $g(x)$ és $h(x)$ egész függvényeknek van közös osztójuk, a $g(x)=0$ és $h(x)=0$ egyenleteknek van közös gyökük és megfordítva; e közös osztók az $r_{l-1}(x)$ osztói, azaz a $g(x)=0$ és $h(x)=0$ minden közös gyöke egyszersmind az $r_{l-1}(x)=0$ egyenlet gyöke, és megfordítva az $r_{l-1}(x)=0$ egyenlet minden gyöke a $g(x)=0$, $h(x)=0$ egyenletek közös gyöke.

E szerint tisztán az első három alapművelet segítségével fölállithatjuk azt az $r_{l-1}(x)=0$ egyenletet, mely a $g(x)=0$ és $h(x)=0$ egyenletek közös gyökeit és csak ezeket tartalmazza.

125. Ha $g(x)$ és $h(x)$-nek nincs közös osztója, akkor az

$$\begin{aligned}
a_1 g(x) &= h(x)\, q_1(x) + r_1(x),\\
a_2 h(x) &= r_1(x)\, q_2(x) + r_2(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_l r_{l-2}(x) &= r_{l-1}(x)\, q_l(x) + r_l
\end{aligned}$$

egyenletrendszerben r_l a 0-tól különböző állandó és a fölirt egyenletrendszer az

$$|r_l|>0$$

föltétel hozzácsatolása után kijelentésére szolgálhat annak, hogy $g(x)$ és $h(x)$-nek nincs közös osztója. Szorozzuk az összes egyenleteket a $\psi(x)$ egész függvénynyel. Lesz:

$$\begin{aligned}
a_1 g(x)\quad \psi(x) &= h(x)\, q_1(x)\, \psi(x) + r_1(x)\, \psi(x),\\
a_2 h(x)\quad \psi(x) &= r_1(x)\, q_2(x)\, \psi(x) + r_2(x)\, \psi(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_l r_{l-2}(x)\, \psi(x) &= r_{l-1}(x)\, q_l(x)\, \psi(x) + r_l\, \psi(x).
\end{aligned}$$

Akkor $g(x)\psi(x)$ és $h(x)$ közös osztói egyszersmind osztói $r_1(x)\psi(x)$-nek, tehát $r_2(x)\,\psi(x)$-nek is és úgy tovább, tehát végre még $r_l\,\psi(x)$-nek is. De r_l állandó és így $r_l\,\psi(x)$ és $\psi(x)$-nek osztói ugyanazok Azaz:

Ha $g(x)$ és $h(x)$-nek nincs közös osztója, akkor — ha $\psi(x)$ tetszőlegesen választott egész függvény — a $g(x)\,\psi(x)$ és $h(x)$ minden közös osztója egyszersmind $\psi(x)$ és $h(x)$ közös osztója.

E tétel két fontos részletezése a következő:

Ha $g(x)$ és $h(x)$-nek nincs közös osztója, de $h(x)$ a $g(x)\,\psi(x)$-nek osztója, akkor $h(x)$ a $\psi(x)$-nek is osztója.

Ha $g(x)$ és $h(x)$-nek, valamint $\psi(x)$ és $h(x)$-nek nincs közös osztója, akkor $g(x)\,\psi(x)$ és $h(x)$-nek sincs közös osztója.

Ép ily egyszerűen látható még, hogy *ha $g(x)$ és $h(x)$ legnagyobb közös osztója $D(x)$, tehát*

$$g(x) = D(x)\,G(x)$$
$$h(x) = D(x)\,H(x)$$

akkor $G(x)$ és $H(x)$-nek nincs közös osztója. Mert ha ez p. $D_1(x)$ és így

$$G(x) = D_1(x)\,G_1(x),$$
$$H(x) = D_1(x)\,H_1(x),$$

akkor $g(x)$ és $h(x)$ közös osztója volna $D(x)\,D_1(x)$, mely $D(x)$-nél magasabb fokú és tehát $D(x)$-nek nem lehet osztója. De ekkor a föltevés ellenére $D(x)$ nem is volna a $g(x)$ és $h(x)$ legnagyobb közös osztója.

126. Az $r_{l-1}(x)$ fölállítása adott egész függvényeknél a most elemzett uton történik legegyszerűbben; ha azonban csak azon kérdés döntendő el, vajjon van-e a $g(x)$ és $h(x)$-nek közös osztója, akkor az jobban eszközölhető egy másik, lényegében Euler-től származó eljárás alapján.

Ha a

$$g(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m\,,$$
$$h(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_n$$

egész függvényeknek van egy elsőfokú közös osztójuk:

$$G(x) = C_0 x + C_1\,,$$

akkor továbbá van egy $m-1$-edfokú $\varphi(x)$ és egy $n-1$-edfokú $\psi(x)$ egész függvény, ugy hogy:

$$g(x) = G(x)\,\varphi(x), \quad h(x) = G(x)\,\psi(x),$$

azaz végre azonosan:

$$g(x)\,\psi(x) = h(x)\,\varphi(x).$$

Ha tehát részletesen:

$$\varphi(x) = P_0 x^{m-1} + P_1 x^{m-2} + \ldots + P_{m-1}$$
$$\psi(x) = Q_0 x^{n-1} + Q_1 x^{n-2} + \ldots + Q_{n-1}$$

akkor kell, hogy $g(x)\,\psi(x)$ és $h(x)\,\varphi(x)$ minden együtthatója megegyezzek, azaz hogy ezen alakzatban:

$$(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m)(Q_0 x^{n-1} + Q_1 x^{n-2} + \ldots + Q_{n-1}) -$$
$$-(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_n)(P_0 x^{m-1} + P_1 x^{m-2} + \ldots + P_{m-1})$$

az x minden hatványának együtthatója 0 legyen. E föltétel a P és Q együtthatók meghatározására a következő homogén elsőfokú egyenletrendszert adja, melyben még a negativ előjelek elkerülése végett P'_i-t irunk $-P_i$ helyébe:

$$\begin{array}{lll}
A_0 Q_0 & + B_0 P'_0 & = 0 \\
A_1 Q_0 + A_0 Q_1 & + B_1 P'_0 + B_0 P'_1 & = 0 \\
A_2 Q_0 + A_1 Q_1 + A_0 Q_2 & + B_2 P'_0 + B_1 P'_1 + B_0 P'_2 & = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \quad (A) \\
A_i Q_0 + A_{i-1} Q_1 + \ldots + A_0 Q_i & + B_i P'_0 + B_{i-1} P'_1 + \ldots + B_0 P'_i & = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad A_m Q_{n-1} & \qquad + B_n P'_{m-1} & = 0
\end{array}$$

E rendszerben a közben álló ($i+1$-dik) sor az egyenletek általános alakját adja, ha $i = 0, 1, \ldots, m+n-1$, és azon A_i, B_i együtthatók helyébe, melyekben a mutató nagyobb mint m, illetőleg n, egyszerűen 0-t teszünk; valamint azon P'_i, Q_i együtthatók helyébe is, melyekben i nagyobb mint $m-1$, illetőleg $n-1$, szintén 0-t teszünk; azaz ha még megállapítjuk, hogy:

$$\begin{array}{l}
A_{m+1} = 0,\ A_{m+2} = 0, \ldots;\ B_{n+1} = 0,\ B_{n+2} = 0, \ldots \\
P'_m \quad = 0,\ P'_{m+1} = 0, \ldots;\ Q_n \quad = 0,\ Q_{n+1} = 0, \ldots
\end{array}$$

Az egész rendszer $m+n$ egyenletet tartalmaz, míg az ismeretlenek (a P-k és Q-k) száma ugyanannyi, úgy hogy az egyenletek száma az ismeretlenekével megegyezik.

Hogy ennek a rendszernek legyen oly megoldása, melyben nem minden P és Q egyenlő 0-sal, kell hogy az egyenletrendszer determinánsa 0 legyen. E determináns első oszlopában áll egymásután $A_0, A_1, \ldots, A_m$ és azután zérusok, a másodikban $0, A_0, \ldots A_m$ és azután 0-ok; i-edik oszlopában az A_0-t $i-1$ sorban 0 előzi meg, és az A_m-et ismét csupán 0-ok követik. Ez így megy az n-edik oszlopig, hol először n sorban áll 0, azután $A_0, A_1, \ldots A_m$. Egész hasonló törvény szerint vannak azután összeállítva a többi oszlopok a B együtthatókból, t. i. az $n+j$-edik oszlopban az első $j-1$ sorban áll 0, azután $B_0, B_1, \ldots B_n$, és ezekután ismét 0-ok.

E determinánst a $g(x)$ és $h(x)$ egész függvények *resultáns*ának nevezzük; szokásosabb ezt oly alakban írni, melyben az oszlopok és sorok föl vannak cserélve. Ekkor:

$$R = \begin{vmatrix} A_0, A_1, \ldots\ldots, A_m, & 0, 0 \ldots\ldots 0 \\ 0, A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m, & 0 \ldots\ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, 0, 0, \ldots\ldots A_0, & A_1, A_2 \ldots A_m \\ B_0, B_1, \ldots\ldots\ldots\ldots & B_n, 0, \ldots 0 \\ 0\ \ B_0, B_1, \ldots\ldots\ldots & B_{n-1}, B_n, \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, \ldots\ldots 0, B_0, & B_1 \ldots\ldots\ldots B_n \end{vmatrix}.$$

127. *A resultáns eltűnése szükséges és elegendő föltétele annak, hogy a $g(x)$ és $h(x)$-nek legyen közös osztója.*

Ha ugyanis R a 0-tól különböző, akkor a $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ együtthatói meghatározhatók úgy, hogy

$$g(x)\psi(x) - h(x)\varphi(x) = 1.$$

Ez ugyanazon (A) egyenletrendszerhez vezet, mint előbb, azon egyetlen változtatással, hogy az utolsó egyenletben a jobb oldalon nem 0, hanem 1 áll. Az egyenletrendszer most nem homogén; determinánsa R nem 0, és így a P' és Q számok egy bizonyos rendszere, melyben nem minden P' és Q zérus, kielégíti az egyenleteket. Van tehát egy φ és egy ψ egész függvény, úgy hogy $g(x)\psi(x) - h(x)\varphi(x) = 1$; de ekkor $g(x)$ és $h(x)$-nek nincs közös osztója; mert kellene hogy ez az 1-nek is osztója legyen, a mi lehetetlen.

E szerint R eltűnése csakugyan szükséges föltétele annak, hogy $g(x)$ és $h(x)$-nek legyen közös osztója. Hogy e föltétel elégséges is, következőkép lesz belátható:

Ha e determináns 0, akkor az (A) egyenletrendszernek van oly megoldása, melyben nem minden P' és Q zérus. Ha P'_0 minden megoldásban 0, akkor Q_0 is 0, amint az első egyenlet mutatja; ha ezenkivül P'_1 is minden megoldásban 0, akkor a második egyenletből látni, hogy ekkor Q_1 is minden megoldásban 0, és úgy tovább. Legyen tehát P'_r és Q_r az első ismeretlen pár, melynek valamely megoldásban a 0-tól különböző értéke van. Minthogy nem minden P' és Q zérus, mindenesetre találunk megfelelő r-et. Ekkor a P' és Q számok alatt e megoldásokat értve:

$$(A_0 x^m + \ldots + A_m)(Q_r x^{n-1-r} + \ldots + Q_{n-1}) =$$
$$= (B_0 x^n + \ldots + B_n)(P_r x^{m-1-r} + \ldots + P_{m-1})$$

azaz $g(x)$ és $h(x)$, $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ fokszámai pontosan:

$$m, \; n, \; m-1-r, \; n-1-r$$

hol r pozitiv egész szám vagy 0, és azonosan:

$$g(x)\psi(x) = h(x)\varphi(x).$$

De ekkor $g(x)\psi(x)$ osztható $h(x)$-szel, de ha $g(x)$ és $h(x)$-nek nincs közös osztója, akkor (125. cz.) kellene, hogy $\psi(x)$ osztható legyen $h(x)$ minden osztójával; tehát $h(x)$-szel is; ez azonban lehetetlen, mert $h(x)$ magasabb fokú egész függvény mint $\psi(x)$. *A $g(x)$ és $h(x)$-nek van tehát közös osztója és a legnagyobb közös osztó legalább is $r+1$-edfokú.* Mert ha ez $D_p(x)$ p-edfokú volna, úgy hogy

$$g(x) = D_p(x)\, g_{m-p}(x),$$
$$h(x) = D_p(x)\, h_{n-p}(x),$$

akkor az előbb fölirt egyenletből volna

$$g_{m-p}(x)\psi(x) = h_{n-p}(x)\varphi(x),$$

melyen ugyanazon következtetést ismételve mint előbb, kitűnnék, hogy $g_{m-p}(x)$ és $h_{n-p}(x)$-nek nincs közös osztója, $h_{n-p}(x)$ osztója volna $\psi(x)$-nek, a mi lehetetlen, ha $p < r+1$; mert ekkor az $n-p$-edfokú h_{n-p} osztója volna az $n-r-1$-ed, tehát alacsonyabb fokú $\varphi(x)$-nek. Tehát $g_{m-p}(x)$ és $h_{n-p}(x)$-nek van közös osztója és $D_p(x)$ nem lehet a $g(x)$ és $h(x)$ legnagyobb közös osztója.

A determinánsok elméletében kifejtett elvek segítségével ebből levezethetők azon föltételeknek definitiv determináns-alakja, melyek szükségesek és elegendők arra, hogy a $g(x)$ és $h(x)$ legnagyobb közös osztója pontosan $r+1$-edfokú legyen; erre azonban e helyen nem térünk át.*

A $g(x)$ és $g'(x)$ resultánsát a $g(x)$ *discriminánsának* nevezzük: e szerint *a discriminans eltűnése a szükséges és elegendő föltétel arra, hogy a $g(x)=0$ egyenletnek többszörös gyöke legyen.*

Igy például az általános harmadfokú egyenletnek:

$$A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$$

akkor és csak akkor van többszörös gyöke, ha discriminánsa eltűnik, azaz:

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 3A_0 & 2A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3A_0 & 2A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3A_0 & 2A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

A harmadfokú egyenletet igen gyakran az

$$x^3 + px + q = 0$$

alakban tárgyaljuk; ekkor discriminánsa, mint az

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = p, \quad A_3 = q$$

helyettesítés a determinánsban mutatja: $4p^3 - 27q^2$.

Raczionális tört függvények.

128. A raczionális tört függvény két raczionális egész függvény hányadosa: $\frac{G(x)}{H(x)}$. Ha $G(x)$ és $H(x)$-nek van közös osztója, és például legnagyobb közös osztójuk $D(x)$, úgy hogy

$$G(x) = D(x)\, g(x),$$

$$H(x) = D(x)\, h(x),$$

* Lásd erre vonatkozólag például Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 4. kiadás, 107. oldal.

és így a $g(x)$ és $h(x)$-nek nincs többé közös osztója, akkor a $\frac{G(x)}{H(x)}$ és $\frac{g(x)}{h(x)}$ *raczionális függvények azonosak*, azaz értékük minden helyen megegyezik, ott t. i. hol $D(x)$ zérus lesz, és így $\frac{G(x)}{H(x)}$-nél a direkt helyettesítés $\frac{0}{0}$ alakot adna, a $\frac{G(x)}{H(x)}$ határértéke ugyanaz, mint $\frac{g(x)}{h(x)}$-é. Minthogy pedig minden helyen, a hol a helyettesítés nem végezhető, a függvény határértéke veendő a függvény értékének, a $\frac{G(x)}{H(x)}$ és $\frac{g(x)}{h(x)}$ függvények értéke (esetleg ∞) minden helyen megegyezik. E szerint $\frac{g(x)}{h(x)}$ a $\frac{G(x)}{H(x)}$- egyszerűsített, *redukált alakja.*

Ha megfordítva $\frac{G(x)}{H(x)}$ és $\frac{g(x)}{h(x)}$ azonosak, hol $g(x)$ és $h(x)$-nek már nincs közös osztója, akkor mindig van egy $D(x)$ egész függvény, úgy hogy:

$$G(x) = D(x)\,g(x), \quad H(x) = D(x)\,h(x).$$

Mert akkor azonosan

$$G(x)\,h(x) = H(x)\,g(x);$$

tehát $G(x)\ h(x)$ osztható $g(x)$-szel; míg $g(x)$ és $h(x)$-nek nincs közös osztója; azaz $G(x)$ osztható $g(x)$-szel, vagyis

$$G(x) = D(x)\,g(x)$$

és természetesen, minthogy

$$\frac{G(x)}{g(x)} = \frac{H(x)}{h(x)},$$

egyszersmind

$$H(x) = D(x)\,h(x).$$

Ha a számláló alacsonyabb fokú, mint a nevező, a raczionális függvényt *valódi tört* függvénynek nevezzük. Közvetetlenül látni, hogy ennek határértéke 0, mikor lim. $x = \infty$; ellentétben az egész függvénynyel, melynek határértéke ekkor ∞.

Minden nem valódi tört raczionális függvény mint egész függvény (esetleg állandó) és valódi tört függvény összege irható. Ha t. i.

$$G(x) = H(x)\,Q(x) + R(x)$$

hol $R(x)$ a $H(x)$-nél alacsonyabb fokú, akkor

$$\frac{G(x)}{H(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{H(x)}.$$

A legegyszerűbb egész függvénynek $C(x-a)^k$, mely csak az a helyen 0, és csak a ∞-ben végtelen, megfelel mint legegyszerűbb tört függvény $\frac{C}{(x-a)^k}$, mely csak az a helyen lesz ∞, és csak a ∞-ben zérus.

129. *Minden valódi raczionális függvény fölbontható parcziális törtek összegére;* hol a parcziális törtek alatt $\frac{C}{(x-a)^k}$ alakú tagok értendők.

Legyen az adott tört függvény $\frac{g(x)}{h(x)}$, hol $g(x)$ a $h(x)$-nél alacsonyabb fokú, és $h(x)$ gyöktényezőkre bontott alakja:

$$h(x) = C(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-k)^\varkappa.$$

Akkor mindig lehet az A állandót úgy meghatározni, hogy

$$\frac{g(x)}{h(x)} - \frac{A_0}{(x-a)^\alpha} = \frac{g_1(x)}{\frac{h(x)}{x-a}}$$

hol $\frac{h(x)}{x-a}$ az $x-a$ gyöktényező eltávolításánál keletkező egész függvényt jelenti, és ennek foka ismét $g_1(x)$-énél nagyobb. Erre ugyanis szükséges, hogy e raczionalis függvénynek

$$\frac{g(x) - A_0 \frac{h(x)}{(x-a)^\alpha}}{h(x)}$$

számlálója is $x-a$-val osztható legyen. De a $\frac{h(x)}{(x-a)^\alpha}$ azon egész függvény, mely $h(x)$-ből az $(x-a)^\alpha$ tényező eltávolításánál keletkezik, és így ha A_0-t a következő egyenletből határozzuk meg:

$$g(a) = A_0\left(\frac{h(x)}{(x-a)^\alpha}\right)_{x=a},$$

a számláló 0 lesz, ha $x = a$, tehát csakugyan $x-a$-val osztható.

Ha ezen eljárást a

$$\frac{g_1(x)}{\frac{h(x)}{x-a}}$$

függvényen ismételjük, ismét kivehető az $\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}$ parcziális tört, és marad egy

$$\frac{g_2(x)}{\frac{h(x)}{(x-a)^2}}$$

tört függvény és ú. t.; míg végre oly raczionális függvényhez jutunk, melyben a nevező az $x-a$ gyöktényozőt nem tartalmazza. Ekkor áttérhetünk az $(x-b)^\beta$-nek megfelelő parcziális törtek kiemelésére; és úgy tovább, míg végre a még szétbontandó raczionális függvény alakja lesz

$$\frac{\gamma(x)}{(x-k)^\varkappa}$$

ha t. i. a C-t még a $\gamma(x)$ együtthatóiba foglaljuk. De a $\gamma(x)$ a $\varkappa$-iknál alacsonyabb fokú és így k környezetében kifejtve, lesz:

$$\gamma(x)=K_0+K_1(x-k)+K_2(x-k)^2+\ldots+K_{\varkappa-1}(x-k)^{\varkappa-1};$$

tehát végre:

$$\frac{\gamma(x)}{(x-k)^\varkappa}=\frac{K_0}{(x-k)^\varkappa}+\frac{K_1}{(x-k)^{\varkappa-1}}+\ldots+\frac{K_{\varkappa-1}}{x-k}.$$

Ily módon a valódi tört raczionális függvény parcziális törtekre bontott alakja:

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{h(x)}&=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\\&+\frac{B_0}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-\beta}+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{K_0}{(x-k)^\varkappa}+\frac{K_1}{(x-k)^{\varkappa-1}}+\ldots+\frac{K_{\varkappa-1}}{(x-k)}.\end{aligned}\qquad (P)$$

130. A valódi tört raczionális függvénynek parcziális törtekre bontott alakja általánosságban meg lévén állapítva, a gyakorlatban, midőn egyes függvények ily módon kifejtendők, a számítás az A, $B,\ldots$ együtthatók meghatározására szorítkozik. Ez kész képlet segítségével történik, melyet a raczionális függvény kifejtett alakjából könnyen levezethetünk. Ha ugyanis (P)-ben $(x-a)^\alpha$-val szorzunk, lesz:

$$\frac{\frac{g(x)}{h(x)}}{(x-a)^\alpha}=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}+\\+(x-a)^\alpha R_a(x)$$

hol $R_a(x)$ oly raczionális függvény, melynek nevezője az a helyen már nem 0, tehát differencziálhányadosai is ugyanily raczionális függvények. És ebből, ha $k<a$,

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\frac{g(x)}{h(x)}}{(x-a)^\alpha}\right) = k!\,A_k + (k+1)\ldots 2\,A_{k+1}(x-a) + \ldots$$

$$+ (\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k)\,A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-k-1} + \frac{d^k}{dx^k}\Big((x-a)^\alpha R_\alpha(x).\Big)$$

a mi akkor is érvényes, ha $k=0$. (Természetesen ismét $0! = 1$).

Az $(x-a)^\alpha\ R_\alpha\ (x)$ k-adik differenencziálhányadosa részletesen kiirva:

$$(x-a)^\alpha R_\alpha^{(k)}(x) + \binom{k}{1}\alpha\,(x-a)^{\alpha-1} R_\alpha^{(k-1)}(x) + \ldots +$$

$$+ \alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)\,(x-a)^{\alpha-k} R_\alpha(x)$$

tehát ha $k<\alpha$, és $x=a$, nem más mint 0. E szerint:

$$\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\frac{g(x)}{h(x)}}{(x-a)^\alpha}\right)\right]_{x=a} = k!\,A_k \qquad (k<\alpha) \tag{1.}$$

meghatározza az A_0, $A_1, \ldots A_{\alpha-1}$ együtthatókat. Képletünkben $\frac{h(x)}{(x-a)^\alpha}$ a $h(x)$-ből az $(x-a)^\alpha$ tényező eltávolításánál keletkező egész függvényt jelenti.

Minthogy a a $h(x)=0$ bármely gyökét jelenti, épen úgy lesz:

$$\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\frac{g(x)}{h(x)}}{(x-b)^\beta}\right)\right]_{x=b} = k!\,B_k, \quad (k<\beta)$$

és a többi.

Gyakori alkalmazása miatt külön kiemeljük azon esetet, midőn $h(x)$ *minden gyöktényezője csak az első hatványon fordul elő*; azaz

$$h(x) = C\,(x-a)\,(x-b)\ldots(x-k)$$

és a, b, $c, \ldots k$ mind különböző számok.

Ha ismét $g(x)$ a $h(x)$-nél alacsonyabb fokú egész függvény, akkor:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{K}{x-k},$$

hol most

$$A = \frac{g(a)}{h'(a)},\ B = \frac{g(b)}{h'(b)}, \ldots K = \frac{g(k)}{h'(k)} \tag{2.}$$

Az előbb levezetett általános képlet értelmében ugyanis

$$A = \left(\frac{\frac{g(x)}{h(x)}}{x-a}\right)_{x=a} = \frac{g(a)}{\left(\frac{h(x)}{x-a}\right)_{x=a}}$$

De a határozatlan alakok kiszámítására adott szabály alkalmazásával:

$$\left(\frac{h(x)}{x-a}\right)_{x=a} = \lim_{x=a} \frac{h(x)}{x-a} = h'(a);$$

a $B, C, \ldots$ együtthatókra vonatkozólag a számítás egészen ugyanaz.

Így ha például:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x+2)(x-3)},$$

akkor

$$\frac{g(x)}{h'(x)} = \frac{x^2+5x-7}{(x+2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)};$$

tehát itt $a=1$, $b=-2$, $c=3$, és így:

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{13}{15}, \quad C = \frac{17}{10};$$

és végre:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-1} - \frac{13}{15}\,\frac{1}{x-2} + \frac{17}{10}\,\frac{1}{x-3}.$$

Vagy ha

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{2x-1}{x^4-2x^2+1},$$

akkor először a $h(x)$ fölbontása eszközlendő gyöktényezőkre; de ez:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x+1)^2 (x-1)^2;$$

a mint ezt könnyű fölismerni, ha például $h(x) = 0$-t először mint x^2-re másodfokú egyenletet tárgyaljuk, tehát:

$$a = 1, \quad b = -1,$$

$$\alpha = \beta = 2,$$

és így:

$$A_0 = \left(\frac{2x-1}{(x+1)^2}\right)_{x=1} = \frac{1}{4}, \quad A_1 = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{(x+1)^2}\right)\right)_{x=1} = \frac{1}{4},$$

$$B_0 = \left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)_{x=-1} = -\frac{3}{4}, \quad B_1 = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)\right)_{x=-1} = -\frac{1}{4},$$

és végre

$$\frac{g(x)}{h\,x} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1}.$$

131. Ha $g(x)$ és $h(x)$ együtthatói valós számok, de $h(x)$ gyökei közt complex számok is foglaltatnak, akkor a raczionalis függvény parcziális törtekre bontva, complex alakot ölt; de ez a konjugált tagok egyesítésénél ismét eltűnik. Ha ugyanis ekkor $a = p + qi$ és $b = p - qi$ konjugált complex gyökök, akkor α és β is egyenlő és

$$\frac{A_{\alpha-k}}{(x-a)^k}, \quad \frac{B_{\alpha-k}}{(x-b)^k}$$

szintén konjugált kifejezések, melyeknek egyesítése az

$$\frac{A_{\alpha-k}\,(x-p+qi)^k + B_{\alpha-k}\,(x-p-qi)^k}{((x-p)^2+q^2)^k}$$

taghoz vezet; ez pedig a számláló rendezése után az x-nek k-adfokú valós egész függvénye.

Föltevéseink mellett ugyanis $A_{\alpha-k}$ és $B_{\alpha-k}$ egy

$$\varphi(x) + i\,\psi(x)\ , \text{ illetőleg } \varphi(x) - i\,\psi(x)$$

alakú kifejezés differencziálásánál keletkezik, a differencziálhányadosok szintén ily alakúak; az elsőben $p + iq$, a másodikban $p - iq$ helyettesítendő, és így végre

$$A_{\alpha-k} = \Phi(p+iq) + i\,\Psi(p+iq)\ , \quad B_{\alpha-k} = \Phi(p-iq) - i\,\Psi(p-iq)$$

azaz ha i helyébe $-i$-t teszünk, A átmegy B-be és viszont. Azaz

$$A_{\alpha-k} = M_{\alpha-k} + i\,N_{\alpha-k}\ , \quad B_{\alpha-k} = M_{\alpha-k} - i\,N_{\alpha-k}$$

és így a fölirt két parcziális tört konjugált érték; egyesítése tehát mindig valós értékhez vezet.

Így p. legyen:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{2+x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{2+x}{(x-1)(x-i)(x+i)} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i},$$

Itt:

$$A=\frac{g(1)}{h'(1)}=\frac{3}{2},\quad B=\frac{g(i)}{h'(i)}=-\frac{2+i}{2+2i},$$

$$C=\frac{g(-i)}{h(-i)}=-\frac{2-i}{2-2i},$$

és végre:

$$\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1}-\frac{2+i}{2+2i}\,\frac{1}{x-i}-\frac{2-i}{2-2i}\,\frac{1}{x+i}$$

$$=\frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\,\frac{3x+1}{x^2+1}.$$

A valós gyökök szétválasztása, midőn az egyenlet együtthatói adott valós számok.

132. A valós gyökök* részletes elemzése első sorban a valós (pozitiv és negativ) gyökök számának meghatározására irányúl. Az ú. n. *jelszabályok* erre vonatkozólag nem adják ugyan mindig a teljes eredményeket, de igen gyakran czélszerűen használhatók, legalább előleges tájékoztatásra, a mennyiben alkalmazásuknál semmi számítást sem kell végeznünk.

Az egyenlet együtthatóinak sorozata

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots,\ A_k,\ldots A_n$$

most csupán valós számokból áll és A_0 természetesen nem 0. *E sorozatban jelváltozás vagy jelkövetkezés van az A_k helyen, a mint A_{k-1} és A_k különböző vagy egyenlő előjelű, vagy pedig, ha $A_{k-1}, A_{k-2},\ldots A_{k-r+1}$ mind 0-ok, A_{k-r} és A_k különböző vagy egyenlő előjelű.* Igy p. az

$$x^7\underset{j.\,v.}{-}x^6\underset{j.\,k.}{-}4x^4\underset{j.\,v.}{+}x^3\underset{j.\,k.}{+}2x^2\underset{j.\,v.}{-}1=0$$

* Föltéve, hogy az egyenlet együtthatói complex számok, az ismeretlent is általánosságban $x=x_1+x_2 i$ alakban kell irnunk. Ha ekkor az egész függvényben a valós és képzetes részt külön választjuk, az egyenlet alakja lesz:

$$g_1(x_1,x_2)+i\,g_2(x_1,x_2)=0,$$

mely csak úgy elégíthető ki, ha

$$g_1(x_1,x_2)=0,\quad g_2(x_1,x_2)=0.$$

Ekkor tehát két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerre vezettetünk. Ezen általánosabb probléma tárgyalására később visszatérünk.

egyenlet együtthatóinak sorozatában 3 jelváltozást és 2 jelkövetkezést találunk.

Mindenekelőtt a következő tétel lesz bebizonyítandó. *Ha a* $g(x) = 0$ *egyenletben a jelváltozások száma* r *és* p *pozitiv szám, akkor a* $g(x)(x-p) = 0$ *egyenletben a jelváltozások száma legalább is* $r+1$.

Legyen részletesen

$$g(x) = A_0 x^n + \ldots + A_{n-k-1} x^{k+1} + A_{n-k} x^k + \ldots + A_n;$$

akkor:

$$g(x)(x-p) = A_0 x^{n+1} + \ldots + (A_{n-k} - p A_{n-k-1}) x^{k+1} + \ldots - p A_n;$$

mindazon esetekben tehát, midőn a $g(x)$-ben az x^k együtthatójánál jelváltozás mutatkozik, a $g(x)(x-p)$-ben már az x^{k+1} együtthatójának lesz azon előjele, mely a $g(x)$-ben az x^k együtthatójának felel meg. Mert ekkor $A_{n-k} - A_{n-k-1} p$ és A_{n-k} mindenesetre egyenlő előjelű számok; mert p pozitiv és A_{n-k-1}-nak, ha nem 0, az A_{n-k}-éval ellenkező előjele van.

Ha most már a $g(x)$ együtthatóiban az x

$$\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k, \ldots \nu_r$$

-edik hatványánál vannak jelváltozások, tehát mindössze r jelváltozás, és így — minthogy hiszen az egyenletet úgy szokás írni, hogy A_0 pozitiv, — e hatványok együtthatóinak előjele

$$-, \quad +, \quad (-1)^k, \quad (-1)^r$$

akkor a $g(x)(x-p)$ együtthatói közül a legmagasabb, A_0 ismét pozitiv és az x

$$\nu_1 + 1, \nu_2 + 1, \ldots \nu_k + 1, \ldots \nu_r + 1$$

-edik hatványainak együtthatóinak előjelei ismét:

$$- \quad + \quad (-1)^k \ldots (-1)^r.$$

Tehát x^{ν_r+1} együtthatójáig legalább is r jelváltozás, és ismét az utolsó tagig még legalább egy. Mert $g(x)$-ben az utolsó jelváltás x^{ν_r}-nél történik, innét pedig a jel megmarad; A_n előjele e szerint $(-1)^{\nu_r}$ és a $g(x)(x-p)$ utolsó tagjáé, mely $-p A_n$, e szerint

$(-1)^{r+1}$, míg x^{ν_r+1} együtthatójának ugyancsak $g(x)(x-p)$-ben előjele $(-1)^r$ volt.

Ha tehát $g(x)$-ben a jelváltozások száma r volt, a $g(x)(x-p)$-ben legalább is $r+1$ jelváltozást találunk.

133. Descartes *jelszabálya, mely szerint a $g(x)=0$ egyenletben a pozitiv gyökök száma soha nem nagyobb az ezen egyenletben foglalt jelváltozások számánál,* e tétel közvetetlen következménye.

Ha ugyanis a $g(x)=0$ egyenlet gyökei közül

$$p_1, p_2, \ldots, p_k$$

a pozitiv gyökök, akkor $g(x)$-szel együtt

$$\frac{g(x)}{(x-p_1)(x-p_2)\ldots(x-p_k)}=\gamma(x)$$

mindenesetre szintén oly egész függvény, melynek együtthatói valósak, és

$$g(x)=\gamma(x)(x-p_1)(x-p_2)\ldots(x-p_k).$$

Ha tehát $\gamma(x)$-ben r jelváltozás foglaltatik, hol r pozitiv szám vagy esetleg 0, akkor $\gamma(x)(x-p)$-ben van legalább is $r+1$, $\gamma(x)(x-p_1)(x-p_2)$-ben legalább is $r+2$ jelváltozás és úgy tovább végre $g(x)$-ben legalább is $r+k$; azaz a mint $r=0$, vagy >0, a jelváltások száma megegyezik a pozitiv gyökök számával vagy pedig ennél nagyobb.

E tétel a negativ gyökök számának megitélésére is használható. Ha ugyanis x helyébe $-y$-t teszünk, akkor a $g(-y)=0$ egyenlet gyöke y pozitiv, ha $-y$, azaz x negativ. *A $g(x)=0$ negativ gyökeinek száma megegyezik tehát a $g(-y)=0$ pozitiv gyökeinek számával.* Ezen egyenlet, *a $g(x)=0$ negativ egyenlete,* részletesen kiirva

$$A_0(-y)^n+A_1(-y)^{n-1}+A_2(-y)^{n-2}+\ldots+A_k(-y)^{n-k}+ \\ \ldots+A_n=0.$$

Hogy ezen egyenlet is mindig a pozitiv A_0 együtthatóval kezdődjék, szorozzunk $(-1)^n$; akkor tekintetbe véve, hogy:

$$(-1)^{2n-k}=(-1)^k,$$

lesz az egyenlet:

$$A_0 y^n - A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + (-1)^k A_k y^{n-k} + \ldots +$$
$$+ (-1)^n A_n = 0,$$

azaz *a negativ egyenlet az eredeti egyenletből keletkezik, ha minden második együttható, azaz az összes páros vagy az összes páratlan hatványok együtthatóinak előjelét ellenkezőre változtatjuk*, és természetesen a gyökök megváltoztatott értékéhez képest az ismeretlennek más jelét helyettesitjük.

Így végre *a* $y(x) = 0$ *egyenlet negativ gyökeinek száma soha nem nagyobb, mint a megfelelő negativ egyenletben foglalt jelváltozások száma.*

Így például az

$$x^8 + 3x^6 - 2x^5 - 2x^4 + x^2 + x - 10 = 0$$

egyenletben a pozitiv gyökök száma nem lehet nagyobb, mint három; és minthogy a megfelelő negativ egyenlet

$$y^8 + 3y^6 + 2y^5 - 2y^4 + y^2 - y - 10 = 0,$$

a negativ gyökök száma szintén nem lehet nagyobb, mint három.

A complex gyökök számára vonatkozólag ezen eredmények szintén engednek esetleg következtetést, csakhogy *a complex gyökök számára alsó határhoz jutunk*, míg a pozitiv vagy negativ gyökök számára Descartes jelszabálya fölső határt szabott meg.

Ha ugyanis a pozitiv, illetőleg negativ gyökök száma nem lehet nagyobb mint k, illetőleg l és $k+l$ még kisebb az egyenlet fokánál n-nél, akkor a többi $n-k-l$ gyök okvetetlenűl complex, és így a complex gyökök száma legalább is $n-k-l$.

Így p. az előbb példáúl fölírt egyenlet gyökei közül legalább is kettő complex.

E jelszabály, összeállítva a 48. czikk tételével, egyszerűbb egyenleteknél a gyökök jellegét teljesen is megadhatja, így p. az $x^3 + 7x - 10 = 0$ egyenletben egy jelváltozás van, tehát legfölebb egy pozitiv gyök, azaz vagy egy, vagy egy sem; de az első és utolsó együttható előjele ellenkező, tehát pontosan egy pozitiv gyök van. A negativ egyenletben ($y^3 + 7y + 10 = 0$) nincs jelváltozás; tehát egyenletünknek nincs negativ gyöke. E szerint mindössze az $x^3 + 7x - 10 = 0$ egyenletnek egy gyöke pozitiv és két gyöke complex.

134. Ezek után azon eljárást tárgyaljuk, mely *a tetszőlegesen választott ab számközben fekvő valós gyökök számát pontosan megadja.**

E föladatnál fölcseréljük először is a $g(x)=0$ egyenletet azon egyenlettel, mely a $g(x)=0$ egyenlet minden gyökét, de mindegyiket csak mint egyszerű gyököt tartalmazza. Ha tehát a $g(x)$-nek nincs többszörös gyöke, akkor meghagyjuk az egyenletet.

Ha pedig $g(x)=0$-nak van többszörös gyöke, tehát $g(x)=0$ és $g'(x)=0$-nak közös gyöke vagy végre $g(x)$ és $g'(x)$-nek közös osztója van, akkor legyen:

$$g(x)=D(x)f(x),$$

$$g'(x)=D(x)h(x).$$

Ha

$$g(x)=A_0(x-a)^{\alpha}\ldots$$

$D(x)$ az $(x-a)$-t az $\alpha-1$-edik hatványon tartalmazza, tehát $f(x)$ az első hatványon, azaz

$$\frac{g(x)}{D(x)}=f(x)=0$$

oly egyenlet, mely $g(x)=0$ minden gyökét, mint egyszerű gyököt és csak ezeket tartalmazza.**

* Az a kérdés, hogy a $g(x)=0$ egyenletnek hány gyöke fekszik a és b közt, $(a<b)$ csak látszólag általánosabb annál, hogy egy adott egyenletnek hány pozitiv gyöke van. Ha ugyanis

$$y=\frac{x-a}{b-x}, \quad x=\frac{by+a}{1+y},$$

akkor, míg x az a-tól b-ig megy, y fölvesz minden értéket 0-tól ∞-ig, azaz minden pozitiv értéket és megfordítva és így az

$$(1+y)^n g\left(\frac{by+a}{1+y}\right)=0$$

n-edfokú egyenletnek ép annyi pozitiv gyöke van, mint a hány a és b közt fekvő gyöke van a $g(x)=0$ egyenletnek.

** Egyáltalában a $g(x)=0$ egyenlet részletes elemzésénél czélszerű először is megállapítani, vajjon van-e többszörös gyöke, vagy sem; mert az első esetben az egyenlet megoldása sokkal egyszerűbb, alacsonyabb fokú egyenletekére vezethető vissza.

Ha $g(x)$ és $g'(x)$ legnagyobb közös osztója $D(x)$, akkor először is képezhető azon egyenlet, mely $D(x)=0$ egyenlet minden gyökét, mint

135. Legyen most már $f(x)=0$ oly algebrai egyenlet, melynek csupán egyszerű gyökei vannak. Akkor, hogy a fölvetett kérdésre megfeleljünk, mindenekelőtt az $f(x)$-hez tartozó STURM-*féle függvények* sorozata képezendő. *Az erre szolgáló eljárás ugyanaz, mintha az $f(x)$ és $f'(x)$ legnagyobb közös osztóját keresnők a 124. czikkben tárgyalt módszer szerint, csakhogy a maradékot megváltoztatott előjellel használjuk mindig osztónak; az osztandó szorzására használt együtthatót pedig (az osztó legmagasabb hatványának együtthatóját) mindig pozitiv előjellel veszszük.* Ily módon általánosságban a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$
\begin{aligned}
A_1 f(x) &= f'(x)\,q_1(x) - R_1(x),\\
A_2 f'(x) &= R_1(x)\,q_2(x) - R_2(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_k R_{k-2}(x) &= R_{k-1}(x)\,q_k(x) - R_k(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_l R_{l-2}(x) &= R_{l-1}(x)\,q_l(x) - R_l
\end{aligned}
$$

hol $A_1, \ldots A_l$ pozitiv számok és R_l végre az x-től független számérték, mert hiszen R_1, $R_2 \ldots$ legfölebb $n-2$, $n-3$-adfokú egész függvények, s. ú. t.

A STURM-féle függvények sorozatának:

$$f(x), f'(x), R_1(x), \ldots, R_{k-1}(x), R_k(x), R_{k+1}, \ldots, R_l$$

következő egyszerű tulajdonságai könnyen fölismerhetők.

a) R_l nem lehet 0; mert különben $R_{l-1}(x)$ osztója volna $R_{l-2}(x)$-nek, tehát R_{l-3}-nek is, és így végre $f'(x)$ és $f(x)$-nek is; de ez nem lehetséges, mert $f(x)$ és $f'(x)$-nek nincs közös osztója.

b) Nincs oly értéke az x-nek, melynél két szomszédos STURM-féle függvény egyszerre zérus lesz; mert ha p. $R_k(x)$ és $R_{k+1}(x)$

---

egyszerű gyököt tartalmazza. Legyen ez $D_1(x)=0$; akkor evvel együtt a $D(x)=0$ is teljesen meg van oldva; azaz ismeretesek a $g(x)=0$ többszörös gyökei. De ekkor végre

$$\frac{g(x)}{D(x)\,D_1(x)}=0$$

oly algebrai egyenlet, mely a $g(x)=0$-nak csupán egyszerű gyökeit adja.

egyszerre eltűnik, akkor az x ugyanazon értékének behelyettesítésénél eltűnnék $R_{k-1}(x)$ is; továbbá még $R_{k-2}(x)$, és így végre $f'(x)$ és $f(x)$ is. De az $f(x)=0$ és $f'(x)=0$ egyenletnek nincs közös gyökük, a föltevés tehát lehetetlen.

c) Az x oly értékénél, melynél p. $R_k(x)$ eltűnik, $R_{k-1}(x)$ és $R_{k+1}(x)$ ellenkező előjelű számok lesznek. Mert ha például a ily érték, egyenleteinkből:

$$A_{k+1}R_{k-1}(a) = -R_{k+1}(a);$$

hol A_k pozitiv szám.

Ezek után bebizonyítható STURM *tétele:* *

Legyen a és b két valós szám, és $a<b$; e számok helyettesítése a STURM*-féle függvények sorozatába két számsort ad, melyben a jelváltozások száma legyen V_a, illetőleg V_b. Ekkor $V_a - V_b$ pozitiv egész szám, vagy 0, és pontosan az $f(x)=0$ egyenlet azon a_i gyökeinek számai, melyekre nézve $a<a_i\leq b$.*

Mindenekelőtt belátható, hogy oly $\alpha\beta$ számközben, hol a STURM-féle függvények egyike sem lesz 0, a jelek eloszlása egyáltalában nem változik; mert e számközben minden $R_k(x)$ megtartja előjelét; ha $R_k(x)$-nek ama számközben volnának ellenkező előjelű értékei, akkor $R_k(x)$-nek egyszer 0-nak is kellene lennie. A jelváltozások számára nézve tehát az ab számköz azon helyeinek környezetében történhetik csak változás, hol valamely függvény 0 lesz. Minthogy pedig a STURM-féle függvények az n-ediknél nem magasabb fokú egész függvények, ily helyek csak meghatározott számmal lesznek. Ha végre a ily hely, akkor elég az oly $a-h,\ldots,a+h$ számközöket vizsgálni, melyekben a az egyetlen ily jellegű hely, és h bármily kicsiny.

Ha például $R_k(a)=0$, akkor $R_{k-1}(a)$ és $R_{k+1}(a)$ nem 0, és ellenkező előjelű; továbbá, ha h elég kicsiny $R_{k-1}(x)$ és $R_{k+1}(x)$ az egész $a-h\ldots a+h$ számközben megtartja előjelét; úgy hogy a jelek eloszlását a következő táblázatok egyike jellemzi:

* Mémoires, présentés par divers savants à l'académie des Sciences, T. 6. p. 271.

	I.			II.		
	$R_{k-1}(x)$,	$R_k(x)$,	$R_{k+1}(x)$	$R_{k-1}(x)$,	$R_k(x)$,	$R_{k+1}(x)$
$a-h$	$-$	?	$+$	$+$	?	$-$
a	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$a+h$	$-$	?	$+$	$+$	?	$-$

A kérdőjellel betöltött helyen nem ismerjük a helyettesítési eredmény előjelét, de akármilyen is ez, látni, hogy ez a jelváltozások számára nézve egészen közömbös, t. i. vagy az $R_k(x)$, vagy az $R_{k+1}(x)$ helyén történik jelváltozás; így változhatik esetleg a jelek eloszlása, de a jelváltozások száma megmarad.

E következtetés azonban csak akkor helyes, ha a Sturm-féle függvények sorozatában van egy az $R_k(x)$-et megelőző és egy ezt követő tagja a sorozatnak. Tehát nem alkalmazható R_l-re és $f(x)$-re; R_l azonban a 0-tól különböző számérték, és így az a helyek vizsgálatánál nem is jő tekintetbe.

Ha végre az a helyen $f(x)$ eltűnik, azaz a az egyenlet gyöke, akkor a viszonyok csakugyan módosulnak. Ekkor $f'(a)$ nem 0; ha $\substack{\text{pozitiv}\\ \text{negativ}}$, $f(x)$ az a helyen $\substack{\text{növekszik}\\ \text{fogy}}$; minthogy pedig $f(a)=0$, ez annyit jelent, hogy $\substack{\text{negativ}\\ \text{pozitiv}}$ értékektől átmegy $\substack{\text{pozitiv}\\ \text{negativ}}$ értékekhez; tehát a jelek eloszlását a következő táblázatok egyike adja:

	I.		II.	
	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$a-h$	$-$	$+$	$+$	$-$
a	0	$+$	0	$-$
$a+h$	$+$	$+$	$-$	$-$

Azaz az $f'(x)$ helyen az a előtt föllépő jelváltozás elvész, mihelyt a-ba érünk.

Mindent össze foglalva, ha x folytonosan változik a-tól b-ig, a jelváltozások száma csak akkor változik, még pedig egygyel kisebb lesz, midőn az $f(x)=0$ egyenlet egyik gyökén megyünk keresztül; tehát csakugyan a Sturm tételének megfelelőleg a jelváltozások száma annyi egységgel száll alá, mint a hány gyököt találtunk az a és b között.

Ha kivételesen a vagy b esetleg gyök, e tárgyalás egyszersmind mutatja, hogy a gyökök ily módon meghatározott számába bele-tartozik b, de a nem; úgy hogy pontosan azon a_i gyököket találjuk melyekre nézve:

$$\alpha < a_i \leqq \beta.$$

136. Sturm tételének gyakorlati alkalmazása többnyire hoszszasabb számítással jár, melynek célszerű berendezése különös gondot igényel. Minthogy a Sturm-féle függvényeknek csak pozitiv vagy negativ voltát vizsgáljuk, szabad ezeket bárminő pozitiv állandóval szorozni vagy osztani és ily módon az együtthatók számértékeit kisebbiteni.

Az egymásután föllépő függvények meghatározása algebrai osztások segítségével történik. Ezeknél az osztót akármicsoda számmal szorozhatjuk vagy oszthatjuk, mert ekkor csak a hányados változik, de a maradék nem. Az osztandót szabad bármicsoda pozitiv számmal szorozni vagy osztani; ekkor a maradék ugyane számmal lesz szorozva vagy osztva. A maradék meghatározása után ez a további számításban mint osztó lép föl, és így a már meghatározott Sturm-féle függvényben az együtthatókat mindjárt osztás útján egyszerűsíthetjük, de természetesen az előjel változtatása nélkül. E megjegyzések arra szolgálnak, hogy az egész számítást lehetőleg kis számokkal végezzük.

Így például legyen

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 3x + 7 = 0;$$

akkor

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 20x - 3.$$

Hogy az osztásnál törtszámok ne lépjenek föl, $f(x)$-et 4-gyel szorozzuk, lesz:

$$
\begin{array}{l}
(4x^4 - 8x^3 + 40x^2 - 12x + 28) : (4x^3 - 6x^2 + 20x - 3) = x \mid -1 \\
\;\; 4x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 3x \\
\hline
\qquad - 2x^3 + 20x^2 - 9x + 28
\end{array}
$$

a hol az új osztandót a törtek elkerülése végett újból kettővel szorozzuk:

$$
\begin{array}{r}
-4x^3 + 40x^2 - 18x + 56 \\
-4x^3 + \;\;6x^2 - 20x + \;\;3 \\
\hline
34x^2 + \;\;2x + 53.
\end{array}
$$

Tehát:

$$R_1 = -34x^2 - 2x - 53.$$

Folytatólag:

$$
\begin{array}{l}
(68x^3 - 102x^2 + 340x - 51) : (34x^2 + 2x + 53) = 2x \mid -53 \\
\;68x^3 + \;\;4x^2 + 106x \\
\hline
\qquad\quad - 106x^2 + \;\;234x - \;\;51 \\
\qquad - 17.106x^2 + 3978x - \;\;867 \\
\qquad - 34.\;\;53x^2 - \;\;106x + 2809 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 4084x - 3676
\end{array}
$$

Tehát, ha még 4-gyel osztunk, $R_2(x) = -1021x + 919$.

Végre:

$$(-34x^2 - 2x - 53) : (1021x - 919) = -34 - \frac{33288}{1021}$$

$$\begin{array}{rl}
-34.1021x^2 - & 2042x - 53.1021 \\
-34.1021x^2 + & 31246x \\
\hline
- & 33288x - 53.1021 \\
- & 33288x + 919 : \dfrac{33288}{1021} \\
\hline
 & \qquad\qquad \text{neg. szám.}
\end{array}$$

Tehát végre:

$$R_3 \text{ pozitiv szám.}$$

Midőn ily módon a Sturm-féle függvények sorozata rendelkezésünkre áll, először is az összes valós gyökök számát, illetőleg a pozitiv és negativ gyökökét olvassuk meg. Ekkor tekintetbe veendő, hogy (I. r. 39. cz.) a valós* gyökök abszolut értéke mindenesetre kisebb, mint

$$G = \frac{M+1}{A_0} + 1,$$

ha M az egyenlet együtthatóinak absolut értékei közt a legnagyobb, mert ekkor az idézett tétel szerint

$$|f(x)| > 1.$$

Minden gyök tehát G és $-G$ közt fekszik. A helyett, hogy G és $-G$-t helyettesítjük a Sturm-féle függvények sorozatába, lehet, bármily nagy pozitiv szám is N, az N és $-N$-et helyettesíteni. Mert G és N, illetőleg $-G$ és $-N$ közt nincs gyök, tehát a jelváltozások száma a G és $-G$ behelyettesítésénél ugyanaz, mint N és $-N$ helyettesítésénél. Ha végre N elég nagy, az egész függvény helyettesítési eredményének előjele a legmagasabb tag előjelével megegyezik. Röviden az $+N$ és $-N$ helyett a $+\infty$ és $-\infty$ helyettesítéséről beszélünk.

Így p. a vizsgált egyenletre nézve a $-\infty$, 0, $+\infty$ helyettesítési eredményei

	$f(x)$,	$f'(x)$,	R_1,	R_2,	R_3
$-\infty$	+	−	−	+	+
0	+	−	−	+	+
$+\infty$	+	+	−	−	+

* Már az 585. lapon említtetett, hogy az idézett tétel — az adott bebizonyítással együtt — szóról szóra érvényes marad, ha az egész függvény változója és együtthatói complex számok.

A miből minthogy $V_{-\infty} = V_{+\infty} = 2$, következik, hogy a vizsgált egyenletnek nincs valós gyöke.

Egy másik példában:

$$f(x) = x^3 - 5x - 10 = 0,$$

lesz:

$$f'(x) = 3x^2 - 5;$$

tehát:

$$\begin{array}{l}
(3x^3 - 15x - 30) : (3x^2 - 5) = x \\
\underline{3x^3 - 5x} \\
 - 10x - 30 \\
 - x - 3
\end{array}$$

azaz:

$$R_1 = x + 3,$$

végre

$$\begin{array}{l}
(3x^2 - 5) : (x + 3) = 3x - 9 \\
\underline{3x^2 + 9x} \\
-9x - 5 \\
\underline{-9x - 27} \\
22
\end{array}$$

és

$$R_2 = -22.$$

E szerint

	$f(x)$,	$f'(x)$	R_1,	R_2
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$
0	$-$	$-$	$+$	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$

Tehát az egyenletnek csak egy valós (pozitiv) gyöke van. E gyök 0 és 11 közt fekszik.

Ha oly ab számköz ismeretes, melyben már csak egy gyök fekszik, ennek további megszorítása a STURM-féle függvények alkalmazása nélkül, tisztán az $f(x)$-en végzett helyettesítések segítségével végezhető. Ekkor ugyanis $f(a)$ és $f(b)$ ellenkező előjelű, és ha c most valamely a és b közt fekvő érték, akkor a gyök a és c vagy c és b közt fekszik, a mint $f(a)$ és $f(c)$, vagy $f(c)$ és $f(b)$ ellenkező előjelü.

Ily módon meghatározzuk a gyökben foglalt legnagyobb egész számot:

$$f(0) = -10, \quad f(1) = -14, \quad f(2) = -12, \quad f(3) = 2.$$

Tehát az $x^3 - 5x - 10 = 0$ egyenlet pozitiv gyöke $= 2 +$ valódi tört.

Lényegben ez már megközelitő módszer a gyök kiszámítására, mert a 2, $2{\cdot}1$, $2{\cdot}2, \ldots$ helyettesitése legfölebb 9 új kisérlet után megadja a gyök deczimális alakjában a első deczimális helyet és úgy tovább. Valóban mihelyt a STURM-féle tétel alapján a valós gyököket szétválasztottuk, azaz oly számközöket jelöltünk ki, melyekben egy és csak egy gyök fekszik, a megelőző tárgyalások alapján a gyököknek tetszőleges pontossággal való kiszámítása máris megtörténhetik.

137. Előkészítésül a gyökök megközelítő kiszámításának azon gyakorlati berendezésére, melyet HORNER módszere eszközöl, az ekkor végrehajtandó algebrai műveletek lesznek még tárgyalandók.

Jegyezzük meg először is, hogy midőn az $f(a)$ helyettesítési értéket keressük, ezt legrövidebben úgy számítjuk ki, hogy $f(x)$-et $x-a$-val osztjuk, ekkor a maradék $f(a)$; a mi az

$$f(x)=(x-a)\,q(x)+R$$

azonos egyenletből világos, ha x helyébe a-t teszünk. Igy p. az előbbi példát tovább tárgyalva:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & -10 \\ 2{\cdot}9 & 1 & 2{\cdot}9 & 3{\cdot}41 & -0{\cdot}111 \end{array}$$

tehát $f(2{\cdot}9)=-0{\cdot}111$, $f(3)=2$; tehát $x^3-5x-10=0$ pozitiv gyöke $2{\cdot}9$ és 3 közt fekszik.

Egy másik, folyton előforduló művelet a gyökök kisebbítése. Ha ugyanis az $f(x)=0$ egyenletben x helyébe $a+y$-t irunk,

$$f(a+y)=0$$

oly egyenlet, mely $a+y$-ra ugyanazon értékeket adja, a melyeket az $f(x)=0$ adott az x számára. Azaz az $f(a+y)=0$ egyenlet gyökeit mind levezethetjük az $f(x)=0$ gyökeiből, ha ezekből a-t levonjuk. Az $f(a+y)=0$-nak y szerint rendezett alakját:

$$F(y)=B_0y^n+B_1y^{n-1}+\ldots+B_n=0$$

leggyorsabban azon megjegyzés szolgáltatja, hogy ha y helyett ismét $x-a$-t irunk, megint $f(x)=0$-hoz jutunk. Tehát a rendezés mellőzésével

$$B_0(x-a)^n+B_1(x-a)^{n-1}+\ldots+B_{n-1}(x-a)+B_n$$

és $f(x)$ azonos egész függvények. De az utóbbi alak mutatja, hogy ha $f(x)$-et $(x-a)$-val osztjuk, a maradék B_n, a keresett egyenlet utolsó együtthatója; a hányados pedig

$$B_0(x-a)^{n-1}B_1(x-a)^{n-2}+\ldots+B_{n-1},$$

ha ezt újból $(x-a)$-val osztjuk, a maradék B_{n-1}, a keresett egyenlet utolsóelőtti együtthatója, a hányados pedig:

$$B_0(x-a)^{n-2}+B_1(x-a)^{n-3}+\ldots+B_{n-2};$$

újból osztva megkapjuk B_{n-2}-t és úgy tovább, míg végre B_0-hoz jutunk, mely A_0-sal egyenlő. E számítás menete nagyon kényelmesen lesz berendezhető. Mert a rövidített osztásnál az új hányados már kellő módon fölírva jelentkezik; az utolsó érték, melyet jó mint nem a hányadoshoz tartozót külön megjelölni, az új egyenlet együtthatóját adja. Ha tehát a rövidített osztást — a meddig lehet — folyton ismételjük, végre a táblázatnak diagonálisában alulról fölfelé olvasva, meglesznek az új egyenlet keresett együtthatói.

Például legyen

$$f(x)=4x^4-3x^3+5x^2-2x+3=0;$$

akkor az $f(2+y)=0$ egyenlet rendezett alakja a következő számítás alapján:

	4	−3	5	−2	+3
2	4	5	15	28	59
	4	13	41	110	
	4	21	83		
	4	29			
	4				

lesz:

$$4y^4+29y^3+83y^2+110y+59=0.$$

138. HORNER *módszere*, mely a numerikus egyenletek pozitiv gyökeinek megközelítő meghatározását* a legczélszerűbb berendezésben végzi, most már a következő. (A negativ gyököket legjobb, mint a negativ egyenlet pozitiv gyökeit számítani.)

Ha az $f(x)=0$ egyenletről már tudjuk, hogy a k_0 és k_0+1 szomszédos egész számok közt az egyenletnek csak egy gyöke fek-

* A raczionális gyökök meghatározására már előbb (I. r. 36. cz.) találtunk egyszerű módszert.

Jegyezzük még meg, hogy a numerikus megoldásnál hallgatag föltételezzük, hogy az egyenlet együtthatói raczionális számok, mert különben ezeknek is csak megközelített értékeit ismerjük, a mi új és általánosságban nem igen megitélhető hibát eredményez.

szik, akkor legyen $x = k_0 + y$ és a megelőző czikk eljárása szerint az y számára a

$$B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + \ldots + B_{n-1} y + B_n = 0$$

egyenlet képezhető. Ennek egy és csak egy gyöke van 0 és 1 közt; minthogy pedig ekkor $y^2, y^3, \ldots$ mind az 1-nél kisebbek, némi valószínűséggel, mely azonban ezen első lépésnél épen nem nagy, várhatjuk, hogy az y magasabb hatványainak elhanyagolásával képezett elsőfokú egyenlet

$$B_{n-1} y + B_n = 0, \quad y = -\frac{B_n}{B_{n-1}}$$

az első deczimálisban helyes eredményt ád. Azaz a kisérleteket, melyek az első deczimális betöltéséhez vezetnek, legjobban a $-\frac{B_n}{B_{n-1}}$-hez legközelebb fekvő értékkel kezdjük; ha ez 1-nél nagyobb, 0·9-el; fölteszszük tehát, hogy

$$y = \frac{k_1}{10} + z.$$

Ha $\frac{k_1}{10}$ helyesen meghatározott érték, akkor az eljárást folytatjuk és áttérünk a

$$C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \ldots + C_n = 0$$

egyenlethez. Az eljárásnak nagy előnye, hogy a k_1 számjel választásának helyességét nem kell külön megvizsgálni, mert ha ez túlságos nagynak vagy kicsinynek vétetett, ez a számítás folytatásánál magától föltűnik. A k_1-et túlságos nagynak vettük, ha C_n és B_n előjele nem egyezik meg, mert hiszen C_n a $\frac{k_1}{10}$ behelyettesítésének eredménye a $B_0 y^n + \ldots + B_n$ egész függvényben; akkor ennek már van gyöke 0 és $\frac{k_1}{10}$ közt, azaz k_1 legalább egy egységgel kisebbítendő. Hogy a k_1-et esetleg túlságos kicsinynek vettük, abból látszik, hogy a z egyenletből a magasabb hatványok elhagyása után keletkező

$$C_{n-1} z + C_n = 0$$

elsőfoku egyenlet a z-nek 0·1-nél nem kisebb értékét adja; akkor k_1 helyébe $k_1 + 1$-et teszünk, és evvel ismételjük a számítást. Előfordúlhat — ámbár nagyon ritkán — hogy daczára a $-\frac{C_n}{C_{n-1}}$ ily értékének a k_1 helyes szám, a mit a $k_1 + 1$ használatánál föllépő C'_n mutat az által, hogy előjele nem ugyanaz mint B_n-é.

Ha azután ismét

$$z = \frac{k_2}{100} + u,$$

áttérünk a

$$D_0 u^n + D_1 u^{n-1} + \ldots + D_n = 0$$

egyenletre, és itt ismét a magasabb hatványok elhanyagolásával

$$D_{n-1} u + D_n = 0$$

adja az u megközelítő értékét, azaz a keresett gyökre nézve a 3-ik deczimálist és úgy tovább.

Minél tovább megyünk, annál megbízhatóbb a számítási eredmény, mert z már $\frac{1}{10}$-nél, u már $\frac{1}{100}$-nál kisebb s. a t., és annál jogosultabb a magasabb hatványok elhanyagolása.

Előfordulhat természetesen, hogy a meghatározandó érték egyik deczimális helyén a 0 áll, azaz hogy y csak a második, z csak a harmadik deczimálissal kezdődik. Vajjon valóban 0 e az illető számjel, vagy az y, z túlságos kicsiny-e, azt a legközelebbi lépés dönti el, melyet úgy végzünk, hogy ekkor y-t, z-t, ... már a második, illetőleg harmadik deczimális hely meghatározására használjuk.

Ha végre két szomszédos egész szám közt több mint egy gyök fordúl elő, akkor a gyökök teljes szétválasztására a Sturm-féle módszer használandó, és a Horner módszere csak akkor lesz alkalmazható, midőn oly számközt határoztunk meg, melynek

$$k_0 + \frac{k_1}{10} + \ldots + \frac{k_r}{10^r} \text{ és } k_0 + \frac{k_1}{10} + \ldots + \frac{k_r + 1}{10^r}$$

határai között az egyenletnek csak egy gyöke fekszik.

Az ily teljesen gyakorlati eljárás szabályainak összeállítása mindig csak példák tanulmányozásánál lesz a kellő módon átérthető.

a) Ily első példa legyen az

$$x^3 + 6x^2 + 12x - 20 = 0$$

egyenlet, melyről mindjárt látni, hogy csak egy pozitiv gyöke van, és hogy e gyök 1 és 2 közt fekszik; mert

$$f(1) = -1, \quad f(2) = 36.$$

Tehát

$$x = 1 + y$$

teendő és az egyenlet fölállítására végzendő számítás:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 6 & 12 & -20 \\ 1 & 1 & 7 & 19 & -1 \\ & 1 & 8 & 27 & \\ & 1 & 9 & & \\ & 1 & & & \end{array}$$

Az új egyenlet:

$$y^3 + 9y^2 + 27y - 1 = 0,$$

és y megközelitett értéke:

$$\frac{1}{27} = 0·03\ldots$$

Az első deczimális hely tehát valószinűleg 0-sal van betöltve; ezt egyelőre elfogadva, ismét:

$$y = 0·03 + z,$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 9 & 27 & -1 \\ 0·03 & 1 & 9·03 & 27·2709 & -0·181873 \\ & 1 & 9·06 & 27.5427 & \\ & 1 & 9·09 & & \\ & 1 & & & \end{array}$$

$$z^3 + 9·09\,z^2 + 27·5427\,z - 0·181873 = 0,$$

és z megközelített értéke:

$$\frac{0·181873}{27·5427} = 0·006 + u,$$

és így, ha az u-egyenlet két utolsó együtthatójának kiszámításával az új számjel helyességét igazoltuk:

$$x = 1·036\ldots$$

Midőn az egyenlet együtthatói kisebb, egy-két számjelű egész számok, a második deczimálistól kezdve a magasabb hatványok elhanyagolásával meghatározott új számjel csak a legritkább esetekben nem helyes.

b) Az előbb is már elemzett

$$x^3 - 5x - 10 = 0.$$

egyenletnél, melynek egyetlen pozitiv gyöke 2 és 3 között fekszik, az első megközelítés

$$x = 2 + y$$

	1	0	—5	—10
2	1	2	—1	—12
	1	4	7	
	1	6		
	1			

$$y^3 + 6y^2 + 7y - 12 = 0$$

az y-nak túlságos nagy értékét adja: $\frac{12}{7}$. Legvalószinűbb értéke e szerint 0·9. Evvel tovább számítva:

$$y = 0{\cdot}9 + z,$$

$$z^3 + 8{\cdot}7\,z^2 + 16{\cdot}82 - 0{\cdot}111,$$

$$z = \frac{0{\cdot}111}{16{\cdot}82} = 0{\cdot}006 + u;$$

és így megközelítőleg

$$x = 2{\cdot}906\ldots$$

c) Végre még tárgyaljuk az

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

egyenletet. A jelszabályok a gyökök jellemzésére nem elégségesek, tehát a Sturm-féle függvények képezendők. Lesz:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 7x + 7 = 0, \\ f'(x) &= 3x^2 - 7, \\ R_1(x) &= 2x - 3, \\ R_2 &= 1. \end{aligned}$$

Tehát

	$f(x)$	$f'(x)$	$R_1(x)$	R_2	
$-\infty$	—	+	—	+	3 . j . v
0	+	—	—	+	2 . j . v
$+\infty$	+	+	+	+	0 . j . v

Tehát az egyenletnek egy negativ és két pozitiv gyöke van. A pozitiv gyökök szétválasztására még:

1	+	—	—	+	2 . j . v
2	+	+	+	+	0 . j . v

Tehát mind a két pozitiv gyök 1 és 2 közt fekszik. Továbbá:

1·5	—	—	0	+	1 . j . v

Ebből látni hogy az egyik gyök 1 és 1·5, a másik 1·5 és 2 közt fekszik. A HORNER módszere csak akkor lesz itt alkalmazható, ha mindkét gyökből az első deczimális helyet már ismerjük. E czélból már csak az $f(x)$ helyettesítési eredményei képezendők:

$$f(1)=1,\quad f(1{\cdot}1)=0{\cdot}631,\quad f(1{\cdot}2)=0{\cdot}328,\quad f(1{\cdot}3)=0{\cdot}097,$$
$$f(1{\cdot}4)=-0{\cdot}56,\quad f(1{\cdot}5)=-0{\cdot}125,\quad f(1{\cdot}6)=-0{\cdot}104,\quad f(1{\cdot}7)=0{\cdot}013.$$

Tehát az egyik pozitiv gyök 1·3 és 1·4, a másik 1·6 és 1·7 között fekszik.

Ezután a két gyök megközelítő számítása egyszerűen folytatható. Igy például a kisebbikre nézve:

$$x = 1{\cdot}3 + y,$$

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1 & 0 & -7 & +7 \\
1{\cdot}3 & 1 & 1{\cdot}3 & -5{\cdot}31 & \underline{|0{\cdot}097} \\
 & 1 & 2{\cdot}6 & \underline{|-1{\cdot}93} & \\
 & 1 & \underline{|3{\cdot}9} & & \\
 & 1 & & &
\end{array}$$

$$y^3 + 3{\cdot}9y^2 - 1{\cdot}93y + 0{\cdot}097 = 0,$$

és y megközelített értéke

$$\frac{0{\cdot}097}{1{\cdot}93} = 0{\cdot}05\ldots$$

$$y = 0{\cdot}05 + z$$

tehát eddig $x = 1{\cdot}35\ldots$; további deczimálisok minden nehézség nélkül kiszámíthatók.

II.

Soralakban adott függvények.

A függvénysorok alaptulajdonságai.

139. Legyen

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

az x függvényeinek határtalan sorozata, azaz legyen adva oly általános törvény, mely szerint n-nek minden nem negativ egész számú értékéhez egy bizonyos $f_n(x)$ függvény tartozik. Akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

végtelen sornak számértéke van, ha x helyébe oly számot teszünk, mely minden $f_n(x)$ értelmezési tartományának helye és melyre nézve a $\sum_0^\infty f_n(x)$ sor összetartó. Ezen ilyképen megállapított x értékek összességét *a sor összetartási tartományának* nevezzük és közvetetlenül világos, hogy ez egyszersmind, ha $\sum_0^\infty f_n(x)$-et, mint az x függvényét tekintjük, e függvény értelmezési tartománya.

Az ily végtelen összegekre, mint már a számtanból tudjuk, a véges összegek törvényei nem mindig alkalmazhatók. Így még azon egyszerű tételeket, hogy egy összeg valamely x helyen folytonos vagy differencziálható, ha minden egyes tagja folytonos, illetőleg differencziálható, sem vihetjük át megszorítás nélkül a most bevezetett, soralakban adott függvényekre.

Abból, hogy valamely x helyen minden $f_n(x)$ folytonos, nem következik, hogy e helyen $\sum_0^\infty f_n(x)$ is folytonos függvény, még akkor sem, ha $\sum_0^\infty f_n(x)$ e hely környezetében mindenütt föltétlenül összetartó.

Ezt mutatja már a következő *valós* x-re vonatkozó igen egyszerű példa, melyet Darboux * adott. Legyen ugyanis

$$f_n(x) = e^{-nx^2} - e^{-(n+1)x^2},$$

mely x minden értékénél folytonos függvény, akkor:

$$\sum_0^m f_n(x) = 1 - e^{-(m+1)x^2},$$

és

$$\sum_0^\infty f_n(x) = 1 - \lim_{m} e^{-(m+1)x^2};$$

tehát az x minden 0-tól különböző értéke mellett 1; és 0, midőn $x = 0$.

A $\sum_0^\infty f_n(x)$ tehát a 0 helyen nem folytonos; e példa egyszersmind mutatja, hogy a soralakok bevezetése után a számtani értelmezés a függvénynek megszüntethető megszakadását is tartalmazhatja, a mi az eddig tárgyalt egyszerűbb alakoknál nem fordult elő.

* Annales de l'école normale, 2-me S., T. VIII.

Könnyű látni, hogy e körülmény daczára a $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ sor föltetlenül összetartó. Mert hiszen minden sortag pozitiv, ha x nem 0; míg a sor tagjai egyenként eltünnek, ha $x = 0$.

Ép oly kevéssé következtethetünk abból, hogy minden $f_n(x)$ differencziálható függvény, arra, hogy $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ is differencziálható függvény, vagy ha $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ differencziálható függvény is, hogy e differencziálhányados, úgy mint véges összegeknél, a sor tagonkénti differencziálása alapján kiszámítható. Az első állítás helytelenségét mutatja egy a 155. czikkben tárgyalandó példa; arra az állításra, hogy $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ differencziálható függvény, de $\sum\limits_0^\infty f_n'(x)$ *nem* adja e differencziálhányadost, itt még nem hozhatunk föl példákat, mert erre szükséges volna a $\sum\limits_0^\infty f_n'(x)$ azonosságát kimutatni egy bizonyos $F'(x)$ differencziálható függvénynyel. A trigonometrikus sorok elméletében számos ily esettel találkozunk.

140. *A* $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ *sor egy bizonyos x helyen egyenletesen összetartó,* ha egy tetszőlegesen választott pozitiv δ megállapitása után lehet egy N pozitiv egész számot és egy ε pozitiv számot meghatározni, úgy hogy*

$$|R_n(x+h)| = |f_{n+1}(x+h) + f_{n+2}(x+h) + \ldots| < \delta,$$

hacsak $n > N$ *és* $|h| < \varepsilon$. (Ha x az összetartási tartománynak** nem belső, hanem közönséges határhelye, akkor az absolut értékére nézve ε-nál kisebb h-k közül is csak azok jönnek tekintetbe, melyek az értelmezési tartományba tartozó $x + h$-kat adnak.)

Ha h *egy* bizonyos meghatározott szám, e föltétel egyszerűen az összetartás föltétele, hogy tudniillik az n-edik tag után következő tagok elhagyása következtében elkövetett hiba a tetszőlegesen választott δ-nál kisebb legyen, hacsak $n > N$. Most ennél többet követelünk, hogy ugyanis *amaz x egy bizonyos környezetében mindenütt*

---

* Az egyenletes összetartást, mint a függvénysorok összetartásának speciális módozatát először SEIDEL emelte ki. (Denkschr. d. bair. Ak. Bd. V. Abth. II. 1848.)

** Most is oly tartományokra szorítjuk a tárgyalást, melyeknek minden helye belső hely vagy közönséges határhely.

ugyanazon tagszám számbavétele elég legyen arra, hogy a hiba egy bizonyos, különben tetszőlegesen választott δ-nál kisebb legyen.

Az előbb fölhozott sor:

$$\sum_0^\infty f_n(x) = \sum_0^\infty (e^{-nx^2} - e^{-(n+1)x^2})$$

a 0 környezetében összetartó, de nem egyenletesen összetartó. Mert:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^\infty (e^{-kx^2} - e^{-(k+1)x^2}) = e^{-(n+1)x^2},$$

és hogy a 0 környezetében legyen

$$|e^{-(n+1)x^2}| < \delta;$$

arra, bármily nagynak is veszsszük is N-et, soha sem elég, hogy $n > N$ legyen, mert mindig lehet egy a 0-hoz elég közel fekvő x-et fölvenni, péld.

$$x = \pm \frac{1}{2\,(N+1)^{\frac{1}{2}}},$$

úgy hogy

$$e^{-(N+1)\frac{1}{4(N+1)}} = e^{-\frac{1}{4}};$$

a mi természetesen, mihelyt δ-t $e^{-\frac{1}{4}}$-nél kisebbnek veszszük, δ-nál nem kisebb, hanem nagyobb.

E sornál, hogy értékét egy bizonyos (elég kis) δ-nál kisebb hibával kiszámíthassuk, annál több tag veendő minél közelebb jut x a 0-hoz és ha csak ugyanannyi (N) tagot veszünk, midőn

$$|x| < \frac{1}{2\,(N+1)^{\frac{1}{2}}},$$

a hiba:

$$e^{-(N+1)x^2} > e^{-\frac{1}{4}}.$$

141. Az egyenletes összetartás definiczióját kiterjesztjük még egyes helyekről egész tartományra:

A $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ *egy bizonyos tartományban egyenletesen összetartó, ha egy tetszőlegesen választott pozitiv δ megállapítása után lehet egy N pozitiv egész számot meghatározni, úgy hogy*

$$|R_n(x')| < \delta,$$

hacsak $n > N$, a tartománynak bármely helye legyen is x'.

Ha tehát $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ nemcsak «az x helyen», hanem «e helynek egy bizonyos környezetében» egyenletesen összetartó, akkor *ugyanazon tagszám* számbavétele elég, hogy a hiba δ-nál kisebb legyen; nemcsak függetlenül a hely választásától a környezeten belül, hanem *e környezet nagysága is a δ értékétől függetlenül állapítható meg.*

E meghatározás értelmében a $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$, ha egy bizonyos tartományban egyenletesen összetartó, e tartomány minden belső helyén is egyenletesen összetartó; mert ekkor ε csak úgy határozandó meg, hogy $x+h$ is a tartomány helye legyen, ha $|h|<\varepsilon$. De megfordítva is:

Ha $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ egy bizonyos véges és összefüggő tartomány minden belső és határhelyén egyenletesen összetartó, akkor az egész tartományban is egyenletesen összetartó.

Ha $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ az adott véges és összefüggő tartományban nem egyenletesen összetartó, akkor van egy δ szám, úgy hogy $|R_n(x')|$ nem marad δ-nál kisebb a tartomány minden helyén, ha $n>N$, bármily nagynak veszszük is N-et. Másrészt $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ minden egyes helyen összetartó lévén, minden helynek megfelelőleg egy ily természetű N mindenesetre létezik. Azaz, ha

$$N_1, N_2, \ldots, N_m, \ldots$$

növekedő pozitiv egész számok sorozata, tehát lim. $N_m=\infty$, akkor lehet a tartományban fekvő

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots$$

helyek sorozatát úgy kijelölni, hogy csak akkor

$$|R_n(\xi_m)|<\delta,$$

ha $n>N_m$. A $\xi_1, \ldots \xi_m, \ldots$ helyek száma határtalan, van tehát egy, az adott tartomány belsejében vagy határán fekvő hely ξ, melynek bármily kis környezetében végtelen sok ξ_m fekszik. A föltevés értelmében $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ a ξ helyen egyenletesen összetartó. Azaz

$$|R_n(\xi+h)|<\delta$$

hacsak $n > N'$ és $h < |\varepsilon|$, hol N' és ε meghatározott pozitiv számok.

De ha a $\xi_1, \ldots \xi_m, \ldots$ számok sorozatában elég messze megyünk, akkor ezek tetszőleges közel jutnak ξ-hez, azaz a $\xi + h$ számok közt foglaltatnak, míg $|R_n(\xi_m)|$ csak akkor volna δ-nál kisebb, ha $n > N_m$. Ha tehát a ξ_m sorozatban addig megyünk, míg $N_m > N'$, ez ellenmondáshoz vezet és így ama föltevés, hogy $\sum_0^\infty f_n(x)$ nem az egész tartományban egyenletesen összetartó, szinten ellenmondáshoz vezet.

142. A $\sum_0^\infty f_n(x)$ soralakban adott függvények vizsgálatánál az egyenletes összetartás jelentősége a következő tételen alapszik:

Ha minden $f_n(x)$ az x helyen folytonos függvény és $\sum_0^\infty f_n(x)$ az x helyen egyenletesen összetartó, akkor $\sum_0^\infty f_n(x)$ e helyen folytonos függvény. Ha röviden

$$F(x) = \sum_0^\infty f_n(x),$$

$$F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x),$$

akkor:

$$F(x) = \sum_0^\infty f_n(x) = F_n(x) + R_n(x).$$

A 140. czikk értelmében, a δ-nak tetszőleges választása után, lehet egy N-et és egy ε'-t meghatározni, úgy hogy

$$|R_n(x+h)| < \tfrac{1}{3}\delta,$$

hacsak $n > N$ és $|h| < \varepsilon'$.

Minthogy pedig $F_{N+1}(x)$ meghatározott számmal levő, folytonos függvények összege, tehát maga is folytonos, lehet továbbá egy ε''-t meghatározni, úgy hogy

$$|F_{N+1}(x+h) - F_{N+1}(x)| < \tfrac{1}{3}\delta$$

ha $|h| < \varepsilon''$. Ha tehát ε az ε' és ε'' számok kisebbikét jelenti, még:

$$|F_{N+1}(x+h) - F_{N+1}(x)| < \tfrac{1}{3}\delta, \; |R_{N+1}(x)| < \tfrac{1}{3}\delta, \; |R_{N+1}(x+h)| < \tfrac{1}{3}\delta;$$

és e szerint végre:

$$|F(x+h)-F(x)|<|F_{N+1}(x+h)-F_{N+1}(x)+R_{N+1}(x+h)-R_{N+1}(x)|$$
$$<|F_{N+1}(x+h)-F_{N+1}(x)|+|R_{N+1}(x+h)|+|R_{N+1}(x)|<\delta,$$

hacsak $|h|<\varepsilon$. Az $F(x)$ folytonossága pedig nem más, mint az utolsó egyenlőtlenségekben kifejezett tulajdonság.

E tétel közvetetlen folyománya még:

Ha egy bizonyos tartományban minden $f_n(x)$ folytonos függvény és $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ egyenletesen összetartó, akkor $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ e tartomány minden belső helyén folytonos függvény.

Ha ugyan e tulajdonságok fönnállanak valamely összefüggő tartománynak nemcsak belső helyein, de minden határhelyén is, akkor $\sum\limits_0^\infty f_n(x)$ e tartományban egyenletesen folytonos.

Hatványsorok.

143. Az egész függvények alakja, ha azokat egy a pont környezetében kifejtjük, valamint a differencziálható függvényeknek analóg kifejezése Taylor sorában ráutal arra, hogy mindenek előtt azon soralakban adott függvényeket vizsgáljuk, melyeknél

$$f_n = c_n(x-a)^n,$$

hol $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$ egészen tetszőleges számsorozat és így minden $f_n(x)$ az x bármely értékénél folytonos és differencziálható függvény. Ily módon keletkezik a *hatványsor* alakja:

$$\sum_0^\infty c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots,$$

melynek mindenekelőtt összetartási tartományát kell meghatároznunk. Az összetartási viszonyok bármely hatványsornál a következő tételben jellemezhetők:

Mindig találhatni egy R-et, mely általánosságban pozitiv szám, de szélső esetekben 0 és ∞ is lehet, úgy hogy

a sor föltétlenül összetartó, ha $|x-a|<R$,

a sor széttartó, még pedig úgy, hogy tagjainak absolut értéke minden határon túl növekszik, ha $|x-a|>R$,

a sor összetartása kétes, ha $|x-a|=R$. Ezen utolsó kifejezés annyit jelent, hogy azon számok közt, melyekre nézve $|x-a|=R$, lehetnek olyanok, melyek a sort föltétlenül vagy föltétesen összetartóvá, vagy pedig széttartóvá teszik, még pedig oly módon, hogy e tekintetben különböző hatványsoroknál különböző viszonyok léphetnek föl.

A mi a szélső eseteket illeti, midőn $R=0$ vagy végtelen, világos, hogy az első esetben minden az a-tól különböző x-re nézve $|x-a|>0$, tehát a sor csak az $x=a$ helyen lehet összetartó, hol minden tagja az első kivételével 0. Ha $R=\infty$, akkor, a mint e jelzést már eddig is használtuk, $|x-a|<\infty$ csak annyit jelent, hogy $|x-a|$, tehát x véges szám; azaz $R=\infty$, ha a sor bármely x érték behelyettesítésénél összetartó.

Ha a complex számok síkbeli ábrázolását használjuk és az a-nak megfelelő pont A, akkor az $|x-a|<R$, $|x-a|=R$ és $|x-a|>R$ föltétel által meghatározott számoknak megfelelnek azon pontok, melyek egy az A középpontból az R sugárral szerkesztett kör belsejében, kerületén, ill. e körön kívül feküsznek. A hatványsorok összetartási tartományát tehát ezen ábrázolásnál egy kör képviseli, *az összetartási kör*, melynek belseje megfelel az összetartási tartomány belső helyeinek, kerülete pedig e tartomány határhelyeinek. A határhelyeken a viszonyok kétesek maradnak. E fölfogásnak megfelelőleg *R az összetartási kör sugara.* Ha $R=0$, a kör a középpontba zsugorodik össze, ha $R=\infty$, a kör magában foglalja az egész síkot.

A mi most már tételünk bebizonyítását illeti, ez a következő fontos segédtételen alapszik:

Ha a hatványsor ~~föltétlenül~~ összetartó, midőn $|x-a|=r$ és $r'<r$, a hatványsor akkor ~~is~~ föltétlenül összetartó, ha $|x-a|=r'$.

Mindenekelőtt világos, hogy a föltétlen összetartás csakis az $|x-a|$ értékétől függ, mert erre nézve megvizsgálandó az absolut értékek sora és ez:

$$|c_0|\,|x-a|+|c_1|\,|x-a|^2+|c_2|\,|x-a|^2+\ldots+|c_n|\,|x-a|^n+\ldots$$

Ha most már a

$$|c_0|+|c_1|r+|c_2|r^2+\ldots+|c_n|r^n+\ldots$$

pozitiv tagú sor összetartó és $r'<r$, tehát $\frac{r'}{r}<1$, akkor az n minden értékénél

$$|c_n| r'^n < |c_n| r^n,$$

és így a sorok összehasonlításának elve szerint (I. r. 111. cz.)

$$|c_0| + |c_1| r' + |c_r| r'^2 + \ldots + |c_n| r'^n + \ldots$$

is összetartó lesz, a mi bebizonyítandó volt.

Áttérve a főtételre, meglehet hogy a sor x minden értékénél föltétlenül összetartó, azaz $R = \infty$, ekkor a tétel helyes.

A következőkben tehát csak azon eset lesz részletesen elemzendő, midőn létezik az x-nek egy véges értéke, melynél a sor nem föltétlenül összetartó.

Ha most már X egy tetszőlegesen választott pozitiv egész szám; akkor az n minden pozitiv egész számú értékéhez lehet egy k_n nem negativ egész számot meghatározni, úgy hogy a sor föltétlenül összetartó, ha

$$|x - a| \leqq \frac{k_n}{X^n}$$

ellenben nem föltétlenül összetartó, ha x valamely az

$$\frac{k_n}{X^n} < |x - a| \leqq \frac{k_n + 1}{X^n}$$

föltetelnek megfelelőleg választott érték. (Szükség esetén k_n zérusnak vehető, a mikor az első föltétel mindig ki van elégítve). Mint már gyakran hasonló esetekben ebből következtetjük, hogy a $\frac{k_n}{X^n}$ soha nem kisebbedő, a $\frac{k_n + 1}{X^n}$ soha nem nagyobbodó számok; közös határértékük nem más mint R. Természetesen még bebizonyítandó hogy

$$R = \lim. \frac{k_n}{X^n} = \lim. \frac{k_n + 1}{X^n},$$

azaz, hogy e határértéknek az R-ről kijelentett sajátságai vannak.

Ha először is $|x - a| = \rho'$ az R-nél kisebb szám, mindenesetre van az n elég nagy értékénél egy $\frac{k_n}{X^n}$ szám, úgy hogy

$$\rho' < \frac{k_n}{X^n} \leqq R$$

Minthogy pedig a sor föltétlenül összetartó, ha $|x-a|=\frac{k_n}{X^n}$ és $\rho'<\frac{k_n}{X^n}$, a sor csakugyan föltétlenül összetartó, ha $|x-a|=\rho'<R$.

Ha ellenben $|x-a|=\rho''$ az R-nél nagyobb szám, a $\sum\limits_0^\infty c_n(x-a)^n$ sor csakugyan oly széttartó sor lesz, melynek tagjai minden határon túl növekednek. Mert, ha az n minden értékénél

$$|c_n|\rho''^n<G$$

akkor ha ρ bármely a ρ''-nál kisebb szám,

$$|c_0|+|c_1|\rho+|c_2|\rho^2+\ldots+|c_n|\rho^n+\ldots$$

összetartó sor volna; mert tagjai rendre kisebbek az összetartónak ismert

$$G+G\frac{\rho}{\rho''}+G\left(\frac{\rho}{\rho''}\right)^2+\ldots+G\left(\frac{\rho}{\rho''}\right)^n+\ldots$$

sor tagjainál, t. i. az előbbiek szerint:

$$|c_n|\rho^n=|c_n|\rho''^n\left(\frac{\rho}{\rho''}\right)^n<G\left(\frac{\rho}{\rho''}\right)^n.$$

De másrészt, ha ρ'' az R-nél nagyobb szám, mindenesetre van az R-hez tetszőlegesen közeledő $\frac{k_n+1}{X^n}$ számok között egy, melyre nézve

$$R\leqq\frac{k_n+1}{X^n}<\rho'';$$

tehát volna legalább egy a ρ''-nél kisebb szám, mely t. i. a $\frac{k_n}{X^n}\ldots\frac{k_n+1}{X^n}$ intervallumban fekszik, vagy pedig maga $\frac{k_n+1}{X^n}$, melyet r helyébe téve $\sum c_n r^n$ nem összetartó; de ez lehetetlen, ha a $c_n\rho''^n$ számoknak van felső határuk; tehát e számok csakugyan a végtelenig növekednek, a mivel tételünk második része is be van bizonyitva.

144. E tételnek egyszerű folyománya még:

Ha a

$$|c_n|\,|x_0-a|^n \qquad (n=0,1,\ldots)$$

számoknak van fölső határuk, a $\sum\limits_0^\infty c_n(x-a)^n$ *föltétlenül összetartó, mihelyt* $|x-a|<|x_0-a|$; *például legegyszerűbben, ha* lim. $|c_n||x_0-a|^n=0$. *Ha ellenben* $|c_n||x_0-a|$*-nak nincs határértéke, vagy pedig ez nem* 0, *a sor széttartó, ha* $|x-a|\geqq|x_0-a|$ *és tagjainak absolut értéke ugyanekkor minden határon túl nagyobbodik.*

A tétel első része az épen használt következtetésen alapszik; ha t. i. a $|c_n||x_0-a|^n$ számok fölső határa G, akkor $|x-a|$ kisebb lévén $|x_0-a|$-nál

$$|c_n||x-a|^n=|c_n||x_0-a|^n\frac{|x-a|^n}{|x_0-a|^n}\leqq G\frac{|x-a|^n}{|x_0-a|^n},$$

azaz sorunk tagjainak absolut értékei egy már összetartónak ismert pozitiv tagú sor tagjainál nem nagyobbak. A mi a tétel második részét illeti, lim. $|c_n||x_0-a|^n$ mindenesetre 0, ha a sor összetartó; tehát a sor széttartó, ha x helyébe x_0-ot teszünk és annál inkább, ha $|x-a|>|x_0-a|$. Az utóbbi esetben x az összetartási tartományon kívül fekszik és a sor tagjainak absolut értéke tehát minden határon túl nagyobbodik. *E szerint, ha az x minden értékénél* lim. $|c_n||x-a|^n=0$, *az összetartási kör sugara végtelen; ha pedig* lim. $|c_n||x-a|^n$ *az x minden értékénél végtelen,* $R=0$.

Igy például

$$\sum_0^\infty\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

az x minden értékénél összetartó; mert bármicsoda szám legyen is x, mindig:

$$\lim_n.\frac{x^n}{n!}=0.$$

Legyen ugyanis $k+1$ az első egész szám, mely $|x|$-nél nagyobb, akkor:

$$\frac{|x|^n}{n!}=\frac{|x|^k}{k!}\frac{|x|}{k+1}\frac{|x|}{k+2}\cdots\frac{|x|}{n}\leqq\frac{|x|^k}{k!}\left(\frac{|x|}{k+1}\right)^{n-k},$$

hol az első tényező véges szám, a második pedig n nagyobbodásával 0-hoz közeledik, minthogy $\frac{|x|}{k+1}$ az egységnél kisebb.

Továbbá e sor

$$\sum_0^\infty n!\,x^n$$

az x minden értékénél, $x = 0$ kivételével széttartó, mert:

$$\lim_n . \, n! \, x^n = \infty.$$

Legyen ugyanis $k+1$ az első egész szám, mely $\frac{1}{|x|}$-nél nagyobb, úgy hogy $(k+1)|x| > 1$, akkor

$$n! \, |x|^n = k! \, |x|^k (k+1)|x| (k+2)|x| \dots n|x|$$
$$> k! \, |x|^k \big((k+1)|x|\big)^{n-k}$$

hol $k! \, |x|^k$ véges szám, a másik tényező pedig n nagyobbodásával minden határon túl növekszik, mert $(k+1)|x|$ az egységnél nagyobb.

Hasonlókép látni, hogy *a sor összetartási körének sugara* $|x_0 - a|$, *ha* $\lim. |c_n| |x-a|^n$ *zérus vagy végtelen, a mint* $|x-a|$ *kisebb vagy nagyobb* $|x_0 - a|$*-nál.*

Igy például e sor:

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

összetartási körének sugara, $R = 1$, mert $\frac{|x|^n}{n}$ határértéke 0 vagy ∞, a mint $|x|$ az 1-nél kisebb vagy nagyobb.

Hogy

$$\lim. \frac{|x|^n}{n} = 0, \qquad |x| < 1$$

közvetetlenül világos; ha $|x| > 1$, tehát $|x| = 1 + \alpha$, hol α pozitiv, akkor hacsak $n \geqq 2$,

$$\frac{|x|^n}{n} = \frac{(1+\alpha)^n}{n} = \frac{1 + \binom{n}{1}\alpha + \binom{n}{2}\alpha^2 + \dots}{n} > \frac{1}{n}\binom{n}{2}\alpha^2,$$

vagyis:

$$\frac{|x|^n}{n} > \frac{n-1}{2}\alpha^2;$$

tehát:

$$\lim. \frac{|x|^n}{n} = \infty, \qquad |x| > 1.$$

Ugyanígy végre látni, hogy e sornál is:

$$\sum_0^\infty n \, x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + n x^n + \dots$$

az összetartási kör sugara, $R = 1$. Mert ismét lim. $n x^n$ zérus vagy ∞, a mint $|x|$ kisebb vagy nagyobb, mint egy.

Ezt az előbbiekből közvetetlenül fölismerhetjük, ha a reciprok értéket vizsgáljuk, t. i.

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{|x|}\right)^n$$

∞ vagy 0, a mint $\frac{1}{|x|} > 1$, vagy < 1.

145. A hatványsor összetartási tartományának meghatározása különösen egyszerű, *ha*

$$\lim. \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

meghatározott érték (véges vagy végtelen). Akkor e határérték nem más, mint R.

Ha ekkor ugyanis $|x - a| < R$, akkor a

$$\sum_0^\infty c_n (x - a)^n$$

sorból az absolut értékek sorát képezve, ez $\sum_0^\infty |c_n|\, |x - a|^n$, melyre közvetetlenül alkalmazható a 232. oldal kezdetén álló összetartási föltétel, mely szerint e sor összetartó, ha

$$\lim. \frac{|c_{n+1}|\,|x - a|^{n+1}}{|c_n|\,|x - a|^n} = \lim. \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\,|x - a| < 1$$

azaz, ha

$$|x - a| < \lim. \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

Ha $\lim. \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = 0$, tehát $\lim. \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \infty$, a föltétel bármely alakjában az $|x - a|$ minden véges értékénél ki van elégítve.

Az idézett (136.) czikk elején adott összetartási föltételnek megfelelőleg még, *ha* $\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$ *az n egy bizonyos értékétől kezdve mindig nagyobb egy bizonyos K számnál, akkor* $R \geq K$, *azaz a sor mindenesetre összetartó, ha* $|x - a| < K$. Ismét az absolut értékek sorára alkalmazva a tételt, e sor összetartó, ha

$$\frac{|c_{n+1}||x-a|^{n+1}}{|c_n||x-a|^n}$$

egy bizonyos n-től kezdve, egy bizonyos pozitiv és 1-nél kisebb számnál is kisebb; de most

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < \frac{1}{K}$$

és így ama kifejezés, mindig kisebb, mint $\frac{|x-a|}{K}$, a mi ha $|x-a|$ a K-nál kisebb, csakugyan az 1-nél kisebb szám.

E tételek alapján az előbb példáknak fölhozott sorok összetartása könnyebben itélhető meg. Lesz a négy sorra egymásután:

$$R = \lim.\left(\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!}\right) = \lim.(n+1) = \infty, \quad R = \lim.\left(n! : (n+1)!\right) = \lim.\frac{1}{n+1} = 0$$

$$R = \lim.\left(\frac{1}{n} : \frac{1}{n+1}\right) = \lim.\frac{n+1}{n} = 1, \quad R = \lim.(n : n+1) = 1.$$

146. *Ha a*

$$\sum_0^\infty c_n (x-a)^n$$

sornak egyes tagjait differencziáljuk, a keletkező

$$\sum_1^\infty n\, c_n (x-a)^{n-1}$$

hatványsornak összetartási köre ugyanaz, mint az eredeti soré. Azaz ha az első sor összetartó, vagy széttartó, a mint $|x-a| < R$, vagy $|x-a| > R$, ugyanez áll a második sorra nézve is. Ellenben ha $|x-a| = R$, a két sor összetartási viszonyai különbözők lehetnek.

Ha x az első sor összetartási tartományán belül fekszik, azaz $|x-a| < R$, akkor mindig lehet egy szintén az összetartási tartotományon belül fekvő x'-et és x''-t találni, úgy hogy

$$|x-a| < |x'-a| < |x''-a| < R.$$

E szerint:

$$\lim.\left(n\, c_n (x'-a)^{n-1}\right) = \lim.\left(c_n (x''-a)^n\right) \lim.\left(n\left(\frac{x'-a}{x''-a}\right)^n\right)\frac{1}{x'-a};$$

de e határértékek közül az első 0, mert x'' a $\sum_0^\infty c_n (x-a)^n$ sor összetartási tartományán belül fekszik, a második mert $\frac{x-a}{x'-a}$ absolut értéke egynél kisebb (l. a 144. cz. végén), míg $x'-a$ a 0-tól különböző szám. Ha tehát $|x-a|<|x'-a|$ és annál inkább, ha $|x-a|<R$, a differencziálásból keletkezett sor is összetartó.

Ha ellenben $|x-a|>R$ és tehát $c_n(x-a)^n$ határértéke nem 0, akkor $nc_n(x-a)^{n-1}$ határértéke annál kevésbé lehet 0 és a második sor is széttartó.

Igy p. az $\sum\limits_0^\infty(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ és $\sum\limits_0^\infty(-1)^n x^n$ soroknál az összetartási kör sugara, $R=1$, de az összetartási tartomány határán, midőn $x=1$, az első sor

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots$$

összetartó; míg a második

$$1-1+1-1+\ldots$$

széttartó (ill. ingadozó).

Minthogy a differencziálás alapján keletkezett sort újból differencziálhatjuk és úgy tovább és az ezen eljárásnál keletkező sorok összetartási köre mindig ugyanaz marad, általánosabban is kijelenthetjük, hogy:

Bármely hatványsornak és a tagoknak akárhányszoros differencziálása által belőle keletkező hatványsoroknak összetartási köre mindig ugyanaz; azaz a

$$\sum_0^\infty c_n(x-a)^n \quad \text{és} \quad \sum_k^\infty n(n-1)\ldots(n-k+1)\,c_n(x-a)^{n-k}$$

sorok összetartási tartománya legfölebb a határhelyekben különbözik.

Az, hogy e tagonkénti differencziálásból keletkező hatványsorok egyszersmind az összetartási tartományon belül az eredeti hatványsor differencziálhányadosait adják, ebből még semmikép sem következtethető, hanem külön lesz bebizonyítandó. (L. a 149. czikket.)

147. *Minden hatványsor összetartási tartományan belül folytonos függvény.* Ha ugyanis $|x-a|<R$, akkor mindig van oly r szám is, hogy:

$$|x-a|<r<R,$$

és így

$$|c_n(x-a)^n|<|c_n|r^n,$$

a miből állításunk a 142. czikk értelmében közvetetlenül foly az $|x'-a|<r$ tartományra nézve, melynek pedig x belső helye.

Fontos még e tételnek következő, Abel-től származó általánosítása:

Ha az $F(x)=\sum\limits_0^\infty c_n(x-a)^n$ *hatványsor az összetartási tartomány egyik határhelyén, hol például*

$$x=a+R(\cos.\varphi+i\sin.\varphi),$$

összetartó, akkor:

$$\lim_{r=R}.F\big(a+r(\cos.\varphi+i\sin.\varphi)\big)=F\big(a+R(\cos.\varphi+i\sin.\varphi)\big).$$

A föltevés szerint:

$$\Sigma c_n(\cos.n\varphi+i\sin.n\varphi)R^n\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

összetartó, ha $\frac{r}{R}\leqq 1$; ha tehát

$$u_n=c_n(\cos.n\varphi+i\sin.n\varphi)R^n,\ \alpha=\frac{r}{R}$$

tétetik, akkor közvetetlenül alkalmazható az I. r. 117. cz. utolsó tétele, mely szerint a

$$\Sigma u_n=F\big(a+R(\cos.\varphi+i\sin.\varphi)\big)$$

$$\Sigma u_n\alpha^n=F\big(a+r(\cos.\varphi+i\sin.\varphi)\big)$$

sorok különbségének absolut értéke egy tetszőleges ε-nál is kisebbé tehető, ha α pozitiv és 1-nél kisebb értékét az 1-hez elég közel veszszük; azaz ha most r-nek pozitiv és R-nél kisebb értékét az R-hez elég közel veszszük. Ugyanazt mondja a tételünkben foglalt egyenlet. (A határátmenetnél más r nem is használható; mert r értelme szerint pozitiv és ha $r>R$, kilépünk az $F(x)$ értelmezési tartományából.)

Az összetartási tartomány belsejében a hatványsorok értéke gyakran sokkal egyszerűbben határozható meg, mint a határhelyeken. A most levezetett tétel fontossága abban rejlik, hogy kiterjeszti e meghatározást ama határhelyekre is, hol a sor egyáltalában összetartó. Igy p. kimutatjuk majd, hogy

$$\left(\mathrm{l.}\,(1+x)\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

ha $|x| < 1$; de ha $x = 1$, sorunk összetartó marad; tehát:

$$\lim_{x=1} \mathrm{l.}\,(1+x) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots,$$

azaz e sor értéke nem más, mint l.2.

148. *Ha a*

$$\sum_0^\infty c_n (x-a)^n \quad \text{és} \quad \sum_0^\infty c_n' (x-a)^n$$

hatványsorok az a egy bizonyos környezetében összetartók és e környezetben mindenütt ugyanazon értéket adják, akkor e hatványsorok teljesen azonosak, azaz:

$$c_n = c_n'. \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

A két sor értéke először is ugyanaz, ha $x = a$, azaz

$$c_0 = c_0';$$

tehát

$$c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \ldots = c_1' (x-a) + c_2' (x-a)^2 + \ldots$$

ha pedig x nem egyenlő a-val, ebből:

$$c_1 + c_2 (x-a) + \ldots = c_1' + c_2' (x-a) + \ldots;$$

de a két oldalon álló sorok az a helyen folytonos függvényt ábrázolnak; határértékeik az a helyen egyenlők, tehát az ezekkel azonos helyettesítési értékek is, vagyis

$$c_1 = c_1'.$$

Hasonlóképen áttérünk a $c_2 = c_2'$ bizonyítására és általánosan a $c_n = c_n'$-ére, bármicsoda pozitiv egész szám is n.*

* Megjegyezhető még, hogy a bebizonyított tétel a következő sokkal általánosabbnak speciális esete:

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ *oly számok határtalan sorozata, melyek mind különbözők és melyekre nézve* $\lim. a_m = a$; *ha a* $\sum_0^\infty c_n (x-a)^n$ *és*

A tétel tartalmának gyakran még a következő alakot is adjuk: *Ha az $F(x)$ függvény a-nak környezetében egyáltalában kifejezhető hatvány sor alakjában, ez mindig csak egy bizonyos, meghatározott módon történhetik.*

Mert ha volna az a egy bizonyos környezetében

$$F(x) = \sum_0^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad F(x) = \sum_0^{\infty} c'_n (x-a)^n,$$

akkor ebből épen, mint előbb $c_n = c'_n$ következnék az n minden nem negativ egész értékénél.

149. Ha $F(x) = \sum_0^{\infty} c_n (x-a)^n$ hatványsor alakjában adott függvény, akkor az e függvény folytonossága és differencziálására vonatkozó kérdések megoldása a növesztett függvény $F(x+h)$ kellő alakban való előállításától függ, hol h absolut értéke kezdettől fogva tetszőleges kicsinynek vehető.

A hatványsor összetartási körének sugara R véges pozitiv szám vagy végtelen.* Ha x ezen összetartási tartomány belső helye, azaz

$$|x-a| < R,$$

az $R - |x-a|$ pozitiv szám és a növekmény nagysága kezdettől fogva megszorítható úgy, hogy

$$|h| < R - |x-a|, \quad |x-a| + |h| < R$$

legyen. Az $x+h$ növesztett változó érték ekkor az összetartási tartománynak szintén belső helye, mert

$$|x+h-a| < |x-a| + |h| < R.$$

$\sum_0^{\infty} c'_n (x-a)^n$ sorok erteke megegyezik, midőn $x = a_m$, a sorok azonosak, azaz $c_n = c'_n$. Könnyű látni, hogy a határátmenet, mely mindig a $c_n = c'_n$ állításhoz vezet, most is végezhető, ámbár nem bárminő számokon, hanem csak az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ számokon keresztűl, a mi azonban a végeredményen nem változtat.

* Azon esetet, hogy a $\sum_0^{\infty} c_n (x-a)^n$ sor csak az $x = a$ helyen összetartó, ezután teljesen mellőzzük. Világos, hogy ekkor a soralak nem értelmez függvényt.

Fölötte egyszerű lesz a vizsgálat, ha a növesztett függvényt

$$F(x+h)=\sum_0^\infty c_n(x-a+h)^n$$

a h hatványai szerint rendezett alakban lehet előállítani. De ez a növekménynek előbb megállapított megszorítása mellett csakugyan lehetséges. Mert e sorban

$$\sum_0^\infty c_n(x-a+h)^n=\sum_0^\infty c_n\Big((x-a)^n+\tbinom{n}{1}(x-a)^{n-1}h+\ldots$$
$$+\tbinom{n}{k}(x-a)^{n-k}h^k+\ldots+h^n\Big)$$

szabad a h egyenlő hatványait összevonni, ha

$$\sum_0^\infty |c_n|\Big(|x-a|^n+\ldots+\tbinom{n}{k}|x-a|^{n-k}|h|^k+\ldots+|h|^n\Big)=\sum_0^\infty |c_n|(|x-a|+|h|)^n$$

összetartó. Ekkor ugyanis azon sor, melyet az egyes összegalakú sortagok fölbontása szolgáltat, szintén föltétlenül összetartó, tehát a tagok sorrendjének változtatásánál az érték nem változik. Az utolsó sor pedig összetartó, mert $\sum_0^\infty |c_n|r^n$ ilyen, ha $r<R$. A föltevés szerint pedig most $r=|x-a|+|h|<R$.

Ha e rendezést elvégezzük, a h^k-t tartalmazó tagok a h^k kiemelése után:

$$\sum_k^\infty c_n\tbinom{n}{k}(x-a)^{n-k}=\frac{1}{k!}\sum_k^\infty n(n-1)\ldots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}=\frac{1}{k!}F_k(x)$$

(a $k+1$-ik tag előtt állók a h-nak ily magas hatványát nem tartalmazzák), hol $F_k(x)$ nem más mint azon hatványsor, mely $F(x)$-ből k-szor ismételt tagonkénti differencziálás által keletkezik. A h-nélküli tagok összessége, mint különben is közvetetlenül látni, nem más mint $F(x)$. E szerint, ha k helyett ismét n-et irunk,

$$F(x+h)=\sum_0^\infty F_n(x)\frac{h^n}{n!}=F(x)+F_1(x)\frac{h}{1}+\ldots+F_n(x)\frac{h^n}{n!}+\ldots$$

mely sor összetartó, ha $|h|<R-|x-a|$, míg maga $|x-a|$ az R-nél kisebb. Ez nem más, mint a h hatványai szerint haladó hat-

ványsor, melyről a tárgyalás értelmében tudjuk, hogy a $h=0$ hely egy bizonyos véges környezetében összetartó; az illető összetartási kör sugara ugyanis $R-|x-a|$-nál semmi esetre sem kisebb.

Ebből mindenekelőtt azon fontos következtetést vonjuk le, hogy:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'_1(x)+F'_2(x)\frac{h}{2!}+\ldots+F'_n(x)\frac{h^{n-1}}{n!}+\ldots$$

hol a jobboldal, minthogy összetartó, ha $|h|<R-|x-a|$, a $h=0$ helyen folytonos függvény, melynek e helyen tehát úgy helyettesítési, mint határértéke $F'_1(x)$, tehát:

$$\lim_{h=0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'_1(x).$$

Azaz: *Minden hatványsor alakjában adott függvény az összetartási tartomány belsejében differencziálható függvény és a differencziálhányados a sorból tagonkénti differencziálással képezhető.*

Más kifejezésben:

$$F'(x)=F_1(x)$$

de $F'_1(x)$ ismét az $x-a$ hatványai szerint haladó sor és x ismét az összetartási tartományon belül fekvő hely, tehát

$$F''(x)=F'_2(x)$$

és általánosan:

$$F^{(k)}(x)=F_k(x).$$

A hatványsorok tehát összetartási tartományukon belül mindenütt oly függvények, melyeknek minden differencziálhányadosa véges és meghatározott; e differencziálhányadost a soralak tagonkénti differencziálása adja.

150. *A növesztett függvény kifejezése, ha x az $F(x)$ összetartási tartomány belsejében fekvő hely:*

$$F(x+h)=F(x)+F'(x)\frac{h}{1}+F''(x)\frac{h^2}{2}+\ldots+F^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}+F^{(n+1)}(x)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots \tag{I.}$$

az u. n. végtelen TAYLOR-sor, mely az előbb tárgyalt hasonló alaktól abban eltér, hogy a tagok száma végtelenbe megy és ennek megfelelőleg a maradéktag eltünt. Hogy az $F(x+h)$ véges Taylor-sor alakjában is fölirható, világos abból, hogy $F(x)$ minden differencziálhányadosa véges és meghatározott.

Ha itt ismét a változó $x+h$-t egy betűvel z-vel, a vizsgálat folyamán állandó x-et például b-vel jelöljük, akkor $h = z - b$ és az egész eredmény következőkép fejezhető ki. *Ha*

$$F(x) = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + c_n \frac{(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

és b az összetartási tartomány belső helye, azaz $|b-a| < R$, *akkor*

$$F(z) = F(b) + F'(b)\frac{z-b}{1} + F''(b)\frac{(z-b)^2}{1.2} + \ldots + F^{(n)}(b)\frac{(z-b)^n}{n!} + \ldots \quad \text{(II.)}$$

mely sor minden esetre összetartó, ha

$$|z-b| < R - |b-a|,$$

ámbár semmikép sincs kizárva, hogy a (II.) sor összetartási tartománya ennél nagyobb.

A mennyiben z' az eredeti sor összetartási tartományának belső helye, az átalakítás alapján közvetetlenül tudjuk, hogy $F(z')$ az első vagy második sorban ugyanazon érték; de ha a második sor összetartási tartománya messzebb terjed, az $F(x)$ meghatározását adhatja oly helyen, hol az első sor nem használható. (Ily módon ezen átalakítás a függvény értelmezési tartományának nagyítását, *a függvény folytatását* adhatja az eredeti értelmezési tartományon tul, a mely megjegyzés az analitikai függvények elméletének alapja. Analitikai függvény Weierstrass szerint, minden oly függvény, melynek értelmezési tartománya összefüggő, ha értelmezési tartománya minden belső helyének környezetében fölbontható egyértékű és hatványsorok alakjában kifejezhető függvényágakra és ha végre e függvényágak magukban foglalják a függvénynek minden a föntemlített módon eszközölhető folytatását.)

Az eredeti $F(x)$ sor megadja a függvényt az a egy bizonyos környezetében, ez *a függvény hatványsor kifejtése az a környezetében*, melyről a Taylor sor segítségével áttérünk a függvény hatványsor kifejtésére bármely az a ama környezetében fekvő b hely környezetében.

Különösen fontos amaz eset, midőn az eredeti sor összetartási tartományának belső helye a 0. Ekkor a függvény (ha b helyébe 0-t teszünk) kifejthető az x hatványai szerint, mely kifejtés a változó elég kis értékeinél érvényes. Ez az úgynevezett *Mac Laurin sora* az illető függvényre nézve:

$$F(x)=F(0)+F'(0)\frac{x}{1}+F''(0)\frac{x^2}{2!}+\ldots+F^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad \text{(III.)}$$

A 148. czikk értelmében egyszersmind tudjuk, hogy ha valamely függvény egyáltalában hatványsor alakjában kifejthető az a környezetében, a kifejtés szükségkép azonos a II. (ill. III.) alakzatokkal. A mit úgy is lehet most kimondanunk, hogy, *ha*

$$F(x)=\sum_0^\infty c_n(x-a)^n,$$

akkor

$$c_n=\frac{F^{(n)}(a)}{n!},$$

a mit különben még úgy is láthatunk be most, hogy a soralakból $F^{(n)}(x)$-et képezve

$$F^{(n)}(n)=n!\,c_n+(n+1)\ldots 2\,c_{n+1}(x-a)+(n+2)\ldots 3\,c_{n+2}(x-a)^2+\ldots$$

és $x=a$-t behelyettesítve, lesz: $F^{(n)}(a)=n!\,c_n$, a mi nem más, mint az előbb jelzett eredmény.

Semmikép sem szabad hinnünk, hogy minden függvénynek ily hatványsor alakja van, ha csak az illető a helyen az összes $F^{(n)}(a)$ számok képezhetők. Nagyon egyszerű példa erre a $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, melynek, mint valós változó függvényének a 0 helyen minden differencziálhányadosa 0. E szerint, ha lehetséges volna e függvényt x hatványai szerint sorba fejteni, úgy hogy e sor a 0 bármily kis környezetében a függvényt ábrázolná, akkor e sorfejtésben minden c_n együttható 0 volna; azaz az $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a 0 egy bizonyos környezetében 0 volna. Pedig e függvény sehol sem 0, kivéve az $x=0$ helyen. *Az* $e^{-\frac{1}{x^2}}$ *épen nem fejthető ki az x hatványai szerint* és az ellenkező föltevés képtelen eredményhez vezet.

A kifejtés számos példái a következő fejezetben lesznek tárgyalandók.

Hatványsorokból összetett függvényalakok,

151. Az elemi függvények soralakjának meghatározásánál néhány általánosabb tételre van szükségünk, mely t. i. előre biztosít arról, hogy az illető függvény a vizsgált hely környezetében valóban kifejezhető hatványsor alakjában. Hogy a számításokat később összefüggésben végezhessük, e tételeket itt előlegesen összeállítjuk.

Ha $f_1(x)$ és $f_2(x)$ az a környezetében hatványsor alakjában kifejezhető függvények, akkor az $f_1(x)\,f_2(x)$ szorzat ama hely környezetében szintén kifejezhető hatványsor alakjában.

Ha ugyanis

$$f_1(x)=\sum_0^\infty c_n^{(1)}(x-a)^n,\quad f_2(x)=\sum_0^\infty c_n^{(2)}(x-a)^n,$$

midőn $|x-a|<R_1$, ill. $|x-a|<R_2$, és R az R_1, R_2 számok kisebbikét jelenti, akkor ama sorok föltétlenül összetartók, ha $|x-a|<R$ és az ily sorok szorzására vonatkozó törvény értelmében (I. r. 120. v. 121. cz.):

$$f_1(x)\,f_2(x)=\sum k_n(x-a)^n,$$

hol

$$k_n=c_0^{(1)}c_n^{(2)}+c_1^{(1)}c_{n-1}^{(2)}+\ldots+c_n^{(1)}c_0^{(2)}.$$

Ha $f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x)$ az a hely környezetében hatványsor alakjában kifejezhető függvények, akkor az $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_m(x)$ összeg az a helyen szintén ily függvény.

Ha ugyanis ismét

$$f_i(x)=\sum_0^\infty c_n^{(i)}(x-a)^n,\qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

midőn $|x-a|<R_i$ és R az $R_1, R_2, \ldots R_m$ számok legkisebbike, akkor ismét a sorok összeadási törvénye szerint, még

$$f_1(x)+\ldots+f_m(x)=\sum_0^\infty (c_n^{(1)}+\ldots+c_n^{(m)})(x-a)^n,$$

ha $|x-a|<R$.

Ha $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots f_m(x) \ldots$ az a környezetében hatványsor *alakjában kifejezhető függvények határtalan sorozata és nemcsak* $\sum_0^\infty f_n(x)$, *hanem még* $\sum_0^\infty \varphi_n(x)$ *is az a egy bizonyos környezetében midőn p.* $|x-a|<R$, *összetartó sor, hol t. i. az*

$$f_m(x)=\sum_0^\infty c_n^{(m)}(x-a)^n$$

lévén, megfelelőleg

$$\varphi_m(x)=\sum_0^\infty |c_n^{(m)}|\,|x-a|^n,$$

azaz az $f_m(x)$ *tagjainak absolut értékeiből képezett sor; akkor* $\sum_0^\infty f_n(x)$ *is hatványsor alakjában kifejezhető függvény, midőn* $|x-a|<R$; *még pedig:*

$$\sum_0^\infty f_n(x)=\sum_0^\infty C_n(x-a)^n,$$

hol ép úgy mint véges összegeknél:

$$C_n=c_n^{(0)}+c_n^{(1)}+\ldots+c_n^{(m)}+\ldots$$

Ekkor ugyanis $\sum_0^\infty f_n(x)$ kétszeresen végtelen sornak tekintendő, melyben t. i. minden tag, $f_n(x)$ ismét végtelen sor alakjában van adva. A kifejtett föltétel értelmében e kétszeresen végtelen sor föltétlenül összetartó és úgy is rendezhető, hogy az $x-a$ egyenlő hatványait összevonjuk.

Természetesen ama két elrendezés egyenlő értéket adhat a nélkül is, hogy *minden* elrendezés ezen értékhez vezetne, azaz a nélkül, hogy a kétszeresen végtelen sor föltétlenül összetartó volna. Ennek megfelelőleg ama föltétel nem szükséges, de mindenesetre elegendő arra, hogy $\sum_0^\infty f_n(x)$ az $x-a$ hatványai szerint rendezhető legyen. Az itt végzendő tárgyalásokban azonban e szűkebb föltétellel is már czélt érünk.*

153. *Ha* $f(x)$ *és* $f_1(x)$ *az a környezetében hatványsor alakjá-*

* Az általános föltételt ill. lásd WEIERSTRASS, Abh. zur Functionenlehre, pag. 73.

ban kifejezhető függvények és $f(a)$ nem zérus, akkor az a egy bizonyos környezetében $\frac{f_1(x)}{f(x)}$ szintén kifejezhető mint hatványsor.

Világos, hogy elég ezt $\frac{1}{f(x)}$-re bebizonyítani, ha erre áll, a megelőző czikk értelmében az $\frac{1}{f(x)}f_1(x)$ szorzatra is érvényes.

Legyen részletesen

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = c_0 + \varphi(x)$$

hol tehát c_0 nem 0, akkor a geometriai haladvány képletét használva:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \ldots + z^n + \ldots, \; |z| < 1$$

lesz:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c_0\left(1 - \frac{\varphi(x)}{c_0}\right)} = \frac{1}{c_0}\left(1 + \frac{\varphi(x)}{c_0} + \left(\frac{\varphi(x)}{c_0}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\varphi(x)}{c_0}\right)^n + \ldots\right),$$

hol $\varphi(x)$ az a környeztében összetartó hatványsor és $\varphi(0) = c_0$. Szintén ilyen a $\varphi(x)$ absolut értékeiből képezett sor:

$$\Phi(x) = |c_1|\,|x-a| + \ldots + |c_n|\,|x-a|^n + \ldots,$$

lehet tehát egy pozitiv R számot meghatározni, úgy hogy, ha csak $|x-a| < R$, mindig

$$\Phi(x) < |c_0|.$$

Ha az $\frac{1}{f(x)}$ kifejezésében a zárjelben álló sor egyes tagjainak helyébe mindig az absolut értékeket tesszük, akkor $\left(\frac{\varphi(x)}{c_0}\right)^n$ helyébe jő:

$$\left(\frac{\Phi(x)}{|c_0|}\right)^n$$

és e sor összetartó, ha $|x-a| < R$, mert akkor $\Phi(x) < |c_0|$. Az $\frac{1}{f(x)}$ tehát kifejthető az $(x-a)$ pozitiv hatványai szerint és e sorfejtéshez jutunk, ha az $\frac{1}{f(x)}$ ama kifejezéseben az $x-a$ egyenlő hatványait összevonjuk.

153. *Ha $F(x)$ oly egyértékű függvény, melynek differenczialhányadosa $f(x)$ az a környezetében kifejezhető hatványsor alakjában, akkor $F(x)$ az a-nak ugyanazon környezetében szintén kifejezhető hatványsor alakjában.*

Legyen ugyanis

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots;$$

akkor «tagonkénti integráczió» segítségével oly hatványsorhoz jutunk:

$$C + c_0(x-a) + \tfrac{1}{2}c_1(x-a)^2 + \tfrac{1}{3}c_2(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}c_n(x-a)^{n+1} + \ldots$$

melynek összetartási köre ugyanaz, mint az $f(x)$ soré; mert hisz az utóbbiból ismét a differencziálásnál az $f(x)$ sora keletkezik. Ha továbbá $C = F(a)$ tétetik, akkor a

$$\Phi(x) = F(a) + c_0(x-a) + \tfrac{1}{2}c_1(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}c_n(x-a)^{n+1} + \ldots$$

sornak és $F(x)$-nek differencziálhányadosa mindenütt ugyanaz, hol $|x-a| < R$, tehát $F(x) - \Phi(x)$ e tartományban állandó. Ez állandó meghatározására x helyébe a-t tehetünk; vagyis

$$F(x) - \Phi(x) = F(a) - \Phi(a).$$

De $\Phi(a) = F(a)$ és így végre:

$$F(x) = \Phi(x).$$

Folytonos és nem differencziálható függvények.

154. Az elemi függvények mindannyian általánosságban folytonos és differencziálható függvények; azaz ha e tulajdonságuk meg is szünik egy bizonyos helyen, e helynek mindig lehet oly véges környezetét kijelölni, a mely környezetben ama hely az egyetlen, melynek ily kivételes jellege van. Azonkívül e helyen a függvénynek a differencziálásra vonatkozó kivételes volta, ha ugyanitt nem szakad meg egyszersmind folytonossága, egyszerűen abban mutatkozik, hogy a differencziálhányadosnak nevezett határérték végtelen lesz.

Igy keletkezett azon soká fönntartott téves nézet, hogy minden valós függvény, ha folytonos, differencziálható is — legfölebb egyes helyek kivételével, hol a differencziálhányados végtelen. Ampère és mások még ezen igaznak vélt tételnek bizonyítását is megkisérlették. Evvel szemben Weierstrass hangsúlyozta először és példákon bizonyította, hogy valós változók függvényeinél abból, hogy egy bizonyos számközben folytonosak, még az sem következtethető, hogy e számköznek még csak egyes helyein is legyen meghatározott differencziálhányadosuk, annál kevésbé természetesen, hogy e differencziálhányados bárminő számközben ismét a változó folytonos függvénye.

A részletes tárgyalás azon az analizis alkalmazásainak szempontjából is fölötte fontos eredményhez vezet, hogy a differencziálszámítás módszereinek alávethető függvények osztálya semmikép sem azonos a folytonos függvények osztályával, hanem ezeknek egy szűk alfaját teszi. Tapasztalatilag adott függvényvonatkozásnál tehát abból, hogy a függvény folytonos, nem lehet arra következtetni, hogy megközelítőleg arányos változás kifejezése.

Hogy a fölvett kérdést csak *valós* változók függvényeire vonatkozólag elemezzük, magától érthető. Ha complex változó függvénye alatt Riemann szerint már csak a differencziálható függvényeket értjük, a kérdés természetesen egészen elesik. Ha pedig Cauchy-val a $z = x + iy$ függvényének veszszük az összes $u(x, y) + iv(x, y)$ alakokat, akkor hogy ez differencziálható legyen, mindenekelőtt kell, hogy u és v parcziálisan differencziálható legyen x és y szerint. De ha vannak folytonos és nem differencziálható egyváltozós függvények, például $f(x)$ ilyen, akkor, ha p. $u = f(x)\, f(y)$, közvetetlenül világos, hogy $u + iv$ semmi esetre sem differencziálható $x + iy$ szerint.

155. A hires példa,* melyben Weierstrass először mutatta be az oly függvény létezését, mely mindenütt folytonos, de melynek a mellett sehol sincs meghatározott (azaz véges, vagy meghatározott előjelű végtelen) differencziálhányadosa, a következő:

Legyen a valamely 1-*től különböző, páratlan egész szám, b az* 1-*nél kisebb pozitiv állandó; a és b továbbá úgy választandók, hogy*

$$ab > 1 + \tfrac{3}{2}\pi;$$

akkor

$$f(x) = \sum_0^{\infty} b^n \cos. (a^n x \pi)$$

az x minden értékénél ily jellegű függvény.

---

* Először közzétéve Du Bois-Reymond egy értekezésében, (Crelle, Journal, 79. kötet).

Hogy $f(x)$ folytonos függvény, abból világos, hogy az x minden értékénél $|\cos.(a^n x\pi)| \leq 1$, tehát a sor maradéka:

$$|R_n| \leq b^{n+1} + b^{n+2} + \dots$$
$$\leq b^{n+1}\frac{1}{1-b};$$

a sor tehát minden hely környezetében egyenletesen összetartó és így folytonos függvényt ábrázol.

Vizsgáljuk a függvényt egy tetszőleges x_0 helyen. Ha m bármilyen egész szám, akkor nevezzük az $a^m x_0$-hoz legközelebb fekvő egész számot α_m-nek; ha pedig $a^m x_0$ épen két egymás után következő egész szám számtani közepe, akkor legyen α_m e két egész szám kisebbike, úgy hogy:

$$-\tfrac{1}{2} < a^m x_0 - \alpha_m \leq \tfrac{1}{2}.$$

Ekkor találni egy x'_m, ill. x''_m értéket, melynél:

$$a^m x'_m - \alpha_m = -1, \qquad a^m x''_m - \alpha_m = 1,$$

$$x'_m = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \qquad x''_m = \frac{\alpha_m + 1}{a^m};$$

továbbá

$$x'_m - x_0 = -\frac{1 + (a^m x_0 - \alpha_m)}{a^m}, \quad x''_m - x_0 = \frac{1 - (a^m x_0 - \alpha_m)}{a^m}.$$

Minthogy pedig e kifejezések számlálói az m minden értékénél $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{2}$ közt feküsznek, a pedig 1-nél nagyobb egész szám, végre

$$\lim_m . x'_m = x_0, \quad \lim_m . x''_m = x_0.$$

A differencziálhányados megvizsgálására képezzük a különbségi hányadost először az $x'_1, x'_2 \dots, x'_m, \dots$ számokkal. Lesz:

$$\frac{f(x'_m) - f(x_0)}{x'_m - x_0} = \sum_0^\infty b^n \frac{\cos.(a^n x'_m \pi) - \cos.(a^n x_0 \pi)}{x'_m - x_0} =$$

$$= \sum_0^{m-1} b^n \frac{\cos.(a^n x'_m \pi) - \cos.(a^n x_0 \pi)}{x'_m - x_0} + \sum_m^\infty b^n \frac{\cos.(a^n x'_m \pi) - \cos.(a^n x_0 \pi)}{x'_m - x_0}.$$

A mi először az első (véges) összeget illeti, a

$$\cos. A - \cos. B = -2 \sin. \frac{A+B}{2} \sin. \frac{A-B}{2}$$

képlet alapján

$$\frac{\cos.(a^n x'_m \pi) - \cos.(a^n x_0 \pi)}{a^n (x'_m - x_0)} = -\pi \sin. \left(a^n \frac{x'_m + x_0}{2} \pi\right) \frac{\sin.\left(a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi\right)}{a^n \frac{x'_m - x_0}{2} \pi}.$$

De $|\sin. z| \leqq |z|$ és így itt a második és harmadik tényező absolut értéke 1-nél kisebb, tehát:

$$\left| \frac{\cos. (a^n x'_m \pi) - \cos. (a^n x_0 \pi)}{a^n (x'_m - x_0)} \right| < \pi ;$$

e szerint ama véges összeg absolut értéke kisebb mint

$$\pi \left(1 + ab + (ab)^2 + \ldots + (ab)^{m-1}\right) = \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1},$$

és annál inkább kisebb, mint

$$\pi \frac{(ab)^m}{ab - 1}.$$

Végre tehát:

$$\sum_0^{m-1} b^n \frac{\cos. (a^n x'_m \pi) - \cos. (a^n x_0 \pi)}{x'_m - x_0} = \delta_m \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1},$$

hol $|\delta_m| < 1$.

A különbségi hányados kifejezésének második része végtelen sor. Ebben $n \geqq m$ és így a^{n-m} mindig egész szám, még pedig a-val együtt páratlan egész szám. Tekintetbe véve még x'_m értékét,

$$a^n x'_m \pi = a^{n-m} (\alpha_m - 1) \pi ,$$

a mi, minthogy az a^{n-m} páratlan egész szám, $(\alpha_m - 1) \pi$-től csak a 2π egész számú többesével különbözik és így

$$\cos. a^n x'_m \pi = \cos. (\alpha_m - 1) \pi = -(-1)^{\alpha_m}.$$

Hasonlókép

$$\cos. (a^n x_0 \pi) = \cos. \left(a^{n-m} \alpha_m \pi + a^{n-m} (a^m x_0 - \alpha_m) \pi\right) =$$

$$= \cos.(\alpha_m \pi) \cos.\left(a^{n-m}(a^m x_0 - \alpha_m)\pi\right) = (-1)^{\alpha_m} \cos.\left(a^{n-m}(a^m x_0 - \alpha_m)\pi\right)$$

és igy $x'_m - x_0$ értékét tekintetbe véve:

$$\sum_m^\infty b^n \frac{\cos.(a^n x'_m \pi) - \cos.(a^n x_0 \pi)}{x'_m - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_m^\infty b^{n-m} \frac{1 + \cos.(a^{n-m}(a^m x_0 - \alpha_m \pi))}{1 + a^m x_0 - \alpha_m}.$$

Ezen összeg minden tagja pozitiv; az első tagban

$$\frac{1 + \cos.(a^m x_0 - \alpha_m)\pi}{1 + a^m x_0 - \alpha_m},$$

minthogy $a^m x_0 - \alpha_m$ az $\frac{1}{2}$ és $-\frac{1}{2}$ közt fekszik, a számlálóban álló cosinus értékének határai 0 és 1; a számláló értéke tehát 1 és 2 közt fekszik; a nevező hasonlókép $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{2}$ közt. E tag értéke e szerint $\frac{2}{3}$-nál nem kisebb, 4-nél nem nagyobbb. E szerint:

$$\sum_m^\infty b^n \frac{\cos.(a^n x'_m \pi) - \cos.(a^n x_0 \pi)}{x'_m - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \tfrac{2}{3} \eta_m,$$

hol η_m az 1-nél nagyobb pozitiv szám és a sor összetartása következtében az m minden meghatározott értékénél meghatározott véges szám. Ha még ε_m-et meghatározzuk az

$$(-1)^{\alpha_m} \eta_m \varepsilon_m = \delta_m$$

egyenletből, akkor ε_m ismét -1 és $+1$ közt fekszik és végre lesz:

$$\frac{f(x'_m) - f(x_0)}{x'_m - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_m \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_m \frac{\pi}{ab-1}\right).$$

$$(\eta_m > 1, \quad |\varepsilon_m| < 1).$$

De ha, a mint föltételeztük $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$; például

$$ab = 1 + \tfrac{3}{2}\pi + P,$$

hol P egy bizonyos pozitiv szám, akkor

$$\frac{ab-1}{\pi} = \tfrac{3}{2} + \frac{P}{\pi},$$

és

$$\frac{\pi}{ab-1} = \frac{2\pi}{3\pi + 2P} = \tfrac{2}{3} - p,$$

hol p is pozitiv szám, t. i.

$$p = \tfrac{2}{3} - \frac{2\pi}{3\pi + 2P} = \frac{4P}{9\pi + 6P},$$

tehát végre

$$p'_m = \tfrac{2}{3} + \varepsilon_m \frac{\pi}{ab-1} > p,$$

azaz

$$\frac{f(x'_m) - f(x_0)}{x'_m - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m p'_m, \qquad (p'_m > p).$$

Épen így lesz:

$$\frac{f(x''_m) - f(x_0)}{x''_m - x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m p''_m, \qquad (p''_m > p).$$

Az egész különbség az, hogy a

$$\sum_m^\infty b^n \frac{\cos.(a^n x''_m \pi) - \cos.(a^n x_0 \pi)}{x''_m - x_0}$$

sor átalakitásánál $x''_m - x_0$ pozitiv, míg $x'_m - x_0$ negativ előjelű volt; megfelelőleg $(-1)^{\alpha_m}$ helyett $-(-1)^{\alpha_m}$ lép föl, a mely megváltoztatott előjel azután mindvégig megmarad.

E szerint

$$\lim. \frac{f(x_0 + h_m) - f(x_0)}{h_m},$$

midőn

$$h_m = \pm \frac{1 \mp (a^m x_0 - \alpha_m)}{a^m},$$

hol α_m az $a^m x_0$-hez legközelebb fekvő egész szám és tehát h_m a használt előjelek szerint egyszer pozitiv, egyszer negativ, midőn továbbá $\lim. h_m = 0$, a h_m két választásának megfelelőleg egyszer $+\infty$, egyszer $-\infty$ lesz.

Az $f(x)$ függvény differencziálhányadosa az x_0 helyen tehát sem véges és meghatározott, sem határozott előjelű végtelen nem lehet.

156. E szerint még lehetséges volna, hogy az $f(x)$ differencziálhányadosa minden helyen (határozott előjel nélkül) végtelen lesz. Függvényünknek azonban távolról sincs ily egyszerű alkata; a mit az eddigi eredmények alapján ismét nehézség nélkül lehet kimutatható.

A tetszőleges x_0-hez bármily közel lehetett két helyet x'_m és x''_m-et találni, úgy hogy

$$x'_m < x_0 < x''_m,$$

míg az

$$\frac{f(x'_m)-f(x_0)}{x'_m-x_0},\quad \frac{f(x''_m)-f(x_0)}{x''_m-x_0}$$

különbségi hányadosok közül az egyik pozitiv, a másik negativ. Azaz $f(x'_m)$ és $f(x''_m)$ *egyidőben nagyobb vagy kisebb az* $f(x_0)$*-nál*, mert hiszen $f(x'_m)-f(x_0)$ és $f(x''_m)-f(x_0)$ egyenlő előjelűek.

A függvény folytonossága következtében x'_m és x_0, illetőleg x_0 x''_m közt fölvesz minden értéket, mely $f(x'_m)$ és $f(x_0)$, ill. $f(x_0)$ és $f(x''_m)$ közt fekszik. Ezen számközök egyike magában foglalja a másikat és így a függvény fölveszi a kisebb számközben foglalt értékek mindegyikét — legfölebb az $f(x_0)$ kivételével — úgy x'_m és x_0, mint x_0 és x''_m közt. *Azaz egy tetszőlegesen választott hely bármily kis környezetében, vagy máskép minden bármily kis számközben vannak különböző helyek, a melyeknek megfelelő függvényértékei egyenlők.*

A függvénynek e tulajdonságát máskép is szokás még kifejezni. Ha t. i. egy tetszőleges $\alpha\beta$ számközből indulunk ki, mindig lehet egy ennek belsejében fekvő $\alpha_1\beta_1$ számközt meghatározni, úgy hogy $f(\alpha_1)=f(\beta_1)$. Ha a függvény α_1 és β_1 között nem állandó, a mely esetet kizárjuk, akkor az $f(\alpha_1)$-nél nagyobb vagy kisebb értékeket is vesz föl. A függvény folytonossága következtében az $\alpha_1\beta_1$ számköznek megfelelő értékkészletben van egy legnagyobb és egy legkisebb érték, melyeknek egyike $f(\alpha_1)$-től különböző; azaz *a függvénynek bármily kis számköz belsejében van szélső értéke*, maximum vagy minimum. Ez a függvény előbb említett sajátságának csak más kifejezése. Mert ha a függvénynek a ξ helyen szélső értéke van és, mint itt föltételezzük a ξ környezetében folytonos, akkor a mint $f(\xi)$ maximum vagy minimum, minden az $f(\xi)$-hez elég közel fekvő és ennél kisebb, vagy ennél nagyobb érték előfordul egy ξ' és egy ξ'' helyen, hol $\xi'<\xi<\xi''$.

A következő tárgyalásokat most általánosságban az *A és B határok közt adott folytonos $F(x)$ függvényre* vonatkoztatjuk, *mely bármely helyének tetszőleges kis környezetében egyenlő értékeket vesz föl, vagy* — a mi, ha nincs oly véges számköz, melyben a függvény értéke állandó, ugyanaz — *a melynek bármely helyének tetszőleges kis környezetében szélső értéke van.*

Világos, hogy Weierstrass-nak most tárgyalt függvénye ebbe az osztályba tartozik és hogy az erre vonatkozólag kifejtendő eredmények ama függvényre is érvényesek.

157. *Ha $F(x)$ a most jellemzett függvényosztályba tartozik, akkor minden (bármily kis) számközben, azaz egy tetszőleges hely bármily kis környezetében mindig van végtelen sok hely, melyen a függvény értékei egyenlők.*

A számköz melyből kiindulunk, legyen $a_1 b_1$. E számközben van a föltevés szerint k hely ($k > 1$,)

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

a melyeken a függvényértékek egyenlők. Akkor minden x_i-hez meghatározhatunk egy e helyet magában foglaló $x_i' x_i''$ számközt, úgy hogy az $x_1' x_1'', \ldots, x_k' x_k''$ számközöknek nincs közös helyük. Az

$$x_1' x_1, \; x_1 x_1''; \; x_2' x_2; \; x_2 x_2''; \ldots; x_k' x_k, \; x_k x_k''$$

számközöknek sincs tehát közös helyük, a két-két számköznek megfelelő közös határhelyek $x_1, \ldots x_k$ kivételével.

E számközökben a függvény értéke nem állandó*; mindegyikben vannak tehát $F(x_1)$-nél nagyobb vagy kisebb függvényértékek. Legyen azon számközök száma, hol az $F(x_1)$-nél nagyobb ill kisebb függvényértékek fordúlnak elő, p és q. Minthogy minden számköz legalább is egyik, de esetleg mindkét osztályba is tartozik, mindenesetre

$$p + q \geqq 2k$$

és a p, q számoknak legalább egyike k-nál nem kisebb.

Legyen azon intervallumok száma, melyekben $F(x_1)$-nél $\substack{\text{nagyobb}\\ \text{kisebb}}$ függvényértékek fordulnak elő, a k-nál nem kisebb; és ezen számközök, melyeknek nincs közös belső helyük, egyszerűbben jelölve:

$$\alpha_1 \beta_1; \ldots; \alpha_r \beta_r \qquad (r \geqq k)$$

Minden számköz egyik határán a függvény értéke $F(x_1)$.

Mindegyikben van egy $F(x_1)$-nél $\substack{\text{nagyobb}\\ \text{kisebb}}$ függvényérték; legyenek a megfelelő helyek:

$$y_1, y_2, \ldots, y_r$$

A függvény folytonossága következtében az $\alpha_1 \beta_1$ számközben fölvesz minden $F(x_1)$ és $F(y_1)$ közt fekvő értéket; lehet tehát y_1-et úgy föl-

* Ha a függvény értéke egy bizonyos számközben állandó, akkor tételünk mindenesetre helyes, mert hiszen e számköz minden helyén a függvény értéke ugyanaz.

venni, hogy $F(y_1) \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kisebb}}{\text{nagyobb}}$ az $F(y_2), \dots F(y_r)$ értékeknél. Sőt ugyanazon alapon lehet egy $y_1' y_1''$ számközt megállapítani, melynek belsejében fekszik y_1 és melynek minden helyén a függvény értéke $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kisebb}}{\text{nagyobb}}$ az $F(y_2) \dots F(y_r)$ és $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{nagyobb}}{\text{kisebb}}$ az $F(x_1)$-nél. E számközben azonban van a föltevés szerint két hely, η_0 és η_1, melyen a függvényértékek egyenlők. Minthogy $F(\eta_0) \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kisebb,}}{\text{nagyobb,}}$ mint $F(y_i)$ és $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{nagyobb}}{\text{kisebb}}$ mint $F(x_1)$, az $\alpha_i \beta_i$ számközben van legalább egy hely, η_i, hol $F(\eta_i) = F(\eta_0)$. Tehát az $y_1' y_1''$ számköz bármely helyének megfelelő függvényérték, az $a_1 b_1$ számköznek legalább $r+1\ (> k+1)$ helyén fordúl elő.

Minthogy minden az $y_1' y_1''$ számközben előforduló függvényérték, az $\alpha_2 \beta_2, \dots, \alpha_r \beta_r$ számközökben is előfordúl legalább egyszer, lehet ezen az eljárást ismételni és az $y_1' y_1''$ belsejében fekvő $y_1^{(3)} y_1^{(4)}$ számközt megállapítani, ugy hogy a függvény minden e számköznek megfelelő értéket az $a_1 b_1$ intervallumban fölveszi legalább $k+2$-szer. Igy kapjuk az egymást bezáró intervallumok határtalan sorozatát

$$y_1' y_1''\,;\ y_1^{(3)} y_1^{(4)}\,;\ \dots;\ y^{(2n+1)} y^{(2n)},$$

a mely számközök bármely helyének megfelelő függvényérték az eredetileg választott $a_1 b_1$ közben föllép legalább $k+1$-szer, $k+2$-szer, ... $k+n$-szer. De e mellett az

$$y',\ y^{(3)}, \dots\ y^{(2n-1)}, \dots;\ y'',\ y^{(4)}, \dots\ y^{(2n)}, \dots$$

egyike soha nem kisebbedő, másika soha nem nagyobbodó számokat ád. Mindegyik számsorozatnak van tehát határértéke és ha

$$\lim.\ y^{(2n-1)} = z', \quad \lim.\ y^{(2n)} = z''$$

akkor ezen intervallumok mind magukban tartalmazzák a $z'z''$ számközt, vagy legalább is a z' helyet, ha $z' = z''$. Mindenesetre van legalább egy z hely, melyet az $y^{(2n-1)} y^{(2n)}$ számközök *mind* magukban foglalnak.

Akkor az a_1 b_1 számközben végtelen sok hely van, a melyen a függvény értéke $F(z)$.

E helyek száma vagy véges és meghatározott, vagy végtelen nagy. Az első esetben volna a helyek száma K; de ez lehetetlen, mert z bennfoglaltatik az $y^{(2n-1)} y^{(2n)}$ számközben, bármily nagy is az n és megfelelőleg van legalább is $k+n$ hely, hol a függvény értéke $F(z)$; de ha n-et elég nagynak veszszük, akkor $k+n>K$; és így az első föltevés lehetetlennek bizonyúlván, *a helyek száma, hol a függvény értéke $F(z)$-vel egyenlő, szükségkép határtalan.*

158. Legyen most már ama helyek határtalan sorozata, hol a függvény értéke $F(z)$-vel egyenlő:

$$z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots;$$

minthogy e helyek mind az $a_1 b_1$ számközben feküsznek van legalább egy ζ hely, melynek tetszőleges kis környezetében végtelen sok z_m fekszik. Azaz van ama sorozatban a helyek oly végtelen sorozata

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$$

hogy $\lim. \zeta_n = \zeta$ és $F(\zeta_n) = F(z_m)$. Minthogy pedig a függvény a ζ helyen folytonos, lesz:

$$F(\zeta) = \lim. F(\zeta_n) = F(z_m) = F(\zeta_n),$$

és végre

$$\lim. \frac{F(\zeta_n) - F(\zeta)}{\zeta_n - \zeta} = 0;$$

vagy, ha $\zeta_n = \zeta + h_n$ tétetik, akkor $\lim. h_n = 0$ és

$$\lim. \frac{F(\zeta + h_n) - F(\zeta)}{h_n} = 0.$$

a mi a következő tételbe foglalható.

Ha az $F(x)$ függvény az A és B határok közt folytonos és az AB számköz bármely helyének tetszőleges környezetében egyenlő értékeket vesz föl akkor egyszersmind bármely helyének tetszőleges kis környezetében lehet oly ζ helyeket találni, melyekre nézve

$$\lim. \frac{F(\zeta + h_n) - F(\zeta)}{h_n} = 0,$$

hol a $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ számok kellő módon választott, a 0 határhoz közeledő számok.

Ezen általános tételek az előbb tárgyalt

$$f(x) = \sum_0^\infty b^n \cos. (a^n x \pi)$$

Weierstrass-féle függvény alkatára új világosságot derítenek.

Ha C bármicsoda állandó, a

$$\varphi(x) = f(x) - Cx$$

függvénynek az $f(x)$-éhez egészen hasonló alkata van. T. i.

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} - C$$

azaz a $\varphi(x)$ függvénynél is x-et a tetszőlegesen választott x_0-hoz tetszőlegesen közel úgy lehet fölvenni, hogy a különbségi hányados bármely pozitiv számnál nagyobb, vagy bármely negativ számnál kisebb legyen. De ebből épen úgy, mint a 156. czikk elején következik, hogy $\varphi(x)$ a tetszőlegesen választott x_0 helynek bármily kis környezetében fölvesz egyenlő értékeket, a nélkül hogy a függvény e környezetben állandó volna.

E szerint végre vannak a tetszőlegesen választott x_0 tetszőleges közelében oly ξ helyek, hogy

$$\frac{\varphi(\xi + h_n) - \varphi(\xi)}{h_n} = \frac{f(\xi + h_n) - f(\xi)}{h_n} - C$$

zérus lesz, ha a $h_1 \ldots, h_n, \ldots$ számok kellő módon a 0 határhoz közelednek; vagy végre *bármely x_0 hely tetszőleges kis környezetében vannak oly ξ helyek, hogy*

$$\frac{f(\xi + h_n) - f(\xi)}{h_n}$$

a tetszőlegesen választott C határhoz közeledik, ha a h_n számok kellő módon a 0 határhoz közelednek.

Ugyanazon helyen a h_n számok más választásánál, hol azonban szintén $\lim. h_n = 0$, a különbségi hányados $+\infty$ vagy $-\infty$ is lesz; azaz az $f(x)$ differencziálhányadosának nevezett határérték *teljesen határozatlan*, az e határérték képezésével kapcsolatos vizsgálati módszerek az $f(x)$ függvényre egyáltalában nem alkalmazhatók.

159. Azon eredmény, hogy az $f(x)$ függvénynek differencziálhányadosa nem egyszerűen végtelen minden helyen, egyszersmind a következő általános tételből is következtethető:

Oly folytonos egyértékű függvény, melynek differencziálhányadosa az ab számköz minden helyén végtelen volna, egyáltalában nem létezik.

E függvénynek, $y=f(x)$, kell ugyanis, hogy az ab számköz bármelyik $a_1\,b_1$ részének különböző helyein egyenlő értékei legyenek. Ha ugyanis az a_1b_1 számközben (a_1 és b_1 beleértésével) min- y-nak csak egy x felel meg, akkor az inverz függvények elve alkalmazható volna; mert a megfelelő y-ok is összefüggő tartományt alkotnak. Ez folytonos valós függvényeknél egyszerűen abból következik, hogy az a_1b_1 számközben y_1 és y_2-vel együtt előfordul egyszersmind minden y_1 és y_2 közt fekvő érték. Tehát x az y-nak is folytonos függvénye az y egy bizonyos környezetében és minthogy minden tekintetbe jövő helyen $\frac{dy}{dx}$ végtelen lesz, ama környezetben $\frac{dx}{dy}$ zérus volna; a miből ismét következik, hogy e környezetben minden y-nak ugyanazon x felel meg. De ez képtelenség, mert hisz x fölvesz minden értéket a_1 és b_1 közt. A föltevés tehát lehetetlen, és bármely $a_1\,b_1$ számközben vannak különböző helyek, a melyeken a függvénynek értéke ugyanaz. De ekkor ismét a függvény differencziálhányadosa nem lehet minden helyen végtelen. Mert bármely hely tetszőleges kis környezetében vannak oly helyek, melyekre nézve a különbségi hányadost képezve, ez a különbségek kellő módon való kisebbítésénél a 0 határhoz közeledik. A függvény ama tulajdonsága tehát ellenmondást foglal magában és megfelelőleg ily függvény egyáltalában nincsen.

A differencziálható függvényeknek az analizisben kiváltságos szerepük van, melyet e tétel alapján akarunk még végre jellemezni.

Differencziálható függvények azok, melyek egy bizonyos tartományban mint «megközelítőleg arányosan változó» függvények értelmezhetők. E definicziónak lehetne oly általánosításra gondolni, hogy a függvény növekménye a változó növekményének valamely hatványával megközelítőleg arányosan változzék. Tehát ezen uj osztályba oly függvények tartoznának, melyekben az x_0 egy bizonyos környezetében

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h^\mu}$$

volna véges és meghatározott, a 0-tól különböző érték. Ily függvények a megelőzők értelmében nincsenek, ha az állandót (mint a függvény határesetét) kizárjuk; mert, a mint $\mu<1$, vagy $\mu>1$, akkor az x_0 egy bizonyos környezetében

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

mindenütt ∞ vagy 0 volna. Az első eset tehát teljesen lehetetlen, a második esetben pedig $f(x)$-nek ama környezetben állandó értéke volna, tehát ez sem vezet igazi függvényalakhoz.

III.

A transcendens elemi függvények.

Algebrai és transcendens függvények.

160. A hatványsor alakjában adott függvények az analizis legegyszerűbb függvényalakjai. Összetartási tartományukon belül e függvények nemcsak folytonosak és differencziálhatók, hanem minden — bármily magas rendű — differencziálhányadosuk ismét hatványsor alakjában kifejezhető függvény. Ha továbbá a sor összetartási tartományát az $|x-a|<R$ föltétel szabja meg és $\rho<R$, akkor a függvény értéke minden x-re, melynél $|x-a|<\rho$, tetszőleges pontossággal határozható meg a négy alapművelet segítségével. A δ tetszőleges választása után lehet ugyanis egy tagszámot, N-et megállapitani, úgy hogy a függvény valódi értéke és a sor első N tagjának összege között az eltérés absolut értékére nézve δ-nál kisebb legyen minden, az $|x-a|<\rho$ föltételt kielégítő x-re nézve. Ép ezért az oly függvényről, mely a környezetében hatványsorba kifejthető, azt mondjuk, hogy e hely környezetében *egész függvény jellege* van. A hatványsor alakja végre oly értelmezését adja a függvénynek, mely az x valós vagy complex értékeire egyaránt alkalmazható és így ha valamely más úton értelmezett függvényt hatványsor alakjában lehet kifejezni, az első, esetleg csak a változó valós értékeinél használható értelmezést általánosabb a változó complex értékeire is átvihető értelmezéssel cseréljük föl. Úgy az elmélet, mint a gyakorlat szempontjából egyenlően fontos vizsgálat, vajjon az elemekben különböző módon értelmezett függvények mindenütt vagy értelmezési tartományuk bizonyos helyeinek környezetében kifejezhetők-e hatványsorok alakjában?

E kérdés a raczionális függvényekre nézve megoldottnak tekinthető. Az egész függvény bármely a hely környezetében kifejthető $x-a$ hatványai szerint, még pedig úgy hogy a keletkező hatványsor véges lesz, azaz az együtthatók az $n+1$-ediktől kezdve mind zérusok.

A raczionális tört függvény $\frac{G(x)}{H(x)}$ a 152. czikk tétele szerint, minden oly helynek egy bizonyos környezetében kifejthető hatványsor alakjában, hol $H(x)$ nem 0; tehát, ha $H(x)$ m-edfokú, mindenütt, legfölebb m hely kivételével.

Az y az x-nek *algebrai* függvénye, ha lehet meghatározott számmal oly $g_0(x), g_1(x) \ldots g_m(x)$ egész függvényeket meghatározni, hogy az x és y összetartozó értékeinél mindig:

$$g_0(x)\,y^m + g_1(x)\,y^{m-1} + \ldots + g_{m-1}(x)\,y + g_m(x) = 0.$$

A raczionális függvény az algebrai függvénynek legegyszerűbb esete; *transcendens* minden oly függvény, mely nem algebrai.

Az exponencziális és trigonometrikus függvények, valamint megfordításaik, — bárhol válaszuk is az x-et és e hely bármily kis környezetére szorítkozzunk is — se .ol sem elégítenek ki oly algebrai egyenletet, melynek együtthatói az x egész függvényei; tehát bármely helyük környezetében transcendens függvények. Ezt most csak az e fejezet czímében használt kifejezés magyarázatára hozzuk föl. Állításunk bebizonyítása csak az algebrai függvények részletesebb elemzése után történhetik, melyet mint az értelmező egyenletben álló két változós egész függvény vizsgálatán alapulót még későbbre kell halasztanunk.

Az exponencziális és trigonometrikus függvények.

161. Vajjon az exponencziális és trigonometrikus függvények kifejezhetők-e hatványsor alakjában, azt oly módszer segítségével vizsgálhatjuk meg, mely némi általánosítással a valós változók függvényeinek egy nagy osztályánál alkalmazható. E módszer elve a következő.

Ha $f(x)$ oly valós függvény, melynek minden differencziálhányadosa az ax számközben ujból folytonos és differencziálható, akkor a véges Taylor sor képlete

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots+\frac{f^{n}(a)\,(x-a)^{n}}{n!}+f^{n+1}(\xi)\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

az n minden pozitiv egész számú értékénél alkalmazható. A ξ az n minden értékénél más, de mindig valamely a és x közt fekvő érték. Igy tehát egyszersmind

$$\begin{aligned} f(x)=\lim_{n}.\left(f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^{n}}{n!}\right)& \\ +\lim_{n}.f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},& \qquad (1.)\end{aligned}$$

ha e határértékek véges és meghatározott számok.

Ha most $f(x)$ értelmezési tartománya kiterjed minden valós x-re, ha továbbá

$$f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots+f^{n}(a)\,\frac{(x-a)^{n}}{n!}+\ldots \qquad (2.)$$

az x bármely értékénél összetartó sor és — bárhogy választottuk is x-et — az $|f^{(n+1)}(\xi)|$ számoknak $(a\leq\xi\leq x)$ az n-től függetlenül van véges felső határuk, akkor minden x-re nézve:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\,\frac{x-a}{1}+\ldots+f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^{n}}{n!}+\ldots$$

Mert az első határérték az (1.)-ben nem más mint a mindenütt összetartónak föltételezett $\sum\limits_{0}^{\infty} f^{(n)}(a)\,\frac{(x-a)^{n}}{n!}$ sor. Minthogy továbbá

$$|f^{n+1}(\xi)|\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right|<G\,\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

és a baloldalon álló kifejezés határértéke a 144. czikk szerint 0, lesz még

$$\lim.\, f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n-1)!}=0,$$

es így az $f(x)$-nek (1.) alatt adott kifejezése átmegy (2.)-be.

Megjegyzendő még, hogy e vizsgálatot elég az a-nak egy értékére nézve, p. midőn $a=0$, megejteni, mert ha $f(x)$ adva van mindenütt összetartó hatványsor alakjában, akkor (150. cz.) bármely más hely környezetében ugyanily hatványsorba fejthető.

Alkalmazzuk ezt az e^x, cos. x, sin. x függvényekre, a helyébe 0-t téve. A megvizsgálandó sorok, a magasabb differencziálhányadosoknak előbb eszközölt számítása alapján:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;$$

ezek csakugyan minden x-re nézve összetartók, az első a 144. és 145. czikkben megejtett vizsgálatok alapján, a második és harmadik, mert tagjaik absolut értéke nem más mint az első sor páratlan, ill. páros rendszámú helyein álló tagok absolut értékei és így e sorok az elsővel együtt mindenütt föltétlenül összetartók. Az $f^{(n+1)}(\xi)$ az első most tárgyalt függvénynél e^ξ, a másik kettőnél pedig $\pm$ sin. ξ vagy $\pm$ cos. ξ. Az utóbbi esetekben közvetetlenül látni, hogy $|f^{(n+1)}(\xi)|$ fölső határa 1; az első esetben $f^{(n+1)}(\xi)$ mindenesetre e^0 és e^x közt fekszik; a felső határ tehát 1 vagy e^x, a mint x negativ vagy pozitiv; de mindenesetre van az n-től független felső határ. Igy tehát minden x-re:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{I.}$$

$$\cos. x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \tag{II.}$$

$$\sin. x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \tag{III.}$$

162. Az e^x, cos. x, sin. x most levezetett soralakjai megadják e függvények értékeit, bárminő valós szám is az x; de akkor is véges és meghatározott értéket adnak, ha x tetszőleges complex szám. Ha tehát megállapítjuk, hogy e sorok értékét mindig e^x, cos. x, ill. sin. x-szel jelöljük, *e függvények értelmezésének oly általánosítása* történik, melynek alapján e függvények meg vannak adva minden x-re, még pedig úgy, hogy a változó valós értékeinél az eddigi megállapítások változatlanul érvényesek maradnak.

E függvényjelölés általánosítása mindenesetre meg van engedve, minthogy complex x esetében az e^x, cos. x, sin. x jelek még nincsenek lefoglalva; *czélszerü* azonban csak akkor lesz, ha minden e függvényekre vonatkozó tétel, mely a változók *bármely valós* értékénél érvényes volt, érvényes lesz most a változók *bármely complex* értékénél is.

A differencziálási szabályokat illetőleg az (I.)-ből:

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \ldots$$

tehát

$$\lim_{x=0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,;$$

és épen úgy

$$\lim_{x=0} \frac{\sin. x}{x} = 1\,, \quad \lim_{x=0} \frac{\cos. x - 1}{x} = 0.$$

Ha azonban e határértékek az x complex változása mellett ugyanazok maradnak, mint előbb, az e^x, cos. x, sin. x differencziálhányadosára vonatkozó számítás szintén ugyanaz marad és újból:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x\,, \quad \frac{d \sin. x}{dx} = \cos. x\,, \quad \frac{d \cos. x}{dx} = -\sin. x\,;$$

e képleteket különben a hatványsorokon, melyek mint tudjuk, tagonként differencziálhatók, közvetetlenül is igazolhatjuk.

Ama követelés, hogy az x complex változása mellett a műveleti szabályok változatlanúl megmaradjanak, az e^x-re nézve teljesen ki lesz elégítve, ha kimutatjuk, hogy az u és v tetszőleges értékeinél az

$$e^u e^v = e^{u+v}$$

szorzási szabály is érvényes marad. Ez a következő módon lesz legegyszerűbben bebizonyitható.

Minthogy e^x adva van minden x-nél összetartó hatványsor által, átalakitható az $x - a$ hatványai szerint haladó sorrá, bárminő szám is a és ez a Taylor sorának általános alakjából (150. cz.)

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

közvetetlenül fölirható, ha $f(x)$ helyébe e^x-et teszszük. De ekkor:

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^n(a) = e^a;$$

és így a sor minden tagjából e^a kiemelhető, e szerint

$$e^x = e^a\left(1 + \frac{x-a}{1} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} + \ldots\right).$$

A zárjelben álló sor, nem más mint e^x, hol a tetszőleges x helyébe a szintén tetszőleges $x - a$-t tettük, tehát:

$$e^x = e^a e^{x-a};$$

és ha a helyébe u-t, $x - a$ helyébe v-t teszszük, még $x = u + v$ és így:

$$e^u e^v = e^{u+v},$$

hol úgy mint x és a, az u és v is tetszőleges complex számokat jelentenek.

A levezetett képletet különben az e^u és e^v soralakjainak közvetetlen szorzása is igazolja.

163. A trigonometrikus függvények megfelelő tárgyalása legegyszerűbb, ha előbb kimutatjuk, hogy a változó complex értékeinek befogadása után, e függvények többé nem új függvényalakok, hanem hogy *a sinus és cosinus exponencziális függvényekből összeállítható.*

Ha ugyanis e^x soralakjában x helyébe $\pm iz$-t teszszük, és a sorban a páros, illetőleg páratlan rendszámú tagokat külön sorokban egyesítjük, akkor

$$e^{\pm iz} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \pm$$

$$\pm i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right);$$

minthogy pedig a jobboldalon álló sorok épen cos. z-t, illetőleg sin. z-*t* jelentik, végre a $\pm iz$ eseteket külön irva:

$$\left.\begin{aligned} e^{iz} &= \cos. z + i \sin. z, \\ e^{-iz} &= \cos. z - i \sin. z, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

azon alapképletek, melyek a trigonometrikus és exponencziális függvények kapcsolatát jellemzik.

Ebből — a két egyenlet összeadása és kivonása által — végre *a cos. z és sin. z kifejezése exponencziális függvények segítségével:*

$$\cos. z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\sin. z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (b)$$

Könnyű látni, hogy megfordítva az exponencziális függvény ismét kifejezhető a trigonometrikus függvények segítségével. Ha például a második (a) egyenletben z helyébe ix-et teszünk, lesz:

$$e^x = \cos. ix - i \sin. ix. \qquad (c)$$

Hogy a trigonometrikus függvények alaptulajdonságai az x complex változása mellett is változatlanúl megmaradnak, a most kimutatott kapcsolat egyszerű következménye.

A (b) képletek közvetetlenűl mutatják, hogy a z tetszőleges (complex) értékénél is:

$$\cos. (-z) = \cos. z, \quad \sin. (-z) = -\sin. z,$$

a mi különben e függvények soralakjából is világos.

Az (a) képletek szorzásából továbbá következik, hogy complex z-nél is:

$$1 = \cos.^2 z + \sin.^2 z.$$

Végre a következő egyenletekből:

$$e^{ix} = \cos. x + i \sin. x, \quad e^{-ix} = \cos. x - i \sin. x,$$
$$e^{iy} = \cos. y + i \sin. y, \quad e^{-iy} = \cos. y - i \sin. y,$$

az egymás alatt állók szorzásánál:

$$e^{i(x+y)} = (\cos. x \cos. y - \sin. x \sin. y) + i (\cos. x \sin. y + \sin. x \cos. y),$$
$$e^{-i(x+y)} = (\cos. x \cos. y - \sin. x \sin. y) - i (\cos. x \sin. y + \sin. x \cos. y).$$

Összeadva, illetőleg levonva e két egyenletet:

$$\frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} = \cos. x \cos. y - \sin. x \sin. y,$$

$$\frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} = \sin. x \cos. y + \cos. x \sin. y.$$

De a (b) képletek értelmében a baloldalon álló kifejezések $\cos. (x + y)$ és $\sin. (x + y)$, és így a trigonometrikus függvények ú. n. *összeadási képletei* is érvényesek maradnak, ha x és y bármilyen complex számok.

A most újból bebizonyított alapképletekkel együtt érvényesek maradnak a goniometria összes eredményei, melyek hiszen nem mások, mint ezen alapképletek alkalmazásai.

A többi trigonometrikus függvény a két alapfüggvény, sin. x és cos. x összetételéből keletkezik,

$$\text{tg.}\, x = \frac{\sin.\, x}{\cos.\, x}, \quad \text{cot.}\, x = \frac{\cos.\, x}{\sin.\, x}, \text{ stb.}$$

A sinus-sal és cosinus-sal tehát ezek is az x complex értékeinél érvényes értelmezést nyertek, valamint a 152. cz. ertelmében tudjuk, hogy tg. x és cot. x minden oly hely környezetében hatványsor alakjában kifejezhetők, hol cos. x, illetőleg sin. x nem 0.

Így tehát a tg. x az x hatványai szerint sorba fejthető, és e sor

$$\text{tg.}\, x = \tau_1 x + \tau_3 x^3 + \tau_5 x^5 + \ldots$$

hol e sor együtthatói a tg. x magasabbrendű differencziálhányadosaival együtt (91. cz.) kiszámíthatók.

A mi e sor összetartási tartományát illeti, ez mindenesetre magában foglalja a 0 hely véges környezetét. Megemlítjük, hogy ezt az

$$|x| < \frac{\pi}{2}$$

föltétel adja meg pontosan; az eddig kifejtett módszerek alapján azonban ezt még nem bizonyíthatjuk be.

164. *Az általános exponencziális függvény* a^x, hol a pozitiv állandó, most már szintén könnyen értelmezhető az x complex értékeinél. Ha ugyanis (l. a) a pozitiv a-nak (valós) természetes logarithmusát jelenti, akkor

$$a^x = e^{x\,(\text{l.}\, a)},$$

helyes az x minden valós értékénél; ha pedig x complex szám, a^x-nek új értelmezését adja. Az a^x ezen alakja egyszersmind mutatja, hogy a^x kifejezhető az x minden értékénél összetartó hatványsor alakjában. E czélból $e^{x\,(\text{l.}\, a)}$ helyébe csak soralakja teendő és így az a^x *függvény általános értelmezését a következő sor adja:*

$$a^x = 1 + \frac{(\mathrm{l}.\, a)}{1\,!}x + \frac{(\mathrm{l}.\, a)^2}{2\,!}x^2 + \ldots + \frac{(\mathrm{l}.\, a)^n}{n\,!}x^n + \ldots \qquad \text{(IV.)}$$

mely ismét x minden értékénél összetartó.

Ha e sorban x helyébe 1-et teszünk, lesz

$$a = 1 + \frac{(\mathrm{l}.\, a)}{1\,!} + \frac{(\mathrm{l}.\, a)^2}{2\,!} + \ldots + \frac{(\mathrm{l}.\, a)^n}{n\,!} + \ldots$$

melynek segítségével egy (pozitiv) szám természetes logarithmusából e számot magát határozzuk meg.

Ha e sorban a helyébe a természetes logarithmusok alapszámát, e-t teszszük, a mikor (l. a)-ból 1 lesz; vagy pedig közvetetlenül az e^x sorában x helyébe 1-et teszünk, még azon fontos eredményhez jutunk, hogy:

$$e = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} + \ldots,$$

mely sor az e szám új értelmezését adja. E sor — tagjainak gyors kisebbedése miatt — az e megközelítő meghatározására különösen alkalmas. Ha $\frac{1}{n\,!}$ az utolsó tag, melyet tekintetbe veszünk, a hiba

$$\frac{1}{(n+1)\,!} + \frac{1}{(n+2)\,!} + \ldots,$$

tehát kisebb mint

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\,\frac{1}{n},$$

azaz, ha a számítást egy bizonyos $n+1$-edik taggal berekesztjük, a hiba e tag n-edrészénél kisebb. Ezen alapon lesz:

$$e = 2{\cdot}718281828459\ldots$$

Az e e soralakjából még könnyű kimutatni, hogy a *természetes logarithmusok alapszáma nem raczionális szám.* Ha ilyen volna, például $\frac{m}{n}$, hol az m és n pozitiv egész számok, melyeknek már nincs közös osztója, akkor

$$n!\,e = n! + \frac{n!}{1\,!} + \frac{n!}{2\,!} + \ldots \frac{n!}{n\,!} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} + \ldots\right)$$

szorösei, akkor a függvényt *egyszerűen periodikus*nak mondjuk és ekkor P, vagy a mi egyre megy, $-P$ a függvény *alapperiodusa*.

Ezen elnevezések használata mellett *az* e^z *exponencziális függvény egyszerűen periodikus függvény és alapperiodusa* $2\pi i$. Mert hogy

$$e^{z+P} = e^z$$

legyen, kell, hogy a P kielégítse az $e^P = 1$ egyenletet vagyis ezen egyenletnek az előbbi czikkben végzett megfejtése értelmében, (midőn $r = 1$, $\varphi = 0$) kell, hogy legyen

$$P = 2k\pi i.$$

Följegyezzük még az exponencziális függvénynek ama gyakran előfordúló értékeit, midőn z az alapperiodussal, ennek felével vagy negyedével egyenlő:

$$e^{\pm 2\pi i} = 1$$

$$e^{+\pi i} = -1$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i.$$

167. Ezekután áttérhetünk a *logarithmus* elméletére. Az x természetes logarithmusa

$$z = \mathrm{l}.\, x,$$

azon függvény, melynél az x bármely értékéhez a z azon értékei tartoznak, melyek eleget tesznek az

$$e^z = x$$

egyenletnek. Az exponencziális függvény és a természetes logarithmus tehát ismét inverz függvények.*

Minthogy az $e^z = x$ egyenletnek mindig van megoldása, kivéve midőn $x = 0$, és e megoldások száma mindig végtelen, *a* $\mathrm{l}.\, x$ *az* x*-nek végtelen sok értékű függvénye, melynek értelmezési tartománya*

* Ezentúl a logarithmus alatt, ha az ellenkező nincs külön kimondva, mindig természetes logarithmust értünk. Az általánosabb $a^z = x$ megfordítása $z = {}^a\log.\, x$ ugyanis, minthogy helyébe

$$e^{z(\mathrm{l}.\, a)} = x$$

is irható, nem egyéb mint $\dfrac{\mathrm{l}.\, x}{(\mathrm{l}.\, a)}$, tehát $\mathrm{l}.\, x$-szel együtt teljesen ismeretes.

a számok összességéből áll, az egyetlen 0 kivételével, és a l. x *egy értékéből minden egyéb értéke levezethető a* $2\pi i$ *tetszőleges többesének hozzáadása által.*

Ha a l. x egy értéke $u+iv$, akkor a l. z összes értékeit az

$$u+i(v+2k\pi)$$

képlet adja. Ha tehát megköveteljük, hogy a l. x képzetes részében az i szorzója α-nál nagyobb, de $\alpha+2\pi$-nél nem nagyobb (azaz ennél kisebb vagy legfölebb vele egyenlő) legyen, akkor e föltétel a l. x végtelen sok értékéből egyet és csak egyet választ ki. Mert ha v adott valós szám, az

$$\alpha < v+2k\pi \leq \alpha+2\pi$$

kettős egyenlőtlenségből

$$\frac{\alpha-v}{2\pi} < k \leq \frac{\alpha-v}{2\pi}+1,$$

a mely föltételnek egy és csak egy egész szám felel meg.

Ha $\alpha=-\pi$, azaz ha megköveteljük, hogy az l. x értékének képzetes részében az i szorzója $-\pi$-nél nagyobb, és π-nél nem nagyobb legyen, a l. x megfelelő értéke a *főérték* (l.x).* Ha x pozitiv szám, tehát a l. x-nek van egy valós értéke is, a főérték nem más, mint e valós érték, melyben t. i. az i szorzója 0, tehát csakugyan $-\pi$ és π közt fekszik. Ezek után az a pozitiv számnak természetes logarithmusa, a mint azt az első részben meghatároztuk, nem más, mint az általánosabb l. a főértéke, és mint ilyen már ott (l. a)-val jelöltetett.

Most már könnyen összeállithatók az oly általános megállapitások, melyeknél az x egy tetszőleges x_0 értékének a hozzá tartozó $z=$ l. x értékek sorozatából szabadon választott z_0 felel meg, és a melyeknél e mellett az inverz függvények elve** (64. cz.) alkalmazható, mely megállapitások után tehát l. x az x-nek egyértékű

* Midőn az egyenletnek alkatából, vagy a vizsgálat folyamából úgy is világos, hogy a főértékkel van dolgunk, a főérték jellemzésére szolgáló zárjelt a képletek egyszerűsítése céljából gyakran kihagyjuk.

Egyéb többértékű függvények főértékére nézve ugyanez áll.

** A könnyebb összehasonlítás végett jegyezzük meg, hogy az ott álló y helyett most z áll, továbbá $\varphi(y)$ és $f(x)$ helyett e^z és l.x.

folytonos és differencziálható függvénye. Ha

$$z_0 = z_0' + z_0'' i,$$

válaszszunk egy valós a számot azon egyetlen föltételnek megfelelőleg, hogy

$$a < z_0'' < a + 2\pi;$$

és állapitsuk meg a Z tartományt úgy, hogy ez az összes $z' + z''i$ számokból álljon, melyekben $a < z'' < a + 2\pi$, (a mi geometriai ábrázolásban egy a valós számok tengelyével párhuzamos, 2π szélességű síksávot ad). Ekkor az x változó megfelelő tartománya, X a számok összességéből áll, az

$$x = r(\cos. a + i \sin. a)$$

számok kivételével, hol r tetszőleges pozitiv szám; ezen az értelmezési tartományból kieső számoknak geometriai ábrázolásban amaz egyenesnek pozitiv fele felel meg, mely a valós számok tengelyével a szöget képez.

Az ezen x-ekből álló tartomány összefüggő, e^z e tartomány helyein, mint mindenütt folytonos, és a tartomány határhelyein e^z értéke, $e^{z'+ai}$ nem lehet egyenlő egy a z-tartomány belsejében fölvett értékkel, $e^{z'+z''i}$; mert erre szükséges volna, hogy $z'' = a + 2k\pi$ legyen; de e helyek a tartomány határán vagy azon kívül feküsznek. A megfelelő X-tartomány is folytonos; tehát $\mathrm{l}.x$ e tartományon belül, ha z értékét a Z tartományból veszszük, az x egyértékű, folytonos és differencziálható függvénye.

Az X tartomány határán, azaz midőn

$$x = r(\cos. a + i \sin. a),$$

a $\mathrm{l}.x$ szakadásos, mert $\mathrm{l}.x$, ha $x = r_n(\cos.(a+\partial_n) + i \sin.(a+\partial_n))$ a $|\partial_n|$ elég kis értékeinél, $(\mathrm{l}.\, r_n) + (a+\partial_n)i$ vagy $(\mathrm{l}.\, r_n) + (a + 2\pi + \partial_n)i$-nek veendő, a mint ∂_n pozitiv vagy negativ, és így

$$\lim_{r_n = r,\ \partial_n = +0} \mathrm{l}.\, x = (\mathrm{l}.\, r) + ai,$$

$$\lim_{r_n = r,\ \partial_n = -0} \mathrm{l}.\, x = (\mathrm{l}.\, r) + (a + 2\pi)i.$$

A tárgyalt módon egyértéküvé lett $\mathrm{l}.x$-nek tehát *szakadási vonala* van, t. i. az

$$r\,(\cos. a + i \sin. a), \quad r \geqq 0$$

helyekből álló félegyenes.

Ha $a = -\pi$, és az x_0, z_0 számpár 1, 0, vagy általánosabban x_0 pozitiv és z_0 valós, e megállapítások ismét a logarithmus főértékéhez vezetnek, mely tehát egyértékű, folytonos és differencziálható a szakadási vonal helyeinek kivételével, mely ebben az esetben az összes nem pozitiv valós számokat foglalja magában.

A levezetett eredményekből még kitűnik, hogy *a* $z = \mathrm{l}.\, x$ *függvény, ha egy összetartozó* x_0, z_0 *értékpár van adva, és továbbá követeljük, hogy z az x-szel együtt folytonosan változzék, e megállapítások alapján az* x_0 *környezetében, hol* x_0 *nem* 0, *mint az x egyértékű függvénye van megadva.*

Hogy a $\mathrm{l}.\, x$ ily függvényága az x_0 környezetében létezik, az eddigiekből ismeretes; hogy más érték, mint az e függvényágban foglalt, e követeléseknek nem felel meg, onnét világos, hogy

$$x + \Delta x = (r + \Delta r)\,(\cos. \overline{\varphi + \Delta \varphi} + i \sin. \overline{\varphi + \Delta \varphi}),$$

és így az

$$e^{z + \Delta z} = x + \Delta x$$

egyenlet megoldásai

$$\mathrm{l}.\, (r + \Delta r) + i\,(\varphi + \Delta\varphi + 2\,k\,\pi)$$

közül Δx, vagyis Δr és $\Delta \varphi$ kisebbedésével az az *egy* jut a $\mathrm{l}.\, r + i\,\varphi$-hez tetszőleges közel, melyben $k = 0$; tehát a jelzett követelés x_0 egy bizonyos környezetében a $\mathrm{l}.x$ *egy* értékéhez vezet, és ez tehát nem lehet más, mint az előbb meghatározott függvényágnak megfelelő érték.

168. Ezekután a $\mathrm{l}.x$ differencziálhányadosa az x helyen meghatározott érték, ha az x-hez tartozó z érték meg van adva; mert e függvény az x környezetében csak egy bizonyos módon folytatható, úgy hogy az x helyen folytonos (és differencziálható) legyen. Ekkor továbbá az inverz függvények elve reá alkalmazható, és minthogy

$$x = e^z, \quad \frac{dx}{dz} = e^z,$$

lesz:

$$\frac{d\,\mathrm{l}.x}{d\,x} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{x},$$

tehát a differencziálhányados értéke még attól is független, hogy x-hez a $\mathrm{l}.x$ melyik értékét csatoljuk, a mi előre látható volt, minthogy a különböző függvényágak csak egy hozzáadott állandó, $2k\pi i$ által különböznek. Különben a differencziálási szabály ugyanaz, mint előbb a valós változó speciális esetében.

Az $x = 0$ helyen a $\mathrm{l}.x$ elveszti értelmét és természetesen e helyen nem is differencziálható.

Minthogy továbbá $a^x = e^{x(\mathrm{l}.\, a)}$, végre még az x complex változásánál is, ép úgy mint előbb,

$$\frac{d\,a^x}{d\,x} = a^x\,(\mathrm{l}.\, a).$$

A $\mathrm{l}.x$ differencziálhányadosa $\frac{1}{x}$ a 0 kivételével bármely a helyen kifejthető az $x - a$ hatványai szerint haladó hatványsorba, ugyanis

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + x - a} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1 + \frac{x-a}{a}}$$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x-a}{a} + \left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \ldots + \frac{(x-a)^n}{a^n} + \ldots\right)$$

mely sor összetartó, ha $|x - a| < |a|$; a 153. czikk tétele szerint tehát a $\mathrm{l}.x$ bármely egyértékű és folytonos függvényága szintén a 0 kivételével bármely a hely környezetében kifejezhető hatványsor által, melynek összetartási tartománya ismét $|x - a| < |a|$ által van adva, a határhelyek esetleges hozzácsatolásával.

Minthogy így a $\mathrm{l}.x$ e tulajdonságát épen csak az $x = 0$ helyen veszti el, szokásos x helyébe $1 + z$-t tenni; a mikor a tétel így hangzik:

A $\mathrm{l}.(1 + z)$ *bármely egyértékű és folytonos függvényága hatványsor által kifejezhető mindenütt, kivéve a* $z = -1$ *helyen; az* $a - 1$ *hely környezetében a hatványsor összetartási körének sugara* $|a|$.

Ha e szerint $\mathrm{l}.(1 + x)$ főértéket, $(\mathrm{l}.(1 + x))$-et az $x = 0$ hely környezetében akarjuk kifejteni, akkor

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

és, minthogy még $(\mathrm{l}.1) = 0$, végre:

$$(\mathrm{l}.(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad (\mathrm{V}.a)$$

mely sor összetartó, ha $|x| < 1$, széttartó, ha $|x| > 1$.

Ha $|x| = 1$, a sor összetartási viszonyai a 279. lapon álló tétel segítségével megitélhetők.

A sor még következőkép is irható:

$$\sum_0 - \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \sum_1 - \frac{(-x)^n}{n};$$

de ekkor az idézett tétel közvetetlenül alkalmazható. T. i.

$$u_n = -\frac{1}{n}, \quad a = -x,$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n},$$

tehát $\mu = 1$, $a = -1$, $g = -1$, $h = 0$. E szerint a sor az adott sorrendben összetartó, ha $|x| = 1$, de $-x$ nem 1, azaz ha x nem -1; ha $x = -1$, közvetetlenül látni, hogy a sor széttartó. E szerint:

Az (V.a) sor föltétlenül összetartó, ha $|x| < 1$; az adott sorrendben, azaz föltételesen összetartó, ha $|x| = 1$, de x nem -1; minden más esetben széttartó.

A 147. cz. tétele értelmében e sor, a hol összetart, mindenütt $\mathrm{l}.(1+x)$ főértékét adja, tehát a mint ott előlegesen megemlíttetett:

$$(\mathrm{l}.2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Ha az (V.a) sorban x helyébe $-x$-et teszünk, lesz még:

$$(\mathrm{l}.(1-x)) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots; \quad (\mathrm{V}.b)$$

e sor összetartó, ha $|x| \leq 1$, kivéve midőn $x = 1$.

169. Minthogy

$$e^{\mathrm{l}.a} = a, \quad e^{\mathrm{l}.b} = b,$$

és ezekből

$$e^{\mathrm{l}.a + \mathrm{l}.b} = ab, \quad e^{\mathrm{l}.a - \mathrm{l}.b} = \frac{a}{b}$$

most is:

$$\mathrm{l}.a + \mathrm{l}.b = \mathrm{l}.(a\,b),$$

$$\mathrm{l}.a - \mathrm{l}.b = \mathrm{l}.\frac{a}{b},$$

de csak oly értelemben, hogy a két oldalon álló érték*csoportok* azonosak; azonban ha l.a és l.b-nek főértékeit veszszük, a szorzat vagy hányados logarithmusa, nem lesz szükségképen a főérték. Ehhez az értékhez jutunk, ha a és b pozitiv számok; de ha p. l.a és l.b-ben a képzetes rész szorzója $\frac{2\pi}{3}$, akkor az összegben ugyanez $\frac{4\pi}{3}$, tehát ez már nem adja a főértéket.

Adott kifejezések átalakításánál igen gyakran hasznos megjegyzés, hogy ezen egyenletek

$$(\mathrm{l}.\,a) + \mathrm{l}.\,b = \mathrm{l}.\,(a\,b)$$

$$(\mathrm{l}.\,a) - \mathrm{l}.\,b = \mathrm{l}.\,\frac{a}{b}$$

szinten oly értelemben érvényesek, hogy a két oldalon álló értékcsoportok azonosak.

Ha tehát az (V.a) sorból az (V.b)-t levonjuk, és a baloldalon a logarithmusok különbsége helyett a hányados logarithmusát irjuk, akkor az eredmény:

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{l}.\,\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

helyes ugyan; de hogy e sor a baloldalon álló logarithmusnak valóban főértékét adja, még külön bebizonyítandó. Ez abból következik, hogy az $x = 0$ helyen csakugyan a l. 1 főértékét, 0-t adja; a sor összetartási tartományán belül pedig folytonosan változik, de az ezen összetartási tartományon belül fekvő helyeken $|x| < 1$, és ezek közt oly szám, melyre nézve $\frac{1+x}{1-x}$ zérus vagy negativ volna, nem fordul elő; mert ha

$$\frac{1+x}{1-x} = z,$$

ebből

$$x = \frac{z-1}{z+1},$$

és ha z zérus vagy negativ valós szám, akkor $|x| \geqq 1$. Tehát ha $|x|<1$, egyszersmind $l.\,\frac{1+x}{1-x}$ főértéke is folytonosan változik, és ennek következtében mindenütt megegyezik a sor értékével.

Sorunk, mint az előbb fölirt két sor különbsége, továbbá még föltételesen összetartó, ha $|x| = 1$, kivéve az $x = \pm 1$ helyeken, hol széttartó.

Ha a sorban még az

$$\frac{1+x}{1-x} = z$$

helyettesitést végezzük, lesz belőle:

$$\tfrac{1}{2}(l.\,z) = \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2n+1} + \ldots \quad \text{(VI.)}$$

mely sor föltétlenül összetartó, ha $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$, föltételesen összetartó, ha $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$, kivéve, midőn $\frac{z-1}{z+1} = \pm 1$.

Ezen összetartási föltételt czélszerű lesz még úgy átalakitani, hogy az összetartási viszonyokat közvetetlenül a z-ből lehessen fölismerni. Ha részletesen

$$z = z' + z''i,$$

akkor

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \left|\frac{z'-1+z''i}{z'+1+z''i}\right| = \left(\frac{(z'-1)^2+z''^2}{(z'+1)^2+z''^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ez akkor és csak akkor kisebb, mint 1, ha

$$(z'-1)^2 < (z'+1)^2,$$

azaz midőn z' pozitiv; akkor $= 1$, midőn

$$(z'-1)^2 = (z'+1)^2,$$

azaz $z' = 0$. Az utóbbi esetben kivételes szerepe van azon z-knek, melyeknél:

$$\frac{z-1}{z+1} = \pm 1$$

azaz $z = 0$, tehát egyszersmind $z'' = 0$. (A $+1$-nek nem felel meg a z véges értéke). Tehát összefoglalva az eredményeket:

A (VI.) sor föltétlenül összetartó, ha z valós része pozitiv, föltételesen összetartó, ha z valós része 0, kivéve az egyetlen $z = 0$

helyet, hol a sor széttartó. Ha z valós része negativ, a sor természetesen széttartó.

A VI. alatt álló sor igen nevezetes, mert e sor alapján bármely szám logarithmusának tetszőleges pontossággal való kiszámítása a négy alapművelet segítségével történhetik. Ha ugyanis z akárminő szám (a 0 kivételével) akkor vagy z vagy $-z$ mindenesetre kielégíti a sor összetartási föltételét, tehát $\mathrm{l}.z$ vagy $\mathrm{l}.(-z)$ kiszámítható. De a kettő között fönnálló kapcsolatnál fogva

$$\mathrm{l}.z-\mathrm{l}.(-z)=\mathrm{l}.(-1)=(2k+1)\pi i,$$

az egyiknek értékeivel a másiknak értékei is ismeretesek.

Az egységek logarithmusai a 164. czikk végén álló képletek értelmében:

$$\mathrm{l}.1=2k\pi i \quad , \quad \mathrm{l}.(-1)=(2k+1)\pi i$$
$$\mathrm{l}.i=(2k+\tfrac{1}{2})\pi i, \quad \mathrm{l}.(-i)=(2k-\tfrac{1}{2})\pi i,$$

hol k tetszőleges egész szám. Ha $k=0$, e képletek a logarithmus főértékét adják.

170. *A logarithmustáblák számítására* szükséges képleteket a (VI.)-ból levezethetjük, ha a

$$z=1+\frac{1}{N}$$

helyettesítést végezzük.

Ha N pozitiv, z is ilyen és a keletkező sor föltétlenül összetartó; a mi czélunkra N-nek csak pozitiv egész számu értékei jönnek tekintetbe. E helyettesítés után:

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{1}{2N+1}$$

és a sor lesz:

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{l}.(N+1)-\mathrm{l}.N)=\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2N+1)^5}+\ldots,$$

mely tehát két egymásután következő egész szám logarithmusának különbségét adja oly sor alakjában, mely már az $N=1,2,\ldots$ esetében elég gyorsan összetartó, de melynek tagjai rendkívül gyorsan kisebbednek, ha, mint a hétjegyű logarithmustábla készítésénél, a 10000 és 100000 közt fekvő számok logarithmusait számítjuk.

E sorból először is ha $N=1$,

$$\frac{1}{2}\text{l}.2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5} + \ldots$$

és ha $N=4$

$$\frac{1}{2}(\text{l}.5 - 2\text{l}.2) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\frac{1}{9^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{9^5} + \ldots$$

Ily módon azután

$$\text{l}.10 = \text{l}.2 + \text{l}.5,$$

és végre

$$M = \frac{1}{\text{l}.10} = 0{\cdot}434294481903\ldots$$

Itt M a közönséges, a 10-es alapszámra vonatkoztatott logarithmusrendszer *modulusa*, mely a $\text{l}.x$-ből a $\log. x$-et adja, oly módon, hogy

$$\log. x = M\,\text{l}.x.$$

Ezután áttérhetünk például a 10000 és 100000 közt fekvő számok közönséges logarithmusainak számítására a következő képlet szerint:

$$\log.(N+1) - \log. N = 2M\Big(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2N+1)^5} + \ldots$$

A hiba, melyet itt elkövetünk, ha a k-adik tagnál az összeadást befejezzük, minthogy $M < \frac{1}{2}$, mindenesetre kisebb, mint

$$\frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2N+1)^{2k+1}} + \frac{1}{2k+3}\frac{1}{(2N+1)^{2k+3}} + \ldots,$$

tehát annál inkább kisebb, mint

$$\frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2N+1)^{2k+1}}\Big(1 + \frac{1}{(2N+1)^2} + \frac{1}{(2N+1)^4} + \ldots\Big),$$

és végre mint

$$2\frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2N+1)^{2k+1}},$$

azaz a hiba mindenesetre kisebb, mint az először elhanyagolt tag kétszerese. De e tag ismét

$$\frac{1}{2k+1}\,\frac{1}{(2N+1)^{2k+1}} < \frac{1}{(2N+1)^2}\,\frac{1}{2k-1}\,\frac{1}{(2N+1)^{k-1}} <$$

$$< \frac{1}{10^8}\,\frac{1}{2k-1}\,\frac{1}{(2N+1)^{k-1}}$$

kisebb mint az utoljára számított tag 10^8-ad része.

A hiba tehát végre röviden mindig kisebb az utolsó számításba vett tag tízmilliomodrészénél; de N nagyobb értékeinél még sokkal kisebb.

Minthogy az egymásután következő számok logarithmusának különbségeit számítjuk, a hibák természetesen fölhalmozódnak, és így végre a tekintetbe jövő deczimális helyekre is gyakorolhatnak befolyást. E végből közben egyes számok logarithmusai külön nagyobb pontossággal számítandók; így például a 101, 102 s. ú. t. logarithmusai, melyek a táblában azután 10100, 10200,... logarithmusait adják.

171. A két egész szám közt fekvő számok logarithmusait szintén a táblából veszszük, úgynevezett *interpoláczió* segítségével, mely szerint ha h pozitiv valódi tört, és

$$\log.(N+1) - \log. N = D,$$

az N és $N+1$ közt fekvő $N+h$ számokra:

$$\log.(N+h) = \log. N + h\,D.$$

Ezen eljárást az elemi tankönyvek, mint gyakorlati szabályt minden bizonyítás nélkül adják; helyén lesz itt kimutatni, hogy *azon megközelítés mellett, melyet az illető táblával keresünk* (5 vagy 7 deczimális) a szokásos eljárás csakugyan helyes.

E czélból mindenekelőtt megjegyezzük, hogy

$$\text{l.}(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{4}x - \frac{2}{5}x^3 + \ldots\right)$$

hol a zárjelben álló sor tagjai, ha x pozitiv és kisebb mint egy, az előjel mellőzésével folyton kisebbednek; tehát a sor értéke pozitiv és 1-nél kisebb. E szerint *ha* $0 < x < 1$, *akkor*

$$\text{l.}(1+x) = x - \frac{\vartheta}{2}x^2$$

hol $0 < \vartheta < 1$.

Ha ugyancsak a $\text{l.}(1+x)$ sorában

$$x = \frac{h}{N}$$

tétetik, hol h pozitiv valódi tört és N pozitiv egész szám, akkor:

$$\mathrm{l.}\left(1 + \frac{h}{N}\right) = \mathrm{l.}(N + h) - \mathrm{l.}N = \frac{h}{N} - \frac{h^2}{2N^2} + \frac{h^3}{2N^3} - \dots$$
$$= \frac{h}{N} - \frac{\vartheta}{2}\frac{h^2}{N^2},$$

míg

$$\mathrm{l.}\left(1 + \frac{1}{N}\right) = \mathrm{l.}(N + 1) - \mathrm{l.}N = \frac{1}{N} - \frac{\vartheta'}{2}\frac{1}{N^2}.$$

Az előbb említett eljárás értelmében

$$\log.(N+h) - \log.N = hM(\mathrm{l.}(N+1) - \mathrm{l.}N) = \frac{hM}{N} - \frac{hM\vartheta'}{2}\frac{1}{N^2}$$

tétetik, míg e különbség helyes értéke:

$$\log.(N + h) - \log.N = \frac{Mh}{N} - \frac{M\vartheta}{2}\frac{h^2}{N^2}.$$

Az e mellett elkövetett hiba:

$$\left|\frac{M(\vartheta' h - \vartheta h^2)}{2N^2}\right|$$

minthogy ϑ, ϑ', h pozitiv valódi törtek és így $|\vartheta' h - \vartheta h^2| < 1$, valamint továbbá $\frac{1}{2}M < \frac{1}{4}$ *mindenesetre kisebb mint* $\frac{1}{4N^2}$.

Ötjegyű táblánál $N > 1000$, tehát a hiba kisebb, mint $\frac{1}{4.10^6}$; hétjegyű táblánál $N > 10000$, és a hiba kisebb mint $\frac{1}{4.10^8}$; azaz a hiba a 6-ik, illetőleg 8-ik deczimális hely negyedrészénél kisebb, és így az eredmény az 5-ik, illetőleg 7-ik helyig ezen eljárásnál teljesen pontos.

Az általános hatvány és a binomiális sor.

172. *Az általános hatvány*, x^t azon értelmezése, mely kiterjed az x és t bármilyen — tetszőleges complex — értékeire, a következő:

$$x^t = e^{t\,\mathrm{l.}x},$$

hol a jobboldalon jelzett műveletek mindig kivihetők, kivéve, midőn $x=0$. Tekintettel arra, hogy $\mathrm{l.}x$ végtelen sok értékű függvény, t. i.

ha $x = r(\cos.\varphi + i\sin.\varphi) = re^{i\varphi}$

$$\mathrm{l}.x = (\mathrm{l}.r) + \varphi i + 2k\pi i,$$

az x^t is, hol x változó és t tetszőlegesen választott állandó*, általánosságban ilyen, azon esetek kivételével, midőn t raczionális szám, részletesen:

Ha t egész szám, akkor x^t egyértékű függvény, és jelentése változatlanúl megmarad, úgy mint ezt eddig használtuk.

Ha t raczionális szám $\frac{p}{q}$, hol p és q-nak nincs már közös osztója és q pozitiv egész szám, akkor $x^t = \sqrt[q]{x^p}$.

Ha végre t nem raczionális szám, az x^t végtelen sok értékű függvény.

Azon esetekben, midőn x^t nem egyértékű, x^t azon értékét nevezzük főértéknek, mely keletkezik, midőn a $\mathrm{l}.x$-nek is főértékét veszszük; tehát e főértéket a szokásos módon jelölve:

$$(x^t) = e^{t(\mathrm{l}.x)}.$$

Ha x pozitiv szám és t valós, e főérték nem egyéb mint azon szám, melyet már eddig x^t-vel jelöltünk. (Mint már azelőtt, a főértéknek jelölésére szolgáló zárjelt most is elhagyjuk, ha a tárgyalásból magából kiviláglik, hogy e főértékkel van dolgunk, úgy hogy az x^t-nek az eddig tárgyalt speciális esetekben használt értelme ezen általánositás után is teljesen érvényben marad.)

Az előre bocsátott állítások könnyen igazolhatók. Legyen

$$x = re^{i\varphi}, \quad \mathrm{l}.x = (\mathrm{l}.r) + \varphi i + 2k\pi i;$$

ha t egész szám,

$$e^{t\,\mathrm{l}.x} = e^{t(\mathrm{l}.r) + t\varphi i + 2kt\pi i}$$

$$= e^{t(\mathrm{l}.r)} e^{t\varphi i} = r^t(\cos.t\varphi + i\sin.t\varphi) = x^t;$$

minthogy most kt is egész szám és $e^{2kt\pi i} = 1$.

Ha $t = \frac{p}{q}$, hol p és q-nak nincs közös osztója, és q pozitiv

* Az ellenkező föltétel, t^x nem vezet *új* függvényalakhoz, mert

$$t^x = e^{x((\mathrm{l}.t) + 2k\pi i)}$$

hol a k egyes értékeinek egyértékű és már ismeretes függvényágak felelnek meg.

egész szám, akkor

$$e^{t\,\mathrm{l}.\,x} = e^{\frac{p}{q}(\mathrm{l}.\,r)} e^{\frac{p}{q}\varphi i} e^{\frac{2kp}{q}\pi i} =$$

$$= (r^{\frac{p}{q}}) (\cos. \frac{p}{q}\varphi + i \sin. \frac{p}{q}\varphi) (\cos. \frac{2kp}{q}\pi + \sin. \frac{2kp}{q}\pi),$$

$$= \sqrt[q]{r^p (\cos. p\varphi + i \sin. p\varphi} = \sqrt[q]{x^p}\ ;$$

mert a k számot, midőn p és q-nak nincs közös osztója, mindig úgy lehet meghatározni, hogy

$$kp = mq + r,$$

hol r bármely szám a $0, 1, \ldots, q-1$ sorozatból. (Elsőfokú határozatlan egyenlet, melyben k és m az ismeretlenek, és ezen ismeretlenek együtthatói p és q relativ törzsszámok.) Tehát

$$\cos. \frac{2kp}{q}\pi + i \sin. \frac{2kp}{q}\pi$$

az egység összes q-adik gyökeit és csak ezeket adja.

Ha végre t nem raczionális szám, akkor

$$e^{t\varphi i + 2k\pi t i},$$

hol k tetszőleges egész szám, a k különböző értékeinél mindig különböző értékeket vesz föl. Mert csak akkor lehet

$$e^{t\varphi i + 2k\pi t i} = e^{t\varphi i + 2k'\pi t i},$$

ha a kitevők különbsége $2\pi i$ többese, azaz ha

$$(k' - k)\,t$$

egész szám, még pedig nem 0, minthogy k' és k különbözők, és t irraczionális, tehát szintén nem 0. De ha ez egész szám volna, p. E, akkor

$$t = \frac{E}{k' - k},$$

és igy t a föltevés ellenére raczionális szám volna.

Ha x pozitiv, tehát $\varphi = 0$, továbbá t valós és a $\mathrm{l}.x$ főértékét veszszük, akkor:

$$(x^t) = e^{t(\mathrm{l}.\,x)} = (e^{\mathrm{l}.\,x})^t,$$

a mi nem más, mint az x^t speciálisabb, a számtanban adott értéke.

A hatványok szorzási szabálya

$$x^{\alpha} . x^{\beta} = x^{\alpha+\beta} \tag{1.}$$

most is érvényes marad, mert:

$$x^{\alpha} = e^{\alpha\, \mathrm{l}.\, x}\ x^{\beta} = e^{\beta\, \mathrm{l}.\, x},$$

tehát

$$x^{\alpha}\, x^{\beta} = e^{(\alpha+\beta)\, \mathrm{l}.\, x} = x^{\alpha+\beta};$$

még pedig most azon hozzátevéssel, hogy nemcsak az $x^{\alpha}\, x^{\beta}$ szorzat mindig, bárhogy választottuk is az x^{α} és x^{β} értékeket, az $x^{\alpha+\beta}$ egy értékét adja, hanem még speciálisan a főértékekre vonatkozólag

$$(x^{\alpha})\,(x^{\beta}) = (x^{\alpha+\beta}),$$

valamint általánosabban (1.) érvényes, ha x^{α}, x^{β}, $x^{\alpha+\beta}$ «összetartozó», azaz a l. x ugyanazon értékével képezett függvényágak. Világos továbbá, hogy most is

$$\mathrm{l}.x^{\alpha} = \alpha\, \mathrm{l}.x \tag{2.}$$

oly értelemben, hogy a $\mathrm{l}.x^{\alpha}$ értékei közt megvan az $\alpha\, \mathrm{l}.x$ minden értéke; de nem megfordítva, mert

$$\mathrm{l}.x^{\alpha} = \alpha\,((\mathrm{l}.x) + 2\,k\,\pi\,i) + 2\,l\,\pi\,i\,,$$

$$\alpha\, \mathrm{l}.\, x = \alpha((\mathrm{l}.\, x) + 2\,k\,\pi\,i).$$

Ha azonban α *raczionális szám, az* $\alpha\, \mathrm{l}.x$ és $\mathrm{l}.x^{\alpha}$ *által jelölt értékcsoport azonos.*

Ellenben:

$$x^{\alpha\beta} = e^{\alpha\,\beta\,((\mathrm{l}.\,x)+2\,m\,\pi\,i)}$$

$$[x^{\alpha}]^{\beta} = e^{\beta\,[\alpha((\mathrm{l}.\,x)+2\,k\,\pi\,i)+2\,l\,\pi\,i]}$$

$$[x^{\beta}]^{\alpha} = e^{\alpha\,[\beta((\mathrm{l}.\,x)+2\,k'\,\pi\,i)+2\,l'\,\pi\,i]}.$$

És így az

$$[x^{\alpha}]^{\beta} = x^{\alpha\,\beta}$$

képletnek csak azon értelme van, hogy a baloldalon álló értékcsoportban benn foglaltatik a jobboldalon álló értékcsoport. Még kevésbbé használható az

$$[x^{\alpha}]^{\beta} = [x^{\beta}]^{\alpha},$$

mert ez csak annyiban igaz, hogy a két oldalon álló értékcsoportok egyenlő értékeket is tartalmaznak. E képletek úgy sem helyesek, ha mindig a főértékeket választjuk; mert x^a főértéke ugyan $e^{a(\mathrm{l}.x)}$; de azért $\mathrm{l}.(x^a)$-nak nem mindig főértéke $a(\mathrm{l}.x)$; mert ebben a képzetes rész szorzója a-tól függ és általánosságban nem foglaltatik $-\pi$ és π közt. E képletek tehát csak a számtanban tárgyalt speciális esetekben használhatók; az általános hatvány jellemző tulajdonságának csakis az (1.) vehető.

173. Áttérünk az általános hatvány egyértékű, folytonos és differencziálható függvényágainak kiválasztására. Ha t raczionális szám, $\frac{p}{q}$, akkor $x^t = \sqrt[q]{x^p}$ már ismeretes függvény; tehát csak azon esetet kell megvizsgálnunk, midőn t nem raczionális szám. Az $x = 0$ helyet, melyen az $x^t = e^{t\,\mathrm{l}.x}$ értelmezés helyettesítési értéket nem ad és mely különben a függvény kivételes helyének bizonyúl, egyelőre a tárgyalásból kizárjuk.

Közvetetlenül látni, hogy x^t egyik egyértékű ága egy bizonyos x_0 helyen akkor és csak akkor lesz folytonos, ha $\mathrm{l}.x$ megfelelő ága (melylyel $x^t = e^{t\,\mathrm{l}.x}$ képeztetett) ilyen. Ha $\mathrm{l}.x$ így választatott, akkor ez és vele $x^t = e^{t\,\mathrm{l}.x}$ is differencziálható. Tehát a $\mathrm{l}.x$-re vonatkozó megállapítások közvetetlenül átvihetők x^t-re, ha még megjegyezzük, hogy egészen mindegy, vajjon az $x = x_0$ helyen x^t vagy $\mathrm{l}.x$ értéke van-e megadva. Az utóbbiból természetesen x^t megfelelő értéke mindjárt képezhető. De megfordítva is, ha x^t főértékét az x_0 helyen kiszámitjuk, ez

$$(x_0^t) = e^{t(\mathrm{l}.x_0)};$$

míg valamely más érték e helyen:

$$x_0^t = e^{t\cdot((\mathrm{l}.x_0)+2k\pi i)}.$$

Ha tehát x_0^t választandó értéke meg van szabva, akkor

$$\frac{x_0^t}{(x_0^t)} = e^{2k\pi i t},$$

a miből k és $\mathrm{l}.x$ megfelelő értéke is ismeretes.

Az x^t tehát oly módon tehető egyértékű, folytonos és differencziálható függvénynyé, hogy a 0 kizárása után egy tetszőleges x_0 helyen szabadon választjuk az x^t hozzátartozó értékét és hogy a függvény folytonossága csak egy tetszőleges, a 0-ból kiinduló félegyenesen szakadjon meg.

Jelesen az x_0-hoz tartozó függvényérték megállapitása után azon követelés, hogy a függvény folytonos legyen, az egyértékű függvényágat az x_0 egy bizonyos környezetében teljesen megadja; mert megadja a $\mathrm{l}.x$-nek választandó értékét. E függvényág differencziálhányadosa bármely helyen (a 0 kivételével) is mindjárt képezhető:

$$\frac{d}{dx}x^t = \frac{d}{dx}e^{t\,\mathrm{l}.x} = e^{t\,\mathrm{l}.x}\frac{t}{x} = x^t\frac{t}{x},$$

azaz:

$$\frac{dx^t}{dx} = tx^{t-1};$$

a hatvány differencziálási szabálya most is ugyanaz marad, mint az előbb tárgyalt egyszerű esetekben, azon megállapitással, hogy a két oldalon álló x^t és x^{t-1} hatványok «összetartozó» azaz a $\mathrm{l}.x$ ugyanazon értékével képezett értékek legyenek. A főérték differencziálásánál tehát x^{t-1}-nek is főértéke veendő.

Megjegyzendő, hogy a differencziálási képlet most is magában foglalja $\sqrt[n]{x}$-ét.

A differencziálási szabály ily módon megmaradván, épen úgy

$$\frac{d^k x^t}{dx^k} = t(t-1)\ldots(t-k+1)\,x^{t-k},$$

hol x^t és x^{t-k} ismét «összetartozó» értékek.

174. Minthogy x^t épen a 0 környezetében nem fejezhető ki hatványsor alakjában, e függvényben ismét x helyett $1+z$-t irunk és az

$$(1+z)^t$$

főértékének hatványsor alakját keressük, először a $z=0$ környezetében, melyből az minden más helyen is könnyen levezethető.

Bebizonyítjuk, hogy $(1+z)^t$ *főértéke a z hatványai szerint haladó sorban fejezhető ki, mely sor összetartó és a függvény értékét adja, ha* $|z|<1$. E tartomány belsejében az $(1+z)^t$ mint *folytonos* függvény megvan adva, ha értékét a $z=0$ helyen megadjuk, a hol ez (a főérték) 1. Ebből világos, hogy a főértékkel együtt az $(1+z)^t$ bármely más folytonos ágát ugyane sorfejtés megadja, ha $e^{2k\pi i.t}$-vel szorzunk.

Tételünk bebizonyítására mindenekelőtt tekintetbe veendő, hogy

$$(1+z)^t = e^{t\,(l.(1+z))} = 1 + \frac{t\,(l.(1+z))}{1} + \frac{t^2\,(l.(1+z))^2}{2!} + \ldots$$

és így ha $|z| < 1$, még

$$\begin{aligned}(1+z)^t = 1 &+ t\left(\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots\right)\right.\\ &+ \frac{t^2}{2!}\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots\right)^2\\ &+ \ldots\ldots\ldots\\ &+ \frac{t^n}{n!}\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots\right)^n\\ &+ \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

és a kérdés csak az, hogy szabad-e ezt a kétszeresen végtelen sort a z hatványai szerint rendezni, ha $|z| < 1$; mert az egyes sorokban álló hatványsorok hatványai a 151. cz. értelmében ismét a z hatványai szerint rendezhetők.

Erre elegendő, hogy $\sum_0^{\infty} \varphi_n(z)$ is összetartó legyen, ha $|z| < 1$; hol $\varphi_n(z)$ azon sor, mely a

$$\frac{t^n}{n!}\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots\right)^n$$

sorból keletkezik, ha először a hatványozást végrehajtjuk, és azután az együtthatók és változó helyébe absolut értékeiket irjuk. (I. R. 129. cz.) Ha ekkor a $\varphi_n(z)$ helyébe oly $\psi_n(z)$ sort irunk, melynek együtthatói szintén pozitivok és e $\varphi_n(z)$ megfelelő együtthatóinál nagyobbak, akkor természetesen $\psi_n(z) > \varphi_n(z)$ és a $\sum_0^{\infty} \psi_n(z)$ sor összetartásából a $\sum_0^{\infty} \varphi_n(z)$ soré is következik. Ha most $\psi_n(z)$-nek a

$$\frac{|t|^n}{n!}\left(|z| + \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} + \ldots\right)^n$$

z hatványai szerint rendezett alakját veszszük, a követelés ki lesz elégítve; mert az eredetileg képezendő $\varphi_n(z)$ és e $\psi_n(z)$ sorban a $|z|$ egyes hatványainak együtthatója ugyanazon számok összege, csakhogy az első esetben e számok pozitiv és negativ előjelekkel vannak ellátva, míg a $\psi_n(z)$-ben minden szám pozitiv előjellel áll; tehát az illető együttható absolut értéke is nagyobb. De ha $|z| < 1$, akkor — a log. mindenütt a főértéket jelenti — lesz:

$$\psi_n(z) = \frac{|t|^n}{n!}(-\mathrm{l.}(1-|z|))^n$$

és így végre

$$\sum_0^\infty \psi_n(z) = \sum_0^\infty \frac{(-|t|\,\mathrm{l.}(1-|z|))^n}{n!}$$

$$= e^{-|t|\,\mathrm{l.}(1-|z|)} = (1-|z|)^{-|t|}$$

csakugyan összetartó.

A mi a kifejtés részleteit illeti, miután be van bizonyítva, hogy ez egyáltalában lehetséges, a sor alakja nem lehet más, mint a MAC-LAURIN-soré; és így a

$$\frac{d^k}{dz^k}(1+z)^t = t(t-1)\ldots(t-k+1)(1+z)^{t-k}$$

képletből

$$\left(\frac{d^k}{dz^k}(1+z)^t\right)_{z=0} = t(t-1)\ldots(t-k+1),$$

és igy végre az úgynevezett *binomiális sor*, mely $(1+z)^t$ főértékét adja a $z=0$ környezetében:

$$(1+z)^t = 1 + \frac{t}{1}z + \frac{t(t-1)}{1.2}z^2 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{1.2\ldots n}z^n + \ldots,$$

mely sor összetartó, ha $|z| < 1$, széttartó, ha $|z| > 1$.

Hogy ugyanis a sor összetartási körének sugara pontosan egy, abból következik (121. cz.) hogy

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{1.2\ldots n} : \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{1.2\ldots n(n+1)} = \frac{n+1}{t-n}$$

tehát

$$\lim.\frac{c_n}{c_{n+1}} = -1,\quad \lim.\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = 1.$$

Ha végre a binomiális együtthatók jelzését tetszőleges t-re általánosítjuk,* azaz most is

$$\binom{t}{k} = \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{1.2.3\ldots k},$$

akkor végre *a binomiális sor végleges alakja:*

$$(1+z)^t = 1 + \binom{t}{1}z + \binom{t}{2}z^2 + \ldots + \binom{t}{n}z^n + \ldots \qquad \text{(VIII.)}$$

$$|z| < 1.$$

E sor ismerete után x^t hatványsoralakja, bármely a 0-tól különböző hely környezetében is mindjárt fölírható; mert

$$x^t = (x_0 + x - x_0)^t = x_0^t\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)^t$$

hol az x_0^t hatvány értékének kellő választásánál a második tényező már a főértéket jelenti. Ha

$$|x - x_0| < |x_0|$$

a binomiális sor képlete közvetetlenül alkalmazható, és $x - x_0$ hatványai szerint haladó, az említett tartományban összetartó sort ad.

175. A binomiális sor összetartása az összetartási kör kerületén, mikor $|z| = 1$, ismét teljesen megitélhető a 279. lapon álló tételek segítségével. A sort a következő alakban irjuk:

$$\sum_0^\infty (-1)^n \binom{t}{n} (-z)^n;$$

akkor

$$u_n = (-1)^n \binom{t}{n}, \quad a = -z,$$

továbbá

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\frac{\binom{t}{n}}{\binom{t}{n-1}} = -\frac{\dfrac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}}{\dfrac{t(t-1)\ldots(t-n+2)}{1\,.\,2\ldots(n-1)}} = -\frac{t-n+1}{n}$$

$$= 1 + \frac{-t-1}{n}$$

---

* A t tetszőlegesen választott értékeinél, míg k a tényezők száma természetesen egész szám, most is

$$\binom{t}{k} = \binom{t-1}{k} + \binom{t-1}{k-1},$$

a mit egyszerűen a törtek összeadásával igazolhatunk.

tehát $\mu = 1$, és

$$a = -t - 1\,;$$

ha $t = t_1 + t_2 i$, továbbá

$$g = -t_1 - 1\,,\ h = -t_2.$$

E szerint tehát *a binomiális sor, midőn $|z| = 1$ föltétlenül összetartó, ha $g < -1$, azaz ha t valós része pozitiv; az adott sorrendben összetartó, ha t valós része nagyobb -1-nél és z nem -1; ingadozó, ha t valós része -1, képzetes része nem 0 és $z = -1$; széttartó minden más esetben.*

A hol a sor összetartó, ott a 147. czikkben kifejtett tétel szerint mindenütt az $(1+z)^t$ értékét adja.

176. Hátra van még az x^t függvény elemzése az $x=0$ helyen. Bebizonyítjuk, hogy *a 0 az x^t függvénynek «kivételes» helye (azon egyetlen eset kivételével, midőn t pozitiv egész szám, és tehát x^t egész függvény), a mennyiben ekkor az x pozitiv egész hatványai szerint haladó sor, mely a 0 egy bizonyos környezetében kifejezné az x^t függvényt, nem létezik.*

Ha egyáltalában lehetséges oly megállapitás, melynek alapján x^t folytonos egy véges, a 0 helyet mint belső helyet magában foglaló tartományban, akkor kell, hogy e tartományon belül az x^t a $\mathrm{l}.x$ ugyanazon értékével, például $(\mathrm{l}.x) + 2k\pi i$ legyen képezve; mert különben az illető — egyértékű — függvény folytonossága még a tartományon belül megszakadna. Ha a 0 megközelitését a tartományba tartozó

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_n\ldots$$

számok segitségével végezzük, hol

$$\delta_n = r_n(\cos.\varphi_n + i\sin.\varphi_n)\,,\quad -\pi < \varphi_n \leqq \pi,$$

továbbá

$$\lim.\ \delta_n = 0,$$

akkor

$$\delta^t_n = e^{t\,((\mathrm{l}.\,r_n) + \varphi_n i + 2k\pi i)}\,,$$

vagy, ha még részletesen

$$t = t_1 + t_2 i,$$

végre

$$\delta^t_n = e^{t_1(\mathrm{l}.\,r_n) - t_2\varphi_n - 2k\pi t_2 + i\,(t_1\varphi_n + 2k\pi t_1 + t_2(\mathrm{l}.\,r_n))}\,;$$

de $e^{ui} = \cos. u + i \sin. u$ absolut értéke az u bármely valós értékénél 1; $(l.r_n)$ határértéke $-\infty$, és így x^t határértéke, midőn $\lim. x = \lim. r_n (\cos. \varphi_n + i \sin. \varphi_n) = 0$, a szerint 0 vagy ∞, amint t_1 pozitiv vagy negativ.

Ha tehát a kitevő valós része negativ, x^t a 0 helyen nem folytonos, annál kevésbé differencziálható vagy hatványsorba fejthető.

Ha a kitevő valós része pozitiv, de nem egész szám, akkor $\lim\limits_{x=0}. x^t$, a kijelölt módon végezve a határátmenetet, 0 lesz. Ha tehát a függvény egyáltalában e helyen folytonos, értéke 0. Ha van differencziálhányadosa, ezt is a kijelölt különbségi hányadosból képezhetjük, és így ez ha egyáltalában van

$$\lim. \frac{\delta_n^t}{\delta_n} = \lim. \delta_n^{t-1},$$

azaz végtelen, ha $t_1 < 1$, 0, ha $t_1 > 1$. (A $t_1 = 1$ esete egyelőre ki van zárva). Az első esetben a függvény differencziálhányadosa a 0 helyen már csak ∞ lehet, és így sorfejtésről többé nem lehet szó. A második esetben, minthogy a vizsgált helyen $f(x)$ és $f'(x)$ zérus, a második differencziálhányados csak

$$\lim. \frac{f(x+h)}{h^2} = \lim. \frac{\delta_n^t}{\delta_n^2} = \lim. \delta_n^{t-2}$$

lehet, tehát végtelen, ha $t < 2$, 0 ha $t_1 > 2$. (A $t_1 = 2$ esete ki van zárva). Az utóbbi esetben áttérhetünk a harmadik differencziálhányadosra, és úgy tovább. Minthogy pedig t_1 meghatározott érték, végre egy k-adik differencziálhányadosra jutunk, mely ∞ lesz, és így az x^t függvénynek most is a 0 mindig kivételes helye, hol a függvény vagy valamely differencziálhányadosa mindenesetre szakadásos, és így a 0 környezetében érvényes sorfejtés nem lehetséges.

Hátra van még *azon eset, midőn $t = t_1 + t_2 i$-ben t_1 zérus vagy pozitiv egész szám; de ekkor t_2 nem* 0, mert különben x^t, a mit kezdettől fogva kivettünk, egész függvény volna.

Ha először t_1 nem 0, akkor $\lim\limits_{x=0}. x^t$ a kijelölt úton 0; ha tehát e függvény egyáltalában folytonos, értéke 0, és egyik differencziálhányadosa, t. i. a t_1-edik

$$\lim. \frac{\delta_n^t}{\delta_n^{t_1}} = \lim. \delta_n^{t-t_1} = \lim. \delta_n^{i t_2};$$

ha $t_1 = 0$, akkor a függvényérték maga (azaz a 0-adik differencziálhányados) a 0 helyen

$$\lim. \delta_n^{i t_2};$$

és végre megvizsgálandó, vajjon ez véges meghatározott határérték. Részletesen

$$\delta_n^{i t_2} = e^{-t_2(\varphi_n + 2k\pi) + i t_2 (\mathrm{l}.\, r_n)}$$

$$|\delta_n^{i t_2}| = e^{-t_2(\varphi_n + 2k\pi)},$$

hogy tehát $\delta_n^{i t_2}$-nek véges, meghatározott határértéke legyen, szükséges, hogy $\lim. \varphi_n$ is ilyenhez közeledjék. Tudniillik φ mindig $-\pi$ és π közt foglaltatik, tehát $\lim. \varphi_n$ nem lehet ∞, a mikor esetleg $\lim. |\delta_n^{i t_2}|$ zérus volna. De ekkor, $\delta_n^{i t_2}$ csak e kifejezéssel:

$$e^{i t_2 (\mathrm{l}.\, r_n)} = \cos. t_2 (\mathrm{l}.\, r_n) + i \sin. t_2 (\mathrm{l}.\, r_n)$$

egyidőben közeledik meghatározott határértékhez. De az $r_1, r_2 \ldots r_n \ldots$ számsorozat tagjai azon föltétel mellett, hogy $\lim. r_n = 0$ legyen, egészen szabadon választhatók, tehát úgy is, hogy

$$t_2 (\mathrm{l}.\, r_n) = \omega_n$$

legyen, hol ω_n és t_2 előjele ellenkező, mert $(\mathrm{l}.r_n)$ negativ, és $\lim. \omega_n = \infty$, de különben ω_n egészen tetszőleges, és így végre $\delta_n^{i t_2}$ határértéke egészen határozatlan; tehát a függvény maga vagy egyik differencziálhányadosa a 0 helyen többé nem differencziálható, és a 0 környezetében érvényes sorfejtés ezen utolsó esetben sem létezik.

177. Fölsoroljuk még a binomiális sor nehány speciális esetét. Ha t negativ egész szám, például $-k$, akkor $(1+z)^t = \frac{1}{(1+z)^k}$ raczionális függvény és minthogy

$$\binom{-k}{n} = \frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} = (-1)^n \frac{(k+n-1)(k+n-2)\ldots k}{1\,.\,2\ldots n}$$

$$= (-1)^n \binom{k+n-1}{n},$$

végre:

$$\frac{1}{(1+z)^k} = 1 - \binom{k}{1} z + \binom{k+1}{2} z^2 - \ldots + (-1)^n \binom{k+n-1}{n} z^n + \ldots$$

$$|z| < 1. \qquad \text{(IX.)}$$

Ha $t = \frac{1}{k}$, hol k pozitiv egész szám, akkor az $(1+z)^t$ sora az $\sqrt[k]{1+z}$ főértékét adja; ekkor:

$$\binom{\frac{1}{k}}{n} = \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots n} = \frac{(1-k)\,(1-2k)\ldots(1-(n-1)k)}{1\,.\,2\ldots\ldots n}\,\frac{1}{k^n}$$

$$= (-1)^{n-1}\,\frac{(k-1)\,(2k-1)\ldots((n-1)k-1)}{k\,.\,2k\ldots(n-1)k}\,\frac{1}{nk}$$

és tehát

$$\sqrt[k]{1+x} = 1 + \frac{1}{k}x - \frac{k-1}{k}\,\frac{1}{2k}\,x^2 + \frac{(k-1)\,(2k-1)}{k\,.\,2k}\,\frac{1}{3k}\,x^3 -$$

$$- \frac{(k-1)\,(2k-1)\,(3k-1)}{k\,.\,2k\,.\,3k}\,\frac{1}{4k}\,x^4 + \ldots \qquad \text{(X.)}$$

$$|z| < 1.$$

Ha $t = -\frac{1}{k}$, hol k pozitiv egész szám, akkor az $(1+z)^t$ sora $\frac{1}{\sqrt[k]{1+z}}$ főértékét adja; ekkor:

$$\binom{-\frac{1}{k}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{k}-n+1\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n} =$$

$$= (-1)^n\,\frac{(k+1)\,(2k+1)\ldots((n-1)k+1)}{k\,.\,2k\,.\,.\,.\,.\,(n-1)k}\,\frac{1}{nk};$$

és végre:

$$\frac{1}{\sqrt[k]{1+z}} = 1 - \frac{1}{k}z + \frac{k+1}{k}\,\frac{1}{2k}\,z^2 - \frac{(k+1)\,(2k+1)}{k\,.\,2k}\,\frac{1}{3k}\,z^3 +$$

$$+ \frac{(k+1)\,(2k+1)\,(3k+1)}{k\,.\,2k\,.\,3k}\,\frac{1}{4k}\,z^4 - \ldots \qquad \text{(XI.)}$$

$$|z| < 1.$$

Mint ennek speciális esetét ($k = 2$, $z = -x^2$) említjük még a következő sort:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6 + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}x^8 + \ldots$$

178. A (X.) alatt álló sort használjuk, midőn valamely (raczionális) számnak k-adik gyökét kell nagy pontossággal meghatározni. Ha e szám A, keressük a legnagyobb egész számot E_0, melynek k-adik hatványa A-nál nem nagyobb, vagy általánosabban a legnagyobb egész számot E_r, melyre nézve $\frac{E_r}{10^r}$-nek k-adik hatványa A-nál nem nagyobb, úgy hogy

$$\left(\frac{E_r}{10^r}\right)^k \leq A < \left(\frac{E_r+1}{10^r}\right)^k.$$

Ha ekkor

$$A = \left(\frac{E_r}{10^r}\right)^k + a;$$

akkor

$$0 \leq a = A - \left(\frac{E_r}{10^r}\right)^k < \left(\frac{E_r+1}{10^r}\right)^k - \left(\frac{E_r}{10^r}\right)^k,$$

és

$$0 \leq \frac{a}{\left(\frac{E_r}{10^r}\right)^k} < \left(\frac{E_r+1}{E_r}\right)^k - 1.$$

Tehát:

$$\sqrt[k]{A} = \sqrt[k]{\left(\frac{E_r}{10^r}\right)^k + a} = \frac{E_r}{10^r}\sqrt[k]{1 + \frac{a}{\left(\frac{E_r}{10^r}\right)^k}}.$$

Bármely A számra nézve az E_0, E_1, E_2... számok közt, mint közvetetlenül látni, a következő kapcsolat áll fönn:

$$E_1 \geq 10\,E_0,\; E_2 \geq 10\,E_1, \ldots$$

azaz az E_r számok r-rel minden határon túl növekednek; és ekkor $\left(\frac{E_r+1}{E_r}\right)^k - 1$ nemcsak 1-nél kisebb lesz, hanem az r kellő választásánál bármely pozitiv valódi törtnél kisebb pozitiv szám lesz. Legyen röviden

$$c = \frac{a}{\left(\frac{E^r}{10^r}\right)^k},$$

akkor c ama kis számnál is kisebb, és

$$\sqrt[k]{A} = \frac{E}{10^r}\sqrt[k]{1+c},$$

hol a gyökkifejezés kiszámítására a (X.) sor alkalmazható, mert c az egynél kisebb pozitiv szám. Ha az r-et elég nagynak és evvel együtt a c-t elég kicsinynek veszszük, a sor összetartása is tetszőlegesen gyorsítható. Minthogy továbbá a sor tagjai váltakozó előjelűek, a megközelítés pontossága is igen könnyen megítélhető. T. i. a keresett érték mindig két egymásután következő megközelítő érték (S_n és S_{n+1}) közt fekszik.

A gyakorlatban az eljárás a következő. A gyök egynéhány deczimálisát a Horner módszere szerint határozzuk meg, t. i. az $x^k = A$ egyenlet megoldásával, a mi már négyzet- és köbgyöknél is az elemi módszernél sokkal kényelmesebb. Evvel azután megvannak az $E_0, E_1, \ldots$ számok, és ha a megfelelő sor már elég gyorsan összetartó, áttérünk a sorra, mely a további deczimális helyeket aránylag fölötte rövid számítással adja.

Ha p. kiszámítandó $\sqrt[3]{25}$, akkor először Horner módszerével:

$$\sqrt[3]{25} = 2{\cdot}92\ldots$$

azaz

$$\left(\frac{292}{100}\right)^3 < 25 < \left(\frac{293}{100}\right)^3.$$

Ekkor $r = 2$, $E_r = 292$, $a = 25 - 2 \cdot 92^3 = 0 \cdot 102912$,
$c = \frac{0{\cdot}102912}{24{\cdot}897088} < \frac{11}{2489} < \frac{1}{200}$.
Tehát:

$$\sqrt[3]{25} = 2{\cdot}92 \sqrt[3]{1+c}$$
$$= 2{\cdot}92\left(1 + \frac{1}{3}c - \frac{2}{3}\frac{1}{6}c^2 + \frac{2.5}{3.6}\frac{1}{9}c^3 - \ldots\right);$$

és ha itt a sorból csak az első 3 sortagot használjuk, a hiba a negyedik sortagnál kisebb, mert ez a maradéksornál nagyobb, azaz a

$$\sqrt[3]{25} = 2{\cdot}92\left(1 + \frac{1}{3}c - \frac{2}{3}\frac{1}{6}c^2\right)$$

meghatározás hibája kisebb mint

$$2{\cdot}92 \,.\, \frac{2.5}{3.6}\frac{1}{9}c^3,$$

a mi ismét kisebb, mint:

$$\frac{10}{18} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\, \frac{1}{10^6} = \frac{1}{432} \cdot \frac{1}{10^5} < \frac{1}{4}\, \frac{1}{10^7},$$

azaz ama meghatározás hibája kisebb, mint 0·000000025. A példa eddigi kifejtése is mutatja, hogy a módszer mily előnyös, ha egyes alapértékek igen nagy pontossággal számítandók.

A cziklometrikus függvények.

179. Az elemi függvények általános tárgyalása még végre kiterjesztendő a trigonometrikus függvények megfordításából keletkező cziklometrikus függvényekre; valamint azonban amazok kifejthetők voltak az exponencziális függvény segítségével, úgy ezek sem képviselnek többé lényegesen új függvényeket, hanem visszavezethetők a logarithmusra.

Az arcsin x függvény elmélete ismét a

$$\sin . z = x$$

egyenlet megoldásán alapszik. Ha ezen egyenletben a sinust kifejezzük exponencziális függvények segítségével, akkor lesz:

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2ix,$$

vagy e^{iz}-vel (mely a z semmiféle számértékénél nem 0) szorozva:

$$(e^{iz})^2 - 2ixe^{iz} - 1 = 0.$$

Ebből:

$$e^{iz} = ix + \sqrt{1-x^2}.$$

és végre

$$z = \frac{1}{i} \, \mathrm{l.} \, (ix + \sqrt{1-x^2}),$$

hol természetesen a $\sqrt{}$ mint kétértelmű, a l. mint végtelen sok értelmű művelet jele áll. Ha úgy a négyzetgyök, mint a logarithmus főértékét veszszük, akkor egy speciális megoldás:

$$z_0 = \frac{1}{i} (\mathrm{l.} \, (ix + (1-x^2)^{\frac{1}{2}})). \tag{1.}$$

melynek segítségével a többi egyszerűen kifejezhető. T. i.

$$(ix + (1-x^2)^{\frac{1}{2}})(ix - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}) = -1.$$

Tehát:

$$(\mathrm{l.} \, (ix + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}) + (\mathrm{l.} \, (ix - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}) = \pi i + 2 a \pi i,$$

hol a egy bizonyos meghatározott egész szám; és így

$$\frac{1}{i}(\mathrm{l.}\,(ix-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}))=\pi-z_0+2a\pi.$$

Ha a logarithmusnak főértéke helyett más értékét veszszük, akkor ez csak $2k\pi i$-vel, z tehát $2k\pi$-vel változik, és így a $\sin. z=x$ egyenlet megoldásainak összessége:

$$z_0+2k\pi\,,\quad \pi-z_0+2k\pi, \tag{2.}$$

ha t. i. $k+a$ helyett egyszerűen k-t irunk, a mit szabad tennünk, mert mind a kettő tetszőleges egész számot jelent.

Ha x valós, és absolut értéke 1-nél nem nagyobb, a $\sin. z=x$ megoldásai ugyanazok, mint a valós változás körében (I. r. 77. cz.) Egyáltalában az összes megoldások a z_0 alapmegoldással egyidőben valósak vagy complexek. Ez pedig, mint könnyű látni, csak akkor valós, ha x valós, és $|x|<1$.

Mert különben volna egy valós z, melyre nézve $\sin. z$ nem volna a $-1\ldots+1$ számköz belsejében vagy határán fekvő valós szám.

Ezen eredmény mutatja, hogy *$\sin. z$ a complex számok körében is egyszerűen periodikus függvény és alapperiodusa 2π.* Mert nemcsak a z minden értékénél $\sin.(z+2\pi)=\sin. z$; hanem megfordítva, a z minden értékénél csak akkor lesz

$$\sin.(z+P)=\sin. z,$$

(tehát például akkor is, midőn $z=0$, és $z=\frac{\pi}{2}$), ha

$$\sin. P=0,\quad \cos. P=1;$$

tehát P csak a 2π többese lehet.

Ugyanez áll természetesen a $\cos. z=\sin.\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$ függvényre is.

180. Ezek után a

$$z=\arcsin. x$$

azon függvényt jelenti, melynél az x bármely értékéhez a z azon értékei tartoznak, melyek eleget tesznek a $\sin. z=x$ egyenletnek. E szerint $\arcsin. x$ csakugyan kifejezhető a logarithmus által, t. i.

$$\arcsin. x=\frac{1}{i}\,\mathrm{l.}(ix+\sqrt{1-x^2}),$$

és ez végtelen sok értékű függvény, melynek értelmezési tartománya a számok összességéből áll. Erre vonatkozólag megjegyzendő, hogy a logarithmus jele alatt álló kifejezés soha sem 0; mert az

$$i\,x = -\sqrt{1-x^2}, \quad -x^2 = 1 - x^2$$

egyenletből $1 = 0$ következnék.

Az arcsin. x *főértékéhez* jutunk, ha úgy a négyzetgyöknek, mint a logarithmusnak főértékét veszszük. Ha x valós és $|x| \leqq 1$, akkor $i\,x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ valós része $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ pozitiv vagy 0, képzetes része ix, absolut értéke tehát 1 és így:

$$i\,x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = e^{i\varphi},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2};$$

e szerint az arcsin. x megfelelő értéke $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt fekvő valós érték. A főérték mostani általános értelmezése tehát az előbb speciális esetben történt megállapításokkal (I. r. 77. cz.) megegyezik.*

---

* Az arcsin. x főértéke különben önállóan mint azon érték értelmezhető, melynek valós része $-\frac{\pi}{2}$-nél nem kisebb és $\frac{\pi}{2}$-nél nem nagyobb. Tüstént látni, hogy ilyen mindig egy, és csak egy létezik. Hogy pedig ez nem más, mint a fönt megállapított érték, abból következik, hogy ha

$$x = x_1 + x_2\,i,$$

lesz:

$$1 - x^2 = 1 - x_1^2 + x_2^2 - 2\,x_1\,x_2\,i;$$

e szerint $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ valós része, melynek mint főérték valós részének pozitiv előjel felel meg:

$$\left(\frac{1 - x_1^2 + x_2^2 + \left((1 - x_1^2 + x_2^2)^2 + 4\,x_1^2\,x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

míg $i\,x$ valós része: $-x_2$. De

$$1 - x_1^2 + x_2^2 + \left((1 - x_1^2 + x_2^2)^2 + 4\,x_1^2\,x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} > 2\,x_2^2;$$

mert

$$\left((1 - x_1^2 + x_2^2)^2 + 4\,x_1^2\,x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqq x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

Ha tudniillik a jobboldalon negativ szám vagy 0 áll, ez közvetetlenül világos; ha pedig $x_1^2 + x_2^2 - 1$ pozitiv, akkor:

$$(1 - x_1^2 + x_2^2)^2 + 4\,x_1^2\,x_2^2 \geqq (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2;$$

Ha tehát az arcsin. x értékét, bármely helyen az $x = \pm 1$ kivételével, megadjuk, és követeljük, hogy a függvény e hely környezetében folytonosan változzék, akkor ily módon az arcsin. x-nek egyértékű, folytonos és differencziálható ágát határozzuk meg. E követelés ugyanis akkor megállapítja a gyök, és evvel együtt a logarithmus jele alatt álló kifejezés értékét, és minthogy e kifejezés is folytonosan változik, végre a logarithmus értékét is megadja. Hogy az arcsin.x bármely ily ága (az $x = \pm 1$ helyek kivételével) mindenütt differencziálható, azt azon körülmény mutatja, hogy az arcsin. x-nek mint inverz függvénynek vagy mint összetett függvénynek differencziálását közvetetlenül elvégezhetjük. Az utóbbi módon például lesz:

$$\frac{d \arcsin. x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{i}\, l(ix + \sqrt{1-x^2})\right) =$$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{1}{ix+\sqrt{1-x^2}}\left(i - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{ix+\sqrt{1-x^2}}{ix+\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

tehát a differencziálási szabály teljesen ugyanaz marad, mint a valós változókra szorítkozó tárgyalásnál, ugyanazon közelebb meghatározással, hogy a két oldalon egyidőben veendők a főértékkel kongruens vagy inkongruens értékek.

Az $x = \pm 1$ helyeken az arcsin. x nem differencziálható, mert már valós növekmény esetében is a differencziálhányados ekkor végtelen lesz.

Az inverz függvények elvének alkalmazása épen úgy adja a differencziálhányados másik alakját:

---

mert ez egyszerűsítés után nem egyéb mint:

$$4x_2^2 \geq 0.$$

E szerint $ix + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ valós része nem negativ, azaz argumentuma $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt fekszik; a logarithmus főértékében a képzetes rész szorzója ugyane határok között mozog; és végre arcsin.x valós része $-\frac{\pi}{2}$-nél nem kisebb és $\frac{\pi}{2}$-nél nem nagyobb.

$$\frac{d \operatorname{arcsin.} x}{d x} = \frac{1}{\cos. \operatorname{arcsin.} x}.$$

Az arccos. x függvény tulajdonságai vagy önállóan tárgyalhatók a most előadottak mintájára, vagy még egyszerűbben levezethetők a

$$\cos. z = \sin. \left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

összefüggés alapján. A $z = \operatorname{arccos.} x$ ismét azon függvény, melynél egy adott x-hez mindazon z-k tartoznak, melyek eleget tesznek a $\cos. z = x$ egyenletnek. De a fölirt goniometrikus képlet alapján ezen egyenlet megoldásai ugyanazok, mint a

$$\sin. \left(\frac{\pi}{2} - z\right) = x$$

egyenletéi, tehát

$$\frac{\pi}{2} - z = \operatorname{arcsin.} x$$

és végre

$$\operatorname{arccos.} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin.} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i}\, l\,(i x + \sqrt{1 - x^2}).$$

Az arccos.x főértéke ismét az, mely a négyzetgyök és logarithmus főértékének választásánál keletkezik. Minthogy ekkor pedig arcsin. x valós része $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt fekszik, az arccos. x főértékének valós része 0-nál nem kisebb és π-nél nem nagyobb, megegyezőleg a valós változás esetére vonatkozó megállapításokkal.

Ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\frac{\pi i}{2} = (\mathrm{l}.\, i),$$

akkor az arccos. x értelmezése még így is írható:

$$\operatorname{arccos.} x = \frac{1}{i}\, \mathrm{l}. \frac{1}{i x + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{i}\, l\,(x + i \sqrt{1 - x^2}),$$

hol — a mit már nem részletezünk — ismét a gyök és logarithmus főértékét véve, az arccos. x-nek is főértékéhez jutunk.

Az arccos. x bármely alakjából végre ismét

$$\frac{d \operatorname{arccos.} x}{d x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{\sin. (\operatorname{arccos.} x)},$$

hol az első alaknál a két oldalon egyidőben állnak a főértékkel kongruens vagy inkongruens értékek.

181. *Az* arcsin. x *minden egyértékű és folytonos ága minden hely környezetében, az* $x = \pm 1$ *kivételevel hatványsorba fejthető.* Hogy a ± 1 helyek erre nézve kivételt tesznek, már abból következik, hogy a függvény ott nem differencziálható; minden más helyen a sorfejtés lehetősége a 153. czikk értelmében a differencziálhányadosnak, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$-nek ugyanily tulajdonságából foly.

A mi jelesen a főérték (arcsin. x) Mac Laurin-féle soralakját illeti, azt vagy az idézett tétel értelmében az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sorjának (175. cz.) tagonkénti integrácziójából vezetjük le, hozzátéve még, hogy

$$(\text{arcsin.}\, 0) = 0;$$

vagy pedig az arcsin. x magasabb differencziálhányadosaiból, melyeket a 90. czikkben kiszámitottunk. Az első eljárás mindjárt azt is mutatja, hogy a keletkező sor:

$$(\text{arcsin.}\, x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots, \qquad \text{(XIII.)}$$

összetartási körének sugara 1.

E sorból a π kiszámitására alkalmas sorokat vezethetünk le, ha x oly értékét választjuk, melynél (arcsin. x) a π egyszerű tört része, például:

$$\sin.\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \left(\text{arcsin.}\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

tehát:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7.2^7} + \cdots$$

182. Az arctg. x függvény tárgyalása ismét a tg. $z = x$ egyenlet általános megoldásán alapszik. A tg. $z = \frac{\sin. z}{\cos. z}$ függvényt kifejezve exponencziális függvények segitségével, ezen egyenlet lesz:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = i\,x,$$

vagy

$$\frac{(e^{iz})^2 - 1}{(e^{iz})^2 + 1} = i\,x,$$

és ebből:

$$e^{iz} = \sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}}.$$

Ha $x=\pm i$, a z-nek megfelelő számértéke nem létezik; minden más esetben:

$$z = \frac{1}{i}\,\mathrm{l.}\sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}}.$$

Ha úgy a négyzetgyöknek, mint a logarithmusnak főértékét veszszük, akkor egy speciális megoldás, z_0 keletkezik, melynek segítségével a többi igen egyszerűen kifejezhető. Az összes a négyzetgyök főértékével képezett megoldások

$$\frac{1}{i}\,\mathrm{l.}\left(\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = z_0 + 2k'\pi;$$

míg a négyzetgyök ellenkező értékével képezett megoldások:

$$\frac{1}{i}\,\mathrm{l.}\left[-\left(\left(\frac{1+ix}{1+ix}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] = \frac{1}{i}\,\mathrm{l.}\left(\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{i}\left(\mathrm{l.}\,(-1)\right) = z_0 + (2k'+1)\pi$$

A tg. $z=x$ összes megoldásai tehát:

$$z_0 + k\pi,$$

azaz z_0-ból a π tetszőleges többesének hozzáadás által keletkeznek.

Ha x valós, a tg. $z=x$ megoldásai ugyanazok, mint valós változók körében. Egyáltalában minden megoldás z_0-sal és ez ismét x-szel együtt valós vagy complex.

Ezen eredmény mutatja, hogy tg. z — a complex számok körében is — egyszerűen periodikus függvény és alapperiodusa π; mert z bármely értékénél tg. $(z+\pi)$ = tg. z; és megfordítva, hogy a z bármely értékénél

$$\text{tg.}\,(z+P) = \text{tg.}\,z$$

legyen (tehát akkor is, midőn $z=0$) kell, hogy tg. $P=0$, és tehát $P=k\pi$ legyen.

183. Ezek után

$$z = \text{arctg.}\,x$$

azon függvényt jelenti, melynél minden x-hez a z azon értékei tartoznak, melyek eleget tesznek a tg. $z=x$ egyenletnek. E szerint arctg. x kifejezhető a logarithmus által és

$$\operatorname{arctg.} x = \frac{1}{i} \mathrm{l.} \sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}};$$

ez végtelen sok értékű függvény, melynek értelmezési tartománya a számok összességéből áll, $\pm i$ kivételével, a hol a függvény végtelen lesz.

Az arctg. x *főértéké*hez jutunk, ha úgy a négyzetgyök, mint a logarithmus főértékét veszszük. Ekkor a logarithmus jele alatt mindig oly szám áll, melynek valós része nem negativ, melynek argumentuma tehát $-\frac{\pi}{2}$-nél nem kisebb, $\frac{\pi}{2}$-nél nem nagyobb. E szerint (arctg. x)-nek valós része ugyancsak a $-\frac{\pi}{2} \ldots \frac{\pi}{2}$ számkörben fekszik. A főérték mostani értelmezése tehát az előbb speciális esetben történt megállapitásokkal (I. r. 77.) megegyezik.

Az x véges értékénél z soha sem lesz $\frac{\pi}{2} + k\pi$ alakú, mert erre szükséges volna, hogy a logarithmus jele alatt $\pm i$ álljon. De oly x, melyre nézve

$$\sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}} = \pm i$$

lenne, nincsen; mert ebből

$$\frac{1+ix}{1-ix} = -1, \quad 2 = 0$$

következik. Ellenben a végtelenben:

$$\lim_{x=\infty} \operatorname{arctg.} x = \lim_{x=\infty} \frac{1}{i} \mathrm{l.} \sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}} = \frac{1}{i} \mathrm{l.} \sqrt{-1} = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Ha az arctg.x értékét bármely helyen (természetesen $x = \pm i$ kivételével) megadjuk és követeljük, hogy a függvény e hely környezetében folytonosan változzék, akkor ily módon az arctg. x-nek egyértékű, folytonos és differencziálható ágát határozzuk meg. Hogy az arctg.x minden ily ága egész értelmezési tartományában differencziálható, azt ismét legegyszerűbben látjuk, ha az arctg. x-nek mint inverz függvénynek, vagy mint összetett függvénynek differencziálását közvetetlenül elvégezhetjük.

Az utóbbi módon például lesz:

$$\text{tg.}\left(4A - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tg.}4A - 1}{1 + \text{tg.}4A} = \frac{1}{239},$$

$$4A - \frac{\pi}{4} = \left(\text{arctg.}\,\frac{1}{239}\right)$$

és igy végre:

$$\frac{\pi}{4} = 4A - \left(\text{arctg.}\,\frac{1}{239}\right);$$

azaz:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{5^5} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{239^5} - \ldots\right).$$

P. G. m. e. h. 1845/6
P. L. m. e. h. 1900/01
P. B. m. e. h. 1907/8
S. K. m. e. h. 1908
SA l. f. s. 1917

HELYREIGAZITÁSOK AZ ELSŐ KÖTETHEZ.

21. l. 2. és 3. sor fölülről: $+ (a)$ helyett: $(+ a)$.
21. l. 4. és 5. « « $-(a)$ « $(-a)$.
27. l. 14. sor felülről: *relativ törzsszámok* után hiányzik: *(lásd a következő czikket).*
82. l. 14—21. sor f. helyett: Megfordítva, ha minden raczionális számra nézve, legfölebb egynek kivételével, egy bizonyos n-től kezdve $a_n - r$ és $b_n - r$ egyenlő előjelű, akkor mindig van egy N, úgy hogy $|a_{N+k} - b_{N+k}| < \delta$ a k-nak minden nem negativ egész értékénél, bárhogyan választottuk is a pozitiv δ számot. Határozzuk meg ugyanis N-et úgy, hogy

$$|a_{N+k} - a_N| < \tfrac{1}{3}\delta, \ |b_{N+k} - b_N| < \tfrac{1}{3}\delta$$

Akkor annál inkább:

$$|a_{N+k} - b_{N+k} - (a_N - b_N)| < \tfrac{2}{3}\delta;$$

tehát $a_n - b_n$ szabályos számsorozat általános tagja. Ha állításunk nem volna helyes, akkor mindenesetre, ha N elég nagy, a 44. czikk értelmében,

$$|a_{N+k} - b_{N+k}| > G$$

hol G egy bizonyos pozitiv szám, és N az összes egyenlőtlenségekben ugyanazt a számot jelentheti. De ekkor a_N és b_N nem egyenlő; ha pedig például $a_N > b_N$, minden raczionális szám R, mely kielégíti a

$$b_N + \frac{a_N - b_N}{3} < R < b_N + 2\,\frac{a_N - b_N}{3}$$

föltételeket, a föltevés ellenére olyan volna, hogy

$$a_{N+k} - R > \frac{a_N - b_N}{3} + a_{N+k} - a_N$$

$$b_{N+k} - R < -\frac{a_N - b_N}{3} + b_{N+k} - b_N$$

ellenkező előjelű, ha csak a k-t elég nagynak veszszük.

95. l. 7. sor fölülről: δ_n helyett: $2\delta_n$
95. l. 18. « « $|a_{n+k} - a_n|$ helyett: $|a_{n+k} - a_n|$
99. l. 2. « « $3|A| - 1$ « $3|A| - 2$
99. l. 3. « « $k|A| - 1$ « $k|A| - (k-1)$
112. l. utolsó sor: $1 - a$ helyett: $a - 1$
113. l. 16. sor f. $1 - a$ « $a - 1$,

114. l. 4. sor alulról: *nagyobb* helyett: *kisebb*,

115. l. vége következőkép kiegészítendő: Ha a nagyobb, mint b, az utóbbi következtetések csak annyiban változnak, hogy

$$a > (ab)^{\frac{1}{2}} > \frac{(ab)^{\frac{1}{2}} + b}{2} > b;$$

és e szerint az $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ sorozat tagjai kisebbednek, a $b_1, b_2 \dots b_n$ .. sorozat tagjai pedig nagyobbodnak. Szintúgy jön a $>$ jel a $<$ helyébe az ezután következő egyenlőtlenségben; de ismét $\lim. a_n = \lim. b_n$. Az $L(a, b)$ tehát akkor is meghatározott számot jelent, ha $a > b$; de megjegyzendő, hogy általánosságban $L(a, b)$ és $L(b, a)$ *különböző* számok.

Könnyű látni végre, hogy $L(a, a) = a$.

117. l. 3. sor fölülről: $L(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ helyett: $L(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

124. l. 5. « alulról: $\cos. k\frac{\pi}{2^n} = \cos. k\frac{\pi}{2^n}$ helyett: $\cos. k\frac{\pi}{2^n} = \cos. 2k\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

124. l. 3. « « $\cos. (2k+1)\frac{\pi}{2^n}$ helyett: $\cos. (k+1)\frac{\pi}{2^n}$.

125. l. 4. « fölülről: $\sin. (k+1)\frac{\pi}{2^n} = \sin. (k+1)\frac{\pi}{2^n}$ helyett:

$$\sin. (k+1)\frac{\pi}{2^n} = \sin. 2(k+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

176. l. 13. sor fölülről: $\frac{1}{12}$ helyett: $\frac{7}{12}$.

179. l. a (2.) sor utolsó tagja: $-\frac{1}{n-1}$ helyett: $-\frac{1}{n}$.

227. l. 4. sor alulról: a nevező helyesen: $(a_{11}n_1^2 + 2a_{12}n_1n_2 + a_{22}n_2^2)^\alpha$

227. l. utolsó sor: *valósak* után hiányzik: *és végre* $a > 1$,

228. l. 9. sor fölülről: a nevező helyesen:

$$(a_{11}n_1^2 + 2a_{12}n_1n_2 + a_{22}n_2^2 + b_1n_1 + b_2n_2 + c)^\alpha$$

228. l. 10. « « *értékénél* után hiányzik: *ha* $\alpha > 1$

228. l. utolsó sor: a nevező helyesen $(\omega n_1 + \omega n_2 + z)^{2+\alpha}$.

229. l. 17. sor felülről: a nevező helyesen $(\omega n + z)^{2+\alpha}$.

328. l. 8. « « u_n helyett: u_m.

328. l. 10. « « *soha ne létezzék* helyett: *ne létezzék a v-k minden választásánál.*

Az **Eggenberger**-féle könyvkereskedésben továbbá megjelent:

THOMÉ Dr. O. W. Az állattan kézikönyve. Gymnasiumok és reáliskolák felsőbb osztályai, erdészeti és gazdászati intézetek-, gyógyszerészek és orvosnövendékek számára. A tudomány ujabb elvei és hazánk viszonyai tekintetbe vételével kidolgozta *Paszlavszky József* tanár. 300 a szöveg közé nyomott fametszetű ábrával. Második kiadás. Ára 2 frt.

Az állattan e kézikönyve tervezete és kivitelében párhuzamban áll a «Növényország tankönyvé»-vel, mely ugyanazon szerzőtől irva, s magyarra Borbás Vincze tanár által forditva ez évben jelent meg II. kiadásban. Thomé ebben is, ugy mint amabban, tárgyának sajátságos felfogásával hézagot pótol. Eltér ugyanis az eddig követett iránytól, mely az állatok meddő leirásában állott, és feladatát az emberi test szerkezete és életének kimeritő tárgyalása és az állatországnak mint szerves egésznek felfogása által igyekszik megoldani. A tárgy felfogását elősegitő ábrákat illetőleg semmi költséget sem kiméltünk, hogy e könyv ugy a felsőbb iskolában mint általában a müvelt közönség körében teljesen használható és élvezhető legyen.

THOMÉ Dr. O. W. A növényország tankönyve. Gymnasiumok, reáliskolák, erdészek, gazdászok és gyógyszerészek, valamint magántanulók használatára, magyarra forditotta s helyenkint jegyzetekkel kisérte *Borbás Vincze* tanár. Harmadik bővitett és átdolgozott kiadás. A szöveg közé nyomtatott 890 fametszettel. Ára 1 frt 60 kr.

E munka a növénytani oktatás lényegét a növények életének vázolása — és a növényországnak mint szerves egésznek felfogásában keresi: a növénytannak majdnem minden más iskolai könyvével tudatos ellentétet képez. Mert mig ez utóbbiak a fősulyt a növények meghatározására fektetik az előbbi egész teljességében tekintettel van a növények bonez- és élettanára, fejtegeti azon szoros viszonyokat melyben a növények az állatokhoz, s a növénytan a természettudományok más ágaihoz áll, emliti azon átalakitó befolyást, melyet a növényéletnek ismerete a gyakorlati gazdászat legfontosabb kérdéseire, a gyógyászat és orvosi tudományokra gyakorol, s végre a növények természetes rendszerének előadásával egybekapcsolja a gyakorlati növénytant is, a mennyiben a főnövények — különösen ipartanilag fontos és gyógyszerül szolgáló növényekre kiváló gond és figyelem van benne forditva. A munkát végre a növénytan történetének rövid vázlata, a növények palaeontologiája és földirati elterjedése egészitik ki. Az előadott tanok megértését 890 mesterileg készitett fametszett könnyiti meg.

STEWART BALFOUR. Természettan elemei. Forditotta *Müller József.* 150 fametszetü ábrával és egy szintáblával. Ára 3 frt.

Ezen munka a természeti tünemények törvényeinek elemi tárgyalásában folytonosan tekintettel van a természettan főelvére: az erély (energia) megmaradásának elvére. A hőt, a fényt, a villanyosságot stb. mind az erély különböző nemeinek tekinti, melyek egymásba átváltozhatnak, de az erély megmaradásának elve értelmében se meg nem semmisithetők, se meg nem teremhetők. A szerzőnek e kisérlete, mely ez irányban egyáltalában az első volt, nagyon sikerültnek mondható, mi azon körülményből is kitünik, hogy az angol eredeti rövid idő alatt több kiadást ért, és a kritika által igen kedvezően fogadtatott. Igy például az *Eductional Times* e müvet *világos, szabatos előadásunak, kimeritőnek s a tudományos tankönyvek szép ideáljának nevezi.*

Dr. PRANTL K. Növénytan. Felsőbb tanintézetek és magánhasználatra. Az ötödik kiadás után forditották és a hazai viszonyokhoz alkalmazták *Páter Béla* és *Lasz Samu.* 336 ábrával. Ára 3 frt.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.