

333 furfangos feladat fizikából

Gnädig Péter – Honyek Gyula – Vigh Máté

333

FURFANGOS FELADAT
FIZIKÁBÓL



TYPOTEX

A könyv megjelenését a



Magyar Tudományos Akadémia támogatta.

© Gnädig Péter, Honyek Gyula, Vigh Máté, Typotex, 2014
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 279 820 2

Témakör: *fizika*

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!



Újabb kiadványainkról és akcióinkról
a www.typotex.hu és a facebook.com/typotexkiado
oldalakon értesülhet.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft.

Felelős vezető: Votisky Zsuzsa

Az ábrákat rajzolta és

a kötetet gondozta: Vigh Máté

Szakmai lektor: Vankó Péter

Nyelvi lektor: Ratkó Istvánné

Borítóterv: Szalay Éva

Készült a Multiszolg Bt. nyomdájában.

Felelős vezető: Kajtor Bálint

*Károlyházy Frigyes
emlékének*

Tartalomjegyzék

Bevezetés	9
Előszó	9
Hogyan használjuk ezt a könyvet?	11
Jelölések	13
Feladatok	15
Kinematika	15
Tömegpontok dinamikája	20
Gravitáció, bolygómozgás	25
Pontrendszerek	31
Merev testek dinamikája	34
Rugalmasságtan	40
Statika	43
Kötelek, láncok, granulált anyagok	46
Folyadékok és gázok mechanikája	53
Felületi feszültség	58
Hőtan	60
Halmazállapot-változások	63
Fénytan	66
Elektrosztatika I. (ponttöltések, szigetelők)	70
Elektrosztatika II. (vezetők)	75
Magnetosztatika (időben állandó mágneses mező)	80
Áramkörök, elektromos vezetés	85
Elektromágneses indukció, időben változó mezők	89
Relativitáselmélet és modern fizika	98
Útmutatás	101
Kinematika	101
Tömegpontok dinamikája	104
Gravitáció, bolygómozgás	106
Pontrendszerek	109
Merev testek dinamikája	111
Rugalmasságtan	114
Statika	116
Kötelek, láncok, granulált anyagok	118
Folyadékok és gázok mechanikája	121
Felületi feszültség	123
Hőtan	125
Halmazállapot-változások	127
Fénytan	129

Elektrosztatika I. (ponttöltések, szigetelők)	132
Elektrosztatika II. (vezetők)	135
Magnetosztatika (időben állandó mágneses mező)	138
Áramkörök, elektromos vezetés	141
Elektromágneses indukció, időben változó mezők	143
Relativitáselmélet és modern fizika	147
Megoldások	149
Kinematika	149
Tömegpontok dinamikája	181
Gravitáció, bolygómozgás	199
Pontrendszer	231
Merev testek dinamikája	244
Rugalmasságtan	276
Statika	296
Kötelek, láncok, granulált anyagok	312
Folyadékok és gázok mechanikája	336
Felületi feszültség	352
Hőtan	366
Halmazállapot-változások	385
Fénytan	396
Elektrosztatika I. (ponttöltések, szigetelők)	426
Elektrosztatika II. (vezetők)	451
Magnetosztatika (időben állandó mágneses mező)	482
Áramkörök, elektromos vezetés	518
Elektromágneses indukció, időben változó mezők	537
Relativitáselmélet és modern fizika	571
Függelék	589
Hasznos matematikai összefüggések	591
Fizikai táblázatok	599
Források	603

Előszó

A feladatmegoldás fontos részét képezi a fizika tanításának, tanulásának. A fizikai törvényeket a számolós feladatok segítségével lehet „működtetni”, alkalmazni. Ez az alkalmazás azonban bizonyos rutint tételez fel, amelynek hiánya még a legjobb képességű diákok közül is sokakat elijeszt a fizikától, a természettudományoktól. A példatári feladatok gyakran csak hosszú, kitartó (a diákok szerint unalmas, fantáziátlan, „rágós”) számolással oldhatók meg. A legjobbak közül is sokan úgy érezhetik, hogy számukra ezek a feladatok nem elég vonzóak, nem alkalmasak arra, hogy „kreativitásuk” (zsenialitásuk?) megnyilvánulhasson.

Ez a könyv azt szeretné bizonyítani, hogy nem minden fizikafeladat *ilyen*. Vannak *olyan* problémák, amelyek megoldása egy-egy jó ötletet, a szokásostól eltérő gondolkodásmódot, egy csipetnyi „furfangosságot” igényel. Ha ez az „isteni szikra” kipattan, az arkhimédészi *heuréka*-élmény beugrik, akkor gyakran néhány sornyi számolással (esetleg fejben végiggondolható érveléssel) kész a megoldás.

Természetesen a logika önmagában nem elegendő. Az univerzális fizikai törvények ismerete nélkül senkinek nincs esélye arra, hogy kitalálja ezeket a „furfangokat”. Nem biztathatunk tehát senkit, hogy a fizika tanulása nélkül álljon neki ezen feladatok megoldásának, csupán annyit mondhatunk, hogy a problémákkal való birkózás sikere nem feladatmegoldói rutinton múlik. Akármekkora segítséggel és akármeddig is jut el az Olvasó egy-egy feladatnál, a megoldás megismerése meglepetést és remélhetőleg örömet fog okozni. Biztosak vagyunk benne, hogy némelyik gondolatmenetre azt fogja mondani, hogy „ügyes”, másokra pedig azt: „hű de szép!” Célunk az, hogy minél több megoldási módszerrel, hasznos „trükkkel” ismertessük meg az Olvasót, ezzel gyarapítva feladatmegoldói fegyvertárát. Be kell vallanunk, hogy a könyvben találhatóak olyan feladatok is, amelyek hosszabb számolást, felsőbb matematikai módszereket igényelnek, de ezek a problémák is tartogatnak valamilyen meglepetést, rejtett érdekességet, szépséget.

Könyvünket két korábbi feladatgyűjtemény előzte meg. Az egyik előd az 1997-ben konferenciakiadványként megjelent *123 Furfangos Fizika Feladat*, ami sokak számára csak „zöld könyvként” ismert. A másik előzmény az angol nyelven 2001-ben megjelent *200 Puzzling Physics Problems*, amely a „zöld könyv” kibővített változata. Utóbbi kötetnek több fordítása (orosz, kínai és japán) is napvilágot látott. Az azóta eltelt évek során újabb és újabb furfangos feladatok, ingyenc problémák bukkantak fel, amelyek méltó utódai a korábban megjelent társaiknak. Ez készítetett minket arra, hogy egy új kötetben foglaljuk össze a régi feladatok legjavának átdolgozott, kibővített változatait és a hasonló szellemben megírt új problémákat.

A mostani összeállításban szereplő 333 feladatot szubjektív szempontok alapján válogattuk, tematikájuk emiatt igen szerteágazó. Találhatók közöttük saját agyszülemények, de felhasználtuk az idén 120 éves Középiszkolai Matematikai és Fizikai Lapok feladatait, a különböző magyarországi és nemzetközi fizikaverse-

nyek (részben átfogalmazott, továbbfejlesztett) problémáit is. Ötleteket merítettünk külföldi fizikai szaklapokból, és beépítettük munkánkba kollégáink javaslatait, észrevételeit is. A hazai és nemzetközi „ötletbörzén” felbukkanó fizikai problémák legnagyobb részéről lehetetlen hitelesen megállapítani, hogy ki a „szülője”, eredeti megfogalmazója. Sok feladatot mégis társítani tudtunk bizonyos nevekkel; ezeket (elismerve a tévedés lehetőségét) a kötet végén felsoroltuk. Köszönettel tartozunk nekik és az összes ismeretlen problémaszervezőnek, hogy remek feladatok kitalálásával vagy továbbfejlesztésével hozzájárultak e kiadvány létrejöttéhez.

A könyv feladatainak nehézségi szintje vegyes. Jó részük ajánlható a középiskola alsóbb évfolyamain tanuló, a fizika iránt érdeklődő diákoknak is, más részük viszont a fizika és a matematika magasabb szintű ismeretét tételezi fel. Emiatt ez a példatár olyan természettudományos és műszaki pályát választó egyetemistáknak is hasznos lehet, akik szeretnék a fizika alapjait mélyebben megérteni. A kötet nem titkolt célja, hogy segítse a legtehetségesebb diákok elméleti felkészülését a Nemzetközi Fizikai Diákolimpiákra, hiszen a magyar csapat korábbi, illetve jelenlegi vezetőiként ezekből a feladatokból válogattunk az általunk tartott szakkörökön. Biztosak vagyunk benne, hogy a fizikával hivatásként foglalkozó tanárok, mérnökök, fizikusok is találnak sok kedvükre való csemegét, érdekességet a könyvben. Kívánjuk az Olvasóknak, forgassák élvezettel és haszonnal ezt a gyűjteményt, és ha találkoznak hasonló „furfangos” fizika feladatokkal, kérjük, tegyék közkinccsé!

A kötetet Károlyházy Frigyes emlékének ajánljuk. Mindhárman tőle tanultuk, hogy mitől igazán furfangos és szép egy feladat, valamint hogy a fizika népszerűsítése és a fiatal tehetségek nevelése minden fizikával foglalkozó ember kötelessége.

Budapest, 2014. október

G. P., H. Gy., V. M.

Hogyan használjuk ezt a könyvet?

A könyv három nagy részre tagolódik. Az első részben a feladatok szövege található, többé-kevésbé a szokásos *tematikus* felosztás szerint; az eligazodást piktoqramok segítik. Bizonyos feladatokról azonban nem lehet egyértelműen eldönteni, hogy pl. a mechanika, a hőtan vagy az elektromágnesség témakörébe tartoznak-e; lehet, hogy mindháromba, esetleg egyikbe se! Ezeket mégis igyekeztünk egyfajta önkényes logika szerint besorolni. Az egyes témakörökön belül a feladatokat nem nehézségük, hanem tárgyuk szerint fűztük egymás után. Sok esetben egy-egy igazán nehéz problémát rávezetésként (didaktikai okokból) egy hasonló témájú, de egyszerűbb példa előz meg.

A problémák legnagyobb részét nem konkrét adatokkal, hanem paraméteres formában fogalmaztuk meg, de előfordulnak számszerű eredményt kérdező feladatok is. Az utóbbiakhoz szükséges természeti, csillagászati és anyagi állandókat a függelékben soroltuk fel. Ugyanitt – tömör formában – megadjuk azokat a *matematikai összefüggéseket*, amelyek a feladatok megoldása során hasznosnak bizonyulhatnak.

A feladatok többsége nem könnyű, némelyik határozottan nehéz. Az Olvasót természetesen arra biztatjuk, hogy próbálja meg önállóan megoldani, kibogozni a problémát. A legnagyobb öröm az lesz, ha ez sikerül! Ha mégsem, ne csüggedjen, hanem lapozza fel a könyv második részének megfelelő oldalát, ahol rövid *útmutatás* található. Az esetek többségében ez segít, bár nem nyújtja a teljes megoldást; a részleteket az Olvasónak kell végiggondolnia. Ha ez sikerül és ellenőrizni akarja gondolatmenete helyességét, vagy ha végképp feladta, és már csak a megoldásra kíváncsi, akkor a harmadik részben megtalálja azt. Vannak olyan problémák is a könyvben, amelyek még az itt közölt megoldással sem tekinthetők lezártak. A továbbgondolásra érdemes pontokra, irányokra – ahol ilyenek vannak – a megoldás végén (megjegyzés formájában) utalunk.

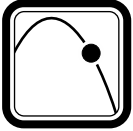
A rokon problémák (melyek megoldása hasonló gondolatmenetet igényel) általában egymás után következnek. Ha valamelyik feladat egy távolabbi sorszámú problémával hozható kapcsolatba, erre a tényre utalunk az útmutatásban vagy a megoldásban. A nehéz vagy különösen nehéz gondolatot igénylő feladatokat a sorszámuknál egy vagy két *csillaggal* is megjelöltük.

Ez a könyv *nem könnyű* olvasmány. A fiatal Olvasók könnyen találkozhatnak olyan matematikai vagy fizikai ismereteket igénylő feladatokkal, amelyekkel még nem rendelkeznek. Nekik a „lineáris” olvasás helyett azt tanácsoljuk, hogy nyugodtan csemegézzenek, válogassanak a problémák közül kedvükre valót, és a nehezebb feladatokra majd később, tanulmányaik előbbre haladtával térjenek vissza.

Jelölések

\mathbf{a}	vektormennyiség	λ	hullámhossz
$a = \mathbf{a} $	az \mathbf{a} vektor hossza	E	Young-modulus
Δf	az f fizikai mennyiség megváltozása	L	fázisátalakulási hő (fagyáshő, forráshő)
$f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$	az $f(x)$ függvény deriváltja	Q	hőmennyiség
$\dot{f}(t) \equiv \frac{df}{dt}$	az $f(t)$ fizikai mennyiség változási gyorsasága	W	munka
t, T	idő, periódusidő	P	teljesítmény
\mathbf{r}	helyvektor	E, W	energia
$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$	sebességvektor	T	hőmérséklet
$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$	gyorsulásvektor	S	entrópia
\mathbf{g}	nehézségi gyorsulás	c, C	fajhő, hőkapacitás
$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$	szögsebességvektor	q, Q	elektromos töltés
m, M	tömeg	I	elektromos áramerősség
F, N, K, S	erő, nyomóerő, kényszererő, súrlódási erő	R	ellenállás
M	forgatónyomaték	C	kapacitás
\mathbf{p}	lendület (impulzus)	L	önindukciós együttható
\mathbf{N}	perdület (impulzusmomentum)	M	kölcsönös indukciós együttható
Θ	tehetetlenségi nyomaték	λ, σ, ϱ	vonalmonti, felületi és térfogati töltéssűrűség
α	felületi feszültség	\mathbf{p}	elektromos dipólnyomaték
γ	gravitációs állandó	\mathbf{m}	mágneses dipólnyomaték
ϱ, λ	tömegsűrűség, vonalmonti sűrűség	\mathbf{E}	elektromos térerősség
σ	rugalmas feszültség	\mathbf{B}	mágneses indukcióvektor
μ	súrlódási tényező	$A, \Delta A$	felület, felületelem
D	rugóállandó	U	elektromos potenciál, feszültség
f	frekvencia	Ψ	elektromos fluxus
ω	körfrekvencia	Φ	mágneses fluxus

Feladatok



Kinematika

F. 1.* Négy csiga már igen hosszú ideje egyenes vonalban, egyenletesen mozog egy nagyon nagy sík felületen. Útvonalaik elhelyezkedése teljesen általános, vagyis bármelyik kettő pályája metszi egymást, de semelyik ponton nem halad át kettőnél több csiga-útvonal.

Tudjuk, hogy a 4 csiga összesen elképzelhető $4 \cdot 3/2 = 6$ találkozása közül 5 már ténylegesen megvalósult. Állíthatjuk-e biztosan, hogy a hatodik találkozás is létre fog jönni?

F. 2.* Két egyenletesen mozgó test pályája egy adott vonatkoztatási rendszerből nézve párhuzamos.

a) Tudunk-e olyan vonatkoztatási rendszert választani, amelyből szemlélve a két test pályája keresztezi egymást?

b) Ha van ilyen rendszer, és megfelelő kezdőfeltétellel indulnak a testek, akkor egyszerre érnek a kereszteződési ponthoz. Hogyan egyeztethető össze ez a találkozás a másik vonatkoztatási rendszerből nézve párhuzamos pályákkal?

(Mindkét vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, a testek sebessége nemrelativisztikus.)

F. 3. Anna egy 6 méter sugarú, egyenletesen forgó körhinta szélén ül. Béla a körhinta középpontjától 12 méterre a földön áll. Béla úgy látja, hogy Anna éppen feléje mozog 1 m/s sebességgel. Mekkora sebességgel látja ekkor mozogni Anna Bélát?

F. 4. Három kicsi csiga egy 60 cm oldalú szabályos háromszög egy-egy csúcspontjában helyezkedik el. A csigák 5 cm/perc nagyságú sebességgel elindulnak: az első csiga a második felé, a második a harmadik felé, a harmadik pedig az első irányába. A csigák mozgásuk közben mindvégig állandó nagyságú sebességgel a kiszemelt társ irányába haladnak.

Mennyi idő múlva és mekkora út megtétele után találkoznak? Hogyan írhatjuk le a pályájuk egyenletét? Mozgásuk során hányszor járják körül a találkozási pontjukat?

F. 5. Egy csónak állóvízben 3 m/s sebességgel képes haladni. Folyón átkelve a parthoz képest milyen irányban evezzen a csónakos, ha a lehető legrövidebb úton

akar átjutni az egyik partról a másikra? A folyó sebessége mindenhol ugyanakkora, értéke

- a) 2 m/s,
b) 4 m/s.

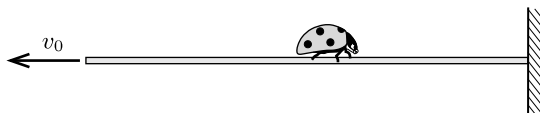
F. 6.* Egyenes, állandó szélességű csatorna egyik oldaláról a szemben lévő pont felé indul egy csónakos. A csatorna vize mindenhol v sebességű. A csónakos egyenletesen evez úgy, hogy állóvízben szintén v sebességgel haladna. Csónakját mindig a célpont irányába állítja, így a víz lefelé sodorja. Szerencsére sose fárad el. Mennyire sodorja le a víz a csónakost? Hová jut el? Milyen pályán mozog a parthoz viszonyítva?

F. 7.* Egyenes tengerparton, a partra merőleges irányban indul el, és állandó v sebességgel halad a csempészek hajója. A parti őrség naszádjá kezdetben d távolságra van a csempészektől, és ugyanakkor indul el a parttól, mint azok. Az őrszázad állandó nagyságú sebességgel mindig a csempészek felé halad, és a parttól éppen d távolságra éri utol a bűnözőket.

Hányszor nagyobb a parti őrség naszádjának sebessége, mint a csempészeké?

F. 8.* Alaszkai *aranyásók* népes csoportja egy széles folyóhoz érkezik. A túlsó parton – éppen szemben – egy hatalmas *aranyrögöt* pillantanak meg. Amelyikük először ér oda, az kapja meg a bányaművelés jogát. Milyen útvonalat válasszon Joe, ha ugyanolyan gyorsan tud evezni a vizen, mint gyalogolni a szárazföldön? Határozzuk meg Joe legkedvezőbb útvonalát, ha sebességének és a folyó sebességének aránya az *arany metszés* arányszámánál a) nagyobb, b) kisebb.

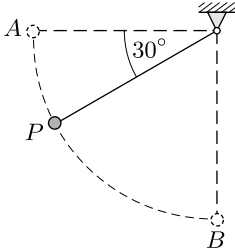
F. 9. Egy méter hosszú, „szupernyúlékony” pókhálószal egyik végét függőleges falhoz erősítette egy pók. A szálon valahol egy szegett szárnyú katicabogár ül. A szál másik végét egyenes $v_0 = 2$ cm/s sebességgel húzni kezdi az éhes pók, miközben ő maga nem mozdul el eredeti helyéről. Ugyanekkor a katica menekülni kezd a fal felé, a szálhoz képest állandó $v_1 = 5$ mm/s sebességgel. Vajon eléri-e a katica a falat?



F. 10.* Hogyan módosul az *előző feladat* megoldása, ha a pók nem marad ugyanazon a helyen, hanem a pókhálószal végével együtt mozog?

F. 11. Egy α hajlásszögű lejtő feletti P pontból a lehető legrövidebb idő alatt szeretnénk elérni a lejtőt úgy, hogy a ponton keresztül egyeneseket fektetünk, melyeken súrlódásmentesen mozoghatunk. Milyen irányú egyenes a legkedvezőbb?

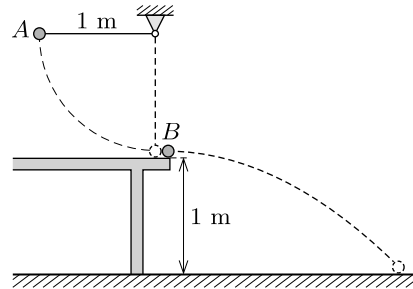
F. 12. Egy falióra nagymutatója másfélszer hosszabb, mint a kismutató. Éjfél után leghamarabb mikor változik a falióra mutatóinak végpontjai közötti távolság a leggyorsabban, és mikor a leglassabban?



F. 13. Egy vízszintesen kitérített fonálingát lökés nélkül elengedünk. Milyen görbén söpör végig az inga gyorsulásvektorának végpontja?

F. 14. Fonálingát derékszögben kitérítünk, majd lökés nélkül elengedünk. Az ábra szerinti AP vagy PB szakaszt teszi meg az inga rövidebb idő alatt?

F. 15. Egy 1 méter magas asztal szélén kicsiny acélgolyó nyugszik. Egy másik acélgolyót, amely egy 1 m-es fonálinga nehezeke, az ábrán látható módon kezdősebesség nélkül indítva nekiütköztetjük az asztalon levőnek. A golyók tömege egyforma, ütközésük rugalmas.

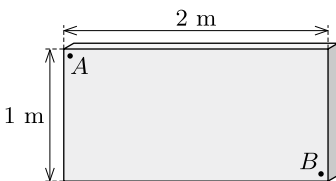


a) Melyik golyó mozog hosszabb ideig?

b) Melyik golyó tesz meg hosszabb utat?

(A B jelű golyó mozgását csak a földet érés pillanatáig vizsgáljuk.)

F. 16. Egy függőlegesre állított rajztáblába szögeket verünk. Az ábrán látható A pontból elejtünk egy kicsiny acélgolyót, amely a szögeken rugalmasan pattogva eljut a B pontba. (Az ábrán a szögek nem láthatók!)



a) Lehetséges-e, hogy a golyó hamarabb jut el az A pontból a B pontba, mintha a legrövidebb úton, vagyis az AB egyenesen súrlódásmentesen csúszott volna?

b) Eljuthat-e a golyó 0,4 másodpercnél hamarabb a B pontba?

F. 17. Egy hosszú, a vízszinteshez képest α hajlásszögű lejtőre bizonyos magasságból függőlegesen ráejtünk egy kicsiny, rugalmas labdát. Milyen szabályszerűséget találhatunk a labda egymást követő pattanási helyeinek távolsága között? (Az ütközéseket tekintjük tökéletesen rugalmasnak, és a közegellenállást hanyagoljuk el!)

F. 18. A v_0 kezdősebességgel ferdén elhajított test légüres térben (pl. a Holdon) parabolapályán mozog. Milyen messze van ennek a parabolának a fókuszpontja az elhajítás helyétől? Hány fokal hajítási szög esetén van a fókuszpont az elhajítás helyével azonos magasságban?

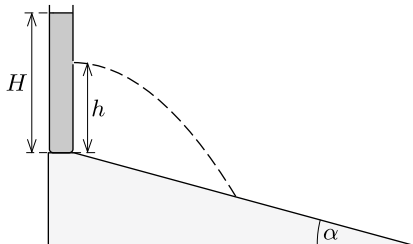
F. 19.* Egy h magas toronyból adott v_0 nagyságú kezdősebességgel különböző irányokba hajíthatunk el pontszerű testeket. Legfeljebb mekkora (vízszintesen mért) távolságra juthatnak el a testek, ha a légellenállás nem számottevő?

F. 20.* Milyen meredeken hajíthatunk el egy követ, ha azt szeretnénk, hogy a kő mindvégig távolodjon tőlünk?

F. 21.* Képzeljünk el egy szökőkutat, amelynek kicsiny szórófeje a szökőkút medencéjének vízfelszínén található. A szórófej félgömb alakú, amin nagyon sok, egyenletesen elosztott kicsiny lyuk van, melyeken minden irányban ugyanakkora sebességgel lövell ki a víz. Milyen alakú lesz a kiáramló vízugarakból képződő vízbura? (Feltehetjük, hogy a vízugarak nem találkoznak.)



F. 22.* Egy hosszú, α hajlásszögű lejtő tetején álló henger alakú edényben H magasságban áll a víz. Az edény aljához képest milyen h magasságban kell lyukat fúrunk a henger oldalán, ha azt akarjuk, hogy a kilövellő vízugar a lehető legtávolabb érje el a lejtőt, és mekkora ez a távolság?



F. 23.* A földön egy 20 cm átmérőjű fatörzs fekszik vízszintes helyzetben. Legalább mekkora sebességgel kell elrugaszkodnia egy szöcskének a földről, hogy át tudja ugrani a fatörzset? (A légellenállást hanyagoljuk el!)

F. 24. Oldalról fényképezzük az előttünk elhaladó kerékpár első kerekét. A véges expozíciós idő miatt a küllők elmosódtoknak látszanak. Vannak azonban a képen élesen látszó pontok is! Hol vannak ezek a pontok? (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a kerékpár küllői sugárirányúak.)

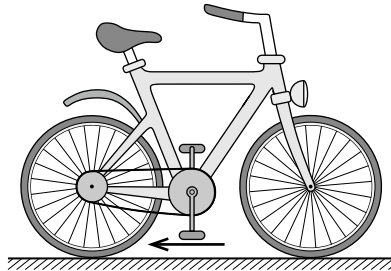
F. 25.* Milyen egy kerékpár küllős kerekének képe a célfotón? A célfotó úgy készül, hogy a célvonal nagyon keskeny sávjáról nagyon sűrűn egymás után elektronikus kamerával felvételeket készítenek, majd ezeket egymás mellett, a kerékpár várható haladási sebességének megfelelő távolságban helyezik el. (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a kerékpár küllői sugárirányúak.)

F. 26.** Egy 50 cm sugarú kocsikeréknek 12 küllője van. A kerék tisztán gördül, tengelyének sebessége 15 m/s. Legalább mekkora sebességgel kell kilőnünk egy 20 cm hosszú nyílveszőt, hogy az a küllők között átrepülhessen? (A nyílvesző függőleges mozgását és a küllők vastagságát elhanyagolhatjuk.)

F. 27.* A járdán állva éppen csak annyira fogjuk a kerékpárunkat, hogy az ne tudjon eldőlni. A pedál hajtókarja függőleges. Barátunk a kerékpár mellett térdelve az alsó helyzetében levő pedált a kezével a hátsó kerék irányába kezdi tolni.

- Merrefelé mozdul el az alsó helyzetű pedál a talajhoz képest?
- Merre indul el a kerékpár?

(A súrlódás elegendően nagy ahhoz, hogy a hátsó kerék ne csússzon meg.)





Tömegpontok dinamikája

F. 28. Vízszintes asztallap szélén áll egy „kis micsoda”. Meglökjük úgy, hogy eljusson az 1 méter széles asztal túlsó széléig. El is jut oda 2 másodperc alatt. Van-e kereke ennek a kis micsodának?

F. 29. Ha egy versenyautó bizonyos idő alatt x liter üzemanyag felhasználásával álló helyzetből 100 km/óra sebességre gyorsul, akkor további $3x$ liter benzint felhasználásával növelheti sebességét 200 km/óra. Mindezt a rajtnál álló egyik néző, Péter számolta ki, aki megtanulta fizikaórán, hogy a mozgási energia a sebesség négyzetével arányos. (Feltételezte, hogy a rajtnál a motor által leadott energia főként az autó mozgásba hozására fordítódik, a légellenállást és egyéb súrlódásokat elhanyagolta.)

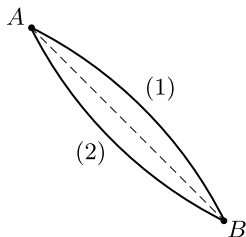
A versenypálya mellett egy vasútvonal vezet. A rajtot egy – az autóversenyzők haladási irányával ellentétesen haladó – 100 km/óra sebességű vonat ablakából végignézte Pál is, aki szintén tanult fizikát. Ő így érvelt: ha az első szakaszban x liternyi üzemanyag felhasználásával a sebesség 100-ról 200 km/óra-ra nőtt, akkor a második szakaszban a 200-ról 300 km/óra-ra felgyorsuló autónak

$$\frac{300^2 - 200^2}{200^2 - 100^2} = \frac{5}{3}x$$

litert kell fogyasztania.

Vajon kinek van igaza, Péternek vagy Pálnak?

F. 30. Egy kis test az ábrán látható két lejtőn csúszhat le az A pontból a B pontba. A pályák függőleges síkban fekvő körívek, amelyek szimmetrikusak az A és B pontokon átmenő, a vízszintessel 45° -os szöget bezáró egyenesre. (A test mozgása során sehol nem válik el a pályától.)

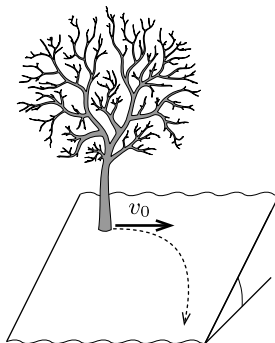


a) Melyik pályán ér le hamarabb a kis test, és mit mondhatunk a végsebességekről, ha nincs súrlódás?

b) Mit állíthatunk a végsebességekről akkor, ha a súrlódás nem hanyagolható el, és a súrlódási együttható mindkét pályán ugyanakkora?

F. 31.* Nagy kiterjedésű, síknak tekinthető lejtős domboldalon áll két fiú. A talaj annyira jeges, hogy már a legkisebb lendületvétel után egyenesen sebességgel csúsznának lefelé.

Az egyikük (egy fához kapaszkodva) tréfából $v_0 = 1 \text{ m/s}$ vízszintes kezdősebességgel meglöki a társát, aki változó nagyságú és változó irányú sebességgel lecsúszik a lejtőn. Mekkora lesz a végsebessége, ha a légellenállás elhanyagolható, és a súrlódás független a sebességtől?



F. 32. Egy kerékpáros „teljes erőbedobással” lejtőn felfelé $v_1 = 12 \text{ km/h}$, ugyanezen lejtőn lefelé $v_2 = 36 \text{ km/h}$ sebességgel tud haladni. Mekkora a kerékpáros legnagyobb sebessége vízszintes úton, ha a maximális erő kifejtése független a sebességtől?

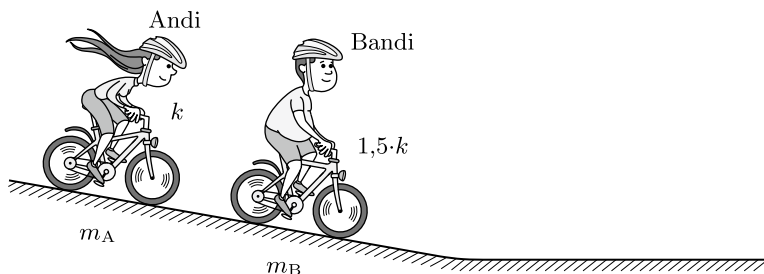
A kicsit pongyolán megfogalmazott „erőkifejtés” szó egy fizikus értelmezésében jelentheti

a) a kerékpáros által kifejtett (és azt a hajtókarok, a láncok és a lánc által a kerekhez továbbított) *erő nagyságát*;

b) a kerékpáros mechanikai *teljesítményét*.

Gondoljuk végig a feladatot mindkét értelmezésben!

F. 33.* Andi és Bandi „gurulásos versenyt” rendeznek egy elegendően hosszú lejtőn. Mindkettőjük biciklijé ugyanolyan, és egyikük sem hajtja a kerékpárját. Andi 50 kg, Bandi 100 kg tömegű, a kerékpár tömege pedig 10 kg. Bandi légellenállása (a túlsúlyával összefüggő nagyobb „mérete” miatt) másfélszer akkora, mint – ugyanakkora sebesség esetén – Andié. Melyikük gurul messzebbre a lejtőhöz csatlakozó vízszintes úton?



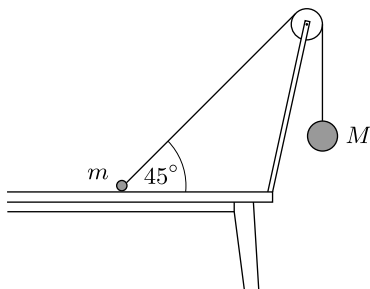
(Feltételezhetjük, hogy a kerékpárosokat a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő, továbbá a csapágyak súrlódása és a gördülő ellenállás fékezi. Az utóbbiakat kezelhetjük úgy, mintha valamekkora μ „effektív” súrlódási együtthatónak megfelelő csúszó súrlódás lépne fel.)

F. 34. Ostornyélen egyik végére vékony cérnaszálon elenyésző tömegű tollpíhét kötünk, és körbeforgatjuk. Milyen pályán mozog a píhe?

F. 35. Egy apró gyöngy mozgását vizsgáljuk vízben. A gyöngyöt a sebességével ellentétes irányú, annak nagyságával arányos (Stokes-féle) közegellenállási erő fékezi, ezért ha a gyöngyöt a víz alatt kezdősebesség nélkül elengedjük, az rövid idő után állandó v_1 sebességgel süllyed. Egy kísérletben a gyöngyöt v_2 nagyságú, vízszintes irányú sebességgel indítjuk el.

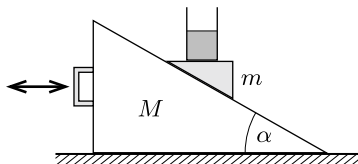
- Mekkora lesz mozgása során a gyöngy legkisebb sebessége?
- Milyen irányban indítsuk $v_2 < v_1$ sebességgel a gyöngyöt, hogy sebessége végig növekedjen?

F. 36. Az m és M tömegű, gömb alakú testeket elhanyagolható tömegű csigán átvett súlytalan fonál köti össze. A két testet az *ábrán* látható helyzetben tartjuk, és egy adott pillanatban mindkettőt elengedjük. Az M tömeg sokkal – pl. ezerszer – nagyobb, mint m . Az asztallap és az m tömegű test között a súrlódás elhanyagolható. Elválik-e az elengedést követő pillanatban az m tömegű test az asztallaptól?



F. 37.* Egy α hajlásszögű, nagyméretű lejtőn súrlódásmentesen csúszik le egy ék, melyen egy (az ékhez rögzített) pohár, abban pedig víz található. (A lejtő tömege M , az ék, a pohár és a víz együttes tömege pedig m .) Milyen szöget fog bezárni a vízfelszín (kellően hosszú idő múlva) a lejtő síkjával, ha

- a lejtő rögzített,
 - a lejtő szabadon mozoghat egy vízszintes síklapon?
- Vizsgáljuk meg az $m \gg M$ esetet is!

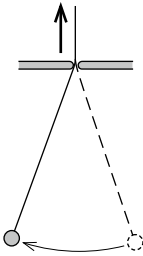
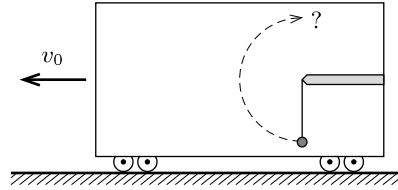


Ki tudjuk-e lötyögtetni a vizet a pohárból, ha a lejtőt a hozzáerősített fogantyúnál fogva alkalmas ütemben és mértékben vízszintesen megrázzuk? (Az ék nem emelkedik fel a lejtőről.)

F. 38. Határozzuk meg *fizikai megfontolások* felhasználásával néhány ismert síkgörbe görbületi sugarát a görbék jellegzetes pontjaiban, mint például

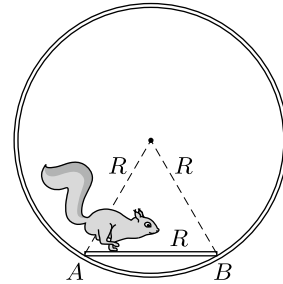
- egy f fókusz távolságú parabola görbületi sugarát a csúcspontjában;
- a és b féltengelyű ellipszis görbületi sugarát a nagytengely végpontjában;
- a hiperbola görbületi sugarát a szimmetriatengelyének pontjaiban;
- egy A amplitúdójú, λ hullámhosszúságú szinuszcörbe görbületi sugarát a hullám „tetőpontjában”.

F. 39. Vonatszerelvények ütközését vizsgáló próbapályán v_0 sebességgel haladó vasúti kocsiiban hajlékony fonálon súlyos test függ. A kocsi bizonyos ideig igen erősen, de egyenletesen fékezve megállítják. Átfordul-e az inga a felső holtpontján?

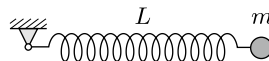


F. 40.* Egy fonálinga a mennyezetről lóg le, és a fonala egy lyukon keresztül felmegy a padlásra. Ott valaki a kezével tartja és nagyon lassan felfelé húzza a fonál végét. Megváltozik-e az inga lengéseinek amplitúdója (legnagyobb vízszintes kitérése), és ha igen, hogyan?

F. 41. Egy rögzített tengely körül könnyen forgó R sugarú mókuserékbe R hosszúságú létrát szereltünk. Egy olyan pillanatban, amikor a kerék éppen nyugalomban van és a létra vízszintes, a mókus elindul az A pontból, és úgy fut át a létrán a B pontba, hogy közben a kerék mozdulatlan marad. Hogyan kell a mókusnak mozognia? Mennyi idő alatt fut át a létrán, ha $R = 0,5$ méter?



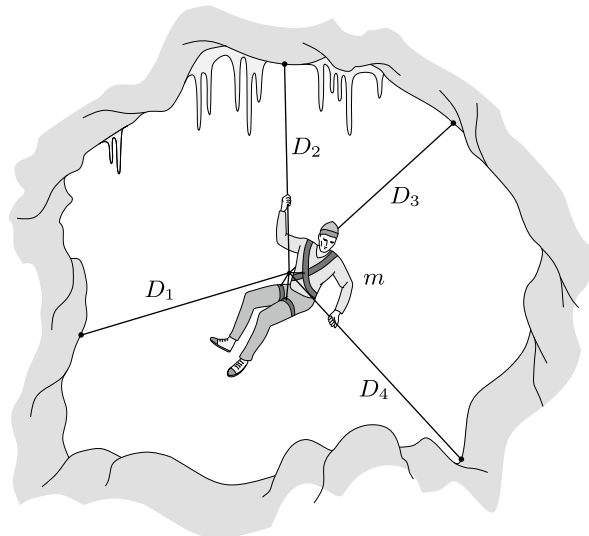
F. 42.* Egy könnyű, laza rugó egyik végét csuklósan rögzítjük, a másik végére pedig egy m tömegű testet erősítünk, majd a rugót nyújtatlan állapotában, vízszintes helyzetből elengedjük.



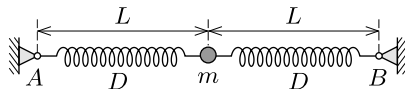
Mekkora lesz a rugó hossza abban a pillanatban, amikor éppen függőleges helyzetű? (A rugó nyújtatlan hossza L , direkción állandója D . A rugó „lazasága” annyit jelent, hogy $mg \gg DL$. A rugóerő mindvégig arányos a megnyúlással.)

F. 43.* Egy cirkuszi artistából lett sziklamászó ideális pihenőhelynek látszó barlanghoz érkezik. Úgy dönt, hogy egy-egy különlegesen nyúlékony gumikötéllal a sziklafalba erősített négy kampóhoz kapcsolja magát, és így tölti az éjszakát. A gumikötelek eredeti hossza a megnyúlt hosszhoz képest elhanyagolható, rugalmas viselkedésük a $D_1 = 150 \text{ N/m}$, $D_2 = 250 \text{ N/m}$, $D_3 = 300 \text{ N/m}$ és $D_4 = 400 \text{ N/m}$ rugóállandókkal jellemezhető. A sziklamászó tömege $m = 70 \text{ kg}$.

Mekkora a sziklamászó egyensúlyi helyzet körüli kis rezgéseinek periódusideje, és függ-e a kitérés irányától?



F. 44. Egy m tömegű test vízszintes síkban súrlódásmentesen mozoghat. A testet két egyforma, D rugóállandójú rugóval az ábrán látható A és B pontokhoz kapcsoltuk. Ekkor a rugók nyújtatlanok, hosszuk L .



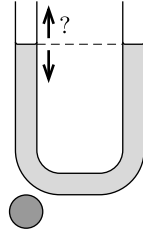
a) Mekkora erő hat a testre, ha az AB szakaszra merőlegesen x távolsággal kitérítjük? Hogyan közelíthető ez az erő kis kitérések esetén?

b) Mekkora a rezgésidő 2 cm-es amplitúdó esetén, ha 1 cm-es amplitúdónál a rezgés periódusideje 2 s, és $AB \gg 1 \text{ cm}$?



Gravitáció, bolygómozgás

F. 45.* Egy U-alakú csőben folyadék van egyensúlyban. Ezután a bal oldali szár alá igen nagy tömegű golyót helyezünk. Hogyan változnak meg a folyadékszintek?



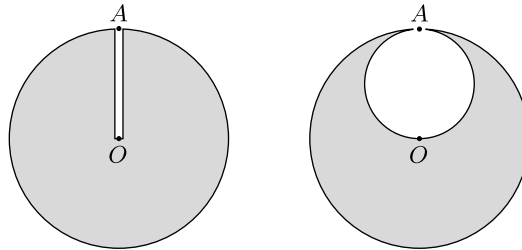
F. 46. Vajon hol nagyobb a gravitációs gyorsulás, a Föld felszínén, vagy 10 km mélyen a föld alatt? (A gömbszimmetrikusnak tekinthető Föld átlagsűrűsége $5,5 \text{ g/cm}^3$, a földkéreg pedig 3 g/cm^3 .)

F. 47. A Kozmikus Baleseteket Kivizsgáló Intézet (KOBALKIVI) a következő rövid jelentést írta egyik fizikus szakértőjének:

„A titánfaló kicsi zöld emberkék egyik kutató-űrhajója rátalált egy tökéletesen gömb alakú kisbolygóra. Az A pontból keskeny próbafuratot készítettek, amely eljutott a kisbolygó O középpontjáig. Így megállapították, hogy a bolygót teljes egészében homogén titán alkotja. Ekkor történt az első szerencsétlenség: egy kicsi zöld emberke a felszínről a próbafuratba esett, lényegében fékezés nélkül az O pontig zuhant, és ott halálra zúzta magát.

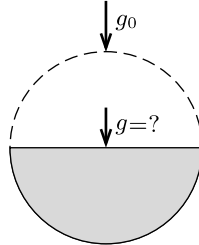
A munka azonban folytatódott, a kicsi zöld emberkék megkezdték a titán titkos kitermelését, melynek során a kisbolygó belsejében egy AO átmérőjű, gömb alakú üreget hoztak létre. Ekkor történt a második baleset: egy másik zöld emberke – szintén az A pontból – az O pontig zuhant, és hasonló módon összezúzta magát.”

A KOBALKIVI kérdése alapján a szakértőnek választ kellett adnia arra, hogy a két szerencsétlenül járt emberke esetében mekkora volt a becsapódási sebességüknek, illetve az esési idejüknek az *aránya*. Milyen számértékeket adott meg a szakértő a jelentésében?



F. 48.* Az *előző feladatban* szereplő titánfaló kis zöld emberkék tovább folytatták a munkát. Környezetromboló tevékenységük következtében lassan elfogyott a kisbolygó fele, a maradék szabályos félgömb alakúvá vált. (A kitermelt anyagot elszállították a bolygóról.)

Vajon mekkora gravitációs gyorsulás mérhető a maradék félgömb körlapjának közepén, ha az eredeti (gömb alakú) kisbolygó felületén $g_0 = 9,81 \text{ cm/s}^2$ volt a gravitációs gyorsulás?



F. 49.* A titánfaló kis zöld emberkék egy 10 km sugarú, homogén tömegeloszlású, titánból álló kisbolygót találtak. Megkezdték a kisbolygó anyagának kibányászását és elszállítását.

A fém kitermelését úgy végezték, hogy a kisbolygó egyenlítője mentén egy 1 m széles sávban mélyítették az aknákat egészen addig, míg végül teljesen kettévágták a kisbolygót. Ekkor következett be a baleset: a két félgömböt elválasztó dúcfák eltörték, és a kisbolygó összeroskadt.

A KOBALKIVI (Kozmikus Baleseteket Kivizsgáló Intézet) szakértői azt a feladatot kapták, hogy számítsák ki, *összességében* mekkora nyomóerőt kellett volna a dúcfáknak kibírni. Segítsünk nekik!

F. 50.* Ha valaki egy égigérő, majdnem a földig lelógó, mozdulatlan madzagot figyelne meg, egyértelmű UFO-bizonyítéknak kellene tekintenie, vagy esetleg találhatna rá az ismert fizikai törvényekkel összhangban álló „földi” magyarázatot? Milyen hosszú lenne ez a madzag?

F. 51.** Adott sűrűségű és térfogatú, összenyomhatatlannak tekinthető gyurmadarabbal szeretnénk a tér egy adott pontjában maximális gravitációs gyorsulást létrehozni. Milyen alakú testet „gyúrjunk” ehhez?

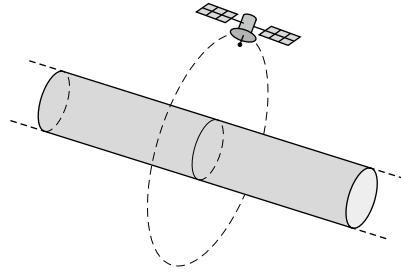
F. 52. A régiek úgy gondolták, hogy a Föld sík. Képzeljük el, hogy a Föld valóban nem R sugarú gömb, hanem a végtelenig kiterjedő, H vastagságú lemez. Mekkora H vastagság esetén tapasztalnánk, hogy a gravitációs gyorsulás ugyanakkora, mint amekkora a gömb alakú Föld felszínén? (A két „Föld”-modellben a sűrűségeket tekintsük állandónak és egymással egyenlőnek.)

F. 53. Nevenincs csillag egyik bolygója hosszú, henger alakú. A bolygó átlagsűrűsége ugyanakkora, mint a Földé, sugara is megegyezik a Föld sugarával, tengely körüli forgásának periódusideje pedig éppen 1 nap.

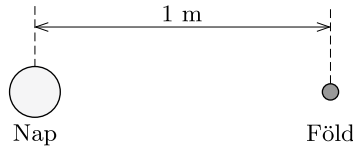
a) Mekkora az első kozmikus sebesség ennél a bolygónál?

b) A bolygó felszíne felett milyen magasan keringenek az ottani távközlési szinkronműholdak?

c) Mekkora a második kozmikus sebesség ennél a bolygónál?



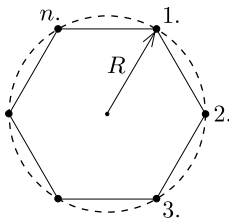
F. 54. Ha a Naprendszert arányosan lekicsinyítenénk úgy, hogy a Nap-Föld átlagos távolság 1 méter lenne, de az anyagsűrűségeket változatlanul hagynánk, mekkora lenne egy év?



F. 55. Tompkins úr¹ álmában Furcsavilágban járt, ahol a fizika törvényei majdnem ugyanazok, mint nálunk, „csupán” a tömegvonzás tér el a megszokott Newton-törvénytől. Reggel felébredve Tompkins úr visszaemlékezett, hogy Furcsavilág egyetlen „Napja” körül számos bolygó kering, melyekre a következő három „Kepler-törvény” érvényes:

1. A bolygók pályája ellipszis, melynek *középpontjában* a Nap áll.
2. A bolygók *vezérsugara* a mozgás során ... (a folytatást sajnos elfelejtette Tompkins úr).
3. Mindegyik bolygó keringési ideje (az ellipszis kis- és nagytengelyének hosszától függetlenül) *ugyanakkora*, 1 „év”.

Vajon hogy néz ki a furcsavilági fizikakönyvekben a gravitáció törvénye, és mit állít a második „Kepler-törvény”?



F. 56.* Egy szabályos n -szög csúcsaiban m tömegű, pontszerű testek nyugszanak. Hogyan mozog a rendszer, ha a testek között csak a gravitációs erő hat? Mennyi idő múlva ütköznek össze a testek, ha $n = 2, 3$, illetve 10 ? Vizsgáljuk meg az $n \gg 1$, $m = M_0/n$ határesetet is (itt M_0 a testek adott nagyságú össztömege)!

¹George Gamow: *Tompkins úr kalandjai a fizikával* c. könyvének főszereplője

F. 57. Rakétával szeretnénk elhagyni a Föld vonzáskörét. A főhajtómű teljes üzemanyaga éppen egy kicsivel kevesebb a szükségesnél, emiatt a segédhajtóművet is működtetnünk kell. Mikor érdemes bekapcsolnunk a csak igen rövid ideig működőképes segédhajtóművet: a felszálláskor, vagy amikor a rakéta a Földhöz képest már majdnem megállt, esetleg mindegy?

F. 58.* a) Legalább mekkora kezdősebesség szükséges egy műhold körpályára állításához?

b) Hányszor nagyobb energia szükséges a poláris pályán keringő műhold indításához, mint az ekvatoriális pályán keringő, ugyanakkora tömegű műholdéhoz?

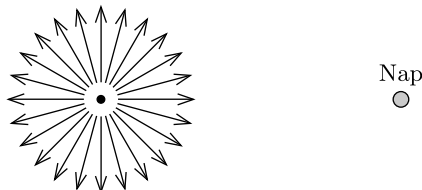
c) Mekkora kezdősebesség szükséges egy űrszonda fellövésékor a Föld vonzásának elhagyásához?

d) Mihez kell nagyobb indítási energia: ahhoz, hogy egy űrszondát a Napba juttassunk, vagy ahhoz, hogy az űrszonda elhagyja a Naprendszert? (A Napba juttatásnál az egyetlen rövid gyorsítással indított szonda mellett gondoljunk a többször bekapcsolható hajtómű lehetőségére is!)

F. 59. Legalább mekkora és legfeljebb mekkora sebességgel csapódhatna a Földbe egy, a Nap körül keringő üstökös, ha nem lenne levegő a Föld körül?

F. 60. Egy gömb alakú bolygóról úgy lövünk ki egy mesterséges holdat, hogy annak sebességvektora a bolygóra való visszaérkezéskor párhuzamos a kilövési sebesség vektorával. A kilövési és a visszaérkezési pont szögtávolsága α . Mekkora időt tölt az űrben a mesterséges hold, ha a bolygó felszíne közelében körpályán keringő műhold keringési ideje T_0 ? Legfeljebb mekkora távolságra jut el a műhold a bolygó felszínétől, ha a bolygó sugara R ? Vizsgáljuk meg az $\alpha \rightarrow 0$ határesetet! (A bolygó nem forog.)

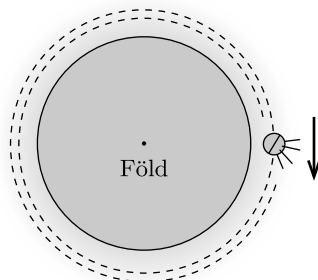
F. 61.** Csillagászok felfedezik, hogy parabolapályán a Nap felé közeledik két egyforma tömegű üstökös. Megállapítják, hogy impulzusnyomatékaik azonos nagyságú, de ellentétes irányú vektorok.



A két üstökös a pályá napközeli pontjában összeütközik, és különböző irányú, de azonos nagyságú sebességgel induló darabokra esik szét. Milyen alakú a törmelékdarabok további pályájának burkolófelülete?

F. 62.** Gravitációs parittyahatás segítségével (egyetlen bolygó lendítő hatását kihasználva) szeretnénk elérni, hogy egy űrszonda elhagyja a Naprendszeret. Hány csillagászati egységre levő bolygót célszerű választanunk, ha a legkisebb indítási sebességgel szeretnénk megvalósítani a programot? Van-e ezen pályasugárnál (vagy ennek közelében) ténylegesen bolygó a Naprendszerben? (A bolygók pályáját tekintjük azonos síkban fekvő köröknek. A problémát tárgyalhatjuk abban az elfogadható közelítésben, hogy a szondára ható erők közül egy-egy bolygó közelében csak a bolygó gravitációs hatását, a bolygótól távol pedig csak a Nap vonzóerejét vesszük figyelembe.)

F. 63.* Pályafutásuk végén a sorsukra hagyott műholdak a légkör felső rétegeiben rájuk ható közegellenállási erő hatására fokozatosan veszítenek energiájukból, és végül a sűrűbb légrétegekbe érve elégnék. Belátható, hogy az eredetileg körpályán keringő műholdak mindvégig közelítőleg körpályán mozognak, miközben a pályasugaruk lassan csökken. Az egyik, féltonnás műhold közelítőleg körpályán kering a Föld körül, amikor magára hagyják. (A műholdra ható közegellenállási erőt $c\rho v^2$ alakban adhatjuk meg, ahol $c = 0,23 \text{ m}^2$, ρ a levegő sűrűsége a műhold magasságában, v pedig a műhold sebessége.)



a) Fékeződik vagy felgyorsul a műhold a közegellenállási erő hatására? Hogyan magyarázható a válasz dinamikai szempontból?

b) A közegellenállási erő és a műhold pályamenti gyorsulása között egy egyszerű összefüggés állapítható meg. Hogy szól ez?

c) Mekkora a levegő sűrűsége 200 km magasságban, ha ebbe a magasságba érve a műhold pályasugara egy fordulat alatt 100 m-rel csökken?

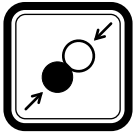
F. 64.** Közismert csillagászati tény, hogy a Hold (nagyjából) mindig ugyanazt az oldalát mutatja a Föld felé. Ez az érdekesség nem véletlen egybeesés, hanem a Föld és a Hold között ható árapályerők közvetlen következménye: az árapályerők ugyanis az idők folyamán folyamatosan fékeztek a Hold tengely körüli forgását egészen addig, amíg annak periódusideje egyenlővé vált a Föld körüli keringésének periódusidejével. Ugyanezen ok miatt a Föld tengely körüli forgása is folyamatosan lassul, miközben a Hold keringési sebessége egyre csökken.

a) Becsüljük meg, hogyan aránylik egymáshoz a Föld és a Hold mozgási energiájának csökkenési üteme!

b) Az Apollo-program keretében lézertükröt is juttattak a Holdra. Az ezzel végzett igen pontos mérések szerint a Hold évente 3,8 cm-t távolodik a Földtől. A mért adat alapján becsüljük meg, mennyit változik a földi nap hossza évente!

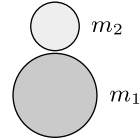
c) Ha a Föld–Hold rendszer zavartalanul folytathatná mozgását, az árapályerők fékező hatása miatt elegendően hosszú idő elteltével a Föld is mindig ugyanazt az oldalát mutatná a Hold felé, azaz a két égitest forgása és egymás körüli keringése szinkronizálódna. (Valójában a Nap előbb fúvódik fel vörös óriássá, és kebelezi be a belső bolygókat.) Hányszorosára növekedne a teljes szinkronizálódásig a földi nap hossza és a Föld–Hold távolság?

(Feltételezhetjük, hogy a Hold pályája mindvégig közelítőleg kör marad, a Nap árapálykeltő hatásától pedig tekintsünk el!)



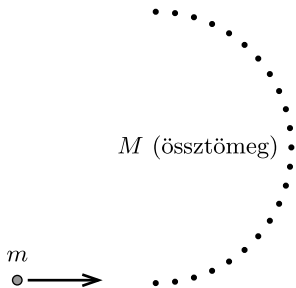
Pontrendszerek

F. 65. Egy m_1 és m_2 tömegű rugalmas labdát egymás fölé helyezünk (a labdák között kicsiny rést hagyva), majd h magasságból elengedjük őket. (Feltehetjük, hogy h sokkal nagyobb a labdák átmérőjénél.)



a) Milyen tömegarány esetén jut a rendelkezésre álló energiából a legtöbb a felső labdának?

b) Legfeljebb milyen magasra repülhet a felső labda?

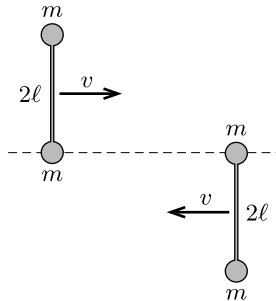


F. 66.* Egy légpárnás asztalon N egyforma kicsiny korong nyugszik egy félkör mentén, egymástól egyenlő távolságra. A korongok össztömege M . A félkör átmérőjére merőlegesen egy másik, m tömegű korongocskát szeretnénk indítani úgy, hogy az mind az N korongon tökéletesen rugalmasan végigpattogva végül az eredeti haladási irányával ellentétes irányban távozzon. (A súrlódás mindenhol elhanyagolható.)

a) Az $N \rightarrow \infty$ határesetben legalább mekkorának kell lennie az M/m tömegaránynak ahhoz, hogy tervünk sikerüljön?

b) Az a) kérdésben kapott kritikus tömegarány esetén mekkora az m tömegű korong végső és kezdeti sebességének aránya?

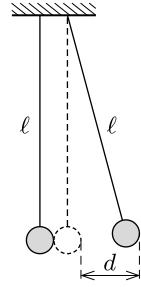
F. 67. Kisméretű, m tömegű korongokból és elhanyagolható tömegű, 2ℓ hosszú rudakból két egyforma „súlyzót” készítettünk. A súlyzókat vízszintes, légpárnás asztalra helyezük, majd az ábrán látható módon (forgás nélkül) v sebességgel egymás felé indítjuk őket.



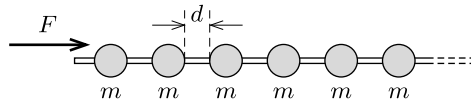
Írjuk le a súlyzók mozgását az ütközés után! Ábrázoljuk a súlyzók tömegközéppontjának sebességét az idő függvényében!

F. 68. Közvetlenül egymás mellé felfüggesztett két egyforma golyó az *ábra* síkjában lenghet ℓ hosszúságú fonálon. Az egyik golyót d távolságra kimozdítjuk és elengedjük ($d \ll \ell$). A golyók rugalmatlanul ütköznek, sebességük a tömegközépponti rendszerben minden ütközéskor k -szorosára csökken ($0 < k < 1$ az ütközési szám).

Hogyan mozognak a golyók? Mekkora lesz a lengések amplitúdója sok ütközés után?



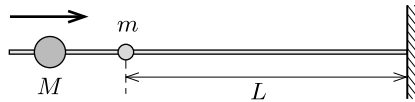
F. 69. Egy hosszú, vízszintes drótra nagyon sok egyforma, m tömegű gyöngyszemet fűztünk fel egymástól azonos, d távolságra. A gyöngyszemek kezdetben nyugalomban vannak, és súrlódásmentesen mozoghatnak.



Az egyik gyöngyöt állandó F erővel gyorsítani kezdjük, és ezt az erőt a továbbiakban is fenntartjuk. Mekkora lesz hosszú idő múlva a gyorsított gyöngy sebessége, illetve a „lökéshullám” elejének sebessége, ha a gyöngyök ütközése

- tökéletesen rugalmatlan,
- tökéletesen rugalmas?

F. 70.** Egy falból kiálló, vízszintes, súrlódásmentes rúdra két kisméretű golyó van felfűzve. Az egyik, M tömegű, nehéz golyó közeledik a fal felé, a másik, m tömegű, könnyű golyó a faltól L távolságra nyugalomban van. Rugalmas ütközésük után az m tömegű golyó a fal felé csúszik, azzal rugalmasan ütközik, majd elindul az M tömegű golyó irányába, azzal ismét ütközik és a folyamat ismétlődik.



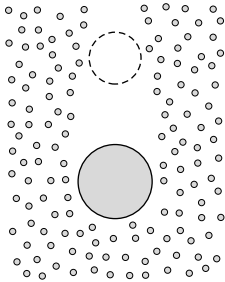
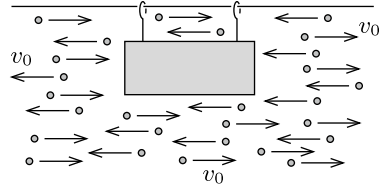
Mekkora távolságra közelíti meg az M tömegű golyó a falat? (Feltehetjük, hogy $m \ll M$, és a golyók pontszerűek.)

F. 71.* Egy „gondolatkísérletben” egy hengeres test súrlódásmentesen mozoghat a vízszintes szimmetriatengelyével párhuzamos egyenes mentén. A test körül vízszintesen, jobbra-balra v_0 sebességű, parányi részecskék mozognak az *ábra* szerint. Ezek a részecskék lehetnek pl. apró golyócskák, de akár egy nagyméretű tartályban lévő, adott hőmérsékletű gáz molekulái is. (A gázmolekulák mozgását – az egyszerűség kedvéért – egyszemélyesnek tekintjük, és a sebességük nagyságát az átlagsebességgel helyettesítjük.)

A részecskék a henger jobb oldali körlapjával tökéletesen *rugalmasan*, a bal oldali körlappal pedig tökéletesen *rugalmatlanul* ütköznek. (A rugalmatlan ütközések után a részecskék nem tapadnak a hengerhez.)

Mekkora lesz a henger sebessége

- a) viszonylag hosszú idő múlva;
- b) nagyon hosszú idő múlva?



F. 72.* Sűrű ködben nagyon sok, igen parányi vízcsepp „lebeg” a levegőben, sebességük elhanyagolhatóan kicsi. Az egyik vízcsepp, amelyik valamennyivel nagyobb méretű a többinél, elkezd süllyedni, és azokat a lebegő ködcseppeket, amelyeket utolér, magába olvasztja. Az egyre „kövérebb” (gömb alakúnak tekinthető) vízcsepp egyenletes gyorsulással mozog, jóllehet a növekvő sebességét a közegellenállási erő is fékezi. Legfeljebb mekkora lehet a gyorsulása?



Merev testek dinamikája

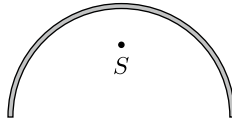
F. 73. Vízszintes helyzetből elengedünk egy fonálingát és egy homogén rúd-
ingát. Hogyan aránylik egymáshoz az ingák lengésideje, ha a hosszuk megegyezik?



F. 74. Egy úrhajós úrruhába öltözve a Földön $v_0 = 1$ m/s sebességgel tud
a „legkényelmesebben” sétálni. Becsüljük meg a kényelmes sétálás sebességét a
Holdon, ahol a nehézségi gyorsulás a földi érték $1/6$ része!

F. 75. Ha Nagy-Britanniában megváltoztatnák a közlekedés rendjét, és bal
oldaliról jobb oldali közlekedésre térnének át, akkor egy nap hossza növekedne,
csökkenne vagy változatlan maradna?

F. 76.* Karcsi elsőéves egyetemi hallgató, aki matematikából éppen az integrál-
számítást tanulja. Gyakorlásként egy R sugarú, homogén anyageloszlású félkörív
tömegközéppontjának helyét kell meghatároznia.

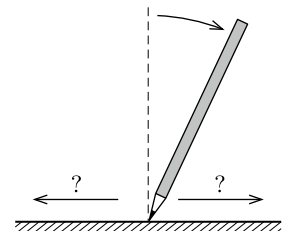


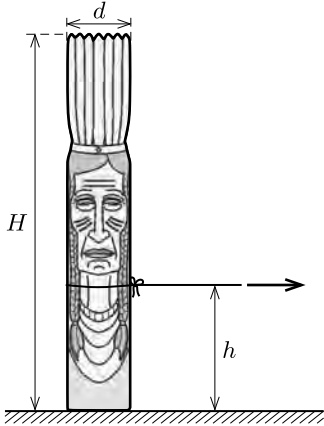
Öccse, Jancsi, még csak másodikos gimnazista, ők most a forgómozgást tanul-
ják fizikából. Érdeklődve nézi bátyja számolását, de mivel integrálásról még soha
nem hallott, nem sokat ért belőle. Mindössze annyi világos számára, hogy mi a
feladat.

Némi gondolkodás és egy rövid számolás után Jancsi felkiált: „Megvan az ered-
mény, sőt, nemcsak a félkörív, hanem tetszőleges alakú körív és körcikk tömegkö-
zéppontját is meg tudom határozni!”

Vajon hogyan csinálta?

F. 77.* Egy ceruzát függőlegesen, a hegyével lefelé
egy vízszintes asztalra állítunk, majd hagyjuk, hogy el-
dőljön. A dőlés irányához képest milyen irányban moz-
dul el a ceruza hegye?

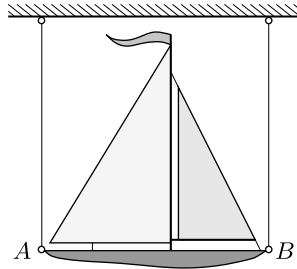




F. 78. Egy indián szoborcška jó közelítéssel $H = 6$ cm magas, $d = 1$ cm átmérőjű tömör, homogén tömegeloszlású hengernek tekinthető. A szoborcskához az alaptól számított $h = 2$ cm magasságban cérnaszálat erősítünk, és a szoborcskát egy vízszintes asztallap közepére állítjuk. Egy vetélkedőben az asztal széléről, vízszintes irányban feszített cérnaszállal magunkhoz kell húzni a szobrot, anélkül, hogy felborulna. Az asztal és a szobor között a súrlódási együttható $\mu = 1/3$.

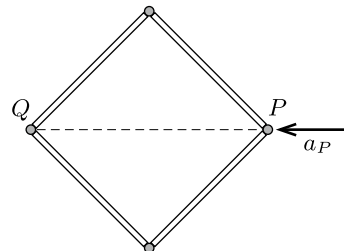
Sikerülhet-e ez? Ha igen, akkor hogyan, ha nem, miért nem?

F. 79.* Az ábrán látható módon, két gumiszálra kötve egy miniatűr vitorlás-hajó függ a játékbolt kirakatában. A bal oldali gumiszálat lökés nélkül elnyisszantjuk. Süllyedni, vagy emelkedni kezd a B pont a következő pillanatban? (Az árbóc és a vitorlák tömege a hajótest tömegéhez képest elhanyagolható, a hajótest függőleges mérete jóval kisebb a hosszánál.)



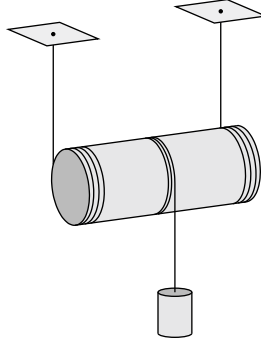
F. 80. Egyenes, merev, egyenletes vastagságú hajszál fekszik egy súrlódásmentesnek tekinthető asztalon. A hajszál két végén egy-egy bolha ül. Mutassuk meg, hogy ha a hajszál M tömege nem túlságosan nagy a bolhák egyforma m tömegéhez képest, akkor a bolhák képesek arra, hogy ugyanakkora kezdősebességgel, ugyanolyan kezdeti emelkedési szöggel egyszerre elugorjanak a hajszál két végéről, majd úgy érkezenek le a hajszál másik végére, hogy nem ütköznek össze a levegőben!

F. 81.* Négy egyforma, homogén tömegeloszlású rudat súrlódásmentes csuklók segítségével összekapcsolunk, majd az így keletkezett keretet négyzet alakban vízszintes, sima asztallapra helyezzük. A négyzet P csúcsát vízszintesen az átló irányában elkezdjük tolni, aminek következtében az a_P gyorsulással indul el.



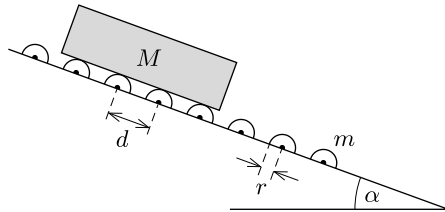
Milyen irányban és mekkora gyorsulással kezd mozogni a négyzet szemközti Q csúcsa?

F. 82. Egy hengeres testre szorosan vékony, kettős fonalat csévélünk az *ábra* szerint, majd a fonalak végeit a mennyezethez erősítjük. A henger középre egy másik fonál is fel van tekerve, melynek szabad végére egy súlyos testet kötünk.



A rendszert az ábrán látható helyzetből elengedjük. Mekkora gyorsulással kezd mozogni a súlyos test az elengedés után? (A fonalak az indításkor függőlegesek, nem zavarják egymás mozgását, a henger tömegeloszlása hengersizmetrikus.)

F. 83.** Egy hosszú, a vízszintessel α szöget bezáró egyenes csúszda sok egyforma görgőből áll, melyek középpontjai d távolságra követik egymást. A görgők vízszintesen tengelyezett, m tömegű, r sugarú, gumival borított tömör acélhengerek. A csúszda tetején elengedünk egy M tömegű deszkát, melynek hossza sokkal nagyobb a d távolságnál.



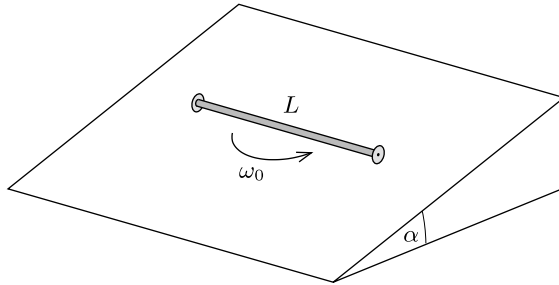
Mekkora v_{\max} (kicsiny ingadozásoktól eltekintve) állandósult sebességre gyorsul fel a deszka, ha kezdetben a görgők nem forogtak? (A közegellenállástól és a tengelysúrlódástól eltekinthetünk.)

F. 84.** Egy homogén tömegeloszlású, lapos korong forogva csúszik a jégen. A súrlódás miatt mindkét fajta mozgás lelassul, majd megáll. Vajon a forgás, vagy a tömegközéppont haladó mozgása áll le hamarabb? (Feltételezhetjük, hogy a korong egyenletesen nyomja a jeget, a súrlódási erő nem függ a sebességtől, a légellenállás pedig nem számottevő.)

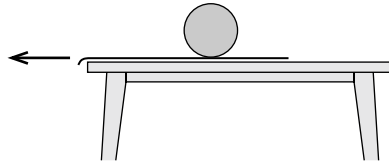
F. 85.* Egy L hosszúságú, homogén tömegeloszlású rúd végein kicsiny, elhanyagolható tömegű görgők találhatók, melyek egymástól függetlenül, súrlódásmentesen foroghatnak a rúd tengelye körül.

a) Hogyan mozog a görgős rúd, ha vízszintes, érdes felületre helyezzük, majd két végét a tengelyére merőleges v_1 és v_2 sebességgel megpöccintjük?

b) Hogyan mozog a rúd, ha α hajlásszögű, nagy kiterjedésű, érdes lejtőre helyezzük, majd az *ábrán* látható helyzetből ω_0 szögsebességgel, zérus tömegközépponti sebességgel elindítjuk?



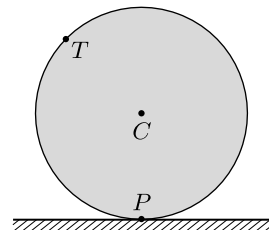
F. 86. Vízszintes asztallapon egy terítő, rajta pedig egy acélgolyó található. A terítőt kihúzzuk a golyó alól, eközben a golyó a súrlódási erő miatt mozgásba jön, és forogni is kezd. Mekkora lesz a sebessége az asztalon, amikor már csúszásmentesen gördül? (Az asztal elég nagy méretű, a golyó nem esik le róla.)



F. 87. Egy álló biliárdgolyónak ütközik egy tiszta gördüléssel haladó másik ugyanolyan golyó. Az ütközés centrális, egyenes és tökéletesen rugalmas. Írjuk le a golyók viselkedését az ütközés után!

Lássuk be, hogy a végállapot nem függ a golyók és a biliárdasztal közötti súrlódási együtthatótól! (A golyók közötti súrlódás, a gördülési ellenállás és a léghellenállás elhanyagolható, de a golyók és az asztal közötti súrlódás számottevő.)

F. 88.* A biliárdasztalon nyugvó biliárdgolyót az *ábrán* látható T pontban készülünk meglökní úgy, hogy a kifejtett erőlökek hatásvonala benne legyen a T támadáspont, a golyó C középpontja és az asztallal való P érintkezési pont által meghatározott síkban. Szerkesszük meg az erőlökek irányát, ha azt szeretnénk, hogy a golyó



a) a pillanatszerű indítást követő, csúszva gördülő mozgás befejeződésekor éppen megálljon;

b) a pillanatszerű indítás után tisztán gördüljön (az asztal és a golyó közötti tapadási súrlódási együttható értékétől függetlenül).

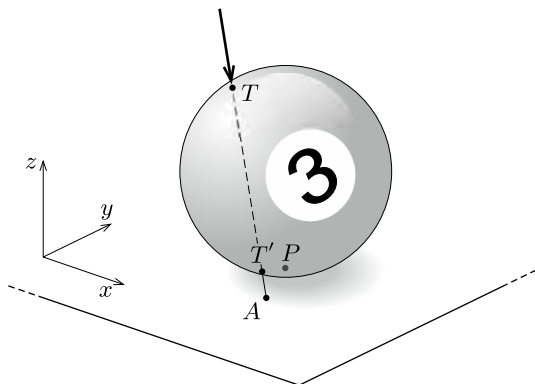
(A dákó és a golyó közötti súrlódási együttható elegendően nagy.)

F. 89.** Ha az előző feladatban az erőlkés hatásvonala nincs benne a T , C , P pontok által meghatározott síkban, akkor a lökés utáni pillanatban a biliárdgolyó szögsebességvektora nem lesz merőleges a tömegközéppont sebességére. A biliárdjátékosok ezt *Coriolis-massé* lökésnek hívják. (Az ábrán T' -vel és A -val jelöltük az erőlkés hatásvonalának a golyó felületével, illetve az asztal síkjával való dőféspontjait.)

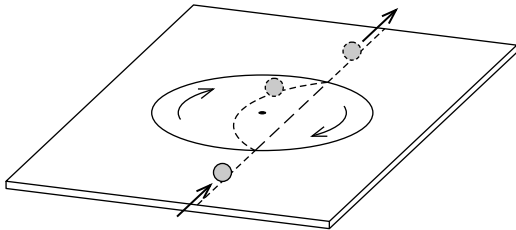
a) Az indítást követően milyen alakú pályán mozog a golyó középpontja a csúszva gördülő mozgás befejeztéig?

b) A tiszta gördülés kezdetétől milyen irányban folytatja mozgását a golyó a PA egyeneshez képest?

(Tételezzük fel, hogy a golyó mindvégig egyetlen ponton érintkezik az asztallal.)



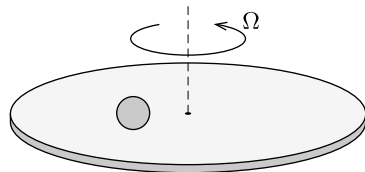
F. 90.** Ausztráliában, a canberrai „Csodák Palotájában” látható a következő berendezés. Egy vízszintes asztallap közepéből kivágtak egy R sugarú korongot, és azt – csapágyazva – visszahelyezték az eredeti helyére. A korongot egy motor segítségével egyenletes forgásban tartják.



Ha az asztalon egy tömör gumilabdát (trükkabdát) gurítunk végig, akkor a labda a forgó korongra érve letér az eredeti egyenes pályájáról, ívesen eltérül, majd a korongról lekerülve ismét tiszta gördüléssel, egyenes vonalban folytatja útját. Ez az egyenes pontosan egybeesik a kezdeti mozgás egyenesével, és a labda végsebessége is ugyanakkora lesz, mint amekkora a korongra érkezés előtt volt.

Vajon milyen megmaradási törvények rejtőznek emögött?

F. 91.** Egy érdes felületű, vízszintes síkú korongot függőleges szimmetriatengelye körül állandó Ω szögsebességgel forgatunk. A forgó korongra egy R sugarú, tömör gumilabdát helyezünk, majd tiszta gördüléssel elindítjuk úgy, hogy a labda középpontja egy, a koronggal koncentrikus, r_0 sugarú körpályán mozogjon.

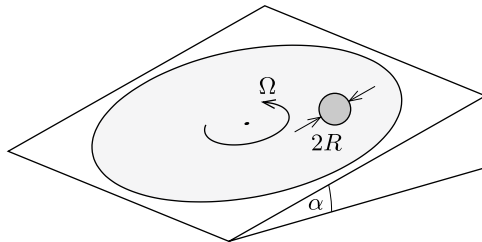


- a) Milyen kezdősebességgel és szögsebességgel kell ehhez a labdát indítanunk?
- b) Hogyan mozogna a labda középpontja, ha azt az a) kérdésben meghatározott nagyságú, de azzal ellentétes irányú kezdősebességgel indítanánk?

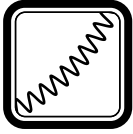
A labda mindkét esetben végig tisztán gördül, és a korong mérete elegendően nagy ahhoz, hogy a labda ne essen le róla.

F. 92.* Egy nagyméretű, érdes felületű, a vízszinteshez képest α szögben döntött korong egyenletesen, Ω szögsebességgel forog. Egy bűvész a forgó korongra egy R sugarú, tömör gumilabdát helyez, majd megfelelő irányban elgurítja. A közönség ámulatára a labda középpontja ezután egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez, amit mindaddig folytat, amíg a labda a forgó korong peremére ér. (A labda mindvégig tisztán gördül, a korong szögsebessége nem változik.)

Adjunk fizikai magyarázatot a furcsa jelenségre! Milyen irányban és mekkora sebességgel kell indítania a bűvésznek a labdát, hogy a mutatvány sikerüljön?

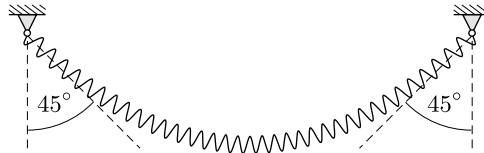


F. 93.** Függőleges tengelyű, rögzített, henger alakú hosszú cső belső falához egy kicsiny, r sugarú, tömör gumilabdát szorítunk. Ha a gumilabdát elegendően nagy vízszintes v_0 sebességgel elindítjuk, akkor a labda a cső R belső sugarú falával mindvégig érintkezve érdekes, függőleges irányban periodikusan oszcilláló mozgásba kezd. Írjuk le a gumilabda középpontjának táncát! (Feltételezhetjük, hogy a labda egyetlen pontban érintkezik a cső falával. A tapadási súrlódás elegendően nagy ahhoz, hogy a labda ne csússzon meg.)



Rugalmasságtan

F. 94. A slinky-rugó² egy olyan rugó, melynek nyújtatlan hossza elhanyagolhatóan kicsi, jó közelítéssel követi a Hooke-törvényt, és már a saját súlya hatására is számottevően megnyúlik. Ezt a rugót egyszer az egyik végénél fogva függőlegesen lógatjuk, másszor mindkét végét rögzítjük olyan távolságban, hogy a rugó az *ábrán* látható alakot vegye fel. Melyik esetben hosszabb a megnyúlt rugó?



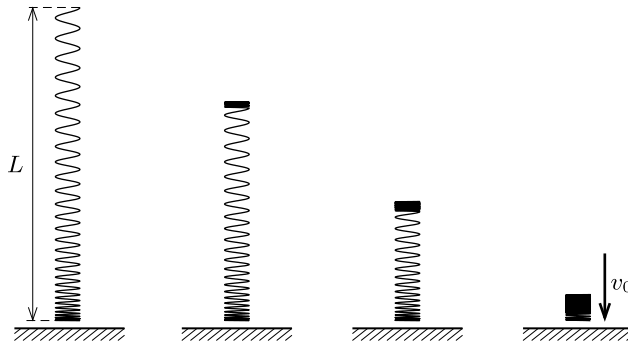
F. 95.* Milyen alakot vesz fel egy slinky-rugó, ha a végeit azonos magasságban, egymástól bizonyos távolságban rögzítjük?

F. 96.* Az asztalon nyugvó, m tömegű slinkyt felső végénél fogva lassan addig emeljük, hogy az alsó vége éppen felemelkedjen. Ekkor a slinky hossza L .

a) Mekkora munkát végeztünk az emelés közben?

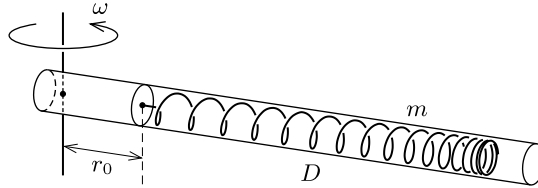
b) Ha ezután a felső végénél fellógatott slinkyt elengedjük, a legelső menet érdekes módon egészen a teljes összecukódásig nem mozdul meg (lásd az *ábrásor* „pillanatfelvételeit”). Mekkora v_0 sebességgel kezd esni a slinky közvetlenül a teljes összecukódás után?

c) Mennyi idő alatt csukódik össze teljesen a slinky?



²Az 1945 óta ismert (Magyarországon lépegető vagy lépcsőjáró rugónak is nevezett) közkedvelt játék egy acélból vagy műanyagból készült laza csavarrugó.

F. 97.** Egy slinky-rugót csúszós (súrlódásmentes) csőbe helyezünk, és a rugó egyik végét a cső egy pontjához rögzítjük. A vízszintes csövet a rugó rögzített végétől r_0 távolságban lévő függőleges tengely körül ω szögsebességgel egyenletes forgásba hozzuk.



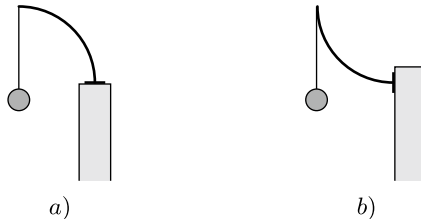
Mekkora lesz a megnyúlt rugó ℓ hossza, ha a slinky rugóállandója D , össztömege m ? A rugó „ideális”: hossza feszítetlen állapotban elhanyagolható, korlátlanul nyújtható és mindvégig követi a Hooke-törvényt.

Vizsgáljuk meg az $r_0 \rightarrow 0$ határesetet!

F. 98.** Milyen alakot vesz fel egy slinky-rugó, ha azt a Nemzetközi Űrállomáson (a súlytalanság állapotában) a végeinél fogva – a földi ugrókötelezéshez hasonló módon – egyenletes ütemben forgatjuk?

F. 99.* Egy régi ház falából vízszintesen egy vékony, könnyű, állandó vastagságú, üres zászlórúd áll ki. Mikor hajlik le jobban a rúd vége, ha a közepére egy galamb, vagy ha a végére egy negyedakkora tömegű fekete rigó száll?

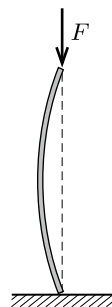
F. 100.* Egy habókora lakberendező állófogast tervez két változatban. Egy negyedkörív alakú, vékony, de erős rugalmas fémszálat egyik végénél szilárdan hozzáerősít egy merev törzshöz, egyszer az *ábrán* látható *a*), másszor a *b*) elrendezésben. Meglepődve tapasztalja, hogy ha ugyanakkora terhet akaszt a fogásokra, a fémszálak végpontja nem ugyanannyival süllyed le a két esetben.



Okoskodjunk ki egyszerű megfontolásokkal, hogy melyik esetben nagyobb a végpont lesüllyedése!

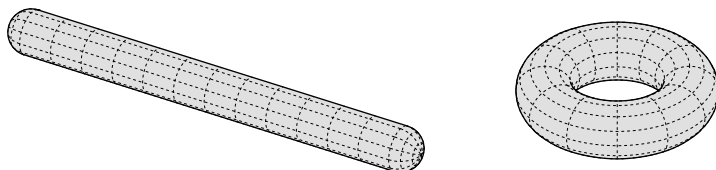
F. 101.* Egyik végénél mereven befogott, 1 m hosszú vízszintes pálca másik végére 1 kg tömegű testet akasztva a lehajlás 1 cm lesz. Becsüljük meg, hogy függőlegesen állítva mekkora F terhelés hatására hajlik ki ez a pálca.

F. 102. Egy bizonyos vastagságú és szakítószilárdságú kábelt szeretnénk egy hajóról függőlegesen lefelé a tengerbe lógatni, a kábel azonban 1 km-es hosszánál a saját súlya alatt elszakad. Milyen hosszú kábellel érhető el a 3 km mély tengerfenék, ha szakaszonként több szál is futhat egymással párhuzamosan? Becsüljük meg, mennyi kábelre lenne szükség a 10 000 m-es mélység eléréséhez. (A tengervíz sűrűségét tekinthetjük állandónak, a kábelt pedig nyújthatatlannak.)



F. 103. Egy kicsiny, gömb alakú tartályban nagynyomású héliumgáz van. A gázt egy könnyű ballonba engedjük, ahol a nyomása a külső légnyomással megegyezővé válik. Elképzelhető-e, hogy az így létrehozott léggömb fel tudja emelni azt a tartályt, amelyből a gázt kiengedtük? (A hőmérséklet mindvégig állandó.)

F. 104.** Mindennapi konyhai tapasztalat, hogy a frankfurti virsli (hosszú, egyenes, juhbeles virsli) főzés közben mindig „hosszában” hasad fel, sohasem „keresztben”. Mi az oka ennek?

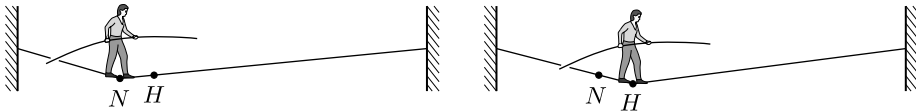


Vajon hol és milyen irányban hasadna föl főzés közben egy tórusz alakú virsli, ha sikerülne ilyen készíteni? (A virsli héjának vastagságát vegyük állandónak.)



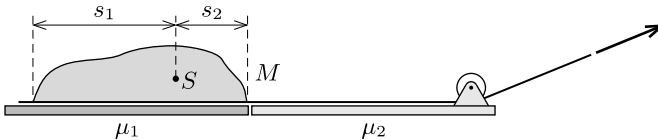
Statika

F. 105.* Egy utca felett vékony, erős, hajlékony drótkötelet (acélsodronyt) feszítenek ki nagy erővel, vízszintesen. Egy kötélhányós lassan végigmegy a kötélen. Amikor a negyedrészig (az N ponthoz) ér, a kötéltámaszpontja (H) 5 cm-rel van mélyebben az eredeti helyzeténél. Mennyi lesz az N pont lesüllyedése, amikor a kötélhányós éppen a H pontnál jár? Független-e az eredmény az N és a H pontok választásától? (A kötéltámaszpontja súlyát elhanyagolhatjuk, lehajlása mindvégig nagyon kicsi a kötéltámaszpontjához képest, és a kötéltámaszpontban ható feszítőerőt jó közelítéssel állandónak tekinthetjük.)



F. 106. Általános háromszögben hol van az a pont, amelynek a csúcsoktól mért távolságainak összege a legkisebb?

F. 107. Egy zsáknyi homok vízszintes felületen egy szőnyegen fekszik. Az M tömegű zsákokat a szőnyeg segítségével lassan át akarjuk húzni egy viszonylag sima felületről egy érdekes felületre. Mennyi munkát kell végeznünk, ha a felületek és a szőnyeg közötti súrlódási együttható μ_1 , illetve μ_2 ? (A zsák súlya nem egyenletesen oszlik el a szőnyegen, de tudjuk, hogy a tömegközéppontja a széleitől s_1 , illetve s_2 távolságban van.)



F. 108.* Két ujjunkkal a két végén alátámasztva, vízszintes helyzetben tartunk egy m tömegű, ℓ hosszúságú, homogén rudat. Ha ujjainkat lassan egymás felé közelítjük, végül a rúd alatt középen fognak találkozni, miközben hol az egyik, hol a másik ujjunkon csúszik meg a rúd. Mennyi munkát végzünk a folyamat során, ha a tapadási súrlódási együttható μ_t , a csúszási súrlódási tényező pedig μ_{cs} ($\mu_t \geq \mu_{cs}$)?

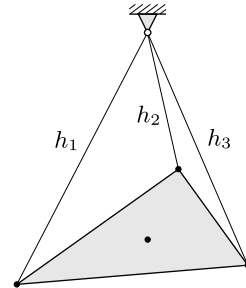
F. 109. Egy 30° -os hajlásszögű, érdes lejtőre különböző anyagú félgömbökből összeragasztott gömböt helyezünk. Egyensúlyban maradhat-e ez a gömb a lejtőn? (A félgömbök tömegeloszlása egyenletes.)

F. 110. Négy egyforma téglatestet egymás tetejére helyezünk. Lehetséges-e úgy elcsúsztatni őket egymáson egy asztal szélén, hogy a legfelső már teljesen túlnyúljon az asztal peremén?

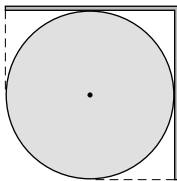
Elvileg meddig növelhető a legfelső téglatest kinyúlása, ha a téglatestek számát korlátlanul növelhetjük?

F. 111. Egy hengeres, üres főzőpohár 100 g tömegű, sugara 30 mm, fala elhanyagolhatóan vékony, súlypontja 100 mm-rel az alja felett helyezkedik el. Milyen magasan töltjük fel a poharat vízzel, hogy a lehető legstabilabb (legkevésbé borulékony) legyen?

F. 112.* Egy homogén tömegeloszlású, háromszög alakú lemez csúcsaihoz h_1 , h_2 és h_3 hosszúságú fonalakat erősítünk, majd a fonalak másik végét közös ponthoz rögzítve a lemezt felfüggesztjük. Hogyan lehet kifejezni az egyes fonalakat feszítő erők *arányát* a fonalak hosszával?

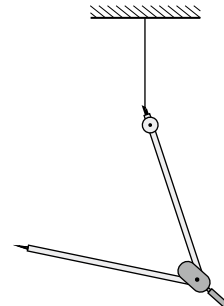


F. 113.* Egy gépkocsi mindegyik kerekének ugyanolyan erős felfüggesztő rugója van. Mennyit emelkedik meg az autó merevnek tekinthető karosszériája a kerek felett, ha a kocsit a jobb első kerekével egy 8 cm magas járdaszegélyre áll? Hogyan módosul az eredmény, ha a gépkocsi mindkét jobb oldali kerekével felhajt a járdára? Függ-e a válasz attól, hogy hányan és hol ülnek a kocsiban?



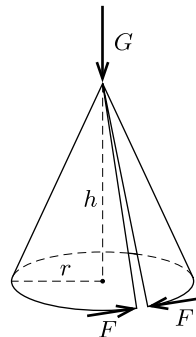
F. 114.* Középen derékszögben meghajlított lemezt egy vízszintes tengelyű, rögzített hengerre helyezünk az *ábra* szerint. A henger átmérője akkora, mint a lemez felének szélessége. Legalább mekkora a tapadási súrlódási együttható a henger és a lemez között, ha a lemez nem csúszik le a hengerről?

F. 115. Egy körzöt az egyik végénél fogva felfüggesztünk egy fonálon. Milyen szögben kell kinyitni a körzöt, hogy csuklója a lehető legmagasabban legyen? Hogyan áll ekkor a körző alsó szára? (A körző szárait közelítjük homogén rudakkal.)



F. 116. Körcikk alakú papírlapból h magasságú, r alapkör-sugarú kúpot hajlítunk úgy, hogy a paláston a papírlap két egyenes határa majdnem összeér. A kúp ebben az állapotban belső feszültségektől mentes.

A kúpot vízszintes, síkos lapra állítjuk, majd a csúcsában G nagyságú függőleges erővel megterheljük, anélkül, hogy összeroskadna. A kúp szétnyílását az alapkör kerületénél ható, érintő irányú F erővel tudjuk megakadályozni. Mekkora az F erő? (A súrlódást és a papír hajlítási merevségét elhanyagolhatjuk.)



F. 117.* Victor Hugo híres regényének főszereplője *Jean Valjean*, a volt fegyenc, aki arról a képességéről volt híres, hogy még egy derékszögű falszegleten is – segédeszközök nélkül – fel tudott mászni! Mekkora erővel nyomta Jean Valjean a falat, ha tömege m , és a falon a tapadási súrlódási együttható értéke μ ?

F. 118. Feri azonos vastagságú, vékony vasrudakból háromszöget hegesztett össze. Ki akarja jelölni a súlypontját, ezért papírlapra fekteti és meghúzza a csúcsokat a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszokat. Ekkor érkezik Laci, aki azt mondja, hogy így nem kapja meg a súlypontot. Ő azt javasolja, hogy kössék össze az oldalfelező pontokat, és az így kapott háromszögbe rajzolható kör középpontja lesz a súlypont. Vajon kinek van igaza?

F. 119. Kartonpapírból háromszöget vágunk ki, és azt az egyik oldalára támasztva vízszintes asztalra helyezzük. (A háromszöget – például két közeli üveglappal – függőleges síkban tartjuk, de ebben a síkban a mozgását nem akadályozzuk.) Elképzelhető-e, hogy a háromszög két oldaláról is felborul, és csupán egyetlen stabil egyensúlyi helyzete van?

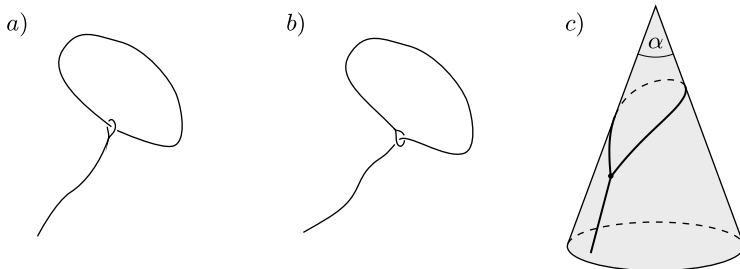
F. 120.** Készíthető-e olyan homogén tömegeloszlású tetraéder, amely vízszintes asztallapra állítva három oldallapjáról felborul, és csak egyetlen helyzetben lehet stabil?



Kötelek, láncok, granulált anyagok

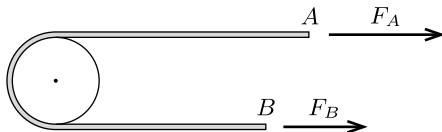
F. 121. Két, egyaránt 20 g tömegű giliszta átmászik egy 10 cm magas, igen vékony falon. Az egyik sovány és 20 cm hosszú, a másik kövér és 10 cm hosszú. Melyiknek kell több munkát végeznie a „nehézségi erő ellenében”, amíg félig átjut a falon? Hogyan aránylik egymáshoz a két giliszta munkája?

F. 122.** A jégfalmászás extrém sportjának megszállottjai egy újfajta versenyen mérik össze erejüket és ügyességüket. A versenyzőknek egy szabályos kúp alakú, nagyon sima, csúszós „jéghegyre” kell minél magasabbra felmászniuk, még-hozzá „tisztá mászással”: sem hágóvasakat vagy jégcsákányt, sem pedig a jégfalba erősített kapaszkodókat nem használhatnak! Egyetlen segédeszközük egy lasszó lehet, amely a kezdőknél az *a)* ábrán látható módon két darabból áll, a haladók pedig a *b)* ábrán látható, egyetlen kötélből készült változatot használják. Mindkét lasszó kötele nagyon síkos, emiatt még a kis hurkognál sem lép fel számottevő súrlódás.



Mekkora α kúpszög esetén tudnak a kezdő, illetve a haladó versenyzők a *c)* ábrán látható módon lasszójuk segítségével (valamekkora magasságig) felmászni a jéghegyre? (A versenyzők alacsonyak, emiatt a lasszó egyenes szára gyakorlatilag hozzásimul a jéghegyhez. A kötéltömege a versenyzők tömege mellett elhanyagolható.)

F. 123.* Egy rögzített henger kerületének felére az ábrán látható módon könnyű, nyújthatatlan fonalat feszítünk ki.

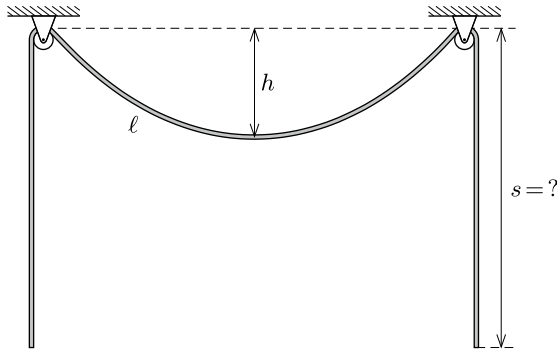


A fonál (a súrlódás következtében) akkor tapad a hengerre, ha a végpontjaiban ható erők nagysága között teljesül az $\frac{1}{2}F_A \leq F_B \leq 2F_A$ egyenlőtlenség. Határozzuk meg a fenti összefüggés segítségével a fonál és a henger közötti súrlódási együtthatót!

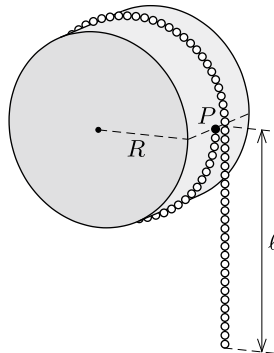
F. 124. Egy villanyvezeték két szomszédos villanyoszlop között kicsit belóg. A vezeték egységnyi hosszára jutó tömege λ , a villanyoszlopok távolsága L , a vezeték „belógása” pedig $d \ll L$. Mekkora a vezetéket feszítő erő?

F. 125.* Egy tornateremben a mennyezetről lelógó kötélen ugyanakkora, mint a mászórudé, és a súlyuk is megegyezik. Mindkét testet az alsó végeiknél ható, azonos nagyságú, vízszintes irányú erővel kitérítjük. Vajon a kötélen, vagy pedig a rúd alsó vége emelkedik magasabbra?

F. 126.** Egyenletes tömegeloszlású, hajlékony kötelet két, azonos magasságban rögzített, kicsiny állócsigára helyezünk az *ábrán* látható módon. Ekkor a kötélen csigák közé eső darabjának hossza ℓ , a „belógás” pedig h . Mekkora a kétoldalt lelógó kötéldarabok s hossza?



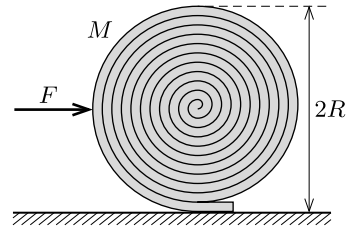
F. 127.* Egy R sugarú, sima felületű, vízszintes helyzetű, rögzített hengerhez egy apró szemű gyöngysort kötünk úgy, hogy egyik végét a paláston, a henger tengelyével azonos magasságban lévő P pontban rögzítjük, majd a gyöngysort egyszer átvetjük a hengeren. Legalább mekkora legyen a függőlegesen lelógó rész ℓ hossza, hogy a gyöngysor többi része mindenhol a henger palástjához simuljon?



F. 128.* Egy M tömegű, L hosszúságú, hajlékony futószőnyeget szorosan felgöngyöltünk egy R sugarú hengerré. Ha a felgöngyölt szőnyeget elengedjük, az magától kitekeredik. (A gördülési ellenállás elhanyagolható.)

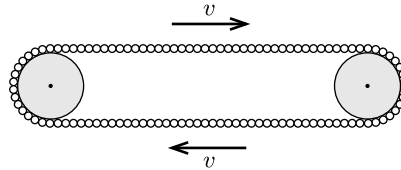
a) Milyen erőhatással magyarázható a jelenség?

b) Mekkora vízszintes erővel akadályozható meg a szőnyeg kitekeredése?



F. 129.* Egyenletes tömegeloszlású, hajlékony lánc két hengert összekötve feszesen forog, alakja a stadionok futópályájához hasonlóan két félkörből és két egyenes szakaszból áll.

Valamilyen ok miatt a lánc hirtelen lecsúszik a hengerekről, és függőlegesen szabadon esik. Vajon hogyan változik meg a lánc alakja esés közben?



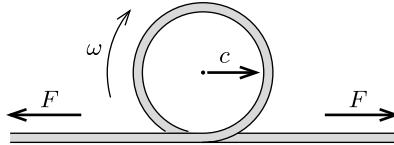
Pisti szerint a „centrifugális erő” hatására kör alakot vesz fel. Laci is elfogadja ezt az érvelést, de megtoldja annyival, hogy a kezdetben hosszúknás lánc a kör alakot elérve lendületből tovább deformálódik, az eredeti hossz tengelyére merőleges irányban válik elnyújtottá, és ezt a mozgást megismételve „lüktetni” kezd. Feri arra tippel, hogy a lánc megtartja kezdeti formáját, de nem tudja megindokolni, hogy miért.

Vajon melyiküknek van igaza, vagy netán mindannyian tévednek?

F. 130.* Egy fogaskerék tengelyét vízszintesen rögzítjük, és ráhelyezünk egy kerékpárláncot, majd a fogaskereket a tengelye körül óvatosan forgatni kezdjük. Milyen alakot vesz fel a lánc, amikor a fogaskerék már állandó szögsebességgel sebesen forog?



F. 131. Egy hosszú, súlyos, hajlékony kötelet, amelynek hosszegységre eső tömege λ , állandó F erővel feszítünk. A kötel egyik végénél egy hirtelen mozdulattal kör alakú hurkot képezünk. A hurok – a transzverzális hullámokhoz hasonlóan – valamekkora c sebességgel végigszalad, végiggördül a kötelen.

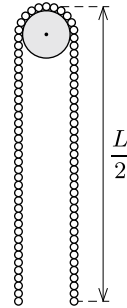


a) Számítsuk ki a hurok c sebességét!

b) Határozzuk meg az ω körfrekvenciájú hurok által szállított energiát, impulzust (lendületet) és impulzusnyomatékot (perdületet)! Milyen kapcsolatban állnak ezek a mennyiségek egymással?

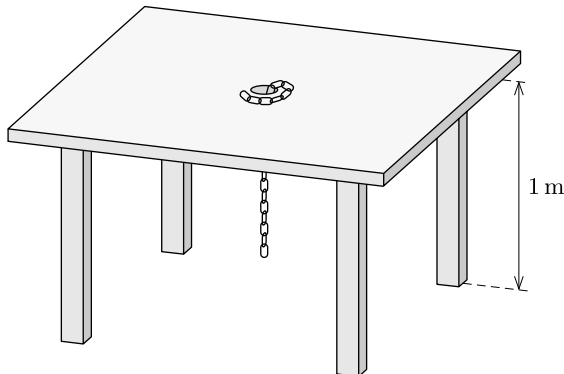
F. 132.* Egy rögzített tengelyű, kicsiny csigán majdnem pontosan szimmetrikusan egy L hosszú, súlyos, hajlékony, nyújthatatlan láncot vetettünk át. A láncot ebből a helyzetéből kezdősebesség nélkül elengedjük.

A lánc melyik helyzetében válik el a csigától? Mekkora lesz ekkor a sebessége?

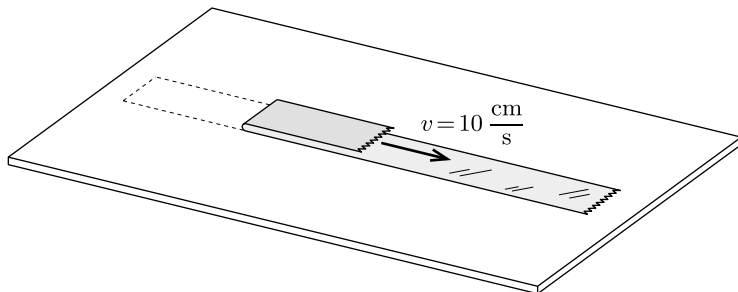


F. 133.* Egy 1 méter magas asztal lapjának közepén lyuk van. A lyuk közvetlen környezetében az asztallapon lazán elhelyeztünk egy 1 méter hosszú, vékony láncot. Ennek egyik végét a lyukon keresztül kicsit meghúzzuk, majd elengedjük. A lánc egyre növekvő sebességgel szalad le a lyukon át. (Feltételezhetjük, hogy a lánc nem gubancolódik össze. A súrlódás és a légellenállás elhanyagolható.)

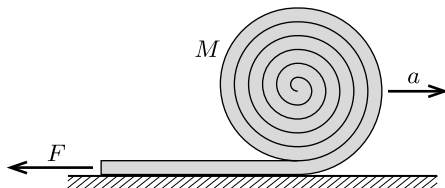
Mennyi idő alatt ér a lánc egyik, illetve másik vége a földre?



F. 134. Egy asztallapra felragasztunk egy bizonyos hosszúságú cellulpszalagot, majd az egyik végét felhajtva, vízszintesen 10 cm/s sebességgel egyenletesen visszafelé húzzuk. Mekkora sebességgel mozog a szalag mozgásban lévő részének a közepe?



F. 135.* Egy M tömegű, L hosszúságú, hajlékony tűzoltófecskendőt R sugarú gurigává tekerünk össze ($R \ll L$). A tekercset vízszintes talajon v_0 kezdősebességgel (v_0/R szögsebességgel) elgurítjuk, miközben a cső végét a talajhoz szorítjuk. A fecskendő fokozatosan kitekeredik, egyre hosszabb része válik egyenessé.



a) Mennyi idő alatt tekeredik ki teljesen a fecskendő?

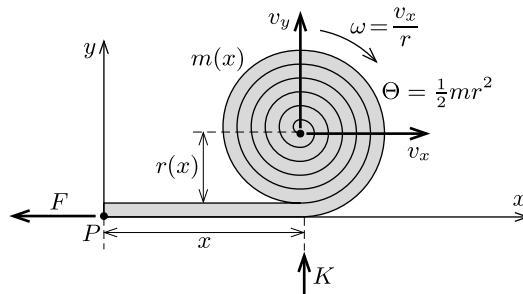
b) A guriga sebessége egyre nő, gyorsulása tehát a sebességével azonos irányú vektor. Ugyanakkor a vízszintes irányú külső erők (súrlódási erő + a cső rögzített végénél általunk kifejtett tartóerő) eredője „visszafelé”, a sebességgel ellentétes irányba mutat. Hogyan egyeztethető össze ez a két tény Newton II. törvényével?

(Legyen a guriga kezdeti mozgási energiája sokkal nagyobb, mint a helyzeti energiája, azaz $v_0 \gg \sqrt{gR}$, így a gravitáció hatását a mozgás során mindvégig elhanyagolhatjuk. Tekintsük a fecskendőt tetszőlegesen könnyen hajlíthatónak, az alakváltoztatáshoz szükséges munkavégzést, továbbá a légellenállást és a gördülési ellenállást ne vegyük figyelembe!)

F. 136.** Péter és Pál (két fizikusnak készülő diák) tovább vizsgálta az előző feladatban szereplő tűzoltófecskendőt, tanulmányozni kezdte annak függőleges irányú mozgását is. Továbbra is feltételezték, hogy a kezdeti mozgási energiája elég nagy ahhoz, hogy a gravitáció hatását elhanyagolhassák.

Péter (az energiamegmaradást és az anyagmegmaradást felhasználva) kiszámította, hogy az *ábrán* látható x út megtétele után mekkora lesz a guriga m tömege,

r sugara, ω szögsebessége, Θ tehetetlenségi nyomatéka, középpontjának v_x vízszintes sebessége és v_y függőleges sebessége. Természetesen mindezek x függvényei, és ezen keresztül az időtől is függő, időben változó mennyiségek.



Kiszámítottam a v_x és v_y mennyiségeket, majd ezeket a pillanatnyi $m(x)$ tömeggel megszorozva megkaptam a guriga impulzusának p_x és p_y komponenseit, – állítja Péter – majd ezek időbeli változási sebességéből a külső erőket, F -et és K -t.

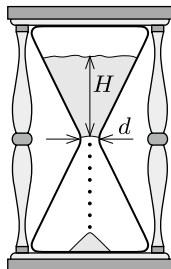
Arra is kíváncsi volt, hogy mekkora és milyen gyorsan változik ennek a furcsa rendszernek a perdülete (N), és összhangban van-e ez a változás a külső erők forgatónyomatékával. Mivel a guriga középpontja is és az egész rendszer tömegközéppontja is gyorsul, nem ezekre, hanem egy rögzített P pontra (a feckendő álló végpontjára) írta fel a perdület és a forgatónyomaték képleteit.

Legnagyobb meglepetésére azt találta, hogy – jóllehet a külső erők forgatónyomatéka *nulla*, – a perdület nem marad állandó, hanem *időben változik!* Már-már arra hajlott, hogy kimondja: ebben a rendszerben nem érvényes a klasszikus mechanika egyik alaptörvénye, a perdületváltozásra vonatkozó összefüggés (perdülettétel).

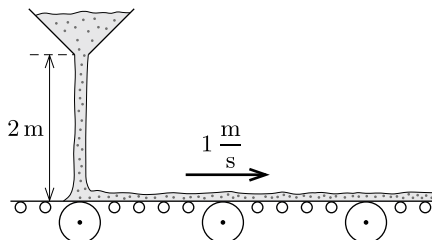
Pálnak más volt a véleménye! Szerinte Péter valamit rosszul számolt, olyan (megszokott) összefüggést alkalmazott, amit nem lett volna szabad.

Vajon kinek van igaza?

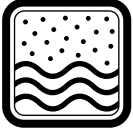
F. 137.* Becsüljük meg, hogy mennyi idő alatt pereg le a homok egy homokórában! Vegyünk fel reális adatokat!



F. 138. Egy vízszintes, 1 m/s sebességű szállítószalagra függőlegesen, 2 méter magasságból másodpercenként 50 kg homok esik. Legalább mekkora a futószalag motorjának teljesítménye? Mire fordítódik a motor által végzett munka?



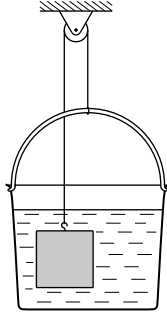
F. 139.* Egy henger alakú zárt tartály fekvő helyzetben egyenletesen forog (vízszintes) hossz tengelye körül, $0,5/\text{s}$ fordulatszámmal. A tartály 100 kg homokot tartalmaz, belső átmérője és hossza egyaránt 1 m , fala érdes. Becsüljük meg, mennyivel növekszik a homok hőmérséklete 10 perc alatt, ha a falon keresztül történő hőleadást elhanyagoljuk!



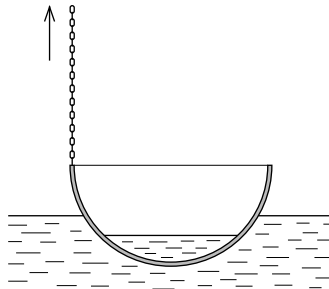
Folyadékok és gázok mechanikája

F. 140. Egy zsineg egyik végéhez egy 1 dm^3 -es vaskockát, a másik végéhez pedig egy vízzel megtöltött, könnyű műanyag vödört kötünk. A zsineget egy csigán átvetjük, és a vaskockát az *ábrán* látható módon a vízbe lógatjuk. A rendszer ekkor egyensúlyban van.

- Hány liter víz van a vödörben?
- Mi történik, ha egy kevés vizet öntünk még a vödörbe?
- Mi történik, ha egy kevés víz elpárolog a vödörből?



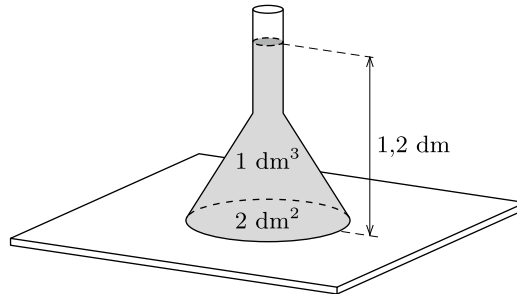
F. 141. Egy 40 cm átmérőjű, félgömb alakú rézüstben halászevet főztünk. Hűtés céljából az üstöt egy tó vizére tesszük. Az üst úszik a vizen, 10 cm mélyre merül. Az üst peremének egyik pontját a hozzá erősített lánc segítségével óvatosan 10 cm -rel magasabbra emeljük. Befolyik-e a víz az üstbe?



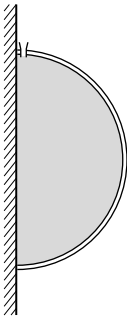
F. 142. Héliummal, illetve metánnal töltött szappanbuborékok lebegnek a levegőben. Vajon minek nagyobb a tömege: a buborékok falának, vagy pedig a buborékokban lévő gáznak?

F. 143. Egy asztalon álló edényben víz van. Az edény aljától cső vezet az asztal mellett álló, szekrény nagyságú *fekete doboz* belsejébe. Ha az edénybe még egy kevés vizet öntünk, az eredeti folyadékszint lesüllyed, ha viszont kimerünk némi vizet az edényből, a szint megemelkedik. Mi lehet a fekete dobozban?

F. 144. Egy tölcserbe az *ábra* szerinti helyzetben 1 dm^3 vizet töltünk. Az asztalon a tölcser által letakart terület 2 dm^2 , a víz magassága $1,2 \text{ dm}$.

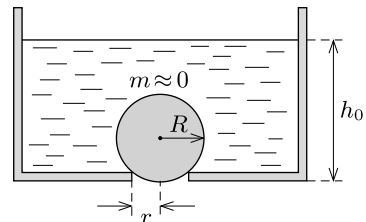


Legalább mekkora legyen a tölcser tömege, hogy ne emelkedjen fel az alátámasztási felületről?



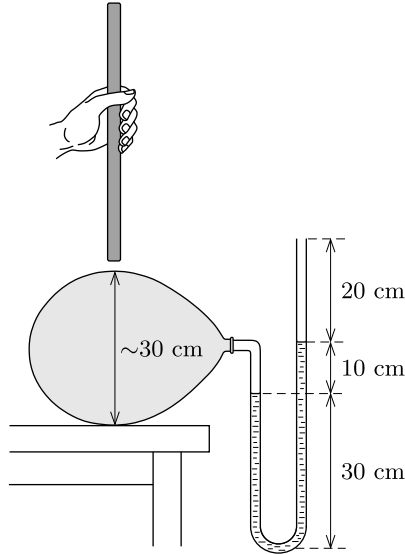
F. 145.* Egy m tömegű, R sugarú, vékony falú félgömbhéjat függőleges falnak szorítunk, majd (a tetején lévő kis nyíláson át) teletöltjük ρ sűrűségű folyadékkal. Legalább mekkora és milyen irányú erőt kell kifejtenünk a félgömbhéjra, hogy ne folyjon ki a folyadék? Adjuk meg ennek az erőnek a támadáspontját is! (A súrlódás elhanyagolható.)

F. 146.* Egy edény alján kör alakú, r sugarú nyílás van, rajta egy R sugarú, elhanyagolható tömegű pingponglabda. Ha az edényben elegendően sok víz van, a labda az edény alján marad. Óvatosan csökkentve a víz mennyiségét, egy bizonyos h_0 vízmagasságnál a labda felemelkedik. Számítsuk ki h_0 -t!

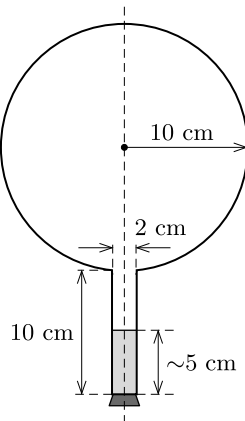


F. 147. Egy régebbi típusú (szervokormány nélküli) gépkocsi kerekeit $1,5 \text{ bar}$ -ról 2 bar nyomásra pumpáltuk fel. Hány százalékkal csökken az álló kocsi kormányának elforgatásához szükséges erő?

F. 148.* Egy lufit felfújunk, majd az *ábrán* látható vizes manométerhez csatlakoztatjuk. A manométer 10 cm-es víznyomást mutat. Ezután óvatosan egy 2 cm vastag, 50 cm hosszú, függőleges vasrudat engedünk a lufi tetejére. Vajon ki fog csordulni a víz a manométerből?



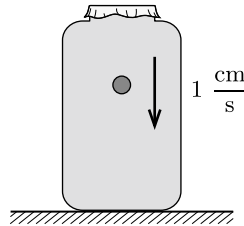
F. 149.** Zárt lombikban egy kevés víz van. A lombik száját lefelé fordítva a víz kb. 5 cm magasan áll a lombik nyakában. (A belső méreteket az *ábra* mutatja.)



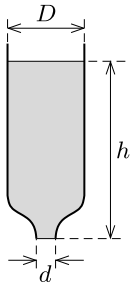
Ezután a lombikot függőleges tengelye körül egyenletes forgásba hozzuk úgy, hogy másodpercenként hármat forduljon. Gondoskodunk róla, hogy a lombik falának hőmérséklete mindenütt ugyanakkora legyen. Kellően hosszú idő után egyensúly áll be.

Rajzoljuk fel vázlatosan, hogyan helyezkedik el ekkor a víz a lombikban!

F. 150. Egy mézzel teli, lezárt befőttesüvegben egy 1 cm^3 térfogatú acélgolyó 1 cm/s sebességgel süllyed. Mennyi a méz impulzusa, ha a sűrűsége 2 g/cm^3 ?



F. 151. Egy mérleg tányérjára egy folyadékkal teli, csappal ellátott tartályt, a csap alá pedig egy edényt helyezünk. Mit mutat a mérleg, ha a csapot kinyitjuk, és a folyadék lefolyik az edénybe?

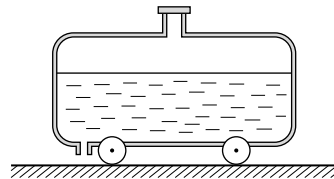


F. 152.* Egy D átmérőjű, függőleges, felül nyitott csőben h magasságban víz található. A cső alsó végét, amely az *ábrán* látható módon d átmérőjűre szűkül, dugó zárja el. Ha a dugót kihúzzuk, a víz megközelítőleg $v = \sqrt{2gh}$ sebességgel kezd el kifolyni az alsó nyíláson. Ezt a kifolyási sebességet azonban csak bizonyos τ idő alatt veszi fel a folyadék.

Becsüljük meg, nagyságrendileg mekkora lehet τ . Mekkora a kezdetben mozdulatlan folyadék alsó részének gyorsulása a dugó kihúzásának pillanatában? (Az áramló víz belső súrlódását ne vegyük számításba.)

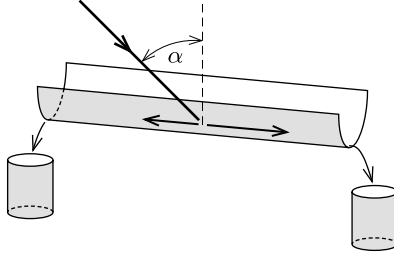
F. 153.* Egy téglatest alakú medence a tetején lévő vízcsap kinyitása után T_1 idővel telik meg. Az alján lévő kifolyót kinyitva T_2 idő alatt ürül ki. Mi történik, ha a vízcsapot is és a kifolyót is nyitva hagyjuk? Milyen T_1/T_2 arány esetén kell túlfolyástól tartanunk? (Legyen például $T_1 = 3$ óra és $T_2 = 2$ óra.)

F. 154.** Egy folyadékkal teli tartálykocsi vízszintes úton áll. A kocsit nem fékezték be, és feltételezhetjük, hogy súrlódásmentesen képes mozogni.

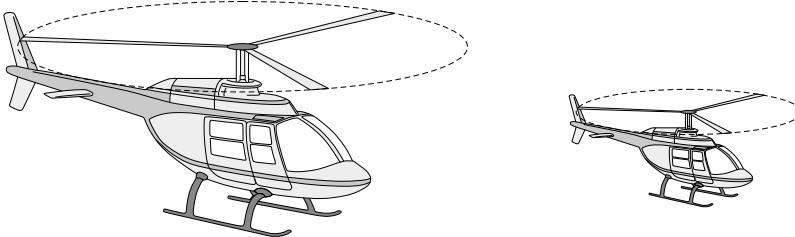


Melyik irányba fog megindulni a tartálykocsi, ha a bal oldali végének közelében lévő függőleges leeresztőcsapot megnyitjuk? Vajon a továbbiakban is ugyanarra fog mozogni?

F. 155.* Vízszintesen álló, félkör keresztmetszetű csatornába (a legmélyebben fekvő alkotóján átmenő függőleges síkban) ferdén vízszög csapódik be. Számítsuk ki a csatorna két végén kifolyó vízmennyiség arányát a vízszög beesési szögének függvényében! (Az áramló víz belső sűrűdása az adott körülmények között nem számottevő.)



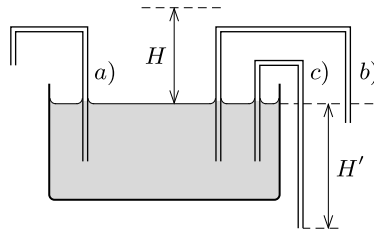
F. 156.** Egy bizonyos helikopter akkor tud egy helyben lebegni, ha motorja P mechanikai teljesítményt ad le. Egy másik helikopter ennek pontosan felére kicsinyített mása (minden lineáris mérete feleakkora). Mekkora P' mechanikai teljesítmény szükséges ahhoz, hogy ez a helikopter lebegjen?





Felületi feszültség

F. 157. Egy kapilláris csőben (melynek falát jól nedvesíti a víz) H magasságig emelkedik fel a folyadék. A csőből az *ábrán* látható módon három „akasztófát” készítettünk, és egy vízzel telt nagy tálba helyezük azokat. Kifolyik-e a víz a kapillárisok másik végén? ($H' > H$.)

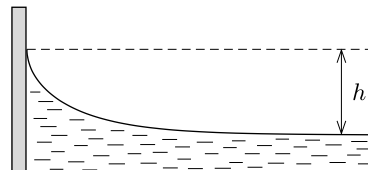


F. 158. Két különböző sugarú szappanbuborék összetapad, sugaraik az összetapadás után R , illetve r . Mekkora a két buborékot elválasztó hártya görbületi sugara? Mekkora az érintkezési kör sugara?

F. 159. Két egymás közelében lévő úszó tárgy *vonzóerővel* hat egymásra a felületi feszültség következtében függetlenül attól, hogy vízen vagy higanyon úsznak. Magyarazzuk meg, miért van ez így!

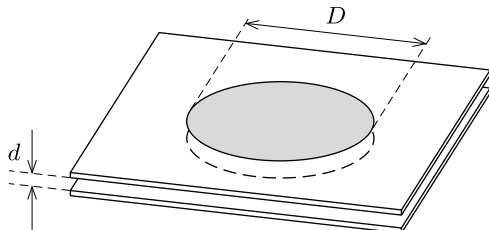
F. 160.* Egy pohárban lévő víz felszínén borotvapenge úszik. A pengét a pohár mozgatásával elsüllyesztjük. Hogyan változik eközben a víz szintje?

F. 161.* Egy akváriumban – melynek fala tiszta, zsírmentes – víz van. Az akvárium sík üvegfala mentén egy kicsit „felkúszik” a víz. Számítsuk ki az *ábrán* látható h emelkedési magasságot a víz α felületi feszültségének segítségével! (Feltehetjük, hogy a víz tökéletesen nedvesíti az üveget.)



F. 162.* Takarítás közben felborult egy vödör; a belőle kifolyt 5 liter víz összefüggő tócsát alkot a padlón. Mekkora a tócsa területe? A padló és a víz közötti illeszkedési szög 60° .

F. 163.* Két párhuzamos üveglemez közé víz szorult. A lemezek távolsága d , a „vízpogácsa” átmérője $D \gg d$. Mekkora erő hat az üveglemezek között? (Feltételezhetjük, hogy a víz tökéletesen nedvesíti az üveget.)



F. 164. Egy szabadon keringő űrhajó kabinjának belsejében mozdulatlanul lebeg egy kb. 4 cm átmérőjű vízgolyó és a közelében egy kb. 8 cm hosszúságú, vékony, kör keresztmetszetű, legömbölyített végű üvegpálca. A pálca egyik végét egészen finoman érintkezésbe hozzuk a „vízcseppel”. Vázoljuk fel, milyen alakot vesz fel a víz!

F. 165.* Egy űrállomáson szabadon lebegő, 8 cm belső átmérőjű üreges gömb űrtartalmának egyharmadát víz tölti ki, a többiben normál állapotú levegő van. Hogyan helyezkedik el a víz egyensúlyi állapotban, ha a gömb anyaga

- üveg, amelyet a víz tökéletesen nedvesít;
- ezüst, amelyre a víz illeszkedési szöge 90° ?

F. 166.** Egy zárt edényben különböző méretű, kicsiny folyadékcseppek találhatóak. (A folyadék nem nedvesíti az edény falát.) Ha elegendően hosszú ideig várunk, azt tapasztaljuk, hogy a kisebb cseppek mérete egyre csökken, a nagyobbaké pedig növekszik, míg végül egyetlen nagy csepp marad az edényben. Vajon mi a jelenség magyarázata?

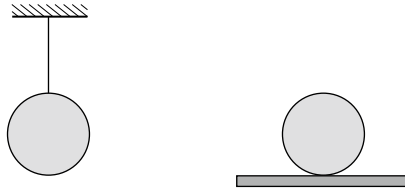
F. 167. Elképzelhető-e egy olyan méretű vízcsepp, amely külső hőközlés vagy lehűlés nélkül is képes párologni?

F. 168.** Hogyan lehet a felületi (kapilláris) vízhullámok terjedési sebességéből, illetve a víz belsejében terjedő hanghullámok sebességéből a *víz molekulák méretének nagyságrendjére* következtetni? Felhasználhatjuk azt a mérési adatot, hogy az 1 cm-es hullámhosszúságú vízhullámok sebessége kb. tízezerszer kisebb, mint a vízbeli hangsebesség.



Hőtan

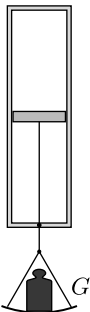
F. 169. Két egyforma gömbbel ugyanakkora hőt közlünk. Az egyik gömb hőszigetelő fonálon függ, a másik hőszigetelő lapon nyugszik. Melyik hőmérséklete lesz magasabb?



F. 170. Hogyan lehet 1 kg 0°C -os gyógyvizet felmelegíteni 1 kg 100°C -os vízzel 60°C -ra? Elvben legfeljebb mekkora hőmérsékletre lehet így felmelegíteni a gyógyvizet?

F. 171. Egy zárt tartályban T hőmérsékletű gáz található, a tartály fala pedig (kezdetben) T_1 hőmérsékletű. Mikor nyomja jobban a gáz a tartály falát, ha $T_1 < T$, vagy ha $T_1 > T$?

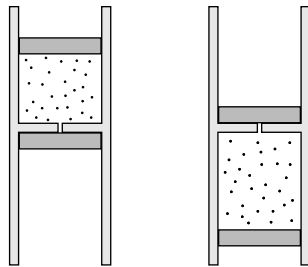
F. 172.* Egy fűthető kemencén *nagyon kis* lyuk van (egyébként a kemence zárt). A kemencén kívül 0°C hőmérsékletű, 100 kPa nyomású levegő van. A kemencében lévő levegőt a fűtőrendszer állandóan 57°C hőmérsékleten tartja. Kellő idő elteltével a kemencében a levegő nyomása állandósul. Adjunk becslést ennek az állandósult nyomásnak a nagyságára!



F. 173.* Egy függőlegesen álló, mindkét végén zárt, jó hőszigetelésű hengert könnyen mozgó, kis tömegű (emiatt kis hőkapacitású) dugattyú oszt két egyforma részre. A két részben 1-1 mólnyi normál állapotú levegő van.

A dugattyúra az *ábrán* látható módon egy G súlyú terhet akasztunk, emiatt az lesüllyed, majd jónéhány lengés után megáll. Mennyire nyomódik össze az alsó térrészben lévő gáz a dugattyú új egyensúlyi helyzetében, ha G nagyon nagy?

F. 174.* Függőleges tengelyű, mindkét végén nyitott, rögzített, hosszú henger ideálisnak tekinthető gázt tartalmaz. A gázt két egyforma, sűrűdásmentesen mozgó dugattyú zárja el környezetétől. A dugattyúk között egy rögzített, érdes válaszfal található, amelyen kis lyuk van. Kezdetben a bezárt gáz hőmérséklete megegyezik a külső levegő hőmérsékletével, az alsó dugattyút pedig a válaszfalnál tartjuk. A rendszert ebből a helyzetéből elengedve a dugattyúk lassan leereszkednek.



A végállapotban melyik esetben kerül mélyebbre az alsó dugattyú:

- ha a dugattyúk, a válaszfal és a henger fala is jó hőszigetelő, vagy
- ha a dugattyúk, a válaszfal és a henger fala is jó hővezető?

F. 175.** Alulról zárt, felül nyitott, 152 cm hosszú, függőlegesen álló, vékony, egyenes üvegcső alsó felében levegő, felső felében higany van. A bezárt levegőt lassan melegíteni kezdjük. Mennyi hőt kell közölnünk a bezárt levegővel, hogy a teljes higany mennyiség elhagyja a csövet?

Ábrázoljuk grafikusan a bezárt levegő mólhőjét a térfogat függvényében a folyamat közben! (A bezárt levegő anyagmennyisége $2,4 \cdot 10^{-3}$ mol, a külső légnyomás 76 Hg cm.)

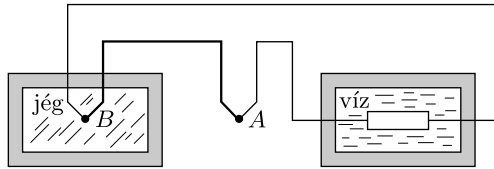
F. 176.* Túrázók és hegymászók körében ismert tény, hogy a magassággal felfelé haladva 100 méterenként 1°C -kal csökken a levegő hőmérséklete. A napsugárzás által felmelegített talaj alulról melegíti a felette lévő levegőt. Bár a légkör alsó rétege (a troposzféra) folyamatos mozgásban van, a hőmérséklet mégsem tud a légrétegek között kiegyenlítődni, mert a felemelkedő légtömegek (a levegő rossz hővezetőképessége és gyors mozgásuk miatt) nem képesek a felmelegedésükhöz szükséges hőt a környezetükből felvenni. Hogyan kapható meg egyszerű fizikai megfontolások segítségével a levegő hőmérsékletének közismert csökkenési üteme?

F. 177.* Hőszigetelő, könnyen táguló burokból álló gáz környezetében a nyomás p_1 -ről p_2 -re csökken, ezért a bezárt gáz kitágul és lehűl. Mikor csökken jobban a burokból álló gáz hőmérséklete: ha a külső nyomás csökkenése lassan, vagy ha hirtelen következik be?

F. 178.* Egy 10 literes tartályba lassan levegőt pumpálva a nyomást a légköri nyomás 10-szeresére növeljük. Mennyi munkát kell végeznünk eközben, ha a pumpa lökettérfogata 1 liter? (A tartály és a pumpa fala egyaránt jó hővezető, emiatt a hőmérséklet mindvégig állandónak tekinthető.)

F. 179. Van két hőszigetelt tartályunk, az egyikben m tömegű, T_1 hőmérsékletű víz található, a másikban ugyanakkora tömegű, T_2 hőmérsékletű víz van ($T_2 > T_1$). Alkalmos hőerőgépet építve legfeljebb mennyi munka vehető ki ebből a rendszerből? (A vizsgált hőmérséklettartományban a víz fajhőjét állandónak tekinthetjük.)

F. 180.** Egy termoelem egyik (A) forrasztása a $T_A = 27^\circ\text{C}$ hőmérsékletű szobában, a másik (B) forrasztás pedig egy hőszigetelt, $T_B = 0^\circ\text{C}$ -os jéggel teli edényben van. A termoelem által termelt elektromos energiát egy ellenállás segítségével vízmelegítésre használjuk. A jéggel azonos tömegű víz egy másik, szintén hőszigetelő edényben van. Hány fokkal melegszik fel a víz a jég elolvadásának pillanatáig?



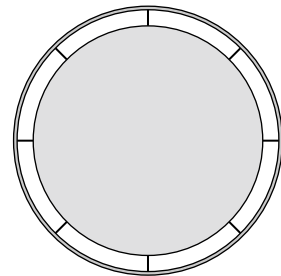
F. 181.** Legfeljebb hány fokra melegíthető fel napfény segítségével egy kicsiny, gömb alakú fekete test egy olyan vékony lencse felhasználásával, amelynek fókusz távolsága az átmérőjének kétszerese? Független-e az eredmény a kicsiny gömb sugarától?

F. 182. Derült őszi éjszakákon akkor is belepetheti a dér az autót, ha nem csökken 0°C alá a környező levegő hőmérséklete. Hogy lehet ez? Hova álljon az autó, hogy ne következzen be ez a jelenség?

F. 183. A távoli világűrben egy nagyméretű, gömb alakú, feketére festett űrszonda mozog. A szonda belsejében radioaktív energiaforrással táplált számítógép található, melynek működése miatt a szonda felülete (és a belseje is) 250 K hőmérsékletű.

a) Megváltozik-e (és ha igen, hogyan) a szonda hőmérséklete, ha kívülről egy ugyancsak gömb alakú, fekete burkolattal vesszük körül az űrszondát? (A hőszigetelő távtartókkal rögzített burkolat a szonda felületéhez közel, attól állandó távolságra helyezkedik el. A két felület között vákuum van.)

b) Mi történik akkor, ha nem egy, hanem nyolc koncentrikus burkolatot alkalmazunk?





Halmazállapot-változások

F. 184. Egyforma közönséges jégkockákat teszünk csapvízzel, illetve erősen sós vízzel telt egyforma edényekbe. A folyadék kezdetben mindkét edényben szobahőmérsékletű, és térfogatuk megegyezik. Melyik edényben olvad el hamarabb a jégkocka?

F. 185. Ha 1 kg 0°C -os víz megfagy, akkor 334 kJ hő szabadul fel. Mennyi hő szabadul fel 1 kg -10°C -os túlhűtött víz -10°C -os állandó hőmérsékleten történő megfagyása közben?

F. 186.* Adjunk (fizikai megfontolások alapján) nagyságrendi becslést arra, hogy milyen magas lehet a Földön a legmagasabb hegy? Hát a Marson?

F. 187. Egy nagy tó feletti levegő -2°C -os, a tó vize 0°C -os. Feltéve, hogy csak a hővezetés szerepe meghatározó, becsüljük meg, hogy mennyi idő alatt képződik a tó felszínén 10 cm-es jégréteg!

F. 188.* Ha egy 5 kilós mélyhűtött pulyka két nap alatt enged fel, akkor hány nap kell egy 8 tonnás szibériai mamutnak? (A kezdeti és a végső hőmérsékletet tekintsük azonosnak!)

F. 189. Egy 1 m^3 -es, tökéletesen légmentesített, -10°C hőmérsékletű tartályba ugyancsak -10°C -os, 0,6 kg tömegű jeget juttatunk egy zsilip segítségével. Ezután a tartály hőmérsékletét 100°C -ra növeljük. Mennyivel több hő kell ehhez, mintha az üres tartály hőmérsékletét emeltük volna fel 100°C -ra?

F. 190.* Egy erősfalú tartály felében víz, felette normál állapotú levegő van. A tartályt lezárjuk, majd lassan melegíteni kezdjük. Mikor forr fel a tartályban lévő víz?

F. 191. Egy erősfalú tartály alsó részében szobahőmérsékleten a tartály térfogatának

- a) 20%-ában,
- b) 80%-ában,
- c) 32,6%-ában

víz, felette vízgőz található. A tartályt lassan melegíteni kezdjük. Milyen halmazállapot(ok)ban találjuk a tartályban a vizet növekvő hőmérsékleteken?

F. 192. Csökkentsük vagy növeljük a vízgőzzel telített levegő térfogatát annak érdekében, hogy a vízgőz egy része kicsapódjon a levegőből?

F. 193.* Felül nyitott, vékony kémcsőben vizet forralunk. Közvetlenül mielőtt az utolsó néhány csepp is elforrna, a kémcsövet hirtelen légmentesen lezárjuk. Ezután a kémcső tetején a hőmérsékletet lassan $200\text{ }^\circ\text{C}$ -ra emeljük, miközben gondoskodunk arról (ha kell hűtéssel, ha kell fűtéssel), hogy a kémcső legalján a hőmérséklet $100\text{ }^\circ\text{C}$ maradjon.

Mekkora lesz a kémcsőben a gőznyomás?

F. 194.* A távoli jövőben sikerül kapcsolatot találnunk egy olyan exobolygó lakóival, amelynek légköre a Földhöz hasonlóan $1\text{ atm} \approx 101\text{ kPa}$ nyomású, és szintén oxigén- és nitrogéngáz keverékből áll. A hasonlóság miatt ez a bolygó az *Exo-Föld* nevet kapja. A földi kutatók és az idegen civilizáció tudósai egyeztetik a légkör fizikai-kémiai adatait, és megállapítják, hogy mindkét bolygón normál légköri nyomás mellett a folyékony nitrogén $77,4\text{ K}$ hőmérsékleten forr, míg a folyékony oxigén forráspontja $90,2\text{ K}$.

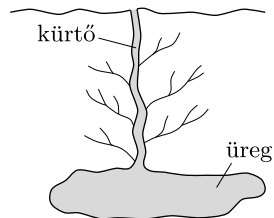
Mindkét bolygón elvégzik a levegő izotermikus összenyomását $77,4\text{ K}$ állandó hőmérsékleten. Mindkét bolygón 113 kPa nyomás elérésekor kezd a levegő cseppfolyósodni, azonban a Földön *oxigén*, az Exo-Földön pedig *nitrogén* csapódik ki először.

a) Milyen összetételű a légkör az Exo-Földön?

b) Milyen összetétel esetén kezdene *egyszerre* cseppfolyósodni az oxigén és a nitrogén, ha szintén $77,4\text{ K}$ állandó hőmérsékleten végeznénk el az izotermikus összenyomást, és ez mekkora nyomás elérésekor történne meg?

F. 195.* A Yellowstone Nemzeti Park leghíresebb gejzire az Öreg Hűségés (Old Faithful). Ezt a gejzírt egy nagy, föld alatti üregnek tekinthetjük, amely egy keskeny kúrtóval csatlakozik a felszínhez.

A vulkáni utóműködés következtében meleg talaj az üregben lévő vizet felforralja. A forrás megindulása után a kúrtóban található víz kilöködik, majd 4 perc alatt hozzávetőlegesen 44 tonna vízgőz szökik ki a gejzírből.



Kitörés után a felszín alatti források az üreget és a kúrtót 20-30 perc alatt a földfelszínig feltöltik vízzel, majd az egész folyamat kezdődik előlről. A kitörések 90 percenként ismétlődnek.

A geológiai fúrások azt mutatják, hogy ezen a területen a földfelszín alatti hőmérséklet lefelé haladva méterenként $1\text{ }^\circ\text{C}$ értékkel emelkedik. Határozzuk meg, hogy minimálisan milyen mélyen van az üreg! Ha feltesszük, hogy az üreg a minimális mélységben van, mekkora a térfogata?

F. 196. Két, egyébként egyforma lombik közül az egyiknek a nyaka egyenes, a másiké lefelé görbül az *ábra* szerint. A két lombikba azonos mennyiségű

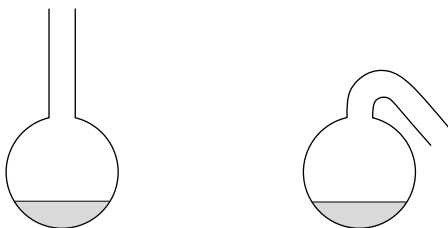
a) vizet,

b) étert

töltünk, és gondoskodunk róla, hogy mindkét lombikban a folyadék hőmérséklete az a) esetben 100°C ,

a b) esetben $34,6^\circ\text{C}$

legyen. Melyik lombikból fog el hamarabb a folyadék az egyik, illetve a másik esetben?

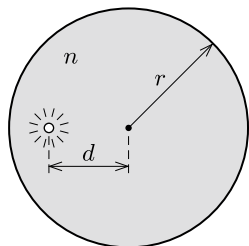
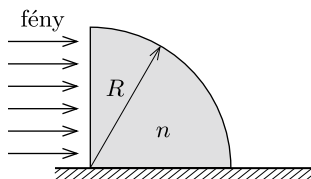


F. 197.* Két egyenes, függőlegesen álló, felül nyitott, vékony kémcső közül az egyik 20 cm, a másik 40 cm magas; keresztmetszetük egyforma. Az elsőbe 1 cm^3 , a másodikba 2 cm^3 kölnivizet töltünk. Vajon körülbelül hányszor több idő alatt párolog el teljesen a kölni a második kémcsőből, mint az elsőből? Módosul-e a válasz, ha mindkét kémcsövet leragasztjuk, és a fedőlapokon csupán egy-egy parányi (egyforma) nyílást hagyunk?



Fénytan

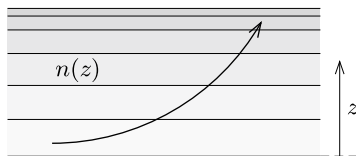
F. 198. Vízszintes asztallapra fektetünk egy negyedhenger alakú üvegtömböt, amelynek függőlegesen álló síklapját rá merőleges, egyenletes fénynyalábbal világítjuk meg. Hol tapasztalhatunk a henger után az asztallapon fényfoltot, ha a henger sugara $R = 5$ cm, anyagának törésmutatója $n = 1,5$?



F. 199. ** Egy r sugarú, tömör, n törésmutatójú üvegből készült gömb belsejében, a középponttól d távolságra egy pontszerű fényforrás helyezkedik el. A gömb különlegessége, hogy a fényforrásról *tökéletes* (látszólagos) képet alkot, azaz a forrástól az *ábra* jobb oldali térfelébe induló, majd a gömb felületén megtörő fénysugarak meghosszabbításai ugyanabban a pontban metszik egymást.

Mekkora a d távolság, és hol jön létre a fényforrás éles képe?

F. 200.* Egy közegben z irányban változik az optikai törésmutató. Erre merőlegesen vékony fénysugarat indítunk, amely a közegben körív mentén halad. Hogyan függ a törésmutató z -től? Mekkora lehet maximálisan a fény által befutott körív?



F. 201. Egy gömb alakú bolygón a légkör törésmutatója a felszíntől mért h magasság függvényében az

$$n(h) = \frac{n_0}{1 + \varepsilon h}$$

összefüggés szerint változik, ahol n_0 és ε állandók. A bolygó különlegessége, hogy a tetszőleges magasságban vízszintesen elindított lézersugár mindig „körbeszalad” a bolygón. Mekkora a bolygó sugara?

F. 202. Egy rövidlátó ember leveszi a szemüvegét, és miközben egyre távolabb tolja el magától a szemüveget, azon keresztül egy meghatározott tárgyat figyel. Meglepetten tapasztalja, hogy a tárgy eleinte kisebbnek, majd egyre nagyobb-nak látszik. Mi ennek az oka? A szemüveg melyik helyzetében látszik a tárgy a legkisebbnek?

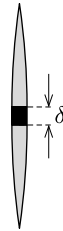
F. 203.* Milyen alakzattá képezi egy f fókusz-távolságú gyűjtőlencse a fókusza körüli r sugarú gömböt?

F. 204. Egy optikai padon az ernyő és egy kis izzószál távolsága 120 cm. A lencsét közöttük mozgatva két helyzetben kapunk éles képet, és a két kép méretének aránya 1 : 9. Mekkora a lencse fókusz-távolsága? Melyik kép világosabb? Határozzuk meg a két kép fényességének arányát!

F. 205.* Hányszor „fényesebb” a Hold képe egy távcsövön keresztül nézve, mint szabadszemmel? És a csillagok?

F. 206.* Egy f fókusz-távolságú gyűjtőlencsét az optikai tengelyét tartalmazó síkkal kettévágunk, majd a két féllencse közé egy kicsiny δ vastagságú, fekete lemezkét toldunk be. A lencsétől $t > f$ távolságra (az „optikai tengelyre”) egy monokromatikus, λ hullámhosszúságú, pontszerű fényforrást helyezünk.

Hány interferenciacsíkot láthatunk a lencse túloldalán H távolságra elhelyezett, az optikai tengelyre merőleges síkú ernyőn?
(Adatok: $f = 10$ cm, $t = 20$ cm, $\delta = 1$ mm, $\lambda = 0,5$ μ m, $H = 50$ cm.)



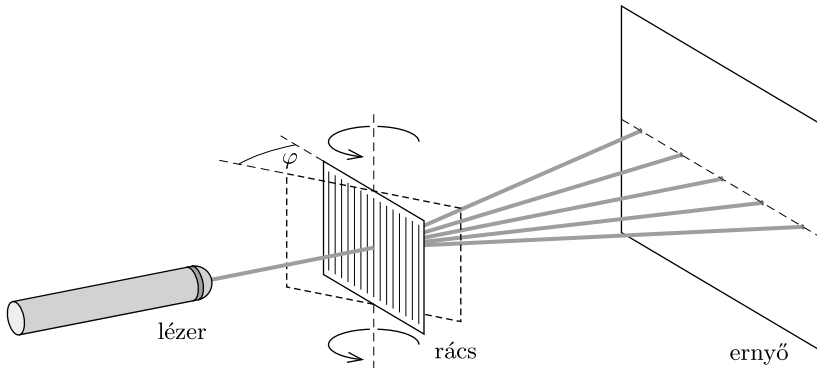
F. 207.* Egy furcsa optikai rácson a rések nem egyenlő közönként helyezkednek el: a szomszédos rések távolsága felváltva d és $3d$. Milyen elhajlási kép alakul ki az L távolságra elhelyezett ernyőn, ha a rácst (annak síkjára merőlegesen) λ hullámhosszúságú lézertfényvel világítjuk meg? (A rések szélessége egyforma és sokkal kisebb a távolságuknál, valamint $\lambda \ll d$.)

F. 208.* Egy optikai rácstra, rá merőlegesen, λ hullámhosszúságú lézertfényt bocsátunk. A rács, melynek szomszédos rései d távolságra vannak egymástól, nem egészen szokványos: szélesebb és keskenyebb rések felváltva követik egymást. (Például a páratlan sorszámúak szélessége a , a párosaké b , ahol $b < a$ és mindkettő sokkal kisebb, mint d .)

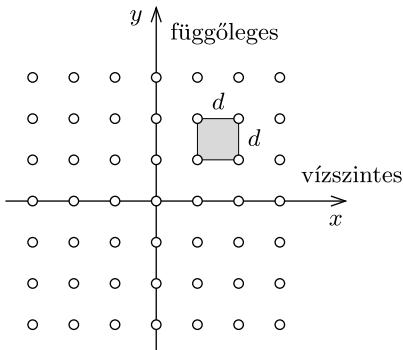
A rács fenti sajátsága jellegzetes, könnyen észrevehető módon mutatkozik meg az elhajlási képben. Hogyan? Milyen lesz az elhajlási kép a $b \ll a$ és $b \approx a$ esetekben? (A rács és az ernyő távolsága L , és $\lambda \ll d$.)

F. 209. Vízszintesen haladó, keskeny, λ hullámhosszúságú lézernyalábbal világítunk meg egy – a lézertfény irányára merőlegesen álló – optikai rácst, amelynek d távolságú rései függőlegesek. A rácstól viszonylag messze, a beeső lézertfény irányára merőlegesen elhelyezett ernyőn kialakuló elhajlási kép – mint az jól ismert – vízszintes egyenesen elhelyezkedő „pontosorból” (valójában fényfoltokból) áll.

Hogyan változik meg az ernyőn látható kép (lásd a következő oldal felső ábráját), ha a rácst *függőleges* középvonala körül φ szöggel elforgatjuk? Vizsgáljuk meg részletesebben a „nagyon lapos beesés” (vagyis a $\varphi \approx 90^\circ$) határesetet! Mekkora rácsállandó esetén kaphatunk jól megfigyelhető interferenciaképet?



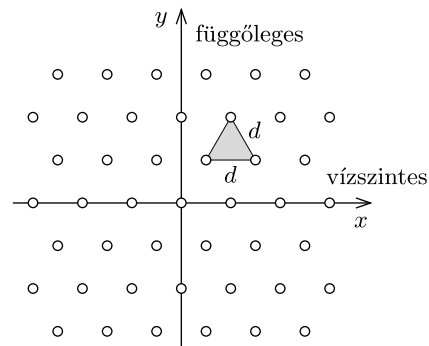
F. 210.** Hogyan változik meg az *előző feladatban* leírt elrendezésben az ernyőn látható elhajlási kép, ha a rácsot *vízszintes* középvonala körül forgatjuk el valamekkora φ szöggel? (Legyen például $\varphi = 45^\circ$.)



F. 212. Egy átlátszatlan lapon kicsiny lyukak vannak az *ábrán* látható háromszögrács elrendezésben. A lapot monokromatikus, λ hullámhosszúságú lézertfényvel világítjuk meg merőlegesen. Milyen elhajlási képet figyelhetünk meg a rácsból L távolságra elhelyezett ernyőn, ha a rácsállandó d ? (Feltételezhetjük, hogy $L \gg d \gg \lambda$.)

F. 211.* Egy átlátszatlan lapon kicsiny lyukak vannak az *ábrán* látható négyzetrács elrendezésben. A lapot monokromatikus, λ hullámhosszúságú lézertfényvel világítjuk meg merőlegesen. Milyen elhajlási képet figyelhetünk meg a rácsból L távolságra elhelyezett ernyőn, ha a rácsállandó d ? (Feltételezhetjük, hogy $L \gg d \gg \lambda$.)

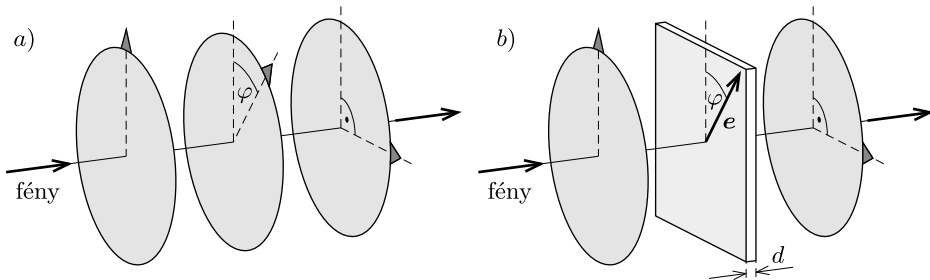
Hogyan változik az interferenciakép, ha a lapot a négyzet egyik oldala mentén N -szeresére nyújtjuk, és így a rajta lévő lyukak elrendeződése „téglalaprács” lesz?



F. 213.* a) Keresztezett állású polárszűrőkön nem jut át a fény. Ha közéjük becsúztatunk egy harmadik polárszűrőt, valamennyi fény átjuthat. A bejövő fény intenzitásának legfeljebb hányadrésze juthat át? Mekkora ebben az esetben az a) ábrán látható φ szög?

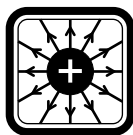
b) Úgy is átjuthat fény a keresztezett állású polárszűrőkön, ha közéjük egy velük párhuzamos, kettőtörő kristályból készült plánparalel lemezt helyezünk. Ennek a lemeznek az a speciális tulajdonsága, hogy törésmutatója a síkjában fekvő e iránnyal párhuzamos polarizációjú fényre nézve n_1 , az e irányra merőleges polarizációjú fényre nézve pedig n_2 .

Legfeljebb hányadrésze juthat át a bejövő fény intenzitásának, ha a rendszert (a polárszűrők és a lemez síkjára merőlegesen) λ hullámhosszú, monokromatikus fényrel világítjuk meg? Ebben az esetben mekkorának kell lennie a kettőtörő lemez d vastagságának, és hogyan válasszuk meg az e irányt?



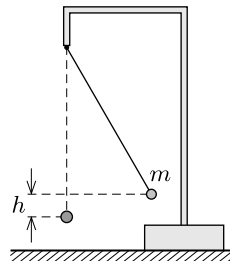
F. 214.** a) Péter, a tizedik osztályos gimnazista nagytakarításkor egy régi, 3D-s filmvetítéskor használatos szemüvegre bukkant, amivel kísérletezni kezdett. A szemüveggel a fején tükörbe nézve azt tapasztalta, hogy ha az egyik szemét becsukja, akkor a tükörképen csak a nyitott szemét látja; a másik, csukott szeme előtti szemüveglencsét teljesen sötétnek látja. Mi lehet Péter kísérletének magyarázata?

b) Néhány héttel később Péter 3D-s moziban járt, és hazatérve az újonnan kapott 3D-s szemüveggel is elvégezi a kísérletet. Legnagyobb meglepetésére ezúttal épp fordított eredményre jut: csak a becsukott szemét látja a tükörben, a nyitott szemét pedig nem. Segítsünk Péternek megmagyarázni a különös tapasztalatokat!



Elektrosztatika I. (ponttöltések, szigetelők)

F. 215. Egy m tömegű, kicsiny golyócskát egy állványról lelógó, könnyű szigetelő szál alsó végéhez rögzítünk, majd a golyót pozitív töltéssel feltöltjük. Egy másik, ugyancsak pozitív töltésű kis testet jó messziről lassan éppen oda viszünk, ahol eredetileg az első test volt. Eközben az első test h magasságba emelkedik. Mennyi munkát végeztünk a második test mozgatása során?



F. 216.* Vákuumban, mindentől távol elhelyezkedő ponttöltések egymás elektromos terében egyensúlyban vannak. Mennyi a töltésrendszer elektrosztatikus kölcsönhatási energiája? Stabil vagy instabil az egyensúly?

F. 217. Két hosszú, vízszintes, párhuzamos, egymástól d távolságra lévő, rögzített sínen egy-egy kicsiny gyöngyszem csúszhat súrlódásmentesen az ábrán látható módon. A gyöngyszemek tömege m és M , elektromos töltésük q és Q . Kezdetben az egyik áll, a másik elég messze van, és v_0 sebességgel közeledik. Hogyan mozognak a gyöngyök hosszú idő múlva?



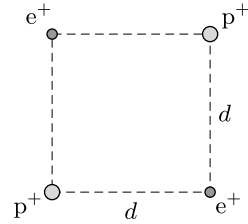
F. 218. Vákuumban, egy háromszög csúcsaiban három kis gyöngyöt helyezünk el, tömegük m_1 , m_2 és m_3 . Mindhárom gyöngy pozitív elektromos töltéssel rendelkezik, ezek nagysága Q_1 , Q_2 és Q_3 . A gyöngyöket nyugalmi helyzetükből elengedve azt tapasztaljuk, hogy egyenes (de nem egybeeső) pályán mozognak. (A gravitáció hatása elhanyagolható.)

Mi a feltétele annak, hogy ez a speciális mozgás megvalósulhasson? Mekkora a gyöngyök által kijelölt háromszög szögei az indítás pillanatában (és a továbbiakban), ha a három gyöngy fajlagos töltésének aránya

$$\frac{Q_1}{m_1} : \frac{Q_2}{m_2} : \frac{Q_3}{m_3} = 1 : 2 : 3?$$

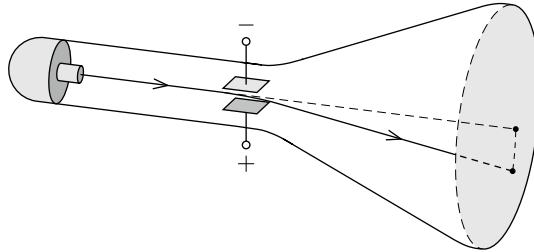
F. 219.* Egy $d = 1$ cm oldalélű négyzet átellenes csúcaiban egy-egy pozitron, a másik két csúcsában pedig egy-egy proton található. (A pozitron az elektronnal azonos tömegű, de vele ellentétes töltésű részecske.)

Az eredetileg rögzített részecskéket hirtelen szabadon engedjük. Mekkora sebességgel fognak mozogni a részecskék akkor, amikor már nagyon messze lesznek egymástól?



A részecskéket tekintjük klasszikus tömegpontoknak, pontosabban 1 cm-nél sokkal kisebb méretű golyócskáknak, amelyek egymás elektromos terében mozognak. A gravitáció figyelmen kívül hagyható.

F. 220.* Egy katódsugárcsőben kisméretű síkkondenzátorral lehet eltéríteni az elektronágyúból érkező elektronokat. Ha a kondenzátor töltetlen, akkor az elektronok a forrás elhagyása után változatlan nagyságú és irányú sebességgel csapódnak be az ernyőbe.



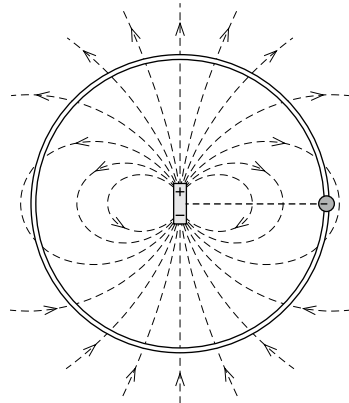
Ha a kondenzátoron *állandó nagyságú töltés* van, az elektronok pályája elgörbül. Vajon a kezdősebességükhöz képest nagyobb vagy kisebb sebességgel csapódnak be ekkor az elektronok az ernyőbe? (A kondenzátor és az elektronágyú távolsága, valamint a kondenzátor és az ernyő távolsága sokkal nagyobb a kondenzátorlemez méreténél.)

F. 221.* Egy elektromosan töltött kis gyöngyszem vízszintes síkban súrlódásmentesen mozoghat egy kör alakú szigetelő huzalon. A kör közép-pontjában vízszintes tengelyű, rögzített helyzetű elektromos dipól található. Kezdetben a gyöngyszem a dipól tengelyére merőleges helyzetben áll.

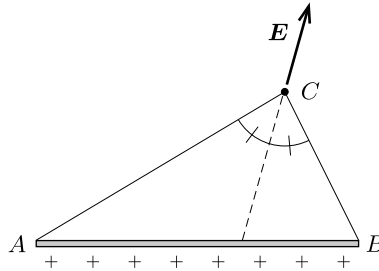
a) Mekkora erővel nyomja mozgása során a gyöngyszem a huzalt?

b) Hol áll meg a gyöngyszem az elengedése után először?

c) Milyen pályán mozogna a gyöngyszem, ha nem lenne felfűzve a huzalra?



F. 222.* Egy hosszú, vékony szigetelő pálcán egyenletesen elosztva elektromos töltések helyezkednek el. Mutassuk meg, hogy az A és B végpontú pálcát egy tetszőleges C pontban olyan elektromos térerősséget hoz létre, amelynek iránya az ABC háromszög C csúcsához tartozó szögfelezőjével esik egybe!

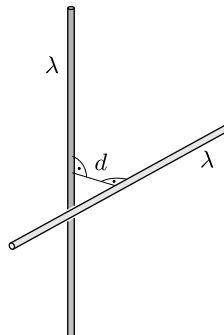


F. 223. Az előző feladat eredménye alapján határozzuk meg, hogy milyen irányú és nagyságú az elektromos térerősség egy nagyon hosszú, hosszegységenként λ töltéssel egyenletesen feltöltött pálcától r távolságra, az egyik végpontján átmenő, a pálcára merőleges síkban!

F. 224.* Különböző hosszúságú, vékony, szigetelő rudakból háromszöget illesztünk össze, majd a rudakat egyenletesen (ugyanakkora vonalmenti töltéssűrűséggel) elektromosan feltöltjük. A háromszög síkjában hol lesz zérus az elektromos térerősség értéke?

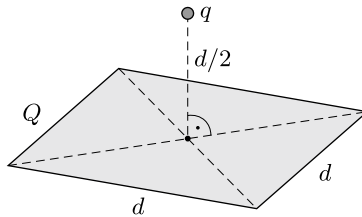
F. 225.* Három végtelen hosszúnak tekinthető, azonos síkban fekvő, egymást egy általános háromszögben keresztező vékony szigetelőpálcát egyenletesen, azonos vonalmenti töltéssűrűséggel feltöltünk. Hová helyezhetünk el egy ponttöltést, hogy egyensúlyban legyen?

F. 226. Két igen hosszú, λ lineáris töltéssűrűségű, vékony műanyagpálca (kitérő egyeneseket alkotva) egymásra merőlegesen, egymástól d távolságra helyezkedik el. Számítsuk ki a közöttük fellépő taszítóerőt!



F. 227.* Két nagyon hosszú, vékony, párhuzamos, szigetelő pálcát azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltéssel egyenletesen feltöltöttünk. Milyen alakúak a kialakuló elektromos mező erővonalai?

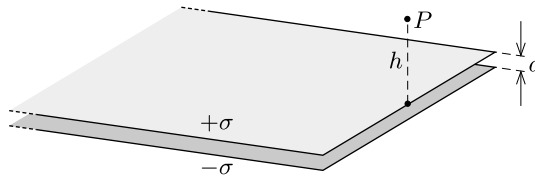
F. 228.* Egy d oldalélű, négyzet alakú szigetelőlemezt Q töltéssel egyenletesen feltöltöttünk. A lemez síkjára merőleges szimmetriatengelyen, a lemeztől $d/2$ távolságra q töltésű pontszerű testet helyezünk el. Mekkora erő hat a ponttöltésre?



F. 229.* Egyenletesen feltöltött, Q töltésű, d oldalélű szigetelő négyzetlapokból kockát ragasztunk össze. Mekkora elektrosztatikus taszítóerő hat az egyes lapokra?

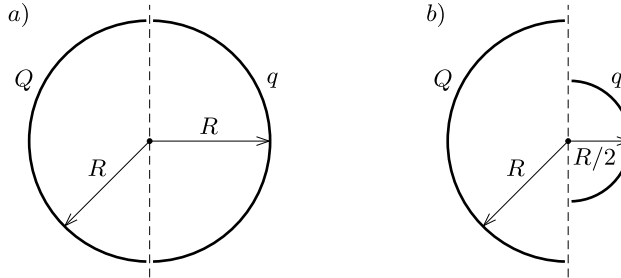
F. 230.** Két nagy kiterjedésű, egyforma, téglalap alakú szigetelőlemez vízszintes helyzetben pontosan egymás felett helyezkedik el egymástól d távolságra. A lemezek egyenletesen töltöttek, a felső felületi töltéssűrűsége $+\sigma$, az alsóé $-\sigma$.

Mekkora és közelítőleg milyen irányú az elektromos térerősség az *ábrán* látható P pontban, ami a felső lemez valamelyik élének felezőpontja felett h magasságban található? (A h távolság sokkal kisebb a szigetelőlemezek oldalhosszainál, de sokkal nagyobb a d távolságnál.)



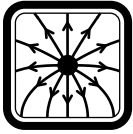
F. 231.* Egy vékonyfalú, R sugarú, Q töltéssel egyenletesen feltöltött szigetelő gömbhéjon kis lyuk van. Mekkora az elektromos térerősség a lyuk középpontjában? Ábrázoljuk vázlatosan a lyukas gömbhéj erővonalait!

F. 232.** Két szigetelő félgömbhéjat (például két fél pingponglabdát) egymás közvetlen közelében helyezünk el az *a*) ábra szerint, koncentrikusan. Az egyikre Q , a másikra q töltést viszünk fel, egyenletesen.



- a) Mekkora erőt fejt ki egymásra e két test?
 b) Megváltozik-e az eredmény, ha az egyik félgömbhéj csak feleakkora sugarú?

F. 233.* Hányszor akkora egy egyenletes térfogati töltéssűrűségű, kocka alakú szigetelő test elektrosztatikus potenciáljának értéke a kocka középpontjában, mint a kocka csúcsán? (A potenciált a végtelenben választjuk nullának.)

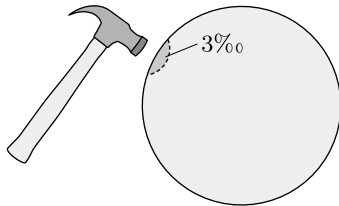
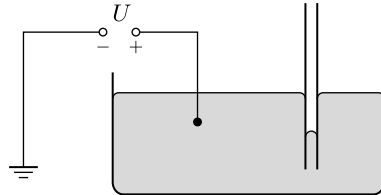


Elektrosztatika II. (vezetők)

F. 234. Egy távoli bolygó a Földhöz képest nagyon nagy elektromos potenciállal rendelkezik. Egy fémből készült űrhajó indul a Földről, és le akar szállni a bolygóra.

Veszélyes-e ez a vállalkozás? Mi történik akkor, amikor az űrhajósok kinyitják az űrhajó ajtaját és kilépnek a bolygó felszínére?

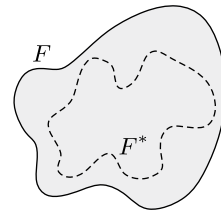
F. 235.* Egy üvegedényben higany van, amelybe üvekapilláris nyúlik. A higanyra a földhöz képest nagy feszültséget kapcsolunk. Elmozdul-e a kapillárisban a higany, és ha igen, merre?



F. 236. Hány ezrelékkal változik meg egy magában álló fémgömb kapacitása (a „végtelenhez” képest), ha a felületén valahol kicsit behorpasztjuk úgy, hogy a gömb térfogata az eredeti térfogatának 3 ezrelékével csökken?

F. 237.* Vékony fémlapból készült test zárt F felületet alkot, melynek kapacitása C (a „végtelen távoli” másik fegyverzethez képest). A fémlapot behorpasztjuk úgy, hogy a kialakuló F^* felület teljes egészében az eredeti felület belsejében, vagy annak határán helyezkedjen el.

Lássuk be, hogy a megváltozott alakú test kapacitása C -nél kisebb!



F. 238. A síkkondenzátor széleinél inhomogén elektromos mező alakul ki, de ezt általában el szoktuk hanyagolni. Nagyobb vagy kisebb értéket kapnánk a kapacitás nagyságára, ha ezt a tényrt is figyelembe vennénk?

F. 239. Egy C kapacitású síkkondenzátor lemezeire Q_1 és Q_2 töltést vittünk. Mekkora a kondenzátor feszültsége?

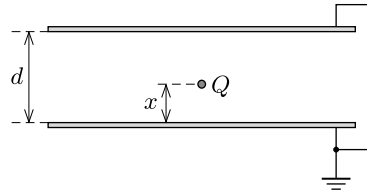
F. 240. U feszültségre kapcsolt síkkondenzátor lemezeinek területe A , távolságuk d . Mekkora munkavégzés árán tudjuk a kondenzátor lemezeit $2d$ távolságra széthúzni? Hogyan változik meg eközben a kondenzátor energiája?

F. 241. Egy síkkondenzátor lemezei közé lassan egy szigetelőlapot csúsztatunk, amely teljesen kitölti a lemezek közötti teret, és amelynek relatív dielektromos állandója (permittivitása) ε_r . Mekkora erő hat a szigetelőlapra, ha a csúsztatás közben a síkkondenzátor

- töltését,
- feszültségét

tartjuk állandó értéken? Hogyan változik meg a szigetelőlap hatására a kondenzátor energiája az *a)* és *b)* esetben?

F. 242.* Egy síkkondenzátor d távolságra lévő lemezeit leföldeljük, majd a kondenzátor belsejébe, az egyik lemeztől x távolságra egy Q töltésű, kis kiterjedésű testet helyezünk. Mekkora töltés halmozódik fel az egyes lemezeken?

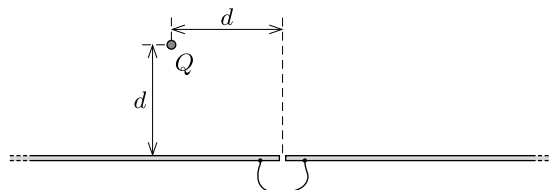


F. 243.* Az előző feladatban szereplő síkkondenzátor földelt lemezei közé az egyik lemeztől x , a másiktól $d - x$ távolságra egy p dipólmomentumú, pontszerű dipólt helyezünk, a lemezek síkjára merőlegesen. Mekkora töltés halmozódik fel az egyes lemezeken?

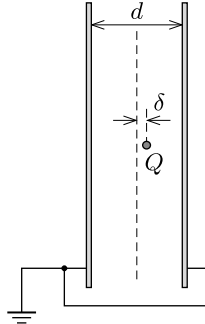
F. 244.* Egy m tömegű, Q töltésű pontszerű testet egy nagyméretű fémsík közelében, attól d távolságban magára hagyunk. Mennyi idő alatt éri el a test a rögzített fémsíkot? (A gravitáció hatását ne vegyük figyelembe!)

F. 245.* Szigetelő fonálon függő, 1 cm átmérőjű műanyag golyó felszínén egyenletesen elosztva 10^{-8} C töltés helyezkedik el. A golyót egy széles, nagy tálban lévő sós víz fölé engedjük úgy, hogy az alja 1 cm-re legyen a víztől. A víz felszíne a golyó alatt egy picit megemelkedik. Mekkora ez az emelkedés? (A felületi feszültség szerepét elhanyagolhatjuk, a sós víz sűrűségét vehetjük 1000 kg/m^3 -nek.)

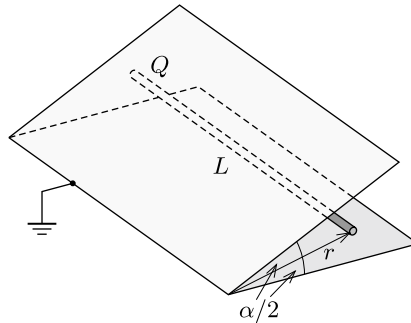
F. 246.** Két nagy kiterjedésű, azonos méretű, téglalap alakú töltetlen fémlap közös síkban, párhuzamosan, egymáshoz nagyon közel helyezkedik el. A lemezeket egy vezetékkel összekötjük, majd a közelükben egy Q ponttöltést helyezünk el az *ábrán* látható módon. Mennyi töltés halmozódik fel az egyes lemezeken?



F. 247.* Egy síkkondenzátor d távolságban lévő lemezeit leföldeljük, majd a lemezek között félúton elhelyezkedő (képzelt) síktól $\delta \ll d$ távolságra egy Q töltésű, kicsiny gyöngyöt helyezünk el. Mekkora erő hat a gyöngyre?



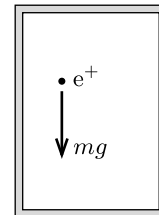
F. 248.* Két nagyméretű, földelt fémlap α szöget zár be egymással. A szögfelező síkban, a síkok metszésvonalától r távolságban egy L hosszúságú ($L \gg r$), egyenletesen elosztott Q töltésű, vékony pálcát találhatók.



Mekkora erő hat a pálcára az elektromos megosztás következtében, ha

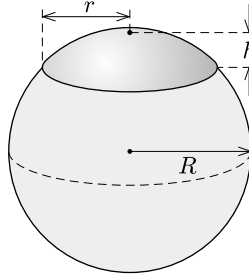
- $\alpha = 180^\circ$;
- $\alpha = 18^\circ$?

F. 249.* Hogyan mozog egy pozitron (az elektronnal azonos tömegű, de ellentétes töltésű részecske) egy Faraday-kalitkában, ha kezdősebesség nélkül „elejtjük”? (A pozitront tekintjük klasszikus részecskének, amelyre az elektromos erőkön kívül a földi gravitációs erőter is hat. A kalitka mérete olyan, hogy a tükörtöltések hatása elhanyagolható.)

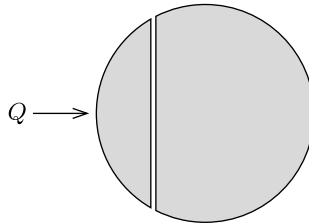


F. 250.** Egy R sugarú, vékony fémkorongnak Q töltést adunk. Határozzuk meg a korong töltéeloszlását!

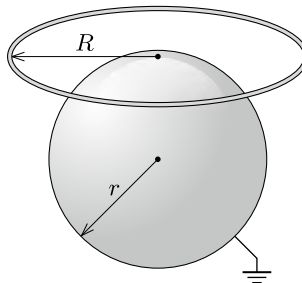
F. 251. Van de Graaff-generátor R sugarú gömbjének tetejére d vastagságú, ρ sűrűségű, r alapsugarú, alufóliából készült gömbsüveget helyezünk. Mekkora feszültségnél emelkedik fel a süveg a gömbről?



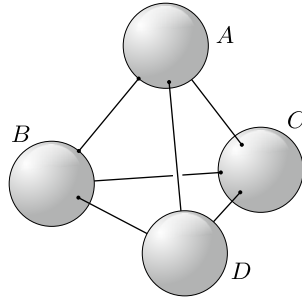
F. 252.* Egy ólmgömböt egy sík mentén két részre vágunk az *ábra* szerint. A vágási felületet hajszálvékony szigetelőréteggel látjuk el, utána a részeket újra teljes gömbbé egyesítjük. Ezután a gömb bal oldali részére kicsiny Q töltést viszünk. Ábrázoljuk a gömb körül kialakuló erővonalképet!



F. 253. Egy R sugarú, vékony fémkarikát feltöltünk úgy, hogy középpontjában a potenciál U_0 értékű legyen. Ezután a karikát vízszintes helyzetben tartva egy r sugarú, földelt fémgömb fölé helyezzük úgy, hogy a karika középpontja éppen a gömb felszínére essen. Mekkora töltés halmozódik fel a gömbön?



F. 254.* Egy szabályos tetraéder csúcsaiban egyforma fémgömbök helyezkednek el (a gömbök nem érnek össze). Egyetlen (A) gömbre vitt 20 nC töltés azt ugyanakkora potenciálra tölti fel, mintha A -nak és egy másik gömbnek adnánk $15\text{--}15\text{ nC}$ töltést. Mekkora egyenlő töltéseket kellene adnunk A -nak és két másiknak, és mekkorát mind a négy gömbnek, hogy az A gömb potenciálja mindig ugyanakkora legyen?



F. 255.* Egy R sugarú, vékonyfalú fémgömbhöz középpontjától $d > R$ távolságra Q töltésű kicsiny gyöngyöt helyezünk el. Mekkora erő hat a gyöngyre, ha a fémgömbhöz

- földelt
- töltetlen
- Q' töltéssel rendelkezik?

Mekkora lenne a gyöngyre ható erő a három esetben, ha a gyöngy a gömbhöz belsejében, a középponttól $d < R$ távolságra helyezkedne el?

F. 256.** Homogén, E_0 térerősségű elektromos mezőbe R sugarú, töltetlen fémgömböt helyezünk.

- Milyen elektromos tér alakul ki a gömb körül?
- Adjuk meg a gömb töltésseloszlását!



Magnetosztatika (időben állandó mágneses mező)

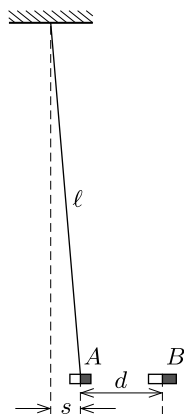
F. 257. Két egyforma, kisméretű rúd mágnes egymástól távol helyezkedik el az *ábrán* látható módon.



Vajon melyik esetben végzünk több munkát és hányszor többet: ha a jobb oldali mágnesrúd tengelyét 180° -kal elforgatjuk, vagy ha a mágneseket összekötő szakasz meghosszabbítása mentén a jobb oldali mágneset nagyon messzire eltávolítjuk a bal oldalitól?

F. 258.* Az m tömegű, nagyon rövid, A jelű mágnes vízszintes helyzetében $\ell = 1$ m hosszúságú fonálra függesztettük. A szintén nagyon rövid, B jelű mágneset lassan A közelébe hozzuk úgy, hogy a két mágnes hossztengelye mindvégig közös, vízszintes egyenesen legyen. Amikor a két mágnes középpontja $d = 4$ cm távol van egymástól, és az A mágnes középpontjának elmozdulása az eredeti helyzetétől $s = 1$ cm, akkor az A jelű mágnes egyszer csak váratlanul a B mágneshez csapódik.

a) A mágnesek közötti kölcsönhatási erőt az x távolságuk függvényében az $F_{\text{magn}}(x) = \pm K/x^n$ összefüggés írja le, amelyben az előjel a mágnesek egymáshoz viszonyított elhelyezkedésétől függ. A megadott adatok alapján határozzuk meg az n kitevő és a K állandó értékét!

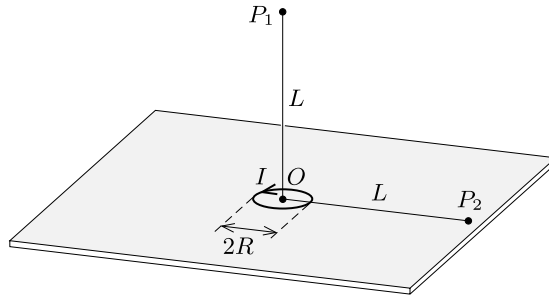


b) A B mágneset egy alul zárt, függőleges üvegcső alá tesszük. Az A mágneset után úgy helyezük el az üvegcsőben, hogy a két mágnes taszítsa egymást. Bár a mágnesek el akarnak fordulni a csőben, azonban a keskeny üvegcső fala ezt megakadályozza, ezért a mágnesek tengelye függőleges marad. Határozzuk meg egyensúlyi állapotban a mágnesek között kialakuló távolságot!

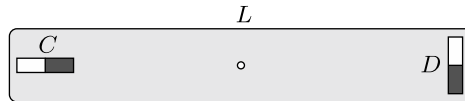
F. 259.* Vízszintes síkban egy R sugarú, I erősségű árammal átjárt körvezető nyugszik (lásd az *ábrát*). Határozzuk meg a köráram O középpontjától L távolságra ($L \gg R$) a mágneses indukció értékét

a) az O ponton átmenő függőleges tengelyen fekvő P_1 pontban (ún. Gauss-féle első főhelyzet);

b) a köráram síkjában elhelyezkedő P_2 pontban (Gauss-féle második főhelyzet)!



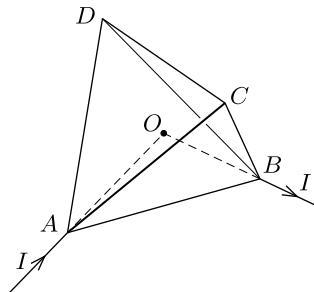
F. 260.** Két egyforma, m dipólnyomatékú, kisméretű rúd-mágnesset egy L hosszúságú rúd két végére erősítettünk az *ábra* szerint. Az egyik (C) mágnes tengelye a rúddal párhuzamos, a másiké (D) a rúdra merőleges.



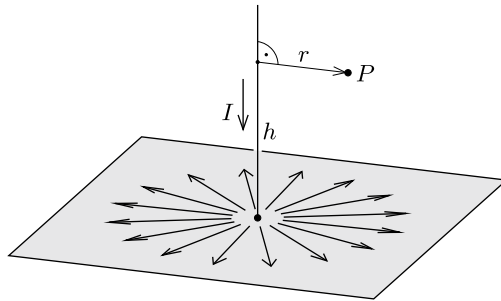
a) Mutassuk meg, hogy a mágnesek egymásra kifejtett forgatónyomatéka *nem egyenlő* nagyságú, és még csak nem is ellentétes irányú!

b) Vajon mi történik, ha a rendszert a tömegközéppontjában felfüggesztjük úgy, hogy szabadon elfordulhasson? (A Föld mágneses terétől tekintünk el!)

F. 261.* Homogén, egyenletes keresztmetszetű ellenálláshuzalból szabályos tetraédert állítottunk össze. Egy hosszú, egyenes, a tetraéder O középpontjába irányuló vezetéken az A csúcshoz I áramot vezetünk, a B csúcsból pedig hasonló módon elvezetjük. Mekkora és milyen irányú lesz a mágneses indukcióvektor a tetraéder középpontjában?

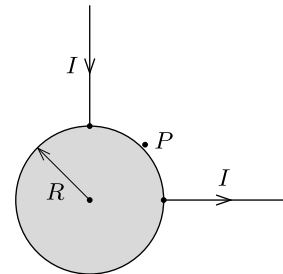


F. 262.* Hosszú, egyenes vezető egy rá merőleges síkú, vékony, egyenletes vastagságú, nagy kiterjedésű fémlaphoz csatlakozik. Mekkora és milyen irányú a mágneses indukció az egyenes vezetőtől r és a fémlap felett h távolságra lévő P pontban, ha a fémlapba I erősségű áramot vezetünk? Milyen lesz a mágneses tér a fémlap alatt?



F. 263.** Egy műanyag földgömb felületét egyenletesen áramvezető anyaggal (például grafitréteggel) vonjuk be, és szigetelő állványra helyezzük. Az R sugarú gömb egyik pontjába hosszú, sugárirányú, egyenes vezetővel I erősségű áramot vezetünk, rá merőlegesen (szintén sugárirányban) pedig elvezetjük azt.

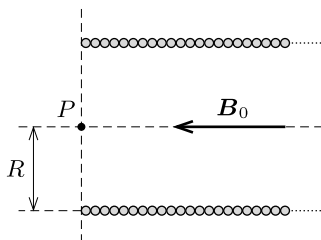
Milyen mágneses mező alakul ki a földgömb belsejében, illetve a gömbön kívül? Mekkora például a mágneses indukcióvektor az áramok be- és kivezetési pontja között „félúton” lévő P pontban, egy „hajszálnyival” a földgömb felületén kívül?



F. 264.** Két párhuzamos, egymástól d távolságra haladó, végtelen hosszú, vékony egyenes vezetőben egyenlő nagyságú és ellentétes irányú áramok folynak. Milyen alakúak a kialakuló indukcióvonalak?

F. 265. Egy szolenoidot, melyet egy adott értékű, a szolenoid tengelye mentén mérhető mágneses indukció elérésére terveztek, úgy tekercseltek, úgy tekercseltek, hogy a menetek két adott sugarú, azonos tengelyű hengerfelület közötti teret töltsék ki. Hogyan válasszuk meg a huzal d átmérőjét, hogy a menetekben történő hőfelszabadulást minimalizáljuk?

F. 266.* R sugarú, L hosszúságú ($L \gg R$) szolenoid tekercsben folyó egyen-áram hatására a szolenoid belsejében B_0 erősségű mágneses indukció alakul ki.



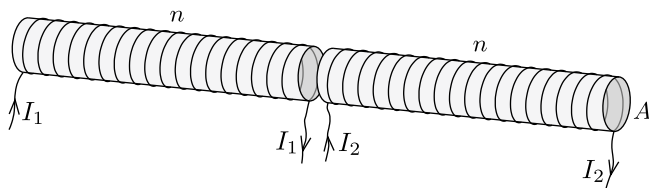
a) Mekkora a mágneses indukció a szolenoid tengelye mentén a tekercs egyik végénél (az *ábrán* látható P pontban)?

b) Mekkora mágneses fluxus halad át a tekercs végén, a P pontra illeszkedő körlapon?

c) Rajzoljuk fel vázlatosan a mágneses indukcióvonalakat a P pont környezetében (néhány-szor R távolságokig)!

F. 267.* Mennyivel változik meg egy N menetes, R sugarú, x_0 hosszúságú, D rugóállandójú (viszonylag erős és sűrű menetelésű) csavarrugó hossza, ha I_0 erősségű áramot vezetünk keresztül rajta?

F. 268.* Két hosszú, egyforma légmagos szolenoid szorosan egymás mellett úgy helyezkedik el, hogy a tengelyük közös. A tekercsek keresztmetszete A , egységnyi hosszukra n menet jut. Mekkora erő hat közöttük, ha az egyik tekercsbe I_1 , a másikba I_2 erősségű áramot vezetünk?

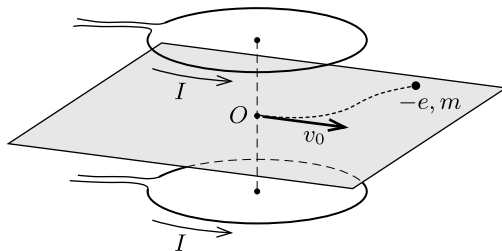


F. 269.* B indukciójú, homogén, erős mágneses térben egy ℓ hosszúságú, vékony, hajlékony vezetőhuzal végpontjait az egymástól $\ell/2$ távolságra lévő P_1 és P_2 pontokban rögzítettük. A huzalon I erősségű egyenáramot vezetünk át. Milyen alakot vesz fel a huzal, ha a mágneses indukcióvektor

- merőleges a P_1P_2 szakaszra?
- párhuzamos a P_1P_2 szakasszal?

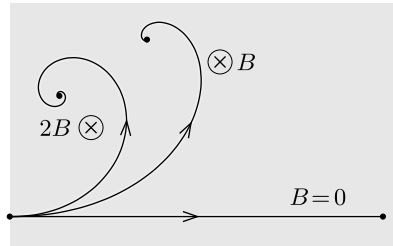
Mekkora erővel húzza a vezeték a rögzítési pontokat az egyes esetekben?

F. 270.* Két egyforma, egymással párhuzamos síkú körvezetőben időben állandó, I erősségű áram folyik azonos irányban. A körök középpontját összekötő szakasz O felezőpontjából egy elektron indul el v_0 sebességgel a körök síkjával párhuzamos irányban.



Az O ponthoz képest milyen irányban és mekkora sebességgel fog mozogni az elektron, amikor már igen távolra jutott a körvezetőktől?

F. 271.* Egy töltött részecske olyan térrészbe ér, ahol a súrlódási erő arányos a sebességével. Itt a részecske a belépés helyétől 10 cm-re megáll. Ha ugyanez a részecske úgy kerül be a térrészbe, hogy ott a sebességére merőleges homogén mágneses mező is van, akkor a részecske a belépés helyétől 6 cm távolságra áll meg. Mekkora távolságra állna meg a részecske, ha a mágneses indukcióvektor kétszer akkora lenne?



F. 272.* Egy m tömegű, Q elektromos töltésű kicsiny gömböt fonálra függesztünk. Az így kapott ingát homogén, függőleges irányú, B indukciójú mágneses térbe helyezük. Ha a gömböt kissé meglökjük, lengésbe jön. Azt tapasztaljuk, hogy a lengés síkja lassan körbefordul. Mennyi idő alatt tesz meg a lengés síkja egy teljes fordulatot?

F. 273.* A földi (homogén) nehézségi erőterben elengedünk egy kezdetben nyugvó, m tömegű, Q töltésű pontszerű testet. Hogyan mozog a részecske, ha a környezetében vízszintes irányú, homogén mágneses mezőt hoztunk létre?

F. 274.** Egy vákuumkamrában lévő hosszú, egyenes, nagyon jó vezetőképeségű huzalban 10 A erősségű áram folyik. A huzaltól r_0 távolságban lévő pontból v_0 kezdősebességű elektronok indulnak el a huzal felé, rá merőlegesen, de ezek az elektronok csak $r_0/2$ távolságra képesek megközelíteni a huzalt. Mekkora v_0 értéke? (A földi mágneses tér hatásától eltekinthetünk.)

F. 275.** Elektronok mozgását vizsgáljuk homogén mágneses térben, az erővonalakra merőleges síkban. (Az elektront klasszikus tömegpontnak tekintjük, melyre csak elektromos és mágneses erők hatnak.)

a) Két, kezdetben nyugvó elektron egymástól elég messze, d távolságra helyezkedik el. Mekkora azonos nagyságú, egymással ellentétes irányú sebességgel indítsuk el az elektronokat úgy, hogy távolságuk a mozgás során ne változzon?

b) Állandó maradhat-e a d távolság akkor is, ha csak az egyik elektront lökjük meg? Milyen pályán mozog ekkor a rendszer tömegközéppontja? Mekkora az a minimális d_{\min} távolság, ami mellett ilyen mozgás még létrejöhet? Ábrázoljuk vázlatosan az elektronok pályáját ebben az esetben! Mikor áll meg először a meglökött elektron?

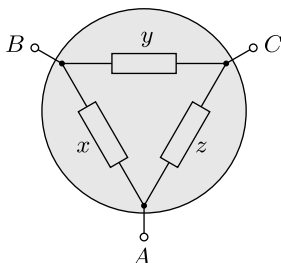


Áramkörök, elektromos vezetés

F. 276. Az ábrán látható, csak passzív elemeket tartalmazó „négypólus” 1-es oldalára U feszültségű telepet kapcsolva a 2-es oldalon egy voltmérő $U/2$ feszültséget mutat, ha viszont a 2-es oldalra kapcsoljuk a telepet, az 1-es oldalon a voltmérő U feszültséget jelez. Mi lehet a dobozban?



F. 277. Az ábrán látható három kivezetésű elektromos fekete dobozban az A és B , a B és C , valamint a C és A pontok között mérhető ellenállás rendre $1\ \Omega$, $2\ \Omega$, illetve $3\ \Omega$. Mennyi az x , y és z ellenállások értéke?



Ha felírjuk a megadott mért értékeket (ohm egységekben számolva) az ismeretlen ellenállásokkal kifejezve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = 1 \quad \longrightarrow \quad x(y+z) = x+y+z,$$

$$(2) \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad y(x+z) = 2(x+y+z),$$

$$(3) \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3} \quad \longrightarrow \quad z(x+y) = 3(x+y+z).$$

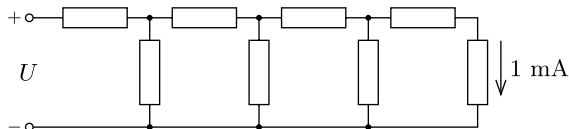
Ha az (1) és (2) egyenletek összegéből kivonjuk (3)-at, $2xy = 0$ adódik, ami *nem lehetséges*, hiszen nyilvánvaló, hogy sem x , sem y nem lehet nulla!

Mi lehet ennek a matematikai „ellentmondásnak” a feloldása?

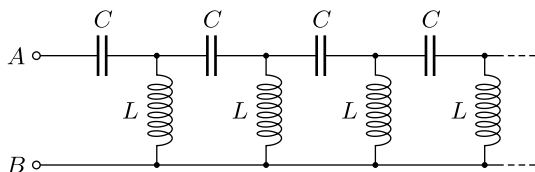
F. 278.* Adott egy bonyolult elektromos áramkör, amely számos ellenállást és más passzív áramköri elemet tartalmaz. Az áramkörben kiválasztunk egy ellenállást, melynek úgy szeretnénk meghatározni az értékét, hogy nem forrasztjuk

ki az áramkörből (vagyis mérés közben az ellenállás az áramkörben marad). Rendelkezésünkre áll egy telep, egy voltmérő és egy ampermérő, melyek mindegyikét ideálisnak tekinthetjük. Hogyan hajtsuk végre a mérést?

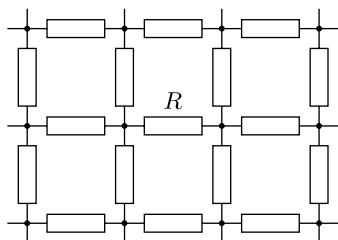
F. 279. Az *ábrán* látható véges ellenálláslánc (létraáramkör) minden eleme $1\text{ k}\Omega$ -os, az utolsó elemen 1 mA erősségű áram folyik. Mekkora feszültséget kapcsoltunk a lánc bemenetére? Mekkora a lánc eredő ellenállása? Hogyan változik a lánc eredő ellenállása, ha még egy, illetve két ellenállást kapcsolunk a láncba? Hasonlítsuk össze ezeket az értékeket a „végtelen” lánc eredő ellenállásával!



F. 280.** Mennyi az *ábrán* látható, csupa egyforma L induktivitásokból és C kapacitásokból álló végtelen lánc eredő váltóáramú ellenállása ω körfrekvencián az A és B pontok között? Lehet ez kétféle érték?



F. 281.* Az *ábrán* látható „végtelen” négyzetrács minden éle azonos R ellenállású. Mekkora két szomszédos rácspont között az eredő ellenállás?



F. 282.* Csupa egyforma R ellenállásból szabályos poliéder (pl. tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder stb.) alakú hálózatot készítünk. Mekkora az eredő ellenállás két szomszédos rácspont között?

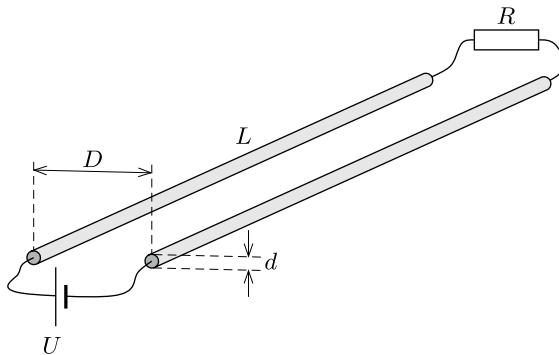
F. 283. Az *előző két feladatban* csupa azonos R ellenállást tartalmazó áramkörök (végtelen négyzetrács, szabályos poliéder) eredő ellenállását kellett meghatározni két szomszédos csomópont között. Mekkora lesz ezekben az áramkörökben

két szomszédos csomópont között az eredő ellenállás, ha az őket összekötő R ellenállást eltávolítjuk?

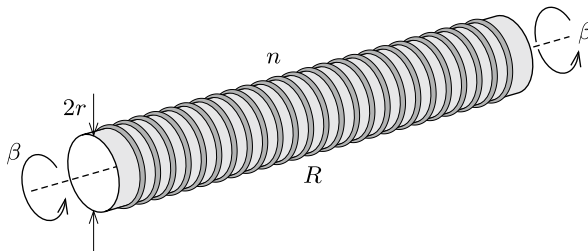
F. 284.* Egy kocka minden oldaléle 1Ω -os ellenállásból készült. Mekkora a kocka eredő ellenállása egyik testátlójának két végpontja között?

Vizsgáljuk meg az egy-, két- és négydimenziós „kockákat” is! Keressünk általános formulát a n -dimenziós esetre is!

F. 285.* Két egyforma, d átmérőjű, igen hosszú, elhanyagolható ellenállású egyenes vezető egymástól $D = 50d$ távolságra helyezkedik el. A vezetők egyik végét U feszültségű telep, másik végét R ellenállás köti össze. Mekkora az R ellenállás, ha a vezetők között fellépő elektromos és mágneses erők egyenlő nagyok?



F. 286.* 1917-ben két amerikai fizikus, *T. D. Stewart* és *R. C. Tolman* kimutatták, hogy egy rövidre zárt, hosszú tekercsben (szolenoidban) elektromos áram folyik, ha a tekercset hosszanti szimmetriatengelye körül valamekkora szöggyorsulással megforgatjuk.

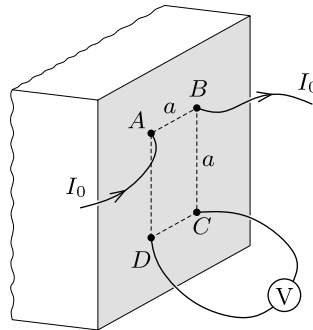


A tekercset tekintsük nagy számú, vékony fémhuzalból készült, r sugarú, R ellenállású gyűrűnek, melyeket – hosszegységenként n darabot – egy hosszú, hengeres üvegcsőre ragasztottunk fel.

Mekkora indukciójú mágneses tér alakul ki az üvegcső közepén, ha a hengert állandó β szöggyorsulással forgatni kezdjük?

F. 287. Azonos keresztmetszetű réz- és vashuzalt egyik végüknél összehegesztünk, majd 1 mA-es áramot vezetünk keresztül rajtuk. Mekkora elektromos töltés halmozódik fel a kétféle fém határfelületén? Hány darab elemi töltésnek felel ez meg?

F. 288.* Egy sík a teret két féltre osztja. Az egyik térfelet homogén, izotrop vezető anyag tölti ki, a másik térfélen fizikusok dolgoznak. A síkra halványan a oldalú négyzetet rajzolnak, amelynek két szomszédos csúcsában vékony elektródokkal I_0 áramot vezetnek be és ki. Eközben megméri a másik két csúcs közötti U_0 feszültséget. Hogyan számíthatják ki ezekből az adatokból a féltérrel kitöltő anyag fajlagos elektromos ellenállását?



F. 289. Szigetelőszálra függesztett fémgömböt elektromosan feltöltöttünk. A gömb a levegő csekély σ vezetőképessége miatt lassan elveszíti a töltését. Mennyi idő alatt csökken a fémgömb töltése a felére?

F. 290.* Szigetelőszálra függesztett, alufóliával bevont csokimikulást elektromosan feltöltöttünk. A mikulás a levegő csekély σ vezetőképessége miatt lassan elveszíti a töltését. Mennyi idő alatt csökken a csokimikulás töltése a felére?

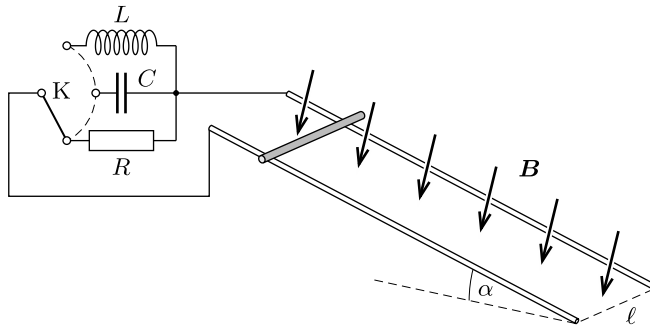




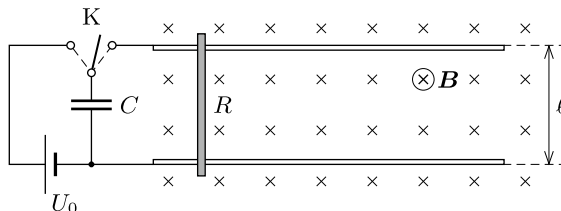
Elektromágneses indukció, időben változó mezők

F. 291.* A homogén, B indukciójú mágneses mező merőleges az ℓ nyomtávú, lejtős sínpárra, amely a vízszintessel α szöget zár be. Hogyan mozog a nyugalomból induló, m tömegű, súrlódásmentes rúd az elegendően hosszú sínpáron, ha a rúd és a sínpár alkotta áramkört

- R ellenállással,
- C kapacitású kondenzátorral,
- L önindukciós együtthatójú tekercsel zárjuk le?

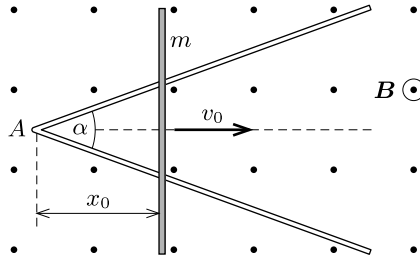


F. 292.* Elhanyagolható ellenállású, vízszintes síkban fekvő vezető sínpár egyik végét C kapacitású kondenzátorral zárjuk, melyet előzőleg U_0 feszültségre töltöttünk. Az ℓ nyomtávolságú sínpárra m tömegű, R ellenállású vezető rudat helyeztünk merőlegesen. A rendszer függőleges irányú, B indukciójú, homogén mágneses mezőben van. A kondenzátort olyan polaritással töltöttük fel, hogy a rúd az átkapcsolás után a kondenzátortól távolodni kezd. (A súrlódás és az összeállítás saját induktivitása elhanyagolható.)



- Mekkora maximális sebességet érhet el a rúd?
- Milyen feltételek esetén lesz maximális ennek az „elektromágneses ágyúnak” a hatásfoka?

F. 293. V alakban meghajlított, elhanyagolható ellenállású vezető szál vízszintes síkban helyezkedik el, szárjai α szöget zárnak be. A V alakú vezető szárain, annak A csúcspontjától x_0 távolságra egy m tömegű, hosszegységenként r ellenállású, elegendően hosszú rúd fekszik az α szög szögfelezőjére merőlegesen, az *ábrán* látható módon. Az egész elrendezés függőleges irányú, homogén, B indukciójú mágneses mezőben található.



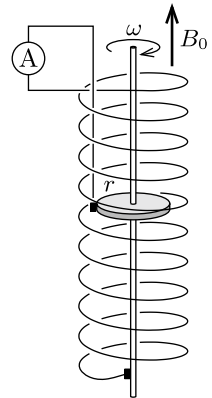
A rudat a szögfelező irányában v_0 kezdősebességgel elindítjuk. A rúd és a V alakú vezető között jó az elektromos kontaktus, de a súrlódás elhanyagolható.

Hol áll meg a rúd?

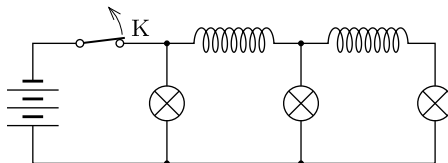
F. 294.* Egy hosszú, egyenes tekercsbe szimmetriatengelyével megegyező irányban tengelyezett, igen jó vezetőképes anyagból készült, r sugarú fémkorongot helyeztünk. A tekercs egyik kivezetését egy ampermérőn át csúszóérintkezővel a korong pereméhez, a másik kivezetését a korong (vezető) tengelyéhez csatlakoztatjuk. A tekercs ohmos ellenállása R , egységnyi hosszára n menet jut. A tekercset úgy helyezük el, hogy a tengelye a Föld B_0 mágneses indukcióvektorával azonos irányban álljon.

Mekkora áram folyik át az ampermérőn, ha a korongot ω szögsebességgel forgatjuk? Ábrázoljuk az áramerősséget ω függvényében mindkét forgásirány esetén!

Igazoljuk, hogy a korong forgatásához szükséges munka megegyezik az ellenálláson keletkező Joule-hővel!

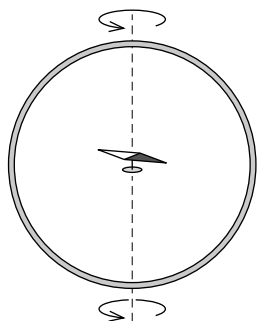
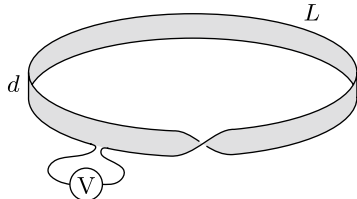


F. 295.* Az *ábrán* látható – három egyforma lámpát és két egyforma tekercset tartalmazó – hálózatot egyenáramú forrásra kapcsoltuk. (A tekercsek ohmikus ellenállása elhanyagolható.)



Egy ideig várunk, majd a K kapcsolót kikapcsoljuk. Mi lesz a lámpák fényességi sorrendje közvetlenül a kapcsoló kikapcsolása után?

F. 296. Egy L hosszúságú, d szélességű papírcsíkból kör alakú, „megtekert” szalagot (ún. Möbius-szalagot) készítünk. Mekkora feszültség indukálódik a szalag szélén végigvezetett drótdarabban, ha a szalagot a karika síkjára merőleges, időben $B(t) = k \cdot t$ módon egyenletesen változó indukciójú, homogén mágneses mezőbe helyezzük?



F. 297.* Egy 0,1 m sugarú, kör alakú, függőleges síkú fémgyűrű a Föld mágneses terében állandó szögsebességgel forog függőleges tengely körül, amely átmegy a gyűrű középpontján. A fémgyűrű középpontjában egy kis mágnesű találgató, amely függőleges tengely körül szabadon foroghat.

Ha a fémgyűrű nem forog, a mágnesű a Föld mágneses tere vízszintes összetevőjének irányába áll be. Ha a gyűrű 10 fordulatot végez másodpercenként, a mágnesű átlagosan 2° -kal fordul el ettől az iránytól.

Mekkora a gyűrű elektromos ellenállása?

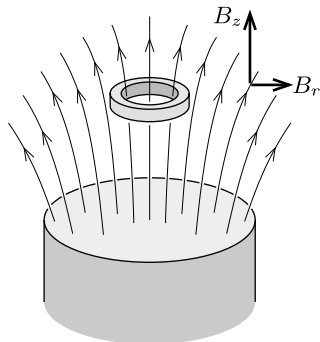
F. 298.* Egy vékony, elhanyagolható ellenállású (szupravezető) gyűrűt függőleges helyzetű, henger alakú rúd mágnes fölött tartunk. A gyűrű tengelye egybeesik a mágnes tengelyével. A gyűrű körüli hengerszimmetrikus mágneses mező közelítőleg így jellemezhető a mágneses indukcióvektor függőleges és sugárirányú koordinátaival:

$$B_z = B_0(1 - \alpha z) \quad \text{és} \quad B_r = \frac{1}{2} B_0 \alpha r,$$

ahol B_0 és α állandók, továbbá z és r a függőleges, illetve sugárirányú helykoordináták.

Elengedés után a gyűrű lefelé kezd mozogni, miközben függőleges tengelyét megtartja. Az elengedés pillanatában a gyűrűben nem folyik áram. Milyen mozgást végez a gyűrű? Mekkora a gyűrűben folyó áram erősségének legnagyobb értéke?

Adatok: A gyűrű tömege $m = 50$ mg, sugara: $r_0 = 0,5$ cm, önindukciós együtthatója $L = 1,3 \cdot 10^{-8}$ H; a gyűrű középpontjának kezdeti koordinátái: $z = 0$ és $r = 0$; $B_0 = 0,01$ T; $\alpha = 32 \text{ m}^{-1}$.

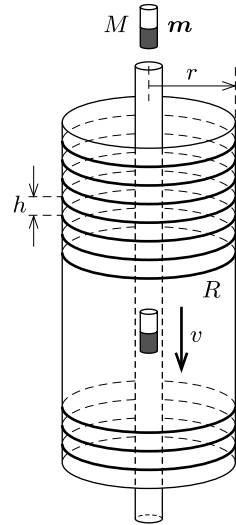


F. 299.* Hosszú, keskeny, függőleges üvegcsövet egy vele azonos tengelyű, de sokkal szélesebb, r külső sugarú másik üvegcső vesz körül. E szélesebb csövön sűrűn, egymástól h távolságra elhelyezkedő, R ellenállású körvezetők vannak.

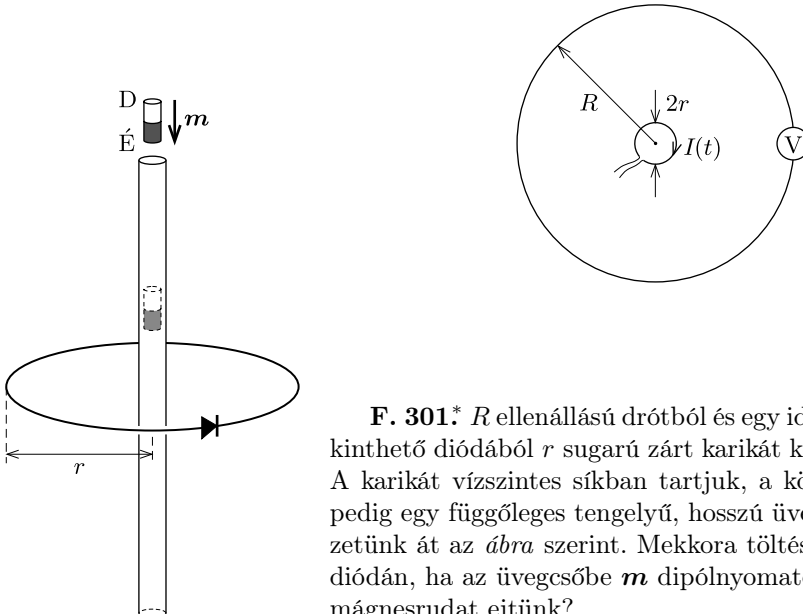
Ha a keskeny csőbe egy M tömegű, m mágneses dipólnyomatékú kicsiny rúd-mágneset ejtünk, az viszonylag hamar elér egy állandó v sebességet, amellyel egyenletesen süllyed.

További kísérleteink során a fenti öt mennyiség (M , m , h , R , r) közül az egyiket mindig a kétszeresére növeljük, miközben a másik négyet nem változtatjuk meg. *Hányszorosára* nő az egyes esetekben a kicsiny rúd-mágnes állandósult végsebessége?

(A mechanikai súrlódástól és a közegellenállástól, továbbá a körvezetők önindukciójától és kölcsönös indukciójától eltekinthetünk.)

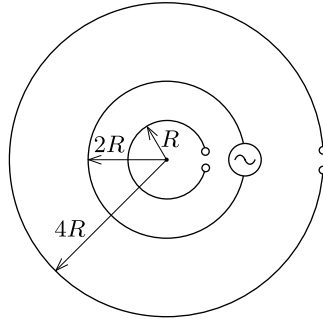


F. 300. Egy R sugarú körvezető közepén, vele egy síkban, koncentrikusan elhelyezve egy r sugarú ($r \ll R$) másik körvezető található. A kisebb körvezetőben az áramerősséget t_0 idő alatt nulláról egyenletesen I_0 értékre növeljük. Mekkora feszültség indukálódik ezalatt a nagyobb körben?



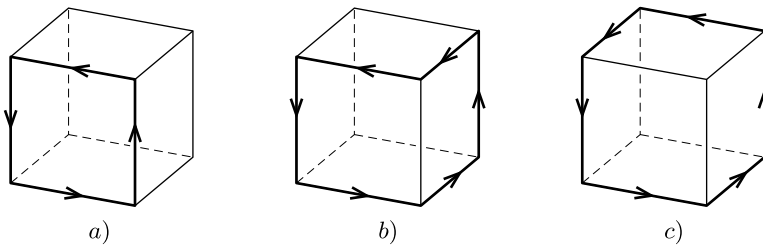
F. 301.* R ellenállású drótból és egy ideálisnak tekinthető diódából r sugarú zárt karikát készítettünk. A karikát vízszintes síkban tartjuk, a középpontján pedig egy függőleges tengelyű, hosszú üvegcsövet vezetünk át az *ábra* szerint. Mekkora töltés halad át a diódán, ha az üvegcsőbe m dipólnyomatékú, kicsiny mágnesrudat ejtünk?

F. 302.* Vízszintes asztallapon három, vékony huzalból készült, nyitott vezető karikát helyeztünk el koncentrikusan az *ábrán* látható módon. A középső karikába időben változó áramot vezetünk. Mekkora feszültség indukálódik a legnagyobb karikában abban a pillanatban, amikor a legkisebb karika kivezetései közötti feszültség U_0 ?



F. 303. Egymástól jó távol helyezkedik el két egyforma szupravezető gyűrű. Az egyik (A) gyűrűben I_0 erősségű áram folyik, a másikban (B) nem folyik áram. A két gyűrűt lassan közelítjük egymáshoz. Mekkora áram fog folyni A -ban, amikor a másik gyűrűben I_1 erősségű áram folyik?

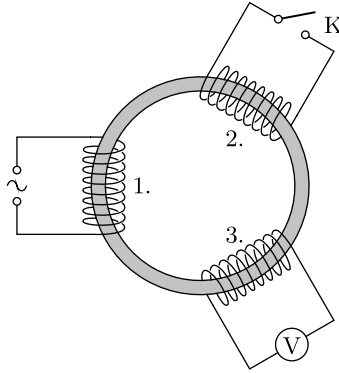
F. 304.* Egy kocka alakú test oldalélei mentén háromféle elrendezésben vezetünk végig egy drótot. Az a) ábrán látható négyzet önindukciós együtthatója a mérések szerint L_1 , a b) ábrán látható elrendezésben pedig L_2 . Vajon mekkora önindukciós együtthatót fogunk mérni a c) alakzatnál?



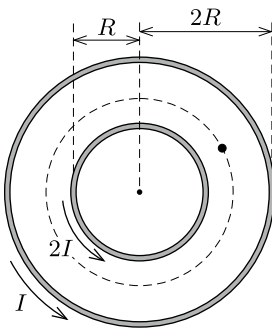
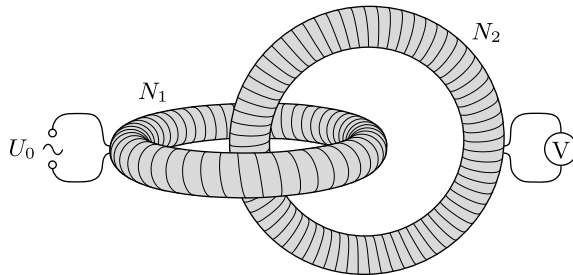
F. 305.* Egy toroid (úszógumi) alakú „sovány” vasmagra szimmetrikus elrendezésben három egyforma, „kövér” elektromágneses tekercs van felfűzve az *ábra* szerint. Az első tekercsre váltóáramú feszültségforrást kapcsolunk, a második tekercs kivezetéseit szabadon hagyjuk, a harmadik tekercs csatlakozóira pedig voltmérőt kötünk. Ekkor a voltmérő a feszültségforrás effektív értékének a felét mutatja.

Ezután a második tekercs kivezetéseit a K kapcsolóval rövidre zárjuk. Mit mutat ebben az esetben a voltmérő?

(A tekercsek ohmos ellenállása elhanyagolható, a feszültségforrást és a voltmérőt ideálisnak tekinthetjük. A vasmag mágneses permeabilitása nem függ a mágneses fluxustól.)

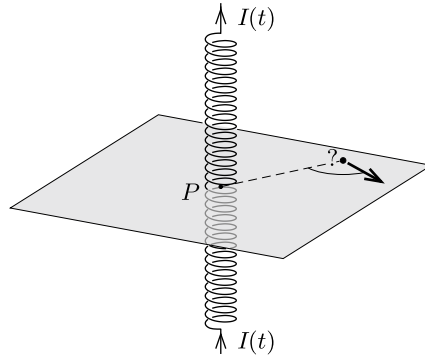


F. 306.** Két ugyanolyan méretű, csak a menetszámukban különböző, N_1 és N_2 menetes légmagos toroid tekercs egymásba van fűzve az ábra szerint. (A középkörök síkjai merőlegesek egymásra.) Az N_1 menetes tekercsre U_0 effektív értékű, hálózati váltakozó feszültséget kapcsolunk, a másik tekercs kivezetéseire pedig ideálisnak tekinthető voltmérőt kötünk. Mekkora effektív feszültséget jelez a műszer?



F. 307. Egy hosszú tekercs (szolenoid) belsejében egy feleakkora sugarú másik szolenoid helyezkedik el úgy, hogy tengelyük közös. Mindkét tekercs egységni hosszára azonos menetszám jut. Ha a tekercsekben folyó áram erősségét a kezdeti nulla értékről egyenletesen növeljük, a tekercsek környezetében elektromos erőtér indukálódik. A belső tekercsben minden pillanatban kétszer akkora áram folyik, mint a külsőben; az áramok iránya megegyezik. A két tekercs közötti térben egy kezdetben álló, töltött részecske az elektromágneses erők hatására körpályán mozog. Mekkora a körpálya sugara?

F. 308.* Vízszintes síkon egy kezdetben nyugvó, töltött, apró gyöngyöcske mozoghat súrlódásmentesen. A gyöngytől nem messze egy függőleges tengelyű, hosszú szolenoid helyezkedik el. A tekercsben folyó áram erősségét a kezdeti nulla értékről időben egyenletesen egy adott értékig növeljük, majd szintén egyenletesen újra zérusra csökkentjük. Az *ábrán* látható P ponthoz képest merre fog mozogni a töltött gyöngy a folyamat végén?



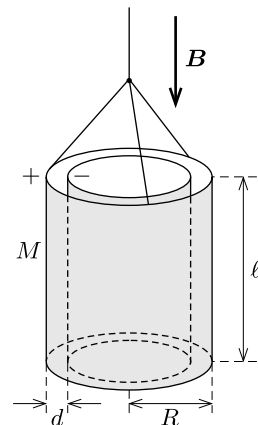
F. 309.* Egy toroid alakú, $0,1$ m középkör-sugarú, 2 cm^2 keresztmetszetű, 200 menetes, légmagos körtekercs árama (egy rövid ideig) egyenletesen, 10 A/s ütemben változik. Mekkora gyorsulással indul el a körtekercs középpontjában nyugvó (klasszikus tömegpontnak képzelt) proton?

F. 310.* Egy R külső, $R - d$ belső sugarú ($d \ll R$), ℓ hosszúságú, összesen M tömegű hengerkondenzátort vékony szigetelő szálra függesztettünk fel, amely körül gyakorlatilag szabadon elfordulhat. (Gondoskodunk róla, hogy vízszintes irányban a kondenzátor ne mozdulhasson el). Az U feszültségre feltöltött kondenzátor környezetében függőleges irányú, B indukciójú, homogén mágneses mező van.

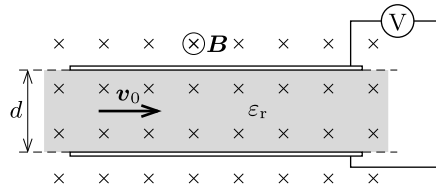
Mi történik, ha

a) óvatosan (anélkül, hogy meglöknénk) a benne található, sugárirányú vezetéken keresztül kisütjük a kondenzátort;

b) hirtelen megszüntetjük a mágneses teret?



F. 311.* Egy eredetileg töltetlen síkkondenzátor lemezei közötti távolság d . A lemezekkel párhuzamosan, az *ábrán* látható módon B indukciójú, homogén mágneses mező van. Mekkora feszültséget mutat a kondenzátorra kapcsolt voltmérő, ha a lemezek között v_0 sebességgel olyan – elektromosan semleges – folyadékot áramoltatunk, amelynek relatív dielektromos állandója ϵ_r ? (A folyadék relatív mágneses permeabilitása 1 .)



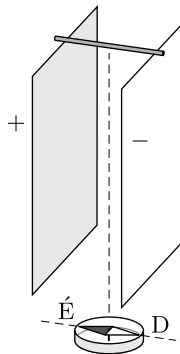
F. 312.* Az előző feladatban láttuk, hogy \mathbf{B} indukciójú, homogén mágneses mezőben \mathbf{v} sebességgel ($v \ll c$) mozgó „megfigyelő” a mágneses mezőn kívül még $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ térerősségű elektromos mezőt is „észlel”.

Vajon létezik-e a fordított jelenség: észlel-e mágneses mezőt a homogén elektromos térben mozgó megfigyelő? (Válaszunkban csak a középiskolások által is ismert fizikai törvényekre hivatkozunk!)

F. 313. Egy töltetlen fémhenger ω szögsebességgel forog a szimmetriatengelye körül. A henger B indukciójú, tengelyirányú, homogén mágneses mezőben helyezkedik el. Milyen töltésseloszlás jön létre a henger belsejében? Elképzelhető-e olyan szögsebesség, hogy a töltéssűrűség mindenhol nulla legyen?

F. 314. Tekintsük az előző feladat eredményét a hengerhez rögzített forgó vonatkoztatási rendszert használva! Írjuk le az elektromos és a mágneses teret ebben a forgó (nem inercia)rendszerben! (Tegyük fel, hogy a forgás szögsebessége sokkal kisebb, mint a ciklotronfrekvencia, ami $\omega_c = eB/m$, ahol e az elemi töltés és m az elektron tömege.)

F. 315.* Egy párhuzamosan, függőlegesen elhelyezett lemezpárból álló kondenzátor fel van töltve. A lemezek alsó szélé alatt kis iránytű áll az ábrán látható helyzetben. Ezután a lemezek tetejére helyezett kis pálcával a kondenzátort kisütjük. Hogyan viselkedik kisütés közben az iránytű?



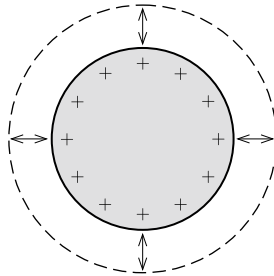
F. 316. Egy feltöltött gömbkondenzátor a koncentrikusan elhelyezkedő fegyverzeti közötti dielektrikum csekély vezetőképessége miatt lassan kisül. Milyen irányú és mekkora indukciójú mágneses mező jön létre?

F. 317.** Szigetelő szálra függesztett, alufóliával bevont csokimikulást elektromosan feltöltöttünk. A mikulás a levegő csekély vezetőképessége miatt lassan elveszíti töltését. Milyen lesz kisülés közben a mikulás körül kialakuló mágneses mező? (Feltehetjük, hogy a levegő vezetőképessége független a helytől.)



F. 318. Egy elektromosan töltött vezető gömb radiálisan „pulzál”, a sugara valamekkora amplitúdóval periodikusan változik. A felületén elhelyezkedő töltések – mint megannyi dipólantenna – elektromágneses sugárzást bocsátanak ki.

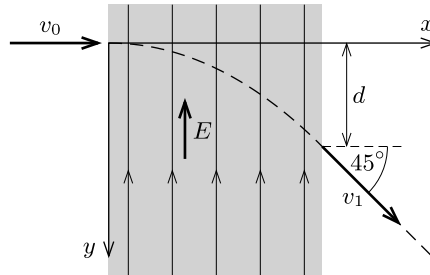
Vajon milyen lesz az eredő sugárzás?





Relativitáselmélet és modern fizika

F. 319. Egy elektron a fénysebesség 60%-ával mozogva a sebességére merőleges irányú, homogén elektromos mezőbe érkezik. Amikor elhagyja az elektromos mezőt, sebességének iránya a kezdősebesség irányával 45° -os szöget zár be.

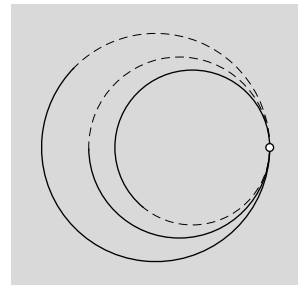


- a) Mekkora v_1 sebességgel mozog az elektromos mezőt elhagyó elektron?
- b) Mekkora az *ábrán* jelölt d távolság, ha a térerősség nagysága $E = 510 \text{ kV/m}$? (Az elektron nyugalmi energiája 510 keV .)

F. 320. Ha sikerülne létrehozni a Föld mágneses egyenlítője mentén egy vákuumcsövet, ebben az elektronok és a protonok a földmágnesség hatására – elvben – körpályán keringhetnének.

- a) Becsüljük meg, mekkora sebességgel és milyen irányban kellene a részecskének mozogniuk a vákuumcsőben!
- b) Fejezzük ki eV egységekben, hogy mekkora lenne ekkor a részecskék energiája!

F. 321.* Ködkamrás kísérletekkel lehetővé válik a homogén mágneses térben mozgó töltött részecskék pályájának megfigyelése. Elképzelhető-e, hogy egy töltött részecske két másik részecskére történő bomlása során az *ábrán* látható, egymást érintő, körív alakú nyomok keletkezzenek a ködkamrában? (A részecskék fékeződése a vizsgált pályaszakaszon elhanyagolható.)



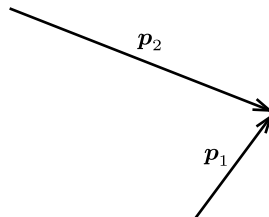
F. 322. Mekkora energiájú γ -foton képes egy „álló” elektronnak ütközve pozitront kelteni? Az elektron (és a pozitron) nyugalmi energiája 510 keV.

F. 323.* A pion (π^+) az elektronnál 273-szor nagyobb tömegű elemi részecske, melynek egyik lehetséges bomlási folyamatában pozitron (e^+) és elektron-neutrínó (ν_e) keletkezik:

$$\pi^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e.$$

Legalább mekkora annak a pionnak a sebessége, amelynek bomlásában a pozitron és a neutrínó egymásra merőlegesen repülnek szét? (A neutrínót tekintjük zérus nyugalmi tömegűnek, azaz olyan részecskének, melynek energiája és impulzusa között fennáll az $E = pc$ összefüggés.)

F. 324.* Két, a fénysebességhez nagyon közeli (ultrarelativisztikus) sebességgel mozgó részecske rugalmasan ütközik. A részecskék ütközés előtti impulzusvektorai az *ábrán* láthatók. Szerkesszük meg azt a legkisebb szöveget, melyet a szétrepülő részecskék mozgásiránya bezárhat egymással!



F. 325. Legalább mekkora sugarúnak kellene lennie a gömb alakú golyócskának elképzelt „klasszikus elektronnak”, hogy az elektrosztatikus energiája ne legyen nagyobb, mint a teljes mc^2 nyugalmi energiája? Mekkora szögsebességgel kellene forognia a klasszikus elektronnak, hogy a perdülete a tapasztalat szerinti $h/(4\pi)$ érték legyen? Mekkora lenne egy olyan elektron „egyenlítői sebessége”, amelynek teljes nyugalmi energiája az elektrosztatikus mezőtől származik?

F. 326. Homogén mágneses térben körpályán kering egy elektron. Lehet-e nagyobb az elektron mozgása által keltett mágneses indukcióvektor értéke a kör középpontjában, mint a homogén mágneses teret jellemző indukcióvektor?

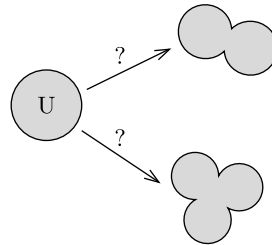
F. 327.* Becsüljük meg, mekkora nyomást fejt ki egy *igen kicsiny*, d oldalélű, kocka alakú dobozba zárt neutron a doboz falára!

F. 328.* Egy elektront nagyméretű, téglatest alakú dobozba zárunk. Adjunk nagyságrendi becslést arra, hogy a doboz vízszintes fenéklapja fölött milyen vastag rétegben „terül szét” az elektron, ha a gravitáció hatását is figyelembe vesszük.

F. 329. Egy elektronnól és egy pozitronból egymás elektrosztatikus vonzása hatására rövid élettartamú kötött állapot, az úgynevezett *pozitronium* alakulhat ki. Határozzuk meg – a Bohr-modell keretei között – a pozitronium alapállapotának és gerjesztett állapotainak energiáját!

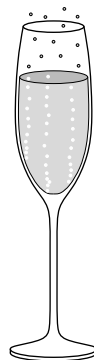
F. 330.* Az atommag Coulomb-tere fogságban tartaná az elektront az atommagban. A határozatlansági reláció alapján azonban megmutatható, hogy egy ilyen kis helyre zárt elektron mozgási energiája túlságosan nagy, és emiatt az elektron kiszabadul a fogságból. Milyen rendszámú transzurán elem atommagja lenne képes az elektront tartósan befogni a magba, ha a transzurán elemeket hosszabb időre is létre tudnánk hozni?

F. 331. Egy urán atommag három részre hasadásakor több energia szabadulna fel, mint két részre hasadásakor. Az urán atommagok mégis két részre hasadnak. Miért?

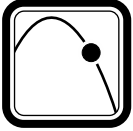


F. 332.* A ${}^7\text{Be}$ radioaktív izotóp, felezési ideje 53,3 nap. Ha a berillium 7-es izotópját néhány ezer fokra felhevítjük, felezési ideje megváltozik. Adjunk rá magyarázatot!

F. 333. Ha a Kedves Olvasó eljutott könyvünk utolsó feladatához, illő lenne pezsgővel köszöntenünk. Mivel technikailag még nem oldható meg a teleportáció, álljon itt egy pezsgőről szóló, matematikai számításokat nem igénylő rejtvény: A pezsgőspohárban jól láthatók a keletkező buborékok. Rendszerint a pohár alján keletkeznek néhány jól meghatározott ponton, majd szállnak felfelé. Megfigyelhetjük, hogy a buborékok felfelé egyre nagyobb sebességgel mozognak. Mitől gyorsulnak fel a pohárban?



Útmutatás



Kinematika

U. 1. Rajzoljuk fel a csigák világvonalát a $(2+1)$ dimenziós „téridőben”! Úgy is eljuthatunk a helyes válaszhoz, hogy felhasználjuk a különböző inerciarendszerek egyenértékűségét (a Galilei-szimmetriát).

U. 2. Vizsgáljuk a testek mozgását az eredeti és egy hozzá viszonyítva v_0 sebességgel mozgó másik koordináta-rendszerben! Alkalmazzuk a Galilei-transzformáció összefüggéseit!

U. 3. Vigyázat, a Galilei-féle relativitási elv csak inerciarendszerek között érvényes. Ezért hibás az a gondolat, hogy Anna is 1 m/s sebességgel látja Bélát mozogni.

U. 4. Próbálkozzunk a csigák sebességvektorának ügyes felbontásával! A pálya egyenletét a sebesség síkbeli polárkoordinátás felbontása segítségével határozhatjuk meg.

U. 5. Az $a)$ részben – mivel a csónak gyorsabb, mint a folyó – a partra merőleges átkelés megvalósítható. A $b)$ rész esetében alkalmasan választott vektorösszeadás segítségével határozhatjuk meg azokat a lehetséges irányokat, amelyek felé a csónakos haladhat; ezek közül kell a legrövidebb útnak megfelelőt kiválasztani.

U. 6. A csatorna vize mindig ugyanannyival sodorja el a csónakot, mint amennyivel az a szemben levő pont felé közeledik. A pálya alakját a kúpszeletek között kell keresnünk.

U. 7. Hasonlítsuk össze a csempészhajó és az üldözője közötti távolság csökkenésének ütemét azzal, hogy mekkora sebességgel távolodik az őrnaszád a parttól!

U. 8. Érdeemes Joe mozgását a folyóval együttmozgó koordinátarendszerekből leírni (magunkat a folyón sodródó ladikba képzelni). Ebben a vonatkoztatási rendszerben egy alkalmas optikai analógia és a Fermat-elv alkalmazásával már könnyen meghatározhatjuk Joe optimális útvonalát.

U. 9. Számítsuk ki, mekkora sebességgel mozognak a pókhálószal egyes pontjai egy adott időpillanatban!

U. 10. Üljünk bele a pókhálószállal együtt „nyúló” koordináta-rendszerbe.

U. 11. Bizonyítsuk be, hogy a P pontból különböző irányokba fektetett sűrűlódásmentes lejtőkön az egyszerre indított testek mindig egy gömb felületén találhatóak!

U. 12. A feladat elemi úton is megoldható, ha „beleülünk” a nagymutatóval együttforgó koordináta-rendszerbe.

U. 13. Számítsuk ki az inga gyorsulásának függőleges és vízszintes komponensét!

U. 14. A két mozgásszakasz időtartamát pontosan meghatározni nagyon nehéz feladat. Ehelyett próbáljuk meg az AP szakasz megtételéhez szükséges időt alulbecsülni, a PB szakasz megtételéhez szükséges időt pedig felülbecsülni!

U. 15. Ne akarjuk pontosan meghatározni a mozgások idejét és a pályák hosszát, hanem csak a közöttük fennálló egyenlőtlenségeket keressük!

U. 16. Keressünk olyan – matematikailag jól kezelhető, egyszerű – mozgást, amely során a golyó a mozgás első szakaszában minél nagyobb sebességre tesz szert, és az ebből adódó időnyereség fedezi a hosszabb út megtételéből adódó idővesztést.

U. 17. Írjuk le a labda mozgását a lejtőre merőleges, illetve a lejtővel párhuzamos elmozdulás- és gyorsuláskomponensek segítségével!

U. 18. Használjuk fel, hogy a parabola adott P pontbeli érintője feleakkora szöget zár be a parabola szimmetriatengelyével, mint a P pontot a fókuszponttal összekötő szakasz.

U. 19. Próbáljunk differenciálszámítás helyett más módszerrel célbaérni (például egy másodfokú egyenlet valós gyökei számának vizsgálatával vagy vektoros szerkesztéssel)!

U. 20. A kő addig távolodik tőlünk, amíg a sebességének a helyvektorral párhuzamos komponense nullára nem csökken. Ha ez soha nem következik be, akkor teljesül a feladat szövegében megfogalmazott feltétel.

U. 21. Az ugyanonnan induló, azonos kezdősebességű, parabolapályákat befutó vízugarak közös burkolófelületét kell meghatározni. Vizsgáljuk meg, mi a feltétele annak, hogy egy adott térbeli ponthoz találjunk rajta áthaladó vízugarat.

U. 22. A válasz elemi úton is megkapható. Írjuk fel azt az egyenletet, amely megadja egy adott becsapódási távolsághoz tartozó h -t (vagy h -kat), és vizsgáljuk, mikor van (valós) megoldása ennek az egyenletnek.

Más utat is választhatunk: keressük meg a kilövellő vízszög alakját leíró parabola vezéregyenesét és fókuszpontját, majd nézzük meg, hogy mi a geometriai feltétele annak, hogy a lejtő egy adott pontjába eljusson a víz.

U. 23. Elhanyagolható légellenállás esetén a szöcske pályája parabolaív lesz. *Tévedés* lenne azonban annak feltételezése, hogy a keresett parabola a hengert legfelül, egyetlen pontban érinti (vagyis a szöcske *éppen átcsúszik* a fatörzs felett).

U. 24. Azok a pontok látszanak élesen a fényképen, amelyek sebessége éppen küllőirányú.

U. 25. Próbáljuk meg felírni a küllők „látszólagos” alakjának egyenletét derékszögű koordináta-rendszerben!

U. 26. Hibás az a gondolatmenet, mely szerint a nyílvevő legfeljebb annyi ideig tartózkodhat a kocsikerék két küllője között, amíg a kerék $360^\circ/12 = 30^\circ$ -kal elfordul. A kocsi kereke ugyanis nem egyhelyben forog, hanem a tiszta gördülés miatt haladó mozgást is végez. A kérdésre a helyes választ grafikus módszerrel találhatjuk meg a legegyszerűbben.

U. 27. Fogjunk egy kerékpárt, és próbáljuk ki!



Tömegpontok dinamikája

U. 28. Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora lehet a súrlódási együttható, ha a kis micsoda nem áll meg az asztalon!

U. 29. A gépkocsi mechanikai szempontból *nem zárt* rendszer, kapcsolatban áll a környezetével, a Földdel.

U. 30. Súrlódásmentes esetben a végsebességek a mechanikai energia megmaradása miatt megegyeznek. A többi kérdés megválaszolásához keressünk a két pályán

a) azonos hosszúságú kis szakaszokat, és nézzük meg, melyiket éri el nagyobb sebességgel a kis test;

b) azonos meredekségű kis szakaszokat, és nézzük meg, melyiken nagyobb a testre ható súrlódási erő!

U. 31. Számítsuk ki, mennyit változik egységnyi idő alatt a meglökött fiú sebességének nagysága, illetve a sebességének lejtő irányú összetevője. Keressünk kapcsolatot e két mennyiség változási üteme között.

U. 32. A kerékpáros mindhárom esetben egyenletesen, gyorsulásmentesen halad, tehát a rá ható külső erők (a nehézségi erő, a talaj által kifejtett tapadási súrlódási erő és kényszererő, valamint a közegellenállási erő) eredője nulla.

U. 33. A közegellenállási erő $F = kv^2$ képletében szereplő k együttható Bandinál 1,5-szer nagyobb, mint Andi esetében, a (kerékpárral megnövelt) tömegük aránya $m_B/m_A \approx 1,8$. A lejtőn a kövőbb Bandit nagyobb nehézségi erő húzza, mint a sovány Andit, viszont a fékezőerő is nagyobb nála, mint Andinál. Vajon melyik hatás jelentősebb?

Írjuk fel a kerékpárosok mozgásegyenletét, és abból olvassuk le, hogyan függ a lejtő aljáig elért sebességük a k/m aránytól!

A vízszintes szakaszon (nem egyenletesen!) fékeződő kerékpárosok mozgásegyenlete egyértelműen meghatározza a megállásig megtett útjukat. De ha csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy melyikük gurul messzebbre, nincs is szükségünk a (differenciál-)egyenlet megoldására, csupán annak (megfelelő változókkal történő) felírására és kvalitatív vizsgálatára.

U. 34. A pihére jellemző, hogy elhanyagolhatóan kicsi a tömege, emiatt a rá ható nehézségi erőt elhanyagolhatjuk, és a Newton-féle mozgásegyenletben ma helyébe nullát írhatunk.

U. 35. Vizsgáljuk meg, hogyan változik időben a gyöngy pillanatnyi sebességvektorának és a végsebesség vektorának a különbsége!

U. 36. Tegyük fel, hogy a kis test nem válik el az asztallaptól! Keressünk összefüggést az m és M tömegű testek gyorsulásai között, majd használjuk fel, hogy az indítást követően a nagy test jó közelítéssel szabadeséssel kezd mozogni. Mekkora és milyen irányú eredő erő hat a kis testre az indulás pillanatában?

U. 37. Vizsgáljuk a mozgást az ékhez rögzített koordináta-rendszerből!

U. 38. A görbületi sugár (r) fogalma a fizikában a körmozgás centripetális gyorsulásának képletében bukkan fel: $a = v^2/r$, ahol v a pillanatnyi sebesség. Ez az összefüggés a dinamika $F = ma$ alaptörvényével kombinálva – alkalmasan választott erőtvény és kezdősebesség mellett – lehetőséget ad a görbületi sugár „fizikus módon” történő meghatározására.

U. 39. Írjuk le a mozgást a vonathoz rögzített (gyorsuló) koordináta-rendszerben!

U. 40. Számítsuk ki, hogy mekkora átlagos erővel kell tartanunk a fonalat, és mekkora munkát végzünk akkor, ha egy-egy lengés alatt a fonál hosszát kicsiny Δl értékkel csökkentjük.

U. 41. A mókus – ha gyorsulva mozog – vízszintes irányú erővel is hat a létrára. Ennek az erőnek a forgatónyomatéka kiegyensúlyozhatja a mókus súlyából származó forgatónyomatékat.

U. 42. Az adott körülmények között az m tömegű test vízszintes és függőleges mozgása egyaránt harmonikus rezgőmozgással közelíthető.

U. 43. Írjuk fel – vektorok segítségével – a sziklamászó egyensúlyi helyzetét meghatározó egyenletet, majd vizsgáljuk meg, mekkora visszatérítő erő hat rá, ha ebből a helyzetéből kitérítjük!

U. 44. Kis kitéréseknél a rugók által kifejtett visszatérítő erő nem arányos a kitéréssel, a test rezgése ezért nem harmonikus. Energetikai megfontolásokkal vagy dimenzióanalízissel azonban kideríthetjük, hogyan függ a kapott erőtvény szerint mozgó test periódusideje a tömegétől, a rugóállandótól és a rezgés amplitúdójától.



Gravitáció, bolygómozgás

U. 45. Első gondolatunk, miszerint a nagy tömegű test „lehúzza” a közvetlenül felette levő folyadékot, *nem helyes*. Ennek éppen az ellenkezője történik: a folyadék a bal oldali szárban megemelkedik! Ennek megértéséhez gondoljuk végig azt az extrém esetet, amikor a nagy tömegű golyó gravitációs tere sokkal erősebb, mint a Földé!

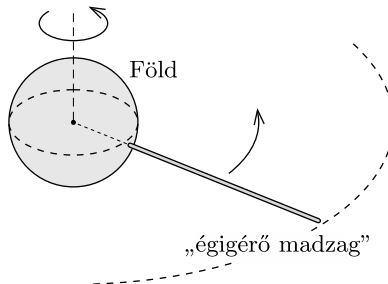
U. 46. Egy homogén tömegeloszlású, belül üres gömbhéj belsejében a gömbhéj saját gravitációs tere nulla, kívül pedig olyan a gravitációs tér, mintha a gömbhéj teljes tömege a középpontjában helyezkedne el.

U. 47. Szükségünk lesz arra az ismeretre, hogy egy homogén tömegeloszlású gömb belsejében a gravitációs gyorsulás a középponttól mért távolsággal egyenesen arányos. A lyukas gömb gravitációs tere egy homogén gömb és egy „negatív tömegsűrűségű”, feleakkora sugarú gömb terének szuperpozíciójaként állítható elő.

U. 48. Bontsuk fel a félgömböt képzeletben nagyon sok egyforma vastagságú félgömbhéjra! Lássuk be, hogy ezen héjak mindegyike ugyanakkora gravitációs térerősséget hoz létre a kérdéses pontban!

U. 49. Számítsuk ki, mekkora erővel tudta volna egy „mesebeli óriás” 1 méternyire széthúzni a képzeletben kettévágott kisbolygó két felét! Az óriás által befektetett munka teljes egészében a bolygó anyagának gravitációs potenciális energiájának növelésére fordítódik.

U. 50. Gondoljuk végig egy hosszú, vékony fonál „szinkronmozgásának” feltételeit, amely az Egyenlítő fölött függőlegesen helyezkedik el, és a Földdel együtt forog!



U. 51. Az általánosság megsértése nélkül kitűzhetjük célul, hogy állítsuk elő a koordináta-rendszerünk origójában a lehető legnagyobb, x irányú gravitációs

tézerősséget. Vizsgáljuk meg, hogy milyen alakú felületre helyezhetünk el adott ΔV térfogatú, kicsiny gyurmadarabkákat úgy, hogy azok ugyanakkora, x irányú gravitációs tézerősség-komponenst állítsanak elő az origóban. Az így kapott felületekre tekinthetünk „szintfelületekként”: egy adott térfogatú gyurmadarab annál nagyobb x irányú tézerősség-komponenst hoz létre az origóban, minél kisebb méretű szintfelületen fekszik.

U. 52. A gravitációs mező és az elektrosztatikus mező törvényszerűségei nagyon hasonlók egymáshoz. Használjuk fel ezt az analógiát, és alkalmazzuk Gauss törvényét!

U. 53. A hosszú, henger alakú bolygó gravitációs mezője a bolygó felszínéhez közel az *előző feladatban* szereplő „gravitációs Gauss-törvény” segítségével határozható meg. *Vigyázat:* ez az erőter más jellegű a bolygó közelében, mint a bolygótól a hosszával összemérhető (vagy még annál is sokkal nagyobb) távolságban!

U. 54. Induljunk ki a Newton-féle gravitációs törvényből, és fejezzük ki a Nap tömegét az átlagos sűrűségével!

U. 55. Gondoljunk például a kúpíngára!

U. 56. A feladat szimmetriája miatt a testek minden pillanatban egy szabályos n -szög csúcaiban helyezkednek el, és mindegyik test úgy mozog, mintha a középpontban egyetlen rögzített (alkalmasan választott M_n tömegű) test gravitációs vonzása hatna csak rá. A vonzócentrumba való zuhanás ideje Kepler harmadik törvénye segítségével számítható ki.

U. 57. A hajtóművek működése során felszabaduló energia a rakéta és a kilövellt égéstermékek energiájának növelésére fordítódik. Minél kisebb hányadát viszik el az energiának az égéstermékek, annál nagyobb hányad jut a rakétának.

U. 58. Az űrszondák és műholdak kilövése úgy a leggazdaságosabb, ha indításkor felhasználjuk a Föld tengely körüli forgását. Egy űrszonda Napba juttatása többféleképpen is megvalósítható. Mindegyik módszerben közös az, hogy a szondát meg kell „szabadítanunk” a Napra vonatkoztatott perdületétől. Hol érdemes ezt megtennünk, a Föld közelében, vagy esetleg máshol?

U. 59. A feladat szövegében szereplő „Nap körül keringő” kifejezés arra utal, hogy az üstökös teljes energiája negatív. Az üstökös becsapódási sebessége akkor a legnagyobb, ha a Föld mozgásirányával ellentétes irányú sebességgel ütközik bolygónknak, és az üstökös nagyon lazán „kötött” a Naphoz, azaz teljes energiája majdnem eléri a nullát. A legkisebb becsapódási sebesség abban az esetben valósul meg, ha az üstökös elhanyagolhatóan kicsiny relatív sebességgel érkezik a Föld közelébe.

U. 60. A megoldáshoz vezető út során Kepler *mindhárom* törvényét alkalmaznunk kell.

U. 61. A törmelék darabjai azonos nagytengelyű ellipszispályákon mozognak, melyek egyik fókuszpontjában áll a Nap. Keressük meg, hol helyezkedik el az ellipszisek másik fókuszpontja, és használjuk fel, hogy a burkológörbe minden pontja pontosan egy ellipszispályán van rajta!

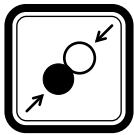
U. 62. A szondát érdemes úgy indítani, hogy a Föld vonzáskörzetének „elhagyása” után a Naphoz viszonyított sebessége a Föld v_F keringési sebességével azonos irányú legyen, hiszen akkor a Föld és a szonda sebességének nagysága összeadódik.

A bolygóközi térben mozgó szondára alkalmazható a Nap gravitációs terével számolt energia- és perdületmegmaradás törvénye, a „hintamanővert” pedig érdemes a bolygóhoz rögzített koordináta-rendszerből tárgyalni.

U. 63. A műholdra mozgása során végig jó közelítéssel érvényes marad a körmozgás dinamikai feltétele. Energetikai megfontolások alapján beláthatjuk, hogy a műhold mozgási energiája éppen annyival *növekszik*, amennyivel az összenergiája *csökken*, vagyis a közegellenállás okozta veszteség a várakozással ellentétben nem csökkenti, hanem *növeli* a műhold sebességét. Ennek dinamikai oka, hogy a sebességgel ellentétes irányú közegellenállási erő és a műholdra ható gravitációs erő eredője a „spirális” pálya miatt nem merőleges a műhold sebességére, az eredő erő pályamenti komponense a sebességgel megegyező irányú.

U. 64. A Föld–Hold rendszer (a Nap hatását elhanyagolva) zártnak tekinthető, amelynek teljes perdülete időben állandó marad. A teljes impulzusmomentum az égitestek tengely körüli forgásából származó sajátperdületekből, valamint a közös tömegközéppont körüli keringésből származó pályaperdületekből tevődik össze. Érdemes megbecsülni, hogy mely perdület-járulékok jelentősek, és melyek hanyagolhatók el. A becslésnél mindvégig használhatjuk azt a közelítést, hogy a földi Egyenlítő, a Hold egyenlítője és a Hold pályasíkja egy síkban van. (A Holdat tekinthetjük homogén tömegeloszlású gömbnek, a Föld tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát a könyv elején található adattáblázat tartalmazza.)

A perdületmegmaradás mellett szükségünk van még egy egyenletre, amely összefüggést teremt a Hold keringési szögsebessége és a Föld–Hold távolság között. Ehhez írjuk fel a (közelítőleg körpályán keringő) Hold centripetális gyorsulását!



Pontrendszerek

U. 65. A feladatot egymás utáni tökéletesen rugalmas ütközések sorozataként kezelhetjük.

U. 66. A tervünk akkor sikerül, ha az m tömegű korong sebességének iránya az egyes ütközések során π/N szöggel fordul el. Ha $M/N < m$, akkor az m tömegű korong nem szóródhat tetszőlegesen nagy szögben egy kezdetben álló, M/N tömegű korongon, a haladási irány egy bizonyos maximális szögnél jobban nem fordulhat el. Határozzuk meg ennek a maximális szögnek a nagyságát m , M és N segítségével!

A feladat b) részénél szükségünk lesz az exponenciális függvény következő előállítására:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

U. 67. Tekintheünk a súlyzókra pontrendszerként. Ekkor vizsgáljuk meg, mekkora erő ébredhet az *elhanyagolható tömegű* rúdiban az ütközés rövid időtartama alatt, és ez hogyan befolyásolja a súlyzó végén lévő kis korongok lendületét.

Egy másik lehetséges megoldási mód, ha a súlyzókat merev testként kezeljük. Ebben az esetben használjuk fel, hogy az ütközések során az egész rendszer lendülete, mechanikai energiája és perdülete megmarad.

U. 68. Kis kitérések esetén az ingák lengésideje a kitéréstől független, emiatt a golyók mindig a felfüggesztési pont alatt fognak ütközni. Ha a közegellenállás hatása egy-egy lengés alatt nem számottevő, akkor a szétpattanó golyók ugyanakkora sebességgel érkeznek vissza a pályájuk megmélyebb pontjához, mint amekkorával elindultak, majd ismét ütköznek. Az ütközéseknél a mechanikai energia csökken, a lendületek összege viszont állandó marad.

U. 69. Rugalmatlan ütközéseknél az összetorlódott gyöngyszemekből álló, egyre nagyobb tömegű „fürt” elég hosszú idő múlva valamekkora állandósult sebességgel fog mozogni. Alkalmazzuk a Newton-féle mozgásegyenletet erre a fürtre! Rugalmas ütközéseknél érdemes először azt végiggondolni, hogyan mozogna a rendszer, ha a külső erő csak az első ütközésig hatna.

U. 70. A rugalmas ütközések megmaradási törvényeiből kiindulva lássuk be, hogy minden egyes ütközés után a két test sebességkülönbségének és az ütközési pont faltól mért távolságának szorzata ugyanakkora. Ebből és az energiamegmaradás törvényéből kaphatjuk meg a keresett távolságot.

Egy másik (közelítő) megoldást adhatunk a feladatra, ha az m tömegű testet egydimenziós, egyetlen molekulából álló „gáznak” tekintjük, amit egy nekicsapódó, M tömegű dugattyú adiabatikusan összenyom.

U. 71. A henger mindaddig gyorsul, amíg a jobbról és balról nekiütőköző részecskéktől időegységenként átvett impulzusok előjeles összege nulla nem lesz. Nagyon hosszú idő múlva viszont nem mozoghat a henger, mert az (ha a záporozó részecskék gázmolekulák) ellentmondana a hőtan II. főtételének.

U. 72. Az egyre növekvő tömegű csepp mozgását a magával ragadott ködcseppek impulzusváltozása is fékezi. A közegellenállási erő a sebesség négyzetével és a csepp keresztmetszetével arányosnak vehető.



Merev testek dinamikája

U. 73. Hasonlítsuk össze a két inga szögsebességét azonos szögállású helyzetekben!

U. 74. Kényelmes sétatempó esetén az úrhajós alig feszíti meg lábizmait, így lába lényegében fizikai ingaként szabadon leng.

U. 75. Vizsgáljuk meg, hogyan változna a Nagy-Britannia útjain haladó autók eredő perdülete, ha a forgalom iránya megváltozna. Alkalmazzuk a perdületmegmaradás törvényét az *egész* Földre!

U. 76. Képzeljünk el egy homogén tömegeloszlású körgyűrűt, amelyet a középpontja körül valamekkora szögsebességgel megforgatunk – mondja Jancsi. Gondoljuk végig, mekkora erő feszíti a körgyűrűt, és ha képzeletben kivágnánk ennek a gyűrűnek egy darabját, erre a körívre hogyan teljesülne a tömegközépponti mozgásegyenlet.

U. 77. A kérdésre nem tudunk egyértelmű választ adni, mert az elcsúszás iránya függ a ceruza hegye és az asztallap közötti tapadási súrlódási együttható nagyságától. Ha a súrlódási tényező kicsi, akkor a ceruza hegye hátrafelé (a dőlés irányával ellentétesen), ellenkező esetben pedig előre felé csúszik. A két esetet elválasztó kritikus súrlódási tényezőt meghatározhatjuk, ha felírjuk a ceruza tömegközéppontjának mozgását és a tömegközéppont körüli forgást leíró egyenleteket.

U. 78. Ha nagyon óvatosan húzzuk a karcsú, magas szobrocskát, akkor – a viszonylag nagy súrlódás miatt – orra bukik. Ha viszont nagyot rántunk rajta (de a cérna még nem szakad el), akkor hanyatt esik! Próbálkozzunk se túl kicsi, se túl nagy erő kifejtéssel!

U. 79. A megmaradt gumiszálát feszítő erő csak a megnyúlásától függ, ami nem tud hirtelen megváltozni. A mozgás- és forgásegyenletek felírásával nézzük meg, mi annak a feltétele, hogy a B pont felfelé mozduljon. Belátható, hogy ez a feltétel tetszőleges tömegeloszlású hajótestnél teljesül.

U. 80. A bolhák nem ugorhatnak közvetlenül egymás felé, mert akkor összeütköznek a levegőben felúton. Tehát valamilyen más irányba kell ugraniuk, miközben a rendszer szimmetriája megmarad. Gondoljunk arra, miért lényeges a hajszál megadott tömege!

U. 81. Felírhatjuk a dinamika és a forgómozgás alapegyenletét minden egyes rúd tömegközéppontjának gyorsulására és szöggyorsulására, ezek azonban nagyon

sok ismeretlent tartalmaznak (pl. a rudak között ható erőket és azok irányát), és csak hosszas számolás után vezetnek eredményre. Egyszerűbben célhoz érünk, ha a munkatételt alkalmazzuk egy, az indulást követő igen rövid időtartamra.

U. 82. Látszólag túl kevés a rendelkezésre álló adat, de legyünk bátrak, és írjuk fel a henger tömegközéppontjának mozgását és a forgómozgást leíró egyenleteket!

U. 83. Használjuk az energiamegmaradás törvényét, azonban ne felejtjük el számításba venni a görgők felpörgetésekor disszipálódó energiát!

U. 84. Mutassuk meg, hogy sem a korong haladó mozgása, sem pedig a forgása nem állhat le előbb. Ehhez gondoljuk meg, hogy mekkora erő fékezi a haladást, amikor a tömegközéppont már csak nagyon lassan mozog, illetve mekkora forgatónyomaték fékezi a forgást, amikor a szögsebesség már nagyon kicsi.

U. 85. Azt kell észrevennünk, hogy a görgők kis tömege miatt a görgőkre ható tapadási súrlódási erőnek a rúdra merőleges irányú komponense elhanyagolhatóan kicsi. A rúdra tehát nem hat forgatónyomaték, így szögsebessége mindkét esetben állandó.

U. 86. Vizsgáljuk meg, mekkora perdülete van a golyónak az asztal valamely, az *ábra* síkjában lévő, rögzített pontjára vonatkoztatva. Megváltozhat-e ez a perdület a golyó mozgása során?

U. 87. Ha a jelenségről egy lassított felvételt készítenénk, azt látnánk, hogy közvetlenül az ütközés után az első golyó középpontja megáll, miközben a golyó forgása az ütközés alatt egyáltalán nem áll le, gyakorlatilag változatlan marad. A rendkívül gyors ütközésben tehát az első golyó csak lendületet ad át a másodiknak, perdületet azonban nem.

Az ütközés után a súrlódási erő az első golyót előrefelé gyorsítja, a forgását pedig fékezi. A meglökött golyót viszont a haladó mozgásában fékezi a súrlódás, ugyanakkor egyre gyorsabb forgásba hozza. A továbbiakban a golyók perdülete az asztal valamely, alkalmasan választott pontjára vonatkoztatva (külön-külön) állandó marad.

U. 88. Mindkét esetben keressünk olyan rögzített pontot, amelyre nézve a golyó perdülete a gyorsítási folyamat során megmarad.

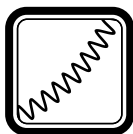
U. 89. Lássuk be, hogy a golyó asztallal érintkező pontjának sebessége a köszörlülő mozgás során végig ugyanolyan irányú! A *b*) kérdést a perdületmegmaradás ügyes alkalmazásával válaszolhatjuk meg.

U. 90. A rendszer energia és impulzus szempontjából *nem zárt*, ezek megmaradására tehát nem hivatkozhatunk. A furcsa jelenség a perdületmegmaradással magyarázható.

U. 91. Vektorok segítségével írjuk fel a labda forgását és tömegközépponti mozgását leíró egyenleteket, valamint a csúszásmentes gördülést kifejező kényszerfeltételt, majd próbáljuk meg belátni, hogy a labda középpontja tetszőleges kezdőfeltétel esetén egyenletes körmozgást végez. Ennek a körnek a középpontja általában nem esik egybe a korong középpontjával.

U. 92. A labda mozgás- és forgásegyenletének felírásához használjunk vektorokat, és nézzük meg, mi a feltétele annak, hogy a labda középpontjának gyorsulása nulla legyen. Segíthet az *előző feladat* megoldásának tanulmányozása is.

U. 93. Vizsgáljuk először a gumilabda függőleges tengely körüli forgását és a tömegközéppontjának a cső tengelye körüli forgását! Ha sikerül belátnunk, hogy mindkét forgás egyenletes, ez megkönnyíti a mozgás többi részletének leírását. Vigyázat! Hibás az a gondolat, mely szerint a labda függőleges irányban egyenletesen gyorsuló mozgást végez.



Rugalmasságtan

U. 94. Hasonlítsuk össze a rugót feszítő átlagos erőt a két esetben!

U. 95. Belátható, hogy a slinky tetszőleges, nem feltétlenül rövid darabjának tömege egyenesen arányos a rugódarab vízszintes vetületének hosszával.

U. 96. Az emelés során végzett munka a slinky gravitációs helyzeti és rugalmas energiájának növelésére fordítódik. Ezeket a slinky kicsiny, egyenlő tömegű részekre osztásával határozhatjuk meg. A *b)* és *c)* kérdésekre könnyen válaszolhatunk, ha észrevesszük: a rugó elengedését követően a tömegközéppont szabadon esik.

U. 97. A dimenzióanalízis módszerét alkalmazva – ha nem is a teljes megoldást, de – fontos részeredményt kaphatunk.

A részletes leírásnál érdemes a rugó pontjait a rugó rögzített vége és a kérdéses pont közötti rugódarab m^* tömegével jellemezni. Ha sikerül meghatározunk a rugó mentén ható F erőt és a rugó egy-egy darabkájának a forgástengelytől mért r távolságát m^* függvényében, akkor megkapjuk a probléma részletes megoldását. Ehhez írunk fel egyenleteket az $F(m^*)$ és $r(m^*)$ függvények m^* szerinti változási ütemére. Ezekből – alkalmas mechanikai analógia felhasználásával – leolvashatjuk a slinky alakváltozásának minden részletét, így a teljes megnyúlást is.

Megjegyzés. Tanulságos a feladat megoldása előtt átgondolni egy egyszerűbb változatot: a slinky folytonos tömegeloszlása helyett tekintsünk egy nulla tömegű, elhanyagolható feszítetlen hosszúságú, D direkciós állandójú rugót, amelynek végéhez egy m tömegű pontszerű testet erősítünk, majd a rendszert forgásba hozzuk.

U. 98. Keressünk analógiát a forgásban lévő slinky alakját leíró görbe egyenlete és egy harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont mozgásegyenlete között. Az előző feladat megoldásának tanulmányozása sokat segíthet.

U. 99. Az egyik végén vízszintesen befogott, másik végén terhelt rúd lehajlása egyenesen arányos a terhelő erővel és a pálca hosszának harmadik hatványával.

U. 100. A végpontok lesüllyedésének összehasonlításához osszuk fel a negyed-köríveket egyenlő hosszúságú, kicsiny szakaszokra. Terhelt állapotban a fémszál mentén helyről helyre változó nagyságú forgatónyomaték ébred, melynek hatására a szál kis darabjai meghajlanak. A darabkák meghajlását jellemző szög (azaz a darabka végpontjaihoz húzott érintők által bezárt szög megváltozása) egyenesen arányos az adott pontban ható forgatónyomatékkal. A két fémszál pontjainak alkalmas megfeleltetésével hasonlítsuk össze a szálak kis szakaszain fellépő

forгатónyomatékokat, majd vizsgáljuk meg, hogy a létrejött deformációk milyen mértékben járulnak hozzá a végpontok lesüllyedéséhez.

Energetikai megfontolásokkal is eljuthatunk a kérdés megválaszolásához, ha felhasználjuk, hogy a fémszálak azonos hosszúságú darabkáiban tárolt rugalmas energia a bennük ébredő forгатónyomaték négyzetével arányos.

U. 101. Egy meghajlított pálcában tárolt rugalmas energia egyenesen arányos a hosszával és fordítottan arányos a görbületi sugár négyzetével. Közelítsük a deformált pálcá alakját mindkét esetben körívvel, és keressünk összefüggést a pálcá rugalmas energiája és a terhelőerő között!

U. 102. Ha a párhuzamosan futó kábelek száma alulról felfelé haladva elegendően gyors ütemben növekszik, akkor – elvben – tetszőleges mélység elérhető.

U. 103. Vizsgáljuk meg, hogy legfeljebb mennyi héliumot tartalmazhatott a tartály kezdetben anélkül, hogy szétrepedt volna. A tartály anyagát szabadon választhatjuk, de csak reális anyagok jöhetnek szóba.

U. 104. A virsli felhasadását a belsejében fokozatosan növekvő gőznyomás okozza. A túlnyomás hatására a virsli falában egyre növekvő húzófeszültség alakul ki, méghozzá anizotrop (és a tórusz esetében inhomogén) módon. A feszültségek nagysága a virsli alkalmasan kiválasztott darabjának erőegyensúlyából elemi úton is meghatározható.



Statika

U. 105. A kötéláncosra ható nehézségi erővel a feszítőerők függőleges komponense tart egyensúlyt. Kis szögekre alkalmazhatjuk a $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ közelítést.

U. 106. Található olyan mechanikai rendszer, amelynek energiája akkor minimális (tehát akkor van egyensúlyban), amikor a háromszög csúcsaitól mért távolságok összege a legkisebb. A megoldás könnyen általánosítható a távolságok *súlyozott* összegének legkisebb értékére is.

U. 107. Osszuk fel a zsák és a szőnyeg érintkezési felületét olyan kicsiny részekre, hogy azokon a terhelést már egyenletesnek vehessük. Ezen felületdarabkánál jelentkező súrlódási munkák összege a keresett teljes munkavégzés. Gondoljuk meg, van-e szerepe annak, hogy a zsákot az aljánál húzzuk!

U. 108. Az ujjaink általában nem egyforma nagy erővel nyomják a rudat, emiatt a tapadási súrlódási erő legnagyobb értéke az egyik ujjunknál kisebb, mint a másikonál, itt fog megcsúszni a rúd. A csúszásban lévő ujjunk egyre közelebb kerül a rúd tömegközéppontjához, emiatt nő az általa kifejtett nyomóerő, és vele együtt a csúszási súrlódási erő is. Ha ez az erő meghaladja a másik ujjunknál fellépő tapadási súrlódási erő maximumát, a másik ujjunk kezd el csúszni. Ez a folyamat váltakozva ismétlődik, az ujjaink felváltva csúsznak, illetve tapadnak a rúdra. A munka kiszámítása az egyes csúszási szakaszok hosszának és a változó nagyságú erőnek a meghatározásával történhet.

U. 109. A gömb egyensúlyának feltétele, hogy a nehézségi erő hatásvonala átmenjen a lejtővel való érintkezési ponton. Gondoljuk meg, kerülhet-e a golyó tömegközéppontja az érintkezési pont fölé.

U. 110. A csúsztatgatást a felső téglatesttel kell elkezdeni. A jó stratégia az, hogy a legfelső testet addig csúsztatjuk el, amíg lehet, majd ugyanezt tesszük az alatta lévővel is, és így haladunk lefelé.

U. 111. A vizet tartalmazó főzőpohár akkor borul fel legnehezebben, ha a súlypontja a lehető legalacsonyabban helyezkedik el. Milyen feltételek teljesülése esetén emelkedik szükségszerűen a víz-főzőpohár rendszer együttes súlypontja, ha akár hozzáadunk, akár elveszünk a pohárból egy kis vizet?

U. 112. Írjuk fel a háromszög alakú lemez egyensúlyának feltételét vektorok segítségével!

U. 113. Használjuk fel, hogy a felfüggesztő rugók által kifejtett *eredő* erő a járdára hajtáskor *nem* változik meg, továbbá azt, hogy a karosszériára ható erők eredő forgatónyomatéka *tetszőleges tengelyre* nézve nulla.

U. 114. Oldjuk meg a feladatot grafikusán! A lemezre ható erők a hengerrel érintkező pontokban legfeljebb az $\varepsilon = \arctg \mu$ súrlódási határszöggel térhetnek el a lemez síkjára merőleges egyenestől. Vizsgáljuk meg az erők egyensúlyának feltételét a lehető legkisebb súrlódási határszögnél!

U. 115. A körző tömegközéppontjának mindig a felfüggesztési pont alatt kell lennie. Ha a szárak nyílásszögét változtatjuk, az egyes szárak tömegközéppontja vízszintes irányban is elmozdul, de közös tömegközéppontjuk csak függőlegesen mozoghat.

U. 116. Alkalmazzuk a munkatételt a kúp kicsiny, elképzelt (virtuális) elmozdulására!

U. 117. A kulcskérdés: hogyan tud a súrlódási erő egyszerre egyensúlyt tartani Jean Valjean súlyával és a falak nyomóerejével?

U. 118. Lacinak van igaza. Állításának belátásához segítségünkre lehet a szögfelezőtétel.

U. 119. Az alakzat akkor borul fel, ha a tömegközéppontjának függőleges vetülete kívül esik az alátámasztáson.

U. 120. Belátható, hogy ha a tetraédernek valamelyik lapja borulékony, akkor a három másik oldallap közül kettőnek biztosan nagyobb a területe a kiszemelt borulékony oldallap területénél. Ebből következik, hogy a tetraédernek *biztosan* van legalább két olyan oldallapja (a legnagyobb és a második legnagyobb területű oldallap), amire állítva stabilan áll.



Kötelek, láncok, granulált anyagok

U. 121. Hasonlítsuk össze a tömegközéppontok emelkedését!

U. 122. A haladók lassójának minden pontjában ugyanakkora erő ébred. Ugyanez igaz a kezdők lassójának mindkét darabjára külön-külön. Egyensúlyi állapotban a versenyző helyzeti energiája mindkét lasszó esetében minimális. A kúp palástjára simuló kötélrész hosszát könnyebb meghatározni, ha a palástot képzületben sík lappá terítjük szét.

U. 123. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a fonalat feszítő erő a hengerpalást mentén! Ennek az erőnek a változási üteme (egységnyi távolságon bekövetkező megváltozása) a fonál és a henger között ható nyomóerővel, tehát végső soron a fonalerővel arányos. Keressünk hasonló jelenséget, amelyben valamilyen mennyiség változási üteme a mennyiség pillanatnyi értékével arányos (radioaktív bomlás, kondenzátor kisülése stb). Az analógia segítségével megkaphatjuk a kötélcsúrlódás formuláját.

U. 124. Rövid úton megkaphatjuk a feszítőerőt, ha a villanyvezeték alkalmas darabjára (ésszerű közelítések mellett) felírjuk a forgatónyomatékok egyensúlyát.

U. 125. A feladat elemi úton, a kötélen alakjának ismerete nélkül is megoldható. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora vízszintes erő szükséges a mászórud és a kötélen esetén ahhoz, hogy végeik *azonos magasságba* kerüljenek.

U. 126. Megmutatható, hogy a kötélen bármely két (1-es és 2-es jelű) pontjában – így például a középpontjában és a jobb oldali állócsigánál lévő pontjában – ébredő erők különbsége csak a pontok $h_{1,2}$ magasságkülönbségétől, valamint a kötélen λ -val jelölt vonalmenti tömegsűrűségétől függ:

$$F_2 - F_1 = \lambda g h_{1,2}.$$

Ennek belátásához vizsgáljuk meg, hogy milyen energiaváltozásokkal jár, ha gondolatban az 1-es pontnál a kötélen egy kis darabkáját kivágjuk, majd a kivágott részt a 2-es pontban betoldjuk!

U. 127. A gyöngysor két tetszőleges pontjában ható erők nagyságának különbsége arányos a pontok magasságkülönbségével (lásd az *előző feladatot*). Ha a gyöngysor lelógó része elég hosszú, az egyensúly stabil. A lelógó rész hosszát csökkentve a kritikus érték elérésekor a gyöngysor a henger legalsó pontjánál kezd elválni a palásttól.

U. 128. Használjuk a virtuális munka elvét, és vizsgáljuk meg, milyen energiaváltozások történnek, ha a valamennyire feltekert szőnyeget egy kicsit továbbgöngyöltjük.

U. 129. A nehézségi erőről a lánc tömegközéppontjával együttmozgó koordináta-rendszerben „megfeledezhetünk”, a lánc ebből a koordináta-rendszerből nézve súlytalan (de nem tömegtelen!). Gondoljuk végig, hogy a lánc kicsiny, R görbületi sugarú, v sebességgel egyenletesen mozgó darabkájára ható erők milyen irányban akarják deformálni a lánc alakját.

Eláruljuk, hogy Feri sejtése helyes, a lánc megtartja eredeti alakját.

U. 130. Használjuk az *előző feladat* megoldásának gondolatát! A különbség, hogy ebben az esetben a gravitációs mező hatását is figyelembe kell venni. Beláthatjuk, hogy a lánc alakja így is változatlan marad.

U. 131. Vizsgáljuk a hurok mozgását a középpontjának c sebességével mozgó koordináta-rendszerből! Ebben a rendszerben a hurok darabkái egyenletes körmozgást végeznek. A körmozgás dinamikai feltételéből meghatározhatjuk a keresett c sebességet.

U. 132. Számítsuk ki, mekkora erő feszíti a láncot, amikor éppen elválik a csigától (lásd a *129. feladatot*). Használjuk fel az energiamegmaradás tételét is!

U. 133. A nehézségi erő hatása kettős: egyrészt gyorsítja a lánc lelógó részét, másrészt pedig lökésszerűen mozgásba hozza a még asztalon nyugvó láncszemetket. Ez azt jelenti, hogy a mozgásegyenlet felírásánál a mozgó lánc tömegének változását is figyelembe kell venni.

U. 134. Igaz ugyan, hogy a celluxszalag mozgásban lévő részének minden pontja 10 cm/s sebességgel mozog, de a (tömeg)középpontjának sebessége ennél az értéknél *kisebb!*

U. 135. Alkalmazzuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét, majd a guriga sebességének ismeretében az impulzusváltozásból számítsuk ki az erőt!

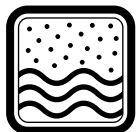
U. 136. Lapozzuk fel a *134. feladatot!* Ebből megtanulhatjuk, hogy bizonyos (változó tömegű) rendszereknél az impulzus, a tömeg és a tömegközéppont sebessége között nem olyan egyszerű a kapcsolat, mint azt korábban megszoktuk.

U. 137. A tapasztalat szerint a homok lepergési sebessége nem függ a homokóra felső felében lévő homok mennyiségétől. Ez a megfigyelés azzal függ össze, hogy a homokszemek közötti súrlódás miatt a kiömlő homok átlagos sebessége csak a közvetlen környezetétől, elsősorban a nyílás méretétől függ, a viszonylag távoli részek hatásaira nem érzékeny. (Folyadékknál ez nem érvényes, ott a nyomás

nagy távolságokra is „átadódik”). Ezek szerint a homok lepergési idejének arányosnak kell lennie a homok kezdeti H magasságának köbével. Gondoljuk meg, milyen adatoktól függhet még a lepergési idő! Alkalmazzuk a dimenzióanalízis módszerét!

U. 138. Vizsgáljuk meg, mennyivel változik meg valamennyi idő (mondjuk 1 másodperc) alatt a szalagra hulló homok vízszintes irányú lendülete. Tanulságos az energiaviszonyok „mérlegelése” is!

U. 139. A betonkeverőhöz hasonló szerkezet forgatásához szükséges mechanikai munka teljes egészében hővé alakul. A munka kiszámításához szükségünk lesz a homok „rézsűszögére”, amire – hétköznapi tapasztalataink alapján – becslést adhatunk.



Folyadékok és gázok mechanikája

U. 140. A vödört nemcsak a benne lévő víz súlya húzza lefelé, hanem a vas-kockára ható felhajtóerő ellenereje is.

U. 141. Azt állítjuk, hogy nem folyhat be a víz az üstbe. Ennek belátásához érdemes megvizsgálnunk a lánc által kifejtett erő és forgatónyomaték hatását.

U. 142. A buborék átlagsűrűségének és a levegő sűrűségének ugyanakkorának kell lennie, hiszen a buborékok lebegnek.

U. 143. Többféle megoldás is elképzelhető. Az egyikben egy könnyen nyújtható rugó a kulcsszereplő.

U. 144. Vegyük körül gondolatban a tölcsért egy vele azonos alapterületű hengerrel, amibe annyi vizet öntünk, hogy elérje a tölcsérben lévő víz szintjét. Mekkora erővel hat ekkor a víz a tölcsérre?

U. 145. Használjuk fel, hogy a félgömb alakú vízrészre ható erők eredője nulla. A támadáspont meghatározásakor vegyük figyelembe, hogy a forgatónyomatékok összegének is nullának kell lennie.

U. 146. A labdára ható erőt ebben az esetben nem lehet Arkhimédész törvénye alapján, a labda által kiszorított víz súlyaként számolni. A pingponglabda vízbe merülő (a vízmagasságtól függően gömbszelet vagy gömbréteg alakú) részére ugyanis az $r^2\pi$ területű körlapon nem hat hidrosztatikai nyomás.

U. 147. A nyomás növelésekor csökken a kerekek és a talaj érintkezési felülete, emiatt a kerék elfordításakor ébredő súrlódási erő forgatónyomatéka kisebb lesz.

U. 148. Hibás az a gondolat, hogy a végállapotban a lufiban lévő túlnyomás és a rúd keresztmetszet-területének szorzata egyenlő a rúd súlyával. A rúd alsó végére ugyanis nem csak a lufiban lévő túlnyomásból származó nyomóerő hat, hanem a lufi falában ébredő rugalmas erő is!

U. 149. A feladat első ránézésre mechanikai problémának látszik, de valójában legalább ennyire termodinamikai feladat is. Az egyensúly, ami „kellően hosszú idő után” beáll, termodinamikai egyensúly lesz, melynek kialakulásában a lombikban található vízgőz is fontos szerepet játszik.

U. 150. A mézből és az acélgolyóból álló rendszer tömegközéppontja egyenletesen mozog lefelé. A rendszer összes impulzusa (ami a golyó impulzusának és a méz keresett impulzusának összege) a tömegközéppont sebességéből kiszámítható.

U. 151. Gondoljuk meg, hogyan mozog a mérlegen lévő teljes (tartály + folyadék + edény) rendszer tömegközéppontja!

U. 152. Írjuk fel a kezdetben álló, majd a (kezdeti) gyorsulással mozgásba jövő folyadékra, hogy mennyit változik a helyzeti és mozgási energiája egy nagyon rövid Δt időtartam alatt.

U. 153. Hibás az a gondolatmenet, miszerint 1 óra alatt a medence $\frac{1}{3}$ része telik meg, miközben $\frac{1}{2}$ rész folyik ki, tehát óránként $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ rész ürül ki. A vízcsapból egyenletesen folyik a víz a medencébe, azonban a kifolyónál (a Torricelli-féle kiömlési törvénynek megfelelően) a víz annál gyorsabban folyik, minél magasabb a vízszint.

U. 154. Vegyük észre, hogy a rendszerre nem hat vízszintes irányú külső erő! Az egész rendszer vízszintes irányú impulzusának megmaradásából kiindulva lássuk be, hogy a tartálykocsi kezdetben jobbra, majd később balra mozog!

U. 155. A víz belső súrlódása a feladat szövege szerint elhanyagolható, emiatt a csatorna nem tudja megváltoztatni a víz eredő vízszintes irányú impulzusát. A folyadék helyzeti energiájának változását a mozgási energia mellett hanyagoljuk el! Alkalmazhatjuk (még hozzá többször is) a Bernoulli-egyenletet.

U. 156. Egy lehetséges út a feladat megoldásához, ha meggondoljuk, hogy milyen fizikai mennyiségektől függhet az éppen lebegő helikopter teljesítménye, és alkalmazzuk a dimenzióanalízis módszerét. Dinamikai érveléssel is célhoz érhetünk, ha azt vizsgáljuk, hogyan érvényesül a hatás-ellenhatás törvénye a helikopterre és a lefelé mozgatott légtömegre.



Felületi feszültség

U. 157. A kapilláris cső végén a görbületi nyomás tart egyensúlyt a folyadék belsejében lévő nyomás és a külső légnyomás különbségével.

U. 158. Az elválasztó hártya görbületi sugarának meghatározásához írjuk fel a görbületi nyomások egyensúlyát! Az érintkezési kör sugarát úgy kaphatjuk meg, ha megvizsgáljuk a körvonal kicsiny darabkájára ható erőket.

U. 159. Rajzoljunk ábrákat, melyek a folyadékfelszíneket és a nyomásviszonyokat mutatják a tárgyak között, illetve mellettük!

U. 160. Gondoljuk meg, mekkora erő terheli a pohár alját, amikor a borotva-
penge még úszik, és mekkora akkor, amikor már a pohár fenekére süllyedt.

U. 161. Írjuk fel a megemelkedett vírétegre ható *vízszintes irányú* erőket!

U. 162. Két hatás verseng egymás ellen: a felületi erők igyekeznek minél kisebb területűre összehúzni a tócsát, a gravitáció ezzel szemben szeretné minél vékonyabbra lapítani. A tócsa egyensúlyi méretét végül az energiaminimum elve határozza meg. Ne felejtjük el figyelembe venni a padló és a víz érintkezéséből származó kölcsönhatási energiát!

U. 163. A víz felületi feszültsége (görbületi nyomása) miatt a vízpogácsában kisebb a víz nyomása, mint a külső légnyomás.

U. 164. Könnyen azt gondolhatjuk, hogy a vízcsepp egyensúlyi állapotban teljesen körülfolymja a pálcat, ez azonban nem igaz. A vízcsepp alakját az energiaminimum határozza meg, a pálca elhelyekedését pedig az erőegyensúly.

U. 165. Az egyensúlyi állapotot pl. az energiaminimum-elv segítségével találhatjuk meg. Súlytalanság állapotában a gravitációs helyzeti energia figyelmen kívül hagyható, elegendő a felületi energiákkal foglalkoznunk.

U. 166. A kisebb méretű folyadékcseppek felületének közelében a telített gőz nyomása kicsit nagyobb, mint a nagyobb cseppeknél. Mivel a zárt edény alján a gőznyomás mindenhol ugyanakkora, a nagyobb cseppeknél ez a nyomás nagyobb, mint az egyensúlyi érték, tehát azokra lecsapódik a gőz és meghízznak, a kisebb méretű cseppek pedig inkább párolognak, tehát egyre fogynak.

A telített gőznyomás és a csepp görbülete közti kapcsolatot úgy vezethetjük le, ha végiggondoljuk, hogyan alakul ki a nyomások egyensúlya egy zárt térrészben

lévő, valamennyi folyadékot tartalmazó edény és egy abba belelógatott kapilláris cső esetében.

U. 167. A csepp párolgása során csökken a felülete, tehát csökken a felületi energiája is. Hasonlítsuk össze ezt az energiacsökkenést a párolgáshoz szükséges energiával!

U. 168. A felületi vízhullámok terjedési sebességét kis hullámhosszak esetén a felületi feszültség szabja meg. Gondoljuk meg, hogyan függhet a (kapilláris) vízhullámok terjedési sebessége a hullámhosszuktól, és hogy van-e a vízhullámok hullámhosszának alsó határa.



Hőtan

U. 169. A melegedés hőtágulással jár. A két gömb közti hőmérsékletkülönbséget a tömegközéppontjuk ellentétes irányú elmozdulása okozza.

U. 170. Osszuk szét a meleg vizet egyenlő mértékben kis edényekbe, és érintsük össze az edényeket egyenként a hideg gyógyvízzel!

U. 171. Ha az edény fala más hőmérsékletű, mint a benne lévő gáz, akkor a gáz energiát vesz fel a faltól, vagy energiát ad át annak. Mit jelent ez a falnak ütköző gázmolekulák szintjén?

U. 172. Állandósult állapotban a kemencéből egységnyi idő alatt kilépő és az egységnyi idő alatt belépő részecskék száma megegyezik.

U. 173. A hengerbe zárt levegő belső energiája ugyanannyival növekszik, amennyivel a dugattyúra akasztott test helyzeti energiája csökken. A mechanikai energia a gáz belső sűrűdése, valamint a dugattyú és a henger fala közötti sűrűdés révén alakul belső energiává.

U. 174. Írjuk fel a hőtan első főtételét arra a folyamatra, amelyben a gáz a felső térrészből teljes egészében átkerül az alsó térrészbe!

U. 175. Ha a bezárt levegő állapotváltozását p - V diagramon ábrázoljuk, egyenest kapunk. A feladatban rejltő szépség akkor tárul elénk, ha átgondoljuk, mit is jelent az, ha a folyamatot jellemző egyenes valamely pontjában éppen érinti a hozzá tartozó izotermát vagy adiabatát.

U. 176. Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha az időben állandósult alsó légkörnek egy kis térfogatú darabja *hirtelen* kicsit magasabbra emelkedik! A felemelkedő légtömeg a gyors (adiabatikus) tágulás miatt lehűl, sűrűsége pedig lecsökken. A légkör stabilitásának feltétele, hogy a vizsgált légtömeg végső sűrűsége nagyobb legyen az őt körülvevő levegő sűrűségénél, ellenkező esetben ugyanis a légtömeg tovább emelkedne fölfelé.

U. 177. Ha a nyomás lassan csökken, akkor a gáz egyensúlyi állapotokon keresztül, reverzibilis folyamatban éri el a végállapotot. Gyors nyomáscsökkenéskor a folyamat irreverzibilis, és a burokra ható erők eredője a tágulás során nem lesz zérus.

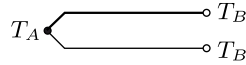
U. 178. Számítsuk ki a tartályba kerülő levegő entrópiaváltozását!

U. 179. A legtöbb munka úgy nyerhető a két hőtartályból, ha közöttük Carnot-féle hőerőgépet üzemeltetünk. A folyamat során nem nőhet a rendszer entrópiája. A végállapotban a két hőtartály hőmérséklete azonos lesz.

U. 180. A termoelem úgy készül, hogy két, különböző anyagból készült fém-szálat egyik végüknél összeforrasztanak. Ha a termoelemet olyan környezetbe helyezzük, ahol a forrasztási pont T_A hőmérséklete eltér a szabad végek T_B hőmérsékletétől, akkor a szabad végek között a hőmérsékletkülönbséggel arányos U elektromos feszültség alakul ki (*Seebeck-effektus*):

$$U = S_{AB}(T_A - T_B),$$

ahol S_{AB} az anyagpárra jellemző állandó, az ún. Seebeck-együttható.



A feladatban leírt összeállításban egy másik termoelektromos jelenség is fellép: a *Peltier-effektus*. Ha ugyanis két különböző anyagú vezető csatlakozási pontján áram folyik keresztül, akkor a kontaktuson (az áram irányától függően) hő fejlődik vagy nyelődik el. Ennek a hőfejlődésnek/hőelvonásnak az üteme (teljesítménye) egyenesen arányos a forrasztási ponton átfolyó I áram erősségével:

$$P_A = \Pi_A I,$$

ahol Π_A a kontaktusra jellemző Peltier-együttható, ami termodinamikai okokból szoros kapcsolatban áll a Seebeck-együtthatóval és a forrasztási pont T_A hőmérsékletével:

$$\Pi_A = S_{AB} T_A.$$

A fenti összefüggések használata helyett gondolkodhatunk úgy is, hogy a termoelemet a szoba levegője és a jéggel teli edény között működtetett hőerőgépnek tekintjük.

U. 181. A Nap képe a fókusz síkban nem pontszerű, hanem kicsi korong. A gömb alakú testre beeső napsugárzás teljesítménye egyenlő a fekete test által kisugárzott teljesítménnyel.

U. 182. Éjjel egyensúlyba kerül az autó által egységnyi idő alatt kisugárzott hőmennyiség és a (melegebb) környezettől kapott hőmennyiség.

U. 183. A burkolat mindkét oldala hőmérsékleti sugárzást bocsát ki, de el is nyeli a rá eső sugárzást. A kialakuló hőmérsékletet az elnyelt és a kibocsátott teljesítmények egyenlősége határozza meg.



Halmazállapot-változások

U. 184. Az olvadási idők különbségét az okozza, hogy a jégkockákból kiolvadó víz sűrűsége nem egyezik meg az edényekben lévő folyadék sűrűségével.

U. 185. Használjuk fel az energiamegmaradás tételét!

U. 186. Ha egy hegy nagyon magas, akkor a talapzata a nagy nyomás miatt megolvad. Hasonlítsuk össze a hegy egy bizonyos vastagságú alsó rétegének megolváshoz szükséges energiát azzal a gravitációs energiaváltozással, amely a hegy „lesüllyedése” során felszabadul.

U. 187. A jég által időegység alatt elvezetett hő összefüggésbe hozható az időegység alatt megfagyó víz tömegével.

U. 188. A felengedés során a hővezetés játssza a főszerepet. Lássuk be, hogy a felengedéshez szükséges idő a hasonló alakú testek esetében a lineáris méretek négyzetével arányos.

U. 189. A feladatban elrejtett „csapda” a forráshővel kapcsolatos. A víz 100°C hőmérsékleten, 1 atmoszféra nyomáson mérhető forráshője (a táblázatokban megtalálható szokásos 2256 kJ/kg) nemcsak a gőz magasabb belső energiájából adódik, hanem tartalmazza a külső levegő ellen végzett tágulási munkát is.

U. 190. Egy folyadékban a forrás olyan hőmérsékleten indul meg, amelyen a telített gőz nyomása eléri vagy meghaladja a folyadék feletti térrészben uralkodó nyomást.

U. 191. A tartály lassú melegítésekor a víz nem kezd el forrni, hanem csak párolog. A függelékben található táblázati adatok felhasználásával vizsgáljuk meg, hogyan alakul a víz, illetve a telített gőz sűrűsége a hőmérséklet emelkedésével.

U. 192. Meglepő módon *mindkét* térfogatváltozás során kicsapódhat víz a telített gőzből. Vajon hogyan?

U. 193. A kémcső alján a végállapotban még marad kis mennyiségű 100°C -os víz. A feladat kérdése utal rá, hogy a nyomás az egész kémcsőben ugyanakkora lesz.

U. 194. A cseppfolyósodás megkezdéséig az egyes gázösszetevők viselkedése közelítőleg az ideális gázokéval egyezik meg, emiatt a parciális nyomások aránya közelítőleg az összetevők tömegarányával egyezik meg. A cseppfolyósodás akkor

kezdődik meg, amikor valamelyik (esetleg mindkét) összetevő parciális nyomása eléri az adott hőmérséklethez tartozó telített gőz nyomásértékét.

U. 195. A kürtőben lévő víz hidrosztatikai nyomása megnöveli az üregben található víz nyomását, ezért ott a víz a megszokott 100°C -nál magasabb hőmérsékleten forr. A telített gőz p nyomása és T abszolút hőmérséklete közötti kapcsolatot táblázatból olvashatjuk ki (lásd a függelékét), vagy alkalmazhatjuk a

$$p = Ae^{-LM/(RT)}$$

közelítő összefüggést (ahol L a víz forráshője, M a moláris tömege, R a gázállandó, A pedig egy állandó). A gejzír kitörésekor az üregben lévő túlmelegített víz úgy éri el az egyensúlyi állapotát, hogy addig forralja magát, amíg ezáltal 100°C -ra le nem hűl.

U. 196. Mindkét folyadékot a forráspontján tartjuk, mégsem ugyanabból a lombikból fogy el hamarabb a folyadék az éter és a víz esetében. A különbség az éter-, illetve a vízgőz sűrűségének és a levegő sűrűségének a viszonyában van.

U. 197. Az elpárolgott kölnivíz (fizikai szempontból lényegében víz és alkohol) gőzének koncentrációja a kémcsőben felfelé haladva folyamatosan változik. A gőz *diffúzióval* jut ki a kémcsőből; az anyagáramlás sebessége arányos a sűrűséggradiens (hosszegységre eső sűrűségváltozás) nagyságával.



Fénytan

U. 198. Sem a negyedhenger közvetlen közelében, sem egy meghatározott távolság után nem éri fény az asztalt. Az asztal közeli pontjait a teljes visszaverődés miatt nem érheti fény, míg a megvilágított tartomány távolabbi határát úgy határozhatjuk meg, ha a negyedhenger asztalhoz közeli részét sík-domború hengerlencsének tekintjük.

U. 199. Ha két, azonos pontból induló, egymáshoz közeli fénysugár egy pontban újra találkozik, akkor a Fermat-elv szerint a két sugármenet optikai úthosszai egyenlőek. Széttartó sugarakra ez úgy alkalmazható, ha leképező eszközzel (mondjuk egy lencsével vagy a szemünkkel) egy pontba fókuszáljuk őket. Ennek segítségével megmutatható, hogy tökéletes képalkotás esetén bármely sugármenetre igaz az, hogy a fényforrástól a fénysugár töréspontjáig megtett *optikai úthossz* megegyezik a töréspont és a képpont távolságával.

A Fermat-elv helyett a Snellius–Descartes-törvény segítségével is megoldhatjuk a feladatot, például egy speciális (a gömbből érintőlegesen kilépő) sugármenet vizsgálatával.

U. 200. Képzletben szeleteljük fel a közeget z -re merőlegesen vékony rétegekre. Az egyes rétegeket tekintsük különböző törésmutatójú plánparalel lemezeknek, és állapítsuk meg, hogy milyen összefüggés érvényes a réteg törésmutatója és a fénysugár beesési szöge között.

U. 201. A Fermat-elv szerint az egymáshoz nagyon közeli fénysugarak ugyanannyi idő alatt futják be a pályájukat.

A Huygens-elv alkalmazása is eredményre vezethet. Eszerint az azonos fázisú felületek minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, melyek a fény c/n fázissebességével terjedve kialakítják az új fázisfelületet. A geometriai optika szóhasználatának megfelelő „fénysugár” (amely csak közelítő leírásmód) a fázisfelületekre merőleges irányban halad.

Teljes visszaverődések sorozatával is értelmezhetjük az „elkanyarodó” fény jelenségét.

U. 202. A kép látszólagos nagyságát nem a kép mérete, hanem a látószöge szabja meg.

U. 203. Kövessük nyomon a gömb egy felületi pontjáról kiinduló fénysugarak útját! A megoldás egy kúpszelet alakú görbének az optikai tengely körüli megforgatásából adódó forgásfelület lesz.

U. 204. A fókusztávolságot a leképezési törvény és a nagyítás összefüggésének felhasználásával kaphatjuk meg. A fényességek arányát nemcsak a képek mérete, hanem a lencsére érkező fény mennyisége is befolyásolja.

U. 205. A Hold látszólagos fényességét a retina megvilágításának erőssége (vagyis az ideghártya egységnyi felületére érkező fény intenzitása) határozza meg. Távcsovön keresztül nézve több energia érkezik a szemünkbe, mint amikor szabad szemmel nézzük a Holdat, de a keletkező kép területe is nagyobb a távcsoves megfigyelés esetében.

U. 206. A két féllencse egy-egy pontszerű, valódi képet állít elő a fényforrásról. Ezek a képek, mint koherens pontforrások hoznak létre interferenciát az ernyőn. Az ernyőnek csak azon a részén figyelhetünk meg interferenciacsíkokat, ahol a két képpontból érkező fénynyalábok átfednek.

U. 207. A furcsa optikai rács felfogható két $4d$ rácsállandójú, egymáshoz képest d távolsággal eltolat hagyományos optikai rács szuperpozíciójaként. Az ernyő különböző pontjaiban mérhető fényintenzitás egyenesen arányos az oda jutó fényhullámok eredő amplitúdójának *négyzetével*.

U. 208. Az elhajlási képről a *Huygens–Fresnel-elv* alapján tehetünk kijelentéseket. Eszerint az egyes réseken áthaladó „elemi hullámok” amplitúdó- és fázis helyes összege adja meg az eredő hullámot, ennek amplitúdó-négyzetével arányos az ernyő egyes pontjaiba érkező fény intenzitása. Egy-egy résből érkező hullám amplitúdója a rés *szélességével* arányos, fázisát pedig az optikai úthossz határozza meg.

U. 209. Vizsgáljuk meg, hogy milyen irányokban lesz a különböző réseken áthaladó fénysugarak útkülönbsége a hullámhossz egész számú többszöröse. A lézerefény beesési irányából tekintve a rácsra annak rácsállandóját $d \cos \varphi$ méretűnek „látjuk”. Tévedés lenne ebből arra következtetni, hogy az elhajlási irányok egy ilyen (sűrűbb) rácsra merőlegesen eső fény elhajlási képével egyezik meg.

U. 210. Érdeemes először rács helyett egyetlen keskeny rés által létrehozott elhajlást vizsgálni. A résen irányváltoztatás nélkül áthaladó fénynyaláb sugarai zérus útkülönbséggel érkeznek az ernyőre, itt tehát erősítést tapasztalunk. Keressük meg, hogy ezen kívül még a tér mely irányában lesz a fénysugarak útkülönbsége nulla. Szükségünk lesz a kúpszeletekre vonatkozó ismereteinkre.

U. 211. Az ernyőn olyan pontokban tapasztalunk interferencia-maximumot (fényes foltocskákat), ahová az összes lyukból ugyanolyan fázisban érkeznek meg a fényhullámok (Huygens–Fresnel-elv). Fogalmazzuk meg ennek matematikai feltételét a lyukak helyzetét megadó $\mathbf{r} = (x, y)$ és az ernyőn az erősítési pontba mutató $\mathbf{R} = (X, Y)$ vektorok segítségével!

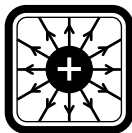
U. 212. Egy négyzetrács alkalmas irányú és alkalmas szorzófaktorú *nyújtással* szabályos háromszögrácscsá alakítható át, és viszont. Hogy mi történik eközben az elhajlási kép mintázatával, az kiderül az előző feladat megoldásából.

U. 213. *a)* A polárszűrők csak a polarizációs irányukkal párhuzamos elektromos térerősségű fényt engedik át. A fény intenzitása arányos az amplitúdó négyzetével.

b) Meglepő, de a d lemezvastagság és az e irány megfelelő választása esetén a bejövő fény 100%-a is átjuthat a rendszeren.

U. 214. *a)* A takarításkor talált 3D-s szemüveg „lencséi” (valójában fóliái) lineáris polárszűrők, melyek egymásra merőleges állásúak.

b) Az *a)* esettől merőben eltérő tapasztalat arra utal, hogy az újonnan szerzett 3D-s szemüveg cirkulárisan poláros fényvel működik. Ilyen fényt lineárisan poláros fényből az előző feladatban is szereplő kettőtörő lemezzel lehet előállítani (és analizálni), ha a lemez vastagsága és az orientációja megfelelő.



Elektrosztatika I. (ponttöltések, szigetelők)

U. 215. Első ránézésre úgy tűnhet, hogy néhány adat hiányzik. Ne aggódjunk emiatt! Írjuk fel az erőegyensúly feltételét, és számítsuk ki a rendszer elektrosztatikus energiáját ebben az új egyensúlyi helyzetben!

U. 216. Egyensúlyban maradnak-e a ponttöltések, ha az egész töltésrendszert arányosan felnagyítjuk (a töltések távolságát ugyanolyan arányban megnöveljük)? A stabilitás vizsgálatához hasznos lehet a Gauss-törvény.

U. 217. Üljünk bele a gyöngyök közös tömegközéppontjához rögzített koordináta-rendszerbe!

U. 218. A rendszer tömegközéppontja (külső erők hiányában) mozdulatlan marad; érdemes ezt a pontot választani origónak. A gyöngyök akkor mozoghatnak a megadott módon, ha mindegyikük gyorsulása a pillanatnyi helyvektorukkal arányos, és az arányossági tényező mindhárom testre ugyanakkora.

U. 219. A protonnak sokszor (majdnem kétezerszer) nagyobb a tömege, mint a pozitronnak. Emiatt a pozitronok sokkal nagyobb gyorsulással mozognak, mint a protonok. A részecskék szétlökődése során lesz egy olyan szakasz, amikor a pozitronok már nagyon messze távolodtak, de a protonok még szinte meg se mozdultak.

U. 220. A kondenzátor belsejében jelenlévő viszonylag erős elektromos tér az elektronok pályájának rövid részén hat a részecskékre. A kondenzátoron kívüli szórt elektromos tér viszont bár gyenge, de a pálya jelentős szakaszán fejthet ki erőt az elektronokra. Sőt, ez a kis erő az eltérített elektronnyaláb ferdesége miatt akár lehet fékező hatású is! Vajon mi lesz e két hatás együttes eredménye?

U. 221. Érdemes először azt az erőt meghatározni, amit a huzal fejt ki a gyöngyszemre annak mozgása során. A gyöngyszem sebessége a dipól (egymáshoz nagyon közel elhelyezkedő pozitív és negatív ponttöltés) elektrosztatikus potenciáljának segítségével számítható ki.

U. 222. Vizsgáljuk meg, mekkora elektromos térerősséget hoz létre a pálcának valamely kicsiny darabkája, amely a C pontból $\Delta\varphi$ szög alatt látszik.

U. 223. Két nagyon hosszú pálcát a végeiknél össze is illeszthetünk.

U. 224. Lássuk be, hogy egy vékony, egyenletesen töltött rúd által a tér egy adott pontjában keltett térerősség megegyezik egy ugyanakkora lineáris töltéssűrűségű, megfelelő helyzetű körív által létrehozott térerősséggel.

U. 225. A keresett pont csak a pálcák síkjában és a háromszög belsejében lehet. Olyan pontot keresünk, amelyben az eredő elektromos térerősség nulla, vagy ami ezzel egyenértékű: a sík pontjaiban kiszámítható elektrosztatikus potenciálnak szélsőértéke van.

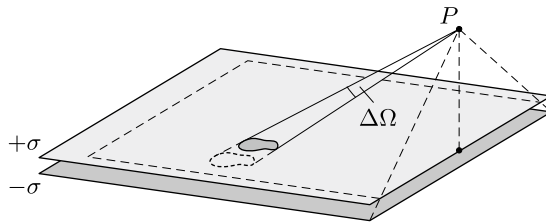
U. 226. Határozzuk meg, hogy mekkora erőt fejt ki az egyik pálca elektromos erőtere a másik pálca kicsiny darabkáira. Érdemes a kicsiny darabkákat azzal a szöggel jellemezni, amely alatt a másik pálca legközelebbi pontjából nézve látszanak.

U. 227. Az egyes pálcák által létrehozott térerősségjárulékok nagysága fordítottan arányos a tőlük mért távolsággal. Ennek felhasználásával és egy frappáns geometriai gondolattal próbáljuk meg belátni, hogy az erővonalak körív alakúak!

U. 228. Hasonlítsuk össze a lemez kis darabkája által a ponttöltésre kifejtett erőt és a q töltésnek ugyanezen felületdarabkán átmenő fluxusát!

U. 229. Induljunk ki az előző feladat megoldásából, majd határozzuk meg, hogy mekkora fluxust hoz létre a kocka öt lapja a hatodik oldallapon!

U. 230. A felső és alsó szigetelőlemez azon darabkái, melyek a P pontból nézve ugyanazon $\Delta\Omega$ térszög alatt látszanak (tehát egymást éppen elfedik), azonos nagyságú, de ellentétes irányú térerősséget hoznak létre a P pontban, így hatásaik kölcsönösen kioltják egymást. Emiatt az alsó lemez által a P pontban keltett térerősséget teljesen kioltja a felső lemez azon részének térerősségjáruléka, amelyik az alsó lemezzel megegyező térszögben látszik a P pontból. Az eredő elektromos teret a P pontban a felső lemez „maradék” (az *ábrán* szaggatottan jelölt) szegélye hozza létre.



U. 231. Alkalmazzuk a szuperpozíció módszerét, és vizsgáljuk meg, hogy milyen lenne a szigetelő gömb elektromos tere, ha a lyuknál kivágott (közelítőleg korong alakú) részt visszargasztanánk a lyukba!

U. 232. a) Próbáljuk meghatározni a két félgömb közötti erőt abban a speciális esetben, amikor a töltésük egyforma! Ekkor a félgömbökre ható elektrosztatikus erő úgy számolható, mintha felületükre valamekkora p nyomású gáz fejtene ki erőt.

Az általános eset (különböző nagyságú q és Q töltésekre vonatkozó) eredményét ezek után már megsejthetjük.

b) A szuperpozíció alkalmazásával többféleképpen is célt érhetünk.

U. 233. Vágjuk fel gondolatban a kockát nyolc egybevágó kiskockára, majd alkalmazzuk a szuperpozíció elvét és a dimenzióanalízis módszerét!



Elektrosztatika II. (vezetők)

U. 234. Az űrhajó belsejében – mint egy Faraday-kalitrkában – nulla az elektromos térerősség. Gondoljuk végig, változik-e az űrhajó elektromos potenciálja az útja során.

U. 235. Egy töltött fémtesten a töltések a felszínen helyezkednek el, és a rájuk ható elektromos tér a felületre merőleges húzóerőt fejt ki. Milyen hatással van ez az erő az *állandó térfogatú* higany alakjára?

U. 236. Vizsgáljuk meg a fémgömb (mint gömbkondenzátor) elektrosztatikus energiájának megváltozását!

U. 237. Hasonlítsuk össze a két elrendezés elektrosztatikus terének energiáját!

U. 238. A Gauss-törvény felhasználásával keressünk érveket arra, hogy adott töltés mellett a kondenzátor feszültsége kisebb, mint a közelítő számítás szerint.

U. 239. Alkalmazzuk a szuperpozíció elvét, és megfelelő töltéseloszlások szuperpozíciójával állítsunk elő „hagyományosan” felöltött kondenzátort!

U. 240. A kondenzátor lemezein lévő ellentétes előjelű töltések vonzzák egymást, ezért a lemezek széthúzásakor (pozitív) munkát kell végeznünk. Eközben a kondenzátor C kapacitása lecsökken, és mivel az elektrosztatikus energia (adott U feszültség mellett) C -vel arányos, a kondenzátor energiája *lecsökken*! A paradoxon feloldásához azt kell észrevenni, hogy a telepre kapcsolt kondenzátor nem tekinthető zárt rendszernek.

U. 241. Az elektromos mező térfogategységre vonatkoztatott energiája (energiasűrűsége) az elektromos térerősség négyzetével és a dielektromos állandóval arányos: $w_{el} = \varepsilon E^2/2$. A kondenzátor lemezei közé csúsztatott szigetelő (a polarizációja révén) lecsökkenti az elektromos térerősséget, melynek következtében a rendszer energiája is csökken. Az energiaváltozásból (a munkatétel alkalmazásával) kiszámíthatjuk a dielektrikumra ható erőt.

U. 242. Az egyes lemezekre kerülő össztöltés mennyisége nem változik meg akkor, ha a Q töltést a lemezekkel párhuzamos síkban egyenletesen „szétkenjük”.

U. 243. A kondenzátor lemezein kívül az elektromos tér nulla. Milyen megszorítást jelent ez a jól ismert tény a lemezeken kialakuló töltéseloszlásra?

U. 244. A töltésre ható erőt a *tűkörtöltés módszerével* határozhatjuk meg. Eszerint egy földelt (vagy ami ezzel egyenértékű: egy nagy kiterjedésű) síklap

olyan elektromos teret hoz létre a ponttöltés felőli féltérben, amelyet egy, a fémlap átellenes oldalán elhelyezkedő, $-Q$ nagyságú ponttöltés hozna létre. A becsapódási idő kiszámításánál gondoljunk a bolygómozgás törvényeire!

U. 245. Az víz kipúposodása olyan kismértékű, hogy a vízfelszín síknak tekinthető, és alkalmazhatjuk a vezető síkokra vonatkozó tükörtöltés módszerét.

U. 246. Oldjuk meg a feladatot először úgy, mintha a fémlapok földeltek lennének, majd vigyünk fel annyi töltést a két fémlapra, amennyit az elektromos töltés megmaradásának törvénye megkíván.

U. 247. A kondenzátor lemezeinek hatása leírható a kondenzátor lemezein kívül (mindkét oldalon) megjelenő, végtelen sok számú tükörtöltéssel. A tükörtöltések által kifejtett erő nagysága véges, mert a gyöngytől távol elhelyezkedő tükörtöltések járuléka elhanyagolható.

U. 248. A feladatot a töltéstükrozés segítségével oldhatjuk meg. A tükörtöltéseket (melyek ebben az esetben vonalszerűek) úgy kell elhelyeznünk, hogy a földelt fémlapok helyén összesen nulla potenciált hozzanak létre.

U. 249. Gondoljuk meg, miért nem „esnek le” a Faraday-kalitka falában az elektronok.

U. 250. Ha egy vékony fémkorongot elektromosan feltöltünk, töltéseloszlása nem lesz egyenletes: a felületi töltéssűrűség a korong közepétől a szélek felé egyre növekszik.

Egy töltött fémgömbön a töltések – mint azt jól tudjuk – egyenletesen helyezkednek el, és a gömb belsejében az elektromos térerősség nulla (hiszen az „egymással szemközt”, azonos térszögben látszó kis felületdarabkák elektromos térerőssége páronként kiejti egymást).

Lássuk be, hogy ha egy töltött fémgömböt – gondolatban – koronggá „lapítunk össze” úgy, hogy közben a töltéseket nem engedjük elmozdulni, a korong felülete ekvipotenciális lesz, így éppen a feladatunkban szereplő probléma megoldását kapjuk.

U. 251. Az elektromos mező a felület egyes darabkáira a felülettel arányos nagyságú és a felületre merőleges irányú erőt fejt ki. Ez az erő hasonló a folyadékok vagy gázok nyomásából származó erőhatásokhoz.

U. 252. A töltéseloszlás egyensúlyi helyzetében az elektrosztatikus tér energiája minimális. Kialakulhat-e számottevő feszültség az ólomgömb két része között?

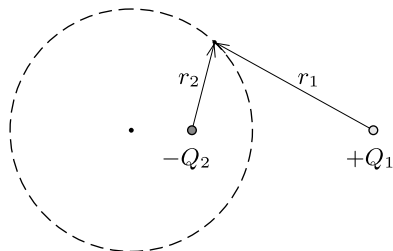
U. 253. A földelt fémgömb minden pontjában nulla a potenciál értéke: ez a karikán lévő töltések és a gömb felületén lévő töltések által létrehozott potenciálok összege. Keressünk a gömb belsejében olyan pontot, ahol könnyen ki tudjuk számolni mind a karika, mind pedig a fémgömb által keltett potenciált!

U. 254. Ha a gömbök távolsága sokkal nagyobb lenne, mint a sugaruk, akkor az elektromos terület a pontszerű töltés közelítésében számíthatnánk. Jelen esetben (ahogy a feladat ábráján is látszik) ez nem teljesül, a gömbök mérete és a távolságuk összemérhető, emiatt egymást erősen polarizálják. A töltéeloszlások és az elektromos mező csak nagyon bonyolult módon számítható ki, de szerencsére erre nincs szükség! Használjuk a szuperpozíció elvét!

U. 255. Alkalmazzuk a gömbi tükrötöltés módszerét! Ehhez tekintsünk két ellentétes előjelű ponttöltést ($+Q_1$ és $-Q_2$), melyek egymástól bizonyos távolságra helyezkednek el. Keressük meg a két ponttöltés elektromos erőterének azon pontjait, amelyekben az elektromos potenciál nulla:

$$k \frac{Q_1}{r_1} - k \frac{Q_2}{r_2} = 0,$$

ahol r_1 és r_2 az adott pont távolsága a két töltéstől (lásd az *ábrát*). Egyszerű átrendezés után ezt kapjuk: $Q_1/Q_2 = r_1/r_2$. Apollóniosz tétele értelmében az ilyen pontok mértani helye térben gömb (Apollóniosz-gömb). Mivel a fém felülete ekvipotenciális, a gömbhéjon az elektromos megoszlás révén felhalmozódó (influált) felületi töltések hatása helyettesíthető alkalmasan választott nagyságú és helyzetű, képzeletbeli ponttöltésekkel (tükrötöltésekkel). Vajon hogyan?



U. 256. Induljunk ki az *előző feladat b)* részének megoldásából, és vizsgáljuk meg, hogyan változik a tükrötöltések helyzete és nagysága, ha a külső elektromos teret létrehozó pontszerű töltést távolítjuk a fémgömbtől! A fémgömb felületi töltéeloszlásának meghatározásához helyettesítsük a tükrötöltéseket R sugarú, egyenletes térfogati töltéssűrűségű, egymást részben átfedő gömbökkel!



Magnetosztatika (időben állandó mágneses mező)

U. 257. Egy ügyes gondolkísérlettel számolás nélkül, akár fejben is kitalálhatjuk a megoldást. Használjuk fel, hogy a mágneses kölcsönhatási energia megváltozása csak a kezdő- és végállapottól függ, attól nem, hogy milyen módon jutottunk a végső helyzetbe.

U. 258. Határozzuk meg az A mágnesre ható $F(x)$ eredő erőt (a mágneses erőt, a nehézségi erőt és a fonálerőt összegét) mint a mágnesek közötti x távolság függvényét! Ezt az $F(x)$ függvényt használhatjuk fel az egyensúlyi állapot és a stabilitás feltételének a meghatározására.

U. 259. Az a) esetben a Biot–Savart-törvény segítségével egyszerű összegzéssel meghatározhatjuk az indukció értékét. A b) esetben induljunk ki abból a tényből, hogy egy síkbeli zárt vezető által létrehozott mágneses mező a vezetőtől távol egy pontszerű mágneses dipólus terével egyezik meg, és ennek a dipólusnak az erőssége (mágneses dipólnyomatéka) a vezetőben folyó áramnak és a vezető által határolt területnek a szorzata. Ha tehát a köráramot helyettesítjük egy más alakú (kényelmesebben kezelhető) áramvezetővel, amelynek területe ugyanakkora, mint az eredeti köráramé (vagyis $R^2\pi$), és a benne folyó áram erőssége is megegyezik a feladatban szereplő köráraméval, akkor a mágneses terük – legalábbis a vezetőktől távol – ugyanolyan lesz.

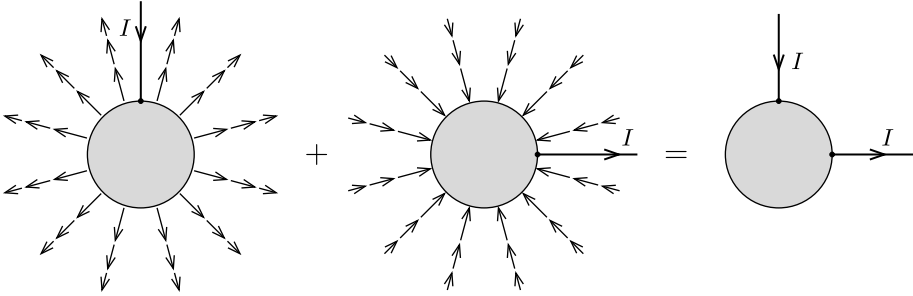
U. 260. a) Az előző feladat megoldásában láttuk, hogyan számolható egy mágneses dipól által keltett indukció a dipól tengelyén (az ún. Gauss-féle első főhelyzetben), illetve a dipól tengelyére merőleges síkban (a Gauss-féle második főhelyzetben). Az ottani (áramjárta körvezetőre kapott) eredmények kis mágnesekre is érvényesek.

b) Első pillantásra úgy tűnhet, hogy a rendszer felfüggesztésével örökmozgót (perpetuum mobilét) készíthetünk! A paradoxon feloldásához gondoljuk meg, hogy a két mágnes kölcsönhatása csak az egymásra kifejtett forgatónyomatékokat jelenti-e, vagy – esetleg – még bizonyos erőhatásokat is figyelembe kell vennünk.

U. 261. Az oldalélekben folyó áramok az áramerősséggel arányos nagyságú mágneses indukciót hoznak létre a tetraéder középpontjában. Az egyes indukció-áramok iránya mindig párhuzamos a tetraéder valamelyik oldalélével.

U. 262. Az elrendezés szimmetriáját felhasználva lássuk be, hogy a mágneses erővonalak az egyenes vezető körüli koncentrikus körök. Ha ez sikerül, akkor az indukció nagysága is könnyen kiszámítható az Ampère-féle gerjesztési törvény segítségével.

U. 263. Alkalmazzuk a szuperpozíció-elvet (lásd még a 261. és 282. feladatot)! Tekintsünk először *egyetlen* egyenes vezetőt. A rajta bevezetett áramot – a feladat szimmetriáját megtartva – a gömb felületéről egyenletes eloszlásban vezessük el, és határozzuk meg ezen árameloszlás mágneses terét. Ezek után ismételjük meg ezt a másik irányban kivezetett árammal, majd képezzük a két eset mágneses terének szuperpozícióját!



U. 264. Keressünk hasonlóságot az áramjárta egyenes vezetők indukcióvonalai, valamint két párhuzamos, ellentétes előjelű vonalmenti töltéssűrűséggel egyenletesen feltöltött szigetelő pálcia elektromos terének ekvipotenciális felületei között.

U. 265. Mutassuk meg, hogy a szolenoid egységnyi hosszára jutó n menetszám egyenesen arányos d^{-2} -nal, továbbá vegyük figyelembe az egyes menetek ellenállását!

U. 266. Alkalmazzuk a szuperpozíció-elvet! Ehhez egészítsük ki a szolenoidot a P pontra tükörszimmetrikusan egy másik tekercssel, amelyben ugyanakkora áram folyik, mint az eredetiben.

U. 267. Az egymás közelében lévő menetekben egyirányban folyó áramok vonzó hatása miatt a rugó össze fog húzódni. Az áram okozta húzóerő (melynek meghatározása közvetlen számolással meglehetősen bonyolult) ugyanakkora lenne akkor is, ha a rugó (nagyon alacsony hőmérsékletre lehűtve) szupravezetővé válna. Egy ilyen szupravezető tekercsben akkor is folyhat áram, ha a végeit rövidre zárjuk. Tanulmányozzuk, hogyan függ ennek (a külvilághoz nem kapcsolódó, tehát energetikailag zártnak tekinthető) rendszernek az összenergiája a rugó hosszától!

U. 268. A 2-es tekercs meneteire ható (tengelyirányú) erő összefüggésbe hozható az 1-es tekercs által keltett mágneses térnek a 2-es tekercs palástján kilépő fluxusával.

Energetikai megfontolásokkal is célhoz érhetünk. Vizsgáljuk meg, mennyivel változik meg a rendszer energiája, ha a tekercseket kicsiny Δx távolságnyra eltávolítjuk egymástól. Elegendő, ha először csak az $I_1 = I_2 = I$ speciális esettel foglalkozunk, de nem szabad megfeledkeznünk a rendszerből esetleg távozó vagy oda érkező energiáról.

U. 269. A huzal minden pontjában ugyanakkora erő ébred, az erő pedig összefüggésbe hozható a huzal görbületi sugarával. A keresett alak ezért mindkét esetben egy-egy állandó görbületi sugarú görbe lesz.

U. 270. A körvezetők közötti felezősíkban a mágneses indukció iránya mindenhol merőleges erre a síkra, és a nagysága csak az O ponttól mért távolságtól függ. Írjuk fel az elektronra ható erőt, és vizsgáljuk meg, mennyivel változtatja meg ennek az erőnek a forgatónyomatéka az elektron perdületét!

U. 271. Írjuk fel a töltött részecske mozgásegyenletét a pálya egy kis darabjára vektorosan, majd összegezzünk a teljes mozgásra.

U. 272. Ha felírjuk a mágneses térben lengő ingára a dinamika alapegyenletét, az nagyon hasonlít egy forgó koordináta-rendszerből szemlélt közöséges síkinga mozgásegyenletéhez (*Foucault-inga* az Északi-sarkon).

U. 273. Ha v sebességgel mozgunk a B indukciójú mágneses mező irányára merőlegesen, akkor vB nagyságú elektromos mezőt érzékelünk. Alkalmasan választott sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerbe áttérve ez az elektromos mező kiejtheti a részecskére ható nehézségi erőter hatását.

U. 274. A feladat megoldható a vákuumkamrához rögzített koordináta-rendszerben is, de könnyebb a számolás, ha átülünk egy olyan vonatkoztatási rendszerbe, amely az áramjárta vezetővel párhuzamosan, az áram irányában mozog állandó, v_0 nagyságú sebességgel. Ebben a vonatkoztatási rendszerben a vezető mágneses tere mellett elektromos tér is megjelenik, az elektron sebessége pedig zérussá válik akkor, amikor a legközelebb kerül az áramjárta vezetőhöz. Az elektron kezdeti sebessége az energiamegmaradás segítségével határozható meg.

U. 275. Érdeemes a két elektron mozgásegyenletét vektoros alakban felírni. A két mozgásegyenlet összege a tömegközéppont mozgását írja le, a különbségük pedig az elektronok egymáshoz viszonyított (relatív) mozgását.



Áramkörök, elektromos vezetés

U. 276. A dobozban megfelelő módon összekapcsolt két ellenállás található.

U. 277. Próbáljuk meg a fekete doboz belsejében a deltakapcsolást csillagkapcsolással helyettesíteni!

U. 278. Csatlakoztassuk a telepet az ampermérőn keresztül a kiszemelt ellenállásra. Arról kell gondoskodnunk, hogy az ampermérő árama teljes mértékben a kiválasztott ellenálláson folyjon át.

U. 279. A lánc utolsó elemétől visszafelé haladva alkalmazzuk a Kirchhoff-törvényeket! Keressünk kapcsolatot az egymás utáni ellenállásokon folyó áramok és a Fibonacci-számok között!

U. 280. Tekintsünk először egy véges, n tekercset és n kondenzátort tartalmazó láncot! Mivel a lánc nem tartalmaz ohmos ellenállást, a rajta átfolyó áram és a rá jutó feszültség közötti fáziseltolódás vagy $+90^\circ$, vagy -90° . Az egyik esetben a lánc helyettesíthető egy bizonyos C_n kapacitású kondenzátorral, a másik esetben pedig egy alkalmasan választott induktivitású tekercssel. Tétélezzük fel, hogy az előbbi eset áll elő, és határozzuk meg C_n értékét az első néhány n -re. (Ha C_n -re negatív szám adódna, az annyit jelent, hogy a lánc tekercsként viselkedik.)

Keressünk kapcsolatot C_n és C_{n+1} között, majd határozzuk meg ezen rekurziós összefüggés „fixpontját”. Ez (vagy ezek valamelyike) lehet a „végtelen hosszú” láncsal egyenértékű kapacitás.

U. 281. Tekintsünk két különböző esetet: először vezessünk be I erősségű áramot az egyik rácspontba, a második esetben pedig vezessünk ki I áramot az előző bevezetési hellyel szomszédos rácspontból. Használjuk ki mindkét esetben az áramkör szimmetriáját, majd „szuperponáljuk” a két esetben kialakuló áram-és feszültségeloszlást!

U. 282. Alkalmazzuk az *előző feladatban* megismert, szuperpozíción alapuló módszert! Vigyázzunk, az elektromos töltésmegmaradás miatt most nem tehetjük meg azt, hogy egy rácspontban bevezetünk áramot és sehol nem vezetjük el azt. Oldjuk meg ezt a dilemmát úgy, hogy közben nem rontjuk el a feladat szimmetriáját! (Hasonló problémát tárgyal a *263. feladat* is.)

U. 283. A megoldás kulcsszava: „párhuzamosan”.

U. 284. Keressünk a kockán ekvipotenciális pontokat, miközben a testátló egyik végpontján I áram folyik be a kockába, a másik végpontján pedig I áram

folyik ki. Az ekvipotenciális pontok összekötésével leegyszerűsíthetjük a kapcsolást.

U. 285. A vezetők ellenállása elhanyagolható, ezért mindkét szál felülete lényegében ekvipotenciális, és a potenciálkülönbség közöttük U . A vezetékekben tehát $I = U/R$ nagyságú áram folyik. A vezetők között ébredő mágneses (Lorentz-)erő kiszámítása az egyszerűbb feladat, az elektromos erő kiszámításához ugyanis előbb meg kell határoznunk a vezetőkön felhalmozódó elektromos töltést.

U. 286. A gyűrűkkel együttforgó koordináta-rendszerből nézve a huzalban lévő (vezetési) elektronokra érintő irányú tehetetlenségi erő hat, amely áramot indít el a gyűrűkben.

U. 287. A két fémben (különböző erősségű) elektromos mező alakul ki, melynek térerősségét a differenciális Ohm-törvény segítségével határozhatjuk meg. A határfelületen felhalmozódó töltés meghatározásához alkalmazzuk Gauss törvényét!

U. 288. Alkalmazzuk (a 281. feladatban tárgyaltakhoz hasonlóan) a superpozíciós elvet! A vezető feltérben kialakuló elektromos teret az előző feladatban szereplő differenciális Ohm-törvénnyel határozhatjuk meg.

U. 289. Egy ohmos ellenálláson keresztül kisülő kondenzátor töltése időben exponenciálisan csökken; a „felezési időt” a kondenzátor kapacitása és az ohmos ellenállás nagysága határozza meg.

U. 290. Az *előző feladatra* adott megoldás a csokimikulás szabálytalan alakja miatt ebben az esetben nem működik: sem a csokimikulás kapacitását, sem pedig a levegő „helyettesítő” ellenállását nem tudjuk kiszámítani.

Vegyük körbe a csokimikulást egy zárt felülettel és hasonlítsuk össze egy kis felületdarabkán időegység alatt kiáramló töltést a mikulás elektromos terének a felületdarabkán létrehozott fluxusával.



Elektromágneses indukció, időben változó mezők

U. 291. A rúd a nehézségi erő hatására elindul lefelé a lejtőn. A mozgási indukció miatt áram kezd folyni benne, ami a Lenz-törvény értelmében fékezi a mozgását. A rúd mozgásegyenlete (az árammal kifejezve) mindhárom esetben ugyanaz. A különbség a rúdban folyó áram és az indukált feszültség kapcsolatából adódik.

U. 292. A rúd sebességének megváltozása egyenesen arányos a kondenzátor töltésének változásával. A rúd addig gyorsul, amíg az indukált feszültség engedi a kondenzátort kisülni.

U. 293. Mutassuk meg, hogy a rúd sebessége és a körülzárt mágneses fluxus változási üteme arányos egymással, emiatt a sebesség és a fluxus – megfelelő arányossággal tényezőikkel szorzott – értékeinek összege a mozgás során állandó.

U. 294. A forgó korongban elektromos mező indukálódik, ami áramot hajt át a tekercsen. A Föld mágneses tere mellett a tekercs mágneses tere szintén hozzájárul az indukcióhoz; a szögsebesség irányától függően csökkenti vagy növeli azt.

U. 295. A Faraday-féle indukciótörvény szerint egy tekercsben folyó áram nem képes *hirtelen* megváltozni.

U. 296. A Möbius-szalag ún. *nem irányítható* felület, ezért az indukciótörvényt csak kellő körültekintéssel alkalmazhatjuk. Hajtsuk szét gondolatban a szalag szélén futó vezetékét úgy, hogy önmagának átmetszése nélkül síkban kiteríthető legyen. Nézzük meg, milyen felületet határol itt a szalag, majd keressük meg ezen felület megfelelőjét a Möbius-szalagnál!

U. 297. A Föld mágneses tere áramot indukál a forgó gyűrűben, ennek hatására megváltozik a gyűrű középpontjában a mágneses indukcióvektor átlagos iránya, és ettől az iránytű elfordul.

U. 298. A szupravezető gyűrű eredő (a külső térből adódó + a saját) mágneses fluxusa a mozgás közben nem változhat meg. A gyűrű mozgása közben a külső tér fluxusa változik ugyan, de ezt a gyűrűben meginduló áram mágneses fluxusa kompenzálja. Az áram ismeretében kiszámíthatjuk a Lorentz-erőt, majd felírhatjuk a gyűrűre ható erőt a hely függvényében. Ez a mozgásegyenlet a mechanika egyik ismert egyenletére hasonlít.

U. 299. Számítsuk ki, mennyi energia disszipálódik (mennyi Q hő fejlődik) *egyetlen* körvezetékben, miközben a mágnes keresztülesik rajta. Kétféleképpen is

következtethetünk erre a Q mennyiségre: egyrészt az energiaviszonyok összevetéséből, másrészt dimenzionális megfontolásokból.

U. 300. Ha két, egymás közelében elhelyezkedő vezetőkör közül az egyikben (1-es számú) időben változó erősségű áram folyik, akkor a másikban (2-es számú) az áramerősség változási ütemével arányos feszültség indukálódik:

$$U_{i,2} = -M_{12} \frac{\Delta I_1}{\Delta t},$$

ahol M_{12} az 1-es vezetőkörnek a 2-esre vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója. (A negatív előjel a Lenz-törvény által meghatározott polaritásra utal.) Ez a mennyiség kapcsolatot teremt a 2-es vezetőkörön az 1-es által létrehozott mágneses fluxus és az 1-es körben folyó áram erőssége között. Az energiamegmaradás törvényének segítségével megmutatható, hogy a kölcsönös indukciós együttható szimmetrikus a két vezetőkör felcserélésére, azaz

$$M_{12} = M_{21}.$$

U. 301. Az ideális dióda az áramot az egyik irányban ellenállás nélkül átengedi, míg a másik irányban szakadásként működik. Keressünk összefüggést a kis mágnes által a körvezetőn létrehozott mágneses fluxus és a diódán áthaladt töltés között! A fluxus elemi úton is meghatározható, ha a mágneset kis körárammal helyettesítjük (lásd az *előző feladat* megoldását).

U. 302. Használjuk fel a kölcsönös indukciós tényezők szimmetrikus tulajdonságát és azt, hogy a középső és a legnagyobb karikából álló rendszer előállítható a legkisebb és a középső karikából álló rendszer kétszeres nagyításával!

U. 303. Egy szupravezető gyűrű által körülfogott mágneses fluxus értéke nem változhat meg. A megoldás során felhasználhatjuk, hogy az M kölcsönös- és az L_1, L_2 önindukciós tényezők között fennáll az

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

egyenlőtlenség.

U. 304. A *b)* és *c)* ábra vonalvezetése egyenértékű azzal, mintha az *a)* ábrán látható négyzet alakú áramvezetőt két, illetve három szomszédos lapon helyeznénk el. Az áramok és a nekik megfelelő mágneses terek szuperponálhatók.

U. 305. Használjuk fel a kölcsönös indukciós együtthatók szimmetrikusságát, és írjuk fel a három áramkörre a huroktörvényt!

U. 306. Ismert, hogy az 1-es számú toroid mágneses tere a toroidon belül nagyon erős, ezt azonban a 2-es számú tekercs csak egyszer (igaz, igen „tekervényesen”) öleli körül. Az 1-es toroid a menetein kívül is létrehoz egy igen gyenge,

külső mágneses teret, ami viszont a 2-es tekercs N_2 darab menetén halad keresztül. A két toroid kölcsönös indukciós együtthatójának meghatározásakor csak akkor kapunk helyes (az N_1 és N_2 menetszámok felcserélésére szimmetrikus) összefüggést, ha mind a belső, erős mágneses tér, mind pedig a külső, gyenge tér hatását figyelembe vesszük.

U. 307. Vegyük figyelembe, hogy a töltött részecskére nemcsak a mágneses erő hat, hanem az indukált elektromos tér is.

U. 308. Vizsgáljuk meg a gyöngyöcske P pontra vonatkoztatott perdületének időbeli változását!

U. 309. A (vékony) toroid változó mágneses tere által keltett elektromos mező hasonló szerkezetű, mint egy köráram mágneses mezője. A Faraday-féle indukciótörvény és az Ampère-féle gerjesztési törvény alaki hasonlóságát felhasználva keressük meg a két jelenségkör egymásnak megfeleltethető fizikai mennyiségeit! Ebből, illetve a köráramra alkalmazott Biot–Savart-törvényből kiindulva eljuthatunk a keresett megoldásig.

U. 310. A kondenzátor mindkét esetben forgásba jön, és a folyamat végén szögsebessége mindkét esetben ugyanakkora lesz.

a) A kondenzátor kisütésekor az áramjárta vezetékre a mágneses mező erőt (és forgatónyomatéket) fejt ki.

b) Az időben változó mágneses tér örvényes elektromos mezőt kelt, ami a kondenzátor eltérő töltéseire erőt (és forgatónyomatéket) fejt ki.

U. 311. Írjuk le a jelenséget a folyadékkal együttmozgó koordináta-rendszerből nézve! Ehhez először gondoljuk meg, hogyan transzformálódik az elektromos és a mágneses mező, ha az egyik koordináta-rendszerből „átülünk” egy másik, az előbbihez képest v_0 sebességgel mozgó inerciarendszerbe. (A v_0 sebesség sokkal kisebb, mint a fénysebesség, ezért relativisztikus hatásokat nem kell figyelembe vennünk.)

U. 312. Az elektromos mezőnek valahol forrásai vannak, ezek az elektromos töltések. Homogén elektromos mező például – jó közelítéssel – egy nagyméretű síkkondenzátorral hozható létre. Gondoljuk végig, mit „lát” egy olyan megfigyelő, aki egy feltöltött síkkondenzátor lemezeivel párhuzamosan mozog valamekkora sebességgel.

U. 313. Vizsgáljuk meg, milyen erők tartják körpályán a fémbe lévő elektronokat! Az elektromos térerősség ismeretében a Gauss-törvény segítségével határozhatjuk meg a kialakuló töltéseloszlást.

U. 314. Az elektromos térerősséget az egységnyi töltésre ható erőként határozhatjuk meg, míg a mágneses indukciót a mozgó töltésre ható Lorentz-erőként vezethetjük be.

U. 315. Elsőre azt gondolhatjuk, hogy a vezető pálcában folyó áram által keltett mágneses mező az iránytű északi pólusát a papír síkjára merőlegesen, befelé téríti ki. Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról, hogy nemcsak a pálcában folyó áram mágneses tere hat az iránytűre a kisütés közben, hanem a kondenzátor belsejében fellépő Maxwell-féle *eltolási áram* hatása is!

U. 316. Az egész elrendezés (az árameloszlás és az időben *változó* elektromos mező) gömbszimmetrikus, ezért a mágneses mezőnek is rendelkeznie kell ezzel a tulajdonsággal. Gondoljuk meg, milyen gömbszimmetrikus mező fér össze a forrásmentesség (azaz a mágneses monopólus hiányának) feltételével!

U. 317. A mágneses teret nemcsak a levegőben folyó áramok alakítják, hanem a csokimikulás időben változó elektromos tere is (eltolási áram).

U. 318. Használjuk fel, hogy a töltéseloszlás (és annak mozgása) gömbszimmetrikus!



Relativitáselmélet és modern fizika

U. 319. A feladatban szereplő sebességek már összemérhetők a fénysebességgel, ezért indokolt, hogy relativisztikusan számoljunk. (Így az elektron pályája sem parabola alakú.) Egy buktató: jóllehet az elektromos térre merőleges irányban nem hat erő, az elektron sebességének ilyen irányú komponense mégsem marad állandó, hanem *csökken!*

U. 320. Próbáljuk meg először a Newton-féle $F = ma$ alapján kiszámítani a részecskék sebességét! Ha túl nagyok adódik, vegyük elő a relativisztikus formulákat.

U. 321. Homogén mágneses mezőben a fékeződésmentesen mozgó töltött részecske a mágneses térre merőleges síkban egyenletes körmozgást végez. A bomlás során érvényes az elektromos töltés, valamint az impulzus megmaradási törvénye. A válasz nem függ attól, hogy a részecskék relativisztikusan mozognak-e.

U. 322. Írjuk fel (relativisztikus formulákkal) az energia- és az impulzusmegmaradás törvényét! Vegyük figyelembe, hogy a folyamat során az elektromos töltés is megmaradó mennyiség.

U. 323. Célszerű olyan egységrendszert választani, amelyben a fénysebesség $c = 1$. Ebben az egységrendszerben egy m tömegű, \mathbf{p} impulzusú részecske teljes energiája: $E = \sqrt{p^2 + m^2}$. Az energia- és impulzusmegmaradás segítségével lássuk be, hogy az egymásra merőleges irányokban kirepülő bomlástermékek energiájának mértani közepe mindig ugyanannyi. Ebből már – a számtani-mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség felhasználásával – könnyen megkapjuk a végeredményt.

U. 324. Az ultrarelativisztikus részecskék energiája az impulzusuk nagyságával arányos. Az energia- és az impulzusmegmaradás törvényét alkalmazva beláthatjuk, hogy ha a részecskék ütközés előtti és utáni impulzusvektorait közös pontból indítva felrajzoljuk, akkor végpontjaik egy ismert görbére illeszkednek.

U. 325. Tekintsük az elektront egy r sugarú, egyenletes felületi töltéseloszlású gömbnek! Ennek elektrosztatikus energiáját a gömbkondenzátor energiaképletével határozhatjuk meg. Felhasználhatjuk azt is, hogy egy m tömegű, r sugarú gömb tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = K \cdot mr^2$, ahol K a tömegeloszlástól függő dimenziótlan állandó. (Homogén gömbre pl. $K = \frac{2}{5}$.)

U. 326. Számítsuk ki, hogy mekkora sugarú körpályán kellene az elektronnak keringenie a feladatban leírt esetben.

U. 327. Egy véges méretű térrészbe kényszerített részecskének – a Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerint – valamekkora impulzussal kell rendelkeznie, emiatt nyomást fejt ki a falakra. A nyomásra nagyságrendi becslést adhatunk a klasszikus kép (a falak között pattogó golyócska) alapján, de még a dimenzióanalízis módszere is eredményre vezethet.

U. 328. Próbáljuk meg felírni az elektron alapállapotú energiáját a határozatlansági reláció segítségével, majd alkalmazzuk az energiaminimum elvét!

U. 329. A Bohr-modell kvantumfeltétele úgy általánosítható kétrészecske-rendszerekre, hogy megköveteljük: legyen a rendszer *teljes* perdülete $\hbar = h/(2\pi)$ egész számú többszöröse.

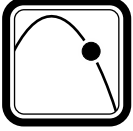
U. 330. Ha az elektront r sugarú térrészbe korlátozzuk, a határozatlansági reláció szerint $p \approx \hbar/r$ nagyságú impulzussal kell rendelkeznie. Számítsuk ki (relativisztikus formulákat használva) az elektron összenergiáját (az elektrosztatikus energia és a mozgási energia összegét) az r sugár függvényében, és keressük meg ennek a függvénynek a minimumát!

U. 331. Az aktiválási energia nagyobb a három részre bomlásnál, mint a kétfelé hasadásnál. Vajon mi ennek az oka? (A feladat ábrája is segít a válasz megtalálásában.)

U. 332. A ${}^7\text{Be}$ az elektronhéj egy belső elektronjának befogásával bomlik.

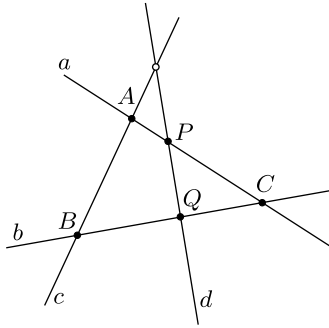
U. 333. Bontson fel az Olvasó egy üveg pezsgőt, töltsön magának, és figyelje meg a jelenséget! Mialatt nem is keveset (de nem is túl sokat) fogyaszt az italból, bizonyára rá fog jönni a buborékok gyorsulásának okára.

Megoldások



Kinematika

M. 1. I. megoldás. Ha egy x , y és t tengelyű derékszögű koordináta-rendszerben felmérjük a csigák pillanatnyi térbeli (pontosabban: síkbeli) és időbeli adatait (ez az úgynevezett téridő-diagram), akkor az egyenes vonalban egyenletesen mozgó csigák „világvonala” egyenes lesz. *Találkozások* akkor következnek be, ha egy-egy csiga ugyanakkor ugyanott van, vagyis ha a világvonalaik metszik egymást. A feladat állítása szerint a négy világvonal (a , b , c és d) a téridő 5 pontjában biztosan metszi egymást.



A téridőben a világvonalak metszéspontjai eseményeket jelentenek. Jelöljük az egyes találkozásokhoz tartozó eseményeket A , B , C , P és Q betűkkel (lásd az *ábrát*!) A téridő A , B és C pontjai egy síkot határoznak meg (az a , b és c világvonalak síkját), és mivel P és Q is ebben a síkban fekszik, a d világvonalnak is benne kell lennie ebben a síkban. Ez viszont annyit jelent, hogy a c és d világvonal is metszi egymást. Mivel az „igen hosszú ideje” mozgó csigák múltjában a hatodik találkozás még nem valósult meg, ezért a jövőben biztosan be fog következni.

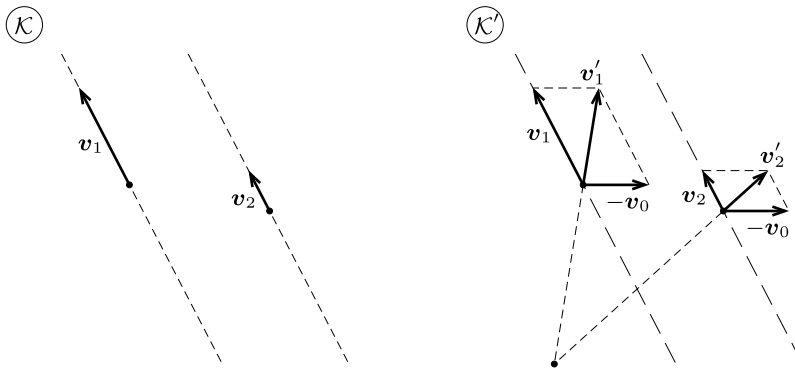
II. megoldás. Mivel 5 találkozás már bekövetkezett, biztosan van olyan csiga, amelyik mind a három társával találkozott már. Jelöljük ezt a csigát α -val. Ülünk rá (képzeletben) α hátára! Másképp fogalmazva: válasszunk olyan koordináta-rendszert, amelyben α az origóban mozdulatlanul áll.

A másik három (mozgó) csiga (β , γ és δ) találkozott α -val, tehát áthaladtak az origón. Másrészt közülük az egyik (mondjuk β) találkozott a másik két mozgó társával (hiszen 5 találkozás zajlott le), ami csak úgy lehetséges, hogy β , γ és δ ugyanazon egyenes mentén mozognak. Ekkor viszont – előbb vagy utóbb – γ és δ is kell, hogy találkozzon.

M. 2. a) Jelöljük a testek sebességét az eredeti \mathcal{K} vonatkoztatási rendszerben \mathbf{v}_1 -gyel és \mathbf{v}_2 -vel. Ezek a sebességek egyben a \mathcal{K} rendszerben párhuzamos pályák közös irányvektorai is, így a két pálya egy-egy tetszőleges pontját összekötő \mathbf{b} vektorral együtt meghatároznak egy síkot. A \mathcal{K} -hoz képest mozgó vonatkoztatási rendszer \mathbf{v}_0 relatív sebességvektorának is ebben a síkban kell lennie, ellenkező esetben a két pálya egyenesen nem metszhetné egymást. A metszésponthoz ugyanis teljesülnie kell a

$$\lambda_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) - \lambda_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0) = \mathbf{b}$$

egyenletnek valamilyen λ_1 és λ_2 skalár paraméterrel, ami lehetetlen, ha \mathbf{v}_0 nincs benne az említett síkban. A továbbiakban tehát elegendő a \mathbf{v}_1 és \mathbf{b} által meghatározott síkban fekvő vektorokkal foglalkoznunk.



1. ábra

Mivel \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 párhuzamos vektorok, így $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0$. Ha egy másik, \mathcal{K}' rendszer állandó \mathbf{v}_0 sebességgel mozog \mathcal{K} -hoz képest, akkor az ebben mért sebességek

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 \quad \text{és} \quad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0.$$

A két pálya akkor keresztezi egymást, ha \mathbf{v}'_1 és \mathbf{v}'_2 *nem* párhuzamos vektorok, vagyis

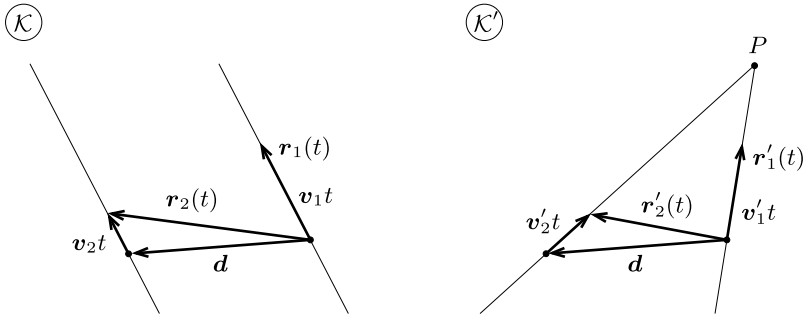
$$\mathbf{v}'_1 \times \mathbf{v}'_2 = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0) = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_0 \neq 0.$$

Ez teljesíthető, ha a két (párhuzamosan mozgó) test sebességének nagysága *különböző*, és a két vonatkoztatási rendszer relatív sebessége (\mathbf{v}_0) *nem párhuzamos* a testek sebességével (1. ábra).

b) A testek helyvektorai egy (önkényesen választott) kezdőpillanat után t idővel a \mathcal{K} vonatkoztatási rendszerben a következőképp adhatók meg:

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{v}_1 t, \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{v}_2 t + \mathbf{d},$$

ahol \mathbf{d} a két test relatív helyzetét megadó vektor a $t = 0$ pillanatban (2. ábra). (A vonatkoztatási rendszer origójának azt a pontot választottuk, ahol az 1-es test tartózkodik $t = 0$ -kor.)



2. ábra

A \mathcal{K}' vonatkoztatási rendszerben a testek helyvektorai

$$\mathbf{r}'_1(t) = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)t, \quad \mathbf{r}'_2(t) = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0)t + \mathbf{d}.$$

Ha a két test a pályájuk metszéspontjában a $t = t_0$ időpontban találkozik (ahol t_0 lehet negatív is), akkor

$$\mathbf{r}'_1(t_0) = \mathbf{r}'_2(t_0),$$

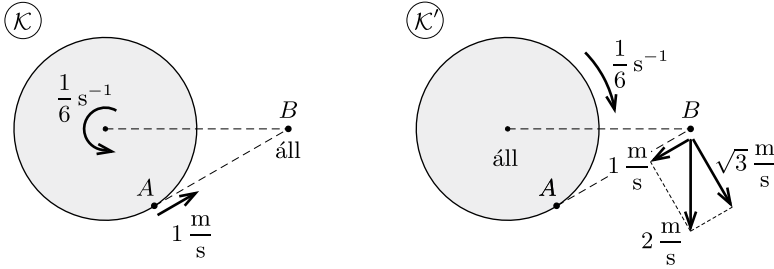
vagyis

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)t_0 = \mathbf{d}.$$

Ez azonban csak akkor teljesülhet, ha \mathbf{d} párhuzamos \mathbf{v}_1 -gyel és \mathbf{v}_2 -vel, vagyis a két test pályája a \mathcal{K} vonatkoztatási rendszerben nemcsak hogy párhuzamos, de *egybe is esik*. A találkozás tehát a \mathcal{K} rendszerben is megtörténik.

Megjegyzés. Eredményünk egyszerűbben is megfogalmazható. Ha a \mathcal{K}' vonatkoztatási rendszerben a két test találkozik (egyszerre vannak ugyanazon a helyen), akkor a \mathcal{K} rendszerben is találkoznak. Két, egymással párhuzamosan mozgó test viszont csak akkor találkozhat, ha pályájuk egybeesik.

M. 3. A feladatban leírtak alapján megállapíthatjuk, hogy Anna és Béla távolsága $6\sqrt{3}$ m, a körhinta kerületi sebessége 1 m/s, szögsebessége pedig $\frac{1}{6}$ s⁻¹. Ha Anna a körhinta közepén ülne, akkor azt látná, hogy a körülötte lévő világ ugyanekkora szögsebességgel, de ellentétes körüljárási irányban forog, így a körhinta középpontjához képest érintőleges irányban. Bár Anna nem a körhinta közepén ül, hanem a szélén, de ez semmit sem változtat azon, hogy Anna szerint Béla sebessége 2 m/s. Az *ábra* bal oldali részén Béla szempontjából látjuk a relatív mozgást (\mathcal{K} vonatkoztatási rendszer), a jobb oldalon pedig Anna nézőpontjából (\mathcal{K}' rendszer).

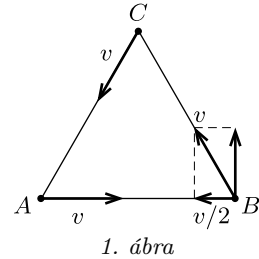


Mivel a \mathcal{K} rendszer inerciarendszer, a \mathcal{K}' rendszer (azaz a forgó körhinta) viszont nem az, így nem alkalmazhatjuk a Galilei-féle relativitási elvet: Béla szerint Anna éppen feléje mozog 1 m/s sebességgel, viszont a forgó \mathcal{K}' rendszerből Anna úgy látja, hogy Béla nem feléje mozog, és a sebessége is más, 2 m/s . Ha Béla \mathcal{K}' rendszerbeli sebességét felbontjuk a jobb oldali ábrán látható két, egymásra merőleges összetevőre, akkor az Anna felé mutató sebességkomponens éppen 1 m/s nagyságú, míg az erre merőleges összetevő $\sqrt{3} \text{ m/s}$ értékű. Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy Anna egyrészt azt látja, hogy Béla feléje mozog 1 m/s sebességgel, másrészt elfordul tőle $(\frac{1}{6} \text{ s}^{-1}) \cdot 6\sqrt{3} \text{ m} = \sqrt{3} \text{ m/s}$ sebességgel.

M. 4. Jelöljük a csigákat A , B és C betűkkel. Bontsuk fel a B jelű csiga sebességvektorát az 1. ábrán látható módon az A jelű csiga felé mutató és erre merőleges komponensekre. Ekkor ez a két csiga

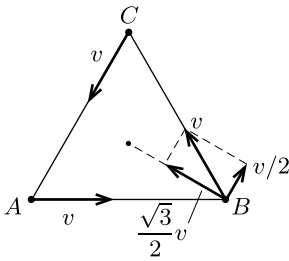
$$v + \frac{v}{2} = \frac{3v}{2} = 7,5 \frac{\text{cm}}{\text{perc}}$$

sebességgel közeledik egymás felé, tehát a köztük lévő, kezdetben 60 cm -es távolságot



$$\frac{60 \text{ cm}}{7,5 \text{ cm/perc}} = 8 \text{ perc}$$

alatt teszik meg, ennyi idő múlva találkoznak. Ezalatt az idő alatt mindegyik csiga 5 cm/perc sebességgel halad, tehát a találkozásig 40 cm utat tesznek meg.



2. ábra

Ugyanerre az eredményre juthatunk akkor is, ha a B jelű csiga sebességvektorát a 2. ábrán látható módon, a csigák alkotta szabályos háromszög középpontja felé mutató és arra merőleges vektorokra bontjuk fel. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy a csigák állandóan $\sqrt{3}v/2 = (\sqrt{3}/2) \cdot 5 \text{ cm/perc}$ sebességgel közelednek a háromszög középpontja felé (a szimmetria miatt itt találkoznak), miközben $v/2$ kerületi sebességgel körbe is járják ezt a pontot. Geometriai megfontolásokból adódik, hogy kezdetben a csigák $(\sqrt{3}/3) \cdot 60 \text{ cm}$

távolságra vannak a háromszög középpontjától, tehát

$$\frac{(\sqrt{3}/3) \cdot 60 \text{ cm}}{(\sqrt{3}/2) \cdot 5 \text{ cm/perc}} = 8 \text{ perc}$$

múlva találkoznak.

A pálya egyenletének kiszámításához általánosítsuk a feladatot! Vizsgáljuk egy pontszerű test mozgását, amely állandó (v nagyságú) sebességgel halad egy rögzített pont körül úgy, hogy a sebességvektora mindvégig ugyanakkora α (hegyes)szöget zár be a (kezdetben r_0 hosszúságú) vezérsugárral. Ha a vezérsugár a test kicsiny elmozdulása során $\Delta\varphi$ szöggel fordul el és hossza Δr értékkel változik meg (3. ábra), akkor a sebességvektor és a vezérsugár közötti szög állandósága miatt a következő összefüggés írható fel:

$$(1) \quad \frac{\Delta r}{\Delta\varphi} = -(\operatorname{ctg} \alpha) \cdot r(\varphi).$$

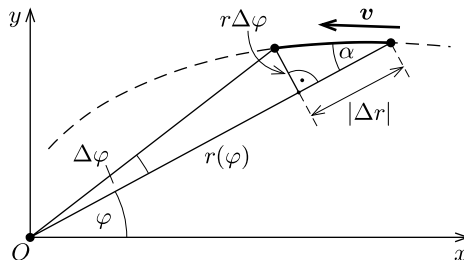
Az (1) egyenlet nagyon hasonlít a radioaktív bomlások

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t)$$

egyenletére (ahol $N(t)$ a mintában található, még el nem bomlott radioaktív atommagok száma az idő függvényében, λ pedig a bomlásállandó), melynek ismert megoldása: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Az analógia alapján megállapíthatjuk, hogy a kérdéses mozgás pályaequatione (polárkoordináta-rendszerben):

$$(2) \quad r(\varphi) = r_0 e^{-(\operatorname{ctg} \alpha) \cdot \varphi}.$$

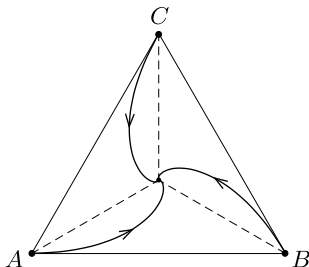
Ez az úgynevezett *logaritmikus spirális* egyenlete, melyről leolvashatjuk, hogy az r vezérsugár csak akkor tart a nullához, ha a szögelfordulás a végtelenhez tart, vagyis egy valóban pontszerű test a középpontot (véges idő alatt, véges út megtételével) végtelen sokszor megkerülve éri el.



3. ábra

A csigákat azonban csak addig tekinthetjük pontszerűnek, amíg távolságuk sokkal nagyobb a méretüknél. A (2) egyenletbe $\alpha = 30^\circ$ -ot és $\varphi = 2\pi$ szögelfordulást helyettesítve azt kapjuk, hogy egy körülfordulás alatt a csigák középponttól

mért távolsága néhány mikrométernyire csökken, ami reális méretű csigákat feltételezve elképzelhetetlen. Valójában tehát a csigák még egyszer sem kerülnek meg teljesen a háromszög középpontját (4. ábra).



4. ábra

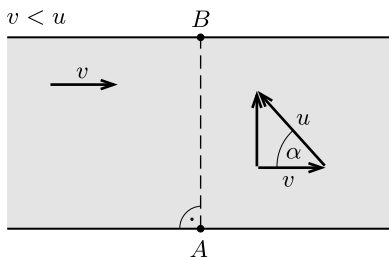
Megjegyzés. Az éjszakai repülő rovarok úgy próbálnak egyenes vonalban repülni, hogy egy távoli fényforrás (például a Hold) irányához képest állandó szögben haladnak. Ha egy közeli fényforrás megtéveszti őket, akkor a feladatnak megfelelően spirális pályán mozognak, csapdába kerülnek. Mivel sem a rovarok, sem a fényforrások nem pontszerűek, ezért előbb-utóbb beleütköznek a lámpába.

M. 5. Jelöljük a folyó sebességét v -vel, a csónakos (vízhez viszonyított) sebességét pedig u -val. A két részfeladat közötti lényeges különbség az, hogy az a) esetben $v < u$, míg a b) részben $v > u$.

a) $v < u$ esetén a legrövidebb lehetséges út a partra merőleges irány. A csónak akkor halad erre, ha a csónakos az 1. ábrán látható irányba evez. Így a csónak sebessége a parthoz képest

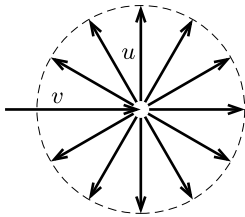
$$\sqrt{u^2 - v^2} = \sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,24 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A csónakosnak a parthoz képest α szögben ferdén „visszafelé” (a sodrás ellen) kell eveznie. Mivel $\cos \alpha = v/u = 2/3$, így $\alpha \approx 48,2^\circ$.

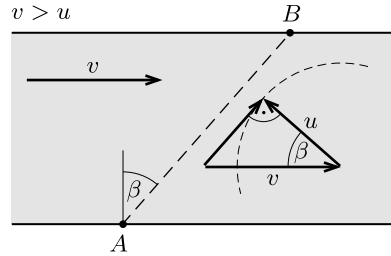


1. ábra

b) Ekkor a folyó sodra olyan nagy ($v > u$), hogy a csónak még akkor is lefelé halad a folyón, ha a csónakos pontosan árral szemben evez. Ezek szerint a partra merőlegesen nem juthat át a csónakos, hiszen – az előző esettel ellentétben – nem haladhat a parthoz képest akármilyen irányban.



2. ábra



3. ábra

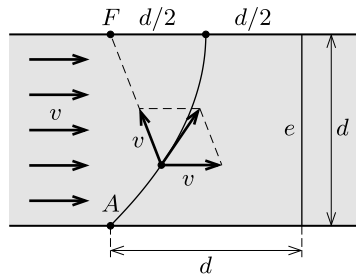
A csónak lehetséges haladási irányait úgy határozhatjuk meg, hogy a folyó sebességéhez hozzáadjuk a csónak minden lehetséges állóvízbeli sebességét. Rajzoljuk fel a folyó sebességvektorát, majd ennek végpontjából rajzoljunk minden irányba olyan sebességvektorokat, melyek nagysága a csónak állóvízbeli sebességével egyezik meg. A sebességvektor-nyilak végpontja egy körön helyezkedik el, amint ezt a 2. ábra mutatja. A csónak lehetséges eredő sebességeit úgy kaphatjuk meg, hogy a folyó sebességvektorának talppontját összekötjük ennek a körnek az egyes pontjaival. A legrövidebb út az lesz, amely a folyó sodrásának irányával a legnagyobb szöget zárja be, vagyis ekkor az eredő sebességvektor a 3. ábrán látható módon éppen érinti a fenti kört.

Ezek szerint a csónak sebessége a parthoz viszonyítva

$$\sqrt{v^2 - u^2} = \sqrt{7} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,65 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A csónakosnak a parthoz képest β szögben most is ferdén „visszafelé” kell eveznie. Mivel $\cos \beta = u/v = 3/4$, így $\beta \approx 41,4^\circ$. A 3. ábráról az is leolvasható, hogy ekkor a csónak által megtett AB útszakasz hossza a folyó szélességének $4/3$ -szorosa.

M. 6. Jelöljük a csatorna szélességét d -vel, és rajzoljunk a csatorna partjára merőlegesen egy e egyenest, amely a csónak kezdeti helyzetétől szintén d távolságra fekszik a víz sodrásirányában (lásd az ábrát).



Kezdetben az A pontból induló csónak d távolságra van a szemben lévő F ponttól is, és az e egyenestől is. Mivel a víz sebessége is, és a csónaknak a vízhez viszonyított sebessége is v , a csatorna vize mindig ugyanannyival sodorja le a csónakot, mint amennyivel a csónak az F pont felé közeledik. Ez azt jelenti, hogy

a csónak mindig ugyanolyan messze lesz F -től, mint az e egyenestől. Eszerint a csónak pályája egy parabola, amelynek fókusza az F pont, vezéregyenesese pedig az e egyenes. Nagyon hosszú idő után a csónak a túlsó part közelébe kerül, az F ponttól $d/2$ távolságra. Ebből a helyzetéből nem tud kiszabadulni, mert a csatorna vízének sebessége és az evezés sebessége éppen kiegyenlíti egymást.

M. 7. Jelöljük $k \cdot v$ -vel az őrnaszád sebességét, vagyis a két hajó sebességének aránya legyen k . Az *ábra* alapján láthatjuk, hogyan csökken a két hajó közötti (kezdetben d nagyságú) távolság Δt idő alatt Δd értékkel:

$$(1) \quad \Delta d = kv\Delta t - v\Delta t \sin \alpha.$$

A naszád távolsága a parttól eközben

$$(2) \quad \Delta y = kv\Delta t \sin \alpha$$

értékkel növekszik. (α a naszád pillanatról pillanatra változó sebességvektorának a part-hoz viszonyított szöge.)

Összegezzük az (1) és (2) egyenletben szereplő kicsiny mennyiségeket! Mindkét összegnek d -t kell adnia:

$$(3) \quad \sum \Delta d = \sum kv\Delta t - \sum v\Delta t \sin \alpha = d,$$

$$(4) \quad \sum \Delta y = \sum kv\Delta t \sin \alpha = d.$$

Ezen kívül felhasználhatjuk azt is, hogy a csempészek hajója egyenes vonalú egyenletes mozgással szintén d távolságot tesz meg:

$$(5) \quad \sum v\Delta t = d.$$

Az (5) és (4) összefüggéseket a (3) egyenletbe helyettesítve megszabadulhatunk a nehezen kezelhető α szögtől, és k -ra egy meglehetősen egyszerű másodfokú egyenletet kapunk:

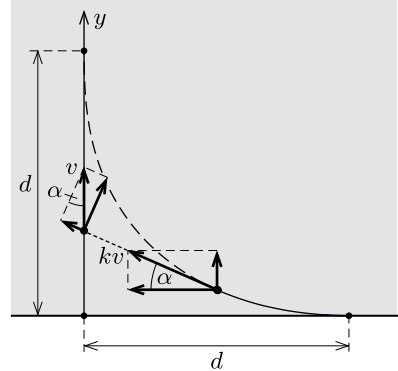
$$k^2 - k - 1 = 0,$$

amelynek pozitív gyöke:

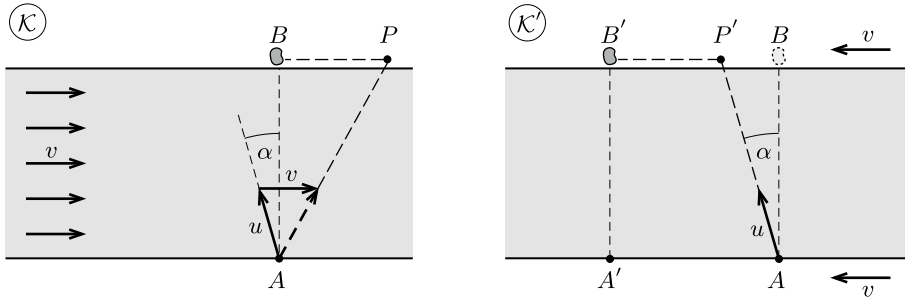
$$k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Ez a szám a híres *arany metszés* arányszáma. Ennyiszor gyorsabb az őrnaszád, ha éppen a leírt helyzetben éri utol a csempészeket.

M. 8. Legyen a víz sebessége v , u pedig jelölje azt a sebességet, amivel Joe futni, illetve evezni tud. Tegyük fel, hogy Joe először (egyenes pályán) átevez a folyón, majd a partot érés helyétől a part mentén gyalog megy az aranyröghöz.



Célszerű Joe mozgását a folyó vizével együttmozgó \mathcal{K}' koordináta-rendszerből szemlélni. A parthoz rögzített \mathcal{K} rendszerben jelöljük Joe indulási pontját A -val, a partot érés helyét P -vel, az aranyrög helyzetét pedig B -vel! A \mathcal{K}' rendszerben azt látjuk, hogy a folyópart az eredeti sodrásiránnyal ellentétesen mozog v sebességgel, Joe az állónak látszó vízen u sebességgel evez, sebessége a parton pedig $v + u$ nagyságú. Így Joe célbaéréseig az indulási pont az ábrán látható A' pontba, az aranyrög pedig a B' pontba kerül.



A \mathcal{K}' vonatkoztatási rendszerben Joe pályája emlékeztet egy közegethatáron megtörő fénysugár pályájára, így az optimális útvonal meghatározásához alkalmazhatjuk a Fermat-elvet. Ha Joe a legrövidebb idő alatt szeretne az aranyröghöz érni, akkor a \mathcal{K}' rendszerben olyan útvonalat kell választania, amilyen pályán egy $n = (v + u)/u$ törésmutatójú közegből a levegőbe átlépő fénysugár halad. Ekkor a beesési szög éppen a teljes visszaverődés határszöge, melyre $\sin \alpha = 1/n$. A \mathcal{K} vonatkoztatási rendszerben tehát Joe-nak úgy kell eveznie, hogy csónakjának vízhez viszonyított sebessége a vízzel $\pi/2 + \alpha$ szöget zárjon be, ahol

$$(1) \quad \alpha = \arcsin \left(\frac{u}{v + u} \right).$$

A Fermat-elven alapuló gondolatmenet csak akkor helyes, ha a \mathcal{K}' vonatkoztatási rendszerben az aranyrög előbb ér a P' pontba, mint Joe, azaz ha az előbb kiszámolt α értékre

$$(2) \quad v \geq u \sin \alpha.$$

Ellenkező esetben ($v < u \sin \alpha$) idővesztés, ha Joe „tülevez” az aranyrögön, ezért inkább úgy érdemes eveznie, hogy a \mathcal{K} rendszerben az eredő sebessége merőleges legyen a folyó partvonalára. (Ebben az esetben tehát a legrövidebb mozgásidő a legrövidebb út esetén valósul meg.) Ekkor az ideális α szög

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{v}{u} \right).$$

A két esetet elválasztó határesetben az (1) és (2) összefüggésekből az

$$v = u \frac{u}{v + u}$$

egyenletet kapjuk, ahonnan

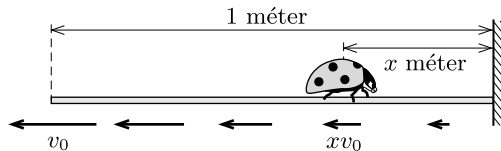
$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618,$$

ami az *arany metszés* nevezetes arányszáma. (Ez az érdekes arányszám a 7. és a 279. feladatban is felbukkan.)

Megállapíthatjuk tehát, hogy amennyiben Joe gyors ($u \geq 1,618v$), akkor abban az esetben éri el leghamarabb az aranyrögöt, ha éppen feléje (azaz a partra merőlegesen) halad. Határesetben Joe-nak a vízhez viszonyítva az AB szakasszal $\alpha_{\max} \approx \arcsin(0,618) = 38,2^\circ$ szöget bezáró irányban, a folyón felfelé kell eveznie. Joe akár gyorsabb, akár lassabb a fenti határsebességnél, akkor ér céljához a leghamarabb, ha a partra merőleges egyeneshez képest ennél kisebb szögben evez a sodrással ferdén felfelé. Érdekes észrevennünk, hogy ez az α szög ($0 < \alpha < \alpha_{\max}$) akkor is nullához tart, ha Joe sebessége végtelenhez tart, illetve akkor is, ha nullához közelít.

Megjegyzés. Általánosságban két különböző csónaksebességhez tartozik ugyanaz az ideális α szög, melyek között úgy találhatunk összefüggést, ha egyenlővé tesszük ezeknek a szögeknek a szinuszeit: $u_1/(v + u_1) = v/u_2$, ahol u_1 a lassabb, u_2 pedig a gyorsabb evezési sebesség. Rendezés után ezt találhatjuk: $v^2 = u_1(u_2 - v)$, vagyis u_1 és $u_2 - v$ mértani közepe mindig megegyezik a folyó v sebességével.

M. 9. A pókhálószál sebessége a faltól x méter távolságban arányosan kisebb, mint a szál végének sebessége, tehát $x \cdot v_0$. Ha ez az érték nagyobb, mint a katica v_1 sebessége, akkor a katica távolodni kezd a faltól, és a helyzete egyre reménytelenebb lesz: soha nem éri el a falat. Ha viszont $v_1 > x \cdot v_0$, akkor a katica eredő sebessége a fal felé mutat, és ez a sebesség az idő múltával egyre növekszik, tehát biztosan eléri a falat. A határeset az $x = v_1/v_0 = 0,25$ értéknek felel meg, tehát a pókhálószálon a faltól 25 cm távolságból elinduló katicabogár egyáltalán nem mozdul el.



M. 10. Rajzoljunk gondolatban jeleket a kezdetben $\ell_0 = 1$ méter hosszúságú pókhálószára, és írjuk oda melléjük, hogy az adott pontnak a faltól mért távolsága a szál teljes hosszának hányad része. Ezek a számok éppen az előző feladat megoldásában szereplő x koordináták ($x = 0$ a falnak, $x = 1$ a póknak felel meg), melyek azonban most a pókhálószállal együtt „nyúlnak”.

Jelölje Δt azt az időt, ami alatt a katica eljut egy x jelű helyről egy közeli $x - \Delta x$ jelű helyre, ha a pók már t ideje mozog. Mivel a kérdéses pontok távolsága

$(\ell_0 + v_0 t)\Delta x$, és a katica v_1 sebességgel mozog, fennáll, hogy

$$\Delta x = \frac{v_1 \Delta t}{\ell_0 + v_0 t}.$$

Összegezzük a fenti egyenlet mindkét oldalát a katicabogár teljes mozgására. Ha x_0 jelöli a katica kezdeti helyzetét, és T azt az időtartamot, amely alatt eléri a falat, akkor fennáll, hogy

$$x_0 \approx \sum \frac{v_1 \Delta t}{\ell_0 + v_0 t} \approx \int_0^T \frac{v_1}{\ell_0 + v_0 t} dt = \frac{v_1}{v_0} \ln \left(1 + \frac{v_0 T}{\ell_0} \right).$$

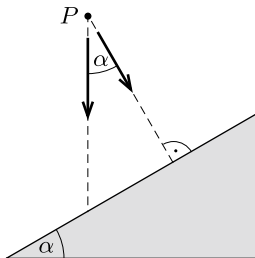
(A felosztást finomítva összegzésről integrálásra tértünk át.) Tekintettel arra, hogy a fenti integrál elegendően nagy T -t választva tetszőlegesen nagyvá tehető, azt a meglepő eredményt kaptuk, hogy akármilyen gyorsan húzza is a pók a szál végét (tetszőlegesen nagy v_0 , tetszőlegesen kicsiny v_1 és bármely x_0 érték esetén is) a katica véges

$$T = \frac{\ell_0}{v_0} \left[e^{(v_0/v_1)x_0} - 1 \right]$$

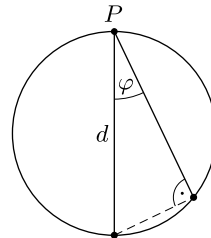
idő alatt biztosan eléri a falat.

M. 11. Tekintsük az *1. ábrán* látható két irányt! Független irányban legnagyobb a gyorsulás (g), de viszonylag hosszú az út. A lejtőre merőleges irányban legrövidebb az út, de viszonylag kicsi a gyorsulás. Várható, hogy a legrövidebb elérési időt a két kijelölt irány között találjuk.

Először lássuk be a következő segédtelet: egy adott pontból különböző irányokba fektetett súrlódásmentes lejtőkön egyszerre indított testek mozgásuk közben mindig egy gömbfelületen helyezkednek el.



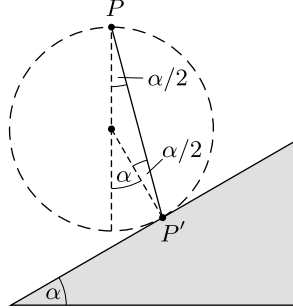
1. ábra



2. ábra

A gömb legfelső pontja a *2. ábrának* megfelelően az indítási pontban van. Az indítás után t idővel a gömb átmérőjének $d = gt^2/2$ -nek kell lennie (szabadesés). A függőlegessel φ szöget bezáró lejtőn egy test $g \cos \varphi$ gyorsulással mozog, útja a gömb kerületéig $d \cos \varphi$, vagyis ennek az útnak a megtételéhez is ugyanakkora t idő kell, mint a függőleges mozgáshoz. Ezzel a segédtelet beláttuk.

Az eredeti feladatot a segédétel alapján egyszerűen megoldhatjuk. A P pontból különböző irányokba egyszerre indított testek mozgásuk során mindvégig egy olyan gömb felületére illeszkednek, amely időben növekszik, legfelső pontja pedig mindig a P pont. Ez a növekvő gömb egyszer csak eléri a lejtőt, ekkor a gömb és a lejtő érinti egymást a P' pontban. A legrövidebb elérési időhöz tehát a P pontból a PP' szakasz mentén kell súrlódásmentesen lecsúszni.



3. ábra

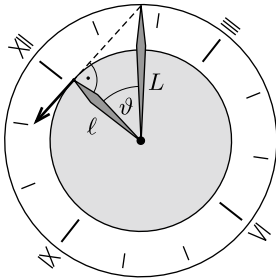
A 3. ábra alapján könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az α hajlásszögű lejtő esetén a PP' legrövidebb elérési irány a függőlegessel $\alpha/2$ szöget zár be, vagyis a megoldás elején említett két iránynak éppen a szögfelezője a legkedvezőbb.

Megjegyzés. Bár a probléma térbeli, hiszen a P pontból egyszerre induló testek azonos időben mindig egy gömbfelületen vannak, és a legrövidebb elérési irányt a P pont és a növekvő sugarú gömb lejtőt érintő pontjának iránya adja, elegendő azonban a P pontot tartalmazó, lejtőre merőleges, függőleges síkban vizsgálnunk, ahogy ezt hallgatólagosan az ábrákon eddig is tettük.

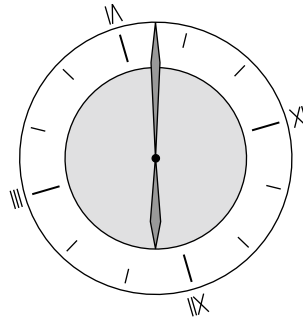
M. 12. A nagymutatóval együttforgó vonatkoztatási rendszerben a nagymutató áll, a kismutató pedig „az óramutató járásával ellentétes irányban” forog 11ω szögsebességgel, ahol $\omega = 2\pi/(12 \text{ óra})$. Ebben a rendszerben a mutatók végpontjainak távolodási (közeledési) sebessége akkor a legnagyobb, ha a kismutató végpontjának sebességvektora a két végpontot összekötő egyenesre esik, vagyis utóbbi a kismutató végpontja által leírt kör érintője (1. ábra). A két végpont közötti távolság akkor változik a leglassabban, amikor éppen nem változik, azaz a kismutató végpontjának sebessége merőleges a végpontokat összekötő egyenesre.

Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor a mutatók végpontjainak távolsága a leggyorsabban változik. Az 1. ábráról leolvasható, hogy ekkor a két mutató által bezárt $\vartheta = 11\omega t$ szögre $\cos \vartheta = \ell/L = 2/3$ (itt t az éjfél óta eltelt idő, ℓ és L pedig rendre a kis- és nagymutatók hossza). Innen $t = 526$ s, azaz éjfél után leghamarabb 00:08:46-kor nő leggyorsabban a távolság. A másik megfelelő geometriai helyzetben (amikor a távolság a leggyorsabban csökken) $\cos(2\pi - 11\omega t) = 2/3$, amiből $t = 3402$ s, ez 00:56:41 időpontnak felel meg.

A mutatók végpontjainak távolodási sebessége pont éjfélkor a leglassabb, illetve éjfél után abban a t időpontban, amelyre $11\omega t = \pi$, azaz $t = 1964$ s. Ez a pillanat 00:32:44-kor következik be (2. ábra).

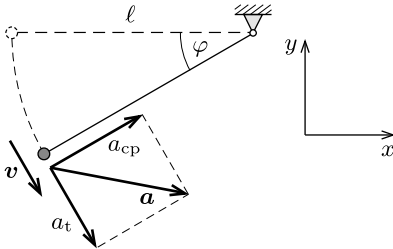


1. ábra



2. ábra

Megjegyzés. A feladat „nyers erővel” (szélsőértékszámítással) is megoldható. A mutatók végpontjai távolságának idő szerinti differenciáhányadosa a változás sebessége, ennek minimumát és maximumát kell megkeresni.



1. ábra

M. 13. Az inga helyzetét jellemezhetjük az indulási (vízszintes) helyzettől mért φ szögelfordulással. A tangenciális gyorsulást a nehézségi erő érintőirányú komponense okozza:

$$a_t = g \cos \varphi.$$

Az ingatest sebessége a mechanikai energia-megmaradás törvényéből számolható:

$$v = \sqrt{2gl \sin \varphi},$$

a centripetális gyorsulás tehát

$$a_{cp} = \frac{v^2}{l} = 2g \sin \varphi.$$

Az ingatest gyorsulásának x és y komponense:

$$a_x = a_{cp} \cos \varphi + a_t \sin \varphi = 3g \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$a_y = a_{cp} \sin \varphi - a_t \cos \varphi = 2g \sin^2 \varphi - g \cos^2 \varphi.$$

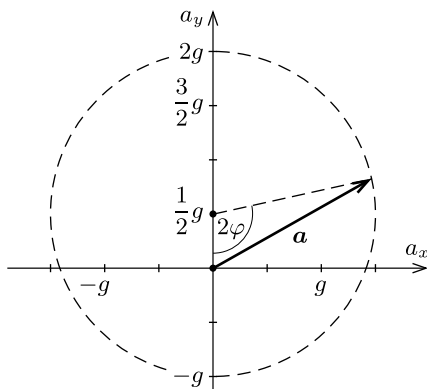
Trigonometrikus azonosságok felhasználásával a kapott kifejezéseket tovább alakíthatjuk:

$$a_x = \frac{3}{2}g \sin(2\varphi), \quad a_y = \frac{1}{2}g - \frac{3}{2}g \cos(2\varphi).$$

Ez pedig egy kör paraméteres egyenlete, amiből a kanonikus egyenletet is felírhatjuk:

$$a_x^2 + \left(a_y - \frac{1}{2}g\right)^2 = \left(\frac{3}{2}g\right)^2.$$

Az ingatest \mathbf{a} gyorsulásvektorának végpontja tehát egy $(0, g/2)$ középpontú, $3g/2$ sugarú körön söpör végig (2. ábra).



2. ábra

M. 14. Jelölje az inga hosszát ℓ . Az AP szakasz megtételéhez szükséges idő biztosan nagyobb, mintha az ingatest az A és P pontok magasságkülönbségének megfelelő utat szabadeséssel tette volna meg:

$$(1) \quad t_{AP} > \sqrt{\frac{2\ell \sin 30^\circ}{g}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

hiszen az ingatest függőleges irányú gyorsulása ezen a szakaszon legfeljebb g .

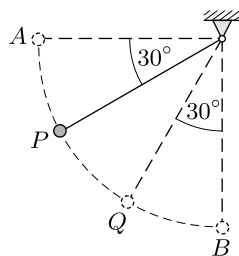
A PB szakaszt bontsuk két részre a pálya másik, Q harmadolópontjával! A P és Q pontokban az ingatest sebessége az energiamegmaradásból számítható:

$$v_P = \sqrt{2g\ell \sin 30^\circ} = \sqrt{g\ell}, \quad \text{illetve} \quad v_Q = \sqrt{2g\ell \sin 60^\circ} = \sqrt{\sqrt{3}g\ell}.$$

Az $\ell\pi/6$ hosszúságú PQ és QB szakaszokat az ingatest biztosan rövidebb idő alatt teszi meg, mintha az előbbi szakaszon végig v_P , az utóbbin pedig végig v_Q sebességgel mozgott volna, azaz

$$(2) \quad t_{PB} < \frac{\ell\pi}{6v_P} + \frac{\ell\pi}{6v_Q} \approx 0,92\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Az (1) és (2) egyenlőtlenségeket összevetve látható, hogy $t_{AP} > t_{PB}$, tehát az inga a PB szakaszt teszi meg rövidebb idő alatt.



M. 15. a) A rugalmas ütközés során a golyók sebességét cserélnek: az A jelű golyó megáll, a B pedig vízszintes kezdősebességgel elindul. Mindkét golyó függőleges irányban megtett útja 1 méter, a kezdeti függőleges irányú sebességkomponensük pedig zérus, így az a golyó mozog hosszabb ideig, amelyiknek az „átlagos” függőleges irányú gyorsulása kisebb.

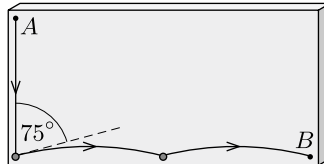
A B jelű golyó függőleges irányú gyorsulása mindvégig g . A fonálinga nehezékének mozgása meglehetősen bonyolult (nagy kitérésű ingamozgás), de azt biztosan állíthatjuk, hogy a függőleges irányú gyorsulása mindvégig kisebb, mint g (hiszen a fonál részben felfelé húzza). Emiatt az A jelű golyó mozgása hosszabb ideig tart.

b) Az inga nehezéke egy negyedkört (kb. 1,6 méternyi utat) tesz meg. A másik (B jelű) test parabolapályán mozog, amelynek hosszát nem tudjuk elemi úton kiszámítani. Azt azonban kiszámíthatjuk, hogy a földet éréséig 2 métert mozdul el vízszintesen, a pályájának hossza tehát legalább akkora, mint a mozgásának kezdőpontját és végpontját összekötő $\sqrt{5}$ m $\approx 2,2$ m hosszú egyenes szakasz.

A B jelű golyó tehát *hosszabb úton*, de *rövidebb ideig* mozog, mint a fonálinga A jelű nehezéke.

M. 16. a) Tételezzük fel, hogy a golyó függőlegesen szabadon esik 1 métert, majd a rajztábla alsó szélén lévő, sűrűn elhelyezkedő szögsoron végigpattogva, lényegében vízszintesen haladva jut el a B pontig. A függőleges esés ideje $t_1 = 0,45$ s, ezalatt a golyó 4,4 m/s sebességre gyorsul fel, és a hátralevő 2 méteres utat $t_2 = 0,45$ s alatt teszi meg. Mivel a golyó az AB egyenesen csúszva $t_3 = 1,0$ s $> t_1 + t_2$ idő alatt jutott volna a B pontba, ezért az első kérdésre a válasz: *nem* a legrövidebb úton jut el a golyó leggyorsabban a célba.

Megjegyzések. 1. Érdekeség, hogy mindössze két szög segítségével is elérhetjük, hogy a golyó előbb jusson el a B pontba, mintha az AB szakaszon csúszott volna: az egyik szöget a bal alsó sarokba, a másikat pedig a tábla alsó szélének közepére kell beütni (lásd az *ábrát*). A szögek pozícióját finoman úgy kell beállítani, hogy az egyes pattogások után a golyó sebességvektora a vízszintessel 15° -os szöget zárjon be. A mozgás teljes ideje ekkor $0,45$ s + $0,47$ s = $0,92$ s-nak adódik.

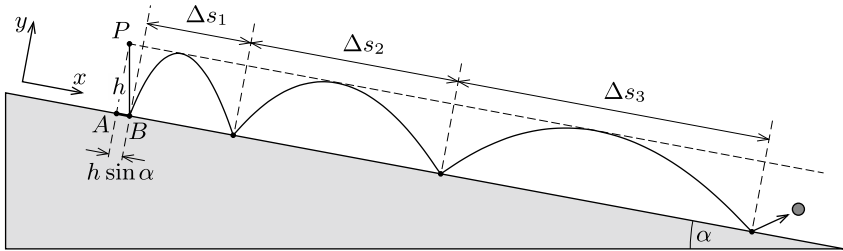


2. Felsőbb matematikai módszerrel (variációszámítással) be lehet látni, hogy a legrövidebb idejű mozgás pályagörbéje ciklois. Ez az úgynevezett brachisztokron-probléma.

b) A golyó függőleges sebessége a tábla bármely pontján legfeljebb akkora lehet, mint amekkora sebességgel rendelkezik egy, az A pontból kezdősebesség nélkül elejtett és szabadon eső test ugyanekkora magasságban. (Mindkét test mozgási energiáját és ezen keresztül a sebességét a függőleges elmozdulás nagysága határozza meg.) A pattogó golyó tehát nem érheti el hamarabb a rajztábla alját, mint amennyi idő alatt ($t_1 = 0,45$ s) a szabadon eső test. A feladat kérdésére a válasz tehát: *nem*.

M. 17. Az *ábrán* látható, a lejtő hajlásához „illeszkedő” koordináta-rendszerből nézve a labda pattogását úgy látjuk, mintha egy vízszintes síkon $g' = g \cos \alpha$

nehézségi gyorsulású térben pattogna egy labda, melyre a nehézségi erőn kívül még egy állandó ($mg \sin \alpha$ nagyságú) „vízszintes” erő is hat. Az y irányú mozgás azonos magasságú, tehát azonos periódusidejű pattogásokból áll. Eközben a labda x irányban egyenletesen gyorsul, a visszapattanások közti átlagsebesség egyenletesen növekszik, a pattanási helyek közötti távolságok tehát *számtani sorozatot* alkotnak.

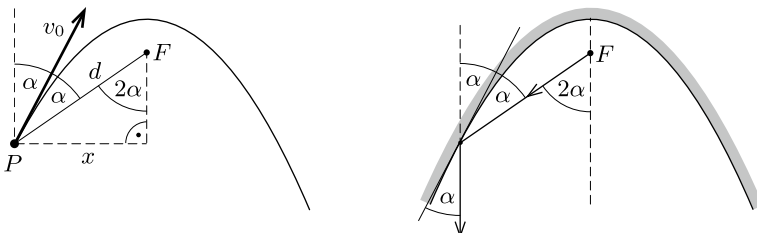


Az eddigi érvelésünket rövid számolással is alátámaszthatjuk. Az ábrán látható P pontból (h magasságból) elengedett labda Δt idő alatt éri el a lejtőt, és ezalatt $h \sin \alpha$ távolságot tesz meg a „lejtő mentén” (az ábrán ez az AB szakasz). Ezt követően minden egymás utáni pattanás időtartama $2\Delta t$, vagyis az elengedés után a pattanások a $\Delta t, 3\Delta t, 5\Delta t, 7\Delta t, \dots$ időpillanatokban következnek be.

A labda lejtő menti gyorsulása mindvégig állandó ($g \sin \alpha$), tehát az egymást követő pattanások közötti távolság a szomszédos páratlan számok négyzetének különbségével arányos: $(2k + 1)^2 - (2k - 1)^2 = 8k$.

A fentiekből az következik, hogy a feladatban kért pattanások közötti távolság $\Delta s_k = 8kh \sin \alpha$, vagyis az AB szakasz hosszának 8-szorosa, 16-szorosa, és így tovább. Érdekes, hogy ha h értékét állandónak tartjuk, azonban a lejtő hajlásszögét 90° -hoz közelítjük, akkor a pattanások közötti távolságok $8kh$ -hoz tartanak.

M. 18. A parabola függőleges szimmetriatengelyén rajta van az F fókuszpont. Legyen d az eldobás P pontjának távolsága F -től, a hajítás szöge pedig a *függőlegeshez* viszonyítva α . Ekkor a PF szakasz és az eldobás iránya közötti szög is éppen α , ami könnyen belátható annak a ténynek a felhasználásával, hogy egy parabolatükör a fókuszpontból kiinduló sugarakat a tengellyel párhuzamosan veri vissza (lásd az *ábra* jobb oldali részét).



A test az eldobás után $t = (v_0 \cos \alpha)/g$ idővel éri el pályájának legmagasabb pontját, ezalatt a vízszintes elmozdulása

$$x = v_0 t \sin \alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\alpha).$$

A bal oldali ábrán látható derékszögű háromszögből leolvasható a fókuszpont távolsága az eldobás helyétől:

$$d = \frac{x}{\sin(2\alpha)} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Érdekes, hogy az eredmény független az eldobás szögétől. A bal oldali ábrán az is látszik, hogy $2\alpha = 90^\circ$, azaz 45° -os hajítási szög esetén lesz a fókuszpont az eldobás helyével azonos magasságban.

Megjegyzés. A gondolatmenetet tovább folytatva kitalálhatjuk a vezéregyenes elhelyezkedését is. Mivel a pálya szimmetriatengelye függőleges, ezért a vezéregyenesnek vízszintesnek kell lennie. A parabola ismert tulajdonsága, hogy minden pontja ugyanolyan messze van a fókuszponttól, mint a vezéregyenestől. Igaz ez az eldobás P pontjára is, tehát a vezéregyenes a P pont fölött, attól $d = v_0^2/(2g)$ távolságra helyezkedik el, függetlenül a hajítási szögtől.

M. 19. I. megoldás. Írjuk le a test időbeli mozgását, vagyis a ferde hajítás folyamatát az 1. ábrán látható derékszögű koordináta-rendszerben!

A vízszintes (x irányú) mozgás egyenletes:

$$(1) \quad x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

ahol α az elhajítás irányának a vízszintessel bezárt szöge. A függőleges, egyenletesen gyorsuló mozgást leíró összefüggés:

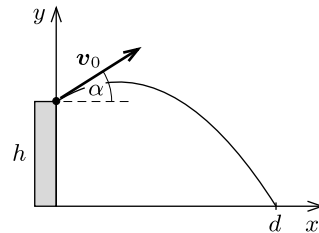
$$(2) \quad y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + h.$$

Az (1) egyenletből az időt kifejezve, majd ezt (2)-be helyettesítve megkapjuk a pályagörbe egyenletét:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha + h.$$

A hajítás vízszintes távolságát, d -t úgy kapjuk meg, hogy a fenti egyenletben y helyébe 0 -t írunk (hiszen a földet érésre ez jellemző), és a hozzá tartozó x éppen a szóban forgó d lesz. Az egyenletek egyszerűsítése miatt érdemes a kezdősebességet $v_0 = \sqrt{2gH}$ alakban írni, ahol H egy hosszúság dimenziójú állandó. (H szemléletes jelentése: ilyen magasról leejtett test éppen a feladatban szereplő v_0 sebességgel érne földet.) Így végül a következő egyenletre jutunk:

$$0 = -\frac{d^2}{4H \cos^2 \alpha} + d \operatorname{tg} \alpha + h.$$



1. ábra

Használjuk fel az $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ trigonometrikus azonosságot! Ekkor az $u = \operatorname{tg} \alpha$ jelöléssel a következőt kapjuk:

$$(1 + u^2)d^2 - 4uHd - 4hH = 0.$$

Ez az egyenlet nemcsak d -re nézve másodfokú, hanem (adott d esetén) az u változóra nézve is:

$$u^2 \cdot d^2 - u \cdot 4dH + (d^2 - 4hH) = 0,$$

amelynek akkor van valós megoldása (azaz adott d távolsághoz akkor találunk megfelelő hajítási szöget), ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz

$$(2dH)^2 - d^2(d^2 - 4hH) \geq 0.$$

Innen

$$d \leq 2\sqrt{H^2 + hH}$$

adódik, és a határeset (az egyenlőség) éppen a legnagyobb hajítási távolságnak felel meg. Felhasználva, hogy $H = v_0^2/(2g)$, a végeredmény így is írható:

$$d_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

II. megoldás. Jelöljük a kezdősebesség vektorát \mathbf{v}_0 -lal, a földet érés sebességét \mathbf{v}_1 -gyel, a teljes mozgáshoz tartozó elmozdulásvektort \mathbf{r} -rel, a nehézségi gyorsulást (mint vektort) pedig \mathbf{g} -vel (2. ábra).

Az elhajított test gyorsulása állandó, ezért

$$(3) \quad \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0}{t} = \mathbf{g},$$

ahol t a mozgás időtartama. A sebesség időben egyenletesen változik, tehát az átlagsebesség megegyezik a kezdeti- és végsebesség számtani közepével, ezért

$$(4) \quad \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0}{2} \cdot t = \mathbf{r}.$$

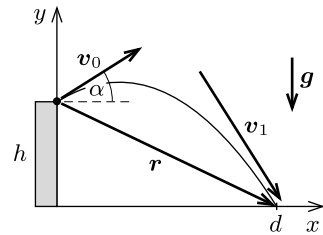
Szorozzuk össze a (3) és (4) vektoregyenleteket skaláris szorzással:

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2} = \mathbf{g}\mathbf{r} = gh,$$

azaz a földet érés sebességének nagysága

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Ez az összefüggés nem váratlan, hiszen az energiamegmaradás törvényéből ezt már korábban is tudtuk. Meglepő eredményt kapunk azonban akkor, ha a (3) és



2. ábra

(4) egyenleteket vektoriális szorzással szorozzuk össze. Felhasználva a vektoriális szorzat $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_0$, továbbá $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_1 = 0$ tulajdonságait azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{g} \times \mathbf{r}.$$

Képezzük a fenti egyenlet mindkét oldalának abszolút értékét:

$$(5) \quad |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_0| = |\mathbf{v}_0| \cdot |\mathbf{v}_1| \sin \gamma = v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} \cdot \sin \gamma = |\mathbf{g} \times \mathbf{r}| = g \cdot d,$$

ahol γ a kezdeti és a becsapódási sebesség iránya által bezárt szög. (Felhasználtuk, hogy \mathbf{g} és \mathbf{r} vektoriális szorzásánál \mathbf{r} -nek csak a vízszintes komponense számít, ennek hossza pedig éppen a keresett vízszintes elmozdulás.)

Az (5) egyenletből leolvasható, hogy d akkor a legnagyobb, amikor a \mathbf{v}_0 és a \mathbf{v}_1 vektorok merőlegesek egymásra, és a legnagyobb hajítási távolság

$$d_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

összhangban az I. megoldás eredményével.

Ha a kezdősebesség vízszintessel bezárt szögét a korábbiaknak megfelelően α -val jelöljük, akkor a sebesség vízszintes komponensének állandóságából, valamint a kezdő- és végsebesség merőlegességéből $v_0 \cos \alpha = v_1 \cos(90^\circ - \alpha) = v_1 \sin \alpha$, azaz

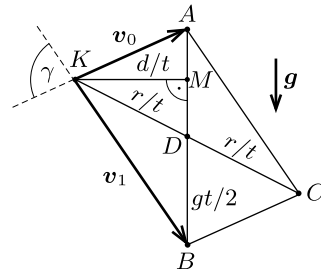
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

adódik.

III. megoldás. Kövessük a II. megoldás gondolatmenetének elejét, írjuk fel a (3) és (4) egyenleteket, majd tekintsük a kezdeti- és a végsebesség vektora által kifeszített $KBCA$ paralelogrammát (3. ábra)!

Számítsuk ki a paralelogramma T területét kétféleképpen. Egyrészt a $T = |\mathbf{v}_0| \cdot |\mathbf{v}_1| \sin \gamma$ összefüggéssel, másrészt a

$$T = AB \cdot KM = gt \cdot \frac{d}{t} = gd$$



3. ábra

módon! Az utóbbi lépésnél felhasználtuk, hogy az AB szakasz függőleges és (3) szerint gt hosszúságú, valamint (4) alapján KD hossza r/t , tehát KD vízszintes vetülete $KM = d/t$. A kétféle számítás eredményét összehasonlítva kapjuk, hogy

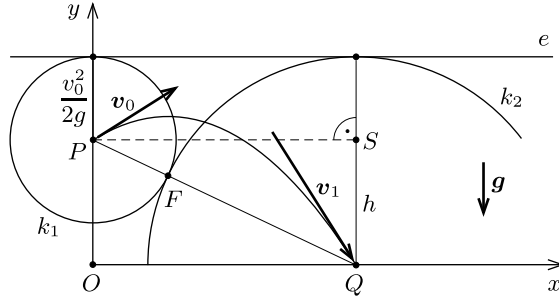
$$d = \frac{1}{g} |\mathbf{v}_0| \cdot |\mathbf{v}_1| \sin \gamma \leq \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} = d_{\max}.$$

Látható az is, hogy az egyenlőség akkor teljesül, amikor a kezdeti- és a végsebesség merőleges egymásra, továbbá az elhajítás α szögére ilyenkor (a KMA és BKA

derékszögű háromszögek hasonlósága miatt) fennáll:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AM}{KM} = \frac{AK}{KB} = \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

IV. megoldás. Jelöljük a test indulási pontját P -vel, a becsapódási pontot Q -val, a torony talppontját (és egyben a 4. ábrán látható koordináta-rendszer origóját) O -val. A PO szakasz éppen a torony magassága, ezért hossza h .



4. ábra

Használjuk fel a 18. feladat eredményét. Eszerint bármely irányba is dobjuk el a testet v_0 kezdősebességgel, az általa befutott parabolapálya F fókuszpontjának rajta kell lennie a P középpontú, $v_0^2/(2g)$ sugarú k_1 körön. Ennek értelmében

$$PF = \frac{v_0^2}{2g}.$$

A parabola e vezéregyenesé vízszintes és ugyanolyan távol helyezkedik el a P ponttól, mint a fókuszpont, tehát szükségképpen érinti a k_1 kört. (A vezéregyenes helyzete tehát rögzített v_0 esetén független a hajítás szögétől.) A Q becsapódási pont rajta van a parabolán, ezért ugyanolyan távolságra helyezkedik el a vezéregyenesestől, mint az F fókuszponttól, azaz

$$FQ = h + \frac{v_0^2}{2g}.$$

A fentiekből az is következik, hogy a Q középpontú, FQ sugarú k_2 kör érinti az e egyenest.

Általában a k_1 és k_2 köröknek két metszéspontja van: ezek két olyan parabolapálya fókuszpontjai, melyek becsapódási pontja egybeesik. Ebben az esetben a PQ távolság kisebb, mint a PF és FQ távolságok összege. Ha azonban a kezdősebesség iránya éppen megfelelő, akkor a metszéspontok egybeesnek, vagyis a két kör (a parabola fókuszpontjában) érinti egymást. Az eldobási és a becsapódási pontok távolsága (és így a hajítás távolsága is) ekkor lesz a legnagyobb, mégpedig

$$PQ = PF + FQ = h + \frac{v_0^2}{g}.$$

A 4. ábrán látható PQS háromszögre felírt Pitagorasz-tétel segítségével ebből a hajítás lehetséges legnagyobb távolsága már kiszámítható:

$$d_{\max} = \sqrt{PQ^2 - h^2} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh},$$

összhangban korábbi eredményeinkkel.

Megjegyzés. Valamennyi eredményünk érvényben marad akkor is, ha $h < 0$ (de természetesen $v_0^2 > 2g|h|$). Ilyenkor a feladat egyik lehetséges megfogalmazása így hangzik:

„Egy adott mélységű gödörből földet lapátolunk ki. Milyen irányban dobjuk el a kiásott földet, ha azt akarjuk elérni, hogy a lehető legnagyobb távolságban érje el a külső talajszintet, és mekkora ez a távolság? (Feltételezhetjük, hogy a föld eldobásának kezdősebessége független a dobás irányától, továbbá az eldobott föld nem ütközik a gödör falába.)”

M. 20. A kő elmozdulása és sebessége az *ábrán* látható koordináta-rendszerben a következő összefüggésekkel írható le:

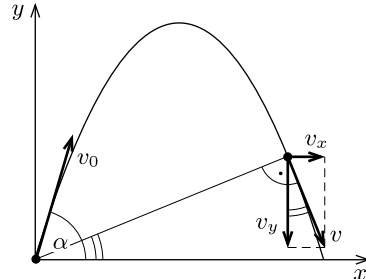
$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha \cdot t, & v_x &= v_0 \cos \alpha, \\ y &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2, & v_y &= v_0 \sin \alpha - gt. \end{aligned}$$

A kő akkor kerül a legtávolabb az origótól, amikor a sebessége éppen merőleges a helyvektorára. Ennek feltétele:

$$\frac{y}{x} = -\frac{v_x}{v_y},$$

amiből az időre egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$t^2 - \frac{3v_0 \sin \alpha}{g} t + \frac{2v_0^2}{g^2} = 0.$$



Ha ennek az egyenletnek a diszkriminánsa negatív, vagyis ha

$$\left(\frac{3v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 < 4 \left(\frac{2v_0^2}{g^2} \right),$$

akkor a kő állandóan távolodni fog tőlünk, sosem lesz „legtávolabb”. A feltétel $\sin \alpha < \sqrt{8/9}$ esetén, azaz $\alpha < 70,5^\circ$ -os szögeknél teljesül.

M. 21. I. megoldás. A vízbura a szórófej helyén állított függőleges egyenesre nézve hengerszimmetrikus, tehát elég egy síkban, sőt egyetlen félsíkban megoldanunk a feladatot. A pontszerűnek tekinthető szórófej legyen egy $x-y$ koordináta-rendszer origójában, ahonnan a vízugarak a ferde hajításnak megfelelően parabolapályákon haladnak (1. ábra). Matematikailag a feladat az, hogy ennek a parabolaseregnek a burkolóját megtaláljuk.

A vízszintessel α szöget bezáró irányban v sebességgel induló hajítás pályaequatione:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

amit az $u = \operatorname{tg} \alpha$ jelöléssel

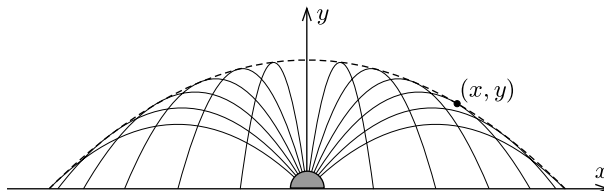
$$\frac{gx^2}{2v^2} \cdot u^2 - x \cdot u + \left(y + \frac{gx^2}{2v^2} \right) = 0$$

alakban is felírhatunk.

Rögzített (x, y) esetén a fenti összefüggés u -ra nézve másodfokú egyenlet, melynek akkor van valós megoldása, ha a diszkrimináns nem negatív:

$$x^2 - 4 \frac{gx^2}{2v^2} \left(y + \frac{gx^2}{2v^2} \right) \geq 0, \quad \text{vagyis} \quad y \leq \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2} x^2.$$

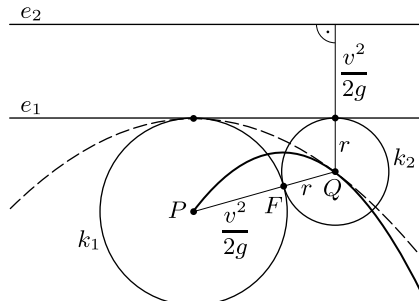
Ez az egyenlőtlenség két tartományra osztja az x - y síkot, melyeket egy parabola választ el egymástól. A parabola (térben forgásparaboloid) alatti pontokba eljuthat a víz, a parabola fölé nem, a határeset pedig éppen a keresett burkológörbének felel meg.



1. ábra

A vízbura alakja tehát forgási paraboloid. A határgörbe egyenletéből könnyen leolvashatjuk, hogy a vízbura magassága $v^2/(2g)$, amint ez a függőleges hajítás alapján várható. A medence vizébe a vízbura kört rajzol, amelynek sugarát az $y = 0$ feltételből olvashatjuk le: v^2/g . Eszerint legalább négyszer olyan nagy átmérőjű medencére van szükség a szökőkút zavartalan működéséhez, mint amilyen magasra emelkedik benne a víz.

II. megoldás. Vizsgálódjunk most is a vízbura szimmetriatengelyén átmenő síkban! A 18. feladat megoldásában láttuk, hogy egy v kezdősebességgel ferdén elhajított test parabolapályájának fókuszpontja az eldobás P pontjától $v^2/(2g)$ távolságra van. A vízburából kiinduló víz sugarak által kirajzolt parabolák fókuszpontjai tehát a P középpontú, $v^2/(2g)$ sugarú k_1 körön helyezkednek el (2. ábra). A parabolák vezéregyenesei vízszintesek, és ugyanolyan távol kell lenniük a P ponttól, mint a fókuszpont, ezért az összes parabola vezéregyenese közös: ez a k_1 kört érintő e_1 egyenes.



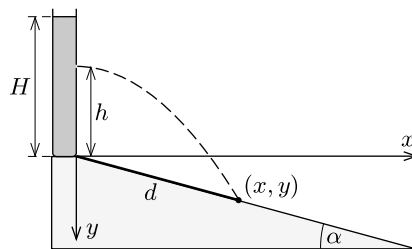
2. ábra

Tekintsünk most egy olyan Q pontot a síkban, amely az e_1 egyenes alatt, attól r távolságra helyezkedik el! Ha van olyan vízszögár, amely eléri a Q pontot, akkor pályája fókuszpontjának rajta kell lennie az e_1 egyenest érintő, Q középpontú, r sugarú k_2 körön. A Q pontot 2, 0 vagy 1 darab vízszögár éri el rendre aszerint, hogy a k_1 és k_2 körök metszik egymást (ekkor Q a vízbura belsejében helyezkedik el), nincs közös pontjuk (ekkor Q a vízbura kívülre esik) vagy érintik egymást (azaz Q rajta van a burkológörbén).

Rajzoljuk fel az e_1 egyenessel párhuzamos, afölött $v^2/(2g)$ távolságra elhelyezkedő e_2 egyenest! Ha a Q pont rajta van a burkológörbén, akkor Q ugyanolyan távolságra helyezkedik el a P ponttól, mint az e_2 egyenestől. A burkológörbe pontjai tehát egy P fókuszpontú, e_2 vezéregyenesű parabolán helyezkednek el: a vízbura alakja térben forgásparaboloid, melynek fókusza éppen a szórófej helyén van.

Megjegyzés. A szökőkút vízburája akkor éri el a medence vízfelszínét, amikor az egymást érintő k_1 és k_2 körök egyforma nagyok. Ebből következik, hogy a vízbura átmérője éppen négyszerese a magasságának, összhangban az I. megoldásban kapott eredménnyel.

M. 22. I. megoldás. Használjuk az 1. ábrán látható koordináta-rendszert, és legyen a vízszögár becsapódási pontjának távolsága a hengeres edény aljától d .



1. ábra

Az edény aljától számított h magasságban v sebességgel kilövellő vízszögár alakját a vízszintes hajítás összefüggéseiből kaphatjuk meg:

$$y(x) = -h + \frac{g}{2v^2}x^2.$$

A víz kezdősebessége a Torricelli-féle kiömlési törvény szerint $v = \sqrt{2g(H-h)}$ nagyságú. Mivel a lejtő hajlásszöge α , a becsapódási pont koordinátái közötti kapcsolat $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Ezeket a kifejezéseket a parabolapálya fenti egyenletébe helyettesítve a következő másodfokú egyenletet kapjuk a becsapódási pont vízszintes koordinátájára:

$$(1) \quad \frac{x^2}{4(H-h)} - x \operatorname{tg} \alpha - h = 0.$$

Ennek az egyenletnek tetszőleges $0 \leq h < H$ esetén pontosan egy pozitív valós megoldása van (x_+), az $x_+(h)$ függvény szélsőértéke azonban csak hosszú és bonyolult számolás után kapható meg. Szerencsére van egyszerűbb eljárás is!

Tekintsük az (1) egyenletet, és határozzuk meg adott becsapódási távolság (vagyis adott x) mellett azt a h értéket (vagy értékeket), amely éppen ehhez az x -hez tartozik. Az (1) egyenlet h -ra nézve is másodfokú:

$$(2) \quad h^2 + h(x \operatorname{tg} \alpha - H) + \left(\frac{x^2}{4} - Hx \operatorname{tg} \alpha \right) = 0,$$

amelynek akkor van (valós) megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív:

$$(x \operatorname{tg} \alpha - H)^2 - x^2 + 4Hx \operatorname{tg} \alpha = [x(\operatorname{tg} \alpha + 1) + H][x(\operatorname{tg} \alpha - 1) + H] \geq 0.$$

Az első szögletes zárójelben álló kifejezés pozitív, ezért a második szögletes zárójelben álló kifejezés sem lehet negatív, így x -re az

$$(3) \quad x \leq \frac{H}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$$

egyenlőtlenség adódik, az egyenlőség pedig éppen a keresett szélsőértéknek felel meg. Ebből a lehetséges legtávolabbi becsapódás lejtőn mért távolsága

$$(4) \quad d = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{H}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

A (3) eredményt a (2) egyenletbe helyettesítve az optimális kiömlési magasság is meghatározható:

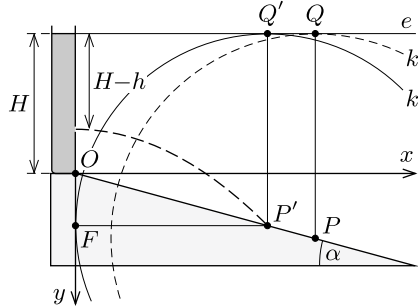
$$(5) \quad h = \frac{1 - 2 \operatorname{tg} \alpha}{2 - 2 \operatorname{tg} \alpha} H.$$

Mivel h nem lehet negatív, ezért eddigi eredményeink csak $\operatorname{tg} \alpha < 1/2$ (azaz $\alpha < 26,6^\circ$) esetén érvényesek. Az $\alpha > 26,6^\circ$ esetben nem a (3) kifejezés, hanem az edény aljától induló vízszögnek megfelelő $x = 4H \operatorname{tg} \alpha$ adja meg a legnagyobb becsapódási távolság vízszintes vetületét. Ekkor tehát (4) helyébe a

$$d = \frac{4H \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha},$$

(5) helyébe pedig a $h = 0$ kifejezés lép.

II. megoldás. A hengeres edény oldalán $v = \sqrt{2g(H-h)}$ sebességgel kilövellő vízszög olyan parabola mentén halad, melynek vezéregyenese vízszintes, F fókuszpontja pedig a 2. ábrán látható koordináta-rendszer y tengelyén található.



2. ábra

A 18. feladat megoldásában láttuk, hogy v kezdősebességű hajítás esetén a pálya fókuszpontja $v^2/(2g)$ távolságra helyezkedik el az indítási ponttól, az eldobás irányától függetlenül. A parabola minden pontja (így az indítási pont is) ugyanakkora távolságra van a fókuszponttól, mint az e vezéregyenestől, ezért utóbbi a kilövellési pont fölött $v^2/(2g) = H - h$ magasságban, vagyis (h értékétől függetlenül) éppen az edényben lévő víz szintjénél található.

Tekintsünk egy tetszőleges P pontot a lejtőn, és jelöljük ennek a vezéregyenésre vett merőleges vetületét Q -val. Ha létezik (legalább egy) olyan lehetséges vízszög, amely áthalad a P ponton, akkor annak fókuszpontja ugyanolyan távol helyezkedik el P -től, mint az e vezéregyenese. Rajzoljunk ezért P köré egy PQ sugarú k kört! Tegyük fel, hogy a kiválasztott P pont olyan, hogy a k körnek nincs közös pontja a koordináta-rendszer y tengelyével. Ez azt jelenti, hogy nincs olyan parabolapálya, amely áthaladna a P ponton: ide nem juthat el a víz.

Ha most a P pontot közelíteni kezdjük az edényhez a lejtő mentén, akkor egy bizonyos P' ponthoz érve a P' középpontú, $P'Q'$ sugarú k' kör már érinteni fogja az y tengelyt. Az érintési pont éppen megadja annak a parabolának az F fókuszpontját, amelyet a legmesszebbre jutó vízszög rajzol ki.

A 2. ábráról leolvasható, hogy

$$P'F = OF + H \quad \text{és} \quad OF = P'F \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

amiből $P'F = H/(1 - \operatorname{tg} \alpha)$, így a legmesszebbre eljutó vízszög a lejtő tetejétől

$$P'O = \frac{P'F}{\cos \alpha} = \frac{H}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

távolságra csapódik be.

A kilövellési pont fele olyan távol van a vezéregyenestől, mint a fókuszpont, ezért fennáll a $H - h = \frac{1}{2}P'F$ összefüggés (itt felhasználtuk, hogy $P'F = P'Q'$). Ebből azt kapjuk, hogy a lyukat az edény aljától számítva

$$h = \frac{1 - 2 \operatorname{tg} \alpha}{2 - 2 \operatorname{tg} \alpha} H$$

magasra kell fúrni.

Meredek lejtő esetén megtörténhet, hogy az OF távolság nagyobbak adódik, mint H . Az $OF = H$ határesetet vizsgálva a lejtő kritikus hajlásszögére

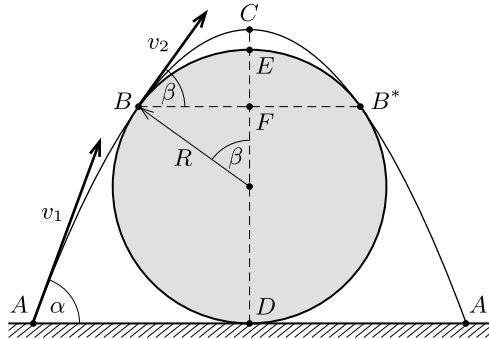
$$\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{OF}{P'F} = \frac{H}{2H}, \quad \text{azaz} \quad \alpha^* \approx 26,6^\circ$$

adódik. $\alpha > \alpha^*$ hajlásszögek esetén a fenti szerkesztéssel kapott optimális kiömlési pont az O pont alá süllyedne, ami nem lehetséges. Ilyenkor az edény aljánál ($h = 0$ magasságban, az O pontban) kell lyukat fúrunk. A k' kör ekkor már nem érinti, hanem az O pontban metszi a koordináta-rendszer y tengelyét, a maximális $P'O$ távolságot pedig az $OF = H$ és $P'O = P'Q'$ feltételekből határozhatjuk meg, az eredmény:

$$P'O = \frac{4H \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha},$$

összhangban az I. megoldással.

M. 23. Logikusnak látszik az a sejtés, hogy egy olyan parabola adja a kívánt megoldást, amely a hengert legfelül, egyetlen pontban érinti. Ezt a sejtést azonban még be kell bizonyítani, mint ahogy az is kiderülhet, hogy nem is igaz. Ezért csak annyit tételezzünk fel, hogy a kívánt pálya (az *ábrán* látható módon) a fatörzs két oldalán, ugyanolyan magasságban érinti a fatörzset.



Az *ábrán* B és B^* jelöli az érintési pontokat. A szöcske az A pontból ugrik el v_1 kezdősebességgel, a vízszintessel α szöget bezáró irányban. Az érintési pontokban a sebesség v_2 , a vízszintessel bezárt szög β . A parabolapálya legfelső (C) pontjában a sebesség vízszintes irányú.

A feladatban v_1 minimális értékét kell meghatározni. Ehhez válasszuk független változónak a β szöget! Ezzel ugyanis v_2 kifejezhető, v_2 segítségével pedig felírható v_1 .

A BC hajítási pályán t -vel jelölve az emelkedés idejét, a függőleges sebességkomponens a B pontban

$$v_2 \cdot \sin \beta = gt,$$

az elmozdulás vízszintes irányú BF vetülete pedig

$$v_2 \cdot \cos \beta \cdot t = R \cdot \sin \beta.$$

E két egyenlet összevetéséből kapjuk:

$$(1) \quad v_2^2 = \frac{gR}{\cos \beta}.$$

Most írjuk fel az energiátételt az A és a B pontok között:

$$(2) \quad \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgR(1 + \cos \beta).$$

Az (1) és (2) egyenletekből megkapjuk v_1 és β kapcsolatát:

$$(3) \quad v_1^2 = 2gR \left(1 + \cos \beta + \frac{1}{2 \cos \beta} \right).$$

Mekkora β szögnél lesz az elrugaszkodás v_1 sebessége a legkisebb? Első sejtésünk szerint $\beta = 0^\circ$ esetben, amikor éppen átcúsúszik a szöcske a fatörzs tetején. Ekkor a (3) egyenletben $\cos \beta + 1/(2 \cos \beta)$ értéke 1,5. A kérdés az, hogy lehet-e ez a kifejezés kisebb, mint 1,5?

Írjuk fel a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget a $\cos \beta$ és $1/(2 \cos \beta)$ mennyiségekre! (Felhasználjuk, hogy $\cos \beta \geq 0$, hiszen $0 \leq \beta \leq 90^\circ$.)

$$\frac{1}{2} \left(\cos \beta + \frac{1}{2 \cos \beta} \right) \geq \sqrt{\cos \beta \frac{1}{2 \cos \beta}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát $\cos \beta + 1/(2 \cos \beta)$ legkisebb értéke $\sqrt{2}$, amit $\beta = 45^\circ$ -nál vesz fel. Azt a meglepő eredményt kaptuk, hogy az optimális pálya a legfelső pontjában nem érinti a fatörzset, hanem fölé emelkedik! A szöcske helyzeti energiája a legmagasabb pontban nagyobb ugyan, mint az „éppen átcúsúszik” esetben, de a mozgási energiája – sőt az összenergiája is – kisebb. A szöcske minimális elrugaszkodási sebességét most már (3) alapján meghatározhatjuk:

$$v_{1,\min} = \sqrt{2gR \left(1 + \sqrt{2} \right)} \approx 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Megjegyzések. 1. Megmutatható, hogy a parabolapálya B pont fölötti része mindenhol a fatörzs felett halad.

2. Bár a feladat nem kérdezte, de kiszámíthatjuk az α elrugaszkodási szög értékét is az optimális ugrás esetén:

$$\alpha = 67,5^\circ = \frac{3\pi}{8},$$

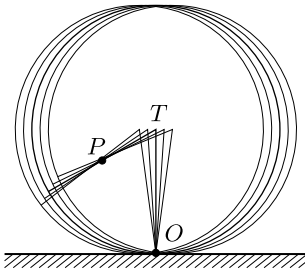
illetve az AD távolságot is (meglehető módon $AD = DF$):

$$AD = R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 17 \text{ cm.}$$

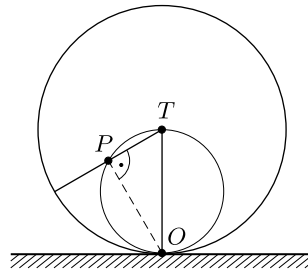
3. További érdekesség, hogy a minimális kezdősebességű ugrás esetén az ábrán jelölt F pont éppen a parabola fókuszpontjával esik egybe (lásd a 18. feladatot).

M. 24. Ha egy vízszintesen repülő nyílveszőről nem túl rövid expozíciós idejű fényképfelvételt készítünk, csak a nyílhegy és a toll képe lesz elmosódott. A nyílvesző többi pontja nem különböztethető meg egymástól: ezek az elmozdulás során egymásba mennek át, emiatt a nyílvesző egésze élesen látszik.

A kerékpár küllőinek pontjai sem különböznek egymástól, így mindazok a küllőpontok, amelyek a kerék elmozdulása és elfordulása során „küllőirányú” sebességgel rendelkeznek, a képen viszonylag élesen látszanak. Az 1. ábrán – amelyen az áttekinthetőség kedvéért csak két küllőt rajzoltunk be – a kerék öt, egymáshoz közeli állapotát látjuk. Megfigyelhetjük, hogy a kerék pillanatnyi forgástengelyének megfelelő O ponton kívül a P pont is viszonylag élesen látszik ezen a „sztroboszkopikus felvételen”. (A P pont nem a küllő egy bizonyos pontjának, hanem különböző – de a fényképfelvételen ugyanarra a helyre kerülő – küllőpontoknak felel meg.)



1. ábra



2. ábra

Mi jellemzi az ilyen tulajdonságú P pontokat? Az, hogy a küllő ottani sebességvektora (ami merőleges OP -re) éppen a küllő TP irányával esik egybe, vagyis az OPT háromszög derékszögű (2. ábra).

Ezek szerint a P pontok az OT egyeneshez tartozó Thalész-körön helyezkednek el.

Megjegyzés. Mivel a kerékpárok küllői csak közelítőleg sugárirányúak, a gyakorlatban mindig egymást keresztező irányúak, így a valóságos esetben a nem-elmosódott pontok felerészben a megoldásban szereplő Thalész-körön belül, felerészben pedig azon kívül találhatóak.

M. 25. Az egyszerűség kedvéért válasszuk a kerék sugarát és a sebességét egységnyiinek (ekkor a szögsebessége is egységnyi lesz). Válasszunk olyan koordináta-rendszert, amelynek x tengelye a vízszintes pályán haladó kerékpár sebességének irányába mutat, az y tengely pedig függőlegesen felfelé irányul.

Amikor a kerék tengelye a $(-1, 1)$ pontban van (tehát amikor a kerék legeleje éppen eléri az $x = 0$ helyen lévő célvonalat), akkor az x tengellyel α szöget bezáró küllő egyenlete:

$$y - 1 = \operatorname{tg} \alpha \cdot (x + 1).$$

(A feladat szövegének megfelelően úgy tekintettük, mintha valamennyi küllő meghosszabbítása a kerék tengelyén haladna át.) Bizonyos t idő elteltével a küllő $-t$ szöggel elfordul, a kerék pedig a pozitív x tengely irányában t szakasznit elmozdul, a küllő egyenlete tehát ekkor

$$y - 1 = \operatorname{tg}(\alpha - t) \cdot (x - t + 1)$$

lesz. A célfotón az y tengelyen fekvő, vagyis az $x = 0$ -nak megfelelő pontok láthatók, méghozzá

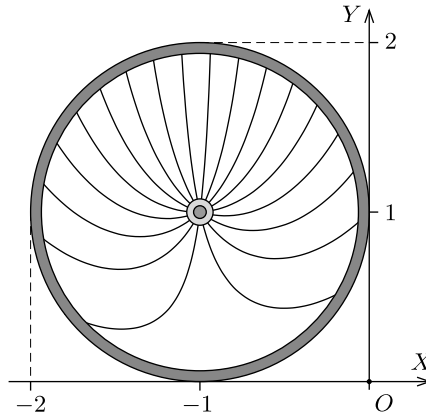
$$Y = y(t)|_{x=0} = 1 + \operatorname{tg}(\alpha - t) \cdot (1 - t)$$

magasságban, vízszintesen pedig (az egységnyi haladási sebességnek megfelelően) az $X = -t$ pontba helyezve. (A célfotón leolvasható „virtuális valóságot” megadó koordinátákat nagybetűkkel jelöltük, ezek nem tévesztendőek össze a kerék és a küllők valódi, kisbetűs koordinátaival.)

Ábrázoljuk az

$$Y(X) = 1 + \operatorname{tg}(\alpha + X) \cdot (X + 1)$$

függvényt különböző (mondjuk 20° -onként növekvő) α értékek mellett! A kerék abroncsa a célfotón is körnek látszik, hiszen egy tiszta elforgatás a kört körbe viszi át, a kerék egészének translációs mozgását pedig a képpontok megfelelő nagyságú „elektronikus eltolása” éppen aránytartó módon veszi figyelembe.

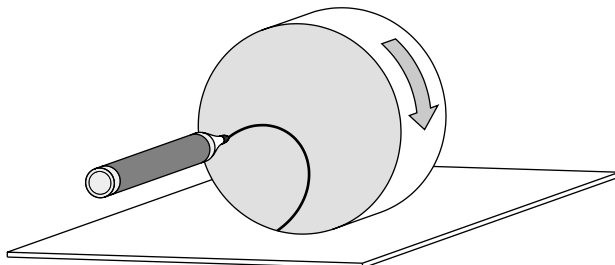


Nem ilyen egyszerű a helyzet a küllőkkel. Azok az ábrán látható módon erősen eltorzítva jelennek meg a képen, alakjuk jól egyezik az elektronikus célfotókon ténylegesen megfigyelhető (a nagyobb kerékpáros versenyek után az interneten is megjelenő és tanulmányozható) küllő-alakokkal.

M. 26. A feladat egyenértékű a következő kérdéssel: Mennyi ideig dughatjuk be a talajhoz képest mozdulatlanul tartott ujjunkat a gördülő kocsikerék küllői közé anélkül, hogy a küllők vagy a kerék abroncsa hozzáérne az ujjunkhoz?

A tisztán gördülő kocsikerék küllőinek mozgása bonyolult, a probléma analitikus tárgyalása nehéz. Ehelyett oldjuk meg a feladatot grafikusán! Ragasszunk

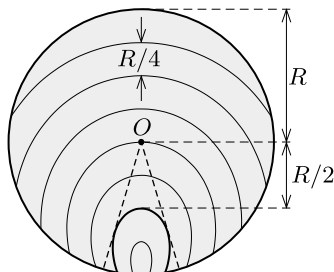
egy henger (például befőttesüveg vagy konzervdoboz) alaplapjára papírkorongot, és miközben a hengert sík asztallapon gördítjük, érintsünk hozzá a papírhoz egy (az asztalhoz képest mozdulatlanul tartott) filctollat az 1. ábrán látható módon.



1. ábra

A filctoll hegyének asztallaptól mért magasságától függően a 2. ábrán látható görbesereg valamelyik görbét kapjuk. (Jelen esetben a filctoll magasságát 0 és $2R$ között változtattuk $R/4$ -es lépésekben, ahol R a gördített henger sugara.)

Ki kell választanunk azt a görbét, amelyik megrajzolásánál a gördített henger a legtöbbet mozdul el, miközben a filctoll hegye két „küllő” (a papírkorongon két $360^\circ/12 = 30^\circ$ -os szöget bezáró sugár) között marad. Csak olyan görbét választhatunk, amelyik nem metszi egyik küllőt sem, illetve ha metszi, akkor csak a metszéspontok közötti szakaszát szabad figyelembe vennünk. A keresett optimális esetet akkor kapjuk, amikor a megrajzolt görbét a 2. ábrán látható módon érinti két „küllő” egyenese. Elegendően nagy korongot gördítve azt találjuk, hogy ez akkor valósul meg, amikor a filctoll hegye kb. $0,5R$ magasságban van az asztal síkja felett.



2. ábra

A nyílvevőt tehát a tengelytől kb. $0,5$ sugárnyi távolságban kell két küllő közé belőni. Ekkor az annyi ideig tartózkodhat a küllők között, ameddig a kerék tengelye hozzávetőlegesen $1,7$ sugárnyit mozdul el. Az ehhez szükséges idő

$$t = \frac{1,7 \cdot 0,5 \text{ m}}{15 \text{ m/s}} \approx 0,057 \text{ s},$$

tehát a nyílvevő sebessége legalább

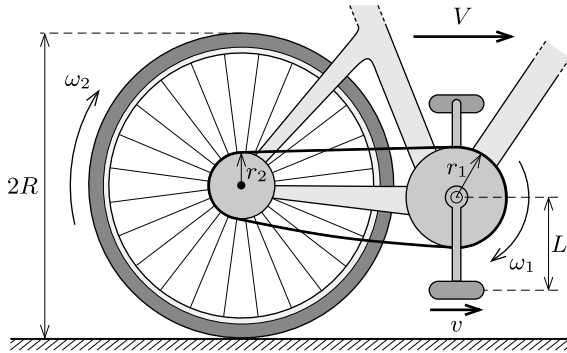
$$v = \frac{0,2 \text{ m}}{0,057 \text{ s}} \approx 3,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Megjegyzések. 1. Pontosabb eredményt differenciálszámítás segítségével, illetve egy trigonometrikus egyenlet numerikus megoldásával kaphatunk. Így az adódik, hogy a kerék tengelyétől $0,524$ sugárnyi távolságra érdemes belőni a nyílvevőt. Nem is ad olyan rossz becslést a grafikus megoldás!

2. A kiszámított $t = 57$ ms idő alatt egy szabadon eső test függőleges elmozdulása legalább $\Delta h = (1/2)g(t/2)^2 \approx 4$ mm, ez a nyílvevő hosszához, illetve a kerék sugarához viszonyítva valóban elhanyagolható.

M. 27. a) A külső erő munkája mindenképpen pozitív, barátunk kezének (és így az alsó pedálnak is) a talajhoz képest tehát biztosan *hátrafelé* kell elmozdulnia.

b) Jelöljük az első fogaskerék sugarát r_1 -gyel, a hátsót r_2 -vel, a hátsó kerék sugarát R -rel, a pedál hajtókarjának hosszát pedig L -lél az *ábrán* látható módon. A kerékpár a rá ható erők eredőjének (a pedálra ható, hátrafelé mutató erő és a súrlódási erő vektori összegének) irányába indul el. Ez az irány kitalálható az erők vizsgálata nélkül, pusztán kinematikai megfontolások alapján is.



Keressünk kapcsolatot a kerékpár V haladási sebessége és a legalsó helyzetben lévő pedál v sebessége között! Tegyük fel, hogy az első fogaskerék az ábrán jelölt forgásirányban ω_1 szögsebességgel forog. Ekkor a hátsó fogaskerék szögsebessége ugyanilyen irányú, nagysága pedig (a lánc nyújthatatlansága miatt)

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1.$$

Az itt szereplő $r_1/r_2 = N$ hányadost szokás áttételnek nevezni. A hátsó fogaskerék együtt forog a bicikli hátsó kerekével, ezért a kerékpár előrefelé halad $V = R\omega_2$ sebességgel. Az első fogaskerék tengelye a talajhoz képest ugyanekkora sebességgel halad előre, miközben ω_1 szögsebességgel forog is, így a hajtókar függőleges helyzetében az alsó pedál talajhoz viszonyított sebessége

$$v = V - L\omega_1.$$

Az eddigiek felhasználásával a

$$v = V \left(1 - \frac{L}{NR} \right)$$

összefüggésre jutunk. Ez az egyenlet a feladat megoldásának kulcsa.

Ha a zárójelben álló kifejezés pozitív, akkor a kerékpár ugyanabba az irányba indul el, mint az alsó pedál, ellenkező esetben pedig éppen ellentétes irányba. Váltó nélküli kerékpároknál (amilyen az ábrán is látható) $N > 1$, a hajtókar pedig rövidebb a kerék sugaránál, így a zárójeles mennyiség pozitív: a bicikli tehát az alsó pedál mozgásirányával megegyezően, *hátrafelé indul el* (az ábrán látható nyilakkal éppen ellentétesen).

Egyes „többsebességű” bicikliknél (pl. speciális hegyi kerékpároknál) olyan kis áttétel is lehetséges, hogy a fenti zárójelben negatív szám jelenik meg, ilyen esetben a kerékpár a kísérletben előrefelé mozdul el.

Megjegyzés. Előfordulhat, hogy $N = L/R$, ekkor hiába húzzuk hátrafelé a legalsó helyzetében lévő pedált, a kerékpár nem mozdul meg. A húzóerőt növelve a hátsó keréknél ható tapadási súrlódási erő is növekszik, egészen addig, míg a kerék meg nem csúszik. Ez szemléletesen a következőképp magyarázható: a pedál az N áttétel és az R/L aránytól függően hurkolt cikloist, nyújtott cikloist, vagy éppen közönséges (csúcsos) cikloist ír le. A legutóbbi esetben a ciklois érintője a legalsó pontban függőleges, ilyen kényszerpályán vízszintes erő hatására a pedál nem tud elindulni.



Tömegpontok dinamikája

M. 28. A kis micsoda átlagsebessége $0,5 \text{ m/s}$. Mivel a mozgás időben egyenletesen lassuló, $v_{\text{átlag}} = \frac{1}{2}(v_{\text{kezdeti}} + v_{\text{vég}})$, így a kezdeti sebesség legfeljebb 1 m/s lehetett (hiszen $v_{\text{vég}} \geq 0$). A test sebessége ezek szerint 2 másodperc alatt legfeljebb 1 m/s -ot csökkent, gyorsulásának abszolút értéke tehát legfeljebb $0,5 \text{ m/s}^2$, a nehézségi gyorsulás $\frac{1}{20}$ része. A kis micsoda és az asztallap között tehát legfeljebb $0,05$ lehetne a csúszási súrlódási együttható. Ez sokkal kisebb, mint a hétköznapi anyagok közti súrlódási tényező, tehát nagyon valószínű, hogy a kis micsoda nem csúszik, hanem *gördül*.

M. 29. I. megoldás. Az m tömegű gépkocsi a gyorsulása során egy kicsit „visszalöki” maga alatt a Földet, megváltoztatja annak tengely körüli forgási szögsebességét. Vegyük figyelembe ezt a mérhetetlenül kicsiny, de a paradoxon feloldása szempontjából mégis jelentős hatást!

Az egyszerűség kedvéért gondoljuk azt, hogy az autó egy M tömegű ($M \gg m$) testen helyezkedik el, és ez a test a gépkocsi haladásának irányában szabadon el tud mozdulni. (A tényleges helyzetben a Föld szabadon el tud *fordulni* a gépkocsi alatt.)

Péter (az „álló” megfigyelő) azt mondja: ha a gépkocsi v_0 , majd $2v_0$ sebességre gyorsul, az M tömegű test $u_1 = -mv_0/M$, majd $u_2 = -2mv_0/M$ sebességre tesz szert, miközben a mozgási energiája a kezdeti nulla értékről

$$\frac{1}{2}Mu_1^2 = \frac{m}{M} \left(\frac{1}{2}mv_0^2 \right), \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{2}Mu_2^2 = \frac{m}{M} \left(\frac{1}{2}m(2v_0)^2 \right)$$

értékekre nő. Mivel $m/M \ll 1$, a nagyobb tömegű test mozgási energiájáról és annak változásáról nyugodtan elfeledkezhetünk, a fogyasztások aránya tehát $1 : 3$.

Más a helyzet Pál (a „mozgó” megfigyelő) szemszögéből. Ő azt látja, hogy az autó sebessége v_0 -ról $2v_0$ -ra, majd $3v_0$ -ra nő, így az M tömegű test sebessége – a lendületmegmaradás törvénye miatt – a kezdeti v_0 -ról

$$\left(1 - \frac{m}{M}\right)v_0, \quad \text{illetve} \quad \left(1 - \frac{2m}{M}\right)v_0$$

értékre változik. A teljes rendszer (autó + Föld) mozgási energiájának megváltozása tehát a mozgás első szakaszában

$$\Delta E_1 = \underbrace{\frac{1}{2}m((2v_0)^2 - v_0^2)}_{=\frac{3}{2}mv_0^2} + \underbrace{\frac{1}{2}M\left(\left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 v_0^2 - v_0^2\right)}_{\approx -mv_0^2} \approx \frac{1}{2}mv_0^2,$$

a mozgás második szakaszában pedig

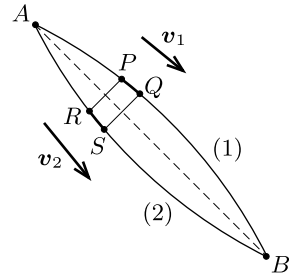
$$\Delta E_2 = \underbrace{\frac{1}{2}m((3v_0)^2 - (2v_0)^2)}_{=\frac{5}{2}mv_0^2} + \frac{1}{2}M \underbrace{\left(\left(1 - \frac{2m}{M}\right)^2 v_0^2 - \left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 v_0^2 \right)}_{\approx -mv_0^2} \approx \frac{3}{2}mv_0^2.$$

Látható, hogy az energiaváltozások (benzinfogyasztások) aránya mindkét megfigyelő rendszerében 1 : 3.

II. megoldás. A súrlódási erő hátrafelé löki a talajt, illetve a kerék közvetítésével előrefelé gyorsítja a kocsiszekrényt. A talajhoz rögzített (Péter-féle) koordináta-rendszerben csak a kocsiszekrényen történik munkavégzés, a talajon nem. A vonattal együttmozgó (Pál-féle) rendszerben viszont a talajra ható tapadási súrlódási erő is végez munkát. Ebből a vonatkoztatási rendszerből nézve az autó elmozdulása az egyes gyorsítási szakaszok t időtartama alatt $3v_0t/2$, illetve $5v_0t/2$, így az állandó nagyságú súrlódási erő által a gépkocsin végzett munka a mozgás első részében 3 egység, a másodikban pedig 5 egység. A súrlódási erő a talajon a mozgás mindkét szakaszában -2 egység munkát végez, mert a talaj elmozdulása t idő alatt v_0t , a negatív előjel pedig annak a következménye, hogy a talajra ható erő ellentétes irányú a talaj sebességével. A teljes munkavégzés a gyorsítás első szakaszában $3 - 2 = 1$ egység, a második szakaszban $5 - 2 = 3$ egység, arányuk tehát a vonatból nézve is 1 : 3.

M. 30. a) Az A és B pont között mindkét pályán haladva ugyanannyit változik a gravitációs helyzeti energia, tehát – ha nincs súrlódás – a lecsúszó test végsebességének is ugyanakkorának kell lennie a két esetben.

A mozgási idők összehasonlítása érdekében tekintsünk két kis szakaszt, PQ -t és RS -t, melyek egymásnak az AB egyenesre vett tükörképei, tehát a *hosszuk* ugyanakkora (1. ábra). Mivel RS „alacsonyabban” fekszik, mint PQ , ezért a kis test v_2 sebessége a (2)-es pálya ezen szakaszán nagyobb, mint az (1)-es pálya PQ ívén mérhető v_1 . Tehát a test *rövidebb idő* alatt futja be az RS ívet, mint PQ -t. Ez mindegyik kis szakaszra, és így az egész mozgásra is igaz, ezért a (2)-es pályán ér le hamarabb a kis test.

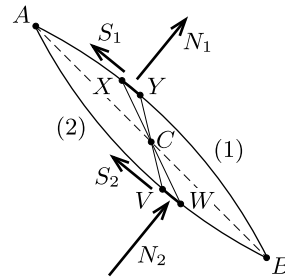


1. ábra

Tekintsünk most is két kis pályaelemet, XY -t és VW -t, melyek az AB szakasz C felezőpontjára nézve középpontosan tükrös helyzetűek, tehát a *hosszuk* és a *meredekségük* ugyanakkora (2. ábra).

b) Számottevő súrlódás esetén a végsebességeket a munkatétel segítségével hasonlíthatjuk össze. A gravitációs erő munkája mindkét pályán ugyanakkora, a súrlódási munka viszont különböző lehet.

A lecsúszó test centripetális gyorsulását a nyomóerőnek és a nehézségi erő normálirányú (sebességre merőleges) komponensének az eredője biztosítja. A két kis pályaelem egyforma meredeksége miatt a nehézségi erő normálirányú összetevője ugyanakkora a két helyzetben. A centripetális gyorsulás mindkét pályán a körívek középpontja felé mutat: az (1)-es pályán ferdén „lefelé”, a (2)-esen pedig „felfelé” irányul. Emiatt az XY szakaszon ható N_1 nyomóerő kisebb, mint a nehézségi erő normálirányú komponense, a VW szakaszon ható N_2 pedig nagyobb annál. Eddigi gondolatmenetünk a kis pályaszakaszok megválasztásától függetlenül érvényes, ezért a pálya minden – középpontosan tükrösen elhelyezkedő – pontjában $N_1 < N_2$, és ugyanez mondható el a súrlódási erők nagyságáról is. A súrlódás munkája tehát a (2)-es pályán nagyobb, ezért az itt haladó testnek lesz kisebb a végsebessége.

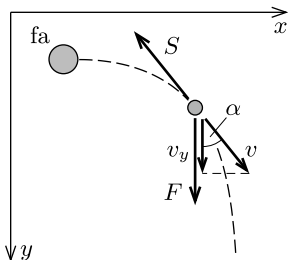


2. ábra

A fenti megfontolás érvényét veszti, ha a kis test nem tudja befutni a teljes (2)-es útszakaszt, vagy ha el sem indul az (1)-es pályán.

M. 31. Ha a fiúk már kis lökés hatására is egyenletes sebességgel csúsznának lefelé, akkor a rájuk ható nehézségi erő lejtőirányú F komponensének és az S súrlódási erőnek egyenlő nagyságúnak kell lennie: $F = S$.

A súrlódási erő – amelynek iránya minden pillanatban a sebességgel ellentétes – csökkenti a sebesség nagyságát, az F erő pedig a sebesség lejtő irányú komponensét igyekszik növelni. Természetesen ez a két hatás egyszerre jelentkezik, és végül egy meglehetősen bonyolult (görbevonalú, változó gyorsulású) mozgás alakul ki. Ennek ellenére a végsebességet egyszerűen, a mozgás részletes leírása nélkül is meghatározhatjuk.



Vegyük fel a lejtő síkjában az ábrán látható koordináta-rendszert, és jelöljük a csúszó fiú pillanatnyi sebességének nagyságát v -vel, y irányú komponensét pedig v_y -nal. Számítsuk ki, mennyit változik ez a két mennyiség kicsiny Δt idő alatt. Newton II. törvénye szerint:

$$m\Delta v = (-S + F \cos \alpha)\Delta t,$$

$$m\Delta v_y = (F - S \cos \alpha)\Delta t.$$

Adjuk össze ezt a két egyenletet, és használjuk ki, hogy $F = S$.

$$\Delta v + \Delta v_y = \Delta(v + v_y) = 0,$$

azaz

$$v + v_y = \text{állandó}.$$

Ez az állandó a kezdeti feltétel miatt $v_0 = 1$ m/s nagyságú. A lefelé csúszó fiú v_∞ végsebességének lejtő irányúnak kell lennie, nagyságát pedig a fenti „megmaradási tétel” egyértelműen meghatározza:

$$v_\infty = \frac{v_0}{2} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

M. 32. A kerékpárra többféle erő is hat, de ezeknek csak a mozgás irányába eső komponensét kell figyelembe vennünk. A nehézségi erőnél ez a komponens $\pm mg \sin \alpha$ (ahol α a lejtő hajlásszöge, az előjel pedig a haladás irányától függ). A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányosnak vehető, mert a kerékpáros körül (egységnyi hosszúságú úton) megkavart levegő mozgási energiájával arányos. (A mozgásba hozott levegő sebességének átlagos nagysága kb. a kerékpáros sebességével egyenlő.)

A kerékpáros lába által a pedálokra kifejtett erő forgatónyomatékokat eredményez, ami – az áttételeken keresztül – a gumibroncs által a talajra kifejtett, azt hátrafelé toló erővé számolható át. Ennek az erőnek az ellenereje a talaj által a kerékre kifejtett súrlódási erő.

Jelöljük a felfelé, lefelé és vízszintesen haladó kerékpáros csúcssebességét rendre v_1 -gyel, v_2 -vel és v_3 -mal. A kerékpár mindhárom esetben egyenletesen halad, gyorsulása tehát nulla. A lejtőn felfelé haladó kerékpárosra felírható mozgásegyenlet:

$$(1) \quad F_1 - mg \sin \alpha - kv_1^2 = 0,$$

ahol F_1 a kerékpáros lábának „erőkifejtésével” arányos, a kerékpárt menetirányban előre felé toló súrlódási erő, k pedig a közegellenállási erő képletében szereplő állandók szorzata. Hasonló egyenleteket írhatunk fel a lejtőn lefelé mozgó, illetve a vízszintes úton haladó kerékpárra is:

$$(2) \quad F_2 + mg \sin \alpha - kv_2^2 = 0,$$

$$(3) \quad F_3 - kv_3^2 = 0.$$

a) Ha a kerékpáros „maximális erőbedobását” úgy értelmezzük, hogy az általa kifejtett erő mindhárom esetben ugyanakkora, azaz

$$(4) \quad F_1 = F_2 = F_3,$$

akkor az (1) és (2) egyenleteket összeadva kapjuk:

$$F_1 + F_2 - k(v_1^2 + v_2^2) = 0.$$

Vessük össze az eredményt (3)-mal és (4)-gyel:

$$2kv_3^2 - k(v_1^2 + v_2^2) = 0,$$

ahonnan

$$v_3 = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{12^2 + 36^2}{2}} \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 27 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Megjegyzés. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha feltételezzük, hogy az eddig felsorolt erőhatásokon kívül még a gördülő ellenállás és a kerékpár csapágynak és fogaskerekeinek súrlódása is számottevő. Ilyenkor az (1) mozgásegyenlet így módosul:

$$F_1 - mg \sin \alpha - kv_1^2 - k^* - \mu mg \cos \alpha = 0,$$

és hasonlóan a másik két egyenlet. (k^* a csapágsúrlódásra, μ pedig a gördülő ellenállásra jellemző állandó.) A mozgásegyenletekből most

$$(5) \quad v_3^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} - \frac{mg}{k} \cdot \mu(1 - \cos \alpha)$$

adódik. Tekintettel arra, hogy a kerékpározásra alkalmas utak meredeksége nem túl nagy (azaz $\cos \alpha \approx 1$), továbbá a gördülő ellenállás együtthatója általában igen kicsi, (5) jobb oldalának utolsó tagja elhanyagolható, és ebben a közelítésben az eredmény valóban megegyezik a fentebb számítottal.

b) Ha a feladat (laza megfogalmazású) szövegében szereplő „teljes erőbedobás” kifejezést a kerékpáros maximális *teljesítményeként* értelmezzük, akkor (4) helyett a teljesítmények egyenlőségét írhatjuk fel:

$$F_1 \cdot v_1 = F_2 \cdot v_2 = F_3 \cdot v_3.$$

Az első egyenlőségből (1) és (2) felhasználásával

$$(6) \quad mg \sin \alpha = k \frac{v_2^3 - v_1^3}{v_1 + v_2}$$

adódik. Az $F_1 \cdot v_1 = F_3 \cdot v_3$ egyenlet, valamint (1) és (3) miatt fennáll az

$$(7) \quad mg \sin \alpha = k \frac{v_3^3 - v_1^3}{v_1}$$

összefüggés is. (6) és (7) összevetéséből kapjuk a keresett sebességet:

$$v_3 = \sqrt[3]{\frac{v_1 v_2 (v_1^2 + v_2^2)}{v_1 + v_2}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 36 \cdot (12^2 + 36^2)}{48}} \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 23,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Megjegyzések. 1. Figyelemre méltó, hogy a kerékpáros, mint a mozgó rendszer része, csak *belső erőt* tud kifejteni, ami – a (*külső*) súrlódási erő nélkül – nem tudná mozgásban tartani a járművet. Ugyanakkor a súrlódási erő *nem* végez munkát, hiszen a csúszásmentesen gördülő kerék legalsó pontja a talajhoz képest nem mozdul el; a munkavégzés a belső erők támadáspontjánál, a pedáloknál történik.

2. A sebességváltós kerékpároknál a szükséges „pedálerő” megfelelő áttételekkel jelentősen csökkenthető, vagy akár növelhető is. Ilyen kerékpároknál az *a*) értelmezés nem reális.

3. A sík terepen elérhető sebesség v_1 és v_2 közötti érték, azoknak – valamilyen értelemben vett – középértéke. Az a értelmezés esetén ez a középérték (Q) a négyzetes közép, míg az egyforma teljesítményekre vonatkozó középérték $\sqrt[3]{G^2 \cdot Q^2/A}$, ahol A a számtani-, G pedig a mértani közeget jelöli.

M. 33. Az α hajlásszögű lejtőn guruló, m össztömegű kerékpáros mozgásegyenlete:

$$ma = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - kv^2,$$

ahonnan (az $a = 0$ feltételből) meghatározhatjuk az állandósult sebességet az „elegendően hosszú” lejtőn:

$$(1) \quad v_{\max} = C \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

(A C tényező értéke Andi és Bandi esetében ugyanakkora.) Mivel az m/k arány Bandinál $\frac{110}{60} \cdot \frac{1}{1,5} = 1,22$ -szer nagyobb, mint Andinál, az ő csúcssebessége nagyobb.

A lejtős szakasz után $v_0 = v_{\max} \sim \sqrt{m/k}$ kezdősebességgel induló kerékpárost a vízszintes talajon a csapágysúrlódás és a közegellenállás fékezi. Célzerű az idő szerinti változás helyett a megtett x út függvényében vizsgálni a sebesség csökkenését. A munkatétel szerint mindkét kerékpárosra érvényes, hogy

$$\frac{\Delta(mv^2/2)}{\Delta x} = -\mu mg - kv^2.$$

Ez az egyenlet határozza meg, hogy mekkora úton csökken a kezdeti v_0 sebesség nullára. Érdekes áttérni az $f(x) = v^2/v_0^2$ dimenziótlán változóra, ami a megállás során 1-ről 0-ra csökken:

$$(2) \quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{k}{m} [2f(x) + \text{állandó}].$$

(Ennél a lépésnél figyelembe vettük a v_0 -t megadó (1) kifejezést.)

Bandi esetében a k/m arány kisebb, mint Andinál, tehát (2) értelmében nála ugyanakkora Δx útszakaszon és ugyanakkora $f(x)$ értéknél *kevésbé csökken* a sebességnégyzet-arány, mint Andinál. Ezek szerint tehát Bandi *hosszabb úton* gurul a megállásáig, mint Andi, így ő nyeri a gurulásos versenyt.

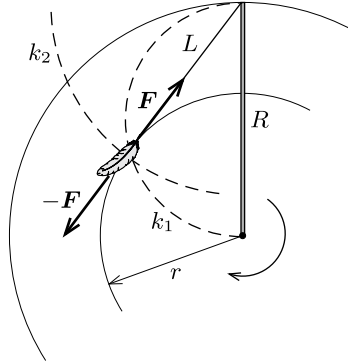
M. 34. Ha a tollpihe valamilyen állandósult pályán mozog, akkor ez csak kör lehet, hiszen ilyenkor a tollpihe az ostornyéllal együttforgó koordináta-rendszerből szemlélve *áll*. A tollpihe elhanyagolhatóan kicsi tömege miatt a Newton-egyenletben a nehézségi erő és ma helyébe nullát írhatunk. A mozgásegyenlet tehát erre az állításra egyszerűsödik: a cérnaszálban ható erő és a közegellenállási erő eredője *nulla*.

Legyen az ostornyél hossza R , a cérnaszál hossza pedig L . A közegellenállási erő a sebesség irányával ellentétesen hat, tehát a cérnaszál egyenese a tollpihe pályakörének érintője. A pályakör sugarát az *ábrán* látható (R átmérőjű) k_1 Thalész-kör

és az ostornyel mozgásban levő vége körüli L sugarú k_2 kör metszéspontja adja meg; nagysága

$$r = \sqrt{R^2 - L^2}.$$

Ha a cérna hosszabb, mint a pálca, akkor a tollpíhének *nincs* stabil (állandósult) pályája.



M. 35. A nehézségi erő és a közegellenállási erő hatására mozgó m tömegű gyöngy mozgásegyenlete:

$$m \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = m\mathbf{g} - k\mathbf{v}(t).$$

A közegellenállás erőtvényében szereplő k állandót a végsebesség nagysága rögzíti:

$$0 = m\mathbf{g} - k\mathbf{v}_1, \quad \text{azaz} \quad k = \frac{m\mathbf{g}}{v_1}.$$

A mozgásegyenlet tehát így alakítható:

$$(1) \quad \frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \mathbf{g} - \frac{g}{v_1} \mathbf{v}(t).$$

Érdeemes a gyöngy sebessége helyett annak és a végsebességnek az *eltérését*, vagyis az

$$(2) \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_1$$

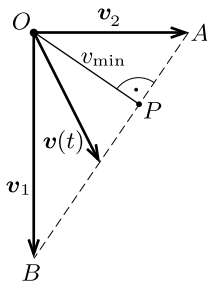
vektort vizsgálunk. Ennek időbeli változását (1) értelmében a

$$\frac{\Delta \mathbf{u}(t)}{\Delta t} = -\frac{g}{v_1} \cdot \mathbf{u}(t) = -\text{állandó} \cdot \mathbf{u}(t).$$

egyenlet írja le. Eszerint az $\mathbf{u}(t)$ vektor a kezdeti $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ értékről fokozatosan (de nem egyenletesen) csökkenve nullává válik, miközben az iránya nem változik:

$$(3) \quad \mathbf{u}(t) = \lambda(t) (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1),$$

ahol $\lambda(0) = 1$, és elegendően hosszú idő múlva $\lambda(t)$ nullára csökken. (Belátható, hogy $\lambda(t)$ – a radioaktív bomlások időbeli lefolyásához hasonlóan – exponenciálisan csökkenő függvény.)



1. ábra

a) Visszatérve az eredeti kérdéshez, (2) és (3) alapján megállapíthatjuk, hogy a gyöngy sebességét a

$$\mathbf{v}(t) = [1 - \lambda(t)] \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda(t) \cdot \mathbf{v}_2$$

összefüggés adja meg. Geometriailag ez annyit jelent, hogy a gyöngy (közös O pontból felmért) sebességvektorainak végpontja egy olyan egyenes szakasz mentén mozog, melynek egyik végpontja a vízszintes irányú kezdősebesség \mathbf{v}_2 vektorának A végpontja, a másik pedig a végsebesség \mathbf{v}_1 vektorának B végpontja (1. ábra). Az ábráról leolvasható, hogy a legkisebb sebességet úgy kapjuk, ha az O pontból merőlegest bocsátunk az AB szakaszra:

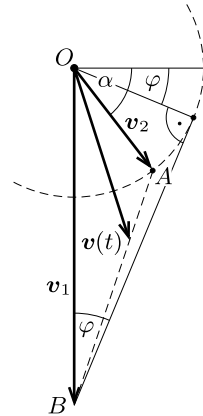
$$v_{\min} = OP = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

(Az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy az OPB és az AOB derékszögű háromszögek hasonlóak.)

b) Ha a gyöngyszem kezdősebessége nem vízszintes, hanem azzal valamekkora α szöget zár be, akkor az A pont egy O középpontú, v_2 sugarú körvonal valamelyik pontja lesz. A 2. ábrán látható, hogy a $v_2 < v_1$ esetben a gyöngy sebességének nagysága folyamatosan növekszik, amennyiben

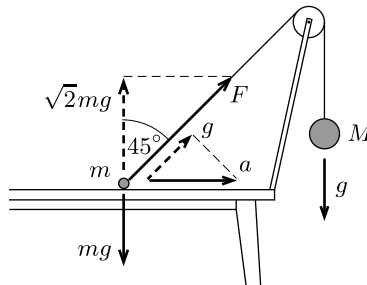
$$\alpha > \varphi = \arcsin \frac{v_2}{v_1}.$$

Megjegyzés. $v_2 > v_1$ esetben a gyöngy sebessége valamikor biztosan csökken. Belátható, hogy $\alpha < \arcsin(v_1/v_2)$ esetén a sebesség kezdetben csökken, majd egy idő után növekszik, míg az ellenkező esetben $v(t)$ mindvégig csökken.



2. ábra

M. 36. Tételezzük fel, hogy a kis test az indítást követő pillanatban nem válik el az asztallaptól! Ha feltevésünk helyes, az m tömegű test gyorsulása az indulás pillanatában vízszintes, jelöljük ezt a -val.

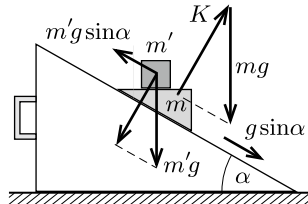


Mivel M sokkal nagyobb, mint m , a nagy test gyakorlatilag szabadon, g gyorsulással esik függőlegesen lefelé. Emiatt a kis test és a csiga közötti fonaldarab hossza is g gyorsulással csökken, ami éppen egyenlő a kis test gyorsulásának fonálirányú összetevőjével:

$$a \cos 45^\circ = g,$$

ebből $a = \sqrt{2}g$ adódik. Ezt a vízszintes irányú gyorsulást a fonál által kifejtett F erő vízszintes komponense hozza létre, ami ezek szerint $\sqrt{2}mg$ nagyságú. A fonál 45° -os helyzete miatt ugyanekkor a fonálerő függőlegesen felfelé mutató komponense is. Az m tömegű testet tehát függőleges irányban $\sqrt{2}mg$ erő húzza felfelé, mg nagyságú erő lefelé, az asztal pedig csak felfelé mutató erőt tud kifejteni, így a kis test gyorsulásának függőleges komponense nem lehet nulla! Ez azonban ellentmondásban áll kezdeti feltevésünkkel, tehát a kis testnek már az indítást követően *el kell válnia* az asztallaptól!

M. 37. Az ékre a gravitációs erő és a lejtőre merőleges (esetleg időben változó nagyságú) K erő hat. Ezen két erő hatására az ék (inerciarendszerbeli) gyorsulásának lejtő irányú komponense $g \sin \alpha$. Az ékhez rögzített (tehát gyorsuló) koordináta-rendszerben a Newton-féle mozgásegyenletek csak úgy maradnak érvényben, ha minden testnél a ténylegesen ható erőkhöz hozzáadunk még egy $-m'\mathbf{a}$ „tehetetlenségi erőt”, ahol m' a vizsgált testnek (például a folyadék valamely kicsiny részének) a tömege, \mathbf{a} pedig az ék gyorsulása.



Az m' tömegű testre ható gravitációs erő és a tehetetlenségi erő eredője a lejtőre merőleges, hiszen a lejtő irányú komponensek éppen kiejtik egymást. Az éken levő testek (a pohár és az abban levő víz) tehát „úgy érzik”, mintha egy megváltozott, a lejtőre merőleges irányú gravitációs mezőben lennének, a víz felszíne tehát erre az irányra merőlegesen, a lejtő síkjával párhuzamosan fog beállni.

Ez az állítás független attól, hogy a lejtő rögzített-e, vagy szabadon mozoghat, esetleg – külső erők hatására – *ide-oda mozog*. Mindaddig, amíg a lejtő és az ék közötti súrlódás elhanyagolható, továbbá biztosak lehetünk benne, hogy az ék nem emelkedik fel a lejtőről, a vízfelszín alakja nem térhet el a lejtővel párhuzamos síktól.

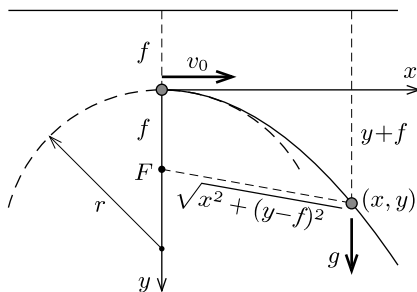
Külön megfontolást érdemel az $m \gg M$ határeset. Ekkor az ék „kilöki” maga alól a lejtőt, és majdnem szabadon esik. Az éken levő testeknek (így a pohár víznek is) majdnem teljesen „elvész a súlya”, de még az a kicsiny erő is, ami a vizet a pohárban tartja, a vízfelszín a lejtő síkjával párhuzamosra állítja be.

Megjegyzés. Ha nyugalmi helyzetből indítjuk a rendszert, akkor a víz kilöttyenhet a pohárból; a lejtővel párhuzamos vízfelszín csak hosszú idő után, meglehetősen hosszú lejtőn alakulna ki. Emiatt a szokásos körülmények között kísérletileg nem tudjuk megvizsgálni ezt az érdekes jelenséget.

M. 38. a) Egy f fókusz-távolságú parabola egyenlete az 1. ábrán látható koordináta-rendszerben:

$$x^2 = 4fy,$$

amint az a parabolát definiáló $(y + f)^2 = (y - f)^2 + x^2$ egyenletből közvetlenül adódik.



1. ábra

Mekkora sebességgel kell vízszintesen elhajítanunk egy kis testet, hogy annak pályája éppen a megadott parabola legyen? A hajtás kinematikai képletei szerint

$$x = v_0 t \quad \text{és} \quad y = \frac{g}{2} t^2,$$

ahonnan a pálya egyenlete

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 = \frac{1}{4f} x^2, \quad \text{ha} \quad v_0^2 = 2gf.$$

A pálya kezdőpontjában (a parabola csúcspontjában) a szabadon eső test sebességre merőleges (centripetális) gyorsulása éppen g , sebessége v_0 , innen a görbületi sugárra

$$r = \frac{v_0^2}{g} = 2f$$

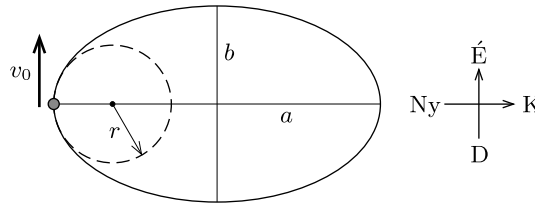
adódik.

Megjegyzés. Ugyanezt az eredményt optikai megfontolással is megkaphatjuk, hiszen jól ismert, hogy egy r sugarú gömbtükör (optikai) fókusz-távolsága $f = r/2$, és ez megegyezik azon forgásparaboloid vezérgörbéjének (matematikai értelemben vett) fókusz-távolságával, amely felületét a szóban forgó gömbtükör a legjobban közelíti.

b) Tekintsünk egy m tömegű testet, amely egy ℓ hosszúságú fonál végén – kúpíngaként – térbeli mozgást végezhet. Kicsiny kezdősebesség esetén a test az

egyensúlyi helyzete körül kis amplitúdójú harmonikus rezgéseket végez, a lengések körfrekvenciája (a kitérítés irányától függetlenül) ω . (A körfrekvencia nagyságát az inga hossza és a nehézségi gyorsulás határozza meg, konkrét értékére azonban nincs szükségünk.)

Ha a testet megfelelő sebességgel indítjuk el, elérhetjük, hogy kelet-nyugat irányban a amplitúdójú harmonikus mozgást végezzen, észak-dél irányban pedig 90° -os fáziseltolódással b amplitúdójú, ugyancsak harmonikus rezgőmozgással mozogjon. Pályája ekkor a és b féltengelyű ellipszis lesz ($a > b$), és ennek az ellipszisnek keressük a görbületi sugarát a nagytengely egyik végpontjában (2. ábra).

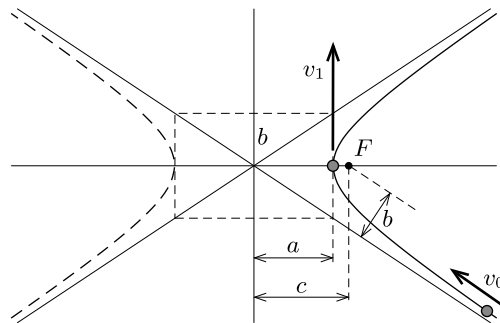


2. ábra

A kérdéses pontban a test sebessége $v = b\omega$ nagyságú, észak felé mutató vektor. Gyorsulása (kelet felé) $a\omega^2$, amit a simulóköron végzett körmozgás centripetális gyorsulásának (a_{cp}) is tekinthetünk. Eszerint $v^2/r = a_{cp}$, a keresett görbületi sugar tehát

$$r = \frac{v^2}{a_{cp}} = \frac{b^2\omega^2}{a\omega^2} = \frac{b^2}{a}.$$

c) Kepler (általánosított) I. törvénye szerint az égitestek olyan kúpszelet alakú pályán mozognak, amelynek egyik F fókuszpontja a Nap. Ez a pálya lehet hiperbola is, ha az égitest sebessége még a „végtelenben” (értsd: a Naptól nagyon messze) is valamekkora $v_0 > 0$ érték.



3. ábra

Jelöljük az égitest sebességét a napközeli pontban (a perihéliumban) v_1 -gyel! A 3. ábra jelöléseit követve az energia- és a perdületmegmaradás törvénye így írható fel:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \gamma \frac{mM}{c-a},$$

illetve

$$v_0 b = v_1 (c - a),$$

ahol $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ a hiperbola (képzetes) kistengelye.

A fenti összefüggésekből kiszámítható az égitest napközeli sebességnégyzete:

$$v_1^2 = \gamma M \frac{b^2}{a(c-a)^2},$$

és mivel a gyorsulása (Newton gravitációs törvénye szerint) $a_{\text{grav}} = \gamma M / (c - a)^2$, így a pálya görbületi sugara

$$r = \frac{v_1^2}{a_{\text{grav}}} = \frac{b^2}{a},$$

ami alakilag megegyezik az ellipszisnél kapott eredménnyel.

d) Utolsó példaként számítsuk ki egy szinuszgörbe simulókörének sugarát a görbe szélsőérték-pontjaiban! Ha egy D rugóállandójú, függőlegesen felfüggesztett rugó alsó végére egy m tömegű testet erősítünk, és azt A amplitúdójú, függőleges rezgésbe hozzuk, akkor a rezgés periódusideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Szemléljük ezt a mozgást egy olyan vonatkoztatási rendszerből, amely egyenletes v sebességgel mozog vízszintes irányban. Ebből a rendszerből nézve a test pályája A amplitúdójú, $\lambda = vT$ hullámhosszúságú szinuszgörbe. A legnagyobb kitérésű pontokban a test vízszintes sebessége v , gyorsulása Newton II. törvénye szerint $a = DA/m$, a görbe simulókörének sugara tehát

$$r = \frac{v^2}{a} = \frac{\lambda^2}{T^2} \cdot \frac{m}{DA} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 A}.$$

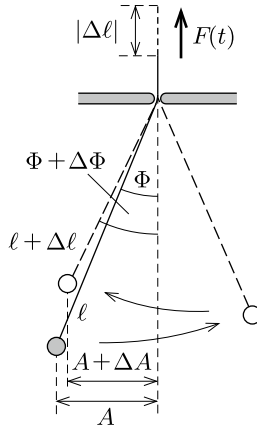
M. 39. Ha a vasúti kocsit a lassulással fékezik, és a kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerből vizsgáljuk az m tömegű nehezék mozgását, egy ma nagyságú, a kocsi haladási irányába mutató „tehetetlenségi erő” felléptét tapasztaljuk. Ha ez az erő állandóan hatna, akkor az inga biztosan nem juthatna el a felső holtpontra, hiszen a tehetetlenségi erő összes munkája odáig nulla lenne, a nehézségi erőé pedig negatív, tehát az inga mozgási energiájának negatívnak kellene lennie, ami lehetetlen.

Vegyük most figyelembe azt a tényt, hogy a vasúti kocsit csak egy véges ideig (a megállásáig) fékezik. Az ingatest adott a lassulás mellett akkor tesz szert a lehető legnagyobb energiára, ha a megállás pillanatában az R hosszúságú fonál éppen vízszintes: eddig a pontig a tehetetlenségi erő munkája $W = maR$. Ha az inga eljut a felső holtpontra, és ott v sebességgel rendelkezik, akkor a munkatétel szerint:

$$maR - 2mgR = \frac{1}{2}mv^2.$$

A fonál akkor marad feszes még a felső holtponton is, ha $mv^2/R > mg$, ami a sebességre kapott fenti összefüggéssel együtt az $a > 2,5g$ megszorítást adja a vasúti kocszi lassulására.

M. 40. Vizsgáljuk meg, mekkora munkát végzünk, miközben a fonál hosszát valamekkora $\Delta\ell < 0$ értékkel megváltoztatjuk, vagyis a fonál végét $|\Delta\ell|$ távolsággal megemeljük. Ez a munka az ingatest teljes mechanikai energiájának megváltozásával egyenlő. Az energiát az inga (pillanatnyi) hosszával és a lengések amplitúdójával kifejezve beláthatjuk, hogy a végzett munka hatására a lengések szögkitérése növekszik, a lineáris kitérés pedig csökken.



A továbbiakban felhasználjuk, hogy a fonál (mennyezettől az ingatestig mérhető) ℓ hossza időben lassan változik, vagyis egy-egy lengés alatt a relatív megváltozása $|\Delta\ell| \ll \ell$. Emiatt az ingára jellemző többi mennyiség (pl. a maximális szögkitérés, a legnagyobb lineáris kitérés) is csak lassan változik, egy-egy lengés ideje alatt állandónak tekinthető, a fonálerő pedig a (felülvonással jelölt) időbeli átlagértékével helyettesíthető.

Jelöljük az inga maximális szögkitérését Φ -vel, a lineáris kitérést (amplitúdót) pedig A -val ($A = \ell\Phi$). Az ingatest $\varphi(t)$ szögkitérését és $v(t)$ pillanatnyi sebességét az idő függvényében a harmonikus rezgőmozgást leíró

$$(1) \quad \varphi(t) = \Phi \sin(\omega t) \quad \text{és} \quad v(t) = \Phi\omega \cos(\omega t)$$

összefüggések adják meg, ahol $\omega = \sqrt{g/\ell}$ az aktuális ingahosszhoz tartozó körfrekvencia.

Igaz ugyan, hogy az mg nehézségi erőnek csak $mg \cos \varphi \leq mg$ komponense járul hozzá a fonálerőhöz, viszont a centripetális gyorsuláshoz szükséges mv^2/ℓ „többleterőt” is a fonálnak kell fedeznie. Emiatt a fonalat feszítő erő (kis szögkitérések esetén)

$$F(t) = mg \cos \varphi + \frac{mv^2}{\ell} \approx mg \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{mv^2}{\ell}.$$

Az (1) egyenletek felhasználásával:

$$F(t) = mg + mg\Phi^2 \left(-\frac{\sin^2(\omega t)}{2} + \cos^2(\omega t) \right),$$

melynek időátlagos értéke $\overline{\sin^2 \varphi} = \overline{\cos^2 \varphi} = 1/2$ miatt

$$(2) \quad \overline{F} = mg \left(1 + \frac{\Phi^2}{4} \right).$$

Az inga teljes mechanikai energiája (ha a helyzeti energiát a mennyezetnél választjuk nullának)

$$E = -mg\ell + \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = -mg\ell + \frac{1}{2}m\Phi^2\ell^2\omega^2,$$

amit a körfrekvencia értékének behelyettesítésével így is írhatunk:

$$(3) \quad E = mg\ell \left(-1 + \frac{\Phi^2}{2} \right).$$

Ha az inga hosszát kicsiny $\Delta\ell$ értékkel megváltoztatjuk, és eközben szögkitérése $\Delta\Phi$ szöggel változik, akkor a mechanikai energia kis megváltozását (3) alapján a következő módon számolhatjuk:

$$(4) \quad \Delta E = mg\Delta\ell \left(-1 + \frac{\Phi^2}{2} \right) + mg\ell\Phi\Delta\Phi.$$

Alkalmazzuk most a munkatételt az inga egy lengésére!

$$\overline{F} \cdot |\Delta\ell| = \Delta E,$$

ami (2) és (4) alapján így írható:

$$-mg\Delta\ell \left(1 + \frac{\Phi^2}{4} \right) = mg\Delta\ell \left(-1 + \frac{\Phi^2}{2} \right) + mg\ell\Phi\Delta\Phi,$$

amiből rendezés után kapjuk, hogy

$$(5) \quad \frac{\Delta\Phi}{\Phi} = -\frac{3}{4} \frac{\Delta\ell}{\ell} > 0.$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy az inga hosszának csökkentésével a lengések szögkitérése lassan növekszik, az $A = \ell\Phi$ lineáris kitérés nagysága viszont csökken, mert

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta\Phi}{\Phi} + \frac{\Delta\ell}{\ell} = +\frac{1}{4} \frac{\Delta\ell}{\ell} < 0.$$

Megjegyzés. Szorozzuk meg az (5) egyenlet mindkét oldalát $\ell^3\Phi^4$ -nel. Rendezés után a következőt kapjuk:

$$4\ell^3\Phi^3\Delta\Phi + 3\Phi^4\ell^2\Delta\ell = 0,$$

ami még

$$\Delta(\ell^3 \Phi^4) = 0$$

alakban is felírható. Ezek szerint az inga hosszának lassú csökkentésekor az $\ell^3 \Phi^4$ mennyiség *nem változik*.

Ebből a „megmaradási törvényből” az is következik, hogy az inga energiájának a helyzeti energiát nem tartalmazó $E^* = E + mg\ell$ részének és a körfrekvenciának a hányadosa az ingahossz fokozatos változása ellenére jó közelítéssel állandó marad:

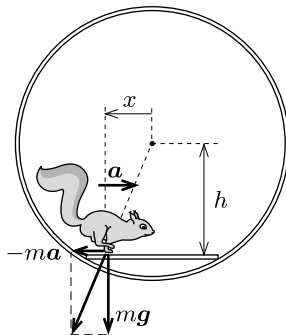
$$\frac{E^*}{\omega} = \frac{\frac{1}{2}mg\ell\Phi^2}{\sqrt{g/\ell}} = \frac{m\sqrt{g}}{2}\sqrt{\ell^3\Phi^4}.$$

Az ilyen tulajdonságú mennyiségeket (amelyek egy paraméter lassú változása során gyakorlatilag nem változnak) *adiabatikus invariánsoknak* nevezzük. Ezek fontos szerepet kapnak a kvantumelméletben is. Az inga lengéseihez hasonló „rezgő rendszerek” (harmonikus oszcillátorok) kvantált energiaszintjeit az

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

formula adja meg. Az E/ω hányados adiabaticus invariáns volta azt biztosítja, hogy egy külső paraméter (esetünkben ℓ) lassú változása, tehát külső munkavégzés során az n kvantumszám állandó marad. A kvantumállapot n „indexe” ezért csak rendezetlen energiaátadással, hőközléssel változtatható meg. (Lásd a 327. feladat II. megoldását.)

M. 41. Jelöljük a létra középpontjának a kerék tengelyétől mért távolságát h -val, a mókus és a létra középpontjának (előjeles) távolsága pedig legyen x (lásd az ábrát).



Az m tömegű mókus egy adott pillanatban akkor tud a gyorsulással mozogni, ha a létra ma nagyságú súrlódási erővel hat rá. Ennek az erőnek az ellenereje mah forgatónyomatéket, a mókus súlya pedig mgx forgatónyomatéket fejt ki a kerékre. A mókuskerék (és a létra) akkor maradhat mozdulatlan, ha

$$mah + mgx = 0, \quad \text{azaz} \quad a = -\frac{g}{h}x.$$

Ez az összefüggés egy olyan harmonikus rezgőmozgásra jellemző, amelynek körfrekvenciája $\omega = \sqrt{g/h}$, fél periódusideje pedig

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{h}{g}} = \pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}R}{2g}} = 0,66 \text{ s.}$$

Ennyi idő alatt futhat át a mólus a mozdulatlan létrán, ha ügyesen választja meg mozgásának „ütemét”.

M. 42. Kezdetben – a rugó lazasága miatt – a test lényegében szabadon esik. A rugó hossza hamarosan az eredeti érték többszöröse lesz, és a mozgás további szakaszában a rugó nyújtatlan hosszát a tényleges hossza mellett akár el is hanyagolhatjuk. Ebben a közelítésben a test mozgása mind vízszintesen, mind függőlegesen azonos frekvenciájú harmonikus rezgőmozgás lesz. Mivel a testet kezdősebesség nélkül indítjuk, a felfüggesztési pont alá a vízszintes mozgás negyed periódusideje után érkezik. Ezalatt a függőleges mozgás is egy negyed periódust fut be, tehát éppen az egyensúlyi helyzetéig, mg/D mélységig süllyed le a test. (Ez sokkal nagyobb, mint L .)

Megjegyzések. 1. A mozgást számításokkal is nyomon követhetjük. Az (y irányban erősen zsugorított méretarányú) ábrán látható koordináta-rendszerben az (x, y) helyvektorú pontban levő test mozgásegyenletei:

$$ma_x = -D \left(\sqrt{x^2 + y^2} - L \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$ma_y = -D \left(\sqrt{x^2 + y^2} - L \right) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + mg.$$

A mozgás kezdeti szakaszában (amikor a rugó megnyúlása még nem sokkal nagyobb, mint L), a rugóerőt elhanyagolhatjuk. Amikor viszont $\sqrt{x^2 + y^2} \gg L$, akkor a rugó nyújtatlan hosszát hanyagolhatjuk el, és a mozgásegyenletek a következő egyszerű alakot öltik:

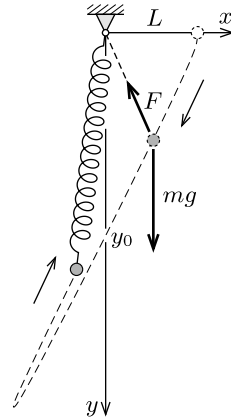
$$ma_x = -Dx \quad \text{és} \quad ma_y = -Dy + mg.$$

Ezek az egyenletek azonos frekvenciájú harmonikus rezgőmozgást írnak le (x irányban az origó körül, y irányban pedig az $y_0 = mg/D$ egyensúlyi helyzet körül történik a rezgés). Az indítási feltételekhez igazodó megoldás:

$$x(t) = L \cos \left(\sqrt{\frac{D}{m}} t \right), \quad y(t) = \frac{mg}{D} \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{D}{m}} t \right) \right].$$

A felfüggesztési pont alá akkor ér a test, amikor $x(t) = 0$, ekkor $y = y_0 = mg/D$, összhangban a fenti érveléssel.

2. A rezgőmozgást leíró függvények a mozgás kezdeti szakaszára (ahol szigorúan véve még nem érvényesek) $x(t) \approx L$ és $y(t) \approx gt^2/2$ módon közelíthetők, és ezek összhangban állnak az akkor érvényes (szabadesést leíró) képletekkel.



M. 43. Jelöljük egy tetszőlegesen választott pontból a rögzítési kampókhöz mutató vektorokat \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 és \mathbf{r}_4 módon, a sziklamászó egyensúlyi helyzetét megadó vektort pedig \mathbf{r}_0 -lal. Az erőegyensúly feltétele:

$$m\mathbf{g} + \sum_{i=1}^4 D_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) = 0,$$

ahonnan

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m\mathbf{g} + \sum D_i \mathbf{r}_i}{\sum D_i}.$$

Ha a sziklamászó kimozdul ebből a pontból, és az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{x}$ vektorral jellemzett helyre kerül, akkor a rá ható erők eredője

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = m\mathbf{g} + \sum D_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 - \mathbf{x}),$$

amit \mathbf{r}_0 ismeretében így is felírhatunk:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} \sum D_i.$$

Látható, hogy a feladatban szereplő speciális (nulla nyugalmi hosszúságú) gumikötelekhez erősített sziklamászó úgy mozog, mintha egyetlen, $\sum D_i$ rugóállandójú rugó húzná vissza az egyensúlyi helyzete felé. Eszerint a kis rezgések periódusideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\sum D_i}} \approx 1,6 \text{ s.}$$

Érdekes, hogy ez az eredmény független a nehézségi gyorsulástól, a rögzítési pontok helyétől és számától, továbbá a kezdeti kitérítés irányától.

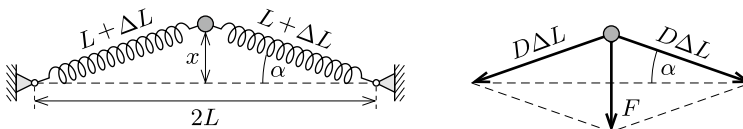
M. 44. I. megoldás. a) Ha a testet eredeti helyzetéből x távolsággal kitérítjük, akkor az eredetileg L hosszúságú rugók megnyúlása

$$(1) \quad \Delta L = \sqrt{L^2 + x^2} - L,$$

a testre ható eredő erő tehát

$$F = -2D\Delta L \sin \alpha = -2D(\sqrt{L^2 + x^2} - L) \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}},$$

ahol α a kitérített helyzetű rugó szöge az eredeti irányához viszonyítva (lásd az ábrát).



A rugók megnyúlását megadó (1) összefüggést

$$\Delta L \cdot (\Delta L + 2L) = x^2$$

alakra hozhatjuk. Ha a test kitérése kicsi ($x \ll L$), akkor $\Delta L \ll 2L$, a fenti zárójelben levő első tag tehát elhanyagolható a második tag mellett. Ebben a közelítésben

$$\Delta L \approx \frac{x^2}{2L}, \quad \text{illetve} \quad F \approx -D \frac{x^3}{L^2}.$$

b) Hogyan függ egy ilyen – anharmonikus rezgést végző – test periódusideje az amplitúdótól? Mivel a rugók megnyúlása x^2 -tel arányos, a bennük tárolt rugalmas energia a kitérés *negyedik* hatványával arányosan növekszik. Ha összehasonlítjuk az 1 cm-es és a 2 cm-es amplitúdójú rezgést, megállapíthatjuk, hogy a jobban kitérített testnél a rendszer teljes energiája $2^4 = 16$ -szor nagyobb, mint a kevésbé kitérítetténél. Ugyanez az arány a legnagyobb mozgási energiák között is, amiből következik, hogy a jobban kitérített test legnagyobb sebessége 4-szer nagyobb, mint az eredeti esetben volt.

Hasonló érveléssel látható be, hogy a 2 cm-ről indított test sebessége nem csak az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor, hanem *minden helyzetben* 4-szerese az 1 cm-es amplitúdójú mozgás megfelelő (felére kicsinyített helyzetű) sebességének. 2 cm-es amplitúdónál tehát a teljes (2-szer hosszabb) utat *fele* annyi idő alatt teszi meg a test, mint 1 cm-es amplitúdó esetén, ezért a 2 cm-es amplitúdójú rezgés periódusideje 1 s.

II. megoldás. b) Keressünk kapcsolatot a periódusidő és az amplitúdó között egy olyan anharmonikus rezgőmozgásnál, melyet (kis kitérések esetén) az

$$F = -k \cdot x^3$$

mozgásegyenlet ír le. A T periódusidő függhet a k arányossági tényezőtől, a test m tömegétől és a rezgés A amplitúdójától. A kérdéses kapcsolat – dimenzionális okokból – csakis

$$T \sim \sqrt{\frac{m}{kA^2}}$$

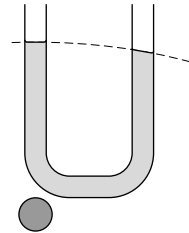
alakú lehet. Ezek szerint adott D , L és m esetén a periódusidő fordítottan arányos a legnagyobb kitéréssel, a kérdéses 2 cm-es amplitúdónál tehát $T = 1$ s.



Gravitáció, bolygómozgás

M. 45. Ha a Föld gravitációs terénél sokkal erősebb lenne a golyó vonzó hatása, akkor a folyadék felszíne a golyó gravitációs potenciáljának valamelyik szintfelületével esne egybe. Ezek a felületek koncentrikus gömbök, és ennek megfelelően a bal oldali szárban biztosan magasabban állna a folyadék, mint a jobb oldaliban.

Ha mind a Föld, mind pedig a golyó gravitációs hatása érvényesül, akkor az ekvipotenciális felületek nem gömbök, de a korábbi vízszinteshez képest a bal oldali szártól a jobb oldali felé továbbra is „lejtnek”, a folyadék tehát a bal oldalon megemelkedik, a jobb oldalon pedig lesüllyed.



Megjegyzés. A fenti szemléletes képet számítással is alá lehet támasztani. Megmutatjuk, hogy az eredeti helyzet (amikor a folyadék a két szárban egyforma magasban áll) nem lehet egyensúlyi állapot, mert található egy hozzá közeli másik elrendeződés, amelyben a rendszer energiája alacsonyabb. Vigyünk át – gondolatban – egy nagyon kevés, ε magasságú folyadékréteget a jobb oldali szárban található folyadék tetejéről a bal oldali folyadékoszlop tetejére. Ennek a folyadékmennyiségnek a tömege ε -nal arányos, ezért a földi gravitációs erőterben az energiájának növekedése (a szokásos mgh összefüggés szerint) arányos ε^2 -tel. Ugyanakkor ez a folyadékmennyiség *véges* (ε -nál sokkal nagyobb) távolsággal közelebb kerül a nagy tömegű golyó középpontjához, az innen származó energiája lecsökken, még hozzá ε -nal arányos mértékben. Elegendően (infinitezimálisan) kicsiny ε esetén az ε^2 -tel arányos tag biztosan kisebb, mint az ε -nal arányos tag, az egész rendszer energiája tehát a folyadékszintek ilyen irányú kicsiny elmozdulása során csökken. Emiatt a folyadék a bal oldali szárban felfelé kezd el mozogni, és csak egy olyan helyzetben kerül egyensúlyba, ahol a további folyadékátrendeződés már nem csökkentené tovább az összenergiát.

M. 46. Egyenletes tömegeloszlású, vékony gömbhéj által a belsejében keltett gravitációs térerősség nulla, kívül pedig úgy számolható, mintha a gömbhéj teljes tömege a középpontjában összpontosulna. Ennek értelmében a (gömbszimmetrikus tömegeloszlásúnak feltételezett) Föld felszíne alatt, a gömb középpontjától r távolságban észlelhető gravitációs gyorsulást a $g = \gamma m/r^2$ összefüggéssel számolhatjuk, ahol m az r sugarú gömb belsejében elhelyezkedő földanyag tömege, γ pedig a gravitációs állandó.

A felszínen mérhető gravitációs gyorsulás:

$$(1) \quad g_{\text{fent}} = \gamma \frac{\frac{4\pi}{3} R^3 \rho_{\text{átlag}}}{R^2} = \frac{4\pi}{3} \gamma R \rho_{\text{átlag}}.$$

Az R sugarú Föld felszíne alatt $h \ll R$ mélységben az $R - h$ sugarú gömbben található földanyag tömegét kell számításba vennünk. Ezért itt a gravitációs

gyorsulás értéke

$$(2) \quad g_{\text{lent}} = \gamma \frac{\frac{4\pi}{3} R^3 \rho_{\text{átlag}} - 4\pi R^2 h \rho_{\text{kéreg}}}{(R-h)^2}.$$

Az (1) és (2) egyenletek felhasználásával, valamint az

$$\frac{1}{(R-h)^2} = \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{h}{R}\right)^{-2} \approx \frac{1}{R^2} \left(1 + \frac{2h}{R}\right)$$

közelítés alkalmazásával kifejezhetjük a gravitációs gyorsulás relatív változását:

$$\frac{\Delta g}{g_{\text{fent}}} = \frac{g_{\text{lent}} - g_{\text{fent}}}{g_{\text{fent}}} \approx \frac{h}{R} \left(2 - 3 \frac{\rho_{\text{kéreg}}}{\rho_{\text{átlag}}}\right).$$

Ebből leolvasható, hogy ha

$$\rho_{\text{kéreg}} < \frac{2}{3} \rho_{\text{átlag}},$$

akkor a földfelszíntől lefelé haladva növekszik a gravitációs gyorsulás, ellenkező esetben pedig csökken. A megadott szám adatokra teljesül a fenti egyenlőtlenség, így a felszín alatt 10 km-rel *nagyobb* a g , mint a földfelszínen.

Megjegyzés. Az ismert számszerű adatokat behelyettesítve g_{lent} értéke 0,6 ezreléssel nagyobb, mint g_{fent} értékénél.

M. 47. Először foglalkozzunk a keskeny (a kisbolygó egészéhez képest elhanyagolható térfogatú) próbafurattal! A kisbolygó sűrűsége legyen ρ , sugara pedig R ! A középponttól r távolságra a gravitációs gyorsulás úgy számolható, mintha csak az „alatta” levő r sugarú gömb lenne jelen:

$$(1) \quad g(r) = \gamma \frac{m(r)}{r^2} = \gamma \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} = \frac{4\pi\gamma\rho}{3} r.$$

A gravitációs gyorsulás tehát a középponttól mért távolsággal egyenesen arányos, iránya mindig a kisbolygó középpontja felé mutat. Eszerint az első szerencsétlenül járt zöld emberke R amplitúdójú harmonikus rezgőmozgással haladt a végzeté felé, ami negyedperiódusnyi idő múlva érte el. Az (1) kifejezésben r együtthatója éppen ω^2 -tel, a rezgési körfrekvencia négyzetével egyezik meg:

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi\gamma\rho}{3}},$$

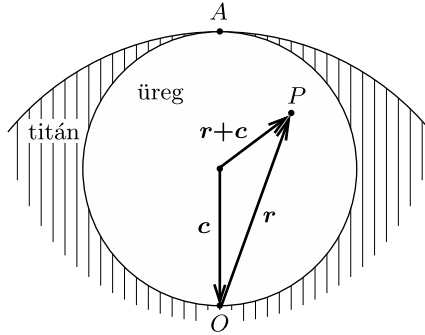
ebből az esési idő:

$$T_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}}.$$

A becsapódási sebességet az amplitúdó és a körfrekvencia szorzataként kaphatjuk meg:

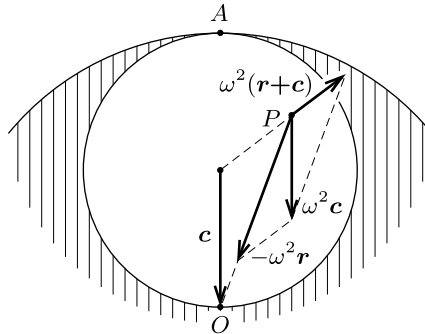
$$v_1 = R\omega = 2R\sqrt{\frac{\pi\gamma\rho}{3}}.$$

A második szerencsétlenség idején a titánfalók már kitermelték a kisbolygó anyagának egynyolcadát. Meg kell határoznunk a gravitációs mezőt a felszíntől a középpontig terjedő gömb alakú üregben. Ezt a szuperpozíciós elv „trükkös” alkalmazásával tesszük: az üreget úgy képzeljük el, mintha „rendes” titán töltené ki, és emellett még „negatív tömegsűrűségű” titán is lenne benne.



1. ábra

A teljesen tömör kisbolygó és az egynyolcadnyi „antititán gömb” gravitációs terét kell összeadnunk. Az üreg egy tetszőleges P pontjába mutató \mathbf{r} helyvektort, az üreg középpontjából a kisbolygó középpontjába mutató \mathbf{c} vektort, valamint az üreg középpontjából a P pontba mutató $\mathbf{r} + \mathbf{c}$ vektort az 1. ábrán tüntettük fel. A gravitációs gyorsulások (a homogén kisbolygóé, az üregé, valamint az eredőjük) a helyvektorokkal arányosak, az arányossági tényező a korábban ω^2 -tel jelölt állandó (illetve annak -1 -szerese).



2. ábra

Az eredő gravitációs gyorsulás (2. ábra):

$$\mathbf{g} = -\omega^2 \mathbf{r} + \omega^2 (\mathbf{r} + \mathbf{c}) = \omega^2 \mathbf{c}.$$

Ez a gravitációs gyorsulás a P pont helyzetétől függetlenül mindenhol ugyanakkora nagyságú és ugyanolyan irányú vektor. Az üregben tehát *homogén gravitációs tér* alakul ki, amelynek állandó gravitációs gyorsulása megegyezik a próbafurat felénél (az üreg középpontjánál) fellépő $\omega^2 R/2$ nagyságú gyorsulással.

Megjegyzés. Ugyanígy megmutatható, hogy a bolygó belsejében vájt bármekkora gömb alakú üregben homogén gravitációs mező jön létre, a gravitációs gyorsulás nagysága és iránya pedig megegyezik azzal a térerősséggel, amit az üreg középpontjában mérnénk, ha az titánnal lenne kitöltve.

Az egyenletesen gyorsuló mozgás ismert összefüggéseinek alkalmazásával számíthatjuk ki a második kicsi zöld emberke T_2 esési idejét és v_2 csapódási sebességét:

$$T_2 = \frac{2}{\omega} = \sqrt{\frac{3}{\pi\gamma\rho}} \quad \text{és} \quad v_2 = 2R\sqrt{\frac{\pi\gamma\rho}{3}}.$$

Ezzel megadhatjuk a szakértő jelentésében szereplő arányokat:

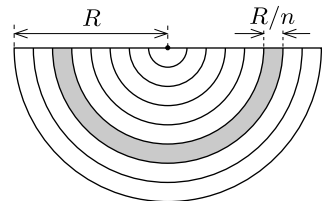
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{illetve} \quad \frac{v_1}{v_2} = 1.$$

Látható, hogy a második zöld emberke zuhanása valamivel tovább tartott, mint az első esése, azonban mindketten ugyanakkora sebességgel csapódtak a bolygó közepébe.

A sebességek egyezése – mint azt az energiaviszonyok összevetése mutatja – nem véletlen! Az első esetben a furat alján a gravitációs potenciál alacsonyabb, mint a felszínen, ennek megfelelően gyorsul fel, szerez mozgási energiát az első balesetet szenvedett zöld emberke. A második eset a tömör kisbolygóhoz képest annyiban más, hogy a „negatív tömegsűrűségű” üreg gravitációs potenciálját is figyelembe kell vennünk. A balesetet szenvedett emberke az üreg egyik szélétől a másik széléig esett, az üregtől származó gravitációs potenciálja tehát nem változott meg. A szuperpozíciós elvet a gravitációs potenciálokra alkalmazva végül azt kapjuk, hogy a teljes potenciál megváltozása a két esetben megegyezik, tehát a két áldozat sebességváltozása is ugyanakkora.

M. 48. Vágjuk fel a félgömböt képzetben nagyon sok egyforma vastagságú, koncentrikusan elhelyezkedő félgömbhéjra! Vajon mekkora erőt fejtenek ki ezek a félgömbhéjak egy egységnyi tömegű „próbatestre” a gömb középpontjában? Mivel a héjak tömege a sugaruk négyzetével *egyenesen*, az egyes darabkák által kifejtett erő pedig *fordítottan* arányos a távolság négyzetével, így a különböző sugarú (de azonos vastagságú) gömbhéjak által létrehozott gravitációs gyorsulás a középpontban mind ugyanakkora (1. ábra).

Ha n számú félgömbhéjunk van, akkor a legkülső héj tömege $2\pi R^2(R/n)\rho$, ahol R a kisbolygó sugara, ρ pedig a sűrűsége. A teljes félgömb gravitációs tere a középpontban a legkülső héj terének n -szerese, azaz akkora, mintha $M = 2\pi R^3\rho$ tömeg helyezkedne el a félgömb felületén egyenletesen elosztva. (Ez a tömeg a félgömb tényleges tömegének 3-szorosa.)



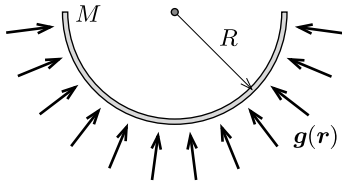
1. ábra

Mekkora erőt fejt ki az M tömegű félgömbhéj a középpontban lévő, egységnyi tömegű testre? Nagyságát tekintve éppen akkorát, amekkora erőt a próbatest fejt

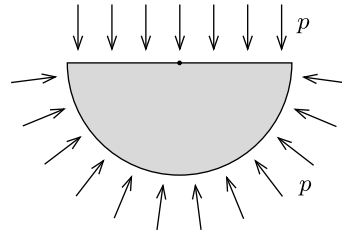
ki a félgömbhéjra, vagyis felületegységenként

$$p = \frac{1}{2\pi R^2} \cdot \frac{\gamma M}{R^2} = \frac{\gamma \rho}{R}$$

nagyságút. Ugyanilyen hatást fejtene ki egy p nyomású gáz is a félgömbhéjra (2. ábra). A gáz nyomásából származó (a félgömbhéjra ható) erők eredője viszont éppen akkora, mint a félgömb körlapjára kifejtett nyomóerő (hiszen egy gázba helyezett, tömör félgömbre ható eredő erő nulla), vagyis $g = p \cdot R^2 \pi = \gamma \rho R \pi$ (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy a gömb alakú kisbolygó felszínén

$$g_0 = \gamma \rho \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{R^2}$$

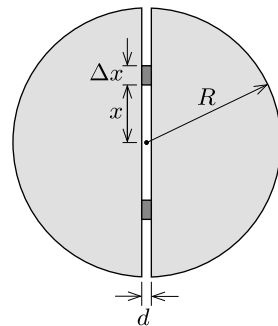
volt a gravitációs gyorsulás, a fentebb kiszámított érték

$$g = \frac{3}{4} g_0 = 7,36 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

A titán sűrűségének ismeretében a kisbolygó (eredeti) sugarát is meghatározhatjuk: $R \approx 78$ km-es érték adódik.

M. 49. Ha sikerülne kiszámítani, hogy egy „me-sebéli óriás” mekkora W munkavégzés árán tudná az R sugarú, M tömegű kisbolygó két felét $d = 1$ m távolságra széthúzni, akkor a $W = F \cdot d$ összefüggésből már a húzóerőt is ismernénk. De vajon hogyan határozhatjuk meg könnyen W -t? Közvetlenül, az erő és az elmozdulás szorzatából nem lenne célszerű, hiszen akkor visszajutnánk az eredeti problémához, az erő kiszámításához. Keressünk valamilyen más eljárást!

A kisbolygó két felének széthúzása során megnő a rendszer gravitációs helyzeti energiája, W pedig éppen az energianövekedéssel egyenlő. Ezt az energianövekedést úgy is ki lehet számítani, hogy meghatározzuk, mekkora munkát végeztek a kis zöld emberkék az R sugarú, d vastagságú korongban lévő titán felszínre hozatala során. (Gondolhatjuk úgy,



hogy a felhozott anyagot – könnyen gördülő szállítóeszközökkel – egyenletesen szétterítették a kisbolygó felszínén.)

Számítsuk ki a keresett munkát a különböző mélységekből felszínre hozott anyag helyzeti energiájának növekedéséből! Jelöljük a felszíni gravitációs gyorsulást g -vel, így a középponttól x távolságban a gravitációs gyorsulás $g(x) = gx/R$. Tekintsük az x és $x + \Delta x$ sugárértékek közé eső $\Delta V = d \cdot 2\pi x \cdot \Delta x$ térfogatú, $\Delta m = \rho \Delta V$ tömegű anyagmennyiséget! (Itt $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ az M tömegű kisbolygó sűrűségét jelöli.) Ezt az anyagot ugyanolyan mélyről kell felszínre hozni, érdemes tehát a munkavégzés szempontjából egyetlen darabként kezelni. Erre az anyagdarabra a kitermelés helyén $\Delta m \cdot gx/R$ erő, a felszínen pedig már $\Delta m \cdot g$ erő hat. Mivel a felhozatal során a gravitációs erő egyenletesen növekszik, számolhatunk a kezdeti és a végső erő számtani közepével. A teljes elmozdulás $R - x$, a munkavégzés tehát

$$\Delta W = \Delta m \frac{g + gx/R}{2} (R - x) = \Delta m g \frac{R^2 - x^2}{2R} = \frac{3}{4} \frac{Mgd}{R^4} (R^2 - x^2)x \Delta x.$$

A teljes munkavégzés a különböző mélységekből felhozott anyag kiemelésé során végzett munkák összege:

$$W = \sum \Delta W = \frac{3Mgd}{4R^4} \sum (R^2 - x^2)x \Delta x.$$

A fenti összeg – a rétegek vastagságának fokozatos finomításával – egy integrálba megy át:

$$\sum (R^2 - x^2)x \Delta x \longrightarrow \int_0^R (R^2 - x^2)x dx = \frac{R^4}{4},$$

a munkavégzés pedig $W = \frac{3}{16} Mgd$.

Megjegyzés. Ugyanezt az eredményt megkaphatjuk integrálszámítás alkalmazása nélkül is. Vezessük be x helyett az $u = x^2/R^2$ új változót ($0 \leq u \leq 1$), és a különböző mélységű rétegekre vett összegzést fogalmazzuk meg a különböző u -khoz tartozó tagok összegzésével. Az $u = x^2/R^2$ és $u + \Delta u = (x + \Delta x)^2/R^2$ összefüggésekből (a kicsiny Δx négyzetének elhanyagolása után) a munkavégzés így fejezhető ki:

$$W = \frac{3}{8} Mgd \sum (1 - u)\Delta u.$$

A jobb oldalon álló összegzést könnyen ki tudjuk számítani, hiszen $1 - u$ egyenletesen változik 1-től 0-ig, átlagosan tehát $\frac{1}{2}$ -nek vehető, Δu -k összege pedig 1. Így végül a munkavégzésre valóban a fentebb megadott érték adódik.

A mesebeli óriás tehát $W = \frac{3}{16} Mgd$ munkát végez, miközben d távolságra távolítja el a két félgömböt. A széthúzáshoz szükséges erő tehát $F = \frac{3}{16} Mg$, ugyanakkora erővel vonzza egymást a kisbolygó két fele, összességében a dúc-fáknak ekkora nyomóerőt kellett volna kibírni. A kisbolygó sugarának és a titán sűrűségének ismeretében az erő numerikusan is meghatározható:

$$F = \frac{3}{16} M \cdot \frac{\gamma M}{R^2} = \frac{3}{16} \left(\frac{4\pi R^3 \rho}{3} \right)^2 \frac{\gamma}{R^2} = \frac{\gamma R^4 \rho^2 \pi^2}{3} \approx 4,4 \cdot 10^{13} \text{ N.}$$

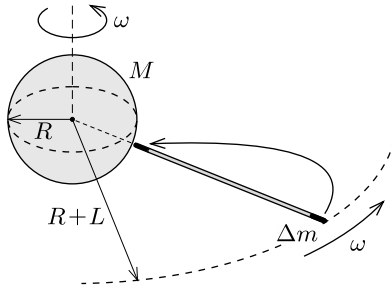
A nagyságrendek érzékeltetése kedvéért számítsuk ki az egységnyi felületre vonatkoztatott átlagos terhelést:

$$p = \frac{F}{R^2\pi} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

amely a földi légköri nyomás másfélszerese. Ez 14 tonnányi anyag (földi!) súlya négyzetméterenként, amit kellően erős dúcfáknak ki kellene bírni, feltéve, hogy nőnek egyáltalán fák a titán kisbolygón.

M. 50. Tétélezzük fel, hogy az egyenletes keresztmetszetű és anyageloszlású, mindkét végén szabad madzag úgy kering a Föld körül, hogy a Földhöz viszonyított helyzete időben állandó marad! Ez az állapot csak az Egyenlítő fölött, a madzag függőleges helyzetében valósulhat meg.

A Földdel együtt forgó koordináta-rendszerből nézve az Egyenlítő fölött r távolságra ω szögsebességgel keringő m tömegű (pontoszerű) testre a Föld felé irányuló, $\gamma m M / r^2$ nagyságú gravitációs erő és az ezzel ellentétes irányú, $m r \omega^2$ nagyságú centrifugális erő hat (itt M a Föld tömege). A madzag egyensúlyának feltétele az, hogy a helyről helyre változó gravitációs erők eredője megegyezzen az ugyancsak helyfüggő centrifugális erők eredőjével. Ez a feltétel integrálszámítás segítségével önhető egyenlet formájába, de szerencsére egy ügyes gondolat kísérlet segítségével felsőbb matematikai ismeretek nélkül is megfogalmazható.



Képzeljük el, hogy a madzagot az alsó végénél fogva egy nagyon picit a Föld felé húzzuk! Mivel a madzag (a forgó koordináta-rendszerből nézve) eredetileg egyensúlyban volt, tetszőlegesen kicsi erővel, tehát tetszőlegesen kis munkavégzéssel kimozdítható az egyensúlyi helyzetéből. Az egész madzag elmozdítása a munkavégzés szempontjából egyenértékű azzal, mintha a madzag Földtől távolabbi végéről levágnánk egy kicsiny (Δm tömegű) darabot, és azt lassan a másik végéhez vinnénk. A végzett munka két tag összegeként kapható meg: a mozgatott darabka gravitációs potenciális energiájának megváltozásából és a centrifugális erő ellenében végzett munkából. Ez utóbbi járuléka (az elmozdulással lineárisan változó nagyságú centrifugális erő miatt) számolható úgy, mintha a mozgatott darabkára végig egy olyan átlagos erő hatna, amely a legkisebb és legnagyobb centrifugális erő számtani közepével egyenlő. Ha az L hosszúságú madzag alsó

vége R fűdsugárnyi távolságra van a Fűld középpontjától, akkor a kérdéses munkavégzés

$$(1) \quad W = -\gamma M \Delta m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{L+R} \right) + \Delta m \frac{R+(R+L)}{2} \omega^2 L = 0.$$

Ez L -re egy másodfokű egyenlet, amelyet megoldva és az ismert adatokat behelyettesítve a madzag hosszára

$$(2) \quad L = \frac{R}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8\gamma M}{R^3 \omega^2}} - 3 \right) = 1,44 \cdot 10^8 \text{ m},$$

azaz kb. 144 000 km adűdik. Ez a hossz csaknem 3,5-szerese a távkűzlési szinkronműholdak

$$(3) \quad r_0 = \sqrt[3]{\frac{\gamma M}{\omega^2}} \approx 42\,000 \text{ km-es}$$

pályasugarának!

Megjegyzés. Vajon mekkora maximális húzófeszűltés ébred a madzagban? Belátható, hogy a rugalmas feszűltés a Fűld középpontjától $r = r_0$ távolságra a legnagyobb.

Egy lehetséges gondolatmenet a következű. Forgó vonatkoztatási rendszerbűl nézve a madzag Fűldhűz közeli darabkaira ható gravitációs erű nagyobb, mint a centrifugális erű. A madzag felsű végéhez közeli darabkánál a helyzet pont fordított: itt a centrifugális erű gyűz a gravitációs vonzóerű felett. Az egyes darabkák egyensűlyát a madzagban ébredű, helyrűl helyre változű nagyságű feszűtűerű biztosítja, emiatt a feszűtűerű a madzag alsű végétűl fűlfelű haladva a kezdeti zérus értűkrűl fokozatosan nűvekszik, eleri maximális értűkét, majd a madzag felsű végéig továbhaladva fokozatosan nullára csűkken. A Fűld középpontjátűl r_0 távolságra elhelyezkedű kicsiny madzagdarabka két végénél ugyanakkora feszűtűerű hat (hiszen erre a darabkára ható gravitációs és centrifugális erűk eredűje nulla), tehát itt a feszűtűerű hely szerinti megváltozása nulla. Ebbűl következik, hogy a madzagban ébredű erű (és ezzel egyűtt a rugalmas feszűltés) éppen itt, a szinkronműholdak magasságában a legnagyobb.

A rugalmas feszűltés meghatározásához vizsgáljuk meg, hogy mennyi munkát végzűnk, ha a madzagnak a Fűld középpontjátűl r_0 távolságra lévű Δs hosszű darabkáját „összecsűpentjűk” úgy, hogy a madzag alsű vége ne mozduljon el, felsű vége viszont Δs távolsággal lejjebb kerüljűn. Ha a madzapot ebben a pontban F_{\max} erű feszűti, akkor munkavégzűsűnk $F_{\max} \Delta s$. Ugyanezt az (1) egyenlettel teljesen analóg módon is kiszámíthatjuk, hiszen az „összecsűpentést” most is elképzelhetjűk úgy, mintha a madzag Fűldtűl távoli végérűl levűgott Δs hosszűságű, Δm tűmegű darabot a Fűld középpontjátűl r_0 távolságra lévű helyre vinnénk:

$$(4) \quad F_{\max} \Delta s = -\gamma M \Delta m \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{L+R} \right) + \Delta m \frac{r_0+(R+L)}{2} \omega^2 (R+L-r_0).$$

Ha a madzag A keresztmetszetű és anyagának sűrűsége ϱ , akkor a gondolatban mozgatott darabka tűmege $\Delta m = \varrho A \Delta s$ alakban írható fel. A (3) és (4) egyenletek felhasználásával a madzagban hatű maximális $\sigma_{\max} = F_{\max}/A$ feszűltés és a sűrűség hányadosa meghatározható:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\varrho} = \omega^2 \left(\frac{r_0^3}{R+L} + \frac{(R+L)^2}{2} - \frac{3r_0^2}{2} \right) \approx 4,8 \cdot 10^7 \frac{\text{Nm}}{\text{kg}}.$$

Ez a számérték sokkal nagyobb, mint az ismert anyagok szakítószilárdság/sűrűség aránya (ami acélra ugyanilyen egységekben $2,6 \cdot 10^5$, szénszára $1,7 \cdot 10^6$ lenne).

Az „égi kampó” tehát a newtoni mozgásegyenletek szerint megvalósítható lenne, szilárdságtani okokból azonban (legalábbis egyenletes keresztmetszetű, egyenletes tömegeloszlású madzaggal) ma még elképzelhetetlen. Ha valaki mégis megfigyelne egy (állandó keresztmetszetű és egyenletes tömegeloszlású) égigérő madzagot, joggal tulajdoníthatná a földönkívüli civilizáció művének. Változó keresztmetszetű szállal azonban már a ma ismert anyagokkal is megvalósítható lenne az „égigérő madzag-köteg” (lásd a 102. feladatot).

M. 51. Tegyük fel, hogy a koordináta-rendszerünk origójában, x irányban szeretnénk a lehető legnagyobb gravitációs térerősséget létrehozni. Az origótól r távolságra, az x tengelyhez képest φ szögben található, ΔV térfogatú gyurmadarabka az origóban

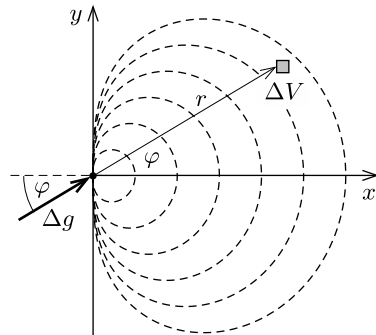
$$\Delta g = \gamma \frac{\rho \Delta V}{r^2}$$

gravitációs térerősséget hoz létre (itt ρ a gyurma sűrűsége). Ennek x irányú komponense $\Delta g_x = \Delta g \cos \varphi$, ezért a gyurma egyes darabkái térfogategységenként

$$\frac{\Delta g_x}{\Delta V} = \gamma \rho \frac{\cos \varphi}{r^2}$$

értékkel járulnak hozzá az x irányú térerősséghez. Ez a térfogategységre vonatkoztatott „fajlagos x irányú gravitálóképesség” ugyanakkora a gyurma azon pontjaiban, melyekre a $\cos \varphi / r^2$ hányados állandó, vagyis az olyan „szintfelületeken”, melyek az

$$(1) \quad r(\varphi) = a \sqrt{\cos \varphi}$$



polárkoordinátás egyenlettel írhatók le, ahol a a szintfelületeket jellemző állandó (lásd az ábrát). Minél nagyobb az a tényező értéke, annál nagyobb a szintfelület mérete, és annál kisebb a felület pontjaiban a $\Delta g_x / \Delta V$ fajlagos gravitálóképesség.

Képzeljük el, hogy az adott térfogatú gyurmát éppen szintfelület-alakúra formázzuk, és jelöljük ezt a felületet S -sel! Ebből az állapotból kiindulva bárhogyan is deformáljuk a gyurmát, annak egy része (a gyurma térfogatának állandósága miatt) az S felület belsejéből azon kívülre kerül, s így az origóban keltett gravitációs térerősség x irányú komponense biztosan csökken. Az origóban a gravitációs gyorsulás tehát akkor a lehető legnagyobb, ha a gyurmát az (1) egyenlettel megadott alakúra gyúrjuk.

Megjegyzés. A gyurma V térfogatának ismeretében a gyurma alakját leíró (1) egyenletben szereplő a tényezőt számszerűen is meghatározhatjuk. Az (r, φ) polárkoordinátákat (x, y) derékszögű koordinátákra átírva:

$$x = r \cos \varphi = a(\cos \varphi)^{3/2}, \quad y = r \sin \varphi = a(\cos \varphi)^{1/2} \sin \varphi.$$

Ezeket felhasználva a gyurma (mint forgástest) térfogata:

$$V = \int_0^a \pi y^2(x) dx = -\frac{3\pi}{2} a^3 \int_{\pi/2}^0 (\cos \varphi)^{3/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{15} a^3.$$

Ebből a kifejezhető, így a V térfogatú gyurma alakját leíró polárkoordinátás egyenlet:

$$r(\varphi) = \sqrt[3]{\frac{15V}{4\pi}} \sqrt{\cos \varphi}.$$

M. 52. Az R sugarú, M tömegű, ρ sűrűségű Föld felületén a gravitációs gyorsulás a következő alakban adható meg:

$$(1) \quad g_{\text{gömb}} = \gamma \frac{M}{R^2} = \gamma \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = \frac{4}{3}\pi \gamma \rho R.$$

A feladat megoldásához meg kell határoznunk egy H vastagságú, végtelen kiterjedésű, ρ sűrűségű „lemez” közelében a gravitációs gyorsulás nagyságát. Viszonylag könnyen célt érhetünk, ha felhasználjuk az elektrosztatikus és a gravitációs erő-törvény közötti analógiát.

A Coulomb-törvény szerint egy Q ponttöltéstől r távolságra az elektromos térerősség nagysága

$$(2) \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Ugyanez az eredmény megkapható az elektrosztatika Gauss-törvényének felhasználásával is, mely szerint az elektromos térnek egy zárt felületre vonatkoztatott fluxusa arányos a felület által bezárt töltés nagyságával:

$$(3) \quad \sum_{\substack{\text{zárt} \\ \text{felületre}}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q,$$

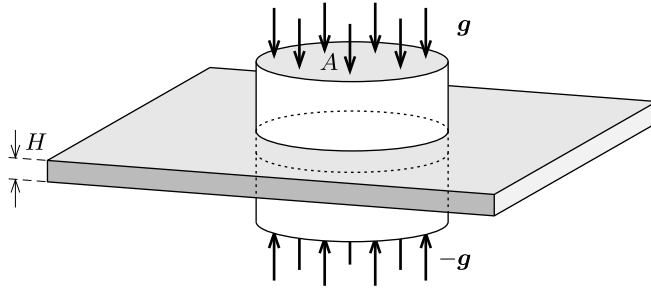
ahol $\Delta \mathbf{A}$ a zárt felület egy kis darabkájának felületelem-vektora.

Egy pontszerű, m tömegű testtől r távolságban a gravitációs térerősséget a Newton-féle gravitációs törvény adja meg:

$$g(r) = \gamma \frac{m}{r^2},$$

ami alakilag nagyon hasonló a (2) Coulomb-törvényhez. Az analógiát felhasználva a (3) Gauss-törvényt megfogalmazhatjuk gravitációs mezőre is, ha a Q töltést az m tömegre, az $1/(4\pi\epsilon_0)$ arányossági tényezőt pedig a γ gravitációs állandóra cseréljük. A gravitációs térerősség irányát is figyelembe véve a „gravitációs Gauss-törvény” tehát a következő alakot ölti:

$$(4) \quad \sum_{\substack{\text{zárt} \\ \text{felületre}}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{A} = -4\pi\gamma m.$$



Alkalmazzuk a (4) összefüggést egy olyan képzeletbeli, henger alakú zárt felületre, amely a H vastagságú, végtelen kiterjedésű „lapos Föld” A területű részét foglalja magában! A henger által bezárt földanyag tömege $\rho H A$, a gravitációs térerősség pedig a szimmetria miatt mindenhol merőleges a sík-Föld felszínére, ezért (4) így részletezhető:

$$-2g_{\text{sík}} \cdot A = -4\pi\gamma \cdot \rho H A.$$

(A fluxus kiszámításánál figyelembe vettük, hogy a gravitációs térerősség a zárt felület belsejébe mutat.) Ebből a sík Földön a gravitációs gyorsulás nagysága:

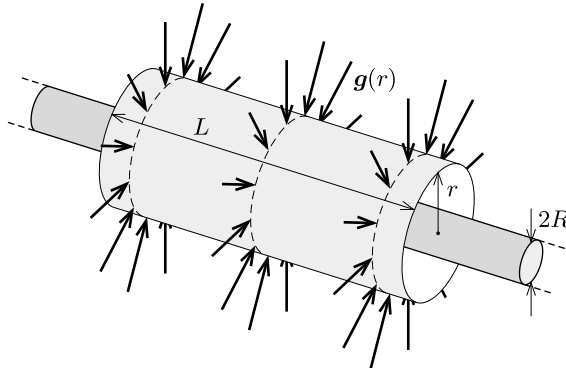
$$(5) \quad g_{\text{sík}} = 2\pi\gamma\rho H.$$

Az (1) és (5) kifejezéseket összehasonlítva leolvasható, hogy a feladat $g_{\text{gömb}} = g_{\text{sík}}$ feltétele

$$H = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3} \cdot 6370 \text{ km} \approx 4250 \text{ km}$$

esetén teljesül. Ilyen vastagnak kellene tehát lennie a „sík Földnek”.

M. 53. Egy nagyon hosszú henger körül a gravitációs erőter hengerszimmetrikus, a térerősség iránya (a henger végeitől elegendően távol) radiális, azaz a henger tengelyére merőleges irányú, nagysága pedig csak a tengelytől mért távolságtól függ.



A Newton-féle gravitációs erőtvény és a Coulomb-törvény között fennálló analógiát felhasználva megállapíthatjuk, hogy egy m tömegű testbe „belépő” gravitációs erővonalak száma (a g gravitációs gyorsulás és a rá merőleges felület

szorzata) $4\pi\gamma \cdot m$ (lásd még az *előző feladat* megoldását). Ez alapján az R sugarú bolygót körülvevő, L hosszúságú és $r > R$ sugarú henger palástján belépő g -vonalak száma és a hengerben található tömeg kapcsolata:

$$(1) \quad g \cdot 2\pi r L = 4\pi\gamma R^2 \pi L \rho, \quad \text{azaz} \quad g(r) = \frac{2\pi\gamma\rho R^2}{r}.$$

(A hengerszimmetrikus tömegeloszlásúnak feltételezett bolygó átlagsűrűségét ρ -val jelöltük.)

a) A gravitációs térerősség ismeretében az első kozmikus sebesség (azaz az R sugarú körpályához tartozó sebesség) meghatározható. Egy m tömegű, pontszerű test r sugarú körpályán való mozgásának feltétele:

$$mg(r) = m \frac{v_{k,1}^2}{r},$$

ahonnan (1) felhasználásával kapjuk a keringés sebességét:

$$v_{k,1} = R\sqrt{2\pi\gamma\rho} = 9,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Ez az eredmény független a körpálya sugarától (ugyanekkora $r = R$ esetén is), ekkora tehát a henger alakú bolygón az első kozmikus sebesség. Ez a Földre érvényes

$$v_{k,1}^{\text{Föld}} = \sqrt{\frac{\gamma M_{\text{Föld}}}{R}} = R\sqrt{\frac{4}{3}\pi\gamma\rho} = 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

értéknél $\sqrt{3/2}$ -szer nagyobb.

b) Egy r sugarú pályán keringő műhold keringési ideje $2\pi r/v_{k,1}$, ha tehát a bolygó tengely körüli forgásának periódusideje $T_0 = 1$ nap, akkor a szinkronműhold pályasugara

$$r_0 = \frac{T_0 v_{k,1}}{2\pi} = R\sqrt{\frac{T_0^2 \gamma \rho}{2\pi}} = 1,33 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

A Föld esetében ez a távolság

$$r_0^{\text{Föld}} = R\sqrt[3]{\frac{T_0^2 \gamma \rho}{3\pi}} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m},$$

amelynek felhasználásával r_0 így is írható:

$$r_0 = \sqrt{\frac{3(r_0^{\text{Föld}})^3}{2R}}.$$

A távközlési szinkronműholdak tehát $r_0 - R \approx 127\,000$ km magasan keringenek a hosszú, henger alakú bolygó felszíne felett.

c) A második kozmikus sebesség, azaz a bolygóról való szökési sebesség nagyon nagy, hogy pontosan mekkora, az a bolygó hosszától függ. Végtelen hosszú bolygó esetén a szökési sebesség is végtelen nagy, mert az $1/r$ -es törvény szerint változó erősségű gravitációs térből véges energiabefektetéssel *nem lehet* megszökni.

Ennek belátására tekintsük a távolságoknak egy mértani haladvány szerint növekvő sorozatát: $r_n = r_0 \alpha^n$ ($\alpha > 1$ és mondjuk $r_0 = R$). Az r_{n-1} magasságból r_n magasságba való feljutáshoz szükséges $E(r_{n-1} \rightarrow r_n)$ energia független n -től: n növelésekor ahányszorosára csökken az erő, annyiszorosára nő az út. Ebből következik, hogy r_0 magasságból az r_N magasságba való feljutáshoz $E(r_0 \rightarrow r_N) = NE(r_0 \rightarrow r_1)$ energia kell. Látszik tehát, hogy véges energiával csak véges magasságra lehet feljutni.

Ha a bolygó véges H hosszúságú, akkor amíg a végeitől távol vagyunk, és $r \ll H$, addig az erőtvény $1/r$ -es. Ha viszont r összemérhető H -val, akkor az erőtvény jellege megváltozik, és $r \gg H$ esetén már a megszokott $1/r^2$ -es lesz. Egy ilyen bolygóról már véges nagyságú kezdősebességgel indulva is meg lehet szökni.

Megjegyzés. Integrálszámítás segítségével belátható, hogy a második kozmikus sebesség az első kozmikus sebességnek kb. $\sqrt{2 \ln(H/R)}$ -szerese. (A Föld esetében az arány $\sqrt{2}$.) Ez a logaritmikus faktor még $H \gg R$ esetén sem túlságosan nagy (pl. $H = 10R$ -nél $v_{k,2}/v_{k,1}$ kb. 2,1 és $H = 1000R$ esetén is csak 3,7).

M. 54. Írjuk fel a Nap és a Föld közötti gravitációs vonzóerőt, amely biztosítja a közelítőleg körpályán mozgó Föld centripetális gyorsulását, és fejezzük ki az ω szögsebességet a T keringési idővel:

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m r \omega^2 = m r \frac{4\pi^2}{T^2},$$

ahol m a Föld, M a Nap tömege, r pedig a közöttük lévő átlagos távolság. Egyszerűsítsünk m -mel, és fejezzük ki M -et a Nap átlagos ρ sűrűségével és R sugarával:

$$\gamma \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r,$$

amiből a T keringési idő:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma \rho} \left(\frac{r}{R}\right)^3}.$$

Láthatjuk, hogy a Föld keringési ideje a γ gravitációs állandón és a Nap átlagos ρ sűrűségén kívül csak a r/R aránytól függ, tehát az anyagsűrűség változtatlanul hagyása mellett akárhogy is kicsinyítenénk le a Naprendszer, az év hossza ugyanakkora maradna. Az is látszik, hogy a Nap sűrűsége és mérete számít, a Földé nem: ugyanazon a pályán bármilyen, a Naphoz képest kicsiny test ugyanakkora keringési idővel rendelkezne.

Megjegyzés. Kepler harmadik törvénye, a

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$$

összefüggés segítségével is megkaphatjuk eredményünket (itt a a Föld ellipszispályájának félnagy tengelye). Ha a Nap tömegét az átlagsűrűséggel fejezzük ki, akkor azt kapjuk, hogy arányos kicsinyítés esetén még az ellipszispályákon mozgó égitesteknek sem változna meg a keringési ideje.

M. 55. Ha egy testre a kitéréssel arányos nagyságú, de azzal ellentétes irányú erő hat, akkor a test harmonikus rezgőmozgásba kezd. Ez nem csak egydimenziós, hanem síkbeli mozgásokra is igaz, ha az erőtvény irányfüggetlen (izotrop). Ilyen helyzet például a kúpinga kis kitérésű mozgásai esetén valósul meg.

Síkban az azonos frekvenciájú rezgések szuperpozíciója általában ellipszis alakú pályát eredményez, és a vonzócentrum az ellipszis középpontjában helyezkedik el, éppen úgy, mint Furcsavilágban a Nap. Ha az ottani „gravitációs törvényben” a távolsággal arányos vonzóerő szerepel, akkor a bolygók pályája megfelel a Tompkins úr álmában szereplőnek.

Ez az erőtvény centrális, emiatt ott is érvényes a perdületmegmaradás törvénye, aminek következménye a „területi sebességre” vonatkozó tétel. Kepler II. törvénye tehát Furcsavilágban is ugyanúgy szól, mint nálunk.

A harmonikus rezgőmozgás periódusideje nem függ a kitéréstől, ezért Furcsavilág bolygóinak keringési ideje is *független* a bolygók pályájának adataitól, így minden bolygóra azonos.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy mindössze két olyan centrális erőter létezik, amelyben minden véges mozgás pályája zárt. Ezek azok a terek, melyekben a mozgó testre ható erőt Newton gravitációs törvénye vagy a térbeli harmonikus oszcillátor erőtvénye írja le.

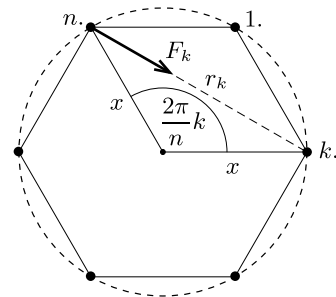
M. 56. Az elrendezés és a kezdeti feltételek szimmetriája miatt valamennyi test ugyanakkora (de időben változó) gyorsulással fog az n -szög középpontja felé zuhanni. Az alakzat megőrzi eredeti alakját, de a testek középponttól mért távolsága egyre gyorsuló (jóllehet *nem egyenletesen* gyorsuló) ütemben csökkenni fog.

Számítsuk ki az egyik (mondjuk az n -edik sorszámú) tömegpontra ható eredő erőt abban a pillanatban, amikor a testek x távolságra vannak a sokszög középpontjától (lásd az *ábrát*). A mozgás kezdetekor $x(t=0) = R$. A k -edik tömegpont által az n -edikre kifejtett erő nagysága

$$F_k(x) = \gamma \frac{m^2}{4x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}k\right)}.$$

Ezzel az n -edik tömegpontra ható eredő erő

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n-1} F_k(x) \sin\left(\frac{\pi}{n}k\right) = \gamma \frac{m^2}{4x^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}k\right)}.$$



Ez az erő helyettesíthető egy

$$M_n = \frac{m}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)}$$

tömegű, a sokszög középpontjában elhelyezkedő, rögzített test gravitációs hatásával. A sokszög csúcsaiban található tömegpontok tehát úgy mozognak, mintha rájuk csak a rögzített vonzócentrum hatna, melynek M_n tömege minden n -re numerikusan kiszámolható:

$$M_2 = 0,25 m; \quad M_3 = 0,58 m; \quad M_4 = 0,96 m; \quad \dots \quad M_{10} = 3,86 m; \quad \dots$$

A vonzócentrumba zuhanást elképzelhetjük úgy, mintha a testek egy-egy nagyon ellaposodott (elfajult, $e \rightarrow 1$ excentricitású), $R/2$ félnagy tengelyű ellipszispályán mozognának a nagytengely egyik végpontjától a másikig. Emiatt a zuhanás T_n ideje az ellipszispályán való mozgás teljes keringési idejének fele:

$$T_n = \frac{T_{\text{ellipszis}}}{2}.$$

Kepler III. törvénye szerint az ellipszispályák periódusideje csak a nagytengelyük hosszától függ, így $T_{\text{ellipszis}}$ meg kell, hogy egyezzen egy $R/2$ sugarú körpályához tartozó $T_{\text{kör}}$ keringési idővel, amelyet a körmozgás dinamikai egyenletéből tudunk meghatározni:

$$\gamma \frac{m M_n}{(R/2)^2} = m \frac{R}{2} \left(\frac{2\pi}{T_{\text{kör}}} \right)^2,$$

ebből:

$$T_{\text{ellipszis}} = T_{\text{kör}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{8\gamma M_n}}.$$

Végül tehát a keresett zuhanási idő:

$$T_n = \pi \sqrt{\frac{R^3}{8\gamma M_n}}.$$

Hátravan még az $n \gg 1$ határeset vizsgálata. A testek n számának növekedésével M_n még akkor is növekszik, ha az egész rendszer össztömege egy rögzített M_0 érték, vagyis $m = M_0/n$. Megmutatjuk, hogy az $n \rightarrow \infty$ határesetben M_n is végtelenhez tart.

Az állítás belátásához azt fogjuk felhasználni, hogy minden $0 < x < \pi$ számra teljesül az

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x}$$

reláció. Ezért az M_n tömeget alulról becsülhetjük a következőképpen:

$$\frac{M_0}{4n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)} > \frac{M_0}{4n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\frac{\pi k}{n}}.$$

Az egyenlőtlenység jobb oldalán (n -nel való egyszerűsítés után) az n -nél kisebb pozitív egész számok reciprokeinak összege jelenik meg, amely $n \rightarrow \infty$ esetén tart a végtelenhez. Ez azt jelenti, hogy M_n is tart a végtelenhez, a T_n zuhanási idő pedig a nullához, azaz az egyenletes tömegeloszlás határesetje szinguláris.

A kapott eredmény fizikai értelmezése óvatosságot igényel. Matematikai szingularitás megjelenésekor mindig meg kell keresni, hogy az alkalmazott fizikai közelítések nem veszítik-e érvényüket. A sokszög csúcsaiban elhelyezkedő (a valóságban kisméretű, véges tömegsűrűségű) testeket végtelen sűrűségű tömegpontoknak tekintettük, és ez a közelítés véges n esetén az összeroskadás ideje szempontjából nem okozott gondot. Ha viszont n -nel tartunk a végtelenhez, akkor már nem engedhető meg a pontszerűség absztrakciója, tehát figyelembe kell vennünk az egymást vonzó testek véges méretét is.

Minél finomabban osztunk tehát szét egy adott anyagmennyiséget egy kör mentén, annál rövidebb idő szükséges ahhoz, hogy a saját gravitációs vonzásának hatására „összeroskadjon” a rendszer. A folytonos, *vonalszerűen szétszórt* anyageloszlást viszont nincs értelme vizsgálni, a keresztirányú méretek ilyenkor *nem* hanyagolhatók el!

M. 57. Az a célunk, hogy a rakéta minél nagyobb összenergiára tegyen szert. Ha a gravitációs helyzeti energiát a „végtelenhez” viszonyítjuk, akkor a Föld felszínén álló rakéta energiája negatív. A hajtóművek működése során felszabaduló energia megnöveli a rakéta összenergiáját, és akkor képes elhagyni a Föld „vonzáskörét”, ha a helyzeti és mozgási energiájának összege pozitívvá válik.

A főhajtómű és a segédhajtómű működése során felszabaduló energia a rakéta és a kilövellt égéstermékek összes energiáját egy meghatározott értékkel megnövelik. Ez a növekedés független attól, hogy mikor kapcsoljuk be a hajtóműveket, az viszont már függ a rakétaműködtetés időbeosztásától, hogy az égéstermékek mekkora sebességgel esnek vissza a Földre. Minél később kapcsoljuk be ugyanis a segédhajtóművet, annál magasabbról kezdenek visszahullani az égéstermékek, a földetéréskor tehát annál nagyobb lesz a sebességük, összenergiájuk. Ezek szerint a rakétának maradó energia annál nagyobb, minél hamarabb kapcsoljuk be a segédhajtóművet. (Ugyanez érvényes a főhajtóműre is: ha csak az energiaviszonyokat figyeljük, érdemes minél nagyobb intenzitással, minél rövidebb ideig működtetni a hajtóműveket.)

M. 58. a) Egy v sebességgel R sugarú körpályán keringő műhold centripetális gyorsulása $g = v^2/R$. Amennyiben R a Föld sugara (pontosabban: annál egy kicsit nagyobb érték), akkor g éppen a földi gravitációs gyorsulás, ahonnan a keringés sebessége (az „első kozmikus sebesség”)

$$v_{k,1} = \sqrt{gR} = 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

A műholdak indításakor ténylegesen nincs szükség ekkora kezdősebességre, ha a Föld tengely körüli forgásából adódó „kezdősebességet” is figyelembe vesszük. Ez a sebesség az Egyenlítő mentén a legnagyobb, kb. 0,5 km/s. Ezek szerint a Földhöz

képest 7,4 km/s kezdősebességgel is pályára állítható egy műhold, de csak akkor, ha az Egyenlítőről (vagy annak közeléből) *kelet felé* indítjuk.

b) Poláris (a sarkok fölött is elhaladó) pályán keringő műholdaknak a Föld forgástengelyére vonatkoztatott impulzusnyomatéka nulla. Ennek a feltételnek már az indulás után teljesülnie kell, hiszen a fellövés után a perdület már nem fog megváltozni. Emiatt az előző alpontban leírt „segítséget” nem vehetjük igénybe. Sőt, a Föld forgása hátrányt jelent, hiszen az indításnál a műholdnak észak-dél irányban meg kell kapnia a 7,9 km/s-os sebességet, és emellett még el kell tüntetni a Föld tengely körüli forgásából adódó felesleges nyugat-kelet irányú sebességet is. (Ez utóbbival nem kellene számolni, ha a holdat a sarkok közeléből indítanánk, ennek azonban technikai akadályai vannak.)

A poláris pályára állításhoz tehát legalább $\frac{7,9}{7,4} \approx 1,07$ -szer nagyobb kezdősebességre, vagyis 1,14-szer nagyobb mozgási energiára van szükség. Ez látszólag nem nagy különbség, a valóságban azonban óriási erőfeszítést igényel a kezdősebesség egészen csekély növelése is. Ennek az a magyarázata, hogy az űreszközzel együtt a hordozórakétát is fel kell gyorsítani, és emiatt az indítási tömeg nagyon érzékenyen (exponenciálisan) függ az elérni kívánt végsebességtől.

c) A Föld vonzásának elhagyásához az szükséges, hogy az űrszonda teljes (gravitációs + mozgási) energiája legalább zérus legyen:

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv_{k,2}^2 - \gamma \frac{mM_{\text{Föld}}}{R_{\text{Föld}}} = 0,$$

itt m és $M_{\text{Föld}}$ az űrszonda, illetve a Föld tömege, $R_{\text{Föld}}$ a Föld sugara, $v_{k,2}$ pedig a „második kozmikus sebesség”. Ebből

$$v_{k,2} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_{k,1} \approx 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Ennek eléréséhez is felhasználható a Föld tengely körüli forgása, tehát (egyenlítői és kelet felé történő indítással) 10,7 km/s-os kezdősebesség is elegendő.

d) A Föld $v_{\text{F}} = 29,8$ km/s-os sebességgel kering a Nap körül. A c) részhez teljesen hasonló számolással kapjuk, hogy a Naprendszer elhagyása akkor sikerülhet, ha az űrszonda Naphoz viszonyított sebessége a Föld gravitációs vonzásának leküzdése után legalább

$$v_0 = \sqrt{2}v_{\text{F}}.$$

Ezt leggazdaságosabban úgy érhetjük el, ha a Föld keringési sebességével azonos irányban indítjuk útjára a szondát. Így a szonda Földhöz viszonyított sebessége (a Földtől elegendően távol, de a Naptól még mindig a Föld pályasugarával megegyező távolságban) $v_0 - v_{\text{F}}$. A földfelszínről ennél valamivel nagyobb v_i sebességgel kell indulnia a szondának, amit az energiamegmaradásból határozhatunk meg:

$$\frac{1}{2}m \left(v_i + 0,5 \frac{\text{km}}{\text{s}} \right)^2 - \gamma \frac{mM_{\text{Föld}}}{R_{\text{Föld}}} = \frac{1}{2}m(v_0 - v_{\text{F}})^2,$$

ahol figyelembe vettük az Egyenlítő 0,5 km/s-os kerületi sebességéből adódó segítő hatást is. Ebből az egyenletből (1) felhasználásával kapjuk a Naprendszer elhagyásához szükséges minimális indítási sebességet:

$$(2) \quad v_i = \sqrt{(v_0 - v_F)^2 + v_{k,2}^2} - 0,5 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 16,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Ha az űrszondát a Napba szeretnénk juttatni, akkor a Naphoz képest „meg kell állítanunk”. Ennek egyik lehetséges módja, hogy a szonda perdületét rögtön a kilövéskor lenullázzuk oly módon, hogy a szondát a Föld keringési sebességével ellentétes irányba indítjuk el. A kilövés minimális sebességét a (2) összefüggés felhasználásával, a $v_0 = 0$ helyettesítéssel kaphatjuk meg, eredményül 31,3 km/s adódik. Ezzel a módszerrel tehát sokkal nagyobb energiabefektetés szükséges az űrszonda Napba juttatásához, mint a Naprendszer elhagyásához.

Létezik egy másik lehetőség is, amivel sokkal gazdaságosabban (igaz, jóval hosszabb idő alatt) a Napba vezérelhetjük az űrszondát. Ehhez előbb juttassuk el a szondát a lehető legkisebb indítási sebességgel (azaz 16,2 km/s-mal) a Naprendszer „szélére”, majd egy hajtómű rövid működtetésével (elhanyagolhatóan kis energia befektetésével) állítsuk meg a Naphoz képest! Ezután már csak meg kell várnunk, amíg az űrszonda a gravitációs vonzás hatására a Napba zuhan. Ezen a módon ugyanakkora energiabefektetéssel lehet a szondát a Napba juttatni, mint a Naprendszerből eltávolítani.

Megjegyzések. 1. A fentiekből kitűnik, hogy a két említett módszer közül bármelyiket válasszuk is az űrszonda Napba juttatásához, sokkal nehezebb dolgunk van, mint a Naprendszerből való eltávolítás esetén. Ezt az a tény is alátámasztja, hogy az utóbbi vállalkozást már sikerült megvalósítani, míg az előbbi még várat magára. Az első emberalkotta szerkezet, ami elhagyta a Naprendszert és kilépett a csillagközi térbe, az 1977-ben útjára indított *Voyager 1* űrszonda. A Naprendszer határának átlépését hivatalosan 2013-ban erősítették meg.

2. Ügyes manőverezéssel még gazdaságosabban is el lehet hagyni a Naprendszert, ha figyelembe vesszük a külső bolygók (Mars, Jupiter, Szaturnusz) esetleges lendítő hatását is. Alkalmas időpontban és megfelelő irányban indított űrszondákon ezek a bolygók képesek nagyot „lökní”, energiát átadni nekik (gravitációs parittyahatás, lásd a *62. feladatot*). Így a Naprendszer elhagyásához nem is kell „nagyon messzire” eljutniuk az űrszondáknak, elegendő a Marsig vagy a Jupiterig, a többi már megy „magától”.

3. A nagy intenzitással rövid ideig működő hajtóműveknek az embert szállító űrhajóknál az „elviselhető” maximális gyorsulás szab korlátot, a teherszállító rakétáknál viszont természetesen kihasználják a műszakilag megvalósítható legnagyobb kezdeti gyorsítást.

M. 59. Vizsgáljuk először azt a kérdést, hogy legfeljebb mekkora sebességgel csapódhat a Földbe egy üstökös. A Föld pályájához érve az üstökös Naphoz viszonyított sebessége annál nagyobb, minél nagyobb a teljes (gravitációs potenciális és mozgási) energiája. Egy, a Naphoz kötött (ellipszispályán mozgó) test esetén ez az energia mindenképpen negatív, a zérust nem érheti el:

$$-\gamma \frac{mM_{\text{Nap}}}{r} + \frac{1}{2}mv_0^2 < 0,$$

itt m és M_{Nap} az üstökös, illetve a Nap tömege, r a Föld pályasugara, v_0 pedig az üstökös Naphoz viszonyított sebessége. Ha az üstökös nagyon messziről érkezik (az ellipszispálya nagy tengelye nagyon hosszú), akkor a teljes energia megközelítheti a zérus értéket, így

$$v_0^{\max} \approx \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{Nap}}}{r}} = 42,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

A Föld keringési sebessége az előbb kapott értéknek éppen $1/\sqrt{2}$ -ed része, vagyis 29,8 km/s. Az üstökös a *Földhöz viszonyítva* akkor érkezik a lehető legnagyobb sebességgel bolygónk közelébe, ha a Föld keringési sebességével ellentétes irányú a sebessége (és a Föld felé tart). Ekkor a Földhöz rögzített koordináta-rendszerben az üstökös sebessége legfeljebb

$$v_{\text{rel}} = 42,1 \frac{\text{km}}{\text{s}} + 29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 71,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

lehet.

Figyelembe kell még vennünk, hogy a fentebb kiszámított relatív sebességet a becsapódásig a Föld gravitációs vonzása tovább növeli. A gravitációs mező munkája (mialatt az m tömegű üstököst a végtelenből az R sugarú Föld felszínére vonzza) az üstökös mozgási energiáját, és így a sebességét is növeli:

$$0 - \left(-\gamma \frac{mM_{\text{Föld}}}{R} \right) = \frac{1}{2}mv_{\text{becsapódás}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{rel}}^2,$$

amiből a maximális becsapódási sebességre a

$$v_{\text{becsapódás}}^{\max} = \sqrt{v_{\text{rel}}^2 + 2\gamma \frac{M_{\text{Föld}}}{R}} \approx \sqrt{71,9^2 + 11,2^2} \frac{\text{km}}{\text{s}} = 72,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

érték adódik.

Megjegyzés. Még nagyobb értéket kapunk, ha még azt is figyelembe vesszük, hogy az üstökös sebessége akkor a legnagyobb, amikor a Föld napközeli van. Itt az üstökös Naphoz viszonyított sebessége 42,4 km/s, a Föld kerületi sebessége pedig 30,3 km/s, így a becsapódási sebességre 73,6 km/s-ot kapunk eredményül.

Térjünk rá az üstökös lehetséges legkisebb becsapódási sebességének meghatározására! Az üstökös és a Föld relatív sebessége (a Föld gravitációs vonzásának számottevő hatása előtt) tetszőlegesen kicsi lehet; ehhez „csupán” az szükséges, hogy az üstökös Nap körüli keringésének sebessége és a Föld keringési sebessége minél inkább megegyezzen. Ez akkor valósul meg, ha az üstökös pályája a lehető legjobban hasonlít a Föld pályájához, vagyis az üstökös gyakorlatilag a Föld pályáján kering.

Ha egy ilyen – elképzelt – üstökös a Földet lassan megközelítené, a Föld gravitációs vonzása felgyorsítaná, és az üstökös a Földbe csapódna. (A Föld pályáján

ténylegesen nincsenek veszélyes üstökösök, ha lennének, akkor azokat már bizonyára régen észrevettük volna!) A becsapódás sebessége most is ugyanúgy számolható ki, mint az előző esetben, de v_{rel} helyébe nullát írhatunk:

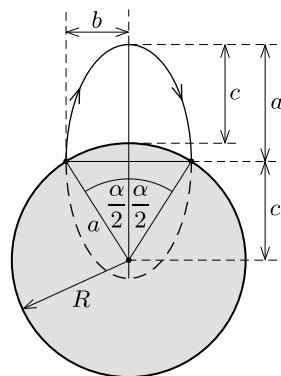
$$v_{\text{becsapódás}}^{\text{min}} = \sqrt{2\gamma \frac{M_{\text{Föld}}}{R}} \approx 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

A Nap körül keringő üstökös tehát legalább ekkora sebességgel éri el a Földet, ha annak csapódik.

Megjegyzés. A fent meghatározott becsapódási sebességek nem a Föld felszínéhez, hanem a Föld középpontjához viszonyítva értendők. Ha figyelembe vesszük azt a tényt, hogy a Föld forgása miatt az Egyenlítő pontjai kb. 0,5 km/s sebességgel mozognak, akkor a felszínhez viszonyított legnagyobb becsapódási sebességre (egy légkör nélküli Földön) az eddigi eredménynél 0,5 km/s-mal nagyobb, a legkisebb becsapódási sebességre pedig ugyanennyivel kisebb értéket kapunk.

M. 60. A mesterséges hold pályája *Kepler I. törvénye* szerint egy olyan ellipszis, melynek egyik fókuszpontja egybeesik a bolygó középpontjával. Az *1. ábráról* leolvasható, hogy ($\alpha > 0$ esetén) visszaérkezéskor a sebességvektor akkor lesz párhuzamos (és ellentétes irányú) a kilövési sebességével, ha a kilövési és a visszaérkezési pontok az ellipszis kistengelyének végpontjai. Ekkor viszont az ellipszis $2a$ nagytengelye éppen a bolygó sugarának kétszerese, tehát $a = R$. Az ábra segítségével a műhold földfelszínétől mért legnagyobb eltávolodását is meghatározhatjuk:

$$(1) \quad c = R \cos \frac{\alpha}{2}.$$



1. ábra

Kepler III. törvénye értelmében a keringési idők a különböző lapultságú, de azonos nagytengelyű pályákon ugyanakkorák, tehát a szóban forgó ellipszispályán is a teljes keringési idő a megadott T_0 -lal lenne egyenlő. A műhold azonban csak a pálya felét teszi meg. Az ehhez szükséges idő *nem* a keringési idő fele, hanem (*Kepler II. törvénye* szerint) a vezérsugár által sűrt területtel arányos. Mivel az ellipszis teljes területe

$$A_0 = ab\pi = a^2\pi \sin \frac{\alpha}{2},$$

a pálya felének megtétele alatt a vezérsugár által sűrt terület pedig (az *1. ábra* jelöléseivel)

$$A_1 = ab \frac{\pi}{2} + bc = \frac{1}{2}a^2\pi \sin \frac{\alpha}{2} + a^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

ezért a mesterséges hold által az úrben töltött idő

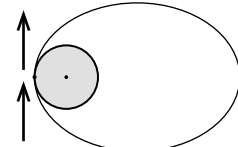
$$(2) \quad T_1 = \frac{A_1}{A_0} T_0 = T_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

Hátravan még az $\alpha \rightarrow 0$ határeset vizsgálata. Az (1) és (2) összefüggések szerint ekkor

$$T_1 \rightarrow T_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right),$$

a felszíntől való legnagyobb eltávolodás pedig R -hez tart. Ezzel szemben $\alpha = 0$ esetén (amikor a műholdat sugárirányban löjük ki, vagyis az indítási és a visszaérkezési pont egybeesik) *tetszőleges* kilövési sebesség megfelelő, és az eltávolodás nagysága is akármilyen nagy vagy kicsi lehet! Ezek a mennyiségek tehát nem folytonos függvényei α -nak az $\alpha = 0$ pontban (sőt, a kapcsolat szigorúan véve nem is függvényszerű).

Megjegyzések. 1. Ismert, hogy egy rögzített vonzócentrum körül ellipszispályán mozgó műhold energiája csak az ellipszis nagyfokuszának hosszától függ, lapultságától nem. Mivel az $\alpha = 180^\circ$ speciális esetben a műhold végig a bolygó felszínének közelében halad ($c = 0$), sebessége pedig az első kozmikus sebesség, ezért a feladatban leírt ellipszispálya $0 < \alpha < 180^\circ$ esetén is úgy valósítható meg, hogy a műholdat az első kozmikus sebességgel indítjuk.



2. ábra

2. Ha $\alpha = 0$ és a kilövési sebesség elegendően nagy (legalább az első kozmikus sebességgel egyenlő), akkor a 2. ábrán látható pálya is megvalósítható. A visszaérkezési sebesség ebben az esetben is párhuzamos a kilövési sebességgel, ráadásul még az irányuk is megegyezik. A bolygótól való eltávolodás tetszőlegesen nagy lehet, a műhold repülési ideje pedig legalább T_0 .

M. 61. Az üstökösök kezdeti összenergiája a parabolapályából következően nulla, így az ütközéskor bekövetkező energiavesztés miatt az azonos kezdősebességgel induló törmelékdarabok ellipszispályán fognak mozogni. Ismert, hogy a Nap körüli ellipszispályák nagyfokuszának csak az összenergia fajlagos (tömegegységre eső) értékétől függ, tehát a törmelékdarabok pályájának nagyfokuszának is azonos. Jelöljük az üstökösök ütközési pontját P -vel, a Nap helyét N -nel, az ellipszisek nagyfokuszát pedig $2a$ -val (1. ábra)!

Felhasználva a probléma forgásszimmetriáját, vizsgálódjunk valamelyik, az NP szakaszt tartalmazó, önkényesen választott síkban! Az ellipszisek egyik fókuszpontja közös: ez a Nap. A másik fókusz távolsága a P ponttól

$$r_1 = 2a - NP$$

adott, hiszen az ellipszis pontjainak a két fókuszról mért távolságának összege éppen a nagyfokusz hosszával egyenlő. Az ellipszisek N ponton kívüli másik fókuszai tehát a P középpontú, r_1 sugarú k_1 körön fekszenek.

Tekintsünk most egy tetszőleges Q pontot a síkban! Ha a Q ponton halad át ellipszis, akkor a fókuszpontjának

$$r_2 = 2a - NQ$$

távolságra kell lennie a Q ponttól. Rajzoljunk Q köré egy r_2 sugarú k_2 kört! Három eset lehetséges.

1. Ha k_2 metszi a k_1 kört, akkor a Q pont két különböző ellipszisen is rajta van, a keletkező metszéspontok pedig megadják e két ellipszis fókuszpontjait.

2. Ha a k_1 és k_2 körnek nincs közös pontja, akkor a Q ponton nem halad át a törmelékdarabok egyik lehetséges pályája sem, tehát Q a burkológörbén kívül helyezkedik el.

3. Az első két esetet elválasztó határhelyzetben, amikor a k_1 és k_2 körök érintik egymást (az ábrán látható F' pontban), a Q ponton egyetlen ellipszis halad át. Ez azt jelenti, hogy Q éppen rajta van a burkológörbén.

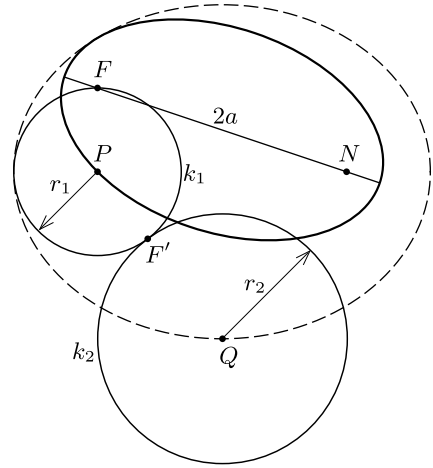
A harmadik esetben fennáll, hogy

$$PQ = r_1 + r_2 = (2a - NP) + (2a - NQ),$$

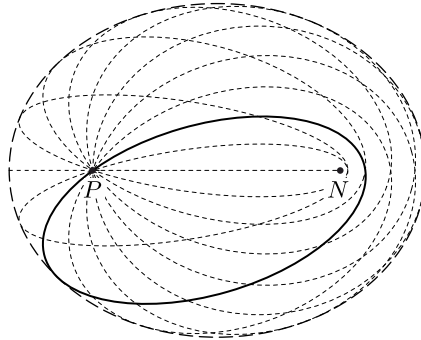
vagyis

$$NQ + PQ = 4a - NP = \text{állandó},$$

tehát a burkológörbe pontjai egy ellipszisen fekszenek. A forgásszimmetria miatt a törmelék darabjainak pályája térben egy $4a - NP$ nagytengelyű, P és N fókuszpontú forgásellipszoid (2. ábra).



1. ábra



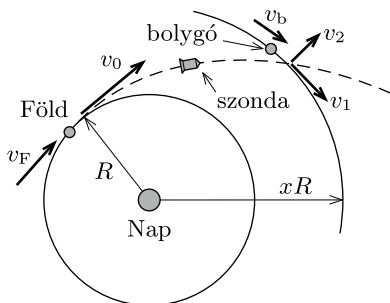
2. ábra

M. 62. Jelöljük v_0 -al azt a sebességet, amellyel a szonda a Naphoz képest álló vonatkoztatási rendszerben a Föld gravitációs környezetének „elhagyása” után rendelkezik. (Ez a gyakorlatban annyit jelent, hogy a szonda távolsága a Földtől már sokkal nagyobb a Föld sugaránál, de a Nap-Föld távolsághoz képest még elenyészően kicsi.) Feladatunk v_0 legkisebb (de a Naprendszer elhagyásához elegendő) értékének meghatározása.

Megjegyzés. A Föld v_F keringési sebességének és tengely körüli forgásának „segítő hatását” figyelembe véve a szondát a Föld felszínéről v_0 -nál kisebb,

$$v_i = \sqrt{(v_0 - v_F)^2 + (11,2 \text{ km/s})^2} - 0,5 \text{ km/s}$$

nagyságú sebességgel kell indítani (lásd az 58. feladat megoldását!). Mivel azonban v_0 monoton növekvő függvénye v_i -nek, a legkisebb v_i helyett kereshetjük v_0 minimálisan elegendő értékét is.



1. ábra

Legyen R a Föld pályasugara (ez éppen 1 CsE), a parittyahatást kiváltó bolygó keresett pályasugara pedig $R_b = xR$. A szonda indítási idejének alkalmas választása esetén az űreszköz éppen akkor fogja a bolygó pályáját elérni, amikor a bolygó is a közelben tartózkodik (1. ábra). A szonda sebességének v_1 tangenciális és v_2 radiális komponensét a bolygó pályájánál (de a bolygó hatásával még nem számolva) a perdületmegmaradásból és az energiamegmaradás törvényéből határozhatjuk meg:

$$(1) \quad mRv_0 = mxRv_1, \quad \text{vagyis} \quad v_1 = \frac{v_0}{x},$$

illetve

$$(2) \quad \frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma \frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) - \gamma \frac{Mm}{xR}.$$

(m a szonda tömegét, M pedig a Nap tömegét jelöli.) Érdemes még kiszámítani a Föld és a bolygó keringési sebességét. A centripetális gyorsulásokból

$$\gamma \frac{M}{R^2} = \frac{v_F^2}{R},$$

azaz

$$(3) \quad v_F^2 = \frac{\gamma M}{R},$$

és hasonlóan a bolygó sebessége:

$$(4) \quad v_b = \sqrt{\frac{\gamma M}{xR}} = \frac{1}{\sqrt{x}}v_F.$$

(1), (2) és (3)-ból kiszámíthatjuk, hogy

$$(5) \quad v_2 = \sqrt{v_0^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - 2v_F^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)},$$

ami akkor valós, ha a gyök alatt nemnegatív kifejezés áll, vagyis teljesül, hogy

$$(6) \quad v_0 \geq v_F \sqrt{\frac{2x}{1+x}}.$$

Ellenkező esetben a szonda nem jut el a bolygó pályasugarának megfelelő (a Naptól x csillagászati egységre lévő) távolságig.

Üljünk bele – gondolatban – a bolygóhoz rögzített koordináta-rendszerbe! Innen nézve a szonda sebessége a Nappal ellentétes irányban v_2 , erre merőleges (tangenciális) irányban pedig $v_1 - v_b$, a szonda és a bolygó relatív sebessége tehát

$$(7) \quad v_{\text{rel}} = \sqrt{(v_1 - v_b)^2 + v_2^2}.$$

A bolygóval „ütköző” szonda sebességének iránya – az ütközési paraméterek gondos beállításával – gyakorlatilag tetszőlegesen megváltoztatható, így pl. elérhető (2. ábra), hogy az ütközés után a szonda Naphoz viszonyított sebessége és a bolygó sebessége azonos irányú legyen. (A Naprendszer elhagyása szempontjából ez a legkedvezőbb eset, hiszen ekkor lesz a szonda Naphoz viszonyított sebessége a lehető legnagyobb.)

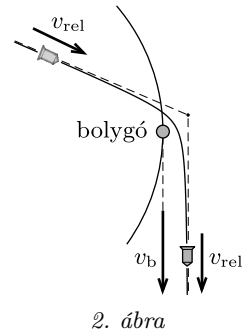
Az ütközésnél – a bolygóhoz rögzített rendszerben – a szonda mechanikai energiája megmarad, így a bolygótól eltávolodva ismét v_{rel} nagyságú lesz. A Nap koordináta-rendszerében a szonda sebessége $v_{\text{rel}} + v_b$, és ha ez eléri a bolygó pályasugarához tartozó $\sqrt{2}v_b$ szökési sebességet, a szonda elhagyhatja a Naprendszert. Ennek feltétele:

$$(8) \quad v_{\text{rel}} = (\sqrt{2} - 1) v_b.$$

(5), (7) és (8) felhasználásával v_0 -ra egy másodfokú egyenletet kapunk, amelynek $x > 1$ feltétel esetén pozitív megoldása:

$$(9) \quad \frac{v_0}{v_F} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \sqrt{\frac{1}{x^3} + 2 - \frac{\sqrt{8}}{x}} \equiv f(x).$$

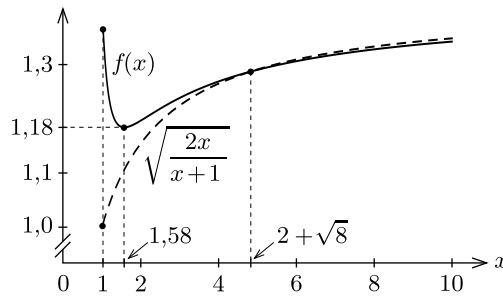
A kapott eredmény $x \leq 2 + \sqrt{8}$ esetén teljesíti a (6) feltételt, ennél nagyobb x értékeknél azonban (9) helyett a (6) egyenlettel határozhatjuk meg a minimális indítási sebességet. A Naptól x csillagászati egység távolságra lévő bolygó lendítő



hatásával tehát akkor tudja az űrszonda elhagyni a Naprendszert, ha kezdősebessége legalább

$$(10) \quad \left(\frac{v_0}{v_F}\right)_{\min} = \begin{cases} f(x) & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 + \sqrt{8} \\ \sqrt{\frac{2x}{x+1}} & \text{ha } x > 2 + \sqrt{8}. \end{cases}$$

A leghatásosabb hintamanővert (parittyahatást) előidézni képes bolygó (csillagászati egységekben mért) pályasugarát a (10) kifejezés minimumhelye adja meg. Ha $x \approx 1$ vagy $x \gg 1$, akkor (10) szerint $v_0 \approx \sqrt{2}v_F$, vagyis a szükséges indítási sebesség megegyezik a parittyahatás nélküli űrprogram esetével. Ez szemléletesen jól érthető: a Föld (vagy a Földhöz közeli pályán keringő égitest) nem képes nagyot lendíteni a szondán, hiszen a relatív tangenciális sebességük igen kicsi lenne. Egy nagyon távoli égitest (pl. a Pluto) sem lenne hatékony „csúzli”, mert ha a szonda „saját erejéből” odáig eljutott, akkor már majdnem elhagyta a Naprendszert, további segítségre alig van szüksége.



3. ábra

A (10) kifejezést grafikusán ábrázolva megállapíthatjuk, hogy a legkisebb indítási sebességet $x = 1,58$ -nál kapjuk (lásd a 3. ábrát). Érdekes, hogy ez az érték majdnem pontosan megegyezik a Mars pályasugarával (1,52 CsE), a (közel) optimális hintamanőver tehát ténylegesen megvalósítható!

Megjegyzések. 1. A Mars pályasugarával számolva az űrszonda minimális kezdősebessége a Naphoz képest $v_0 = 1,18v_F \approx 35,2$ km/s. Ez az érték a parittyahatás nélkül $\sqrt{2}v_F \approx 42,1$ km/s lenne. Ennél sokkal drámaibb a különbség, ha a szonda földfelszínhez viszonyított v_i indítási sebességére vagyunk kíváncsiak. Az 58. feladatban kapott

$$v_i = \sqrt{(v_0 - v_F)^2 + (11,2 \text{ km/s})^2} - 0,5 \text{ km/s}$$

összefüggés szerint hintamanőver nélkül minimálisan 16,2 km/s kilövési sebesség szükséges a Naprendszer elhagyásához, a gravitációs parittya segítségével pedig mindössze 11,9 km/s is elegendő.

2. A Nap vonatkoztatási rendszerében az űrszonda energiája nem marad meg, a hintamanőver során energiát nyer a bolygótól. Ennek következtében a bolygó teljes energiája ugyanennyivel csökken, ami a bolygó pályasugarának észrevehetően kicsiny csökkenéséhez és sebességének minimális növekedéséhez vezet.

M. 63. a) A légkörben sűrűlő műhold pályája mindvégig körrel közelíthető, ezért a mozgás dinamikai feltétele

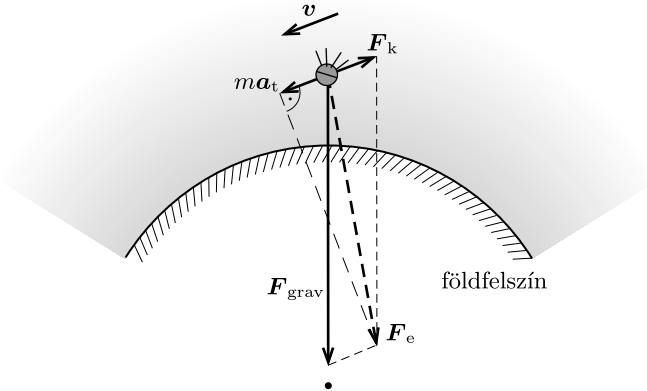
$$(1) \quad \gamma \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r},$$

ahol m és M a műhold, illetve a Föld tömege, r a műhold távolsága a Föld középpontjától, v pedig a műhold sebessége. Ebből a

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}$$

összefüggésre jutunk, ahonnan leolvasható, hogy ha a műhold keringési magassága (pályasugara) csökken, akkor a sebessége növekszik, azaz a műhold a levegő sűrűlése következtében *felgyorsul!* Ezt a meglepő ténytet *űrhajózási paradoxonnak* is szokás nevezni.

A műhold sebességének növekedése dinamikailag is megérthető a (nem méretarányos) *ábra* segítségével. A közegellenállási erő a sebességgel ellentétes irányú, a gravitációs erő pedig a Föld középpontja felé mutat, az utóbbi viszont a műhold süllyedése miatt *nem* merőleges a sebességre. A gravitációs erő pályamenti komponense tehát nem nulla, hanem a sebességgel megegyező irányba mutat. Abban az esetben, ha ez a vetület nagyobb, mint a közegellenállási erő (ahogy azt a *b*) részben megmutatjuk), akkor a műhold mozgása valóban felgyorsul.



b) A közegellenállási erő teljesítménye negatív, $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v} = -F_k \cdot v$, ez okozza a műhold teljes energiájának csökkenését:

$$(2) \quad \frac{\Delta E_{\text{össz}}}{\Delta t} = -F_k \cdot v.$$

A teljes energia a mozgási energiából és a gravitációs potenciális energiából áll:

$$E_{\text{össz}} = E_{\text{mozg}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\gamma \frac{mM}{r}\right).$$

Az (1) egyenlet miatt a mozgási és a potenciális energia között mindig fennáll az

$$(3) \quad E_{\text{pot}} = -2E_{\text{mozg}}$$

összefüggés, ezért az összenergiát $E_{\text{össz}} = -E_{\text{mozg}}$ alakban is felírhatjuk. Az összenergia tehát éppen annyit csökken, mint amennyivel a mozgási energia növekszik. Ennek segítségével (2) a következő alakot ölti:

$$-\frac{\Delta E_{\text{mozg}}}{\Delta t} = -F_{\text{k}} \cdot v,$$

a mozgási energiát részletezve:

$$F_{\text{k}} \cdot v = \frac{\Delta \left(\frac{1}{2}mv^2 \right)}{\Delta t} = mv \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

A jobb oldalon megjelenő $\Delta v/\Delta t$ nem más, mint a műhold a_t tangenciális (pályamenti) gyorsulása, ezért:

$$(4) \quad F_{\text{k}} = ma_t, \quad \text{vektorosan} \quad -F_{\text{k}} = ma_t.$$

Az ma_t kifejezés Newton II. törvénye szerint a műholdra ható F_e eredő erő pályamenti vetületével egyenlő, amely most a gravitációs erő tangenciális komponensének és a közegellenállási erőnek az eredője (lásd az *ábrát*). A gravitációs erő pályamenti összetevője (ez növeli a műhold sebességét) tehát (4) értelmében kétszer akkora, mint a közegellenállási erő (ez okozza az energiacsökkenést), így a műhold sebességét éppen a közegellenállási erővel egyenlő nagyságú, de azzal *ellentétes* irányú erő növeli! (A gravitációs erő sebességre merőleges összetevője okozza a műhold sebességének elfordulását, pályájának görbületét, de ez nem befolyásolja a műhold sebességének nagyságát.)

c) Ismét a műhold teljes energiájának változásából érdemes kiindulnunk, de az összenergiát most ne a mozgási, hanem a gravitációs potenciális energiával fejezzük ki. A (3) összefüggést felhasználva kapjuk, hogy az összes energia és a potenciális energia kis megváltozása közötti kapcsolat:

$$(5) \quad \Delta E_{\text{össz}} = \frac{1}{2} \Delta E_{\text{pot}}.$$

A potenciális energia megváltozása kifejezhető a pályasugár kicsiny Δr megváltozásával:

$$(6) \quad \Delta E_{\text{pot}} = \Delta \left(-\gamma \frac{mM}{r} \right) = \gamma \frac{mM}{r^2} \Delta r.$$

Ismert adat, hogy egyetlen ($2\pi r/v$ ideig tartó) fordulat során a műhold Föld középpontjától mért távolsága $\varepsilon = 100$ m-rel csökken, így a műhold pályasugarának változási üteme

$$(7) \quad \frac{\Delta r}{\Delta t} = -\frac{\varepsilon}{2\pi r/v}.$$

A (2), (5), (6), (7) egyenleteket összevetve kifejezhetjük a műholdra ható közegellenállási erőt:

$$F_k = \frac{1}{4\pi} \gamma \frac{mM}{r^3} \varepsilon.$$

Felhasználva az (1) összefüggést, valamint azt a tényt, hogy a közegellenállási erő $F_k = c\rho v^2$ alakú, meghatározhatjuk a légkör sűrűségét a műhold magasságában:

$$\rho = \frac{1}{4\pi c} \frac{m}{r^2} \varepsilon.$$

Behelyettesítve az ε , c és m ismert adatokat, valamint a pályasugár $r = 6370 \text{ km} + 200 \text{ km} = 6570 \text{ km}$ értékét:

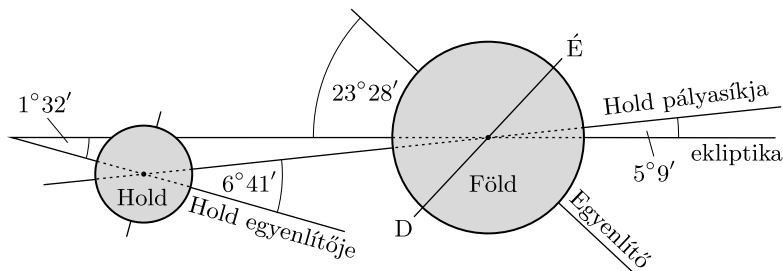
$$\rho = 4,0 \cdot 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Megjegyzések. 1. A légkör ilyen magasan található rétegében (a 85 km-es magasságtól kb. 500 km-ig terjedő termoszférában) ez a rendkívül kicsi sűrűség egyáltalán nem szokatlan. A kapott sűrűségértékre jellemző, hogy míg szobahőmérsékleten, normál nyomáson a levegő molekulái átlagosan kb. 70 nm utat tesznek meg két ütközés között (ez az *átlagos szabad úthossz*), addig ugyanez az érték 200 km magasan több mint 200 méter.

2. A termoszférában, a földfelszíntől 330-420 km-es magasságban kering a Nemzetközi Űrállomás is. A közegellenállás miatt az űrállomás is folyamatosan veszít energiájából, ezért (a Földről felbocsátott űreszközökkel) időről időre magasabb pályára kell „lökni”.

3. Az űrhajózás kezdeti évtizedeiben éppen a feladatban leírt módon, a műholdak pályamagasságának csökkenéséből mérték a termoszférában a légkör sűrűségét (ami időben változó adat).

M. 64. Jelöljük a Föld tömegét M -mel, sugarát R -rel, forgási szögsebességét Ω -val, a Hold hasonló adatait pedig m -mel, r -rel és ω -val. A Hold–Föld távolság legyen L , a tömegközéppont ekkor a Föld középpontjától $\frac{m}{m+M}L$, a Hold középpontjától pedig $\frac{M}{m+M}L$ távolságban található. Mindkét égitest a közös tömegközéppont körül kering, melynek szögsebessége megegyezik a Hold tengely körüli forgásának szögsebességével, ω -val.



Az egyszerűség kedvéért becsléseinknél nem vesszük számításba a földi Egyenlítő síkjának, a Hold keringési síkjának és a Hold egyenlítőjének hajlásszögét, hanem úgy tekintjük, mintha mindezek a mozgások ugyanabban a síkban történnének. Ténylegesen az említett síkok a (nem méretarányos) *ábrán* látható szögekben hajlanak egymáshoz képest.

a) A Nap hatásától eltekintve a Hold és a Föld zárt rendszernek tekinthető, amelyre érvényes a perdületmegmaradás törvénye. A teljes rendszer perdülete az égitestek saját- és pályaperdületeiből tevődik össze:

$$N_{\text{teljes}} = N_{\text{saját}}^{\text{Föld}} + N_{\text{pálya}}^{\text{Föld}} + N_{\text{saját}}^{\text{Hold}} + N_{\text{pálya}}^{\text{Hold}} = \text{állandó.}$$

A Föld tehetetlenségi nyomatékát $\Theta^{\text{Föld}}$ -del, a Holdét pedig Θ^{Hold} -dal jelölve (mindkettőt a saját tömegközéppontjukra vonatkoztatjuk), a rendszer teljes perdülete:

$$N_{\text{teljes}} = \Theta^{\text{Föld}}\Omega + M \left(\frac{m}{m+M}L \right)^2 \omega + \Theta^{\text{Hold}}\omega + m \left(\frac{M}{m+M}L \right)^2 \omega.$$

Ezen a ponton érdemes összehasonlítani a fenti négy tag nagyságrendjét. Az ismert adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy míg az első és az utolsó tag nagyságrendje megegyezik, addig a második és harmadik tagok értéke ezeknél *nagyságrendekkel* kisebb. A Föld pályaperdületét és a Hold sajátperdületét tehát a továbbiakban jogosan elhanyagolhatjuk, a rendszer teljes perdületét pedig a Föld sajátperdületének és a Hold pályaperdületének összegeként közelíthetjük:

$$(1) \quad N_{\text{teljes}} \approx \Theta^{\text{Föld}}\Omega + mL^2\omega = \text{állandó.}$$

A feladat szövege szerint a Hold tömegközéppont körüli mozgásának pályáját jó közelítéssel körnek tekinthetjük, melyre a Newton-féle mozgásegyenlet a

$$\gamma \frac{mM}{L^2} = m \frac{M}{m+M} L\omega^2$$

alakot ölti. Ebből az

$$(2) \quad L^3\omega^2 = \gamma(m+M) = \text{állandó}$$

megmaradási törvényre jutunk (amely lényegében Kepler III. törvényének megfogalmazása).

Az (1) és (2) egyenletekből azt olvashatjuk ki, hogy az L , Ω és ω mennyiségek nem függetlenek egymástól, bármelyikük (kicsiny) megváltozása maga után vonja a másik két mennyiség változását is. Fejezzük ki pl. ΔL segítségével $\Delta\Omega$ -t és $\Delta\omega$ -t. Ha felírjuk (1)-et és (2)-t oly módon, hogy Ω helyébe $\Omega + \Delta\Omega$ -t, ω helyébe $\omega + \Delta\omega$ -t és L helyébe $L + \Delta L$ -t helyettesítünk, akkor a kicsiny megváltozásokra (a kis mennyiségek szorzatait és magasabb hatványait elhanyagolva) a következő összefüggéseket kapjuk:

$$(3) \quad \Delta\Omega = -\frac{mL\omega}{2\Theta^{\text{Föld}}}\Delta L,$$

$$(4) \quad \Delta\omega = -\frac{3\omega}{2L}\Delta L.$$

Leolvasható, hogy a Föld–Hold távolság növekedésével mind a Föld tengely körüli forgása, mind pedig a Hold keringése lassul. Ez a két egyenlet már elegendő arra, hogy összehasonlíthassuk a Föld és a Hold mozgási energiájának megváltozását. A csillagászati adatok ismeretében könnyen belátható, hogy a Földnek nemcsak a perdülete, de a mozgási energiája is döntő mértékben a saját tengelye körüli forgásból adódik, a Hold–Föld rendszer közös tömegközéppontjához viszonyított translációs mozgás energiája elhanyagolható. A Holdnál éppen fordított a helyzet: mozgási energiájának döntő része a keringésből adódik, a forgásából származó energia nem számottevő. Eszerint

$$E_{\text{mozgási}}^{\text{Föld}} \approx \frac{1}{2}\Theta^{\text{Föld}}\Omega^2, \quad E_{\text{mozgási}}^{\text{Hold}} \approx \frac{1}{2}mL^2\omega^2.$$

Ha a Föld tengely körüli forgásának szögsebessége kicsiny $\Delta\Omega$ -val, a Hold keringési szögsebessége $\Delta\omega$ -val, a Föld–Hold távolság pedig ΔL -lel megváltozik, akkor a mozgási energiák megváltozása

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{mozgási}}^{\text{Föld}} &= \Theta^{\text{Föld}}\Omega \cdot \Delta\Omega, \\ \Delta E_{\text{mozgási}}^{\text{Hold}} &= mL\omega^2 \cdot \Delta L + mL^2\omega \cdot \Delta\omega \end{aligned}$$

értékű lesz, ahogy arról deriválással vagy a másodrendűen kicsiny tagok elhanyagolásával meggyőződhetünk. A (3) és (4) egyenletek felhasználásával az energia-változások tovább alakíthatók:

$$\Delta E_{\text{mozgási}}^{\text{Föld}} = -\frac{1}{2}mL\omega\Omega \cdot \Delta L, \quad \Delta E_{\text{mozgási}}^{\text{Hold}} = -\frac{1}{2}mL\omega^2 \cdot \Delta L.$$

A mozgási energiák megváltozásának arányára (ami egyenlő a mozgási energiák $\dot{E} = \Delta E/\Delta t$ változási ütemének arányával) tehát az igen egyszerű

$$\frac{\Delta E_{\text{mozgási}}^{\text{Föld}}}{\Delta E_{\text{mozgási}}^{\text{Hold}}} = \frac{\dot{E}_{\text{mozgási}}^{\text{Föld}}}{\dot{E}_{\text{mozgási}}^{\text{Hold}}} = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{27,3 \text{ nap}}{1 \text{ nap}} = 27,3$$

eredményt kapjuk. Látszik, hogy az árapálykeltő erők elsősorban a Föld mozgási energiáját csökkentik, sokkal nagyobb mértékben, mint a Holdét. További érdekesség, hogy a számolás során a Föld tehetetlenségi nyomatéka „kiesett”, a Föld tömegeloszlására vonatkozóan tehát semmilyen feltevessel nem kellett élnünk.

Megjegyzés. A Föld–Hold rendszer teljes mechanikai energiája, a mozgási energiák és a gravitációs helyzeti energia összege nem marad változatlan, hanem időben (a Föld és a Hold közeteinek, illetve az óceánok belső súrlódásának következtében) lassan csökken. A disszipatív folyamatok miatt tehát a mozgásra nem érvényes a mechanikai energia-megmaradás törvénye!

b) A Föld forgási periódusidejének megváltozása kifejezhető a szögsebesség változásával:

$$\Delta T^{\text{Föld}} = \frac{2\pi}{\Omega + \Delta\Omega} - \frac{2\pi}{\Omega} \approx -\frac{2\pi}{\Omega^2}\Delta\Omega.$$

(3) felhasználásával a földi nap hosszának megváltozására a

$$\Delta T^{\text{Föld}} = \frac{\pi m L \omega}{\Theta^{\text{Föld}} \Omega^2} \Delta L$$

összefüggést kapjuk. A Föld tehetetlenségi nyomatékát becsülhetjük a homogén tömegeloszlású gömbre vonatkozó $\frac{2}{5}MR^2$ formulával, ekkor évente $\Delta T^{\text{Föld}} \approx 18$ μs -os időtartam-növekedést kapunk. Valójában a Föld kérge kisebb sűrűségű, mint a magja, így a tehetetlenségi nyomatéka is kisebb. $\Theta^{\text{Föld}}$ helyére a mérések szerinti $8 \cdot 10^{37}$ kg m^2 értéket behelyettesítve (lásd a könyv végén a függelék) a nap hosszának éves növekedésére valamivel nagyobb, 21 μs adódik. A legpontosabb atomórák mérései szerint a földi nap hossza évente 15 μs -mal növekszik, ami (az alkalmazott közelítéseinket figyelembe véve) megnyugtatóan közel áll a becsült értékhez.

c) A szinkronizálódás befejezésekor $\Omega = \omega \equiv \omega_0$, ezért az (1) perdületmegmaradást a

$$(5) \quad \Theta^{\text{Föld}} \Omega + mL^2 \omega = \Theta^{\text{Föld}} \omega_0 + mL_0^2 \omega_0$$

alakban írhatjuk fel, a (2) Kepler-törvényből pedig az

$$(6) \quad L^3 \omega^2 = L_0^3 \omega_0^2$$

egyenlőség következik. (5) és (6) felhasználásával ω_0 -ra a következő egyenletre jutunk:

$$(7) \quad \Theta^{\text{Föld}} \Omega + mL^2 \omega = \Theta^{\text{Föld}} \omega_0 + mL^2 \frac{\omega^{4/3}}{\omega_0^{1/3}}.$$

Ez egy negyedfokú egyenlet az ismeretlen ω_0 szögsebességre. ω_0 pontos értékének meghatározása legegyszerűbben numerikusan lehetséges. A pontos eredményt jól közelítő megoldást kaphatunk, ha a jobb oldal első tagját a második tag mellett elhanyagoljuk, remélve, hogy az elhanyagolás jogos (ezt később még ellenőriznünk kell). Ezzel a szinkronizálódott Föld–Hold rendszer közös szögsebességére az

$$\omega_0 \approx \omega^4 \left(\frac{\Theta^{\text{Föld}} \Omega}{mL^2} + \omega \right)^{-3}$$

összefüggés adódik. Az ismert adatok behelyettesítése után (a Föld tehetetlenségi nyomatékára a mért értéket használva) a szögsebességre az $\omega_0 \approx 1,53 \cdot 10^{-6}$ $1/\text{s}$ eredményt kapjuk, amelynek felhasználásával a (7) egyenlet jobb oldalának második tagja mintegy 280-szor nagyobb, bizonyul az első tagnál: az elhanyagolás tehát jogos volt.

A szinkronizálódás befejeződésekor a földi nap új hossza

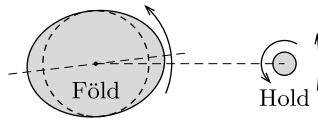
$$T_0^{\text{Föld}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 47 \text{ nap}$$

értékű lesz, azaz több mint másfél hónap! Az akkori Föld–Hold távolság és a jelenlegi arányára (6) felhasználásával az

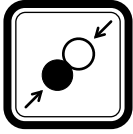
$$\frac{L_0}{L} = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2/3} \approx 1,45$$

eredményt kapjuk.

Megjegyzések. 1. A Föld lassuló forgásának és a Föld–Hold rendszer szinkronizálódásának fizikai magyarázata a következő. A Hold nagyobb gravitációs vonzóerőt fejt ki a Föld azon pontjaira, amelyek a Holdhoz közelebb helyezkednek el, mint azokra a pontokra, amelyek a Holdtól távolabb vannak. Ennek következtében a Föld (nagyon kicsiny mértékben) „megnyúlik”, forgási ellipszoiddá alakul (lásd az *ábrát*). Az ellipszoid nagytengelye azonban a Föld tengely körüli forgása következtében, valamint az óceánok, illetve a Föld kőzeteinek belső sűrűlódása miatt nem a Hold aktuális irányába mutat, hanem ahhoz képest folyamatosan „siet”. Az így keletkezett dudorokra a Hold gravitációs tere forgatónyomatékokat gyakorol, ami lassítja a Föld forgását.

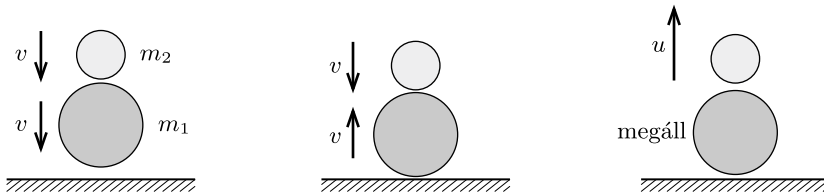


2. A Naprendszerben több példát is találhatunk olyan égitest-párokra, melyeknél a teljes szinkronizáció már bekövetkezett. Az egyik legismertebb a Pluto törpebolygó és legnagyobb holdja, a Charon.



Pontrendszerek

M. 65. a) Hanyagoljuk el a közegellenállást és tekintsük a labdákat tökéletesen rugalmasnak. A h magasságból elejtett labdák $v = \sqrt{2gh}$ sebességgel érik el a talajt. Az alsó labda először a talajjal, majd a felső labdával ütközik. A felső labda akkor részesedik legnagyobb arányban a rendelkezésre álló energiából, ha az alsó labda a két ütközés után éppen nyugalomban marad (lásd az 1. ábrát).



1. ábra

Először az alsó labda függőlegesen felfelé mutató v sebességgel visszapattan a talajról, majd ütközik a v sebességgel lefelé mozgó felső labdával. Mivel az m_1 tömegű labda ütközés utáni sebessége nulla, a lendület és az energia megmaradását kifejező egyenletek:

$$m_1 v - m_2 v = m_2 u \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} m_2 u^2.$$

Ezekből a felső labda ütközés utáni u sebessége és a tömegek aránya kiszámítható:

$$u = 2v, \quad \text{illetve} \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}.$$

A kétszeres visszapattanási sebesség miatt ebben az esetben $4h$ magasra repül fel az m_2 tömegű labda.

b) Meglepő, de a felső labda ennél magasabbra is felpattanhat! Ha $m_1 \gg m_2$, akkor a felső labda az összes energiának csak nagyon kis hányadát „viszi el” az ütközések után, de a sebessége $3v$, a felpattanás magassága pedig (ideális esetben) $9h$ lesz! A gyakorlatban ez az eset valósul meg akkor, ha egy v sebességgel lefelé mozgó pingponglabdát v sebességgel felfelé mozgó ütővel találunk el. A pingponglabda tömege elhanyagolható az ütőhöz képest, ezért a jó közelítéssel tökéletesen rugalmas ütközés úgy is leírható, hogy az álló ütőhöz képest $2v$ sebességgel közeledő labda szintén $2v$ nagyságú, de ellentétes irányú sebességgel pattan vissza. A talajhoz rögzített rendszerben ehhez még hozzá kell adni az ütő v sebességét, így kapjuk meg a pingponglabda $3v$ sebességét.

Megjegyzés. A feladatot általánosíthatjuk N labdára is, melyeket egymás tetejére rakva egyszerre leejtünk (2. ábra). Az a) kérdésben leírt helyzet akkor valósul meg, ha az ütközéssorozat végén a legfelső labda kivételével mindegyik megáll, egyedül a legfelső

pattan fel. Megmutatható, hogy ez a különleges eset akkor következik be, ha a második labda $\frac{1}{3}$ -szor könnyebb a legalsónál, a harmadik $\frac{2}{4}$ -szer a másodiknál, a negyedik $\frac{3}{5}$ -ször a harmadiknál, és általában a k -edik $\frac{k-1}{k+1}$ -szer könnyebb a $(k-1)$ -ediknél:

$$m_k = \frac{k-1}{k+1} m_{k-1},$$

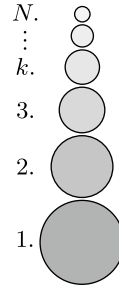
ahol $k = 2, 3, \dots, N-1, N$. Ilyen tömegarányok esetén a legfelső labda Nv sebességre tesz szert.

A *b)* rész megoldása N labda esetén annyiban módosul, hogy a legnagyobb magasság eléréséhez a labdák tömegeinek az

$$m_1 \gg m_2 \gg m_3 \gg \dots \gg m_{N-1} \gg m_N$$

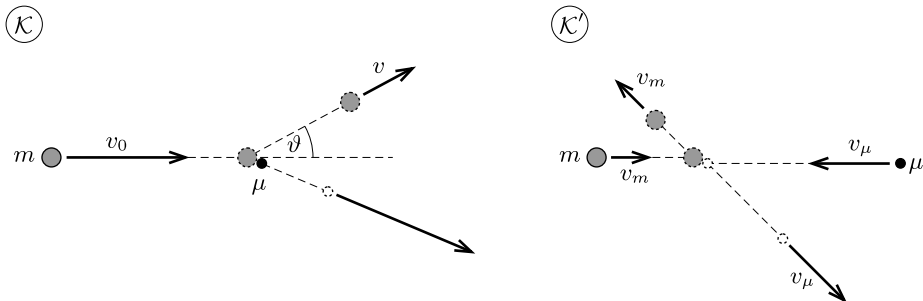
feltételt kell kielégíteniük. Ekkor a legfelső labda $(2^N - 1)v$ sebességgel pattan fel, a legnagyobb emelkedési magasság pedig $(2^N - 1)^2 h$.

A kísérletező hajlamú olvasók próbálkozzanak meg különféle labdák ejtetésével is, amit három vagy több labda esetén úgy végezhetünk el, ha hosszú csőben ejtjük a labdákat. Nagyon szórakoztatóan pattognak!



2. ábra

M. 66. a) Ha az M/m tömegarány elegendően nagy, akkor a beesési egyenes finom beállításával mindig elérhető, hogy az m tömegű korong végigpattogjon a $\mu = M/N$ tömegű korongokon. Ekkor az egyes pattogások során az m tömegű korong sebességének iránya (jó közelítéssel) π/N szöggel fordul el. Abban az esetben viszont, amikor a kezdetben álló korongok μ tömege kisebb egy kritikus értéknél, tetszőleges kezdőfeltétellel sem érhető el, hogy az m tömegű korong π/N szöggel eltérüljön eredeti mozgásirányától.



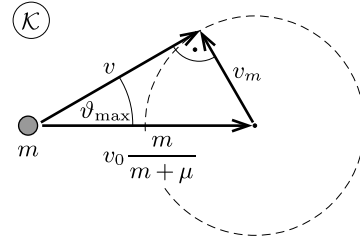
1. ábra

Vizsgáljuk meg, legfeljebb mekkora szögben szóródhat az m tömegű korong egy kezdetben álló, μ tömegű korongon. Jelöljük a beeső korong kezdősebességét az asztalhoz rögzített \mathcal{K} koordináta-rendszerben v_0 -al. Célszerű az ütközést a tömegközépponttal együttmozgó, $v_0 m / (m + \mu)$ sebességű \mathcal{K}' rendszerből leírni. Itt a korongok kezdősebessége

$$(1) \quad v_m = \frac{\mu}{m + \mu} v_0 \quad \text{és} \quad v_\mu = \frac{m}{m + \mu} v_0.$$

A \mathcal{K}' koordináta-rendszerben a két korong összes lendülete nulla, tehát mindig egymással ellentétes irányban, egyenlő nagyságú impulzussal mozognak. Emiatt az energiamegmaradás törvénye csak úgy teljesülhet, ha a korongok impulzusának nagysága (és így a sebességük nagysága is) az ütközés során változatlan marad, csupán az irányuk változik meg (1. ábra).

Az asztalhoz rögzített \mathcal{K} vonatkoztatási rendszerbe úgy térhetünk vissza, ha a \mathcal{K}' -beli sebességvektorokhoz hozzáadjuk a két koordináta-rendszer relatív sebességét. Az m tömegű korongocska ütközés utáni sebessége a 2. ábrán látható kör valamelyik pontjába mutató vektor, amely akkor zárja be a lehető legnagyobb szöveget a kezdeti sebességgel, ha az ütközés utáni v hosszúságú sebességvektor éppen érinti a kört.



2. ábra

A 2. ábráról leolvasható:

$$v_m = v_0 \frac{m}{m + \mu} \sin \vartheta_{\max},$$

ebből (1) felhasználásával kapjuk azt a legnagyobb ϑ_{\max} szöveget, amiben az m tömegű korong szóródhat:

$$(2) \quad \sin \vartheta_{\max} = \frac{\mu}{m} = \frac{M/N}{m}.$$

A tervünk akkor sikerül, ha $\vartheta_{\max} \geq \pi/N$. Mivel az $N \rightarrow \infty$ határesetet kell vizsgálnunk, alkalmazhatjuk a $\sin \vartheta_{\max} \approx \vartheta_{\max}$ közelítést:

$$\frac{\pi}{N} \leq \frac{M/N}{m}, \quad \text{ebből} \quad \frac{M}{m} \geq \pi.$$

Megjegyzés. Hosszadalmas számolással megmutatható, hogy egy álló, μ tömegű részecskén szóródó m tömegű részecske lehetséges legnagyobb ϑ_{\max} szögeltérülését *relativisztikus esetben is* a (2) formula adja meg.

b) A továbbiakban csak a kritikus $M/m = \pi$ tömegarány esetére kell szorítkoznunk. A 2. ábrán látszik, hogy maximális szögeltérülésnél az m tömegű korong ütközés előtti és ütközés utáni sebességei között a következő kapcsolat áll fenn:

$$v^2 = \left(\frac{m}{m + \mu} \right)^2 v_0^2 - v_m^2 = \frac{m^2 - \mu^2}{(m + \mu)^2} v_0^2.$$

A v sebesség $\mu \ll m$ miatt így közelíthető:

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{2\mu}{m + \mu}} \approx \left(1 - \frac{\mu}{m} \right) v_0.$$

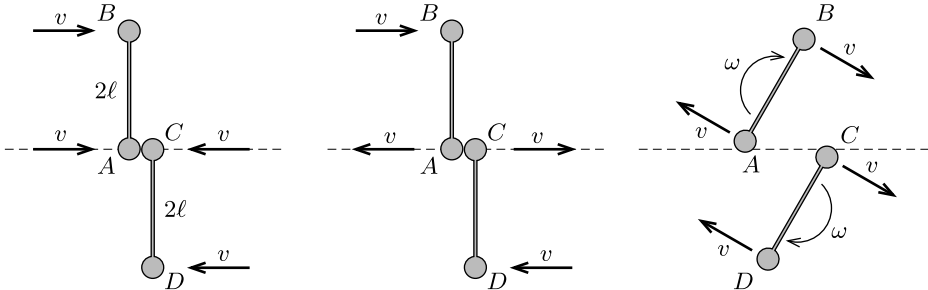
Az m tömegű korong sebessége tehát minden pattanásnál $(1 - \mu/m)$ -szeresére változik, ezért N pattanás után a végsebesség és a kezdeti sebesség hányadosa:

$$\frac{v_{\text{végső}}}{v_{\text{kezdeti}}} = \left(1 - \frac{M}{Nm}\right)^N \approx e^{-M/m} = e^{-\pi} \approx 0,043.$$

Mivel N nagyon nagy, ezért felhasználtuk az útmutatásban megadott határérték-formulát. Az m tömegű korong tehát a kezdeti sebességének kb. 4%-ával távozik.

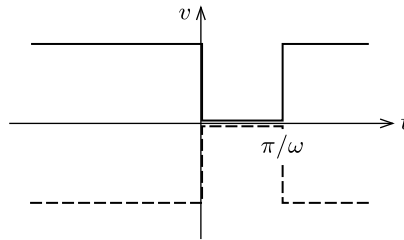
M. 67. I. megoldás. Kezeljük a súlyzókat pontrendszerként! Az ütközés rövid időtartama alatt az 1. ábrán látható A és C jelű korongocskák érintkezési pontjában hirtelen óriási erő ébred, melynek erőlökése véges nagyságú. Az „elhanyagolható tömegű” rudakra eközben nem hathat sem véges erőlökés, sem forgatólökés, hiszen a rudak sebességének és szögsebességének megváltozása (a nullának vehető tömegük és tehetetlenségi nyomatékuk miatt) végtelen nagy lenne. A rudakban hosszirányú erőlökés sem keletkezhet, ellenkező esetben a végeiken található korongok közeledni vagy távolodni kezdenének, ami a rudak állandó hossza miatt lehetetlen. Mindebből az következik, hogy az ütközés során a súlytalan rudak által a végükön elhelyezkedő korongokra kifejtett erőlökés zérus.

A B és D korongok tehát a sebességükkel párhuzamosan nem kapnak erőlökést, így ütközés után v sebességgel, eredeti mozgásirányukban haladnak tovább. Ugyanezen okból az A és C jelű korongok ütközésére érvényes a lendületmegmaradás törvénye. Az ütközés tökéletesen rugalmas, ezért az összes mozgási energiának is meg kell maradnia, ami csak úgy lehetséges, hogy az A és C korongok sebességet cserélnek.



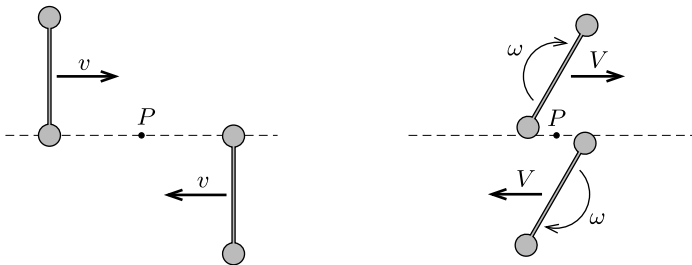
1. ábra

Az ütközés után tehát a súlyzók tömegközéppontja egyhelyben áll, miközben $\omega = v/l$ szögsebességgel forognak. A feladat rejtett érdekessége az, hogy fél fordulat ($t = \pi/\omega$ idő) után a súlyzók újra ütköznek. Egyenletek felírása nélkül, az előzőekben szerzett tapasztalataink birtokában megmondhatjuk, hogy mi történik a második ütközés során. A súlyzók forgó mozgása megszűnik, újra ugyanakkora sebességgel haladnak, mint az első ütközés előtt, pályájuk is ugyanaz az egyenes marad, azonban mozgásukat „fejfelé” folytatják. A két ütközés közötti időt tehát a súlyzók azzal töltik, hogy „fejre állnak”. A súlyzók tömegközéppontjának sebességét az idő függvényében a 2. ábra mutatja.



2. ábra

II. megoldás. Úgy is megoldhatjuk a feladatot, hogy a súlyzókat nem két tömegpontból álló rendszerként, hanem merev testként kezeljük. Mivel a súlyzók azonos sebességgel haladnak egymás felé, lendületük összege a légpárnás asztalhoz rögzített (tömegközépponti) koordináta-rendszerben nulla. A lendület megmaradása így annyit jelent, hogy a két súlyzó tömegközéppontja mindig egyforma nagyságú, ellentétes irányú sebességgel mozog.



3. ábra

Ütközéskor a rendszer energiája és a perdülete is megmarad, mert az ütközés tökéletesen rugalmas, továbbá a súlyzókra külső forgatónyomaték sem hat. Írjuk fel az energia- és perdületmegmaradást, ez utóbbit vonatkoztassuk a súlyzók érintkezési pontjára. Az ütközés előtti és utáni állapotokat a 3. ábra mutatja. Ütközés előtt a súlyzóknak csak a haladó mozgásból származik mozgási energiája, az ütközés után azonban megjelenik a forgásból származó járuléka is:

$$2 \left(\frac{1}{2} 2mv^2 \right) = 2 \left(\frac{1}{2} 2mV^2 + \frac{1}{2} 2ml^2\omega^2 \right)$$

Az ütközés előtt a súlyzóknak csak pályamenti perdületük volt, az ütközés után azonban a tömegközéppont körüli forgásból származó sajátperdületük is megjelenik:

$$2 (\ell \cdot 2mv) = 2 (\ell \cdot 2mV + 2ml^2\omega)$$

A fenti egyenletrendszer nemtriviális ($v \neq V, \omega \neq 0$) megoldására $V = 0$ adódik, vagyis a súlyzók tömegközéppontja megáll az ütközés után. A forgás szögsebessége ekkor $\omega = v/\ell$, amiből az is következik, hogy az ütköző tömegpontok sebességet cserélnek, míg a nem ütközők változatlan sebességgel folytatják útjukat, ahogy azt az I. megoldásban láttuk.

M. 68. A golyók sebessége a tömegközépponti rendszerben minden ütközésnél ugyanolyan arányban, tehát mértani sorozat szerint csökken, és elegendően hosszú idő múlva nullává válik. A golyók egymáshoz viszonyított (relatív) sebessége is ütközésről ütközésre fokozatosan csökken. Ugyanez mondható el a golyók ütközés előtti sebességének különbségéről a laboratóriumi koordináta-rendszerben is, hiszen a relatív sebesség minden vonatkoztatási rendszerben ugyanakkora.

Elegendően sok ütközés után tehát a két golyó együtt fog lengeni, egymáshoz viszonyított sebességük nulla lesz. Mivel az ütközések során a rendszer összes lendülete nem változik, továbbá két ütközés között a gravitációs erő is csak a lendület előjelét változtatja meg, ezért az együtt lengő golyók összes lendülete éppen akkora lesz, mint amekkora a legelső ütközésnél volt.

A harmonikus rezgőmozgás ismert összefüggéseiből tudjuk, hogy a lengés amplitúdója arányos a lengő test maximális sebességével. Közvetlenül az első ütközés előtt a kimozdított (a feladat ábráján a jobb oldali) golyó sebessége $v_0 = \omega \cdot d$ (ahol $\omega = \sqrt{g/\ell}$ az inga körfrekvenciája), a másik golyó pedig áll. A sok ütközés után együtt lengő golyók maximális sebessége (a lendületmegmaradás miatt) $v_0/2$, amplitúdójuk tehát $d/2$. Ezek után már nem történnek ütközések, és a mozgást – hosszabb idő elteltével – csak a légellenállás fogja megállítani.

Megjegyzés. 1. Az n -edik ütközés után a tömegközépponti rendszerben a golyók sebességének nagysága

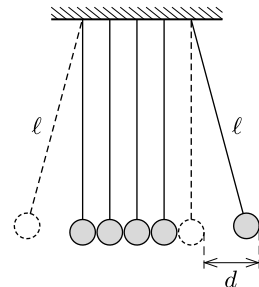
$$v_n^{(\text{tkp})} = k^n \frac{v_0}{2},$$

tehát a laboratóriumi rendszerből nézve közvetlenül az ütközés után a golyók

$$v_n = \frac{v_0}{2} (1 + k^n) \quad \text{és} \quad u_n = \frac{v_0}{2} (1 - k^n)$$

nagyságú sebességekkel indulnak el, még hozzá ugyanabban az irányban. Páratlan számú ütközés után a bal oldali, páros számú ütközést követően pedig a jobb oldali golyó mozog a nagyobb (v_n) sebességgel, míg az u_n sebesség a másik testre vonatkozik. Látszik, hogy az $n \rightarrow \infty$ határesetben mindkét sebesség $v_0/2$ -höz tart.

2. Közismert játék az ábrán látható Newton-bölcső (angolul *Newton's cradle*), amely szorosan egymás mellé függesztett acélgolyókból áll. Ha a szélső golyót d távolsággal kitérítve mozgásba hozzuk a játékot, akkor (a feladatban tárgyalta „két golyós” változathoz hasonlóan) viszonylag rövid idő múlva már nem ütköznek tovább a golyók, hanem a golyósor együtt lengve kollektív ingamozgást végez azonos fázisban. Ilyenkor a kezdeti impulzus egyenletesen oszlik el a játék n golyója között, tehát a kialakuló amplitúdó a kezdőlökést adó golyó eredeti kitérésének n -ed része, d/n lesz.



M. 69. a) Jelöljük a gyorsított gyöngy állandósult sebességét v_0 -al. Bizonyos Δt idő alatt a rugalmatlan ütközések során kialakuló „fürt” $v_0 \Delta t / d$ darab újabb gyöngyszemmel ütközik. Emiatt a fürt tömege ez idő alatt $\Delta m = m v_0 \Delta t / d$ -vel,

impulzusa pedig $\Delta p = v_0 \Delta m = m v_0^2 \Delta t / d$ értékkel növekszik. Newton mozgástörvénye szerint

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m v_0^2}{d},$$

ahonnan az állandósult sebesség: $v_0 = \sqrt{Fd/m}$.

b) Rugalmas ütközéseknél – ha az ütköző testek tömege megegyezik és az egyik test kezdetben állt – a sebességek „felcserélődnek”: a kezdetben mozgó test megáll, a másik pedig akkora sebességgel indul el, amekkorával a nekiütköző test mozgott korábban.

Az F erővel egyenletesen gyorsított első gyöngyszem a második gyöngyszemmel való ütközéséig

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Fd}{m}} = \sqrt{2}v_0$$

sebességre tesz szert. Ekkor „átadja” sebességét a második gyöngyszemnek, ő maga pedig leáll, majd a külső erő hatására ismét egyenletesen gyorsul. Mi történik a meglökött gyöngyszemmel? Egyenletesen, v_1 sebességgel mozogva nekiütközik a harmadiknak, majd megáll. A harmadik gyöngyszem ugyanígy viselkedik, majd a negyedik és a továbbiak is, a „lökéshullám” tehát v_1 sebességgel terjed előre.

Eközben az első gyöngyszem álló helyzetből ismét felgyorsul v_1 sebességre, nekiütközik az addig álló másodiknak, és a folyamat – egy újabb lökéshullám megindításával – megismétlődik. A gyorsított gyöngyszem sebessége 0 és v_1 között egyenletesen változik, átlagos értéke

$$\frac{v_1}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{Fd}{2m}}.$$

Megjegyzés. Érdekes a nem tökéletesen rugalmatlan ütközések esete is. Ebben az esetben (számítógépes szimuláció tapasztalatai alapján) azt állapíthatjuk meg, hogy az egymást lökdöső gyöngyszemek előbb-utóbb egyetlen fürtté állnak össze, amely úgy viselkedik, mintha egy teljesen rugalmatlan test lenne; a fürt végsebessége $v_0 = \sqrt{Fd/m}$ lesz. A fürt képződésének ideje a rugalmatlanság mértékétől (az ún. ütközési számtól) függ. Minél rugalmasabbak az elemi ütközések, annál hosszabb időt vesz igénybe a rugalmatlan fürt kialakulása.

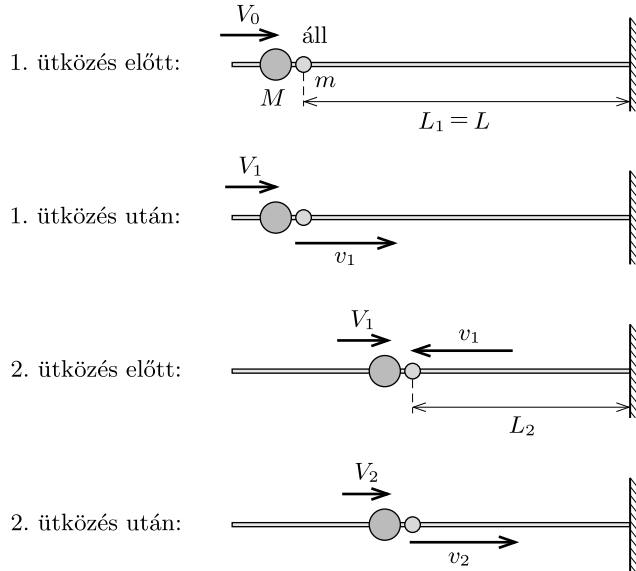
M. 70. I. megoldás. Jelöljük az M tömegű golyó n -edik ütközés utáni sebességét V_n -nel, az m tömegű golyó sebességét v_n -nel, az n -edik ütközés helye és a fal közötti távolságot pedig L_n -nel. (Az első két ütközés hely- és sebességadatait az *ábra* mutatja.) A két golyó ütközéseire érvényes a lendület és a mechanikai energia megmaradásának törvénye. Írjuk fel ezeket a megmaradási törvényeket az $(n+1)$ -edik ütközésre:

$$(1) \quad \frac{1}{2}M(V_n^2 - V_{n+1}^2) = \frac{1}{2}m(v_{n+1}^2 - v_n^2),$$

$$(2) \quad M(V_n - V_{n+1}) = m(v_{n+1} + v_n).$$

A fenti két egyenletet egymással elosztva, rendezés után kapjuk a következőt:

$$(3) \quad V_n + v_n = v_{n+1} - V_{n+1}.$$



Az ábrán szereplő két ütközés között az M tömegű test V_1 sebességgel $L_1 - L_2$ utat, az m tömegű test pedig v_1 sebességgel $L_1 + L_2$ utat tesz meg ugyanannyi idő alatt:

$$\frac{L_1 - L_2}{V_1} = \frac{L_1 + L_2}{v_1},$$

amiből

$$L_2 = L_1 \frac{v_1 - V_1}{v_1 + V_1}.$$

Hasonló összefüggés áll fenn az L_{n-1} és L_n távolságok között is:

$$(4) \quad L_n = L_{n-1} \frac{v_{n-1} - V_{n-1}}{v_{n-1} + V_{n-1}}.$$

A (3) összefüggés szerint (4) nevezőjében $v_{n-1} + V_{n-1}$ helyébe $v_n - V_n$ írható, vagyis fennáll, hogy

$$(5) \quad L_n (v_n - V_n) = L_{n-1} (v_{n-1} - V_{n-1}).$$

Találtunk tehát egy olyan mennyiséget, az $L_k (v_k - V_k)$ kifejezést, amely minden k -ra ugyanakkora, így a legelső és a falhoz legközelebb történő N -edik ütközésre is megegyezik:

$$(6) \quad L_N = L_1 \frac{v_1 - V_1}{v_N - V_N}.$$

Az első ütközés helye a faltól $L_1 = L$ távolságra történik, továbbá a (3) egyenlet alapján $v_1 - V_1 = v_0 + V_0 = V_0$ (hiszen kezdetben az m tömegű golyó nyugalomban volt, azaz $v_0 = 0$). Ezek szerint

$$(7) \quad L_N = L \frac{V_0}{v_N - V_N}.$$

Tegyük fel, hogy az M tömegű golyó sebessége az N -edik ütközés után éppen nullára csökken ($V_N = 0$). (Ha az N -edik ütközésnél nem is áll meg teljesen az M tömegű golyó, biztos, hogy a következő ütközés után már „visszafelé” halad. Ekkor is jó közelítéssel nullának vehető a V_N sebesség, hiszen az $M \gg m$ feltétel azt jelenti, hogy a nagyobb tömegű golyó sebessége csak nagyon kis adagokban csökken.)

Mivel a nagyobb golyó sebessége nulla, ezért már a teljes kezdeti mozgási energiát átadta a kis golyónak:

$$\frac{1}{2} M V_0^2 = \frac{1}{2} m v_N^2,$$

ahonnan

$$v_N = V_0 \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Visszahelyettesítve (7)-be, és figyelembe véve a $V_N = 0$ feltételt is, végül a keresett távolságra az

$$L_{\min} = L_N = L \sqrt{\frac{m}{M}}$$

eredményt kapjuk.

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit követjük. Az energia- és a lendületmegmaradás törvényéből következik, hogy az m tömegű golyó az első ütközés után

$$v_1 = \frac{2V_0}{1 + \frac{m}{M}} \approx 2V_0$$

sebességgel kezd mozogni, tehát a mozgási energiája

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \approx 2mV_0^2.$$

Ezek után úgy is felfoghatjuk az eseményeket, mintha a nagy golyó egy kis (kezdetben AL térfogatú) csőben *adiabatikusan* összenyomna egy olyan gázt, amelynek belső energiája a kis golyó mozgási energiájával (azaz kezdetben E_1 -gyel) egyenlő, és szabadsági fokainak száma 1 (mivel a „gázcsepe” csak egyetlen dimenzióban, a vízszintes rúd irányában mozdulhat el). A cső A keresztmetszetét önkényesen választhatjuk, nagysága a továbbiak szempontjából lényegtelen.

Megjegyzés. Ez a leírás nem teljesen pontos, hiszen a szokásos esettel ellentétben itt most egyetlen részecske alkotja a „gázt”, és emiatt a „dugattyú” (vagyis az M tömegű

test) nem folyamatosan, hanem lökészerűen fejt ki erőt a másik testre. Igaz ugyan, hogy ezek az erőlökések csak kezdetben ritkák, a kis test sebességének növekedtével egyre jobban összesűrűsödnek, majdnem folytonossá válnak. Az egyetlen részecske okozta problémát még kikerülhetjük, ha nagyon nagy számú vízszintes rudat képzelünk el, mindegyiken egy-egy m tömegű, kezdetben álló golyóval, és ezeknek ütközik egyetlen, nagy tömegű „dugattyú”. Ez a kép már jobban emlékeztet a kinetikus gázelmélet leírás módjára, de a dugattyú kezdetben lökészerű erő kifejtését nem oldja meg.

A leírtak miatt a „gázmodell” alapján számított eredményt nem fogjuk számszerűen pontosnak tekinteni, inkább csak *nagyságrendi becslésként* értelmezhetjük.

Adiabatikus állapotváltozás esetén

$$(8) \quad p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa,$$

ahol $\kappa = (f + 2)/f$, jelen esetben $f = 1$ miatt $\kappa = 3$. A gáz belső energiája

$$E = \frac{f}{2} pV,$$

vagyis a kezdeti és a (legjobban összenyomott) végállapotra felírva:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}.$$

Ez az arány (8) felhasználásával így is írható:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{V_1^{1-\kappa}}{V_2^{1-\kappa}} = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^2.$$

A kezdeti állapotban $L_1 = L$ és $E_1 = 2mV_0^2$, a végállapotban pedig $L_2 = L_{\min}$ a keresett megközelítési távolság. Tudjuk még, hogy a 2-es állapotban a „gáz” energiája

$$E_2 = \frac{1}{2} M V_0^2,$$

hiszen a „dugattyú” sebessége a falhoz legközelebbi helyzetben (jó közelítéssel) nulla, így a rendszer teljes mechanikai energiája a „gázzészecskére” jut.

Ezek szerint a keresett távolságra fennáll:

$$\frac{L_{\min}}{L} = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = \sqrt{\frac{2mV_0^2}{\frac{1}{2} M V_0^2}} = 2\sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Ez az eredmény egy 2-es faktorban tér el az I. megoldás „pontos” végeredményétől, az eltérés az előzőekben említett okokkal magyarázható.

M. 71. a) A jobb oldalról ütköző (rugalmasan visszapattanó) részecskék kezdetben nagyobb impulzust adnak át a hengeres testnek, mint a balról (rugalmatlanul) ütközők. Emiatt a testre balra mutató eredő erő hat, amelynek hatására

felgyorsul. Minél gyorsabban mozog a test bal felé, időegységenként annál kevesebb részecske ütközik neki jobbról (és ezek relatív sebessége is kisebb, mint kezdetben volt), a balról ütköző részecskék száma (és relatív sebessége) pedig egyre nagyobb lesz; így a testre ható eredő erő lecsökken.

Bizonyos idő után a test valamikor állandósult v_1 sebességgel fog mozogni. Az egyenletes mozgásnak az a feltétele, hogy a jobbról érkező parányi részecskék egységnyi idő alatt ugyanannyi impulzust adjanak át a testnek, mint a balról nekiütközők. Jobbról $v_1 - v_0$ relatív sebességgel érik utol a hengert a kicsiny részecskék, és ugyanekkora nagyságú relatív sebességgel pattannak vissza róla. Kicsiny Δt idő alatt $(v_0 - v_1) \Delta t$ távolságból érik el a hengert a részecskék jobbról, tehát a becsapódások száma $(v_0 - v_1)$ -gyel, az átadott lendület pedig a $2(v_0 - v_1)^2$ mennyiséggel arányos.

Hasonló megfontolás szerint a balról érkező, $v_0 + v_1$ relatív sebességű, rugalmatlanul ütköző részecskék $(v_0 + v_1)^2$ -tel arányos impulzust adnak át a hengernek (a 2-es szorzó a rugalmatlan ütközés miatt hiányzik). Az állandósult sebesség feltétele:

$$2(v_0 - v_1)^2 = (v_0 + v_1)^2,$$

azaz

$$v_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} v_0 = (3 - \sqrt{8}) v_0 \approx 0,17 v_0.$$

b) Ha a záporozó részecskéket egy képzeletbeli manó dobálja a henger felé, akkor a henger és a részecskék nem alkotnak zárt rendszert, és az a) részben kialakuló egyenletes mozgás fenntartható. Más a helyzet viszont, ha a részecskékből és a hengeres testből álló rendszer zárt. Legyenek például a záporozó részecskék ténylegesen egy nagyméretű tartályban lévő, bizonyos hőmérsékletű gáz molekulái. Ha ezek a molekulák a (kezdetben álló) henger jobb oldali lapjáról energiavesztés nélkül pattannak vissza, a bal oldali lapjánál viszont – valamilyen mértékben – lecsökken a sebességük nagysága, akkor éppen a feladatban leírt „rugalmas” és „rugalmatlan” ütközések valósulnak meg. (A bal oldalon az ütközések természetesen nem „tökéletesen” rugalmatlanok, de ennek a további megfontolásokban nincs szerepe.)

Az a) pontban leírtak miatt ilyen körülmények között a henger mozgásba jön, majd „viszonylag hosszú idő” múlva a sebessége állandósul. Ehhez nagyon nagy tartályra lenne szükség, ezért a gondolat kísérlet tényleges megvalósítása a leírt formában aligha lehetséges. Reálisan megvalósítható viszont úgy, hogy egy jól csapágyazott lapátkerék lapátjainak egyik oldalán a rugalmas, a másik oldalon pedig a rugalmatlan ütközések feltételét hozzuk létre. Ekkor a lapátkerék (a különböző oldalapokon ható, különböző nagyságú erők eredő forgatónyomatéka miatt) forgásba jön, és akár munkavégzésre vagy áramtermelésre is felhasználható.

Vajon mennyi ideig tarthat ez a (haladó vagy forgó-) mozgás, ha a „rendszer” csak a gázból és a testből áll, és a külvilágtól elszigetelt? „Nagyon hosszú” ideig biztosan nem, mert ha így történe, akkor a szerkezet egyfajta örökmozgó (másodfajú perpetuum mobile) lenne, az pedig a hőtan II. főtétele szerint megvalósíthatatlan! (A második főtétel többféle megfogalmazásának egyike: „Nem le-

het olyan periodikusan működő gépet készíteni, amely egyetlen hőtartály lehűlése árán munkát végezne.”) Hogyan egyeztethető össze ez az általános elv a fentebb leírtakkal (a henger, illetve a lapátkerék mozgásával)?

Eddig még nem vettük figyelembe a rugalmatlan ütközések által okozott hőtermelődést. A testet balról bombázó (és azzal rugalmatlanul ütköző) részecskék felmelegítik a test bal oldali felét, és ugyanez történik akkor is, ha a záporozó részecskék éppen a gázmolekulák. Ez utóbbi esetben az ütközések akkor lesznek rugalmatlanok, ha a gáz *melegebb*, mint a test, hiszen ekkor a gáznak a testtel érintkező része lehül, vagyis a molekulák kisebb sebességgel pattannak vissza a felületről, mint amekkorával nekiütköztek. Hasonló módon a rugalmas ütközés feltétele az, hogy a test és a gáz hőmérséklete ugyanakkora legyen. (A 171. feladatban leírt radiométer működése kísérletileg is bizonyítja, hogy egy lapátkerék – ha a lapátok két oldalát különböző hőmérsékleten tartjuk – tartós forgásba jön.)

Mi történik a rugalmatlan ütközések során keletkező hővel? Ha azt folyamatosan elvezetjük (a test melegedő oldalát folyamatosan hűtjük), akkor fenntartható az a) részben leírt mozgás. Ilyenkor a II. főtétellel sem kerülünk ellentmondásba, hiszen két hőtartállyal (a záporozó részecskékből álló gázzal és a hűtőközeggel) szabályosan működtetett hőerőgépet készítettünk. Ha viszont a testet nem hűtjük, akkor előbb-utóbb annyira fel fog melegedni, hogy a hőmérséklete a gáz (hőtartály) hőmérsékletével megegyezővé válik. Ilyenkor a test mindkét oldalán ugyanakkora relatív sebességgel pattannak vissza gázmolekulák, tehát az ütközések mindkét oldalon *rugalmassá válnak*. Emiatt az időegységre jutó impulzusátadás a test mozgásirányba eső homloklapján nagyobb lesz, mint a hátsón (a test több részecskébe fut bele, mint amennyi utoléri); a testre tehát a sebességével ellentétes irányú fékezőerő hat. Ez az erő – hosszú idő alatt – még akkor is megállítható a test mozgását (vagy a forgását), ha egyéb (pl. súrlódási) erő nem hatna rá.

M. 72. Jelöljük x út megtétele után a csepp pillanatnyi sebességét v -vel, sugarát r -rel, tömegét m -mel! Egy kicsiny Δx hosszúságú úton a vízcsepp $r^2 \pi \Delta x$ térfogatú tartományból gyűjti össze a ködcseppeket, az ebben levő $\rho_{\text{köd}}$ átlagsűrűségű köd víztartalma pedig Δr -rel megnöveli a csepp sugarát:

$$r^2 \pi \Delta x \cdot \rho_{\text{köd}} = 4r^2 \pi \Delta r \rho_{\text{víz}},$$

ebből

$$\Delta r = \frac{1}{4} \frac{\rho_{\text{köd}}}{\rho_{\text{víz}}} \Delta x.$$

A csepp mérete tehát a megtett úttal arányosan nő, és ha x -et alkalmas kezdőponttól mérjük, a sugarat az úttal arányosnak vehetjük:

$$r(x) = \frac{1}{4} \frac{\rho_{\text{köd}}}{\rho_{\text{víz}}} x.$$

A csepp tömege kifejezhető a sugarával:

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\text{víz}},$$

melynek segítségével a tömeg növekedési üteme így számolható:

$$\frac{\Delta m}{m} = 3 \frac{\Delta r}{r} = 3 \frac{\Delta x}{x}.$$

A vízcsepp mozgásegyenlete:

$$(1) \quad \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = mg - K \varrho_{\text{levegő}} r^2 \pi v^2,$$

ahol K a gömbre jellemző közegellenállási alaktényező. A mozgásegyenlet bal oldalát átalakítva:

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} + v \frac{\Delta m}{\Delta t} = mv \frac{\Delta v}{\Delta x} + v^2 \frac{\Delta m}{\Delta x} = m \frac{\Delta(\frac{1}{2}v^2)}{\Delta x} + \frac{3m}{x} v^2,$$

az (1) egyenlet tehát $m(r)$ és $r(x)$ konkrét alakját felhasználva így írható:

$$(2) \quad \frac{\Delta(\frac{1}{2}v^2)}{\Delta x} = g - \left(3 + 3K \frac{\varrho_{\text{levegő}}}{\varrho_{\text{köd}}}\right) \frac{v^2}{x}.$$

Ha a vízcsepp egyenletesen, a gyorsulással mozog, akkor a sebessége x út megtétele után

$$(3) \quad v(x) = \sqrt{2ax}.$$

Ezt (2)-be helyettesítve a gyorsulásra az

$$(4) \quad a = \frac{1}{7 + 6K \frac{\varrho_{\text{levegő}}}{\varrho_{\text{köd}}}} g < \frac{1}{7} g$$

felső korlátot kapjuk.

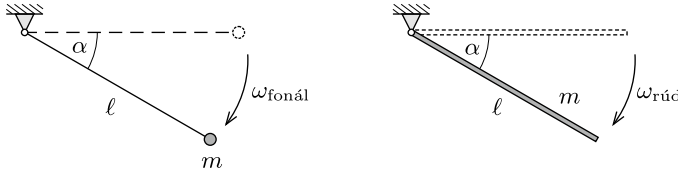
Megjegyzések. 1. A vízcsepp sebessége csak akkor változhat (3)-nak megfelelő módon, ha a csepp kezdősebessége összhangban van ezzel a feltevésével. Ha valamilyen más kezdőfeltételhez (pl. $v(x_0) = 0$ -hoz) tartozó megoldást keresünk, a gyorsulás kezdetben nem lesz egyenletes, de nagyon gyorsan felveszi a (4)-nek megfelelő állandó értéket.

2. Az $a = g/7$ maximális gyorsulást $\varrho_{\text{köd}} \gg \varrho_{\text{levegő}}$ határesetben lehetne csak megközelíteni. Ilyen sűrűséget még porlasztással sem lehet előállítani, a természetes körülmények között kialakuló ködben pedig éppen a másik határeset, $\varrho_{\text{köd}} \ll \varrho_{\text{levegő}}$ valósul meg.



Merev testek dinamikája

M. 73. Tekintsünk egy ℓ hosszúságú fonálingát és egy ugyancsak ℓ hosszúságú homogén rúdingát. Engedjük el mindkettőt vízszintes helyzetből, és számítsuk ki, mekkora lesz a szögsebességük α szögelfordulás után (lásd az ábrát).



A mechanikai energia megmaradásának tétele a fonálingára:

$$\frac{1}{2}m\ell^2\omega_{\text{fonál}}^2 = mg\ell \sin \alpha, \quad \text{azaz} \quad \omega_{\text{fonál}} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \sin \alpha,$$

a rúdingára pedig

$$\frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \omega_{\text{rúd}}^2 = mg \frac{\ell}{2} \sin \alpha, \quad \text{tehát} \quad \omega_{\text{rúd}} = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \sin \alpha.$$

Látszik, hogy a rúdinga szögsebessége minden helyzetben $\sqrt{3/2}$ -szer nagyobb, mint a fonálinga szögsebessége, ugyanakkora szögelforduláshoz tehát a rúdingának $\sqrt{3/2}$ -szer kevesebb időre van szüksége. Így

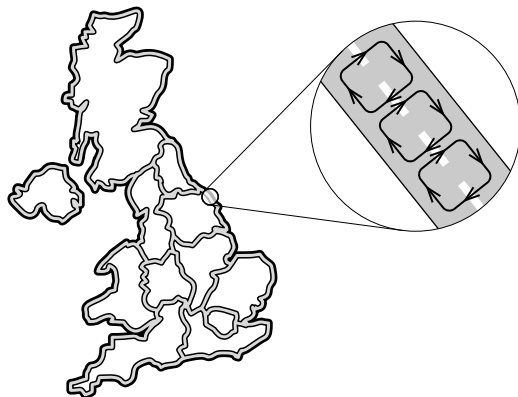
$$T_{\text{rúd}} = \sqrt{\frac{2}{3}} T_{\text{fonál}}.$$

Ez a megállapítás nemcsak a vízszintes, hanem tetszőleges, egyforma kezdőhelyzetből történő indítás esetén is érvényes. A fenti összefüggés kis szögtérésű lengéseknél is fennáll, amint az a fonálinga és a fizikai inga kis lengéseinek ismert képleteiből is adódik.

M. 74. A feladat nehézsége a „kényelmes sétálás” kifejezés értelmezésében rejlik. Az úrhajós lábára járás közben a nehézségi erő és a lábizmok fejtenek ki forgatónyomatékokat. Ha az úrhajós a kényelmes sétatempójánál lassabban próbál járni, izmait meg kell feszítenie, hogy a nehézségi erő forgató hatásával ellentétes irányban „fékezze” lábait, ami hosszú távon fárasztó. Ha az úrhajós a kényelmes sétálás sebességénél gyorsabban szeretne haladni, akkor lábizmiai segítségével növelnie kell a nehézségi erő által kifejtett forgatónyomatékokat, ami szintén fárasztó. Az úrhajós tehát akkor sétál a „legkényelmesebben” (leginkább energiatakarékosan), ha lábait éppen csak megemeli, nem fejt ki rájuk forgatónyomatékokat, azaz lábait a

nehézségi erő hatására szinte szabadon lengenek. Egy fizikai inga periódusideje fordítottan arányos a g nehézségi gyorsulás négyzetgyökével, a lépések frekvenciája és ezzel együtt a sétálás sebessége tehát \sqrt{g} -vel arányos. (A lépések hossza a láb méretétől függ, emiatt természetes az a feltevés, hogy a Holdon is ugyanakkorákat lép az űrhajós, mint a Földön.) A Holdon sétáló űrhajós sebességét tehát $v = v_0/\sqrt{6} \approx 0,4$ m/s-nak becsülhetjük.

M. 75. Tekintsük a nyugatról keletre forgó Föld forgásirányát pozitívnak. Ha Nagy-Britanniában végrehajtanák a változtatást, akkor a pozitív perdületjárulékot képviselő, keleti irányba haladó gépkocsik egy kicsit távolabb kerülnének a Föld forgástengelyétől, így (változatlan átlagsebességet feltételezve) perdületük megváltozása pozitív lenne. A negatív impulzusnyomatékú nyugati irányú forgalom ezzel szemben közeledne a forgástengelyhez, ami szintén pozitív irányú perdületváltozást eredményezne. Az utakon haladó autók impulzusnyomatéka tehát növekedne, és mivel a rendszer teljes perdülete nem változhat meg, a Föld forgási szögsebessége csökkenne, a nap hossza pedig ennek megfelelően növekedne.

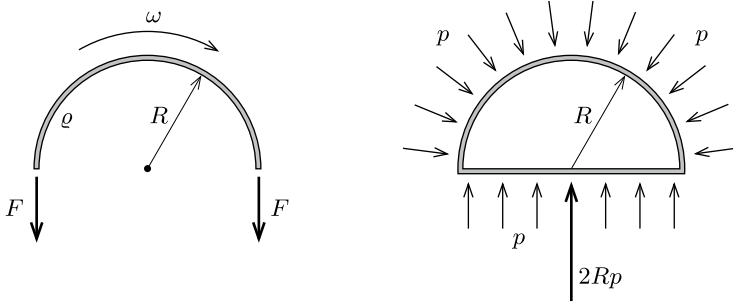


Más logikával is ugyanerre a következtetésre juthatunk. Az utakon haladó autók mozgása felfogható sok kicsiny, egymás után következő („sorba kapcsolt”) körforgalomként (lásd az ábrát). Bal oldali közlekedés esetén ezeknek az elemi körforgalmaknak a Föld forgástengelyével párhuzamos perdületkomponense negatív. A jobb oldali közlekedésre való áttéréskor az elemi körforgalmak forgásiránya megfordul, így a perdületvektoruk is előjelet vált. A Nagy-Britannia autós forgalmából és a Föld többi részéből álló rendszer teljes perdülete csak úgy maradhat változatlan, ha a Föld szögsebessége lecsökken, azaz a nap hossza kis mértékben növekszik.

Megjegyzés. A nap hosszának (a feladatban leírt okokra visszavezethető) megváltozásából ténylegesen semmit nem vennénk észre, ugyanis annak mértéke a legpontosabb atomórák mérési pontossága alatt maradna. A Földön ennél sokkal lényegesebb tömegátrendeződéssel járó folyamatok is végbemennek, például a lombhullató fák levelének őszi lehullása, amely önmagában ugyancsak nagyon kicsiny változást okoz a nap hosszában.

M. 76. Jancsi így kezdi gondolatmenetét: Képzeljünk el egy R sugarú, homogén tömegeloszlású körgyűrűt, amelynek hosszegységre jutó tömege ρ , és a középpontja körül állandó ω szögsebességgel forog. Számítsuk ki, mekkora F erő feszíti ezt a gyűrűt!

Vizsgáljuk a körgyűrű egyik felét dinamikai szempontból! A kerületi pontok centripetális gyorsulása $R\omega^2$, a gyűrű egységnyi hosszúságú (kicsiny) darabkáit tehát $\rho R\omega^2$ nagyságú erő tartja körpályán. Éppen ekkora erő hat egy R sugarú, 1 méter magas félhenger alakú tartály íves oldalának egységnyi hosszú szakaszára is, ha a tartályt $p = \rho R\omega^2$ túlnyomású gázzal vesszük körül (1. ábra).



1. ábra

A gyűrű kicsiny darabkáira ható erők vektori összege éppen a gyűrűben ébredő erő kétszeresével, $2F$ -fel egyenlő. A félhenger alakú tartály íves oldalára ható eredő erő pedig ugyanakkora, mint a $2R$ területű, téglalap alakú oldallapra ható $p \cdot 2R$ erő, hiszen egy gázba helyezett testre a gáz által kifejtett eredő erőnek zérusnak kell lennie (ellenkező esetben a tartály gyorsulni kezdene, így örökmozgót készíthetnénk). Az analógia alapján tehát

$$2F = \rho R\omega^2 \cdot 2R,$$

amiből a gyűrűt feszítő erőre az $F = \rho R^2\omega^2$ eredményt kapjuk.

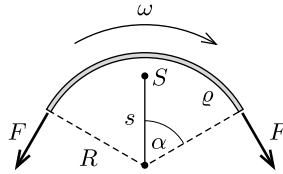
Tekintsük ezek után a forgó körgyűrűnek egy 2α középponti szöghöz tartozó ívét, és nézzük meg, hogyan teljesül erre a darabra a Newton-féle mozgásegyenlet – folytatja Jancsi. Az $m = 2\alpha R\rho$ tömegű körívre ható erők eredője $2F \sin \alpha$, a tömegközéppontjának centripetális gyorsulása pedig $a = s\omega^2$, ahol s a körív súlypontjának a körgyűrű középpontjától mért távolságát jelöli (2. ábra). Newton törvénye szerint

$$2F \sin \alpha = ma,$$

ahonnan az F erőre korábban kapott összefüggést felhasználva

$$s = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

adódik. Félkörívre például (ez volt Karcsi eredeti problémája) $\alpha = \pi/2$, ilyenkor $s = 2R/\pi$.

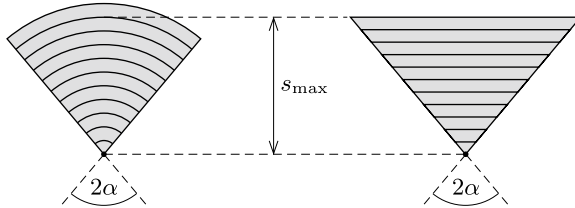


2. ábra

Amennyiben egy körcikk tömegközéppontját akarjuk meghatározni, ezt képzletben feldarabolhatjuk vékony körívekre. Mindegyik körív helyettesíthető a tömegközéppontjába helyezett, alkalmas tömegű pontszerű testtel, és ugyanez érvényes egy vékony csíkból összerakható háromszögre is (3. ábra). Ebből viszont az következik, hogy egy R sugarú körcikk tömegközéppontja pontosan ott van, ahol egy $s_{\max} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ magasságú, egyenlő szárú háromszögé, tehát a csúcspontjától

$$s_{\text{körcikk}} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

távolságban – fejezi be az igazán nem mindennapi logikát követő érvelését Jancsi.

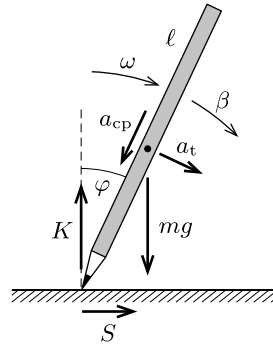


3. ábra

M. 77. Képzeljük el, hogy az asztal lapja nagyon sima (azaz nagyon kicsi a súrlódási együttható). A ceruza tömegközéppontja eleinte a dőlés irányában gyorsul, méghozzá egyre nagyobb mértékben. Ezt a gyorsulást a súrlódási erő hozza létre, és mivel az asztallap sima, a ceruza hegye előbb-utóbb megcsúszik, a *dőléssel* ellentétes irányban.

Ha a súrlódás nagyon nagy, akkor a ceruza sokáig nem csúszik meg. A körpályán mozgó tömegközéppont vízszintes irányú sebessége eleinte (a dőlés irányában) növekszik, majd csökkenni kezd, és – ha a ceruza egészen a vízszintes helyzetéig így mozogna – nullához tartana. A tömegközéppont vízszintes gyorsulásának iránya, és ezzel együtt a súrlódási erő előjele tehát a mozgás során megváltozik. Ha a ceruza csúszásmentesen „átvészeli” az első mozgásszakaszt, akkor már csak „előrefele”, a *dőlés irányába* csúszhat meg.

Eddigi kvalitatív megállapításainkat számolással is alátámaszthatjuk. Jelöljük a (homogén rúdnak tekintett) ceruza tömegét m -mel, hosszát ℓ -l, a ceruzára ható tapadási súrlódási erőt S -sel, az asztal által kifejtett kényszererőt pedig K -val.



1. ábra

Tekintsük az eldőlt ceruzának azt az állapotát, amikor a függőlegessel φ szöget zár be, és a hegye még nem csúszott meg (1. ábra). A ceruza ω szögsebességét az energiamegmaradás törvényéből kaphatjuk meg:

$$mg \frac{\ell}{2} (1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m \ell^2 \omega^2,$$

amiből

$$(1) \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell} (1 - \cos \varphi)}.$$

A ceruza tömegközéppontjának gyorsulása két összetevőre bontható: az asztallal való érintkezési pont felé mutató a_{cp} centripetális gyorsulásra és az erre merőleges a_t tangenciális (érintőleges) gyorsulásra. Az előbbi gyorsuláskomponenst a ceruza szögsebessége határozza meg:

$$(2) \quad a_{cp} = \frac{\ell}{2} \omega^2,$$

az érintőleges gyorsulást pedig az

$$(3) \quad a_t = \frac{\ell}{2} \beta$$

összefüggés alapján számolhatjuk (β a ceruza szöggyorsulása).

A tömegközéppont függőleges irányú mozgásegyenlete:

$$(4) \quad mg - K = m (a_t \sin \varphi + a_{cp} \cos \varphi),$$

a vízszintes irányú gyorsulást pedig a tapadási súrlódási erő okozza:

$$(5) \quad S = m (a_t \cos \varphi - a_{cp} \sin \varphi).$$

Végül felírhatjuk a forgómozgás alapegyenletét a ceruza asztallal való érintkezési pontjára:

$$(6) \quad mg \frac{\ell}{2} \sin \varphi = \frac{1}{3} m \ell^2 \beta.$$

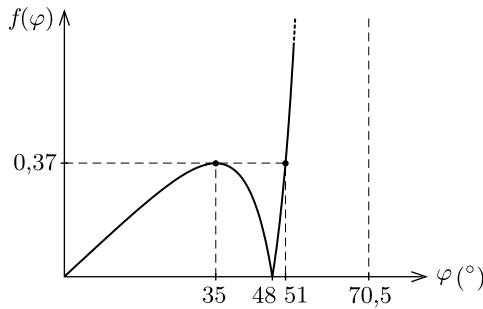
Az (1)–(6) egyenletekből kifejezhetjük a K kényszererőt és az S tapadási súrlódási erőt:

$$K = mg \left(\frac{3 \cos \varphi - 1}{2} \right)^2, \quad S = \frac{3}{4} mg \sin \varphi (3 \cos \varphi - 2).$$

A ceruza hegye addig nem csúszik meg, amíg $|S| \leq \mu K$, ahol μ a ceruza és az asztallap közötti tapadási súrlódási együttható. Annak meghatározásához, hogy melyik irányba mozdul el a ceruza hegye, ábrázoljuk az

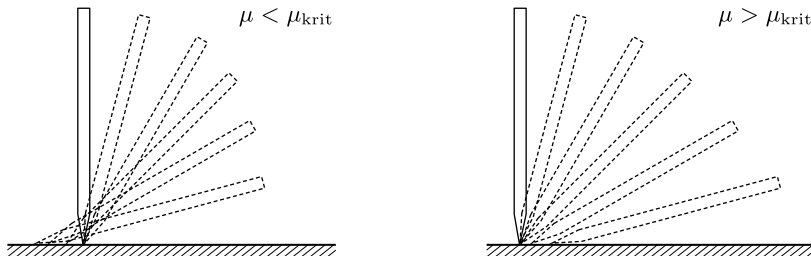
$$(7) \quad f(\varphi) = \left| \frac{S}{K} \right| = \frac{|3 \sin \varphi (3 \cos \varphi - 2)|}{(3 \cos \varphi - 1)^2}$$

kifejezést a φ dőlési szög függvényében (2. ábra). Ha a (7) kifejezés számlálója nullára csökken ($\cos \varphi = 2/3$), akkor a tapadási erő iránya megfordul; ez $\varphi \approx 48^\circ$ -nál következik be. A kényszererő nagysága nullára csökken, ha $\cos \varphi = 1/3$, ami $\varphi = 70,5^\circ$ -nak felel meg. Eddig a helyzetig a ceruza biztosan nem jut el megcsúszás nélkül, hiszen az végtelen nagy súrlódási együtthatót igényelne.



2. ábra

A 2. ábráról olvasható, hogy az $f(\varphi)$ függvénynek $\varphi = 35^\circ$ -nál lokális maximuma van, melynek értéke 0,37. Abban az esetben, ha a tapadási súrlódási együttható kisebb a kritikus $\mu_{krit} = 0,37$ értéknél, a ceruza hegye valamilyen $\varphi < 35^\circ$ szögnél hátrafelé csúszik meg. $\mu > \mu_{krit}$ esetén viszont a ceruza csúszás nélkül túléli a kezdeti mozgásszakaszt, és csak az $51^\circ < \varphi < 70,5^\circ$ tartományban csúszik meg; ilyenkor a hegye előre felé mozdul. A ceruza dőlésének néhány mozzanatát a 3. ábra szemlélteti a két esetben.



3. ábra

M. 78. Tételezzük fel, hogy akkora erővel húzzuk a szobrocskát, hogy az a gyorsulással mozog, de – se előre, se hátra – nem billen fel.

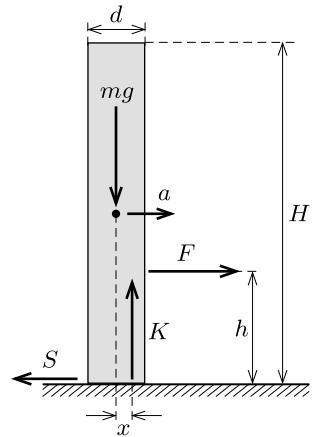
Az ábrán látható jelölésekkel írjuk fel a tömegközéppont haladó mozgását leíró egyenleteket:

$$F - S = ma,$$

$$mg - K = 0,$$

valamint a forgómozgás alapegyenletét:

$$Kx + F \left(\frac{H}{2} - h \right) - S \frac{H}{2} = 0.$$



(Felhasználtuk, hogy az asztal és a szobrocska érintkezési felületén elszló kényszererő helyettesíthető egyetlen erővel.) A csúszás miatt fennáll még az $S = \mu K$ egyenlőség is. Ezekből az egyenletekből kiszámíthatjuk, hogy milyen (előjeles) x távolságra kell lennie az asztal által kifejtett kényszererő hatásvonalának a szobrocska tömegközéppontjától, ha az nem borul fel:

$$x = \mu h - \frac{a}{g} \left(\frac{H}{2} - h \right).$$

A K erő hatásvonala nem eshet a szobrocska alaplapján kívül, vagyis teljesülnie kell még az

$$|x| \leq \frac{d}{2}$$

feltételnek is. Ebből az x -re korábban kapott összefüggés és a megadott számértékek alapján az

$$a \geq \left(\frac{2\mu h - d}{H - 2h} \right) g \approx 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

és

$$a \leq \left(\frac{2\mu h + d}{H - 2h} \right) g \approx 11,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

megszorításokat kapjuk a szobrocska gyorsulására.

Tehát a szobrocskát *át lehet húzni* az asztalon anélkül, hogy az felbillen; ehhez számottevő, de nem túlságosan nagy erő (gyorsulás) szükséges.

M. 79. Jelöljük a tömegközéppont távolságát az A ponttól x -szel, a B ponttól pedig y -nal. (A feladat szövege szerint a hajó függőleges mérete a hosszához képest kicsi, emiatt a tömegközéppont jó közelítéssel az AB szakaszon található.)

Kezdetben az m tömegű hajóra ható erők és forgatónyomatékok eredője egyaránt zérus, így a jobb oldali szál feszítő erő a bal oldali szál elvágása előtt

$$F = mg \frac{x}{x + y},$$

és ugyanennyi marad közvetlenül az elnyisszantás után is, hiszen a gumiszál hossza nem tud hirtelen megváltozni.

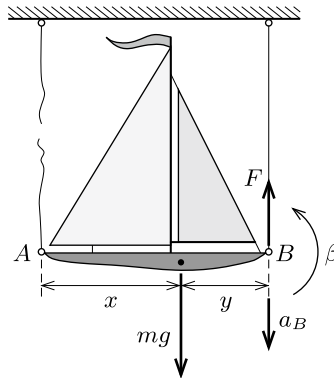
Az 1. ábra jelöléseit alkalmazva a hajó mozgásegyenlete

$$mg - F = ma,$$

a forgást leíró egyenlet pedig

$$yF = \Theta\beta,$$

ahol a a tömegközéppont függőlegesen lefelé irányuló gyorsulása, m a hajó tömege, Θ a tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjára vonatkoztatva, β pedig a szöggyorsulása.



1. ábra

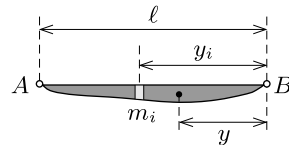
A B pont gyorsulása a tömegközéppont gyorsulásának és a β szöggyorsulásból származó érintőleges gyorsulásnak az előjeles összege:

$$a_B = a - y\beta = g \frac{y}{x + y} \left(1 - \frac{mxy}{\Theta} \right),$$

ahol a függőlegesen lefelé mutató irányt választottuk pozitívnak. Látható, hogy a B pont felfelé indul el, ha

$$\Theta < mxy.$$

A következőkben megmutatjuk, hogy ez az egyenlőtlenség biztosan teljesül. Osszuk fel az $\ell = x + y$ hosszúságú hajótestet képzeletben m_i tömegű, a B ponttól y_i távolságra lévő, pontszerűnek tekinthető részekre ($i = 1, 2, \dots$) a 2. ábrán látható módon. Ezekkel a jelölésekkel a hajó össztömege és tömegközéppontjának helye így írható:



2. ábra

$$\sum m_i = m, \quad y = \frac{\sum m_i y_i}{m}.$$

A tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot a Steiner-tétel segítségével fejezhetjük ki:

$$\Theta = \sum m_i y_i^2 - m y^2.$$

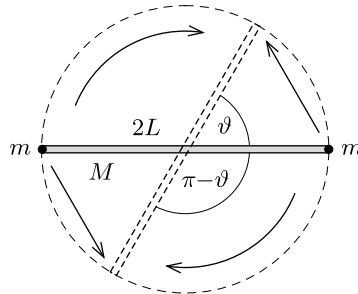
Mindezek felhasználásával a bizonyítandó egyenlőtlenség így alakul:

$$\sum m_i y_i^2 < \ell \sum m_i y_i,$$

ami igaz, hiszen mindegyik y_i kisebb ℓ -nél.

Ezzel beláttuk, hogy a hajó tömegeloszlásától (vagyis a tömegközéppont helyzetétől és a tehetetlenségi nyomaték nagyságától) függetlenül az egyik gumiszál elvágása után a másik szál végpontja *biztosan felfelé* kezd mozogni.

M. 80. Az ugrás akkor sikerülhet összeütközés nélkül, ha a bolhák pályái és a hajszál nincsenek egy síkban. Tegyük fel, hogy felülnézetben a bolhák a hajszál kezdeti irányához képest $\frac{1}{2}(\pi - \vartheta)$ szögben ugranak el (1. ábra). A két bolha elrugaskodáskor egyforma erőlkést fejt ki a hajszál végeire, aminek következtében az ellenkező irányban forgásba jön. Sikeres ugrás esetén a hajszál a bolhák landolásáig éppen $\pi - \vartheta$ szöggel fordul el.



1. ábra

Legyen v a bolhák elugrási sebessége és α a vízszinteshez viszonyított elugrási szögük, továbbá $2L$ a hajszál hossza. A ferde hajítás képleteiből a repülési idő $t = (2v \sin \alpha)/g$, az elmozdulás pedig $vt \cos \alpha$. Az 1. ábráról leolvasható, hogy ez az elmozdulás $2L \sin(\vartheta/2)$ -vel egyenlő. Az elrugaskodás alatt a rendszerre nem hat vízszintes irányú eredő erő, ezért a hajszál és a bolhák függőleges irányú eredő perdülete az ugrást követő pillanatban ugyanúgy zérus, mint előtte:

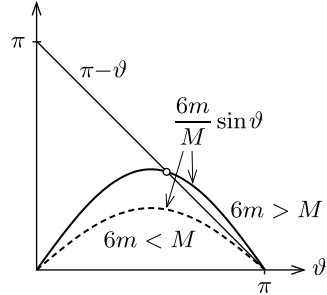
$$2mvL \cos \alpha \cos \frac{\vartheta}{2} - \Theta \omega = 0, \quad \text{ahol} \quad \Theta = \frac{1}{12} M (2L)^2 = \frac{1}{3} M L^2.$$

Tudjuk továbbá, hogy a hajszál szögelfordulása $\omega t = \pi - \vartheta$.

Az eddig felírt összefüggésekből α , t és ω kiküszöbölésével ϑ -ra a következő egyenletet kapjuk:

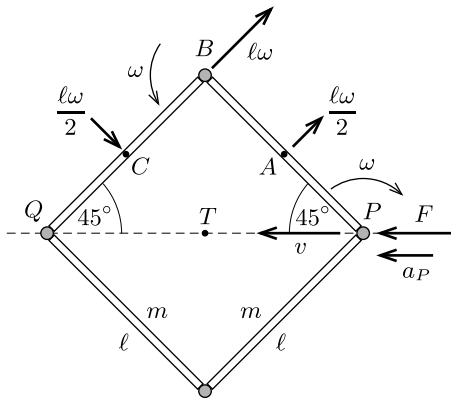
$$\frac{6m}{M} \sin \vartheta = \pi - \vartheta.$$

Az a kérdés, hogy mekkora m/M tömegarány esetén létezik ennek a transzcendens egyenletnek $0 < \vartheta < \pi$ megoldása. Ennek megválaszolásához ábrázoljuk az egyenlet jobb és bal oldalát ϑ függvényében különböző tömegarányok esetén (2. ábra). Az egyenlet jobb oldala egy -1 meredekségű egyenest ír le, amely $\vartheta = \pi$ -nél metszi a vízszintes tengelyt. A bal oldal $\vartheta = \pi$ -nél szintén nulla értéket vesz fel, és mivel a szinuszfüggvény meredeksége ezen a helyen éppen -1 , ezért $m = M/6$ esetén a két ábrázolt grafikon éppen érinti egymást. Ha tehát $m < M/6$, akkor a fenti egyenletnek nincs a számunkra érdekes intervallumon megoldása, az $m > M/6$ esetben azonban a bolhák tervezett ugrása valóban kivitelezhető. (Ha M elegendően kicsiny, akkor a hajszal többszöri körülfordulásával is megoldható a mutató.)



2. ábra

M. 81. Jelöljük a rudak tömegét m -mel, hosszát ℓ -lel (középpontjukra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékuk ekkor $\Theta = \frac{1}{12} m \ell^2$), az ábra felső felén látható rudak középpontját A -val és C -vel, közös végpontjukat B -vel, a rendszer tömegközéppontját pedig T -vel.



Hasson a P pontban F külső erő, és alkalmazzuk a munkatételt a kezdőpillanatot követő igen rövid t időtartamra! (Az „igen rövid” kifejezés annyit jelent, hogy a vizsgált időtartam alatt a rudak tömegközéppontjának gyorsulása és a rudak szöggyorsulása állandónak tekinthető.)

$$F \cdot \frac{a_P}{2} t^2 = E_{\text{forgási}} + E_{\text{transzlációs}}.$$

A rendszer teljes mozgási energiája kifejezhető a P pont $v = a_P t$ sebességével és a rudak $\omega = \beta t$ szögsebességével. (A rudak szögelfordulása egy adott pillanatban ugyanakkora nagyságú, emiatt a szögsebességük és a szöggyorsulásuk nagysága is megegyezik.) Mivel az A pont a P pont körül $\ell/2$ sugarú körpályán mozog ω szögsebességgel, az asztalhoz viszonyított sebessége a P pont sebességének és a P körüli forgásból adódó sebességének a vektori összege, négyzete tehát

$$v_A^2 = \left(v - \frac{\ell\omega}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\ell\omega}{2\sqrt{2}} \right)^2 = a_P^2 t^2 + \frac{\ell^2 \beta^2 t^2}{4} - \frac{a_P \ell \beta t^2}{\sqrt{2}}.$$

(Az ábrán a P pontnak az asztalhoz viszonyított sebességét tüntettük fel, az A és B pontoknak viszont csak a P -hez viszonyított mozgását, C -nek pedig B -hez viszonyított sebességét jelöltük.)

Hasonlóan számítható a C pont sebességének négyzete is a B pont P -hez viszonyított $\ell\omega$ nagyságú sebességéből és a B körüli forgás $\frac{1}{2}\ell\omega$ nagyságú sebességéből:

$$v_C^2 = \left(v - \frac{\ell\omega}{\sqrt{2}} - \frac{\ell\omega}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\ell\omega}{\sqrt{2}} - \frac{\ell\omega}{2\sqrt{2}} \right)^2 = a_P^2 t^2 + \frac{5\ell^2 \beta^2 t^2}{4} - \frac{3a_P \ell \beta t^2}{\sqrt{2}}.$$

A munkatétel tehát így alkalmazható:

$$F \cdot \frac{a_P}{2} t^2 = 4 \cdot \frac{1}{12} m \ell^2 \omega^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m v_A^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m v_C^2,$$

ami a fenti képletek felhasználásával (és t^2 -tel való egyszerűsítés után) a következő összefüggésre vezet:

$$(1) \quad F \frac{a_P}{2m} = \frac{5}{3} \ell^2 \beta^2 + 2a_P^2 - \frac{4}{\sqrt{2}} a_P \ell \beta.$$

A négy rúd T tömegközéppontjának gyorsulása megegyezik a B pont gyorsulásának PQ irányú vetületével. Kezdetben, amikor a szögsebesség és a centripetális gyorsulás is nulla, ez így írható:

$$(2) \quad a_T = a_P - \frac{\ell\beta}{\sqrt{2}}.$$

Ez a gyorsulás (Newton II. törvénye értelmében) kifejezhető a rendszerre ható külső erővel:

$$(3) \quad a_T = \frac{F}{4m}.$$

Az (1)–(3) egyenletekből

$$a_T = \frac{a_P + a_Q}{2} = \frac{2}{5} a_P, \quad \text{vagyis} \quad a_Q = -\frac{1}{5} a_P$$

következik. Érdekes, hogy a Q pont a P pont felé, annak gyorsulásával ellentétes irányban kezd el mozogni.

M. 82. Először vizsgáljuk meg, hogyan mozogna a henger, ha a súlyos test nem lenne ráakasztva. A hengerre a tömegközéppontjában támadó nehézségi erő és a fonalakban ébredő erők hatnak, utóbbiak eredőjét jelöljük F -fel (lásd az *ábrát*). Az m tömegű, r sugarú és Θ tehetetlenségi nyomatékú henger tömegközéppontjának gyorsulását az

$$mg - F = ma$$

mozgásegyenletből számolhatjuk, a forgást leíró egyenlet pedig

$$rF = \Theta\beta,$$

ahol $\beta = a/r$ a henger szöggyorsulása.

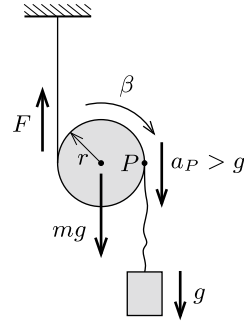
A fenti egyenletekből a henger tömegközéppontjának gyorsulására

$$a = g \frac{mr^2}{mr^2 + \Theta}$$

értéket kapunk. Mivel $0 < \Theta \leq mr^2$, így

$$\frac{g}{2} \leq a < g.$$

A hengernek az ábrán jelölt P pontja ennek a gyorsulásnak a kétszeresével, tehát legalább g gyorsulással kezd mozogni. Ha a súlyos testet ráakasztjuk a hengerre, a nehezék fonalának P -vel érintkező pontja is, vagy annál nagyobb gyorsulással indul meg, a nehezék viszont legfeljebb g gyorsulással, azaz a fonál meglazul. A súlyos test tehát *szabadeséssel* kezd zuhanni a rendszer elengedése után.



M. 83. Tekintsük azt az állapotot, amikor a deszka már állandósult v_{\max} sebességgel mozog. Mialatt a deszka L utat tesz meg, mozgásba hoz L/d görgőt, melyek $\omega_{\max} = v_{\max}/r$ szögsebességre pörögnek föl (hiszen a „hosszú deszka” miatt a görgők végső kerületi sebessége megegyezik a deszka állandósult sebességével). A deszka helyzeti energiája $MgL \sin \alpha$ értékkel csökken, eközben pedig a megpörgetett görgők forgási energiája $\frac{1}{2}\Theta\omega_{\max}^2 = \frac{1}{4}mv_{\max}^2$ értékre növekszik. (Felhasználtuk, hogy a görgők tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$.)

A deszka helyzeti energiájának csökkenése nem egyezik meg a görgők forgási energiájának növekedésével, mert minden egyes görgő felpörgetésekor csúszási súrlódás lép fel a mozgó deszka és a kezdőpillanatban még álló görgő között. A csúszás közben hő fejlődik, amelynek görgőnkénti nagyságát jelöljük Q -val. Az energia-mérleget tehát így írhatjuk fel:

$$(1) \quad MgL \sin \alpha = \frac{L}{d} \cdot \frac{1}{4}mv_{\max}^2 + \frac{L}{d}Q.$$

A feladat kihívást jelentő része a Q hő kiszámítása. Jelöljük a deszka és az egyik görgő közötti csúszási súrlódási erőt $S(t)$ -vel. (Nem szükséges feltennünk,

hogy a súrlódási erő állandó.) Egy rövid Δt időtartam alatt a görgő perdületének megváltozása:

$$(2) \quad \Theta \Delta \omega = r S(t) \Delta t.$$

Ezeket a változásokat összegezve megkaphatjuk a görgő állandósult (végső) szögsebességét, illetve kerületi sebességét:

$$(3) \quad r \sum S(t) \Delta t = \Theta \omega_{\max} = \Theta \frac{v_{\max}}{r}.$$

A kicsiny Δt időintervallum alatt a súrlódási erő munkavégzése $S(t)v_{\max}\Delta t$, de ebből csak $S(t)r\omega(t)\Delta t$ munka fordítódik a görgő felpörgetésére. A két érték különbsége éppen a ΔQ hőfejlődést adja meg:

$$\Delta Q = S(t) [v_{\max} - r\omega(t)] \Delta t.$$

Látható, hogy ΔQ éppen a súrlódási erő és az érintkező felületek *relatív* elmozdulásának a szorzatával egyezik meg. Egyetlen görgő felpörgetésekor keletkező Q hőt a kicsiny ΔQ mennyiségek összegeként számolhatjuk:

$$Q = \sum \Delta Q = \sum S(t) [v_{\max} - r\omega(t)] \Delta t.$$

A (2) és (3) egyenletek felhasználásával elvégezhetjük az összegzést:

$$Q = r\omega_{\max} \sum S(t) \Delta t - \Theta \sum \omega \Delta \omega = \Theta \omega_{\max}^2 - \Theta \frac{\omega_{\max}^2}{2} = \Theta \frac{\omega_{\max}^2}{2}.$$

Felhasználtuk, hogy $\omega \Delta \omega = \frac{1}{2} \Delta (\omega^2)$. Azt kaptuk tehát, hogy a felpörgetés során keletkező hő megegyezik a görgő végső forgási energiájával. Figyelemre méltó, hogy ez az eredmény nem függ sem a súrlódási erő nagyságától, sem annak esetleges időfüggésétől.

A deszka helyzeti energiaváltozása tehát fele részben a görgők forgási energiájának növelésére, fele részben pedig hőfejlődésre fordítódik. Ennek megfelelően az (1) egyenlet így írható tovább:

$$MgL \sin \alpha = 2 \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{1}{4} mv_{\max}^2,$$

amiből a deszka állandósult sebessége kifejezhető:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2dMg \sin \alpha}{m}}.$$

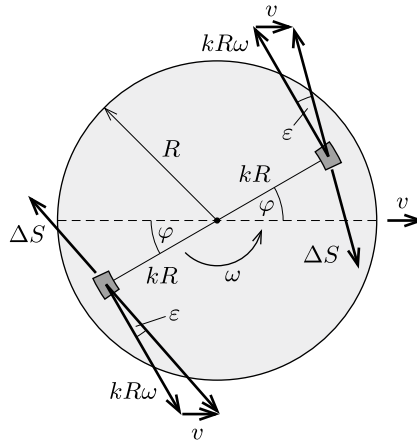
M. 84. Tételezzük fel, hogy a haladó mozgás áll le hamarabb, azaz a korong még számottevő ω^* szögsebességgel rendelkezik, amikor a tömegközéppont sebessége nullára csökken. Vizsgáljuk a mozgást rövid idővel a megállás pillanata előtt,

amikor a korong $\omega > \omega^*$ szögsebességgel forog, középpontjának sebessége pedig $v \ll R\omega^*$ (itt R a korong sugara).

Tekintsük a korongnak két egyforma, a középpontra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő kicsiny darabkáját az 1. ábrán látható módon. A feladat szövege szerint a korong egyenletesen nyomja a jeget, így az azonos területű darabkákra ható ΔS súrlódási erő nagysága is azonos. A súrlódási erő iránya az egyes darabkák jéghez viszonyított sebességével ellentétes irányú, ezért nem merőleges a korong középpontjából a darabkákhoz húzott sugárra, hanem attól kicsiny ε szöggel eltér. Geometriai megfontolásokból kapjuk az ε szög nagyságát:

$$(1) \quad \varepsilon \approx \frac{v \cos \varphi}{kR\omega},$$

ahol kR a vizsgált két felületdarabka távolsága a korong közepétől ($0 < k \leq 1$).



1. ábra

A korong haladó mozgását a ΔS nagyságú súrlódási erőjárulékok sebességgel ellentétes irányú összetevője lassítja:

$$\Delta F = \Delta S \sin(\varphi + \varepsilon) - \Delta S \sin(\varphi - \varepsilon).$$

Használjuk fel, hogy $\varepsilon \ll 1$ miatt $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$, illetve $\cos \varepsilon \approx 1$, így (1) figyelembevételével

$$(2) \quad \Delta F \approx 2\varepsilon \Delta S \cos \varphi = \frac{2\Delta S \cos^2 \varphi}{k} \cdot \frac{v}{R\omega}.$$

A (2) összefüggésből leolvasható, hogy minden φ és k érték esetén ΔF egyenesen arányos a $v/(R\omega)$ hányadossal, ezért az összes felületdarabka járulékának összegzésével kapott eredő erő (és így a korong gyorsulása is) arányos $v/(R\omega)$ -val.

A korong tömegközéppontjának mozgásegyenlete tehát

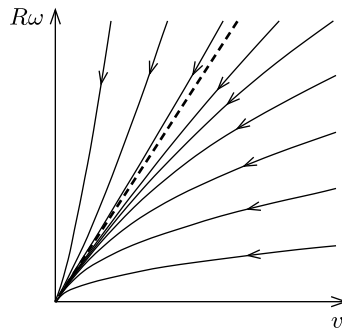
$$(3) \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = -C \cdot \frac{v(t)}{R\omega(t)}$$

alakban írható, ahol C a súrlódási együtthatótól, a korong sugarától és a nehézségi gyorsulástól függő állandó. Ebben az egyenletben v és ω is változik. Ha $\omega(t)$ helyére a megálláskor mérhető ω^* szögsebességet íránk, akkor a korong gyorsulásának abszolút értékére a valóságosnál nagyobb értéket kapnánk, és (3) a radioaktív bomlások egyenletéhez hasonlítana. Ez viszont időben *exponenciálisan* csökkenő $v(t)$ sebességet jelentene, azaz a korong tömegközéppontja *véges* idő alatt nem állna meg. Valójában $-\omega(t)$ időbeli csökkenése miatt – a tömegközéppont sebessége még ennél is lassabban változik, ami ellentétben áll kezdeti feltevésünkkel, miszerint rövid idővel a megállás pillanata előtt vagyunk. Ellentmondásra jutottunk, tehát a korong haladó mozgása *nem állhat meg előbb*, mint a forgása.

Teljesen hasonló gondolatmenettel azt is beláthatjuk, hogy a forgás szögsebessége sem csökkenhet nullára mindaddig, amíg a tömegközéppont sebessége számottevő. Ilyen állapothoz közeledve ugyanis az eredő forgatónyomaték majdnem nullára csökken (mert az egymással szemközti felületdarabokra ható súrlódási erő ugyanakkora, ezek forgatónyomatéka viszont páronként majdnem teljesen kiejti egymást), az eredő erő viszont véges érték marad. Ebben a helyzetben a forgás lassulási üteme nagyon lecsökken, a haladó mozgás viszont erősen fékeződik.

Ha sem a forgás, sem a tömegközéppont mozgása nem tud előbb leállni, mint a másik, akkor csak az a lehetőség marad, hogy *egyszerre* áll le mindkét mozgás.

Megjegyzés. Bonyolultabb számolással és numerikus szimulációkkal belátható, hogy a nyugalmi helyzethez közeledve a kétféle mozgás sebességének arányára jellemző $R\omega/v$ szám *a kezdőfeltételektől függetlenül* ugyanakkorává válik: az 1,531 értéket közelíti meg. A 2. ábrán látható $v - R\omega$ síkon ez úgy jelenik meg, hogy a különböző kezdőfeltételekkel indított korongok trajektóriái az origóhoz közeledve hozzásimulnak a szaggatott vonallal jelölt, 1,531 meredekségű egyeneshez.



2. ábra

M. 85. A megoldás kulcsa annak észrevétele, hogy a görgők elhanyagolható tömege miatt a rúdra ható tapadási súrlódási erőnek a rúdra merőleges irányú T_{\perp} komponense elhanyagolhatóan kicsiny. Ez ugyanis az egyetlen erő, aminek van forgatónyomatéka az r_g sugarú görgő tengelyére vonatkoztatva, így annak

szöggyorsulása a $T_{\perp}/(m_g r_g)$ mennyiséggel lesz arányos. (Felhasználtuk, hogy a görgők tehetetlenségi nyomatéka arányos $m_g r_g^2$ -tel.) A görgők tiszta gördülését kifejező kényszerfeltétel szerint a görgők rúdra merőleges irányú gyorsulása arányos T_{\perp}/m_g -vel, ami csak úgy lehet véges érték, ha m_g -hez hasonlóan T_{\perp} is elhanyagolhatóan kicsi.

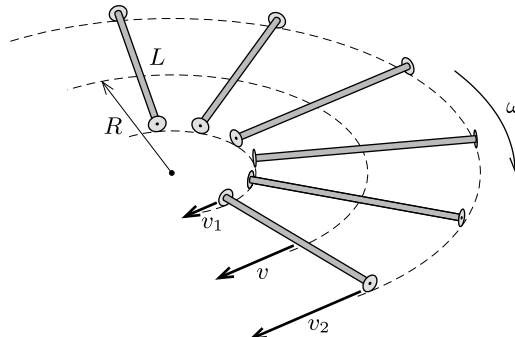
a) Az eddigiekből következik, hogy a rúdra ható forgatónyomatékok eredője zérus, azaz a rúd szögsebessége időben állandó:

$$\omega(t) = \omega = \frac{|v_2 - v_1|}{L}.$$

Mivel a rúdra csak a tengelyével párhuzamos erők hatnak, a tömegközéppontjának v sebessége (ami a tapadás miatt csak a a rúdra merőleges irányú lehet) időben állandó nagyságú:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Ez a sebesség a rúd forgása miatt időben egyenletesen, ω szögsebességgel fordul körbe, vagyis a rúd középpontja körpályán mozog (lásd az 1. ábrát).



1. ábra

A rúd $2\pi/\omega$ idő alatt fordul teljesen körbe, így a középpont által ez idő alatt befutott út:

$$\frac{2\pi}{\omega} v = 2\pi R,$$

ebből a tömegközéppont pályájának sugara

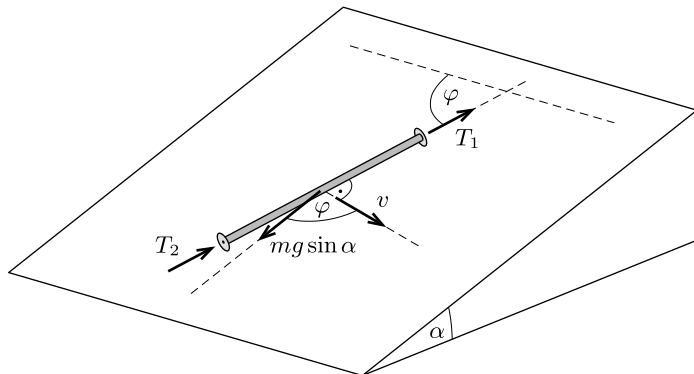
$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{v_1 + v_2}{|v_2 - v_1|} \frac{L}{2}.$$

A két végpont a periódusidő alatt egy-egy $R + L/2$, illetve $R - L/2$ sugarú köríven fut végig.

b) A lejtő síkjában a rúdra ható erőket a 2. ábra mutatja, amikor az m tömegű rúd éppen φ szöveget zár be kezdeti helyzetével. Továbbra is igaz az, hogy a rúdra ható eredő forgatónyomaték nulla, azaz a középpont körüli forgómozgás

szögsebessége mindvégig ω_0 . A tömegközéppont mozgásegyenlete a rúdra merőleges irányban:

$$m\dot{v}(t) = mg \sin \alpha \cdot \cos \varphi.$$



2. ábra

Mivel $\varphi(t) = \omega_0 t$, ezért a tömegközéppont sebességének *nagysága* éppen úgy változik az időben, ahogy egy (egydimenziós) harmonikus rezgőmozgást végző test sebessége. Az analógiát felhasználva, és a $v(t = 0) = 0$ kezdeti feltételt is figyelembe véve kapjuk a sebesség nagyságának időfüggését:

$$v(t) = \frac{g \sin \alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

A sebesség iránya mindig merőleges a pálcára, ezért a 3. ábrán látható koordináta-rendszert használva a sebesség x és y irányú komponense a következőképp fejezhető ki:

$$\mathbf{v}(t) \equiv \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \frac{g \sin \alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cdot \begin{pmatrix} \sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \end{pmatrix}.$$

Rövid trigonometrikus átalakítás után:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{g \sin \alpha}{2\omega_0} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\omega_0 t \\ \sin 2\omega_0 t \end{pmatrix}.$$

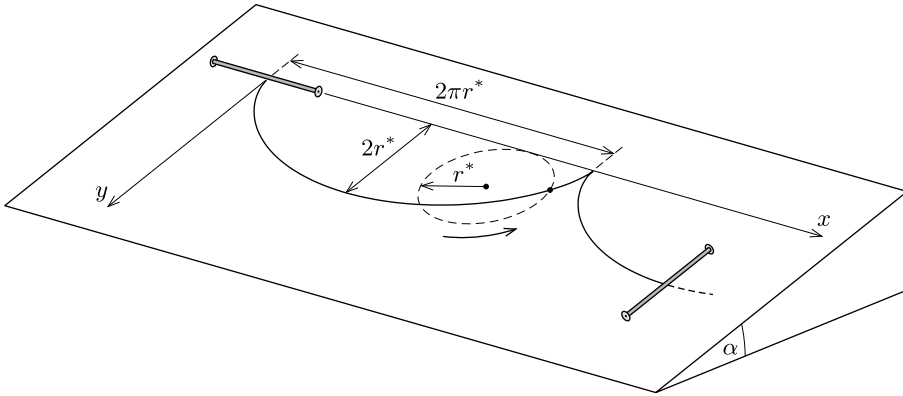
A kapott kifejezésből leolvasható, hogy a sebességvektor végpontja egy

$$\frac{g \sin \alpha}{2\omega_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ középpontú, } v^* = \frac{g \sin \alpha}{2\omega_0} \text{ sugarú}$$

körön söpör végig. A rúd középpontja tehát úgy mozog, mint egy, az x tengelyen v^* sebességgel tisztán gördülő kör egy kerületi pontja, azaz a pálya közönséges (csúcsos) ciklois. A „gördülő kör” sugarát is meghatározhatjuk, ha felhasználjuk, hogy a mozgás periódusideje π/ω_0 , így a kör sugara:

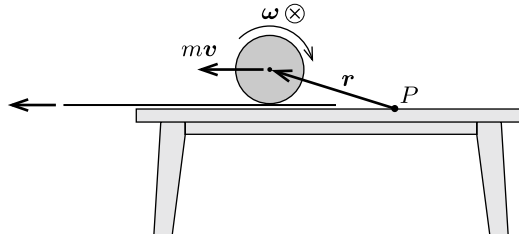
$$r^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{\omega_0} v^* = \frac{g \sin \alpha}{4\omega_0^2}.$$

Az eddigiekből az is következik, hogy a pálca középpontja $y = 2r^*$ -ig süllyed le a lejtőn. A pálca középpontjának pályája és a gördülő kör a 3. ábrán látható.



3. ábra

M. 86. Válasszunk ki az asztal felületén egy, az *ábra* síkjában elhelyezkedő P pontot, és vizsgáljuk a golyó perdületét erre a pontra nézve. A súrlódási erő hatásvonalja átmegy a P ponton, tehát erre vonatkoztatva nincs forgatónyomatéka. A nehézségi erőnek és az asztal által kifejtett kényszererőnek a forgatónyomatéka összességében szintén nulla. Más erő nem hat a testre, így a kiválasztott pontra nézve a perdülete állandó marad, és mivel kezdetben a golyó állt, ezért a perdület értéke nulla.



A terítő kirántása miatt a test elkezd csúszni is, forogni is. Ekkor a Θ tehetlenségi nyomatékú, m tömegű test \mathbf{N} perdülete (az *ábra* jelöléseit követve) két tag összegeként írható fel:

$$\mathbf{N} = \Theta\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}),$$

ahol az első tag az úgynevezett sajátperdület (spin), a második pedig a tömegközéppont mozgásából származó pályamenti perdület. A két perdületjárulék párhuzamos egymással, így összegük csak úgy lehet nulla, ha a sajátperdület vektora és a pályamenti perdület vektora ellentétes irányú, vagyis a terítő kirántása következtében a golyó „visszafelé” kezd el forogni. A vektorok irányának figyelembe

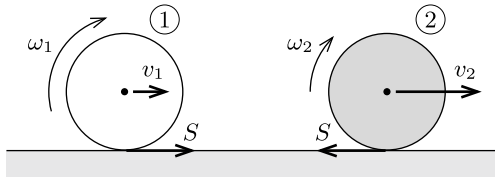
vételével a teljes perdület nagysága $N = -\Theta\omega + mvR$ alakban is felírható, ahol R az acélgolyó sugara.

Könnyen belátható, hogy tiszta gördülés esetén a P pontra vonatkoztatott pályaperdület és a sajátperdület mindig egyforma előjelű. A kettő összegének viszont mindvégig nullának kell maradnia. Ez a két feltétel csak úgy egyeztethető össze, ha végül a test *megáll* az asztalon. (Ezt az eredményt kísérletileg is könnyen ellenőrizhetjük.)

A végállapot nem függ sem a súrlódás értékétől, sem a test adataitól (bármilyen hengersizmetrikus testet használhatunk), sem pedig a terítő kirántásának módjától (húzhatjuk a terítőt egyenletesen, egyenletesen gyorsítva, vagy akár többszöri rángatással is). Fontos azonban, hogy a légellenállás és a gördülési ellenállás ne legyen számottevő, hiszen ezek a hatások képesek megváltoztatni a P pontra vonatkoztatott perdületet.

M. 87. A két golyó között a súrlódás elhanyagolható, ezért ütközésükkor csak a felületükre merőleges erőket fejthetnek ki egymásra. A pillanatszerű ütközés alatt a két golyóból álló rendszerre vízszintes irányban csak az asztal csúszási súrlódási ereje hathat, ennek nagysága azonban véges, ezért a rendszer teljes lendülete és mozgási energiája megmarad. Ez csak úgy teljesülhet, ha az ütközés után az első golyó középpontja megáll, a második pedig átveszi az első golyó v_0 sebességét. A golyók forgásában azonban nem következik be változás, tehát közvetlenül az ütközés után az első golyó egyhelyben forog, míg a második forgás nélkül, v_0 sebességgel csúszik.

A golyók további mozgása során az asztallap által kifejtett súrlódási erő már lényeges szerepet játszik. Az első golyó haladását az S csúszási súrlódási erő előrefelé gyorsítja, míg a másodikat ugyanekkora erő – az *1. ábrán* látható módon – fékezi. Eközben az első golyó szögsebességét a súrlódás csökkenti, a másodikét pedig növeli. Ez a folyamat addig tart, amíg mindkét golyó a tiszta gördülés állapotába nem jut, ezután gyakorlatilag állandósult mozgással haladnak tovább. Be fogjuk látni, hogy a golyók végső mozgásállapota nem függ a súrlódási együtthatótól, sőt az sem számít, ha a súrlódási erő esetleg helyről helyre változik.

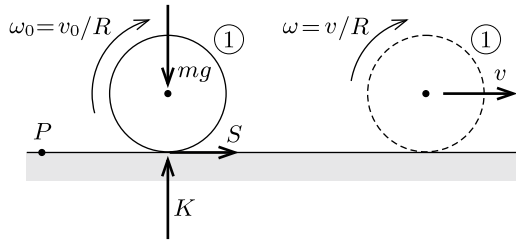


1. ábra

A kezdetben mozgó (m tömegű és R sugarú) golyó az ütközés utáni pillanatban $\omega_0 = v_0/R$ szögsebességgel forog, a tömegközéppontjára vonatkoztatott perdülete tehát

$$\Theta\omega_0 = \frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{v_0}{R} = \frac{2}{5}mRv_0.$$

Ugyanekkora a golyó perdülete az asztallap tetszőleges, az ábrák síkjában fekvő, P pontjára vonatkozólag is, hiszen a golyó tömegközéppontja áll, így haladó mozgásból nem származik perdülete. A mozgás további szakaszában a súrlódási erő nem tudja megváltoztatni a golyó P -re vonatkoztatott perdületét, mert hatásvonalja átmegy a P ponton. (A nehézségi erő és az asztal kényszererőjének összege nulla, így ezeknek sincs eredő forgatónyomatéka.)



2. ábra

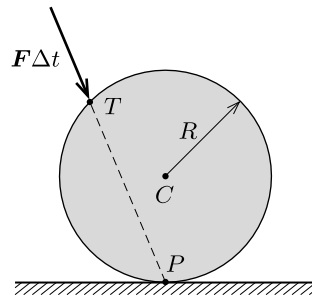
A v sebességgel tisztán gördülő biliárdgolyó P -re vonatkoztatott perdülete a $\frac{2}{5}mRv$ sajátperdület és a tömegközéppont mozgásából származó mRv perdület összege. A 2. ábrán az első (bal oldali) golyót és a rá ható erőket ábráztuk közvetlenül az ütközés utáni pillanatban, illetve a tiszta gördülés állapotában. A perdületmegmaradás tétele szerint

$$\frac{2}{5}mRv_0 = \frac{2}{5}mRv + mRv, \quad \text{ahonnan} \quad v = \frac{2}{7}v_0.$$

Hasonló érveléssel adódik, hogy a másik golyó végsebessége (a súrlódási erő nagyságától függetlenül) $\frac{5}{7}v_0$.

M. 88. a) A pillanatszerű lökés után a biliárdgolyó általában csúszva gördülő mozgásba kezd, mert az asztallal érintkező pontjának sebessége nem zérus. Ez a „köszörülés” addig tart, amíg a csúszási súrlódási erő hatására az érintkezési pont asztalhoz viszonyított relatív sebessége nulla csökken, ezután a golyó tisztán gördülve folytatja mozgását.

Tekintsük az asztalnak azt a P pontját, amely lökés előtt érintkezett a golyóval! Fontos, hogy P az asztallap egy rögzített pontját jelöli, nem pedig a golyó és az asztal mindenkor (az erőlövés és a köszörülés során gyorsulva mozgó) érintkezési pontját. Erre a pontra nézve a golyó teljes perdülete a lökés előtt zérus csakúgy, mint a csúszva gördülés befejeződésekor (megálláskor). A köszörülő mozgás során a golyóra ható erők P pontra vonatkoztatott eredő forgatónyomatéka nulla, mert a nehézségi erő és az asztalban ébredő kényszererő eredője nulla, a súrlódási erő hatásvonalja pedig minden pillanatban átmegy a P ponton. A golyó



1. ábra

perdülete a P pontra nézve tehát csak úgy maradhat végig nulla, ha az indítás során sem változik meg: az indító erőlkés hatásvonalának tehát át kell mennie a P ponton (1. ábra).

b) A golyó akkor kezd a lökés után *biztosan* (nagyon kicsi tapadási súrlódási együttható esetén is) tisztán gördülni, ha az erőlkés ideje alatt nem ébred tapadási súrlódási erő az asztallal való érintkezési pontnál. Keressünk most is egy olyan rögzített pontot, amelyre vonatkozóan a golyó perdülete a mozgás során végig állandó (zérus) marad!

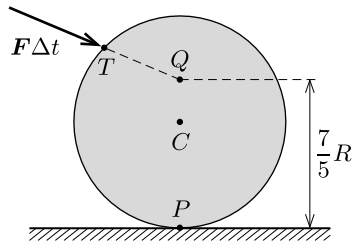
Az erőlkés rövid ideje alatt a golyó tömegközéppontjának v sebessége és a tömegközéppont körüli forgás ω szögsebessége között mindvégig fenn kell állnia a

$$(1) \quad v = R\omega$$

feltételnek, ahol R a golyó sugara, és a 2. ábrán jobbra haladás esetén a forgás az óramutató járásával megegyező irányú. Az m tömegű golyó perdülete bármely rögzített, a TCP síkban elhelyezkedő, az asztaltól h távolságra található pontra

$$(2) \quad N = \frac{2}{5}mR^2\omega + (R - h)mv,$$

amely az (1) kényszerfeltételt is figyelembe véve akkor nulla, ha a választott vonatkoztatási pont az asztaltól $\frac{7}{5}R$ távolságban van.



2. ábra

Válasszuk vonatkoztatási pontnak azt a rögzített Q pontot, amely éppen az asztalnak a golyóval kezdetben érintkező P pontja fölött, attól $\frac{7}{5}R$ távolságban található (2. ábra)! A Q pontra nézve a golyó perdülete az indítás alatt (és utána is) végig zérus marad. Mivel a lökés során az ugrásszerűen megnövő kényszererőnek a forgatónyomatéka Q -ra nézve nulla, ezért a perdületmegmaradás (és a tiszta gördülés) akkor teljesül biztosan, ha a külső erőlkés TQ irányú.

Megjegyzések. 1. A feladat a) részének megoldásából látszik, hogy ha a T pontban támadó erőlkés hatásvonala a TP szakasznál „meredekebb”, akkor a köszörülő mozgás befejeződések a biliárdgolyó „visszafelé” gurul, ellenkező esetben pedig „előre”.

2. A biliárdasztal és a golyó közötti tapadási súrlódási együttható függ a golyó bevonatától és az asztal borító szövet minőségétől. Ha a b) részben megengedjük, hogy az indítás közben tapadási erő is ébredjen az asztal és a golyó között, akkor a dákóval kifejtett erőlkés hatásvonalának nem kell átmennie a Q ponton, hanem a TQ egyenestől (bizonyos szögtartományban) eltérhet.

Ha – a feladat ábrájával ellentétben – a T pont a Q pont alá kerül, akkor a pillanat-szerű lökés következtében a golyó felemelkedhet az asztalról.

M. 89. a) Jelöljük a biliárdgolyó C középpontjából a golyó legalsó (asztallal érintkező) pontjába mutató vektort \mathbf{R} -rel, a golyó tömegét m -mel, a golyó tömegközéppontjának sebességét \mathbf{v} -vel, szögsebességét $\boldsymbol{\omega}$ -val.

A Coriolis-massé lökés esetén a golyó legalsó pontjának

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

sebessége már a mozgás kezdetén sem lesz párhuzamos a golyó középpontjának sebességével. Hasonló összefüggés érvényes a gyorsulások és szöggyorsulások között is:

$$(1) \quad \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}.$$

A „köszörülő” mozgás során a golyó vízszintes irányú gyorsulását és szöggyorsulását az \mathbf{S} súrlódási erő okozza, ezért a dinamika alapegyenlete és a forgómozgás egyenlete a következőképp írható:

$$\mathbf{S} = m\dot{\mathbf{v}},$$

$$\mathbf{R} \times \mathbf{S} = \frac{2}{5}mR^2\dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Fejazzuk ki ezekből a $\dot{\mathbf{v}}$ és $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ változási gyorsaságokat, és írjuk be az (1) egyenletbe:

$$\dot{\mathbf{v}}_P = \frac{1}{m}\mathbf{S} + \frac{5}{2mR^2}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}) \times \mathbf{R}.$$

A jobbkékszabállyal vagy a hármas vektorszorzatra érvényes kifejtési tétellel belátható, hogy $(\mathbf{R} \times \mathbf{S}) \times \mathbf{R} = R^2\mathbf{S}$, így végül a

$$(2) \quad \dot{\mathbf{v}}_P = \frac{7}{2m}\mathbf{S}$$

kifejezést kapjuk. A csúszási súrlódási erő nagysága μmg (itt μ a súrlódási együttható), iránya pedig ellentétes a golyó legalsó pontjának sebességével:

$$(3) \quad \mathbf{S} = -\mu mg \frac{\mathbf{v}_P}{|\mathbf{v}_P|}.$$

Ezt az egyenletet (2)-vel összevetve a

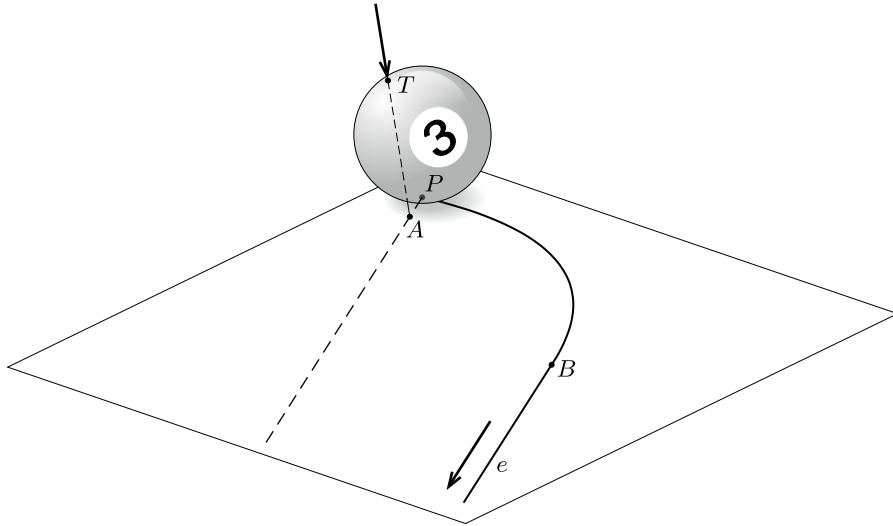
$$(4) \quad \dot{\mathbf{v}}_P = -\frac{7}{2}\mu g \frac{\mathbf{v}_P}{|\mathbf{v}_P|}$$

összefüggésre jutunk.

A (4) egyenletből látszik, hogy a golyó legalsó pontjának sebessége a csúszva gördülés során végig ugyanolyan irányú, és nagysága időben egyenletesen, $\frac{7}{2}\mu g$

gyorsulással nullára csökken. Ez (3) értelmében azt jelenti, hogy a súrlódási erőnek nemcsak a nagysága, hanem az iránya is állandó. Mivel ez az irány nem esik egybe a tömegközéppont kezdeti sebességével, a biliárdgolyó az *ábrán* látható parabola alakú pályán mozog.

Amikor a golyó legelső pontjának sebessége zérussá válik (ez az *ábrán* a B pontnál következik be), a golyó csúszásmentes gördüléssel, a parabola érintőjének irányában folytatja mozgását addig, amíg a közegellenállás és a gördülési ellenállás le nem fékezi.



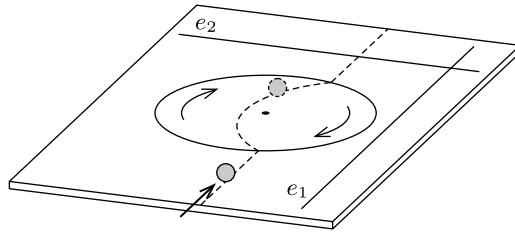
b) A biliárdgolyó végső mozgásirányát a perdületmegmaradás alkalmazásával találhatjuk ki. Vizsgáljuk a golyó PA egyenesre vonatkoztatott perdületét!

Megjegyzés. A perdület vektormennyiség, amelyet általában a tér valamely rögzített, kiválasztott *pontjára* vonatkoztatunk. A perdületvektor adott irányú komponensét azonban tekinthetjük a kiválasztott ponton átmenő, az adott iránnyal párhuzamos *tengelyre* vonatkoztatott mennyiségnek. Ebben a feladatban például – mint látni fogjuk – a golyó P *pontra* vonatkoztatott impulzusnyomatéka nem marad meg, viszont a perdület PA egyenessel párhuzamos komponense (azaz a PA *tengelyre* vonatkoztatott perdület) igen.

Kezdetben a golyó áll, így a perdülete nulla. A lökés időtartama alatt a golyóra ható összes erőnek (a dákó által kifejtett erőnek, az asztalban ébredő kényszererőnek, a súrlódási erőnek és a nehézségi erőnek is) a hatásvonala átmegegy a PA egyenesen, a golyó perdülete tehát a lökés utáni pillanatban is zérus. Ez a helyzet a PB parabolaívén történő mozgás során sem változik meg, hiszen a nehézségi erő és az asztal által kifejtett kényszererő eredő forgatónyomatéka nulla, a súrlódási erő karja pedig mindvégig nulla.

A köszörülő mozgásszakasz befejeződésekor tehát a golyó perdülete a PA egyenesre nézve nulla, ami csak úgy lehetséges, hogy a golyó a PA egyenessel *párhuzamosan* folytatja útját.

M. 90. Ha a labda mozgását pontosan az eredeti haladási irányból figyeljük, azt látjuk, hogy kezdetben távolodik tőlünk, de „oldalirányban” nem mozog. Emiatt állíthatjuk, hogy az asztal síkjában fekvő, a mozgásiránnyal párhuzamos e_1 egyenesre nézve a labda teljes *perdülete nulla* (lásd az *ábrát*). Amikor a labda a forgó korongra ér, a fellépő súrlódási erő hatására oldalirányú mozgásba és forgásba jön. Mivel azonban a súrlódási erő hatásvonala mindvégig átmegy e_1 -en, a perdületnek az e_1 egyenesre vonatkoztatva mindvégig nullának kell maradnia. (Ha például a labda egy adott pillanatban távolodik e_1 -től, akkor a tömegközéppontja körül megfelelő szögsebességgel úgy kell forognia, hogy az eredő perdület nulla legyen.) Ugyanez érvényes akkor is, amikor a labda már elhagyta a forgó korongot, és az asztalapon gördül. Itt azonban – a tiszta (csúszásmentes) gördülés feltétele miatt – az e_1 egyeneshez közeledő vagy távolodó labda eredő perdülete nem lehetne nulla. Egyetlen kiút van: a labda az e_1 egyenessel (és eredeti mozgásirányával) párhuzamosan, irányváltoztatás nélkül gördül tovább.



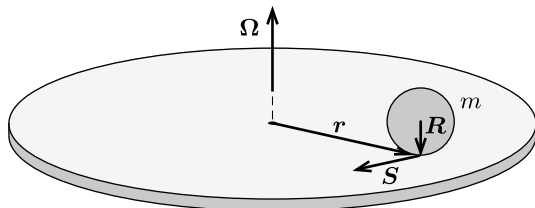
Hasonló érveléssel láthatjuk be, hogy a sebességének nagysága a korong elhagyása után nem lehet más, mint amekkora sebességgel a forgó koronghoz érkezett. Ehhez az asztal síkjában fekvő, az eredeti mozgásirányára merőleges e_2 egyenesre vonatkozó perdület megmaradását kell használni.

A labda tehát ugyanakkora sebességgel, emiatt ugyanakkora nagyságú és irányú impulzussal hagyja el az asztalt, mint amekkorával eredetileg rendelkezett, és emellett az összes mozgási energiája is megmarad. Ez utóbbi azért különösen furcsa, mert mind a korongra érkezéskor, mind pedig annak elhagyásakor a csúszási súrlódási erő munkát végez a labdán, megváltoztatja annak mozgási energiáját. A két munkavégzés előjeles összege nulla, de ennek nincs köze sem az impulzus, sem pedig az energia megmaradásához, hanem a perdülettel következménye.

Megjegyzések. 1. A labda mozgását és forgását leíró dinamikai egyenletek megoldásával belátható, hogy egyenletesen forgó korongon áthaladva a labda éppen az eredeti pályaegyeneseinek meghosszabbításában folytatja útját. Nem egyenletesen forgó korongra azonban ez már nem igaz, a labdának az impulzusa megmarad ugyan, de a pályája oldalirányban eltolódik.

2. A *következő feladatban* belátjuk, hogy az egyenletesen forgó korongon a labda (az asztal koordináta-rendszeréből nézve) körpályán mozog, még hozzá egyenletes körmozgással. A kör középpontja nem esik egybe a korong tengelyével, és a szögsebessége is különbözik a korongétól, mindössze $\frac{2}{7}$ része annak.

M. 91. Használjuk az 1. ábrán látható jelöléseket: legyen \mathbf{R} a labda középpontjából a koronggal való aktuális érintkezési pontba mutató vektor, \mathbf{r} a korong középpontjából az érintkezési pontba mutató vektor, \mathbf{S} a labdára ható tapadási súrlódási erő, $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$ a labda tömegközéppontjának sebessége, $\boldsymbol{\omega}$ a labda szögsebességvektora, $\boldsymbol{\Omega}$ pedig a korong szögsebességvektora.



1. ábra

Az m tömegű gumilabda tömegközéppontjának $\dot{\mathbf{v}}$ gyorsulását a tapadási súrlódási erő okozza, ezért a vízszintes irányú mozgásegyenlet

$$(1) \quad \mathbf{S} = m\dot{\mathbf{v}}$$

alakban írható. A labda szöggyorsulását is a súrlódási erő hozza létre, így a forgómozgás alapegyenlete:

$$(2) \quad \mathbf{R} \times \mathbf{S} = \frac{2}{5}mR^2\dot{\boldsymbol{\omega}},$$

ahol felhasználtuk, hogy a homogén tömegeloszlású gumilabda tehetetlenségi nyomatéka $\frac{2}{5}mR^2$.

A labda legalsó pontja a koronggal együtt mozog, ezért

$$(3) \quad \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

A (3) kényszerfeltétellel analóg összefüggés érvényes a változási gyorsaságok között is:

$$\dot{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v},$$

amint arról (3) idő szerinti deriválásával is meggyőződhetünk. Ebből az (1) és (2) egyenletek felhasználásával:

$$\dot{\mathbf{v}} + \frac{5}{2mR^2} [\mathbf{R} \times (m\dot{\mathbf{v}})] \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}.$$

A hármas vektorszorzat $\dot{\mathbf{v}}$ -tal megegyező irányú (ez például a jobbkézszabály két-szeri alkalmazásával, vagy a könyv végén található matematikai összefoglalóban is szereplő kifejtési tétellel látható be). Egyszerűsítések és rendezés után a

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{2}{7}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$$

egyenletre jutunk, amely az $\Omega_0 = \frac{2}{7}\Omega$ jelöléssel

$$\dot{\mathbf{v}} = \Omega_0 \times \mathbf{v}$$

alakra hozható. Éppen így változik a sebesség az egyenletes körmozgásnál is, ezért az \mathbf{r} helyvektor időbeli változását leíró egyenlet:

$$(4) \quad \dot{\mathbf{r}} = \Omega_0 \times \mathbf{r} + \mathbf{v}^*,$$

itt \mathbf{v}^* a kezdeti feltételektől függő állandó. Tetszőleges \mathbf{v}^* -hoz található olyan \mathbf{r}^* vektor, melynek segítségével \mathbf{v}^* felírható $-\Omega_0 \times \mathbf{r}^*$ alakban, ezért (4) így alakítható:

$$(4') \quad \dot{\mathbf{r}} = \Omega_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*).$$

A kapott (4') összefüggés egy $\frac{2}{7}\Omega$ szögsebességű, \mathbf{r}^* középpontú egyenletes körmozgást ír le. Ennek az egyenletnek a segítségével már válaszolhatunk a feladatban feltett kérdésekre.

a) Ahhoz hogy a labda a korong középpontjával koncentrikus, r_0 sugarú pályán mozogjon, a (4') egyenletben \mathbf{r}^* helyére nullvektort kell írunk, így a tömegközéppont kezdeti sebességét a

$$(5) \quad \mathbf{v}_0 = \Omega_0 \times \mathbf{r}_0$$

formula adja meg, ahol \mathbf{r}_0 a labda kezdeti pozícióját megadó, r_0 hosszúságú vektor. Ebből a kezdősebesség nagysága

$$v_0 = |\Omega_0 \times \mathbf{r}_0| = r_0 \Omega_0 = \frac{2}{7} r_0 \Omega$$

értékűnek adódik.

A labda kezdeti szögsebessége a tiszta gördülést kifejező (3) kényszerfeltételből határozható meg. Az (5) eredményt figyelembe véve

$$\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R} = \frac{5}{2} \mathbf{v}_0.$$

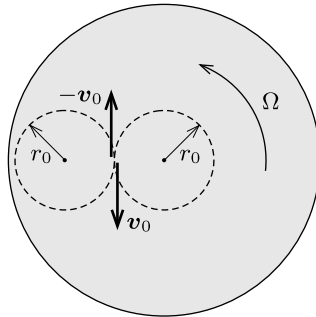
A bal oldalon megjelenő vektoriális szorzat értéke nem függ attól, hogy mekkora a labda $\boldsymbol{\omega}_0$ szögsebesség-vektorának függőleges (\mathbf{R} -rel párhuzamos) komponense, így az elvben tetszőleges értékű lehet (feltételezve, hogy a gumilabda egyetlen pontban érintkezik a koronggal). Valójában azonban a labda és a korong is kis mértékben deformálódik, így az érintkezési felületen kialakuló súrlódás elkerülése érdekében válasszuk a szögsebesség függőleges összetevőjét nullának! Ebben az esetben a szögsebesség vízszintes irányú, nagysága pedig

$$\omega_0 = \frac{5}{2} \frac{|\mathbf{R} \times \mathbf{v}_0|}{R^2} = \frac{5}{2} \frac{v_0}{R} = \frac{5}{7} \frac{r_0 \Omega}{R}.$$

b) A labdát most is az \mathbf{r}_0 kezdőhelyzetből, de $-\mathbf{v}_0$ sebességgel indítjuk. A (4') egyenlet ekkor a következő alakot ölti:

$$-\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0 \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}^*).$$

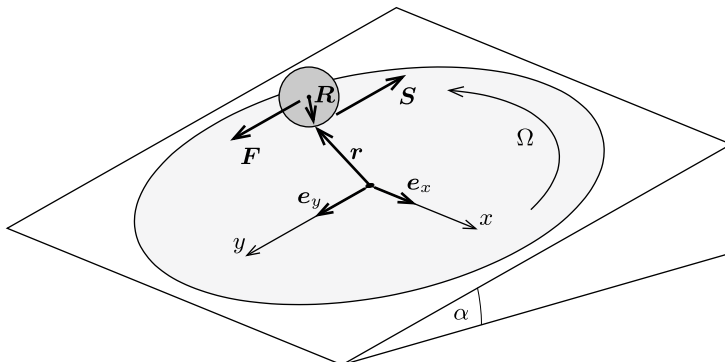
amit (5)-tel összehasonlítva az $\mathbf{r}^* = 2\mathbf{r}_0$ eredményre jutunk. A gumilabda tehát ebben az esetben is r_0 sugarú körpályán mozog, ennek középpontja azonban a korong középpontjától $2r_0$ távolságra van. A labda szögsebességének nagysága az a) részben leírt gondolatmenettel határozható meg, az eredmény $\omega_0 = \frac{9}{7}r_0\Omega/R$.



2. ábra

M. 92. Használjuk az ábrán látható, a lejtő síkjához illeszkedő derékszögű koordináta-rendszert, és legyenek az egyes tengelyek irányába mutató egységvektorok \mathbf{e}_x , illetve \mathbf{e}_y . Jelöljük a labda középpontjából a koronggal való aktuális érintkezési pontba mutató vektort \mathbf{R} -rel, a korong középpontjából az érintkezési pontba mutató vektort \mathbf{r} -rel, a tapadási súrlódási erőt \mathbf{S} -sel, a nehézségi erő lejtőirányú komponensét pedig \mathbf{F} -fel. Utóbbi kifejezhető a feladatban megadott adatokkal:

$$(1) \quad \mathbf{F} = \mathbf{e}_y mg \sin \alpha.$$



A labda tömegközéppontjának mozgásegyenlete:

$$(2) \quad \mathbf{F} + \mathbf{S} = m\ddot{\mathbf{r}},$$

a tömegközéppont körüli forgómozgást leíró egyenlet pedig:

$$(3) \quad \mathbf{R} \times \mathbf{S} = \frac{2}{5}mR^2\dot{\boldsymbol{\omega}},$$

ahol $\boldsymbol{\omega}$ a labda (időben változó) szögsebességvektora, $\frac{2}{5}mR^2$ pedig a tehetetlenségi nyomatéka.

A gumilabda koronggal érintkező pontja nem csúszik meg, ezért a tiszta gördülést kifejező kényszerfeltétel:

$$(4) \quad \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

Ezzel teljesen analóg összefüggés érvényes a labda középpontjának gyorsulása és szöggyorsulása között is:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

(2) és (3) felhasználásával ebből a következőt kapjuk:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{5}{2mR^2} [\mathbf{R} \times (m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F})] \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

A vektoriális szorzásokat elvégezve, bevezetve a tömegközéppont sebességére a $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ jelölést, majd az (1) összefüggést figyelembe véve:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{2}{7}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{5}{7}\mathbf{e}_y g \sin \alpha.$$

Ez az egyenlet a

$$(5) \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{e}_x \frac{5g \sin \alpha}{2\Omega}$$

jelöléssel a következő alakra hozható:

$$(6) \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{2}{7}\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*).$$

A tömegközéppont sebességének változási ütemét leíró (6) egyenletből látszik, hogy ha $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$, azaz a gumilabdát \mathbf{e}_x irányában, $\frac{5}{2}g \sin \alpha / \Omega$ sebességgel gurítja el a bűvész, akkor a labda középpontja egyenes vonalú, egyenletes mozgást fog végezni.

Megjegyzések. 1. Érdekes, hogy az eredmény nem függ a kezdeti pozíciótól, azaz ha a labdát a korong tetszőleges pontjából \mathbf{v}^* sebességgel indítjuk, akkor a középpontjának pályája egy, az x tengellyel párhuzamos egyenes lesz. A labda kezdeti szögsebességvektora viszont már függ az indítás helyétől, értékét a tiszta gördülés (4) feltételéből határozhatjuk meg.

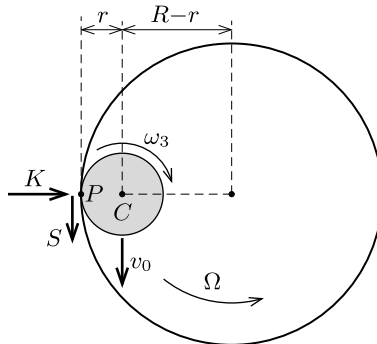
2. Felmerülhet a kérdés, hogyan mozog a labda, ha középpontjának kezdősebessége nem egyenlő a fent meghatározott \mathbf{v}^* értékkel. A (6) egyenletből következik, hogy az $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ módon definiált \mathbf{u} vektor változási ütemét az

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{2}{7}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$$

egyenlet írja le. Ez azt jelenti, hogy az \mathbf{u} vektor időben egyenletesen, $\frac{2}{7}\boldsymbol{\Omega}$ szögsebességgel fordul körbe (ahogy azt az *előző feladat* megoldásában láttuk). A $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{u}$ vektor végpontja emiatt egy \mathbf{v}^* középpontú, \mathbf{u} sugarú körön söpör végig. A golyó középpontja tehát a $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}^*$ esetben (a kezdősebesség nagyságától függően) hurkolt, nyújtott vagy csúcsos ciklois alakú pályán mozog.

M. 93. Megmutatjuk, hogy a labda – jóllehet a nehézségi erő lefelé húzza – függőleges irányban *harmonikus rezgőmozgást* végez. Ezt a meglepő viselkedést – a forgás és a tömegközépponti mozgás érdekes „összjátékával” – a cső falánál fellépő súrlódási erő okozza.

Jelöljük a labda középpontját C -vel, a cső falával való mindenkori érintkezési pontját pedig P -vel. A labda tömegközéppont körüli forgásának szögsebességét érdemes három, egymásra merőleges összetevőre bontanunk: a függőleges irányú ω_3 komponensre, a PC irányú ω_2 komponensre, valamint a PC -re merőleges, vízszintes irányú ω_1 komponensre. A mozgás során a szögsebesség-komponenseknek nemcsak a nagysága változik, de (ω_3 kivételével) az irányuk is elfordul a PC szakasszal együtt.



1. ábra

Tekintsünk a labdára felülnézetből (1. ábra), és rajzoljuk be a függőleges tengely körüli forgásokat, illetve a labdára ható vízszintes irányú erőket: a cső falára merőleges kényszererőt (K) és a tapadási súrlódási erő vízszintes komponensét (S)! A labdára ható további erőket, azaz a súrlódási erő függőleges komponensét és a nehézségi erőt nem tüntettük fel az ábrán. (Feltételezzük, hogy a labda mozgásának vizsgált szakaszán a légellenállás és a gördülési ellenállás figyelmen kívül hagyható.)

Jelöljük a labda tömegközéppontjának a cső tengelye körüli „keringési” szögsebességét Ω -val (az ábrán látható irányítással), ezzel a csúszásmentes gördülés

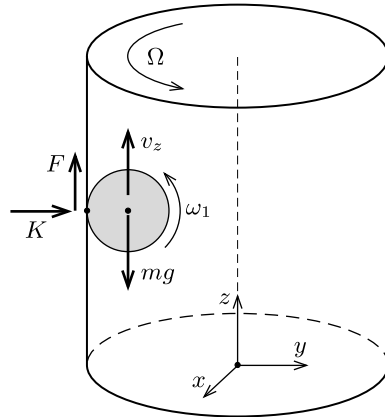
(egyik) feltétele így írható:

$$(1) \quad (R - r)\Omega = r\omega_3, \quad \text{vagyis} \quad \omega_3 = \frac{R - r}{r}\Omega.$$

Figyelemre méltó, hogy a labda saját perdülete és a tömegközéppont „pályaperdülete” *ellentétes* irányú.

A labdára ható erők közül egyedül az érintő irányú S tudná megváltoztatni az Ω és ω_3 szögsebességeket. Az ábrán jelölt irányú S erő forgatónyomatéka Ω -t növelné, ω_3 -t viszont csökkentené, de ez lehetetlen, hiszen az (1) feltétel miatt a két szögsebesség aránya rögzített. Az ellentmondás feloldása: $S = 0$, és sem Ω , sem ω_3 nem változhat a mozgás során. A labda középpontjától a cső szimmetriatengelyére bocsátott merőleges egyenes (és vele együtt a PC szakasz) tehát *egyenletesen* forog, a szögsebesség nagyságát a labda v_0 kezdősebessége határozza meg:

$$\Omega = \frac{v_0}{R - r} = \text{állandó}.$$



2. ábra

A labda függőleges irányú mozgásának leírásához válasszunk olyan derékszögű koordináta-rendszert, melynek z tengelye egybeesik a cső szimmetriatengelyével. Jelöljük a labda tömegközéppontjának függőleges sebességkomponensét v_z -vel, a függőleges irányú tapadási súrlódási erőt pedig F -fel (2. ábra). A v_z sebesség és az ω_1 szögsebesség nem független egymástól, hiszen a tiszta gördülés miatt a már felírt (1) mellett teljesülnie kell még a

$$(2) \quad v_z = r\omega_1$$

egyenlőségnek is.

Írjuk fel az m tömegű, $\frac{2}{5}mr^2$ tehetetlenségi nyomatékú gumilabdára a függőleges irányú mozgást leíró Newton-egyenletet, valamint az x és y tengely körüli forgómozgás alapegyenletét egy tetszőleges helyzetben. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy a vizsgált időpillanatban a labda x koordinátája (az

ábráknak megfelelően) éppen nulla, így az egyenletek az

$$(3) \quad F - mg = m\dot{v}_z,$$

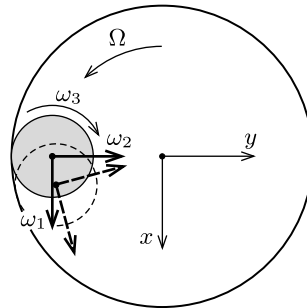
$$(4) \quad rF = -\frac{2}{5}mr^2\dot{\omega}_x,$$

$$(5) \quad 0 = \dot{\omega}_y$$

alakot öltik. A (4) és (5) összefüggésben megjelenő ω_x és ω_y mennyiségek a labda szögsebességének x és y irányú összetevői, amelyek a korábban bevezetett ω_1 és ω_2 szögsebesség-komponensekkel (a vizsgált időpillanatban) a következő kapcsolatban állnak:

$$(6) \quad \omega_x = \omega_1, \quad \omega_y = \omega_2.$$

A (6) egyenletek közül az elsőre pillantva könnyen arra a következtetésre juthatunk, hogy a szögsebesség-komponensek változási gyorsaságai között fennáll az $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_1$ összefüggés. Ebből a (2)–(4) egyenletek felhasználásával az adódik, hogy a labda $-z$ irányú, $\frac{5}{7}g$ nagyságú gyorsulással halad lefelé, vagyis a labda pályája egy lefelé haladó, egyre növekvő menetemelkedésű csavarvonal. Ez a gondolatmenet azonban *hibás!*



3. ábra

A labda szögsebességének x irányú összetevője ugyanis két okból is változik (3. ábra): egyrészt az ω_1 komponens nagyságának változása miatt, másrészt pedig azért, mert az ω_2 komponens iránya Ω szögsebességgel forog:

$$(7) \quad \dot{\omega}_x = \dot{\omega}_1 - \Omega\omega_2.$$

Hasonló összefüggést írhatunk fel ω_y változási gyorsaságára is:

$$(8) \quad \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_2 + \Omega\omega_1.$$

A (3) és (4) egyenletekből egyaránt kifejezhetjük az F erő változási gyorsaságát, így a másik oldalakat egyenlővé téve kapjuk:

$$m\ddot{v}_z = -\frac{2}{5}mr\ddot{\omega}_x,$$

amiből a (2), (5), (7) és (8) összefüggések felhasználásával:

$$\ddot{v}_z = -\frac{2}{7}\Omega^2 v_z(t).$$

Ez az egyenlet formailag éppen olyan, mint egy $\sqrt{2/7}\Omega$ körfrekvenciával rezgő test mozgásegyenlete, ezért a gumilabda függőleges sebessége időben periodikusan változik. A $v_z = 0$ kezdeti feltételt figyelembe véve:

$$v_z(t) = -v_z^{\max} \sin\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\Omega t\right).$$

Ugyanilyen frekvenciájú harmonikus rezgőmozgás szerint változik a labda függőleges helyzete is:

$$z(t) = z_0 - z_{\max} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\Omega t\right)\right],$$

ahol z_0 a labda középpontjának z koordinátája a mozgás kezdetén, z_{\max} pedig a rezgés amplitúdója, amit az $\omega_2 = 0$ kezdeti feltételből határozhatunk meg. Ekkor ugyanis $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_1$, amit a (4) egyenletbe helyettesítve, majd (2)-t és (3)-at felhasználva az

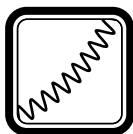
$$(\dot{v}_z)_{t=0} = -\frac{5}{7}g$$

eredményre jutunk, ami pedig nem más, mint a labda tömegközéppontjának $-\frac{2}{7}\Omega^2 z_{\max}$ maximális gyorsulása. A függőleges rezgőmozgás amplitúdója tehát

$$z_{\max} = \frac{5}{2}\frac{g}{\Omega^2}.$$

Megjegyzések. 1. A labda térbeli mozgása (szigorú értelemben véve) nem periodikus, hanem kváziperiodikus, mert a felülnézetben látszó körmozgás és a függőleges irányú harmonikus rezgőmozgás periódusideje nem racionális szám.

2. Az első látásra meghökkentő jelenséget gyakran megfigyelhetjük golfversenyek televíziós közvetítésekor. A túl nagy sebességgel megütött golfabda érintőlegesen beleesik ugyan a cső alakú lyukba, de – egy rezgési periódus megtétele után – ki is táncol onnan.



Rugalmasságtan

M. 94. Ha egy D direkciós állandójú rugó különböző részeit különböző nagyságú erő feszíti, akkor a rugó $\Delta\ell$ megnyúlása nem számolható a szokásos $F = D\Delta\ell$ összefüggés alapján, hanem bonyolultabb eljárásra van szükség. Általánosan alkalmazható módszer: gondolatban felosztjuk a rugót olyan kicsiny darabkákra, hogy egy-egy darabkán belül a húzóerőt már állandó nagyságúnak tekinthessük, kiszámítjuk a kicsiny darabkák megnyúlását, majd ezeket összegezzük. A végeredmény általában felsőbb matematikai módszereket (integrálszámítást) igényel, szerencsére ez a feladat elemi úton is megoldható.

Az egyik végénél fogva függőlegesen lógatott m tömegű rugóban az átlagos húzóerő $mg/2$, ennek megfelelően a rugó megnyúlása $mg/(2D)$, ahol D az egyenletesen húzott rugóra jellemző direkciós állandó.

A feladat *ábráján* látható „belógós” esetben a rugó mindkét végét $mg/2$ függőleges erővel és – a 45° -os szög miatt – ugyanekkora nagyságú vízszintes erővel kell tartani. A rugó mentén a feszítőerő vízszintes komponense állandó, tehát $mg/2$ nagyságú, hiszen a rugó egyes darabkáira nem hat vízszintes irányú külső erő. A rugót feszítő erő függőleges irányú komponense a rugó súlya miatt helyről helyre változik: a rugó közepénél a szimmetria miatt nulla, a végpontokban pedig $mg/2$.

A teljes rugóerő (a vízszintes és a függőleges komponensek négyzetösszegéből vont négyzetgyök) egyetlen pont kivételével mindenhol nagyobb, mint a vízszintes erőkomponens, vagyis $mg/2$. Emiatt az átlagos feszítőerőről – annak részletes kiszámítása nélkül is – határozottan állíthatjuk, hogy nagyobb $mg/2$ -nél, azaz a megnyúlás (vagyis a rugó hossza) *biztosan nagyobb*, mint $mg/(2D)$.

A megnyúlt rugó tehát a függőlegesen lógatott helyzetben lesz rövidebb, a feladat szövegénél közölt ábrán látható, ívesen belógó helyzetben pedig hosszabb.

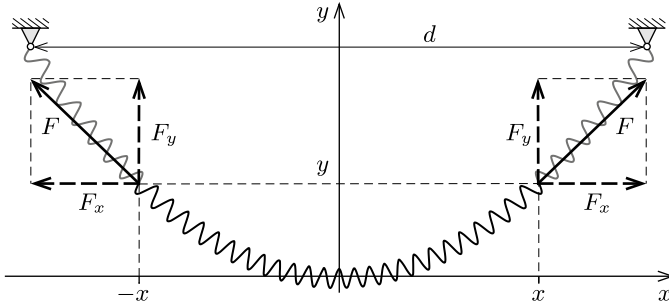
Megjegyzés. A következő feladatban belátjuk, hogy a két végénél felfüggesztett rugó parabola alakú. Integrálszámítás segítségével azt is ki lehet számítani, hogy a 45° -os szögben induló, ívesen hajló rugó L_1 hosszának és a függőlegesen lógó rugó L_2 hosszának aránya

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2} \approx 1,15.$$

Ha az $L_1 : L_2$ arányt kísérletileg próbáljuk meghatározni, akár 1-nél kisebb értéket is kaphatunk. Ennek oka egyrészt az, hogy a slinky-rugó direkciós állandója nagy erők esetén (erős megnyúlásnál) nem tekinthető állandónak; másrészt pedig az, hogy az egyik végénél felfüggesztett rugó „ki tud tekeredni” (az alsó vége akár több fordulatot is megethet a rugó súlyának hatására), míg a mindkét végénél befogott rugó nem teheti ezt meg.

M. 95. Vegyük fel koordináta-rendszerünket az *ábrán* látható módon és jelöljük a slinky rögzített végeinek távolságát d -vel.

A slinkyt feszítő erő x irányú komponense a rugó mentén állandó, hiszen ebben az irányban a slinky egy tetszőlegesen kiválasztott darabja nem gyorsul, vízszintes irányú külső erő pedig nem hat a rugóra. Ez az állandó vízszintes feszítőerő azt jelenti, hogy a slinky egyenlő tömegű (így szükségképpen egyenlő direkciós állandójú) kis darabkáinak a vízszintes vetülete is egyenlő (a darabkák nyugalmi hosszát a megnyúlt hosszukhoz képest elhanyagoltuk). Ebből következik, hogy a slinky bármely (nem feltétlenül rövid) darabjának tömege egyenesen arányos a darab vízszintes vetületének hosszával.



Tekintsük most a slinky ábrán látható darabját! Ennek a vízszintes vetülete $2x$, így e darab tömege a slinky teljes m tömegének a $2x/d$ része. A függőleges irányú egyensúly feltétele:

$$2F_y = \frac{2x}{d} mg.$$

Mindkét oldalt elosztva a feszítőerő állandó F_x vízszintes vetületével:

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{x}{d} \frac{mg}{F_x}.$$

A feszítőerő a rugóban mindig érintőirányú, ezért a bal oldalon álló hányados éppen a slinky x helyen mérhető $\Delta y/\Delta x$ meredeksége:

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{d} \frac{mg}{F_x}.$$

Ez az egyenlet nagyon hasonlít a nyugalomból induló, egyenes vonalban állandó a gyorsulással mozgó test $s(t)$ elmozdulást megadó egyenletre:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = at,$$

melynek megoldása (például a $v(t) = \Delta s/\Delta t$ grafikon alatti terület meghatározásából):

$$s(t) = \frac{a}{2} t^2.$$

Az analógia alapján a két végénél felfüggesztett slinky alakját leíró $y(x)$ függvény

$$y(x) = \frac{mg}{2F_x d} x^2,$$

a slinky alakja tehát egy parabola.

Megjegyzés. Az analógia felismerése nélkül is célhoz érünk, ha az (1) összefüggést differenciálegyenletté alakítjuk, majd integráljuk:

$$y'(x) = x \cdot \frac{mg}{F_x d}, \quad \text{ahonnan} \quad y(x) = \frac{mg}{2F_x d} x^2 + C.$$

Az integrációs állandó a választott koordináta-rendszerben $C = 0$, a feszítőerő vízszintes komponense pedig kifejezhető a slinky rugóállandójával ($F_x = D \cdot d$), így a rugó alakját megadó függvény:

$$y(x) = \frac{mg}{2Dd^2} x^2.$$

M. 96. a) Osszuk fel a slinkyt gondolatban $N \gg 1$ darab egyforma tömegű részre! A darabkák tömege ekkor m/N , rugóállandója pedig a teljes slinky D rugóállandójának az N -szerese, $D^* = ND$ lesz. Alulról számítva a k -adik darabkát feszítő erő nagysága

$$F_k = (k-1) \frac{mg}{N},$$

így a darabka ℓ_k hossza:

$$\ell_k = \frac{F_k}{D^*} = (k-1) \frac{mg}{N^2 D}.$$

(A darabkák kezdeti hossza a végső hosszhoz képest elhanyagolható, ezért hosszukat a megnyúlásukkal közelíthetjük.)

A k -adik darabka felső végének a slinky aljától mért x_k távolságát megkapjuk, ha összeadjuk az alatta lévő darabkák hosszát:

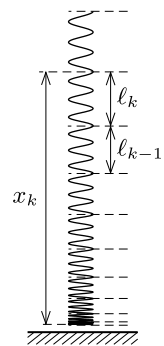
$$(1) \quad x_k = \sum_{j=1}^k \ell_j = \sum_{j=1}^k (j-1) \frac{mg}{N^2 D} = \frac{k(k-1)}{2} \frac{mg}{N^2 D} = \frac{k}{N} \left(\frac{k}{N} - \frac{1}{N} \right) \frac{mg}{2D}.$$

k helyébe N -et helyettesítve, majd felhasználva, hogy $N \gg 1$, megkapjuk a slinky L hosszát D -vel és m -mel kifejezve:

$$(2) \quad L = \frac{mg}{2D},$$

összhangban a 94. feladat megoldásával.

Az emelés során befektetett munka egyrészt a slinky rugalmas energiáját növeli, másrészt fedezi a tömegközéppont emelkedése miatt bekövetkező potenciális



1. ábra

energia-növekedést. A rugalmas energia kezdetben nulla, a végállapotban pedig az egyes darabkák rugalmas energiájának összege:

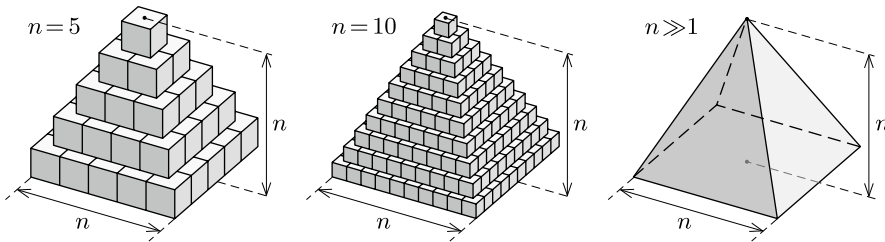
$$(3) \quad E_{\text{rug}} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} D^* \ell_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} N D \left[(j-1) \frac{mg}{N^2 D} \right]^2 = \frac{1}{2} \frac{(mg)^2}{N^3 D} \sum_{j=1}^N (j-1)^2.$$

Megjegyzés. A rugalmas energia kifejezésében megjelenik az első $(N-1)$ darab négyzetszám összege. A további számolásainkban többször előfordul majd hasonló összegzés, ezért vizsgáljuk meg, hogyan számolható nagy n -ekre az

$$s_n = \sum_{j=1}^n j^2$$

alakú szumma! A zárójelben szereplő összeg nem más, mint a 2. ábrán látható, csupa egységkockából felépített, n emeletes „piramis” térfogata. Nagy n -ekre a piramis térfogatát jól közelíti egy olyan egyenes gúla, melynek alapja n oldalhosszúságú négyzet, magassága szintén n egység, ezért

$$(4) \quad s_n \approx n \cdot n \cdot \frac{n}{3} = \frac{n^3}{3}.$$



2. ábra

A (3) kifejezés tovább alakítható a négyzetszámok összegére vonatkozó (4) közelítő formula segítségével:

$$E_{\text{rug}} = \frac{1}{2} \frac{(mg)^2}{N^3 D} s_{N-1} \approx \frac{1}{2} \frac{(mg)^2}{N^3 D} \frac{(N-1)^3}{3} \approx \frac{1}{6} \frac{(mg)^2}{D} = \frac{1}{3} mgL.$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk a (2) összefüggést.

A slinky gravitációs potenciális energiájának kiszámításához határozzuk meg a tömegközéppont asztaltól mért h távolságát az emelési folyamat végén:

$$h = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N \frac{m}{N} x_k = \frac{1}{2} \frac{mg}{N^3 D} \sum_{k=1}^N k(k-1).$$

Az összegzésben nagy N -ekre elég csak a k -ban másodfokú tagokat megtartani:

$$h \approx \frac{1}{2} \frac{mg}{N^3 D} s_N \approx \frac{1}{2} \frac{mg}{N^3 D} \frac{N^3}{3} = \frac{1}{6} \frac{mg}{D} = \frac{L}{3}.$$

A slinky tömegközéppontja tehát teljes hosszának alsó harmadánál található. Ezzel a potenciális energia az asztallap síkjához viszonyítva:

$$E_{\text{grav}} = mgh = \frac{1}{3}mgL.$$

Tehát az emelés közben végzett munka

$$W = E_{\text{rug}} + E_{\text{grav}} = \frac{2}{3}mgL.$$

Megjegyzés. Ugyanezt az eredményt az emelésnél kifejtett (változó nagyságú) erő integrálásával is megkaphatjuk. Amikor a slinkynek éppen k darabkáját emeltük meg, ezek súlyát, tehát

$$(5) \quad F_k = \frac{k}{N}mg$$

erőt kell kifejtenuünk. Az (1) összefüggés szerint a $k \gg 1$ darabkából álló, az alsó végénél feszítetlen rugódarab hossza

$$(6) \quad x_k \approx \left(\frac{k}{N}\right)^2 \frac{mg}{2D}.$$

hosszúságú. A (2), (5) és (6) egyenletek összevetéséből az erő távolságfüggésére $F(x) = mg\sqrt{x/L}$, a végzett munkára pedig

$$W = \int_0^L F(x) dx = \frac{mg}{\sqrt{L}} \int_0^L \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}mgL$$

adódik.

b) Az elengedés után a slinky tömegközéppontja szabadon esik, ezért a teljes összecsucódás utáni pillanatban a sebessége

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2}{3}gL}.$$

c) Az összecsucódás időtartama a szabadesés idejével egyezik meg:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Megjegyzés. A b) kérdésre kapott eredményünk segítségével kiszámíthatjuk a slinky mozgási energiáját az összecsucódás utáni pillanatban:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{3}mgL,$$

tehát a slinky teljes (rugalmas és gravitációs helyzeti) energiájának csak a felét kaptuk vissza mozgási energiaként! Vajon hová tűnt az energia másik fele? Disszipálódott, méghozzá a slinky összecsucódásakor a menetek parányi, rugalmatlan ütközései következtében.

M. 97. A megforgatott rugó ℓ hosszúsága D , m , ω és r_0 függvénye lehet. Ezen mennyiségek mértékegysége:

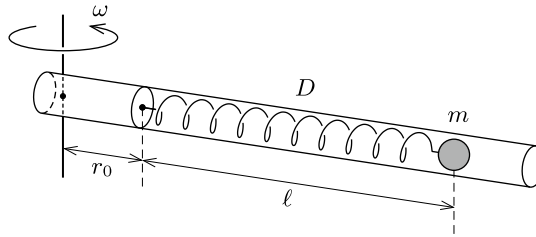
$$[\ell] = \text{m}; \quad [D] = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}; \quad [m] = \text{kg}; \quad [\omega] = \frac{1}{\text{s}}; \quad [r_0] = \text{m}.$$

Látható, hogy hosszúság dimenzió csak r_0 -ban szerepel, a megnyúlt rugó ℓ hosszának tehát r_0 -lal arányosnak kell lennie, és az arányossági tényező csak a $\xi = \omega\sqrt{m/D}$ dimenziótlan kifejezéstől függhet:

$$(1) \quad \ell = r_0 \cdot f(\xi).$$

Az $f(\xi)$ függvény konkrét alakját csak részletes dinamikai számítással határozhatjuk meg, annyit azonban megállapíthatunk, hogy $r_0 \rightarrow 0$ határesetben a rugó egyensúlyi hossza – ha ilyen egyáltalán kialakul – *nulla* lesz, tehát a rugó (annak ellenére, hogy forgásba hoztuk) egyáltalán *nem nyúlik meg*.

Tekintsük először azt az egyszerűsített feladatot, amikor egy nulla tömegű slinky-rugó végén m tömegű pontszerű test található (1. ábra).



1. ábra

A forgásba hozott rugó hosszát a tömegpont mozgásegyenletéből számíthatjuk ki:

$$m(r_0 + \ell)\omega^2 = D\ell,$$

ahonnan

$$\ell = r_0 \frac{\frac{m\omega^2}{D}}{1 - \frac{m\omega^2}{D}} = r_0 \frac{\xi^2}{1 - \xi^2}.$$

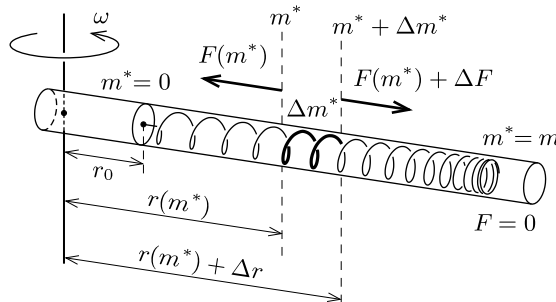
Ez a megoldás csak $\xi < 1$, vagyis

$$\omega < \sqrt{\frac{D}{m}} \equiv \omega_0$$

esetben érvényes, és ilyen szögsebességeknél $r_0 \rightarrow 0$ határesetben ℓ nullává válik. Ha viszont $\omega > \omega_0$, akkor a rugóerő semekkora ℓ értéknél nem tudja biztosítani a körmozgáshoz szükséges centripetális erőt, tehát az *ideális* slinky sehol nem lehet egyensúlyban, így (tetszőlegesen kicsi r_0 mellett is) *végtelen* hosszúra nyúlik!

Ezek szerint finomítani kell a dimenzionális megfontolással kapott (1) egyenletről levonható következtetést. Ha az $f(\xi)$ függvény valahol szingulárisá („végtelen

naggyá”) válik, akkor tetszőleges r_0 mellett (és így az $r_0 \rightarrow 0$ határesetben is) az ℓ hossz végtelen nagy lesz. (Reális körülmények között természetesen a megnyúlásnak korlátot szab a rugó meneteinek hossza: egy teljesen kitekeredett rugó nyilvánvalóan nem követi már a Hooke-törvényt.)



2. ábra

Térjünk most vissza az eredeti, folytonos tömegeloszlású rugó esetére! Jellemezzük a rugó egyes pontjait a rugó rögzített vége és a kérdéses pont közötti rugódarab m^* tömegével. Jelöljük az m^* paraméterértékhez tartozó rugódarabka és a forgástengely távolságát $r(m^*)$ -gal, az ezen a helyen ébredő rugóerőt pedig $F(m^*)$ -gal (2. ábra). Ekkor teljesül, hogy

$$(2) \quad r(0) = r_0 \quad \text{és} \quad F(m) = 0.$$

A megfeszített rugó kicsiny, Δm^* tömegű (a 2. ábrán vastag vonallal jelölt) darabkája a feszítőerő hatására

$$r(m^* + \Delta m^*) - r(m^*) \equiv \Delta r = \frac{1}{mD} F(m^*) \Delta m^*$$

hosszúságúra nyúlik (hiszen ha F mindenhol ugyanakkora volna, akkor a rugó hossza F/D lenne). A kicsiny rugódarabkára felírható a forgómozgás dinamikai feltétele:

$$F(m^* + \Delta m^*) - F(m^*) \equiv \Delta F = -\Delta m^* \cdot r(m^*) \cdot \omega^2.$$

A fenti két egyenlet így foglalható össze:

$$(3) \quad \frac{\Delta r}{\Delta m^*} = \frac{1}{mD} F(m^*),$$

$$(4) \quad \frac{\Delta F}{\Delta m^*} = -\omega^2 r(m^*).$$

Nem nehéz ráismerni, hogy a (3) és (4) egyenletek alakilag megegyeznek egy harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont mozgásegyenleteivel. Valóban, az

$$m^* \longleftrightarrow t \quad \text{és} \quad \frac{F}{mD} \longleftrightarrow v$$

megfeleltetéssel a rugó alakját és a benne ébredő feszítőerőt megadó egyenletek így írhatók:

$$(3') \quad \frac{\Delta r(t)}{\Delta t} = v(t),$$

$$(4') \quad \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = -\left(\frac{\xi}{m}\right)^2 r(t),$$

ahol $\xi = \omega\sqrt{m/D}$ a korábban is használt dimenziótlan állandó. Ezek az egyenletek egy tömegpont ξ/m „körfrekvenciájú” harmonikus rezgőmozgását írják le. Ha figyelembe vesszük még a (2)-nek megfelelő $r(t=0) = r_0$ és $v(m^* = m) = 0$ határfeltételeket is, a megoldás:

$$r(m^*) = \frac{r_0}{\cos \xi} \cos \left[\xi \left(1 - \frac{m^*}{m} \right) \right], \quad F(m^*) = \frac{\xi D r_0}{\cos \xi} \sin \left[\xi \left(1 - \frac{m^*}{m} \right) \right].$$

Megjegyzés. Ugyanehhez az eredményhez úgy is eljuthatunk, ha a (3) és (4) egyenletekben a $\Delta m^* \rightarrow 0$ határértéket képezzük, és így az

$$r'(m^*) = \frac{1}{mD} F(m^*), \quad F'(m^*) = -\omega^2 r(m^*), \quad \text{vagyis} \quad r''(m^*) = -\frac{\xi^2}{m^2} r(m^*)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ennek megoldása megfelelő periodicitású szinusz- és koszinusz-függvények szuperpozíciója.

A rugó teljes megnyúlása:

$$\ell = r(m) - r(0) = r_0 \left(\frac{1}{\cos \xi} - 1 \right) = r_0 \left[\frac{1}{\cos(\omega\sqrt{m/D})} - 1 \right],$$

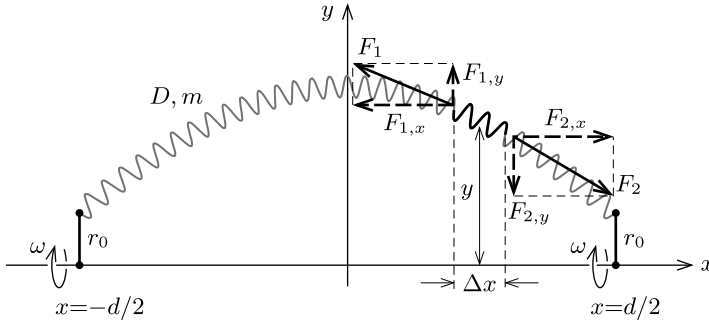
de ez csak akkor írja le helyesen a kialakuló állapotot, ha $\xi < \pi/2$, vagyis ha

$$\omega < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{D}{m}} \equiv \omega_{\text{kritikus}}.$$

A szögsebességet lassan növelve a rugó megnyúlása egyre nagyobbá válik, és a kritikus szögsebességhez közeledve végtelenhez tart. A kritikus értéket meghaladva a rugónak nincs stabil forgó állapota, megnyúlásának csak a teljes kiegyenesedése (a Hooke-törvény érvénytelenné válása) szab határt.

Látható, hogy a folytonos tömegeloszlású slinky lényegében ugyanúgy viselkedik, mint az egyszerűsített feladatban szereplő (a végénél pontszerű testtel terhelt súlytalan) rugó, csak a kritikus szögsebesség nagysága különbözik egy $\pi/2$ -es tényezőben.

M. 98. Vegyük fel a koordináta-rendszerünket az *ábrán* látható módon, és keressük a (már állandósult állapotban lévő) rugó alakját ebben a rendszerben. Jelöljük az m tömegű, D rugóállandójú slinky végeinek távolságát d -vel, pályasugarukat pedig r_0 -lal.



Tekintsük a slinky egy tetszőlegesen kiválasztott, kicsiny darabkájára ható erőket! A slinkyt feszítő erő x irányú komponense a rugó mentén állandó (F_0), hiszen ebben az irányban a slinky kiválasztott kicsiny darabkája nem gyorsul:

$$F_{1,x} = F_{2,x} = F_0.$$

Ebből következik, hogy a slinky egyforma tömegű (azaz egyenlő direkciós állandójú) darabjainak az x irányú vetülete is egyforma (a darabkák nyugalmi hosszát a megnyúlt hosszukhoz képest elhanyagoltuk). A kiszemelt darabka x irányú vetülete Δx , így tömege a slinky teljes m tömegével kifejezve $m\Delta x/d$.

y irányban a kis darabkára ható erők eredője biztosítja a darabka $y\omega^2$ centripetális gyorsulását, ahol ω a pörgetés szögsebessége:

$$(1) \quad F_{2,y} - F_{1,y} = \Delta x \frac{m}{d} \cdot y\omega^2.$$

A slinkyben ható erő mindig érintőirányú, így a feszítőerő x és y irányú komponensének aránya kifejezhető az adott pontbeli meredekséggel:

$$\frac{F_{1,y}}{F_0} = -\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_1, \quad \frac{F_{2,y}}{F_0} = -\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_2.$$

Az (1) egyenlet mindkét oldalát elosztva F_0 -al, majd felhasználva a meredekségre vonatkozó összefüggéseket:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_2 - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_1 = -\Delta x \frac{m\omega^2}{F_0 d} \cdot y.$$

Δx -szel osztva, majd Δx értékével nullához tartva a bal oldalon a slinky alakját leíró $y(x)$ függvény második deriváltja jelenik meg:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{m\omega^2}{F_0 d} \cdot y(x).$$

Ez az egyenlet teljesen analóg egy $\Omega = \omega\sqrt{m/(F_0 d)}$ körfrekvenciával egydimenziós harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\Omega^2 r(t)$$

mozgásegyenletével, ahol $r(t)$ a tömegpont egyensúlyi helyzetétől mért kitérése az idő függvényében. Jól ismert, hogy az utóbbi egyenlet megoldása

$$r(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_0),$$

ahol A az amplitúdó, φ_0 pedig a kezdőfázis. Ennek alapján a slinky alakját leíró görbe

$$(2) \quad y(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{m}{F_0 d}} \omega x\right)$$

alakú. (Felhasználtuk, hogy a választott koordináta-rendszerben $y(x)$ páros függvény, a „kezdőfázis” értéke tehát nulla.)

Megjegyzés. Az F_0 erő kifejezhető a slinky D rugóállandójával és a végpontok d távolságával is, ha felírjuk a rugó kicsiny, Δm tömegű darabkájának Δs megnyúlását a rá ható F erővel kifejezve. Mivel egy ilyen darabka rugóállandója az egész rugó D állandójának $m/\Delta m$ -szerese, ezért

$$F = D \frac{m}{\Delta m} \cdot \Delta s.$$

Másrészt igaz, hogy

$$\frac{F}{F_0} = \frac{\Delta s}{\Delta x},$$

hiszen a slinkyben ható erő érintő irányú. A fenti egyenletekből $F_0 \Delta m = m D \Delta x$, ennek a rugó teljes hosszára történő összegzéséből pedig $F_0 = D d$ adódik.

Ezek szerint a rugó alakját leíró függvény „körfrekvenciája”

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{m}{F_0 d}} = \omega \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot \frac{1}{d} = \frac{\xi}{d}$$

alakban is megadható, ahol $\xi = \omega \sqrt{D/m}$ az előző feladatban is használt dimenziótlan állandó.

A rugó alakját leíró $y(x) = A \cos(\xi x/d)$ függvény amplitúdóját az $y(d/2) = r_0$ feltétel határozza meg:

$$A = \frac{r_0}{\cos(\xi/2)}.$$

Látható, hogy ha az „ugrókötél” végeit nagyon kicsi sugarú körök mentén mozgatjuk, vagyis $r_0 \approx 0$, akkor a rugó nem válik el számottevően a forgástengelytől ($y(x) \approx 0$), feltéve, hogy $\xi < \pi$, vagyis

$$\omega < \pi \sqrt{\frac{D}{m}} < \omega_{\text{kritikus}}.$$

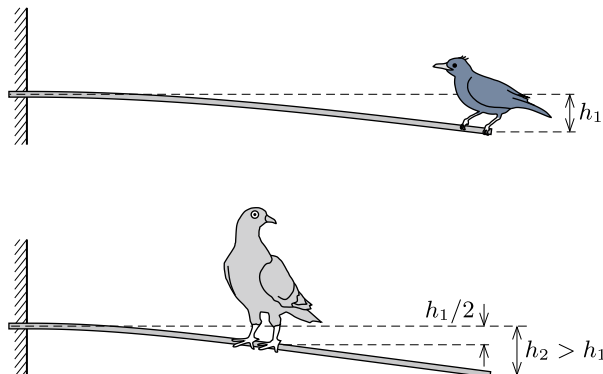
A kritikus szögsebességet megközelítve, majd elérve viszont az ideális rugó kitérése végtelen nagyra válna (reális körülmények között viszont addig nyúlik a rugó, amíg a Hooke-törvény érvényét veszíti).

Megjegyzések. 1. Az „ugrókötél” viselkedése a súlytalanság állapotában nagyon hasonló az előző feladatban szereplő (egy csőben, vízszintes síkban forgatott egydimenziós) rugó viselkedéséhez. Ez nem véletlen, ugyanis az ugrókötél mozgását megadó egyenletek két független komponensre bonthatók: a forgástengely irányú egyenlet egy egyenletesen megfeszített, d hosszúságú rugót ír le, a tengelyre merőleges megnyúlás egyenlete pedig éppen megegyezik a csőben forgatott rugó mozgásegyenletével. A kritikus szögsebességek közötti 2-es faktor eltérés abból adódik, hogy az ugrókötél *fele* felel meg a csőben forgatott rugónak, így ennek tömege $m/2$, rugóállandója pedig $2D$.

2. A kis sugarú ($r_0 \approx 0$) körök mentén mozgatott „ugrókötélnek” nem csak a fentebb leírt „félhullám” a megoldása, hanem minden olyan koszinuszfüggvény, melynek értéke $x = \pm d/2$ -nél közelítőleg nulla, de más helyeken $y(x)$ véges nagyságú. Ez akkor következhet be, ha $\cos(\xi/2) \approx 0$, vagyis $\xi = (2n+1)\pi$, ahol n pozitív egész szám. Ez esetben a slinkynek lesz $2n$ darab csomópontja, azaz olyan pontja, amelynek az x irányra merőleges kitérése nulla. Amennyiben a rugó végeit ellentétes fázisban mozgatjuk (az ugrókötéllel ez nehezen valósítható meg, de nem kizárt), akkor a rugó alakját páratlan (szinusz-)függvény írja le, és a csomópontok száma is páratlan lesz.

A jelenség megfigyeléséhez nem is kell a Nemzetközi Űrállomásra utazni! Ha ketten, egymástól viszonylag távol állva úgy feszítik ki a slinkyt, hogy annak belógása elég kicsi legyen, akkor – némi gyakorlás után – a végpontok megfelelően szinkronizált mozgatásával a slinky alap- és felharmonikusai is „gerjeszthetők”.

M. 99. Tapasztalatból tudjuk, hogy egy rugalmas rúd hajlításakor annál jobban görbül, minél nagyobb a hajlító forgatónyomaték. Precízebben mondva: egy meghajlított rúd adott pontjában a görbületi sugár fordítottan arányos a pontban ható forgatónyomatékkal. Ebből következik, hogy ha egy ℓ hosszúságú, vízszintesen befogott rúd F erő hatására bekövetkező lehajlása h , akkor egy ugyanolyan keresztmetszetű, $\ell/2$ hosszúságú rúd lehajlása abban az esetben lesz éppen $h/2$ értékű, ha a végét $4F$ erővel terheljük (hiszen az arányos kicsinyítés során a görbületi sugarak is feleződnek, így a rúd pontjaiban ható forgatónyomatékoknak kétszereződniük kell, ami a feleakkora erőkarok miatt négyszeres terhelőerővel valósítható meg).

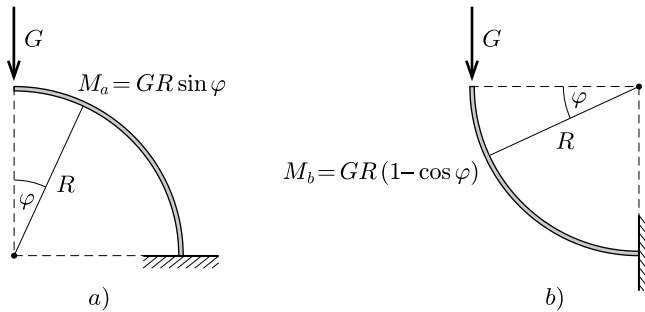


Mivel a ház falából kiálló rúd közepére szálló galamb tömege éppen négyszerese a feketerigó tömegének, ezért ha a pálcá *végpontja* a feketerigó esetében h_1 érték-

kel kerül lejjebb, akkor a zászlórúd *középpontjának* süllyedése a galamb esetében ennek éppen fele, vagyis $h_1/2$ (lásd az *ábrát*). A galamb esetében a pálca alakja a közepétől a szabad végéig egyenes, amely meredekebben áll, mint a rúd befogott vége és a galamb közötti részének bármely darabkája, ezért a galamb esetében a zászlórúd végének lehajlása biztosan nagyobb, mint a feketerigós esetben.

Megjegyzés. A rúd alakjának kiszámításával meghatározható a lehajlások pontos aránya, eredményül 5 : 4 adódik a galambos eset javára.

M. 100. Osszuk fel gondolatban a rugalmas fémszálakat kicsiny, *egyforma* hosszú szakaszokra. Egy-egy ilyen kis szakasz terheletlen állapotban is ívelt, hajlító forgatónyomaték hatására azonban ez a görbület (az igénybevétel irányától függően) csökken vagy növekszik. A kis szakaszok deformációját azzal a kicsiny ε szöggel jellemezhetjük, amennyivel a darabka végpontjaihoz húzott érintők által bezárt szög megváltozik. Ez az ε szög (egy egyenes rúd hajlításához hasonlóan) egyenesen arányos a darabkára ható hajlító forgatónyomatékkal.



1. ábra

Írjuk fel, hogy mekkora forgatónyomatékokat gyakorol a teher G súlya a fémszál φ szöggel jellemzett helyen található kis szakaszára (1. ábra). (Ennek a kis darabnak a deformációja eredményez olyan visszatérítő nyomatékokat, ami a G terhelés helyi forgatónyomatékát ellensúlyozza.) Amint az 1. ábráról leolvasható, ugyanazon φ szöghöz tartozó pontokban az M forgatónyomaték az a) esetben sohasem lehet kisebb a b) esetben fellépőnél, mivel

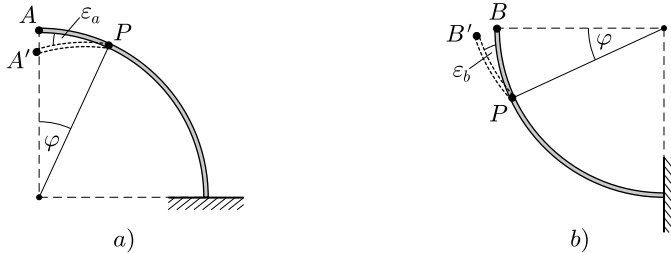
$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} (1 - \cos \varphi) \geq 1 - \cos \varphi.$$

Az egyenlőség csak $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi/2$ esetben (vagyis a szál végpontjainál) áll fenn, közben M_a mindig határozottan nagyobb, mint M_b .

Vizsgáljuk meg, hogy ha a fémszálnak csupán a φ szögnél lévő kis szakaszán jönne létre deformáció, ez a végpontnak mekkora függőleges elmozdulását eredményezné. Jelöljük a 2. ábrán látható P pontnál található kis szakasz szögelhajlását (és így a PA , illetve PB ívek elhajlását is) a két esetben ε_a -val és ε_b -vel. Egyrészt

tudjuk, hogy mindkét deformáció arányos a P pontban ható hajlító forgatónyomatékkal, ezért

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} = \frac{M_b}{M_a} < 1, \quad \text{ha } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$



2. ábra

Másrészt (mint az egyszerű geometriai megfontolásból következik) a végpontok Δh lesüllyedésének aránya

$$\frac{\Delta h_b}{\Delta h_a} = \frac{\varepsilon_b \sin \frac{\varphi}{2}}{\varepsilon_a \cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} < \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} < 1, \quad \text{ha } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Beláttuk tehát, hogy a két fémszál egymásnak megfeleltetett pontjai közül (a végpontoktól eltekintve) mindig az a) esetbeli pontoknál fellépő deformáció ad nagyobb járulékot a szál végének lesüllyedéséhez. Mivel a teljes alakváltozás összetehető a fémszál kis darabkáinak deformációiból származó alakváltozásokból, kimondhatjuk: *az a) esetben nagyobb a szál végpontjának lesüllyedése.*

Megjegyzés. Energetikai megfontolásokkal és integrálszámítással számszerűen is meg tudjuk határozni a kétféle lesüllyedés arányát.

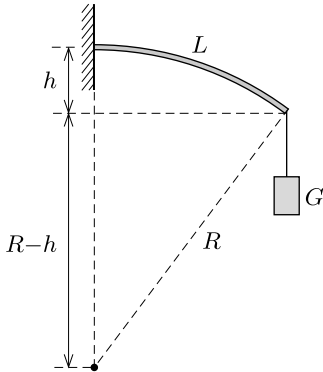
Ha a fogas végére – óvatosan növelve a terhelést – maximálisan G nagyságú erőt fej-tünk ki, és ennek hatására a végpont Δh -val mélyebbre kerül, akkor összesen $W = \frac{1}{2} G \Delta h$ munkát végzünk. (Az $\frac{1}{2}$ -es faktor onnan származik, hogy az erő átlagértéke a maximális érték fele.) Ez a munkavégzés a kicsit meghajlított szálban tárolt rugalmas energiával egyenlő, ami a szál egyes darabkáiban tárolt energiák összegeként számítható. Egy-egy darabka rugalmas energiája – egy megfeszített csavarrugó energiaképletének analógiájára – a darabka $R \Delta \varphi$ hosszával és a végein ható M forgatónyomaték négyzetével arányos. Ezek szerint a kétféle ruhafogas lehajlásának aránya:

$$\frac{\Delta h_a}{\Delta h_b} = \frac{W_a}{W_b} = \frac{\int M_a^2(\varphi) R d\varphi}{\int M_b^2(\varphi) R d\varphi} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^2(\varphi) d\varphi}{\int_0^{\pi/2} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3\pi - 8} \approx 2,2.$$

Ugyanez az eredmény megkapható úgy is, hogy a 2. ábrán látható „elemi” lesüllyedéseket integráljuk össze.

M. 101. Tekintsük először a vízszintesen befogott, L hosszúságú pálcát, amelynek egyik vége G súly hatására h távolsággal hajlik le (1. ábra). Közelítsük a meghajlított pálcát egyetlen R sugarú körívvel!

Megjegyzés. Tudjuk ugyan, hogy a pálca görbülete (görbületi sugarának reciproka) a pálca egyes darabkákra ható forgatónyomatéktól függ, és emiatt a rögzítésnél a legnagyobb, a másik vége felé haladva egyre kisebbé válik, és a terhelésnél már nullára csökken. A görbület tehát nem lehet állandó, ennek ellenére – a számítás egyszerűsítése érdekében – mégis ezzel a durva közelítéssel élünk, hiszen nem pontos eredményt, hanem csak nagyságrendi becslést kívánunk kapni a keresett kritikus F terhelésre.



1. ábra

Ebben a közelítésben a görbületi sugar R a Pitagorasz-tételből számítható:

$$R^2 \approx (R - h)^2 + L^2,$$

ahonnan $h \ll L$ miatt

$$(1) \quad R \approx \frac{L^2}{2h} \approx 50 \text{ m}.$$

(A kicsiny lehajlás miatt a meghajlított pálca vízszintes vetületének hosszát L -nek vettük.)

Vizsgáljuk most az energiaviszonyokat! Gondoljuk el, hogy a lehajlított pálca egyensúlyi állapota úgy jött létre, hogy saját erőnkkel szép lassan lenyomtuk a pálca végét (ehhez a lehajlással arányosan fokozatosan növekvő erőt kellett kifejtenünk), majd amikor elértük a megadott h értéket, ráakasztottuk a pálcára a G súlyt. Mivel az általunk kifejtett erő az elmozdulással arányosan nőtt, átlagosan a maximális erő felével számolhatunk, a végzett munkánk tehát

$$(2) \quad W = \frac{F_{\max}}{2} h = \frac{G}{2} h.$$

Ez a munka a pálca rugalmas energiáját növelte (a pálca saját súlyát elhanyagoljuk). Ismert (és a feladathoz tartozó útmutatásban is szerepel), hogy egy meghajlított pálca rugalmas energiája egyenesen arányos a hosszával és fordítottan arányos a görbületi sugar négyzetével, ezért

$$(3) \quad W = C \frac{L}{R^2},$$

ahol C a pálca merevségét jellemző arányossági tényező, melynek értékére (1), (2) és (3) összevetéséből

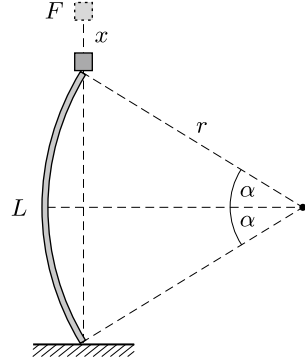
$$C = \frac{G}{2} h \cdot \frac{R^2}{L} = \frac{GL^3}{8h} = 125 \text{ J m}$$

adódik.

Megjegyzés. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a pálcából és a rá akasztott G súlyból álló rendszer energiáját vizsgáljuk a pálca lehajlásának függvényében. Egyensúlyi állapotban az összenergia (ami a lehajlás másodfokú függvényével közelíthető) minimális.

Ha viszont a pálca rugalmas energiáját a nehezék helyzeti energiájának csökkenésével tesszük egyenlővé, egy kettes faktorban eltérő, hibás eredményt kapunk. Az energia-megmaradás tételének helyes alkalmazásakor ugyanis figyelembe kell vennünk a nehezék mozgási energiáját is, vagy pedig fokozatosan növekvő terheléssel és átlagerő munkájával kell számolnunk.

Tekintsük most a függőlegesen terhelt pálcát. Képzeljük el, hogy a pálca tetejére valamekkora súlyt helyezünk. Ha ez a súly kisebb egy kritikus F értéknél, akkor a pálca csekély mértékben összenyomódik (mint egy megterhelt tartóoszlop), de nem hajlik ki. Ha elérjük a kritikus F értéket, akkor a pálca kihajlik, és az F nagyságú súly a 2. ábrán látható kicsiny x távolsággal lejjebb kerül. Ilyenkor a pálca rugalmas energiájának növekedését a teher helyzeti energiájának csökkenése fedezi. (Ha x kicsi, akkor kihajlás közben a terhelőerőt állandó nagyságúnak vehetjük, tehát a kétféle energiaváltozás egyenlőségének felírásakor nem követjük el a fentebb említett 2-es faktor hibát.)



2. ábra

A pálca alakját ismét egyetlen körívvel közelítjük, melynek sugarát r -rel jelöljük. (Természetesen r és a korábban szereplő R nem egyenlő.) Az ábrán látható szög (radiánban mérve)

$$\alpha = \frac{L}{2r},$$

és mivel ez a szög kicsiny, érvényes rá a

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$$

közéltítő összefüggés. (Ez a formula differenciálszámítás felhasználásával vezethető le, de numerikusan akár egy zsebszámológéppel is könnyen ellenőrizhető.)

A pálca rugalmas energiájának növekedése

$$\Delta E_1 = C \frac{L}{r^2},$$

a súly helyzeti energiájának csökkenése pedig

$$-\Delta E_2 = F \cdot x = F(2r\alpha - 2r \sin \alpha) \approx 2Fr \frac{\alpha^3}{6} = \frac{1}{24} \frac{FL^3}{r^2}.$$

A pálca „spontán” kihajlásának feltétele: $|\Delta E_2| > \Delta E_1$, azaz

$$\frac{1}{24} \frac{FL^3}{r^2} > C \frac{L}{r^2}.$$

Ez a feltétel r értékétől függetlenül – mindig teljesül, ha

$$F > F_{\text{kritikus}} = 24 \frac{C}{L^2} = 3G \frac{L}{h} \approx 3000 \text{ N}.$$

Megjegyzések. 1. A kritikus erő értéke (az alkalmazott közelítésben) független r -től, vagyis a kihajlás mértékétől, így a pálcá tetőpontjának x mértékű függőleges elmozdulása lényegében tetszőleges lehet. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy ha a tartóoszlopok függőleges terhelése eléri a kritikus értéket, akkor a szerkezet összedől.

2. A lineáris (Hooke-törvényt követő) rugalmasságtani egyenletek megoldásával megmutatható, hogy a rúd kihajlásához szükséges kritikus terhelőerő pontos értéke

$$F_{\text{kritikus}} = \frac{\pi^2}{3} G \frac{L}{h} \approx 3300 \text{ N.}$$

A görbület állandóságát feltételező számítás csak közelítő eredményt ad. A becült érték a pontos eredménytől mindössze egy $9/\pi^2$ -es faktorban tér el, vagyis kb. 10 százalékos hibával kaptuk meg a kritikus terhelőerőt. Meglepő, hogy az alkalmazott durva közelítés – felsőbb matematikai módszerek alkalmazása nélkül – milyen jó becslést ad a kérdéses kritikus terhelésre.

M. 102. Induljunk ki a kábelköteg aljától, és haladjunk fokozatosan felfelé. A legelső kábel majdnem 1 km hosszú lehet. (Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a szakítószilárdság határával fogunk számolni, természetesen a valóságban ennél valamennyivel rövidebb darabok kapcsolhatók csak össze.) Ha a következő szakaszban 2 kábelt alkalmazunk, ennek hossza 0,5 km lehet, ekkor éri el a feszítőerő a kábelek tetejénél a kritikus értéket. (A kábeldarabokat összekapcsoló elem súlyát elhanyagolhatóan kicsinek tekintjük.) A harmadik, ugyancsak 0,5 km-es távon 4 kábel szükséges, és így tovább, az egyes szakaszokon alkalmazandó kábelek száma mindig kétszerese az alatta lévőeknek. Ezek szerint a 3 km-es mélység eléréséhez legalább $1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16$ km kábelre lenne szükség.

Az elérendő mélység növekedtével a szükséges kábelhossz nagyon gyors ütemben nő. Ha (km-ben mérve) h mélyre szeretnénk a leírt módon kábelt engedni, akkor a szükséges kábelhossz (ugyancsak km egységekben)

$$L(h) = 1 + (1 + 2 + 4 + \dots + 2^{2h-3}) = 2^{2(h-1)},$$

ami $h = 10$ km-nél több, mint 260 000 kilométert (!) tenne ki.

Megjegyzés. Kicsit gazdaságosabban is eljárhatunk, ha nem 0,5 km-enként, hanem sűrűbben váltjuk a kábelek számát, de ekkor sem csökkenthetjük a kábel kilométerben mért hosszát e^h -nál kisebbre. Ez 10 km-es mélységnél kb. 22 000 kilométer, még mindig tekintélyes mennyiség.

M. 103. Képzeld el, hogy egy R sugarú, d falvastagságú tartályba p nyomású héliumot zárunk. (Reális feltevés, hogy $d \ll R$, és hogy p sokkal nagyobb, mint a külső légnyomás.) Jelöljük a tartály anyagának sűrűségét ρ -val, szakítószilárdságát pedig σ -val.

Számítsuk ki, legfeljebb mekkora lehet a p nyomás, ha a tartály még nem szakad szét! Ha képzeletben kettévágjuk a tartályt, akkor a gáz $pR^2\pi$ erővel nyomja szét a két félgömböt. (A félgömböket szétfeszítő erőt tulajdonképpen a $\Delta p = p - p_0$ túlnyomásból kellene számolnunk, de mivel $p \gg p_0$, a túlnyomást a tartályban lévő

gáz nyomásával helyettesíthetjük.) Ez az erő nem lehet nagyobb, mint a $2R\pi d$ nagyságú vágási felület és a szakítószilárdság szorzata:

$$(1) \quad p \cdot R^2 \pi < 2R\pi d \cdot \sigma.$$

Ha a héliumgázt egy nagy ballonba engedjük, a nyomása a külső légnyomás p_0 értékére csökken, a térfogata tehát

$$V = \frac{4R^3 \pi p}{3 p_0}$$

lesz. Ekkora térfogatú gáz biztosan nem tud $V \varrho_{\text{levegő}} g$ -nél nagyobb súlyú terhet felemelni, hiszen a felhajtóerőből még a légballon és a héliumgáz súlyát is le kell vonni.

A tartály súlya $4\pi R^2 d \varrho g$, ennek értéke a fentiek szerint nem lehet nagyobb, mint a maximális emelőerő:

$$(2) \quad 4\pi R^2 d \varrho g < \frac{4R^3 \pi p}{3 p_0} \varrho_{\text{levegő}} g.$$

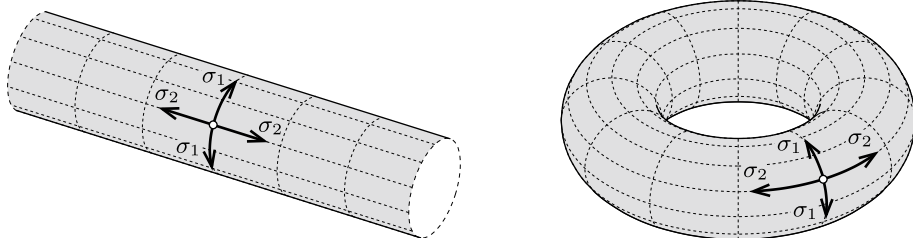
Az (1) és (2) egyenlőtlenségekből a tartály anyagi állandói, valamint a külső levegő nyomása és sűrűsége között kapunk kapcsolatot:

$$(3) \quad \frac{\sigma}{\varrho} > \frac{3p_0}{2\varrho_{\text{levegő}}}.$$

Érdekes, hogy (3)-ban nem szerepel sem a tartály sugara, sem a falának vastagsága, de még a tartályban lévő gáz sűrűsége sem! (Vastagabb falú tartály nagyobb nyomást bír ki, de a súlya is arányosan nagyobb, a tartály sugarának csökkentése pedig nem csak a súlyát, de a benne tárolható gáz mennyiségét is csökkentené.)

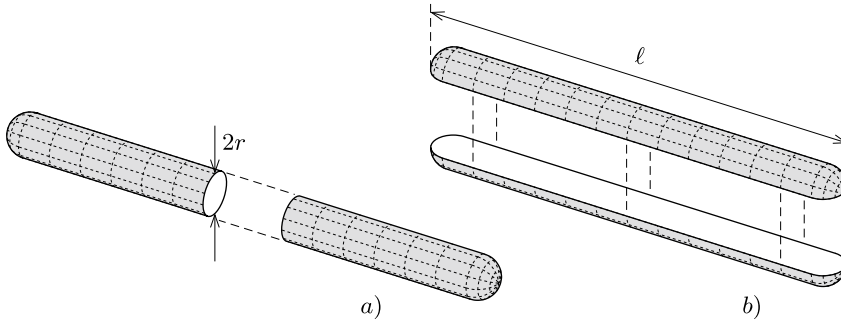
Ha a fizikai állandók táblázatát lapozgatva megpróbálunk olyan anyagot keresni, amelynek adatai elegendő tesznek a (3) feltételnek, a tiszta fémek között nem találunk ilyet, de alumínium- és titánötvözetekkel, továbbá szénszálas erősítésű anyagokkal már megoldható a tartály felemelése.

M. 104. Akár egyenes, akár tórusz alakú virsliről van szó, a felhasadás olyan vonalnál következik be, amely mentén a rugalmas feszültség (adott belső nyomás mellett) a legnagyobb.



1. ábra

Mivel a virsli falvastagságát állandónak tekintjük, az erő/felület dimenziójú rugalmas feszültség helyett vizsgálhatjuk a virsli falának egységnyi hosszúságú szakaszán ható feszítőerőt is. A továbbiakban ezt a mennyiséget *vonalmonti feszültségnek* fogjuk nevezni, és σ -val jelöljük. (Ez a folyadékok hasonló jellemzőjé- től, a felületi feszültségtől eltérően a vizsgált szakasz elhelyezkedésétől is függhet, tehát általában anizotrop és inhomogén is lehet, ahogy az 1. ábrán látható.)



2. ábra

Tekintsük először az egyenes virsli! Legyen a virsli hossza ℓ , sugara r , a túlnyomás benne pedig Δp . Ha a virsli – képzletben – hosszában a közepén elvágjuk (2. ábra b) része), akkor a két felét (a félgömb alakú végek hatását elhanyagolva) $2\ell\sigma_1$ erővel tudjuk együtt tartani. Ugyanakkor a félvirsliket a belső nyomás $2r\ell \cdot \Delta p$ erővel feszíti szét. Az erőegyensúly feltételéből:

$$2\ell\sigma_1 = 2r\ell \cdot \Delta p,$$

tehát a hosszanti vágásra merőleges, keresztirányú feszültség

$$(1) \quad \sigma_1 = r\Delta p.$$

Ugyanezt a „vágásos” módszert a keresztirányú vonaldarabokon ható hosszirányú feszültségre (2. ábra a) része) is alkalmazhatjuk:

$$2\pi r\sigma_2 = r^2\pi \cdot \Delta p,$$

tehát ez a feszültség:

$$(2) \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}r\Delta p.$$

Látható, hogy $\sigma_2 < \sigma_1$, tehát főzés során a virsliben lévő Δp túlnyomás növekedtével először a keresztirányú feszültség éri el a szakítószilárdság határértékét, emiatt az egyenes virsli *hosszában* reped fel.

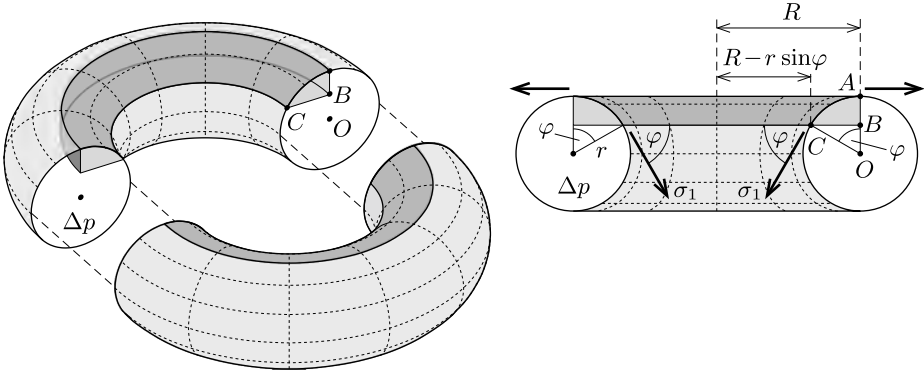
Vajon alkalmazhatók-e a fenti egyszerű megfontolások a tórusz-virsli esetére is? Legyen a tórusz középkörének sugara R , keresztmetszetének sugara r , a belsejében a túlnyomás pedig most is Δp . Jelöljük – az egyenes virslihez hasonlóan – a tórusz

falában „keresztirányban” ható feszültséget σ_1 -gyel, a rá merőleges („hosszanti”) feszültséget pedig σ_2 -vel az 1. ábrán látható módon.

Vágjuk el a tóruszt képzeletben egy – a (vízszintesnek képzelt) középkörével párhuzamos – síkkal, majd tekintsük a levágott résznek a belső „felét” (vagyis a szimmetriatengelyhez R -nél közelebb lévő részeket, lásd a 3. ábrát). Ha az elmetező sík helyzetét az ábrán látható φ szöggel adjuk meg, akkor a sötétszürkével jelölt forgástestre ható erők függőleges komponenseinek egyensúlyát így írhatjuk fel:

$$(3) \quad [R^2\pi - (R - r \sin \varphi)^2\pi] \Delta p = 2\pi(R - r \sin \varphi)\sigma_1 \sin \varphi.$$

Felhasználtuk, hogy a vizsgált térrészre a belső túlnyomás csak a CB oldal megforgatásából adódó körgyűrű mentén fejt ki függőleges erőt, a vonalmenti feszültség pedig csak a C ponton áthaladó körvonal mentén, ahol σ a forgásszimmetria miatt végig ugyanakkora. A vizsgált darab súlyát nem vettük figyelembe, mert az – egyre növekvő Δp mellett – a többi erő mellett elhanyagolható.



3. ábra

A (3) összefüggésből a keresztirányú vonalmenti feszültség tetszőleges φ szögnél meghatározható:

$$(4) \quad \sigma_1 = r \Delta p \frac{1 - \frac{r}{2R} \sin \varphi}{1 - \frac{r}{R} \sin \varphi}.$$

Hasonló módon számolhatjuk ki a tórusz „külső” oldalán is a keresztirányú feszültséget, amit ugyancsak a (4) összefüggés ad meg a $\pi < \varphi < 2\pi$ értékek mellett. Látható, hogy a keresztirányú vonalmenti feszültség függ az r/R aránytól, $R \gg r$ esetén pedig (4) visszaadja az egyenes virslire vonatkozó (1) összefüggést. Emellett σ_1 a φ változón keresztül a helytől is függ, tehát *inhomogén* eloszlású. Legnagyobb értékét a tórusz belső köre mentén ($\varphi = \pi/2$ -nél) veszi fel.

Mi a helyzet a másik irányú (az r sugarú körvonal mentén „hosszában” ható) σ_2 feszültséggel? Ezt a megfeszített hártlyák teljes görbületi nyomását megadó *Laplace-képlet* segítségével számíthatjuk ki:

$$\Delta p = \frac{\sigma_1}{r_1} \pm \frac{\sigma_2}{r_2},$$

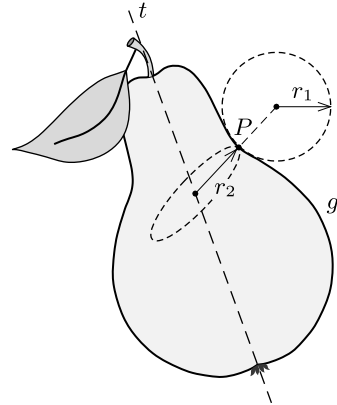
ahol r_1 és r_2 a hártyát megadó felület ún. *főgörbületi sugarai*, σ_1 és σ_2 pedig az ezeknek megfelelő irányú feszültségek.

Megjegyzés. Laplace képletének egyik speciális esete a hengeres felület görbületi nyomása (lásd az (1) összefüggést), a másik pedig a gömb esete, amikor $r_1 = r_2$ és $\sigma_1 = \sigma_2$ (például egy szappanbuboréknál vagy a kapilláris csöveknél).

Forgásfelületek főgörbületi különösen egyszerűen számolhatók. Ha egy g görbét valamely t tengely körül megforgatunk (a 4. ábrán ez éppen egy körtét eredményez), a keletkező forgásfelület P pontjához tartozó egyik főgörbületi sugár a g görbe P pontbeli simulókörének sugara, a másik pedig P -től a forgástengelyig „ferdén” (a görbe érintőjére merőlegesen) mért távolság. Laplace képletében az előjel pozitív, ha mindkét irányú görbület ugyanarra „húzza” a felületet, és negatív akkor, ha a görbületek „iránya” ellentétes (ez teljesül pl. a 4. ábrán látható P pontban.)

A tórusz C pontjában a főgörbületi sugarak:

$$r_1 = r \quad \text{és} \quad r_2 = \frac{R - r \sin \varphi}{\sin \varphi},$$



4. ábra

és a kétféle görbület ellentétes irányú. Laplace formulája szerint

$$\sigma_2 = \frac{R - r \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{\sigma_1}{r} - \Delta p \right),$$

amely a már kiszámított σ_1 feszültség (4) képletével tovább alakítható:

$$(5) \quad \sigma_2 = \frac{R - r \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1 - \frac{r}{2R} \sin \varphi}{1 - \frac{r}{R} \sin \varphi} - 1 \right) \Delta p = \frac{1}{2} r \Delta p.$$

Érdekes, hogy σ_2 nem függ φ -től (tehát a tórusz minden pontjában ugyanakkora), továbbá az r/R arányra (a tórusz „karcsúságára”) sem érzékeny, és (2) szerint megegyezik az egyenes virsli megfelelő „hosszanti” feszültségével.

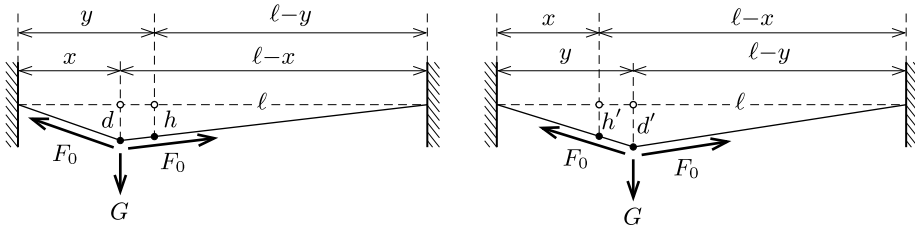
A (4) és (5) képletekből leolvasható, hogy tetszőleges helyen és tetszőleges r/R arány mellett $\sigma_1 > \sigma_2$, tehát az elképzelt ideális (egyenletes falvastagságú) tórusz-virsli is *hosszában* fog felrepedni. Mivel σ_1 a tórusz *belső körvonala mentén* ($\varphi = \pi/2$ -nél) a legnagyobb, a repedés is itt várható.



Statika

M. 105. Megmutatjuk, hogy a szóban forgó pontok lesüllyedése – azok konkrét helyzetétől függetlenül – mindig megegyezik egymással. Legyen az ℓ hosszúságú kötelet feszítő erő F_0 , és mérjük a vízszintes távolságokat a köté bal oldali végétől! (A kötél táncos két oldalán található kötélrészekben valójában kicsit különbözik a feszítőerő, ezt az eltérést azonban a kis lehajlások miatt elhanyagolhatjuk.)

Tegyük fel, hogy az x helyen ható terhelés hatására a köté x helyen lévő pontja d -vel, az y helyen lévő pontja pedig h -val süllyed le, illetve fordított szereposztásban: az y helyen ható (ugyanakkora) terhelés hatására a lesüllyedés ott d' , az x helyen pedig h' (lásd az ábrát).



A hasonló háromszögek oldalarányai egyenlők, emiatt

$$(1) \quad \frac{d}{\ell - x} = \frac{h}{\ell - y} \quad \text{és} \quad \frac{d'}{y} = \frac{h'}{x}.$$

Felírhatjuk még a függőleges erőkomponensek egyensúlyi feltételét (a kicsiny szögek szinuszát a tangensükkel közelítve):

$$(2) \quad F_0 \left(\frac{d}{x} + \frac{d}{\ell - x} \right) = F_0 \left(\frac{d'}{y} + \frac{d'}{\ell - y} \right).$$

Az (1) egyenletpárból

$$\frac{d}{d'} = \frac{\ell - x}{\ell - y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{h}{h'},$$

(2)-ből pedig

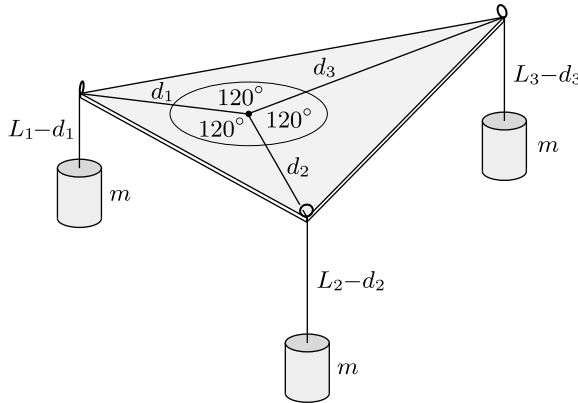
$$\frac{d}{d'} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{\ell - y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\ell - x}} = \frac{\ell - x}{\ell - y} \cdot \frac{x}{y}$$

következik, ezek egyenlősége pedig $h' = h$ esetén teljesül.

Amikor tehát a kötél táncos a H pontnál jár, a köté N pontjának lesüllyedése éppen ugyanakkora (5 cm) lesz, mint amekkora a H pont lesüllyedése volt a kötél táncos N -beli helyzeténél.

Megjegyzés. A kötélen y -nal jellemzett pontjának lesüllyedése az x pontban ható egy-ségnyi terhelés hatására a „rendszer” ún. *válaszfüggvénye*. Ennek a – két adattól függő – függvénynek $G(x, y) = G(y, x)$ szimmetriatulajdonsága fontos szerepet játszik többek között a mechanikában, az elektrosztatikában és a hullámok leírásánál, valamint a kvantumelméletben. A lineáris rendszerek válaszfüggvényét *George Green* (1793-1841) brit matematikus és fizikus tiszteletére Green-függvénynek is nevezik.

M. 106. Készítsünk el egy, az adott háromszöggel megegyező méretű merev síklapot, és rögzítsünk a csúcaiban egy-egy kicsiny szemescsavart (olyan csavart, amelynek feje egy kis karika). Helyezzük el és rögzítsük a háromszöget vízszintes síkban, majd fűzzünk át egy-egy vékony fonalat a csavarszemeken. Az L_1, L_2 és L_3 hosszúságú fonalak egyik végét kössük össze, a másik végükhöz pedig erősítsünk egyforma m tömegű testeket az *ábrán* látható módon.



A rendszer mechanikai energiája a három test helyzeti energiájának összegével egyenlő, az pedig (a nullszintet a háromszög síkjában választva):

$$E_{\text{helyzeti}} = -mg(L_1 - d_1) - mg(L_2 - d_2) - mg(L_3 - d_3).$$

A zárójelek felbontása, majd kiemelés után:

$$E_{\text{helyzeti}} = \underbrace{mg}_{\text{állandó}} \cdot (d_1 + d_2 + d_3) - \underbrace{mg(L_1 + L_2 + L_3)}_{\text{állandó}}$$

Látható, hogy az összenergia akkor minimális, ha a $d_1 + d_2 + d_3$ távolságösszeg a lehető legkisebb. Ebben a helyzetben a rendszer egyensúlyban van, és mivel a három fonalat feszítő erők megegyeznek, így a fonalaknak 120° -os szögben kell találkozniuk. A találkozási pont meg is szerkeszthető, ha megrajzoljuk az oldalak fölé a 120° -os szögnek megfelelő látószögmögíveket.

Megjegyzések. 1. A megoldás könnyen általánosítható arra az esetre is, amikor azt a pontot keressük a háromszög belsejében, amelyre a csúcsoktól mért távolságok $m_1d_1 + m_2d_2 + m_3d_3$ súlyozott összege minimális. A megfelelő energiaminimum az adott m_1, m_2

és m_3 számokkal (súlyfaktorokkal) megegyező (vagy azokkal arányos) tömegű testekkel valósítható meg. Egyensúly esetén a fonalak találkozási pontjában az m_1g , m_2g és m_3g nagyságú erők tartanak egymással egyensúlyt, ezek vektorháromszöge, és így a fonalak által bezárt szögek is könnyen megszerkeszthetők. Az így meghatározott szögeknek megfelelő látószögekörívek közös metszéspontja jelöli ki a keresett pont helyét.

2. Az eredeti feladat szappanhártyákból álló rendszer vizsgálatával is megoldható. Készítsünk két egyforma plexi háromszöget, melyeket a csúcsaikat összekötő vékony távtartók egymással párhuzamosan tartanak. Az így elkészített eszközt szappanoldatba mártva olyan szerkezet alakul ki, ami három, Y alakban találkozó, téglalap alakú hártya-ból áll. A három hártya találkozási vonalában a felületi feszültségből származó, egyforma nagyságú erők egyensúlya biztosítja a 120° -os szöget az egyes hártyak között, míg a minimális felületi energiából következik, hogy a $d_1 + d_2 + d_3$ távolságösszeg minimális.

3. A fenti megoldás csak olyan háromszögekre érvényes, melyeknek nincs 120° -osnál nagyobb szöge. Ha a háromszög tompaszöge éppen 120° -os, akkor a $d_1 + d_2 + d_3$ távolságösszeg egyik tagja (a 120° -os csúcshoz tartozó) nullává válik, így a keresett pont a háromszög tompaszögének csúcspontja lesz. Ha a tompaszög nagyobb 120° -osnál, akkor is a tompaszögű csúcspontra teljesül a minimális távolságösszeg feltétel. Ezt beláthatjuk a mechanikai modellel is, mert a három fonal találkozási pontjánál lévő csomó megakad a tompaszögnél lévő csavarszemben. A szappanhártyás modellben ez annak felel meg, hogy csak két hártya alakul ki a tompaszög szárain.

M. 107. Megmutatjuk, hogy a szükséges munka – a nyomóerő eloszlásától függetlenül – mindig

$$W = Mg (s_2\mu_1 + s_1\mu_2).$$

Abban az esetben, ha a tömegközéppont a zsák hosszának közepére esik, vagyis $s_1 = s_2 = \ell/2$, a munka

$$W = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} Mg\ell.$$

Bizonyítás: Osszuk fel a zsák és a szőnyeg érintkezési felületét olyan kicsiny darabkákra, hogy azokon a terhelést már egyenletesnek tekinthessük. Jelöljük az i -edik darabkán ható nyomóerőt $m_i g$ -vel, a felületdarabka előjeles távolságát a súlypont vetületétől pedig x_i -vel (a feladat ábráján jobbra mérve pozitívnak).

Az áthúzás során az i -edik felületdarabkánál végzett munka (a megfelelő elmozdulások és a súrlódási erők figyelembe vételével):

$$W_i = m_i g (s_2 - x_i) \mu_1 + m_i g (s_1 + x_i) \mu_2,$$

a teljes munkavégzés pedig

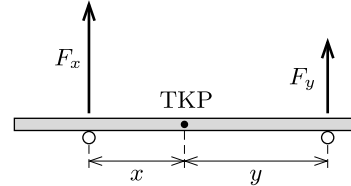
$$W = \sum_i W_i = (s_2\mu_1 + s_1\mu_2) \left(\sum_i m_i \right) g + (\mu_2 - \mu_1) \left(\sum_i m_i x_i \right) g.$$

A fenti egyenlet jobb oldalán szereplő első összeg éppen a zsák M tömege, a második pedig (a zsák tömegközéppontjának definíciója alapján) *nulla*. Így valóban a bizonyítandó összefüggést kaptuk.

Megjegyzés: Lényeges, hogy a zsákot az alján húzzuk, tehát a rá ható külső forgatónyomaték nulla. Ha egy ládát húzunk át az érdes felületre, és a vízszintes húzóerő nem a talaj szintjénél hat, az eredmény már nem lesz független a tehereloszlástól.

M. 108. A rúdra ható függőleges erők egyensúlya és a forgatónyomatékok egyensúlya miatt a tömegközépponttól x , illetve y távolságra lévő ujjakra

$$F_x = mg \frac{y}{x+y} \quad \text{és} \quad F_y = mg \frac{x}{x+y}$$



erő hat.

Tegyük fel, hogy a rúd először a bal oldali ujjunknál csúszik meg. Ekkor a bal oldalon ható csúszási súrlódási erő

$$S = \mu_{cs} \cdot F_x = \mu_{cs} mg \frac{y}{x+y}.$$

Ez az erő lassú (elhanyagolható vízszintes gyorsulású) mozgásnál megegyezik a jobb oldalon ható tapadási súrlódási erővel, amelynek legnagyobb értéke

$$\mu_t F_y = \mu_t mg \frac{x}{x+y}.$$

Ezek szerint a bal oldali ujjunk addig csúszhat, míg

$$\mu_{cs} \cdot y \leq \mu_t \cdot x, \quad \text{azaz} \quad x \geq k \cdot y,$$

ahol $k = \mu_{cs}/\mu_t \leq 1$.

Kezdetben $x_0 = y_0 = \ell/2$, a bal oldali ujjunk tehát – helyről helyre változó nagyságú súrlódási erő ellenében – az $x = x_1 = k\ell/2$ értéknek megfelelő helyzetig csúszik. Az eközben végzett munka integrálással számítható ki:

$$W(x_0 \rightarrow x_1) = - \int_{x_0}^{x_1} \mu_{cs} F_x dx = -\mu_{cs} mg \int_{\ell/2}^{k\ell/2} \frac{\ell/2}{x + \ell/2} dx = \mu_{cs} mg \frac{\ell}{2} \ln \left(\frac{2}{1+k} \right).$$

A második lépésben a jobb oldali ujjunk csúszik meg, miközben $x = x_1$ állandó, y pedig változik $y_0 = \ell/2$ -től $y_1 = kx_1 = k^2\ell/2$ -ig. A végzett munka

$$W(y_0 \rightarrow y_1) = -\mu_{cs} mg \int_{y_0}^{y_1} \frac{x_1}{x_1 + y} dy = \mu_{cs} mg \frac{\ell}{2} k \ln \left(\frac{1}{k} \right).$$

Hasonló módon számíthatók a további (hol az egyik, hol pedig a másik oldalon megcsúszó rúdnak megfelelő) munkavégzések is. A folyamat során végzett összes munka

$$(1) \quad W = \mu_{cs} mg \frac{\ell}{2} \left[\ln \left(\frac{2}{1+k} \right) + (k + k^2 + k^3 + \dots) \ln \left(\frac{1}{k} \right) \right]$$

A megjelenő végtelen mértani sor $k < 1$ esetén összegezhető:

$$W = \mu_{cs} mg \frac{\ell}{2} \left[\ln \left(\frac{2}{1+k} \right) + \frac{k}{1-k} \ln \left(\frac{1}{k} \right) \right].$$

Amennyiben $\mu_{cs} \ll \mu_t$ (vagyis $k \ll 1$), a munkavégzés gyakorlatilag egyetlen lépésben történik és

$$W \approx \mu_{cs} mg \frac{\ell}{2} \ln 2.$$

Ha viszont $\mu_t \approx \mu_{cs}$ (azaz $k \approx 1$), akkor (mint az pl. zsebszámológéppel numerikusan ellenőrizhető)

$$(2) \quad \frac{k}{1-k} \ln \left(\frac{1}{k} \right) \approx 1, \quad \text{vagyis} \quad W \approx \mu_{cs} mg \frac{\ell}{2}.$$

Megjegyzés. A $\mu_t \approx \mu_{cs}$ határesetben a tapadási és a csúszási súrlódási erők gyakorlatilag nem különböznek, mindkét ujjunk folyamatosan mozog, mindkét ujjunkra szimmetrikusan $\mu_{cs} mg/2$ vízszintes erő hat, és mindkét ujjunk elmozdulása $\ell/2$. Tehát a két kezünk munkavégzése

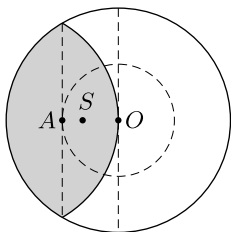
$$W = 2 \cdot \frac{\mu_{cs} mg}{2} \cdot \frac{\ell}{2},$$

így visszakaptuk a (2) eredményt.

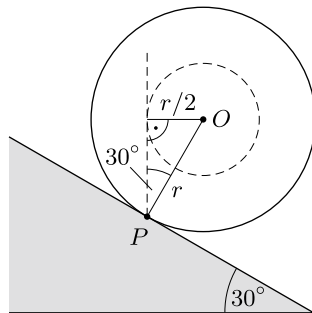
A matematikai teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy $\mu_t = \mu_{cs}$ (tehát határozott egyenlőség) esetén az (1) munkavégzésben szereplő mértani sor nem összegezhető. Határértékszámítással megmutatható, hogy a (2) eredmény ekkor is érvényes.

M. 109. Elegendően nagy tapadási súrlódás esetén a golyó nem csúszik le a lejtőn. Ez azonban még nem elegendő az egyensúlyhoz, hanem az is szükséges, hogy *ne gördüljön le* a golyó.

Ha a két félgömbből összeragasztott, (inhomogén tömegeloszlású) r sugarú golyó tömegközéppontja a geometriai középpontjához $r/2$ -nél közelebb van, akkor bármilyen helyzetben tesszük is a lejtőre (lásd az 1. ábrát), a nehézségi erőnek lesz forgatónyomatéka a lejtővel érintkező P pontra vonatkozólag, tehát a golyó biztosan legördül.



2. ábra



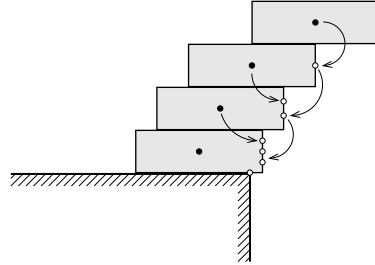
1. ábra

Megmutatjuk, hogy két homogén félgömbből álló golyónál – bármekkora legyen is a két rész sűrűsége – ez a tényleges helyzet. Tekintsük a 2. ábrán látható, sötétebben jelölt, barackmag alakú térrészt, amely teljes egészében a nagyobb sűrűségű homogén félgömbben helyezkedik el. Ennek a darabnak (a szimmetriából következően) az A pontban, vagyis az O középponttól $r/2$ távolságra van a tömegközéppontja. A golyó többi része az S tömegközéppontot valamennyivel közelebb „húzza”

az O ponthoz, tehát $OS < r/2$. Ez pedig – a fenti megfontolások alapján – annyit jelent, hogy a golyó nem maradhat egyensúlyban a 30° -os lejtőn.

Megjegyzés. A megoldás során feltételeztük, hogy a lejtő és a golyó közötti gördülési ellenállás kicsi, vagyis a P pontnál nem léphet fel forgatónyomaték. Tépőzárás anyaggal bevont felületeknél ez nem igaz, ilyen szélsőséges esetben a golyó akár függőleges felületen is megtapadhat.

M. 110. A csúsztatgatást kezdjük felülről, és válasszuk a téglák hosszát egységnyinek. A legfelső téglát a feléig tolhatjuk ki, ezután a felső kettőt kell a felülről harmadikon elcsúsztatni, ahogy az *ábra* mutatja. A felső két téglák közös súlypontja nem nyúlhat túl a harmadik szélén, tehát a másodikat $\frac{1}{4}$ egységgel csúsztatjuk el. A stratégia az, hogy bármely téglaszéle felett legyen a kiszemelt téglafeletti darabok közös súlypontja.



Felülről a harmadik téglát elcsúsztatásakor a harmadik és a felette lévő két téglák közös súlypontját kell megtalálni. A felső kettő közös súlypontja a harmadik széle felett van, és kétszeres súllyal számít, tehát az $\frac{1}{2}$ hosszú távolságot $2 : 1$ arányban kell osztani. Eszerint a harmadik téglát $\frac{1}{6}$ egységgel csúsztathatjuk el. Hasonlóan adódik, hogy a negyedik téglát $\frac{1}{8}$ hosszegységgel nyúlhat túl az asztal szélén. Számoljuk össze az elcsúsztatásokat:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24} > 1,$$

vagyis a legfelső téglát teljes egészében *túlnyúlhat* az asztal peremén. (Mindvégig bizonytalan egyensúlyi helyzeteket tekintettünk. A stabil egyensúly eléréséhez a számított értékeknél kissé kevesebbel kell elcsúsztatnunk a téglákat, de még így is megvalósítható az, hogy a negyedik túlnyúljon az asztal szélén.)

A megoldást tetszőleges számú téglára is kiterjeszthetjük. A felülről k -edik téglát saját súlypontja és a széle közötti $\frac{1}{2}$ egységnyi távolságot $1 : (k - 1)$ arányban kell osztani, mert a széle felett $(k - 1)$ téglák közös súlypontja helyezkedik el. A k -edik téglát tehát maximálisan $\frac{1}{2k}$ egységgel csúsztathatjuk el. Ha összesen n téglánk van, a legfelső kinyúlása:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

A zárójelben az első n természetes szám reciprokának összege áll, amely $n \rightarrow \infty$ esetén végtelenhez tart, hiszen

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{> \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \dots > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Megfelelően sok téglát esetén tehát elvben akármekkora kinyúlás elérhető!

M. 111. Ha egy kis vizet töltünk a főzőpohárba, akkor a rendszer súlypontja süllyed, mert ez a kis vízmennyiség az üres pohár súlypontja alá kerül. A vízmennyiségét növelve a közös súlypont egy darabig tovább süllyed, a rendszer stabilitása növekszik. Ez a folyamat addig tart, amíg a pohárban lévő víz szintje el nem éri a víz-főzőpohár rendszer közös tömegközéppontjának magasságát. Ekkor ugyanis egy újabb adag víz már a rendszer súlypontja fölé kerül, ami megemeli a közös tömegközéppontot, és így rontja a stabilitást.

A főzőpohár tehát akkor a legstabilabb, amikor a víz-főzőpohár rendszer közös súlypontja éppen a pohárban lévő víz felszínén van, ekkor lesz a súlypont a lehető legalacsonyabban.

Az ábrán a pohár tömegközéppontjának magasságát h -val, a víz magasságát pedig x -szel jelöltük, tehát a víz súlypontja $x/2$ magasságban van. A közös súlypont is x magasságban a víz felszínén található, így a legstabilabb helyzetre a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$x(\rho\pi r^2 x + m) = \rho\pi r^2 x \cdot \frac{x}{2} + mh,$$

ahol $r = 30$ mm a pohár sugara, $m = 100$ g a tömege, ρ pedig a víz sűrűsége. Az adatokat behelyettesítve az egyenlet egyetlen pozitív gyökére $x \approx 56$ mm-t kapunk.

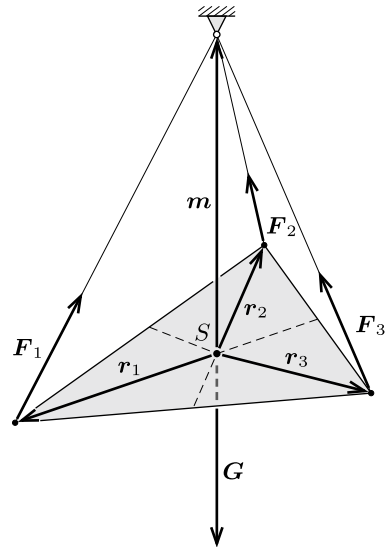
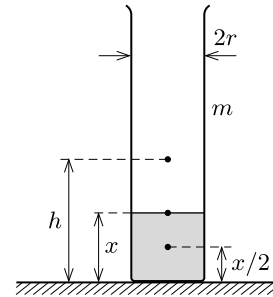
M. 112. A háromszöglemez S tömegközéppontjának egyensúlyban a felfüggesztési pont alatt kell elhelyezkednie. Jelöljük az S pontból a háromszög csúcsaiba mutató vektorokat az ábrán látható módon $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ és \mathbf{r}_3 -mal, a felfüggesztési pontba mutató (függőleges) vektort pedig \mathbf{m} -mel. Ekkor a fonalak által a lemezre kifejtett $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ és \mathbf{F}_3 erőket kifejezhetjük a fonalak irányába mutató vektorokkal:

$$\mathbf{F}_i = \lambda_i (\mathbf{m} - \mathbf{r}_i) \quad (i = 1, 2, 3),$$

ahol a λ_i együtthatók (egyelőre) ismeretlen skalárok. A lemez egyensúlyban van, ezért a rá ható \mathbf{G} nehézségi erő, valamint a fonalak által kifejtett erők vektori összege nulla:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{G} = 0.$$

Használjuk fel, hogy a háromszög tömegközéppontjába mutató vektor a csúcsokba mutató vektorok számtani közepe, vagyis $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$. (A koordináta-



rendszerünk origóját éppen a tömegközéppontba helyeztük.) Vegyük észre továbbá, hogy \mathbf{G} és \mathbf{m} párhuzamos vektorok, ezért az egyik kifejezhető a másik skalárszorosaaként: $\mathbf{G} = -k\mathbf{m}$. A fenti egyenletekből (például \mathbf{r}_3 kiküszöbölésével)

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{r}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\mathbf{r}_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - k)\mathbf{m} = 0$$

adódik. Mivel \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 és \mathbf{m} nem egy síkban fekvő vektorok, a lineáris kombinációjuk (skalárokkal szorzott összegük) csak úgy lehet nulla, ha mindhárom vektor együtthatója nulla.

Ezek szerint $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, ami annyit jelent, hogy az egyes fonalakat feszítő erők éppen a fonalak hosszával arányosak. (Ez az állítás érvényét veszti akkor, amikor valamelyik fonalat lazára engedjük, hiszen ilyenkor a lemez síkja függőlegessé válik.)

M. 113. Jelöljük a jobb első kerék rugója által kifejtett függőleges erőt (a gépkocsi eredeti, vízszintes helyzetében) F_{JE} -vel, a többi keréknél fellépő erők pedig legyenek rendre F_{BE} , F_{JH} és F_{BH} . Ezen erők a gépkocsira és a benne ülő személyekre ható nehézségi erővel tartanak egyensúlyt, és a forgatónyomatékuk például a súlypontra (tömegközéppontra) vonatkoztatva nulla.

Ha a gépkocsi a jobb első kerekével a járdára áll, a rugóerők megváltoznak, nagyságuk $F'_{\text{JE}} = F_{\text{JE}} + \Delta F_{\text{JE}}$ stb. lesz, irányuk azonban jó közelítéssel továbbra is függőleges marad. Az új (vesszővel jelölt) erőrendszerre ugyanaz érvényes, mint a vesszőtlenre (eredője és forgatónyomatéka változatlan), emiatt a ΔF_i erők rendszerének hatása az eredő erőt és az eredő forgatónyomatékot tekintve egyaránt nulla.

Az erőnövekmények forgatónyomatéka nemcsak a tömegközéppontra, de bármely tengelyre, így például a jobb első és a bal hátsó kerék közepét összekötő egyenesre vonatkoztatva nullát kell, hogy adjon. Ez akkor teljesül, ha

$$\Delta F_{\text{BE}} = \Delta F_{\text{JH}} = F_0.$$

Hasonló megfontolással (a másik átlóra vonatkoztatott forgatónyomaték eltűnéséből) kapjuk, hogy

$$\Delta F_{\text{BH}} = \Delta F_{\text{JE}} = -F_0.$$

(Felhasználtuk azt is, hogy a négy erő összegének nullának kell lennie.)

A rugóerők megváltozása a rugók hosszának megváltozásával arányos. A rugóerők megváltozására kapott összefüggések tehát azt jelentik, hogy ha a bal hátsó kerék rugója (a korábbi, egyenes úton álló autó helyzetéhez képest) összenyomódik valamekkora x értékkel, akkor ugyanennyivel nyomódik össze a jobb első kerék rugója is, a másik két keréknél pedig x -szel tágulnak a rugók.

A gépkocsi karosszériája tehát a jobb hátsó és a bal első kerekéknél x -szel megemelkedik, és ugyanennyivel kell emelkednie a merev karosszéria közepének is. A bal hátsó keréknél a kocsiszekrény x -szel lesüllyed, ezért a jobb első keréknek $3x$ értékkel kell megemelkednie, hiszen a kocsi közepének emelkedése az átlósan elhelyezkedő kerekéknél észlelt emelkedések számtani közepe. Mivel a jobb első

kerék rugójának összenyomódása x , a járda magassága pedig 8 cm, ezért fennáll, hogy

$$8 \text{ cm} - x = 3x, \quad \text{ahonnan} \quad x = 2 \text{ cm}.$$

Megfontolásaink során nem használtuk ki, hogy mekkora a gépkocsi utasainak tömege, sem pedig a tömegközéppont helyét, az eredmény tehát független az utasok számától és elhelyezkedésétől.

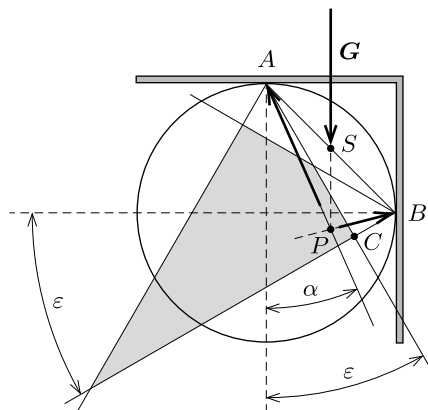
Ha a gépkocsi mindkét jobb oldali kerekével felhajt a járdára, akkor a rugók összenyomódása az eredeti, vízszintes talajon álló helyzethez képest nem változik meg, a kocsi karosszériája a jobb oldalon 8 cm-rel magasabbra kerül, a bal oldalon viszont változatlan magasságban marad. Ezt úgy láthatjuk be, ha megfontoljuk, hogy a jobb és a bal oldali rugóerő-növekmények összege és forgatónyomatékuk összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyikük külön-külön is nulla. Úgy is érvelhetünk, hogy a két kerékkel járdaszegélyre hajtás két egymás utáni dőccenésre bontható. Amikor a jobb első kerékkel hajtunk a járdára, ennél a keréknél 6 cm-t, a jobb hátsónál pedig 2 cm-t emelkedik a kocsi karosszériája. Amikor a jobb hátsó kerék kerül a járdára, a szerepek felcserélődnek. A két emelkedés szuperpozícióját képezve kapjuk, hogy mindkét jobb oldali keréknél összesen 8 cm-t emelkedik a kocsiszekrény, és hasonlóan adódik, hogy a bal oldalon nem változik a rugók hossza.

Megjegyzés. A leírtak érvényüket veszítik, ha az egyik kerékkel egy olyan magas járdára hajtunk, hogy valamelyik másik kerék a levegőbe kerül.

M. 114. A lemezre ható erőket az 1. ábra mutatja. Az A pontban ható erőnek (a nyomóerő és a súrlódási erő eredőjének) olyan szögtartományban kell feküdnie, amelyre $\text{tg } \alpha \leq \mu$, vagyis

$$\alpha \leq \text{arctg } \mu = \varepsilon.$$

Ugyanez igaz a B pontban ható erők eredőjére is. A két erő hatásvonala metszéspontjának, a P -vel jelölt pontnak tehát a két szögtartomány közös részébe, az ábrán látható sötétebb négyszögbe (deltoidba) kell kerülnie.



1. ábra

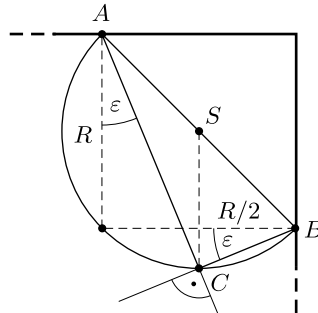
Szükséges továbbá, hogy a P pont rajta legyen a lemezre ható nehézségi erő hatásvonalán (mert ha összesen három erő hat egy síkban egy merev testre, akkor egyensúly esetén ezek hatásvonalára egy ponton megy át). Szimmetriai okokból a lemez S súlypontja az AB szakasz felezőpontjában van, tehát a nehézségi erő hatásvonalára a függőleges lemezoldaltól $R/2$ távolságra halad. A súrlódási együtthatónak (és vele együtt az ε szögnek) legalább akkorának kell lennie, hogy a négyszög C pontja a függőleges lemezoldaltól legfeljebb $R/2$ távolságra legyen.

A határesetet a 2. ábra mutatja. A C pont az AB fölé írt Thalész-körön helyezkedik el. A CSB háromszög egyenlőszárú, és mivel $CSB \sphericalangle = 45^\circ$,

$$SBC \sphericalangle = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ,$$

a keresett súrlódási együttható legkisebb értéke:

$$\mu_{\min} = \operatorname{tg} \varepsilon_{\min} = \operatorname{tg} (90^\circ - 67,5^\circ) = \operatorname{tg} 22,5^\circ = 0,41.$$



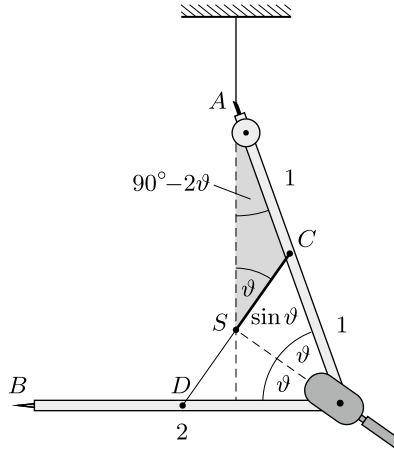
2. ábra

Megjegyzés. A feladat az ún. *statikailag határozatlan* problémák közé tartozik; pusztán az erők és forgatónyomatékok egyensúlyának feltételrendszere nem határozza meg egyértelműen a kialakuló erőeloszlást. A grafikus megoldásban ez úgy jelentkezik, hogy a nehézségi erő hatásvonalának bármely, a sötétített deltoidon belül lévő pontja lehet az erők hatásvonalának metszéspontja, és ennek megfelelően az erők nagysága és iránya sem egyértelműen meghatározott.

E határozatlanság hátterében az rejlik, hogy az erők tényleges nagysága attól is függ, hogy mennyire feszítettük neki a lemezt a hengernek. A beszorítottság mértéke a lemezben alakváltozásokat (deformációkat) hoz létre, a feladat teljes részletességében csak a deformációk vizsgálatával, tehát a rugalmasságtan törvényeinek felhasználásával oldható meg.

M. 115. Belátjuk, hogy a csukló akkor lesz a legmagasabban, amikor a körző alsó szára *vízszintes*. Induljunk ki ebből a helyzetből (1. ábra), és képzeljük el egy pillanatra, hogy a körző felső (felfüggesztett) szárát rögzítve tartjuk. Ha a másik (kezdetben vízszintes) szárát valamerre (akár felfelé, akár pedig lefelé) döntjük, a tömegközéppontja a körző csuklójához vízszintes irányban közeledik. Ha most a

felső szár rögzítését megszüntetjük, ez a szár mindenképpen lefelé mozdul el, mert csak így érhető el, hogy a közös tömegközéppont továbbra is a felfüggesztési pont alatt maradjon.



1. ábra

Jelöljük a körző szárai közötti szöget 2ϑ -val, és válasszuk a szárak hosszát 2 egységnyinek! Az 1. ábrán látható besötétített SCA háromszögre felírhatjuk a szinusztételt:

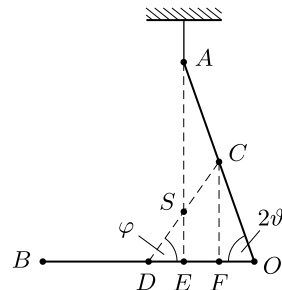
$$\frac{\sin \vartheta}{1} = \frac{\sin(90^\circ - 2\vartheta)}{\sin \vartheta},$$

melyből egyszerű átalakítások után

$$\sin \vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{azaz} \quad \vartheta \approx 35,3^\circ$$

adódik. A körző szárait tehát $2\vartheta \approx 70,5^\circ$ -nyira kell kinyitnunk, ekkor lesz a csuklója a legmagasabban.

Megjegyzés. A kérdéses 2ϑ nyílásszög a párhuzamos szelők tételének alkalmazásával is megkapható. Húzzunk a rendszer S tömegközéppontján és a felső szár C középpontján át egy-egy függőleges egyenest (2. ábra). Ezek a 2ϑ nyílású szárainak párhuzamos szelői, tehát OC és CA egyenlőségéből $EF = FO$ következik. Hasonló megfontolással a φ szögre: $DS = SC$ miatt $DE = EF$. Ezek szerint az E és az F pontok harmadolják az OD szakaszt, amely viszont OC -vel egyenlő, vagyis $OC = 3FO$. Mivel az FOC háromszög derékszögű, $\cos 2\vartheta = \frac{1}{3}$, azaz $2\vartheta \approx 70,5^\circ$.



2. ábra

M. 116. I. megoldás. Ha a kúp csúcsa Δh távolsággal lesüllyedne, az alapkörének sugara pedig Δr -rel megnőne (vagyis az alapkör kerülete $2\pi\Delta r$ -rel növekedne), akkor a külső erők összesen

$$\Delta W = G\Delta h - F(2\pi\Delta r)$$

munkát végeznének. Ennek a mennyiségnek egyensúlyi állapotban nullának kell lennie, ellenkező esetben a kúp valamelyik irányban magától elmozdulna. Innen

$$F = \frac{G}{2\pi} \frac{\Delta h}{\Delta r}.$$

A magasság és az alapkör sugarának megváltozása nem független egymástól, kapcsolatukat az alkotó hosszának változatlansága határozza meg (melyre Pitagorasz-tételt írhatunk fel):

$$(r + \Delta r)^2 + (h - \Delta h)^2 = r^2 + h^2,$$

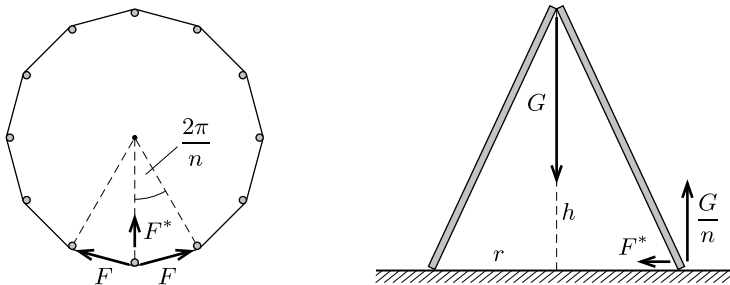
ahonnan

$$\frac{\Delta h}{\Delta r} = \frac{2r + \Delta r}{2h - \Delta h} \approx \frac{r}{h}$$

adódik. Eszerint a keresett erő:

$$F = \frac{r}{2\pi h} G.$$

II. megoldás. Modellezzük a folytonos anyageloszlású papírlapot sok vékony rúddal, amelyek alsó vége egy r sugarú kör kerülete mentén egyenletesen elosztva helyezkedik el, a másik végüket pedig egy kötéllel csuklószerűen egymáshoz kapcsoltuk. Ha a rudak alsó végét is összefogjuk egy fonállal, akkor az indián sátor vázára emlékeztető elrendezés a tetején G súllyal megterhelhető, hiszen az alsó fonál F feszítőereje megakadályozza a rudak szétcsúszását.



Ha összesen n darab rúd alkotja a rendszert ($n \gg 1$), akkor a szomszédos rudak közötti kötélerek $2\pi/n$ szöveget zárnak be egymással, így egy-egy rúd alját

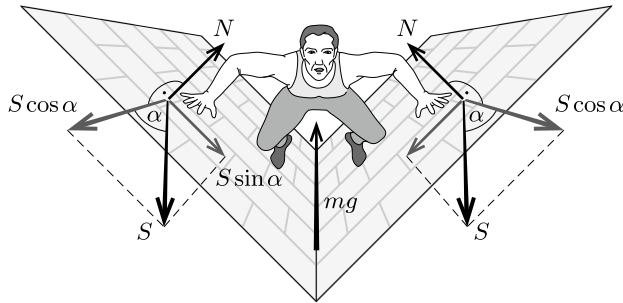
$$F^* = 2F \sin \frac{\pi}{n} \approx \frac{2\pi}{n} F$$

nagyságú vízszintes erő húzza a szabályos n -szög középpontja felé. Ezen kívül a rúd alját a talaj G/n függőleges erővel nyomja felfelé. E két erőnek akkor nem lesz eredő forgatónyomatéka a rúd felső végpontjára nézve, ha

$$\frac{G}{n}r = \frac{2\pi}{n}Fh, \quad \text{azaz} \quad F = \frac{r}{2\pi h}G.$$

(A forgatónyomatékok egyensúlyánál kihasználtuk, hogy a rúd súlya és a talpontjánál ható súrlódási erő elhanyagolható.)

M. 117. A felülnézeti és perspektívikus *ábra* azt mutatja, hogyan helyezkedik el Jean Valjean a falon. Feltüntettük a fegyencre ható erőket is: a függőlegesen lefelé irányuló nehézségi erőt (mg), egy-egy fal eredő nyomóerejét (N) és a súrlódási erőket (S).



A tapadási súrlódási erőről tudjuk, hogy legnagyobb értéke μN lehet. Az irányáról még semmit nem tudunk, ezért vegyük fel általánosan, a függőlegessel zárjon be α szöget. Felírhatjuk a függőleges és a vízszintes irányú erők (erőössze-tevők) egyensúlyának feltételét:

$$mg = 2S \cos \alpha,$$

$$N = S \sin \alpha,$$

ahonnan

$$N = \frac{1}{2}mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Ekkora erővel nyomja Jean Valjean a falat. Az egyes falaknál ébredő eredő erő nagysága:

$$F = \sqrt{N^2 + S^2} = \frac{1}{2}mg \sqrt{\frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}.$$

Arra is választ kaphatunk, hogy *legalább* mekkora nyomóerőt kell gyakorolnia a „falramászónak” a falakra, és hogy *legalább* mekkora a kifejtett eredő erő:

$$S \leq \mu N, \quad \text{vagyis} \quad \sin \alpha \geq \frac{1}{\mu}, \quad \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 1}},$$

innen

$$N \geq \frac{1}{2}mg \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - 1}},$$

$$F \geq \frac{1}{2}mg \sqrt{\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1}}.$$

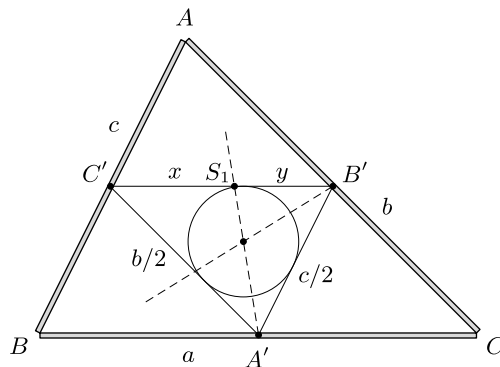
Amennyiben $\mu < 1$, a fenti kifejezések értelmetlenek, ilyenkor Jean Valjean mindenképpen leesik a falról. Ha viszont $\mu \gg 1$, akkor $F = \frac{1}{2}mg$, tehát Jean Valjean mindkét kezében a súlyának fele nagyságú erő ébred, ilyenkor tehát csak a saját súlyát kell tartania. Ez az extrém nagy tapadási súrlódási együttható annak felel meg, mintha Jean Valjean – a falmászó termekben edző sportmászókhhoz hasonlóan – meg tudna kapaszkodni a börtön falának kiszögellésein.

M. 118. Legyenek a háromszög oldalai a , b és c , a rudak egységnyi hosszra eső tömege pedig λ . A rudakat helyettesíthetjük egy-egy, a felezőpontjukba helyezett λa , λb és λc tömegű pontszerű testtel (lásd az *ábrát*). A tömegpontokat összekötő szakaszok hossza a középvonaltétel szerint a megfelelő párhuzamos oldalak hosszának a fele. Próbáljuk megkeresni most az egymástól $a/2$ távolságra lévő, λb és λc tömegű pontszerű testek tömegközéppontját! Ez abban az S_1 pontban lesz, amelyre

$$\lambda c \cdot x = \lambda b \cdot y,$$

vagyis

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c} = \frac{b/2}{c/2}.$$

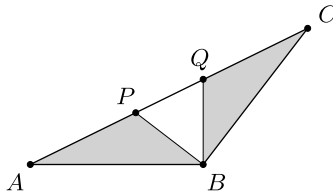


Az S_1 pont a szögfelezőtétel megfordítása alapján rajta van a $C'A'B'$ szög szögfelező egyenesén. Így az S_1 -ben található $\lambda(b + c)$ tömeg és az A' -ben található λa tömegpont közös tömegközéppontja (azaz a háromszögkeret tömegközéppontja) rajta van a $C'A'B'$ szög szögfelezőjén. Mivel bármely másik két pontból is

kiindulhattunk volna, így a rudakból épített háromszög tömegközéppontja rajta van az $A'B'C'$ háromszög mindhárom szögfelezőjén, vagyis egybeesik az $A'B'C'$ beírható körének középpontjával.

A súlypont helyét tehát Laci határozta meg helyesen. Feri módszere csak szabályos háromszög esetén ad jó megoldást.

M. 119. A háromszögnek biztosan van legalább egy olyan helyzete, amelyik stabil: ebben a tömegközéppontja (az adott körülmények között) a lehető legmélyebben helyezkedik el. Könnyen találhatunk olyan – kellően aszimmetrikus – tompaszögű háromszöget, amely egyik oldaláról felborul, de vajon készíthető-e olyan háromszög, melynek két borulékony és csak *egyetlen stabil* oldaléle van?



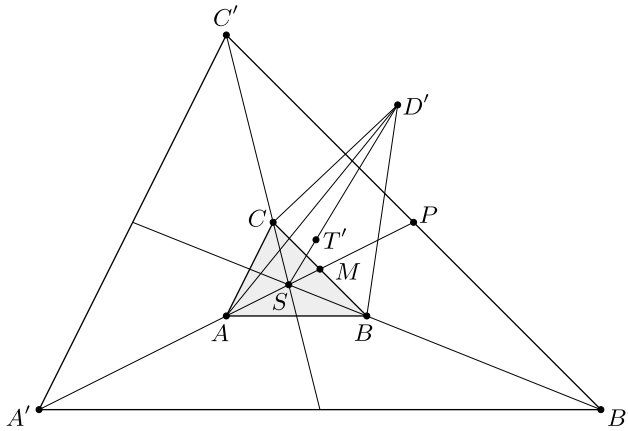
Belátjuk, hogy ilyen háromszög *nem létezik!* Hegyesszögű háromszög súlypontjából bármelyik oldalra bocsátott merőleges talppontja az oldaléltre esik, tehát egy ilyen alakú háromszögnek három stabil oldala van. Tompaszögű háromszögnél a súlypont vetülete kerülhet ugyan az oldalélen kívülre, ha a súlypont az *ábrán* sötétebben jelölt ABP és BCQ tartományok *valamelyikébe* esik. Ha viszont egy háromszög két oldaláról is felborulna, akkor a súlypontnak egyszerre *mindkét* besötétített tartomány belsejében kellene lennie, ami lehetetlen!

M. 120. Ha a tetraéder valamelyik lapjára állítva felborul, akkor átbillenés-kor a súlypontja alacsonyabbra kerül. A súlypont magassága a tetraéder magasságának negyede, a test térfogata tehát valamelyik lapterület és a hozzá tartozó súlypontmagasság szorzatának $4/3$ -szorosával egyenlő; így minél nagyobb területű lapján fekszik a tetraéder, a súlypontja annál alacsonyabban helyezkedik el.

Megmutatjuk, hogy *nem létezik* olyan tetraéder, amely három oldallapjáról is felborul. A bizonyítás lényege: belátjuk, hogy ha valamelyik oldallap borulékony, akkor létezik a tetraédernek legalább két másik oldallapja, amelyek mindegyikének nagyobb a területe, mint a kérdéses lap területe. Ebből már következik, hogy a legnagyobb és a második legnagyobb területű oldallapnak stabilnak kell lennie.

Tekintsük a tetraéder *második legnagyobb* alapterületű ABC lapját, és tételizzük fel, hogy erről a lapjáról felborul a test. Ez akkor következik be, ha a tetraéder T súlypontjának az ABC síkra eső T' vetülete az ABC háromszögön kívülre esik (lásd az *ábrát*).

A homogén tetraéder T súlypontja az ABC háromszög S súlypontját és a negyedik (D -vel jelölt) csúcsot összekötő egyenesen fekszik, az SD szakasz S -hez közelebbi negyedrésznél. Ugyanez igaz a kérdéses pontok ABC síkra eső T' és D' vetületére is: $ST' = \frac{1}{4}SD'$.



Nagyítsuk fel az ABC háromszöget az S súlypontjából középpontosan a négyszeresére! Ekkor (az ábra jelöléseit követve) fennáll $AM = MP$, ebből következik, hogy a BC és $B'C'$ egyenesek távolsága ugyanakkora, mint az A csúcs és a BC egyenes távolsága. Hasonló arányosság teljesül a többi oldalra is.

Mivel a D csúcs D' vetülete kívül esik az $A'B'C'$ háromszögön, ezért D' és S a felnagyított háromszög valamelyik oldalegyenesének (mondjuk $B'C'$ -nek) ellentétes oldalán helyezkedik el. Emiatt a tetraéder CBD oldallapjának területe

$$t(CBD) > t(CBD') > t(ABC).$$

(Ez a reláció abból is következik, hogy a tetraéder valamelyik borulékony oldaláról csak kisebb súlypontmagasságú, tehát nagyobb alapterületű oldallapjára fordulhat át.)

Megmutatjuk, hogy a tetraéder másik két oldallapja (ABD és ADC) közül *legalább az egyik* nagyobb területű, mint az alaplap $t(ABC)$ területe. Az oldallapok területe a vetítés során biztosan csökken, ezért igaz, hogy

$$t(ABD) + t(ADC) > t(ABD') + t(AD'C) \geq t(ABC) + t(CBD') > 2 \cdot t(ABC).$$

Ha két terület összege nagyobb, mint $t(ABC)$ kétszerese, akkor az egyikük biztosan nagyobb, mint $t(ABC)$.

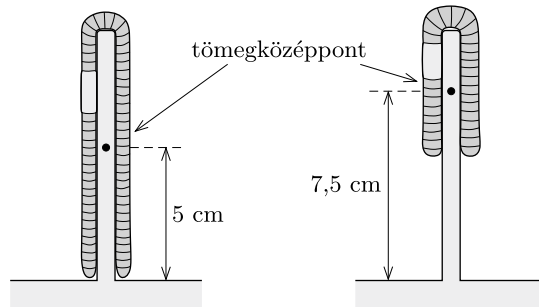
Találtunk tehát két olyan oldallapot (CBD , valamint ABD és ADC közül az egyik), amelynek területe nagyobb, mint a legnagyobb borulékony oldallap területe. Ez három borulékony oldallap esetén nem lenne lehetséges, vagyis ilyen tetraéder *nem létezik*.



Kötelek, láncok, granulált anyagok

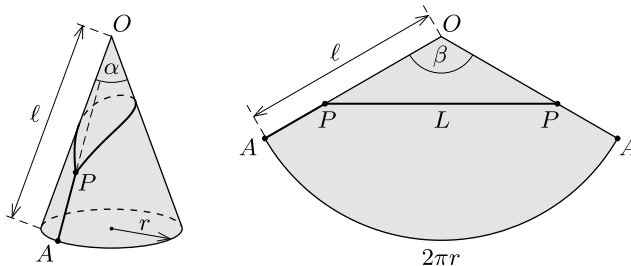
M. 121. A nehézségi erő ellenében végzett munkát a tömegközéppont emelkedéséből számíthatjuk ki. A „félbehajtott” giliszta tömegközéppontja a két félrész felénél, tehát a giliszta végétől a teljes hosszának negyedénél található.

Ezek szerint a sovány giliszta tömegközéppontja 5 cm-t, a kövéré pedig 7,5 cm-nyit emelkedik, a munkavégzések aránya tehát 2 : 3.



Megjegyzés. A giliszták tömegközéppontja nem mindig ugyanott van a gilisztaéhoz viszonyítva, sőt lehet, hogy a giliszta egyetlen pontjával sem esik egybe. Az egyenes giliszta tömegközéppontja a közepénél, a félbehajlott gilisztaé pedig a végeitől negyedrésnyi távolságra van. A tömegközéppont tehát nem „nőtt hozzá” a hajlékony testek valamelyik pontjához, viszonylagos helyzete változhat. Ezt használja fel az a magasugró is, akinek a teste átbukik a lécz felett, tömegközéppontja viszont a lécz alatt „bújik át”.

M. 122. Jelöljük a kezdők lasszóján lévő zárt hurok hosszát L -lel, a kis hurok helyzetét a kúpon P -vel, a versenyző helyét A -val, a jéghegy csúcsát pedig O -val (1. ábra bal oldala). A versenyző akkor kerül a legmélyebre (tehát akkor lesz a rendszer összenergiája a legkisebb), ha a P pont a lehető legmesszebb van O -tól.



1. ábra

Vágjuk fel képzeletben a kúp palástját az OA egyenes mentén, és terítsük ki a felületét egy síkba. (Ezt megtehetjük, hiszen a kúp palástjának ún. Gauss-görbülete nulla.) Így egy β nyílásszögű körcikket kapunk, amelyen a P pont két

helyen is megjelenik (lásd az 1. ábra jobb oldalát). A P pontok akkor kerülnek legtávolabb az O ponttól, ha a közöttük húzódó L hosszúságú kötélrész az ábrán *egyenes*. Ilyen egyenes a kiterített kúppaláston (az ábrán sötétben jelölt területen belül) akkor húzható, ha $\beta < 180^\circ$, vagyis

$$2\pi r = \ell\beta < \ell\pi, \quad \text{azaz} \quad r < \frac{\ell}{2}.$$

Ez a feltétel az eredeti (térbeli) jégkúp csúcshözégre az

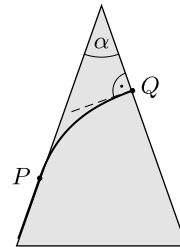
$$\frac{r}{\ell} = \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}, \quad \text{vagyis} \quad \alpha < 60^\circ$$

megszorítást adja.

A kezdő versenyzők tehát csak a 60° -nál *hegyesebb* jégkúpokra tudnak felkapaszkodni a két darabból álló lassójuk segítségével. Ha a kúp csúcshöze nagyobb ennél az értéknél, akkor a megterhelt lasszó hurokja átcúsúzik a jéghegy csúcán, és a versenyző leesik.

Megjegyzés. Ha „oldalról” nézzük az átlátszónak gondolt jéghegyet, a lasszó hurokjának egyik ága éppen a másik mögé kerül, emiatt a lasszót egyetlen vonalnak látjuk. Ez a vonal a P -vel átellenes végén lévő Q pontban merőleges a kúp ottani alkotójára. Ebből naiv módon arra gondolhatunk, hogy α felső határa 90° , de ez – mint láttuk – nem igaz!

A hiba forrása: P és Q között a lasszó vetülete *nem egyenes*, mert a lasszó hurokja nem síkgörbe (2. ábra). (Ha az lenne, akkor egy kúpszeletnek, nevezetesen ellipszisnek kellene lennie, de egy ellipszisnek nincs töréspontja P -ben, a hurkot alkotó kötélnak viszont – a megterhelt kötélrész miatt – *van* töréspontja.) Ha a síkba kiterített felületen meghúzott egyenest visszarájzoljuk a kúp palástjára, láthatjuk, hogy ha $\alpha \rightarrow 60^\circ$, akkor Q egyre magasabbra kerül, és végül eléri a jéghegy csúcását.



2. ábra

Mi a helyzet a haladó versenyzők lassójával? Ez egyetlen, összefüggő kötélből áll, tehát benne a feszítőerő mindenhol ugyanakkora. A kis huroknál, vagyis a P csomópontban három kötélrész fut össze, ezekben azonos nagyságú erő hat, tehát erőegyensúly akkor állhat fenn, ha a három kötélpáronként 120° -os szöget zár be egymással. Az 1. ábra jobb oldalán látható „kiterített” rajzról leolvasható, hogy ebben az esetben $\beta = 60^\circ$, vagyis

$$2\pi r = \ell \frac{\pi}{3},$$

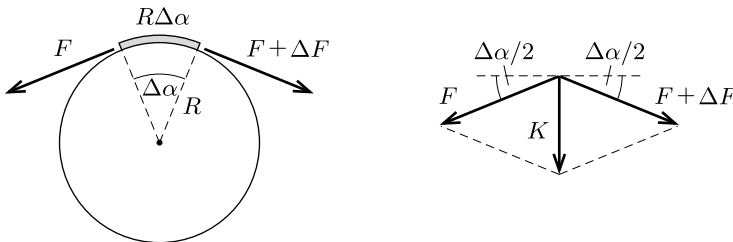
azaz

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\ell} = \frac{1}{6}, \quad \text{ahonnan} \quad \alpha = 19,2^\circ.$$

Egyensúlyi helyzet tehát csak egyetlen α szögnél állhat fenn, és ez az egyensúly is *instabil*. Ha a jégkúp csúcshöze nagyobb ennél a szögnél, akkor a megterhelt lasszó

hurokja felcsúszik a kúp tetejéig, majd azon átugorva visszaesik. Ha a csúcsszög kisebb, mint a kritikus érték, akkor a hurok lecsúszik egészen a versenyzőig, tehát ebben az esetben sem segíti a kapaszkodást. Nem véletlen, hogy ezt a lasszót csak haladó jégfalmászóknak ajánlják!

M. 123. Tartsuk a fonál egyik végét F_0 erővel, a másik végét pedig húzzuk akkora F_{\max} erővel, hogy még éppen ne csússzon meg a hengeren. A fonálnak a hengeren fekvő szakasza fusson be α szöget a henger palástján. A hengerre csavarodó fonál önmagát szorítja a hengerpalástra, ezzel biztosítja a súrlódáshoz szükséges nyomóerőt. A fonálban ébredő feszítőerő az α szög függvényében folyamatosan növekszik, amit az egyes fonaldarabokra ható súrlódási erő ellensúlyoz.



Ha az *ábra* bal oldalán látható, kicsiny $\Delta\alpha$ középponti szögű fonaldarab egyik végén F a feszítőerő, másik végén pedig $F + \Delta F$, akkor a súrlódás által ellensúlyozott ΔF növekményt így számíthatjuk ki:

$$(1) \quad \Delta F = \mu K,$$

ahol K a henger felületére merőleges nyomóerő, és μ a keresett súrlódási együttható.

A nyomóerőt az *ábra* jobb oldali részének megfelelően az $R\Delta\alpha$ hosszúságú fonaldarabra ható F és $F + \Delta F \approx F$ erők vektori eredőjeként határozhatjuk meg:

$$(2) \quad K = 2F \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx F\Delta\alpha,$$

amit az (1) egyenletbe helyettesítve az F erő és az α szög kapcsolatára a

$$\Delta F(\alpha) = \mu F(\alpha) \cdot \Delta\alpha$$

egyenletet kapjuk. Ez az összefüggés alakilag megegyezik a radioaktív bomlások

$$\Delta N(t) = -\lambda N(t) \cdot \Delta t$$

egyenletével (ahol $N(t)$ a bomló anyag részecskeszáma, t az eltelt idő, λ pedig a bomlási állandó). A részecskék száma – mint az jól ismert – exponenciális függvény szerint csökken:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

tehát az egyenletek hasonlósága miatt ($-\lambda = \mu$ megfeleltetéssel) felírhatjuk a „kötélsúrlódás törvényét” is:

$$(3) \quad F(\alpha) = F_0 e^{\mu\alpha}.$$

A feladatban szereplő elrendezésben

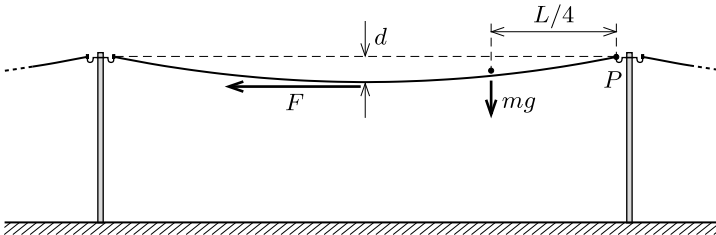
$$F_{\max} = F_0 e^{\mu\pi} = 2F_0,$$

ahonnan a súrlódási együttható kifejezhető:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln 2 \approx 0,22.$$

Megjegyzés. A (3) egyenlet értelmében a fonálerő nagyon gyorsan, exponenciális ütemben növekszik a tekeredési szög függvényében. Emiatt a fonál két végén ható erő aránya már néhány menet feltekerésével nagyságrendi különbségeket is elérhet. Ezt az érdekes ténytet használják ki például a hegymászók a kötélbiztosításnál, vagy a matrózok, amikor képesek egy nagy hajót pusztá kézzel „megfékezni”.

M. 124. A villanyvezeték tetszőleges darabja egyensúlyának feltétele, hogy a rá ható erők és forgatónyomatékok eredője nulla legyen. Vizsgáljuk a vezeték egyik $L/2$ hosszúságú felének az egyensúlyát és írjuk fel a forgatónyomatékok eredőjét az *ábrán* látható P felfüggesztési pontra!



A vezetékdarab hossza a kis belógás miatt jó közelítéssel $L/2$, így tömege $m = \lambda L/2$. A vizsgált vezetékdarabra ható erők közül a P pontra nézve csak az F feszítőerőnek és az mg nehézségi erőnek van forgatónyomatéka; előbbi erőkarja d , az utóbbié pedig (szintén a $d \ll L$ reláció miatt) $L/4$ -nek vehető, így a forgatónyomatékok eredője:

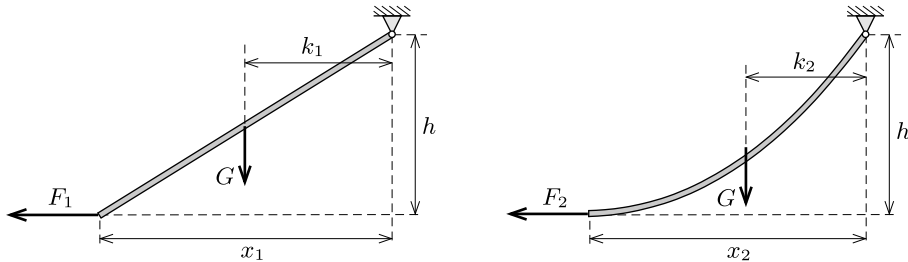
$$Fd - mg \frac{L}{4} = 0.$$

A tömegre vonatkozó összefüggést felhasználva közvetlenül adódik a villanyvezetékben ébredő (és a vezeték mentén közelítőleg állandó nagyságú) feszítőerő formulája:

$$F = \frac{\lambda L^2 g}{8d}.$$

M. 125. Képzeljük el, hogy a kötél és a mászórúd végét is ugyanolyan magasra emeljük (ehhez természetesen különböző, F_1 és F_2 nagyságú vízszintes erőre van szükség). Így mind a kötél, mind a rúd végpontjának a felfüggesztési ponthoz viszonyított magasságkülönbsége egyaránt h értékű lesz. A kötél vízszintes irányú vetületének x_2 hossza (a kötél görbültsége miatt) biztosan kisebb, mint a rúd x_1 nagyságú vízszintes vetülete:

$$x_2 < x_1.$$



A nehézségi erő karja (lásd az *ábrát*) a rúd esetében $k_1 = x_1/2$, a kötél esetében azonban nem számolható ki ilyen egyszerűen. A felfüggesztési ponthoz közeledve a kötél egyre meredekebbé válik, így az azonos hosszúságú vízszintes vetülettel rendelkező kötélrészecskék tömege annál nagyobb, minél közelebb vannak a felfüggesztési ponthoz. Emiatt a kötéltre ható nehézségi erő karjáról biztosan állíthatjuk, hogy $k_2 < x_2/2$. A két erőkar viszonya:

$$k_2 < k_1.$$

A felfüggesztési pontra vonatkoztatott forgatónyomatékok egyensúlya a rúd és a kötél esetében:

$$F_1 h = G k_1, \quad F_2 h = G k_2,$$

ahol G a mászórúd és a kötél súlya. Az erőkarok viszonyából következik, hogy

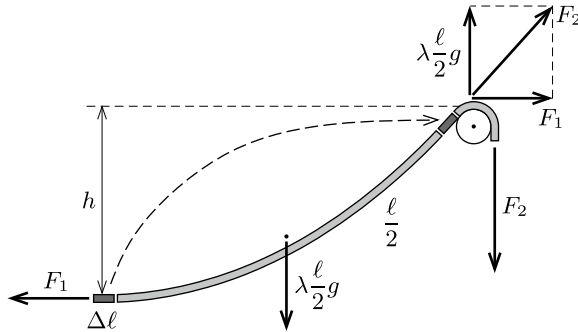
$$F_2 < F_1,$$

tehát abban az esetben, ha a kötél és a rúd végpontját egyforma magasra emeljük, nagyobb erővel kell tartanunk a mászórudat, mint a kötelet. Ha a rúdra ható erőt ezután fokozatosan lecsökkentjük a kötélnél alkalmazott F_2 értékre, a végpontja lejjebb kerül.

Azonos nagyságú vízszintes húzóerők esetén tehát (egyensúlyi állapotban) a kötél alsó vége *magasabban* helyezkedik el, mint a mászórúd legalsó pontja.

M. 126. I. megoldás. Jelöljük a kötél hosszegységre eső tömegét (vonalmonti sűrűségét) λ -val! A kötél tetszőleges darabkája egyensúlyban van, ezért a kötelet feszítő erő vízszintes komponense a csigák közötti kötélrészen belül állandó. A kötélerő függőleges komponense helyről helyre változik: nagysága a kötél közepénél nulla, a csigáknál pedig éppen a belőle rész súlyának fele, $\lambda(\ell/2)g$.

Kövessük az útmutatást, és gondolatban vágjunk ki a kötéel közepéről egy kicsiny $\Delta\ell$ hosszúságú darabot, és töljük vissza azt az egyik csigánál a kötéelbe! A kötéel közepénél a szétvágott kötéelrészek összehúzásánál (az 1. ábra jelöléseivel) $F_1\Delta\ell$ munkát kell végeznünk, a kis kötéeldarabka felemeléséhez $\lambda\Delta\ell \cdot gh$ munkavégzésre van szükség, míg a csigánál való betoldáskor $-F_2\Delta\ell$ munkát kell végezni.



1. ábra

Végeredményben a kiindulási állapotba jutottunk vissza, ezért az összes végzett munkának zérusnak kell lennie:

$$F_1\Delta\ell + \lambda\Delta\ell \cdot gh - F_2\Delta\ell = 0.$$

Egyszerűsítés után ebből az

$$(1) \quad F_2 - F_1 = \lambda gh$$

összefüggésre jutunk. A fenti gondolkísérletet a kötéel tetszőleges két pontja között elvégezhetjük, ezért általánosan igaz, hogy két különböző pontban ébredő feszítőerők különbsége egyenesen arányos a pontok magasságkülönbségével.

Az F_2 erő és komponensei közötti kapcsolatot az ábráról olvashatjuk le:

$$(2) \quad F_2^2 = F_1^2 + \left(\lambda\frac{\ell}{2}g\right)^2.$$

A harmadik egyenletünket az a felismerés szolgáltatja, hogy a kétoldalt lelógó, s hosszúságú kötéelrészeket éppen az F_2 erő tartja:

$$(3) \quad F_2 = \lambda gs.$$

Az (1)-(3) egyenletekből a lelógó kötéldarabok hosszára az

$$s = \frac{\ell^2 + 4h^2}{8h}$$

eredményt kapjuk.

II. megoldás. A kötelek, láncok egyensúlyánál általánosan is érvényes (1) összefüggéshez másképp is eljuthatunk. Ehhez osszuk fel a kötel csigák közötti szakaszát kicsiny, Δs_i hosszúságú darabkákra ($i = 1, 2, \dots, N$), és jelöljük a kis darabkák két vége közötti magasságkülönbséget Δy_i -vel (2. ábra). Ha $F_{i,y}$ az i -edik kis darabka egyik (mondjuk jobb oldali) végpontjánál ható erő függőleges komponense, F_x pedig az i -től független vízszintes komponens, akkor az eredő erő F_i nagyságára felírhatjuk a Pitagorasz-tételt:

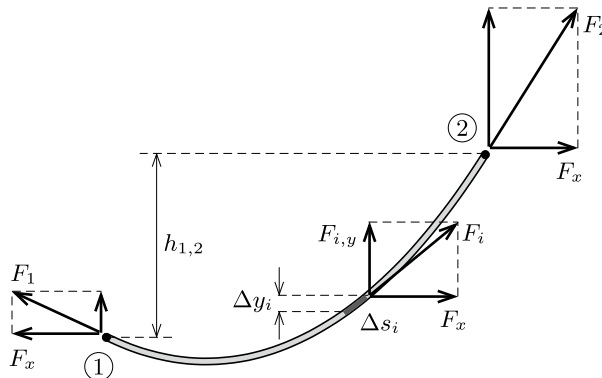
$$(4) \quad F_i^2 = F_{i,y}^2 + F_x^2.$$

A kis köteldarabkákra ható kötelerők eredője éppen a darabkák súlyával egyezik meg:

$$F_{i+1,y} - F_{i,y} \equiv \Delta F_{i,y} = \lambda \Delta s_i g.$$

Használjuk fel, hogy a kötelerő mindig érintő irányú:

$$(5) \quad \Delta y_i = \Delta s_i \frac{F_{i,y}}{F_i} = \frac{1}{\lambda g} \frac{F_{i,y} \Delta F_{i,y}}{F_i}.$$



2. ábra

Képezzük a (4) egyenlet mindkét oldalának kicsiny megváltozását, azaz vonjuk ki az $(i+1)$ -edik köteldarabra felírt egyenletből az i -edikre felírt egyenletet! Mivel F_x a kötel mentén állandó,

$$F_{i+1,y}^2 - F_{i,y}^2 = F_{i+1}^2 - F_i^2,$$

amiből az

$$(6) \quad F_{i,y} \Delta F_{i,y} = F_i \Delta F_i$$

összefüggést kapjuk. Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy ha egy tetszőleges f mennyiség kicsiny Δf értékkel megváltozik, akkor f négyzetének megváltozása:

$$\Delta(f^2) \equiv (f + \Delta f)^2 - f^2 = 2f\Delta f + (\Delta f)^2 \approx 2f\Delta f.$$

A (6) egyenlőség figyelembevételével (5) így írható:

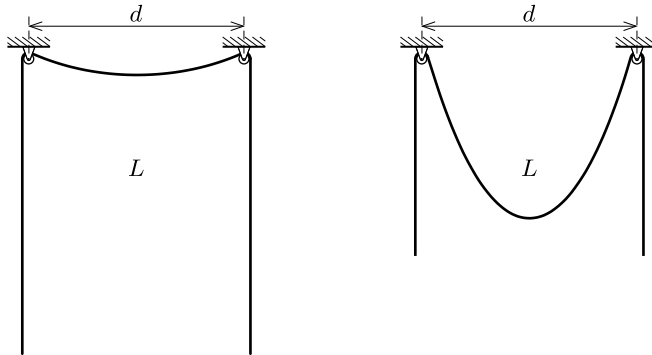
$$(7) \quad \Delta y_i = \frac{1}{\lambda g} \frac{F_i \Delta F_i}{F_i} = \frac{1}{\lambda g} \Delta F_i.$$

Összegezzük a (7) egyenlet mindkét oldalát az ábrán látható 1-es és 2-es pontok között! Ekkor a következőt kapjuk:

$$h_{1,2} = \frac{1}{\lambda g} (F_2 - F_1),$$

ahol $h_{1,2}$ a vizsgált pontok magasságkülönbsége. Ezt az összefüggést a kötéel közép-pontjára és a csigánál lévő pontjára alkalmazva ($h_{1,2} = h$) éppen az (1) egyenletre jutunk. Innen a számolás az I. megoldásban leírt módon vihető végig.

Megjegyzés. A kötéel h belógása és a csigák közé eső ℓ kötéelhossz egyértelműen meghatározza a csigák d távolságát. A kapott eredményből látszik, hogy adott h és ℓ (azaz adott d) mellett minden esetben található olyan s érték, ami biztosítja a kötéel egyensúlyát. Érdekes eredményt kapunk akkor, ha a feladat kérdése helyett arra keressük a választ, hogy adott d távolságban elhelyezkedő csigákra L hosszúságú kötelet helyezve mekkora h belógás esetén lehet a kötéel egyensúlyban ($L = \ell + 2s$)? Felsőbb matematikai eszközökkel megmutatható, hogy $L/d < e$ esetén (ahol $e \approx 2,718$ az Euler-féle szám) nincs a kötélnak egyensúlyi helyzete, $L/d > e$ esetén viszont kettő is van (lásd a 3. ábrát). Az egyik (a kisebb belógáshoz tartozó) helyzet a kötéel közepének kicsiny, függőleges irányú elmozdítására nézve *stabil*, míg a nagyobb h értékhez tartozó egyensúlyi helyzet *instabil*.



3. ábra

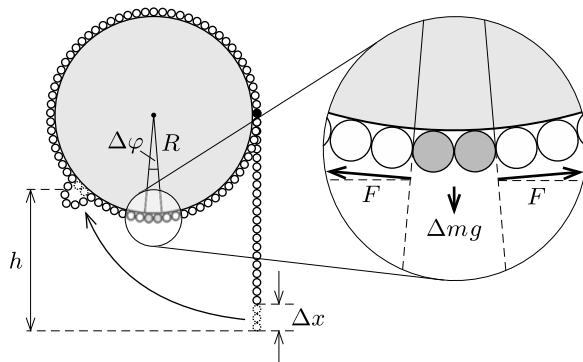
M. 127. Képzeld el, hogy a gyöngysort az alsó végétől számított h magasságban kicsiny Δx távolsággal meghúzzuk az ábra szerint! Ekkor a gyöngysort szabad vége Δx magassággal kerül feljebb. Ha a meghúzott pontban a gyöngysort feszítő erő $F(h)$, akkor a végzett munkánk $F(h)\Delta x$. Ez a munka teljes egészében a gyöngysort gravitációs helyzeti energiájának növelésére fordítódik, amit számíthatunk úgy, mintha a gyöngysort alján hiányzó részt h magasságba emeltük volna:

$$F(h)\Delta x = \lambda \Delta x \cdot gh,$$

itt λ a gyöngysor hosszegységre eső tömege. (A súrlódást a henger „sima felülete” miatt elhanyagoltuk.) Egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy a gyöngysorban ébredő erő csak az alsó végétől számított h magasságtól függ:

$$(1) \quad F(h) = \lambda gh.$$

Ez az eredmény azonos az *előző feladatban* kapott összefüggéssel, mely szerint a (csak súrlódásmentes felületekkel érintkező) kötelek, láncok két tetszőleges pontjában ható erők nagyságának különbsége arányos a pontok magasságkülönbségével.



Ha a gyöngysor lelógó része elég hosszú, akkor az egyensúly stabil. A lelógó részt csökkentve azt tapasztaljuk, hogy egy kritikus ℓ hossznál az egyensúly instabillá válik, és a gyöngysor a henger legalsó pontjánál elkezd elválni a palásttól. Ez azt jelenti, hogy ebben a pontban a henger palástja által a gyöngysorra kifejtett nyomóerő nullára csökken. Tekintsük most a henger legalsó pontjánál található, kicsiny $\Delta\varphi$ középponti szöggel jellemezhető, $R\Delta\varphi$ hosszúságú gyöngysordarabkát (lásd az ábrát)! Erre az egyensúly feltétele:

$$2F \sin(\Delta\varphi/2) = \lambda R \Delta\varphi \cdot g,$$

ahol F a gyöngysor feszítőereje a henger legalsó pontjánál. A kis szög miatt alkalmazhatjuk a $\sin(\Delta\varphi/2) \approx \Delta\varphi/2$ közelítést, így

$$F = \lambda g R.$$

Ezt az eredményt összevetve az (1) kifejezéssel azt kapjuk, hogy a gyöngysor akkor van egyensúlyban, ha az alsó végének és a henger legalsó pontjának h magasságkülönbsége legalább R , azaz a lelógó rész keresett hossza $\ell \geq 2R$.

M. 128. a) A guriga tömegközéppontja nem esik az alátámasztási pont fölé, így a nehézségi erő forgatónyomatéka görgeti ki a szőnyeget.

b) A szőnyeg x hosszúságú darabjának feltekerésekor kialakuló szőnyegguriga $m(x)$ tömege egyenesen arányos a felgöngyölt rész hosszával:

$$(1) \quad m(x) = \frac{M}{L} x,$$

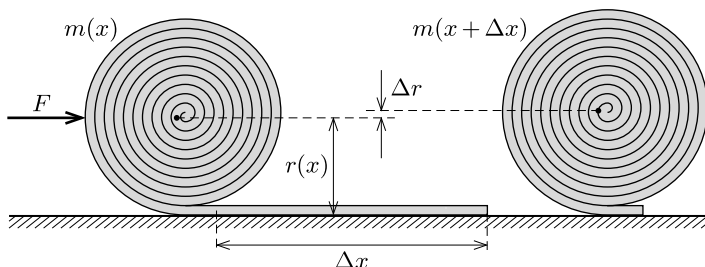
hiszen $x = L$ esetén a tömeg éppen M . A guriga keresztmetszetének területe is arányos x -szel, vagyis a guriga sugarára fennáll:

$$(2) \quad r^2(x) = \frac{R^2}{L} x.$$

A guriga egyensúlyát biztosító vízszintes $F(x)$ erőt a virtuális munka elvéből határozhatjuk meg:

$$(3) \quad F(x) \Delta x = \Delta E_{\text{helyzeti}},$$

ahol $E_{\text{helyzeti}} = m(x)gr(x)$ az x hosszban felgöngyölt szőnyeg helyzeti energiája (ami megegyezik a teljes szőnyeg helyzeti energiájával is).



Ha a gurigát a teljes hosszához képest kicsiny Δx távolsággal feljebb görgetjük az *ábra* szerint, a helyzeti energia megváltozása:

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} = mg \cdot \Delta r + \Delta m \cdot gr,$$

amit az (1)-ből és (2)-ből adódó

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta x}{x} \quad \text{és} \quad 2 \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta x}{x}$$

összefüggések felhasználásával

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} = \frac{3}{2} \frac{m g r}{x} \Delta x$$

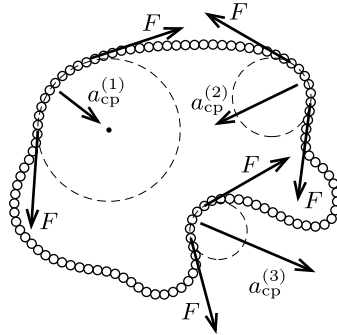
alakban is felírhatunk. Ezt (3)-mal összevetve, valamint (1)-et és (2)-t is felhasználva megkaphatjuk a szőnyegguriga egyensúlyban tartásához szükséges erőt a felgöngyölt rész x hosszának függvényében:

$$F(x) = \frac{3}{2} m(x) g \frac{r(x)}{x} = \frac{3mgR}{2L} \sqrt{\frac{x}{L}}.$$

$x = L$ esetén ez a kifejezés megadja a kért erő nagyságát:

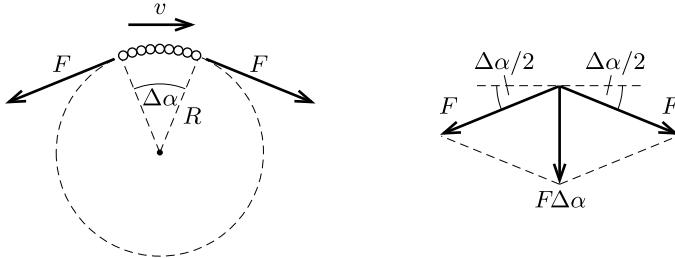
$$F = \frac{3R}{2L} Mg.$$

M. 129. Megmutatjuk, hogy *tetszőleges alakú* zárt térgörbe mentén egyenletes sebességgel mozgó lánc (hajlékony kötél) a súlytalanság állapotában akkor is fenntartja ezt a mozgását, ha semmiféle kényszerfeltételt (pl. láncvezetőket a kanyarokban) nem alkalmazunk.



1. ábra

Tekintsük az 1. ábrán látható, valamilyen bonyolult (akár térbeli) görbe mentén kacsakaringózó, de egyenletes v sebességgel mozgó láncot! A láncot feszítő erő mindenhol ugyanakkora (F nagyságú), hiszen a láncszemek érintő irányú gyorsulása nulla.



2. ábra

Ha a hosszegységenként λ tömegű lánc valamely pontjában a térgörbe görbületi sugara R (ez lehet helyről helyre változó nagyságú), akkor a 2. ábrán látható, $R\Delta\alpha$ hosszúságú ($\Delta m = \lambda R\Delta\alpha$ tömegű és v^2/R gyorsulású) kicsiny láncdarabka mozgásegyenlete:

$$\lambda R \Delta\alpha \frac{v^2}{R} = 2F \sin \frac{\Delta\alpha}{2},$$

ahonnan a kis szögekre érvényes $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$ formula felhasználásával az

$$F = \lambda v^2$$

összefüggést kapjuk. Ebben az egyenletben *nem* szerepel R , vagyis a görbület nagyságától függetlenül az érintőleges F erők eredője éppen akkora, amekkora az adott helyen a lánc „bekanyarodásához” szükséges. Ha a lánc egyenes, akkor egy

kis darabkájára ható eredő erő nulla. Minél jobban görbül a lánc, annál nagyobb lesz az egyes (kicsiny) darabkáira ható eredő erő, és az eredő erő iránya is éppen megfelelő („behorpadt” láncnál pl. kifelé mutat).

A lánc tehát az eredeti alakját és érintőleges sebességét megőrizve esik lefelé, éppen úgy, ahogy Feri sejtette.

M. 130. Tekintsük az álló láncot gravitációs térben. Ebben az esetben a (minden pontban érintő irányú) feszítőerő a lánc mentén folyamatosan változik, éppen úgy módon, hogy minden láncszem súlyát a szomszédai által kifejtett két erő eredője ellensúlyozza. Jelöljük ezt a feszítőerőt a lánc egy tetszőleges (mondjuk legfelső) pontjától mért s ívhossz függvényében $F_1(s)$ -sel! (Természetesen $F_1(0) = F_1(L)$, ahol L a lánc teljes hossza.)

Tekintsünk most egy ugyanilyen alakú láncot, amit a súlytalanság állapotában (mondjuk egy űrállomáson) megpörgetünk úgy, hogy minden láncszem azonos, érintő irányú v sebességgel mozogjon! A lánc kis darabkájára felírva a dinamika alapegyenletét könnyen belátható (lásd az *előző feladatot*), hogy ekkor a láncot feszítő $F_2(s)$ erő nagysága független a lánc adott pontbeli görbületi sugarától, és nagysága $F_2(s) = \lambda v^2$, ahol λ a lánc egységnyi hosszú darabjának tömege. Akármilyen alakú is tehát a lánc, ez az ívhossztól független feszítőerő minden egyes láncszemre éppen a centripetális gyorsulásához szükséges (a lánc mentén a görbületi viszonyoktól függően változó) eredő erőt képes biztosítani.

Végül tekintsük a feladatunkban szereplő, gravitációs térben mozgó, az *eredetivel azonos alakú* láncot! Ha a feszítőerő a lánc mentén $F_1(s) + F_2(s)$ módon változik, akkor minden láncszemre teljesül a Newton-féle mozgásegyenlet, hiszen az $F_1(s)$ -ből adódó eredő erő és a gravitációs erő összege nulla, az $F_2(s)$ -ből jövő járulék pedig a tömeg és a centripetális gyorsulás szorzatát adja.

Ezzel beláttuk, hogy az eredeti láncgörbe lesz a mozgó lánc alakja is.

Megjegyzés. A fenti érvelést szemléltethetjük a következő gondolat kísérlettel: A fogaskerek álló állapotában varázsütésre „kapcsoljuk ki” a földi gravitációs mezőt! A lánc alakja ettől nem változik meg, csupán nem nyomja tovább a fogaskereket. Ahogy azt korábban beláttuk, ha ezután minden láncszemnek ugyanakkora, érintő irányú sebességet adunk, a lánc továbbra is megőrzi eredeti alakját. Végül kapcsoljuk vissza a földi gravitációt, amely (mint tudjuk) a megőrzött alakot már nem szeretné deformálni, tehát a mozgó lánc alakja a stacionárius helyzetben ugyanaz lesz, mint a kiindulási, nyugalmi állapotban.

A forgási sebesség időbeli változása során természetesen nem azonnal alakul ki a stacionárius állapot, hanem tranziens folyamatok is fellépnek. Ilyen folyamat például a mozgó láncon végigfutó hullámzás. Annak vizsgálata, hogy a tranziensek miként csillapodnak le (ha egyáltalán lecsillapodnak, mert elvben az is elképzelhető, hogy a lánc alakja folyamatosan változik) a fentieknél sokkal bonyolultabb vizsgálatot igényel.

M. 131. a) Vizsgáljuk a hurok mozgását egy c sebességgel mozgó koordináta-rendszerből! Ebben a rendszerben az R sugarú hurok darabkái egyenletes körmozgást végeznek. Mivel egy kicsiny $\Delta\alpha$ középponti szögű, $R\Delta\alpha$ hosszú, $\lambda R\Delta\alpha$

tömegű kótdarabka gyorsulása c^2/R , a kótdel feszítettségből adódó erő pedig $F\Delta\alpha$ (lásd a 129. feladat megoldását), a Newton-féle mozgásegyenlet szerint

$$F\Delta\alpha = \lambda R\Delta\alpha \frac{c^2}{R},$$

vagyis a „hurokhullám” terjedési sebessége $c = \sqrt{F/\lambda}$, ami megegyezik egy megfeszített, hajlékony kótdel kis amplitúdójú transzverzális hullámainak terjedési sebességével.

b) Az R sugarú hurok gördülési körfrekvenciája (szögsebessége) $\omega = c/R$, a tömege pedig $m = 2\pi R\lambda$. Ezekkel a mennyiségekkel kifejezhetjük a hurok által szállított energiát:

$$E = E_{\text{haladási}} + E_{\text{forgási}} = \frac{1}{2} \cdot (2\pi R\lambda) \cdot (c^2 + R^2\omega^2),$$

ami ilyen alakban is felírható:

$$E(\omega) = 2\pi Fc \cdot \frac{1}{\omega} = K \frac{1}{\omega}.$$

A $K = 2\pi Fc$ mennyiség a kótdelre, illetve annak feszességére jellemző állandó. Nyilván egyszerre több (n darab) hurok is gerjeszthető a kótdelen, ezek energiája

$$E_n(\omega) = n \cdot K \cdot \frac{1}{\omega} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Hasonló módon számítható ki a hurok (vagy hurkok) által szállított impulzus:

$$p_n(\omega) = n \cdot (2\pi R\lambda) \cdot c = n \cdot K \cdot \frac{1}{c\omega} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

illetve a perdület is:

$$N_n(\omega) = \pm n \cdot (2\pi R\lambda) \cdot Rc = \pm n \cdot K \cdot \frac{1}{\omega^2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

(Ez utóbbinál a kétféle előjel a kótdel „felett”, illetve a kótdel „alatt” haladó huroknak, vagyis a kétféle „polarizációnak” felel meg.)

Látható, hogy a hurokgerjesztések által szállított energia, impulzus és impulzusmomentum (perdület) – amennyiben csak kör alakú gerjesztéseket engedünk meg és egy adott frekvenciára szorítkozunk, – bizonyos elemi egységek (kvantumok) egész számú többszöröse, és ezen (frekvenciafüggő) kvantumok között fennállnak a következő összefüggések:

$$E(\omega) = c \cdot p(\omega) = \omega \cdot N(\omega).$$

Megjegyzés. Nem nehéz ráismerni, hogy ugyanezek az összefüggések teljesülnek a foton

$$E_{\text{foton}} = \hbar\omega; \quad p_{\text{foton}} = \hbar\frac{\omega}{c}; \quad N_{\text{foton}} = \pm\hbar$$

kvantumaira is! Ezt a formai analógiát természetesen nem szabad nagyon komolyan venni, és azt hinni, hogy „ilyen” a foton. Arra azonban felhasználható ez a hasonlóság, hogy rámutassunk: már a klasszikus fizikában is találunk olyan „darabos” (diszkrét adagokban változtatható) objektumot, amely bonyolultabb ugyan a tömegpontnál, de azért elég szemléletes, és amelynek gerjesztéseihez meghatározott energia, lendület és perdület tartozik.

M. 132. A 129. feladat megoldása szerint egy hosszegységgenként λ tömegű, v sebességű hajlékony kötelet (láncot)

$$F = \lambda v^2$$

erő feszít akkor, ha más testekkel nem érintkezik. Ez a feltétel a csigán átvett láncnál akkor teljesül, amikor az egyre gyorsabb mozgás miatt éppen elválnak a csigától, éppen lerepül róla.

Jelöljük a lánc elmozdulását x -szel, a bal, illetve jobb oldali rész gyorsulásának nagyságát pedig a -val. A két darab mozgásegyenlete:

$$F - \lambda \left(\frac{L}{2} - x \right) g = \lambda \left(\frac{L}{2} - x \right) a,$$

$$\lambda \left(\frac{L}{2} + x \right) g - F = \lambda \left(\frac{L}{2} + x \right) a.$$

(Felhasználtuk, hogy a csiga mérete kicsi, így a lánc félkör alakú darabkájának tömege a lánc egészének tömege mellett elhanyagolható.)

A lánc sebességét az energiamegmaradás tételéből határozhatjuk meg. A kezdeti (elhanyagolhatóan kicsi sebességű) helyzethez viszonyítva a helyzeti energia annyival csökken, mintha egy x hosszúságú láncdarab x -szel mélyebbre került volna:

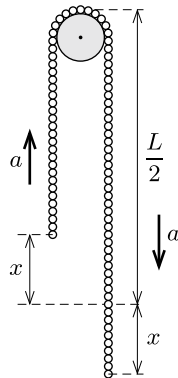
$$\lambda x^2 g = \frac{1}{2} \lambda L v^2.$$

A fenti egyenletekből az elmozdulás és a sebesség kiszámítható:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}} L \approx 0,35 L, \quad v = \frac{\sqrt{Lg}}{2}.$$

A lánc tehát akkor válik el a csigától, amikor a teljes hosszának kb. 15%-a még felfelé mozog, és a sebessége is kisebb annál, amennyit az energiátételből naivan $x = L/2$ helyettesítéssel kapnánk. Ez a hibás érték a következő lenne:

$$\sqrt{\frac{Lg}{2}} \approx 0,71 \sqrt{Lg}.$$



Megjegyzés. Érdekesen alakul a lánc további mozgása. Miközben a lánc tömegközéppontja szabadon esik lefelé, a csigától elvált hurok fölfelé kezd emelkedni, még hozzá egyre nagyobb sebességgel. A felfelé mozgó, egyre kisebb tömegű láncdarab sebessége (elvben) végtelenhez tart. (Ténylegesen a láncszemek és a csiga véges mérete, továbbá a közegellenállás miatt nem nő korlátlanul a sebesség.) A felfelé mozgó láncdarab mozgási energiája – a nagyon gyorsan növekvő sebessége ellenére – véges nagyságú marad, mert a tömege gyorsabban fogy, mint amilyen ütemben a sebessége növekszik. Ez a jelenség játszódik le a „karikás ostor” pattintásakor is: az ostor bizonyos (egyre kisebb hosszúságú) része egyre nagyobb sebességgel mozog, mígnem eléri a hangsebességet, és éles csattanással hangrobbanást hoz létre.

M. 133. Jelöljük L -vel az asztal magasságát, ami éppen megegyezik a lánc teljes hosszával (a feladatban $L = 1$ m). Tekintsük azt a pillanatot, amikor a lánc függőleges, mozgásban lévő része x hosszúságú. Jelöljük m -mel ennek a darabnak a tömegét, és írjuk fel rá a dinamika alaptörvényét! Figyelembe kell vennünk, hogy most m nem állandó, hanem időben változik, ezért:

$$mg = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} v.$$

Átrendezés után a következőt kapjuk:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = mg - \frac{\Delta m}{\Delta t} v.$$

A bal oldalon $\Delta v/\Delta t = a$ miatt a pillanatnyi tömeg és a gyorsulás szorzata áll. A jobb oldalon felhasználhatjuk, hogy $\Delta m = (m/x)\Delta x$, így

$$ma = mg - \frac{m}{x} \frac{\Delta x}{\Delta t} v.$$

Mivel $\Delta x/\Delta t = v$, m -mel való osztás után kapjuk:

$$(1) \quad a = g - \frac{v^2}{x}.$$

Ez az egyszerű összefüggés jelzi, hogy a lánc mozgásban lévő részének gyorsulása g -nél mindenképp kisebb, és mivel v és x is változik időben, feltehetően a gyorsulás sem marad állandó. Ennek ellenére próbáljuk ki, hátha mégis állandó a gyorsulás, hiszen lehet, hogy a v^2/x kifejezés „véletlenül” nem függ az időtől! Próbaképpen helyettesítsük be v és x helyére a zérus kezdősebességű, egyenletesen gyorsuló mozgás megfelelő képleteit:

$$(2) \quad \frac{v^2}{x} = \frac{(at)^2}{(a/2)t^2} = 2a = \text{állandó, ha } a = \text{állandó!}$$

A lánc tehát *mozoghat* egyenletesen gyorsuló mozgással. Mivel a Newton-féle mozgásegyenletek és a kezdőfeltételek egyértelműen meghatározzák a testek mozgásának időbeli lefolyását, emiatt állíthatjuk, hogy az elhanyagolhatóan kicsi kezdősebességgel induló lánc *ténylegesen* így szalad le a lyukon át. Számítsuk ki a

gyorsulását! (1) és (2) alapján:

$$a = g - 2a, \quad \text{azaz} \quad a = \frac{g}{3}.$$

Ha a lánc t_1 idő alatt fut le az asztalról, akkor a legelöl futó láncszem t_1 idő alatt $g/3$ gyorsulással L utat tesz meg, ezért a lánc eleje

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{6L}{g}} = 0,78 \text{ s}$$

idő alatt ér le a földre.

Mennyi idő alatt ér le a lánc vége? Abban a pillanatban, amikor az első láncszem éppen eléri a földet, az egész lánc függőleges, és a sebessége

$$(3) \quad v_1 = at_1 = \frac{g}{3} \sqrt{\frac{6L}{g}} = \sqrt{\frac{2}{3}} Lg = 2,56 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ettől kezdve a lánc mozgásban lévő része szabadon esik. A legfelső láncszem v_1 kezdősebességgel, g gyorsulással L utat tesz meg. Jelöljük az esési idejét t_2 -vel, így felírhatjuk:

$$L = v_1 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2.$$

Ha ebbe behelyettesítjük v_1 -nek a (3) egyenletben kapott értékét, majd megoldjuk a t_2 -re adódó másodfokú egyenletet, a következőt kapjuk:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L}{3g}} = 0,26 \text{ s} \quad \left(= \frac{t_1}{3} \right).$$

Ez a láncvég tehát a folyamat kezdetétől számítva

$$t_1 + t_2 = \frac{4}{3} t_1 = 1,04 \text{ s}$$

múlva fog földet érni.

Megjegyzések. 1. A feladat szövege szerint „a súrlódás és a légellenállás elhanyagolható”, ezért *tévesen* azt gondolhatnánk, hogy a lánc mechanikai energiája a lecsúszása során (de még a földetérése előtt) állandó marad. Ebben az esetben arra a v_1 sebességre, amivel a lánc alsó vége eléri a földet, fennállna:

$$\frac{1}{2} M v_1^2 = M g \frac{L}{2},$$

mivel a lánc tömegközéppontja $L/2$ -vel van mélyebben abban a pillanatban, amikor az egész lánc függőlegesen mozog (M -mel a lánc össztömegét jelöltük). A fenti összefüggés azonban *nem helyes*! Ha behelyettesítjük v_1 helyébe a helyes megoldásban kapott értéket, ezt kapjuk:

$$\frac{1}{2} M v_1^2 = \frac{1}{2} M \left(\sqrt{\frac{2}{3}} Lg \right)^2 = M g \frac{L}{3} < M g \frac{L}{2}.$$

Vajon hová tűnt, mikor vett el a lánc mechanikai energiájának egy része? Amikor egy-egy láncszemet a már mozgó másik láncszem leránt az asztalról, rugalmatlan ütközés történik. Az egymást követő rugalmatlan ütközések során disszipálódik a kezdeti mechanikai energia bizonyos hányada.

2. A közölt helyes megoldással azonos eredményre vezet az a gondolat is, hogy az M össztömegű lánc $(M/L)\Delta s$ tömegű darabkáját Δt idő alatt v sebességre gyorsítja fel a lánc v sebességgel mozgó $m = (M/L)x$ tömegű része, amikor „magával rántja” az asztalról. A felgyorsításhoz szükséges erő (átlagos) nagysága:

$$\frac{(M/L) \cdot v \cdot \Delta s}{\Delta t} = \frac{M}{L} v^2.$$

Ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányú erőt fejt ki a felgyorsuló láncszem („láncdarabka”) a már mozgó, m tömegű részre, így felírhatjuk:

$$ma = mg - \frac{M}{L} v^2.$$

Behelyettesítve az $m = (M/L)x$ kifejezést, megkapjuk az eredeti gondolatmenet során adódó összefüggést:

$$a = g - \frac{v^2}{x}.$$

3. Feltételezve, hogy az M tömegű lánc n darab láncszemből áll, ahol két láncszem közötti lazaság (szabad elmozdulás) $\varepsilon = L/n$, a fenti helyes eredmény $n \rightarrow \infty$ határértékben adódik.

4. Felsőbb matematikai módszerekkel megadható az

$$a = g - \frac{v^2}{x}$$

differenciálegyenlet teljes megoldása $t = 0$, $v = 0$, $x = x_0$ kezdőfeltételek ($x_0 \ll L$) esetén. Az eredmény:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{3}gx \left(1 - \frac{x_0^3}{x^3}\right)},$$

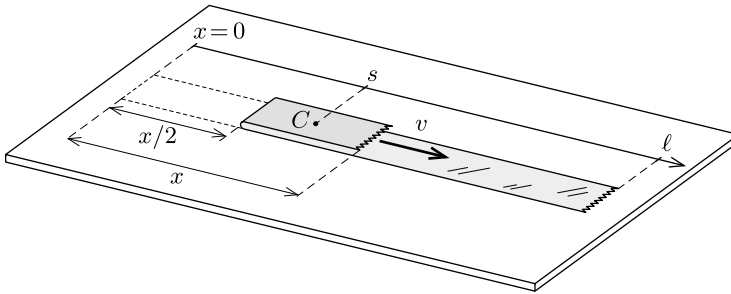
az út-idő függvény pedig így számítható ki:

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)}.$$

A megoldás $x \gg x_0$ esetén egyre jobban közelít a heurisztikusan talált $a = g/3 =$ állandó-nak megfelelő $v(x) = \sqrt{2gx/3}$ és $x(t) = gt^2/6$ függvényekhez.

M. 134. Jelöljük a szalag meghúzott végének pillanatnyi elmozdulását x -szel (lásd az *ábrát*), a hajlat elmozdulása ekkor $x/2$, a mozgó rész C középpontjának elmozdulása pedig $s = \frac{3}{4}x$. Ezek szerint a középpont sebessége

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = 7,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$



Megjegyzés. A szalag impulzusa (ami megegyezik a mozgásban lévő részének impulzusával) *nem* kapható meg úgy, hogy a mozgásban lévő rész tömegközéppontjának sebességét megszorozzuk a mozgó rész sebességével! Ennek a furcaságnak az oka, hogy a szalag mozgásban lévő része *változó tömegű*.

Változó tömegű testek impulzusa többféle módon is kiszámítható, például úgy, hogy a testet kiegészítjük egy nagyobb, állandó tömegű rendszerrel, és ezen rendszer tömegközéppontjának sebességét megszorozzuk a rendszer teljes tömegével. Esetünkben ez az állandó m tömegű rendszer az egész szalag (melynek hosszát jelöljük ℓ -lel). A szalag tömegközéppontjának koordinátája az ábrán látható koordináta-rendszerben a mozgásban lévő $m(x) = mx/(2\ell)$ tömegű rész és a maradék (nyugalomban lévő) rész adataiból számítható:

$$x_{\text{tkp}} = \frac{\frac{1}{2}[\frac{x}{2} + x] \cdot m(x) + \frac{1}{2}(\frac{x}{2} + \ell) \cdot [m - m(x)]}{m} = \frac{\ell}{2} + \frac{x^2}{4\ell}.$$

Ennek idő szerinti deriváltja és az össztömeg szorzata:

$$p = m \frac{x\dot{x}}{2\ell} = m(x) \cdot v,$$

ami – mint az várható volt, – az egész rendszer impulzusával, egyúttal a mozgásban lévő rész impulzusával egyenlő.

M. 135. a) Határozzuk meg először a guriga sebességét a megtett út függvényében! Mivel a fecskendő mozgó részének tömege x út megtétele után

$$m(x) = M \left(1 - \frac{x}{L}\right),$$

a $v(x)$ sebességet az energiamegmaradás törvényéből számíthatjuk ki:

$$\frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2\right) \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2\right) \left(\frac{v}{r}\right)^2.$$

(A helyzeti energia változását és a sugár csökkenéséből adódó kicsiny függőleges irányú sebességet elhanyagoltuk.) Felhasználva a tömeg fogyásának ismert ütemét, a sebességre végül a

$$v(x) = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \frac{x}{L}}}$$

összefüggést kapjuk. Látható, hogy x növekedtével a sebesség egyre nő, a guriga tehát „előrefelé” gyorsul.

A fecskendő teljes kitekeredésének idejét a $v(x) = dx/dt$ függvényből integrálással kaphatjuk meg:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^T \frac{dx}{v(x)} = \frac{1}{v_0} \int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx = \frac{L}{v_0} \int_0^1 \sqrt{1 - u} du = \frac{2}{3} \frac{L}{v_0}.$$

Mivel a guriga egyre gyorsabban mozog, a kitekeredés ideje rövidebb, mint az egyenletes mozgásnak megfelelő idő, nevezetesen annak csupán *kétharmada*.

b) Az egyre fogyó tömegű, de egyre gyorsabban mozgó gurigából és az egyre hosszabb, mozdulatlan vízszintes részből álló rendszer nem tekinthető tömegpontnak, rá a dinamika alaptörvényét nem az egyszerű $F = ma$, hanem az általánosabb

$$\sum F_{\text{külső}} = \frac{d}{dt} p_{\text{összes}}$$

alakban alkalmazhatjuk (itt p a rendszer impulzusa).

A mozgó guriga, és ezzel együtt a rendszer teljes impulzusa

$$p(x) = m(x) \cdot v(x) = M \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot \frac{v_0}{\sqrt{1 - \frac{x}{L}}} = Mv_0 \sqrt{1 - \frac{x}{L}}.$$

Látható, hogy x növekedtével $p(x)$ egyre csökken (hiszen a mozgásban lévő tömeg mennyisége gyorsabban csökken, mint ahogy a sebessége növekszik), a rendszerre ható külső $F(x)$ erő tehát a mozgás irányával ellentétes, „visszafelé” mutató, a nagysága pedig

$$F(x) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dp(x)}{dx} v(x) = -\frac{Mv_0^2}{L} \frac{1}{2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)}.$$

M. 136. Kövessük végig, miként számolhatott Péter! A guriga (pillanatról pillanatra változó) tömege a megtett út függvényében:

$$m(x) = M \left(1 - \frac{x}{L}\right),$$

a sugara (a guriga keresztmetszetének területe és a tömeg arányosságából):

$$r(x) = R \sqrt{1 - \frac{x}{L}},$$

a vízszintes irányú sebessége (az energia megmaradásából)

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt} = v_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{L}}}.$$

(v_x számításánál felhasználtuk, hogy $R \ll L$ miatt a függőleges irányú sebesség sokkal kisebb, mint a vízszintes, emiatt a neki megfelelő energiajárulékot elhanyagolhatjuk.)

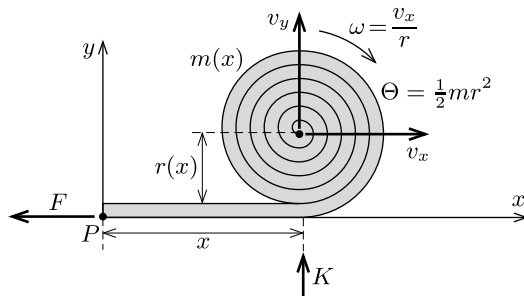
A guriga középpontjának függőleges irányú sebességkomponense:

$$v_y = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dx} \cdot v_x = -\frac{Rv_0}{2L} \frac{1}{1 - \frac{x}{L}}.$$

(A negatív előjel arra utal, hogy a középpont x növekedtével egyre mélyebbre kerül.) Az ebből számolható impulzuskomponens:

$$p_y = m(x) \cdot v_y(x) = -\frac{MRv_0}{2L}.$$

Mivel ez a mennyiség időben állandó, azt a – talán – meglepő eredményt kapjuk, hogy $K = 0$, vagyis a talaj (a guriga elhanyagolhatóan kicsi súlyán kívül) *nem fejt ki erőt* a tűzoltófecskendőre.



Eszerint a külső erők P pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka nulla, hiszen F hatásvonala átmegy P -n, K pedig nulla. Mi a helyzet a guriga perdületével? Ha helyes Péter számolása, a teljes impulzusmomentumnak időben állandónak kell lennie.

A P pontra vonatkoztatott perdület két részből tevődik össze: a guriga N_1 sajátperdületéből és a tömegközéppont mozgásából származó N_2 pályaperdületből. A sajátperdület (ha a guriga forgási irányát tekintjük pozitívnak, és kihasználjuk, hogy a guriga tisztán gördülése miatt $\omega = v_x/r$)

$$N_1 = \Theta\omega = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \omega = \frac{1}{2}mrv_x = \frac{1}{2}MRv_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Ez időben változó mennyiség, hiszen x változik. A pályaperdület

$$N_2 = p_x \cdot r - p_y \cdot x = mrv_x - xmv_y = MRv_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + MRv_0 \cdot \frac{x}{2L},$$

a rendszer teljes perdülete

$$N_1 + N_2 = MRv_0 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{L}\right) \neq \text{állandó}.$$

Ezek szerint nem érvényes a perdületváltásra vonatkozó egyenlet (perdülettel) a kitekeredő fecskendőre! – állítja Péter.

Pálnak más a véleménye: szerinte a guriga (és az egész rendszer) függőleges irányú impulzusát másképp kell számolni, mert $p_y \neq m(x) \cdot v_y$.

Valóban, az impulzust úgy is megkaphatjuk (és úgy biztosan helyesen kapjuk meg), hogy kiszámítjuk a teljes (M tömegű) rendszer tömegközéppontjának függőleges komponensét, majd képezzük ezen mennyiség M -szeresének időbeli változási sebességét. Az eredmény:

$$p_y^{(\text{helyes})} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m(x)r(x)}{M} \right] \cdot M = MRv_x \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{x}{L} \right)^{3/2} = -\frac{3}{2} \frac{MRv_0}{L}.$$

Ez háromszor nagyobb, mint a naiv módon számított $m \cdot v_y$ mennyiség!

Ezzel – a helyesen számolt – impulzussal a pályaperdület

$$N_2^{(\text{helyes})} = MRv_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + MRv_0 \cdot \frac{3x}{2L},$$

a rendszer teljes impulzusmomentuma pedig

$$N_1 + N_2^{(\text{helyes})} = \frac{3}{2} MRv_0 = \text{állandó}.$$

Megnyugodhatunk, a gurigára (erre a változó tömegű testre) is érvényes a perdülettel, csak éppen helyesen (jóllehet szokatlan módon) kell számolnunk a rendszer impulzusát, és vele együtt a pályaperdületet.

Megjegyzések. 1. A helyesen számolt függőleges impulzus is időben állandó, tehát Péter következtetése, miszerint $K = 0$, helytálló.

2. A guriga vízszintes mozgásának tanulmányozásánál a $p_x = m(x) \cdot v_x(x)$ képletet alkalmazta Péter is és Pál is, pedig – mint láttuk – a változó tömegű rendszereknél ez nem biztos, hogy igaz. Szerencsére azonban az eredmény helyes, ez Pál módszerével (az egész rendszer tömegközéppontjának x komponensét az idő szerint deriválva) belátható.

M. 137. A homok nagyjából egyenletes sebességgel pereg lefelé, emiatt a homokóra T működési ideje a teljes homokmennyiség H^3 térfogatával arányos. (Mivel csak nagyságrendi becslést akarunk adni, a kúp és a kocka térfogata közötti különbséget nem vesszük figyelembe.) A lepergés ideje függhet még a g nehézségi gyorsulástól, valamint a nyílás d átmérőjétől és a homok ϱ sűrűségétől:

$$T \approx H^3 \cdot f(g, d, \varrho).$$

A keresett f függvénynek arányosnak kell lennie g négyzetgyökének reciprokával, csak így kaphatunk másodperc dimenziójú végeredményt (hiszen a többi mennyiség mértékegységében nem szerepel az idő). Hasonló megfontolással adódik, hogy T nem függhet ϱ -tól, a d átmérőnek pedig a $(-5/2)$ -ik hatványával arányos:

$$T \approx \sqrt{\frac{1}{d^5 g}} H^3.$$

Az arányossági tényező dimenziótlan szám, és mivel „semmitől nem függ”, várhatóan 1 nagyságrendű.

Vegyünk fel konkrét, reális adatokat! Ha például h néhány centiméter, d pedig milliméteres érték, akkor T -re néhány perc adódik, és ez valóban az ilyen méretű homokórák működési idejének nagyságrendje.

Megjegyzés. Elvben szerepelhetne a képletben a homokszemek átlagos átmérője is. Ez azonban általában sokkal kisebb, mint a többi méret, ezért (a homokot alkotó atomok méretéhez hasonlóan) nem kap szerepet a dimenzionális megfontolásban. A dimenzióanalízis módszerének legkényesebb pontja annak eldöntése, hogy a vizsgált jelenség szempontjából melyek a *lényeges* paraméterek, és melyek azok, amelyek *nem* fontosak.

M. 138. $\Delta t = 1$ s alatt $\Delta m = 50$ kg homok $v = 1$ m/s sebességre tesz szert, a vízszintes irányú lendületváltozása tehát $\Delta p = \Delta m \cdot v = 50$ kg m/s. Ezek szerint a homokot

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = 50 \text{ N}$$

erőnek kell felgyorsítania. A motor által végzett munka – ha csak a homok felgyorsítását számítjuk – másodpercenként 50 J, azaz a motor teljesítménye legalább 50 W.

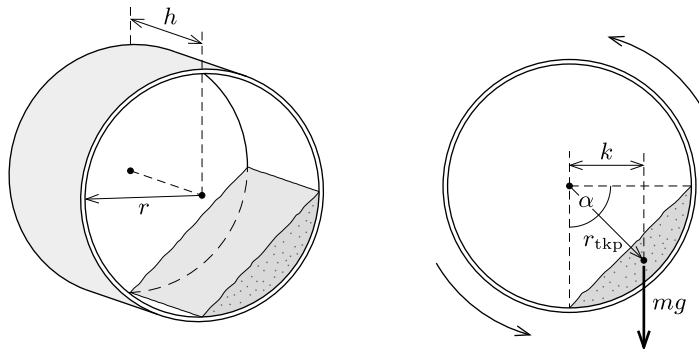
A homok függőleges irányú impulzusát a szállítószalagra érkezésekor elveszíti. (Emiatt függőlegesen lefelé a súlyánál nagyobb erővel nyomja a szalagot. Az esési magasság számszerű értéke a továbbiak szempontjából érdektelen.) A szalagra esett és lefékeződött homok vízszintesen felgyorsul, a mozgási energiáját a szalag megnöveli. A homok mozgási energiája $\Delta t = 1$ s alatt $\Delta m v^2/2 = 25$ J-lal növekszik. A motor teljesítményének tehát csak a fele (25 watt) fordítódik a homok mozgási energiájának növelésére, a többi súrlódási munka formájában disszipálódik.

Megjegyzés. A teljesítményviszonyokat a súrlódási munkák összehasonlításával is megérthetjük. A homok vízszintes átlagsebessége a felgyorsulása közben $v/2$, így a homokra ható $F = 50$ N nagyságú súrlódási erő teljesítménye $F \cdot v/2 = 25$ W. A v sebességű futószalagra eközben $-F$ erő (a súrlódás ellenereje) hat, ennek teljesítménye $-Fv = -50$ W. Ahhoz, hogy a futószalag sebessége ne változzon a -50 W teljesítményű fékezés hatására, a motorjának 50 W teljesítményt kell leadnia. A homok felgyorsítására tehát valóban a motor teljesítményének a fele jut.

M. 139. Ha a henger elég lassan forog (a feladatban 2 másodperc alatt fordul körbe, és ez elég lassúnak tekinthető), akkor a homok a hengerben valamennyire „felmászik” a forgás irányának megfelelő oldalon, és közelítőleg egy hengerszelet térfogatát tölti ki (lásd az *ábra* bal oldalát).

A hőmérséklet változását a homok m tömege, c fajhője és a rajta végzett súrlódási munka ismeretében tudnánk meghatározni: $\Delta T = W_{\text{súrl}}/c \cdot m$. A homok tömege adott ($m = 100$ kg), fajhőjét táblázatból (a hozzá hasonló anyagok, pl. a kvarcüveg vagy a porcelán adatainak felhasználásával) J/(kg K) egységekben 700–800 közötti értékre becsülhetjük.

A homok mozgásának részletes leírása (és ennek ismeretében a súrlódási munka kiszámítása) reménytelenül bonyolult feladat lenne. Szerencsére erre nincs szükség! Elegendő azt észrevenni, hogy az egyenletesen forgatott hengerben a homok előbb-utóbb állandósult (stacionárius) állapotba kerül. A homok egyes darabkái mozognak (áramlanak) ugyan, de a homok egésze olyan alakot vesz fel, amelynek határa időben nem változik. Emiatt a homok tömegközéppontja mindig ugyanott, a henger forgástengelyétől vízszintes irányban valamekkora k távolságra helyezkedik el (lásd az *ábra* jobb oldalát).



A homok belső energiájának növekedése (azaz a súrlódási erők munkája) megegyezik a henger egyenletes forgatása során végzett munkával, ez utóbbi pedig a hengerre kifejthető $mg \cdot k$ forgatónyomatéknak és a henger $\Delta\varphi$ szögelfordulásának szorzatával egyenlő:

$$W_{\text{súrl}} = mgk \cdot \Delta\varphi.$$

A 10 perc alatti szögelfordulás

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot 0,5 \text{ s}^{-1} \cdot 600 \text{ s} = 1885 \text{ rad},$$

a nehézségi erő nagysága pedig

$$mg = 100 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 981 \text{ N}.$$

Hátravan még a nehézségi erő k karjának kiszámítása. Becsüljük meg először a tömegközéppont és a forgástengely r_{tkp} távolságát! Felhasználjuk, hogy egy h hosszúságú, r sugarú henger α nyílásszögű szeletének térfogata

$$(1) \quad V = \frac{1}{2}hr^2(\alpha - \sin\alpha).$$

Jelen esetben $h = 10 \text{ dm}$, $r = 5 \text{ dm}$. A hengerben lévő homok térfogatát a tömegéből és $\varrho = 1,4 \text{ kg/dm}^3$ -nek becsült sűrűségéből is meghatározhatjuk:

$$(2) \quad V = \frac{m}{\varrho} \approx 70 \text{ dm}^3.$$

(A homok sűrűsége a homok összetételétől, „lazaságától” és nedvességtartalmától is függ, de mindenképpen kisebb, mint a tömör kvarc táblázatban megtalálható $2,65 \text{ kg/dm}^3$ -es sűrűsége.) A térfogat (2) becsült értékét (1)-be helyettesítve, majd az α -ra vonatkozó transzcendens egyenletet numerikusan megoldva $\alpha \approx 90^\circ$, illetve $r_{\text{tkp}} \approx 4 \text{ dm}$ adódik.

Vajon hogyan helyezkedik el a homokkal kitöltött hengerszelet síkja a henger tengelyén átmenő függőleges síkhoz képest? Mindennapi tapasztalatból (homokozó, homokóra) tudjuk, hogy a (száraz) homokból kb. 45° -os „rézsűszög” alakítható ki, ezért jogosan tekinthetjük úgy, hogy az állandósult mozgású homokgörgeteg legfelső pontja jelen esetben is a henger tengelyével kb. azonos magasságba kerül. Emiatt a keresett erőkar nagysága

$$k \approx r_{\text{tkp}} \cdot \sin 45^\circ \approx 2,8 \text{ dm},$$

a súrlódási munkára pedig mintegy 520 kJ -t kapunk. Ezt felhasználva és a homok fajhőjét 800 J/(kg K) -nek véve kapjuk:

$$\Delta T \approx 6,5^\circ \text{C}.$$

Mivel a homok sűrűsége és fajhője is mintegy 10%-ra határozatlan mennyiség, a homok dinamikus rézsűszöge is rejt ekkora bizonytalanságot, helyesnek tekinthetünk minden olyan becslést, amely mintegy 20%-kal tér el ΔT fenti értékétől, vagyis 5 és 8 fok közé esik.



Folyadékok és gázok mechanikája

M. 140. a) A vas sűrűsége 7,8-szerese a víz sűrűségének, ezért az 1 dm^3 -es vaskocka tömege 7,8 liter víz tömegével egyezik meg. Arkhimédész törvénye szerint a kockára ható felhajtóerő nagysága éppen 1 liter víz súlyával egyenlő, ezért a zsineget $7,8 - 1 = 6,8$ liternyi víz súlyával megegyező erő feszíti. Ez a zsinegben ébredő erő tart egyensúlyt a vödörben lévő vízre ható nehézségi erővel és a kockára ható felhajtóerő ellenerejével, így a vödörben 5,8 liter víz van. (Valójában ennél egy kicsit kevesebb, hiszen a „könnyű műanyag vödörnek” is van súlya.)

b) Ha a víz mennyiségét növeljük, a vödör lesüllyed, a vaskocka pedig felemelkedik. Ha a vödörbe öntött „kevés víz” nem több 2 liternél, akkor a vaskocka nem tud teljesen kiemelkedni a vízből, hanem annak felszínén „úszik”. (Ellenkező esetben a kocka egészen a csigáig emelkedik, ahol végül megakad.)

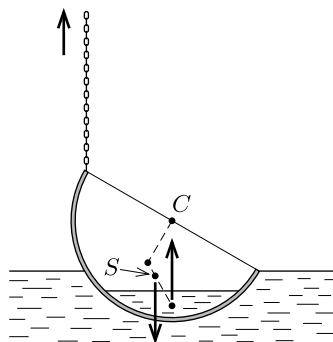
c) Ha a vödörben csökken a víz mennyisége, akkor a vödör felemelkedik, a vaskocka pedig lesüllyed annak fenekére. Ez az egyensúlyi állapot a víz teljes elpárolgása után is fennmarad, ekkor a zsineget feszítő erő közelítőleg a vaskocka súlyának felével lesz egyenlő.

M. 141. Tétélezzük fel egy pillanatra, hogy az üst C középpontja ugyanolyan magasan marad, mint ahol eredetileg volt (lásd az *ábrát*). Ekkor az üst csak elfordul a C pont körül (esetleg oldalirányban is elmozdul), de nem merül mélyebben vízbe, mint korábban. Ilyen esetben a láncsal ellentétes oldalon az üst pereme éppen a víz színéig süllyedne le, és a víz befolyhatna az üstbe. Megmutatjuk, hogy ez *nem* fordulhat elő.

A feltételezett helyzetben az üstre ható felhajtóerő ugyanakkora marad, mint korábban volt, tehát az üst és a halászlé együttes súlyával egyezik meg. Eszerint a lánc nem fejthet ki erőt az üstre. Ugyanakkor az elfordított helyzetben az üst és a halászlé közös S tömegközéppontja már nem lesz rajta a felhajtóerő hatásvonalán, a forgatónyomatékok egyensúlya tehát csak úgy teljesülhet, ha a lánc húzza felfelé az üstöt.

A két, egymásnak ellentmondó követelmény azt mutatja, hogy hibás volt a feltevésünk. Az üst geometriai középpontja nem maradhat helyben, hanem megemelkedik (hiszen feszes lánc esetén már kisebb felhajtóerő is elegendő). Ez viszont annyit jelent, hogy az üst pereme még a legmélyebb pontjánál sem kerülhet a víz színe alá!

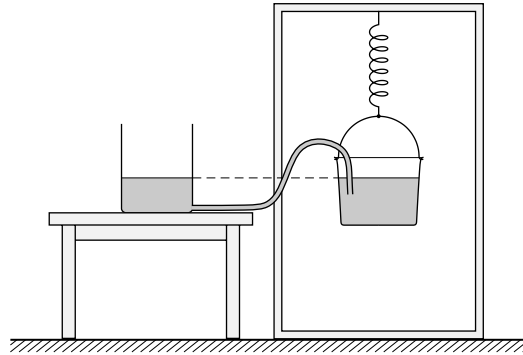
Meg kell még fontolnunk a halászlé esetleges kiömlésének lehetőségét is. Ez akkor következhetne be, ha eredetileg magasabban állna az üstben a halászlé, mint



a tó vízszintje, vagyis ha a halászlé a víznél kisebb sűrűségű lenne. Ez azonban reális körülmények között nem áll fenn.

M. 142. A szappanbuborék lebeg, tehát a benne lévő hélium, illetve metán tömege és a buborék falának tömege éppen megegyezik a kiszorított levegő tömegével. Mivel a hélium sűrűsége kisebb, mint a levegő sűrűségének fele, a hélium tömege kisebb, mint a kiszorított levegő tömegének fele. Ezzel szemben a metán sűrűsége nagyobb, mint a levegő sűrűségének fele, tehát a metán tömege nagyobb, mint a kiszorított levegő tömegének a fele. Ezek szerint a héliummal töltött buborék fala nehezebb, a metánnal töltött buborékoké pedig könnyebb, mint a buborékokban lévő gáz.

M. 143. Rögzítsünk egy könnyen nyújtható rugót a fekete doboz tetejéhez, és a rugó másik végére akasszunk egy vödört. A dobozba bevezetett csövet – egy hajlékony csatlakozón keresztül – vezessük be a vödörbe.



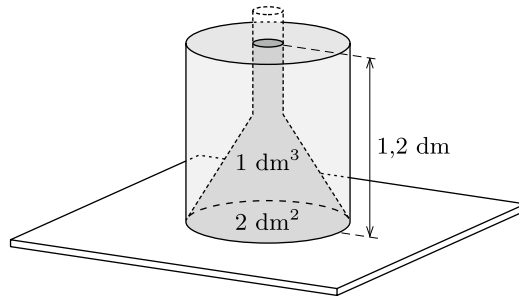
Ha az edénybe egy kevés vizet töltünk, annak egy része átfolyik a vödörbe, a rugó a megnövekedett súly hatására jobban megnyúlik, és a vödör egy keveset lesüllyed. Ha ez a süllyedés nagyobb, mint a vödörbe került víz magassága, akkor a vödörben lévő víz szintje a fekete doboz aljához képest lesüllyed, és ugyanezt kell tennie az edényben lévő víz szintjének is (hiszen közlekedőedényről van szó). A folyamat megfordítható: ha az edényből kimerünk valamennyi vizet, akkor a vízszint megemelkedik!

M. 144. Gondolatban vegyük körül tölcserűt egy, a tölcser aljával megegyező alapterületű hengerrel, majd töltsünk a hengerbe az *ábra* szerint annyi vizet, hogy éppen a tölcseren belüli víz szintjéig érjen. Ekkor a tölcserűt a belsejében elhelyezkedő víz ugyanakkora erővel nyomja felfelé, mint amekkora erővel a rajta kívül lévő víz nyomja lefelé.

A tölcserű súlyának tehát legalább akkorának kell lennie, mint a tölcseren kívül elhelyezkedő víz súlya. Ennek a víznek a térfogata

$$1,2 \text{ dm} \cdot 2 \text{ dm}^2 - 1 \text{ dm}^3 = 1,4 \text{ dm}^3,$$

azaz 1,4 kg tömegű tölcser éppen megfelelő. (A tölcser hallgatólagosan vékony falúnak tekintettük, de a végeredmény ettől függetlenül is helyes.)



M. 145. A félgömbhéjra kifejtett erőnek két erővel kell egyensúlyt tartania: a félgömbhéj súlyával, illetve a folyadék hidrosztatikai nyomásából származó erővel. Számítsuk ki ezen erők vízszintes és függőleges komponenseit!

A függőleges irányban ható erők: a félgömbhéj mg súlya, illetve a folyadék $Mg = \frac{2}{3}R^3\pi\rho g$ súlya (a továbbiakban M -mel a folyadék tömegét jelöljük). Ezen két erő összegével megegyező nagyságú, felfelé irányuló az általunk kifejtendő külső erő F_f függőleges komponense:

$$F_f = (m + M)g.$$

Vízszintes irányban a folyadék éppen akkora erővel nyomja a félgömbhéjat, mint amekkorával a falat (hiszen a folyadékra ható összes erő eredője nulla). Ez utóbbi viszont az átlagos hidrosztatikai nyomás ($\rho g R$) és a kör területének szorzataként számítható ki. Az általunk kifejtendő erő vízszintes összetevőjének is ugyanekkorának kell lennie, tehát $F_v = R^3\pi\rho g$, ami a folyadék tömegével is kifejezhető:

$$F_v = \frac{3}{2}Mg.$$

A félgömbhéjra kifejtendő eredő erő ezek szerint

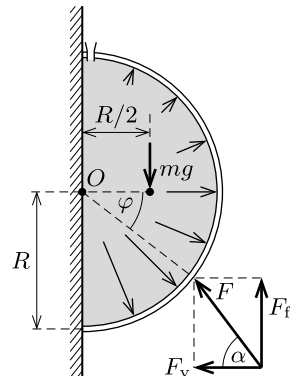
$$F = \sqrt{F_v^2 + F_f^2} = Mg\sqrt{\frac{9}{4} + \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2}$$

nagyságú, iránya pedig

$$\alpha = \arctg \frac{F_f}{F_v} = \arctg \frac{2(m + M)}{3M}$$

szöget zár be a vízszintessel (lásd az ábrát).

A szükséges külső erő támadáspontját a forgatónyomatékok egyensúlyának feltételéből lehet meghatározni. Tekintsük csak a félgömbhéjat. A félgömbhéjra ható erőket az ábrán látható módon vegyük fel: a keresett támadáspontban ható külső



erő vízszintes és függőleges összetevőit, a félgömbhéj súlyát (a súlypont a szimmetriatengelyen, a sugár felénél van), továbbá a félgömbhéjban lévő víz hidrosztatikai nyomásából származó erőket (melyek a félgömbhéj belső felületén oszlanak el). Vegyük észre, hogy a folyadék által a félgömbhéjra kifejtett erők olyanok, hogy a gömb O középpontjára vonatkoztatott eredő forgatónyomatékuk nulla (hiszen minden egyes kis felületdarabkára sugárirányú erőt fejt ki a folyadék). Ezért érdemes a forgatónyomatékokat a gömb középpontjára vonatkoztatni. A támadáspont helyét az ábrán látható φ szöggel jellemezzük. A forgatónyomatékok egyensúlyából a következő összefüggést kapjuk:

$$\left(1 + \frac{M}{m}\right) \cos \varphi - \frac{1}{2} - \frac{3M}{2m} \sin \varphi = 0.$$

Ez az egyenlet $\sin \varphi$ -re vagy $\cos \varphi$ -re másodfokú, ami a tömegek arányának ismeretében megoldható.

Megjegyzések. 1. Ha a félgömbhéj sokkal könnyebb, mint a benne lévő folyadék (vagyis $m \ll M$), akkor $F \approx 1,8Mg$ és $\alpha \approx \varphi \approx 33,7^\circ$. A másik ($m \gg M$) határesetben $F \approx mg$, $\alpha \approx 90^\circ$ és $\varphi \approx 60^\circ$.

2. Ha a vízfélgömböt és a félgömbhéjat egyetlen testnek tekintjük, és a forgatónyomatékok egyensúlyát erre a testre írjuk fel, a külső erő támadáspontjára természetesen a korábban számítottal megegyező eredményt kapjuk. Ebben az esetben a víz és a félgömbhéj súlyának forgatónyomatéka mellett a fal által a vízre kifejtett nyomóerők járulékat is figyelembe kell vennünk. *Vigyázat:* igaz ugyan, hogy a folyadék a falat akkora nagyságú erővel nyomja, mintha a nyomás mindenhol a kör középpontjánál mérhető értékű lenne, ez azonban még nem jelenti azt, hogy a folyadék által kifejtett eredő erő a körlap O középpontjában hatna. A körlap alsó felén nagyobb a nyomás, mint a felsőn, emiatt a kör vízszintes átmérőjére vonatkoztatott forgatónyomaték nem lehet nulla.

M. 146. A labdára (a nehézségi erőt az egyéb erőhatások mellett elhanyagolva) csak a víz által kifejtett erő és a lyuk pereme által kifejtett nyomóerő hat. Abban a pillanatban, amikor a labda éppen elválik a lyuktól, a nyomóerő nulla, tehát a víz nyomásából származó eredő erő is éppen nulla.

Számítsuk ki a víz által a labdára kifejtett erőt! (A külső légnyomásról megfeledkezhetünk, mert az a pingponglabda felületének minden pontjában ugyanakkora értékkel növeli meg a nyomás nagyságát, és így a labdára ható eredő erőt nem befolyásolja.) Jelöljük a labda vízbe merülő részének térfogatát V -vel, ez r és R ismeretében egyértelműen kiszámítható: $V = V(r, R)$. Ha a lyuk mentén, síkban képzeletben elvágnánk (és a vágás mentén befoltoznánk) a pingponglabdát, majd a csonkított labda alá is vizet engednénk, akkor a felhajtóerő nagysága Arkhimédész törvénye szerint

$$F_1 = \rho g \cdot V(r, R)$$

lenne, ahol ρ a víz sűrűsége. Tekintettel arra, hogy a lyuk alatt ténylegesen nincsen víz, az ott ható

$$F_2 = \rho gh \cdot r^2 \pi$$

erő „hiányzik”, tehát a víz által kifejtett erő h vízmagasság esetén:

$$F = \rho g \cdot V(r, R) - \rho g h \cdot r^2 \pi.$$

Látható, hogy elegendően nagy h esetén F negatív, ekkor a víz nyomásából származó erő függőlegesen lefelé mutat. Csökkentve h -t F egyre nagyobb lesz (feltételezve, hogy a labda teteje nem bukkan ki a vízből). A labda annál a h_0 vízmagasságnál emelkedik fel, amelynél $F = mg \approx 0$, vagyis amikor

$$h_0 = \frac{V(r, R)}{r^2 \pi}.$$

Táblázatból kikereshető képlet szerint a feladatban szereplő gömbszelet térfogata

$$V(r, R) = \frac{\pi}{3} \left[2R^3 + (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 - r^2} \right],$$

melynek felhasználásával

$$(1) \quad h_0 = \frac{2R^3}{3r^2} + \frac{2R^2 + r^2}{3r^2} \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Ne feledkezzük el arról, hogy a fenti képlet csak addig érvényes, amíg a labda tetejét ellepi a víz, vagyis amíg $h_0 > R + \sqrt{R^2 - r^2}$. Ezt az (1) képlettel összevetve a nyílás sugarára az $r < \sqrt{3}R/2$ korlátot kapjuk. Ha ez nem teljesül, vagyis a csökkenő vízszint elérheti a pingponglabda tetejét, és a víz által kifejtett erő még mindig *lefelé* mutat, akkor a továbbiakban $V(r, R)$ képlete módosul: nem gömbszelet, hanem egy gömbréteg térfogatát kell kiszámítanunk. A kritikus vízmagasságra ilyenkor

$$(2) \quad h_0 = 3\sqrt{R^2 - r^2}$$

adódik.

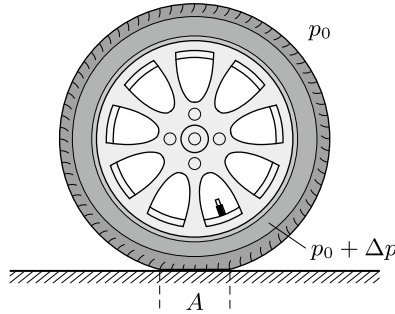
Eredményünket a $H = \sqrt{R^2 - r^2}$ paraméter segítségével is megfogalmazhatjuk. (H a pingponglabda középpontjának az edény aljától mérhető távolsága.) A kritikus vízmagasság:

$$h_0 = \begin{cases} \frac{2R^3 + H(3R^2 - H^2)}{3(R^2 - H^2)}, & \text{ha } H > R/2 \\ 3H, & \text{ha } H \leq R/2. \end{cases}$$

Megjegyzés. Ha a labda tömege nem hanyagolható el, akkor a víz „felhajtóerejének” és a labda súlyának egyenlősége határozza meg a kritikus vízmagasság értékét. Amennyiben a labda súlya nagyobb egy bizonyos értéknél (amely éppen egy H sugarú gömbben lévő víz súlyával egyezik meg), akkor a víz nem képes felemelni a labdát, bármekkora legyen is a h vízmagasság.

M. 147. Jelöljük a kerekben lévő levegő túlnyomását Δp -vel. (Az elterjedt szóhasználat szerint ezt a túlnyomást nevezik a kerék „nyomásának”, a külső légköri nyomást nem számítják hozzá.) Ha a gépkocsi egy kerékre eső súlya G , akkor

a kerék annyira lapul be, hogy a talajjal érintkező A felület és a Δp túlnyomás szorzata éppen G legyen.



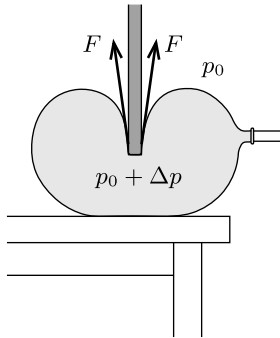
Növeljük meg a „nyomást” $4/3$ -szorosára! A talajjal érintkező felület ekkor $3/4$ -ére csökken, hiszen a kocsi súlya, tehát a $\Delta p \cdot A$ szorzat nem változik. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a talajjal érintkező felület alakja nem változik, csak lineáris mérete csökken minden irányban $\sqrt{3/4}$ -szeresére. A kormányt elforgatva a talajhoz szorított gumifelület elegendően nagy forgatónyomaték esetén megcsúszik. Gondolatban feloszthatjuk a behorpadt gumifelületet kicsiny darabkákra, és a teljes forgatónyomatékokat az egyes darabkákra ható „elemi” súrlódási erők forgatónyomatékainak összegeként számíthatjuk. A kerék felfújása után ezen darabkák mindegyike $\sqrt{3/4}$ -szer közelebb kerül a talajjal való érintkezési felület „középpontjához”, az elemi súrlódási erők karja tehát ugyanilyen arányban csökken. Mivel a behorpadt gumifelület egyes darabkáit a talajhoz nyomó erő nem változik (hiszen a felületük ugyanolyan arányban csökken, ahogy Δp növekszik), a darabkákra ható elemi súrlódási erők is ugyanakkorák maradnak, így a megcsúszáshoz szükséges forgatónyomaték $\sqrt{3/4} \approx 0,87$ -szerese lesz az eredetinek. A kormány elforgatásához szükséges erő tehát kb. 13%-kal lecsökken.

A fenti gondolatmenet során felhasználtuk, hogy a talajjal érintkező gumifelület méretarányosan változik. A valóságban ez nem egészen igaz! A gépkocsi gumibroncsát úgy alakítják ki, hogy a felfekvő felület keresztirányú mérete nagyjából ugyanakkora a „puha” guminál, mint a keményre felfújt kerék esetében; az A felület változása a hosszanti, nyomvonalal párhuzamos méret változásából adódik. Ha a kerék nagyon keskeny (vonalszerű) lenne, akkor a $3/4$ -szeres területcsökkenés $3/4$ -szeres lineáris méretváltozást, tehát 25%-os kormányerő-csökkenést eredményezne. A valóság a két szélsőséges eset, tehát a 13% és a 25% között, hozzávetőlegesen 20%-nál lehet.

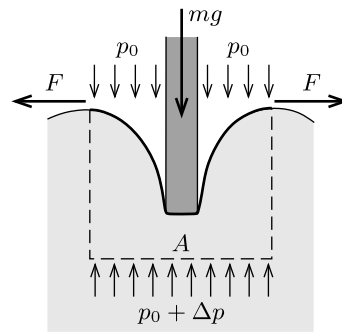
M. 148. Kezdetben a lufiban a túlnyomás 10 cm vízoszlop hidrosztatikai nyomásával egyezik meg. A vasrúd óvatos leengedése után akkor csordulna ki a víz a manométerből, ha a túlnyomás elérné az 50 „vízcentimétert”, azaz kb. 5 kPa-t.

Az 50 cm hosszú és 2 cm vastag hengeres vasrúd súlya 12 N. Ha ezt a súlyt a rúd keresztmetszetének területével elosztjuk (arra gondolva, hogy a rúd csak a végével nyomja a lufit), kb. 40 kPa-t kapunk, vagyis a víz kicsordulásához szükséges

túlnyomás sokszorosát. Ennek ellenére a víz mégsem csordul ki a manométerből! Ha ugyanis óvatosan engedjük a vasrudat a lufiba süllyedni, a lufi fala az 1. ábrán látható módon behorpad, és a rudat nemcsak a Δp túlnyomásból származó erő, hanem a megfeszülő gumiban ébredő F erők is tartják.



1. ábra



2. ábra

Megmutatjuk, hogy a lufiban a nyomás nem növekszik jelentősen, csak a lufi alakja változik meg. A Δp túlnyomást a 2. ábrán látható, A alapterületű, felül behorpadt hengeres térrész erőegyensúlyából becsülhetjük meg. Mivel most a gumiban ébredő erőnek függőleges összetevője nincs, az $mg = \Delta p \cdot A$ összefüggésből (az A alapterületet kb. 1 dm^2 -nek becsülve)

$$\Delta p = \frac{12 \text{ N}}{1 \text{ dm}^2} \approx 1,2 \text{ kPa}$$

adódik, ami az eredetinel csak 2 cm-rel nagyobb, 12 cm-es vízszintkülönbségnek felel meg. Eredményünk nem függ lényegesen az A terület becsült értékétől: fele-vagy harmadakkora területet beírva sem éri el a túlnyomás a víz kicsordulásához szükséges értéket.

Ez a becslés egybevág azzal a tapasztalattal is, hogy egy lufit „tüdővel” könnyen fel lehet fújni. (A tüdőnkben lévő túlnyomás a légköri nyomás néhány százalékának felel meg, különben a mellkasunk relatíve nagy felületére nagyon nagy erő hatna.)

M. 149. Ha egy folyadékot tartalmazó hengeres edényt egyenletes, ω szögsebességű forgásba hozunk, akkor a folyadék felszíne rövid idő után a földi homogén nehézségi erőterben forgásparaboloid alakot vesz fel (1. ábra). A folyadékfelszín síkmetszete (a „megforgatott parabola”) egyenlete az ábrán felvett koordináta-rendszerben

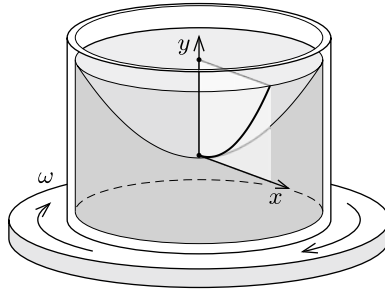
$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2.$$

Megjegyzés. A fenti összefüggést többféle módon is megkaphatjuk. Például úgy, hogy felismerjük: a forgó koordináta-rendszerben egy m tömegű folyadékdarabkára ható centrifugális erő kifejezése hasonló a Hooke-törvényben szereplő rugóerő képletéhez, de a

„rugóállandó” negatív, $D = -m\omega^2$. Ennek megfelelően a „centrifugális potenciális energia” $-m\omega^2 x^2/2$, amihez hozzáadva a gravitációs helyzeti energiát a teljes potenciális energiára

$$E_{\text{pot}} = -\frac{m\omega^2 x^2}{2} + mgy$$

adódik. A folyadék szabad felszínén a teljes potenciális energiának mindenhol ugyanakkorának kell lennie, ami a megadott parabola egyenletéhez vezet.



1. ábra

A feladat konkrét adatait megvizsgálva belátható, hogy a forgó folyadék felülete felveszi a forgásparaboloid alakot anélkül, hogy a folyadék széle a lombik nyakában egészen a gömbig felemelkedne. Felmerülhet azonban egy kérdés – és ez a kulcs a feladat helyes megoldásához –, hogy ha gondolatban meghosszabítanánk ezt a forgásparaboloidot egészen a gömbig, vajon nem „vágna-e bele” a gömbbe? Mert ha igen, akkor ott a gömbben, a forgásparaboloid alatt is lehetne víz!

Vegyünk egy, a lombik forgástengelyén átmenő síkmetszetet. Határozzuk meg annak az (ω szögsebességhez tartozó) parabolának a legmélyebb pontját, amely érinti a lombik gömbjének síkmetszeteként adódó kört. Legyen ez a pont h -val mélyebben, mint a kör középpontja, így a parabola egyenlete (a kör középéhez választva a koordináta-rendszer kezdőpontját)

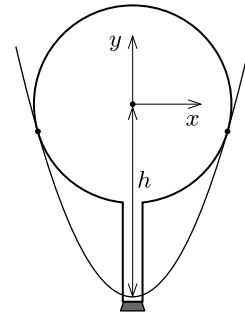
$$y + h = \frac{\omega^2}{2g} x^2,$$

a kör egyenlete pedig

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

ahol R a lombik gömbjének sugara. Ebből x^2 -et kifejezve és a parabola egyenletébe helyettesítve a kör és a parabola közös pontjainak y koordinátáira a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$y^2 + \frac{2g}{\omega^2} y + \frac{2gh}{\omega^2} - R^2 = 0.$$



2. ábra

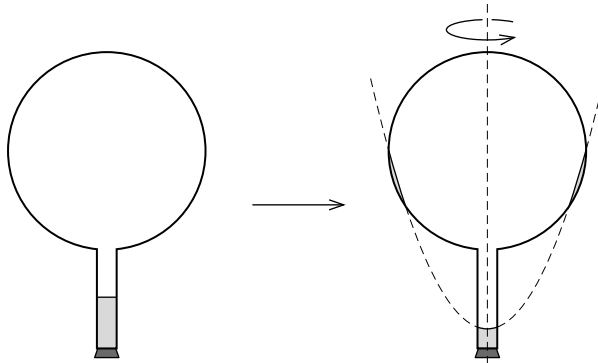
Amikor a parabola érinti a kört (2. ábra), a fenti egyenletnek csak egy gyöke lehet, tehát a diszkriminánsnak zérusnak kell lennie, és éppen ez ad feltételt a h

magasságra:

$$h = \frac{g}{2\omega^2} + \frac{\omega^2}{2g}R^2.$$

Behelyettesítve a $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\omega = 2\pi \cdot 3 \text{ s}^{-1}$, $R = 0,1 \text{ m}$ adatokat, h -ra $0,195 \text{ m} = 19,5 \text{ cm}$ adódik. A gömb sugara 10 cm , a nyak hossza ugyancsak 10 cm , együtt ez több, mint $19,5 \text{ cm}$.

A gömböt érintő paraboloid tehát a lefelé fordított lombik nyakának legalsó pontjánál fél centiméterrel feljebb halad. A feladat megoldásához tartozó paraboloid persze ennél az érintő paraboloidnál valamivel feljebb helyezkedik el, mégpedig úgy, hogy a gömblombik nyakában a paraboloid alatt maradó víz éppen annyival kevesebb az eredetileg ott lévő víznél, amennyi a gömbben, egy körbefutó keskeny sávban a paraboloid alá került.



3. ábra

De hogyan került oda a víz? A gömblombik felpörgetésekor talán odafröccsenhetett a víz, mégsem ez a probléma megoldása, hanem az, hogy a lombikban a cső nyakánál elpárolgó vízgőz egy része csapódik ki – megfelelő helyen – a lombik falára. Ennek a termodinamikai folyamatnak a hajtóereje pedig éppen a lombikban fellépő icipici nyomáskülönbség, ami a nehézségi erő és a forgás együttes hatása miatt alakul ki. Egy-egy forgásparaboloid mentén a víz a forgó koordináta-rendszerből nézve egyensúlyban van, hiszen éppen ez a feltétel határozza meg a felület alakját. Két különböző forgásparaboloidot összehasonlítva viszont a magasabban elhelyezkedő felület mentén nagyobb a víz fajlagos (tömegegységre eső) energiája, mint az alacsonyabban lévő felületnél. Egyensúlyi állapotban a víz felszínének ugyanazon a paraboloidon kell elhelyezkednie a lombik nyakában és a gömbben is, ha nem így lenne, a párolgás és a lecsapódás folyamata előbb-utóbb „megkeresné” az alacsonyabb összenergiájú állapotot.

Hosszú idő után tehát a víz a 3. ábrán látható vázlatos rajznak megfelelően helyezkedik el a lombikban.

Megjegyzés. A szokatlan jelenség első ránézésre eléggé hihetetlen, ezért könnyen azt gondolhatjuk, hogy a valóságban nem is következik be. „Ugyanúgy nem, mint ahogy az asztalon álló vizespohárból sem mászik ki a víz az asztalra, hiába lenne ott kisebb

az energiája!” – érvelhetünk. Nos, az érdekes az, hogy a víz onnan is kimászhat, még tökéletes hőmérsékleti egyensúly esetén is, éppen a meglévő piciny barometrikus nyomáskülönbség miatt, ami a pohárban lévő víz felszíne és az asztal szintje között fennáll. Letakarva egy üvegharanggal az asztalon álló pohár vizet, el is végezhető a kísérlet. Csak kissé sokáig kell várni! (Üvegharang nélkül is „kimászik” a víz a pohárból, de a szoba nagy légtere miatt sehol sem csapódik le, hanem telítetlen gőz formájában a levegőben marad.)

M. 150. A golyó süllyedése miatt pillanatról pillanatra változik a rendszer tömegeloszlása és emiatt a tömegközéppontjának helyzete. A tömegközéppont bizonyos t idő alatt

$$s = vt \cdot \frac{\rho_g V - \rho_m V}{M}$$

távolsággal tolódik el lefelé (ahol M a rendszer össztömege, $v = 1$ cm/s a golyó sebessége, $V = 1$ cm³ a golyó térfogata, $\rho_m = 2$ g/cm³ és ρ_g pedig rendre a méz és a golyó sűrűsége), hiszen úgy tekinthetjük, mintha a vt távolságra elmozdult acélgolyó helyet cserélt volna egy vele megegyező térfogatú „mézgolyóval”. A rendszer összipulzusa eszerint

$$p_{\text{összes}} = \frac{Ms}{t} = v\rho_g V - v\rho_m V.$$

A jobb oldal első tagja az acélgolyó impulzusa, a második tehát a mézé:

$$p_{\text{méz}} = -v\rho_m V = -2 \frac{\text{g cm}}{\text{s}}.$$

A negatív előjel arra utal, hogy a méz impulzusa függőlegesen felfelé irányul, nagysága pedig akkora, mint egy – az acélgolyóéval megegyező nagyságú sebességgel – felfelé mozgó mézgolyó impulzusa lenne.

M. 151. A tartályból, az edényből és a folyadékból álló rendszerre két külső erő hat: a nehézségi erő és a mérleg tányérjának nyomóereje; ez utóbbi nagyságát méri a mérleg. Amíg a csapot ki nem nyitjuk, a tömegközéppont nyugalomban van, ezért a nyomóerő nagysága a teljes nehézségi erővel egyezik meg. A továbbiakban a mérleg ettől eltérő, és időben is változó értékeket mutathat:

1. Közvetlenül a csap kinyitása után a folyadék egy része esni (gyorsulni) kezd lefelé, tehát a rendszer tömegközéppontja is gyorsul lefelé, emiatt a mérleg *kisebb* erőt mutat, mint az eredő nehézségi erő. Úgy is mondhatjuk: a rendszer kezdeti nulla lendülete megváltozik, lefelé irányuló eredő lendületre tesz szert, ezt az okozza, hogy a nehézségi erő nagyobb, mint a mérleg tányérjának nyomóereje.

2. Amikor a folyadék áramlása „állandósul” (tehát a tartályban és az edényben nagyon lassan mozgó folyadékot leszámítva az áramlási sebesség már nem változik), a tömegközéppont egyenletesen süllyed, nem gyorsul. Newton mozgástörvénye szerint ilyenkor a rendszerre ható külső erők eredője nulla, tehát a mérleg a *teljes* „súlyt” mutatja. Ez azért meglepő, mert az éppen szabadon eső folyadékmennyiség semmilyen kapcsolatban nincs a mérleggel, ennek ellenére a mérleg a

leeső folyadék tömegével arányos erőt is mér! A látszólagos ellentmondás feloldása: az edénybe becsapódó és ott lefékeződő folyadékmennyiség a szokásos súlyán felül még az időegység alatt átadott lendületének megfelelő erővel is nyomja az edény alját, és ez a többleterő éppen az esésben lévő folyadék „hiányzó” súlyával egyenlő.

3. A tartály kiürülésekor az addig lefelé irányuló összipulzus nullává válik, tehát a lendületvektor változása függőlegesen felfelé irányul. Ezt a nehézségi erőt meghaladó nyomóerő okozza, a mérleg tehát a tartály, a folyadék és az edény összes súlyánál *nagyobb* értéket mutat.

M. 152. Kicsiny Δt idő alatt az a gyorsulással induló folyadék szintje $\Delta h = a(\Delta t)^2/2$ értékkel süllyed, így a kiáramló folyadék tömege $\Delta m = \rho(D^2\pi/4)\Delta h$. A víz helyzeti energiája ezek szerint $\Delta m gh$ -val csökken. Ezalatt a folyadék egésze $v = a\Delta t$ sebességre gyorsul fel, a mozgási energiája tehát $\rho(D^2\pi/4)h \cdot v^2/2$ értékkel növekszik. (A kiáramló folyadék sebessége nagyobb ugyan a fenti értékénél, ezt azonban nem kell figyelembe vennünk, hiszen az egész víz mennyiségéhez képest kevés folyadékról van csak szó.)

A helyzeti és a mozgási energia megváltozása – az energiamegmaradás törvénye szerint – abszolút értékben egyenlő:

$$\frac{D^2\pi a}{4} \frac{(\Delta t)^2}{2} \rho gh = \frac{D^2\pi h \rho}{4} \frac{(a\Delta t)^2}{2},$$

ahonnan $a = g$ adódik.

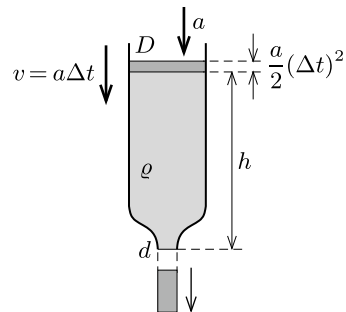
A folyadék egésze tehát (a cső szűkületén kifolyó, csekély mennyiségű víztől eltekintve) a kiáramlás kezdetekor szabadeséssel kezd el mozogni. A cső alsó végén kiáramló folyadék (az anyagmegmaradás törvénye értelmében) minden pillanatban $(D/d)^2$ -szer nagyobb sebességgel mozog, mint a víz felszíne, így a gyorsulása is ugyanilyen arányban nagyobb, mint g . (Ha például a kifolyónyílás átmérője a cső átmérőjének tizede, akkor a kiáramló víz kezdeti gyorsulása $100g$ lesz!)

Mennyi ideig igaz az, hogy a folyadék lényegében „szabadon esik”? A Torricelli-féle törvény szerint a folyadék kiáramlási sebessége $\sqrt{2gh}$, a vízfelszín süllyedési sebessége pedig $(d/D)^2\sqrt{2gh}$. Az áramlás megindulása és a (majdnem állandó) kifolyási sebesség beállása között eltelt τ időt nagyságrendileg a

$$g\tau \approx \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh}$$

összefüggésből becsülhetjük meg. Ha például $h = 20$ cm, és az átmérők aránya $1 : 10$, akkor $\tau \approx 0,002$ s, tehát igen rövid idő.

M. 153. Jelöljük x -szel azt az arányt, amely megmutatja, hogy a medence a teljes magasságának hányad részéig van vízzel töltve. (Ugyanez a szám mutatja meg az aktuális és a teljes víztérfogat arányát.)



Feltöltéskor x időben egyenletesen növekszik, és mivel T_1 idő alatt éri el az $x = 1$ értéket,

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{be}} = \frac{1}{T_1}.$$

Kifolyáskor a kiáramlási sebesség – és ezzel arányosan x egységnyi idő alatti csökkenése – a Torricelli-törvény szerint a vízszint magasságának (tehát x -nek) a négyzetgyökével arányos:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{ki}} = -K \cdot \sqrt{x}.$$

A K arányossági tényezőt úgy kell megválasztanunk, hogy x éppen T_2 idő alatt csökkenjen le 1-ről 0-ra.

Mivel a kiáramlást leíró egyenlet ugyanolyan alakú, mint egy nulla kezdősebességgel induló, a állandó gyorsulású mozgásnál a sebesség és az elmozdulás közötti $v = \sqrt{2ax}$ összefüggés, megállapíthatjuk, hogy a folyadékszint is egyenletesen változó sebességgel csökken le nullára.

A kezdeti csökkenési ütem K , a végső nulla, átlagosan tehát $K/2$ -vel egyenlő x csökkenésének sebessége. Ez a csökkenési ütem kifejezhető a teljes kiürülési idővel: $K/2 = 1/T_2$.

Ha a töltőcsap is és a lefolyó is nyitva van, akkor a töltésből és a kiürülésből adódó változási sebességek összegződnek:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{be}} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{ki}} = \frac{1}{T_1} - \frac{2}{T_2} \sqrt{x}.$$

Egyensúlyi (stacionárius) állapotban a vízszint (és ezzel együtt x) nem változik. Ennek feltétele:

$$x = x_{\text{stac}} = \left(\frac{T_2}{2T_1}\right)^2.$$

Ha például ugyanannyi idő alatt telik meg a medence, mint amennyi a kiürüléshez kell ($T_1 = T_2$), akkor a csapot és a kifolyót egyszerre kinyitva (a kezdőfeltételektől függetlenül) olyan állapot fog állandósulni, hogy a medence negyed részig lesz tele. A feladatban szereplő szám adatokkal $x_{\text{stac}} = \frac{1}{9}$ adódik, tehát $\frac{1}{9}$ részéig telik meg a medence. A kapott összefüggésből azt is könnyen leolvashatjuk, hogy a túlfolyástól csak akkor kell tartanunk, ha több, mint kétszer annyi idő kell a leeresztéshez, mint a feltöltéshez ($T_2 > 2T_1$).

Megjegyzés. A Torricelli-féle kiömlési törvény érvényességének egyik feltétele az, hogy a nyílás mérete (átmérője) sokkal kisebb legyen a folyadékszint magasságánál. Ez a feltétel a kifolyás végén biztosan nem teljesül, ezért eredményünk csak közelítőleg érvényes.

M. 154. Kezdetben a tartálykocsi is és a benne lévő folyadék is áll. Mivel a leeresztő csap a kocsi bal oldali végének közelében található, a csap kinyitása után a kocsiban lévő folyadék tömegközéppontja balra (a továbbiakban legyen ez a „hátrafelé” irány) kezd el mozogni. Az egész rendszer tömegközéppontja –

vízszintes irányú külső erők hiányában – vízszintesen nem mozdulhat el, ezért a tartálykocsinak jobbra (előre) kell mozognia.

Mivel a leeresztő cső függőleges, az előre felé mozgó tartálykocsi valamekkora jobbra mutató sebességet is „ad” a kiáramló folyadéknak. Ez nem mond ellent a lendületmegmaradás törvényének, hiszen a tartálykocsi és a kiáramló folyadék valamekkora jobbra mutató lendületét a kocsi belsejében hátrafelé áramló folyadék lendülete kiegyensúlyozhatja.

Mozoghat-e a tartálykocsi mindvégig előre? Biztosan nem, hiszen ha ezt tenné, a belőle kiáramló folyadéknak is és a végül teljesen kiürült kocsinak is ugyanolyan irányú (jobbra mutató) impulzusa lenne, ez pedig ellenkezik a lendületmegmaradás törvényével. A tartálykocsi tehát még a teljes kiürülése előtt meg fog állni, és visszafelé indul el. Ezt a sebességváltozást a kocsiban áramló folyadék idézi elő, amikor a tartály hátsó falának „ütközve” lefékeződik.

Megjegyzések. 1. Elképzelhető, hogy a tartálykocsi mozgásiránya többször is megváltozik, ennek elemzése azonban egyszerű megfontolásokkal nem végezhető el.

2. A vizsgált jelenség lényegét egy egyszerű gondolkísérlettel is megvilágíthatjuk. Képzeljünk el, hogy egy szegény diák és egy szigorú kalauz (mindketten m tömegűek) állnak egy ideális (súrlódásmentes gördülésre képes), M tömegű, kezdetben álló vonaton. Amikor kiderül, hogy a diáknak nincs jegye, elkezd futni a vonat vége felé, a kalauz pedig utána. Sebességük a vonathoz képest legyen v . Amikor a diák a vonat végéhez ér, kiugrik a vonat ajtaján. A kalauz is eléri a vonat végét, ahol megáll, és néz a diák után. Mekkora lesz ekkor a kocsi (és vele együtt a kalauz) sebessége?

Amikor a diák már megállt (a vonathoz képest), a vonat sebessége (az impulzusmegmaradás miatt)

$$u = \frac{mv}{M + 2m}.$$

A vonatból – annak hossz tengelyére merőlegesen – kiugró diák által „előrefelé elvitt” impulzus

$$mu = \frac{m^2v}{M + 2m},$$

ugyanakkora, de hátrafelé mutató impulzusa lesz a (kalauz + vonat) rendszernek is. Amikor a kalauz a vonathoz képest megáll, közös sebességük

$$V = -\frac{m^2v}{(M + 2m)(m + M)}$$

lesz. (A negatív előjel arra utal, hogy a vonat és a kalauz hátrafelé mozog.)

M. 155. Ha a becsapódó vízszögletes keresztmetszete A és a sebessége v , akkor egységnyi idő alatt ρAv tömegű, ρ sűrűségű víz érkezik a csatornába. Ez a vízmennyiség $\rho Av^3/2$ mozgási energiával és $\rho Av^2 \sin \alpha$ vízszintes impulzussal rendelkezik. Ezek a mennyiségek – kis belső súrlódás esetén – nem változnak meg:

$$(1) \quad \frac{1}{2} \rho Av^3 = \frac{1}{2} \rho A_1 v_1^3 + \frac{1}{2} \rho A_2 v_2^3,$$

$$(2) \quad \rho Av^2 \sin \alpha = \rho A_1 v_1^2 - \rho A_2 v_2^2,$$

továbbá teljesül az anyagmegmaradás törvénye is:

$$(3) \quad \rho Av = \rho A_1 v_1 + \rho A_2 v_2.$$

(A_1 a jobb felé, A_2 pedig a bal felé kifolyó víz keresztmetszete, v_1 és v_2 a megfelelő sebességek.)

A fenti három egyenlet nem elegendő a négy ismeretlen mennyiség (a keresztmetszetek és a sebességek) meghatározásához, ezért további összefüggéseket kell keresnünk. Bernoulli törvénye szerint a belső súrlódástól mentes folyadék áramvonalai mentén a $\rho v^2/2 + p + \rho gh$ mennyiség állandó. A folyadék belsejében a nyomás a becsapódási ponttól távol mindenhol ugyanakkora, nevezetesen a külső légnyomással egyezik meg. Ha a magasságkülönbségeket, pontosabban az ennek megfelelő energiaváltozást elhanyagoljuk (ez gyorsan áramló folyadék esetén jogos), a Bernoulli-egyenlet következménye: $v_1 = v_2 = v$. A folyadék tehát a csatorna mindkét végénél ugyanakkora sebességgel áramlik! Ez elég meglepő, de – az említett közelítésben – helyes eredmény.

Az anyagmegmaradást és az impulzusmegmaradást kifejező egyenletek tehát így alakulnak:

$$A_1 + A_2 = A \quad \text{és} \quad A_1 - A_2 = A \sin \alpha,$$

melyekből

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

Ha ezt az arányt kísérletileg megvizsgáljuk, a számított értékkel meglepően jó egyezést kapunk, ami a felhasznált közelítések jogosságát mutatja.

M. 156. I. megoldás. Jelöljük az eredeti helikopter súlyát G -vel, a rotor által súrolt területet A -val, a rotor sugarát (azaz a „szárnyak” hosszát) r -rel, szögsebességét ω -val, a rotorlapátok kerületi sebességét pedig v -vel. A másik, kicsinyített helikopternél ugyanezen mennyiségek legyenek G' , A' , r' , ω' és v' .

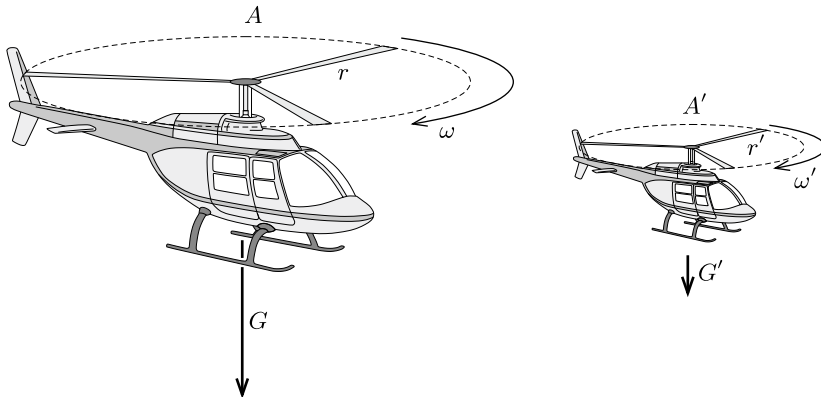
Amennyiben $r' = r/2$, úgy $A' = A/4$ és $G' = G/8$. (Feltételezzük, hogy a kicsinyített modell ugyanolyan anyagból készült, mint az eredeti, emiatt az átlagos sűrűségük megegyezik.) Mindkét „lebegő” helikopternél fennáll az, hogy a forgásban lévő rotor által létrehozott emelőerő egyenlő a helikopter súlyával.

Vajon miből származik az emelőerő, és hogyan fejezhető ki a helikopter adataival? A rotorok felgyorsítják (mintegy maguk alá lökik) a felettük lévő, kezdetben álló levegőt, tehát függőlegesen lefelé irányuló lendületet adnak neki. A felgyorsított levegő sebessége feltehetően arányos v -vel. (Az arányossági tényező természetesen függ a rotor lapátjának alakjától, de mindkét helikopterre ugyanakkora.)

Bizonyos Δt idő alatt A keresztmetszeten $Av\Delta t$ -vel arányos térfogatú levegő áramlik lefelé. Ennek a levegőmennyiségnek az impulzusa $Av^2\Delta t$ -vel arányos, a levegő felgyorsításához szükséges függőleges erő (időegységre vonatkoztatott impulzusváltozás) tehát Av^2 -tel arányos. A hatás-ellenhatás törvénye szerint ugyanekkora nagyságú erőt fejt ki a levegő is a helikopterre. Az emelőerő és a súly egyenlőségéből

$$\frac{G'}{G} = \frac{A'v'^2}{Av^2},$$

ahonnan (a területek és a súlyok arányára korábban felírt összefüggéseket felhasználva) $v' = v/\sqrt{2}$, valamint $\omega' = \sqrt{2}\omega$ adódik. A kicsinyített modell rotorjának tehát kisebb kerületi sebességgel, de nagyobb szögsebességgel kell forognia, mint az eredetinek.



A helikopter motorja által leadott mechanikai teljesítmény a szükséges M forgatónyomaték és a rotor szögsebességének szorzataként számítható ki: $P = M\omega$. A forgatónyomaték a rotorra ható közegellenállási erővel (tehát Av^2 -tel) és a rotor r sugarával arányos. (Itt A jelölheti a rotorlapátok egyes részeinek mozgásirányú keresztmetszetét, de a rotor által súrolt területet is, hiszen arányos kicsinyítésnél ezek ugyanolyan mértékben csökkennek.) Így a kérdéses teljesítményarány:

$$\frac{P'}{P} = \frac{A'v'^2r'\omega'}{Av^2r\omega} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2^{3,5}} = 0,088.$$

A kicsinyített modell motorja által leadott teljesítmény tehát az eredetinek mindössze 9 százaléka.

II. megoldás. Próbáljuk megtalálni azokat a paramétereket, melyektől egy adott helikopter lebegéséhez szükséges P teljesítmény függ. Ezek között biztosan szerepelnie kell a g nehézségi gyorsulásnak és a helikopter jellemző L hossz méretének. A teljesítmény természetesen függ még a helikopter (átlagos) ρ_h sűrűségétől, valamint a környező közeg (jelen esetben a levegő) ρ_1 sűrűségétől is. (A helikopter tömege, a rotorlapátok hossza és hasznos felülete már kifejezhető ezekkel az adatokkal.)

Ésszerű feltételezni, hogy a szükséges teljesítmény (legalábbis közelítőleg) csak a felsorolt paramétereiktől függ, és

$$P = k \cdot g^\alpha \cdot L^\beta \cdot \rho_h^\gamma \cdot \rho_1^\delta$$

alakú összefüggésből számítható ki (ahol k egy dimenziótlan állandó). A két oldal mértékegységeinek meg kell egyeznie:

$$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^\alpha \cdot \text{m}^\beta \cdot \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^\gamma \cdot \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^\delta.$$

A kitevők alapegységenként egyenlők:

$$\gamma + \delta = 1, \quad \alpha + \beta - 3(\gamma + \delta) = 2, \quad -2\alpha = -3.$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $\beta = \frac{7}{2}$, $\alpha = \frac{3}{2}$ és $\gamma = 1 - \delta$.

Azt kaptuk tehát, hogy a helikopter lebegéséhez szükséges teljesítmény a lineáris méret $\frac{7}{2}$ -ik hatványával arányos, a felére kicsinyített helikopter tehát $2^{-3,5} = 0,088$ -szoros teljesítménnyel képes fenntartani magát.

Megjegyzések. 1. A motorok hatásfokának egyik fontos jellemzője a motor által le-adott teljesítmény és a motor tömegének aránya. Amennyiben a helikopter motorját is a többi lineáris mérettel arányos mértékben kicsinyítjük, a motor tömege nyolcadára, a szükséges teljesítmény viszont ennél nagyobb mértékben csökken. Eszerint a kisebb repülő szerkezet lebegéséhez rosszabb hatásfokú motor is elegendő. Fordítva: minél nagyobb méretű (levégőnél nagyobb sűrűségű) testet akarunk helikopter-elven lebegtetni, annál jobb hatásfokú motorra van szükségünk. Hasonló okok magyarázhatják azt a tényt, hogy az evolúció során pl. a legyek nem nőttek emberméretűre, hiszen méretarányosan felnagyítva őket képtelenek volnának repülni. Ugyancsak szembetűnő a legnagyobb repülő állatok és a legnagyobb szárazföldi gerincesek (pl. a sas és az elefánt) közötti nagyon nagy térfogat-, illetve tömegkülönbség.

2. A II. megoldásban leírt dimenzióanalízis módszerével a γ és δ kitevőknek csak az összegét tudtuk megadni. Ha azonban azt is figyelembe vesszük, hogy a helikopter sűrűsége csak g -vel szorozva jelenhet meg a teljesítmény képletében (hiszen a mozdu-latlan helikopternek nem a tehetetlen tömege, hanem csak a súlya kaphat szerepet), úgy a $\gamma = \alpha$ megszorítást kapjuk, ahonnan $\gamma = \frac{3}{2}$ és $\delta = -\frac{1}{2}$ adódik. Ezek szerint a teljesítmény formulája:

$$P \propto (L^3 \rho_h g) \cdot \sqrt{Lg} \cdot \sqrt{\frac{\rho_h}{\rho_1}}.$$

Ebben a képletben az első (zárójeles) tényező a helikopter súlyával arányos, a második egy félhelikopternyi magasságból szabadon eső test végsebessége, a harmadik tényező pedig dimenziótlan (kb. 100-as nagyságrendű) számfaktor, amely csak a sűrűségarányoktól függ.

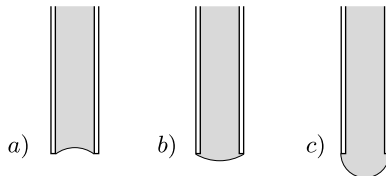
Földi körülmények között csak L -t és ρ_h -t lehet változtatni, egy idegen bolygó felderítésére szánt repülő szerkezetek (drónok) tervezésénél azonban fontos lehet annak ismerete is, hogy miként függ P a nehézségi gyorsulástól, illetve a környező közeg sűrűségétől.



Felületi feszültség

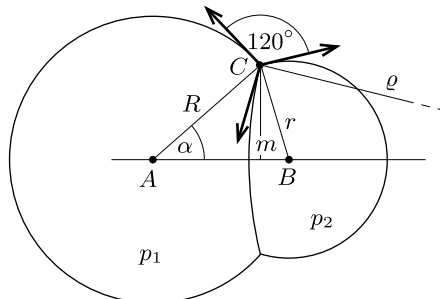
M. 157. Az *a)* esetben a víz nem folyhat ki a csőből, hiszen ellenkező esetben perpetuum mobilét készíthetnénk: a kicsurgó vízzel lapátkereket hajtva örökmozgót működtethetnénk!

A *b)* és a *c)* eset már nem ilyen egyszerű. Mindkét cső vége alacsonyabban van, mint az edénybeli vízszint, a víz nyomása tehát mindkét cső végénél nagyobb, mint a külső légnyomás. Ezért a folyadék kifelé domborodik, és olyan görbületi sugarat alakít ki, amelynek megfelelő görbületi nyomás éppen a víz és a külső levegő nyomáskülönbségének felel meg. Az *a)*, *b)* és *c)* eseteket megvalósító vízfelszíneket az *ábra* mutatja.



A legnagyobb görbület (legkisebb görbületi sugar) a félgömb alakhoz tartozik. Ez éppen a H magasságú vízoszlop nyomásának felel meg, hiszen a függőlegesre állított kapillárisban ilyen magasra emelkedik a víz. Ha a nyomáskülönbség nagyobb a H magasságú vízoszlop hidrosztatikai nyomásánál, akkor a felületi feszültség nem tudja megtartani a vizet a csőben, és az kifolyik. Ez történik a *c)* jelű csőnél, a *b)* jelű kapillárisból viszont nem fog kicsurogni a víz.

M. 158. A két buborék közötti hártya ϱ sugarú gömbsüveget alkot, a gömbök középpontja egy egyenesbe esik. Ha erre az egyenesre illeszkedő síkkal elmetsszük a buborékokat, az *1. ábrán* látható metszetet kapjuk. (Feltehetjük, hogy $R > r$.)



1. ábra

Ismert, hogy egy R sugarú szappanbuborék belsejében (a hártya mindkét oldalát figyelembe véve)

$$(1) \quad p_1 - p_0 = \frac{4\alpha}{R}$$

a túnyomás, ahol α a folyadék (szappant vagy mosogatószer tartalmazó víz) felületi feszültsége. Hasonlóan, a kisebb buborék túnyomása

$$(2) \quad p_2 - p_0 = \frac{4\alpha}{r},$$

a két buborékot elválasztó hártýára pedig fennáll, hogy

$$(3) \quad p_2 - p_1 = \frac{4\alpha}{\varrho}.$$

A (2) összefüggésből (1)-et kivonva, majd (3)-ba helyettesítve – némi átalakítás után – a keresett görbületi sugárra

$$\varrho = \frac{Rr}{R - r}$$

adódik.

Az érintkezési kör m sugarát a következő gondolatmenet segítségével határozhatjuk meg. A C ponton átmenő kör kicsiny darabkájára három egyenlő nagyságú erő hat, ezek tehát egymással 120° -os szöget zárnak be. Ebből következik, hogy az $\angle ACB = 60^\circ$. (Felhasználtuk, hogy a kör érintője merőleges a sugárra.) Alkalmazzuk az ABC háromszögre a koszinusz- és szinusztételt:

$$AB^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos 60^\circ,$$

illetve

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 60^\circ} = \frac{r}{AB}.$$

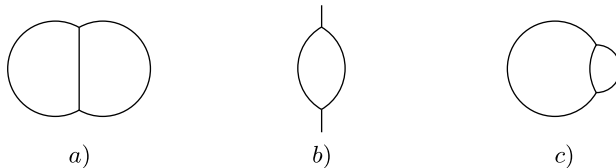
Ezekből az érintkezési kör sugarára végül az

$$m = R \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Rr}{\sqrt{R^2 + r^2 - Rr}}$$

eredményt kapjuk.

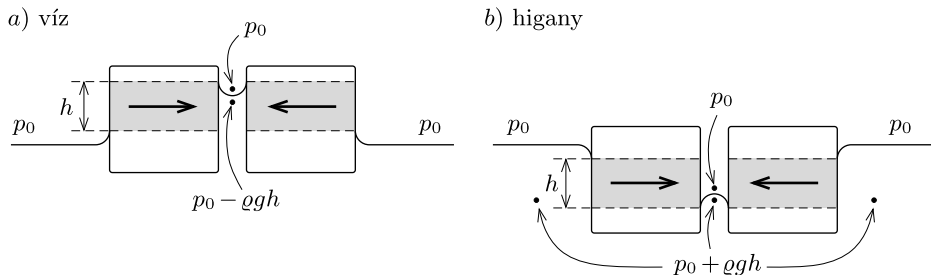
Megjegyzés. A 2. ábra három részén néhány speciális eset látható:

- a) $R = r$, ekkor $\varrho = \infty$ (az elválasztó felület sík) és $m = r\sqrt{3}/2$;
- b) $R \gg r$, ekkor $\varrho = r$ és $m = r\sqrt{3}/2$;
- c) $R = 2r$, ilyenkor $\varrho = R$ és $m = r$.



2. ábra

M. 159. A folyadék felületi feszültségének következtében a közeli tárgyak közötti folyadékszint-magasság nem ugyanakkora, mint a testeken kívül; a víz esetében magasabb (ezt mutatja az *a*) ábra), míg a higany esetén alacsonyabb (ebben az esetben az illeszkedési szög 90° -nál nagyobb, lásd a *b*) ábrát). (A két ábrán szereplő testek sűrűsége természetesen különböző.)



A testek közötti folyadékfelszín felett a nyomás mindkét esetben a légköri nyomással egyezik meg, míg ugyanezekon a helyeken közvetlenül a felszín alatt a két esetben a nyomás eltérő. A víz esetében a folyadék nyomása *kisebb*, a higany esetében pedig *nagyobb*, mint a légköri nyomás. Ez úgy lehetséges, hogy a nyomáskülönbséget a folyadékfelszínnek (ellentétes előjelű) görbületi nyomása egyenlíti ki. Az ábrán látszik, hogy az eltérő nyomások miatt a testek szürkével jelölt részeire kiegyenlítetlen erők hatnak, és ezek eredője mindkét esetben *egymás felé* húzza az úszó testeket.

M. 160. I. megoldás. Ha a borotvapenge még úszik a víz felszínén, és a pohárban h_1 magasan áll a víz, akkor a pohár fenekét

$$F_1 = \rho gh_1 A$$

erő nyomja lefelé, ahol A a pohár belsejének alapterülete, ρ pedig a víz sűrűsége (*1. ábra*). Ha a penge elsüllyed, és a vízszint magassága h_2 -re változik, akkor a fenékre ható nyomóerő módosul:

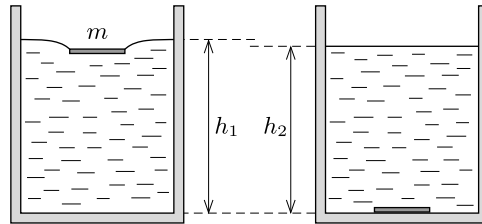
$$F_2 = \rho gh_2 A + mg - \frac{m}{\rho_{\text{penge}}} \rho g.$$

A fenti képletben az utolsó tag a pohár fenekére süllyedt m tömegű pengére ható felhajtóerőt veszi figyelembe. (Feltételezhetjük, hogy a penge és a pohár alja között marad egy vékony vízréteg. Ha nem ez lenne a helyzet, akkor az utolsó tag onnan származna, hogy a penge felső felületénél a víz nyomása kicsit kisebb, mint a pohár alján.)

Másfelől viszont F_1 és F_2 ugyanakkora, mindkettő a víz és borotvapenge együttes súlyával egyenlő; éppen ennyivel mutat többet egy mérleg a vízzel és a borotvapengével teli pohárnál, mint az üres pohár esetében.

Eszerint $h_1 > h_2$, a borotvapenge elsüllyedésekor a vízszint kicsit *lecsökken*. A vízszint csökkenésének mértékét a borotvapenge felhajtóerővel csökkentett súlyával megegyező súlyú (a pohárban egyenletesen szétterített) vízréteg magassága adja meg.

Megjegyzés. Az egyszerűség kedvéért hallgatólagosan feltettük, hogy a pohár olyan anyagból készült, melyre nézve a víz illeszkedési szöge 90° , azaz a vízfelszín a pohár széléhez közel vízszintes marad. Ha nem ez a helyzet, akkor a vízfelszín pereme által a pohárra ható, felületi feszültségből származó erőt is figyelembe kell venni, ez azonban az úszó és az elsüllyesztett penge esetén is ugyanakkora járulékot ad.

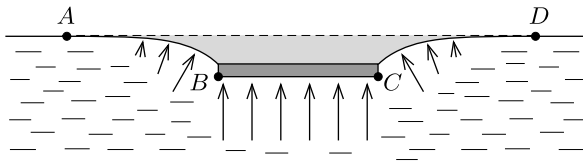


1. ábra

II. megoldás. Tekintsük a borotvapenge által „kiszorított”, (a 2. ábrán szűr-kével jelölt) „hiányzó” víznek megfelelő térrészt. Ebben a térrészben lévő anyag (nevezetesen a borotvapenge, hiszen az ott lévő levegő tömege gyakorlatilag nulla) azért lehet egyensúlyban, mert a rá ható nehézségi erővel egyensúlyt tart a (lég-köri nyomásnál nagyobb nyomású) folyadék által kifejtett erőrendszer eredője. Ez az eredő erő azon folyadékmennyiség súlyával is egyensúlyt tudna tartani, amely a 2. ábrán $ABCD$ -vel jelölt térrészt ki tudná tölteni.

Ezek szerint a borotvapenge mg súlya éppen a kiszorított folyadékmennyiség súlyával egyezik meg, amint ezt *Arkhimédész* már nagyon régen felismerte. A helyzet érdekessége abban rejlik, hogy az *Arkhimédész-törvényben* szereplő „kiszorított víz” most nem csupán a borotvapenge által ténylegesen elfoglalt térfogatból hiányzó vizet jelenti, hanem annál lényegesen többet: a felületi feszültség által megnövelt tartomány járulékat is.

A kiszorított víz térfogata tehát nagyobb, mint a penge saját térfogata, emiatt a vízszint a borotvapenge elsüllyedésekor biztosan *csökkenni* fog.

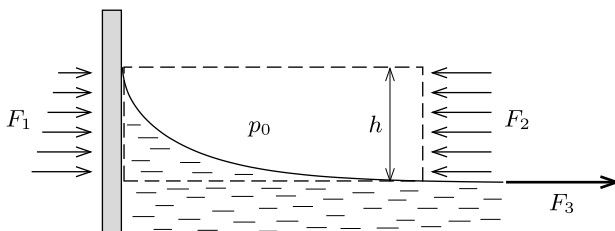


2. ábra

Megjegyzés. A víznél nagyobb sűrűségű testek úszásánál a testre ható nehézségi erővel egyrészt a testtel alulról érintkező víz nyomóereje, másrészt felületi feszültségből származó, a test pereménél ható erők függőleges komponense tart egyensúlyt. Az előbbi

a test feletti „hiányzó” víz súlyával egyenlő, nagysága a test vízszintes vetületének *területével* arányos. A felületi feszültség járuléka a kiszorított víz maradék részének súlyával egyenlő, ez a test vízszintes vetületének *kerületével* arányos. A viszonylag nagyméretű testek úszásánál a víz nyomása adja a döntő járulékot, a felületi feszültségnek csak stabilizáló szerepe van. A kisebb keresztmetszetű testeknél (pl. a vízi molnárika lábainál) éppen fordított a helyzet: a nehézségi erőt főleg a felületi feszültségből származó erőhatás egyensúlyozza, a víz nyomásának nincs lényeges szerepe. A borotvapenge esetében a kétféle erőhatás egyforma nagyságrendű, mindkettő hatása számottevő.

M. 161. A h magasságra felemelkedett víz nyomása a magasság függvényében lineárisan változik: alul a külső p_0 légnyomással egyezik meg, legfelül pedig $p_0 - \rho gh$ nagyságú. A falra kifejtett átlagos nyomás tehát $p_{\text{átlag}} = p_0 - \rho gh/2$, a nyomóerő pedig (egy ℓ szélességű vízrétegre vonatkoztatva): $F_1 = \ell p_{\text{átlag}} h$.



Írjuk fel az *ábrán* szaggatott vonallal körülhatárolt térfogatban lévő vízre ható vízszintes erőket. Ezt a vízmennyiséget a fal nyomja jobb felé F_1 erővel, a külső levegő balra $F_2 = \ell p_0 h$ erővel, a felületi feszültség miatt pedig a víz többi része húzza jobbra $F_3 = \ell \alpha$ erővel. Ezek eredője nulla, hiszen a vizsgált térrészben lévő anyag nyugalomban van. Eszerint

$$\left(p_0 - \frac{1}{2} \rho gh\right) \ell h - p_0 \ell h + \ell \alpha = 0,$$

ahonnan az emelkedési magasság (a szobahőmérsékletű víz $\alpha = 0,073$ N/m adataival számolva)

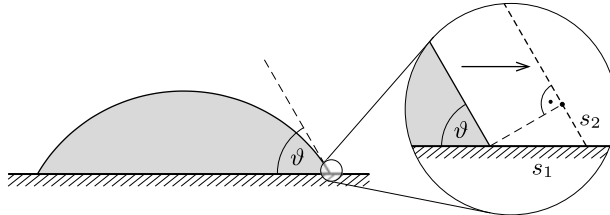
$$h = \sqrt{\frac{2\alpha}{\rho g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,073}{1000 \cdot 9,8}} \text{ m} = 0,0039 \text{ m}.$$

A víz tehát közel 4 milliméternyit emelkedik fel az akvárium falánál.

M. 162. A tócsa olyan alakot vesz fel, amely esetén a felületi energia és a gravitációs helyzeti energia összege a lehető legkisebb. A felületi energia két tagból, a víz–levegő határfelület energiájából és víz–padló érintkezési felületnek megfelelő energiából számítható.

Tekintsünk egy, a padlóra cseppentett vízcseppet! A víz a levegővel is és a padlóval is érintkezik. A víz–levegő határréteg egységnyi felületű darabjának energiája α , ezt a mennyiséget nevezzük a víz (levegőre vonatkoztatott) felületi feszültségének. Ezen kívül a víz bizonyos nagyságú felületen a padlóval is érintkezik. Ha

ez a felület valamilyen ok miatt megváltozik (vagyis a padló és a víz érintkezési felülete megnő, a levegővel érintkező padlófelület pedig lecsökken), akkor ennek a változásnak is megfelel valamekkora, a felületváltozással arányos energiakülönbség. Jelöljük ezt a „felületi energiasűrűséget” α' -vel!



1. ábra

Az α és α' állandók, valamint az egyensúlyi állapotra jellemző ϑ illeszkedési szög nem függetlenek egymástól. Ha ugyanis a vízcsepp pereménél gondolatban (virtuálisan) egy kicsiny s_1 távolsággal elmozdítanánk a különböző halmazállapotok érintkezési vonalát (1. ábra), akkor a felületi energiák összege első rendben (első közelítésben) nem változna meg; – ezt állítja a virtuális munka elve. Az érintkezési vonal egységnyi hosszú szakaszán a felületi energiák megváltozása

$$\alpha' s_1 + \alpha s_2 = 0.$$

Az 1. ábráról leolvasható $s_2 = s_1 \cos \vartheta$ összefüggést felhasználva az

$$(1) \quad \alpha' = -\alpha \cos \vartheta$$

összefüggést kapjuk. Esetünkben, amikor $\vartheta = 60^\circ$, $\alpha' = -\frac{1}{2}\alpha < 0$.

Megjegyzések. 1. Az α' energiasűrűség negatív előjele azt fejezi ki, hogy a víz „nedvesíti” a padlót, energetikailag az a kedvezőbb, ha minél nagyobb felületen érintkezik a víz a padló szilárd anyagával. Vannak olyan folyadékok és szilárd anyagok (pl. a higany és az üveg), amelyekre $\alpha' > 0$, és az illeszkedési szög $\vartheta > 90^\circ$. Ezek a „nem nedvesítő” folyadékok igyekeznek minél kisebb felületen érintkezni a kérdéses szilárd anyaggal, számukra ez felel meg alacsonyabb energiájú állapotnak.

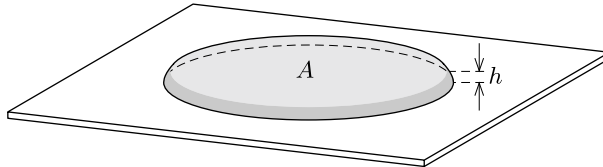
2. Az α' mennyiséget felírhatjuk az α_{sz-f} és α_{sz-g} felületi energiasűrűségek (ún. határfelületi feszültségek) különbségeként, ahol az első tag a szilárd anyaggal érintkező folyadék, a második pedig a szilárd anyaggal érintkező gáz felületegységre vonatkoztatott energiája. Ez a felbontás azonban *önkéntes*, hiszen a képletekben mindig csak α' jelenik meg, a szilárd anyag (folyadékra, illetve gázra vonatkoztatott) energiasűrűsége önmagában nem kap szerepet.

A $V = 5$ liter térfogatú víz viszonylag nagy területű tócsát képez a padlón (2. ábra), emiatt a víz–levegő határfelület és a víz–padló érintkezési felület nagysága jó közelítéssel egyenlő, jelöljük ezt A -val. Így a tócsa energiáját az

$$E \approx \alpha A + \alpha' A + mg \frac{h}{2}$$

formula adja meg, ahol m a tócsa tömege, $h = V/A$ pedig a magassága. Az (1) eredményt felhasználva, majd a tócsa tömegét a víz ρ sűrűségével kifejezve kapjuk a tócsa energiáját az A terület függvényében:

$$(2) \quad E(A) = \alpha(1 - \cos \vartheta)A + \frac{\rho g V^2}{2A}.$$



2. ábra

Az energia minimumának meghatározásához a számtani és mértani közepek között fennálló összefüggést használhatjuk, mely szerint:

$$E(A) \geq \sqrt{2\alpha(1 - \cos \vartheta)\rho g V^2},$$

egyenlőség pedig akkor áll fenn, ha a (2) egyenletben szereplő két tag megegyezik. Ebből a feltételből a tócsa területére az

$$A = \sqrt{\frac{\rho g V^2}{2\alpha(1 - \cos \vartheta)}} \approx 1,8 \text{ m}^2$$

eredmény adódik.

Megjegyzés. A tócsa felületének ismeretében meghatározhatjuk a magasságát is :

$$h = \frac{V}{A} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\rho g}(1 - \cos \vartheta)} \approx 2,7 \text{ mm}.$$

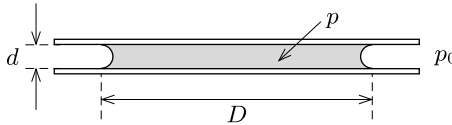
Ez az eredmény – a 161. feladat megoldásának gondolatmenetét követve – az erők egyensúlyából is megkapható. Az összefüggésben megjelenő, hosszegység dimenziójú, a legtöbb folyadékra mm-es nagyságrendű $\lambda_k = \sqrt{\alpha/(\rho g)}$ mennyiség az ún. *kapillaris hossz*, amely azt a karakterisztikus méretskálát adja meg, amelyen a felületi jelenségek és a gravitációs tér hatása összemérhető. Azok a folyadékcseppek, amelyek mérete sokkal kisebb a λ_k karakterisztikus hosszánál, jó közelítéssel gömb alakúak: formájukat a felületi feszültségből származó görbületi nyomás határozza meg. A λ_k hosszánál jóval nagyobb méretű „cseppek” alakját elsősorban a gravitációs mező alakítja, ezért ezek szétterülnek, tócsát képeznek.

M. 163. I. megoldás. A vízpogácsa tömegközéppontján átmenő, az üveglapokra merőleges metszetben a víz-levegő határvonal egy-egy $d/2$ sugarú félkör. A vízfelszín görbülete egyik irányban tehát $2/d$, a másik irányú görbület pedig $D \gg d$ miatt elhanyagolható. A levegő felé görbülő vízfelszín $\Delta p = 2\alpha/d$ görbületi

nyomást hoz létre, emiatt a vízpogácsa belsejében a nyomás a külső p_0 légnyomásmánál kisebb, $p_0 - 2\alpha/d$ értékű. Ez a nyomáskülönbség a víz és az üveglapok $D^2\pi/4$ nagyságú érintkezési felületén egyenként

$$F = \frac{D^2\pi}{4} \cdot \frac{2\alpha}{d}$$

erőt eredményez. Ekkora erővel „húzza össze” a folyadék az üveglapokat. Az üveglapok egyensúlya a számított erővel megegyező nagyságú, a lapokat széthúzó külső erőkkel biztosítható.



II. megoldás. A feladat energetikai megfontolással is megoldható. Képzeljük el, hogy az egyik üveglapot nagyon kicsi Δx távolsággal ($\Delta x \ll d$) eltávolítjuk a másik üveglaptól. Eközben az állandónak tekintett F külső erő (amely az üveglap egyensúlyát biztosítja) $F\Delta x$ munkát végez, amely a rendszer energiáját növeli. A bekövetkező energiaváltozás jó közelítéssel a nedvesített üvegfelület területváltozásának és az üveg–víz határfelület α' energiasűrűségének szorzataként számolható. (d kicsiny volta miatt a víz–levegő határfelület energiaváltozását elhanyagolhatjuk.) Tökéletes nedvesítés esetén az illeszkedési szög $\vartheta = 0$, így az *előző feladat* megoldásának (1) képlete szerint $\alpha' = -\alpha$. Ez annyit jelent, hogy minél kisebb felületen érintkezik a víz az üveggel, annál *nagyobb* lesz az érintkezésből származó energiája.

A vízpogácsa eredetileg két D átmérőjű körlapon, összesen tehát $D^2\pi/2$ területen érintkezik az üveggel. Ha az átmérő D' -re csökken, akkor ugyanez a terület $D'^2\pi/2$ -re csökken, így az energia megváltozása

$$\Delta E = \alpha' \frac{\pi}{2} (D'^2 - D^2) = \alpha \frac{\pi}{2} (D^2 - D'^2).$$

A vízpogácsa térfogata az elképzelt széthúzás közben változatlan marad:

$$\frac{D^2\pi}{4}d = \frac{D'^2\pi}{4}(d + \Delta x),$$

vagyis

$$D^2 - D'^2 = D^2 \left(1 - \frac{d}{d + \Delta x} \right) = \frac{D^2}{d + \Delta x} \Delta x \approx \frac{D^2}{d} \Delta x.$$

A munkatétel szerint

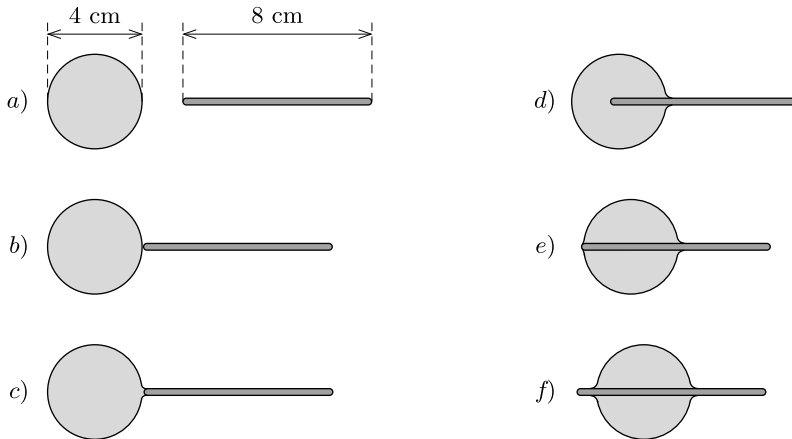
$$F\Delta x = \alpha \frac{\pi}{2} \frac{D^2}{d} \Delta x,$$

ahonnan a keresett erő:

$$F = \frac{\alpha D^2 \pi}{2d}.$$

Megjegyzés. Amennyiben d sokkal kisebb, mint D , ez az erő igen tekintélyes lehet. Valóban megfigyelhetjük, hogy két sík üveglapot – ha víz kerül közéjük – nagyon nehéz, szinte lehetetlen a síkjukra merőlegesen széthúzni. Ha mégis szét akarjuk választani őket, a saját síkjukkal párhuzamosan kell elcsúsztatnunk a lapokat.

M. 164. Az *ábra a)* részén látható kiindulási helyzetben a vízcsepp közelében lebeg az üvegpálca.



A folyamat akkor kezdődik, amikor a pálca egyik végét egészen finoman érintkezésbe hozzuk a vízcseppel (*b* ábra). A víz nedvesíti az üveget, kissé „ráfolyik” a pálca legömbölyített végére (*c* ábra). Itt azonban a folyamat nem állhat le, mert az üvegpálcára ható erők eredője *nem nulla*. Igaz ugyan, hogy az R sugarú vízcsepp belsejében a nyomás egy kicsit nagyobb, mint a külső légnyomás ($\Delta p = 2\alpha/R$), és ez $r^2\pi\Delta p$ erővel tolná kifelé az r sugarú pálcát, de ennél *sokkal nagyobb* a pálcára rásimuló vízhártya által kifejtett $2r\pi\alpha$ nagyságú húzóerő. A pálca tehát benyomul a vízcseppbe, egy közbülső helyzet a *d*) ábrán látható.

Az erőegyensúly ebben a helyzetben sem áll fenn, nincs ok, amiért a pálca megállna, így továbbhalad az *e*) ábrán látható állapotig. Most már a pálca elérte a vízcsepp bal oldali szélét, kissé túl is ment rajta, a vízfelszín itt kissé kinyomódik. Az erőegyensúly azonban csak akkor áll be, amikor a pálca bal oldali vége teljesen kibújik a vízcseppből az *f*) ábrán látható módon, ekkor a pálca mindkét végét körülölelő víz felszíne ugyanolyan alakú.

Meg kell gondolnunk még, hogy vajon a vízcsepp nem folyik-e szét a pálcán. A rendszer összenergiája a levegővel érintkező víz felületi energiájának és a vízzel érintkező üveg energiájának összegével egyenlő; ez a mennyiség igyekszik minél kisebb lenni. Tekintettel arra, hogy a pálca *vékony*, az üveg teljes felülete elhanyagolható a vízcsepp felületéhez képest. A rendszer egyensúlyát tehát a legkisebb vízfelszín követelménye határozza meg, ez pedig (adott térfogatú víz esetén) a gömb alaknál valósul meg.

A végállapotban tehát a vízgolyó majdnem pontosan gömb alakú, az üveg-pálca ennek a gömbnek egyik átmérője mentén helyezkedik el, és mindkét végét „kidugja” a vízből.

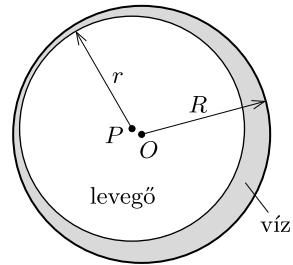
M. 165. a) Az üveget jól („tökéletesen”) nedvesítő víz számára energetikailag az a kedvező, ha minél nagyobb felületen érintkezik az edény falával. Mivel a gravitáció nem szab gátat ennek, a víz az üreges gömb teljes belső felületét benedvesíti, a légbuborék tehát valahol az üreg belsejében fog elhelyezkedni. Alakját az a feltétel szabja meg, hogy a felülete – adott térfogat mellett – a lehető legkisebb legyen. (A térfogat azért állandó, mert a normál légnyomás mellett a felületi feszültségből származó nyomás elhanyagolhatóan kicsi, tehát a gáznak a nyomása és a hőmérséklete, és így a térfogata is meghatározott értékű.)

Adott térfogatú testek közül a gömbnek a legkisebb a felszíne (ezt már az ókorban is tudták). Az $R = 4$ cm sugarú üregbe bezárt levegő tehát gömb alakot vesz fel (1. ábra). A gömb r sugarát a térfogatából számolhatjuk ki:

$$\frac{4r^3\pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4R^3\pi}{3},$$

ahonnan

$$r = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}R = 3,5 \text{ cm.}$$



1. ábra

A légbuborék P középpontja (ott, ahol a buborék egyáltalán elfér) tetszőleges helyen lehet, az egyensúly tehát P helyzetére nézve *közömbös* (indifferens). A buborék az üreges edényben a legkisebb hatásra (pl. az űrállomás nagyon kicsi fékeződésére) lassan mozoghat, de az edény falához érve onnan visszapattn, nem „ragad” oda.

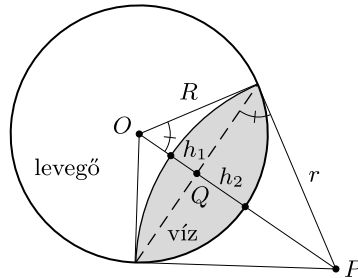
Megjegyzés. A gömb alakú felület minden pontjának ugyanakkora a görbülete, és ennek megfelelően a légbuborék falánál mindenhol ugyanakkora a felületi feszültségből származó görbületi nyomás. Ennek így is kell lennie, hiszen a belül lévő gáz nyomása is és a külső víz nyomása is (súlytalanság állapotában) a felület mentén haladva nem változik; különbségük pedig éppen a görbületi nyomás.

b) Az ezüstgömbbe zárt légbuborék is olyan alakot vesz fel, amelynek az átlagos görbülete

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{\max}} + \frac{1}{r_{\min}} \right) = \text{állandó},$$

ahol r_{\max} és r_{\min} az ún. főgörbületekhez tartozó sugarakat jelöli. Az átlagos görbület tehát a felület minden pontjában ugyanakkora (hiszen a levegő nyomása is és a víz nyomása is állandó a felület mentén), továbbá a fallal való érintkezési vonal mentén a vízfelület érintőszíkja mindenhol merőleges a falfelület érintőszíkjára. Ezt a két feltételt egy alkalmasan választott méretű és középpontú gömbsüveg (a gömbfelületnek egy síkkal „levágott” része) teljesíti, ez tehát egy *lehetséges* megoldás.

Mivel azonban a matematikai probléma megoldása – fizikai okokból – egyértelmű, ez lesz a megoldás: az edényben lévő víz két gömbsüvegből összetehető alakot vesz fel (2. ábra).



2. ábra

Megjegyzés. A folyadék és a levegő határfelülete általában nem gömbfelület vagy annak egy darabkája, hanem bonyolultabb (konstans átlaggörbületű) alakzat. Ha például az úrállomáson lebegő tartály ürege nem gömb, hanem szabálytalan alakú lenne, akkor az üreg szélénél összegyűlő vizet nem határolhatná gömbfelület; annak érintősíkjai ugyanis nem mindenhol ugyanakkora szögben illeszkednének a falfelülethez. Feladatunkban azért lehetséges egy viszonylag egyszerű felülettel, a gömbsüveggel kielégíteni a szükséges feltételeket, mert két gömb áthatásakor a felületek közös része mentén az érintősíkok szöge mindenhol ugyanakkora.

A határfelület r görbületi sugarát és P középpontjának az üreges gömb O középpontjától mért távolságát a víz térfogata és az illeszkedési szög határozza meg. A Pitagorasz-tétel, valamint a 2. ábrán látható hasonló háromszögek arányai miatt fennállnak a következő összefüggések:

$$OP = \sqrt{R^2 + r^2}, \quad OQ = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + r^2}} \quad \text{és} \quad PQ = \frac{r^2}{\sqrt{R^2 + r^2}},$$

melyekből a 2. ábrán látható gömbsüvegek magassága:

$$h_1 = r \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right), \quad h_2 = R \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right).$$

Egy ϱ sugarú, h magasságú gömbsüveg térfogata $\frac{1}{3}\pi h^2(3\varrho - h)$, így a víz ismert térfogata

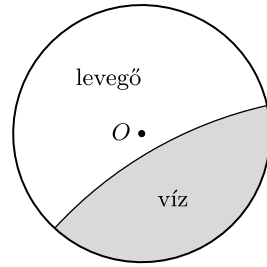
$$\frac{\pi}{3} h_1^2 (3r - h_1) + \frac{\pi}{3} h_2^2 (3R - h_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$$

módon fejezhető ki. Innen az $x = r/R$ sugár-arányra az

$$x^3 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 \left(2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 \left(2 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{4}{3}$$

egyenlet adódik, amelynek (numerikusan vagy grafikus függvényábrázolással megkapható) megoldása: $x = 3,206 \approx 3,2$.

Az úrállomáson lebegő ezüstgömbbe zárt vizet tehát egy $r = 12,8$ cm sugarú gömbsüveg alakú felület választja el a levegőtől; méretarányos rajza a 3. ábrán látható. A „vízlencse” állása a súlytalanság miatt tetzőleges lehet. Elvben elképzeltethető, hogy a légbuborék ebben az esetben is az 1. ábrán látható gömb alakú, és valahol a gömb belsejében lebeg, de ez az állapot instabil. Ha a buborék – bármilyen kis zavar hatására – megközelíti az edény falát, onnan nem pattan vissza (mint az a) esetben), hanem rátapad a falra. Kiszámítható, hogy a felületi energia számottevően kisebb a 3. ábrán látható elrendezésben, mint az 1. ábrának megfelelőben. (Az energiaviszonyok könnyen összehasonlíthatók egy sík felületre tapadó buboréknál. Itt egy gömbből vele azonos térfogatú félgömb lesz, ennek felülete $1/\sqrt[3]{2} \approx 0,8$ -szorosa a teljes gömb felületének.)



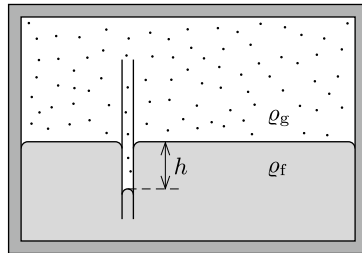
3. ábra

M. 166. Képzeljünk el egy zárt edényt, amelyben valamennyi folyadék és felette annak telített gőze található. A folyadékba egy r sugarú kapilláris cső merül. A folyadék a cső falát nem nedvesíti. Ilyen körülmények között a folyadék a kapillárisban bizonyos h mélységig lesüllyed. A süllyedés mértékét a hidrosztatikai nyomás és a felületi feszültség által létrehozott görbületi nyomás egyensúlyának

$$2\pi r\alpha = \rho_f g h \cdot r^2 \pi$$

feltételéből határozhatjuk meg, ahol α a folyadék felületi feszültsége, ρ_f pedig a sűrűsége. Innen

$$h = \frac{2\alpha}{\rho_f g r}.$$



A folyadék mindenhol, a kapilláris csőben is és a sík felületnél is egyensúlyban van a saját gőzével. A kapilláris csőben a folyadék görbült felszínénél a gőz nyomása azonban egy kicsit nagyobb, mint a sík felszínnél, a különbség éppen a h magasságú, ρ_g sűrűségű gőzszlop „hidrosztatikai” nyomása:

$$\Delta p = \rho_g g h = \frac{2\alpha}{r} \frac{\rho_g}{\rho_f}.$$

Ez a képlet azt mutatja, hogy egy kisebb görbületi sugarú felületdarabkán a folyadék csak nagyobb nyomású gőzzel kerülhet egyensúlyba, mint ahogy ez a kevésbé

görbült felületnél történe. Az eredeti feladatban viszont a különböző méretű folyadékcseppek azonos nyomású gőzben találhatóak, tehát mindegyikük nem lehet egyensúlyban a gőzzel. A kisebb méretű cseppek gyorsabban párolognak, mint a nagyobbak, sőt, a gőznyomás növekedtével a nagyobb cseppekre már lecsapódik a gőz, míg a kisebbek tovább párolognak. A folyamat végén a kisebb cseppek mind elfogynak, és egyetlen csepp marad csak, ami egyensúlyba kerül a telített gőzével.

A felület görbületéből adódó gőznyomás-különbség $\rho_g \ll \rho_f$ miatt sokkal kisebb, mint az r sugárhoz tartozó görbületi nyomás, de ahhoz elegendő, hogy hosszú idő alatt létrehozza a leírt jelenséget.

M. 167. Ha egy R sugarú, α felületi feszültségű (tehát felületegységenként α energiával rendelkező) vízcsepp sugara kicsiny ΔR értékkel csökken, akkor a felületi energiája

$$\Delta E_{\text{felületi}} = 4\pi\alpha [R^2 - (R - \Delta R)^2] \approx 8\pi\alpha R\Delta R$$

értékkel lesz kevesebb. Eközben a csepp térfogata $4\pi R^2 \Delta R$ -rel csökken, ennyi víz elpárologtatásához

$$\Delta E_{\text{párolgási}} = 4\pi L \rho R^2 \Delta R$$

energiára van szükség (ρ a víz sűrűsége, L pedig a párolgáshője).

A felületi energia csökkenése akkor tudná fedezni a csepp párolgásához szükséges energiát, ha $|\Delta E_{\text{felületi}}| > \Delta E_{\text{párolgási}}$ teljesülne, vagyis ha

$$R < \frac{2\alpha}{\rho L} \approx 7 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

teljesülne. Ekkora vízcsepp azonban *nem létezik*, hiszen ez a méret már egyetlen vízmolekula nagyságánál is kisebb (lényegében azzal egyező nagyságrendű). Önmagában, lehűlés nélkül párologni képes vízcsepp tehát nincsen (különben sem lehetne stabil képződmény), de a leírt gondolatmenet alkalmas arra, hogy segítségével (makroszkopikus fizikai jellemzők felhasználásával) becslést adjunk a molekulák méretére.

M. 168. A felületi víz hullámok terjedési sebessége a víz α felületi feszültségétől, a víz ρ sűrűségétől és a λ hullámhossztól függhet. Ezen mennyiségek dimenziója:

$$[\alpha] = \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}, \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad [\lambda] = \text{m}.$$

Ezekből a mennyiségekből úgy lehet sebességet „kikeverni”, ha α és ρ hányadosa szerepel benne (különben a „kg” nem esne ki!). Mivel azonban

$$\left[\frac{\alpha}{\rho} \right] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2},$$

osztanunk kell még a hullámhosszal, majd gyököt vonnunk, így kapunk sebesség dimenziót. Összefoglalva: dimenzionális megfontolásokból az adódik, hogy a kapilláris víz hullámok terjedési sebessége a hullámhossz négyzetgyökének reciprokával

arányos:

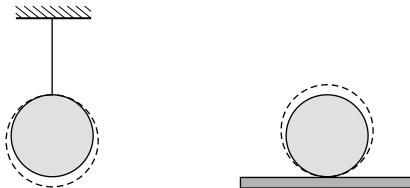
$$v \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\rho\lambda}} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Ebból a függvénykapcsolatból (és a megadott számadatból) arra következtethetünk, hogy a 10^{-8} cm nagyságrendű hullámhossztartományban érné el a felületi hullámok sebessége a hangét. Mivel azonban a felületi hullámok sebessége nem lehet nagyobb a hangsebességnél (a felület közelében sem „lökdőshetik” gyorsabban a molekulák egymást, mint az anyag belsejében), kb. 10^{-8} cm-es méretnél kisebb hullámhosszaknak nem lehet értelme. Valóban, ez a vízmolekulák méretének nagyságrendje!



Hőtan

M. 169. A hőtágulás miatt mindkét gömb mérete megnő. A fonálon függő gömb súlypontja lesüllyed, a lapon nyugvóé pedig megemelkedik.



A termodinamika első főtételének szigorú alkalmazása szerint a gömbökkel közölt hő nemcsak a belső energia növekedésére és (a külső légnyomás ellenében) kicsiny tágulási munkára fordítódik, hanem a gömbök gravitációs helyzeti energiájának változására is. A hőszigetelő lapon fekvő gömb helyzeti energiája kissé megnő, a fonálon függő gömbé pedig lecsökken.

Fordítsuk meg a feladatban feltett kérdést! Melyik esetben szükséges több hő közölnünk, ha ugyanakkora hőmérsékletváltozást szeretnénk elérni? Ilyenkor a gömbök sugara és belső energiája ugyanannyival változik, a tágulási munkák is megegyeznek, de a helyzeti energiájuk változása különböző előjelű lesz. Emiatt a hőszigetelő lapon fekvő gömbbel *több* hő kell közölnünk ahhoz, hogy mindkét test hőmérséklete ugyanannyival változzon meg. Innen már az eredeti kérdésre is adódik a válasz: ugyanakkora hőközlés hatására a hőszigetelő lapon fekvő gömb *kevésbé* melegszik fel, mint a fonálon függő másik gömb.

Megjegyzés. Érdekes numerikus becslést is végezni. Ha például 10 cm sugarú vasgolyók hőmérsékletét mintegy 100°C -kal emeljük, a két golyó hőmérséklete között kb. $5 \cdot 10^{-6}^\circ\text{C}$ különbség alakul ki, ami gyakorlatilag észrevehetetlen! A feladat mégis alkalmas arra, hogy rámutasson: a hőtan I. főtétele nem csak ideális gázokra alkalmazható.

M. 170. Tegyük fel, hogy van egy olyan kétrészes edényünk, amelynek egyik rekeszébe vizet, a másikba gyógyvizet tudunk önteni úgy, hogy nem keverednek össze, de a hőmérsékletük kiegyenlítődik. Feltételezzük, hogy hőcsere csak a két rekesz között történik, a környezetet nem melegítjük.

Amennyiben a „gyógyvíz” és a „víz” fajhőjét ugyanakkorának tekinthetjük, a kiegyenlített hőmérséklet az összetevők hőmérsékletének tömegükkel súlyozott számtani közepe lesz. Ha például M tömegű, (Celsius-fokban mérve) T_0 hőmérsékletű gyógyvizet és m tömegű 100°C -os vizet öntünk a rekeszekbe, a közös hőmérséklet

$$T_1 = \frac{M \cdot T_0 + m \cdot 100^\circ\text{C}}{M + m}$$

lesz. ($M = m = 1$ kg esetén 50°C lenne a közös hőmérséklet, ez nem elegendő!)

Osszuk fel a 100°C -os vizet 6 egyforma, $\frac{1}{6}$ kg-os részre! A hőcserélő edény egyik rekeszébe helyezzük el a gyógyvizet, a másik felébe először $\frac{1}{6}$ kg 100°C -os vizet. A hőmérséklet kiegyenlítődése után a közös hőmérséklet a fenti összefüggés alapján

$$T_1 = \frac{1 \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 100}{\frac{7}{6}} = 14,3^\circ\text{C}.$$

Öntsük most ki a lehűlt „vizet”, és töltsünk a helyére $\frac{1}{6}$ kg 100°C -os vizet! Hőcsere után

$$T_2 = \frac{1 \cdot 14,3 + \frac{1}{6} \cdot 100}{\frac{7}{6}} = 26,5^\circ\text{C}$$

közös hőmérséklet alakul ki. Az eljárást tovább ismételve a 6. hőcsere után a gyógyvíz hőmérséklete $T_6 = 60,3^\circ\text{C}$, tehát a feladat követelményének megfelelő lesz.

Megjegyzés. 1. A feladatot általánosabban is tárgyalhatjuk. Ha nem 6, hanem tetszőleges n részre osztjuk a T_f hőmérsékletű „forró vizet”, és az egyes részeket egymás után termikus kapcsolatba hozzuk a kezdetben T_0 hőmérsékletű hideg vízzel, akkor az első hőcsere után a kialakuló közös T_1 hőmérsékletre a kalorimetrikus egyenlet így írható:

$$cm(T_1 - T_0) = c \frac{m}{n}(T_f - T_1), \quad \text{ahonnan} \quad T_1 = \frac{T_f + nT_0}{n+1}.$$

A második hőcsere után kialakuló hőmérséklet

$$T_2 = \frac{T_f + nT_1}{n+1} = \frac{(2n+1)T_f + n^2T_0}{(n+1)^2},$$

és így tovább. Az n -edik lépés végén

$$T_n = \frac{(n+1)^{n-1} + n(n+1)^{n-2} + \dots + n^{n-2}(n+1) + n^{n-1}}{(n+1)^n} T_f + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n T_0.$$

A megjelenő mértani sort összegezve a végső hőmérsékletre a

$$T_n = \left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right] T_f + \left(\frac{n}{n+1}\right)^n T_0$$

eredményt kapjuk. ($n = 6$ -ra visszakapjuk a korábban kiszámított $60,3^\circ\text{C}$ -os értéket; $n = 5$ -nél viszont csak $59,8^\circ\text{C}$, tehát 60 fok alatti érték adódik.)

Belátható, hogy n növelésével a végső hőmérséklet egyre nagyobb lesz, de tetszőlegesen nagy n -nél sem haladhatja meg a

$$T_\infty = \left(1 - \frac{1}{e}\right) T_f + \frac{1}{e} T_0$$

hőmérsékletet. Ez a határérték a feladatban szereplő számoknál $63,2^\circ\text{C}$, tehát alig nagyobb, mint a már $n = 6$ esetén is túllépett 60°C .

2. Az eddig tárgyalt módszernél a gyógyvizet nem osztottuk fel adagokra, úgy tekintettük, mintha a gyógyvizes edény bonthatatlan lenne. Ha megengedjük a gyógyvíz adagokra osztását, akkor sokkal hatásosabb melegítést érhetünk el. Osszuk fel először a

gyógyvizet is, a forró vizet is két-két egyforma részre. Ha fél liter 100°C -os víz hőmérsékleti egyensúlyba kerül fél liter 0°C -os vízzel, akkor mindkettő 50°C -os lesz. Ezután egyenlítsük ki a megmaradt fél liter 100°C -os víz és a már felmelegedett fél liter 50°C -os víz hőmérsékletét, ami fél liter 75°C -os gyógyvizet eredményez. De ne elégedjünk meg ennyivel, hanem engedjük kiegyenlítődni az 50°C -ra lehűlt forróvizet és a maradék fél liter 0°C -os vizet is, ami 25°C -os közös hőmérsékletet ad. Hozzuk érintkezésbe ezt a 25°C -os gyógyvizet a fél liter 75°C -os meleg vízzel, így a fél liter 75°C -os gyógyvizünk mellé még kitermelünk fél liter 50°C -os gyógyvizet, amit összeöntve egy liter $62,5^\circ\text{C}$ -os gyógyvízhez jutunk.

Ha a forróvizet is, a gyógyvizet is három-három részre osztjuk, akkor a fenti módszerrel végül $68,75^\circ\text{C}$ -os gyógyvízhez juthatunk, ami már lényegesen magasabb, mint a gyógyvíz bonthatatlanságát feltételező megoldásunk elvileg elérhető maximális értéke. Meglepő, hogy a felosztás finomításával tetszőlegesen közel kerülhetünk ahhoz, hogy végeredményben a gyógyvizet 100°C -ra melegítsük fel. Ezt az elvet használják ki az úgynevezett ellenáramú hőcserélőkben, ahol hosszú szakaszon egymással szemben áramlik például a kinti friss, hideg levegő és az épület elhasznált, meleg levegője. Gyakorlatban a különböző veszteségek miatt természetesen 100%-os hatásfokú hőcsere nem valósítható meg, de 90% elérhető. A természetben a hideg környezetben élő, állandó testhőmérsékletű állatok hajszálérhálózata alkot nagyon jó hatásfokú hőcserélőt, ahol a vénás erekben visszafelé áramló vért a közelükben haladó meleg artériás vér melegíti fel, aminek hatására a test felszínén a vér közel környezeti hőmérsékletre hűl le, miközben a test belsejében megmarad az állatok környezetükhöz képest magas testhőmérséklete.

M. 171. A gáz belső energiája arányos a gáz T abszolút hőmérsékletével, a gázmolekulák (átlagos) mozgási energiája pedig a molekulák v sebességének négyzetével arányos, emiatt $v^2 \sim T$. Ha a fal melegebb, mint a gáz ($T_1 > T$), akkor a visszapattanó részecskék átlagos sebessége nagyobb lesz, mint amekkora az ütközés előtt volt (a fal melegíti a gázt). Amennyiben hidegebb a fal ($T_1 < T$), úgy éppen fordított a helyzet: a részecskék kisebb sebességgel pattannak vissza (a gáz lehűl).

A gázok – a molekulák nyelvén fogalmazva – azért nyomják az edény falát, mert a falnak ütköző és onnan visszapattanó részecskék lendülete megváltozik. A melegebb falról nagyobb sebességgel visszapattanó részecskék impulzusának változása nagyobb, mint a hidegebb falról kisebb sebességgel visszapattanó részecskéké. Mivel a két esetben az ütközések gyakorisága megegyezik, a gáz a melegebb falra nagyobb nyomást fejt ki, mint a hidegebbre.

Megjegyzés. Ezzel a hatással lehet magyarázni a „fénymalom” (radiométer) furcsa forgását. Ha egy finoman csapágyazott lapátkerék lapátjainak egyik oldalát feketére festjük, a másikat pedig tükrözővé tesszük, akkor megvilágítás hatására a kerék forgásba jön. Első ránézésre azt gondolhatnánk, hogy a fény nyomása forgatja a kereket. Ez azonban nem lehet igaz, hiszen a tapasztalat szerint a lapátok tükröző (a fényt jobban visszaverő és emiatt nagyobb lendületváltozást okozó) oldala mozog előre! Az elfogadható magyarázat: a lapátok fekete oldala jobban felmelegszik, emiatt az azokról visszapattanó gázmolekulák nagyobb nyomást (nagyobb forgatónyomatékat) fejtenek ki a kerékre, mint a fényes oldalon.

M. 172. Első ránézésre azt gondolhatnánk, hogy állandósult állapotban a külső és a belső nyomás megegyezik; ez azonban *nem* igaz! A rendszer ugyanis nincs termodinamikai egyensúlyban a környezetével (hiszen a hőmérséklete magasabb, mint a környezeté, és a kicsiny lyuk miatt nem tekinthetjük elszigeteltnek), csupán időben állandósult (stacionárius) állapotban található. Ez annyit jelent, hogy egységnyi idő alatt ugyanannyi gázmolekula hagyja el a lyukon keresztül a kemencét, mint amennyi oda kívülről visszakerül.

Egy A területű lyukon t idő alatt $AvNt$ számú molekula halad keresztül, ahol v a molekulák átlagsebességének a falra merőleges komponense, N pedig az egységnyi térfogatban található részecskék száma (részecskesűrűség). Dinamikus egyensúlyban

$$Av_{\text{kint}}N_{\text{kint}}t = Av_{\text{bent}}N_{\text{bent}}t, \quad \text{azaz} \quad \frac{v_{\text{kint}}}{v_{\text{bent}}} = \frac{N_{\text{bent}}}{N_{\text{kint}}}.$$

Tudjuk továbbá, hogy a molekulák sebességének négyzete (a gáz belső energiája) a hőmérséklettel, a részecskesűrűség pedig (az általános gáztörvény szerint) a hőmérséklet és a nyomás hányadosával arányos:

$$\frac{v_{\text{kint}}}{v_{\text{bent}}} = \sqrt{\frac{T_{\text{kint}}}{T_{\text{bent}}}} \quad \text{és} \quad \frac{N_{\text{kint}}}{N_{\text{bent}}} = \frac{T_{\text{bent}}}{T_{\text{kint}}} \cdot \frac{p_{\text{kint}}}{p_{\text{bent}}}.$$

Ezekből az összefüggésekből végül

$$p_{\text{bent}} = p_{\text{kint}} \sqrt{\frac{T_{\text{bent}}}{T_{\text{kint}}}} = 100 \text{ kPa} \cdot \sqrt{\frac{330 \text{ K}}{273 \text{ K}}} \approx 110 \text{ kPa}$$

adódik.

Megjegyzés. A megoldás során feltételeztük, hogy a lyuk irányába mozgó gázmolekulák (mindkét irányból) akadálytalanul átjutnak a nyíláson. Ez csak akkor igaz, ha a lyuk mélysége kisebb, mint az egy molekula által két egymást követő ütközés között megtett (átlagos) út, az ún. *átlagos szabad úthossz*. Normál állapotú levegőre a szabad úthossz kb. 10^{-7} m, tehát igen kicsiny távolság! Reális falvastagságú kemence esetén a leírt közelítés akkor lehet jogos, ha a gáz nyomása (kívül is és belül is) sokkal kisebb, mint a légköri nyomás.

M. 173. Jelöljük a dugattyú keresztmetszetét A -val, a kezdeti helyzet és az új egyensúlyi helyzet közötti függőleges elmozdulást pedig y -nal (lásd az *ábrát*).

A dugattyúra akasztott G súlyú test helyzeti energiájának csökkenése a hengerben lévő levegő belső energiáját és a mozgásba jött testek mozgási energiáját növeli. A lengések lecsillapodása után az energia megmaradását kifejező egyenlet:

$$(1) \quad G \cdot y = \frac{5}{2} [p_1 A(h - y) + p_2 A(h + y) - 2p_0 Ah],$$

ahol p_1 az alsó és p_2 a felső féltérben kialakuló nyomást, p_0 pedig az eredeti nyomást jelöli. (Felhasználtuk, hogy a kétatomos gázok belső energiája $\frac{5}{2}pV$ alakban

is felírható.) Amennyiben a G súly nagyon nagy, a helyzeti energia csökkenése (és emiatt a gázok belső energiájának növekedése is) igen nagy érték, ami mellett a levegő kezdeti belső energiáját elhanyagolhatjuk:

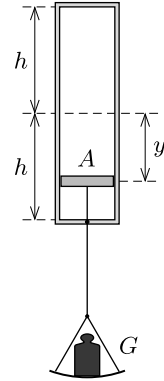
$$(1') \quad G \cdot y = \frac{5}{2} [p_1 A(h - y) + p_2 A(h + y)].$$

A dugattyúra akasztott teher egyensúlyban van, ennek dinamikai feltétele:

$$(2) \quad (p_1 - p_2)A = G.$$

Tudjuk továbbá, hogy a két féltérben egyforma a hőmérséklet, és a gáz tömege is megegyezik, ezért a belső energiájuk is egyenlő:

$$(3) \quad \frac{5}{2} p_1 A(h - y) = \frac{5}{2} p_2 A(h + y).$$



Az (1'), (2) és (3) egyenletekből a dugattyú elmozdulására $y = \sqrt{5/7} h$ adódik, vagyis az alsó féltérben lévő gáz eredeti térfogatának $1 - \sqrt{5/7} \approx 15\%$ -ára nyomódik össze.

Megjegyzés. Meglepő módon azt kaptuk, hogy tetszőlegesen nagy súly esetén sem tart nullához az alsó féltérben lévő gáz térfogata (pedig azt tanultuk és tanítjuk, hogy a gázok könnyen összenyomhatóak)! A nagy terhelés nagyon megnöveli a bezárt levegő belső energiáját, tehát magas lesz a hőmérséklet, vagyis nemcsak a létrejövő nyomáskülönbség lesz igen nagy, hanem maga a nyomás is erősen megnő. A közelítő számítás szerint a nyomás mindkét oldalon G -vel arányosan nő, azonban az arányossági tényező az alsó részen $6 + \sqrt{35} \approx 12$ -szer nagyobb, vagyis nagy terhelések esetén az alsó részben közel 12-szer nagyobb a nyomás, mint felül.

A gyakorlatban a szerkezet mechanikai teherbírása és az alkalmazott anyagok olvadáspontja szab határt a terhelés korlátlan növelésének. Emellett az is kérdéses, hogy milyen hőmérsékletig lehet a levegőt kétatomos ideális gázként tárgyalni.

Ha a levegő kezdeti belső energiáját nem hanyagoljuk el, az eredmény:

$$\frac{y}{h} = \frac{\sqrt{35G^2 + 25p_0^2 A^2} - 5p_0 A}{7G}.$$

M. 174. Nézzük először az $a)$, azaz a hőszigetelő esetet! Legyen a gáz kezdeti nyomása p_1 , térfogata V_1 , a végállapotban pedig jelöljük a nyomást p_2 -vel, a térfogatot V_2 -vel! A kis lyuk miatt a gáz lassan szívárog át a felső térrészből az alsóba, azaz a dugattyúk egyenletesen mozognak, a rájuk ható erők eredője végig nulla. Ez azt jelenti, hogy a két térrészben a nyomás állandó p_1 , illetve p_2 értékű marad. A gáz átszivárgása során a felső dugattyú által végzett munka $p_1 V_1$, az alsó dugattyúé pedig $-p_2 V_2$. A gáz hőfelvétele zérus, így az első főtétel értelmében az összes végzett munka egyenlő a gáz belső energiájának megváltozásával:

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = \frac{f}{2} p_2 V_2 - \frac{f}{2} p_1 V_1.$$

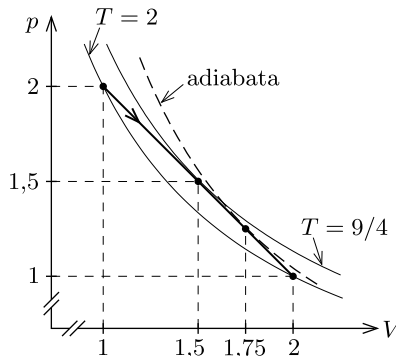
Ebből $p_1V_1 = p_2V_2$ adódik, azaz a gáz belső energiája, és így hőmérséklete a végállapotban ugyanakkora, mint kezdetben (ami egyenlő a külső levegő hőmérsékletével).

A *b)* esetben is megegyezik a végállapotbeli hőmérséklet a kezdetivel, hiszen a gáz a környezetével mindvégig termikus egyensúlyban van. Az *a)* és a *b)* esetben tehát a végső hőmérséklet és a végső nyomás megegyezik, így a végső térfogatoknak is meg kell egyezniük. A válasz tehát: *ugyanolyan* mélyre kerül a két esetben a dugattyú.

Megjegyzés. Könnyen rossz eredményre juthatunk, ha az adiabatikus folyamatokra érvényes $pV^\kappa = \text{állandó}$ összefüggést próbáljuk használni (itt κ a gázra jellemző fajhőviszony). Ez a formula csak olyan *reverzibilis* folyamatokra igaz, amelyekben a gáz hőfelvétele nulla, és emiatt a gáz entrópiája állandó. A feladatbeli folyamat mélyen *irreverzibilis*, hiszen a lyukon átréselődő gáz mozgási energiára tesz szert, ami a gáz belső súrlódása folytán gyorsan disszipálódik és termikus energiává alakul. Ezért bár $Q = 0$ fennáll, a gáz entrópiája növekszik. Mivel az entrópia állapotjelző, ezért nem lehet ugyanaz a gáz végállapota, mint ami a $pV^\kappa = \text{állandó}$ összefüggés *hibás* alkalmazásából kapható.

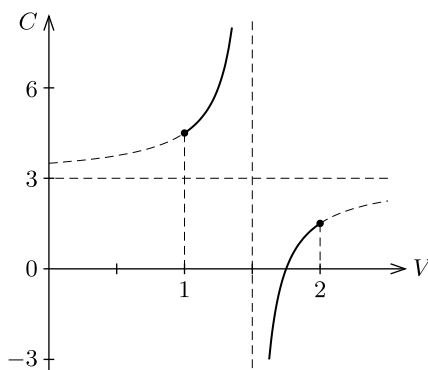
Egy másik közismert példa olyan esetre, amikor a hőfelvétel zérus, de a pV^κ kifejezés mégsem állandó: ideális gáz tágulása vákuumba. Ez a folyamat is irreverzibilis (a gáz a vákuumból nem mászik vissza a nyitott tartályba), ezért a gáz entrópiája növekszik. A munkavégzés nulla, ezért a hőtan I. főtétele értelmében a gáz belső energiája, és így hőmérséklete sem változik.

M. 175. A számolás egyszerűsítése érdekében válasszunk olyan egységrendszert, amelyben a kezdeti térfogat is és a külső légnyomás is egységnyi. Válasszunk meg úgy a gázállandó mértékegységét, hogy számértéke egységnyi legyen, és vizsgáljunk mólnyi anyagmennyiséget! Ez az általánosság megsértése nélkül megtehető, hiszen n mol levegővel az 1 mol levegőhöz képest éppen n -szer több hőt kell közölnünk, hogy a higany távozzon a csőből. Az állapotegyenlet ekkor így egyszerűsödik: $pV = T$, azonban a hőmérséklet egységét már nem választhatjuk meg szabadon, hanem azt a nyomás és a térfogat szorzata határozza meg. Ebben az egységrendszerben a mólhő olyan szám lesz, amiből a megszokott mólhőt úgy kaphatjuk meg, hogy egyszerűen megszorozzuk a gázállandóval.



1. ábra

Kezdetben a gáz nyomását a felette lévő 76 cm-es higanyoszlop és a külső légnyomás adja, ami összesen 2 egységnyi nyomást jelent. Ahány cm-rel tágul a gáz, annyival csökken a felette lévő higanyoszlop magassága, tehát miközben a gáz térfogata 1 egységtől 2-re növekszik, a nyomása 2-ről 1-re csökken lineárisan, ahogy ezt az 1. ábra mutatja. A bezárt levegő kezdeti hőmérséklete 2 egység, és ugyanekkora a hőmérséklet az ábrán látható egyenes szakasz végén is, hiszen ezek a pontok a $pV = 2$ izotermán vannak. Ebben az ábrázolásban az izotermák a p - V tengelyek szögfelezőjére szimmetrikusak, tehát a folyamat közben a legmagasabb hőmérsékletet akkor érjük el, amikor annak izotermája már nem metszi, hanem az 1. ábrán látható módon csak érinti az egyenest. Ez a folyamat közepén, a $p = \frac{3}{2}$, $V = \frac{3}{2}$ pontokban következik be, vagyis a maximális hőmérséklet $\frac{9}{4}$.



2. ábra

A folyamatot leíró egyenes egyenlete $p = 3 - V$. Írjuk fel a termodinamika első főtétele a folyamat egy tetszőleges elemi szakaszára:

$$\frac{5}{2}\Delta T = C\Delta T - p\Delta V,$$

ahol a bal oldalon a belső energia változása szerepel (a levegő kétatomos gáz, ezért $C_V = \frac{5}{2}$), a jobb oldalon a hőközlés kifejezésében találhatjuk a keresett C mólhőt. Az egyenes egyenletéből fejezzük ki a nyomást a térfogattal, és a térfogatváltozást alakítsuk át hőmérsékletváltozássá. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a $pV = T$ állapotegyenletbe is beírjuk a nyomást: $(3 - V)V = T$, majd képezzük mindkét oldal kicsiny megváltozását: $(3 - 2V)\Delta V = \Delta T$. Az összes művelet elvégezve az első főtétele így alakul:

$$\frac{5}{2}\Delta T = C\Delta T - \frac{3 - V}{3 - 2V}\Delta T.$$

ΔT -vel egyszerűsíthetünk, majd kifejezhetjük a folyamat mólhőjét:

$$C = \frac{21 - 12V}{6 - 4V}.$$

A mólhő a térfogat függvényében a 2. ábra mutatja. Láthatjuk, hogy $V = \frac{3}{2}$ térfogatnál a mólhő végtelenhez tart, ami annak felel meg, hogy ekkor az egyenes jól közelíti a maximális hőmérséklethez tartozó izotermát. Izotermikus folyamat közben hőközlés van, hőmérsékletváltozás nincs, ezért válik végtelenné a mólhő. A térfogatot tovább növelve a mólhő negatív értéket vesz fel, ami azt jelenti, hogy hiába pozitív a hőközlés, a gáz belső energiája csökken, mert a hőközlésnél nagyobb a gáz által végzett munka.

A folyamat legérdekesebb része akkor következik be, amikor $V = \frac{7}{4}$ -nél (ekkor a higanynak már csak negyede van a csőben) a mólhő nullává válik. Ez éppen az adiabatikus folyamatnak felel meg, hiszen hőközlés nincs, hőmérsékletváltozás azonban van. Ebben a pontban a folyamatot leíró egyenes éppen érinti a ponton áthaladó adiabatát. Ezután a hőmérsékletnek tovább kellene csökkennie, miközben a mólhő pozitívvá válik. Ezt (mindvégig egyensúlyi állapotokon haladva) csak hőelvonással érhetnénk el.

Ha viszont nem hűtjük, hanem – a feladat eredeti megfogalmazása szerint – tovább melegítjük a rendszert, akkor az állapotot jellemző pont a p - V diagramon már *nem követi* az egyenest, hanem önálló életet kezd élni, végigfut az érintett adiabatán! A levegő hőmérséklete csökken ugyan, de nem annyit, amennyit az egyenes előírna számára. A levegő belső energiájának csökkenése a külső légnyomás ellenében végzett tágulási munkán és a maradék higany felemelésén kívül még a higany felgyorsítását is fedezi: a higany *kilövell* a csőből!

Visszatérve a feladat eredeti kérdésére, hogy mekkora hőközlés kell a higany eltávolításához, láthatjuk, hogy csak $V = 1$ -től $V = \frac{7}{4}$ -ig kell hőt közölnünk. Az első főtételen alapuló számolással meggyőződhetünk arról, hogy eddig a pontig a gáz által végzett munka sajátos egységrendszerünkben $\frac{39}{32}$, míg a belső energia növekedése $\frac{15}{32}$, tehát a szükséges hőközlés: $Q = \frac{27}{16}$. Közös egységekre (joule) visszatérve, ha a csőben a higany n mólnyi levegőt zár el, akkor a kiszabadításához szükséges hőközlés nagysága: $\frac{27}{16}nR \approx 34$ mJ.

M. 176. A talajtól számított h magasságban uralkodó nyomáshoz képest kicsiny Δh -val magasabban a légnyomás

$$\Delta p = -\rho(h)g\Delta h$$

értékkel alacsonyabb; itt $\rho(h)$ a levegő sűrűsége, g pedig a nehézségi gyorsulás. Az ideális gázok állapotegyenletének felhasználásával a sűrűséget kifejezhetjük a levegő nyomásával és hőmérsékletével, így a

$$(1) \quad \frac{\Delta p}{\Delta h} = -\frac{Mg}{R} \frac{p(h)}{T(h)}$$

összefüggést kapjuk, ahol $M = 29$ g/mol a levegő átlagos moláris tömege, R pedig az egyetemes gázállandó.

Képzeljük el, hogy az időben állandósult hőmérsékleteloszlású troposzféra h magasságban lévő, $T(h)$ hőmérsékletű, kis térfogatú darabja *hirtelen* kicsiny Δh értékkel magasabbra emelkedik. Ennek során (a feladat szövegében említett rossz

hővezetőképesség miatt) a vizsgált légtömeg lényegében nem tud hőt felvenni, ezért adiabatikusan kitágul, és lehül. Ha a felemelkedett levegőrész T' végső hőmérséklete nagyobb a környező levegő ott található $T(h + \Delta h)$ hőmérsékleténél, akkor a környezeténél ritkább gáztömeg tovább emelkedik felfelé, a légkör instabillá válik. Ha viszont a felemelkedett légtömeg hőmérséklete a környező levegő hőmérsékleténél alacsonyabb értékre csökken, akkor a levegő visszasüllyed eredeti helyére, az egyensúly stabil. A két eset elválasztó határesetben $T' = T(h + \Delta h)$, a továbbiakban ezt fogjuk vizsgálni.

Az adiabatikus tágulás miatt a felemelkedett levegő hőmérséklete és nyomása között fennáll a $p^{1-\kappa}T^\kappa = \text{állandó}$ összefüggés (itt $\kappa \approx 7/5$ a levegő fajhőhányadosa), ebből

$$(2) \quad \frac{p(h + \Delta h)}{p(h)} = \left[\frac{T(h + \Delta h)}{T(h)} \right]^{\kappa/(\kappa-1)}.$$

Bevezetjük a nyomás és a hőmérséklet kicsiny Δp és ΔT megváltozásait:

$$\Delta p = p(h + \Delta h) - p(h), \quad \Delta T = T(h + \Delta h) - T(h).$$

Ezek segítségével a (2) egyenlet a következő alakra írható:

$$1 + \frac{\Delta p}{p(h)} = \left[1 + \frac{\Delta T}{T(h)} \right]^{\kappa/(\kappa-1)}.$$

A jobb oldalon szereplő $\Delta T/T(h) \equiv \varepsilon$ hányados kicsiny, ezért használhatjuk az $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ közelítést:

$$(3) \quad \frac{\Delta p}{p(h)} \approx \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{\Delta T}{T(h)}.$$

Az (1) és (3) egyenletek segítségével megkapjuk a troposzférára jellemző kritikus hőmérsékletgradiens értékét:

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{Mg}{R}.$$

Az ismert adatokat ($\kappa \approx 1,4$) behelyettesítve $-9,8 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/m}$ eredmény adódik, ami jó közelítéssel éppen a 100 méterenkénti $1 \text{ }^\circ\text{C}$ -os hőmérsékletcsökkenést jelenti. Az állandó hőmérsékletgradiens miatt a hőmérséklet a magasság lineáris függvénye:

$$(4) \quad T(h) = T_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{h}{h_0} \right),$$

ahol bevezettük a $h_0 = RT_0/(Mg)$ jelölést. (A levegő felszíni hőmérsékletét $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ -nak véve $h_0 \approx 8,6 \text{ km}$).

Megjegyzések. 1. A levegő nyomásának magasságfüggését a (4) egyenletből a

$$p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{állandó}$$

összefüggés segítségével határozhatjuk meg:

$$(5) \quad p(h) = p_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{h}{h_0} \right)^{\kappa/(\kappa-1)},$$

itt p_0 a légnyomás a tengerszinten. Ez a (gyakran adiabatikus magasságformulának nevezett) kifejezés $h < h_0$ magasságok esetén a $p(h) = p_0 e^{-h/h_0}$ barometrikus magasságformulához nagyon közeli értékeket ad eredményül. A két egyenlet között azonban van két lényeges eltérés: i) a barometrikus magasságformula levezetése során a légkörben állandó hőmérsékletet tételezünk fel; ii) az (5) egyenlet $h = h_0 \kappa / (\kappa - 1) \approx 30$ km magasságnál zérus légnyomást jósol, míg a barometrikus magasságformula szerint a légkörnek nincs éles határa. Valójában a (4) és az (5) egyenletek ennél jóval kisebb magasságokban, a troposzféra és a sztratoszféra határán (10–12 km) elveszítik érvényességüket.

2. Az adiabatikus magasságformula alapján kiszámolhatjuk a hőmérsékletet abban a magasságban, ahol az utasszállító repülőgépek haladnak. Eredményül a felszíni hőmérsékletnél mintegy 100°C -kal alacsonyabb, azaz -80°C -os értéket kapunk. Ténylegesen ilyen magasságban a hőmérséklet ennél valamivel nagyobb, -60°C . Az eltérést a légkörben jelenlévő vízgőz okozza. A felszálló légtömeg lehülése közben a benne található vízgőz egy része kicsapódik, ez hőfejlődéssel jár, ami megakadályozza a hőmérséklet olyan nagy arányú csökkenését, amit a (4) egyenlet diktál. A magasabb hőmérséklet kisebb sűrűséget jelent, tehát a felfelé elinduló párás légtömeg erőteljes felhőképződés közben nagy magasságokig jut el. A Föld nagy páratartalmú területein (a trópusokon) a légkörben felfelé haladva a hőmérséklet csökkenésének üteme emiatt jóval kisebb az adiabatikus légkör esetén kapott értéknél. A (4) formula tehát alacsony páratartalmú területeken ad igen jó egyezést a mérési eredményekkel.

M. 177. I. megoldás. A könnyen táguló burok ugyanazt a szerepet tölti be, mint egy tartályt lezáró csőben könnyen mozgó dugattyú, a továbbiakban tehát ezt a szóhasználatot fogjuk követni.

Ha a külső nyomást lassan csökkentjük, akkor a dugattyú lassan mozdul el, közbenső állapotai lényegében egyensúlyinak tekinthetők. Ilyenkor a bezárt gáz állapotváltozása adiabatikus, belső energiájának csökkenése éppen a gáz által végzett tágulási munkával egyenlő.

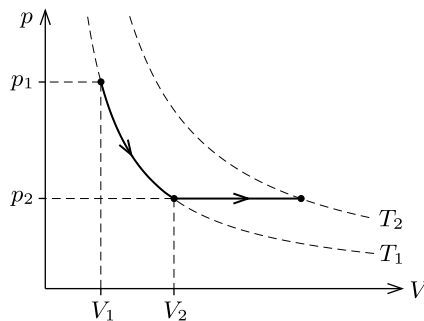
A második esetben, amikor a külső légnyomást hirtelen csökkentjük, a dugattyúra ható erők eredője nem lesz nulla. A dugattyú tehát gyorsulni kezd, sebessége eleinte nő, majd az egyensúlyi helyzeten átlendülve fokozatosan lassulva megáll, és elindul visszafelé. Ha nem lenne súrlódás (sem a dugattyú és a tartály fala között, sem pedig a gáz „belső súrlódása” nem játszana szerepet), akkor a dugattyú sosem állna meg, a térfogata, nyomása és hőmérséklete is periodikusan váltakozna, nem lenne értelme tehát a gáz kialakuló hőmérsékletéről beszélni. A valóságban azonban nem ez történik, a rezgés előbb-utóbb megáll, mert a dugattyú (rendezett) mozgási energiája disszipálódik, a rendezetlen hőmozgásnak megfelelő belső energiát növeli. A gáz végső (egyensúlyi) térfogata,

és ezzel arányosan a belső energiája és a hőmérséklete a második esetben nem lehet ugyanakkora, mint amekkorák ezek a mennyiségek az első (kvázisztatikus) esetben, hanem azoknál nagyobb, hiszen a belső energia csökkenése kisebb, mint a gáz által végzett tágulási munka, és az energiakülönbség (vagy annak egy része) a súrlódáson keresztül „visszakerül” a gáz + dugattyú rendszerbe.

A tartályban (burokban) lévő gáz hőmérséklete tehát akkor csökken jobban, ha a külső nyomás lassan csökken.

II. megoldás. Abban az esetben, amikor a külső nyomást lassan csökkentjük, a gáz egyensúlyi állapotokon halad keresztül, ezért a folyamat megfordítható, reverzibilis. Ezzel szemben a hirtelen lecsökkenő külső nyomásnál a gáz közbenső állapotai nem tekinthetők egyensúlyinak. A burok gyors rezgésbe kezd, amely végül a disszipatív folyamatok miatt lecsillapodik: a rendszer állapotváltozása irreverzibilis.

A hőtan II. főtétele értelmében egy rendszer entrópiájának ΔS változása reverzibilis folyamatoknál a $\Delta Q/T$ mennyiségek összege (integrálja), irreverzibilis folyamatoknál pedig ennél nagyobb. Az első esetben a folyamat reverzibilis, továbbá (a burok hőszigetelése miatt) nincs hőközlés ($\Delta Q = 0$), így $\Delta S_{\text{rev}} = 0$. A második (gyors nyomáscsökkenésnek megfelelő) esetben a folyamat irreverzibilis, a gázzal közölt hő pedig vagy nulla (ha a rezgés csillapodását a gáz belső súrlódása okozza), vagy pedig pozitív (ha a burok súrlódása is számottevő). Akármelyik eset áll is fenn, $\Delta S_{\text{irrev}} > 0$.



Egy bizonyos mennyiségű gáz entrópiájának megváltozása független a folyamat részleteitől, a kezdeti állapot és a végállapot egyértelműen meghatározza. Másképp megfogalmazva: az entrópia állapotjelző, amely kifejezhető más állapotjelzőkkel, pl. a nyomással és a hőmérséklettel. Jelölje T_1 a gáz kezdeti, T_2 pedig a végállapotbeli hőmérsékletét. Az entrópiaváltozás kiszámításához tekintsünk egy olyan folyamatot, melyben a nyomást először állandó T_1 hőmérsékleten p_1 -ről p_2 -re csökkentjük, majd állandó p_2 nyomáson a gázt T_2 hőmérsékletre melegítjük.

Az entrópia megváltozása az első, izoterm szakaszban:

$$\Delta S_1 = \frac{Q}{T_1} = \frac{W_{\text{gáz}}}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1}{V} dV = \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1} = -nR \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

A második, izobár folyamatban pedig:

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} nC_p \frac{dT}{T} = nC_p \ln \frac{T_2}{T_1},$$

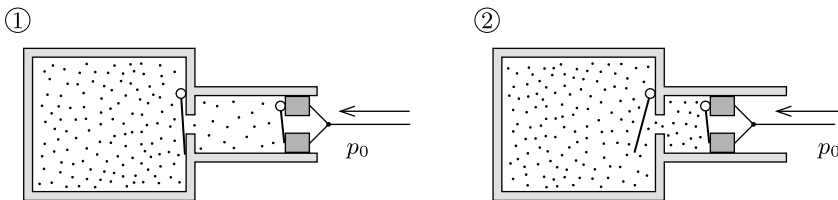
ahol C_p a gáz állandó nyomáson vett mólhője. A (T_1, p_1) állapotból a (T_2, p_2) állapotba kerülő gáz entrópiaváltozása:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = nC_p \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

A vizsgált folyamatokban a kezdeti és végső nyomás aránya ugyanakkora, a reverzibilis és az irreverzibilis entrópiaváltozás közötti különbségből tehát a végső hőmérsékletek közötti különbségre következtethetünk. Mivel $\Delta S_{\text{irrev}} > \Delta S_{\text{rev}}$, ezért a végállapotban $T_{\text{gyors}} > T_{\text{lassú}}$.

A burokból lévő gáz tehát gyorsan csökkentett külső nyomás esetén kevésbé hűl le, mint amikor a nyomáscsökkenés lassan következik be.

M. 178. A pumpa működése közben minden összenyomási ciklus két szakzra bontható. Kezdetben mindkét szelep zárva van, a pumpában pedig a külső légköri nyomással megegyező nyomású levegő található (lásd az *ábra* bal felét). A dugattyú az 1 literes térrészben lévő gázt izotermikusan összenyomja. Amikor a pumpában lévő gáz nyomása eléri a tartályban lévő gáz nyomását, akkor a belső szelep kinyit, és a továbbiakban az egész gázmennyiség nyomódik össze izotermikusan (ez látható az *ábra* jobb oldalán). A belső szelep kinyitásának pillanata a pumpálási ciklusokon belül egyre későbbre toódik, emiatt meglehetősen bonyolult a teljes munkavégzés kiszámítása. Szerencsére van egyszerűbb eljárás is!



Tekintsük azt a gázmennyiséget, amely a folyamat végén a tartályba kerül. Ez egyrészt az eredetileg is ott lévő 10 liternyi levegő, továbbá még 9-szer ennyi, tehát összesen 100 liternyi (kezdetben légköri nyomású) levegő. Ezt a gázmennyiséget nyomjuk össze 10 liternyire.

A hőtan első főtétele szerint a gázon végzett W munka és a gáz által felvett Q hőmennyiség összege a gáz belső energiáját növeli. Jelen esetben a gáz hőmérséklete nem változik, így a belső energiája is ugyanakkora marad, mint kezdetben volt. Eszerint $W + Q = 0$, vagyis a gázon végzett munka éppen a leadott hővel, $-Q$ -val egyenlő.

Másrészt viszont tudjuk, hogy *állandó* T hőmérsékleten, reverzibilis folyamat során a gáz entrópiájának változása $\Delta S = Q/T$. Ha tehát ki tudnánk számítani a gáz entrópiaváltozását, abból már a leadott hőt és a munkavégzést is meghatározhatnánk.

Ha N molekulát 10-szer kisebb helyre „zsúfolunk össze”, akkor a lehetséges mikroállapotok száma az eredetinek $1/10^N$ -szerese lesz. Az entrópia statisztikus értelmezése szerint a gáz entrópiaváltozása ezen szám logaritmusának Boltzmann-állandó-szorosa:

$$\Delta S = k \ln \left(\frac{1}{10^N} \right) = -Nk \cdot \ln 10.$$

A gáz által leadott hő innen:

$$-Q = -T\Delta S = NkT \ln 10 = nRT \ln 10 = 10p_0V_0 \ln 10,$$

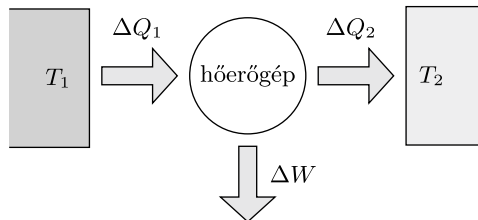
és ugyanennyi a keresett munkavégzés is:

$$W = 10 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \ln 10 \approx 23 \text{ kJ}.$$

Megjegyzés. A gáz entrópiaváltozását nemcsak a statisztikus értelmezés, hanem a termodinamikai értelmezés alapján is kiszámíthatjuk. A 177. feladat II. megoldásában láthattuk, hogy ideális gázok izotermikus tágulása esetén az entrópia megváltozása:

$$\Delta S_{\text{izoterm}} = -nR \ln \frac{p_2}{p_1} = -nR \ln 10.$$

M. 179. A két vízzel teli tartályból mint hőtartályokból úgy vehetünk ki munkát, hogy közöttük hőerőgépet működtetünk. Általában a hőtartályok hőkapacitása olyan nagy a hőerőgép munkavégző közegének (gáz) hőkapacitásához képest, hogy a tartályok hőmérsékletváltozása egy-egy cikluson belül elhanyagolható. Sok ciklus után azonban a hidegebb tartályt a munkavégző gáz felmelegíti, a melegebb tartályt pedig lehűti, egészen addig, míg a tartályok hőmérséklete ki nem egyenlődik. Ennek bekövetkezésekor a hőerőgép működése leáll, ez szab tehát határt a rendszerből kivehető maximális munkának.



Ha egy T abszolút hőmérsékletű test kicsiny ΔQ hőt vesz fel (miközben hőmérséklete elhanyagolható mértékben változik meg), akkor az entrópiaváltozása $\Delta S \geq \Delta Q/T$. (Az egyenlőség reverzibilis folyamatok esetén áll fenn.) A munkavégző gáz egy ciklus alatti teljes entrópiaváltozása (kvázisztatikus folyamatot

feltételezve) nulla, hiszen az entrópia állapotjelző. Ezért a két hőtartályból és a hőerőgépből álló teljes rendszer ciklusonkénti entrópiaváltozása a hőtartályok entrópiaváltozásának összegével egyenlő.

Jelöljük a T_1 hőmérsékletű víztartály kicsiny hőmérsékletváltozását ΔT_1 -gyel, a másik tartályét pedig ΔT_2 -vel. Az egész rendszer entrópiájának megváltozása egy ciklus alatt (az *ábra* jelöléseivel)

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} \geq 0,$$

ahonnan

$$T_2 \Delta Q_1 + T_1 \Delta Q_2 \geq 0.$$

A tartályokban lévő víz tömege egyenlő, emiatt a hőátadások és a hőmérsékletváltozások aránya mindkét tartályra ugyanaz, a fenti egyenlőtlenség tehát így írható:

$$T_2 \Delta T_1 + T_1 \Delta T_2 = \Delta(T_1 T_2) \geq 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a folyamat során a két víztartály hőmérsékletének mértani közepe nem csökkenhet (de esetleg növekedhet).

Ez az összefüggés minden egyes lépésben érvényes, tehát a kezdeti és a végállapot között is fennáll: a kialakuló közös hőmérséklet legalább $\sqrt{T_1 T_2}$ értékű. Ha semennyi energiát nem veszünk ki a rendszerből, akkor a közös hőmérséklet a kezdeti hőmérsékletek számtani közepe lesz. A munkavégzés formájában maximálisan kivehető energia tehát

$$c \cdot 2m \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \sqrt{T_1 T_2} \right) = cm \left(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1} \right)^2,$$

ahol c a víz fajhője. Ez akkor lenne lehetséges, ha a hőtartályok között ideális Carnot-gépet üzemeltetnénk.

M. 180. I. megoldás. A jég elolvadásának pillanatáig az állandó hőmérsékletkülönbség miatt a termoelem forrasztási pontjai között

$$U = S_{AB}(T_A - T_B)$$

nagyságú elektromos feszültség keletkezik, ahol S_{AB} a termoelemet alkotó anyagpár Seebeck-együtthatója. A feszültség hatására az áramkörben $I = U/R$ erősségű áram indul meg, így a vízbe helyezett R ellenállású fogyasztó

$$P_{\text{Joule}} = \frac{U^2}{R} = \frac{S_{AB}^2 (T_A - T_B)^2}{R}$$

teljesítménnyel melegíti a vizet.

Az áramkörben folyó áram hatására a Peltier-effektus miatt a B forrasztási pontnál hőfejlődés, az A csatlakozásnál pedig hőelvonás jelentkezik. A hőfelvétel és a hőleadás teljesítménye

$$P_A^{\text{fel}} = \Pi_A I = S_{AB} T_A I, \quad \text{illetve} \quad P_B^{\text{le}} = \Pi_B I = S_{AB} T_B I,$$

ahol felhasználtuk a Peltier- és Seebeck-együtthatók között fennálló kapcsolatot. Felvetődhet a kérdés, hogy honnan tudjuk biztosan a forrasztási pontokon lejátszódó hőcserék irányát. A teljesítmények kifejezéséből leolvasható, hogy a magasabb hőmérsékletű csatlakozásnál a hőcsere üteme nagyobb, így a fordított irányú folyamat (melyben az A forrasztásnál hő fejlődik, a B forrasztás pedig tovább hűti környezetét, és eközben még az ellenálláson Joule-hő is fejlődik) sértené az energiamegmaradás törvényét.

Az eddigiekből következik, hogy a vizet melegítő Joule-hő és a jégnek leadott hő aránya:

$$\frac{Q_{\text{Joule}}}{Q_B^{\text{le}}} = \frac{c \cdot m \cdot \Delta T_{\text{víz}}}{L \cdot m} = \frac{P_{\text{Joule}}}{P_B^{\text{le}}} = \frac{T_A - T_B}{T_B},$$

ahol c a víz fajhője, L a jég olvadáshője, m pedig a jég és a víz azonos tömege. A víz hőmérsékletének emelkedése tehát a jég elolvadásának pillanatáig:

$$\Delta T_{\text{víz}} = \frac{T_A - T_B}{T_B} \cdot \frac{L}{c} \approx 7,9^\circ\text{C}.$$

II. megoldás. A rendszerre tekinthetünk hőerőgépként: a meleg hőtartály a szoba levegője, a hideg hőtartály a 0°C -os jég, a munkavégzés pedig nem egy gázt elzáró dugattyú mozgási energiájának növelésére fordítódik, hanem az ellenálláson fejlődő Joule-hőt fedezi:

$$W = Q_{\text{Joule}}.$$

Az energiamegmaradás értelmében az ellenálláson disszipálódó energia egyenlő az A pontnál felvett hő és a B pontnál leadott hő különbségével:

$$Q_{\text{Joule}} = Q_A^{\text{fel}} - Q_B^{\text{le}}.$$

Bár az ellenálláson történő hőfejlődés irreverzibilis folyamat, a termoelem működése önmagában mégis *reverzibilis*, hiszen a termoelem által kicsatolt elektromos energiát használhatjuk arra is, hogy pl. egy akkumulátort töltünk fel vele, majd a jég elolvadása után erre az akkumulátorra kötjük a vizet melegítő fogyasztót. Ha viszont mégsem szeretnénk az akkumulátorban tárolt energiát vízmelegítésre használni, akkor a termoelemet az akkumulátorra kötve hőpumpát működtethetünk a jég és a szoba között: így a jég hűlni kezd, a szoba levegője pedig melegszik, a folyamat iránya tehát megfordul.

A folyamat reverzibilitásából következik, hogy a termoelem entrópiája időben állandó, vagyis az A pontnál történő hőfelvételből származó entrópiainövekedés egyenlő a B pontnál bekövetkező hőleadás során létrejött entrópiacsökkenéssel:

$$\frac{Q_A^{\text{fel}}}{T_A} = \frac{Q_B^{\text{le}}}{T_B}.$$

Ezt felhasználva az ellenálláson keletkező Joule-hő és a jég által felvett hő közötti kapcsolat:

$$Q_{\text{Joule}} = \left(\frac{T_A}{T_B} - 1 \right) Q_B^{\text{le}},$$

összhangban az I. megoldás eredményével. Innen a víz hőmérsékletváltozását már az ott leírt módon határozhatjuk meg.

Megjegyzés. A II. megoldásból látszik, hogy a termoelem egyfajta érdekes, „folytonos üzemű” Carnot-gépként működik: a meleg hőtartályból való hőfelvételre és a hideg hőtartálynak történő hőleadásra nem egy cikluson belül, egymás után kerül sor, hanem a két hőtartállyal való hőcsere folyamatosan, egy időben történik. Így érthetjük meg, hogy a feladat végeredménye nem függ egyetlen termoelektromos anyagi együtthatótól sem.

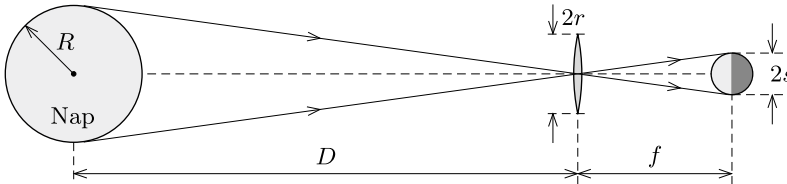
M. 181. A Nap felszíni T_{Nap} hőmérséklete, a Nap R sugara és a D Nap–Föld távolság ismert adatok; jelölje továbbá a lencse sugarát r , a fókusz távolságát pedig f . A Nap által kisugárzott teljes teljesítmény

$$4R^2\pi\sigma T_{\text{Nap}}^4,$$

ahol σ a Stefan–Boltzmann-állandó. Ebből a kisugárzott teljesítményből a lencsére $r^2\pi/(4D^2\pi)$ hányad jut, így a Nap lencse által előállított képét

$$P = \left(\frac{R}{D}\right)^2 \pi\sigma T_{\text{Nap}}^4 r^2$$

teljesítmény világítja meg.



Geometriai megfontolások alapján (lásd az erősen torzított méretarányú ábrát) a Nap képének sugara

$$s = \frac{R}{D}f,$$

így

$$P = s^2\pi\left(\frac{r}{f}\right)^2\sigma T_{\text{Nap}}^4.$$

A kép minden pontja azonos fényességű, vagyis a kép egységnyi felületű darabjára

$$w = \left(\frac{r}{f}\right)^2\sigma T_{\text{Nap}}^4$$

teljesítmény érkezik. Egy ekkora teljesítménnyel megvilágított tárgy addig a T hőmérsékletig melegszik, amíg a felvett teljesítmény és a test által kisugárzott $A\sigma T^4$ teljesítmény azonos nem lesz. Mivel ez utóbbi függ a test A felületétől, T függ a melegített test alakjától is. Ha pl. a test egy elhanyagolható vastagságú

$\varrho \leq s$ sugarú korong lenne, akkor a felvett teljesítmény $w\varrho^2\pi$, a leadott pedig $2\varrho^2\pi\sigma T^4$, így $T = (1/32)^{1/4}T_{\text{Nap}} \approx 2430 \text{ K} \approx 2160^\circ\text{C}$ lenne.

Ha a test egy $\varrho = s$ sugarú gömb (ez látható az ábrán), a felvett teljesítmény éppen P , a leadott pedig $4s^2\pi\sigma T^4$, innen $T = (1/64)^{1/4}T_{\text{Nap}} \approx 2040 \text{ K} \approx 1770^\circ\text{C}$.

Ha a gömb sugara kisebb, mint a Nap képének sugara ($\varrho < s$), akkor is ugyanennyire melegszik fel a gömb. Legyen pl. a gömb sugara kétszer kisebb, mint a képé. Ekkor az időegységenként rá eső sugárzás energiája a lencsére eső sugárzás energiájának negyede, de mivel a gömb felszíne is negyede az s sugarú gömbének, ezért ugyanakkora hőmérsékleten négyszer kevesebb energiát sugároz ki.

Amennyiben a gömb sugara nagyobb, mint a Nap képének sugara, továbbá az anyaga elég jó hővezető, akkor a hőmérséklete kisebb lesz, mint a fentebb számított érték, hiszen a napfényből kapott energiát nagyobb felületen sugározza ki, mint a korábban számított esetben.

Megjegyzések. 1. A kapott eredmény (az, hogy egy lencsével nem tudunk akármekkora hőmérsékletűre felmelegíteni egy piciny testet) elég meglepő. A Nap messze van ugyan tőlünk, de a mérete (látószöge) természetesen véges, emiatt a képe sem pontszerű, hanem egy kicsiny korong. Ennek a képnek a fényessége (egységnyi felületre jutó energiája) határozza meg a melegített test maximális hőmérsékletét. Ez a hőmérséklet nem lehet nagyobb, mint a Nap felszíni hőmérséklete. Ténylegesen $T < T_{\text{Nap}}$, méghozzá az r/f hányadostól függő mértékben marad el a felmelegedő test hőmérséklete a Napétól. Emiatt az r/f hányados a lencse „fényerejére” jellemző mennyiség.

2. Az r/f arány elvben 1-nél nagyobb is lehet, sőt $r \gg f$ is elképzelhető. A levezetett képlet alapján ilyenkor látszólag $T > T_{\text{Nap}}$ hőmérséklet is kialakulhatna, ez azonban ténylegesen nem igaz. A levezetés során hallgatólagosan kihasználtuk, hogy a leképezésben résztvevő sugarak az optikai tengelyhez közel haladnak. Ha ez nem teljesül (gondoljunk pl. egy nagy parabolatükörrre), a számításokat elvégezve minden esetben $T < T_{\text{Nap}}$ hőmérsékletet kapunk. Bebizonyítható, hogy lineáris (a szuperpozíció lehetőségét megengedő) optikai leképezőrendszerrel semmiképp nem lehetséges pusztán napenergiát használva a Nap felszíni hőmérsékletét túlszárnyalni. Ez az elvi korlát a hőtan második főtételével áll kapcsolatban.

3. Megfontolásaink során feltételeztük, hogy a Nap sugárzása akadálytalanul eljut a Föld felszínére. A valóságban a Föld légköre a sugárzás számottevő részét visszaveri, némileg el is nyeli; ezen hatások figyelembevétele még tovább csökkenti az elérhető hőmérsékletet.

4. Ha a kicsiny testet napenergiával, de nem (lineáris) optikai eszközökkel melegítjük, akkor a fenti elvi korlát érvényét veszti. Megtehetjük pl. azt, hogy napelemekkel nappal elektromos energiát nyerünk, azzal feltöltünk egy akkumulátort, majd az akkumulátort éjszaka egy elektromos ívkisülés létrehozására használjuk. Az ívkisülés nyilván nem „emlékszik” már annak a testnek (esetünkben a Napnak) a hőmérsékletére, amelyből a tárolt energia származott.

M. 182. Mint tudjuk, szélcsendes időben a 0°C -nál hidegebb felületekre a vízgőz apró jégkristályokból álló dér formájában csapódik ki. Meg kell tehát magyaráznunk, hogyan lehetnek az autó szélvédői hidegebbek a környező levegőnél.

A T hőmérsékletű üveg termikus kapcsolatban áll a környező T_0 hőmérsékletű levegővel, ezenkívül hősugárzás útján is adhat le, illetve vehet fel energiát. A környező levegőnek hővezetéssel átadott Φ hőáram-intenzitást (egységnyi idő alatt egységnyi felületen átadott energiát) a következő összefüggés alapján határozhatjuk meg:

$$\Phi = -\alpha(T - T_0),$$

ahol α a hőátadási tényező, amely nyugvó levegőre kb. $20 \text{ J m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{K}^{-1}$. (Esetünkben $T < T_0$, azaz $\Phi > 0$.)

Kirchhoff sugárzási törvénye szerint minden test (adott hullámhosszra vett) emisszió- és abszorpcióképességének hányadosa azonos, így a levegő hősugárzásától eltekinthetünk, mert abszorpcióképessége kicsi. A szélvédőt nem éri a felszín által kibocsátott hősugárzás sem, tehát derült égbolt esetén a szélvédő által elnyelt sugárzás elhanyagolható. Az üveg által kibocsátott hősugárzás Φ' intenzitását a Stefan–Boltzmann-törvény alapján számíthatjuk:

$$\Phi' = a_0\sigma T^4.$$

Itt a_0 az üveg elnyelőképessége és σ a Stefan–Boltzmann-állandó. A stacionárius állapot beálltával $\Phi' - \Phi = 0$, és mivel $T \approx T_0$:

$$\Delta T = T_0 - T \approx \frac{a_0\sigma T_0^4}{\alpha}.$$

A numerikus adatok és az egyéb mérésekből meghatározható $a_0 \approx 0,2$ érték behelyettesítése után azt kapjuk, hogy a hőmérsékletkülönbség a 3 fokot is elérheti.

A deresedés megakadályozására elegendő a szélvédő közelébe egy hővisszaverő vagy hősugárzó felületet helyezni. Jól megfigyelhető például, hogy a fa mellett parkoló autóknek a fára néző ablakai nem deresednek be.

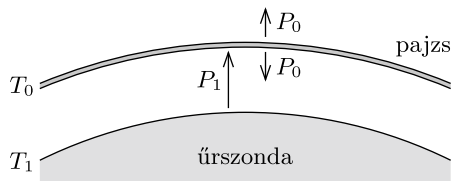
Megjegyzések. 1. Az üveglap lehűlését nem lehet a ráakódott harmat párolgásával magyarázni, hiszen szélcsendes időben a kocsit körülvevő, egyre hűlő telített levegőből több vízgőz csapódik le, mint amennyi elpárolog, azaz a légnedvesség éppen növeli az üveg hőmérsékletét.

2. A feladat számszerű eredménye indokolja azt, hogy a korszerű gépkocsik műszerfalán az esetlegesen jeges út veszélyére miért hívja fel a vezetők figyelmét a számítógépes rendszer, ha a külső levegő hőmérséklete 3°C alá süllyed.

M. 183. A távoli világűrben a szonda közelében nincsen olyan anyag, amelytől számottevő mértékben hőt tudna felvenni, vagy annak leadni, így az energia leadása teljes egészében hőmérsékleti sugárzással történik. Feltehetjük, hogy a szonda a világútból nem kap számottevő mértékben energiát (vagyis a világűr „hideg”).

a) Védőpajzs nélkül a szonda annyira melegszik fel, hogy a belső energiaforrása által leadott P_0 teljesítményt hőmérsékleti sugárzás formájában ki tudja sugározni. Ez a hőmérséklet a megadott $T_0 = 250 \text{ K}$.

Védőpajzs alkalmazása esetén a pajzs hőmérséklete T_0 kell hogy legyen, hiszen ezen a hőmérsékleten tudja leadni az egész rendszer belsejéből származó P_0 teljesítményt. (A pajzs felületének méretét közel azonosnak tekinthetjük a szonda felületével.) A T_0 hőmérsékletű pajzs nemcsak kifelé, de *befelé* is sugároz, még hozzá éppen P_0 teljesítménnyel, hiszen a sugárzás erősségét a hőmérséklet határozza meg. A szondának tehát összesen $P_1 = 2P_0$ teljesítményt kell kisugároznia, ezt viszont csak az eredetinel magasabb T_1 hőmérsékleten tudja megtenni. Mivel a Stefan–Boltzmann-törvény szerint a sugárzási teljesítmény (felületegységenként) T^4 -nel arányos, a kért hőmérséklet $T_1 = \sqrt[4]{2} \cdot T_0 = 297 \text{ K}$ lesz.



b) Hasonló módon kaphatjuk meg a sugárzási teljesítményeket és a hőmérsékleteket több hővédő pajzs esetén is. A legkülső pajzs (kifelé és befelé egyaránt) P_0 teljesítménnyel sugároz, az eggyel beljebb lévő eszerint $2P_0$ -al, a harmadik $3P_0$ teljesítménnyel (hiszen kívülről kap $2P_0$ -t, amihez hozzáadódik a belülről jövő P_0) és így tovább. A legbelső, $(n + 1)$ -edik réteg, vagyis maga a szonda $(n + 1)P_0$ teljesítménnyel sugároz, a hőmérséklete tehát $T_{n+1} = \sqrt[4]{n + 1} \cdot T_0$. Speciálisan $n = 8$ esetén $T_{\text{szonda}} = \sqrt[4]{9} \cdot 250 \text{ K} \approx 430 \text{ K}$ lesz.

Megjegyzés. Az itt leírtakhoz hasonló elven működik a termosz (Dewar-edény) is. A meleg folyadékot tartalmazó edényt légritkított térrel és (egy vagy több) tükröző felületű fallal veszik körül. A külső réteg hőmérséklete kisebb lesz, mint a belső edényé, emiatt a termosz tartalma lassabban hűl ki, mint egy hagyományos edényben.



Halmazállapot-változások

M. 184. A jégkockák mindkét edényben úsznak a folyadék felszínén. A csapvizet tartalmazó edény esetén a jégkockából kiolvadó 0°C -os víz sűrűsége nagyobb, mint a szobahőmérsékletű vízé, ezért az olvadáskor képződő hideg víz lemerül az edény aljára, helyébe szobahőmérsékletű víz kerül. Az így kialakuló áramlás elősegíti az olvadást.

Ezzel szemben a sós víz sűrűsége nagyobb, mint a jégkockából kiolvadó hideg édesvíz sűrűsége, ezért az nem süllyed le, hanem a jégkocka körül marad. Ebben az esetben nem alakul ki hőáramlás, így a jégkocka olvadása a sós vízben sokkal lassabb.

Megjegyzések. 1. Az óceánokban úszó jéghegyek elolvadása akár évekig is eltarthat, aminek fő oka az, hogy ezek az édesvízből álló gigantikus jégdarabok a saját „édesvíz pocsolyájukban” úsznak, körülöttük nem alakul ki hőáramlás (konvekció).

2. Ha a jégkockákba néhány szem ólomsörézet fagyasztunk, akkor a jégkockák elmerülnek a csapvizben is és a sós vízben is. Ilyenkor az édesvízben olvadó jégkockák körül nem alakul ki áramlás, mert a megolvadt hideg víz nagyobb sűrűségű, ezért ekkor az édesvízben lassabb az olvadás. A sós víz mélyén olvadózó sörétes jégkockákból keletkező víz a felszínre áramlik, a kialakuló hőkonvekció felgyorsítja az olvadást.

3. A kísérletet elvégezve az olvadási idők között akár tízszeres különbségeket is mérhetünk. Az áramlások jól láthatóvá tehetők, ha ételfestékkel színezett vízből készítjük a jégkockákat.

M. 185. Képzeljük el, hogy az 1 kg tömegű, -10°C -os túlhűtött vizet először megfagyasztjuk, majd a keletkezett -10°C -os jeget 0°C -ra melegítjük! A megfagyás során éppen a keresett Q hő szabadul fel, a jég 0°C -ig történő felmelegítéséhez pedig 21 kJ energia szükséges, hiszen a jég fajhője közelítőleg $2,1 \text{ kJ}/(\text{kg K})$. A kezdeti állapotból ugyanebbe a végállapotba úgy is eljuthatunk, hogy a -10°C -os vizet óvatosan (ügyelve, hogy ne induljon be a fagyás) felmelegítjük 0°C -ra, majd a fagyásponton megfagyasztjuk. Ez utóbbi folyamat első részében 42 kJ hőközlés szükséges – feltéve, hogy a túlhűtött víz fajhője nem tér el számottevően a szobahőmérsékletű víz $4,2 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ -es értékétől –, a megfagyasztáskor pedig 334 kJ hőt kell elvonnunk. Mivel mindkét folyamat kezdő- és végállapota ugyanaz, a környezeten végzett munka is megegyezik, így a rendszerrel közölt hőnek is meg kell egyezniük:

$$-Q + 21 \text{ kJ} = 42 \text{ kJ} - 334 \text{ kJ},$$

ebből $Q = 313 \text{ kJ}$, tehát körülbelül $313 \text{ kJ}/\text{kg}$ a -10°C -ra túlhűtött víz fagyáshője.

Megjegyzés. Ha a -10°C -os túlhűtött víz hirtelen fagyásnak indul, akkor rövid idő múlva 0°C -os víz és 0°C -os jég keveréke jön létre, hiszen a fagyáskor felszabaduló hő felmelegíti. Ez az állapot 0°C -os tiszta vízből nagyjából 42 kJ hő elvonásával hozható

létre, melynek során $42 \text{ kJ} : 334 \text{ kJ/kg} \approx 0,13 \text{ kg}$ jég keletkezik. Tehát a -10°C -os túlhűtött víz hirtelen fagyása után csak a kiinduló vízmennyiség kb. 13%-a fagy meg.

M. 186. Tekintsünk egy ρ átlagsűrűségű, A alapterületű és h magasságú hegyet. Ha ennek a hegynek a legalsó, d vastagságú rétegét megolvasztanánk, ehhez $Ad\rho L$ energiára lenne szükségünk (itt L a hegy anyagának olvadáshője). A hasáb alakúnak feltételezett, $A\rho h$ tömegű hegy d távolsággal való lesüllyedésekor $A\rho hgd$ energia szabadul fel. Annak feltétele, hogy a hegy talapzata ne olvadjon meg a hegy súlya miatt:

$$Ad\rho L > A\rho hgd, \quad \text{azaz} \quad h < \frac{L}{g}.$$

Az olvadáshőt a fémek 200-300 kJ/kg-os olvadáshőjével közelítve a földi hegyek elképzelhető legnagyobb magasságára 20-30 km, nagyságrendileg jó érték adódik. Ha azt is figyelembe vesszük, hogy a hegy lábának nem kell megolvadnia, már a „folyáshatár” elérése határt szab a hegyek növekedésének, meglepően jól megkapjuk a földi hegyek legmagasabbjainak tényleges magasságát.

A Marson a nehézségi gyorsulás kisebb, mint a Földön ($g_{\text{Mars}} \approx 4 \text{ m/s}^2$), emiatt az ottani (hasonló kőzetekből álló) hegyek magasabbak lehetnek, mint a Föld hegyei. Valóban, a Mars legmagasabb hegye, az Olympus Mons 22 km-rel (!) emelkedik a környezete fölé, ami *két és félszer* magasabb a Mount Everestnél.

M. 187. Az x vastagságú jégréteg A területű része egységnyi idő alatt

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{x}$$

hőt képes elvezetni a víztől a levegő felé, ahol $T_1 = 0^\circ\text{C}$ a víz és $T_2 = -2^\circ\text{C}$ a levegő hőmérséklete, $\lambda = 2,3 \text{ W/(m K)}$ pedig a jég hővezetési tényezője. Ez a hőelvonási teljesítmény megegyezik a jég megfagyásakor időegységenként felszabaduló energiával:

$$\lambda A \frac{T_1 - T_2}{x} = L_o \rho_{\text{jég}} A \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

itt L_o a jég olvadáshője. Innen

$$\Delta t = \frac{L_o \rho_{\text{jég}}}{\lambda(T_1 - T_2)} x \Delta x = \frac{L_o \rho_{\text{jég}}}{2\lambda(T_1 - T_2)} \Delta(x^2).$$

Mindkét oldalt összegezve a jég kezdeti $x(t=0) = 0$ vastagságától a végső vastagságig:

$$t = \frac{L_o \rho_{\text{jég}}}{2\lambda(T_1 - T_2)} x^2,$$

ahonnan (az ismert adatok behelyettesítése után) a keresett időtartamra kb. 93 órát kapunk.

Megjegyzés. Ha a tó felett nem fúj a szél, akkor nagyon sima, egyenletes vastagságú jégréteg alakul ki, de az ehhez szükséges idő jóval több, mint 93 óra. Ennek oka az, hogy

közvetlenül a jég felett néhány cm vastagságban gyakorlatilag nulla fokos levegőréteg alakul ki, ami hőszigetelő takaróként lassítja a fagyást. Ha a jég feletti (viszonylag meleg) légréteget elfújja a szél, akkor felgyorsul a fagyás.

M. 188. Kezdetben a fagyott pulyka és a mamut belsejében jó közelítéssel mindenhol ugyanakkora a hőmérséklet. Ha a testeket hozzájuk képest meleg környezetbe helyezük, akkor a testek külső rétege felmelegszik és megolvad, miközben a belsejük egy része még fagyott. A fagyos tartomány mérete fokozatosan zsugorodik, és a teljes felolvadáskor nullára csökken.

A testeket a külső környezetből befelé irányuló hőáram melegíti. A felvett hő egyrészt a testek melegítésére, másrészt pedig a fagyott tartomány felolvasztására fordítódik. A felengedéshez szükséges energia tehát a testek tömegével, vagyis az L lineáris méretük köbével arányos. A hővezetési törvénynek megfelelően a környezetből beáramló hő egyenesen arányos a hőmérsékleti gradienssel (hosszegységre jutó hőmérsékletkülönbséggel), a felszín területével és az idővel. Ebből következően

$$\text{idő} \sim \frac{\text{felvett hő}}{(\text{terület}) \cdot (\text{hőmérsékleti gradiens})} \sim \frac{L^3}{L^2 L^{-1}} = L^2.$$

A testek L lineáris mérete a tömeg köbgyökével arányos, így a felengedési idő a tömeg $2/3$ -ik hatványával arányos. Tehát a mamut felengedéséhez

$$\left(\frac{8000}{5}\right)^{2/3} \cdot 2 \text{ nap} \approx 274 \text{ nap} \approx 9 \text{ hónap}$$

szükséges, feltéve, hogy a kiolvadás ugyanarról a hőmérsékletről indul, és hasonló körülmények között zajlik.

Megjegyzés. A szibériai nyár túl rövid a mamut kiolvadásához, ezért lehetett még a közelmúltban is jégbefagyott mamutokat találni Szibériában.

M. 189. Először is vizsgáljuk meg, hogy 100°C -on milyen halmazállapotú lesz a tartályba juttatott jég, és mekkora lesz a tartályban a nyomás. Mivel 100°C -on a telített vízgőz sűrűsége majdnem pontosan $0,6 \text{ kg/m}^3$, nyomása pedig 1 atmoszféra, így a $0,6 \text{ kg}$ tömegű jég 100°C -on teljes mértékben gőz halmazállapotúvá, méghozzá 1 atmoszféra nyomású telített vízgőzzé alakul át.

Hogyan jut el a -10°C -os jég a 100°C -os telített vízgőz állapotba? Ha a hőmérsékletet nagyon lassan emeljük, akkor a rendszer mindvégig egyensúlyi állapotokat vesz fel. Kezdetben a jég szublimál, ekkor a jég és a vízgőz fázis tart egyensúlyt egymással, ami egészen a hármasponti hőmérsékletig és nyomásig ($0,01^\circ\text{C}$ és 610 Pa) tart. A hármaspontban a jég és a vízgőz mellett megjelenik a folyékony halmazállapot is. További melegítés hatására a szilárd halmazállapotú fázis eltűnik, víz és telített vízgőz lesz a tartályban. A hőmérséklet emelkedésével a folyékony halmazállapotú fázis tömege egyre csökken, és 100°C -on a teljes vízmennyiség gőzzé alakul.

A hőfelvétel számítása szempontjából csak a kezdeti és a végállapotnak van szerepe, a jég–víz–gőz rendszer által felvett hő (ami a rendszer belső energiáját növeli) független attól, hogy milyen úton jutottunk el a kezdőállapotból a végállapotba. A számításban célszerű az $m = 0,6$ kg tömegű jég hőfelvételét négy tagra (a jég melegítésére, a jég megolvasztására, a víz melegítésére és végül a víz elforrálására) bontani:

$$Q = c_j m \Delta T_1 + L_o m + c_v m \Delta T_2 + L_f m,$$

ahol c_j a jég fajhője, $\Delta T_1 = 10^\circ\text{C}$, L_o a jég olvadáshője, c_v a víz fajhője, $\Delta T_2 = 100^\circ\text{C}$, L_f pedig a víz forráshője.

A jég és a víz fajhője enyhe hőmérséklet- és nyomásfüggést mutat, a jég olvadáshője is kissé függ a nyomástól, azonban ezeket a kis eltéréseket elhanyagolhatjuk. A víz forráshőjénél azonban más a helyzet. Igaz ugyan, hogy a forráshő (párolgáshő) szintén csak kissé függ a hőmérséklettől, de a nyomástól való függése igen jelentős.

A forráshő táblázatokban megtalálható szokásos $L_f = 2256$ kJ/kg értéke nemcsak a gőz magasabb belső energiájából adódik, hanem tartalmazza a külső, 1 atmoszféras levegő ellen végzett tágulási munkát is. A feladat szerint ezt a munkát már előzőleg, a tartály légmentesítésekor elvégezték, tehát ennyivel kevesebb hőt kell a rendszerrel közölni: $-p\Delta V = -101,3$ kJ. Mivel ez az érték 0,6 kg vízre vonatkozik, a hőközlés kiszámításakor

$$L_f = 2256 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - \frac{101,3 \text{ kJ}}{0,6 \text{ kg}} = 2087 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \approx 2090 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

forráshővel kell számolnunk. Az adatok behelyettesítése után a kérdéses hőre végül $Q = 1720$ kJ adódik.

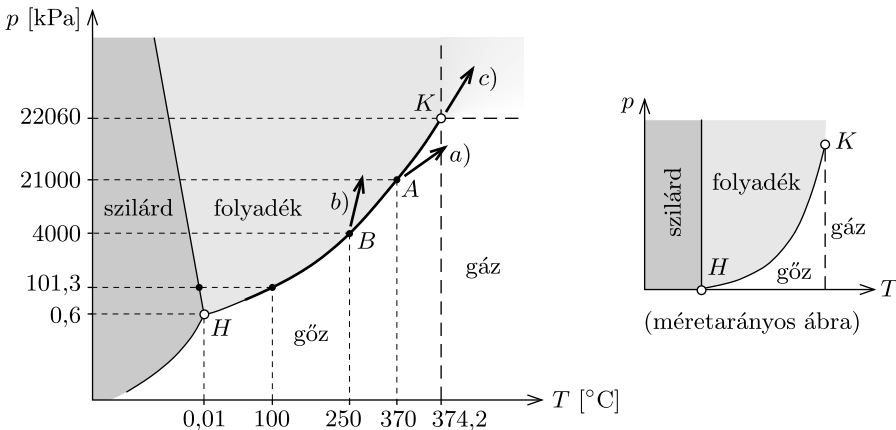
A külső levegő ellen végzett tágulási munka figyelmen kívül hagyása közel 6%-os hibát okozott volna, míg a többi együttható enyhe hőmérséklet- és nyomásfüggése hozzávetőlegesen 1%-os eltérést eredményezne. Ennek az az oka, hogy a víz gőzzé alakulásakor igen jelentős mértékben (1600-szorosára!) nő a fajlagos térfogat. Adott tömegű gőz térfogatához képest a víz vagy a jég térfogata elhanyagolható, és a megoldás során hallgatólagosan meg is tettük ezt az elhanyagolást.

M. 190. A lezárt tartályban a víz addig párolog, amíg felette a vízgőz telített nem lesz. Ekkor a víz feletti térben lévő nyomáshoz a tartályba zárt levegő nyomása is hozzájárul, vagyis a víz feletti térben a nyomás mindig nagyobb lesz, mint a telített vízgőz nyomása. Tehát a forrás *semmilyen hőmérsékleten* nem indulhat meg.

M. 191. A tartályban lévő anyag halmazállapotát (halmazállapotait) különböző hőmérsékleteken és nyomásokon az *ábrán* vázolt fázisdiagramon szemléltethetjük. (A nagy ábra nem méretarányos, a valódi arányokat egyenletes beosztású tengelyekkel a kisméretű diagram mutatja.) Kezdetben a $0,01^\circ\text{C}$ -os hármasponti (H) hőmérsékletnél magasabb hőmérsékleten víz és vízgőz tart egyensúlyt. Szilárd halmazállapot a továbbiakban sem jelenik meg.

A hőmérséklet növekedtével a rendszer a folyadék–gőz fázishatárnak megfelelő görbén (forrásgörbén, másnéven koegzisztenciagörbén) kezd el mozogni. Ha a tartály elég erős, akkor a hőmérséklet (és vele együtt a nyomás) jelentős növekedését is kibírja. Felmerülhet a kérdés, milyen hőmérsékletig találhatunk folyékony halmazállapotot a tartályban. A függelékben található, telített vízgőzre vonatkozó táblázat adataiból kiolvashatjuk, hogy a víz kritikus hőmérséklete $374,2^\circ\text{C}$, kritikus sűrűsége pedig $326,2\text{ kg/m}^3$. Ez azt jelenti, hogy az *a*) és *b*) esetben *nem juthat el* a rendszer a *K* kritikus pontig, hiszen az *a*) esetben kisebb, a *b*) esetben pedig nagyobb az átlagsűrűség a tartályban, mint a kritikus ponthoz tartozó sűrűség.

A koegzisztenciagörbe mentén haladva a folyadék sűrűsége fokozatosan csökken, a gőz sűrűsége pedig növekszik. A kétféle fázis térfogatának arányát az aktuális sűrűségek és a rendszer átlagsűrűsége határozza meg. Ha a gőz sűrűsége eléri az átlagsűrűséget, akkor a tartályban nem lehet folyékony halmazállapotú víz; ez az *a*) esetben 370°C -on, 21 MPa nyomáson, a fázisdiagram *A* pontjában következik be. A további melegítésnél a rendszer „leválk” a forrásgörbéről és az „alatt”, a gőz fázis állandó sűrűségű görbéje mentén fog mozogni.



Még furcsább dolog történik a *b*) esetben: 250°C -os hőmérsékletnél (4 MPa nyomáson) a víz sűrűsége 800 kg/m^3 -re, vagyis az egész rendszer átlagsűrűségére csökken (*B*). Ekkor a tartályban már nem lehet gőz, a teljes térfogatot folyékony halmazállapotú víz tölti ki. A további melegítés során a rendszer állapotát jellemző pont eltávolodik a koegzisztenciagörbétől („fölé” kerül), és az állandó sűrűségű folyadéknak megfelelő görbén mozog tovább.

A *c*) esetben a tartályban lévő anyag átlagsűrűsége éppen a *K* kritikus pont sűrűségének felel meg. Ebben az esetben a rendszer egészen a *K* pontig jut el a forrásgörbén. Ott a folyadék és a gőz sűrűsége egyenlővé válik, a víz és gőz közötti megkülönböztetés értelmét veszti: az anyag homogén, gázszerű halmazállapotba kerül.

Megjegyzés. Szigorúan véve egy légnemű anyagot akkor nevezünk gáznak, ha hőmérséklete a kritikus hőmérsékletnél magasabb, nyomása azonban a kritikus nyomásnál

kisebb. Az ilyen halmazállapotban lévő anyag állandó hőmérsékleten nem cseppfolyósítható (tetszőlegesen nagy nyomáson sem). Gőzről akkor beszélünk, ha a légnemű anyag hőmérséklete és nyomása is kisebb a kritikus értéknél; a gőz tehát állandó hőmérsékleten cseppfolyósítható. Ha az anyagnak mind a hőmérséklete, mind pedig a nyomása a kritikus pont feletti, akkor ún. *szuperkritikus* állapotban van. Ebbe a fázisba jut el a c) esetben a víz.

Érdekes, hogy gáz halmazállapotból a folyadék fázisba kétféleképpen juthatunk el. Az első módszer az, hogy a gázt lehűtjük a kritikus hőmérséklet alá, és az így keletkezett gőzt cseppfolyósítjuk. A gőz lecsapódása során a folyadék és a gőz fázis között közegethatár alakul ki, mígnem végül az egész gőzmennyiség folyadékká alakul. A másik módszer, hogy a gázt a nyomás növelésével szuperkritikussá tesszük, majd a hőmérséklet csökkentésével a K kritikus pontot a fázisdiagramon „megkerülve” jutunk el a folyadék állapotba. Utóbbi esetben nem alakul ki folyadék-gőz határfelület, az átalakulás folytonos módon valósul meg.

M. 192. Vizsgáljuk meg, mi történik a vízgőzzel, ha a térfogatát csökkentjük, illetve ha növeljük. Megfontolásaink során csak a vízgőzzel kell törődnünk, egyéb gázok jelenléte – Dalton törvénye szerint – a telítési nyomásra nincs hatással.

A telített gőzre (hacsak nem vagyunk a kritikus pont közelében) jó közelítéssel érvényes az ideális gázok állapotegyenlete:

$$pV = NkT.$$

Ha a telített gőz térfogatát *lassan* csökkentjük, a hőmérséklet állandó marad, a nyomás sem tud megváltozni, mert az csak a hőmérséklettől függ, így a gáztörvény szerint az N részecskeszámnak kell csökkennie. A lassan összenyomott gőz egy része tehát *kicsapódik*. A térfogat lassú növelésekor a fordított folyamat játszódik le: a víz egy része elpárolog, növekszik a gőztérben lévő vízmolekulák száma.

Ha a térfogatot olyan *hirtelen* növeljük meg, hogy nincs idő számottevő hőcserére a vízgőzt tartalmazó tartály és a környezete között, akkor a hőmérséklet lecsökken (adiabatikus tágulás). Az új, alacsonyabb hőmérséklethez tartozó telítési gőznyomás kisebb lesz, mint az eredeti, sőt, annak ellenére, hogy V nő, a gőz egy része *kicsapódik*, mert T erősen csökken.

A gőz kicsapódása tehát a térfogat csökkentésével és növelésével egyaránt előidézhető, a térfogatváltozás tényleges hatása a folyamat sebességétől függ.

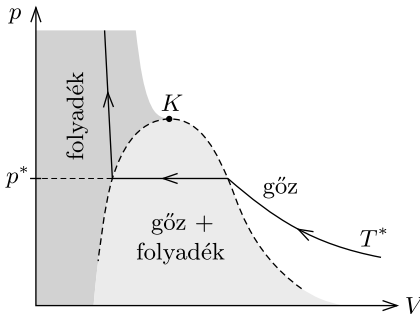
Megjegyzések. 1. Ha a vízgőz állapotváltozását az ideális gáz közelítésnél pontosabban akarjuk nyomon követni, akkor pl. a van der Waals-féle állapotegyenletet használhatjuk, vagy vizsgálhatjuk a mérési eredmények alapján empirikusan megállapított összefüggéseket. Az 1. ábrán egy valódi izoterma (és a víz fázisai) láthatók a p - V diagramon. (A K kritikus ponton áthaladó izoterma fölött elhelyezkedő gáz és szuperkritikus gáz fázist az ábrán nem jelöltük.)

Ezen megfigyelhetjük, hogy az izotermikus összenyomás során a (telítetlen) gőz nyomása mindaddig nő, amíg el nem éri az adott T^* hőmérséklethez tartozó p^* (a telített gőz nyomásának megfelelő) értéket. Ezek után a nyomás nem nő tovább, hanem a gőz elkezd lecsapódni. A térfogat csökkentése közben fokozatosan nő a lecsapódott folyadék mennyisége. A nyomás mindaddig állandó marad, amíg az egész gőzmennyiség le nem

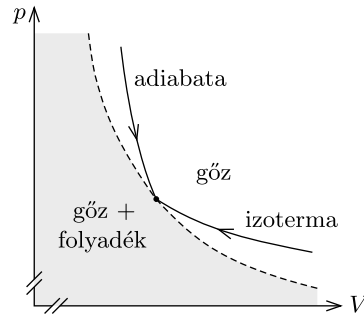
csapódik. A gőzök tehát *állandó hőmérsékleten* úgy cseppfolyósíthatók, ha a *térfogatukat csökkentjük*.

Ha a gőzt a környezetétől adiabatikusan elzárva akarjuk cseppfolyósítani, akkor azt kell valamilyen módon elérnünk, hogy a hőmérséklet lecsökkenjen. Mivel most nincs hőátadás ($Q = 0$), az első főtétel szerint $\Delta E = -W_{g\ddot{o}z}$. Ha a gőz végez munkát (vagyis $W_{g\ddot{o}z} > 0$), a belső energia (és vele együtt a gőz hőmérséklete) le fog csökkenni. A gőz pedig akkor végez munkát, ha a *térfogata nő*.

A vízgőz kicsapódásához tehát több út is vezethet: izotermikus folyamatban a térfogat csökkentése, adiabatikus folyamatban a térfogat növelése okozhat vízlecsapódást.



1. ábra



2. ábra

A p - V diagramon a gőz és a kétfázisú állapotokat egymástól elválasztó görbe elég széles tartományban $p \sim 1/V^{1+x}$ alakú, ahol x általában egy viszonylag kicsi pozitív szám (2. ábra). Vízgőz esetén x kb. $1/16$. Ez azt jelenti, hogy a határgörbe meredekebb, mint az izoterma (amelyre ideális gáz esetén $x = 0$), de kevésbé meredek, mint az adiabata (amelyre f termodinamikai szabadsági fokú ideális gáz esetén $x = 2/f$).

2. A hirtelen kitágított (és emiatt túltelítetté váló) vízgőz kicsapódásához ún. kondenzációs magok szükségesek. Ilyen magok lehetnek pl. koromszemcsék vagy ionizált részecskék. Az előbbieket a repülőgép kondenzcsíkjának képződésekor, az utóbbiak az elemi részecskéket láthatóvá tevő Wilson-féle ködkamrában kapnak szerepet: a gyorsan mozgó, elektromosan töltött elemi részecskék ionokat keltenek, és az ezek által megindított folyadékcsepp-képződés ködfonalként jelöli ki a részecskék pályáját.

M. 193. A feladat kérdése is sugallja, hogy a nyomás az egész kémcsőben végig ugyanakkora. Ha nem így lenne, a gőz különböző darabkáira eredő erő hatna, aminek hatására azok gyorsulni kezdenének. (Az a kis nyomáskülönbség, ami a gőz hidrosztatikai nyomásából adódna a kémcső alja és teteje között, elhanyagolható a telített gőz nyomásához képest.)

Kiindulási állapotban a kémcső felül nyitott, benne vizet forralunk, tehát az alján 100°C -os a víz, felette 100°C -os telített vízgőz van, amelynek nyomása megegyezik a külső légnyomással (101 kPa).

Amikor bezárjuk a kémcsövet, az alján még van egy picit víz. A végállapotban a kémcső tetején a hőmérséklet 200°C , az alján pedig 100°C . Nőtt a gőz átlaghőmérséklete, ezért a nyomása nem csökkenhetett. Csökkent viszont a sűrűsége (legjobban a kémcső tetején, ahol a legjobban nőtt a hőmérséklete), és ez csak

úgy lehetséges, hogy a gőz egy része lecsapódott vízzé. Alul tehát maradt víz (még nőtt is a mennyisége), amelyet 100°C -on tartottunk. A 100°C -os telített gőz nyomása pedig a kezdeti, 101 kPa.

A kémcsőben tehát a végállapotban is 101 kPa a gőznyomás!

Megjegyzés. A gőz sűrűsége a kémcső aljától felfelé haladva egyre csökken, emiatt a gőz csak a folyadékfelszín közvetlen közelében lesz telített, feljebb telítetlen.

M. 194. a) $77,4\text{ K}$ hőmérsékleten (a nitrogén forráspontján) a nitrogén telített gőzének nyomása $1\text{ atm} = 101,3\text{ kPa}$, míg az oxigén telített gőze $90,2\text{ K}$ hőmérsékleten éri el az 1 atm nyomást. A Földön az oxigén és a nitrogén anyagmennyiségének aránya kb. $1 : 4$, ami lényegében megegyezik a gázösszetevők parciális nyomásainak az arányával, hiszen a cseppfolyósodás megkezdődéséig az egyes gázösszetevők viselkedése közelítőleg az ideális gázokéval egyezik meg. Tehát amikor a Földön az oxigén cseppfolyósodni kezd a megadott 113 kPa nyomáson, akkor ennek $\frac{1}{5}$ része, vagyis $22,6\text{ kPa}$ az oxigén parciális nyomása, ami egyben az oxigén telítési gőznyomása $77,4\text{ K}$ hőmérsékleten. Így a nitrogénre ebben az állapotban $113\text{ kPa} - 22,6\text{ kPa} = 90,4\text{ kPa}$ nyomás jut, ami kisebb, mint a nitrogén telített gőzének 101 kPa értékű nyomása, tehát ezen a nyomáson a nitrogén még *nem* cseppfolyósodik.

További izotermikus összenyomáskor az immár kétfázisú oxigén gőzének parciális nyomása nem változik, míg a nitrogén nyomásjáruléka $90,4\text{ kPa}$ -ról 101 kPa -ra nő, ami a térfogat $\frac{90,4}{101} \approx 0,9$ -szeres csökkenésével jár. Ezután a nyomás ($22,6\text{ kPa} + 101\text{ kPa} \approx 124\text{ kPa}$) állandó marad, egészen addig, amíg a nitrogén cseppfolyósodása be nem fejeződik.

Az Exo-Földön 113 kPa nyomáson és $77,4\text{ K}$ -es állandó hőmérsékleten a nitrogén kezd el cseppfolyósodni. Tehát ebben az állapotban a nitrogén parciális nyomása 101 kPa , míg az oxigéné $113\text{ kPa} - 101\text{ kPa} = 12\text{ kPa}$. A két összetevő parciális nyomásának hányadosa megadja az összetétel arányát: $\frac{12}{101} \approx 12\%$, tehát az Exo-Föld légkörének mintegy 12% -át alkotja oxigén, a többi nitrogén.

b) Az előzőek alapján láthatjuk, hogy 124 kPa nyomáson (és a $77,4\text{ K}$ -es állandó hőmérsékleten) mindkét gáz cseppfolyós lesz. Akkor indul meg egyszerre a cseppfolyósodás, ha a gázösszetevők aránya éppen megegyezik a telítési gőznyomások arányával, ami $\frac{22,6}{101} \approx \frac{2}{9}$. Tehát abban az esetben, ha az oxigén-nitrogén arány hozzávetőlegesen $2 : 9$ lenne, akkor a $77,4\text{ K}$ -es izoterm összenyomáskor egyszerre kezdene el mindkét gáz cseppfolyósodni.

M. 195. Tegyük fel, hogy az üreg h mélységben található. Amikor a kürtő vízzel telt, az üregben a nyomás $p = p_0 + \rho gh$, ahol p_0 a külső légnyomás, ρ pedig a víz sűrűsége. A forrás olyan mélységben, illetve olyan hőmérsékleten indul meg, ahol a telített vízgőz nyomása megegyezik ezzel a nyomással. A telítési gőznyomást a hőmérséklet függvényében táblázatból vehetjük (lásd a függelékot), vagy alkalmazhatjuk az ún. *Clausius–Clapeyron-egyenlet* közelítő alakját:

$$p = Ae^{-LM/(RT)}.$$

Ebben az összefüggésben T az abszolút hőmérséklet, L a víz forráshője, M a moláris tömege, R a gázállandó, az A tényezőt pedig annak ismeretében határozhatjuk meg, hogy légköri nyomáson a víz 373 K-en forr: $A = 4,9 \cdot 10^{10}$ Pa.

A számításban a talaj felszíni hőmérsékletét vegyük $T_0 = 290$ K-nek. Mivel lefelé méterenként 1 fokkal nő a hőmérséklet, így h mélységben $T = T_0 + h$, ha a mélységet méterekben mérjük. A nyomások egyensúlyából tehát a következő egyenletet állíthatjuk fel:

$$p_0 + \rho gh = Ae^{-\frac{LM}{R(T_0+h)}},$$

amit numerikus módszerekkel (például számítógépes programmal vagy „találgatással”) oldhatunk meg, eredményül $h \approx 193$ m adódik. A nyomás ebben a mélységben körülbelül 19 atm, a hőmérséklet pedig 483 K = 210 °C.

Amikor a forrás megindul, az első felfelé szálló buborékok kilökik a vizet a kürtőből, a nyomás 1 atmoszférára csökken, a 210 °C-ra túlmelegedett víz heves forrásba kezd, és annyi gőzt termel, hogy a hőmérséklete 100 °C-ra csökkenjen. A $\Delta T = 110$ °C-os túlmelegedés a belső energiában $cm\Delta T$ többletet jelent, ahol c a víz fajhője, m az üregben lévő víz tömege. Ez a többletenergia $m_g = 44$ tonna gőz termelésére elegendő, vagyis $cm\Delta T = Lm_g$. Az adatok behelyettesítése után az üregben lévő víz tömegére $m \approx 215$ tonna adódik. Mivel ilyen magas hőmérsékleten (210 °C) a gőzével egyensúlyban lévő víz sűrűsége mindössze 850 kg/m³ körüli, így az üreg térfogatát 250 m³-esnek becsülhetjük.

Megjegyzés. A $p = p_0 + \rho gh$ hidrosztatikai nyomás számításakor a víz sűrűségét állandónak, a szokásos 1000 kg/m³-nek tekintettük, és nem vettük figyelembe, hogy az üregben a felmelegedett víz sűrűsége nagyjából 850 kg/m³-re csökken. Ha ezt is számításba vesszük, akkor hozzávetőlegesen 5 méterrel kisebb értéket kapunk h -ra, és az üreg térfogata kb. 5%-kal kisebbnek adódik.

M. 196. A megadott 100 °C a víz, 34,6 °C pedig az éter normál légköri nyomás melletti forráspontja. A víz moláris tömege 18 g/mol, a $(C_2H_5)_2O$ képletű éter moláris tömege pedig 74 g/mol. Igaz, a forráspont környékén egyetlen reális gáz sem viselkedik ideális gázként, az mégis joggal feltételezhető, hogy a vízgőz sűrűsége kisebb, az étergőz sűrűsége pedig nagyobb marad a levegő sűrűségénél. (A vízgőz „könnyebb”, az étergőz „nehezebb” a levegőnél.)

Tekintsük először az a) esetet, amikor mindkét lombikba vizet töltöttünk. Ekkor az egyenes nyakú lombikban képződő vízgőz előbb-utóbb betölti a lombik nyakát, azonban nem maradhat stabilan a nála „nehezebb” levegő alatt, hanem felszáll, helyet adva a levegőnek, valamint az újabb és újabb vízgőzképződésnek; így a víz viszonylag rövid idő alatt elforr.

A görbe nyakú lombik nyakát is betölti a vízgőz, innen azonban csak „lefelé” tudna kiszabadulni, miközben a sűrűbb levegőnek kellene felfelé, a vízgőz helyére áramlania, ami nem történik meg. Ilyenkor a folyamatosan termelődő vízgőz nyomja ki a felesleget a lombikból, tehát a lombikban csak 100 °C-os vízgőz marad. Ha szigorúan vesszük, hogy a víz hőmérséklete pontosan 100 °C-os, akkor a forrás teljesen leáll. Ekkor csak diffúzióval tud eltávozni a vízgőz, ami viszont

lassú folyamat. Ha engedjük a vizet kissé túlmelegedni (ami a vízforralásnál a gyakorlatban mindig megtörténik), akkor folyamatos gőzképződés zajlik, de meglehetősen lassan, mert a 100°C -os vízgőzből nagy valószínűséggel csapódnak le vízmolekulák a folyadékba. Az *a)* esetben tehát a vízgőz az egyenes nyakú csőből szabadul ki gyorsabban, vagyis ebből a lombikból forr el hamarabb a víz.

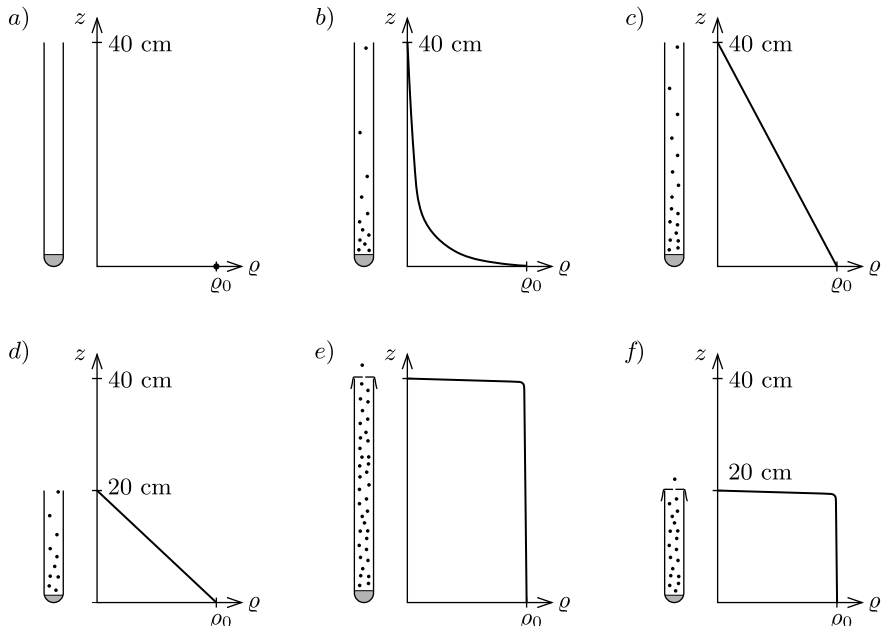
A *b)* esetben, amikor a forráspontján tartott éter van a lombikokban, a helyzet éppen fordított. Az egyenes nyakú lombik nyakában megül az étergőz, nem fog felszállni a nála kisebb sűrűségű levegőbe. A nyak felső végénél diffundálnak az étermolekulák a levegőbe, illetve az esetleges túlmelegítés miatt a képződő kevés étergőz folyamatosan kinyomja a felesleget. Ezért csak hosszú idő alatt forr el és távozik az éter a lombikból.

A lefelé görbülő nyakú lombik nyakából viszont „kifolyik” a nehéz étergőz a levegőbe, helyére levegő áramlik, telítetlen marad a lombikban az étergőz, ami gyorsítja az éter elforrását.

M. 197. A vékony kémcsőben nem alakul ki konvekciós anyagáram, a döntő folyamat a diffúzió. Ennek alaptörvénye (a *Fick-törvény*) szerint az anyagáramlás sebességét a koncentrációgradiens határozza meg; a két mennyiség – a tapasztalat szerint – jó közelítéssel arányos egymással:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -DA \frac{\Delta \varrho}{\Delta z},$$

ahol Δm a Δt idő alatt A nagyságú felületen áthaladó gőz tömegét jelöli, ϱ a gőz sűrűsége z magasságban, D pedig a diffúziós állandó.



Az *a)* ábrán látható kezdeti állapotban a folyadék feletti térben nincsen gőz. Emiatt heves párolgás indul meg, és a gőztérben átmenetileg a *b)* ábrához hasonló sűrűségeloszlás valósul meg. A kölni teljes párolgási idejéhez képest rövid idő alatt a kémcsőben olyan stacionárius állapot alakul ki, melyben a gőz sűrűsége a *c)* ábra szerint lineárisan változik; csak így teljesülhet ugyanis, hogy a cső bármely kis részébe időegységenként ugyanannyi gőz lép be alulról, mint amennyi felfelé távozik. A kémcső legalján, ahol a gőz a folyadékkal érintkezik, a gőz *telített* lesz, sűrűségét csak a hőmérséklet befolyásolja. A kémcső tetejénél, ahol a szabad légtérrel érintkezik a gőz, a sűrűsége gyakorlatilag nulla, ellenkező esetben (ha a sűrűség ugrásszerűen megváltozna) nagyon gyors anyagáramlás indulna meg, tehát nem lehetne állandósult állapotról beszélni.

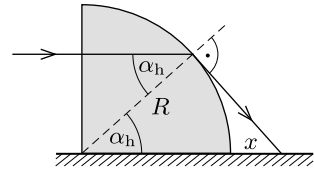
A két kémcső aljánál és tetejénél tehát ugyanakkora a gőz sűrűsége, emiatt a sűrűséggradiens – és ezzel együtt az anyagáramlás sebessége – a hosszabb kémcsőnél feleakkora, mint a rövidebbnél, ahogy az a *d)* ábrán is látható. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy a hosszabb kémcsőben kétszer több kölnivíz van, mint a rövidebb csőben, megállapíthatjuk: a 40 cm-es kémcsőből kb. *négyszer* hosszabb idő alatt párolog el a 2 cm^3 kölnivíz, mint a 20 cm-es csőből a feleakkora mennyiség.

Mi történné, ha mindkét kémcső tetejét annyira leragasztanánk, hogy a fedőlapokon csupán egy-egy parányi (egyforma) nyílás maradna? A lyuk kis keresztmetszetén átdiffundáló gőz mennyisége akkor lehetne ugyanakkora, mint a kémcső sokkal nagyobb keresztmetszetén ugyanannyi idő alatt átjutó gőz mennyisége, ha a koncentrációgradiens a kémcsőben sokkal kisebb, mint a lyuk környékén. A sűrűség tehát most a kémcső belsejében alig változik – lásd az *e)* és *f)* ábrákat –, majdnem pontosan a telített gőz sűrűségével egyezik meg, és csupán a lyuk közvetlen közelében esik le a külső, zérus értékre. Ilyen körülmények között a kémcső hossza nem játszik szerepet, és a párolgási idők aránya csak a tömegek arányától függ, esetünkben $2 : 1$.



Fénytan

M. 198. Tekintsük a fénynyalábot egymással párhuzamos fénysugarakból állónak! A sugarak irányváltoztatás nélkül haladnak át a negyedhenger függőleges síklapján, majd különböző beesési szöggel érik el a palástot. A fénysugarakhoz tartozó beesési merőlegesek mindig sugárirányúak.



Minél magasabban lép be egy fénysugár a negyedhengerbe, annál nagyobb lesz a beesési szöge a hengerpaláston. Az ábrán látható esetben a beesési szög éppen a teljes visszaverődés határszöge, tehát csak az ennél alacsonyabban érkező fénysugarak léphetnek ki a negyedhengerből (különböző mértékű fénytörés után). A határhelyzet az ábra alapján meghatározható:

$$\sin \alpha_h = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}, \quad \text{továbbá} \quad \frac{R}{R+x} = \cos \alpha_h,$$

amiből $x = 1,71$ cm, tehát a negyedhenger mögött ekkora távolsággal kezdi megvilágítani a fény az asztalt.

Az asztalhoz egyre közelebb haladó, vízszintes fénysugarak beesési szöge egyre kisebb, így egyre kevésbé térülnek el a fénytörés következtében. Geometriai számításokkal belátható, hogy a kisebb beesési szögű fénysugarak egyre messzebb érik el az asztal felületét. Könnyen arra gondolhatunk, hogy a fényfolt elvileg akármilyen messze eljuthat az asztalon, hiszen az asztal síkjában érkező sugár irányváltoztatás nélkül lép ki. Ez azonban tévedés! A fénysugarak útját (például a beesési szög függvényében) végigkövetve láthatjuk, hogy a fény nem is jut olyan messzire az asztallapon.

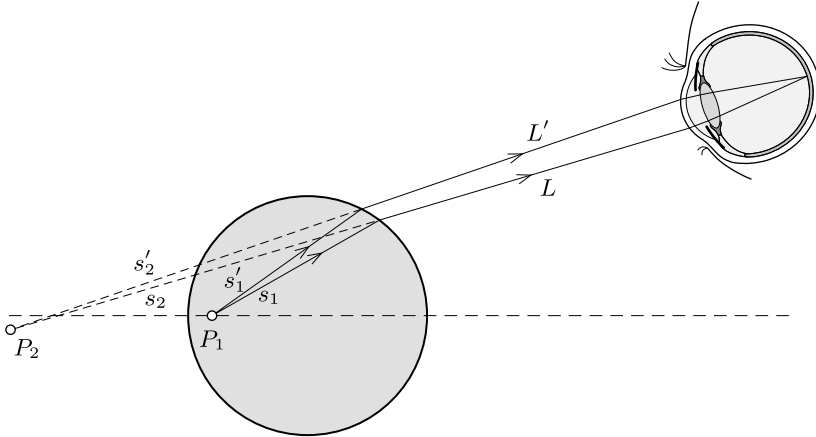
A hosszadalmas (bár trigonometriai közelítésekkel leegyszerűsíthető) számolás helyett egy egyszerű „trükk” segítségével is megkaphatjuk a fényfolt legtávolabbi pontját. Tekinthejtük úgy, mintha az asztalhoz közel haladó fénysugarak előbb egy R -nél kicsivel kisebb vastagságú plánparalel lemezen, majd egy ehhez kapcsolódó vékony, R görbületű sugarú síkdomború hengerlencsén haladnának át. A merőleges beesés miatt a plánparalel lemez hatása figyelmen kívül hagyható. A síkdomború lencse f fókusztávolságát a vékony lencsékre érvényes

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

formula alapján számíthatjuk ki, ahol R_1 és R_2 a lencsét két oldalról határoló felületek görbületű sugara. Esetünkben $R_1 = R$, valamint $R_2 \rightarrow \infty$, innen a fókusztávolság, vagyis a fényfolt legtávolabbi részének távolsága a negyedhengertől:

$$f = \frac{R}{n-1} = 10 \text{ cm.}$$

M. 199. I. megoldás. Válasszuk optikai tengelynek a pontszerű fényforráson és a gömb középpontján átmenő egyenest. Ha a fényforrást a gömb belsejében valamely általános P_1 pontba helyezzük, a kialakuló látszólagos kép nem lesz pontszerű. Bár az optikai tengely közelében haladó keskeny sugárnyaláb az optikai tengelyen, jó közelítéssel egy pontban fókuszálódik, de a tengelytől jobban eltávolodó, egymással kis szöget bezáró fénysugarak meghosszabbításai nem ugyanebben a pontban metszik egymást.



1. ábra

Tekintsük az 1. ábrán látható, egymáshoz közel haladó két fénysugarat. A fényforrástól a gömb felületéig a sugarak s_1 és s'_1 utat tesznek meg, itt megtörnek, majd L , illetve L' optikai úthossz befutása után végül a (távoli) szemünk retináján találkoznak. A Fermat-elv szerint a fény két pont között olyan útvonalon halad, melynek megtételéhez szükséges idő (és így a két pont közötti optikai úthossz is) az egymáshoz közeli pályák közül a lehető legkisebb. Ha a fény két *közeli* pályán is eljut az egyik pontból a másikba, akkor a két pályán az optikai úthosszak megegyeznek:

$$(1) \quad ns_1 + L = ns'_1 + L'.$$

A szemünk a P_1 pontba helyezett fényforrást a vizsgált két fénysugár meghosszabbításának P_2 metszéspontjában érzékeli. Ez a metszéspont általában nem esik az optikai tengelyre, és helyzete függ a vizsgált két fénysugár megválasztásától (azaz a szemünk helyzetétől). Ha a P_2 pontban keletkező virtuális kép helyére gondolatban egy fényforrást helyezünk, ismét alkalmazhatjuk a Fermat-elvet az 1. ábrán látható két sugárra. A P_2 ponttól a szemünk retinájáig megtett optikai úthosszak egyenlők:

$$(2) \quad s_2 + L = s'_2 + L'.$$

Képezzük az (1) és (2) egyenletek különbségét:

$$(3) \quad ns_1 - s_2 = ns'_1 - s'_2.$$

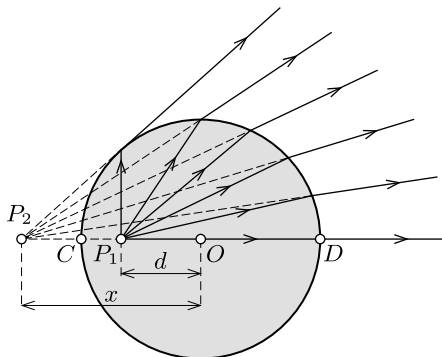
Ez az összefüggés jellemzi tehát két *közeli* fénysugár metszéspontjának helyét. Egymáshoz képest nagy szögben haladó fénysugarakra hasonló egyenlőség általában nem igaz, kivéve azt a speciális esetet, amikor a (3) egyenlet mindkét oldalán nulla áll, vagyis bármely sugármenetre $s_2/s_1 = n$. Ez teljesíthető, ha az üveggömb felülete éppen a P_1 és P_2 pontok egyik *Apollóniosz-gömbjével* esik egybe³. Ekkor a P_2 pont helyzete nem függ a közeli fénysugarak megválasztásától, minden sugár meghosszabbítása ugyanazon a ponton megy keresztül (amely a szimmetria miatt az optikai tengelyre esik).

Tökéletes képalkotás esetén tehát a gömb bármely pontja n -szer távolabb helyezkedik el a képponttól, mint a fényforrástól. Ez igaz a 2. ábrán látható C és D pontokra is:

$$\frac{x-r}{r-d} = n, \quad \frac{x+r}{d+r} = n,$$

ahol x a képpont távolsága a gömb O középpontjától. Ebből a két egyenletből meghatározhatjuk a keresett távolságokat:

$$d = \frac{r}{n} \quad \text{és} \quad x = nr.$$



2. ábra

II. megoldás. Tekintsük a gömb 3. ábrán látható síkmetszetét (ez a k_1 kör), és jelöljük a pontszerű fényforrás keresett helyzetét T -vel, a keletkező (tökéletes) képpontot pedig K -val. Vizsgáljuk azt a fénysugarat, amely a gömbből éppen érintőlegesen lép ki, és jelöljük a kilépési pontot A -val. A tökéletes képalkotás miatt ennek a fénysugárnak a meghosszabbítása átmegy a K ponton. A megtört fénysugár merőleges a gömb O középpontjából az A pontba húzott sugárra, ezért a törési szög $\beta = 90^\circ$. A Snellius–Descartes-törvény szerint

$$(4) \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n,$$

azaz a vizsgált fénysugár α beesési szögére fennáll a $\sin \alpha = 1/n$ összefüggés.

A (4) egyenlet igaz a gömbből kilépő többi fénysugárra is (azaz a k_1 kör K ponton átmenő szelőire), ezért az összes lehetséges sugármenet közül $\sin \alpha$ akkor maximális, ha $\sin \beta$ értéke a lehető legnagyobb, nevezetesen 1. Az α szög tehát éppen az A pontnál érintőlegesen kilépő sugár esetén maximális, ami azt jelenti, hogy az A ponthoz *közeli* pontokban kilépő fénysugarak beesési szöge mind ugyanakkora. Ebből következik, hogy a TO szakasz fölé rajzolt, α szögű k_2 látószögmérv

³Apollóniosz tétele szerint a sík azon pontjainak mértani helye, melyek a sík két rögzített pontjától mért távolságának aránya (1-től különböző) állandó, egy kör (Apollóniosz-kör), térben pedig ezen kör megforgatásából adódó gömb.

Apollóniosz időszámításunk kezdete előtt 262-től 190-ig élt; a kúpszeletekről írt munkájában ő vezette be az ellipszis, a parabola és a hiperbola kifejezéseket.

éppen érinti a k_1 kört az A pontban. (Ellenkező esetben a k_1 és k_2 körök metszenék egymást az A pontban, így az A pontnál kilépő fénysugár kilépési pontját kicsit elmozdítva a beesési szög csökkenne vagy növekedne.) A k_2 kör átmérője tehát az AO szakasz, így az OTA háromszögnek k_2 a Thalész-köre, az OTA szög pedig derékszög.

Az OTA derékszögű háromszög TO befogója nem más, mint a keresett d távolság, ezért

$$\sin \alpha = \frac{d}{r},$$

ahonnan $d = r/n$. Az OTA és OAK háromszögek hasonlóságából a kép és a gömb középpontjának távolságára $x = nr$ adódik.

Hátravan még annak belátása, hogy a T pontból (a jobb oldali térfél felé) induló, majd a gömbfelületen megtörő *valamennyi* fénysugár meghosszabbítása a K ponton halad keresztül. Jelöljük a T -ből φ szögben kiinduló fénysugár törési pontját A' -vel (4. ábra), és számítsuk ki, hogy ezen fénysugár meghosszabbítása mekkora x' távolságban metszi az optikai tengelyt.

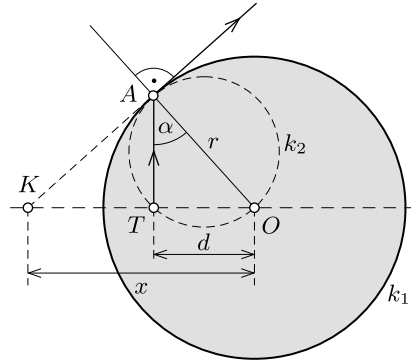
Írjuk fel az OTA' háromszögre a szinusztételt, és használjuk ki, hogy $d = r/n$:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{d}{r} = \frac{1}{n}.$$

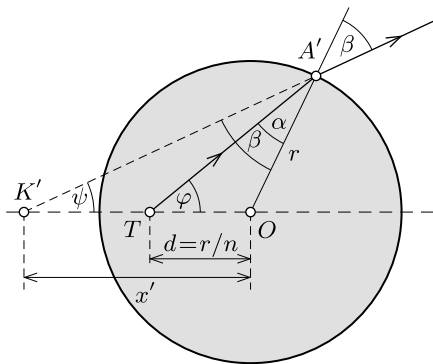
Ebből, valamint a (4) Snellius–Descartes-törvényből $\sin \beta = \sin \varphi$ adódik, és mivel hegyesszögekről van szó, ebből $\beta = \varphi$ következik. Igaz továbbá, hogy $\varphi + \alpha = \psi + \beta$, tehát fennáll az $\alpha = \psi$ összefüggés is. Innen, valamint az $OK'A'$ háromszögre felírható szinusztételből következik, hogy

$$x' = r \frac{\sin \beta}{\sin \psi} = r \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = nr,$$

és K' egybeesik K -val. Mivel ez minden (90° -nál nem nagyobb) φ -re, tehát minden (jobb oldali térfél felé induló) fénysugárra igaz, a képalkotás ezekre a sugarakra tökéletes.



3. ábra



4. ábra

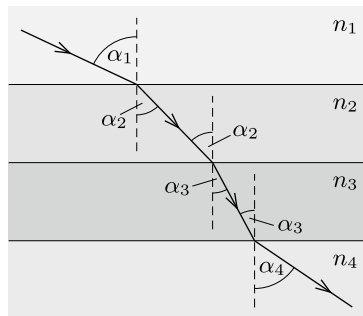
M. 200. Az 1. ábrán egymás után elhelyezett, különböző abszolút törésmutatójú plánpárhuzamos lemezeket láthatunk, amelyeken vékony fénysugár halad át.

A Snellius–Descartes-törvény alkalmazásával a következő összefüggéseket ismerhetjük fel:

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_3}, \dots$$

Megállapíthatjuk, hogy a beesési szög szinusza és az abszolút törésmutató szorzata a helytől független állandó:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = \dots = n \sin \alpha = \text{állandó.}$$



1. ábra

A folytonosan változó törésmutatójú közegre is érvényes ez az összefüggés, hiszen a közeget tekinthetjük úgy, mintha vékony plánparalel lemezekből épülne fel. Helyezzük a koordináta-rendszer origóját oda, ahonnan a fénysugár indul. Itt a beesési szög 90° -os, és ha ugyanitt a törésmutató n_0 értékű, akkor a fenti összefüggés így írható:

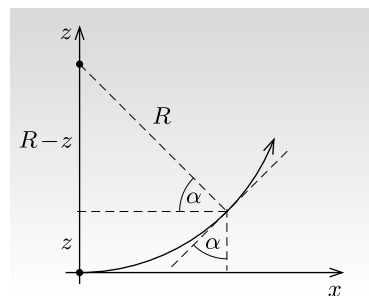
$$n(z) \sin \alpha = n_0.$$

Tételezzük fel, hogy a fény R sugarú körívén halad, és vizsgáljuk a 2. ábrán feltüntetett z koordinátájú helyet. Alkalmazzuk az előbbiekben megállapított összefüggést:

$$n_0 = n(z) \sin \alpha = n(z) \frac{R - z}{R},$$

amiből a törésmutató helyfüggése:

$$n(z) = \frac{R}{R - z} n_0.$$



2. ábra

A legnagyobb törésmutatójú ismert anyag (látható fény esetén) a gyémánt, de még ennek törésmutatója sem éri el az $n_{\max} = 2,5$ -ös értéket. Lényegében ez szab határt annak, mekkora lehet maximálisan a fénysugár által befutott körív. Ha a törésmutató $n_0 = 1$ -től $n_{\max} = 2,5$ -ig változik, akkor z legnagyobb értéke $3R/5$ lehet, ami $66,4^\circ$ -os középponti szögű körívnek felel meg.

A gyakorlatban pontosan körív mentén nehezen „terelhető” a fény, olyan oldatot azonban lehet készíteni, amelyben a koncentráció – és ezzel együtt a törésmutató – függőleges irányban folytonosan változik. Ilyen oldatban a fénysugár nem egyenesen, hanem valamilyen „sima” görbe mentén terjed.

Megjegyzések. 1. Felmerülhet a kérdés, hogy miért kezd el görbülni az x tengely mentén belépő fénysugár. Ennek oka az, hogy végtelen vékony fénysugár nincs, a „sugár” mindig valamilyen véges vastagságú nyalábot jelent. A nyaláb keresztmetszete mentén a törésmutató (vagyis a terjedési sebesség) változik, emiatt a hullámfront elfordul, és a nyaláb eltérül.

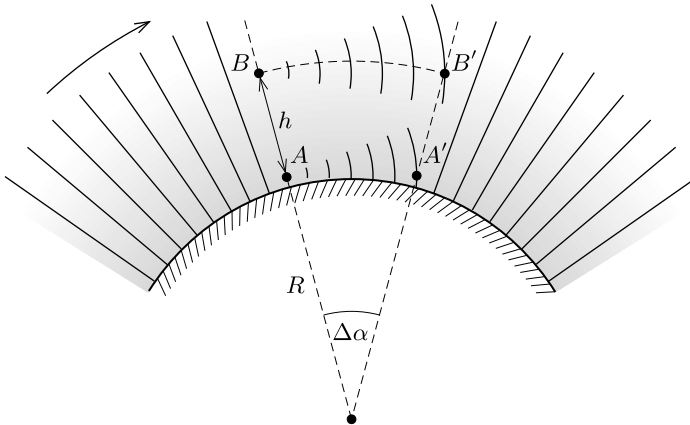
2. Nyáron a felforrósodott talaj fölötti levegőben függőlegesen felfelé haladva gyors ütemben csökken a hőmérséklet, ezáltal a sűrűség és a törésmutató is növekszik. Az ebben a közegben elgörbülő fénysugarak okozzák a délibáb jelenségét.

M. 201. *I. megoldás.* A *Fermat-elv* szerint az egymáshoz nagyon közeli fénysugarak ugyanannyi idő alatt futják be a pályájukat. Alkalmazzuk ezt az R sugarú bolygó felszínének közelében $2R\pi$ utat c/n_0 sebességgel befutó fény és a h magasságban ($h \ll R$) $c/n(h)$ sebességgel haladó fényre:

$$\frac{2R\pi}{c}n_0 = \frac{2(R+h)\pi}{c}n(h) = \frac{2\pi Rn_0}{c} \cdot \frac{1+h/R}{1+\varepsilon h}.$$

Ez az összefüggés akkor teljesül különböző $h \neq 0$ értékekre, ha $R = 1/\varepsilon$.

II. megoldás. A *Huygens-elv* szerint az azonos fázisú felületek (hullámfrontok) minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, melyek a hullám terjedési sebességével haladnak. Ez a sebesség (ún. fázissebesség) a vákuumbeli c fénysebességnek $1/n(h)$ -szorososa, ahol $n(h)$ a közeg törésmutatója az aktuális helyen.



1. ábra

Vizsgáljuk az 1. ábrán látható, az A és B pontokra illeszkedő, az ábra síkjára merőleges hullámfrontot. Egy kicsiny Δt idővel később a hullámfront az A' és B' pontokra illeszkedik, és ha eközben az iránya éppen $\Delta\alpha$ szöggel fordul el,

akkor a rá merőleges fénysugarak „vízszintesen” haladnak tovább. Ennek feltétele a fázissebességekkel kifejezve:

$$BB' = (R + h)\Delta\alpha = \frac{c}{n(h)} \cdot \Delta t,$$

$$AA' = R\Delta\alpha = \frac{c}{n_0} \cdot \Delta t.$$

A két egyenletet elosztva egymással:

$$1 + \frac{h}{R} = \frac{n_0}{n(h)} = 1 + \varepsilon h,$$

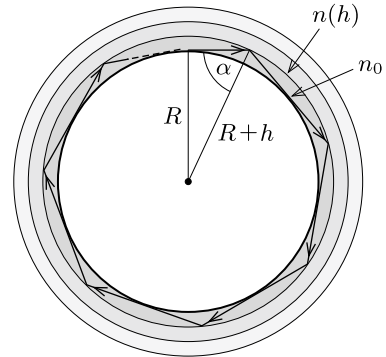
amiből $R = 1/\varepsilon$ következik, összhangban az I. megoldás eredményével.

Megjegyzés. A kétféle megoldás nem független egymástól, hiszen a geometriai optika keretei között megfogalmazott Fermat-elv hullámoptikai megalapozását éppen a Huygens-elv biztosítja.

III. megoldás. A körbefutó fény jelenségét teljes visszaverődések sorozataként is értelmezhetjük (2. ábra). Közelítsük a folytonosan változó törésmutatójú légkört kicsiny $h \ll R$ vastagságú rétegekkel, és egy-egy rétegen belül tekintsük a törésmutatót állandónak. Ha teljessül az

$$\frac{n(h)}{n_0} = \sin \alpha = \frac{R}{R + h},$$

vagyis az $R = 1/\varepsilon$ feltétel, akkor a vízszintesen elinduló fénysugár a réteg tetejénél teljes visszaverődést szenved, és teljes visszaverődések sorozata után „körbefutva” visszaérkezhet a kiindulási helyre. (Természetesen ehhez még a fényelnyelődésnek is elhanyagolhatóan kicsinek kellene lennie, ami reális körülmények között nem áll fenn.)



2. ábra

M. 202. A rövidlátók szemüvegének lencséje szórólencse. Jelöljük a szórólencse (negatív) fókusz távolságát $-f$ -vel, a tárgy és a szemünk távolságát d -vel, a tárgy méretét pedig T -vel (lásd az *ábrát*)! A keletkező (virtuális) kép távolsága a lencsétől a lencsetörvény szerint

$$\frac{1}{-k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{-f}, \quad \text{azaz} \quad k = \frac{tf}{t+f},$$

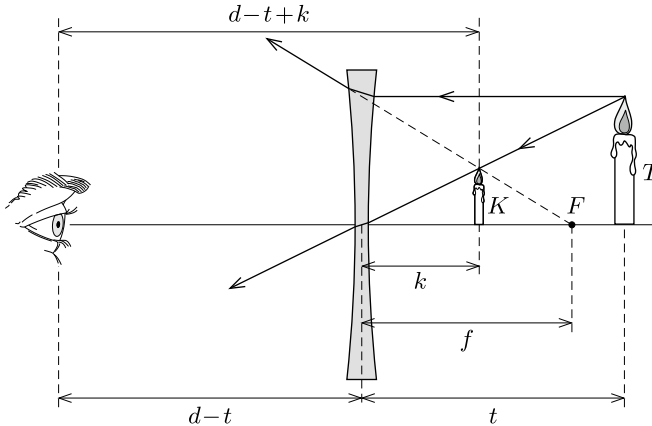
a kép mérete pedig

$$K = \frac{k}{t}T = \frac{f}{t+f}T.$$

A kép látszólagos nagyságát azonban nem K , hanem az a φ látószög határozza meg, amely alatt a kép látszik. Ennek nagysága (a tárgy távolsághoz képest kis tárgyat tételezve fel):

$$\varphi = \frac{K}{d-t+k} = \frac{fT}{t(d-t)+fd},$$

ahol d a szemünk és a tárgy távolsága.



A látószög t függvényében akkor lesz a legkisebb, amikor a fenti kifejezés jobb oldalán a nevező a legnagyobb. A t és $(d-t)$ pozitív mennyiségekre felírhatjuk a számtani és mértani középértékek közötti egyenlőtlenséget:

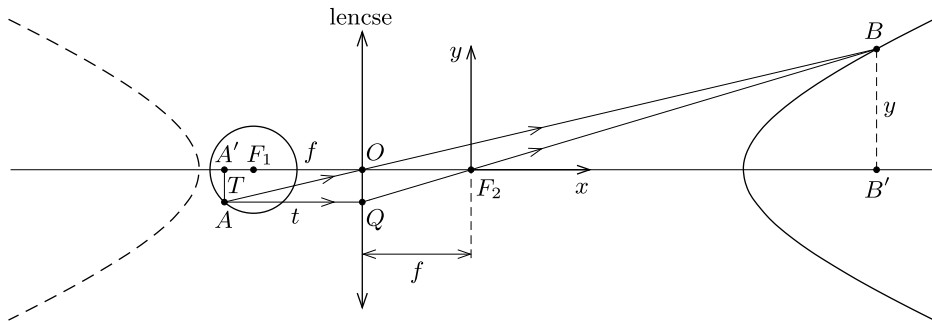
$$t(d-t) \leq \left[\frac{t+(d-t)}{2} \right]^2 = \frac{d^2}{4}.$$

Egyenlőség $t = d/2$ esetén áll fenn, ekkor lesz a φ látószög a lehető legkisebb. A tárgyat tehát akkor látjuk a legkisebbnek, amikor a lencsét ugyanolyan messze tartjuk a szemünktől, mint a tárgytól. Érdekes, hogy ez a feltétel független a lencse fókusz távolságától.

M. 203. Tételezzük fel, hogy a gömb átlátszó (tehát a felületének bármely pontjából eljuthat a fény a lencséhez), de a belsejének törésmutatója nem különbözik a levegőtől, így a fénysugarak csak a lencsénél törnek meg. A gyakorlatban ilyen helyzet például egy gömbfelület alakú, vékony, de nem nagyon sűrű szövésű dróthálával valósítható meg.

A gömbfelület forgásszimmetriája miatt elegendő a gömb egy síkmetszetének, az optikai tengelyre illeszkedő egyik főkörének képét meghatározni, a teljes képen ezen görbe megforgatásából adódó forgásfelület lesz.

Tekintsük a lencse egyik (F_1) fókuszpontja körüli r sugarú kör valamely A pontját, és szerkesszük meg két nevezetes sugár segítségével az A -nak megfelelő B képpontot az ábrán látható módon. Célszerű a B pontot a másik (F_2) fókuszpontba helyezett derékszögű koordináta-rendszerbeli (x, y) számpárral jellemezni.



Az $OA'A$ és $OB'B$ háromszögek hasonlóságából

$$\frac{y}{x+f} = \frac{T}{t},$$

az $F_2B'B$ és F_2OQ háromszögek hasonlóságából pedig

$$\frac{y}{x} = \frac{T}{f}$$

következik. (A szokásos módon t az A pontnak megfelelő tárgytávolságot, T pedig a tárgy méretét jelöli.) Ezekből az arányokból T és t kifejezhető x és y segítségével:

$$T = f \frac{y}{x}, \quad \text{illetve} \quad t = f + \frac{f^2}{x}.$$

Az A és F_1 pontok távolsága rögzített érték (a gömb r sugara):

$$(t-f)^2 + T^2 = r^2,$$

ahonnan t és T behelyettesítése, valamint algebrai átalakítások után a következőt kapjuk:

$$\left(\frac{rx}{f^2}\right)^2 - \left(\frac{y}{f}\right)^2 = 1.$$

Ez az összefüggés egy hiperbolát ír le, melynek az optikai tengellyel párhuzamos „valós féltengelye” f^2/r , „képzetes féltengelye” pedig f hosszúságú.

A teljes gömbfelület képe a hiperbola mindkét ágának megforgatásából adódó ún. kétköpenyű forgáshiperboloid lesz. A gömb egyik ($t > f$ módon jellemezhető) felének képe *valódi* kép, ennek síkmetszetét az ábra jobb oldalán folytonos vonallal ábrázoltuk. A másik, lencséhez közelebb eső félgömb képe *látzólagos* kép, ennek a bal oldali „köpeny” felel meg (síkmetszetét szaggatott vonal jelzi). A lencse fókusz síkjában fekvő kör pontjairól nem jön létre kép, a hozzá közeli pontok képei pedig valamelyik hiperboloid-felületen nagyon messze (határesetben a „végtelenben”) alakulnak ki. Ha a gömb nem átlátszó, akkor természetesen csak a lencséhez közelebbi felének virtuális kép jön létre.

Megjegyzés. A megoldás során feltételeztük, hogy a lencse vékony és a képképzés torzításmentes. Ez utóbbihoz az (is) szükséges, hogy a képképzésben résztvevő fénysugarak az optikai tengellyel majdnem párhuzamosan haladjanak, ez pedig akkor teljesül, ha a lencse fókusz távolsága a gömb sugaránál is és a lencse átmérőjénél is sokkal nagyobb. A megoldásban szereplő ábra méretaránya tehát erősen torzított, vagy ha ténylegesen ilyenek az arányok, akkor a kiszámított képfelületnek csak egy kis darabját szabad elfogadnunk.

Hasonló okok miatt nincs sok értelme a lencsébe nyúló, vagy azt magába foglaló gömb ($r \geq f$) esetét tanulmányoznunk. Matematikailag érdekes ugyan a paraméterek teljes tartományának vizsgálata, és az $r > f$ eset a „dróthálóba bújtatott” lencsével még fizikailag is megvalósítható, a leképezés torzításai miatt azonban ennek elemzése a ténylegesen tapasztalható képképzés szempontjából érdektelen.

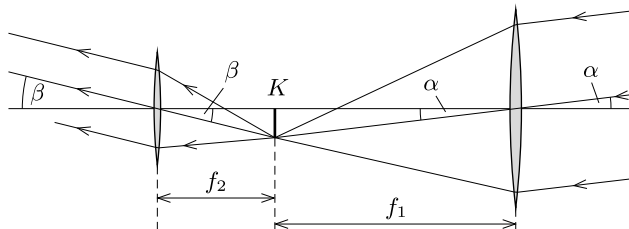
M. 204. Mivel a leképezési törvényben a t tárgytávolság és a k képtávolság egymással felcserélhető, arányuk pedig a nagyítást mutatja meg, ezért $(k/t)^2 = 9$ (vagy $1/9$), tehát $k/t = 3$ (vagy $1/3$). Így a tárgytávolság 30 cm (vagy 90 cm), a képtávolság pedig 90 cm (vagy 30 cm). A fókusz távolságot a leképezési törvényből kaphatjuk:

$$f = \frac{kt}{k+t} = 22,5 \text{ cm.}$$

Ha a lencsére ugyanannyi fény jutna mindkét esetben, akkor a 9-szer kisebb kép 81-szer fényesebb lenne, mert az ernyőn a kis kép 81-szer kisebb területet foglal el. A háromszor messzebb lévő lencsére azonban (a *kis* izzószál miatt) csak a fény kilenced része jut ahhoz képest, ami a közeli lencsét éri, tehát a kis kép csak 9-szer fényesebb a nagynál.

Általánosságban is megmutatható, hogy ilyen esetben a kis kép annyszor fényesebb, ahányszor nagyobb nála a másik kép.

M. 205. Tekintsük például a két gyűjtőlencséből összeállított Kepler-távcsövet! (Más távcsövekre hasonló elemzés készíthető.) A távoli tárgyról az f_1 fókusz távolságú objektív (tárgylencse) majdnem pontosan a fókusz síkjában alkot képet. Ha ezt a képet egy f_2 fókusz távolságú szemlencsén (okuláron) keresztül nézzük, akkor ennek a fókusz síkja is majdnem pontosan a kép helyére esik, hiszen a szemünket „végtelenre állítjuk”, nagyon távol keressük a képet.



1. ábra

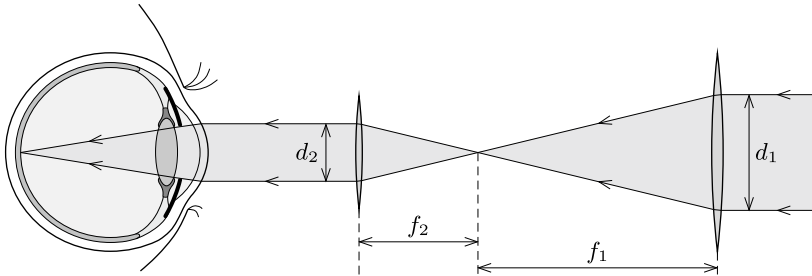
Az erősen eltorzított méretarányú 1. ábráról leolvashatjuk, hogy a távcső szög-nagyítása (a Hold két „széléről” érkező fénysugarak látószög-növekedési faktora):

$$N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{(K/f_2)}{(K/f_1)} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Vizsgáljuk meg, hányszor több energia érkezik a szemünkbe a távcsövön keresztül, mintha szabad szemmel néznénk a Holdat! Feltételezzük, hogy a pupillánk d_2 átmérője mindkét esetben ugyanakkora, és kisebb, mint a távcső okulárjának átmérője. A 2. ábrán (amely csak a majdnem párhuzamosan érkező fénysugarakat mutatja, a képpalkotást nem ábrázolja) látható, hogy időegységént a szemünkbe jutó fény mennyisége a távcső esetén

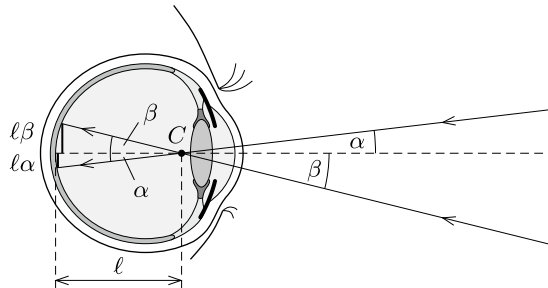
$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 = N_{sz}^2$$

faktorral nagyobb, mint az távcső nélkül lenne.



2. ábra

Végül hasonlítsuk össze a retinán keletkező kép méretét a kétféle megfigyelésnél. A retinán keletkező kép lineáris mérete jó közelítéssel egyenesen arányos a tárgy látószögével, a kétféle kép területének aránya tehát a szögnyújtás négyzetével, N_{sz}^2 -tel egyenlő.



3. ábra

Megjegyzés. A szem több törőfelületből álló, bonyolult optikai rendszer, amelynek működése nem írható le egyetlen vékony lencse segítségével. A szembe érkező fénysugarak két lényeges helyen törnek meg: először a szaruhártyán (cornea), másodszor pedig

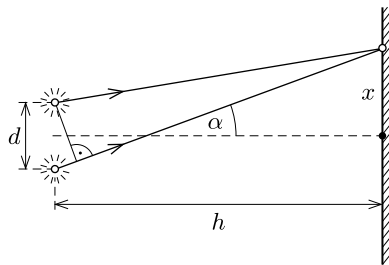
a szemlencsén. A szemet kitöltő közegek (csarnokvíz és üvegtest) törésmutatója a levegőtől jelentősen különböző, 1,3 körüli érték, ezért a fénytörés jelentős része már a szaruhártyán bekövetkezik. A belül változó törésmutatójú, vastag szemlencse a rajta áthaladó fénysugarak irányát az éles kép elérése érdekében csak „korrigálja”.

Mindezek ellenére a szem képalkotása jól közelíthető egyetlen, gömb alakú „helyettesítő” törőfelülettel, melynek C középpontján áthaladó fénysugarak irányváltoztatás nélkül jutnak a retinára (3. ábra). Innen látható, hogy a szabad szemmel, illetve távcsővel történő megfigyeléseknél keletkező képek mérete egyenesen arányos az α és β látószögekkel.

Ezek szerint távcsövön keresztül a Holdat *éppen olyan fényesnek* látjuk, mint szabad szemmel! Megfontolásaink érvénytelenné válnak, amikor egy olyan kicsiny látószögű égitestet figyelünk meg, amelynek képe nem kiterjedt terület, hanem csak egyetlen fotoreceptorra esik fény a retinán (illetve egy digitális kamerában egyetlen pixelt világít meg). Ilyen esetekben a távcső megnöveli a beérkező fény teljesítményét, amit nem ront le a kép méretének növekedése, tehát a csillagot *fényesebbnek* észleljük.

Megjegyzés. Amennyiben a távcső okulárja kisebb átmérőjű lenne, mint a kitágult pupillánk (a gyakorlatban nem ez a helyzet!), akkor a távcsövön keresztül a Hold halványabbnak látszana, mint szabad szemmel. Ugyanezt a hatást eredményezi a pupilla összeszűkülése, ami reflexszerűen történik, ha erős fénybe nézünk.

M. 206. A lencse két fele a pontforrásról egy-egy pontszerű, valódi képet alkot, melyek koherens fényforrásként viselkedve interferenciát hoznak létre az ernyőn. Ezért érdemes előbb megvizsgálni, hogy milyen interferenciaképet hoz létre két, egymástól d távolságra lévő, koherens, λ hullámhosszúságú, monokromatikus fényt kibocsátó pontforrás a tőlük $h \gg d$ távolságra elhelyezett ernyőn.



1. ábra

A tér azon pontjaiban tapasztalhatunk maximális erősítést, mely pontoknak a két fényforrástól mért távolságának *különbsége* éppen a λ hullámhossz egész számú többszöröse. Ez azt jelenti, hogy az erősítési helyek olyan kétköpenyű forgási hiperboloidokon helyezkednek el, melyek szimmetriatengelye illeszkedik a két fényforrásra. Az ernyőn ezeknek a hiperboloidoknak a tengelyükkel párhuzamos síkmetszeteit figyelhetjük meg, ezért a kialakuló interferenciacsíkok (nagyon enyhén

görbülő) hiperbola alakúak lesznek. A csíkok sűrűsége a hiperbolasereg szimmetriatengelyén a legnagyobb, ezért a továbbiakban csak a fényforrásokra illeszkedő, az ernyőre merőleges síkban elhelyezkedő fénysugarakkal foglalkozunk (1. ábra).

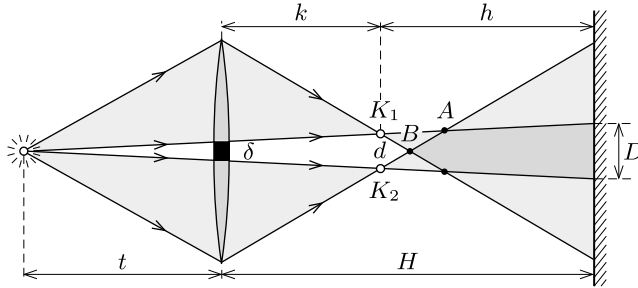
Az 1. ábrán látható, α szögben induló fénysugarakra a maximális erősítés feltétele:

$$d \sin \alpha = n\lambda,$$

ahol n egész szám. Kis α szögekre használhatjuk a $\sin \alpha \approx x/h$ közelítést, ezzel

$$\frac{xd}{h} = n\lambda, \quad \text{azaz} \quad x = n \frac{\lambda h}{d}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a szomszédos interferenciacsíkok távolsága $\Delta = \lambda h/d$.



2. ábra

Most térjünk rá arra a kérdésre, hogy milyen képeket alkot a pontszerű fényforrásról a félbevágott gyűjtőlencse! A leképezési törvény szerint

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

amiből a k képtávolságra

$$k = \frac{tf}{t-f}$$

adódik. A (nem méretarányos) 2. ábráról a megfelelő háromszögek hasonlóságát felhasználva leolvasható, hogy ha a két féllencse közötti rés vastagsága δ , akkor a keletkező K_1 és K_2 képek d távolságára fennáll a

$$\frac{d}{\delta} = \frac{t+k}{t}$$

összefüggés, amelyből

$$d = \frac{t+k}{t} \delta = \frac{t\delta}{t-f}.$$

A lencse által előállított K_1 és K_2 képek interferenciacsíkokat hoznak létre az ernyőn, melyek távolsága (ahogy előbb láttuk) $\Delta = \lambda h/d$, ahol h a képek és az ernyő távolsága:

$$h = H - k = \frac{H(t-f) - tf}{t-f}.$$

A szomszédos interferenciacsíkok távolsága tehát

$$\Delta = \frac{\lambda(H(t-f) - tf)}{t\delta}.$$

Interferenciát csak az ernyő azon részén figyelhetünk meg, ahol a két képből érkező fénynyalábok átfednek. Ismét a megfelelő háromszögek közötti hasonlóságot használva kapjuk az átfedési tartomány D szélességét:

$$D = \delta \frac{H+t}{t}.$$

Az ernyőn látható interferenciacsíkok száma:

$$N \approx \frac{D}{\Delta} = \frac{\delta^2}{\lambda} \frac{H+t}{H(t-f) - tf}.$$

A rendelkezésre álló adatok behelyettesítése után $N \approx 46,7$ eredményt kapunk, azaz 47 interferenciacsíkot láthatunk az ernyőn.

Megjegyzés. A feladatban megadott számadatok esetén az ernyő távolabb helyezkedik el a lencsétől, mint a 2. ábrán látható A pont. Ellenkező esetben az átfedési tartomány D méretét máshogy kellene számolni, ehhez azonban szükségünk lenne a lencse átmérőjére. Ha az ernyőt a B pontnál közelebb helyezzük a lencséhez, nem jön létre interferencia.

M. 207. Először képzeljük el, milyen lenne a diffrakciós kép, ha minden második rést (a másodikat, negyediket stb.) kitakarnánk! Ekkor a $4d$ távolságra elhelyezkedő rések egy szokásos optikai rácsot alkotnának, az n -edik elhajlási maximum ernyőn mérhető x_n helyzetét pedig a

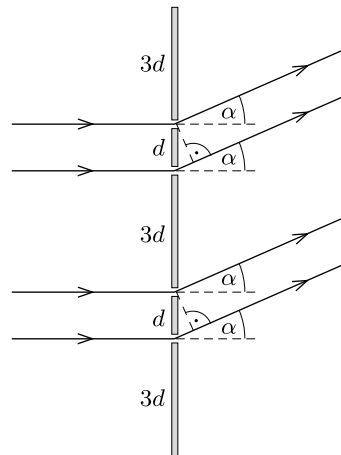
$$4d \sin \alpha_n = n\lambda, \quad \sin \alpha_n \approx \operatorname{tg} \alpha_n = x_n/L$$

összefüggésekből számíthatjuk ki:

$$(1) \quad x_n = n \frac{\lambda L}{4d}.$$

(Felhasználtuk, hogy $d \gg \lambda$, vagyis az elhajlási szögek kicsik.) Ugyanilyen lenne az elhajlási kép, ha a másik réssort (azaz az első, harmadik stb.

rést) takarnánk ki. Ha mindkét réssoron átengedjük a fényt, akkor az (1) egyenlet által meghatározott irányok közül bizonyos irányokban (azaz bizonyos n értékeknél) részleges vagy teljes kioltást tapasztalhatunk. Azt kell tehát megvizsgálnunk, hogyan adódik össze a két, d távolsággal eltolt, $4d$ periódusú réssoron áthaladó fény amplitúdója.



1. ábra

A következő négy eset lehetséges:

1. Ha $n = 4k + 1$ (ahol k egész), akkor a két réssoron áthaladó fény közötti útkülönbség $\lambda/4$, ami $\pi/2$ fáziskülönbségnek felel meg. Két, $\pi/2$ fáziskülönbséggel találkozó, azonos amplitúdójú (azaz térerősségvektorú) hullám összegének amplitúdója a tér egy rögzített pontjában:

$$E_{\text{eredő}}(t) = E_0 \sin \omega t + E_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = E_0 \sin \omega t + E_0 \cos \omega t,$$

amely $\sqrt{2}$ kiemelése után egyetlen szinuszfüggvénnyé alakítható:

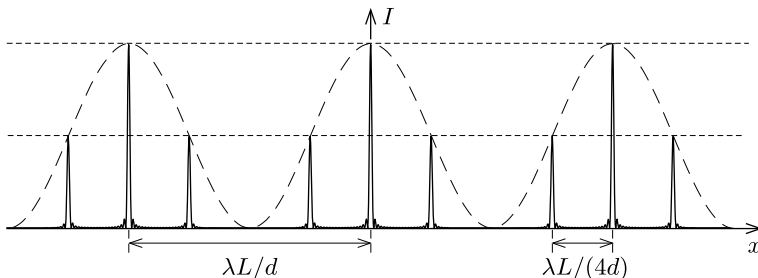
$$E_{\text{eredő}}(t) = \sqrt{2}E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \omega t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega t \right) = \sqrt{2}E_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Az amplitúdó tehát az egy réssoron átjutó fény amplitúdójának $\sqrt{2}$ -szerese. Mivel a fény *intenzitása* az amplitúdó *négyzetével* arányos, így az eredő intenzitás az egy réssor esetében mérhető intenzitásnak a kétszerese lesz.

Ugyanehhez az eredményhez úgy is eljuthatunk, ha az amplitúdókat forgóvektorként (más néven fázisvektor) adjuk össze. Ekkor két egyforma nagyságú, egymással 90° -os szöget bezáró „amplitúdóvektort” kell összeadnunk, amelyek eredője az eredeti vektoroknál $\sqrt{2}$ -ször hosszabb, és azokkal 45° -os szöget zár be.

2. Ha $n = 4k + 2$, akkor a két réssor közötti fáziskülönbség π , tehát ilyen irányokban tökéletes kioltást tapasztalunk.
3. Ha $n = 4k + 3$, a fáziskülönbség $3\pi/2$, így az amplitúdó (az első esethez hasonlóan) az egyetlen réssoron áthaladó fény amplitúdójának $\sqrt{2}$ -szerese, az intenzitás pedig a kétszerese lesz.
4. Ha $n = 4k$, akkor minden sugár erősíti egymást, az amplitúdó tehát egyetlen réssoron áthaladó fény amplitúdójának kétszerese, az intenzitás pedig négyszerese lesz.

Összefoglalva: a 2. ábrán folytonos vonallal ábrázolt intenzitáseloszlás alakul ki, a nagy intenzitású csúcsok közötti távolság $\lambda L/d$.



2. ábra

Megjegyzések. 1. A „furcsa” optikai rácsot felfoghatjuk olyan $4d$ rácsállandójú rácsként is, melyet nem egyszerű rések, hanem d réstávolságú (*Young-féle*) *kettősrések* alkotnak. Egy $4d$ rácsállandójú, (igen keskeny résekből álló) hagyományos optikai rács intenzitáseloszlása azonos magasságú, egymástól $\lambda L/(4d)$ távolságra elhelyezkedő, éles csúcsokból áll. Belátható, hogy egyetlen, d réstávolságú kettősrés elhajlási képe a 2. ábrán szaggatott vonallal jelölt koszinuszfüggvény. A furcsa rács esetén mérhető intenzitáseloszlást úgy kaphatjuk meg, hogy az említett két intenzitáseloszlást összeszorozzuk.

2. Szembetűnő, hogy az optikai rácson a 4-szer ritkább periodikus mintázat 4-szer sűrűbb mintát eredményez az elhajlási képen. Ez a fajta fordított arányosság általánosan igaz a diffrakciós jelenségeknél: a legnagyobb mintázat alakítja ki a diffrakciós kép legfinomabb részleteit, és fordítva, a rács legapróbb mintázata adja az elhajlási kép nagyléptékű szerkezetét. A feladatban a d és $4d$ távolságokon kívül van egy harmadik méretskála is, amit eddig elhanyagoltunk: a rések szélessége. Ha ezt is figyelembe vennénk, akkor ez az elhajlási képen egy hosszú periódusú modulációt eredményezne. (A 2. ábrán látható intenzitáseloszlást meg kellene szorozni az egy rés diffrakciós képének intenzitáseloszlásával.)

3. Az intenzitáscsúcsok nem végtelen „élesek”, hanem bizonyos szélességük van, melynek oka a megvilágító lézernyaláb vastagságával áll kapcsolatban. Ha például a megvilágító lézernyaláb vékony (az ernyőtávolság pedig nagy), akkor csak kevés résen halad át fény, ami az intenzitáscsúcsok kiszélesedéséhez vezet. Ezt az állítást legegyszerűbben egy hagyományos („egyenközű”) optikai rács példáján keresztül szemléltethetjük. Ha egy ilyen rács N darab részét világítjuk meg, akkor a maximális erősítési irányokban mind az N résből jövő amplitúdó összeadódik, az eredő amplitúdó tehát N -nel, az intenzitáscsúcsok *magassága* pedig N^2 -tel arányos. A rácson átjutó fény által szállított teljesítmény arányos N -nel, és ugyanígy kell viselkednie az intenzitáscsúcsok alatti területnek is (hiszen az energia megmarad). Ez pedig csak úgy lehetséges, ha az intenzitáscsúcsok *szélessége* $1/N$ -nel arányos.

M. 208. A rácsra merőlegesen esik monokromatikus fény, emiatt a résekből kilépő fényhullámok fázisa kilépéskor egyenlő, amplitúdójuk pedig (keskeny rések esetén) arányos a rések szélességével. (Ez utóbbi állítás következik a Huygens–Fresnel-elvből, hiszen egy n -szer szélesebb rés felfogható n darab egymás melletti résként, és az ezeken átjutó elemi fényhullámok mindegyike ugyanakkora, azonos fázisú járulékot eredményez az eredő hullámban.)

Az ernyőn látható fény intenzitása az eredő hullámamplitúdó négyzetével arányos. $N \gg 1$ rés esetén nagyon sok hullám interferenciáját kell tanulmányoznunk; az interferencia eredménye a találkozáskor fellépő fáziskülönbségektől, az pedig az útkülönbségektől függ. Ha a szomszédos résekből jövő hullámok között valamekkora fáziskülönbség van, a sok hullám járuléka általában kioltja egymást. Kivételt csak az az eset képez, amikor minden második résből azonos fázisban érik el az ernyőt a hullámok. Ekkor mind a páros, mind pedig a páratlan sorszámú rések hullámai erősítik egymást, eredő amplitúdójuk

$$E_{\text{páros}} = K \cdot \frac{N}{2} b, \quad \text{illetve} \quad E_{\text{páratlan}} = K \cdot \frac{N}{2} a.$$

(A K állandó nagysága függ a rácsra eső fény erősségétől és az ernyő távolságától, pontos értéke azonban a továbbiakban nem lényeges.)

Melyek azok az irányok, amelyeknél a fenti feltétel teljesül? Az 1. ábráról leolvasható, hogy amennyiben az eredeti irányval α szöveget bezáró irányban tovaterjedő hullámokra fennáll, hogy

$$2d \sin \alpha = k\lambda, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

a páros és a páratlan hullámok külön-külön azonos fázisban adódnak össze (tehát erősítik egymást).

Most már csak két hullámot kell összegeznünk, a páros sorszámú rések $E_{\text{páros}}$ amplitúdójú eredőjét a páratlan sorszámú rések $E_{\text{páratlan}}$ amplitúdójú eredőjével. Mekkora a fáziskülönbség ezen hullámok között? Mivel a szomszédos rések hullámainak útkülönbsége $k\lambda/2$, páros k -ra a két hullám *azonos*, páratlan k -ra pedig *ellentétes* előjellel összegződik. Ezek szerint az ernyőt α_k szögben érő fény (vagyis a k -adik elhajlási maximum) intenzitása

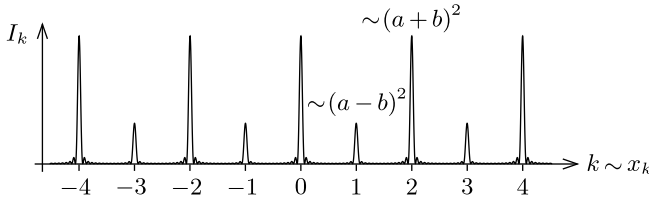
$$I_k \sim \begin{cases} (a+b)^2, & \text{ha } k \text{ páros} \\ (a-b)^2, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

A k -adik intenzitáscsúcs a rácstól L távolságban lévő ernyőn az eltérülésmentes fény helyétől

$$x_k = L \operatorname{tg} \alpha_k \approx L \sin \alpha_k = k \frac{L\lambda}{2d}$$

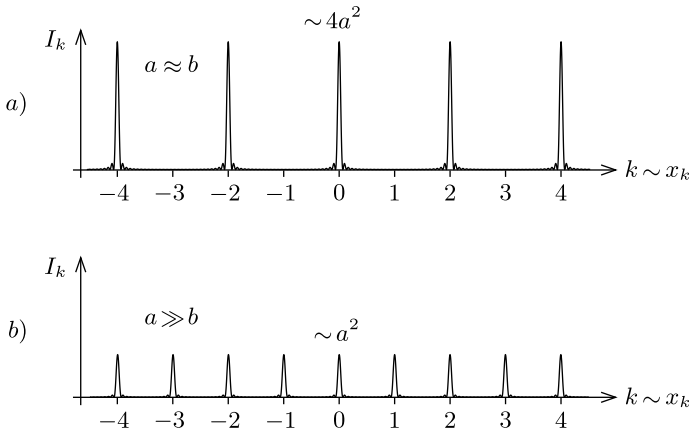
távolságra keletkezik. (Felhasználtuk, hogy $d \gg \lambda$ miatt az elhajlási szögek kicsik.)

Az ernyőn tehát egymástól egyenlő távolságra aránylag éles, apró fénypontokat (foltokat) látunk, de ezek intenzitása *nem egyforma*: felváltva követik egymást az erősebb és a halványabb fénypontok (2. ábra).



2. ábra

Ha $a \approx b$, akkor a 3. ábra a) részén látható intenzitáseloszlást, ha pedig $a \gg b$, akkor a b) részen bemutatott intenzitáseloszlást figyelhetjük meg az ernyőn.



3. ábra

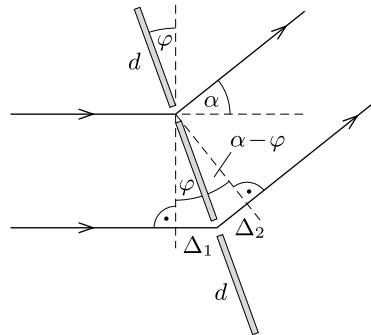
M. 209. Nézzük a rácsot (és a lézersugarat) függőleges irányból (1. ábra). Az útkülönbség két tagból, a rács előtti és a rács utáni részek járulékából tevődik össze:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = d [\sin \varphi + \sin (\alpha_k - \varphi)] = k \cdot \lambda,$$

ahonnan az interferenciás erősítés feltétele:

$$(1) \quad \sin \varphi (1 - \cos \alpha_k) + \cos \varphi \sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{d},$$

itt $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



1. ábra

Megjegyzések. 1. Az $\alpha = 0$ szögre tetszőleges φ esetén teljesül a hullámerősítés (1) feltétele $k = 0$ mellett. Ez a nulladrendű maximum, a változatlan irányban továbbhaladó fény esete.

2. Merőlegesen tartott rács ($\varphi = 0$) esetén (1)-ből természetesen visszkapjuk a szokásos

$$(2) \quad \sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{d} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

egyenletet.

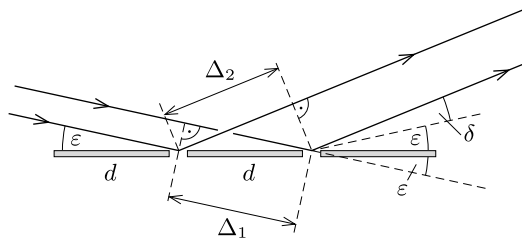
3. $\varphi \neq 0$ esetén az eltérítés feltétele nem szimmetrikus a $k \leftrightarrow (-k)$ cserére, ezért a nulladrendű maximumhoz képest jobbra és balra különböző szögekben térül el a fény.

Az aszimmetrikus eltérítési szögek is jól mutatják, hogy *téves* az a naiv elképzelés, miszerint a ferdén tartott rács úgy téríti el a fényt, ahogy azt egy sűrűbb, $d' = d \cos \alpha$ rácsállandójú rács tenné.

4. Az (1) egyenlet $\alpha < \varphi - 90^\circ < 0$ esetén is érvényes. Ilyenkor a fény a rácsnak ugyanazon térfelén halad tovább, mint ahol a lézer található, a rács tehát „visszatükrözi”

a fényt. Ebben a tartományban is találunk $k = 0$ -nak megfelelő, a hullámhossztól független eltérítési irányt: $\alpha = 2\varphi - 180^\circ$, ami a geometriai optikából is ismert siktükörön történő visszaverődésnek felel meg.

A merőlegesen vagy ahhoz közeli szögekben beeső lézertény esetén csak akkor kaphatunk szabad szemmel is jól látható interferenciát, ha a d rácsállandó nagyságrendileg ugyanolyan kicsi, mint a látható fény (ezred milliméternél is kisebb) hullámhossza. Ha d milliméteres nagyságrendű, vagy még ennél is nagyobb, akkor a (2) egyenlet szerinti α_k szögek annyira kicsik lennének, hogy az ernyőn a „foltcskák” egymásba lógnának, összemosódnának. Emiatt hiába is próbálnánk pl. egy műanyagvonalzónál 1 mm-es beosztású skálájára ejtett lézertényvel a fény hullámtermészetét „megfigyelni”, nem járnánk sikerrel.



2. ábra

Más a helyzet akkor, ha a fény nagyon lapos szögben esik a rácsra. Legyen $\varphi = 90^\circ - \varepsilon$, ahol ε egy kicsiny szög (pl. $1^\circ \approx 0,02$ radián). Írjuk fel az eltérülés szögét $\alpha = -(2\varepsilon + \delta)$ alakban, ahol δ a siktükörön való visszaverődés szögétől való – feltehetően kicsi – eltérés (2. ábra). Ezekkel a változókkal a hullámterítés feltétele (mint az akár az (1) egyenletből, akár a 2. ábráról leolvasható):

$$\cos \varepsilon - \cos(\varepsilon + \delta) = -k \frac{\lambda}{d}.$$

Innen (ε és δ kicsiny voltát felhasználva)

$$\frac{1}{2}\delta^2 + \varepsilon\delta + k \frac{\lambda}{d} = 0,$$

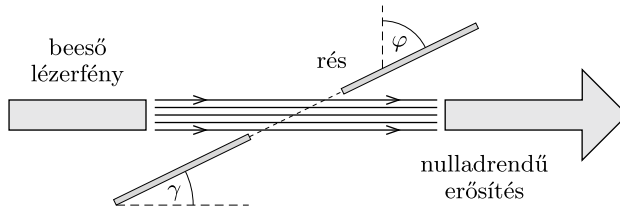
vagyis

$$\delta_k = \sqrt{\varepsilon^2 - 2k\lambda/d} - \varepsilon$$

adódik. Ha például ε néhány fokok szög, és $d = 1$ mm, akkor a δ_k szögek is néhány fok nagyságrendűek. Emiatt akár egy közönséges iskolai műanyagvonalzónál (a fény hullámhosszánál kb. 10^4 -szer durvább) milliméteres beosztása is képes reflexió elhajlási képet előidézni, ha a vonalzóra kicsiny szögben ejtjük a lézertényt. Az elhajlási kép kísérleti vizsgálatával, tehát vonalzóval is „meg tudjuk mérni” egy ismeretlen lézer hullámhosszát.

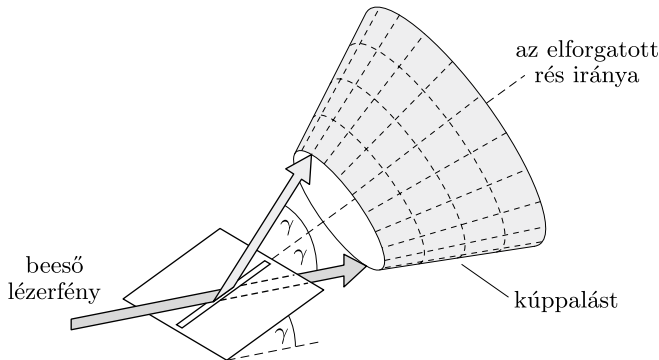
M. 210. Vizsgáljuk meg először, milyen lenne az elhajlási kép, ha az optikai rács helyére egyetlen, vékony rést helyeznénk! Ha a rést merőlegesen esik a fény ($\varphi = 0$), akkor a távoli ernyőn egy vízszintes, folytonosan változó intenzitású egyenes fénycsíkot látunk, amely a rést kioltási irányainak megfelelő helyeken megszakad. Ha a rést elegendően vékony, akkor a kioltási helyek távol helyezkednek el egymástól, így az ernyőn kialakuló fénycsík folytonos lesz.

Ha a rést előredöntjük a megadott vízszintes tengely körül, akkor a lézerből jövő fénynyaláb eredeti irányában továbbra is erősítést tapasztalunk. Ez azért van így, mert igaz ugyan, hogy a rést különböző pontjaiba (a lézertől mért távolságok különbözősége miatt) más-más fázissal érkezik a síkhullám, de a résen áthaladva és az eredeti irányban terjedve éppen akkora útkülönbséggel érkeznek az elemi hullámok az ernyőhöz, hogy a teljes fáziskülönbség közöttük nulla (lásd az oldalnézeti 1. ábrát).



1. ábra

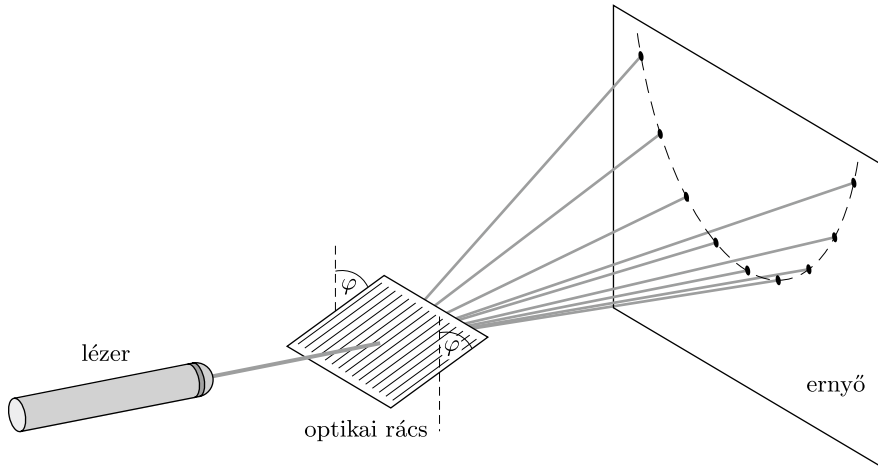
Ha az elemi hullámok a φ szögben megdöntött réssel γ szöget bezáró irányban ($\gamma = 90^\circ - \varphi$) erősítik egymást, akkor ez nemcsak az 1. ábra síkjában következik be, hanem a háromdimenziós tér minden olyan irányában, amely a rést irányával ugyancsak γ szöget zár be! (Az eredeti, függőlegesen álló rést esetén $\gamma = 90^\circ$, ezért kaptunk ott az ernyőn vízszintes vonalat.) A résen elhajló fény erősítési irányai tehát a 2. ábrán látható, egyetlen vízszintes alkotóval rendelkező kúppalástra illeszkednek. A kúp csúcsa a rést középe, tengelyének iránya a rést iránya, félnyílásszöge a fenti γ , amely az elforgatás szögének pótszöge.



2. ábra

Az ernyőn keletkező kép az ernyő síkjának és a 2. ábrán látható kúppalástnak a metszésvonalaként kialakuló *kúpszelet*, amely ellipszis, parabola vagy hiperbola

lehet. Parabolát éppen akkor kapunk, ha az ernyő síkja a kúp valamelyik alkotójával párhuzamos. Esetünkben ez akkor következik be, ha a kúpnak van függőleges alkotója. Vízszintes alkotója az eredeti fénysugár, függőleges tehát csak akkor lehet a másik alkotó, ha a kúp nyílásszöge 90° . Ekkor $\gamma = 45^\circ$, $\varphi = 90^\circ - \gamma = 45^\circ$, ez az elforgatási szög szerepelt példaként a feladatban.



3. ábra

Térjünk most vissza az eredeti elrendezéshez, az optikai rácshoz. A rács minden egyes részére igaz, hogy annak pontjaiból kiinduló hullámok külön-külön azonos fázisban, tehát egymást erősítve haladnak tovább, és ezért az ernyőn egy kúpszellet mentén fényes vonalat hoznának létre, ha a többi rész nem lenne jelen. A rács különböző részei általában különböző fázisú hullámokat juttatnak az ernyőre, és csak a kúpszellet bizonyos pontjaiban fog teljesülni, hogy ezen hullámok fáziskülönbsége 2π egész számú többszöröse. Ezekben a pontokban az ernyőn fényes foltokat, a többi helyeken viszont gyakorlatilag nulla megvilágítást észlelünk, ahogy azt a 3. ábra mutatja.

M. 211. A lapon lévő lyukak helyzete az $\mathbf{r} = (x, y)$ síkbeli vektorral adható meg (1. ábra), ahol x és y is a d rácsállandó egész számú többszöröse. Egy ilyen lyuk és az ernyő $\mathbf{R} = (X, Y)$ helyvektorú pontjának távolsága:

$$s(x, y) = \sqrt{L^2 + (X - x)^2 + (Y - y)^2} \approx \sqrt{L^2 + X^2 + Y^2 - 2(xX + yY)},$$

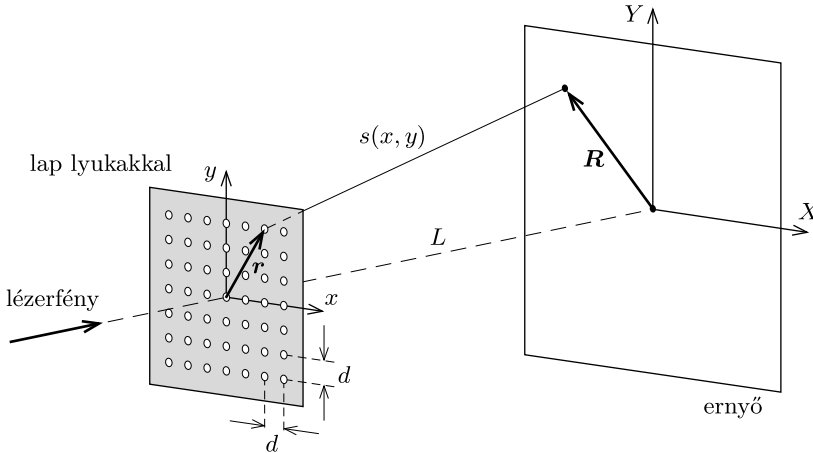
hiszen x és y általában sokkal kisebbek, mint X és Y . Ez a távolság közelítőleg így is írható:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \sqrt{L^2 + X^2 + Y^2} \sqrt{1 - 2 \frac{xX + yY}{L^2 + X^2 + Y^2}} \approx \\ &\approx \sqrt{L^2 + X^2 + Y^2} - \frac{xX + yY}{\sqrt{L^2 + X^2 + Y^2}}. \end{aligned}$$

Az x és y koordinátájú lyukakból érkező fényhullám és egy (önkéntesen) kiválasztott, mondjuk az $x = y = 0$ -nak megfelelő hullám útkülönbsége

$$(1) \quad \Delta s = -\frac{xX + yY}{\sqrt{L^2 + X^2 + Y^2}} \approx -\frac{xX + yY}{L}.$$

(Felhasználtuk, hogy L sokkal nagyobb, mint az ernyő mérete.)



1. ábra

Ha az (1) útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse, akkor valamennyi hullám ugyanolyan fázisban érkezik az ernyő megfelelő pontjához, tehát ott erősítést tapasztalunk. Ennek feltétele:

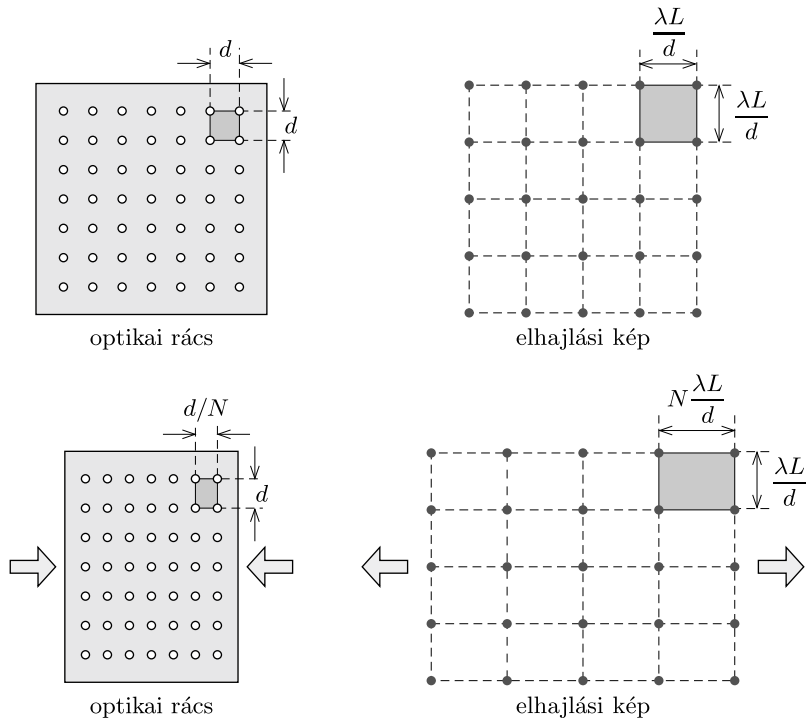
$$(2) \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{R} = xX + yY = \text{egész szám} \cdot (\lambda L).$$

Figyelembe véve x és y lehetséges értékeit, a (2) feltétel

$$X = n \cdot \frac{\lambda L}{d} \quad \text{és} \quad Y = m \cdot \frac{\lambda L}{d}$$

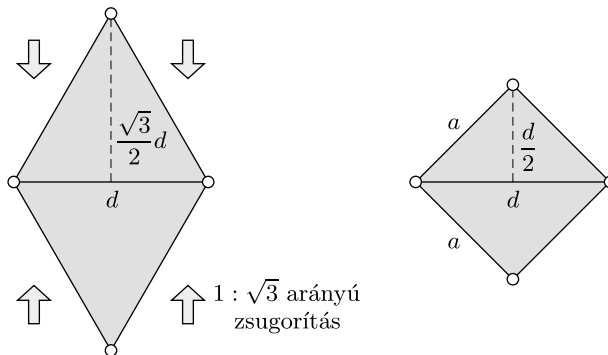
esetén teljesíthető, ahol n és m tetszőleges egész számok. Eszerint az elhajlási képen is négyzetrácsot látunk, melynek rácsállandója $\lambda L/d$.

Ha az optikai rácsot valamelyik irányban, mondjuk az x tengely mentén N -edrészére *zsugorítjuk*, a (2) feltétel akkor marad érvényben, ha az elhajlási maximumhelyek X koordinátája N -szeresére *növekszik*. A téglalaprács elrendezésű lyukrendszeren áthaladó fény elhajlási képe az ernyőn tehát ugyancsak téglalaprácsot alkot, annak méretaránya ugyanakkora, mint a lyuksor téglalapjainak méretaránya, de a szereposztás fordított: minél kisebb valamelyik irányban a lyukak távolsága a lapon, annál messzebb helyezkednek el az intenzitáscsúcsok az ernyőn ugyanebben az irányban (2. ábra).



2. ábra

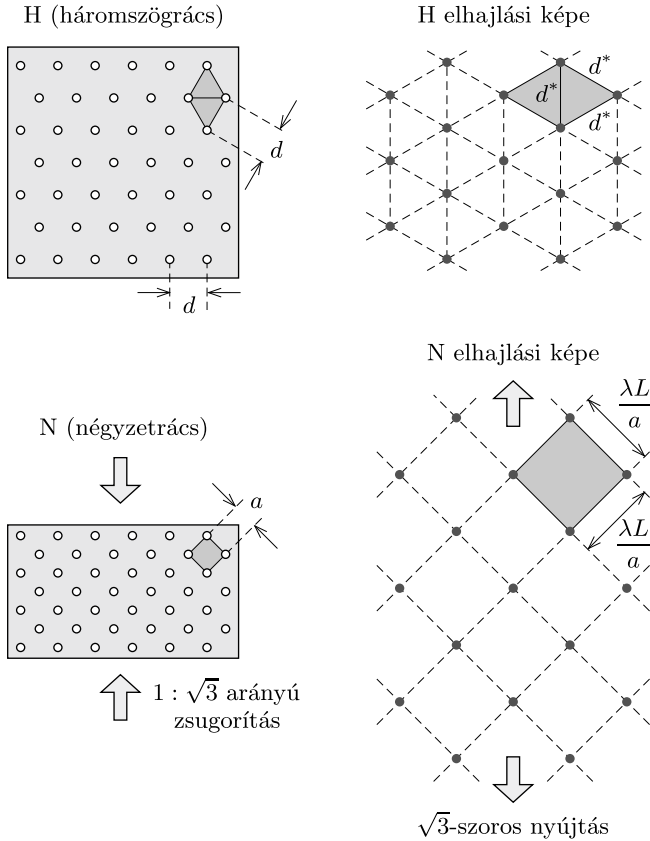
M. 212. Tekintsük a háromszögrács (H) két szomszédos „elemi celláját”, melyek egyik (vízszintes) oldalélük mentén illeszkednek egymáshoz. Ha ezt az alakzatot a függőleges irányban $1 : \sqrt{3}$ arányban összezsugorítjuk (1. ábra), akkor olyan négyzetet kapunk, amelynek oldaléle $a = d/\sqrt{2}$.



1. ábra

Az a rácsállandójú négyzetrács (N) elhajlási képe ugyanilyen állású, $\lambda L/a = \sqrt{2}\lambda L/d$ rácsállandójú négyzetrács lesz (lásd az előző feladat megoldását). Az

előző feladat megoldásából az is következik, hogy N elhajlási képe a H rács elhajlási képének $1 : \sqrt{3}$ arányú, függőleges irányú nyújtásával adódik, a keresett mintázat tehát N elhajlási képének ugyanilyen arányú zsugorításával kapható meg (2. ábra).



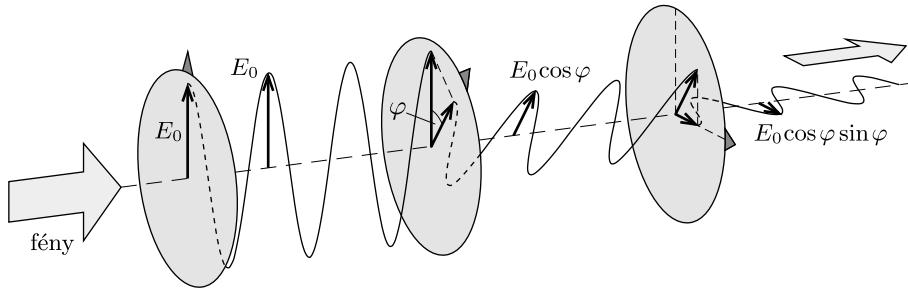
2. ábra

H diffrakciós képe tehát egy olyan rács, amelynek elemi cellái ugyancsak szabályos háromszögek és a háromszögek oldaléle

$$d^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\lambda L}{d}.$$

Érdekes, hogy amíg a lyukas lapon lévő szabályos háromszögek egyik oldala vízszintes, a másik kettő pedig „ferde”, az ernyőn megfigyelhető H rács háromszögeinek állása más: nincs vízszintes oldaluk, viszont az egyik oldalélük függőleges.

M. 213. a) Az első polárszűrőn átmenő fény intenzitása akkor a lehető legnagyobb, ha a ráeső fény már eleve polarizált, polarizációjának síkja pedig párhuzamos a szűrő polarizációs irányával. Ekkor az első polárszűrőn (az elnyelődést elhanyagolva) a teljes beeső intenzitás áthalad.



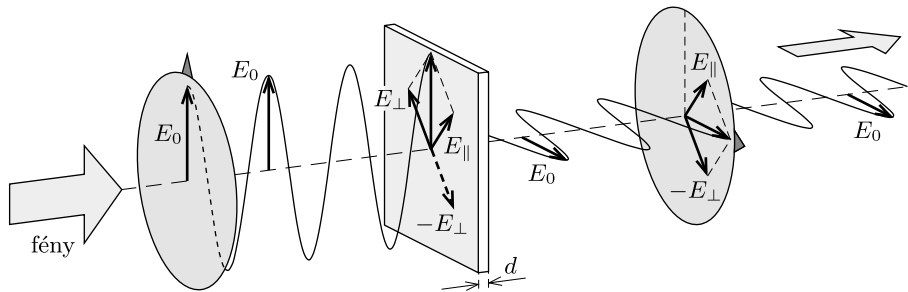
1. ábra

Jelöljük a beeső fény maximális elektromos térerősségét (amplitúdóját) E_0 -lal (1. ábra). Az első szűrőhöz képest φ szöggel elforgatott második polárszűrő felé haladó fény felbontható a szűrő „átengedő” irányába eső és arra merőleges polarizációjú összetevőkre. A második szűrő e két komponens közül csak az $E_0 \cos \varphi$ térerősségű összetevőt engedi át. Hasonlóan, a harmadik szűrőn áthaladó fény amplitúdója:

$$E = E_0 \cos \varphi \cos(90^\circ - \varphi) = E_0 \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} E_0 \sin 2\varphi.$$

Ennek abszolút értéke akkor a legnagyobb, ha $\sin 2\varphi = \pm 1$, azaz $\varphi = \pm 45^\circ$. Ekkor az átjutott fény amplitúdója a beeső amplitúdónak éppen fele, az amplitúdó négyzetével arányos fényintenzitás tehát *negyedrészére* csökken.

b) Ebben az esetben is akkor jut át a legtöbb fény az első polárszűrőn, ha a ráeső fény polarizációs síkje párhuzamos a szűrő „átengedő” irányával.



2. ábra

A kettőstörő lemez felé haladó fényt felbonthatjuk gondolatban az e iránnyal párhuzamos (E_{\parallel}), és arra merőleges (E_{\perp}) polarizációjú komponensekre. A lemezbe belépő két komponens (a különböző törésmutatók miatt) a lemez vastagságától függő fáziskülönbséggel lép ki a lemezből. Itt a kétféle polarizációjú összetevő szuperpozíciója adja meg a továbbhaladó fény polarizációját, amely a fáziskülönbség értékétől függően maradhat lineáris, de kialakulhat elliptikus vagy körkörös polarizáció is.

Ha a kettőtstörő lemezen áthaladó két komponens közötti fáziskülönbség π , vagy annak páratlan számú többszöröse, akkor a lemezből kilépve a két komponens ellentétes fázisban találkozik, amire úgy is tekinthetünk, mintha valamelyik összetevő (mondjuk E_{\perp}) előjelet váltana. Ennek feltétele:

$$(1) \quad |n_1 d - n_2 d| = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{ebből} \quad d = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{|n_1 - n_2|},$$

ahol k egész szám. Az eredő polarizáció ilyenkor lineáris marad, a fény amplitúdójának nagysága nem változik, de a polarizáció síkja elfordul.

Ha a lemez e orientációs iránya 45° -os szöget zár be mindkét polárszűrő polarizációs irányával, akkor a lemezen áthaladó fény polarizációs síkja (a 2. ábrán látható módon) éppen 90° -kal fordul el. Így a harmadik polárszűrő már nem tudja megváltoztatni a fény amplitúdóját. Az (1) összefüggéssel megadott vastagságú lemez és $\varphi = \pm 45^\circ$ -os orientáció esetén tehát a beeső (megfelelően polarizált) fény intenzitásának 100%-a átjuthat a rendszeren.

Megjegyzések. 1. Ha a rendszerre beeső fény polarizálatlan (vagyis két, egymásra merőlegesen polarizált fényhullám időben gyorsan, de egyenletesen változó keveréke), akkor már az első polárszűrő felére csökkenti a fény erősségét, akárhogy is forgatjuk azt. Az *a)* esetben ekkor az átjutó fény intenzitása a beeső intenzitásnak legfeljebb $1/8$ része, a *b)* esetben pedig a fele.

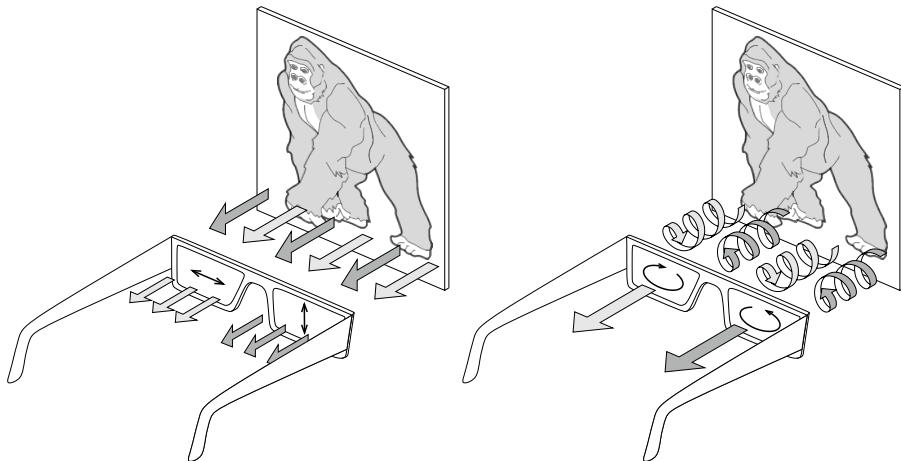
2. Optikai kísérletekben a lineárisan polarizált fény polarizációs síkjának elforgatására gyakran használják az (1) képletnek megfelelő vastagságú kettőtstörő lemezt, amelyet (a két, egymásra merőleges polarizációjú komponens optikai útkülönbsége miatt) kettőtstörő $\lambda/2$ -es lemezeknek neveznek. Létezik kettőtstörő $\lambda/4$ -es és $\frac{3}{4}\lambda$ -ás lemez is, ezekkel lineárisan polarizált fényt lehet cirkulárisan polarizálttá (és vissza-)alakítani (lásd a következő feladatot).

M. 214. A 3D-s mozifilmek úgy készülnek, hogy a forgatás során minden egyes jelenetet két, kicsit eltérő nézőpontú kamerával vesznek fel. A mozifilm vetítése során a kamerák által rögzített felvételeket két külön projektorral vetítik a vászonra: az egyik vetített kép a bal szemnek, míg a másik a jobb szemnek szól. Ahhoz, hogy a jobb és bal szemünkbe csak a kívánt képről kiinduló fénysugarak jussanak el, a fény polarizációjának jelenségét használják.

A régebbi típusú 3D-s mozikban a két vetítógép lencséje után egy-egy (egymásra merőleges orientációjú) polárszűrő van elhelyezve. A speciális, fémszemcsékkel (általában ezüstszemcsékkel) bevont vászonról a nézőközönség felé visszaszóródó fény megőrzi polarizációjának síkját. A nézők által hordott szemüvegkezetben szintén két, egymásra merőleges állású polárszűrő található, melyek orientációja összhangban van a vetített képek polarizációs irányával. A polárszűrők az orientációjukkal párhuzamos polarizáltságú fényt átengedik, az erre merőlegesen polarizált fényt viszont nem: így érik el, hogy a jobb és a bal szem csak a kívánt képet lássa (lásd az 1. ábra bal felét).

A lineárisan polarizált fény használatának hátránya, hogy a nézők fejének megdöntésekor a polárszűrőkön a nem kívánt fény egy része is áthalad, szellemkép keletkezik. Az újabb típusú 3D-s mozikban ezért cirkulárisan polarizált fényt

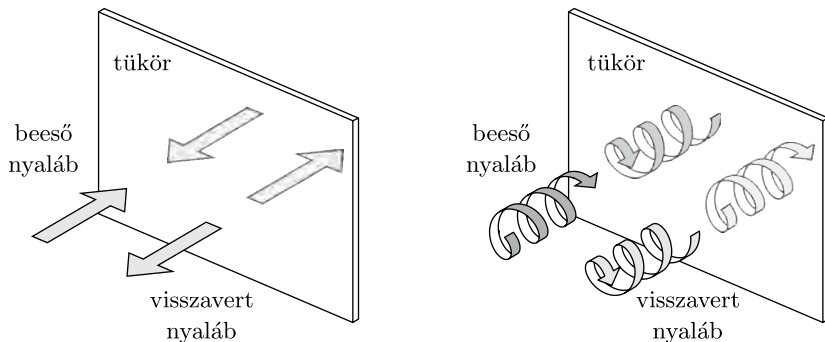
használnak. Az egyik vetítőgép jobbra, a másik pedig balra cirkulárisan polarizált fényt vetít az ezüstös vászonra. A visszaszóródó fény nemkívánatos részének kiszűréséről a 3D-s szemüveg fóliái gondoskodnak (1. ábra jobb fele), melyek azonban – mint látni fogjuk – nem egyszerű polárszűrők, hiszen azok átengednék a cirkulárisan poláros fény egy részét.



1. ábra

Most már rátérhetünk Péter kísérleteinek elemzésére.

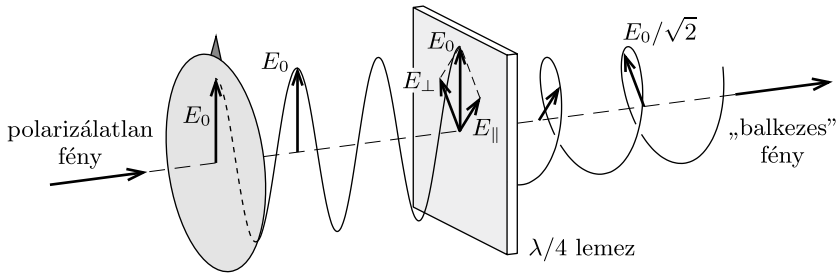
a) A nagytakarításkor talált, régi 3D-s szemüveg szemüveg biztosan lineáris polárszűrőket tartalmazott. Péter becsukott (mondjuk bal oldali) szeméről kiinduló, polarizálatlan fénysugarak a szemüveg bal oldali fóliáján áthaladva lineárisan polarizálttá válnak. A polarizáció iránya a tükörről való visszaverődés közben nem változik meg (lásd a 2. ábra bal felét), így ezek a sugarak nem jutnak át (a bal oldali fóliához képest kereszttezett állású) jobb oldali polárszűrőn: a becsukott szem nem látszik a tükörben, helyette Péter csak elsötétült „szemüveglencsét” lát. A nyitott (jobb oldali) szeméről kiinduló fénysugarak viszont a tükörről visszaverődve átjutnak a jobb oldali polárszűrőn, ezért láthatja Péter a nyitott szemét a tükörben.



2. ábra

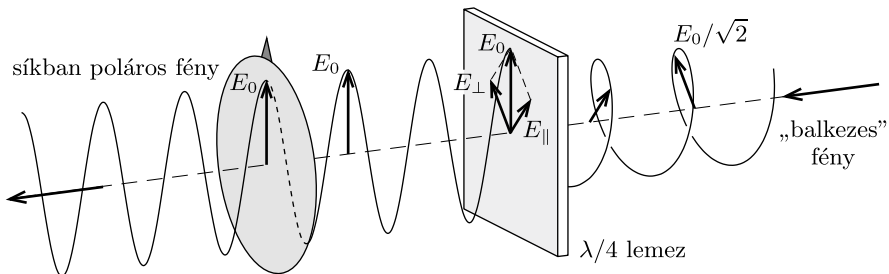
b) Az a tény, hogy az új 3D-s szemüveg éppen ellentétesen viselkedik, mint a régi, arra utal, hogy ebben az esetben a tükörről visszavert fénynek a haladási irányán kívül más tulajdonsága is megváltozik. Mivel a lineárisan poláros fény polarizációját a tükör nem változtathatja meg, ezért cirkulárisan poláros fényvel van dolgunk.

Cirkulárisan poláros fényt egy polárszűrővel és egy hozzá képest 45° -os orientációjú, ún. $\lambda/4$ -es lemezzel lehet létrehozni a 3. ábrán látható módon. A $\lambda/4$ -es lemez egy kettőtörő anyagból készült plánparalel lemez, amelynek törésmutatója az orientációs irányával párhuzamos polarizációjú fényre nézve más, mint az arra merőleges polarizációjú fény esetében (lásd az *előző feladat* megoldását). Emiatt a kétféle polarizációjú komponens között optikai útkülönbség lép fel, amely a $\lambda/4$ -es lemez esetén éppen a hullámhossz negyede.



3. ábra

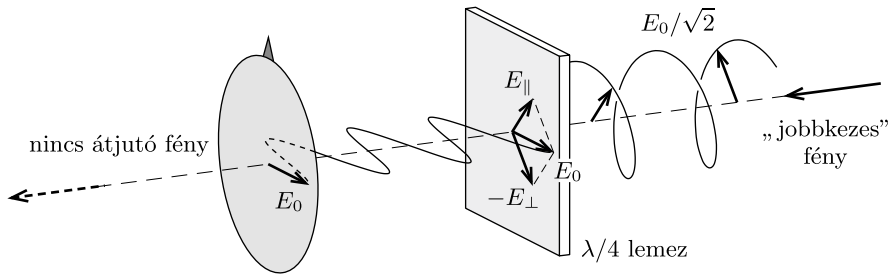
A beérkező, polarizálatlan fény a (mondjuk függőleges állású) polárszűrőn áthaladva lineárisan polarizálttá válik. A $\lambda/4$ -es lemezen áthaladva a lemez orientációjával párhuzamos E_{\parallel} és az arra merőleges E_{\perp} térerősségkomponensek között $\pi/2$ fáziskülönbség lép fel, így cirkulárisan poláros fény alakul ki. Attól függően, hogy a kétféle polarizációjú komponens közül melyik halad gyorsabban a kettőtörő lemezben, a kialakuló cirkuláris polarizáció lehet „jobbkezes” vagy „balkezes”. A 3. ábrán látható esetben a $\lambda/4$ -es lemezünk olyan, hogy „balkezes” fény keletkezik. Ha „jobbkezes” fényt szeretnénk ugyanebből az anyagból készült kettőtörő lemezzel előállítani, akkor ahhoz más vastagságú, ún. $\frac{3}{4}\lambda$ -ás lemezre van szükség (amelynél a két térerősségkomponens közötti fáziskülönbség $3\pi/4$).



4. ábra

Péter új 3D-s szemüvegében olyan fóliák vannak, amelyek kiszűrik a jobbra, illetve balra cirkulárisan poláros fényt. Ezek a cirkuláris „analizátorok” a 3. ábrán látható elrendezéshez nagyon hasonlóan működnek, de a cirkulárisan poláros fény előbb a kettőtstörő lemezen, utána pedig a polárszűrőn halad át. Ha a 3. ábrán is szereplő kettőtstörő $\lambda/4$ -es lemezre „balkezes” fény esik (amelyben E_{\parallel} és E_{\perp} között $-\pi/2$ fáziskülönbség van), akkor a 3. ábrán látható folyamat fordítottja megy végbe, és a lemezben bekövetkező $+\pi/2$ fázistolás hatására függőleges irányú lineáris polarizációjú fény keletkezik (4. ábra). Ezt a fényt a függőleges irányú polárszűrő átengedi.

Ha viszont a $\lambda/4$ -es lemezhez érkező fény „jobbkezes” (azaz E_{\parallel} és E_{\perp} közötti fáziskülönbség $+\pi/2$), akkor a kettőtstörő lemezben bekövetkező $+\pi/2$ fázistolás hatására végül vízszintes irányú lineárisan polarizált fény jön létre, amelyet a polárszűrő nem enged át (5. ábra). Az ilyen felépítésű „szemüveglencse” tehát a „balkezes” fényt átengedi, de a „jobbkezes” nem. Ha a $\lambda/4$ -es lemezt $\frac{3}{4}\lambda$ -ás lemezre cseréljük, akkor a „lencse” fordítva működik: a „jobbkezes” fényt engedi át, a „balkezes” viszont nem. Ezen az elven működik tehát a cirkulárisan polarizált fényt használó 3D-s mozi (1. ábra jobb fele).

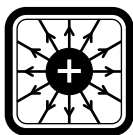


5. ábra

Most már megmagyarázhatjuk Péter második kísérletét. A becsukott (mondjuk bal) szemről kiinduló fénysugarak a bal oldali „szemüveglencsén” áthaladva (mondjuk balra) cirkulárisan polarizálttá válnak (hiszen előbb a polárszűrőn, utána pedig a kettőtstörő lemezen haladnak át). A „balkezes” fény viszont a tükörről „jobbkezesként” verődik vissza (hasonlóan ahhoz, ahogy a balkezes kesztyű tükörképe is jobbkezes kesztyű, lásd a 2. ábra jobb felét), ezért a szemüveg jobb oldali fóliáján akadály nélkül át tud jutni. Péter ezért láthatja becsukott szemét a tükörben. Ezzel ellentétben a (jobb oldali) nyitott szemét nem láthatja, hiszen a jobb oldali szemről kiinduló fény a szemüveg fóliáján áthaladva „jobbkezesé” válik, ami a tükörről „balkezes” fényként visszaverődve nem juthat át a szemüveg jobb oldali fóliáján.

Megjegyzések. 1. A kettőtstörő $\lambda/4$ -es lemez működési elvéből következik, hogy csak bizonyos hullámhosszú (adott színű), lineárisan polarizált fényt képes cirkulárisan polarizálttá (és viszont) változtatni. Vékony bevonatok alkalmazásával azonban elérhető, hogy a látható fény hullámhossztartományának jelentős részében is „viszonylag jól” működjön a kettőtstörő lemez.

2. Egyes 3D-s mozik és otthoni televíziók esetén nem polárszűrős szemüveggel, hanem aktív (elektronikával vezérelt) folyadékkristályos lencsékkel felszerelt szemüveggel oldják meg a két szembe jutó képek szeparálását. A 3D-s TV-k képernyőjén 100-200 Hz frekvenciával, felváltva villannak fel a két szemnek szánt képkockák. A szemüvegeket rádióhullámok, infravörös jelek vagy vezeték segítségével lehet szinkronizálni a TV felvilágosításával. Ennek eredményeképp a folyadékkristályos (LCD) „szemüveglencsék” a rájuk kapcsolt feszültség hatására (mindig a megfelelő pillanatban) felváltva sötétülnek el vagy világosodnak ki, így nyújtva otthoni háromdimenziós filmélményt.



Elektrosztatika I. (ponttöltések, szigetelők)

M. 215. Jelöljük a szálon függő golyócska töltését q -val, a másik test töltését Q -val, a szál hosszát ℓ -lel, a testek távolságát egyensúlyi állapotban pedig x -szel. Az *ábráról* leolvasható a kitérülő golyócska egyensúlyának feltétele:

$$(1) \quad \frac{mg}{F} = \frac{\ell}{x},$$

ahol

$$(2) \quad F = k \frac{qQ}{x^2}$$

a golyóra ható Coulomb-erő.

Az ABD és ACE háromszögek hasonlóak, ezért fennáll:

$$(3) \quad \frac{x}{2} : \ell = h : x.$$

Az (1)–(3) egyenletekből a töltések távolságára

$$x = k \frac{qQ}{2mgh},$$

a rendszer elektrosztatikus energiájára pedig

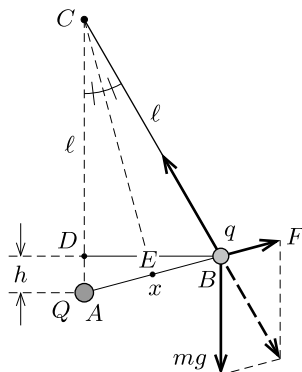
$$W_{\text{el}} = k \frac{qQ}{x} = 2mgh$$

adódik. A keresett munka az elektrosztatikus és a gravitációs helyzeti energia együttes növekedésével egyezik meg:

$$W = 2mgh + mgh = 3mgh.$$

Érdekes, hogy ez a munka sem a töltések nagyságától, sem a felfüggesztő szál hosszától nem függ.

M. 216. A töltések távolságát arányosan, mondjuk λ -szorosára növelve a közöttük ható erő $1/\lambda^2$ -szeresére változik. Ha az eredeti elrendezésben minden töltés egyensúlyban volt, akkor az új („átskálázott”) helyzetben is valamennyi töltésre ható eredő erő nulla marad. Emiatt az eredeti töltéeloszlást munkavégzés nélkül tetszőleges (akár „végtelen”) nagyra „fújhatjuk fel”. A rendszer energiája az egymástól nagyon messze lévő töltések esetén nulla, és mivel nem végeztünk munkát, az eredeti töltésrendszer összes elektrosztatikus energiájának is *nullának* kellett lennie.

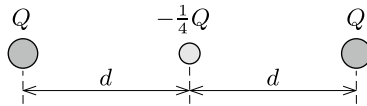


Valamelyik (mondjuk az i -edik) töltés egyensúlyi helyzetének stabilitását úgy vizsgálhatjuk meg, hogy megnézzük az összes többi töltés által létrehozott $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektromos erőteret az i -edik töltés helyén, illetve annak kis környezetében. A kiszemelt töltésre ható erő:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q_i \sum_{k \neq i} \mathbf{E}_k(\mathbf{r}) = Q_i \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Az i -edik töltés \mathbf{r}_i helyvektorú egyensúlyi helyzete akkor lenne stabil, ha az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőter (az \mathbf{r}_i hely közelében) a Q_i töltést az \mathbf{r}_i ponthoz közelíteni akarná. Ha ez teljesülne, akkor az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ elektromos erőter fluxusa az \mathbf{r}_i pontot körülvevő kicsiny zárt felületre nem lehetne nulla (hanem Q_i előjelétől függően negatív vagy pozitív szám lenne), ez pedig ellentmond a Gauss-törvénynek, amely szerint egy töltésmentes térrészt körülfogó zárt felületen az elektrosztatikus mező fluxusa mindig nulla. Ezek szerint a töltésrendszer egyensúlyi helyzete biztosan *instabil*.

Megjegyzések. 1. A fenti általános megfontolásokat egy konkrét, egyszerű példával is illusztrálhatjuk.



Ha három test (töltésük Q , $-Q/4$ és Q) az ábrán látható módon egy egyenes mentén helyezkedik el, akkor mindhármukra teljesül az erőegyensúly feltétele, és a rendszer elektrosztatikus energiája:

$$W_{\text{el}} = k \frac{(-\frac{1}{4}Q)Q}{d} + k \frac{(-\frac{1}{4}Q)Q}{d} + k \frac{Q^2}{2d} = 0.$$

Másrészt igaz, hogy ha a középső töltést jobbra kicsiny x távolsággal ($x \ll d$) kimozdítjuk, akkor a rá ható eredő erő:

$$F(x) = k \frac{Q^2}{4} \left[\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right] \approx k \frac{Q^2}{d^3} \cdot x > 0.$$

Ez az erő jobbra mutat, tehát a középső töltést az egyensúlyi helyzetétől távolítani igyekszik, eszerint annak egyensúlyi helyzete valóban *instabil*.

2. A megoldásban levezetett, a ponttöltések egyensúlyi helyzetének instabilitására vonatkozó állítás az ún. *Earnshaw-tétel*⁴ speciális esete. Ez a tétel tetszőlegesen bonyolult elektrosztatikus, magnetosztatikus és gravitációs erőkre vagy ezek együttes jelenlétére is kimondja: ilyen erőterekben sem pontszerű, sem a kiterjedt testek nem lehetnek stabil egyensúlyban, amennyiben azok mozgását a newtoni mechanika írja le. A tétel az 1800-as évek végén sok fejtörést okozott a fizikusoknak, mert akkoriban másfajta erőtereket és másfajta mechanikát nem ismertek, és így érthetetlennek tartották az anyagok kétséget kizáróan meglévő stabilitását. Az ellentmondást a kvantumelmélet oldotta fel, amely az elektron nem-newtoni viselkedésével magyarázza az atomok stabilitását.

A 298. feladat példát mutat arra, hogy egy szupravezető gyűrű sztatikus mágneses és gravitációs térben képes stabilan „lebegni”. A szupravezető gyűrűben folyó áram erőssége

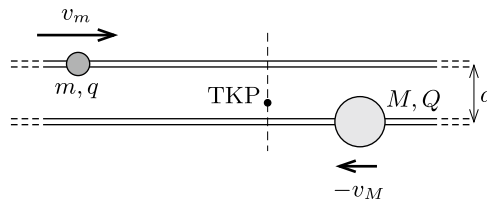
⁴Samuel Earnshaw (1805–1888) angol matematikus és fizikus

az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések során időben változik, így ez a fajta mágneses levitáció nem sérti az időfüggetlen mezőkre vonatkozó Earnshaw-tételt.

M. 217. A tömegközépponti koordináta-rendszerből nézve a gyöngyök kezdeti sebessége (a jobbra haladást tekintve pozitívnak):

$$v_m = \frac{M}{m+M}v_0, \quad v_M = -\frac{m}{m+M}v_0,$$

és az arányuk minden pillanatban ugyanannyi marad, hiszen ebből a rendszerből nézve a gyöngyök tömegközéppontja áll (1. ábra).

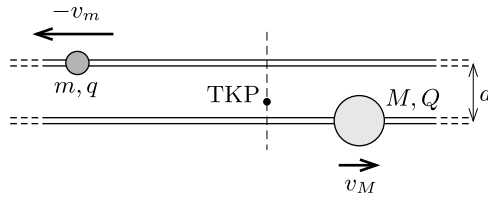


1. ábra

Ahogy a gyöngyszemek közelednek egymáshoz, a sebességük egyre csökken, ha q és Q azonos előjelűek, illetve növekszik, ha ellentétesek a töltések. Ez utóbbi esetben a gyöngyszemek elhaladnak egymás mellett, majd elegendően eltávolodva egymástól a sebességük a kezdeti értékre áll vissza, hiszen az energiájuk megmarad. Visszatérve az eredeti koordináta-rendszerbe azt állíthatjuk, hogy az m tömegű test sebessége egy átmeneti felgyorsulás után az eredeti v_0 -ra csökken, az M tömegű test pedig egy bizonyos távolsággal (bal felé) elmozdul, és végül megáll.

Megjegyzés. Elvben – megfelelően kis v_0 kezdősebesség esetén – az is előfordulhat, hogy a tömegközépponti rendszerből szemlélve az egymástól eltávolodott gyöngyök idővel visszafordulnak, azaz kötött állapotban vannak. A feladat szövege szerint azonban a gyöngyök kezdetben „elég messze” helyezkednek el, elektrosztatikus energiájuk tehát a mozgási energia mellett elhanyagolható; a negatív összenergiájú kötött állapot tehát nem áll fenn.

Kicsit részletesebb diszkussziót igényel az egymást taszító gyöngyök esete. Ezek, ha elegendő kezdeti energiával rendelkeznek, elhaladnak egymás mellett, majd ismét eltávolodva egymástól a sebességük (akár a tömegközépponti koordináta-rendszerből, akár a „labor-rendszerből” nézzük) az eredeti értékre áll vissza. Ha viszont a gyöngyök kezdeti mozgási energiája nem elég nagy ahhoz, hogy d távolságra megközelítsék egymást, akkor „visszafordulnak”, és elegendően hosszú idő múlva az m tömegű test a tömegközépponti rendszerben $-v_m$ sebességgel *balra*, az M tömegű pedig $+v_M$ sebességgel *jobbra* fog mozogni (2. ábra).



2. ábra

Ennek az a feltétele, hogy

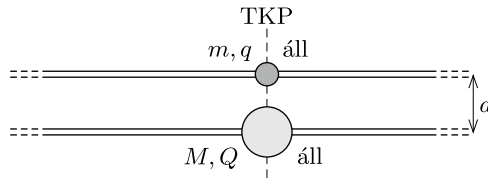
$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{d},$$

azaz

$$\frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v_0^2 < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{d}$$

fennálljon. (Az $\frac{mM}{m+M}$ mennyiséget a két testből álló rendszer *redukált tömegének* nevezik.) A testek sebességét a laboratóriumi koordináta-rendszerben úgy kapjuk meg, hogy a tömegközépponti rendszerben mérhető sebességekhez hozzáadjuk a két koordináta-rendszer relatív sebességét, ami éppen $|v_M|$ -mel egyenlő:

$$v_m^* = \frac{m-M}{m+M}v_0, \quad \text{illetve} \quad v_M^* = \frac{2m}{m+M}v_0.$$



3. ábra

Határesetben, amikor a kezdeti mozgási energia éppen elegendő ahhoz, hogy a két gyöngyszem d távolságra megközelítse egymást, a gyöngyszemek egymáshoz képest megállnak, vagyis a labor-rendszerből nézve közös

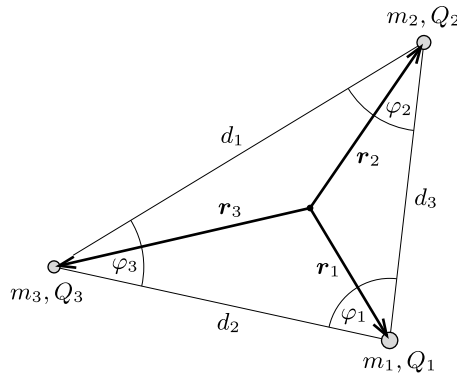
$$v_m = v_M = \frac{mv_0}{m+M}$$

sebességgel mozognak tovább (3. ábra). (Ez csak elvi lehetőség, hiszen az együttmozgás állapota a gyöngyök kicsiny relatív elmozdulásaira nézve instabil.)

Megjegyzés. Az egymást taszító gyöngyök esetében lehetséges három eset az egydimenziós mechanikai ütközéseket modellezi. A határeset, amikor a testek együtt mozognak tovább, a rugalmatlan ütközésnek felel meg. Itt csak a mechanikai impulzus marad állandó, a mozgási energia lecsökken. Az egymást valamennyire megközelítő, majd eltávolodó testek sebessége a rugalmas ütközés törvényeiből (az energia- és az impulzusmegmaradásból) számítható értékekkel egyeznek meg. Az egymás mellett elhaladó

(lényegében nem is ütköző, eredeti sebességüket megőrző) testek mozgása összhangban áll a megmaradási tétélekkel. Az ennek megfelelő megoldást a mechanikai ütközéseknél el szoktuk vetni (mondván, hogy a testek nem hatolhatnak át egymáson).

M. 218. Válasszuk origónak a gyöngyökből álló rendszer tömegközéppontját (hiszen ez a mozgás során a tömegközéppont-tétel miatt nem mozdul el), és jelöljük (az *ábrán* látható módon) a gyöngyök helyvektorát \mathbf{r}_i -vel, egymástól mért távolságukat pedig d_i -vel ($i = 1, 2, 3$).



Az 1-es számú gyöngyre ható eredő erő a másik két gyöngy által kifejtett elektrosztatikus erők összege:

$$(1) \quad \mathbf{F}_1 = m_1 \mathbf{a}_1 = k \frac{Q_1 Q_2}{d_3^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + k \frac{Q_1 Q_3}{d_2^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3).$$

A súlypontba helyezett origó miatt

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0.$$

Fejazzük ki ebből \mathbf{r}_3 -at, majd írjuk be az 1-es gyöngy mozgásegyenletébe:

$$(2) \quad m_1 \mathbf{a}_1 = k Q_1 \left(\frac{Q_2}{d_3^3} + \frac{Q_3}{d_2^3} \left[\frac{m_1}{m_3} + 1 \right] \right) \mathbf{r}_1 + k Q_1 \left(\frac{Q_3}{d_2^3} \frac{m_2}{m_3} - \frac{Q_2}{d_3^3} \right) \mathbf{r}_2.$$

Ahhoz, hogy az 1-es számú gyöngy pályája egyenes legyen, szükséges, hogy a gyorsulása a pillanatnyi helyvektorával egyirányú legyen, ezért (2) jobb oldalán \mathbf{r}_2 együtthatójának el kell tűnnie. Ez akkor teljesül, ha $Q_2 d_2^3 / m_2 = Q_3 d_3^3 / m_3$. A másik két gyöngyre is felírható hasonló feltétel, így a következő összefüggést kapjuk:

$$(3) \quad \frac{Q_1}{m_1} d_1^3 = \frac{Q_2}{m_2} d_2^3 = \frac{Q_3}{m_3} d_3^3 = \lambda,$$

ahol λ mindhárom testre ugyanakkora (de a töltések távolságával együtt időben változó) mennyiség.

Ha a (3) egyenlőségek teljesülnek, akkor a gyöngyszemek gyorsulását az

$$\mathbf{a}_i = k \frac{Q_1 Q_2 Q_3 (m_1 + m_2 + m_3)}{\lambda m_1 m_2 m_3} \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

formula adja meg. Eszerint a gyöngyök gyorsulásai úgy aránylanak egymáshoz, mint a helyvektoraik hossza, és az arányossági tényező mindhárom testre minden időpillanatban ugyanakkora, így a gyöngyök távolságának aránya *időben állandó* marad. Ezeket az arányokat a (3) feltételből és a gyöngyök fajlagos töltésének ismert viszonyzámaiból határozhatjuk meg:

$$d_1 : d_2 : d_3 = \sqrt[3]{\frac{m_1}{Q_1}} : \sqrt[3]{\frac{m_2}{Q_2}} : \sqrt[3]{\frac{m_3}{Q_3}} = 1 : \frac{1}{\sqrt[3]{2}} : \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Ilyen távolságarányok esetén a három gyöngy úgy mozog, hogy az általuk kijelölt háromszög a kezdőhelyzet háromszögéhez hasonló marad, és a háromszög szögei (a koszinusztételből kiszámíthatóan):

$$\varphi_1 = \arccos \left(\frac{d_2^2 + d_3^2 - d_1^2}{2d_2 d_3} \right) = 84,2^\circ; \quad \varphi_2 = 52,2^\circ; \quad \varphi_3 = 43,6^\circ.$$

Megjegyzések. A Coulomb-törvény és a Newton-féle gravitációs törvény hasonló alakja miatt a fenti megoldás alkalmazható három, egymás gravitációs terében mozgó tömegpontra is. Ezek pályája akkor lehet egyenes, ha a távolságaik és a „fajlagos gravitációs töltésük” között fennállnak a (3) összefüggések. Mivel azonban a fajlagos gravitációs töltés – a súlyos és a tehetetlen tömeg aránya – minden testre ugyanakkora, az egyenes pályájú mozgás csak $d_1 = d_2 = d_3$ esetén, vagyis szabályos háromszög csúcsaiban elhelyezkedő testekkel valósulhat meg.

M. 219. Jelöljük a pozitron tömegét m -mel, a protonét M -mel ($M \approx 2000 m$), az elemi töltést pedig e -vel! Hasonlítsuk össze a kezdeti állapot energiáját azzal a helyzettel, amikor a pozitronok már „jó messzire” távolodtak el és v_1 sebességgel mozognak, a protonok pedig szinte még meg se mozdultak! (Ilyen helyzet a részecskék tömegének nagyságrendi különbözősége miatt valóban található a mozgás során.) Az energiatétel:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(4 \cdot \frac{1}{d} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}d} \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}d} + 2 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2,$$

ahonnan az ismert adatok behelyettesítése után $v_1 \approx 345$ m/s adódik.

A mozgás további részében a pozitronok sebessége már nem változik számottevően, a protonok viszont lassan mozgásba jönnek és v_2 sebességre gyorsulnak fel. Ismét alkalmazhatjuk az energiamegmaradás tételét:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}d} = 2 \cdot \frac{1}{2} M v_2^2,$$

amelyből a $v_2 \approx 3$ m/s értéket kapjuk.

M. 220. Az elektronok pályája három lényeges szakaszra bontható: az elektronágyú és a kondenzátor közötti szakaszra, a kondenzátor belsejében elhelyezkedő pályaszakaszra és végül a kondenzátor és az ernyő közötti részre. Az elektronágyúból kilépő elektronok lényegében egyenes pályán, változatlan sebességgel érkeznek a kondenzátorhoz. (Azért csak „lényegében”, mert a kondenzátor szórt elektromos tere kismértékben már itt is eltéríti az elektronokat a pozitív töltésű lemez irányába, tehát sebességük nagysága egy kevéssel növekszik.) Az elektronok a kondenzátorba lépve (az annak belsejében kialakuló, közelítőleg homogén elektromos tér hatására) gyorsulni kezdenek a lemezre merőleges irányban. Belül a lemezekkel párhuzamos irányban nem hat erő, így az elektronok ilyen irányú sebességkomponense állandó marad, az elektronsugár pályája pedig parabola lesz. A kondenzátorból *éppen kilépő* elektronok sebessége tehát az elektromos mező munkavégzése miatt nagyobb lesz a kezdősebességüknél. A kondenzátor és az ernyő közötti pályaszakaszon már csak a kondenzátor gyenge szórt elektromos tere hat az elektronnyalábra, így könnyen azt gondolhatnánk, hogy az elektronok a kezdősebességüknél biztosan nagyobb sebességgel csapódnak az ernyőbe.

Vegyük észre azonban, hogy a kondenzátor és az ernyő közötti szórt tér lényegesen hosszabb ideig hat az elektronnyalábra, mint amekkora ideig a kondenzátorlemezek közötti erős elektromos tér hatott. A katódsugárcső tengelyéhez képest ferdén mozgó elektronok miatt még az is elképzelhető, hogy a szórt elektromos tér mozgásirányra vetített komponense a sebességgel ellentétes irányú, azaz fékezi az elektronokat!

A feladat megoldásához energetikai megfontolásokkal juthatunk el. Kezdetben az elektronok a kondenzátorlemezek közötti szimmetriasíkban elhelyezkedő elektronágyúból indulnak. A szimmetria miatt mindkét lemez ugyanakkora, de ellentétes előjelű potenciált hoz létre ebben a pontban, az elektronok potenciális energiája tehát nulla. A becsapódáskor az elektronok már nagyon messze vannak a kondenzátortól (hiszen az ernyő-kondenzátor távolság a feladat szövege szerint nagy), ezért potenciális energiájuk ismét (közel) nullává válik. A mechanikai energia megmaradása miatt ez azt jelenti, hogy az elektronok *ugyanakkora sebességgel* csapódnak az ernyőbe, mint amekkora sebességgel az elektronágyúból indultak.

M. 221. Helyettesítsük az elektromos dipólt egymástól kicsiny d távolságra lévő, $+q$ és $-q$ töltésű pontszerű testekkel, és használjuk a (szándékosan eltúlzott méretarányú) *ábrán* látható jelöléseket. A $d \ll R$ reláció miatt a $+q$ ponttöltést az egyszerűség kedvéért helyezhetjük az R sugarú kör középpontjába, ez eredményeinket nem fogja befolyásolni. A dipól erősségére a $p = qd$ szorzat (dipólmomentum) jellemző.

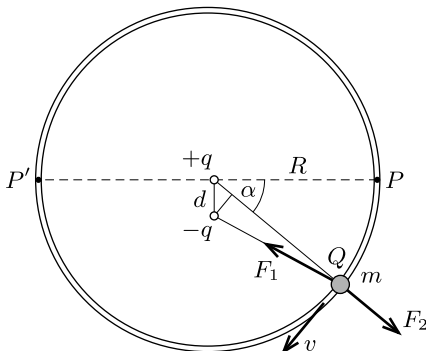
Az energiamegmaradás tétele segítségével számítsuk ki először, hogy mekkora a P pontból kezdősebesség nélkül induló Q töltésű gyöngyszem sebessége az α szöggel jellemezhető helyen. A gyöngyszem elektrosztatikus potenciális energiájának megváltozása abból származik, hogy a $-q$ töltéstől mért távolsága $d \sin \alpha$ értékkel lecsökken, emiatt

$$\frac{1}{2}mv^2 \approx -kqQ \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R - d \sin \alpha} \right) \approx \frac{kqQd \sin \alpha}{R^2} = \frac{kQp \sin \alpha}{R^2},$$

ahonnan

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{2kQp}{mR^2} \sin \alpha}.$$

Ennek ismeretében a *b*) kérdésre már tudunk válaszolni: a gyöngyszem először egy félkör megtétele után a P' pontban ($\alpha = 180^\circ$ -nál) fog megállni, majd visszafordulva – súrlódás és egyéb energiaveszteség hiányában – periodikus mozgást végez P és P' között.



Határozzuk meg ezek után a gyöngyszemre ható elektrosztatikus erők radiális (a kör középpontja felé mutató) komponenseit, majd ezekből és Newton II. törvényéből számítsuk ki a körpályán maradáshoz szükséges (a huzal által sugárirányban kifejtett) K kényszererőt. A dipól alkotórészei majdnem pontosan ellentétes radiális erőket fejtenek ki, melyek eredője:

$$F = F_1 - F_2 \approx kqQ \left[\frac{1}{(R - d \sin \alpha)^2} - \frac{1}{R^2} \right] \approx \frac{kqQ2d \sin \alpha}{R^3} = \frac{2kQp \sin \alpha}{R^3}.$$

Ez az erő a dipólus felé mutat (hiszen a vonzóerőt kifejtő $-q$ közelebb van a gyöngyszemhez, mint a taszító $+q$ töltés), így a v sebességű, tehát sugárirányban v^2/R gyorsulású gyöngyszem mozgásegyenlete:

$$(2) \quad m \frac{v^2}{R} = \frac{2kQp \sin \alpha}{R^3} + K.$$

A sebesség nagyságát megadó (1)-et (2)-be helyettesítve – meglepő módon – a kényszererőre $K = 0$ adódik.

A gyöngyszemre tehát sugárirányban (az elektrosztatikus erőkön kívül) nem hat erő, így a gyöngyszem sem fejt ki a huzalra ilyen irányú erőt. (Természetesen a gyöngyszem súlyából származó függőleges erőnek jelen kell lennie.) Ha a huzalt eltávolítjuk (de a gyöngyszem függőleges elmozdulását megakadályozzuk), a mozgás ugyanúgy zajlik le, mint a huzalra fűzött gyöngy esetében.

Megjegyzés. Az (1) összefüggésből leolvasható, hogy a gyöngyszem mozgása éppen olyan, mint egy vízszintes helyzetből indított, R hosszúságú fonálingáé alkalmasan választott, $g = kQp/(mR^3)$ erősségű homogén gravitációs mezőben.

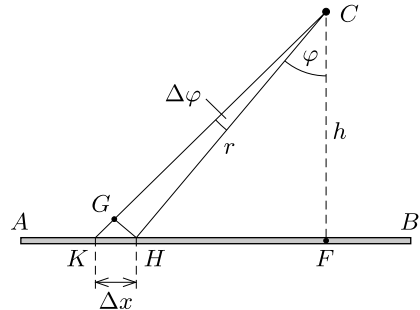
M. 222. Jelöljük a C pont és a pálca egyenesének távolságát h -val, és tekintsük a pálcának a C pontból kicsiny $\Delta\varphi$ szög alatt látszó KH darabkáját (1. ábra). Az FHC és GKH háromszögek hasonlósága miatt e kis vonaldarabka hossza

$$\Delta x = GH \cdot \frac{r}{h} \approx r\Delta\varphi \cdot \frac{r}{h} = \frac{r^2}{h}\Delta\varphi.$$

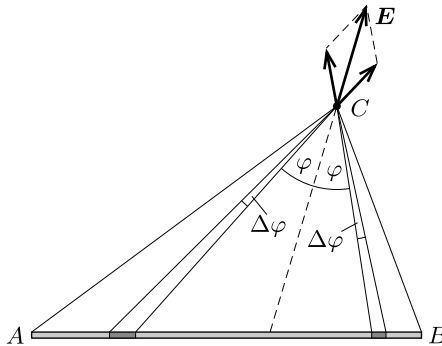
A pálca KH szakaszán $\Delta Q = \lambda\Delta x$ töltés található (ahol λ a hosszegységre jutó töltésmennyiség), ennek elektromos térerőssége a C pontban pedig

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{h} \Delta\varphi$$

nagyságú. Ez a mennyiség *független* a φ szögtől, csupán a vonaldarabka látószögének függvénye. Emiatt az ABC háromszög C csúcspontjához tartozó szögfelezőjére szimmetrikusan elhelyezkedő, azonos szögben látszó darabkák elektromos térerősségvektora azonos nagyságú, eredőjük pedig a szögfelező irányába mutat (2. ábra).



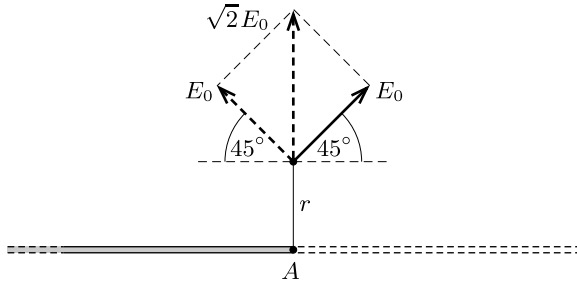
1. ábra



2. ábra

M. 223. Az *előző feladat* eredményét felhasználva megállapíthatjuk, hogy egy nagyon hosszú („félvégtelen”) pálca egyik végpontjánál, a pálca végétől merőlegesen mért r távolságban a térerősség iránya a pálcával 45° -os szöget zár be.

A térerősség E_0 nagyságát a következő „trükk” segítségével határozhatjuk meg. Illesszünk össze gondolatban két egyenletesen feltöltött, nagyon hosszú pálcát (1. ábra). Az eredő térerősség a két félvégtelen pálca térerősségének vektori összege lesz. Az eredő iránya – a szimmetria miatt – merőleges a pálcára, a térerősség nagysága pedig (az egyes pálcák térerősségének $\sqrt{2}$ -szerese) a Gauss-törvényből határozható meg.



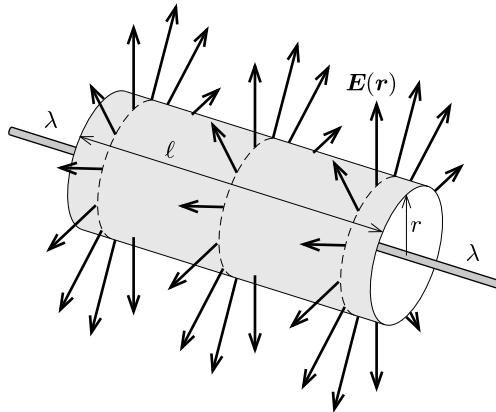
1. ábra

Vegyük körül a végtelen hosszú pálcát ℓ hosszúságú, tehát $\lambda\ell$ töltésű darabját egy r sugarú hengerpalásstal és az azt lezáró körlapokkal (2. ábra). A körlapokon átmenő fluxus nulla, ezért Gauss törvényében csak a paláston kilépő fluxust kell számításba vennünk:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \lambda\ell = E(r) \cdot 2\pi r\ell,$$

amelyből a térerősség nagysága a végtelen pálcától r távolságban:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$



2. ábra

Esetünkben $E(r) = \sqrt{2}E_0$. Az eredeti kérdésre válaszolva tehát kijelenthetjük, hogy a nagyon hosszú („félvégtelen”) pálcát egyik végének közelében, a pálcára merőleges síkban, a pálcától r távolságban a térerősség nagysága:

$$E_0 = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

M. 224. Belátjuk, hogy a háromszög beírható körének középpontjában tűnik el az elektromos térerősség. Tekintsük a háromszög egyik oldalának a beírható kör középpontjából $\Delta\varphi$ szög alatt látszó darabkáját (lásd az ábrát). Ennek távolsága a beírható kör középpontjától $r/\cos\varphi$, töltése pedig

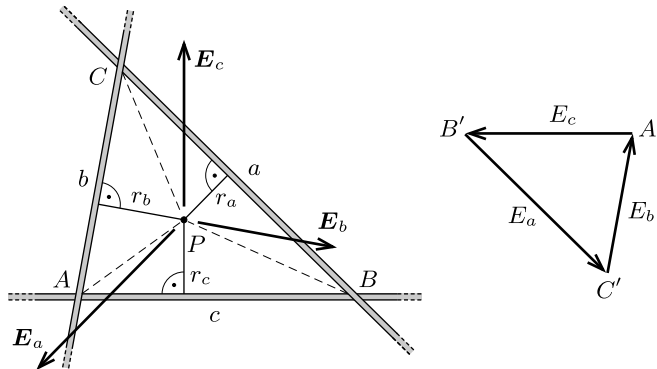
$$\Delta Q = \lambda \frac{r}{\cos^2 \varphi} \Delta\varphi,$$

ahol λ az oldalak lineáris töltéssűrűsége. E kis darabka által létrehozott térerősségjárulék nagysága:

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{(r/\cos\varphi)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda r \Delta\varphi}{r^2}.$$

Az eredményből leolvasható, hogy ugyanekkora nagyságú és ugyanilyen irányú elektromos térerősséget hozna létre a beírható körnek egy $\Delta\varphi$ középponti szöghöz tartozó íve, ha azt λ töltéssűrűséggel látnánk el. A kis ívdarabkák járulékait összegezve a szimmetria miatt zérust kapunk, tehát a háromszög oldalai által létrehozott eredő térerősség valóban a *beírható kör középpontjában* lesz zérus.

M. 225. I. megoldás. Mindegyik pálcá olyan elektromos teret hoz létre, amelynek iránya merőleges a pálcára, nagysága pedig a pálcától mért távolsággal fordítottan arányos (lásd pl. a 223. feladat megoldását). Az eredő elektromos térerősség a pálcák síkján kívül biztosan nem lehet nulla, és a pálcák síkjában is csak a háromszög belsejében kerülhet egyensúlyba az odahelyezett ponttöltés.



Tételezzük fel, hogy a háromszög valamelyik P pontjában nulla az eredő elektromos térerősség. Jelöljük a háromszög oldalait, csúcsait és a P pont távolságát

az oldalaktól az *ábrán* látható módon. Az egyes pálcák elektromos térerősségének nagysága

$$|\mathbf{E}_a| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_a}, \quad |\mathbf{E}_b| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_b}, \quad |\mathbf{E}_c| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_c},$$

ahol λ a (közös) vonalmenti töltéssűrűséget jelöli. Eszerint

$$(1) \quad E_a : E_b : E_c = \frac{1}{r_a} : \frac{1}{r_b} : \frac{1}{r_c}.$$

Ha a P pontban az eredő térerősség nulla, vagyis $\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_c = 0$, akkor ez a három vektor egymás végébe fűzve egy háromszöget alkot. Forgassuk el ezt a vektorháromszöget az óramutató járásával ellentétes irányban 90° -kal (lásd az ábra jobb oldalát). Az így kapott $A'B'C'$ háromszög oldalai párhuzamosak az eredeti ABC háromszög megfelelő oldalával, a két háromszög tehát hasonló, oldalainak aránya megegyezik:

$$(2) \quad E_a : E_b : E_c = a : b : c,$$

amit (1)-gyel összevetve az

$$ar_a = br_b = cr_c$$

egyenlőségeket kapjuk.

Ezek szerint a P pontot az ABC háromszög csúcsaival összekötő három egyenes szakasz a háromszöget 3 egyforma területű részre bontja. Mivel a háromszög súlypontja (és csak az a pontja) rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, a ponttöltés egyensúlyi helyzete csakis a *súlypont* lehet.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás ábráját és jelöléseit! Egyetlen, nagyon hosszú, egyenletesen feltöltött pálcá elektromos potenciálja a pálcától r távolságban

$$U(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0},$$

ha a potenciált r_0 távolságban választjuk nullának. (Ezt az összefüggést az $1/r$ -rel arányos térerősség integrálásával kaphatjuk meg.) A három pálcá eredő terének potenciálja az egyes potenciálok összege:

$$(3) \quad U_{\text{eredő}}(r) = U(r_a) + U(r_b) + U(r_c) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a r_b r_c}{r_0^3}.$$

Ha ennek a kifejezésnek (a sík pontjaira korlátozódva) valamely P pontban szélsőértéke van, akkor az odahelyezett ponttöltésre ható erő nulla. (Amennyiben nem így lenne, vagyis a ponttöltésre ható erő nullától különböző lenne, akkor a töltést a rá ható erővel ellentétes irányban pozitív munkavégzéssel tudnánk csak – egy kicsit – elmozdítani. Ez viszont ellentmond annak, hogy a szélsőérték helyének kis környezetében a potenciál első közelítésben nem változik.)

Megmutatjuk, hogy a (3) összefüggésben szereplő potenciál a háromszög súlypontjában a legnagyobb. Mivel az $U(r)$ potenciál a P pont helyzetétől csak a $V = r_a r_b r_c$ szorzaton keresztül függ, továbbá a logaritmus monoton növekvő függvény, a potenciál szélsőértékét a V kifejezés maximuma adja meg. Szorozzuk meg V -t egy ismert nagyságú (P helyzetétől független) kifejezéssel,

$$V \cdot \frac{abc}{8} = \frac{ar_a}{2} \frac{br_b}{2} \frac{cr_c}{2} \equiv T_a T_b T_c,$$

ahol T_a , T_b és T_c rendre a BPC , CPA és APB háromszögek területét jelöli. Ezen területek összege egy meghatározott érték (az ABC háromszög területe), így a szorzatuk (a számtani-mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség miatt) akkor maximális, amikor mind a három terület ugyanakkora.

Ezek szerint a ponttöltés egy olyan pontban lehet egyensúlyban, amelyre igaz, hogy ezt a pontot és a csúcspontokat összekötő egyenesek a háromszöget 3 egyenlő területű részre osztják. Ez a pont pedig a háromszög *súlypontja*.

Megjegyzés. A háromszög súlypontjába helyezett ponttöltés egyensúlya – ha a töltött testet csak a pálcák síkjában engednénk elmozdulni – a pálcákéval azonos előjelű töltés esetén *stabil*, ellentétes töltésnél pedig *instabil* lenne. Ha azonban a pálcák síkjára merőleges mozgás lehetőségét is figyelembe vesszük, kiderül, hogy az egyensúly *minden esetben instabil*, összhangban a 216. feladatban említett Earnshaw-tétellel.

M. 226. Valamelyik (a feladat ábráján mondjuk a jobb oldali) pálcá által keltett elektromos térerősség merőleges a pálcára, nagysága a pálcától r távolságban a Gauss-törvény alapján határozható meg (lásd a 223. feladat megoldását):

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

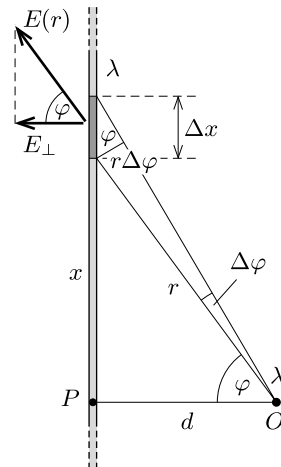
Ábrázoljuk most az eredeti elrendezést úgy, hogy az egyik pálcá merőleges legyen a rajz síkjára, tehát egyetlen O pontnak látszódjék, ahogy azt az ábra mutatja. A másik pálcának az ábrán látható P ponttól x távolságra lévő, kicsiny Δx hosszúságú, az O pontból $\Delta\varphi$ szög alatt látszó darabkáján $\Delta Q = \lambda\Delta x$ töltés található. Erre a töltésre az elektromos mező a szárra merőleges irányban

$$\Delta F = E_{\perp}(r)\Delta Q = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cos\varphi \cdot \Delta x$$

nagyságú erőt fejt ki. (A szállal párhuzamos irányú komponensek az eredő erő számításánál kiejtik egymást.)

Az ábrán sötétebben jelölt kicsiny szakasz hosszát kifejezhetjük a $\Delta\varphi$ szöggel:

$$\Delta x = \frac{r\Delta\varphi}{\cos\varphi},$$



így a vizsgált szakasz töltéseire ható erőre a

$$\Delta F = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \Delta\varphi$$

összefüggés adódik.

A műanyagpálcára ható teljes erő az egyes darabkáira ható ΔF -ek összegeként számolható. Mivel a nagyon hosszú pálca egésze az O pontból π szögben látszik, a keresett eredő erő

$$F = \sum \Delta F = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \sum \Delta\varphi = \frac{\lambda^2}{2\epsilon_0} = 2\pi k\lambda^2,$$

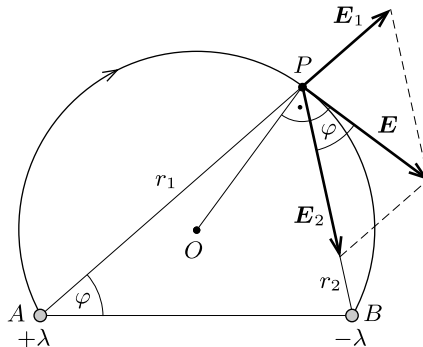
ahol k a Coulomb-törvényben szereplő állandó.

Érdekes, hogy az eredő erő *nem függ* a pálcák közötti d távolságtól. (Ez a furcsa „távolságfüggettség” mindaddig érvényes, amíg d sokkal kisebb a pálcák „igen nagy” hosszánál.)

M. 227. Vizsgálódjunk a pálcákra merőleges síkban, és legyenek a pálcák és a sík dőfspontjai A (+) és B (–), egy tetszőleges pont a síkban pedig P (lásd az 1. ábrát)! Egyetlen hosszú, egyenletesen feltöltött pálca által létrehozott \mathbf{E}_i térerősség nagysága (lásd a 223. feladat megoldását) fordítottan arányos a pálcától mért r_i távolsággal ($i = 1, 2$), ezért a két pálca által keltett térerősségjárulékok nagyságára fennáll az

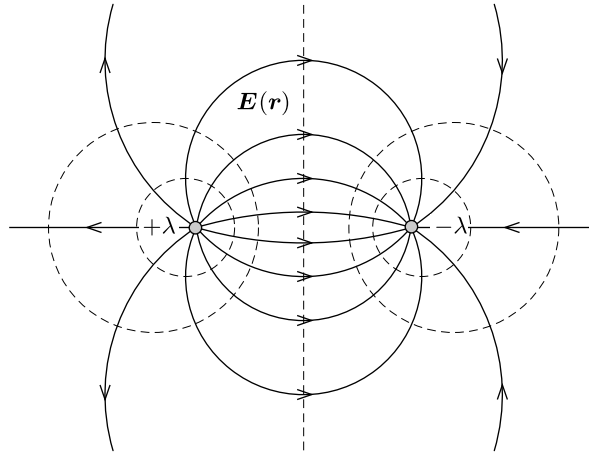
$$\frac{|\mathbf{E}_1|}{|\mathbf{E}_2|} = \frac{r_2}{r_1}$$

egyenlőség. Ebből és a váltószögek egyenlőségéből látszik, hogy az ABP háromszög hasonló a térerősségvektorok által meghatározott háromszöghöz, ezért az eredő térerősségvektor a PB szakasszal ugyanakkora szöget zár be, mint a PAB szög. Ez viszont azt jelenti, hogy az ABP háromszög (O középpontú) köréírt körét a P pontbeli eredő térerősség érinti, hiszen van két szögünk (PAB , illetve az \mathbf{E}_1 és \mathbf{E}_2 vektorok által bezárt szög), melyek egyenlőségük miatt a kör ugyanazon PB ívéhez tartozó kerületi szögek.



1. ábra

A fentiekből következik, hogy az eredő térerősségvektor a sík tetszőleges pontjában érintője az A , B és a kiszemelt pontra illeszkedő körívnek, a pálcák által létrehozott erővonalak tehát *körív alakúak*. A pálcák erővonalképe a 2. ábrán látható. Belátható (lásd a 264. feladatot), hogy az ábrán szaggatottan jelölt ekvipotenciális vonalak ugyancsak körök.



2. ábra

M. 228. Newton III. törvénye értelmében ugyanakkora erővel hat a szigetelőlemez a ponttöltésre, mint a ponttöltés a lemezre. Számítsuk ki ez utóbbi erő nagyságát! Ehhez osszuk fel a lemezt gondolatban kis darabkákra, és jelöljük az i -edik lemezdarabka területét ΔA_i -vel! Az egyenletes felületi töltésselészlás miatt ennek a darabkának a töltése

$$\Delta Q_i = \frac{Q}{d^2} \Delta A_i$$

nagyságú, így a rá ható elektromos erő nagysága $F_i = E_i \Delta Q_i$, ahol E_i a q ponttöltés által a darabka helyén létrehozott térerősség nagysága. A szigetelőlemezre ható erőt az egyes lemezdarabkákra ható erők vektori összegeként számíthatjuk. A szimmetria miatt az eredő erő a lemezre merőleges lesz, így elegendő csak az ilyen irányú erőkomponenseket összegeznünk:

$$F = \sum_i F_i \cos \alpha_i = \sum_i E_i \frac{Q}{d^2} \Delta A_i \cos \alpha_i = \frac{Q}{d^2} \sum_i E_i \Delta A_i \cos \alpha_i,$$

ahol α_i a ponttöltést a felületdarabkával összekötő egyenes és a felület normálisa által bezárt szög. A kapott kifejezésben megjelenő összeg nem más, mint a q ponttöltés által a négyzetlapon létrehozott elektromos fluxus:

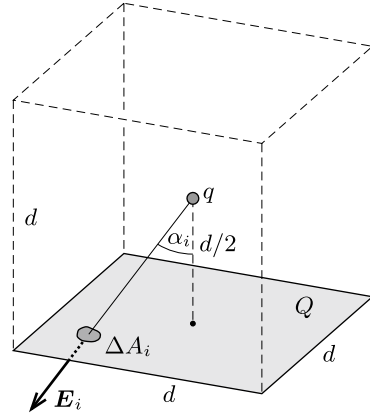
$$\Psi_{\square} = \sum_i E_i \Delta A_i \cos \alpha_i.$$

Most vegyük körül gondolatban a ponttöltést szimmetrikusan egy d oldalélű kockával (lásd az *ábrát*). Ekkor a ponttöltés távolsága a kocka lapjaitól éppen $d/2$ lesz. A Gauss-törvény értelmében a kocka lapjain összesen q/ε_0 fluxus halad át, ezért egyetlen négyzetlapon ennek hatoda:

$$\Psi_{\square} = \frac{q}{6\varepsilon_0}.$$

Ennek felhasználásával már ki tudjuk számítani a ponttöltés és a töltött szigetelőlemez között ható erőt:

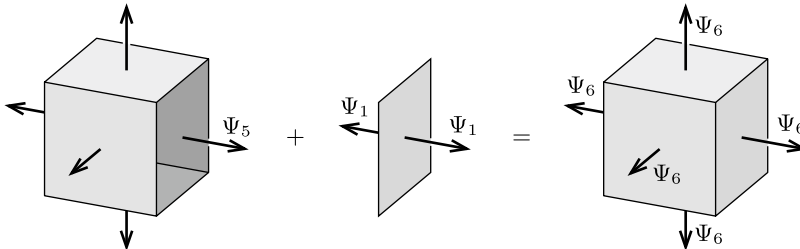
$$F = \frac{Qq}{6\varepsilon_0 d^2}.$$



M. 229. A szimmetria miatt a kocka oldallapjaira ható elektrosztatikus erő merőleges a lapokra. Ezért az erő nagyságát – az *előző feladat* megoldásához hasonlóan – úgy számíthatjuk ki, hogy egy négyzetlap kis darabjaira ható erők felületre merőleges komponenseit összegezzük:

$$(1) \quad F = \sum_i \sigma E_i \Delta A_i \cos \alpha_i = \frac{Q}{d^2} \sum_i E_i \Delta A_i \cos \alpha_i,$$

ahol ΔA_i az i -edik felületdarabka felszíne, $\sigma = Q/d^2$ a lapok felületi töltéssűrűsége, E_i a felületelem helyén mérhető elektromos térerősség nagysága, α_i pedig a térerősség és a felületdarabka normálisa által bezárt szög. A fenti kifejezésben az összeg éppen a kocka öt oldallapja által a hatodik lapon létrehozott Ψ_5 elektromos fluxus. Ennek meghatározásához tekintsük a következő *ábrát*:



Az *ábrán* a nyilak a fluxust szemléltetik. A kocka egy lapján kilépő Ψ_6 fluxus két részből tevődik össze: a lap saját elektromos terének Ψ_1 fluxusából, valamint a másik öt lap által a hatodik lapon létrehozott Ψ_5 fluxusból:

$$\Psi_6 = \Psi_5 + \Psi_1.$$

Egy lap saját elektromos teréből származó fluxus könnyen számolható a Gauss-törvényből:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

hiszen a lap mindkét oldalán ugyanannyi erővonal lép ki. A kocka bármely lapján kilépő Ψ_6 fluxus a szimmetria miatt a kockából kilépő teljes fluxus egyhatoda:

$$\Psi_6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{6Q}{\varepsilon_0}.$$

Ezek alapján az öt lap által a hatodik lapon létrehozott elektromos fluxus:

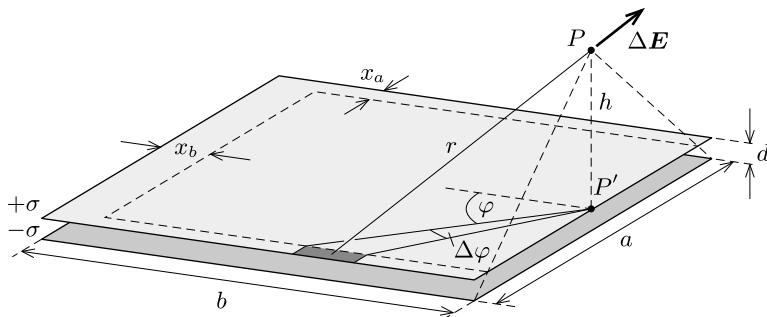
$$\Psi_5 = \Psi_6 - \Psi_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{Q}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}.$$

Ezt behelyettesítve az erő (1) kifejezésébe:

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 d^2}.$$

Ekkora tehát a kocka lapjaira ható elektrosztatikus erő nagysága.

M. 230. A felső (pozitív töltésű) lemez és az alsó (negatív töltésű) lemez azon darabkái, amelyek a P pontból ugyanazon térszög alatt látszanak, ugyanakkora, de ellentétes irányú térerősséget hoznak létre a P pontban, mert a darabkák töltése a P ponttól mért távolságuk négyzetével egyenesen arányos, térerősségük viszont a Coulomb-törvény miatt a távolság négyzetével fordítottan arányos. Emiatt az alsó lemez által a P pontban keltett elektromos teret teljesen kioltja a felső lemez azon részének térerősségjáruléka, amelyik az alsó lemezzel megegyező térszögben látszik a P pontból. Feladatunk a felső szigetelőlap „maradék” szegélyétől származó térerősség meghatározása.



1. ábra

Az 1. ábrán látható szegély nem mindenhol azonos szélességű: a háromszögek hasonlóságából adódik, hogy a felső szigetelőlemez P ponttól távolabbi, a hosszúságú éle mentén

$$x_b = \frac{bd}{h},$$

a b hosszúságú élek mentén pedig

$$x_a = \frac{ad}{2h}$$

a szélesség. Tekintsük most a szegélynek egy olyan elemét, amely az 1. ábrán látható P' pontból kicsiny $\Delta\varphi$ szög alatt látszik, és a b hosszúságú oldal mentén helyezkedik el. Ennek a darabkának a távolsága a P ponttól (az ábra jelöléseivel)

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2 \sin \varphi}\right)^2 + h^2} \approx \frac{a}{2 \sin \varphi},$$

ahol felhasználtuk, hogy $h \ll a$. A darabka hossza

$$\Delta s = \frac{a}{2 \sin^2 \varphi} \Delta\varphi,$$

töltése pedig

$$\Delta Q = \sigma x_a \Delta s = \left(\frac{a}{2 \sin \varphi}\right)^2 \frac{d}{h} \sigma \Delta\varphi.$$

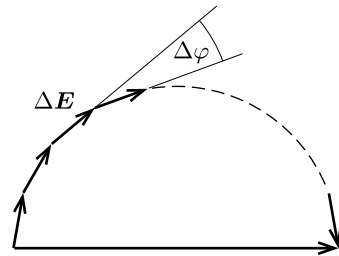
A szegély vizsgált eleme által a P pontban létrehozott térerősség nagysága

$$|\Delta \mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{h} \sigma \Delta\varphi,$$

iránya pedig $h \ll a$ miatt jó közelítéssel vízszintes (bár ez utóbbi az ábránkon az erősen torzított méretarányok miatt nem látszik). Eredményünk független az a és b oldalélektől, valamint a φ szögtől, és ugyanez elmondható a szegély többi darabkájáról is: az általuk létrehozott térerősségjárulék nagysága rögzített d és h mellett csak a $\Delta\varphi$ látószögiüktől függ.

Osszuk fel tehát a teljes szegélyt olyan elemekre, amelyek a P' pontból azonos $\Delta\varphi \ll \pi$ szögben látszanak. Az ilyen darabkák által létrehozott térerősségvektorokat a 2. ábrán látható módon egymás végébe fűzve egy vízszintes síkú szabályos sokszög felét kapjuk. A felosztást finomítva ($\Delta\varphi$ -vel zérushoz tartva) a fél sokszög egy félkörhöz közelít, melynek „kerülete”

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{h} \sigma \sum \Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{h} \sigma \pi,$$

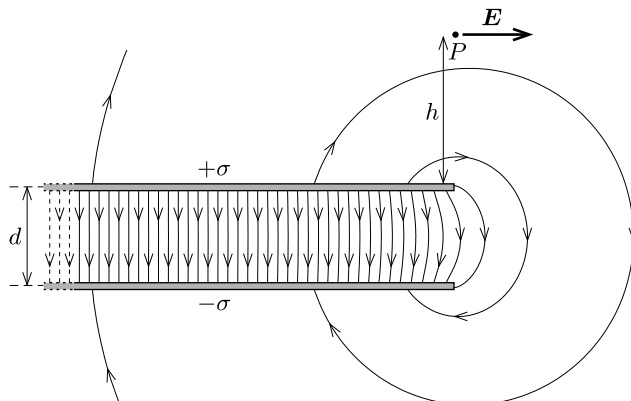


2. ábra

így „átfogójának” hossza (azaz az eredő térerősségvektor nagysága)

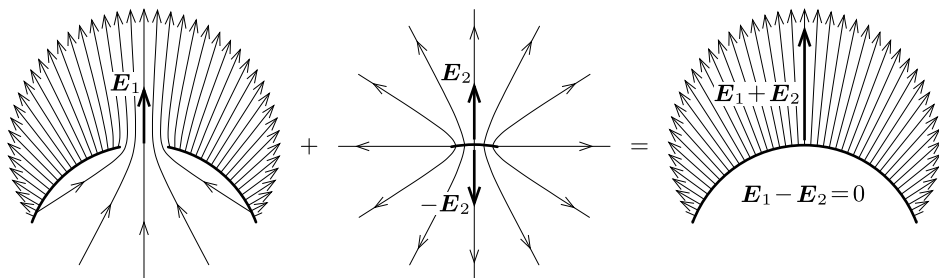
$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{h}.$$

Az eredő térerősség iránya jó közelítéssel vízszintes, és merőleges a lemezek P pont alatt elhelyezkedő oldaléleire. A 3. ábra a lemezek széleinél kialakuló elektromos mező erővonalait mutatja oldalnézetben.



3. ábra

M. 231. A lyukas gömbhéj elektromos terét úgy képzelhetjük el, hogy egy egyenletesen töltött gömbhéj felületéből gondolatban kivágunk egy kicsiny (emiat jő közelítéssel korong alakú) darabkát (lásd az 1. ábrát).



1. ábra

Jelöljük a lyukas gömbhéj esetén a lyuk közepén mérhető elektromos térerősséget \mathbf{E}_1 -gyel. Ha csak a kivágott korongocska elektromos terét tekintjük, akkor annak (a középpontjához közel) mindkét oldalán ugyanakkora, $|\mathbf{E}_2|$ nagyságú a térerősség. Illesszük vissza képzletben a gömbhéjből kivágott darabkát a lyukba! Így egy egyenletesen töltött szigetelő gömbhéjat kapunk, melynek belsejében az elektromos térerősség mindenhol nulla, ezért a szuperpozíció miatt

$$(1) \quad \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = 0.$$

A gömbhéjon kívül (a gömb felületéhez közel) az elektromos tér olyan, mint egy Q ponttöltés tere attól R távolságban, ezért

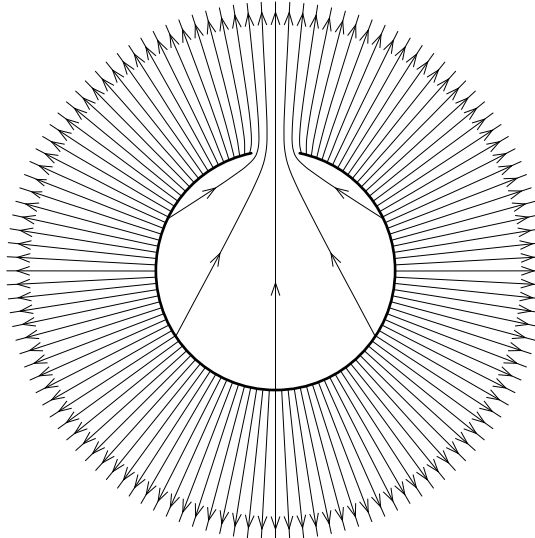
$$(2) \quad |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Az (1) és (2) egyenletekből azt kapjuk, hogy a térerősség a lyukas gömbhéj esetén a lyuk középpontjában

$$|\mathbf{E}_1| = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

nagyságú, iránya pedig (a szimmetria miatt) sugárirányú.

Hátravan még a lyukas gömbhéj elektromos terének ábrázolása. A fenti szuperpozíciós gondolatmenetből következik, hogy a lyukon áthaladó elektromos fluxus – azaz a lyukból kilépő erővonalak száma – éppen fele a gömbhéj lyuktól távoli részeinek (a lyukkal megegyező felszínű) darabkáiból kiinduló fluxusnak. De vajon honnan indulnak a lyukon kilépő erővonalak? A gömbhéj belső felületéről! A gömbhéjon belüli elektromos tér a lyuktól távol olyan, mint egy (a kivágott felületdarabkával megegyező nagyságú, azzal ellentétes töltésű) ponttöltés tere, a gömbön kívüli elektromos tér pedig a gömbtől távolodva egyre inkább izotróppá válik. A lyukas gömbhéj elektromos terének erővonalait (a szimmetriatengelyét tartalmazó metszetben) a 2. ábra mutatja.



2. ábra

M. 232. a) Vizsgáljuk először azt a speciális esetet, amikor $q = Q$. Ekkor az elrendezés elektromos mezője ugyanolyan, mint egyetlen, $2Q$ töltéssel egyenletesen feltöltött szigetelő gömbhéj tere. A térerősség a gömbön kívül, a felület közelében úgy számolható, mintha azt egy $2Q$ töltésű, a gömb középpontjába helyezett pontszerű test hozná létre:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R^2},$$

a gömb belsejében pedig nulla. A szigetelő gömbhéj felületén a töltéssűrűség:

$$\sigma = \frac{2Q}{4R^2\pi} = \frac{Q}{2R^2\pi} = \epsilon_0 E.$$

Az E térerősségű elektromos mező a gömbhéj kicsiny ΔA felületű, $\Delta Q = \sigma \Delta A$ töltésű darabkáira $\Delta F = \frac{1}{2} E \Delta Q$ erőt fejt ki. Az $\frac{1}{2}$ -es szorzótényező onnan származik, hogy a térerősség nagysága csak a felületdarabkák külső oldalán E , a belső oldalon zérus, átlagos értéke tehát $E/2$ -nek vehető.

Megjegyzés. Az $\frac{1}{2}$ -es faktort az *előző feladatban*, a lyukas gömbnél alkalmazott gondolatmenettel is megkaphatjuk. A gömbhéj egy kicsiny darabkájának közelében az elektromos teret egyrészt a vizsgált felületdarabka, másrészt pedig a gömbhéj többi része hozza létre. A felületdarabka a Gauss-törvényből következően mindkét oldalán $E/2$ nagyságú, de ellentétes irányú térerősséget hoz létre, a gömb többi részének járuléka tehát $E/2$, így lesz ugyanis a gömb belső felületénél a térerősség 0, kívül pedig E . Az $E/2$ térerősségű térbe helyezett ΔQ töltésre valóban $\Delta F = \frac{1}{2} E \Delta Q$ nagyságú erő hat.

A gömbhéjon lévő töltésekre tehát felületegységenként

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{1}{2} \sigma E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

erő hat, éppen akkora, mintha a gömböt belülről p túlnyomású gáz feszítené szét. Az egyes félgömbhéjakra ható eredő erő ugyanakkora, mint a félgömbhéjat gondolatban lezáró körlapra ható erő lenne p túlnyomás esetén (hiszen egy p nyomású gázzal töltött, lezárt félgömbre a gáz által kifejtett eredő erő zérus, ellenkező esetben örökmozgót készíthetnénk). A Q töltésű félgömb által a másik Q töltésű testre ható erő tehát

$$F_{Q \rightarrow Q} = p \cdot R^2 \pi = \frac{1}{2} \sigma E \cdot R^2 \pi = \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \frac{Q^2}{R^2}.$$

Térjünk vissza most az eredeti kérdéshez, amikor az egyik félgömbhéjon nem Q , hanem q töltés van! Az elektrosztatikus erő arányos a test töltésével, ezért

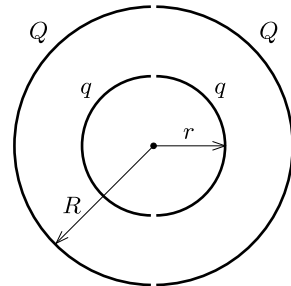
$$F^{(a)} = F_{Q \rightarrow q} = F_{q \rightarrow Q} = \frac{q}{Q} F_{Q \rightarrow Q} = \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \frac{Qq}{R^2}.$$

b) *I. megoldás.* Egészítsük ki a különböző sugarú félgömbhéjakból álló elrendezést a „tűkörképével” (1. ábra)! Írjuk fel a bal oldali két félgömbhéj által a jobb oldali két félgömbhéjra kifejtett eredő erőt (jelöljük ezt F_0 -lal)! Ez négy erőből tehető össze:

$$F_0 = F_{Q \rightarrow Q} + F_{q \rightarrow q} + F_{Q \rightarrow q} + F_{q \rightarrow Q}.$$

Az összeg két utolsó tagja egyenlő egymással, és mindkettő éppen az az $F^{(b)}$ erő, amit keresünk. Ha tehát ki tudjuk számítani F_0 -t, akkor $F_{Q \rightarrow Q}$ és $F_{q \rightarrow q}$ ismeretében (amelyeket az *a*) kérdésre tudunk visszavezetni) a keresett $F^{(b)}$ erő meghatározható.

F_0 kiszámításához tekintsük azt az elektromos teret, amit két koncentrikus gömbhéj hoz létre: a belső, r sugarú, $2q$ töltésű gömbhéj és a külső, R sugarú,



1. ábra

$2Q$ töltésű gömbhéj. Gyakorlatilag ez lesz a négy félgömbhéj által létrehozott elektromos tér is.

A kis gömbhéj belsejében az elektromos térerősség nulla. E gömb felületén a töltéssűrűség (2. ábra):

$$\sigma_q = \frac{q}{2r^2\pi},$$

a térerősség pedig a gömb felületénél, de kívül:

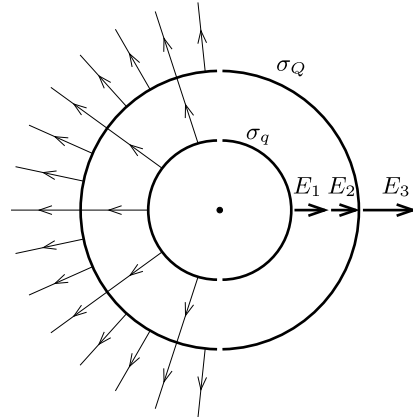
$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2}.$$

Ennek a kis gömbnek a tere a nagy gömb felületénél, annak belsejében:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{R^2}.$$

A nagy gömb felületén a töltéssűrűség:

$$\sigma_Q = \frac{Q}{2R^2\pi}.$$



2. ábra

A nagy gömbön kívüli térrészben a térerősségért mindkét gömb töltése felelős. Itt az elektromos térerősség nagysága (a felülethez közel)

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q + 2Q}{R^2}.$$

A fenti kifejezések segítségével – az a) kérdésnél alkalmazott gondolatmenetet követve – F_0 -t a következő módon számíthatjuk ki:

$$F_0 = \frac{1}{2}\sigma_q E_1 r^2 \pi + \frac{1}{2}\sigma_Q (E_2 + E_3) R^2 \pi.$$

Behelyettesítve σ_q , σ_Q , E_1 , E_2 és E_3 fenti kifejezéseit a két-két félgömbhéj között ható erőre ezt kapjuk:

$$F_0 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} r^2 + \frac{Q(2q + Q)}{8\pi\epsilon_0} R^2.$$

Az a) kérdésre adott választ felhasználva azt is tudjuk, hogy

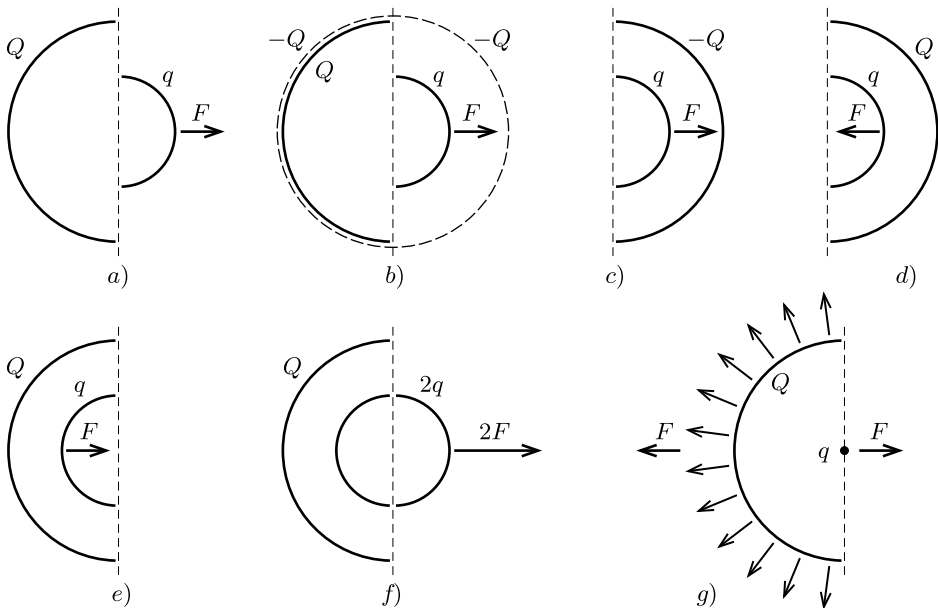
$$F_{Q \rightarrow q} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R^2} \quad \text{és} \quad F_{q \rightarrow q} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}.$$

Ezekből végül a keresett erő:

$$F^{(b)} = F_{Q \rightarrow q} = F_{q \rightarrow Q} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2}.$$

Az eredmény meglepő, hiszen $F^{(b)}$ *független* r -től. Eszerint mind az a), mind pedig b) esetben *ugyanakkora* erő hat a két töltött félgömb között.

II. megoldás. Vegyük körül – gondolatban – a *3. ábra a)* részén látható elrendezést (amelyen az egyszerűség kedvéért csak a kisebb félgömbhøjra ható erőt tüntettük fel) egy R -nél „hajszálnyival” nagyobb sugarú, $-2Q$ töltésű gömbhøjjal a b) ábrán látható módon. Így a félgömbhøjek között ható erőt nem változtatjuk meg, hiszen az egyenletesen töltött gömbhøj térerőssége belül nulla. Ez az elrendezés egyenértékű a c) ábrán láthatóval, amiből $-Q$ előjelét megváltoztatva a d) ábrán feltüntetethez jutunk. Tükrözzük most a testeket a félgömbhøjek képzeletbeli határsíkjaára! Az így kapott e) elrendezésben a Q töltésű (egyenletesen töltött) félgömbhøj ugyanakkora erőt fejt ki egy „benné lévő” másik, q töltésű félgömbhøjra, mint amekkorát egy „belőle kilógó” q töltésű félgömbhøjra. Az a) és e) ábrák szuperpozíciójával kapott f) ábra szerint egy $2q$ töltésű gömbre a nagy félgömbhøj $2F$ erőt fejtene ki, a q össztöltésű gömbre pedig ennek felét, F -et.

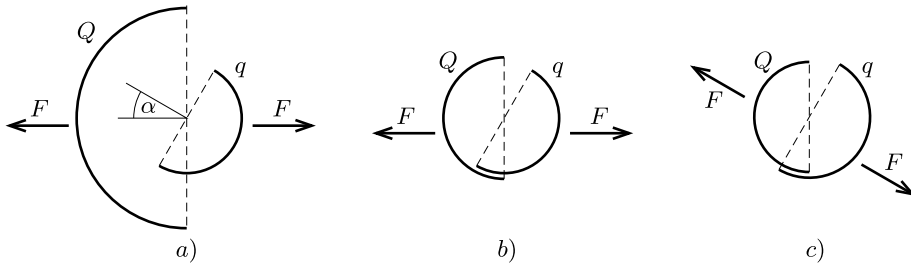


3. ábra

Most már csak a hatás-ellenhatás törvényét kell alkalmaznunk: a q töltésű gömb (amelynek elektromos tere a gömbön kívül egy ponttöltés terével is helyettesíthető, tehát nem függ r -től) a Q töltésű félgömbhøjra éppen a keresett $F^{(b)}$ nagyságú erőt fejt ki (g) ábra). A végeredmény a Coulomb-törvény és a gáznyomásos hasonlat alkalmazásával adódik:

$$F^{(b)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \cdot \frac{Q}{2\pi R^2} \cdot R^2 \pi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2}.$$

Megjegyzés. A fentiekhez hasonló „tükrözéses módszerrel” megmutatható, hogy a félgömbhéjak között ható erő nagysága akkor is a fent kiszámított érték, ha a két félgömb szimmetriatengelye tetszőleges α szöget zár be egymással. Az erő nagysága a töltések szorzatán kívül csak a nagyobb félgömbhøj sugarától függ, iránya pedig a nagyobb félgömb szimmetriatengelyével párhuzamos, jöllehet a hatásvonala általában nem megy át a félgömbhéjak közös középpontján (4. ábra a) része). Ez az eredmény azért is meglepő, mert ha r és R majdnem egyforma nagyságúak, egyikük csupán egy parányival nagyobb a másíknál, akkor az erő iránya ugrásszerűen változik, attól függően, hogy melyik sugar is a nagyobb (b) és c) ábrák).



4. ábra

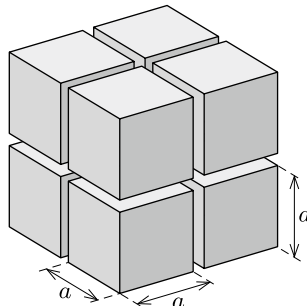
M. 233. Egy homogén töltéssűrűségű kocka középpontjában az $U_{\text{közép}}$ potenciál csak a Coulomb-állandótól (k), a kocka töltésétől (Q) és az élének hosszától (a) függhet. Mivel a szóban forgó mennyiségek dimenziója

$$[U_{\text{közép}}] = \frac{\text{Nm}}{\text{C}}, \quad [k] = \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}, \quad [Q] = \text{C}, \quad [a] = \text{m},$$

ezért a potenciál k -val és Q -val egyenesen, a -val pedig fordítottan arányos:

$$(1) \quad U_{\text{közép}}(a, Q) = ck \frac{Q}{a},$$

ahol c egy dimenziótlan állandó (amely a kocka geometriájára jellemző).



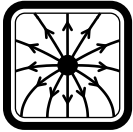
Építsünk fel – gondolatban – nyolc darab, egyenként Q töltésű kockából egy $2a$ élhosszúságú nagyobb kockát (lásd az *ábrát*)! Ennek a nagyobb kockának a középpontjában a potenciál

$$U_{\text{közép}}(2a, 8Q) = ck \frac{8Q}{2a} = 4ck \frac{Q}{a}.$$

A nagy kocka középpontja a kis kockák mindegyikének az egyik csúcsa. Vegyünk el (és távolítsuk el nagyon messzire) a nyolc kis kockából *hetet!* Ekkor a potenciál a nagy kocka középpontjának helyén a nyolcadára csökken, a maradék egy kocka csúcsán tehát a potenciál

$$(2) \quad U_{\text{csúcs}} = \frac{1}{8} \cdot 4ck \frac{Q}{a} = \frac{1}{2} ck \frac{Q}{a}$$

lesz. Az (1) és (2) kifejezéseket összehasonlítva látszik, hogy egy homogén térfogati töltéseloszlású kocka középpontjában a potenciál éppen *kétszer akkora*, mint a csúcsán.

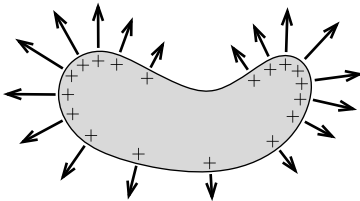


Elektrosztatika II. (vezetők)

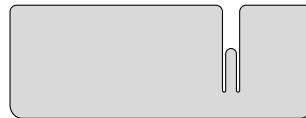
M. 234. A Föld és a távoli bolygó között elektromos mezőnek kell lennie, hiszen potenciálkülönbség (feszültség) van közöttük. Ez az elektromos mező megosztást hoz létre az űrhajó fém falában, így az űrhajó belsejében nulla lesz az elektromos térerősség (Faraday-kalitka), és az űrhajósok a külső elektromos tér hatását egyáltalán nem érzékelik.

Az űrhajó és a bolygó közötti feszültség az űrhajó mozgása során változik, kezdetben nagyon nagy, majd lassan csökken, és végül nullává válik. Amikor az űrhajó leszáll a bolygón, a potenciálja éppen a bolygó elektromos potenciáljával lesz egyenlő; az űrhajósok tehát nyugodtan kiszállhatnak, nem esik bajuk.

M. 235. Egy töltött fémtest egységnyi felületű (kicsiny) darabkáját a felület közelében mérhető elektromos térerősség négyzetével arányos erő húzza „kifelé” (1. ábra). Ez a húzóerő a felületi töltéseloszlástól, az pedig a felület mértani alakjától függ. Esetünkben a töltött fémtest a higany (hiszen a feszültség rákapcsolásakor töltések vándorolnak rá), melynek alakját a 2. ábra mutatja. A hajszálcső belsejében, annak a külső higanyszint alatti részében gyakorlatilag nincs elektromos tér, mert az a fémtest belsejében van (Faraday-kalitka). Úgy is érvelhetünk, hogy ha lenne a bemélyedés belsejében számottevő elektromos tér, akkor az üreg alja és teteje között potenciálkülönbség lépne fel, ez viszont – a higany fémes volta miatt – nem történhet meg.



1. ábra



2. ábra

A hajszálcsőben tehát nincs elektromos tér, ami húzná felfelé a higanyt, a higanyfelszín többi részén viszont működik ilyen (függőlegesen felfelé ható) erő. Mivel a folyadék összterfogata adott, a kapillárisban *lesüllyed* a higanyszint.

Megjegyzés. Az elektrosztatika törvényeihez alakilag hasonló egyenletek írják le a hővezetés jelenségét is. Az analógiában az elektromos potenciálnak a hőmérséklet, az elektromos térerősségnek pedig a hőáramsűrűséggel arányos vektor felel meg.

A feladatban szereplő elektrosztatikus problémának az a hőtani kérdés felel meg, hogy milyen hőmérsékleteloszlás alakul ki egy (a 2. ábrán látható alakú) jó hővezetőképességű test környezetében, ha a test kicsit melegebb a mérsékelt hővezető környezeténél. A test nyilván hőt ad le, de a bemélyedés belsejében nem alakul ki számottevő hőáram, hiszen az üreg fala mindenhol gyakorlatilag ugyanakkora hőmérsékletű.

M. 236. Egy Q töltésű, C kapacitású kondenzátor energiája $Q^2/(2C)$. A magában álló fémgömb tekinthető egy olyan gömbkondenzátornak, melynek egyik fegyverzete „végtelen nagy” sugarú. Ha ki tudjuk számolni, hogy mennyivel változik meg ennek a kondenzátornak az energiája, ebből már következtetni tudunk a kapacitás változására is.

A behorpasztás során a kondenzátor elektrosztatikus energiája megnő, hiszen a felületi töltések a rájuk ható erővel ellentétes irányban mozognak el. Úgy is érvelhetünk, hogy az \mathbf{E} térerősségű elektrosztatikus mező térfogategységként $\varepsilon_0 E^2/2$ energiával rendelkezik, és a behorpasztás következtében egy olyan térrészben is elektromos mező alakul ki, ahol korábban nem volt.

Ha csak egy kicsit (és finoman, éles törések kialakulása nélkül) változtatjuk meg a gömb alakját, akkor a kialakuló új elektromos mező a felület közelében az eredetivel egyezőnek vehető, és az energiaváltozás mértéke csak a térfogatváltozás mértékétől függ, a behorpasztás konkrét alakjától nem.

Kalapáljuk össze a fémgömböt úgy, hogy továbbra is gömb alakú maradjon, de a térfogata 3 ezrelékkal csökkenjen. Ehhez a sugarát 1 ezrelékkal kell csökkentenünk (hiszen a gömb térfogata a sugár köbével arányos). Egy ilyen kondenzátor energiája ugyanannyiszor nagyobb az eredeti gömbkondenzátor energiájánál, mint a feladatban szereplő behorpasztott kondenzátoré, így a kapacitásuk relatív megváltozása is azonos.

Egy gömbkondenzátor (magában álló gömb) kapacitása a sugarával arányos. Az új (arányosan kicsinyített) kondenzátor kapacitása tehát az eredetinel 1 ezrelékkal kisebb, ezért az eredeti kérdésben szereplő, behorpasztott kondenzátor kapacitása is ilyen arányban csökken.

M. 237. Megmutatjuk, hogy ha F -re és F^* -ra ugyanakkora töltést viszünk, akkor az F -hez tartozó elrendezés elektrosztatikus energiája kisebb.

Induljunk ki az új (F^*) felületből! Képzeljük el, hogy a rajta lévő töltéseket „hozzáerősítjük” a felülethez, majd egy kicsit kikalapáljuk a felületet úgy, hogy a töltések elmozdulása az eredeti felületre merőleges legyen. Ekkor a töltések a rájuk ható erő irányában mozognak el, hiszen eredetileg a felület ekvipotenciális volt, tehát a térerősség merőleges volt a felületre. Ezek szerint a felület deformálása során a rendszer elektrosztatikus energiája lecsökken. (A felületi töltésekre az előjelüktől függetlenül kifelé húzó erő hat, hiszen a pozitív töltésekből kifelé mutató, a negatívokból befelé irányuló elektromos mező indul ki.)

Az új felület általában nem lesz ekvipotenciális, de ha „felszabadítjuk” a rögzített töltéseket, azok átrendeződnek, mozgásuk során egy rövid ideig áramok folynak, amelyek egy kicsit melegítik a fémeket, és az új egyensúlyi helyzetben a töltésrendszer elektrosztatikus energiája még kisebb lesz.

Ezt az eljárást sok kis lépésben addig ismételjük, amíg az F^* felületből el nem jutunk az F felületig. Az elektrosztatikus energia mindvégig csökken, a fémen lévő Q össztöltés pedig nem változik. Mivel az elektrosztatikus energia $Q^2/(2C)$ módon függ a kapacitástól, az F felületű kondenzátor kapacitása biztosan nagyobb, mint az F^* felületű kondenzátoré.

M. 238. A síkkondenzátor kapacitását megadó közelítő összefüggés levezetésénél azt feltételezzük, hogy az elektromos térerősség a kondenzátor belsejében állandó, kívül zérus (elhanyagoljuk a szórt teret), és az erővonalak merőlegesek a fegyverzetekre. Ez jó közelítés abban az esetben, ha a fegyverzetek távolsága sokkal kisebb, mint a lineáris méretük.

Az elektromos térerősség nagyságát pl. úgy számíthatjuk ki, hogy a Gauss-törvényt egy olyan téglatestre alkalmazzuk, amely körülveszi az egyik kondenzátorlapot és két lapja párhuzamos vele. A tétel szerint

$$EA = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

ahol A a lap területe, Q a rajta lévő töltés. A lapok közötti feszültség $U = Ed$, ahol d a lapok távolsága. A kapacitás ebben a közelítésben:

$$C_{\text{közeltő}} = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Legyen Q adott, és becsüljük meg – a közelítést nem használva – a tényleges feszültséget! A töltések nem oszlanak el egyenletesen: a közöttük fellépő taszítóerő hatására a töltéssűrűség a lapok szélein nagyobb, középen pedig kisebb az átlagosnál. Téglalap vagy kör alakú fegyverzeteket feltételezve a kondenzátor (lemezekre merőleges) szimmetriatengelyén a térerősség biztosan merőleges a fegyverzetekre, nagysága pedig a kisebb töltéssűrűség miatt kisebb, mint $Q/(A\varepsilon_0)$. A szimmetriatengely mentén a lemezektől a kondenzátor közepe felé haladva az erővonalak biztosan nem lesznek sűrűbbek, mint a lemezeknél voltak (éppen ellenkezőleg: ritkulnak), ezért a térerősség nagysága a szimmetriatengely egyik pontjában sem éri el a $Q/(A\varepsilon_0)$ értéket. Így a lemezek közötti feszültség – amely bármilyen útvonal mentén, így pl. a szimmetriatengely mentén is számítható – biztosan kisebb, mint $Qd/(A\varepsilon_0)$, a kapacitás tehát *nagyobb*, mint $A\varepsilon_0/d$.

Okoskodhatunk úgy is, hogy a kondenzátor belsejében jó közelítéssel homogén az elektromos térerősség, de a Gauss-törvényben a kondenzátoron kívüli térrészből származó térerősség is ad járulékot. Emiatt E is és U is kisebb, C pedig nagyobb a valóságban, mint a közelítő számításban. Úgy is lehet gondolkozni, hogy a szórt teret az idealizált kondenzátorral párhuzamosan kapcsolt kis kondenzátorral vesszük figyelembe. Párhuzamos kapcsolásnál nő az eredő kapacitás.

Megjegyzés. A kapacitás pontosabb számításának eredménye függ a fegyverzetek alakjától. Körlapok esetén ($A = R^2\pi$) egy d/R -től függő szorzótényezővel javítható a közelítő eredmény. ($d/R = 0,2$ esetén a szorzótényező 1,286; $d/R = 0,01$ esetén pedig 1,023.) Téglalapok esetében a számítás sokkal bonyolultabb. Jó közelítést kapunk, ha az A terület helyébe azt a megnövelt területet írjuk, amelyet úgy kapunk, hogy a lemezeket a köztük lévő távolság $3/8$ részével minden irányban megnyújtjuk (R. Feynman: *Mai fizika*, 5. kötet).

M. 239. A példatárak feladataiban a kondenzátorok lemezein felhalmozódó töltések általában azonos nagyságúak és ellentétes előjelűek szoktak lenni. Most

Q_1 és Q_2 előjeléről nem tudunk semmit, nagyságukról is csak azt, hogy különbözők is lehetnek. Ha a kondenzátor lemezein a töltések $+Q$ és $-Q$ értékűek volnának, a feszültség a jól ismert

$$U = \frac{Q}{C}$$

értékű lenne. Ha pedig mindkét fegyverzetten $+Q$ töltés lenne, akkor a lemezek között a szimmetria miatt nem alakulna ki feszültség.

Használjuk a szuperpozíció elvét, és adjunk mindkét lemeznek $-(Q_1 + Q_2)/2$ nagyságú töltést! Ettől a kondenzátor feszültsége nem változhat meg, a lemezeken lévő töltés pedig Q_1 -ről $+(Q_1 - Q_2)/2$ -re, illetve Q_2 -ről $-(Q_1 - Q_2)/2$ értékre változik. Így egy hagyományosan feltöltött kondenzátort kaptunk, amelynek feszültsége

$$U = \frac{|Q_1 - Q_2|}{2C}.$$

Ekkora tehát a feladat „furcsán feltöltött” síkkondenzátorának feszültsége.

M. 240. A síkkondenzátor elektrosztatikus energiája kifejezhető a $C = \varepsilon_0 A/d$ kapacitással és a kondenzátorral összekapcsolt telep U feszültségével:

$$W_{\text{kond}} = \frac{1}{2}CU^2 = \varepsilon_0 \frac{AU^2}{2d}.$$

Ha a lemezek távolságát (állandó feszültség mellett) d -ről $2d$ -re növeljük, akkor a kondenzátor kapacitása is, energiája is a felére *csökken*:

$$\Delta W_{\text{kond}} = \frac{1}{2}\Delta C \cdot U^2 = -\varepsilon_0 \frac{AU^2}{4d}.$$

Ez azért meglepő eredmény, mert a lemezek széthúzása pozitív munkavégzést igényel, a kondenzátor energiája mégis csökken!

A látszólagos ellentmondás úgy oldható fel, ha észrevesszük, hogy a kondenzátor önmagában nem tekinthető zárt rendszernek, a teleppel együtt viszont már igen. A széthúzás közben a kondenzátor lemezeiről távozó $|\Delta Q|$ töltés a telep energiáját növeli (tölti a telepet), mégpedig $|\Delta Q| \cdot U$ mértékben. Mivel $|\Delta Q| = |\Delta C| \cdot U$, így a telep energiája

$$\Delta W_{\text{telep}} = |\Delta C| \cdot U^2 = \varepsilon_0 \frac{AU^2}{2d}$$

értékkel növekszik, ami éppen *kétszerese* a kondenzátor energiacsökkenésének. A telep energiáját tehát felerészben a kondenzátor energiacsökkenése, felerészben a lemezek széthúzásakor végzett munka növeli.

A lemezek széthúzásához szükséges munkavégzés tehát:

$$\Delta W_{\text{kond}} + \Delta W_{\text{telep}} = \varepsilon_0 \frac{AU^2}{4d},$$

ami az előzetes várakozásnak megfelelően valóban pozitív érték.

Megjegyzés. A lemezek széthúzásakor végzett munkát természetesen a lemezekre ható erőből közvetlen integrálással is megkaphatjuk. Egy síkkondenzátor lemezei között ható vonzóerőt az $F = Q^2/(2\varepsilon_0 A)$ összefüggés alapján számíthatjuk ki, amibe a töltés feszültséggel és kapacitással kifejezett értékét helyettesítve:

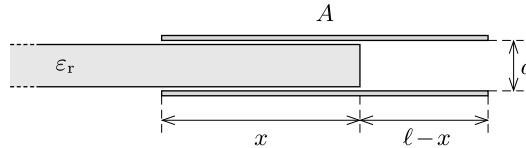
$$F = \frac{C^2 U^2}{2\varepsilon_0 A} = \frac{\varepsilon_0 A U^2}{2d^2}.$$

Ha a lemezek aktuális távolságát x -szel jelöljük, akkor a szükséges munkavégzés:

$$\int_d^{2d} F(x) dx = \frac{\varepsilon_0 A U^2}{2} \int_d^{2d} \frac{dx}{x^2} = \frac{\varepsilon_0 A U^2}{4d} = -\Delta W_{\text{kond}} = \frac{1}{2} \Delta W_{\text{telep}},$$

ami megegyezik előző eredményünkkel.

M. 241. *a)* Legyen a síkkondenzátor lemezeinek távolsága d , a lemezek töltése Q , felületük A , továbbá a vizsgált helyzetben a szigetelőlap x hosszúságú darabja már legyen az ℓ hosszúságú lemezek között ($0 < x < \ell$), ahogy ezt az *ábra* mutatja.



A kondenzátor kapacitását két párhuzamosan kapcsolt kondenzátor (az egyik dielektrikummal kitöltött, a másik üres) kapacitásának összegeként számíthatjuk ki:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A x}{d} + \varepsilon_0 \frac{A \ell - x}{d}.$$

Láthatjuk, hogy a síkkondenzátor kapacitása a kezdeti $\varepsilon_0 A/d$ -ről x -szel arányosan növekszik a kezdeti érték ε_r -szeresére. Mivel az *a)* esetben a töltés állandó, a kondenzátor energiáját így adhatjuk meg:

$$W_{\text{kond}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 \ell d}{2\varepsilon_0 A [(\varepsilon_r - 1)x + \ell]}.$$

Ezek szerint x növekedtével a kondenzátor energiája csökken! Ebből következik, hogy a szigetelőlap betolásakor végzett munkánk negatív, vagyis a lemezek maguk közé húzzák a lapot, a szigetelőlapra *befelé mutató* erő hat.

Az erő nagyságát az elemi munkavégzés ($F \Delta x$) és a ΔW_{kond} energiaváltozás egyenlőségéből differenciálszámítással határozhatjuk meg:

$$F = \frac{\Delta W_{\text{kond}}}{\Delta x} \rightarrow \frac{dW_{\text{kond}}}{dx} = -\frac{(\varepsilon_r - 1) \ell d Q^2}{2\varepsilon_0 A [(\varepsilon_r - 1)x + \ell]^2}.$$

Megjegyzés. Felmerülhet a kérdés, milyen módon fejt ki az elektromos mező a kondenzátorlemezekkel párhuzamos erőt a szigetelőlapra? Ha a lemezek között homogén,

a lemezekre merőleges lenne az elektromos tér, a lemezeken kívül pedig nulla a térerősség (ez a szokásos kondenzátor-kép), akkor a szigetelőlapra nem hatna erő. Az erőhatás ténylegesen az elektromos erővonalaknak a lemezek szélén tapasztalható kidudorodásával (a mező inhomogenitásával) magyarázható.

b) A szigetelőlapra ható erő nem függhet attól, milyen kapcsolatban van a kondenzátor a környezetével, ezért előző eredményünk akkor is érvényes kell hogy legyen, ha a kondenzátor feszültségét tartjuk állandó értéken. Ekkor azonban a kondenzátor töltése a $Q = CU$ összefüggés szerint változik, amint a lapot a lemezek közé juttatjuk. Írjuk be az erő kifejezésébe a kondenzátor x -től függő töltését:

$$F = -\frac{\varepsilon_0 A (\varepsilon_r - 1) U^2}{2\ell d},$$

vagyis ebben az esetben állandó erő hat a szigetelőlapra.

Érdekes megállapításra jutunk, ha kifejezzük a kondenzátor energiáját állandó feszültség mellett:

$$W_{\text{kond}} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{\varepsilon_0 A [(\varepsilon_r - 1)x + \ell] U^2}{2\ell d},$$

ami azt mutatja, hogy ilyenkor a kondenzátor energiája lineárisan növekszik x -szel. Így a szigetelőlap Δx elmozdulására jutó ΔW_{kond} energiaváltozást elemi úton is kiszámíthatjuk:

$$\frac{\Delta W_{\text{kond}}}{\Delta x} = \frac{\varepsilon_0 A (\varepsilon_r - 1) U^2}{2\ell d}.$$

Az előjeltől eltekintve pontosan ugyanolyan alakra jutottunk, mint a szigetelőlapra ható erő számításakor. Eredményünket tehát úgy összegezhethetjük, hogy a lap becsúztatásakor az elektromos mező valamekkora munkát végez a lapon (behúzza a lapot), miközben ugyanennyivel *növekszik* a kondenzátor energiája. Ez úgy lehetséges, hogy a folyamatban a telep energiája kétszer ennyivel csökken, hiszen a kondenzátor kapacitása (és ezzel együtt a töltése) növekszik, vagyis a telep töltést ad le. A telep munkavégzése az *előző feladat* megoldásában látott módon határozható meg, a részletes számítást az Olvasóra bízunk.

M. 242. A kondenzátorlemezek közé helyezett töltést gondolatban két részre oszthatjuk, és az egyes részeket – a lemezekkel párhuzamos síkban – egymástól eltávolíthatjuk. Ilyenkor a kondenzátorlemezekon lévő töltések is elmozdulnak, de az összegük mindkét lemezen változatlan marad (szuperpozíciós elv). Az eljárást tovább folytatva a Q töltést tovább darabolhatjuk, és végül egyenletesen szétoszthatjuk, „szétkenhetjük” egy (a kondenzátorlemezekkel párhuzamos, azokkal megegyező területű) síklapon.

Így két párhuzamosan kapcsolt kondenzátorhoz jutunk (lemez-távolságaik x , illetve $d-x$). A kondenzátorok feszültségének nagysága megegyezik (hiszen előjeles összegük a földelés miatt nulla), a bennük kialakuló térerősségek nagysága tehát a lemezek távolságával fordítottan arányos:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{d-x}{x}.$$

Gauss törvénye szerint ugyanilyen arányban oszlik meg a Q töltésből kiinduló elektromos fluxus, és ugyanekkora lesz a földelt fémlamezekre jutó töltések aránya. Mivel a két lemezen összesen $-Q$ töltés halmozódik fel, az egyes lemezekre

$$Q_1 = -Q \frac{d-x}{d} \quad \text{és} \quad Q_2 = -Q \frac{x}{d}$$

töltés jut.

M. 243. A kondenzátor lemezeitől távol az elektromos teret első közelítésben a rendszer össztöltése határozza meg. Mivel az elektromos tér a kondenzátor lemezein kívül nulla, az össztöltésnek, vagyis a lemezeken lévő töltések összegének nullának kell lennie. Eszerint $Q_1 = -Q_2 \equiv Q$.

Egy elektromosan semleges (nulla össztöltésű) rendszer elektrosztatikus terének nagy távolságú viselkedését a rendszer elektromos dipólmomentuma határozza meg. Esetünkben ez annyit jelent, hogy a lemezek síkjára merőleges dipólmomentum-komponensnek el kell tűnnie, vagyis

$$p - Qd = 0,$$

ahonnan a lemezek keresett töltése

$$Q = \frac{|p|}{d}.$$

Érdekes, hogy ez a töltésmennyiség *nem függ* a dipól helyzetétől.

Megjegyzések. 1. Az itt leírt módszer az *előző feladatban* is alkalmazható. A megfelelő egyenletek:

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + Q &= 0, \\ Q_1 x - Q_2(d-x) &= 0, \end{aligned}$$

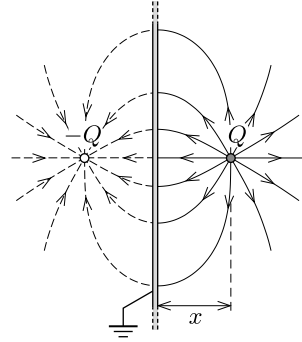
amelyek megoldása:

$$Q_1 = -Q \frac{d-x}{d} \quad \text{és} \quad Q_2 = -Q \frac{x}{d}.$$

2. Egy másik lehetséges megoldás: az egyetlen ponttöltésnél kapott eredményből szuperpozícióval előállíthatjuk a dipól töltésmegosztását is. Ha két ellenkező előjelű ponttöltést helyezünk – egymáshoz nagyon közel – a lemezek közé, a szuperponált megoldás tetszőleges irányú dipólmomentum esetén megadja a lemezekre kerülő töltések mennyiségét.

M. 244. Mielőtt rátérnénk a feladat megoldására, tekintsünk két azonos nagyságú, de ellentétes előjelű ponttöltést (Q és $-Q$), melyek egymástól $2x$ távolságra helyezkednek el. A töltések által keltett elektromos mező szerkezete jól ismert, és szimmetrikus a töltéseket összekötő szakasz (merőleges) felezősíkjára. Ebben a szimmetriasíkban az elektromos potenciál értéke nulla, ezért ha ide egy földelt fémlapot helyezünk, akkor a fémlap belsejében bekövetkező töltésszétváláson kívül nem történik semmi: az elektromos mező ugyanolyan marad, mint korábban.

A földelt fémlap két oldalán ellentétes előjelű felületi töltések halmozódnak fel, ezek biztosítják, hogy a fém anyagának belsejében a térerősség zérus legyen. A két oldalon kialakuló töltéseloszlás független egymástól: például a Q töltés oldalán akkor sem változik meg a fémlap és a Q töltés által létrehozott elektromos mező, ha a túloldali $-Q$ töltést eltávolítjuk. (Ezt úgy is beláthatjuk, hogy a fémlapot enyhén a Q töltés felé görbítjük, és „nagyon messze” bezárjuk. Az így keletkezett Faraday-kalitka belsejében kialakuló elektromos mezőre a külső tér nincs hatással.)



Egy földelt fémsík és egy tőle d távolságra elhelyezkedő Q ponttöltés elektromos tere tehát a ponttöltést tartalmazó féltérben olyan, mintha azt a Q töltés egy képzeletbeli, a lemez túloldalán található „tükkörtöltéssel” együtt hozta volna létre (lásd az *ábrát*). A Q ponttöltéssel átellenes féltérben az elektromos térerősség azonosan nulla. A Q töltésből kiinduló összes erővonal a földelt fémsíkba fut be, ezért a rajta felhalmozódó össztöltés $-Q$.

Megjegyzés. A tükkörtöltések módszerével speciális alakú (sík, gömb stb.) vezetők és ponttöltések elektromos mezőjét lehet meghatározni. A módszer az elektrosztatika alapegyenleteinek azon a tulajdonságán alapul, hogy ha egy *zárt* felület minden pontjában ismert a potenciál értéke, valamint a felület belsejében elhelyezkedő töltések eloszlása is adott, akkor ezek együtt egyértelműen meghatározzák a felület belsejében kialakuló elektromos teret. Az előző gondolatmenetben a felület zártságát a földelt fémsík „végtelenben” történő bezárásával oldottuk meg.

A feladatban szereplő fémsík nem földelt, csak „nagy kiterjedésű” (össztöltése nulla). Ennek elektromos tere úgy állítható elő a nulla potenciálú ($-Q$ össztöltésű) fémsík teréből, hogy egyenletes töltéseloszlásban Q töltést viszünk fel rá (szuperpozíció elve). Ez azonban nagy fémsík esetén nagyon kicsiny felületi töltéssűrűséget jelent, amelynek hatása elhanyagolható. (Úgy is érvelhetünk, hogy a nagy fémlap szélei a Q ponttöltéstől nagyon messze, tehát csaknem a nulla potenciálú pontig érnek, ezért a lap lényegében földeltnek tekinthető.)

A (nem túl gyorsan mozgó) Q töltésű testre ható vonzóerő tehát a tükkörtöltéstől származó Coulomb-erőként számítható:

$$F(x) = k \frac{Q^2}{4x^2},$$

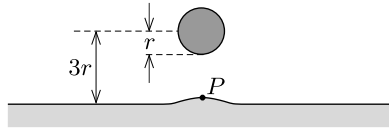
ahol x a sík és a pontszerű test pillanatnyi távolsága. Ez az erő éppen akkora, amekkora gravitációs vonzóerőt egy $M = kQ^2/(4\gamma m)$ tömegű, *rögzített* helyzetű test fejtene ki a tőle x távolságra lévő m tömegű másik testre. Az analógia alapján alkalmazhatjuk Kepler III. törvényét, ami a bolygók T keringési ideje és az ellipszispályájuk a félnagy tengelye között teremt kapcsolatot:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}.$$

Ha a fémsíktól d távolságban engedjük el a töltött testet, pályáját tekinthetjük egy nagyon lapos (elfajult) ellipszisnek is, amelynek félnagy tengelye $a = d/2$. A T_b becsapódási idő az elfajult pályához tartozó keringési idő fele:

$$T_b = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{Q} \sqrt{\frac{md^3}{2k}}.$$

M. 245. A sós víz elektromosan jól vezető folyadék (elektrolit). Mind a pozitív, mind a negatív töltéshordozók (ionok) könnyen elmozdulnak benne. A közeledő, feltöltött golyó hatására az általa vonzott, vele ellentétes töltésű ionok igyekeznek a golyó felé elmozdulni, míg a golyóval azonos töltésű ionok a taszító erő hatására ellenkező irányban mozdulnak el. A folyadék felületén végül olyan egyensúlyi töltéseloszlás alakul ki, melynek hatására a folyadék belsejében megszűnik az elektromos tér, a golyó és a folyadék közötti térben pedig az erővonalak merőlegesen futnak be a sós víz felszínére.



1. ábra

A töltött golyó a vele ellentétes töltésű folyadékfelszín kissé megemeli. Az egyensúlyi folyadékfelület alakja várhatóan kevésbé tér el a síktól (erre utal a feladat szövege is), tehát a levegőben kialakuló eredő elektromos mező meghatározásához alkalmazhatjuk az *előző feladatban* részletesen ismertetett tükörtöltés módszerét. Elegendő figyelmünket egyetlen pontra, a felemelkedő folyadékfelület legfelső P pontjára koncentrálni; ennek emelkedése az, amit ki kell számítanunk.

Az 1. ábrán P -vel jelölt pontban a Q töltéstől származó télerősség

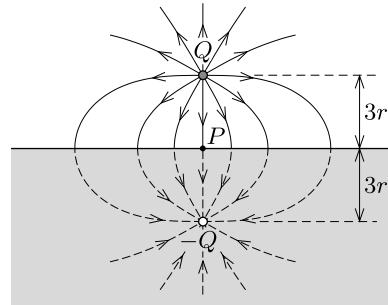
$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(3r)^2}.$$

A folyadék felületén kialakuló töltéseloszlás hatását a felszín alatt $3r$ mélységben elképzelt $-Q$ nagyságú tükörtöltés hatásával helyettesítjük (2. ábra). A tükörtöltéstől származó télerősség a P pontban ugyanakkora és ugyanolyan irányú, mint E_1 , ezért itt az eredő télerősség:

$$E = 2E_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(3r)^2}.$$

A folyadék felszínén (a Gauss-törvény szerint) felületegységenként $\sigma = \epsilon_0 E$ töltés (felületi töltéssűrűség) alakul ki. A felületegységre ható elektrosztatikus erő

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{2} \sigma E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$



2. ábra

(Az $\frac{1}{2}$ -es szorzótényező megjelenése azt a tényt fejezi ki, hogy az elektromos térerősség csak a folyadék felett E nagyságú, a folyadékban nulla, átlagos értéke pedig $\frac{1}{2}E$.) Ez a felületegységre jutó, függőlegesen felfelé mutató erő egyensúly esetén éppen a P pontbeli h emelkedésből származó hidrosztatikai nyomással egyezik meg:

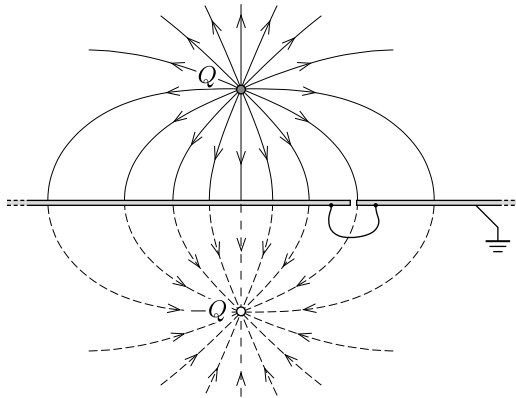
$$\frac{F}{A} = \rho gh.$$

(A felületi feszültség szerepét a feladat szövegének megfelelően elhanyagoltuk.) Ebből kiszámítható a sós víz felszínének h emelkedése:

$$h = \frac{2Q^2}{(36\pi)^2 \varepsilon_0 \rho g r^4} \approx 0,29 \text{ mm.}$$

Ez az érték valóban „pici” a golyó sugarához, illetve a víztől mért távolságához képest, jogos volt a síkra vonatkozó tükkörtöltés-közelítés. Be lehet látni, hogy a víz emelkedéséből adódó görbületi nyomás a hidrosztatikai nyomásnál sokkal kisebb, a felületi feszültség szerepét tehát jogosan hanyagoltuk el.

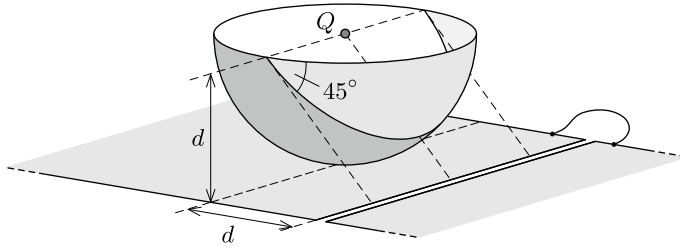
M. 246. I. megoldás. Tekintsük először azt az esetet, amikor a vezetékkel összekötött két fémlemez *földelt*, tehát a töltések szabadon távozhatnak a lemezekről, vagy éppen oda áramolhatnak. (A feladatban ez *nem teljesül*, mégis tanulmányos először ezzel a problémával foglalkozni.) A két fémlemez az elektromos kontaktus miatt úgy viselkedik, mintha egyetlen nagy kiterjedésű (végtelen nagy) tekinthető földelt lemez lenne. A Q ponttöltés hatására a lemez felett olyan elektromos tér alakul ki, mintha a túloldalán, Q tükkörképének helyén egy $-Q$ nagyságú „tükkörtöltés” helyezkedne el (1. ábra).



1. ábra

A lemezen kialakuló töltésseloszlást (töltéssűrűséget) az elektromos térerősségnek a fémfelület határánál kialakuló értéke határozza meg. A fémlemez valamelyik területén felhalmozódó töltés mennyisége Gauss törvénye miatt arányos az adott területre befutó erővonalak számával. A teljes (földelt) fémlemezre összesen $-Q$ töltés kerül, hiszen mindegyik erővonal valahol eléri a „végtelen nagy”

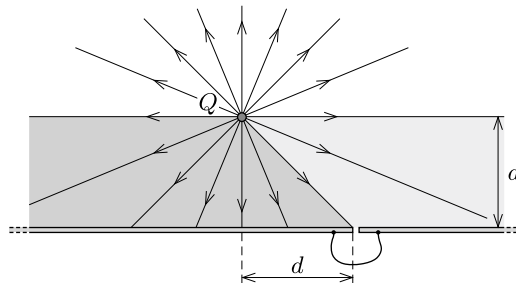
lemezpárt. Az elektromos erőteret a valódi töltés és a tükörtöltés terének szuperpozíciójaként állíthatjuk elő. Ugyanez igaz az erővonalszámokra is: a lemez valamely darabján átmenő erővonalszám a valódi töltésből, illetve a tükörtöltésből származó erővonalszámok összege. Mivel azonban ezek egymással egyenlőek, ezért a lemez kiszemelt darabjába befutó teljes elektromos fluxus a valódi (Q nagyságú) ponttöltés által létrehozott fluxus *kétszerese*.



2. ábra

Vizsgáljuk meg, hogy ha a lemezen felhalmozódó töltések nem lennének jelen, akkor a Q nagyságú ponttöltésből (gömbszimmetrikusan) kiinduló Q/ε_0 számú erővonal közül hány haladna át a töltés „alatti” fémlamezen, és mennyi a másik lemezen! Ha a Q töltést gondolatban egy gömbhéjjal vesszük körül a 2. ábrán látható módon, akkor az erővonalak fele, $Q/(2\varepsilon_0)$ halad át az alsó félgömbhéjon. A töltéstől távolabbi fémlamezt azok az erővonalak érik el, amelyek az ábrán világosabban jelölt nyolcadgömbhéjon („dinnyehéjon”) lépnek ki; ezek $Q/(8\varepsilon_0)$ fluxust hoznak létre. A másik fémlamezre háromszor ennyi erővonal fut be, a rajta átmenő fluxus tehát $3Q/(8\varepsilon_0)$. Mivel ezeknek a fluxusoknak a kétszeresét kell vennünk (a fémlemez felületi töltései miatt), ezért a jobb oldali lemezen $-Q/4$ töltés, a bal oldalin pedig $-3Q/4$ töltés halmozódna fel, ha a lemezek földeltek lennének.

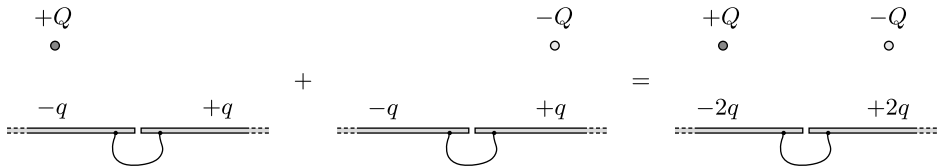
Valójában azonban a fémlamezek *nem* földeltek, emiatt az össztöltésük a megosztás után is nulla marad. Ha az eddig számolt töltés-értékekhez mindkét oldalon $+Q/2$ -t hozzáadunk (mindkét lemezre ekkora töltést viszünk), akkor megkapjuk az eredeti feladat megoldását: a bal oldali lemez töltése $-Q/4$, a jobb oldali lemez pedig $+Q/4$ lesz.



3. ábra

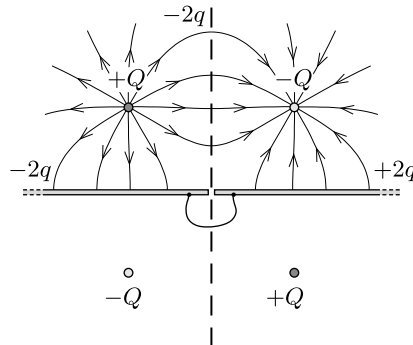
Megjegyzés. Ha a Q töltést elfelezzük, és az egyik fél töltést a lemezeket elválasztó keskeny réssel párhuzamos irányban valamennyire elmozdítjuk, a fémlemezeken a töltések átrendeződnek, de az egyes lemezekon lévő összes töltés mennyisége *nem* változik meg. Ezt az eljárást sokszor megismételve a Q töltést akár teljesen szét is „kenhetjük” egy hosszú, egyenes szigetelő pálca mentén, és ezzel a feladatot kétdimenzióssá alakíthatjuk. Ekkor a térbeli ábra helyett elegendő síkbelit készítenünk (3. ábra). Ez is jól mutatja, hogy ha a Q töltés egymaga lenne csak jelen, a belőle kiinduló erővonalakból háromszor több jutna a bal oldali lemezre, mint a jobb oldalra. Ugyanez igaz a tükörtöltésekre is, tehát a két fémlemez eredő töltésaránya is 3 : 1 lenne, ha a lemezeket leföldelnénk.

II. megoldás. Jelöljük a bal oldali fémlmezre jutó töltés mennyiségét $-q$ -val, ekkor a jobb oldali lemez töltése a megosztás hatására nyilván $+q$ lesz. Helyezzünk el most $-Q$ töltést a 4. ábrán látható helyre, ez a jobb oldali lemezen hoz létre $+q$ töltést és a bal oldali lemezre juttat $-q$ töltést. A két elrendezés szuperponálható, az eredményt ugyancsak a 4. ábra mutatja.



4. ábra

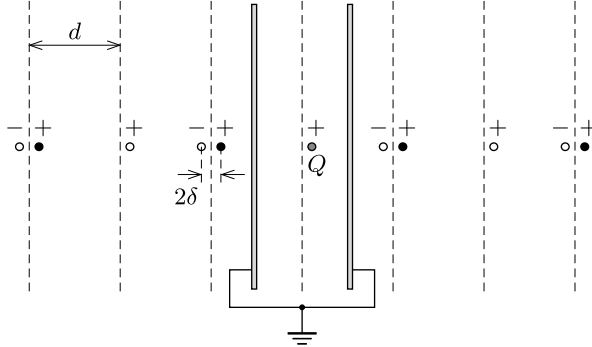
A szuperponált elrendezés elektromos terét is a töltéstükörözés módszerével határozhatjuk meg (5. ábra). A szaggatott vonallal jelölt sík – a ténylegesen ott lévő fémlemezhez hasonlóan – ugyancsak ekvipotenciális, tehát a helyére akár egy valóságos fémlmezt is tehetnénk. A szimmetria miatt ezen lemez felső felén is $-2q$ töltés jelenne meg, és mivel a Q töltésből kiinduló erővonalak mindegyike valamelyik félsíkra érkezik, $-2q - 2q = -Q$, azaz $q = Q/4$.



5. ábra

Ezzel megoldottuk az eredeti feladatot is: a Q töltéshez közelebbi lemezen $-Q/4$, a távolabbin pedig $+Q/4$ töltés jelenik meg az elektromos megosztás hatására.

M. 247. Mindkét kondenzátorlemez azonos, nulla potenciálú, ezért alkalmazhatjuk a töltéstükrözés módszerét. A végtelen sok $+Q$ és $-Q$ tükörtöltés közül az első néhányat az *ábrán* lyukas karikák jelzik. Ezek közül a pozitív előjelűek hatásai a szimmetria miatt kioltják egymást. A gyöngyre ható erő nem változik meg, ha a fekete pöttyökkel jelzett helyekre is elhelyezünk $+Q$ töltéseket (hiszen ezek szimmetrikusan veszik körül a töltött gyöngyöt).



Végül tehát olyan $p = Q \cdot 2\delta$ dipólyomatékú dipólusok hatását kell összegezni, melyek a töltött gyöngytől (jó közelítéssel) $d, 3d, 5d, 7d, \dots$ távolságra vannak. Egyetlen, r távolságra lévő dipólus által a gyöngyre kifejtett erő nagysága (lásd pl. a 221. feladatot)

$$F_{\text{dipól}}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{pQ}{r^3},$$

így az összes dipólus hatása:

$$F = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \frac{Q^2\delta}{d^3} \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \dots \right) = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \frac{Q^2\delta}{d^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3},$$

ez az erő pedig a közelebbi lemez felé irányul. A kapott kifejezésben szereplő összeg első néhány tagját kiszámolva kiderül, hogy a sor gyorsan konvergál, így a gyöngyre ható erőre a következőt kapjuk eredményül:

$$F \approx 2,1 \frac{Q^2\delta}{\pi\epsilon_0 d^3}.$$

Megjegyzés. A fenti szumma kifejezhető a Riemann-féle zéta-függvénnyel, amelyet a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

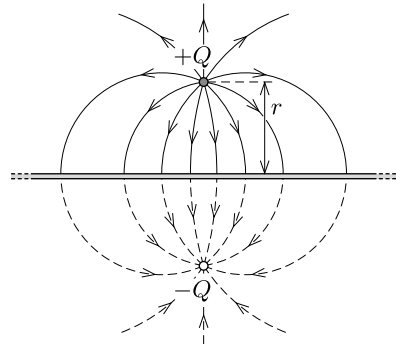
összeggel definiálhatunk azon s értékekre, amelyekre a sor konvergens (ez valós számok körében az $s > 1$ feltételt jelenti). Belátható, hogy az erőre kapott eredmény felírható az

$$F = \frac{7\zeta(3)}{4} \frac{Q^2\delta}{\pi\epsilon_0 d^3} = 2,1036 \frac{Q^2\delta}{\pi\epsilon_0 d^3}$$

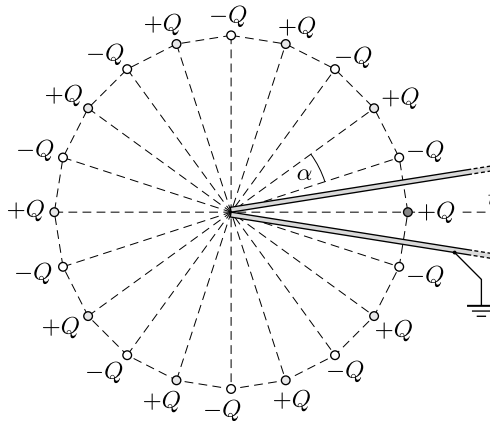
alakban. Érdekes, hogy már az első néhány tag összegének kiszámításával milyen pontos értéket kaptunk az erőre.

M. 248. A földelt fémlapok és a töltött pálca által a fémsíkok között keltett elektromos mező éppen olyan, mintha azt a töltött pálca és – megfelelő elhelyezkedésű, előjelű és számú – képzeletbeli (vonalszerű) tükörtöltések hoznák létre. Az *a)* esetben lényegében egyetlen fémlapról van szó, ekkor a lemezek állandó (azonosan nulla) potenciáljának biztosításához egyetlen „tükörpálca” elegendő (*1. ábra*).

A *b)* esetben a fémlamezek potenciálját úgy tudjuk zérussá tenni, ha a töltött palcát tükrözzük mindkét fémlapra, majd a „tükörpalcákat” is tükrözzük a fémlapokra, és az eljárást addig folytatjuk, amíg új tükörpalcát kapunk. A töltés minden tükrözésnél (-1) -szeresére változik. A módszer csak akkor alkalmazható, ha a valódi töltések által elfoglalt térrészbe *nem* kerül tükrözött töltés. Ez akkor teljesül, ha $2n \cdot \alpha = 360^\circ$, ahol n pozitív egész (*2. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Egy L hosszúságú, egyenletes vonalmenti töltéssűrűségű, Q töltésű pálca elektromos térerősségét a pálca tengelyétől $x \ll L$ távolságban a Gauss-törvény alapján számíthatjuk ki. A palcával egybeeső tengelyű, x sugarú és L hosszúságú henger palástján kilépő elektromos fluxus $E \cdot 2\pi xL$, ami éppen Q/ϵ_0 -al egyenlő, ezért a térerősség nagysága

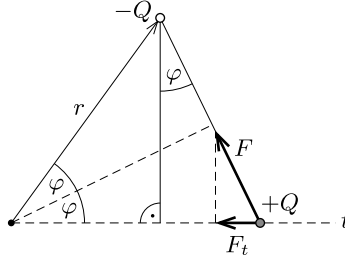
$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 Lx}.$$

Az *a)* esetben a tükörpálca elektromos térerőssége a valódi pálca pontjaiban az $x = 2r$ helyettesítéssel kapható meg, így a palcára ható erő nagysága

$$F^{(a)} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 Lr},$$

iránya pedig a tükörkép, tehát a fémlap felé mutat. (A valóságban természetesen ezt az erőt a fémlap megosztott töltései fejtik ki a pálcára.)

A *b*) esetben (a pálcával párhuzamos irányból nézve) a valódi pálca és a tükörpálcák szabályos 2φ -szöget alkotnak. Az eredeti pálcára ható erő a többi (19 darab) tükörpálca által kifejtett erő eredője, amely – a szimmetria miatt – merőleges a pálcára és a fémlapok metszésvonala felé mutat. Elegendő tehát a tükörtöltések által kifejtett erőnek a metszésvonal felé mutató (t irányú) komponensét kiszámítani, majd ezeket az erőkomponenseket összegezni.



3. ábra

Tekintsük a 3. ábrán látható tükörpálcát, amely a fémlapok érintkezési vonaláról szemlélve az eredeti pálcához képest 2φ szögben látszik. Ennek és az eredeti pálcának a távolsága $x = 2r \sin \varphi$, így a közöttük ható erő nagysága

$$F(\varphi) = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 Lx} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 Lr \sin \varphi},$$

iránya pedig a tükörtöltés előjelétől függően vonzó vagy taszító. Ennek az erőnek a fémlapok t szögfelezőjével párhuzamos összetevője

$$F_t = F(\varphi) \sin \varphi = \pm \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 Lr},$$

nagysága tehát *nem függ* a φ szögtől, csupán az iránya változik a tükörtöltés előjelétől függően (a pálcával ellentétes tükörtöltés esetén a fémlapok metszésvonala felé, egyforma töltések esetén pedig az ellenkező irányba mutat).

Mivel a 19 tükörpálcából 10-nek a töltése $-Q$, 9-nek pedig $+Q$, az eredő erő ugyanakkora, mintha csak egyetlen tükörpálca lenne jelen. Az eredeti pálcára ható erő tehát (irányát és nagyságát tekintve) az *a*) esetben kiszámítottal egyezik meg.

Megjegyzés. Látható, hogy az eredmény tetszőleges $\alpha = 180^\circ/n$ hajlásszögre igaz (n pozitív egész). Felsőbb matematikai eszközökkel belátható, hogy a pálcára ható elektromos erő akkor is független a fémlapok által bezárt szögtől, amikor n nem egész, tehát amikor a töltéstükrözés módszere nem alkalmazható.

M. 249. A Faraday-kalitka falában szabadon mozoghatnak az elektronok, a rájuk ható elektromos és nehézségi erők eredője minden pontban nulla. Ez úgy

teljesül, hogy a fém alsó felében kicsit összesűrűsödnek az elektronok, a felső részében pedig az elektronhiány miatt pozitív töltéstöbblet alakul ki. A töltéseltolódás addig tart, amíg az eredő elektromos térerősség éppen $E_0 = mg/e$ nagyságú nem lesz (ahol m az elektron tömege, e pedig az elemi töltés.) A térerősség iránya függőlegesen lefelé mutat, hiszen a negatív, $-e$ töltésű elektronra így fejt ki az elektromos mező függőlegesen felfelé mutató, mg nagyságú erőt.

Ha viszont a kalitka falában homogén elektromos mező alakult ki, akkor ugyanilyen homogén elektromos mezőnek kell lennie a kalitka belsejében is. (Ha nem így lenne, akkor egy töltött részecskét a kalitka falában függőlegesen fel- vagy lefelé elmozdítva, majd a kalitka belsejében visszajuttatva a kiindulási helyére az elektromos mező eredő munkavégzése nem lenne nulla, és örökmozgót, *perpetuum mobilet* építhetnénk!)

Ezek szerint a kalitka – a falában végbemenő elektromos megosztás miatt – olyan elektrosztatikus mezőt hoz létre a *belsejében* is, ami az odahelyezett elektronra annak súlyát éppen kiegyenlítő elektromos erőt eredményez. A kalitka tehát mintegy leárnyékolja a gravitációs erőteret is! Ez a leárnyékolás azonban csak az elektronokra működik, az elektronétól eltérő fajlagos töltésű (e/m arányú) részecskékre nem teljesül az erőegyensúly feltétele. Pozitronokra például az eredő erő $eE_0 + mg = 2mg$, ezek a részecskék tehát $2g$ nagyságú (függőlegesen lefelé irányuló) gyorsulással kezdenek el mozogni.

Számszerűen $E_0 = 5,6 \cdot 10^{-11}$ V/m, ez igen kicsi érték, tehát a leírt jelenség szokásos körülmények között észrevehetetlen. Az elektronokat nem tudjuk kezdősebesség nélkül a Faraday-kalitkába helyezni, hiszen pl. a fényelektromos jelenség során a fémből kilökött elektron, ha csupán 0,1 eV energiával rendelkezik, a sebessége kb. 200 km/s. Ha az elektron a kalitkában szabadon esne, akkor sebességének relatív változása 1 méternyi út megtétele után mindössze 10^{-10} nagyságrendű, vagyis mérhetetlenül kicsi lenne. Ez az érvelés is alátámasztja, hogy az elemi részecskék mozgásának tárgyalásakor csak az elektromos és a mágneses erőket kell számításba vennünk, a gravitációs erő hatása mindig elhanyagolható.

Felvethető egy további érdekes kérdés is: ha a fémek negatív vezetési elektronjai a kalitka belsejében csak a negatív elektronok súlyát semlegesítik, a pozitív pozitronét nem, akkor vajon milyen árnyékoló hatást hozna létre a p-típusú félvezetőből készült Faraday-kalitka? (Az ilyen félvezetőkben pozitív töltésű „lyukak” mozgásaként értelmezhető az áramvezetés.) Ennek a kérdésnek a végiggondolását az Olvasóra bízuk.

Megjegyzés. Eddigi megfontolásaink során az elektronra (pozitronra) ható erők között nem vettük figyelembe a részecske által a kalitka falában okozott töltésátrendeződés hatását. Ez a hatás a tükörtlítés módszerével kezelhető (lásd a 244. feladatot). A falhoz közeli, attól d távolságra elhelyezkedő e töltésű részecskére a fémbe megosztott töltések akkora erőt fejtenek ki, mint egy $2d$ távolságra lévő, $-e$ töltésű részecske:

$$F_{\text{tükör}} = k \frac{(-e)e}{(2d)^2}.$$

Elektronokra vagy pozitronokra ez az erő akkor válik a súlyukkal összemérhetővé, ha $d \approx 2$ m. Ha tehát valaki mérésekkel is igazolni akarná az itt leírt gondolat kísérlet

következtetéseit, olyan nagy Faraday-kalitkát kellene használnia, amelyben a részecskék néhány méternél mindig sokkal messzebb vannak a falaktól, ellenkező esetben nem a kalitka leárnyékoló hatását, hanem a tükörtlöltések vonzóerejét vizsgálná.

M. 250. Tekintsünk először egy R sugarú, Q össztöltésű fémgömböt, amelynek felületén (a szimmetria miatt) egyenletesen oszlanak el a töltések, vagyis a felületi töltéssűrűség

$$\sigma_0 = \frac{Q}{4\pi R^2} = \text{állandó.}$$

A gömb belsejében – mint az jól ismert – nulla az eredő elektromos térerősség. Ezt úgy láthatjuk be, hogy kiszámítjuk a gömb egy belső P pontjából valamelyik irányban látható (igen kicsiny) ΔA_1 méretű felületdarabkán lévő

$$\Delta Q_1 = \sigma_0 \Delta A_1$$

nagyságú töltés, illetve a vele ellentétes irányban látszó

$$\Delta Q_2 = \sigma_0 \Delta A_2$$

nagyságú töltés eredő elektromos terét a P pontban (1. ábra). Az eredő térerősség nagysága Coulomb törvénye szerint:

$$|\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2| = k \frac{\Delta Q_1}{r_1^2} - k \frac{\Delta Q_2}{r_2^2} = k \sigma_0 \left(\frac{\Delta A_1}{r_1^2} - \frac{\Delta A_2}{r_2^2} \right) = 0.$$

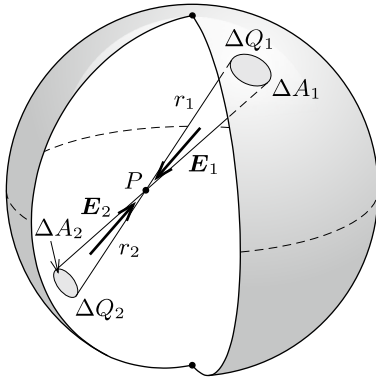
Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy (geometriai megfontolásból adódóan)

$$\frac{\Delta A_1}{\Delta A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

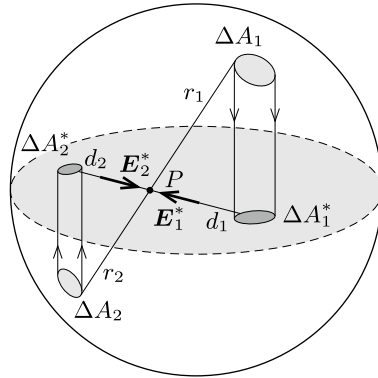
A fenti egyenlőség belátásához azt kell végiggondolnunk, hogy a P pontból adott (kicsiny) térszögben látszó, A pont körüli felületdarabka területe – a térszög definíciója szerint – a PA szakasz hosszának négyzetével arányos, ha a felület merőleges a \vec{PA} irányra. Igaz ugyan, hogy a gömbfelület érintősíkja általában nem merőleges \vec{PA} -ra, hanem valamekkora szöget zár be vele, de ez a szög az átellenes felületdarabkánál is ugyanakkora, tehát az innen származó torzítási szorzófaktor a fenti arányból kiesik.

Az egymással szemközti kicsiny felületdarabkákon lévő töltések erőhatásai páronként kiejtik egymást; a gömbfelületen lévő összes töltéstől származó eredő elektromos térerősség tehát *nulla*.

Térjünk most rá az elektromosan töltött korong esetére! Megmutatjuk, hogy ennek töltéeloszlása könnyen megkapható az egyenletesen töltött fémgömb töltéeloszlásából. „Ragasszuk” rá (gondolatban) a töltéseket a gömbfelületre, majd vetítsük le merőlegesen a gömbfelület pontjait egy olyan síkra, amely a gömb középpontjára is, és a korábban vizsgált P pontra is illeszkedik (2. ábra).



1. ábra



2. ábra

Mivel a töltések nem tudnak elmozdulni, az eredetileg ΔA_1 nagyságú felületen található ΔQ_1 töltés a síkra vetítve változatlan mennyiségben, de valamennyivel kisebb ΔA_1^* területen fog elhelyezkedni, tehát megnő a töltéssűrűsége; emellett a P ponttól mért távolsága is megváltozik, az eredeti r_1 helyett egy kisebb érték, d_1 lesz. Ugyanez történik a gömbfelület átellenes pontjaiban található, ΔQ_2 nagyságú töltéssel is.

Vajon mekkora eredő elektromos térerősséget hoz létre ez a két (levetített, de még a koronghoz ragasztott) töltésdarabka a sík P pontjában? Ismét a Coulomb-törvényből számolhatjuk az eredőt:

$$|\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*| = k \frac{\Delta Q_1}{d_1^2} - k \frac{\Delta Q_2}{d_2^2} = k\sigma_0 \left(\frac{\Delta A_1}{d_1^2} - \frac{\Delta A_2}{d_2^2} \right) = 0.$$

Az utolsó lépésnél (geometriai megfontolások alapján) felhasználtuk, hogy

$$\frac{\Delta A_1}{\Delta A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \text{továbbá} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Ugyanez igaz a többi töltéspár által létrehozott térerősségre is, tehát a teljes töltéeloszlás elektromos mezőjére is: a korong síkjában az elektromos térerősség *nulla*.

Azt az érdekes eredményt kaptuk, hogy a P pontban rögzített töltéseket a többi töltés elektromos tere semerre sem akarja elmozdítani. No de akkor a töltések rögzítését (leragasztását) akár meg is szüntethetjük, azok – erőhatás hiányában – úgysem mozdulnak el. Ezzel megoldottuk az elektromosan töltött körlap problémáját: azon a töltések éppen úgy oszlanak el, mintha egy egyenletesen töltött gömbfelületről kerültek volna oda merőleges vetítéssel.

A fémkorong felületi töltéssűrűsége is könnyen leolvasható egy olyan „oldalnézeti” rajzról, amelyen a kérdéses felületdarabkák éppen egy-egy vonalnak látszanak (3. ábra). Azok a töltések, amelyek eredetileg ΔA nagyságú területen helyezkedtek el, és a vetítés után az R sugarú korong középpontjától r távolságra

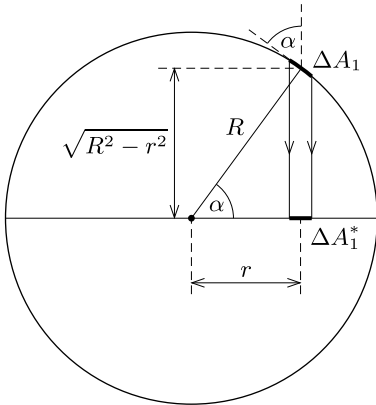
kerülnek, az új helyükön

$$\Delta A^* = \Delta A \sin \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \Delta A$$

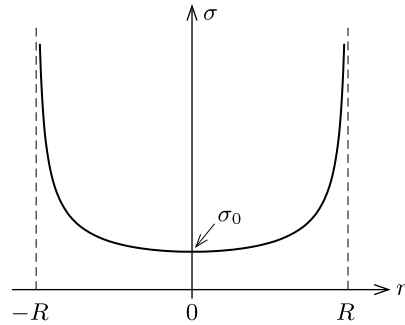
nagyságú területre jutnak. A fémkorong töltéssűrűsége tehát a középpontjától r távolságban

$$\sigma(r) = \frac{\Delta Q}{\Delta A^*} = \sigma_0 \frac{\Delta A}{\Delta A^*} = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

értékű (4. ábra). A töltéssűrűség az előzetes várakozásunknak megfelelően a korong közepétől a széle felé haladva egyre nő, a peremen „végtelen nagygyá” válik. Ezt a végtelent azonban nem szabad komolyan venni, mert amikor r már csak annyival kisebb R -nél, mint a korong (eddig nullának tekintett, de a valóságban természetesen véges) vastagsága, akkor a fenti számolás érvényét veszti.



3. ábra



4. ábra

Vigyázat! A fenti összefüggés a fémkorong egyik (mondjuk felső) oldalának töltéssűrűségét adja meg, hiszen a gömb egyik (felső) felén lévő, összesen $Q/2$ nagyságú töltés „levetítéséből” származik. A korong másik (alsó) felén ugyancsak $Q/2$ töltés helyezkedik el, a felső oldallal azonos eloszlásban.

Megjegyzés. Érdekes kérdés: mi történne az egyenletesen töltött gömb töltéshelyezésével, ha azt a gömb egyik átmérőjére, vagyis egy vonalra vetítenénk? Az erők páronkénti kiejtése látszólag itt is működik, amiből arra következtethetnénk, hogy egy nagyon vékony fémszálon (pl. egy varrótűn) a töltések *egyenletes* vonalmenti töltéssűrűséggel helyezkednek el (hiszen az r sugarú gömbövek $2\pi rh$ felszíne a h magasságukkal arányos). Ez pedig biztosan nem lehet igaz, hiszen pl. a tű hosszának egyik harmadolópontjában a $2/3$ hosszúságú részen lévő töltések nagyobb erőt fejtenek ki, mint az $1/3$ hosszán lévők. Vajon hol a hiba? – ennek kiderítését az Olvasóra bízunk.

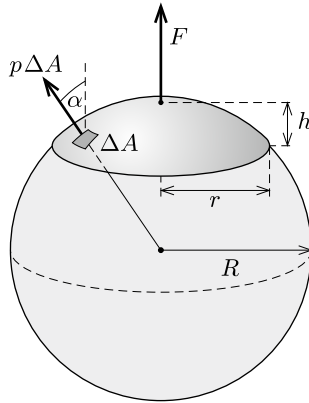
M. 251. A vékony göbmsüveg nem változtatja meg a gömb kapacitását, az továbbra is $C = R/k$ marad, ahol $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ a Coulomb-állandó. Ha a gömböt

(a „végtelenhez” képest) U feszültségre töltjük fel, a rajta lévő össztöltés $Q = CU = UR/k$ lesz.

A göbbsüveg a fémgömb egyenletes töltéeloszlását sem változtatja meg, csupán annyi változást okoz, hogy a göbbsüveg által lefedett felületről az ott lévő töltések az alufólia külső felületére vándorolnak. Az elektromos mező göbbszimmetrikus Coulomb-mező marad, és az elektromos térerősség a fólia közvetlen közelében $E = kQ/R^2 = U/R$ nagyságú, sugárirányban kifelé mutató vektor lesz.

Az alufólián lévő töltések és a gömb többi részén található töltések taszítják egymást, emiatt az alufóliára (a szimmetriából adódóan) függőleges, felfelé irányuló elektrosztatikus erő hat. A süveg akkor emelkedik fel a gömbről, amikor ez a taszítóerő éppen megegyezik az alufólia mg súlyával.

Az alufóliára ható erőt úgy számíthatjuk ki, hogy képzeletben felosztjuk a göbbsüveget kicsiny, egyenként ΔA nagyságú felületdarabkákra, meghatározzuk, hogy mennyi töltés van az egyes felületdarabkákon, és hogy az elektrosztatikus mező mekkora és milyen irányú erőt fejt ki ezekre a kis töltésekre. Az erőhatások vektori összege megadja az alufóliára ható eredő elektromos erőt (lásd az *ábrát*).



A göbbsüveg egységnyi felületére

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \varepsilon_0 \frac{U}{R}$$

töltés jut, ΔA nagyságú felületen tehát $\Delta Q = \sigma \Delta A$ töltés található. Erre a töltésre a gömbön kívül E , a fémen belül nulla, átlagosan tehát $\frac{1}{2}E$ értékű elektromos térerősség

$$p\Delta A = \frac{1}{2}E\Delta Q = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{U^2}{R^2}$$

nagyságú, a felületdarabkákra merőleges irányú erőt fejt ki.

A göbbsüvegre ható (felületegységenként p nagyságú) erők éppen olyanok, mintha a göbbsüveget alulról p nyomású gáz nyomná. Ha a göbbsüveget gondolatban lezárnánk egy r sugarú körlappal, és az analógiát felhasználva ezen a körlapon is figyelembe vennénk a gáztól származó $p \cdot r^2 \pi$ nagyságú nyomóerőt,

akkor az eredő erő nulla lenne (ellenkező esetben a gáz gyorsítani kezdené a zárt felületet). Ezek szerint a gömbsüvegre ható eredő erő nagysága

$$F = p \cdot r^2 \pi = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2 R^2} \cdot r^2 \pi.$$

Megjegyzés. Ezt az eredményt úgy is megkaphatjuk, hogy meggondoljuk, a felületdarabkákra ható erőknek elegendő a függőleges összetevőit összegezni, hiszen az eredő erő – szimmetriamegfontolások szerint – biztosan függőleges:

$$F = \sum p \Delta A \cos \alpha = p \sum \Delta A \cos \alpha,$$

ahol α a felületdarabka érintősíkjának a vízszintessel bezárt szöge. Mivel $\Delta A \cos \alpha$ a felületdarabka vízszintes vetületének területe, ezek összege a gömbsüveg vetületének, vagyis egy r sugarú kör lapnak $r^2 \pi$ területével egyezik meg.

A gömbsüveg felszíne

$$A = 2\pi R h,$$

ahol $h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ a gömbsüveg magassága. Az alufólia tömege

$$m = A d \cdot \varrho = 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2}) d \cdot \varrho$$

módon számolható. A süveg felrepülésének feltétele:

$$F > mg, \quad \text{azaz} \quad \varepsilon_0 \frac{U^2}{2R^2} \cdot r^2 \pi > 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2}) d \cdot \varrho g,$$

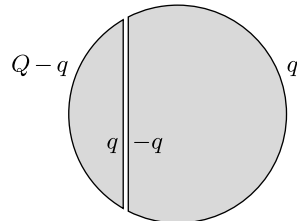
ahonnan a kritikus feszültség:

$$U_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{4R^3 d \varrho g (R - \sqrt{R^2 - r^2})}{\varepsilon_0 r^2}}.$$

Ennél nagyobb feszültségre feltöltött fémgömbről felemelkedik a megadott méretű és sűrűségű, gömbhéj alakú alufólia.

M. 252. A bal oldali gömbszeletre vitt Q töltés a jobb oldali gömbszeleten töltésmegosztást hoz létre. Ha q -val jelöljük a Q töltésnek azt a részét, amely a feltöltött gömbszelet sík felületű részén helyezkedik el, akkor a jobb oldali gömbszelet sík felületére $-q$ töltés vándorol, hiszen a két egymás melletti síkfelület síkkondenzátort képez (1. ábra).

Vajon mekkora lesz q , és hogyan oszlanak el a töltések a gömb külső felületén? A választ pl. az energiaminimum elvéből kaphatjuk meg. Eszerint egyensúlyi helyzetben a töltések úgy helyezkednek el a vezetők felületén, hogy a rendszer teljes elektrosztatikus energiája a lehető legkisebb legyen. Jelen esetben a síkkondenzátor energiája



1. ábra

(a szigetelőréteg hajszálvékony volta miatt) elhanyagolhatóan kicsi, a rendszer energiája tehát lényegében a gömbön kívüli elektrosztatikus mező energiájával egyezik meg. Ez az energia nyilván ugyanolyan töltéseloszlásnál lesz minimális, mint amilyen a Q töltéssel feltöltött eredeti (szétvágatlan) gömb esetében, vagyis az ismert *egyenletes* töltéseloszlásnál.

Más módon is érvelhetünk. Külön-külön mindkét gömbszelet potenciálja állandó, mivel bármilyen alakú is legyen a fém, mindig ekvipotenciális, és belsejében a térerősség mindig zérus. Mennyi most az ólmgömb két szelete közti potenciálkülönbség?

$$\Delta U = Ed,$$

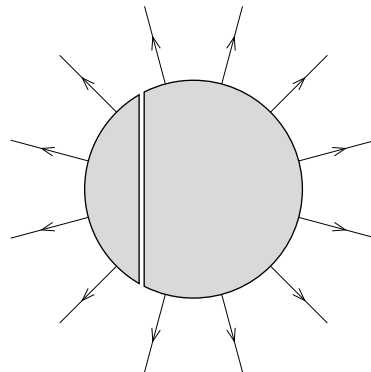
ahol E a két síkfelület közötti térben az elektromos térerősség, d pedig a síkfelületek távolsága. A feladat szövege szerint az elválasztó réteg „hajszálvékony”, vagyis d majdnem zérus, E pedig q -val arányos, tehát nem lehet „nagyon nagy”. Ezek szerint a ΔU potenciálkülönbség is majdnem zérus, azaz elhanyagolhatóan kicsi. Ebben a (jogos) közelítésben a teljes gömbfelület potenciálja ugyanakkora. Egy gömbön az $U =$ állandó feltétel csak egyetlen töltéseloszlás mellett valósulhat meg adott Q esetén. Ez az eloszlás a jól ismert *gömbszimmetrikus* töltéseloszlás, amikor a felületi töltéssűrűség

$$\sigma = \frac{Q}{4R^2\pi} = \text{állandó}.$$

Az egyenletes felületi töltéseloszláshoz tartozó elektromos térerősség a gömbön belül (a „síkkondenzátor” belsejét leszámítva) zérus, a gömbön kívül pedig a jól ismert Coulomb-féle erőter, nagysága a középponttól r távolságban

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r > R).$$

A gömbön kívül kialakuló erővonalkép jó közelítéssel a 2. ábrán látható módon alakul.



2. ábra

M. 253. Amikor a karika a fémgömbtől távol helyezkedik el, a középpontjában az elektromos potenciál

$$U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

értékű, ahol Q a karikán lévő töltés. Ha a karikát a feladatban leírt módon a gömb fölé helyezzük, középpontjában zérussá válik a potenciál értéke, hiszen ekkor a karika középpontja éppen a földelt fémgömb felületére esik. A karikán lévő töltések megosztást hoznak létre a gömbön, emiatt annak felületén ismeretlen töltéseloszlás alakul ki. Ezek a felületi töltések és a karikán lévő töltések együttesen zérus potenciált hoznak létre a karika középpontjában. A gömb (helyről helyre

változó) felületi töltéssűrűségének ismeretében ki tudnánk számolni a gömb össz-töltését, ennek meghatározása azonban nehéz feladat. Szerencsére enélkül is célba érhetünk!

Keressünk a gömb belsejében egy olyan pontot, ahol egyszerűen ki tudjuk számítani a fémgömb felületi töltéseinek potenciáljárulékát a töltéeloszlás pontos ismerete nélkül is. A gömb középpontja éppen ilyen, mert ettől a ponttól a gömb-felület összes darabkája ugyanakkora, r távolságra helyezkedik el. Ha a gömbön felhalmozódó töltés $-q$ (a negatív előjel arra utal, hogy a gömb töltése biztosan ellentétes előjelű a karika töltésével), akkor a felületi töltések potenciálja a gömb középpontjában

$$U_{\text{gömb}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

A gömb középpontja $\sqrt{r^2 + R^2}$ távolságra van a karika minden pontjától, ezért a töltött karika járuléka a gömb középpontjában lévő potenciálhoz

$$U_{\text{karika}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + R^2}},$$

és mivel a földelt fémgömb minden pontja nulla potenciálú, fennáll az

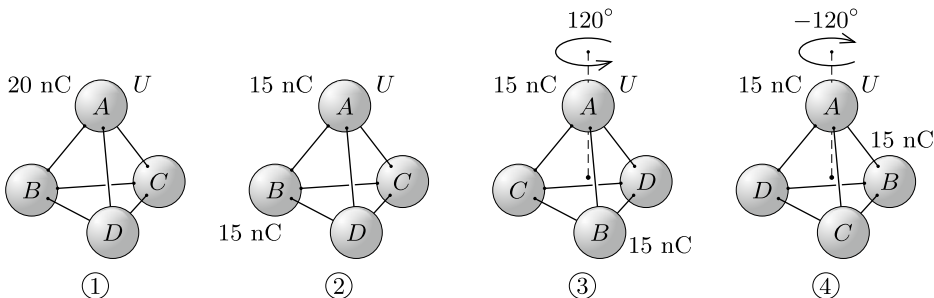
$$U_{\text{gömb}} + U_{\text{karika}} = 0$$

összefüggés. Az eddig felírt egyenletekből a gömbön felhalmozódó töltésre a

$$-q = -4\pi\epsilon_0 U_0 \frac{rR}{\sqrt{r^2 + R^2}}$$

eredmény adódik.

M. 254. A szuperpozíció elve szerint, ha valamilyen elrendezésben a töltések egyensúlyban vannak a fémgömbökön, akkor valamennyi töltést arányosan (mondjuk λ -szorosára) megnövelve ismét egyensúlyi elrendezést kapunk, amelyben a térerősségek és a potenciálkülönbségek mindenhol az eredeti értékek λ -szorosai. Továbbá az is igaz, hogy két egyensúlyi töltéselrendezést összeadva ismét egyensúlyi töltéselrendezést kapunk, és ebben a térerősségek, illetve a potenciálok bármely helyen az ottani eredeti értékek vektori, illetve skalár összegei.



Nevezzük az első (egyetlen töltött gömbnek megfelelő) töltéselrendezést 1-esnek, a másodikat (amikor A és a B gömb töltött) 2-esnek (lásd az *ábrát*)! Forgassuk el a 2-es elrendezést az A gömb középpontját és a tetraéder középpontját összekötő egyenes körül 120° -kal (legyen ez a 3-as elrendezés), illetve -120° -kal (4-es elrendezés)!

Képezzük ezek után az 1-es állapot λ_1 -szeresének, illetve a 2-es és 3-as állapotok λ_2 -szeresének a szuperpozícióját, és válasszuk a szuperpozíció együtthatóit úgy, hogy három egyforma töltésű gömbünk legyen, továbbá az A gömb potenciálja éppen ugyanakkora (U) maradjon, mint az 1-es állapotban volt. Ez a két feltétel akkor teljesül, ha fennáll, hogy

$$20\lambda_1 + 15\lambda_2 + 15\lambda_2 = 15\lambda_2,$$

illetve

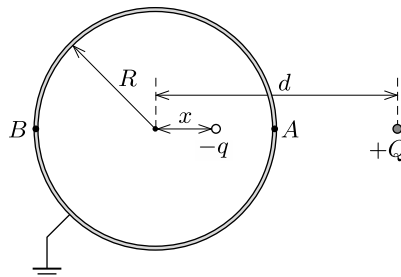
$$\lambda_1 U + \lambda_2 U + \lambda_2 U = U.$$

A fenti egyenletrendszer megoldása: $\lambda_1 = -\frac{3}{5}$, $\lambda_2 = \frac{4}{5}$, és ennek megfelelően a szuperpozícióban a három töltött gömb mindegyike 12 nC töltéssel rendelkezik.

Hasonló módon, az 1-es elrendezés és a 2-es, a 3-as és a 4-es állapot megfelelő szuperpozíciójával elérhető, hogy mind a négy gömb töltése ugyanakkora legyen, az A gömb potenciálja pedig U . A gömbök töltése ilyenkor 10 nC -nak adódik. A részletes számítást az Olvasóra bízunk.

M. 255. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért tegyük fel, hogy a gyöngy töltése pozitív! Eredményeink (a megfelelő előjelek megváltoztatásával) természetesen negatív töltésű gyöngyre is érvényesek maradnak.

a) Ha a feladatban szereplő fémgömbhéjat földeljük, akkor nulla potenciálú lesz. A gömbön kívül, a középponttól $d > R$ távolságban elhelyezett $+Q$ ponttöltés hatására a gömbhéj *külső* felületén inhomogén töltéeloszlás jön létre. A gömbhéj belsejében (beleértve a héj falát is) nem lesz elektromos tér (Faraday-kalitka). A gömbön kívül kialakuló elektromos mezőt a felületi töltések és a $+Q$ töltésű gyöngyöcske együttesen hozza létre. A gömbi tükörtöltések módszere szerint (lásd az *útmutatást*) a gömbhéj felületén felhalmozódó töltések hatása helyettesíthető egyetlen, alkalmasan választott helyzetű és nagyságú, $-q$ ponttöltés hatásával.



1. ábra

Használjuk az 1. ábra jelöléseit, és legyen a $-q$ tükörtöltés és a gömbhéj középpontjának távolsága x . A földelés miatt a gömbhéj A és B pontjaiban is nulla a potenciál értéke, ezért

$$k \frac{Q}{d-R} - k \frac{q}{R-x} = 0, \quad \text{valamint} \quad k \frac{Q}{d+R} - k \frac{q}{R+x} = 0.$$

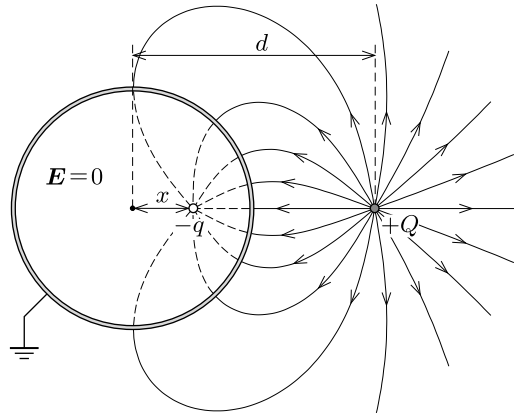
Ezekből az egyenletekből a tükörtöltés nagyságára és az x távolságra a következő megoldást kapjuk:

$$-q = -\frac{R}{d}Q, \quad x = \frac{R^2}{d}.$$

A gömbhéjon kívül elhelyezkedő gyöngyre ható erő a $+Q$ töltés és a $-q$ gömbi tükörtöltés közötti Coulomb-erővel egyenlő (hiszen az erő nem függ attól, hogy a gyöngy helyén az elektromos teret a gömbhéj felületi töltései vagy pedig egy képzeletbeli tükörtöltés hozza-e létre). A földelt gömbhéj esetében tehát a gyöngyre ható erőt a következőképp írhatjuk fel:

$$F_a = -k \frac{Qq}{(d-x)^2} = -kQ^2 \frac{Rd}{(d^2 - R^2)^2}.$$

Látszik, hogy az erő mindig vonzó jellegű, és $d \rightarrow R$ esetén végtelenhez tart. A gömbön kívüli mező erővonalait a 2. ábra mutatja.



2. ábra

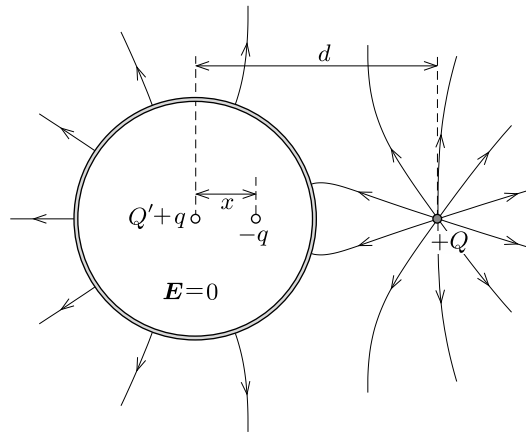
b) Ha a gömbhéj töltetlen, akkor potenciálja nem lesz több zérus, viszont felülete továbbra is ekvipotenciális marad. Feladatunk tehát az, hogy a földelt esethez képest a gömbhéj minden felületi pontjában azonos mértékben növeljük meg a potenciált úgy, hogy a gömb teljes töltése nulla legyen. Ez a követelmény könnyen teljesíthető, ha (a fentebb kiszámított $-q$ gömbi tükörtöltés mellé) a gömb középpontjába egy másik, $+q$ tükörtöltést képzelünk. A gömb belsejében továbbra sem lesz elektromos tér, a gömbön kívül pedig olyan mező alakul ki, mintha azt a $+Q$ töltésű gyöngy és a két ($-q$, illetve $+q$ nagyságú) tükörtöltés együttesen hozta volna létre.

A gyöngyöcskére ható erőt tehát úgy kaphatjuk meg, hogy az $a)$ pontban kiszámolt erőhöz hozzáadjuk a gömb középpontjába helyezett $+q$ töltés taszítóerejét is:

$$F_b = F_a + k \frac{Qq}{d^2} = -kQ^2 \frac{R}{d^3} \left[\frac{d^4}{(d^2 - R^2)^2} - 1 \right].$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés $d > R$ miatt mindig nagyobb, mint nulla, ezért az erő a töltetlen gömb esetében is mindig vonzó jellegű.

c) A $b)$ esethez hasonlóan boldogulhatunk akkor is, ha a gömbünknek Q' töltése van (3. ábra). Ekkor a gömb középpontjába $Q' + q$ nagyságú töltést kell képzelnünk, így lesz a gömbhéj külső felületén található összes (valódi) töltés Q' nagyságú. A gömbön belül az elektromos tér továbbra is zérus, a gömbön kívül pedig olyan lesz a mező szerkezete, mintha azt a $+Q$ töltésű gyöngy, a $-q$ tükörtöltés és a gömb középpontjába helyezett $Q' + q$ töltés együtt hozta volna létre.



3. ábra

Ez esetben a gyöngyre ható erő:

$$F_c = F_b + k \frac{QQ'}{d^2} = -kQ^2 \frac{R}{d^3} \left[\frac{d^4}{(d^2 - R^2)^2} - 1 - \frac{Q'}{Q} \frac{d}{R} \right].$$

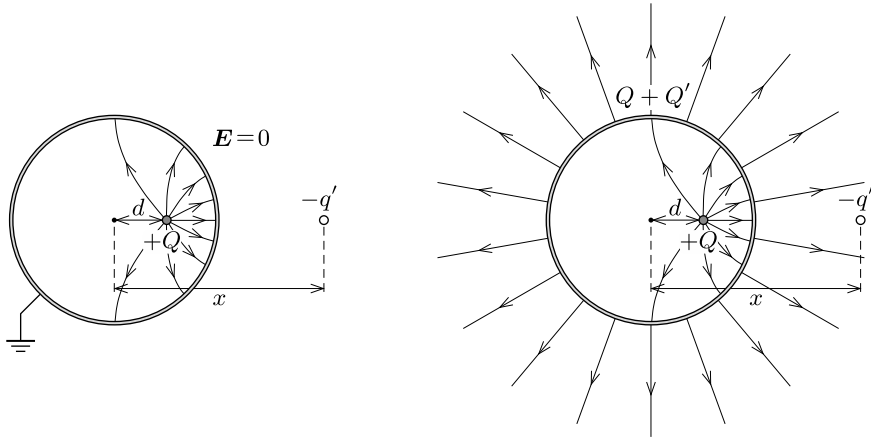
Érdekes, hogy F_c még azonos előjelű Q és Q' esetén is lehet negatív, tehát *vonzóerő*, amennyiben a gyöngy elegendően közel van a gömb felületéhez.

Hátravan még annak megválaszolása, hogyan módosulnak az $a)$, $b)$ és $c)$ pontokban kapott eredményeink, ha a gyöngyöcske nem a gömbhéjon kívül, hanem annak belsejében helyezkedik el. Ekkor a tükörtöltés a gömbön kívülre kerül, töltésének nagyságát és helyzetét most is a

$$-q' = -\frac{R}{d}Q, \quad x = \frac{R^2}{d}$$

összefüggések adják meg ($d < R$).

A földelt esetben a gömbhéjon belül lesz elektromos tér, mégpedig éppen olyan, amelyet a gyöngy és a $-q'$ tükörtöltés együttesen hozna létre. A $+Q$ töltésű gyöngyből kiinduló erővonalak a gömbhéj *belső* felületén felhalmozódó, összesen $-Q$ töltésű felületi töltéseken végződnek, hiszen csak így érhető el, hogy a gömbhéj falában továbbra is zérus legyen a térerősség. A gömbhéjon kívül nem lesz elektromos tér, a belső felületi töltések a gyöngyöcske terét teljesen leárnyékolják (ellenkező esetben a gömbhéj potenciálja nem lenne zérus). A földelt eset elektromos mezője a 4. ábra bal oldalán látható.



4. ábra

A gömbhéj belső felületén kialakuló töltéeloszlás független attól, hogy a gömbhéjat földeltük-e, vagy sem, ezért a gömbhéjon belül a töltetlen és a töltött esetben is ugyanolyan elektromos tér alakul ki, mint a földelt gömb esetén. Így a gyöngyre ható erő is ugyanakkora lesz mindhárom esetben:

$$F = -k \frac{Qq'}{(x-d)^2} = -kQ^2 \frac{Rd}{(R^2-d^2)^2}.$$

A gömbhéjon kívüli mező viszont már eltérő lesz a három esetben. Ha a gömbhéj töltetlen, akkor a *külső* felületén $+Q$ töltés halmozódik fel, egyenletes felületi töltéeloszlással. (Ennek magyarázata, hogy a *külső* felületen lévő töltések nem érzik a gömb belsejében lévő gyöngy hatását, mert a *belső* felületi töltések tökéletesen leárnyékolják azt.) A külső elektromos tér töltetlen gömb esetén tehát olyan lesz, mintha azt egy, a gömb középpontjába helyezett $+Q$ töltés hozta volna létre. Ha a gömbhéj Q' töltéssel rendelkezik, akkor a *külső* felületére $Q'+Q$ töltés szorul ki, a gömbön kívüli tér pedig egy $Q'+Q$ nagyságú ponttöltés terével egyezik meg, ahogy azt a 4. ábra jobb oldala mutatja.

Megjegyzés. A fémgömbhéj belső és külső felületén kialakuló töltéeloszlást Gauss törvénye segítségével számíthatjuk ki. A felületi töltéssűrűség a valódi töltés és a tükörtöltés terének szuperpozíciójaként előállítható *tényleges* elektromos térerősséggel arányos ($\sigma = \epsilon_0 E$).

M. 256. Az *előző feladat* megoldásában láttuk, hogyan írható le egy töltetlen fémgömbhéj és egy ponttöltés kölcsönhatása. Mivel a vezető testek belsejében nincs elektrosztatikus tér, ezért az ottani eredmények tömör fémgömbre is érvényesek maradnak.

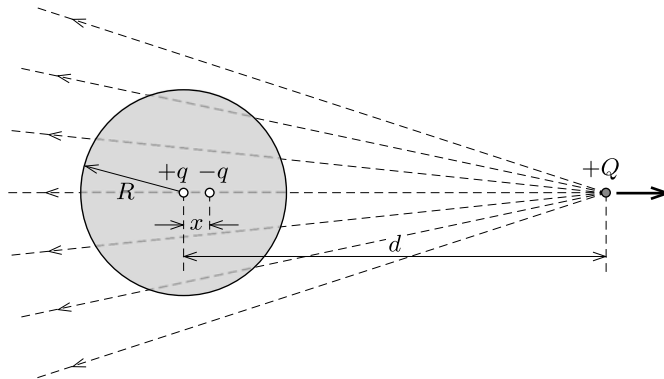
a) A homogén térbe helyezett fémgömb helyett tekintsük először azt az esetet, melyben a töltetlen gömbtől d távolságra egy $+Q$ ponttöltés helyezkedik el! A gömbön kívüli térrészben az elektromos mező olyan, mintha azt a $+Q$ töltés és a gömb belsejében elhelyezkedő két tükrőtöltés együttesen hozná létre. A tükrőtöltések ellentétes előjelűek, nagyságuk

$$(1) \quad \pm q = \pm \frac{R}{d} Q.$$

A pozitív tükrőtöltés a gömb középpontjában, a negatív pedig tőle $x = R^2/d$ távolságra található. Ha a fémgömb nem lenne jelen, akkor a $+Q$ töltés a gömb középpontjának helyén

$$(2) \quad E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2}$$

nagyságú térerősséget hozna létre (1. ábra).



1. ábra

Távolítsuk most képzeletben a valódi ponttöltést a fémgömbtől úgy, hogy az általa keltett térerősség a gömb helyén a fenti, állandó E_0 érték maradjon! Ennek eléréséhez a d távolsággal együtt a Q töltés nagyságát is növelni kell, méghozzá a (2) egyenletről következő

$$Q(d) = 4\pi\epsilon_0 E_0 d^2$$

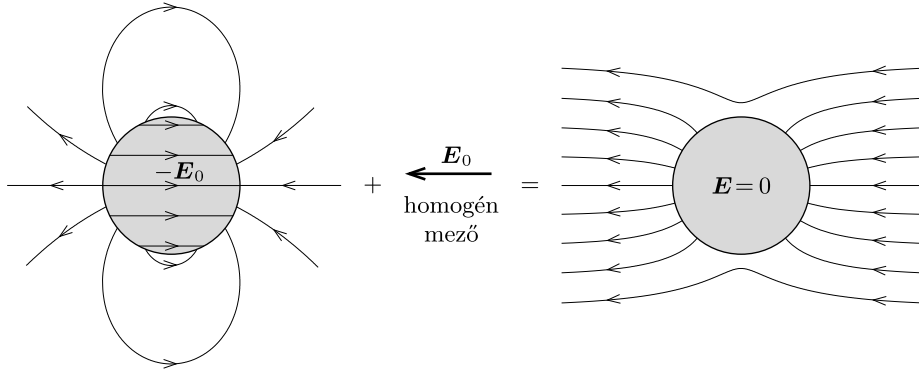
összefüggés szerint. A d távolság növelésével a valódi ponttöltés által a gömb helyén létrehozott elektromos tér szerkezete egyre inkább közelít a homogén térhez. A távolítás során a tükrőtöltések abszolút értéke az (1) kifejezésnek megfelelően növekszik:

$$(3) \quad q(d) = 4\pi\epsilon_0 E_0 R d,$$

távolságuk egyre kisebb lesz, viszont a $q \cdot x$ szorzat (a két tükörtöltés elektromos dipólmomentuma) állandó marad:

$$(4) \quad p = q(d) \cdot x = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3.$$

A $d \rightarrow \infty$ határesetben tehát a gömbön kívüli elektromos mező egy, a gömb középpontjába helyezett, a (4) összefüggéssel megadott erősségű dipólus és az E_0 térerősségű homogén tér szuperpozíciójaként állítható elő. A fémgömb belsejében természetesen továbbra is zérus lesz a térerősség, tehát a fémgömb felületén felhalmozódó töltések önmagukban $-E_0$ elektromos teret hoznának létre a gömb belsejében (2. ábra).



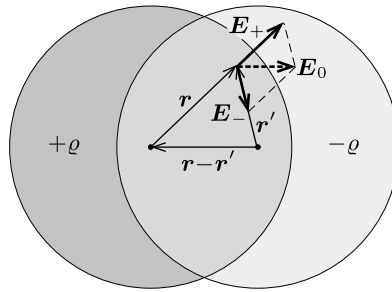
2. ábra

b) Olyan felületi töltéseloszlást kell találnunk, melynek elektromos tere éppen a 2. ábra első rajzán látható: kívül dipóltér, belül pedig homogén, E_0 térerősségű mező. Térjünk vissza arra az esetre, amikor a töltetlen fémgömböt nem homogén elektromos térbe, hanem a $+Q$ ponttöltés közelébe helyezzük! A fémgömb felületi töltéseinek hatását a gömbön kívül eddig a gömb belsejébe képzelte $+q$ és $-q$ nagyságú, pontszerű tükörtöltésekkel írtuk le (1. ábra). Módszerünk akkor is működik, ha a tükörtöltéseket nem pontszerűnek, hanem $(+q$ és $-q$ össztöltésű) kiterjedt, homogén töltéseloszlású gömböknek képzeljük (még az sem okoz problémát, ha a két gömb között van átfedés).

Helyettesítsük ezért a két tükörtöltést egy-egy $+q$ és $-q$ össztöltésű, R sugarú, homogén térfogati töltéseloszlású gömbbel, melyek középpontjainak távolsága x . A gömbök töltéssűrűsége a töltés és a térfogat hányadosa:

$$(5) \quad \rho = \frac{q}{(4\pi/3)R^3} = \frac{3\epsilon_0 E_0 d}{R^2} = \frac{3\epsilon_0 E_0}{x},$$

ahol felhasználtuk a tükörtöltések nagyságára vonatkozó (3) összefüggést. A szuperpozíció miatt a „felfújtt” töltésgömbök tere a gömbökön kívüli tartományban biztosan olyan lesz, mint a pontszerű tükörtöltések tere. De mi a helyzet abban a térrészben, ahol a töltésgömbök átfednek? Itt a töltéssűrűség nulla, elektromos tér viszont van, mégpedig (ahogy azt a 47. feladatból már sejtethjük) homogén! Ennek belátásához tekintsük a 3. ábrát!



3. ábra

Ha csak a $+\rho$ töltéssűrűségű gömb lenne jelen, akkor annak belsejében a térerősség (a középpontból induló \mathbf{r} vektorral jellemzett helyen) Gauss törvénye segítségével számolható:

$$\mathbf{E}_+ 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3} \rho \frac{\mathbf{r}}{r},$$

ebből

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}.$$

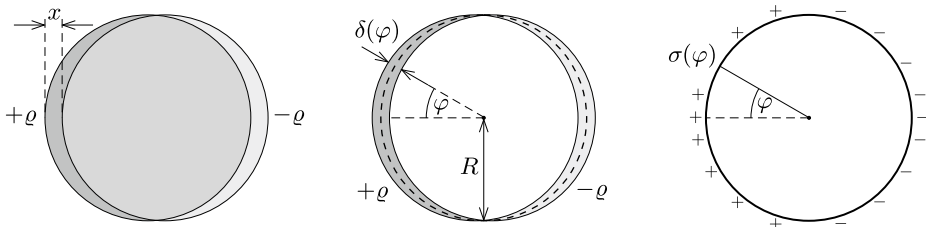
Ugyanígy, ha csak a negatív töltésű gömb lenne jelen, akkor belsejében a térerősség

$$\mathbf{E}_- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}'$$

lenne, ahol \mathbf{r}' a gömb középpontjából az adott helyre mutató vektor. Mivel mindkét gömb jelen van, így az átfedési tartományban az eredő térerősség

$$\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = E_0 \frac{d}{R^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mathbf{E}_0$$

lesz, ahol felhasználtuk, hogy $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = x = R^2/d$. Az átfedés térrészében tehát az elektromos mező valóban homogén, mégpedig szerencsére éppen E_0 térerősségű.



4. ábra

Ha a $+Q$ töltés gömbtől való távolításával – az a) pontban leírt módon – közelítünk a homogén térbe helyezett fémgömb esetéhez, a „felfújt” töltésgömbök középpontjainak távolsága egyre csökken, térfogati töltéssűrűségük pedig az (5) kifejezésnek megfelelően növekszik (végtelenhez tart), a töltésréteg vastagsága pedig egyre csökken (nullához tart). Határesetben a térfogati töltéseloszlás felületi

töltéeloszlásba megy át. Az egységnyi felületre jutó töltést a térfogati töltéssűrűség és a gömbök át nem fedő részei δ vastagságának szorzataként számíthatjuk. Így a homogén térbe helyezett fémgömb határesetében a felületi töltéssűrűség a külső elektromos térrel φ szöget bezáró irányban:

$$\sigma(\varphi) = \rho\delta(\varphi) = \rho x \cos \varphi = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \varphi.$$

Megjegyzések. 1. A felületi töltéssűrűséget a Gauss-törvényből következő $\sigma = \varepsilon_0 E$ összefüggés segítségével is meg lehet határozni, ahol E az elektromos térerősség (előjeles) nagysága a fémgömbön kívül, a felület közvetlen közelében.

2. A leirtakhoz hasonló módon határozhatjuk meg egy homogén elektromos térbe helyezett, a térerősségre merőleges tengelyű, hosszú, semleges fémhenger elektromos terét és töltéeloszlását is.



Magnetosztatika (időben állandó mágneses mező)

M. 257. A szükséges munkavégzés mindkét esetben a mágneses kölcsönhatási energia növelésére fordítódik. Képzeljük el a következő gondolat kísérletet: a jobb oldali mágnezt a mágneseket összekötő szakasz mentén elvisszük jó messzire (eközben 1 egységnyi munkát végzünk, hiszen a két mágnes vonzását le kell küzdenünk), ott 180° -kal megfordítjuk (ehhez nem kell munkát végeznünk, mert a mágnesek kölcsönhatása a nagy távolság miatt elhanyagolható), végül pedig a megfordított mágnezt visszavisszük az eredeti helyére (a taszítás leküzdéséhez a szimmetria miatt szintén 1 egység munkát kell végeznünk). Összesen tehát a folyamatban 2 egység munkát végzünk. A magnetosztatikus mező konzervatív, azaz a mágneses energia megváltozása csak a kezdő- és végállapottól függ, attól nem, hogy milyen úton jutottunk el a kezdeti helyzetből a végsőbe. Ezért ugyancsak 2 egységnyi munka szükséges ahhoz, hogy a mágnezt az eredeti helyén 180° -kal elforgassuk.

A jobb oldali mágnesrúd eredeti helyén való megfordításához kell tehát több munkavégzés, mégpedig éppen *kétszer* akkora, mint ami a mágnesek nagy távolságra történő szét húzásához szükséges.

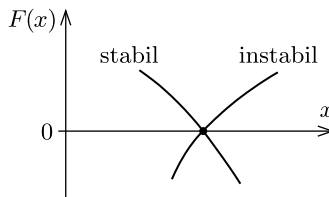
M. 258. a) Mozgassuk az A mágnezt, miközben a B mágnes $d+s$ távolsága az A mágnes eredeti („háborítatlan”) pozíciójától maradjon állandó. Az A mágnesre ható vízszintes erő (amit növekvő x irányban mérünk, azaz a feladathoz tartozó ábrán balra) így írható:

$$(1) \quad F(x) = -\frac{K}{x^n} + mg \frac{(d+s-x)}{\ell}.$$

Az egyensúly feltétele:

$$(2) \quad F(x)|_{x=d} = 0.$$

A feladatban leírt kísérlet során az A jelű mágnes természetesen nem csak az $x = d$ helyzetben, hanem minden $x > d$ távolság esetén is egyensúlyban volt. A mágnesek közelítése során azonban az A mágnes egyensúlyának jellege éppen az $x = d$ távolságnál változott meg stabilról instabilra. Az egyensúlyi állapot stabilitása az $F(x)$ függvény viselkedésétől függ az $x = d$ hely közelében. A függvény lehet monoton módon növekvő vagy csökkenő, ahogy ez az 1. ábrán látható.



1. ábra

Stabil egyensúly esetén az erőfüggvény deriváltjának negatívnak kell lennie, ugyanis az egyensúlyi helyzetéből kicsit kitértett mágnesre ekkor hat visszatérítő irányú erő. Instabil esetben a derivált pozitív, míg a két esetet elválasztó határesetben a derivált nulla, azaz

$$(3) \quad F'(x)|_{x=d} = 0.$$

Az $F(x)$ erő (1) kifejezését felhasználva a (3) feltétel így írható:

$$(4) \quad \frac{nK}{d^{n+1}} - \frac{mg}{\ell} = 0.$$

A (2) feltétel pedig egyensúlyban így alakul:

$$(5) \quad -\frac{K}{d^n} + \frac{mg}{\ell}s = 0.$$

A (4) és (5) egyenletekből a hatványkitevőre és a K állandó értékére a következő eredményeket kapjuk:

$$(6) \quad n = \frac{d}{s} = 4 \quad \text{és} \quad K = \frac{s}{\ell}mgd^4.$$

Megjegyzés. A 260. feladatban látni fogjuk, hogy a mágnesek közötti erőhatás (a mágneses dipól-dipól kölcsönhatás egyik megnyilvánulása) valóban a távolság negyedik hatványával fordítottan arányos.

b) A 2. ábrán látható függőleges üvegcsőben az A mágnesre ható függőleges erő (a felfelé mutató irányt választva pozitívnak)

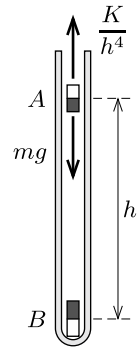
$$F_{\text{függ}}(x) = +\frac{K}{x^4} - mg.$$

Egyensúlyi lebegtetés esetén a mágnesek közötti h távolságra a függőleges erő nulla:

$$F_{\text{függ}}(x)|_{x=h} = 0.$$

A (6) eredményünket felhasználva a h távolságot kiszámíthatjuk:

$$h = \left(\frac{K}{mg}\right)^{1/4} = d \left(\frac{s}{\ell}\right)^{1/4} = 4 \text{ cm} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{1/4} \approx 1,3 \text{ cm}.$$

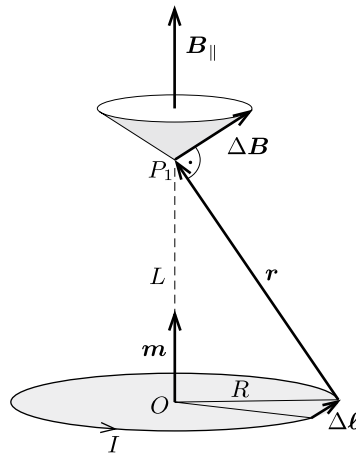


2. ábra

M. 259. a) A Biot–Savart-törvény szerint egy I erősségű árammal átjárt kicsiny, $\Delta\ell$ vektorral jellemezhető vezetékdarabka a hozzá képest \mathbf{r} vektorral megadott helyen

$$\Delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\Delta\ell \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

mágneses indukciót hoz létre. A teljes (zárt) vezető mágneses terét egyszerű (szimmetrikus) esetekben ezen $\Delta\mathbf{B}$ járulékok összegzésével, általános esetben pedig integrálásával kaphatjuk meg.



1. ábra

A körvezető szimmetriatengelyén, a tőle L távolságban lévő P_1 pontban az eredő mágneses indukció a szimmetria miatt tengelyirányú (tehát a körvezető \mathbf{m} dipólmomentumával párhuzamos), így elegendő a $\Delta \mathbf{B}$ járulékok ilyen irányú komponenseit kiszámítani, majd ezeket összegezni (lásd az 1. ábrát). Az ábra jelöléseivel:

$$B_{\parallel} = \sum \frac{\mu_0 I \Delta \ell R}{4\pi r^2} \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \sum \Delta \ell = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underbrace{2}_{|\mathbf{m}|} (IR^2 \pi).$$

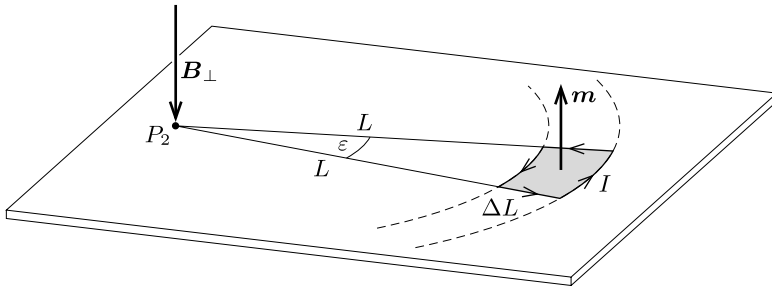
Az utolsó kifejezés zárójeles része éppen a köráram \mathbf{m} mágneses dipólmomentumának nagysága, így a mágneses indukcióvektor értéke a P_1 pontban (azaz a Gauss-féle első főhelyzetben)

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{m}}{(R^2 + L^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{L^3},$$

nagysága pedig $|\mathbf{m}| = IR^2\pi$ felhasználásával:

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 IR^2}{2L^3}.$$

b) Nehezebb feladat a körvezető síkjában mérhető \mathbf{B}_{\perp} indukcióvektor meghatározása (a merőlegességet kifejező index arra utal, hogy a mágneses momentum irányára merőleges irányban vizsgáljuk a mágneses indukciót). Ehhez helyettesítsük a körvezetőt egy vele azonos területű (és dipólnyomatékú) körgyűrű-cikkkel a 2. ábrán látható módon, és számoljuk annak mágneses terét a körcikk P_2 középpontjában! Ebben a helyettesítő vezetőkeretben az I erősségű áram az L és $L + \Delta L$ sugarú körívek ($\Delta L \ll L$), valamint egymással kicsiny ε szöget bezáró egyenes szakaszok mentén folyik.



2. ábra

Az ε szög kicsiny volta miatt a vezetőkeret területe jó közelítéssel $L\varepsilon\Delta L$, így mágneses momentuma

$$|\mathbf{m}| = IL\varepsilon\Delta L.$$

A vezetőkeretet határoló körívek P_2 középpontjában a mágneses indukció merőleges az áramvezető síkjára, iránya \mathbf{m} -mel ellentétes, nagyságához pedig csak a két körív mentén folyó áramok adnak járulékot:

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 I\varepsilon L}{4\pi L^2} - \frac{\mu_0 I\varepsilon(L + \Delta L)}{4\pi (L + \Delta L)^2} \approx \frac{\mu_0}{4\pi L^3} \underbrace{(IL\varepsilon\Delta L)}_{|\mathbf{m}|}.$$

Az utolsó zárójeles kifejezés éppen a mágneses dipólmomentum nagyságával egyezik meg, amely ugyanakkora az eredeti körvezető és a helyettesítő áramvezető esetén. A mágneses indukcióvektor értéke tehát a Gauss-féle második főhelyzetben (az irányokat is figyelembe véve):

$$\mathbf{B}_{\perp} = -\frac{\mu_0 \mathbf{m}}{4\pi L^3}$$

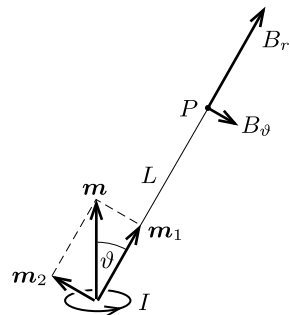
alakban adható meg, amelynek nagysága a köráram adataival kifejezve

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 IR^2}{4L^3},$$

tehát éppen *feleakkora*, mint az első főhelyzetben.

Megjegyzés. A Gauss-féle főhelyzetekhez tartozó mágneses indukciók ismeretében tetszőleges helyen ki tudjuk számítani a köráram (vagy általánosabban: egy dipól) mágneses terét. Ha például a dipól tengelyével ϑ szöget bezáró irányban, a dipóltól L távolságra lévő P pontban keressük a \mathbf{B} indukcióvektort, akkor érdemes \mathbf{m} -et a 3. ábrán látható két vektor összegére bontani; ezek nagysága: $m_1 = m \cos \vartheta$ és $m_2 = m \sin \vartheta$. A P pont a felbontásban szereplő dipóloknak első, illetve második Gauss-féle főhelyzete, tehát a mágneses indukció „radiális” és „tangenciális” komponense:

$$B_r = \frac{\mu_0 m \cos \vartheta}{2\pi L^3}, \quad \text{illetve} \quad B_{\vartheta} = \frac{\mu_0 m \sin \vartheta}{4\pi L^3}.$$



3. ábra

Ennek az eredménynek elektromos megfelelőjét használtuk fel a 221. feladatban az elektromos dipól erőterében mozgó töltött gyöngyszem mozgásegyenletének felírásakor.

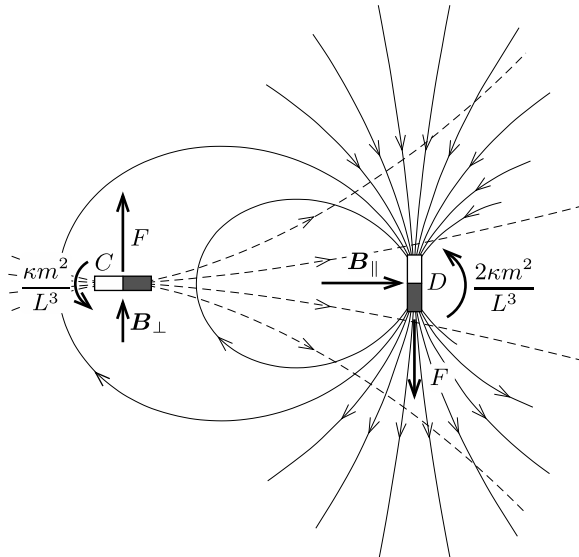
M. 260. a) Egy \mathbf{m} dipólnyomatékú, kisméretű mágnesrúd („dipól”) erőtere a mágnestól távol ugyanolyan, mint egy $R^2\pi$ területű, I erősségű árammal átjárt kicsiny, sík körvezető mágneses tere, amennyiben fennáll, hogy $IR^2\pi = |\mathbf{m}|$, ezért alkalmazhatjuk az *előző feladat* megoldásában kapott eredményeket. Ezek szerint az \mathbf{m} dipólnyomatékú kis mágnes tengelyén (Gauss-féle I. főhelyzet) a mágneses indukcióvektor értéke

$$B_{\parallel} = 2\kappa \frac{\mathbf{m}}{L^3},$$

a mágnesre illeszkedő, annak tengelyére merőleges síkban (Gauss-féle II. főhelyzet) pedig

$$B_{\perp} = -\kappa \frac{\mathbf{m}}{L^3},$$

ahol bevezettük a $\kappa = \mu_0/(4\pi)$ rövidítést.



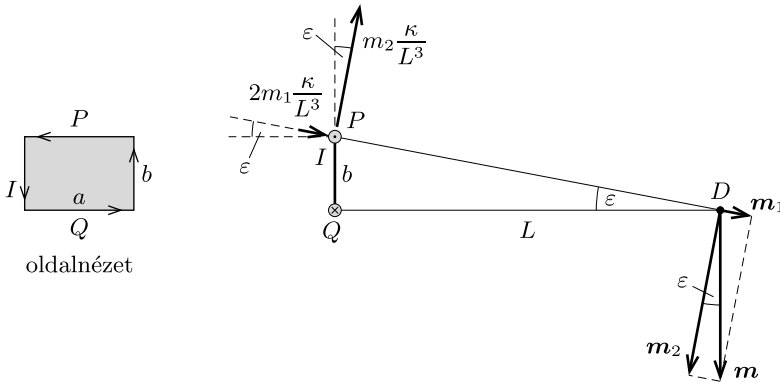
1. ábra

Ismert, hogy \mathbf{B} indukciójú mágneses mezőben az \mathbf{m} dipólmomentumú mágnesre $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ forgatónyomaték hat. A C mágnes a D mágneshez képest éppen a Gauss-féle II. főhelyzetben helyezkedik el, ezért C -re $\kappa m^2/L^3$ nagyságú és az óramutató járásával ellenkező forgásirányú forgatónyomaték hat (1. ábra). A D mágnes viszont a C mágnes I. főhelyzetében található, ezért a C mágnes által a D -re kifejtett forgatónyomaték nagysága $2\kappa m^2/L^3$, iránya pedig szintén az óramutató járásával ellentétes.

b) Mivel a mágnesek által egymásra kifejttet forgatónyomatékok eredője nem nulla, könnyen azt gondolhatnánk, hogy a súlypontjában felfüggesztett rúd forgásba jön. Ekkor azonban perpetuum mobilét készíthetnénk, ami ellentmondana az energiamegmaradás törvényének.

A paradoxon feloldása az, hogy a mágnesek nemcsak forgatónyomatékot fejtenek ki egymásra, hanem *erőt* is, hiszen egymás inhomogén terében helyezkednek el. Megmutatjuk, hogy pl. a D jelű mágnes által a C mágnesre kifejttet erő $F = 3\kappa m^2/L^4$ nagyságú, továbbá az iránya nem esik egybe a mágneseket összekötő egyenessel, hanem *merőleges* arra, \mathbf{B}_\perp irányával megegyező. Ugyanekkora, de ellentétes irányú erő hat a D mágnesre. A mágnesekre ható erők erőpárt alkotnak, aminek $FL = 3\kappa m^2/L^3$ forgatónyomatéka van. Ez a forgatónyomaték olyan nagyságú és olyan irányú, hogy éppen kioltja az a) részben kiszámolt forgatónyomatékok hatását. Így a rendszert felfüggesztve semmi meglepő dolog nem történik, a mágneseket tartó szerkezet – összhangban a szimmetrián alapuló megfontolásokkal és az energiamegmaradással – *nem* jön forgásba.

A mágnesek között ható erő kiszámításához helyettesítsük a C mágnezt egy I árammal átjárt, a és b oldalalú, kicsiny, téglalap alakú vezetőkerettel. Az áramvezető mágneses nyomatéka éppen akkora, mint a rúd mágnesé, ha teljesül, hogy $abI = m$. Helyezzük el ezt a vezetőkeretet a 2. ábrán látható módon, és számítsuk ki, mekkora erőt fejt ki az egyes (áramjárta) oldalélekre a másik (D) mágnes erőtere. Az ábra bal oldalán látható oldalnézetben függőlegesen futó élekre ható eredő erő nulla, így elegendő a felső (P) és az alsó (Q) oldalélel foglalkoznunk. Ezek az a hosszúságú, egymástól b távolságra lévő élek a 2. ábra jobb oldali részén egy-egy pontnak látszanak.



2. ábra

A P és Q élek mentén (az ábra síkjára merőleges irányban) folyó áramokra az ott észlelhető mágneses mező erőt fejt ki. (A 2. ábrán a P pont mellett látható nyilak nem az erőt, hanem a mágneses indukciót jelzik.) A mágneses indukció „függőleges” (PQ irányú) komponense az áramokra „vízszintes” (QD irányú) erőt fejt ki. Ezen (egyforma nagyságú, de ellentétes irányú) erők eredője nulla, a forgatónyomatékukat pedig – a feladat a) részében – már figyelembe vettük.

A köráramra ható eredő erő a mágneses indukció vízszintes (a QD szakasszal párhuzamos) komponensétől származik; számítsuk ki tehát most ezeket a komponenseket.

A Q él mentén a mágneses indukció $m\kappa/L^3$ nagyságú (hiszen ez az él a D mágnes II. főhelyzetében található), függőlegesen felfelé mutat, a vízszintes komponense tehát *nulla*. A P élnél a mágneses indukció kiszámítása már egy kicsit bonyolultabb, hiszen ez az él nem esik egybe a Gauss-féle második főhelyzettel, attól kicsiny $\varepsilon = \arctg(b/L)$ szöggel eltér. Bontsuk fel emiatt a D mágnes dipól-nyomatékát az $m \sin \varepsilon$ nagyságú, DP irányú \mathbf{m}_1 , illetve az erre merőleges, $m \cos \varepsilon$ nagyságú \mathbf{m}_2 vektorok összegére. Ezekhez képest a P él már a Gauss-féle főhelyzetekbe kerül, és az eredő mágneses tér két tag összegéként kiszámítható. Az eredő mágneses indukció QD irányú komponense

$$B_{QD} = \frac{2\kappa}{L^3} m_1 \cos \varepsilon + \frac{\kappa}{L^3} m_2 \sin \varepsilon = \frac{3\kappa m}{L^3} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \approx \frac{3\kappa m}{L^3} \frac{b}{L}$$

nagyságú, amely az áramjárta, a hosszúságú oldaléle

$$F = \frac{3\kappa m}{L^3} \frac{b}{L} I a = \frac{3\kappa m^2}{L^4}$$

nagyságú Lorentz-erőt fejt ki (amint az 1. ábrán látható). Ez tehát a C mágnesre ható *eredő* erő, amely az ábra síkjában, a mágneseket összekötő egyenesre merőlegesen, QP irányban hat. Ennek az erőnek és a D mágnesre ható ellenerejének (mint erőpárnak) a forgatónyomatéka $FL = 3\kappa m^2/L^3$ nagyságú és az óramutató járásával megegyező irányú, így valóban egyensúlyt tart a két mágnes egymásra kifejtett forgatónyomatékának összegével.

Megjegyzés. A feladatban szereplő rendszer érdekes példát mutat olyan erő-ellenerő párra, amelyben az erők egyforma nagyságúak, párhuzamosak, de nem egybeeső egyenesek mentén hatnak, tehát *nem centrálisak*.

M. 261. I. megoldás. Az elrendezésben a C és a D pontok teljesen szimmetrikus szerepet töltenek be, emiatt ekvipotenciálisak, közöttük nem folyik áram. Az ACB és ADB ágak ellenállása kétszerese az AB ág ellenállásának, így a megfelelő áramerősségek:

$$I_{AC} = I_{CB} = I_{AD} = I_{DB} = I/4, \quad I_{AB} = I/2.$$

A Biot–Savart-törvény szerint egy véges hosszúságú egyenes vezetődarab járuléka az általa létrehozott mágneses mezőhöz arányos a vezetékben folyó árammal, és a mező iránya valamely O pontban merőleges arra a síkra, amely a vezetőre és az O pontra illeszkedik. Így például az AC szakasz járuléka az O pontbeli mágneses indukcióvektorhoz

$$\mathbf{B}_{AC} = kI \cdot \overrightarrow{BD},$$

ahol k (a tetraéder méretétől is függő) pozitív szám. (Felhasználtuk, hogy a szabályos tetraéder szemközti élei merőlegesek egymásra, így a \overrightarrow{BD} vektor éppen

a Biot–Savart-törvénynek és a jobbkéz-szabálynak megfelelő irányú.) A többi él járuléka is hasonlóan számolható, és mivel a két hosszú egyenes vezető a középpontban nem hoz létre mágneses teret, a teljes mágneses indukció az O pontban:

$$\mathbf{B} = kI \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{DC} \right).$$

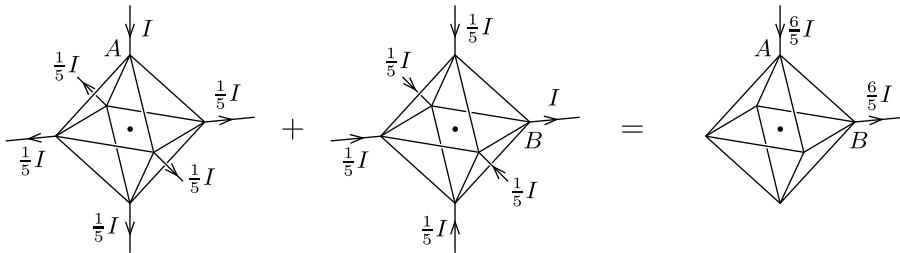
Ez a vektor viszont

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$$

miatt *nullvektor*, vagyis a mágneses indukció a tetraéder középpontjában nulla.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy *mindegyik* szabályos poliéderre (a tetraéder mellett a kockára, az oktaéderre, a dodekaéderre és az ikozaéderre is) igaz a következő állítás: a poliéder *bármely* két csúcsánál „centrálisan” oda-, illetve elvezetett áram hatására kialakuló mágneses mező a poliéder O középpontjában *nulla*.

Képzeljük el a következő (csillagszóróra emlékeztető) elrendezést: a poliéder egyik (mondjuk A jelű) csúcsához egy hosszú, egyenes, a középpont felé irányuló vezetőken I áramot vezetünk, az összes többi csúcsból pedig hasonló irányítású huzalokon egyforma erősségű áramot vezetünk el. Hozzunk létre egy másik, hasonló árameloszlást: vezessünk el a B pontból I áramot, az összes többi csúcspontra pedig egyforma erősségű befolyó áramokkal folyamatosan pótoljuk a hiányzó töltéseket. Ezen két árameloszlás szuperpozíciója éppen az állításunkban szereplő áramelrendezést adja (1. ábra); így tehát ha sikerül belátnunk, hogy egyetlen „csillagszóró” mágneses tere a poliéder középpontjában nulla, akkor a két tetszőleges helyzetű külső vezetékes árameloszlásra is bizonyítottuk állításunkat.

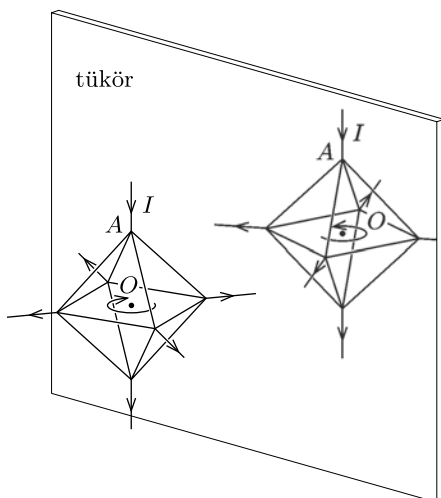


1. ábra

Tételezzük fel, hogy az A pontba vezetett (és a többi csúcspontra szimmetrikusan elvezetett) áram hatására a poliéder O középpontjában valamekkora \mathbf{B} mágneses indukció alakul ki. Ennek a \mathbf{B} vektornak AO -val párhuzamos irányúnak kell lennie, hiszen a poliédert AO körül valamekkora (a poliéder szimmetriájára jellemző, az oktaéder esetén pl. 90° -os) szöggel elforgatva az eredetivel megegyező áramelrendezést kapjuk vissza, és ezzel a „diszkrét szimmetriával” nyilván a mágneses mező is rendelkezik.

Képzeljük el, hogy a poliéder középpontjának közelében egy töltött részecske az AO tengely körül körpályán mozog. Ha alkalmasan választjuk meg a részecske

szögsebességét és keringési irányát, akkor az O pontban mérhető mágneses mező éppen biztosítani képes a körmozgáshoz szükséges nagyságú és irányú centripetális erőt. Képzeljük el továbbá azt is, hogy az egész elrendezést (az árameloszlást, a kialakuló mágneses mezőt és a keringő részecskét) egy tükörből nézzük (2. ábra). A poliéder tükörképe az eredetivel megegyező poliéder lesz, az árameloszlás is ugyanolyan, mint a „tükör előtti világban”, a részecske keringése azonban megfordul. Ha a részecske a valóságban az A pont felől nézve mondjuk az óramutatóval megegyező irányban forog, akkor a „tükörön túl” a forgásának iránya éppen ellenkező lesz. A tükrözött elrendezésben tehát a mágneses mező fordított irányú, mint a valóságban, noha az árameloszlás mindkét esetben ugyanaz, tehát a \mathbf{B} vektornak sem lenne szabad megváltoznia. Egyetlen olyan vektor van, amelyik önmaga (-1) -szerese: a nullvektor.



2. ábra

A poliéder középpontjában tehát a csillagszóróra emlékeztető elrendezésben nem lehet nullától különböző mágneses indukció, és az egyenletek linearitása (szuperponálhatósága) miatt ugyanez érvényes a csillagszórókból összetehető bonyolultabb áramelrendezésekre is.

M. 262. I. megoldás. Jelöljük az egyenes vezető irányát megadó (az áram irányába mutató) egységvektort \mathbf{e} -vel, az egyenes vezető és a fémsík közös pontjából a P pontba mutató vektort pedig \mathbf{R} -rel (1. ábra). Ez a két vektor (és az adott I áramerősség) egyértelműen meghatározza a mágneses indukcióvektort, az tehát $\mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{R})$ alakú, vagyis két vektorváltozótól függő, vektor értékű függvény.

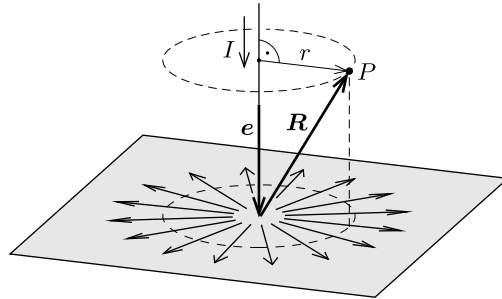
A mágneses indukció irányának meghatározásában fontos szerepet játszik a „jobbkez-szabály”, és ez a tény erősen korlátozza a $\mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{R})$ függvény alakját. Két vektorból csak egyetlen olyan vektor képezhető, amely a jobbkez-szabályra „érzékeny”: a két vektor vektoriális szorzata. Emiatt az indukciónak arányosnak

kell lennie $\mathbf{e} \times \mathbf{R}$ -rel, és az arányossági tényező olyan skalár, amely már nem függ a jobbkez-szabály (önkényes) előjel-megállapodásától:

$$\mathbf{B}(\mathbf{e}, \mathbf{R}) = (\mathbf{e} \times \mathbf{R}) \cdot f(\mathbf{e}\mathbf{R}, R^2).$$

Az f függvény változói az \mathbf{e} -ből és \mathbf{R} -ből képezhető skalárok (egymással és önmagukkal képezhető skalárszorzatok, melyek közül e^2 hiányzik, hiszen az megállapodás szerint 1). Ezek a skalárok adott r és h esetén rögzített értékűek, hiszen

$$R^2 = r^2 + h^2, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{e}\mathbf{R} = -h.$$



1. ábra

Az 1. ábrán látható körvonal mentén tehát a mágneses indukció érintő irányú, és a nagysága a gerjesztési törvénynek megfelelően

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r},$$

tehát ugyanakkora, mint a „végtelen” egyenes vezetónél lenne.

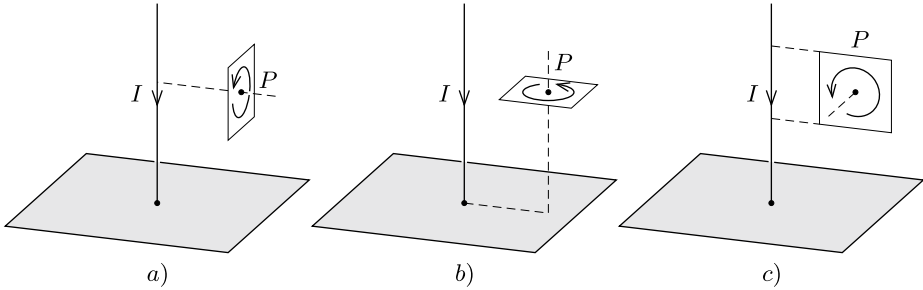
A fémlap alatt a mágneses indukció mindenhol nulla, hiszen a gerjesztési törvényben szereplő „körülölet” áramerősség itt természetesen nulla.

II. megoldás. Illesszünk az egyenes vezetőre és a P pontra egy síkot, majd tükrözzük az egész elrendezést erre a síkra! A tükrözés után az árameloszlás pontosan olyan marad, amilyen eredetileg volt, tehát a tükrözés során a mágneses mező sem változhat meg.

A mágneses indukció – jóllehet vektorként szoktuk ábrázolni – nem egy irányított szakasz, a tér egyik pontjából egy másikba mutató nyíl (ún. *polárvektor*, mint amilyen a helyvektor vagy az elektromos térerősség), hanem egy irányított körvonalal és egy nagysággal megadható mennyiség (mint pl. a szögsebesség vagy a forgatónyomaték). Az ilyen mennyiségeket *axiálvektornak* nevezik. A mágneses indukció körvonalát úgy kaphatjuk meg, ha megadjuk azt a síkot és körüljárási irányt, amely mentén egy megfelelő sebességgel mozgó töltött részecske (az adott pont közelében) körmozgást végezhet. A sík normálisa és a körmozgás körüljárási iránya biztosítja egyértelműen az indukcióvektor irányítottságát.

Belátjuk, hogy a feladatban szereplő mágneses mezőnek nem lehet „radiális” (vagyis az áramvezetőtől a P pontba mutató vektorra merőleges síkú körvonalal szemléltethető) komponense. Ez a komponens ugyanis az említett tükrözés

során előjelet váltana, de ugyanakkor változatlanul is kell maradnia, ez a két feltétel pedig csak úgy teljesülhet egyszerre, ha a vizsgált indukciókomponens nagysága zérus (2. ábra a) része). Ugyanilyen okok miatt a mágneses indukciónak nem lehet „hosszanti” (az egyenes vezetőre merőleges síkú körvonallal megadható) komponense sem, hiszen az is előjelet váltana a tükrözés során, pedig értékének változatlanul is kell maradnia (b) ábra). A mágneses indukció harmadik, a tükrözés síkjába eső körvonallal megadható komponenséről semmit nem állíthatunk, hiszen azt a tükrözés művelete változatlanul hagyja (c) ábra).



2. ábra

A mágneses mezőnek tehát az egyenes vezetőt körülvevő, örvényes vektormezőnek kell lennie. Az indukció nagyságát a fémlap fölött a vezető szál körüli forgásszimmetria és a gerjesztési törvény felhasználásával határozhatjuk meg:

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r},$$

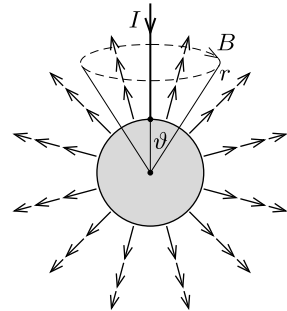
a fémlap alatt pedig az indukció mindenhol zérus.

M. 263. Számítsuk ki először egyetlen félegyenes mentén befolyó, majd a gömb felületéről radiálisan, gömbszimmetrikusan távozó áram által létrehozott mágneses teret! (Ez az árameloszlás ténylegesen megvalósítható, ha az igen jól vezető gömböt valamekkora vezetőképességű „végtelen” közegbe helyezük, és feszültséget kapcsolunk rá.)

Egyetlen áramvezető esetén a mágneses mező az egyenes vezető által kijelölt „tengely” körül forgásszimmetrikus, és az indukcióvonalak kör alakúak (lásd az előző feladat megoldását!).

A mágneses indukció nagyságát az Ampère-féle gerjesztési törvényből határozhatjuk meg. A gömb belsejében képzeletben felvett zárt görbe *nem* ölel körül áramot, ezért itt (amikor $r < R$) *nincs mágneses tér*. A gömbön kívül ($r > R$) viszont a gerjesztési törvény így írható (lásd az 1. ábrát):

$$2\pi r \sin \vartheta \cdot B(r, \vartheta) = \mu_0 \left(I - \frac{1 - \cos \vartheta}{2} I \right).$$

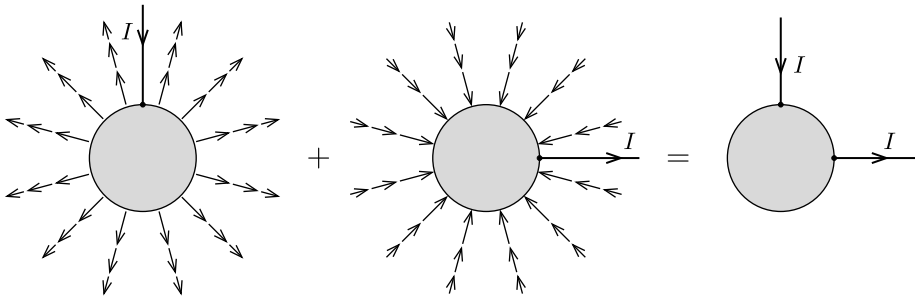


1. ábra

Felhasználtuk, hogy az 1. ábrán szaggatottan jelölt körvonallal határolt r sugarú gömbsüveg felszíne $2\pi r^2(1 - \cos \vartheta)$, az r sugarú gömb felszíne pedig $4\pi r^2$, emiatt a gömbszimmetrikusan kifolyó áram számításba vehető része $I(1 - \cos \vartheta)/2$ erősségű. A mágneses indukció nagysága tehát

$$B(r, \vartheta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1 + \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\text{ctg}(\vartheta/2)}{r}.$$

Az áramvezető közelében ($\vartheta \approx 0$) a kis szögekre érvényes $\text{ctg}(\vartheta/2) \approx 2/\vartheta$ összefüggés miatt éppen a végtelen egyenes vezető körüli mágneses mezőt kapjuk vissza; a bevezetett árammal ellentétes oldalon pedig ($\vartheta \rightarrow 180^\circ$) az indukció fokozatosan eltűnik.



2. ábra

Végezzük el ugyanezt a számítást a 90° -kal elforgatott egyenes vezetőről kivezetett és gömbszimmetrikusan bevezetett áramokra is, majd szuperponáljuk a két elrendezés mágneses terét (2. ábra). A gömb belsejében továbbra is mindenhol *nulla* lesz az indukció, a kérdéses P pontban pedig (a gömbön kívül)

$$B_P = 2 \cdot B(R, 45^\circ) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \text{ctg } 22,5^\circ = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\sqrt{2} + 1).$$

Megjegyzés. A gömb felületén folyó áram a bevezetési ponttól az áram kivezetési helyéig állandósult áramvonalak mentén jut el. Meg lehet mutatni, hogy ezek a (görbült felületen futó) vonalak síkgörbék, nevezetesen *kör alakúak*.

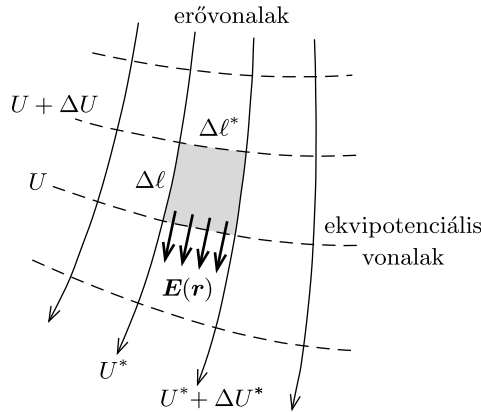
M. 264. A két párhuzamos áramvezető időben állandó, *síkbeli* mágneses mezőt hoz létre.

Megjegyzés. Egy vektormezőt akkor nevezünk (például az x - y síkban) síkbelinek, ha a mező vektorainak z komponense mindenhol nulla, és a nullától különböző vektorkomponensek sem függenek a z koordinátától.

Ugyancsak síkbeli vektormező az olyan töltéseloszlás elektrosztatikus tere, amelyben a töltéssűrűség az egyik térkoordinátától nem függ. Erre példa a nagyon hosszú („végtelen” hosszúnak tekinthető), egyenletesen feltöltött szigetelő pálcá, vagy több ilyen (egymással párhuzamos) pálcá együttese.

A magnetosztatikus vektormezők forrásmentesek és örvénymentesek (tehát „potenciálosak”) a tér azon részeiben, ahol nem folynak áramok. Ugyanilyen tulajdonságúak az elektrosztatikus vektormezők is, ha a vizsgált térrészben nincsenek töltések. Mindkét (síkbeli) vektormezőben felvehetjük az erővonalakat és az ekvipotenciális vonalakat (az ekvipotenciális felületek síkbeli megfelelőjét), amelyek egymásra merőleges görbesereget alkotnak.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy (töltés- és árammentes térrészekben, de egyébként teljesen általános körülmények között) a síkbeli, sztatikus elektromos és mágneses vektorterek egymással kapcsolatba hozhatóak, egymásnak megfeleltethetőek. Ebben az ún. *duális kapcsolatban* az egyik vektortér ekvipotenciális vonalai a másik erőtér erővonalainak felelnek meg, és viszont, az erővonalak duális megfelelői az ekvipotenciális görbék. Az örvény- és forrásmentesség még nem határozza meg egyértelműen a vektortereket, azokat a határfeltételek teszik egyértelművé. Az elektromos erővonalak a térrész határain elhelyezkedő töltésekből indulnak ki, vagy (a töltés előjelétől függően) azokba futnak be. A mágneses „erővonalak” (indukcióvonalak) mindig zárt görbék, amelyek a teret létrehozó áramokat fogják körül, azok körül „örvénylenek”.



1. ábra

Legyen $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ egy síkbeli, elektrosztatikus vektormező, amelyhez az $U(\mathbf{r})$ elektrosztatikus potenciál tartozik. Ezt az erőteret az 1. ábrán látható módon szemléltethetjük. Az ekvipotenciális ($U = \text{állandó}$) vonalakat szaggatottan, az erővonalakat pedig folytonos, nyilakkal ellátott vonalakkal jelöltük. Ezek a vonalak két, egymást mindenhol merőlegesen metsző görbesereget alkotnak. (A térerősség iránya megállapodás szerint a potenciál csökkenésének irányába mutat.)

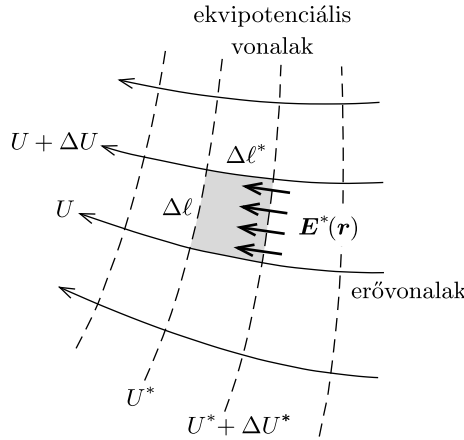
Minden erővonalhoz kiszámíthatjuk, hogy közte és egy önkényesen kiválasztott referencia-erővonal között mekkora *fluxus* halad át.

Megjegyzés. Háromdimenziós vektormezőknél a fluxust egy kicsiny felületdarabka területe és a rá merőleges térerősségkomponens szorzataként értelmezzük. Kétdimenziós vektormezőknél a fluxus egy kicsiny vonaldarab hosszának és a rá merőleges térerősségkomponensnek a szorzataként definiálható. A kétféle értelmezés összhangja jól látszik

akkor, ha a kétdimenziós vektormező 3-dimenziós fluxusát egy, a z tengely irányában egységnyi magasságú, de az x - y síkban kicsiny oldalélű „téglalpra” számítjuk ki.

Jelöljük az \mathbf{r} helyvektorú ponton áthaladó erővonal és a referencia-erővonal között átmenő fluxust $U^*(\mathbf{r})$ -rel. Az $U^*(\mathbf{r})$ függvény az erőtér minden pontjához hozzárendel egy skalár mennyiséget, és az erővonalak egyenletét az $U^*(\mathbf{r}) = \text{állandó}$ összefüggés határozza meg. (Az állandó értékét az 1. ábrán az erővonalak mellett fel is tüntettük.)

Megjegyzés. Ha az erővonalakat olyan sűrűn rajzoljuk be, hogy a hosszegységre jutó erővonalszám a térerősség nagyságával legyen egyenlő, akkor $U^*(\mathbf{r})$ szemléletes jelentést nyer: megadja, hogy a kérdéses ponton *hányadik* erővonal halad át, amennyiben azok számozását a referencia-vonalnál kezdjük.



2. ábra

Tekintsünk két – egymáshoz közeli – erővonalat, illetve két – ugyancsak egymáshoz közeli – ekvipotenciális vonalat. Ezek a vonalak egy kicsiny (az 1. ábrán sötétebben jelölt, jó közelítéssel téglalapnak tekinthető) tartományt jelölnek ki a vektormező síkjában. A térerősség nagysága kétféleképpen is kifejezhető a „téglalap” oldalainak hosszával. Egyrészt a potenciál értelmezése szerint

$$\Delta U = -|\mathbf{E}|\Delta\ell,$$

(a negatív előjel a potenciál csökkenési irányába mutató térerősségre utal), másrészt a fluxus és a térerősség nagyságának kapcsolatából:

$$\Delta U^* = |\mathbf{E}|\Delta\ell^*.$$

Ezekből a térerősség nagyságát kiküszöbölve a következő összefüggést kapjuk:

$$(1) \quad \frac{\Delta U}{\Delta\ell} + \frac{\Delta U^*}{\Delta\ell^*} = 0.$$

A fenti, szembeötlően szimmetrikus reláció lehetőséget kínál arra, hogy az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektormezőhöz hozzárendeljünk egy másik, a szerepek felcserélésével adódó „duális” vektormezőt. Ha az $U^*(\mathbf{r})$ függvényt tekintjük egy $\mathbf{E}^*(\mathbf{r})$ vektormező potenciálfüggvényének, $U(\mathbf{r})$ -et pedig ezen mező fluxusát megadó mennyiségnek, akkor erre a mezőre is teljesül a forrás- és örvénymentesség követelménye, az (1) reláció (2. ábra). (Ne feledjük, hogy a duális térnél a szerepek felcserélődése miatt $\Delta\ell$ -et és $\Delta\ell^*$ -ot is fel kell cserélnünk.)

A fentieket egy nevezetes példával illusztrálhatjuk. Ha a potenciál

$$(2) \quad U(r) = -K \ln \frac{r}{r_0}$$

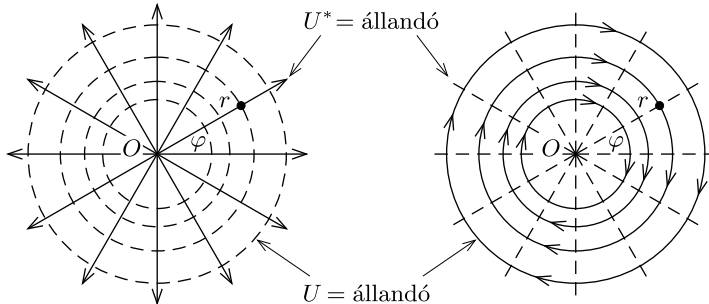
alakú (ahol K és r_0 állandók, r pedig a sík O pontjától mért távolság), akkor az ekvipotenciális görbék koncentrikus körök, a térerősség nagysága

$$E(r) = -\frac{\Delta U}{\Delta r} \approx -U'(r) = \frac{K}{r},$$

iránya pedig a kérdéses pontot O -val összekötő egyenessel adható meg (3. ábra bal oldala). A térerősség nagyságából a fluxus is kiszámítható. Egy r sugarú köríven, amely egy önkényesen választott irányhoz képest φ szögű ívet fed le, az áthaladó fluxus

$$U^* = \frac{K}{r} \cdot r\varphi = K \cdot \varphi.$$

Ez az erőter egy $\lambda = 2\pi\epsilon_0 K$ vonalmenti töltéssűrűségű „végtelen” hosszú pálca elektrosztatikus terével egyezik meg.



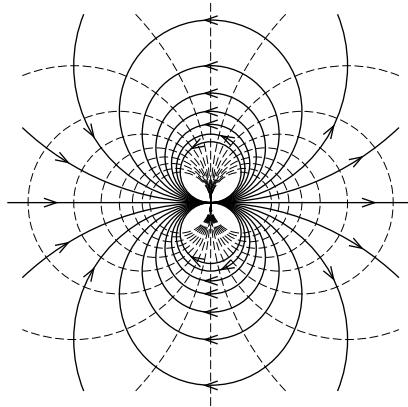
3. ábra

A duális tér erővonalai az $U = -K \ln(r/r_0) = \text{állandó}$ feltételből következően koncentrikus körök, a tér nagyságát pedig (valamelyik erővonal mentén kicsit elmozdulva) az

$$E^* \cdot r \Delta\varphi = -\Delta U^* = -K \Delta\varphi$$

feltételből számíthatjuk ki: $|\mathbf{E}^*| = -K/r$. Ha a K állandó nagyságát $\mu_0 I/(2\pi)$ -nek választjuk, akkor a duális vektormező egy I erősségű árammal átjárt hosszú, egyenes vezető mágneses terét (mágneses indukcióját) adja meg (3. ábra jobb oldala).

Megjegyzések. 1. A hosszú, egyenes vezető mágneses tere lokálisan örvénymentes (hiszen potenciálfüggvényből származtatható), de *nem konzervatív*, zárt görbékre vett integrálja nem feltétlenül nulla. Ezt a furcsaságot a matematikai leírás úgy teszi lehetővé, hogy a φ szöggel arányos U^* potenciál *nem egyértékű* függvény: ha az O pontot (vagyis az áramvezetőt) körüljárjuk, a visszaérkezéskor a potenciál értéke nem lesz ugyanannyi, mint amennyi az elinduláskor volt. Az elektrosztatikus potenciálnál ilyen eset nem fordulhat elő, hiszen az perpetuum mobile készítését tenné lehetővé. A „mágneses potenciál” nem rendelkezik közvetlen fizikai jelentéssel, csupán matematikai segédmennyiség, így az örökmozgó lehetősége fel sem merül.

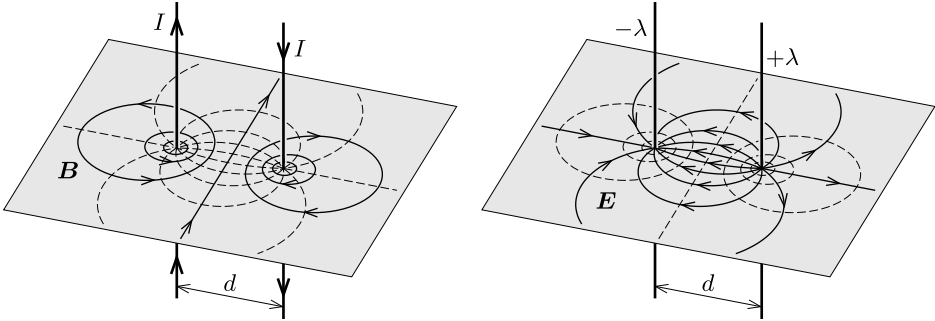


4. ábra

2. Egy síkbeli elektrosztatikus tér duálisának lehetséges fizikai jelentését csak a hátfeltételek ismeretében tudjuk megadni. Nem igaz az, hogy a duális tér mindig csak mágneses mezőként értelmezhető. Egy síkkondenzátor homogén elektromos erőterének duálisja is homogén vektormező, amely lehet például egy 90° -kal elforgatott kondenzátor elektrosztatikus tere. Ugyancsak elektrosztatikus mezőként értelmezhető egy kétdimenziós, ideális elektromos dipól erőterének duálisja is: ez egy 90° -kal elforgatott dipól elektrosztatikus terével egyezik meg (4. ábra).

Térjünk most rá az eredeti problémára, az ellentétes áramirányú párhuzamos vezetők mágneses terének leírására. Ez az elrendezés az ellentétes töltésű, nagyon hosszú, párhuzamos szálak esetének a duálisja. Az 5. ábra bal oldala az áramok által keltett (síkbeli) mágneses mezőt szemlélteti. Az indukcióvonalakat a folytonos vonalak jelzik, a mágneses potenciál „szintvonalait” pedig a szaggatott vonalak. Az áramerősségek egyenlősége miatt az erőter szimmetrikus az áramok felezősíkjára.

Az 5. ábra jobb oldalán látható duális elrendezés olyan elektromos erőteret mutat, amelyben a szereposztás éppen fordított: a szaggatottan jelölt ekvipotenciális vonalak ölelik körül a végtelen szálakat, és az ezekre merőleges (folytonos vonallal jelölt) görbesereg képezi az elektromos erővonalak rendszerét. Az elrendezés akkor lesz szimmetrikus, ha az elektromos erőteret két ellentétesen feltöltött, $+\lambda$ és $-\lambda$ vonalmenti töltéssűrűségű szál hozza létre.



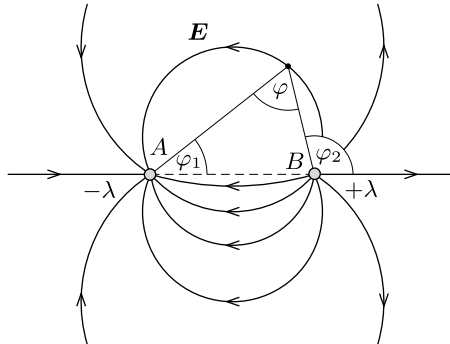
5. ábra

Egyetlen, λ vonalmenti töltéssűrűségű szál elektrosztatikus erőterét a (2) összefüggésben megadott potenciál szolgáltatja $K = \lambda/(2\pi\epsilon_0)$ helyettesítéssel. Két egyforma nagyságú, de ellentétes előjelű töltéssel rendelkező „végtelen” szál potenciálfüggvénye szuperpozícióval kapható:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2},$$

ahol r_1 és r_2 a vizsgált pont és a szálak távolsága.

Az elektromos eset ekvipotenciális pontjait az $U = \text{állandó}$ feltétel, vagyis az r_1/r_2 hányados állandósága jellemzi, és ugyanez adja meg a duális problémában a mágneses indukcióvonalak egyenletét is. A síkban azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek két adott ponttól vett távolságainak *aránya* állandó, az *Apollóniosz-kör*. A vizsgált mágneses térben az indukcióvonalak tehát körök.



6. ábra

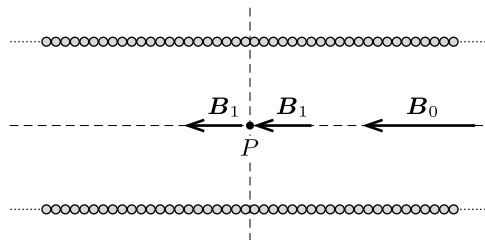
Megjegyzés. A fentiek alapján könnyen beláthatjuk, hogy a két áramvezetőnél a mágneses térhez tartozó ekvipotenciális görbék (és ezzel együtt az elektromos problémánál az erővonalak) ugyancsak *körök*. Mindkettőt az $U^* = \text{állandó}$ feltétel határozza meg, ez pedig az egyetlen szál korábban már kiszámított „fluxusfüggvényét” felhasználva a $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \text{állandó}$ követelménnyel egyenértékű. (Itt φ az a szög, amely alatt az

elektromos erővonal valamely pontjából a két töltött szál helyét megadó A és B pont látszik, lásd a 6. ábrát.) Egy adott szakasz két végpontja a szakaszra illeszkedő kör (látószögkörív) pontjaiból látszik ugyanakkora szög alatt, az ellentétesen töltött szálak elektromos terének erővonalai tehát *körök*. Ezt az eredményt – más módszerekkel, elemi geometriai megfontolásokkal – a 227. feladatban is megkaptuk.

M. 265. A menetek által kitöltött térrészben az egységnyi hosszra jutó keresztmetszeti felület nagysága adott, míg a huzal keresztmetszete d^2 -tel arányos. Ezek szerint $n \sim d^{-2}$, ahol n az egységnyi hosszra jutó menetszám. Egy menet ohmos ellenállása fordítottan arányos a huzal keresztmetszetének területével, vagyis az ellenállás d^{-2} -nal változik. Így a szolenoid egységnyi hosszára jutó meneteinek R ellenállása arányos nd^{-2} -nal, vagyis $R \sim d^{-4}$. A szolenoid belsejében a B mágneses indukció nI -vel arányos, ezért a szükséges áramerősség $I \sim n^{-1} \sim d^2$. Az egységnyi hosszra eső másodpercenkénti hőfelszabadulás RI^2 , ami tehát $d^{-4}(d^2)^2$ -nel arányos, vagyis független d -től! Tehát (bizonyos korlátok között) a tekercs melegedésének szempontjából lényegében mindegy, hogy hogyan választjuk meg a tekercs huzalának átmérőjét.

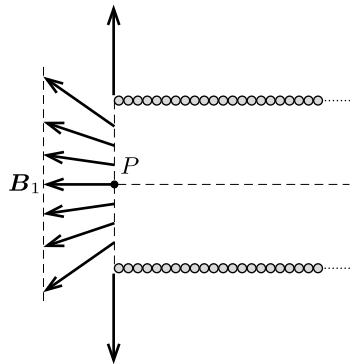
M. 266. Egészítsük ki – gondolatban – a szolenoidot a P pontra tükörszimmetrikusan egy másik tekercssel, amelyben az eredetivel megegyező erősségű áram folyik.

a) Ha a P pontban mérhető mágneses indukciót B_1 -gyel jelöljük, akkor a szimmetrikusan kiegészített tekercs másik fele is ugyanekkora indukciót hoz létre (1. ábra). De mivel a szuperponált mezők eredőjének B_0 -t kell adnia, közvetlenül adódik, hogy $B_1 = B_0/2$.



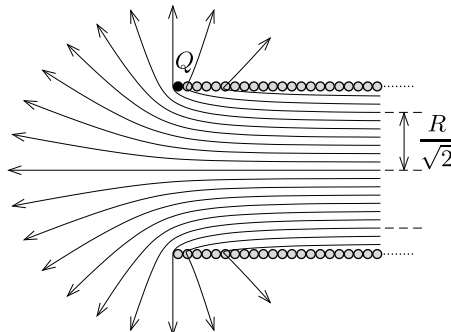
1. ábra

b) A fentiekhez hasonló érveléssel láthatjuk be, hogy a P ponton átmenő és a szolenoid tengelyére merőleges síkban a mágneses indukcióvektor tengelyirányú komponensének nagysága $B_0/2$ mindaddig, amíg a tengelytől mért távolság R -nél kisebb, és nulla, ha R -nél nagyobb (2. ábra). A szolenoid „zárólapján” tehát összesen $R^2 \pi \cdot (B_0/2)$ mágneses fluxus halad keresztül, éppen fele a szolenoid belsején átmenő fluxusnak. Vajon hová „tűnik” a fluxus másik fele?



2. ábra

c) A szolenoid indukcióvonalait (vázlatosan) a 3. ábra mutatja. A tekercs leg-szélső menetén (a Q ponton) átmenő indukcióvonalnak a tekercsen kívül a tengelyre merőlegesen kell haladnia. Ettől balra a tekercs fluxusának fele halad, a másik fele a menetek között lép ki a tekercsből. A határesetet képező erővonalak a szolenoid belsejében (a végétől elegendően távol) a tengelytől $R/\sqrt{2}$ távolságban haladnak, mivel így osztoódik két egyforma részre a teljes fluxus.



3. ábra

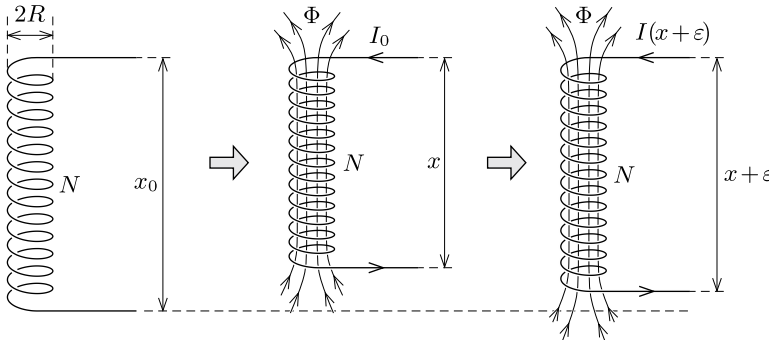
M. 267. Tegyük fel, hogy a rugó hossza az I_0 erősségű áram hatására a kezdeti (feszítetlen állapotú) x_0 -ról valamekkora x értékre csökken, és itt a meneteiben folyó áram mágneses vonzása egyensúlyba kerül a deformáció miatt fellépő rugalmas erővel. Feladatunk ezen „egyensúlyi” x hosszúság meghatározása.

Az erőegyensúly követelményét átfogalmazhatjuk az energiaminimum-elvre: Egyensúlyban lévő rendszer összenergiája az egyensúlyihoz közeli állapotokhoz képest minimális, vagyis egy kicsiny, elképzelt (virtuális) változás során az energia első közelítésben nem változik. (Ha nem így lenne, hanem pl. az energia csökkenne, akkor a rendszer „szívesen” átmenne a közeli állapotba, tehát nem lenne egyensúlyban. Akkor is ugyanez történne, ha valamilyen kicsiny állapotváltozásra az energia növekedne, hiszen ekkor az ellentételes irányú változás eredményezne energiacsökkenést.)

Az energiaminimum-elv (amit más megfogalmazásban „virtuális munka elvének” neveznek) csak energetikailag zárt rendszerekre alkalmazható. Ha az elképzelt változás során a rendszer a környezetétől energiát kaphat, vagy adhat le, akkor a módszer nem „működik”. Ha valamilyen módon mégis szeretnénk használni az – egyébként nagyon egyszerű, célravezető – energetikai megfontolásokat, a rendszert – esetünkben az áramjárta rugót – függetlenítenünk kell a külvilágtól. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a már egyensúlyba került rugót – gondolatban – nagyon alacsony hőmérsékletre lehűtve szupravezetővé tesszük, és lekapcsoljuk az áramforrásról, végeit rövidre zárjuk. Ha ebben az állapotban a rugóban (mint rövidre zárt tekercsben) I_0 erősségű áram folyik, a mágneses erők és a rugalmas erők továbbra is egyensúlyt tartanak egymással, tehát érvényes (és alkalmazható) rá az energiaminimum elve.

Az egyensúlyi állapotban a tekercs belsejében $B = \mu_0 IN/x$ a mágneses indukció, az N menetes, $A = R^2\pi$ keresztmetszetű tekercs teljes mágneses fluxusa tehát

$$\Phi = BAN = \mu_0 \frac{IN^2 A}{x}.$$



Ha a tekercs hossza valamilyen ok miatt x -ről $(x + \varepsilon)$ -ra változna (lásd az ábrát), a mágneses fluxus nem változhatna meg, hiszen az feszültséget indukálna, és ennek hatására a nulla ellenállású tekercsben „végtelen nagy” áram indulna el. Eszerint az I/x hányadosnak az elképzelt változás során állandónak kell maradnia, tehát az áramerősség

$$I(x + \varepsilon) = \frac{I_0}{x}(x + \varepsilon)$$

módon függ a tekercs hosszától. Tudjuk továbbá, hogy egy x hosszúságú tekercs önindukciós együtthatója

$$L(x) = \mu_0 \frac{N^2 A}{x},$$

az I erősségű árammal átjárt tekercs mágneses energiája pedig $W_{\text{mágn}} = LI^2/2$. A megváltozott hosszúságú tekercsben tárolt mágneses energia tehát

$$W_{\text{mágn}}(x + \varepsilon) = \frac{1}{2}L(x + \varepsilon) \cdot I^2(x + \varepsilon) = \mu_0 \frac{N^2 I_0^2 A}{2x^2}(x + \varepsilon).$$

Ha ehhez hozzáadjuk a rugó

$$W_{\text{rug}}(x + \varepsilon) = \frac{1}{2}D(x + \varepsilon - x_0)^2$$

rugalmas energiáját, a rendszer teljes energiájára

$$W_{\text{össz}} = W_{\text{össz}}(x) + \left[\mu_0 \frac{N^2 I_0^2 A}{2x^2} + D(x - x_0) \right] \varepsilon + \frac{1}{2}D\varepsilon^2$$

adódik. Ennek a kifejezésnek (ε függvényében) akkor lesz $\varepsilon = 0$ -nál minimuma, vagyis akkor nem változik tetszőleges előjelű, de kicsiny ε hosszváltozásra a rendszer teljes energiája, ha a szögletes zárójelben álló kifejezés nulla.

Ezek szerint az áram hatására a rugó új egyensúlyi hossza az

$$x = x_0 - \mu_0 \frac{N^2 I_0^2 A}{2Dx^2}$$

(harmadfokú) egyenletnek tesz eleget. Ha viszont a rugó hosszváltozása kicsi (erre utal a feladat szövegében szereplő „viszonylag erős csavarrugó” kifejezés), akkor a fenti egyenletben a nevezőben szereplő x -et jó közelítéssel x_0 -lal helyettesíthetjük, és a rugó keresett hosszváltozására (rövidülésére) az

$$x - x_0 \approx -\mu_0 \frac{N^2 I_0^2 A}{2Dx_0^2}$$

eredményt kapjuk.

M. 268. A 266. feladat megoldásában láttuk, hogy egy hosszú szolenoid egyik végén kilépő mágneses fluxus éppen feleakkora, mint a tekercs közepén elhelyezkedő, egyetlen meneten áthaladó fluxus. A feladatbeli elrendezésben az egyik tekercs mágneses teréből tehát

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu_0 I_1 n A$$

nagyságú mágneses fluxus hatol be a másik tekercsbe, majd annak palástján keresztül ki is lép belőle. (Ha a tekercsek elegendően hosszúak, akkor az egyik tekercs mágneses teréből származó fluxusnak az a része, amely a másik tekercs „túlsó” végén lép ki, elhanyagolhatóan kicsi.)

Vizsgáljuk most az egyik (1-es) tekercs mágneses indukcióvektorának a másik (2-es) tekercsben folyó áramokra kifejtett erőhatását! Az indukcióvektor tengellyel párhuzamos komponense nem fejt ki eredő erőt a körnek tekinthető menetekben folyó áramokra (hiszen ilyenkor sugárirányú az erő), elegendő tehát csak a tengelyre merőleges komponensekkel foglalkoznunk. Jelöljük a 2-es tekercs végétől számított i -edik menet helyén az 1-es tekercs által keltett indukcióvektor tengelyre merőleges komponensét B_i -vel! Ekkor a 2-es tekercs $2\sqrt{A\pi}$ hosszúságú meneteire az 1-es tekercs által kifejtett erő nagysága $F_i = 2\sqrt{A\pi}B_i I_2$, a 2-es tekercs egészére ható erő pedig

$$(1) \quad F = \sum_i F_i = 2\sqrt{A\pi}I_2 \sum_i B_i.$$

Másfelől tudjuk, hogy az 1-es tekercs teréből származó mágneses fluxusnak a 2-es tekercs palástján kilépő része

$$(2) \quad \Phi = \sum_i \left(2\sqrt{A\pi} \frac{1}{n} B_i \right) = \frac{1}{2} \mu_0 I_1 n A.$$

(Felhasználtuk, hogy egységnyi hosszra n menet jut, az egyes menetek távolsága tehát $1/n$, továbbá hogy a sűrűn tekercselt tekercs egy-egy menete mentén a mágneses indukció tengelyre merőleges komponense állandónak vehető.) Az (1) és (2) egyenletek összevetéséből a kérdéses erőre végül

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 I_1 I_2 n^2 A$$

adódik. Ha a szolenoidok tekercselési iránya megegyezik, akkor azonos áramirányok esetén az erő vonzó, ellenkező esetben pedig taszító jellegű.

II. megoldás. A tekercsek között ható erő arányos I_1 -gyel is és I_2 -vel is, hiszen az egyik áramerősséggel arányos B mágneses indukció a másik tekercsben folyó árammal is (és B -vel is) arányos Lorentz-erőt fejt a másik tekercsre. A keresett erőt tehát egy $F = K I_1 I_2$ alakú formula adja meg, ahol K az áramerősségektől független (de a tekercsek adataitól függő) mennyiség. Ha az $I_1 = I_2 = I$ speciális esetre ki tudjuk számítani az erőt, abból K -t leolvassva már tetszőleges áramerősségekre is meg tudjuk oldani a feladatot.

Az erő nagysága csak az áramerősségek értékétől függ, attól nem, hogy milyen körülmények között jönnek létre ezek az áramok. Ha például az I erősségű árammal átjárt tekercsüket megfelelő hűtéssel szupravezetővé (nulla ellenállásúvá) tesszük, majd a kivezetéseiket (megfelelő polaritással) páronként összekapcsoljuk, akkor egyetlen tekercset kapunk, amelyben mindenhol ugyanakkora erősségű áram folyik. Ez az áram – lévén a tekercs szupravezető – külső áramforrás nélkül is fennmarad. A tekercsek belsejében $B = \mu_0 n I$ mágneses indukciójú mágneses tér alakul ki, amelynek energiája

$$W_{\text{mágn}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V,$$

ahol $V = \ell A$ az A keresztmetszetű, összesen ℓ hosszúságú két tekercs belsejének térfogata. (A tekercsek végeinek szórt terével nem foglalkozunk.)

Mi történik, ha a két tekercset kicsiny Δx távolsággal eltávolítjuk egymástól? A bennük lévő mágneses tér indukciója nem változhat meg, hiszen az feszültséget indukálna és a vezetékek nulla ellenállása miatt „végtelen nagy” áramot indítana el. Megváltozik viszont a mágneses tér energiája, hiszen a mágneses indukcióval „kitöltött” térrész térfogata $\Delta V = A \Delta x$ értékkel megnőtt. Az energiaváltozás:

$$\Delta W_{\text{mágn}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \mu_0 I^2 n^2 A \cdot \Delta x.$$

(Felhasználtuk, hogy igen kicsiny $\Delta x \ll \ell$ esetén a tekercsek között képződő kicsiny légrésemben a mágneses indukció ugyanakkora, mint a tekercsek belsejében.)

Ennek a változásnak meg kell egyeznie a tekercsek széthúzásánál általunk kifejtett F erő $W = F\Delta x$ munkájával, ahonnan leolvasható, hogy

$$F = \frac{1}{2}\mu_0 I^2 n^2 A = KI^2, \quad \text{vagyis} \quad K = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 A.$$

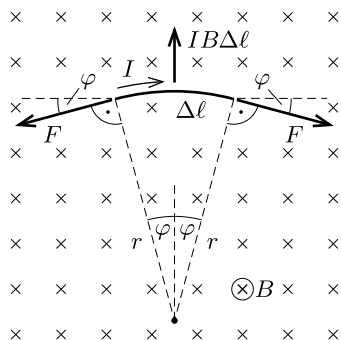
Innen már a különböző erősségű áramok esetén fellépő vonzó- vagy taszítóerő is megadható:

$$F = KI_1 I_2 = \frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2 n^2 A.$$

(Ez az eredmény a szórt terek figyelembevételé után sem változik, mert a kicsit eltávolított tekercsek a túlsó végeiknél megjelenő szórt mágneses teret „magukkal viszik”, így az az energiaváltozásban nem jelenik meg.)

Megjegyzés. Kicsit bonyolultabban, de ugyanerre az eredményre jutunk a „szupravezető trükk” nélkül is. Kapcsoljuk össze a két tekercset a közelebbi végüknél, és biztosítsuk a közös I áramerősséget egy külső áramforrásról (áramgenerátorról)! Ha az így kapcsolt két tekercset – az áramerősség nagyságának fenntartása mellett – egy kicsit eltávolítjuk egymástól, akkor bennük a mágneses indukció és a mágneses fluxus kicsit lecsökken. Könnyen kiszámítható, hogy a tekercsek mágneses energiája csökkenni fog, jóllehet pozitív munkát végeztünk rajtuk. Ezt a furcsa helyzetet a fluxusváltozás miatt indukálódó feszültség magyarázza meg. Az indukált feszültség és az áramforrás árama bizonyos teljesítményt, az pedig energiaátadást jelent. Ellenőrizhető, hogy az áramforrás által felvett energia éppen kétszer akkora, mint a tekercs energiacsökkenése, így összességében a tekercs és az áramforrás energiája növekszik, és az ebből számítható F erő megegyezik a korábban kapott értékkel.

M. 269. a) A vezetőhuzal a mágneses indukcióra merőleges síkban fog elhelyezkedni (a vékony, tehát *könnyű* huzalra ható nehézségi erő hatását elhanyagoljuk). Mivel a mágneses tér által a vezető darabkáira kifejtett erő mindenhol merőleges a huzalra, ezért a vezeték minden pontjában ugyanakkora erő ébred. A vezeték r görbületi sugarú darabkájában $F = IBr$ nagyságú erő ébred. Ez könnyen belátható a vezeték kis darabkájára ható erők vizsgálatával (1. ábra).



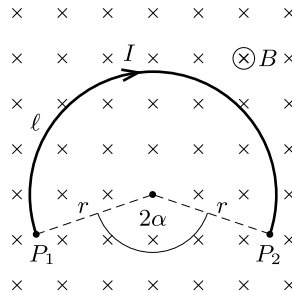
1. ábra

A görbületi kör középpontjából kicsiny 2φ szög alatt látszó, $\Delta\ell = 2\varphi r$ hosszúságú huzaldarabka egyensúlyának feltétele:

$$2F \sin \varphi = IB\Delta\ell.$$

A kis szögek miatt $\sin \varphi \approx \varphi$, ebből valóban az $F = IBr$ eredményre jutunk.

Az eddigiekből következik, hogy a huzal alakja állandó görbületi sugarú sík-görbe, tehát egy *körív* lesz. (Elvben a többmenetes „körtekercs” alak is egyensúlyi helyzet, ez azonban labilis, így nem is alakulhat ki, ahogy egy ceruzát sem lehet a hegyére állítani.)



2. ábra

A körív hossza, valamint a P_1 és P_2 pontok távolsága adott, ezért a körív r sugarára és a 2. ábrán látható α szögre teljesülnie kell a következő összefüggéseknek:

$$2r \sin \alpha = \ell/2, \quad 2r(\pi - \alpha) = \ell.$$

Innen a $2 \sin \alpha = \pi - \alpha$ transzcendens egyenletre jutunk, amelynek numerikus megoldása

$$\alpha \approx 1,246 \text{ rad} = 71,40^\circ.$$

Ezt visszairva a fenti egyenletekbe a kör sugarára $r \approx 0,264 \ell$, a vezetékét feszítő erőre pedig $F \approx 0,264 IB\ell$ értéket kapunk.

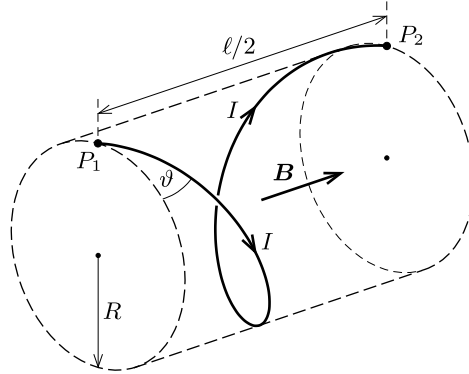
b) A vezetőhuzal darabkáira ebben az esetben sem hat a mágneses térrel párhuzamos irányú erő, ezért a vezetékét feszítő erő B irányú komponense állandó. Továbbra is igaz, hogy a mágneses tér által a vezető darabkáira kifejtett erő mindenhol merőleges a huzalra, ezért a vezeték minden pontjában ugyanakkora erő ébred. Ebből a két tényből következik, hogy a vezetékét feszítő erő mágneses térre merőleges komponensének állandónak kell lennie, azaz ha a mágneses tér irányából nézünk a vezetékre, egy kört fogunk látni, a huzal alakja pedig egyenletes menetemelkedésű, a mágneses térrel párhuzamos tengelyű, egymenetes csavarvonal lesz (3. ábra). (Elvben a többmenetes csavarvonal alak is egyensúlyi helyzet, ez azonban könnyen beláthatóan instabil.)

A csavarvonal menetemelkedésének ϑ szögét (azaz a csavarvonal adott pontbeli érintője és az ugyanezen ponton átmenő, a B -térre merőleges sík által bezárt szöget) az ismert ℓ ívhosszból számíthatjuk ki:

$$\sin \vartheta = \frac{\ell}{2\ell}, \text{ ebből } \vartheta = 30^\circ.$$

A csavarvonalra illeszkedő, képzeletbeli hengerpalást R sugara:

$$R = \frac{\ell \cos \vartheta}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}\ell}{4\pi} \approx 0,138 \ell.$$



3. ábra

Most térjünk rá az erő kiszámítására! A csavarvonal tengelyének irányából nézve azt látjuk, hogy az R sugarú, teljes körnek látszó vezeték a mágneses Lorentz-erő próbálja szétfeszíteni, ezt ellensúlyozza a vezetékben ébredő erőnek a mágneses térre merőleges $F \cos \vartheta$ nagyságú komponense:

$$IBR = F \cos \vartheta.$$

R kifejezését felhasználva végül megkapjuk a vezeték feszítő erőt:

$$F = \frac{IB\ell}{2\pi} \approx 0,159 IB\ell.$$

Látszik, hogy a huzalban ébredő erő független a P_1 és P_2 pontok d távolságától ($0 < d < \ell$).

M. 270. Az elektron a körvezetőkkel párhuzamos szimmetriasíkban fog mozogni; sebességének nagysága mindvégig v_0 marad (hiszen a mágneses tér nem végez munkát), a sebesség iránya pedig a Lorentz-erő hatására folyamatosan változik. A mágneses indukció nagysága (és így a Lorentz-erő nagysága is) meglehetősen bonyolult módon függ a helytől, ennek ellenére az elektron végsebességének irányáról mégis állíthatunk valami határozottat.

Jelöljük az O ponttól már r távolságra került elektron sebességének tangenciális (az O pont irányához képest merőleges) komponensét v_t -vel. Az elektron O pontra vonatkozó perdülete mrv_t , amelynek megváltozását a Lorentz-erő forgatónyomatéka okozza:

$$(1) \quad \frac{\Delta(mrv_t)}{\Delta t} = e \frac{\Delta r}{\Delta t} B(r) \cdot r,$$

ahol m az elektron tömege, e az elemi töltés, és a feladat *ábráján* a függőlegesen fölfelé mutató irányt választottuk pozitívnak. Az (1) összefüggés felírásánál felhasználtuk, hogy a Lorentz-erőnek csak a radiális sebességből származó komponense hoz létre forgatónyomatékokat. Ezek szerint a részecske perdületének megváltozása az r távolság kicsiny Δr -nyi növekedése során:

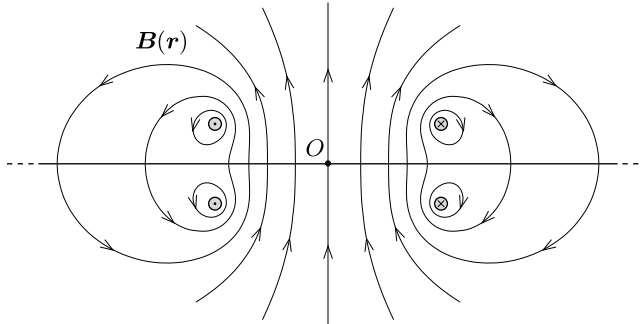
$$(2) \quad \Delta(mrv_t) = eB(r)r\Delta r = \frac{e}{2\pi}\Delta\Phi,$$

ahol $\Delta\Phi = B(r)2\pi r\Delta r$ a (tengelyszimmetrikus) mágneses mezőnek az r átlagsugarú, Δr szélességű körgyűrűre vonatkoztatott fluxusa.

A (2) egyenlet szerint az elektron perdületének megváltozása, mialatt az O ponttól mért távolsága r_1 -ről r_2 -re változik, arányos a körvezetők mágneses terének az r_1 és r_2 sugarú körgyűrűn létrehozott fluxusával. Mivel az elektron kezdeti perdülete nulla és $r_1 = 0$, így az elektron perdülete arányos az aktuális sugáron belüli teljes fluxussal. Ha az elektron már „elegedően messze” kerül a körvezetőkől ($r_2 \rightarrow \infty$), akkor

$$\Phi_{\text{teljes}} = 0,$$

hiszen a mágneses mező forrásmentessége miatt az elektron pályasíkját ugyanannyi (önmagába záródó) mágneses indukcióvonal dőfi fölülről lefelé, mint lentől felfelé. Az *ábra* a mágneses tér szerkezetét mutatja az O ponton átmenő, a körvezetők síkjára merőleges síkmetszetben.



Az elektron perdülete tehát a körvezetőkől igen nagy távolságban ismét nullává válik, így itt a részecske tangenciális sebessége zérus. Ezek szerint az elektron az O ponttól *radiális irányban* távolodva, v_0 sebességgel fog mozogni, amikor már igen távolra jutott a körvezetőkől.

M. 271. Írjuk fel a töltött részecske mozgásegyenletét mágneses tér és a sebességgel arányos fékezőerő jelenlétében a részecske \mathbf{v} sebességvektora és az \mathbf{r} helyvektora segítségével:

$$m \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = Q \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \times \mathbf{B} - k \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Ezt az egyenletet (melyben Q a részecske töltése, m a tömege, \mathbf{B} a mágneses indukcióvektor, k pedig egy állandó) a mozgás kicsiny, Δt időintervallumaira írtuk fel, de úgy is érvényes, ha Δt -vel megszorozzuk, majd összegzést végzünk:

$$(1) \quad m \sum \Delta \mathbf{v} = Q \left(\sum \Delta \mathbf{r} \right) \times \mathbf{B} - k \sum \Delta \mathbf{r}.$$

Az így kapott egyenlet bal oldalán a sebességváltozások összege éppen a részecske kezdősebességének (-1) -szerese, a jobb oldalon szereplő összeg pedig a részecske (a sűrűdásos tartományba lépéstől a megállásáig megtett) teljes elmozdulásvektora:

$$\sum \Delta \mathbf{v} = -\mathbf{v}_0, \quad \sum \Delta \mathbf{r} = \mathbf{s},$$

így ezekkel a jelölésekkel az (1) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$(2) \quad m\mathbf{v}_0 = -Q\mathbf{s} \times \mathbf{B} + k\mathbf{s}.$$

Amikor nincs mágneses tér, a részecske $|\mathbf{s}_1| = s_1 = 10$ cm út megtétele után áll meg, tehát (2) alapján

$$(3) \quad mv_0 = ks_1.$$

Ha a részecske (ugyanekkora kezdősebességgel indulva) $|\mathbf{B}| = B$ erősségű mágneses mezőben mozog, és elmozdulása a megállásáig $|\mathbf{s}_2| = s_2 = 6$ cm, (2) szerint fennáll

$$(4) \quad (mv_0)^2 = (Qs_2B)^2 + (ks_2)^2.$$

Felhasználtuk, hogy \mathbf{s} és $\mathbf{s} \times \mathbf{B}$ egymásra merőlegesek, a (2) egyenletben szereplő tagok tehát egy derékszögű háromszög oldalait alkotó vektorok.

Végül a kétszeres, vagyis $2B$ indukciójú mágneses mezőben mozgó részecske megállásáig megtett \mathbf{s}_3 elmozdulásának nagyságára fennáll, hogy

$$(5) \quad (mv_0)^2 = (2Qs_3B)^2 + (ks_3)^2.$$

A (3), (4) és (5) összefüggéseket egybevetve a keresett távolságra

$$s_3 = \frac{s_1 s_2}{\sqrt{4s_1^2 - 3s_2^2}} = \frac{30}{\sqrt{73}} \text{ cm} = 3,51 \text{ cm}$$

adódik.

M. 272. A nyugalmi helyzetétől mért \mathbf{r} helyen lévő, \mathbf{v} sebességgel mozgó gömbre a fonálerő, a nehézségi erő és a mágneses tér okozta Lorentz-erő hat. Az ingamozgásnál szokásos közelítéseket alkalmazva a fonálerő vízszintes vetülete $-\omega^2 \mathbf{r}$, ahol $\omega = \sqrt{g/\ell}$ a fonálinga mágneses mező nélküli körfrekvenciája. A gömb mozgásegyenlete a mágneses mező jelenlétében:

$$(1) \quad m\mathbf{a} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} - m\mathbf{r}\omega^2.$$

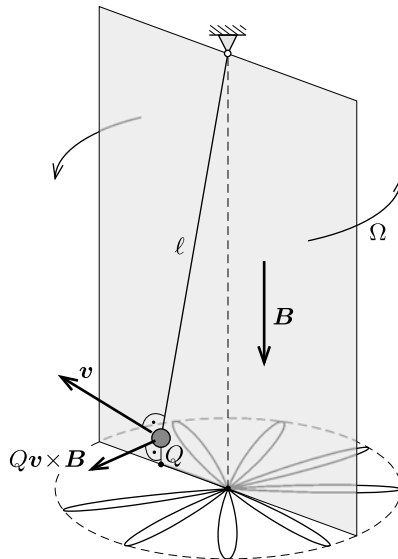
Ez a meglehetősen bonyolult (vektoriális) differenciálegyenlet felsőbb matematikai ismeretek nélkül is megoldható, ha felismerjük, hogy (1) nagyon hasonló egy közönséges síkinga forgó koordináta-rendszerbeli mozgásegyenletéhez (*Foucault-inga* az Északi-sarkon). Ha egy ω_0 körfrekvenciával jellemezhető síkinga kis amplitúdójú lengéseit egy olyan koordináta-rendszerből akarjuk leírni, amely Ω szögsebességgel forog az inerciarendszerhez képest (Ω függőleges vektor), akkor a következő (a *Coriolis-erőt* és a centrifugális erőt is figyelembe vevő) mozgásegyenletet kell tanulmányoznunk:

$$(2) \quad m\mathbf{a} = 2m\mathbf{v} \times \Omega - m\mathbf{r}\omega_0^2 + m\mathbf{r}\Omega^2.$$

Ennek az egyenletnek a megoldását jól ismerjük: mivel a lengés síkja az inerciarendszerben állandó, ezért az Ω szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben $-\Omega$ szögsebességgel forog, tehát $T = 2\pi/\Omega$ idő alatt tesz meg egy teljes fordulatot. Az (1) és (2) egyenleteket összehasonlítva leolvashatjuk, hogy $\Omega = QB/(2m)$, és a mágneses térben lengő inga síkjának szögsebességvektora \mathbf{B} -vel *ellentétes* irányú (lásd az *ábrát*). Az inga ω_0 saját(kör)frekvenciája is kifejezhető a feladat többi paraméterével:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \left(\frac{QB}{2m}\right)^2},$$

de ez az inga síkjának elfordulása szempontjából érdektelen.



A lengési sík tehát a mágneses mező hatására

$$T = 4\pi \frac{m}{QB}$$

idő alatt fordul teljesen körbe.

Megjegyzések. 1. Érdekes, hogy a körülfordulás ideje csupán a kis gömb adataitól és a mágneses mező erősségétől függ, az inga lengési periódusidejétől viszont nem.

2. A QB/m mennyiséget az adott mágneses térhez tartozó *ciklotron-körfrekvenciának* nevezik. (Ekkora körfrekvenciájú mozgást végez egy Q/m fajlagos töltésű részecske, ha B indukciójú, homogén mágneses térben kering.) A mágneses térben lengő inga síkja a ciklotron-körfrekvencia felének megfelelő szögsebességgel fordul körbe.

M. 273. Képzeld el, hogy beülünk egy olyan koordináta-rendszerbe, amely az indukcióvonalakra merőlegesen, állandó v nagyságú, vízszintes sebességgel mozog, és magunkkal viszünk egy Q töltésű testet. A földhöz rögzített rendszerből azt látjuk, hogy a v sebességű töltésre $F = QvB$ nagyságú (a mozgásiránytól függően felfelé vagy lefelé mutató) erő hat.

A mozgó vonatkoztatási rendszerben a töltés áll, nem hat rá Lorentz-erő, mégis „éreznie” kell a függőleges irányban ható erőt. (Kölcsönhatásból származó erő nem függhet attól, hogy milyen vonatkoztatási rendszerből írjuk le az erőhatást.) A látszólagos ellentmondás úgy oldható fel, hogy megfontoljuk, hogyan transzformálódnak az elektromos és mágneses terek, ha egy álló rendszerből hozzá képest mozgóra térünk át. Jelen esetben az álló vonatkoztatási rendszerben csak mágneses tér van, elektromos nincs. Egy (a fényhez képest kis sebességgel) mozgó rendszerben megmarad ugyanez a mágneses mező, de mellette fellép egy $E = vB$ nagyságú elektromos térerősség is, ami biztosítja a mozgó rendszerben látszólag hiányzó $F = QE = QvB$ erőt.

Legyen a mozgó vonatkoztatási rendszer vízszintes v sebessége akkora és olyan irányú, hogy a benne fellépő elektromos mezőtől származó erő éppen kiegyenlítsa a feladatban szereplő testre ható nehézségi erőt:

$$(1) \quad F = QE = QvB = mg, \quad \text{ebből} \quad v = \frac{mg}{QB}.$$

Írjuk le a vizsgált test mozgását ebből a vonatkoztatási rendszerből! Mivel az elektromos erő kiegyenlíti a nehézségi erő hatását, és a test ebben a rendszerben (a koordináta-rendszer mozgásirányát pozitívnak választva) $-v$ kezdősebességgel indul, ezért QvB nagyságú, függőlegesen lefelé mutató eredő erő (mágneses Lorentz-erő) hat rá. Ez az erő a testet lefelé kanyarodó, r sugarú körpályán egyenletes körmozgásra kényszeríti:

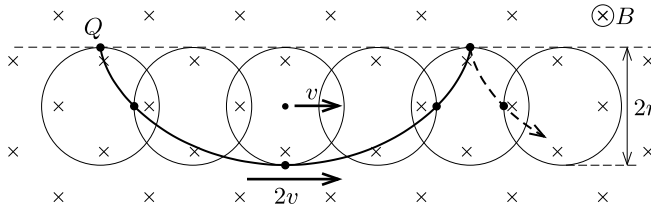
$$(2) \quad QvB = m \frac{v^2}{r},$$

ahonnan a körpálya sugarára (1) figyelembevételével a következőt kapjuk:

$$r = \frac{mv}{QB} = \left(\frac{m}{QB} \right)^2 g.$$

A sebesség és a pályasugár ismeretében a körülfordulási időt könnyen meghatározhatjuk: $T = 2\pi m/(QB)$.

A földhöz rögzített rendszerben a v sebességű egyenletes körmozgáshoz egyenes vonalú, szintén v sebességű egyenletes mozgás adódik hozzá, vagyis a részecske az *ábrán* látható módon (közönséges) ciklois alakú pályán halad: a kiindulási pontból $2r$ mértékben lesüllyed, majd emelkedni kezd, T idő múlva visszajut a kiindulási magasságba, miközben $vT = 2r\pi$ lesz a vízszintes elmozdulása. Itt a részecske egy pillanatra megáll, majd egy újabb ciklois-ív befutásába kezd.



M. 274. A vákuumkamrához rögzített vonatkoztatási rendszerben (\mathcal{K}) az elektronok sebességének nagysága állandó, mert a sebességre merőleges Lorentz-erő csak a sebesség irányát képes megváltoztatni. Tekintsünk egy másik vonatkoztatási rendszert (\mathcal{K}'), amely \mathcal{K} -hoz képest az egyenes vezetővel párhuzamosan, az áram irányában állandó \mathbf{v}_0 sebességgel mozog. A $Q = -e$ töltésű elektronra ható erőnek mindkét koordináta-rendszerben meg kell egyeznie:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q(\mathbf{v}' + \mathbf{v}_0) \times \mathbf{B} = Q(\mathbf{v}' \times \mathbf{B}') + Q\mathbf{E}' = \mathbf{F}',$$

ahol a vesszős mennyiségek a \mathcal{K}' rendszerben tapasztalható értékeket jelölik.

Könnyen beláthatjuk, hogy a vezetékben folyó áram erőssége mindkét koordináta-rendszerben ugyanakkora. A \mathcal{K} rendszerben az egyenes vezető belsejében az elektronok mozognak, a pozitív töltésű rációnok pedig nyugalomban vannak. A \mathcal{K}' rendszerben a vezetési elektronok sebessége (és ezzel együtt az általuk képviselt áramerősség) más lesz, de a mozgó rációnok árama éppen kompenzálja ezt a változást. Ebből következik, hogy a mágneses indukció értéke ugyanakkora a két vonatkoztatási rendszerben ($\mathbf{B} = \mathbf{B}'$). (A fénysebességnél sokkal kisebb transzformációs sebességeknél általánosan igaz, hogy a mágneses tér értéke igen jó közelítéssel változatlan marad.)

Az elektronra ható erőt megadó fenti kifejezésből leolvasható, hogy a \mathcal{K}' rendszerben a változatlan mágneses mező mellett megjelenik egy helyfüggő, az *áram-vezető felé* mutató $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$ sztatikus elektromos tér is (lásd az *ábrát*). Mivel a \mathcal{K} rendszerben a mágneses indukció nagysága az I árammal átjárt egyenes vezetőtől r távolságban

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

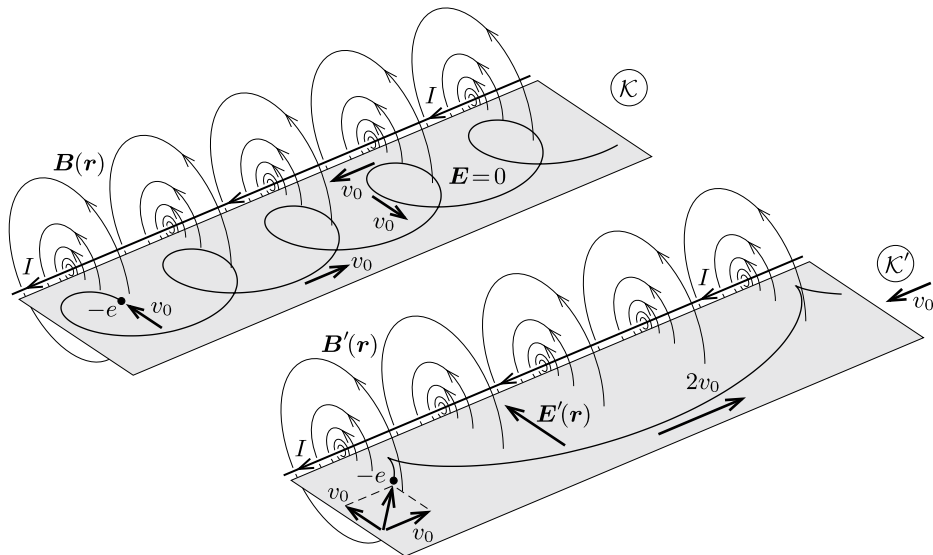
a \mathcal{K}' rendszerben megjelenő elektromos tér nagyságát az

$$E(r) = v_0 B(r) = \frac{\mu_0 v_0 I}{2\pi r}$$

összefüggés adja meg. Nagyon hasonló az elektromos tere egy hengerkondenzátornak. Az analógiát felhasználva (vagy integrálás segítségével) felírhatjuk a \mathcal{K}' rendszerben az elektromos potenciált az egyenes vezetőtől r távolságban:

$$U(r) = \frac{\mu_0 v_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}.$$

(A potenciált a vezetőtől r_0 távolságban választottuk nullának.)



Vizsgáljuk az elektron mozgását a \mathcal{K}' rendszerben! A kezdősebesség nagysága $\sqrt{2}v_0$, ekkor az elektron távolsága az áramjárta vezetőtől r_0 . Amikor a $Q = -e$ töltésű elektron $r_0/2$ távolságra megközelíti a vezetőket, sebessége nullára csökken, ezért az energia megmaradása így írható:

$$\frac{1}{2}m \left(\sqrt{2}v_0\right)^2 - e \frac{\mu_0 v_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r_0} = -e \frac{\mu_0 v_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_0/2}{r_0}.$$

A számszerű adatok behelyettesítése után az elektronok kezdősebességére a

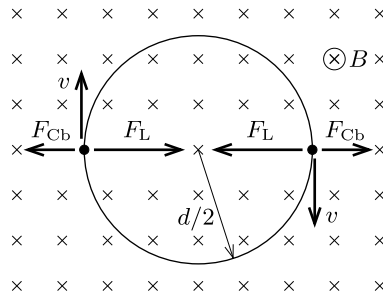
$$v_0 = \frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \ln 2 \approx 2,46 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 250 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

eredményt kapjuk.

Megjegyzések. 1. A kapott sebesség a makroszkopikus, földi testek sebességéhez képest nagy: az első kozmikus sebesség is csak mintegy 8 km/s, és a Naprendszer elhagyásához is elég egy 20 km/s-nál kisebb sebesség. A fény sebességéhez képest viszont kicsi, hiszen az 300 000 km/s. Ezért is lehetett a relativisztikus tömegnövekedéstől eltekinteni a feladat megoldása során. Még a katódsugárcsőben (TV, oszcilloszkóp, elektronmikroszkóp) futó elektronok sebességéhez képest is kis sebességet kaptunk, hiszen már kb. 0,2 V gyorsítófeszültség hatására elérik az elektronok ezt a sebességet.

2. Érdekeség, hogy az r_0 -ról így kilőtt elektron nemcsak hogy $r_0/2$ -re tudja megközelíteni az áramvezetőt, de nem is tud $2r_0$ -nál messzebb eltávolodni tőle. Általánosságban, ha r_0/n -re tudja megközelíteni, akkor nr_0 -ra tud eltávolodni tőle. Másképp fogalmazva: a legkisebb és a legnagyobb távolság mértani közepe az a távolság, ahol éppen az áramvezetőre merőlegesen halad. Ez az állítás a vákuumkamrához képest $-v_0$ sebességgel mozgó koordináta-rendszerbe való transzformációval látható be.

M. 275. a) A mágneses térben mozgó elektronokra akkora Lorentz-erőnek kell hatnia, hogy legyőzze a közöttük fellépő elektrosztatikus taszítóerőt, sőt biztosítsa még az egyenletes körmozgáshoz szükséges centripetális erőt is. A két elektron ugyanazon a $d/2$ sugarú körpályán, egymással szemben, ugyanakkora sebességgel fog mozogni, ezáltal nem változik a közöttük lévő d távolság (1. ábra).



1. ábra

Írjuk fel egy elektron mozgásegyenletét! A $-e$ töltésű, m tömegű és v sebességgel mozgó részecskére

$$F_L = evB$$

nagyságú Lorentz-erő és

$$F_{Cb} = k \frac{e^2}{d^2}$$

Coulomb-erő hat. Az előbbi (megfelelő irányú mozgás esetén) mindig a másik elektron felé mutató erő, az utóbbi azonban mindig taszító jellegű.

Megjegyzés. Elvben figyelembe kellene még vennünk a mozgó elektronok által keltett (pl. a Biot–Savart-törvényből számolható) mágneses teret, és az ebből származó

$$F_{magn} = ev \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{ev}{d^2} = \frac{v^2}{c^2} \cdot F_{Cb}$$

mágneses erőhatást is (c a fénysebesség). Ez az erő azonban egy klasszikusan (nemrelativisztikusan) mozgó részecskére $v \ll c$ miatt elhanyagolható a Coulomb-erő mellett, tehát nem kell számolnunk vele.

Az elektronok mozgásegyenlete az irányokat is figyelembe véve:

$$evB - k \frac{e^2}{d^2} = m \frac{v^2}{d/2}.$$

Ez a kiszámítandó v sebességre nézve másodfokú egyenlet, melynek megoldásai:

$$v = \frac{edB}{4m} \pm \sqrt{\left(\frac{edB}{4m}\right)^2 - \frac{ke^2}{2md}}.$$

Akkor oldható meg a feladat, ha v -re valós érték adódik, vagyis a diszkrimináns nemnegatív. Ebből d -re kapunk egy feltételt:

$$d \geq 2\sqrt[3]{\frac{km}{B^2}} = d_{\text{krit}}.$$

Ezért szerepel a feladat szövegében az a kitétel, hogy a két elektron „elég messze” van egymástól, nem pedig azért, hogy elhanyagoljuk a köztük fellépő Coulomb-erőt. Ha kezdetben a két elektron a kritikus távolságnál közelebb van egymáshoz, akkor a feladatnak nincs megoldása, ha éppen a kritikus távolságra vannak egymástól, akkor egy megoldása van, ha a kritikus távolságnál messzebb vannak az elektronok, akkor két különböző sebességértékű megoldást találhatunk.

b) Ha csak az egyik elektront lökjük meg, a mozgás bonyolultabb lesz, még abban a speciális esetben is, amikor a távolságuk – a feladat kérdésének megfelelően – mindvégig ugyanakkora, d nagyságú marad.

Közel jutunk a megoldáshoz, ha először a feltett – segítő – kérdésre („Milyen pályán mozog ekkor a rendszer tömegközéppontja?”) keressük a választ. Írjuk fel – vektorosan, a szokásos jelöléseket használva – az elektronok mozgásegyenleteit!

$$(1) \quad m\mathbf{a}_1 = k \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - e\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B},$$

$$(2) \quad m\mathbf{a}_2 = k \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - e\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}.$$

Tudjuk, hogy két egyforma tömegű részecske tömegközéppontjára

$$\mathbf{r}_{\text{tkp}} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad \mathbf{v}_{\text{tkp}} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2}, \quad \mathbf{a}_{\text{tkp}} = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2}.$$

Annak érdekében, hogy ezek a mennyiségek megjelenjenek a képleteinkben, adjuk össze a két elektron mozgásegyenletét!

$$m(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = 0 - e(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \mathbf{B},$$

amiből

$$m\mathbf{a}_{\text{tkp}} = -e\mathbf{v}_{\text{tkp}} \times \mathbf{B}$$

következik. (Látható, hogy a Coulomb-kölcsönhatás kiesett a tömegközéppont mozgásegyenletéből.)

Nagyon fontos felismeréshez jutottunk: a két elektronból álló rendszer tömegközéppontja úgy mozog, mint egyetlen elektron a \mathbf{B} indukciójú, homogén mágneses térben, az indukcióvonalakra merőlegesen. Az pedig körpályán mozog, egyenesen!

A tömegközéppont tehát egyenletes körmozgást végez, miközben körülötte „kalimpál” a két elektron. A tömegközéppont mozgásának szögsebessége

$$\omega_{\text{tkp}} = \frac{a_{\text{tkp}}}{v_{\text{tkp}}} = \frac{e}{m} B = \omega_c,$$

ami éppen az elektron *ciklotronfrekvenciája* (adott erősségű mágneses térben – pl. egy részecskegyorsító ciklotronban – ekkora körfrekvenciával keringenek a részecskék.) A tömegközéppont körpályájának sugara

$$R_{\text{tkp}} = \frac{v_{\text{tkp}}}{\omega_{\text{tkp}}} = \frac{v_{\text{tkp}}}{\omega_c}.$$

Vajon hogyan mozognak az elektronok a tömegközéppont körül? Nyilván ennek a kérdésnek a megválaszolása vezet el a feladat hátralévő részének megoldásához. Írjuk fel az 1-es elektron helyvektorát $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{\text{tkp}} + \mathbf{R}$ alakban, vagyis jelöljük a tömegközépponttól az 1-es elektronhoz mutató vektort \mathbf{R} -rel. (Ekkor a másik elektronhoz a tömegközépponttól a $-\mathbf{R}$ vektor mutat.) A tömegközéppontot megadó képlet felhasználásával adódik, hogy

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\text{tkp}} = \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2}.$$

Ezen vektor időbeli változására úgy kaphatunk egyenletet, hogy képezzük az (1) és (2) mozgásegyenletek különbségét:

$$(3) \quad m(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) = 2k \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - e[(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \times \mathbf{B}].$$

A helyvektorok különbsége a fentebb megadott \mathbf{R} vektor kétszerese, a sebességvektorok különbsége tehát az \mathbf{R} vektor időbeli változását megadó \mathbf{V} vektor kétszerese, és hasonló igaz a gyorsulásokra is:

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = 2\mathbf{R}, \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{V}, \quad \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = 2\mathbf{A}.$$

Ezekkel a jelölésekkel a (3) egyenlet ilyen alakot ölt:

$$(4) \quad m\mathbf{A} = k \frac{e^2}{|2\mathbf{R}|^3} 2\mathbf{R} - e(\mathbf{V} \times \mathbf{B}).$$

Ez az egyenlet lényegében ugyanolyan, mint ami a feladat első részére (az álló tömegközéppont esetére) kapott mozgásegyenlet, tehát – alkalmas kezdősebesség esetén – ennek is lehet egyenletes körmozgásos megoldása. Valóban, ha az $\mathbf{R}(t)$ vektor nagysága időben állandó R érték, és az iránya ω szögsebességgel forog körbe, akkor az egyenletes forgómozgás ismert képletei szerint $\mathbf{A} = -\omega^2 \mathbf{R}$ és $\mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{R}\omega B$, és így (4) szerint a tömegközéppont körül keringő elektronpár ω szögsebességére a következő másodfokú egyenlet adódik:

$$(5) \quad \omega^2 - \frac{e}{m} B\omega + \frac{k}{m} \frac{e^2}{4R^3} = 0.$$

Ennek ω -ra csak akkor van valós megoldása, ha a diszkrimináns nemnegatív, amiből

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{km}{B^2}}$$

következik. A minimális távolság, ami mellett ilyen mozgás létrejöhet:

$$d_{\min} = 2R_{\min} = 2\sqrt[3]{\frac{km}{B^2}} = d_{\text{krit}}.$$

(Ez a feltétel akkor is érvényes, amikor a tömegközéppont áll, tehát nem meglepő, hogy a minimális távolság képlete megegyezik a feladat első részében kapott d_{krit} korláttal.)

Próbáljuk meg felvázolni a részecskék pályáját abban a speciális esetben, amikor $d = d_{\min}$, vagyis

$$R = R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{km}{B^2}}.$$

Ezt az értéket (5)-be helyettesítve az elektronok tömegközéppont körüli keringésének szögsebességére

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} B = \frac{1}{2} \cdot \omega_c,$$

vagyis a tömegközéppont szögsebességének *fele* adódik.

Indítsuk el a rendszert úgy, ahogy a *b)* kérdésben szerepelt, vagyis csak az egyik elektront lökjük meg valamekkora v_0 sebességgel, a két részecskét összekötő egyenesre merőlegesen. (Ha a kezdősebesség iránya más lenne, akkor nyilván már a mozgás kezdetén megváltozna a két részecske távolsága.) A másik elektron áll, tehát a tömegközéppont $v_0/2$ sebességgel indul el, és ugyanekkora nagyságú (de egymással ellentétes irányú) mindkét elektronnak a tömegközépponthez viszonyított kezdősebessége.

A tömegközéppont körüli keringésre igaz, hogy

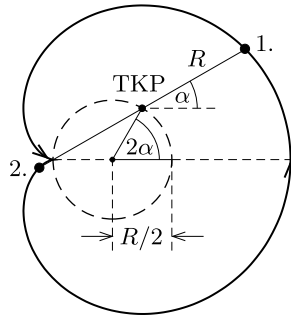
$$\frac{v_0}{2} = R\omega = R\frac{\omega_c}{2}.$$

Ugyanekkor a tömegközéppont keringésére fennáll, hogy

$$\frac{v_0}{2} = R_{\text{tkp}}\omega_c, \quad \text{vagyis} \quad R_{\text{tkp}} = \frac{R}{2}.$$

Ezek szerint a tömegközéppont feleakkora sugarú körpályán kering, mint körülötte az elektronok, továbbá a tömegközéppont keringési ideje is feleakkora, mint a hozzá képest mozgó elektronoké.

Ábrázoljuk vázlatosan a részecskék pályáját! A *2. ábrán* a szemléletesség kedvéért (szaggatott vonallal) berajzoltuk a tömegközéppont pályáját is. Miközben a meglökött elektron α szöggel elfordul a tömegközéppont körül, a tömegközéppont 2α szöggel fordul el saját, feleakkora sugarú körpályáján.



2. ábra

$T = 2\pi/\omega_c$ idő alatt a tömegközéppont egy teljes kört tesz meg; a két elektron azonban csak egy-egy félkört fut be körülötte – éppen *helyet cserélnek!* Ekkor, tehát

$$T = 2\pi \frac{m}{eB}$$

idő múlva áll meg először a meglökött elektron.

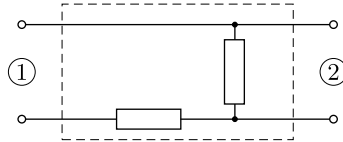
Megjegyzések. 1. A két elektron megrajzolt pályagörbéje (melyet az alakja miatt szívgörbének, kardioidnak is neveznek) csak akkor ilyen egyszerű és áttekinthető, ha a távolságuk a már említett legkisebb távolság az adott erősségű mágneses térben. Ha nagyobb távolság állandóságát követeljük meg, akkor már nehezebben áttekinthető (általában nem is zárt) pályák és mozgások jöhetnek létre.

2. Még bonyolultabb lesz a helyzet akkor, ha a kezdősebesség nem teljesíti a távolság állandóságának megfelelő feltételt. Belátható, hogy még ebben az esetben sem tudnak a részecskék egymástól nagyon eltávolodni, vagy egymáshoz közel kerülni, a távolságuk mindig két szélsőérték között marad, azok között periodikusan ingadozik.



Áramkörök, elektromos vezetés

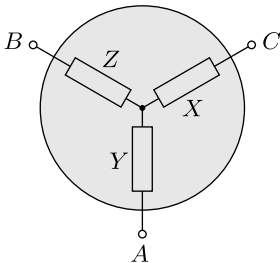
M. 276. Az *ábrán* látható, két egyforma ellenállást tartalmazó egyszerű kapcsolás teljesíti a megadott feltételeket.



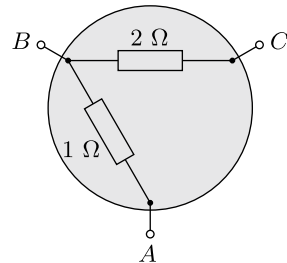
M. 277. Az *1. ábrán* látható ellenállásokra a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$Y + Z = 1, \quad X + Z = 2 \quad \text{és} \quad X + Y = 3.$$

Ennek megoldása: $X = 2$, $Y = 1$ és $Z = 0$ ohm. A deltakapcsolás nyelvén ez annak felel meg, hogy $x = 1$, $y = 2$, z helyén pedig *szakadás*, vagyis „végtelen nagy” ellenállás van (*2. ábra*).



1. ábra

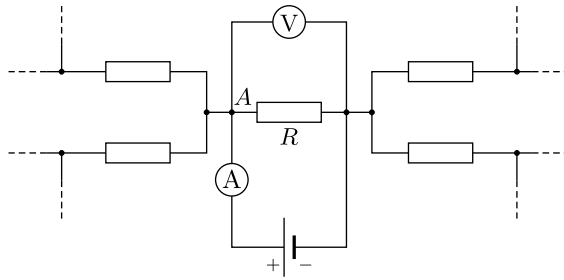


2. ábra

Megjegyzés. A végtelen *nem* szám, nem érvényesek rá az algebra megszokott összefüggései, ez az oka, hogy a formális számolásunk ellentmondásra vezetett. Ha z -t nem végtelen nagyra, csak az 1Ω -nál sokkal (nagyságrendekkel) nagyobb értéknek tekintjük (a fizikában a „végtelen” mindig így értendő!), akkor a feladat szövegében szereplő (1), (2) és (3) egyenletek (a megadott számadatok pontosságának megfelelő közelítésben) valóban teljesülnek.

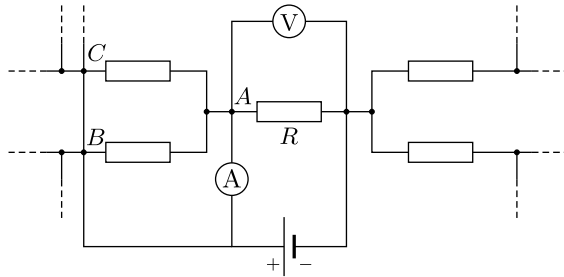
M. 278. Csatlakoztassuk először a telepet az ampermérőn keresztül a mérendő ellenállás kivezetéseire, majd a voltmérőt is kössük ugyanezekre a kivezetésekre, ahogy ezt az *1. ábra* mutatja.

Helytelen az a feltételezés, miszerint a voltmérőn és az ampermérőn látható értékek hányadosa megadja a kérdéses ellenállás értékét, mert nem lehetünk abban biztosak, hogy az ampermérőből az ábrán látható A csomópontba érkező *összes* áram az ellenállás felé halad tovább, és egyáltalán nem folyik semennyi áram ebből a csomópontból az áramkör más részei felé.



1. ábra

A gondot rövidzárok alkalmazásával oldhatjuk meg. Nulla ellenállású vezetékkel kössük össze az A pont összes szomszédos csomópontját a telepnek azzal a kivezetésével, amelyre az ampermérőt csatlakoztattuk, amint ez a 2. ábrán látható.



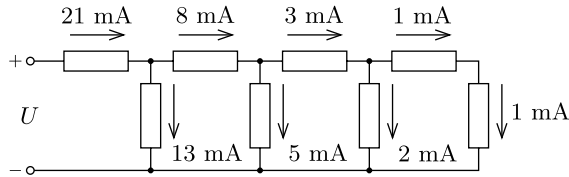
2. ábra

Mivel az ampermérő belső ellenállása elhanyagolható (ideális műszer), az összekötött B, C, \dots csomópontok és az A pont ekvipotenciális. Ebből következőleg nem folyik áram a szomszédos csomópontok és az A pont között, vagyis az ampermérő áramának teljes mértékben át kell folynia a kiszemelt R ellenálláson. Az lehetséges, hogy a telepnek további áramokat is kell szolgáltatnia, melyek a B, C, \dots csomópontok felé folynak, azonban ezek nem befolyásolják a mi mérésünket.

Megjegyzés. Ha a kiszemelt R ellenállással párhuzamosan kapcsolt ellenállásokat is tartalmaz az áramkör, akkor ezek értékét külön-külön *nem tudjuk* megmérni, ilyenkor (a mérendő elem kiforrasztása nélkül) csak az összes párhuzamosan kötött ellenállás *eredőjét* határozhatjuk meg. Ha megpróbálnánk ebben az esetben esetben is a fentebb ismertetett módszert alkalmazni, rövidre zárnánk az ideálisnak feltételezett telepet, ami „végtelen nagy” áramerősséget eredményezne!

M. 279. A lánc jobb szélső elemétől kezdve haladjunk visszafelé, és számozzuk az ellenállásokat innen. Mivel az első ellenálláson 1 mA áram folyik, így a második elemen is 1 mA -nek kell folyni, így mindkét ellenálláson $1-1 \text{ V}$ feszültség esik. Ennek következtében az ellenálláslánc harmadik ellenállására $(1 + 1) \text{ V} = 2 \text{ V}$ feszültség jut, vagyis ezen 2 mA -es áram folyik. A következő ellenálláson $(1 + 2) \text{ mA} = 3 \text{ mA}$ áram folyik, majd a 2 mA -es és 3 mA -es áramú ellenállásokon

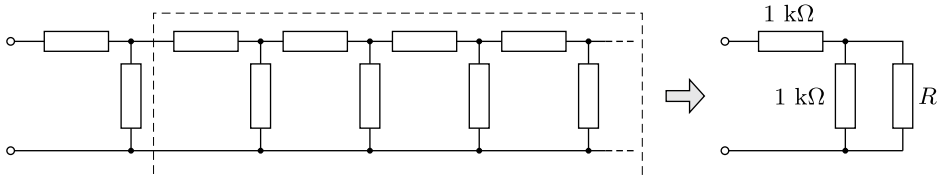
eső $(2 + 3) \text{ V} = 5 \text{ V}$ feszültségből határozhatjuk meg az ötödik ellenállás 5 mA -es áramát, és így tovább, ahogy ezt az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Ha úgy tekintjük, hogy az ellenállásláncot a jobb szélső elemétől kezdve építjük fel, akkor egymást követően sorosan, majd párhuzamosan, újra sorosan, majd újra párhuzamosan csatlakoztatunk elemeket a lánc már meglévő részéhez. A sorosan csatlakoztatott ellenálláson (Kirchhoff csomóponti törvénye értelmében) az előző két ellenálláson folyó áram összege folyik. A párhuzamosan csatlakoztatott elem egy újabb hurkot hoz létre a láncban, az erre jutó feszültség Kirchhoff huroktörvénye szerint megegyezik az előző két ellenálláson eső feszültségek összegével. Mivel az $1 \text{ k}\Omega$ -os ellenálláson a feszültség és az áramerősség (voltban és milliamperben mért) számértéke megegyezik, az előző két ellenállás áramának összege is megegyezik a párhuzamosan csatlakoztatott újabb ellenállás áramával. Tehát ebben az ún. *létraáramkörben* Kirchhoff csomóponti és huroktörvénye úgy teljesül, hogy az egyes ellenállásokon folyó áramok (és a rajtuk eső feszültségek is) megegyeznek az előző két elemen folyó áram (illetve feszültség) összegével. Vegyük észre, hogy az áramok (és a feszültségek) számértékei éppen a híres Fibonacci-sorozat⁵ elemeivel egyeznek meg: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$. A két utolsó ellenállásra $(21 + 13) \text{ V} = 34 \text{ V}$ feszültség esik, ami egyben megegyezik a létraáramkör bemenetére kapcsolt feszültséggel. Mivel a bemeneti 34 V feszültség hatására összesen 21 mA áram folyik, a lánc eredő ellenállása $\frac{34}{21} \text{ k}\Omega = 1,61905 \text{ k}\Omega$.

Ha még egy elemet kapcsolunk a láncba (párhuzamosan), akkor azon is 34 V esik, a teljes áram viszont $(21 + 34) \text{ mA} = 55 \text{ mA}$ értékre nő. Ekkor az eredő ellenállás $\frac{34}{55} \text{ k}\Omega = 0,61818 \text{ k}\Omega$. Ha ezután még egy elemet kapcsolunk a láncba (sorosan), akkor azon is 55 mA áram folyik, a bemenő feszültség pedig $(34 + 55) \text{ V} = 89 \text{ V}$ -ra növekszik. Ekkor a lánc eredő ellenállása $\frac{89}{55} \text{ k}\Omega = 1,61818 \text{ k}\Omega$.



2. ábra

⁵A sorozat bármelyik eleme (a harmadik tagtól kezdve) az előző két elem összegével egyezik meg.

Ha a létraáramkört egyre tovább és tovább építjük, akkor képzeletben „végtelen” hosszú lánchoz juthatunk. Ennek eredő ellenállását azzal a feltételezéssel számíthatjuk ki, hogy a lánc eredő ellenállásán további két tag hozzáadása már nem változtat. Vagyis az egész végtelen láncot egyetlen R ellenállással helyettesítjük, amihez párhuzamosan és sorosan két $1\text{-}1\text{ k}\Omega$ -os ellenállást kapcsolunk, és elvárjuk, hogy ennek a három ellenállásból álló áramkörnek az eredő ellenállása szintén R legyen (2. ábra). Ennek feltétele ($\text{k}\Omega$ egységekben számolva):

$$R = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{R}},$$

ami a következő másodfokú egyenlethez vezet:

$$R^2 - R - 1 = 0.$$

Az egyenlet egyetlen pozitív gyöke adja meg a „végtelen” lánc keresett eredő ellenállását:

$$R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618\,03\text{ k}\Omega.$$

Jól látható, hogy a nyolc vagy tíz elemből álló lánc eredő ellenállása milyen közel van a végtelen lánc ellenállásához, tehát a létraáramkör (az eredő ellenállás szempontjából) már viszonylag kevés elem után is végtelennek tekinthető.⁶

Megjegyzések. 1. A falusi elektromos hálózatok nullvezetéke létraáramkörnek tekinthető. Itt a nullvezeték oszlopokon rögzítik, és bizonyos távolságokonként (mondjuk minden tizedik oszlopnál) a nullvezeték leföldelik. Az ilyen áramkör kétféle ellenállásból áll; a „végtelen” lánc eredő ellenállása a fentiekhez hasonlóan számítható.

2. Érdekes észrevenni, hogy a végtelen ellenálláslánccra jellemző másodfokú egyenlet a híres aranymetszési egyenlet.⁷ Ennek megoldása az aranymetszés arányszáma: $(1 + \sqrt{5})/2 = 1,618\,03\dots$, ami tehát megegyezik az egységnyi ellenállásokból álló végtelen lánc eredő ellenállásának számértékével. Az is látszik, hogy a Fibonacci-sorozat egymást követő elemeinek hányadosa az aranymetszés arányszámához tart, amit meglepően gyorsan közelít. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a páros sorszámú elemeket az előző páratlannal osztva az arányszámot alulról közelítjük, míg a páratlanokat az előző párossal osztva a határértéket felülről közelítjük meg.

3. Az egységnyi ellenállású elemekből álló végtelen lánc eredő ellenállása egy (végtelen) emeletes törttel is kifejezhető. Ha a fogyasztókat a lánc elejéről kezdve rakjuk össze, ezt kapjuk:

$$R = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

A végtelen tört (is) mutatja, hogy $R - 1 = 1/R$.

⁶A véges hosszú létraáramkör eredő ellenállását csak azért adtuk meg ilyen sok tizedesjegyre (egyébként indokolatlan pontossággal), hogy a sorozat gyors konvergenciáját érzékeltessük.

⁷Az aranymetszés problémájánál egy szakaszt úgy kell két részre vágnunk, hogy a rövidebb és a hosszabb rész aránya a hosszabb metszet és a szakasz teljes hosszának arányával legyen egyenlő.

M. 280. Egy C kapacitású kondenzátoron eső feszültség nagysága és a rajta átfolyó (ω körfrekvenciájú) váltóáram nagysága között

$$\frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{\omega C}$$

a kapcsolat, azaz a kondenzátor váltóáramú ellenállása $1/(\omega C)$; továbbá a szinuszosan váltakozó áram fázisa a feszültséghez képest 90° -ot *siet*. (U_C és I_C jelentheti a feszültség és áramerősség csúcserőértékét vagy effektív értékét is.) Ugyanez az arány tekercsnél

$$\frac{U_L}{I_L} = L\omega$$

(vagyis egy L öninduktivitású tekercs váltóáramú ellenállása $L\omega$), viszont a rajta átfolyó áram a feszültséghez képest 90° -ot *késik*, tehát éppen ellenkező előjelű, mint amilyen egy kondenzátornál lenne. Emiatt egy tekercs (adott frekvenciájú váltóáramú körben) úgy tekinthető, mintha negatív (bizonyos $C_L < 0$) kapacitású kondenzátor lenne:

$$L\omega = -\frac{1}{\omega C_L}, \quad \text{azaz} \quad C_L = -\frac{1}{\omega^2 L}.$$

Célszerű bevezetni a

$$k^2 = \frac{1}{\omega^2 LC} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

jelölést. A dimenziótlan k szám azt mutatja meg, hogy egy-egy L és C elemből álló egyszerű rezgőkör ω_0 körfrekvenciája hányszorosa lenne a feladatban szereplő (a lánc paramétereitől független, kívülről megszabott) ω körfrekvenciának. Ezzel a jelöléssel a láncban szereplő tekercsek mindegyikének „effektív kapacitása” így írható: $C_L = -k^2 C$.

Egy fizikafeladatban a „végtelen lánc” kifejezés értelemszerűen azt jelenti, hogy a lánc „nagyon hosszú”, elemeinek száma nagyon nagy (de véges). Tekintsük először az n hosszúságú (n tekercset és n kondenzátort tartalmazó) láncot! Mivel a lánc nem tartalmaz ohmos ellenállást, a rajta átfolyó áram és a rá eső feszültség közötti fáziseltolódás vagy $+90^\circ$, vagy -90° . Az egyik esetben a lánc helyettesíthető egy bizonyos C_n kapacitású kondenzátorral, a másik esetben pedig egy alkalmasan választott induktivitású tekercssel. Tételezzük fel, hogy az előbbi eset áll elő, és határozzuk meg C_n értékét! (Ha C_n -re negatív szám adódna, az annyit jelent, hogy a lánc tekercsként viselkedik.)

Az $n = 1$ esetben egy C kapacitású kondenzátor és egy L induktivitású tekercs (vagyis egy másik, C_L kapacitású kondenzátor) soros eredőjét kell meghatároznunk:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_L}, \quad \text{ahonnan} \quad C_1 = \frac{CC_L}{C + C_L} = \frac{C \cdot (-k^2 C)}{C + (-k^2 C)} = \frac{k^2}{k^2 - 1} C.$$

$n = 2$ esetén egy C kapacitású kondenzátor sorosan kapcsolódik egy tekercs és C_1 párhuzamos eredőjéhez:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1 + (-k^2 C)},$$

általában pedig

$$\frac{1}{C_{n+1}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_n - k^2 C},$$

ahonnan

$$C_{n+1} = \frac{C(C_n - k^2 C)}{C_n + (1 - k^2)C}.$$

Célszerű valamennyi kapacitást $C_n = x_n \cdot C$ módon C egységekben kifejezni, mert akkor a fenti rekurziós formula a viszonylag egyszerű

$$(1) \quad x_{n+1} = \frac{x_n - k^2}{x_n + 1 - k^2}$$

alakot ölti.

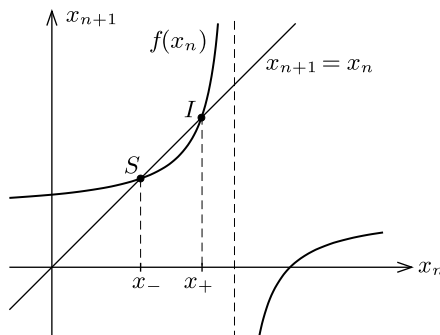
Kérdés: van-e az x_n számsorozatnak (vagyis a C_n kapacitásértékeknek) határértéke, ha $n \rightarrow \infty$? Mondhatjuk azt, hogy ha $n \gg 1$, akkor $x_n \approx x_{n+1}$, és az (1) rekurziós összefüggés (a közelítőleg egyenlő x_n számértékeket x -szel jelölve) egy másodfokú egyenletre vezet:

$$x = \frac{x - k^2}{x + 1 - k^2}, \quad \text{vagyis} \quad x^2 - k^2 x + k^2 = 0.$$

Ennek az egyenletnek $k > 2$ esetben két valós gyöke van:

$$(2) \quad x_{\pm} = \frac{k^2}{2} \pm \frac{k}{2} \sqrt{k^2 - 4}.$$

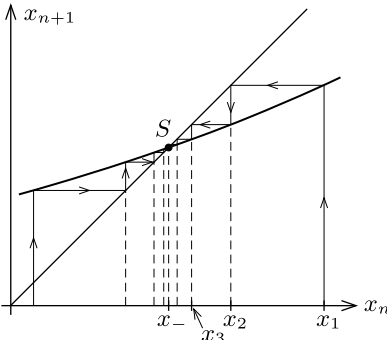
Vajon melyik gyök az „igazi”, vagy esetleg mindkettőnek lehet fizikai jelentése? Gyanítható, hogy a (2)-ben szereplő gyökök közül a kisebb x_- a „helyes”. Ha ugyanis olyan tekercset választunk, amelyre L nagyon kicsi (vagyis $\omega_0 \gg \omega$), akkor a tekercsek rövidzárként viselkednek, az A és B pontok közötti eredő váltóáramú ellenállás tehát egyetlen C kapacitású kondenzátoréval egyezik meg. Valóban, $k \gg 1$ esetben $x_- \approx 1$, tehát az A és B pontok közötti eredő váltóáramú ellenállás $1/\omega C$, viszont $x_+ \approx k^2 \gg 1$ nem felel meg fenti várakozásnak.



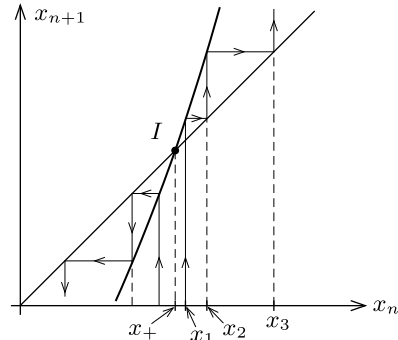
1. ábra

Vizsgáljuk meg a kérdést más oldalról is. Térjünk vissza az (1) rekurziós összefüggéshez. Ábrázoljuk az $x_{n+1} = f(x_n)$ függvényt egy derékszögű koordináta-rendszerben, és rajzoljuk be ugyanebbe az $x_{n+1} = x_n$ egyenes képét is. Ha $k > 2$, a rekurziós összefüggésnek megfelelő görbének (hiperbola) és a 45° -os egyenesnek két közös pontja van (1. ábra), a korábban kiszámított x_- -nak megfelelő S , valamint az x_+ -nak megfelelő I .

Induljunk ki x_1 ismert értékéből (vagy bármilyen más módon választott x_1 számból), majd a hiperbola és az egyenes segítségével grafikusán határozzuk meg az x_2, x_3, x_4 stb. pontokat (2. ábra). Látható, hogy ezek igen gyorsan befutnak az S pontnak (az ún. *stabil fixpontnak*) megfelelő x_- -ba. Ha a kezdeti x_1 értéket x_+ közelébe (attól tetszőlegesen kicsi, de véges távolságra) választjuk, az iteráció eredményeképpen adódó pontok gyors ütemben eltávolodnak x_+ -tól; az iteráció I fixpontja tehát *instabil* (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

A fixpontok stabilitásának az a feltétele, hogy az iterációs függvény meredekségének abszolút értéke a fixpontban kisebb legyen, mint a 45° -os egyenesé; ez S -re teljesül, I -re viszont nem.

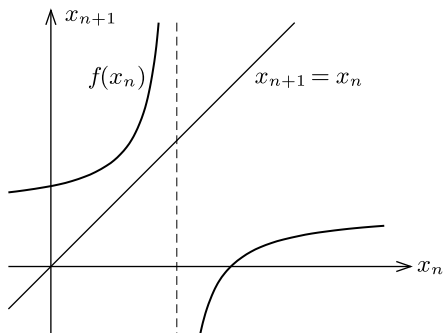
Mindez azt mutatja, hogy $\omega < 1/(2\sqrt{LC})$ körfrekvencián a „végtelen lánc” eredő váltóáramú ellenállása – a távoli végének lezárásától, tehát x_1 számértékétől függetlenül – csak egy jól meghatározott érték lehet:

$$Z_{\text{lánc}} = \frac{1}{\omega x_- C} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\omega^2 LC}}{2\omega C}.$$

Mi a helyzet

$$\omega > \frac{1}{2\sqrt{LC}} = \frac{\omega_0}{2}$$

esetben? Ilyenkor az (1) iterációnak *nincs fixpontja* (vagyis a hiperbolának és a 45° -os egyenesnek nincs közös pontja, lásd a 4. ábrát). Ebben az esetben az x_n számsorozatnak nincs határértéke, tehát a hosszú (de nem végtelen hosszú!) lánc váltóáramú ellenállása attól függ, hogy ténylegesen milyen hosszú is a „nagyon hosszú”.

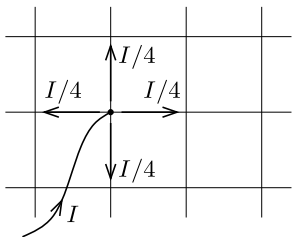


4. ábra

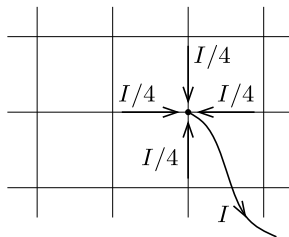
Megjegyzés. A feladat jól tárgyalható a komplex impedanciák segítségével is. Ezekkel felírva az (1)-nek megfelelő rekurziós összefüggést, majd keresve ennek fixpontját azt kapjuk, hogy a *végtelen lánc* eredő impedanciája $\omega > 1/(2\sqrt{LC})$ esetén ohmos részt is tartalmaz. Ez azért meglepő, mert akármilyen hosszú, de véges sok (ideális) tekercsből és kondenzátorból álló láncnak csak meddő ellenállása van (impedanciája tisztán kapacitív vagy tisztán induktív).

A végtelen lánc ohmos ellenállásának megjelenése a lánc mentén terjedő hullámokkal áll kapcsolatban. (Ezek a hullámok csak $\omega > \omega_0/2$ frekvencia esetén léphetnek fel.) Egy megadott frekvenciájú bemenő jelnek időben végtelen hosszúnak kellene lennie, ilyen a valóságban *nem létezik*. Reálisan megvalósítható azonban egy nagyon hosszú, $T_{\text{hullám}}$ ideig tartó, majdnem pontosan szinuszosan változó „hullámcsomag”, amely a lánc mentén terjedni képes. Ez a hullám előbb-utóbb eléri a véges (de nagyon hosszú) lánc végét, majd onnan visszaverődik, és valamekkora $T_{\text{visszhang}}$ idő múlva visszaér a lánc elejére. Ideális esetben az LC -lánc elején ugyanannyi energiát kapunk vissza, mint amennyit korábban betápláltunk, a láncnak tehát csak meddő ellenállása van. Ez azonban csak akkor figyelhető meg, ha teljesül a $T_{\text{hullám}} \gg T_{\text{visszhang}}$ feltétel. A másik határesetben, amikor $T_{\text{visszhang}} \gg T_{\text{hullám}}$, a lánc elején befektetett energia látszólag eltűnik (disszipálódik), ilyenkor az LC -lánc ohmos ellenállást is tartalmazó áramkört elemként viselkedik.

M. 281. Hajtsuk végre a következő gondolat kísérletet. Válasszuk ki egy rácspontot, és vezessünk be ezen a ponton I erősségű áramot. A kiválasztott pontból (szimmetriaokok miatt) a lehetséges négy irány mindegyikébe ugyanakkora, $I/4$ erősségű áramok indulnak, amint ezt az 1. ábra mutatja.

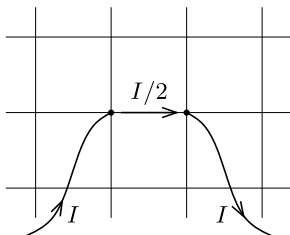


1. ábra



2. ábra

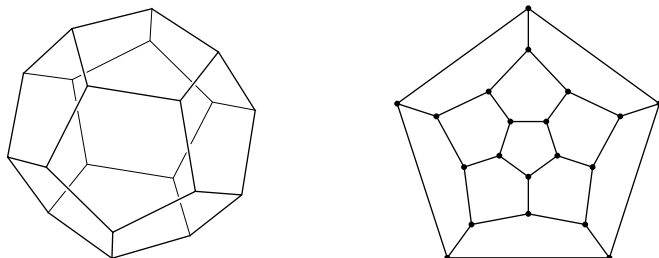
Második lépésben tekintsük a kiválasztott pont egyik szomszédját, és az előző gondolatkísérlettől függetlenül most „vegyünk ki” ebből a pontból I áramot. A szomszédos rácspontokba befutó négy egyenrangú ellenálláson most is azonos nagyságú, $I/4$ erősségű áramok folynak (2. ábra).



3. ábra

Végül vegyük a két eset szuperpozícióját, tekintsük őket együtt. A skalár mennyiségek (áram, potenciál) az áramköri egyenletek linearitása miatt egyszerűen algebrailag összegződnek. A két szomszédos pont között U feszültség (potenciálkülönbség) jelenik meg, az egyik ponton I áram megy be a rácsba, a másikon I áram folyik ki. Egyszerű módon nem tudjuk megmondani, hogy a rács éleiben mekkora áramok folynak, csak a két szomszédos rácspont között folyó áramot határozhatjuk meg könnyen. Itt ugyanis a fenti két esetben tárgyalt áramok éppen összeadódnak, így összesen $I/2$ áram folyik át ezen az élen (3. ábra). Ha viszont R ellenálláson $I/2$ erősségű áram folyik, akkor az ellenállás két végén $U = R \cdot I/2$ feszültség mérhető. A végtelen rács két szomszédos pontja között mérhető eredő ellenállás tehát $R_e = U/I = R/2$.

M. 282. Jelöljük az alakzat csúcspontjainak számát c -vel, az egyes csúcspontokból kiinduló élek számát pedig n -nel. (Az 1. ábrán látható dodekaédernél és síkbeli hálójánál például $c = 20$ és $n = 3$.) Ha valamelyik csúcsonál I_0 áramot vezetünk be, az összes többi csúcsból pedig $I_0/(c - 1)$ erősségű áramot elvezetünk, akkor a szimmetria miatt a bevezetési csúcsból kiinduló éleken $I = I_0/n$ áram folyik.



1. ábra

Szuperponáljunk erre az árameloszlásra egy olyat, amelyet a szomszédos pontból kivezetett I_0 erősségű áram és a többi rácspontba bevezetett $I_0/(c - 1)$ erősségű

áram hoz létre. A „közös” ellenálláson folyó $I = 2I_0/n$ áram hatására $U = 2RI_0/n$ feszültség esik, és mivel az áramkörön átfolyó teljes áram most

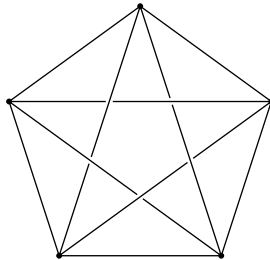
$$I = I_0 + \frac{I_0}{c-1} = \frac{c}{c-1}I_0,$$

így az eredő ellenállás:

$$R_e = \frac{U}{I} = \frac{2(c-1)}{nc}R.$$

A dodekaéder esetében ennek értéke $\frac{19}{30}R$, kockánál pedig $\frac{7}{12}R$.

Megjegyzés. A fenti gondolatmenet szabályos poliédereken kívül érvényes minden olyan szabályos alakzatra, amelyben a csúcsok is és az egy csúcsból kiinduló élek is „egyenértékűek”. A 2. ábrán látható, legkisebb nem síkbarajzolható teljes gráfra (K_5 gráf, vagy pentachoron) például $c = 5$ és $n = 4$, az eredő ellenállás két csúcs között tehát $\frac{2}{5}R$. A végtelen négyzetrácsnál $c \rightarrow \infty$ és $n = 4$, így az eredő ellenállás a szomszédos rácspontok között $R/2$, ahogy ezt az *előző feladatban* is megkaptuk.



2. ábra

M. 283. Jelöljük az eredeti rács két szomszédos csomópontja közötti eredő ellenállást $R_{\text{eredő}}$ -vel, az összekötő elem eltávolítása után maradó rácsnál pedig R_{csonkolt} módon. Az eredeti rácsot a csonkolt rács és egy R ellenállás párhuzamos kapcsolásának tekinthetjük, vagyis az ellenállások között felírhatjuk a következő összefüggést:

$$\frac{1}{R_{\text{eredő}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{\text{csonkolt}}},$$

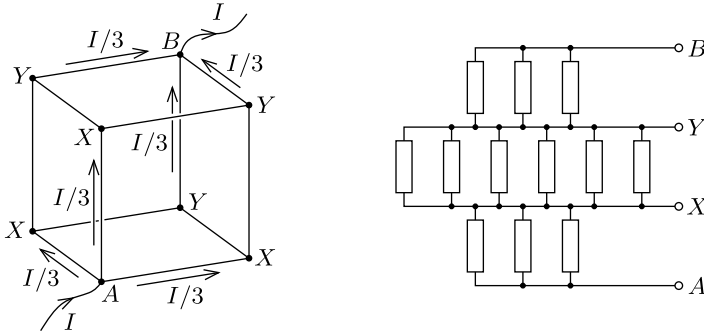
amiből már könnyen kifejezhetjük a csonkolt áramkör eredő ellenállását:

$$R_{\text{csonkolt}} = \frac{R \cdot R_{\text{eredő}}}{R - R_{\text{eredő}}}.$$

Például a végtelen négyzetrács esetén az eredő ellenállás két szomszédos csomópont között eredetileg $R_{\text{eredő}} = R/2$, míg ha eltávolítjuk a kiszemelt csomópontok közötti ellenállást, akkor a maradék áramkör ellenállása $R_{\text{csonkolt}} = R$ lesz.

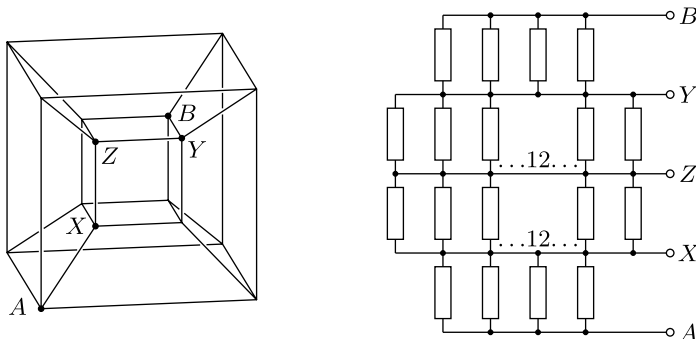
M. 284. Vezessünk be a kocka egyik csúcsán I áramot, és az adott ponthoz tartozó testátló másik végén vezessük el azt (lásd az 1. ábra bal felét). Szimmetriai okok miatt a kérdéses testátló két végpontjához tartozó három-három ellenálláson

azonos, $I/3$ erősségű áram folyik, tehát ezen ellenállásokon azonos feszültség esik. Így az ábrán látható X -szel, illetve Y -nal jelölt pontok külön-külön ekvipotenciálisak, vagyis összeköthetők. Ezután a kapcsolás az 1. ábra jobb oldalán látható módon rajzolható át, és az eredő ellenállás akár fejben is kiszámolható. Ha mind-egyik ellenállás $1\ \Omega$ -os, akkor az eredő ellenállás $\frac{5}{6}\ \Omega$.



1. ábra

Az egydimenziós „kocka” egyszerűen egy egyenes szakasz, ennek eredő ellenállása önmaga, vagyis $1\ \Omega$. A kétdimenziós „kocka” a négyzet, amit az egyenes szakasz oldalhosszúságú eltolásával kapunk meg. A négyzet valamely átlójának egyik végpontjából két ellenállás indul ki, és a másik végpontba is két ellenállás fut be. Ha áramot engedünk az átló végpontjain keresztül, a másik átló végpontjai ekvipotenciális pontok lesznek (tehát összeköthetők), és így két-két párhuzamosan kötött ellenállás soros kapcsolásához jutunk. A négyzet esetén az eredő ellenállás emiatt $1\ \Omega$. A háromdimenziós kocka testátlójának végpontjaiból – mint láttuk – három-három ellenállás indul ki, a további hat ellenállás az ekvipotenciális „felületeket” köti össze.



2. ábra

A négydimenziós „kockát” úgy kaphatjuk meg, ha a háromdimenzióst önmagával párhuzamosan eltoljuk a negyedik dimenzió felé oldalhossznyi távolsággal, és a megfelelő csúcspontokat összekötjük. A négydimenziós kockának tehát

$12 + 12 + 8 = 32$ oldaléle van, mert a rendes kockának 12, az eltoltnak szintén 12, és a nyolc-nyolc csúcspontot 8 él köti össze. Mérési célra készíthetünk négydimenziós „kockát”, illetve annak eltorzított három dimenziós vetületét, ha az eredeti kockát megtartjuk, készítünk egy nagyobbat, amellyel körül vesszük az eredetit, és az egymásnak megfelelő csúcspontokat újabb ellenállásokkal kötjük össze (2. ábra bal fele). Ekkor a negyedik dimenzióba történő eltolás helyett háromdimenziós nagyítást végeztünk, ezért lesz torz a kockánk, ennek azonban az ellenállások szempontjából nincs jelentősége. A 2. ábrán feltüntettük a nyolc lehetséges testátló egyikének A és B végpontját is; elektromos kapcsolásunkban itt vezetjük be, illetve ki az áramot.

A négydimenziós „kocka” A pontjából 4 él indul ki, ezek végpontjai (X pontok) ekvipotenciálisak, és ugyanez teljesül a B pontból kiinduló élek végpontjaira is (Y pontok). Az egyik ekvipotenciális „felületről” a másikra legrövidebben 2 ellenálláson keresztül juthatunk el. Ilyen „közbenső” ellenállásból 24 van, hiszen az összes, $2^4 = 32$ ellenállásból 4-4 a testátló végpontjaihoz kapcsolódik. Ennek a 24 ellenállásnak a (2. ábrán Z -vel jelölt) „belső” pontjai is ekvipotenciálisak, összeköthetők, vagyis 12-12 ellenállás párhuzamosan, azok együttese pedig sorosan van kapcsolva. Az átrajzolt kapcsolás segítségével megállapíthatjuk, hogy az eredő ellenállás $\frac{2}{3} \Omega$.

Megjegyzés. A feladat n -dimenziós kockára is általánosítható, és a megfelelő áramkör tetszőleges n -re ténylegesen megvalósítható, egyforma 1Ω -os ellenállásokból összerakható. Ha a megfelelő ekvipotenciális pontok összekötésével az áramkört azonos ellenállások párhuzamos kapcsolására, majd ezek sorbakapcsolására bontjuk, az egyik testátló menti eredő ellenállásra a következő formulát kapjuk:

$$R_n = \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{2\binom{n}{2}} + \frac{1}{3\binom{n}{3}} + \dots + \frac{1}{n\binom{n}{n}},$$

ami

$$R_n = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\binom{n-1}{0}} + \frac{1}{\binom{n-1}{1}} + \frac{1}{\binom{n-1}{2}} + \frac{1}{\binom{n-1}{3}} + \dots + \frac{1}{\binom{n-1}{n}} \right]$$

alakban is felírható. Érdekes, hogy n növekedtével R_n egyre kisebbé válik, és határértékben $R_n \approx 2/n \rightarrow 0$. Ez azért tűnhet meglepőnek, mert a sokdimenziós kockáknál az áram csak sok (legalább n) ellenálláson keresztül juthat el a testátló egyik végétől a másikig. Az eredő ellenállás mégis nullához tart, melynek oka az, hogy a dimenziószám növelésével a párhuzamos áramvezető „utak” száma is nő, méghozzá gyorsabb ütemben, mint az utak hossza.

M. 285. Az egyik vezető szál felületén pozitív, a másikon pedig negatív töltések halmozódnak fel, felületegységenként $+\sigma$ és $-\sigma$. Az általuk keltett elektromos mezőt külön-külön fogjuk kiszámolni egy-egy vezetőre, majd képezzük az erőterek szuperpozícióját. Ha csak egyetlen töltött szálunk lenne, annak elektromos erőtere hengersizmetrikus lenne, és a szál tengelyétől r távolságra

$$E(r) = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

nagyságú volna. Ezt a Gauss-törvény alapján láthatjuk be, ha azt egy r sugarú, L hosszúságú, a szálak koaxiálisan körülvevő hengerre írjuk fel:

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot L d \pi \cdot \sigma.$$

Innen $E(r)$ -t kifejezve valóban a fentebb megadott $1/r$ -es távolságfüggésű térerősség adódik.

Egyetlen szál elektromos erőtere a két vezető között $U/2$ potenciálkülönbséget hoz létre, hiszen a két szál együttes erőtere adja a telep feszültségének megfelelő U -t. A feszültség és a térerősség kapcsolata:

$$\frac{U}{2} = \int_{r=d/2}^{D-(d/2)} E(r) dr \approx \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} \int_{r=d/2}^D \frac{1}{r} dr = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} \ln \frac{2D}{d},$$

tehát a szálak felületi töltéssűrűsége:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{d \ln 100}.$$

A szálak között ható elektromos vonzóerő az egyik szál által a másik szál helyén létrehozott (átlagos) elektromos térerősség és a másik szál töltésének szorzata:

$$F_{\text{elektromos}} = E(r = D) \cdot Q = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{D} \cdot \sigma d \pi L = \frac{\varepsilon_0 \pi L U^2}{2D \cdot (\ln 100)^2}.$$

A mágneses erő a vezetőkben folyó, I erősségű áram mágneses teréből származik:

$$F_{\text{mágneses}} = BIL = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} IL = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{L}{D} \frac{U^2}{R^2}.$$

(A mágneses indukció nagyságát az Ampère-féle gerjesztési törvényből számoltuk, az utolsó lépésnél pedig felhasználtuk az $I = U/R$ Ohm-törvényt; R a keresett terhelő ellenállás.)

A megadott feltétel szerint $F_{\text{elektromos}} = F_{\text{mágneses}}$, vagyis

$$\frac{\varepsilon_0 \pi L U^2}{2D \cdot (\ln 100)^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{L}{D} \frac{U^2}{R^2},$$

ahonnan

$$R = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \ln 100 = 553 \Omega.$$

Ekkora terhelés esetén lesz egyenlő nagyságú az ellentétes töltések vonzóereje és az ellentétes irányban folyó áramok taszítóereje.

Megjegyzés. Érdekes, hogy R nem függ sem a vezeték hosszától, sem a telep feszültségétől, és még a $D/d \gg 1$ arány is csak logaritmikusan (tehát egy lassan változó

függvény argumentumában) fordul elő a képletében. R nagyságrendjét az univerzális $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377 \Omega$ mennyiség határozza meg, amit hullámimpedanciának, vagy más néven a *vákuum impedanciájának* szoktak nevezni.

M. 286. Tekintsük először valamelyik gyűrűnek egy kis darabját. Rögzítsük a koordináta-rendszerünket ehhez a kis darabhoz, ami a gyűrű β szöggyorsulása miatt *nem* inerciarendszer. A kiválasztott kis darabnak $r\beta$ nagyságú tangenciális gyorsulása van, emiatt a fémbe lévő m (effektív) tömegű vezetési elektronok $mr\beta$ nagyságú tehetetlenségi erő megjelenését „érik”. Ez az erő éppen akkora, mintha a vezetékben $E = mr\beta/e$ nagyságú elektromos térerősség hatna, vagyis mintha egy-egy gyűrűre

$$U = 2\pi r E = \frac{2\pi m r^2 \beta}{e}$$

feszültséget kapcsoltunk volna. Ekkora feszültség mindegyik gyűrűben $I = U/R$ áramot indít, aminek következtében a gyűrűrendszer (avagy a rövidrezárt szolenoid) közepén

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{2\pi m r^2 n \beta}{e R}$$

nagyságú mágneses indukció jön létre.

Megjegyzések. 1. A Stewart–Tolman-effektus nagyon tanulságos, mert annak ellenére, hogy a gyűrűk semlegesek, és sem külső elektromos mező, sem pedig külső mágneses mező nincs jelen, a rendszerben – *nem várt módon*, a töltéshordozók véges tömege következtében – mágneses mező jön létre.

2. A Stewart–Tolman-effektust kísérletileg elektrolitokban könnyebb kimutatni, mint fémekben, mert a hatás egyenesen arányos a töltéshordozók tömegével. Hasonló – a töltéshordozók tehetetlenségével kapcsolatos – jelenség tapasztalható egy rúd egyenes menti gyorsításakor, ilyenkor töltésszétválást tapasztalunk.

3. Ha a gyűrűket pozitív körüljárás szerint (az óramutató járásával ellentétesen) forgatjuk egyre gyorsabban, akkor a kristályrácsához képest az elektronok mindig kissé lemaradva mozognak. Ezért a pozitív ionok árama nagyobb, vagyis az eredő áram ugyan-csak az óramutató járásával ellentétes irányú, tehát a gyűrűk középpontjában a mágneses indukcióvektor a forgástengely pozitív irányába mutat, ahogy ezt a jobbkéz-szabály alapján szokás szemléltetni.

4. Inerciarendszerben gondolkodva is értelmezhetjük a Stewart–Tolman-effektust; a fém vezetési (szabad) elektronjait valaminek gyorsítani kell, és ez nem lehet más, mint a vezetési elektronok és a pozitív ionokból álló kristályrács kölcsönhatása, amit akár *elektromotoros erőnek* is hívhatunk.

M. 287. Jelöljük a vezetékben folyó áramot I -vel, a vezeték keresztmetszetét A -val, a szóban forgó anyagok fajlagos ellenállását pedig ρ_{Fe} -vel és ρ_{Cu} -val. Egy ℓ hosszúságú, homogén vezetékre felírva az Ohm-törvényt:

$$U = I \frac{\rho \ell}{A},$$

ahonnan a vezetékben lévő elektromos térerősségre

$$(1) \quad E = \frac{U}{\ell} = \frac{\varrho I}{A}$$

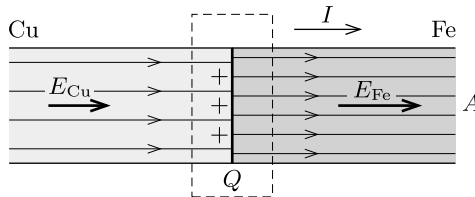
adódik.

Megjegyzés. Az (1) egyenlet jobb oldalán a vezetékben kialakuló $j = I/A$ áramsűrűség jelenik meg. Izotrop fémek esetén az áramsűrűség és az elektromos térerősség iránya megegyezik, ezért ilyen esetekben az

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varrho \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

vektoros összefüggés is fennáll, amit differenciális Ohm-törvénynek neveznek. (σ a fajlagos vezetőképesség, a fajlagos ellenállás reciproka.) Ennek az egyenletnek az előnye, hogy lokálisan (helyről helyre) írja le a töltéshordozók áramlását.

A réz fajlagos ellenállása kisebb, mint a vasé, (1) értelmében tehát a rézben az elektromos térerősség kisebb, mint a vasban. A térerősségek különbözősége – Gauss törvénye szerint – azzal jár együtt, hogy a két fém csatlakozásánál töltés halmozódik fel (lásd az *ábrát*).



Az összegyűlt töltés nagyságát úgy határozhatjuk meg, hogy az ábrán látható (szaggatott vonallal jelölt) zárt felületre felírjuk a Gauss-törvényt:

$$Q = \varepsilon_0 (E_{\text{Fe}} - E_{\text{Cu}}) A = \varepsilon_0 I (\varrho_{\text{Fe}} - \varrho_{\text{Cu}}).$$

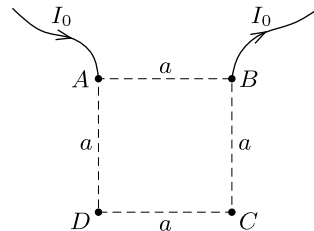
Érdekes, hogy ez a töltésmennyiség csak az áramerősségtől és anyagi állandóktól függ, a vezeték keresztmetszetétől nem.

Az ismert adatokat behelyettesítve a töltésre $Q \approx 5 \cdot 10^{-21}$ C adódik, ami az elemi töltésnek mindössze harmincadrésze! Annak ellenére, hogy a vezetékben ténylegesen megvalósítható, makroszkopikus nagyságú, jól mérhető áram folyik, a felhalmozott töltésre a mikroszkopikus (atomfizikai) töltésegység töredékét kaptuk. Ez a furcsaság arra utal, hogy a klasszikus elektrodinamika (kicsiny golyócskáknak elképzelt töltéshordozókkal) nem írhatja le minden tekintetben helyesen az elektromos jelenségeket. A felvetett kérdés megnyugtató tárgyalása csak a kvantumelmélet és a statisztikus fizika bonyolultabb törvényeinek alkalmazásától remélhető. (Az előbbi a „szétkent elektronhullám” fogalmával, az utóbbi pedig a statisztikus átlagolással képes leírni az elemi töltés töredékének látszólagos megjelenését.)

M. 288. A 281. feladathoz hasonlóan a szuperpozíció „trükkjét” alkalmazzuk: először külön-külön tárgyaljuk az áram be- és kivezetését, majd a feladatban leírt mérést ezek szuperpozíciójának tekintjük. A síkra rajzolt négyzet egyik csúcsát jelöljük A -val, itt vezetünk be I_0 áramot, amit az ezzel szomszédos B csúcson vezetünk ki. A négyzet két másik csúcsa (C és D) között mérjük az U_0 feszültséget, ahogy ezt az *ábra* mutatja.

Ha először I_0 áramot küldünk be az A ponton, akkor az áram a féltérben egyenletesen, (fél)gömb-szimmetrikusan oszlik el, vagyis az A ponttól r távolságban az áramsűrűség (egységnyi felületen átfolyó áram nagysága):

$$j(r) = \frac{I_0}{2\pi r^2}.$$



Ez az összefüggés nagyon kis r távolságokra nem érvényes (az áramsűrűség nem tart végtelenhez), mert az A pontban lévő elektróda méretét megközelítve az összefüggés nyilvánvalóan érvényét veszti.

Az Ohm-törvény lokális (helyi) változata az ún. differenciális Ohm-törvény, amely az áramsűrűséget az adott helyen fellépő \mathbf{E} elektromos térerősség és a helyi ρ fajlagos ellenállás segítségével fejezi ki: $\mathbf{j}(r) = \mathbf{E}(r)/\rho$ (lásd az előző feladat megoldását). Ennek segítségével meghatározhatjuk a féltérben kialakuló elektromos térerősség nagyságát:

$$E(r) = \frac{I_0 \rho}{2\pi r^2}.$$

A térerősségből a potenciálfüggvényt (és annak két pont közötti különbségét, a feszültséget) általában integrálással határozhatjuk meg; esetünkben azonban egy egyszerű analógia alapján is megkaphatjuk azt. Emlékeztetünk arra, hogy egy Q nagyságú ponttöltés elektromos tere $1/r^2$ -tel, potenciálja pedig $1/r$ -rel arányos, és mindkét esetben ugyanaz az arányossági tényező ($E = kQ/r^2$, illetve $U = kQ/r$). Ez azt jelenti, hogy a feladatunkban meghatározott térerősségnek a következő potenciálfüggvény felel meg (ha a végtelen távoli pont potenciálját választjuk nullának):

$$U(r) = \frac{I_0 \rho}{2\pi r}.$$

Minél közelebb van tehát egy pont az áram bevezetési helyéhez, annál magasabb a potenciálja. A D és C pontokra ezért $U_D > U_C$ teljesül, és a két pont potenciálkülönbsége

$$U_D - U_C = \frac{I_0 \rho}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{2}a} \right) = \frac{I_0 \rho (2 - \sqrt{2})}{4\pi a}.$$

Második lépésben tekintsük azt az esetet, amikor I_0 áramot vezetünk ki a B pontból. Minden megegyezik az előzőekkel, csak a mennyiségek (áram, áramsűrűség, térerősség, potenciál) előjele fordul az ellentettjére. A potenciál a vizsgált féltérben: $U(r') = -I_0 \rho / (2\pi r')$, ahol r' a B ponttól mért távolság. A D és C pontok közötti feszültség most is ugyanolyan előjelű és ugyanakkora nagyságú,

mint az első esetben. Ha a vizsgált két esetet egymásra szuperponáljuk, akkor megvalósul a feladatban megadott helyzet, és a D és C pontok között éppen a fenti két (egyforma) potenciálkülönbség összegét, vagyis

$$U_0 = \frac{I_0 \varrho (2 - \sqrt{2})}{2\pi a}$$

feszültséget mérünk. Innen a kérdéses fajlagos ellenállás kifejezhető:

$$\varrho = \frac{(2 + \sqrt{2}) \pi a U_0}{I_0}.$$

Megjegyzés. Ezt a módszert széles körben alkalmazzák a gyakorlatban, például közetek fajlagos ellenállásának meghatározására. Természetesen nem végtelen feltételeken mérnek, hanem olyan nagy térfogatokat és síkokat választanak, amelyekhez képest az a négyzetoldal elhanyagolhatóan kicsi.

M. 289. Ha egy Q_0 töltésű, C kapacitású kondenzátort R ellenálláson keresztül „kisütünk”, akkor a kondenzátor töltése időben a

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)}$$

függvény szerint csökken, és a $Q_0/2$ értéket

$$(1) \quad T_{1/2} = RC \ln 2$$

idő alatt éri el. (Ezt az időtartamot a radioaktív bomlásoknál használt kifejezés mintájára nevezhetjük *felezési időnek*.) A feladatbeli esetben C a magában álló gömb kapacitása, R pedig az elektromosan gyengén vezető levegő „helyettesítő” ellenállása. Egy r_0 sugarú, Q töltésű gömb potenciálja (a végtelen távoli ponthoz viszonyítva) $Q/(4\pi\epsilon_0 r_0)$, így kapacitása:

$$(2) \quad C = 4\pi\epsilon_0 r_0.$$

Nehezebb feladat a töltött gömb körüli levegő ellenállásának meghatározása. A környező ($1/\sigma$ fajlagos ellenállású) levegőt – gondolatban – a fémgömbbel koncentrikus, vékony gömbhéjakra oszthatjuk. Egy-egy gömbhéj vastagsága legyen Δr , felülete pedig $4\pi r^2$ (itt r a gömbhéj átlagos sugara). Egy ilyen gömbhéj elektromos ellenállása (a radiálisan folyó áramokkal szemben):

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta r}{4\pi r^2},$$

a sok-sok „sorosan kapcsolt” gömbhéj eredő ellenállása pedig

$$(3) \quad R = \sum \Delta R = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum \frac{\Delta r}{r^2}.$$

A fenti összeg (a gömbhéjak vastagságát fokozatosan csökkentve) egy integrállal számítható ki:

$$(4) \quad R = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma r_0}.$$

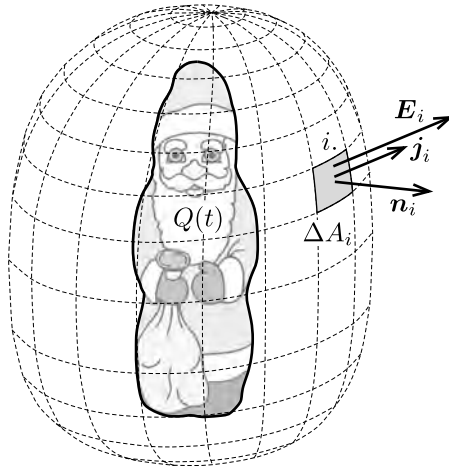
Ugyanez az eredmény integrálás nélkül is megkapható, ha felhasználjuk, hogy a (3) összegzéssel teljesen analóg módon kell kiszámítani egy ponttöltés télerősségéből a végtelen távoli ponthoz viszonyított potenciálját.

Az (1), (2) és (4) összefüggések alapján a fémgömb töltésének felezési ideje:

$$T_{1/2} = RC \ln 2 = \frac{1}{4\pi\sigma r_0} \cdot 4\pi\epsilon_0 r_0 \ln 2 = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \ln 2.$$

Érdekes, hogy a felezési idő nem függ a fémgömb méretétől, csupán a levegő vezetőképessége és egy univerzális természeti állandó határozza meg azt.

M. 290. Vegyük körbe gondolatban a csokimikulást egy zárt felülettel! A zárt felületet osszuk fel kis felületdarabkákra, és jelöljük az i -edik darabka felszínét ΔA_i -vel, a darabka helyén a csokimikulás által létrehozott télerősséget \mathbf{E}_i -vel, az áramsűrűséget pedig \mathbf{j}_i -vel.



A zárt felületen áthaladó elektromos áram megadja a csokimikulás $Q(t)$ töltésének csökkenési ütemét:

$$\frac{\Delta Q(t)}{\Delta t} = - \sum_i \mathbf{j}_i \mathbf{n}_i \Delta A_i,$$

ahol \mathbf{n}_i az i -edik felületdarabka (a zárt felületből kifelé mutató) normálisa (a felület érintősíkjára merőleges egységvektora). A differenciális Ohm-törvény szerint

a \mathbf{j}_i áramsűrűség arányos az \mathbf{E}_i térerősséggel, az arányossági tényező pedig éppen a levegő σ vezetőképessége:

$$\mathbf{j}_i = \sigma \mathbf{E}_i.$$

Ezt felhasználva a mikulás töltésének csökkenési üteme

$$\frac{\Delta Q(t)}{\Delta t} = -\sigma \sum_i \mathbf{E}_i \mathbf{n}_i \Delta A_i.$$

Az egyenlet jobb oldalán megjelenő összeg nem más, mint a csokimikulás elektromos terének a zárt felületre vonatkoztatott fluxusa, ami a Gauss-törvény értelmében éppen a felület által bezárt töltés $1/\varepsilon_0$ -szorososa:

$$\frac{\Delta Q(t)}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} Q(t).$$

Ez az egyenlet analóg egy sugárzó mintában található radioaktív magok számának csökkenési ütemét leíró egyenlettel, így a két egyenlet megoldása is hasonló:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t} = Q_0 \cdot 2^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \ln 2} t} = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}},$$

ahonnan leolvasható, hogy a mikulás töltése

$$T_{1/2} = \frac{\varepsilon_0 \ln 2}{\sigma}$$

idő alatt csökken a kezdeti érték felére.

Azt a meglepő eredményt kaptuk tehát, hogy a felezési idő sem a csokimikulás méretétől, sem az alakjától *nem függ*, tehát ugyanakkora, mint az *előző feladatban* a töltött fémgömb esetén.



Elektromágneses indukció, időben változó mezők

M. 291. Tegyük fel, hogy a rúd v sebességgel mozog a lejtőn, miközben I erősségű áram folyik benne. A mágneses mező $IB\ell$ nagyságú Lorentz-erőt fejt ki a rúdra, amely a Lenz-törvény értelmében fékezi a rúd mozgását. A test mozgásegyenlete:

$$ma = mg \sin \alpha - IB\ell.$$

Ez az egyenlet mindhárom esetben érvényes, a különbséget az indukált feszültség és a rúdban folyó áram közötti eltérő kapcsolat eredményezi.

a) Ha az áramkör lezárását R ohmos ellenállással valósítjuk meg, akkor az I áram és az $U = B\ell v$ indukált feszültség között az $I = U/R = B\ell v/R$ összefüggés áll fenn. Ebből látszik, hogy a fékezőerő a sebességgel egyenes arányos, vagyis egy maximális sebességhez közelítve a rúd már (gyakorlatilag) egyenletes mozgással halad tovább. A maximális sebességet a mozgásegyenletből az $a = 0$ feltétel mellett kaphatjuk meg:

$$v_{\max} = \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 \ell^2}.$$

Megjegyzés. A rúd gyorsulását megadó

$$a = g \sin \alpha - \frac{B^2 \ell^2}{mR} v = g \sin \alpha \left(1 - \frac{v}{v_{\max}} \right)$$

összefüggést a $v^* = v - v_{\max}$ változó bevezetésével a radioaktív bomlás egyenletével analóg egyenletre vezethetjük vissza. Ennek jól ismert megoldását felhasználva a rúd sebességének időfüggésére végül a

$$v(t) = v_{\max} \left(1 - e^{-\frac{g \sin \alpha}{v_{\max}} t} \right)$$

eredményt kapjuk. A rúd $x(t)$ elmozdulását a sebesség integrálásával határozhatjuk meg:

$$x(t) = v_{\max} t - \frac{v_{\max}^2}{g \sin \alpha} \left(1 - e^{-\frac{g \sin \alpha}{v_{\max}} t} \right).$$

b) Ha a sínpart C kapacitású kondenzátorral zárjuk le, akkor a mozgásegyenlet és az indukált feszültség képlete változatlan alakban érvényes marad, azonban az indukált feszültség és az áram kapcsolata más lesz. A kondenzátor töltését az indukált feszültség határozza meg:

$$Q = CU = CB\ell v.$$

A rúdon átfolyó áram éppen a kondenzátor töltésének idő szerinti változási ütemével egyenlő:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C \frac{\Delta U}{\Delta t} = CB\ell \frac{\Delta v}{\Delta t} = CB\ell a,$$

vagyis a rúdban folyó áram erőssége egyenesen arányos a rúd gyorsulásával. Ha az áram fenti kifejezését behelyettesítjük a mozgásegyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy a rúd egyenletesen gyorsulva mozog a sínpáron:

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + B^2 \ell^2 C} = \text{állandó.}$$

A mágneses indukció hatása tehát csökkenti a nehézségi erő által okozott gyorsulást. A rúd sebessége és a kondenzátor töltése az eltelt idővel egyenes arányban nő, a körben folyó áramerősség és a rúdra ható erők állandók.

c) Ha a sínpár lezárását egy L induktivitású tekerccsel valósítjuk meg, akkor az indukált feszültség és az áram között az

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = Blv = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

összefüggést írhatjuk fel. A mozgás kezdőpillanatában $I = 0$ és $x = 0$, emiatt a fenti egyenletből nemcsak a változások arányossága következik, hanem az is, hogy maga az áram is egyenesen arányos a rúd elmozdulásával:

$$LI = Blx.$$

Ha ebből az összefüggésből kifejezzük az áramerősséget, és behelyettesítjük a mozgásegyenletbe, akkor a következő egyenletre jutunk:

$$ma = mg \sin \alpha - \frac{B^2 \ell^2}{L} x.$$

A rúdra ható erő tehát egy állandó tag és egy, a kitéréssel egyenesen arányos, a kitéréssel ellentétes irányú tag összege. Ez éppen olyan, mint egy rugóra akasztott test esete, ha a testet a rugó nyújtatlan állapotában engedjük el. A rúd tehát ebben az esetben harmonikus rezgőmozgást fog végezni az

$$x_0 = \frac{mgL \sin \alpha}{B^2 \ell^2}$$

egyensúlyi helyzet körül. A rezgés amplitúdója $A = x_0$, a rúd kitérésének időfüggése pedig

$$x(t) = A(1 - \cos \omega t), \quad \text{ahol} \quad \omega^2 = \frac{B^2 \ell^2}{mL}.$$

M. 292. a) A kondenzátor átkapcsolásának pillanatában $I = U_0/R$ áram kezd folyni a rúdban, ami $IB\ell$ nagyságú erőhatással jár, tehát a kezdőpillanatban a rúd

$$a_0 = \frac{U_0 B \ell}{mR}$$

gyorsulással indul el.

A mozgó rúdban feszültség indukálódik, ami a Lenz-törvény értelmében akadályozza a rúdban folyó áramot. A kondenzátor feszültsége addig csökken, és közben a rúdban indukálódó feszültség addig nő, amíg egymás hatását ki nem oltják. Ezután a rúd (ha a súrlódás valóban elhanyagolható) az elért maximális sebességét megtartva egyenletesen mozog tovább. Ennek feltétele:

$$(1) \quad B\ell v_{\max} = \frac{Q_{\min}}{C}.$$

A rúd mozgásegyenlete:

$$(2) \quad ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = IBl = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} Bl,$$

ahol a gyorsulást és az áramot a sebesség és a kondenzátor töltésének változási ütemével fejeztük ki. Látható, hogy a sebesség változási üteme egyenesen arányos a töltés változási gyorsaságával. Ez az arányosság nemcsak az elemi különbségekre, hanem a teljes megváltozásokra is érvényes. A rúd sebessége nulláról v_{\max} -ra növekszik, a kondenzátor töltése pedig $Q_0 = CU_0$ -ról Q_{\min} -re csökken, tehát a (2) egyenlet alapján

$$(3) \quad mv_{\max} = Bl(Q_0 - Q_{\min}).$$

Az (1) és (3) egyenletekből kiszámíthatjuk a rúd végsebességét és a kondenzátor maradék töltését:

$$v_{\max} = \frac{BlCU_0}{m + B^2\ell^2C}, \quad Q_{\min} = \frac{B^2\ell^2C^2U_0}{m + B^2\ell^2C}.$$

b) A fenti összefüggésekből leolvashatjuk, hogy a rúd maximális sebessége egyenesen arányos a kondenzátor kezdeti U_0 feszültségével. Emiatt a rúd végső mozgási energiája U_0^2 -tel, vagyis (adott C és m mellett) a rendszer kezdeti elektrosztatikus energiájával arányos. Az arányossági tényezőt tekinthetjük a leírt szerkezet (mint elektromágneses „ágyú”) η hatásfokának, ami – némi algebrai átalakítás után – így írható:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}mv_{\max}^2}{\frac{1}{2}CU_0^2} = \left(\frac{\sqrt{m}}{Bl\sqrt{C}} + \frac{Bl\sqrt{C}}{\sqrt{m}} \right)^{-2}.$$

A zárójelben álló összeg két tagjának szorzata 1, vagyis (a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség alapján) az összeg legalább 2. Ezek szerint az elektromágneses ágyú hatásfoka legfeljebb 25% lehet.

Megjegyzés. Ha a maximális hatásfok $m = B^2\ell^2C$ feltételét beírjuk a kondenzátor maradék töltésének kifejezésébe, leolvashatjuk, hogy $Q_{\min} = CU_0/2$, ez a kondenzátor kezdeti töltésének éppen a fele. Eszerint a kondenzátor kezdeti energiájának csak a negyede marad meg, negyede pedig a rúd mozgási energiáját fedezi. A kezdeti energia másik fele az R ellenállású rudat melegíti Joule-hő formájában. Az R ellenállás értéke

csak a rúd gyorsulásában játszik szerepet, a kialakuló végállapot energiaviszonyait nem befolyásolja.

M. 293. A rúd t idő elteltével valamekkora $x(t)$ távolságra lesz az A ponttól. Ekkor a rúd és a V alakú vezető szárai által kijelölt háromszög területe

$$T(x) = x^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

a mágneses fluxus tehát

$$\Phi(t) = B \cdot T(x).$$

A fluxus időegységre eső változása adja meg az indukált feszültség nagyságát:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B \frac{\Delta T}{\Delta t}.$$

A T terület az $x(t)$ függvényen keresztül függ az időtől.

Az áramkör pillanatnyi ellenállása $R = r\ell$, ahol $\ell(x) = 2x \operatorname{tg}(\alpha/2)$ a rúd és a V alakú vezető érintkezési pontjai közötti távolság. Az indukált feszültség hatására áram indul meg a zárt vezetőkörben, melynek erőssége

$$I = \frac{U}{R} = \frac{B}{r\ell} \frac{\Delta T}{\Delta t},$$

a rúdra tehát a mágneses mező

$$F = IB\ell = \frac{B^2}{r} \frac{\Delta T}{\Delta t},$$

nagyságú, a sebességet csökkentő Lorentz-erővel fog hatni. Newton mozgástörvénye szerint

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = - \frac{B^2}{r} \frac{\Delta T}{\Delta t},$$

amiből a

$$\frac{B^2}{r} T(x) + mv = \text{állandó}$$

„megmaradási tétel” következik. $T(x)$ ismert alakját és a kezdeti feltételt felhasználva írhatjuk:

$$\frac{B^2}{r} x_0^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + mv_0 = \frac{B^2}{r} x^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + mv.$$

Látható, hogy x növekedtével v egyre csökken, és az

$$x = x_{\max} = \sqrt{x_0^2 + \frac{mv_0 r}{B^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}$$

helyzetben a rúd megáll. (Feltételezzük, hogy a feladat szövegében az „legendően hosszú” azt jelenti, hogy a rúd nem esik le a V alakú vezetőről.) A megállás ideje – elvben – végtelen nagy, a valóságban azonban a fellépő súrlódás és közegellenállás

miatt „csak” nagyon nagy. A sebesség, valamint a megtett út időbeli változását integrálszámítással vagy numerikus módszerekkel lehet meghatározni.

M. 294. A tekercsben létrejövő B' mágneses indukció a Föld B_0 indukciójának és a tekercsben folyó áram által keltett B indukciónak az összege:

$$(1) \quad B' = B_0 \pm B.$$

A \pm előjel a korong kétféle lehetséges forgásirányának felel meg. Ebben a B' indukciójú mágneses térben a megforgatott korongban lévő $-e$ töltésű elektronokra sugárirányú Lorentz-erő hat, melynek nagysága a középponttól a korong pereme felé haladva egyenletesen növekszik zérusról $er\omega B'$ értékre. Ez az átlagosan $er\omega B'/2$ nagyságú erő

$$U_i = \frac{r^2\omega}{2} B'$$

feszültséget indukál a korongban, melynek hatására az R ellenállású tekercsen

$$(2) \quad I = \frac{U_i}{R} = \frac{r^2\omega}{2R} B'$$

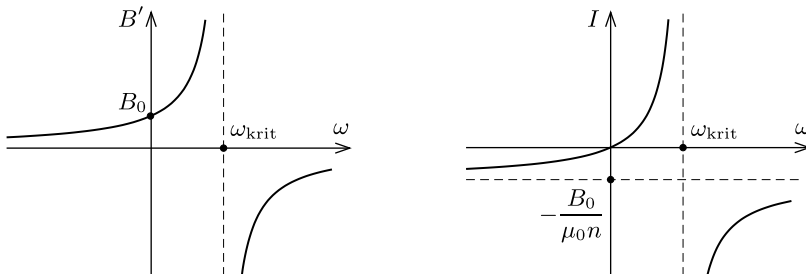
erősségű áram folyik át. Ez az áram meghatározza a tekercs saját mágneses indukcióját:

$$(3) \quad B = \mu_0 n I.$$

Az (1)–(3) egyenletekből B , B' és I meghatározható. Az (1) egyenletben szereplő kétféle előjelet úgy vehetjük figyelembe, hogy a szögsebesség pozitív és negatív értékeit egyaránt megengedjük. (Tekintsük ω azon értékeit pozitívnak, amelyeknél a tekercs mágneses tere növeli a földi mágneses teret.) Az eredő mágneses mezőre, illetve az áramerősségre a következőket kapjuk:

$$B' = \frac{2RB_0}{2R - \mu_0 n r^2 \omega}, \quad I = \frac{B_0 r^2 \omega}{2R - \mu_0 n r^2 \omega}.$$

A korong álló helyzetében az áram nyilván nulla, a tekercsben kialakuló eredő mágneses indukció pedig megegyezik a földi B_0 mágneses indukcióval.



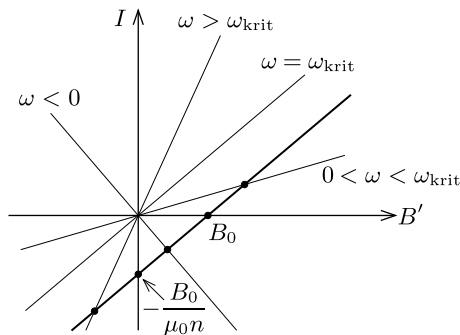
1. ábra

Ha a forgásirány olyan, hogy a tekercs tere lerontja a külső mágneses teret ($\omega < 0$), akkor a tekercs növekvő nagyságú (negatív) szögsebességével az eredő mágneses indukció monoton csökken, igen nagy ω esetén nullához tart. A tekercsben folyó áram nagyon gyors forgásnál $-B_0/(\mu_0 n)$ értékhez tart (éppen ekkora áram egyenlíti ki a földi mágneses teret).

Ellentétes forgásirány ($\omega > 0$) esetén a tekercsben folyó áram növeli a földi mágneses indukciót, emiatt nagyobb feszültség indukálódik és nagyobb áram folyik, ami a mágneses indukció további növekedéséhez vezet (pozitív visszacsatolás). Egy bizonyos „kritikus” szögsebességnél,

$$\omega_{\text{krit}} = \frac{2R}{\mu_0 n r^2}$$

értéknél a mágneses indukció is és az áramerősség is végtelen nagy értéket akar felvenni (1. ábra). Ilyen állapot azonban nem valósulhat meg: ha a szögsebességet fokozatosan növeljük, azt tapasztaljuk, hogy egyre nagyobb áram folyik, egyre nagyobb lesz a tekercsben fejlődő hő, egészen addig, amíg a vezetékek szét nem égnek!



2. ábra

Jobban megérthetjük a rendszer furcsa viselkedését, ha a tekercs árama és az eredő mágneses indukció közötti kapcsolatot grafikusán is ábrázoljuk (2. ábra). A (2) egyenlet szerint I és B' arányos egymással, méghozzá úgy, hogy az arányossági tényező ω -tól függ. Grafikusán ez egy, az origón átmenő egyenesnek felel meg, amelynek meredeksége ω -val arányos. Ugyanakkor (1) és (3) szerint $B' = B_0 \pm \mu_0 n I$, ami ugyancsak lineáris kapcsolat, grafikonja $1/(\mu_0 n)$ meredekségű (ω -tól független) egyenes, amely nem halad át az origón. Ennek a két egyenesnek a metszéspontja határozza meg a ténylegesen kialakuló áramerősséget és az eredő mágneses indukciót. Ha $\omega = \omega_{\text{krit}}$, akkor a két egyenes párhuzamos, és az egyenletrendszernek nincs megoldása: a kritikus szögsebességhez tartozó állapot nem valósulhat meg. (Reális számadatokat tekintve a kritikus szögsebesség olyan nagy érték, hogy a gyakorlatban még csak meg sem közelíthető.)

A tekercsben fejlődő Joule-hőt a korong forgatása során végzett mechanikai munkának kell fedeznie. Az elektromos teljesítmény:

$$P_{\text{el}} = RI^2,$$

az egységnyi idő alatt végzett mechanikai munka pedig a forgatónyomaték és a szögsebesség szorzata:

$$P_{\text{mech}} = M\omega = \frac{1}{2}IB'r^2\omega.$$

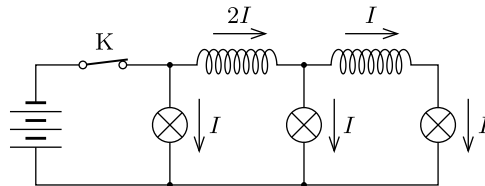
(Felhasználtuk, hogy a forgatónyomaték az $IB'r$ erő és az $r/2$ átlagos erőkar szorzatával egyenlő.) B' és I közötti kapcsolatot felhasználva közvetlenül adódik, hogy $P_{\text{el}} = P_{\text{mech}}$.

Megjegyzések. 1. Érdemes átgondolni, hogyan érvényesül a Lenz-törvény a feladatban leírt eszköz esetén. A Lenz-törvény szerint a keletkező áram a korong forgását fékezi. Jól látszik ez (a csak elvileg megvalósítható) $\omega > \omega_{\text{krit}}$ esetben, amikor a B' eredő mágneses indukció is, illetve a körben folyó I áramerősség is előjelet vált, azonban a Lorentz-erő (és így a forgatónyomaték is) ugyanolyan előjelű marad.

2. A feladat megoldásának meglepő furcsasága az, hogy a korongot akár pozitív, akár negatív forgásirányban pörgetjük igen nagy szögsebességgel, ugyanakkora és ugyanolyan irányú áram jön létre, ami mindkét forgásirány esetében éppen nullára kompenzálja a tekercsben a földi mágneses teret.

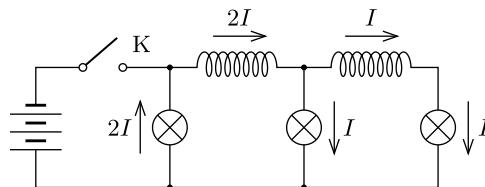
3. A feladatban szereplő furcsa eszközt *unipoláris dinamónak* nevezik.

M. 295. A kapcsoló zárása után hosszabb idővel az áramkörben az 1. ábrán látható áramok folynak. Az I áramerősség értékét a telep feszültsége és a lámpák ellenállása határozza meg.



1. ábra

A kapcsoló kikapcsolása után egy nagyon kicsi idővel a tekercseken folyó áram még majdnem ugyanakkora, mint korábban volt. (Ha nem így lenne, akkor az nagyon gyors ütemű mágneses fluxusváltozásnak felelne meg, és ez nagyon nagy feszültséget indukálna a tekercsekben.) A tekercseken tehát $2I$ és I erősségű áram folyik, és ezek egyértelműen meghatározzák a lámpákon átfolyó áramerősségeket is (2. ábra).



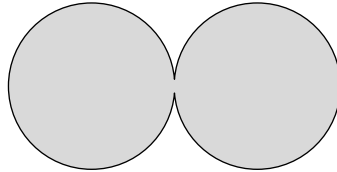
2. ábra

Ezek szerint a kapcsolóhoz legközelebb lévő lámpa hirtelen felfénylik, a másik kettő fényereje viszont nem változik. (Természetesen mindez csak rövid ideig érvényes, később mindhárom lámpa elhalványul, majd kialszik.)

M. 296. Induljunk ki az 1. ábrán látható két, egyenként $R = L/(2\pi)$ sugarú körlapból, melyek egy kicsiny darabon összeérnek. Ha ezt az alakzatot a körlapok síkjára merőleges, homogén, de időben változó mágneses térbe helyezzük, a határgörbéjén végigvezetett drótdarabban

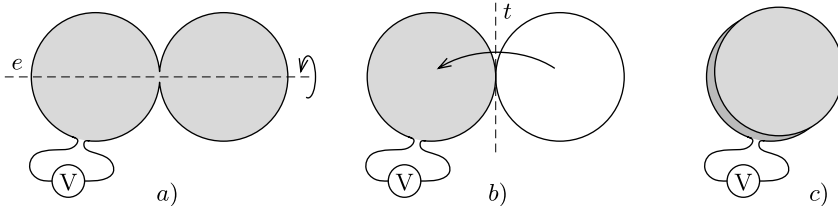
$$U = 2R^2\pi \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

feszültség indukálódik.



1. ábra

Tekerjük meg 180° -kal a jobb oldali körlapot az e szimmetriatengely körül a 2. ábra a) részén látható módon, ekkor a felső (mondjuk sötétre festett) fele alulra kerül, ahogy azt a b) ábra mutatja. Fordítsuk el ezután ugyanezt a körlapot a t tengely körül (majdnem pontosan) 180° -kal (c) ábra). Így most mindkét körlap sötét fele felülre került, a határgörbe pedig éppen a feladatban szereplő Möbius-szalag határvonala.



2. ábra

Egyenletes ütemben változó mágneses mezőben tehát

$$U = 2R^2\pi \frac{\Delta B}{\Delta t} = k \frac{L^2}{2\pi}$$

feszültséget jelez a voltmérő. Ez az érték sokkal nagyobb, mint amekkorát a papírdarab területe alapján naiv módon gondolhatnánk. A Möbius-szalagra illeszkedő (egyoldalú) felület nagysága nem egyezik meg a papírszalag területének nagyságával, vékony szalagoknál sokkal nagyobb annál!

Az indukált feszültséget úgy is kiszámíthatjuk, hogy a vezetékét a „megtekerésnél” két egymeneses „tekercsrre” vágjuk szét, és az egyes menetekben indukálódott feszültséget (a tekercselési iránynak megfelelően) előjelesen összegezzük. Jelen esetben a két meneten gondolatban végighaladva ugyanolyan körüljárási irányban haladunk, tehát az egyes menetek $U_0 = kR^2\pi$ feszültsége összegeződik, $U = 2U_0$.

M. 297. Bontsuk fel a Föld mágneses terét függőleges és vízszintes komponensekre. A függőleges komponens nem indukál áramot a gyűrűben, mert a fluxusa mindvégig nulla. Jelöljük a földmágnesség vízszintes komponensét \mathbf{B} -vel, a gyűrű szögsebességét pedig ω -val! Az r sugarú gyűrűben a mágneses fluxus a

$$\Phi = r^2\pi B \cos \omega t$$

összefüggés szerint változik az időben. Ennek a fluxusnak a változási üteme Faraday indukciós törvénye szerint az indukált feszültséggel egyenlő:

$$U = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = r^2\pi B\omega \sin \omega t.$$

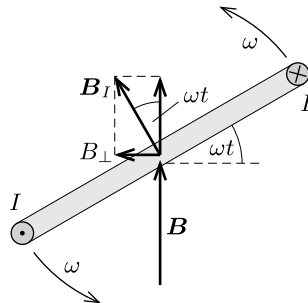
(Ezt az eredményt deriválással vagy egy harmonikus rezgőmozgást végző test mozgásegyenletével fennálló analógia alapján kaphatjuk meg.) Az R ellenállású gyűrűben folyó

$$I = \frac{U}{R} = \frac{r^2\pi B\omega}{R} \sin \omega t$$

áram a gyűrű középpontjában

$$B_I = \frac{\mu_0 I}{2r} = \mu_0 \frac{r\pi B\omega}{2R} \sin \omega t$$

nagyságú mágneses indukciót hoz létre.



A \mathbf{B}_I mágneses indukcióvektor merőleges a gyűrű síkjára, és vele együtt forog. Bontsuk fel a \mathbf{B}_I vektort \mathbf{B} -vel párhuzamos és \mathbf{B} -re merőleges komponensekre a felülnevezeti ábrának megfelelően. A párhuzamos összetevő az időben $\cos \omega t \cdot \sin \omega t =$

$(1/2) \sin 2\omega t$ -vel arányosan változik, és ennek a kifejezésnek az időbeli átlaga nulla. A \mathbf{B} -re merőleges komponens viszont így írható:

$$B_{\perp} = \mu_0 \frac{r\pi B\omega}{2R} \sin^2 \omega t = \mu_0 \frac{r\pi B\omega}{4R} (1 - \cos 2\omega t).$$

Ennek a kifejezésnek van egy (viszonylag) gyorsan változó része, aminek időbeli átlaga nulla, de tartalmaz egy időben állandó tagot is, ami $\alpha = 2^\circ$ -os szöggel eltéríti az iránytűt eredeti, észak-déli irányától. Mivel az iránytű az (átlagos) eredő tér vízszintes komponensének irányába áll be, fennáll, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_{\perp}^{\text{átlag}}}{B} = \mu_0 \frac{r\pi\omega}{4R}.$$

A mágnesű a fenti szöggel jellemzett helyzet körül kisebb kilengéseket végez 20 Hz-es frekvenciával. (A kilengések nagyságát a mágnesű mechanikai és mágneses jellemzői, valamint a csillapítás mértéke együtt határozzák meg.)

Érdekes, hogy a mágnesű elfordulásának szöge nem függ a Föld mágneses terének nagyságától! Csak annak van jelentősége, hogy \mathbf{B} vízszintes összetevője *nullától különböző* legyen. A gyűrű R ellenállása a fenti összefüggésből számítható, és $1,8 \cdot 10^{-4} \Omega$ -nak adódik.

M. 298. A gyűrű eredő mágneses fluxusa a külső mágneses mezőből és az önindukció hatásából tevődik össze:

$$\Phi = B_z r_0^2 \pi + LI,$$

ahol I a gyűrűben folyó áram erősségének pillanatnyi értéke. A mágneses fluxusváltozás által indukált áram nagyságát a Faraday-féle indukciótörvény adja meg:

$$RI = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

itt $R = 0$ a szupravezető elektromos ellenállása. A fluxusváltozásnak tehát nullának kell lennie, ellenkező esetben a szupravezetőben végtelen nagy áram indulna meg. Ennek megfelelően a gyűrű mágneses fluxusa állandó:

$$\Phi = B_0(1 - \alpha z) r_0^2 \pi + LI = \text{állandó}.$$

A kezdeti feltételeket ($z = 0$ és $I = 0$) figyelembe véve az állandó értéke: $\Phi = B_0 r_0^2 \pi$.

A fluxus állandóságából meghatározhatjuk a kialakuló áramerősséget a gyűrű függőleges helyzetének függvényében:

$$I(z) = \frac{\alpha B_0 r_0^2 \pi}{L} z.$$

A gyűrűre ható mágneses Lorentz-erő (amely az elrendezés szimmetriája miatt csak függőleges lehet) így fejezhető ki:

$$F_z = -B_r \cdot I(z) \cdot 2r_0 \pi = -\frac{r_0^4 \pi^2 \alpha^2 B_0^2}{L} z = -k \cdot z.$$

Láthatjuk, hogy a Lorentz-erő a gyűrű függőleges elmozdulásával közelítőleg egyenesen arányos, az arányossági tényező a megadott adatokból kiszámítható. (A közelítés csak kicsiny elmozdulások esetén jogos, nagyobb elmozdulásoknál a mágneses indukció már nem a megadott összefüggések szerint változik.)

A gyűrű mozgásegyenlete:

$$ma_z = F_z - mg = -kz - mg.$$

Eszerint a gyűrű harmonikus rezgőmozgást végez a $z_0 = -mg/k$ egyensúlyi helyzet körül:

$$z(t) - z_0 = A \cos \omega t,$$

ahol $\omega = \sqrt{k/m}$. A kezdeti feltételek miatt $A = -z_0$, vagyis

$$z(t) = \frac{g}{\omega^2} (\cos \omega t - 1).$$

A függőleges z koordináta sohasem vesz fel pozitív értéket, tehát a Lorentz-erő mindig felfelé mutat, illetve a rezgés legfelső pontjában nulla. A gyűrűben folyó áram időben változik, de mindig ugyanolyan irányú.

A numerikus adatok behelyettesítése után $\omega = 31,2 \text{ s}^{-1}$ és $A = 1 \text{ cm}$ adódik. A gyűrűben folyó áram időfüggését a már ismert $z(t)$ segítségével egyszerűen kifejezhetjük:

$$I(t) = \frac{\alpha B_0 r_0^2 \pi}{L} z(t) = \frac{\alpha B_0 r_0^2 \pi}{L} A (\cos \omega t - 1).$$

Az áramerősség maximális értékét az alsó holtponthoz kapjuk: $I_{\max} = 39 \text{ A}$.

Megjegyzés. Ellenőrizhető, hogy a feladatban megadott mágneses mező fluxusa tetszőlegesen zárt felületre (például egy, a z tengellyel egybeeső tengelyű hengerre is) nulla, tehát teljesíti a forrásmentesség követelményét.

M. 299. Ha az M tömegű mágnes egyenletesen mozog függőlegesen lefelé a csőben és L utat tesz meg, helyzeti energiája MgL értékkel csökken. Eközben áthalad L/h darab körvezetőn, mindegyikben Q hőt fejleszt, és mivel a mágnes mozgási energiája nem változik, fennáll, hogy

$$MgL = Q \frac{L}{h}, \quad \text{azaz} \quad Q = Mgh.$$

Milyen fizikai mennyiségektől és milyen módon függhet Q ? Nyilván függ a hőfejlődés a kicsiny mágnes jellemzőitől (az \mathbf{m} dipólnyomatéktól és a v sebességtől), továbbá a körvezető adataitól (az r sugártól és a vezető R elektromos ellenállásától):

$$Q = F(\mathbf{m}, v, r, R),$$

ahol F valamilyen négyváltozós függvény, melynek pontos (vagy legalább arányossági tényezők erejéig határozott) alakja megadná a feladat valamennyi kérdésére a választ.

Ha dimenzióanalízissel akarjuk „kitalálni”, hogyan függ $F(\mathbf{m}, v, r, R)$ az egyes változóitól, nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy Q a felsorolt mennyiségek mellett függhet még μ_0 -tól is (a vákuum permeabilitásától), ami ugyan nem változó, hanem egy meghatározott mértékegységű és nagyságú mennyiség, de a hőfejlődés képletében (lévén az mágnességgel kapcsolatos folyamatok eredménye) ez a fizikai állandó is felbukkanhat. A keresett összefüggés tehát

$$Q = G(\mathbf{m}, v, r, R, \mu_0)$$

alakú, ahol G egy ötváltozós függvény, melyet azonban az SI itt előforduló *négy* alaplómértékegységének (kg, m, s, A) vizsgálatából nem lehet meghatározni.

A feladat mégis megoldható dimenzionális megfontolások segítségével, ugyanis a hőfejlődés és az R ellenállás között (a többi adat rögzített értéke mellett) fordított arányosságnak kell fennállnia (azaz $Q \sim 1/R$), hiszen az áram hőhatása adott módon változó indukált feszültség mellett az ellenállás reciprokával arányos. Mondhatjuk tehát, hogy

$$Q \sim \frac{1}{R} f(\mathbf{m}, v, r, \mu_0),$$

ahol $f(\mathbf{m}, v, r, \mu_0)$ már csak négy fizikai mennyiségtől függ.

Írjuk fel az egyes fizikai mennyiségek mértékegységét:

$$\begin{aligned} [Q] &= \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}, & \left[\frac{1}{R}\right] &= \frac{\text{s}^3 \text{A}^2}{\text{kg m}^2}, & [v] &= \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ [m] &= \text{A m}^2, & [r] &= \text{m}, & [\mu_0] &= \frac{\text{kg m}}{\text{A}^2 \text{s}^2}. \end{aligned}$$

Ha a keresett f függvényt hatványfüggvény, vagyis

$$f(\mathbf{m}, v, r, \mu_0) = \text{állandó} \cdot |\mathbf{m}|^\alpha \cdot v^\beta \cdot r^\gamma \cdot \mu_0^\delta$$

alakban próbáljuk felírni (belátható, hogy ezt az általánosság megszorítása nélkül megtehetjük), akkor a négy független mértékegység hatványkitevőjének összehasonlításából

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -3, \quad \delta = 2$$

adódik.

Ezek szerint

$$Q = Mgh = \text{állandó} \cdot \frac{(\mu_0 \mathbf{m})^2 v}{Rr^3},$$

vagyis a mágnes esési sebességének és a többi paraméternek a kapcsolata:

$$v = \text{állandó} \cdot \frac{MhRr^3}{\mathbf{m}^2}.$$

Ez a formula a feladat valamennyi kérdésére megadja választ: akár a tömeget, akár a menettávolságot, vagy a körvezetők elektromos ellenállását növeljük

az eredeti érték kétszeresére, a mágnes esési sebessége kétszer nagyobb lesz. Kétszer erősebb mágnes az eredetinel négyszer lassabban fog mozogni, végül pedig a körvezetők sugarának kétszerezése a sebességet az eredeti érték nyolcszorosára növeli.

M. 300. Az indukált feszültséget a kis körvezetőnek a nagyra vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója határozza meg. Ezt a mennyiséget nem könnyű kiszámítani, hiszen a kis körvezető mágneses tere a nagyobb kör belsejében erősen inhomogén, helyről helyre számottevően változik.

Sokkal könnyebb meghatározni a nagy körvezetőnek a kicsire vonatkoztatott kölcsönös indukciós tényezőjét, hiszen a nagy kör mágneses mezője a kis körvezető helyén jó közelítéssel homogénnek tekinthető, az indukció nagysága pedig

$$B \approx \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Ennek a mezőnek az $r^2\pi$ területű kis körlapon

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R} I(t)$$

a mágneses fluxusa, így a Faraday-féle indukciótörvény alapján az indukált feszültség:

$$(1) \quad U_i(t) = -\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R} \frac{\Delta I(t)}{\Delta t}.$$

A kölcsönös indukciós együttható definíciója szerint

$$U_i(t) = -M \frac{\Delta I(t)}{\Delta t},$$

amit összevetve az (1) összefüggéssel, a nagy körvezetőnek a kicsire vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója könnyen leolvasható:

$$(2) \quad M = \frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R}.$$

Használjuk most fel a kölcsönös együtthatók szimmetriatulajdonságát! Emiatt a kis körvezetőnek a nagyra vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatóját is a (2) formula szolgáltatja, a nagy körvezetőben indukálódó feszültség nagysága tehát:

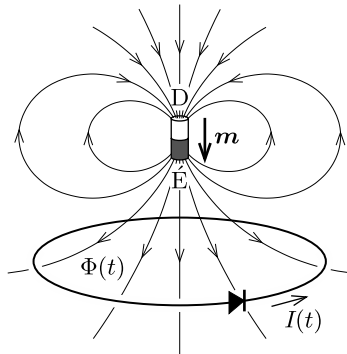
$$U = \frac{\mu_0 r^2 \pi}{2R} \frac{I_0}{t_0},$$

polaritását pedig a Lenz-törvény határozza meg.

M. 301. A kis mágnes terének a körvezetőn létrehozott mágneses fluxusa az esés közben időben változik, ez a Faraday-féle indukciótörvény miatt feszültséget indukál a karikában:

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

A mágnes mozgása során a fluxusváltozás pillanatnyi előjelétől függően az indukált feszültség polaritása kétféle lehet; ennek megfelelően a dióda vagy zár (szakadásként viselkedik), vagy kinyit (és ellenállás nélkül átengedi az áramot). A karikán átmenő mágneses fluxus nagysága a kezdeti (közel zérus) értékről a mágnes közeledtével növekedni kezd (lásd az *ábrát*), a karika középpontjához érve eléri maximális Φ_{\max} értékét, majd a mágnes távolodásakor csökken. Lenz törvényét alkalmazva látszik, hogy a mozgás első szakaszában az indukált áram a dióda nyitó irányában „szeretne” folyni, aminek semmi akadályja: a diódán töltés halad át. Amikor a mágnes már elhagyta karika középpontját, az indukált feszültség polaritása megfordul, a dióda zár, a körben nem folyik áram.



A nyitott állású diódán időegység alatt átáramló töltést Ohm törvényének segítségével határozhatjuk meg:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = R \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

(A fluxusváltozás előtt álló, a balképszabálynak megfelelő negatív előjelet az egyszerűség kedvéért elhagytuk, mert az csak a töltésáramlás irányára utal.) Ebből a

$$\frac{\Delta(\Phi - RQ)}{\Delta t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Phi(t) - RQ(t) = \text{állandó}$$

összefüggésre jutunk. Kezdetben a karikán átmenő mágneses fluxus elhanyagolhatóan kicsiny, az átáramlott töltés pedig zérus, így az állandó értéke 0. A diódán keresztülhaladt teljes töltésmennyiség tehát:

$$Q = \frac{\Phi_{\max}}{R}.$$

Már csak a karikán átmenő mágneses fluxust kell meghatározni abban a pillanatban, amikor a mágnes éppen a karika középpontjában van. Ehhez helyettesítjük a mágnesrudat egy vele megegyező mágneses momentumú, kicsiny r_0 sugarú körzetével, melyben I_0 áram folyik! Egy ilyen kis köráram dipólnyomatéka

$$|\mathbf{m}| = r_0^2 \pi I_0.$$

Az előző feladat megoldásában láttuk, hogy két azonos síkú, koncentrikus, r és $r_0 \ll r$ sugarú körvezető kölcsönös indukciónak együtthatója

$$M = \frac{\mu_0 r_0^2 \pi}{2r},$$

így a kis mágnes által a körvezetőn létrehozott fluxus

$$\Phi_{\max} = MI_0 = \frac{\mu_0 r_0^2 \pi}{2r} I_0 = \frac{\mu_0 |\mathbf{m}|}{2r}.$$

A diódán átáramlott teljes töltés tehát

$$Q = \frac{\mu_0 |\mathbf{m}|}{2rR}.$$

M. 302. Számozzuk meg a vezető karikákat nagyság szerint, azaz legyen az 1-es a legkisebb, a 3-as pedig a legnagyobb. Az i -edik kör j -edikre vonatkozó kölcsönös indukciónak együtthatóját jelölje M_{ij} . Ha a középső karikában folyó áram erősségének változási gyorsasága $\Delta I / \Delta t$, akkor a két másik körben

$$U_1 = M_{21} \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad \text{illetve} \quad U_3 = M_{23} \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

feszültség indukálódik. A kérdéses időpillanatban $U_1 = U_0$, így ekkor a legnagyobb karika végei közötti feszültség

$$U_3 = \frac{M_{23}}{M_{21}} U_0.$$

Az M_{ij} kölcsönös indukciónak együttható szimmetrikus i és j felcserélésére, ezért $M_{23} = M_{32}$. Bár az M_{21} és M_{32} együtthatók pontos meghatározása nehéz matematikai feladat, hányadosukat könnyen megkaphatjuk, ha észrevesszük, hogy a 2-es és 3-as karikából álló rendszer előállítható az 1-es és 2-es karikák kétszeres nagyításával. A két karikából álló rendszer nagyítása során a nagyobb karika által a kisebb karika belső pontjaiban létrehozott mágneses indukció nagysága a felére csökken, a fluxus számításánál figyelembe veendő felület viszont a négyszeresére változik, ezért a kölcsönös indukciónak együtthatója a duplájára nő: $M_{32}/M_{21} = 2$.

A feladat kérdésére a válasz tehát: a legnagyobb karikában $U_3 = 2U_0$ feszültség indukálódik, azaz minden pillanatban kétszer akkora, mint amekkora feszültség a legkisebb karika végei között mérhető.

M. 303. A gyűrűk egyformák, ezért az önindukciónak együtthatójuk ugyanakkora, L . A kölcsönös indukciónak együtthatók mindig egyenlőek, jelöljük ezt M -mel! Ez az érték a gyűrűk helyzetével és távolságával változik. Amíg a gyűrűk egymástól nagyon messze vannak, addig $M = 0$, azok közelítésével viszont M megnő.

A két szupravezető (nulla ellenállású) gyűrűben a mágneses fluxus értéke külön-külön nem változhat meg, ellenkező esetben az indukálódó feszültség végtelen nagy áramot eredményezne. Az áramokat I_A -val és I_B -vel jelölve az egyes

gyűrűk által körülvelt fluxusra (amely az áramerősségek és a megfelelő indukciós együtthatók szorzataként áll elő) tehát minden pillanatban fennállnak a következő összefüggések:

$$(1) \quad \Phi_A = LI_A + MI_B = LI_0,$$

$$(2) \quad \Phi_B = MI_A + LI_B = 0.$$

M -et kiküszöbölve az

$$(3) \quad I_A^2 - I_0 I_A - I_B^2 = 0$$

egyenlet adódik, amelynek megoldása I_A -ra (az $I_B = I_1$ feltétel mellett):

$$I_A = \frac{I_0 \pm \sqrt{I_0^2 + 4I_1^2}}{2}.$$

A két megoldás közül a gyök felső (pozitív) előjeléhez tartozó a helyes, hiszen a két gyűrű távoli helyzeténél ($I_1 = 0$ esetén) a feladat szövege szerint $I_A = I_0$. Így tehát az A tekercs árama a kérdéses helyzetben

$$I_A = \frac{I_0 + \sqrt{I_0^2 + 4I_1^2}}{2}.$$

Megjegyzés. A másodfokú egyenlet két megoldásából úgy is kiválaszthatjuk a fizikailag megfelelőt, hogy (3) helyett az áramerősségek $x = I_A/I_B$ arányára írunk fel egyenletet:

$$x^2 - ax - 1 = 0,$$

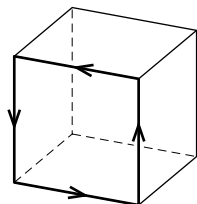
ahol $a = I_0/I_B$. Ezen egyenlet két gyökének szorzata -1 , az egyik gyök abszolút értéke tehát biztosan kisebb, mint 1 . Ez azonban nem lehet a fizikailag helyes gyök, hiszen (2) szerint

$$|x| = \left| \frac{I_A}{I_B} \right| = \left| \frac{L}{M} \right|,$$

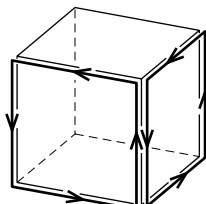
ez a szám viszont az $M \leq \sqrt{L_1 L_2} = L$ egyenlőtlenség miatt biztosan legalább 1 .

M. 304. A b) és c) esetben a drótban folyó áram és az általa keltett mágneses mező előállítható négyzet alakú áramvezetők (és azok mágneses terének) szuperpozíciójaként (lásd az *ábrát*).

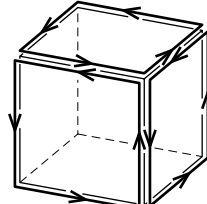
Ha az a) ábrán látható négyzet oldalélét képező vezetékben I erősségű áram folyik, akkor ennek mágneses tere $\Phi_{\text{saját}} = L_1 I$ mágneses fluxust hoz létre a négyzetlapon. (A kockából kifelé mutató irányokat tekintjük pozitívnak.)



a)



b)



c)

Ugyanez az áram a szomszédos lapok mindegyikén valamekkora $\Phi_{\text{szomszéd}}$ (negatív) mágneses fluxust eredményez, és ez kapcsolatba hozható a b) elrendezésben mért önindukcióval (hiszen ott mindkét négyzet alakú vezető saját magában és a szomszédjában is hoz létre fluxust):

$$L_2 I = 2\Phi_{\text{saját}} + 2\Phi_{\text{szomszéd}} = 2L_1 I + 2\Phi_{\text{szomszéd}},$$

ahonnan

$$\Phi_{\text{szomszéd}} = \left(\frac{1}{2} L_2 - L_1 \right) I.$$

A c) elrendezés vezetőke három négyzettel helyettesíthető, és ezek (I áramerősség mellett)

$$L_3 I = 3\Phi_{\text{saját}} + 3 \cdot 2\Phi_{\text{szomszéd}} = 3L_1 I + 6 \left(\frac{1}{2} L_2 - L_1 \right) I = 3(L_2 - L_1) I$$

fluxust alakítanak ki. A c) kapcsolás önindukciós együtthatója tehát

$$L_3 = 3(L_2 - L_1).$$

M. 305. Használjuk a feladat ábráján látható számozást. A tekercsek egyformasága miatt az L önindukciós együtthatók is egyformák, a szimmetrikus elrendezés miatt pedig a kölcsönös indukciós tényezők is megegyeznek (jelöljük ezt M -mel).

Tekintsük az egyes tekercsekben indukált feszültségeket! Minthogy $I_2 = 0$, mert a kapcsoló nyitva van, valamint $I_3 \approx 0$, mert a voltmérő ellenállása nagyon nagy, ezért csupán az I_1 áram változása indukál feszültséget. Az 1. és 3. tekercsben keletkező feszültség nagysága rendre

$$U_1 = L \frac{\Delta I_1}{\Delta t}, \quad U_3 = M \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

A feladat szövege szerint $U_3 = U_1/2$, vagyis $M = L/2$.

Zárjuk a kapcsolót! Ekkor már a 2. tekercsben is fog áram folyni, vagyis az egyes tekercsekben indukált feszültségek így írhatók fel:

$$U_1 = L \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M \frac{\Delta I_2}{\Delta t},$$

$$U_2 = M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + L \frac{\Delta I_2}{\Delta t},$$

$$U_3 = M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M \frac{\Delta I_2}{\Delta t}.$$

Azt kell észrevennünk, hogy a rövidzár miatt $U_2 = 0$. Ezt felhasználva a két áram változási üteme között adódik egy egyszerű összefüggés:

$$\frac{\Delta I_2}{\Delta t} = -\frac{M}{L} \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Képezzük az U_3/U_1 hányadost:

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{M - \frac{M^2}{L}}{L - \frac{M^2}{L}} = \frac{1}{3}.$$

(Az utolsó lépésnél figyelembe vettük, hogy $M = L/2$). Tehát a kapcsoló zárása után a voltmérő a feszültségforrás effektív értékének a *harmadát* mutatja.

Megjegyzés. A vasmag permeabilitásának állandóságát akkor használtuk fel, amikor feltételeztük a tekercsek inductivitásának és a kölcsönös indukciós együtthatóknak az állandóságát, vagyis hogy pl. $M = L/2$ akkor is fennáll, ha zárjuk a kapcsolót. Szokatlan a feladatban, hogy ebben a tipikusan transzformátoros összeállításban a feszültségek aránya lényegesen eltér a menetszámok arányától. A mindennapi gyakorlatban ez jól ismert jelenség, inkább az tekinthető idealizációnak, hogy az említett két arány megegyezik. A mágneses mező „kiszóródása” a vasmagból általában elkerülhetetlen, ha nem is olyan jelentős mindig, mint most, ebben a feladatban.

M. 306. Azt, hogy az 1-es toroidban folyó I_1 áram változása mekkora U_2 feszültséget kelt a 2-es tekercsben, a két tekercs közötti M kölcsönös indukciós együttható felhasználásával adhatjuk meg:

$$U_2(t) = M \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Mivel a 2-es tekercsben az ideális voltmérő miatt nem folyik áram, ezért az 1-es tekercs áramkörére a huroktörvény a következő alakot ölti:

$$U_1(t) = L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t},$$

ahol L_1 az 1-es számú toroid önindukciós tényezője. E két kifejezésből az 1-es tekercsre kapcsolt feszültség pillanatnyi értéke és a 2-es tekercs kivezetéseinek mérhető feszültség pillanatnyi értéke közötti kapcsolat:

$$(1) \quad U_2(t) = \frac{M}{L_1} U_1(t).$$

Hasonló összefüggés állapítható meg a feszültségek effektív értékei között. A feladat tehát lényegében a két tekercs kölcsönös indukciós együtthatójának meghatározása.

Az 1-es tekercsben folyó, időtől függő $I_1(t)$ áramerősség hatására az 1-es tekercs belsejében az Ampère-féle gerjesztési törvény értelmében

$$B_1(t) = \frac{\mu_0 N_1}{\ell} I_1(t),$$

indukciójú mágneses mező alakul ki (ℓ a toroidok középvonalának hossza). Ez a mágneses mező az 1-es tekercs A területű menetein összesen $\Phi_1 = N_1 B_1(t) A$ fluxust hoz létre, így a toroid önindukciós együtthatója:

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1(t)} = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell}.$$

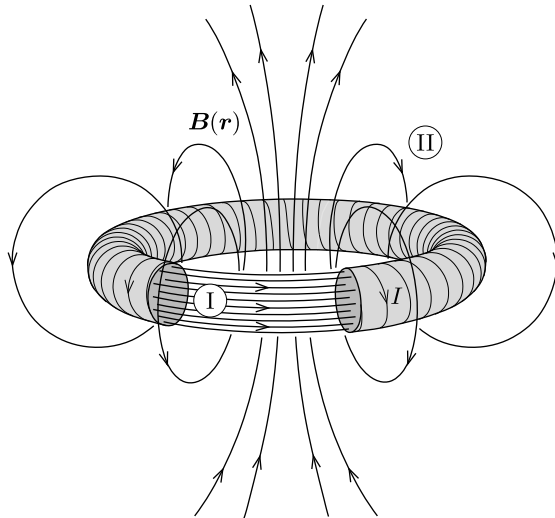
A 2-es tekercs (bár igen kacskaringósan, de) egyszer veszi körül az 1-es tekercs *belsejében* kialakult mágneses mezőt, ezért elsőre azt gondolhatjuk, hogy az 1-es tekercs által keltett mágneses mezőnek a 2-es tekercsen létrehozott (időtől függő) fluxusa egyszerűen

$$\Phi_{12}^I = B_1(t)A = \frac{\mu_0 N_1 A}{\ell} I_1(t).$$

Ha ez így lenne, akkor az 1-es tekercs 2-esre vonatkoztatott kölcsönös indukciós együtthatója

$$M = \frac{\Phi_{12}^I}{I_1(t)} = \frac{\mu_0 N_1 A}{\ell}$$

lenne, amely kifejezés viszont N_1 és N_2 felcserélésére *nem* szimmetrikus! Megmutatható, hogy a kölcsönös indukciós együttható szimmetriájának sérülése elmentmondana az energiamegmaradás törvényének, tehát valamit figyelmen kívül hagytunk.



A probléma feloldásához azt kell észrevennünk, hogy az 1-es tekercs nemcsak a *belsejében* hoz létre mágneses mezőt (az indukcióvonalak ezen részét az *ábrán* I-es számmal jelöltük), hanem *kívül* is (II-es szám). Ezt a külső, (egy áramjárta körvezető teréhez hasonlító) gyenge mágneses teret általában el szoktuk hanyagolni, viszont most az 1-es tekercs menetein kívüli indukcióvonalak a 2-es tekercs N_2 számú menetén haladnak át, ami viszont már jelentős fluxust jelent!

Jelöljük $B_i(t)$ -vel az 1-es tekercs gyenge, külső terének a 2-es tekercs i -edik meneténél mérhető indukciójának a menet felületére merőleges komponensét. Mivel

a menetek átlagos távolsága éppen ℓ/N_2 , ezért az Ampère-féle gerjesztési törvény az 1-es tekercsben folyó áramra így írható:

$$\sum_i B_i(t) \frac{\ell}{N_2} \approx \mu_0 I_1(t).$$

Mindkét oldal $N_2 A/\ell$ -l-lel való szorzása után a bal oldalon éppen az 1-es tekercs *külső* mágneses tere által a 2-es tekercs menetein létrehozott Φ_{12}^{II} fluxus jelenik meg:

$$\Phi_{12}^{\text{II}} = \sum_i B_i(t) A = \frac{\mu_0 N_2 A}{\ell} I_1(t).$$

Az 1-es tekercs mágneses mezője által a 2-esen létrehozott teljes fluxus a Φ_{12}^{I} és Φ_{12}^{II} fluxusok összege, tehát

$$\Phi_{12} = \Phi_{12}^{\text{I}} + \Phi_{12}^{\text{II}} = \frac{\mu_0(N_1 + N_2)A}{\ell} I_1(t),$$

a kölcsönös indukciós együttható pedig (most már helyesen)

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1(t)} = \frac{\mu_0(N_1 + N_2)A}{\ell}.$$

Szerencsére ez az M már szimmetrikus az N_1 és N_2 menetszámok felcserélésére!

A voltmérő által jelzett U_V értéket végül megkaphatjuk, ha az eddigi eredményeket felhasználva alkalmazzuk az (1) egyenletet a feszültségek effektív értékére:

$$U_V = \frac{M}{L_1} U_0 = \frac{N_1 + N_2}{N_1^2} U_0.$$

Megjegyzések. 1. Ha a 2-es tekercsben indukálódó feszültség kiszámításánál helytelenül csak az 1-es toroid *belsejében* lévő mágneses mező hatását vennénk figyelembe, akkor a hibás, $U_V = U_0/N_1$ eredményre jutnánk. Például $U_0 = 230$ V, $N_1 = 100$, $N_2 = 900$ adatok esetén a voltmérő által mutatott feszültségre a helyes formulával kapott $U_V = U_0/10 = 23$ V eredmény helyett a rossz $U_0/100 = 2,3$ V eredményt kapnánk. Látható tehát, hogy a toroid külső terének (az esetek többségében jogos) elhanyagolása ebben az esetben a helyes eredménynél egy nagyságrenddel kisebb értékre vezet!

2. A Φ_{12}^{I} és Φ_{12}^{II} fluxusok összeadásánál hallgatólagosan feltételeztük, hogy mindkét toroidon ugyanolyan irányú (csavarodású) a tekercselés (hiszen a toroidok „csak a menetszámukban különböznek”). Ha véletlenül nem ez a helyzet (és az egyik tekercs jobbra, a másik pedig balmenetes), akkor a két fluxusjárulék különbségét kell képezni. Ekkor a voltmérő által mutatott feszültség nagysága:

$$U_V = \frac{|N_1 - N_2|}{N_1^2} U_0.$$

M. 307. Az áramok növelésének kezdete után t idővel a külső tekercsben $I(t) = kt$, a belső tekercsben pedig $2I(t) = 2kt$ erősségű áram folyik, ahol k egy állandó. Az áramok hatására a külső tekercsben

$$(1) \quad B(t) = \mu_0 n k t$$

mágneses indukció, a belső tekercsben pedig a szuperpozíció miatt $3B(t)$ indukciójú tér alakul ki (n -nel a hosszegységre jutó menetszámot jelöltük).

Ha a töltött részecske r sugarú körpályán mozog, a pályája által körülfogott mágneses fluxus:

$$\Phi(t) = R^2 \pi \cdot 2B(t) + r^2 \pi B(t) = (2R^2 + r^2) \pi \mu_0 n k t.$$

A mágneses fluxus időbeli változása helyről helyre változó nagyságú, de időben állandó, hengersizmetrikus elektromos teret indukál, melynek térerőssége a Faraday-törvényből számítható:

$$E \cdot 2\pi r = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = (2R^2 + r^2) \pi \mu_0 n k.$$

Ebből az elektromos tér az r sugarú körpálya mentén:

$$(2) \quad E = \frac{2R^2 + r^2}{2r} \mu_0 n k,$$

iránya pedig (a balkéz-szabály által meghatározott körüljárással) tangenciális.

Az m tömegű, Q töltésű részecske körmozgását a Lorentz-erő biztosítja:

$$(3) \quad \frac{mv^2}{r} = QvB,$$

a sebesség nagyságát pedig az elektromos tér változtatja, ezért a részecske tangenciális gyorsulása $a_t = QE/m$. Mivel E időben állandó, a részecske sebességének nagysága egyenletesen növekszik, így (2) felhasználásával:

$$v(t) = a_t t = \frac{QE}{m} t = \frac{2R^2 + r^2}{2r} \mu_0 n k \frac{Q}{m} t.$$

Ezt a sebességet és a B nagyságát megadó (1) kifejezést (3)-ba helyettesítve:

$$\frac{m}{r} \frac{2R^2 + r^2}{2r} \mu_0 n k \frac{Q}{m} t = Q \mu_0 n k t,$$

ahonnan a pályasugárra meglepően egyszerű egyenlet adódik:

$$\frac{2R^2 + r^2}{2r^2} = 1, \quad \text{azaz} \quad r = \sqrt{2}R.$$

Megjegyzés. Ellenőrizhető, hogy a tekercsek által létrehozott mágneses mező indukciójának *átlag*a a töltött részecske r pályasugarán belüli tartományra vonatkoztatva

minden pillanatban éppen kétszerese a részecskét körpályán tartó mágneses indukciónak. Ez a feltétele annak, hogy a részecske huzamos ideig körpályán haladjon az időben változó mágneses térben. Ugyanezen az elven működik az elektronok gyorsítására alkalmas, a múlt század derekán kifejlesztett *betatron*, amellyel először sikerült nagyenergiájú (legfeljebb 300 MeV-os) elektronokat előállítani. A betatronnal elérhető legnagyobb kinetikus energiát az eszköz tekercseinek maximális mágneses indukciója szabja meg, emiatt manapság már nem használják, helyét a *szinkrotron* vette át.

M. 308. Az R sugarú szolenoid belsejében homogén, időben változó $B(t)$ indukciójú mágneses mező alakul ki. A változó mágneses tér a tekercs körül henger-szimmetrikus, örvényes elektromos teret kelt, melynek E térerősségét a P ponttól r távolságra úgy határozhatjuk meg, hogy felírjuk a Faraday-féle indukciótörvényt a tekercs tengelyére merőleges síkú, P középpontú, $r > R$ sugarú körre:

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = E \cdot 2\pi r,$$

ahol $\Phi(t) = B(t) \cdot R^2\pi$ a kör által körülfogott mágneses fluxus. (Felhasználtuk, hogy a kör mentén az elektromos térerősség érintőirányú.) Ebből az elektromos térerősség nagysága a tekercs tengelyétől mért r távolság függvényében:

$$E(r) = -\frac{R^2}{2r} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

A Q töltésű gyöngyre ható QE elektromos erőnek a P pontra nézve van forgatónyomatéka, ami a perdülettétel szerint éppen egyenlő a gyöngyöcske P pontra vonatkoztatott N perdületének változási ütemével:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = rQE.$$

Felhasználva az elektromos térerősségre korábban kapott kifejezést

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} + \frac{QR^2}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t} = 0$$

adódik. (Ellenőrizhető, hogy az előjelek összhangban állnak az örvényes elektromos tér irányát megadó balkéz-szabállyal.) Ha két mennyiség változási ütemének összege zérus, akkor a mennyiségek összege időben állandó:

$$N + \frac{QR^2}{2} B = \text{állandó}.$$

Ennek a perdületmegmaradáshoz hasonló, „módosított” megmaradási törvénynek a segítségével már választ kaphatunk a feladat kérdésére. Kezdetben a töltött gyöngyöcske állt, a tekercsben pedig nem folyt áram, így az egyenlet jobb oldalán álló konstans értéke nulla. A folyamat végére a mágneses indukció újra zérussá válik, ekkor a gyöngy perdületének is el kell tűnnie. Ez csak úgy lehetséges, hogy

a végállapotban a gyöngyöcske vagy a P pont irányába, vagy azzal ellentétesen mozog.

A két lehetőség közül könnyen eldönthetjük, melyik valósul meg. A gyöngy ugyanis a P pontból nézve mindig a helyvektorára merőleges irányba gyorsul, tehát a gyorsulásának nincs P felé mutató összetevője, ezért a gyöngyöcske folyamatosan távolodik a P ponttól. Ez azt jelenti, hogy a folyamat végén a gyöngy a P pont irányával *ellentétes* irányban mozog.

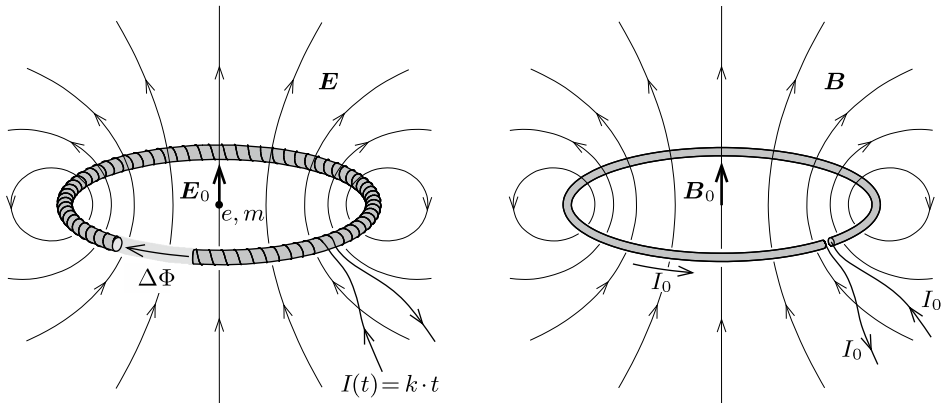
M. 309. A Faraday-féle indukciótörvény szerint tetszőleges zárt görbére az elektromos körfeszítés (elektromos örvényerősség):

$$(1) \quad \sum \mathbf{E}(\mathbf{r})\Delta\mathbf{r} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Hasonló állítást fogalmaz meg az Ampère-féle gerjesztési törvény a mágneses örvényerősségre („mágneses körfeszítésre”):

$$(2) \quad \sum \mathbf{B}(\mathbf{r})\Delta\mathbf{r} = \mu_0 I.$$

Ez a két egyenlet, valamint (szabad töltések hiányában) az elektromos és a mágneses mezők forrásmentességét kifejező Gauss-törvény *egyértelműen* meghatározzák az adott áramerősségekhez, illetve adott mágneses fluxusváltozáshoz tartozó elektromágneses mezőt.



Az (1) és (2) egyenletek alakilag hasonlóak, egymásba átalakíthatóak, ha bennük a

$$(3) \quad \begin{aligned} -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} &\longleftrightarrow \mu_0 I, \\ \mathbf{E} &\longleftrightarrow \mathbf{B} \end{aligned}$$

cserét hajtjuk végre. Ezt a szimmetriát felhasználva, ha ismerjük az egyik jelenségkör valamelyik speciális problémájának megoldását, könnyen megkaphatjuk a másik, neki geometriailag megfelelő „analóg” feladat megoldását is.

Esetünkben a toroid alakú, vékony körtekercs időben (egyenletesen) változó mágneses fluxusa éppen olyan örvényes elektromos teret kelt, mint amilyen mágneses tér egy (egyenárammal átjárt) körvezető körül kialakul (lásd az *ábrát*).

A Biot–Savart-törvény alapján tudjuk, hogy egy r sugarú körvezetőben folyó I erősségű áram a kör középpontjában

$$B_0 = \frac{1}{2r} (\mu_0 I)$$

nagyságú, a kör síkjára merőleges irányú mágneses indukciót hoz létre. Ebből a (3) megfeleltetés szerint következik, hogy a körtekercs változó mágneses fluxusa a toroid középpontjában

$$E_0 = -\frac{1}{2r} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

erősségű elektromos teret „indukál”. (A negatív előjel arra utal, hogy a körtekercsben lévő mágneses tér irányához képest E_0 iránya a balkéz-szabály segítségével kapható meg.)

Tudjuk, hogy egy N menetes, A keresztmetszetű, $I(t)$ erősségű árammal átjárt toroid belsejében a mágneses indukció

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2r\pi},$$

az ennek megfelelő mágneses fluxus időbeli változása tehát

$$E_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{NA}{r^2} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \frac{200 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{(0,1 \text{ m})^2} \cdot 10 \frac{\text{A}}{\text{s}} = 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

nagyságú elektromos térerősséget eredményez. Ennek hatására az e töltésű, m tömegű proton

$$a_0 = \frac{eE_0}{m} \approx 380 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

gyorsulással indul el.

M. 310. A kondenzátor kapacitása ($d \ll R$ közelítésben) egy síkkondenzátor kapacitásához hasonlóan számolható:

$$C = \varepsilon_0 \frac{2R\pi\ell}{d},$$

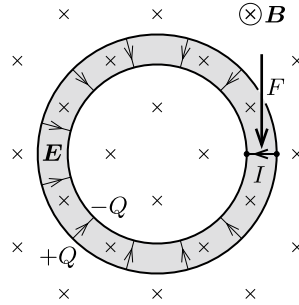
így a lemezekre

$$(1) \quad Q = CU = \varepsilon_0 \frac{2R\pi\ell U}{d}$$

töltés kerül.

a) Ha a kondenzátor fegyverzeteit összekötjük, a vezetékben időben gyorsan változó $I(t)$ áramlökés alakul ki. A sugárirányú áramvezetőre a mágneses tér

IBd Lorentz-erőt, azaz a kondenzátor egészére $IBRd$ forgatónyomatékat fejt ki (1. ábra). Ez a forgatónyomaték az MR^2 tehetetlenségi nyomatékú rendszert forgásba hozza. (A Lorentz-erő a kondenzátort ingaként ki is térítené, ezt azonban a feladat szövege szerint megakadályozzuk.)



1. ábra

A forgómozgás alapegyenlete szerint:

$$MR^2 \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = IBRd,$$

amit az áramerősség és a töltésváltozás $I(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ kapcsolatának ismeretében

$$(2) \quad MR^2 \Delta\omega = BRd\Delta Q$$

alakban is felírhatunk. Összegezzük (2) mindkét oldalát a teljes kisülési folyamatra! Mivel a szögsebesség kezdetben nulla volt, a vezetéken átáramló ΔQ töltések összege pedig a kondenzátor kezdeti töltése, (1) felhasználásával megkapjuk, hogy mekkora szögsebességre gyorsul fel a kondenzátor:

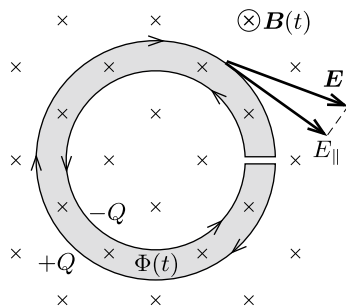
$$\omega_{\max} = \sum \Delta\omega = \frac{BRd}{MR^2} \sum \Delta Q = \frac{BQd}{MR} = 2\pi\epsilon_0 \frac{UB\ell}{M}.$$

Érdekes, hogy ez az érték nem függ az R és d távolságoktól, és a kisülés időbeli lefolyásának részleteitől is független.

b) A mágneses tér kikapcsolásakor az időben változó indukció örvényes elektromos mezőt hoz létre, ami a kondenzátor fegyverzetein lévő töltésekre erőt és forgatónyomatékat fejt ki. A kialakuló elektromos mező általában *nem* henger-szimmetrikus, pontos értékét csak a teljes mágneses mező ismeretében lehetne meghatározni, de az örvényességére jellemző körfeszültséget bármely zárt görbe mentén ki tudjuk számítani. Tekintsük például a 2. ábrán látható (a hengerkondenzátor keresztmetszetét körüljáró) görbét, amelyre az elektromos körfeszültség Faraday indukciótörvénye szerint

$$(3) \quad \sum E_{\parallel} \Delta s = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -2\pi R d \frac{\Delta B}{\Delta t},$$

ahol Φ a sötétben jelölt területre vonatkozó mágneses fluxust, Δs a görbe kicsiny darabkájának hosszát, E_{\parallel} pedig az elektromos térerősség érintő irányú komponensét jelöli.



2. ábra

Az indukálódó elektromos tér forgatónyomatékot fejt ki a hengerkondenzátor fegyverzetin lévő töltésekre. Egy Δs hosszúságú szakasznak megfelelő hengerpalást-darabon $\Delta Q = \frac{\Delta s}{2R\pi} Q$ töltés található, amire az elektromos mező $\frac{\Delta s}{2R\pi} QRE_{\parallel}$ forgatónyomatékot fejt ki. Ezek szerint (3) bal oldalán szereplő összeg (a sugárirányú két kis szakasz járulékát elhagyva) egy $Q/(2\pi)$ szorzótényezőtől eltekintve éppen a kondenzátorra ható teljes forgatónyomaték. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$MR^2 \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{Q}{2\pi} \sum E_{\parallel} \Delta s = -\frac{Q}{2\pi} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{Q}{2\pi} 2R\pi d \frac{\Delta B}{\Delta t},$$

vagyis

$$\Delta\omega = -\frac{Qd}{MR} \Delta B.$$

Ha a teljes folyamatra elvégezzük az összegzést, a kondenzátor végső szögsebességére (1)-et is felhasználva

$$\omega_{\max} = \sum \Delta\omega = -\frac{Qd}{MR} \sum \Delta B = \frac{BQd}{MR} = 2\pi\epsilon_0 \frac{UB\ell}{M}$$

adódik, éppen ugyanakkora érték, mint az a) esetben.

Megjegyzés. A fenti számítás azt mutatja, hogy a mágneses térbe helyezett hengerkondenzátor ugyanakkora szögsebességű forgásba jön, akár az elektromos mezőt, akár a mágneses mezőt „kapcsoljuk ki”. Vajon van-e ennek mélyebb fizikai oka?

A hengerkondenzátor önmagában nem alkot zárt rendszert, a körülötte lévő elektromágneses térrel együtt viszont már igen, amelyre érvényesülnie kell a perdületmegmaradás törvényének. Kézenfekvő az az értelmezés, miszerint az elektromágneses mező képes perdületet hordozni, de ez a perdület nem köthető a geometriai tér valamelyik pontjához, hanem a térben „elkenten” van jelen. (Hasonlóan „szétkent” módon tartalmaz az elektromágneses mező energiát és lendületet is.)

Az elektromágneses mező perdületét az

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Poynting-vektor segítségével írhatjuk fel. A Poynting-vektor az energiaáram-sűrűséget fejezi ki, vagyis azt adja meg, hogy az energia terjedési irányára merőlegesen egységnyi felületen egységnyi idő alatt mennyi energia áramlik át. Ha a Poynting-vektort elosztjuk a fénysebességgel, akkor az impulzusáram-sűrűséget kapjuk meg. Egy adott pontra vonatkozó „perdületáram-sűrűséget” úgy kaphatjuk meg, ha a pont helyvektorának és az impulzusáram-sűrűségnek a vektoriális szorzatát képezzük. A feladatban szereplő geometria igencsak megkönnyíti a számítást, mert az elektromágneses mező csak a két hengerpalást közötti részen „áramlik”, a szóban forgó vektorok pedig páronként merőlegesek egymásra. A rendszer szimmetriatengelyére vonatkozó „perdületáram-sűrűség”

$$\frac{S}{c}R = \frac{EBR}{\mu_0 c},$$

amit az ld területtel és a $2\pi R/c$ idővel kell megszoroznunk, hogy megkapjuk a hengerkondenzátorban körforgó elektromágneses energiából származó teljes perdületet:

$$|\mathbf{N}| = \frac{2\pi EBR^2 ld}{\mu_0 c^2}.$$

Ha az elektromos térerősség helyére beírjuk az $E = U/d$ összefüggést, valamint felhasználjuk, hogy $1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$, akkor az elektromágneses mező perdületét

$$|\mathbf{N}| = 2\pi \epsilon_0 U B \ell R^2$$

alakban kapjuk meg, ami megegyezik a megoldásban kiszámított $MR^2 \omega_{\max}$ mechanikai perdülettel.

A feladatban ugyanaz az elektromágneses perdület alakul át mechanikai perdületté először azért, mert az elektromos tér szűnik meg, másodsor pedig azért, mert a mágneses tér válik nullává. Ez azt jelenti, hogy a felhasznált közelítésektől függetlenül biztosak lehetünk abban, hogy a mechanikai perdület (a hengerkondenzátor szögsebessége) ugyanakkora lesz mindkét esetben.

Vajon hogy került ez az eredő perdület a rendszerbe? Nem nehéz végiggondolni, hogy amikor a mágneses térben lévő hengerkondenzátort korábban feltöltöttük, akkor is hatott rá (a feltöltő áramot vezető huzalon keresztül) forgatónyomaték. (Ugyanilyen hatás jelentkezik akkor is, ha egy már feltöltött hengerkondenzátort fokozatosan növekvő erősségű mágneses térben tartunk.) Ez a nyomaték a kezdetben álló kondenzátort forgásba hozta, amit külső erővel (kézzel) meg kellett állítanunk: így juthattunk el a feladatban szereplő kiindulási helyzethez.

M. 311. Egy Q töltésű, \mathbf{v} sebességgel mozgó kicsiny testre \mathbf{E} elektromos térerősségű és \mathbf{B} indukcióvektorú mágneses mezőben $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ Lorentz-erő hat. Ha beülünk egy másik, az eredetihez képest \mathbf{v}_0 sebességgel mozgó koordináta-rendszerbe, a részecske sebessége innen nézve $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ lesz. (Feltesszük, hogy v_0 sokkal kisebb, mint a fénysebesség.) Ha valamennyi fizikai mennyiséget „vesszősen” jelölünk az új vonatkoztatási rendszerben, akkor itt a Lorentz-erő $\mathbf{F}' = Q'(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$.

Hasonlítsuk össze a kétféle leírásmódot! A részecskére ható erő (ami például a részecske gyorsulásán keresztül mérhető) nem változik meg, tehát $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$. Hasonló igaz az elektromos töltésre is: $Q' = Q$. (Ha a részecskék töltése függene

a sebességüktől, akkor egy eredetileg semleges testet felmelegítve eredő elektromos töltést kellene észlelnünk, de ennek semmi nyoma nincs a Természetben!) A sebesség transzformációs képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q(\mathbf{E}' - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}').$$

Ennek az összefüggésnek tetszőleges \mathbf{v} -re, speciálisan álló részecskére is igaznak kell lennie, innen

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}$$

adódik. Látható, hogy az elektromos és a mágneses mezők nem önálló, független fizikai mennyiségek, értékük függ attól, hogy melyik (milyen sebességgel mozgó) vonatkoztatási rendszerből írjuk le a jelenségeket. (Lásd még a 273. és 274. feladatot.)

Üljünk bele a folyadékkal együttmozgó koordináta-rendszerbe! Ha a folyadék nem lenne jelen, akkor ebben a rendszerben „megjelenne” egy $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$ térerősségű elektromos mező. Ha ebbe a mezőbe belehelyezzük az álló folyadékot, akkor az polarizálódik, tehát az elektromos térerősség nagysága $1/\varepsilon_r$ arányban lecsökken, így értéke $\mathbf{E}' = \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \cdot (1/\varepsilon_r)$ lesz. Az eredeti (a síkkondenzátorhoz képest álló) koordináta-rendszerbe a $-\mathbf{v}_0$ sebességű transzformációval térhetünk vissza, ezért ott

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = -\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

elektromos mező, a lemezek között pedig

$$U = v_0 B d \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

nagyságú feszültség jelenik meg.

Polarizálhatatlan anyagokra ($\varepsilon_r = 1$) ez a feszültség nyilván nulla, a „nagyon jól” polarizálható esetben (fémeknél) pedig $U = v_0 B d$. Ez utóbbit – melyet Hall-feszültségnek neveznek – szemléletesen a következőképpen értelmezhetjük. A mágneses mezőben mozgó vezető töltéseit a Lorentz-erő elmozdítja. A töltésszétválás mindaddig tart, amíg ki nem alakul egy olyan erős elektromos mező, amely egyensúlyt tud tartani a mágneses indukció nagyságával arányos Lorentz-erővel. A $QE = Qv_0 B$ feltételből valóban a fentebb meghatározott $U = v_0 B d$ adódik.

M. 312. Homogén elektromos mezőt például egy feltöltött síkkondenzátorral hozhatunk létre. Haladjon a „mozgó” megfigyelő a síkkondenzátor belsejében, annak lemezeivel párhuzamosan v sebességgel.

A kondenzátor téglalap alakú lemezeinek oldalélei legyenek a és b , távolságuk pedig d . Ekkor a lemezeken lévő töltés nagysága:

$$Q = \varepsilon_0 E a b.$$

A mozgó megfigyelő azt látja, hogy a töltött lemezek v sebességgel mozognak – mondjuk – az a hosszúságú oldallal párhuzamos irányban, vagyis

$$I = \pm \frac{Q}{t} = \pm \frac{Qv}{a}$$

áramerősséget képviselnek. Ezek a (síkok mentén folyó) áramok a lemezek közötti térrészben (feltételezve, hogy $d \ll a, b$) homogénnek tekinthető mágneses mezőt hoznak létre, kívül pedig elhanyagolható lesz a mágneses indukció nagysága. (Az érvelés hasonló a síkkondenzátor vagy a szolenoid terének meghatározásához, szimmetriamegfontolást és a megfelelő integrális törvény alkalmazását igényli.) A kondenzátor belsejében kialakuló \mathbf{B} mágneses indukcióvektor iránya a b hosszúságú oldaléllal párhuzamos, tehát \mathbf{v} -re és \mathbf{E} -re merőleges, nagysága pedig az Ampère-féle gerjesztési törvény értelmében

$$B = \frac{\mu_0 I}{b} = \frac{\mu_0 Qv}{ab} = \mu_0 \varepsilon_0 v E = \frac{1}{c^2} v E.$$

A vektorok irányát és a jobbkez-szabályt is figyelembe véve az észlelt mágneses mező:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

Megjegyzés: A relativitáselmélet szerint a mozgás irányára merőleges elektromos és mágneses térerősségek transzformációs képletei:

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

míg a sebességgel párhuzamos komponensek változatlanok maradnak. Nemrelativisztikus ($v \ll c$ sebességű) mozgásoknál ezek visszaadják az elemi megfontolással kapható eredményeket.

M. 313. Írjuk fel azokat az erőket, amelyek egy (a henger belsejében lévő) szabad elektron egyenletes körmozgását biztosítják:

$$eE \pm e r \omega B = m r \omega^2,$$

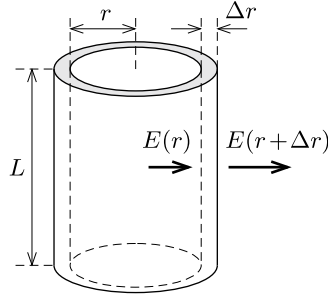
ahol e az elektron töltése, m a tömege, r a forgástengelytől mért távolsága, E pedig a fémhengerben létrejövő elektrosztatikus térerősség, amit a hengerben kialakuló töltéeloszlás hoz létre. (A forgó töltések által keltett mágneses tér elhanyagolható.) A \pm előjel azt fejezi ki, hogy a mágneses Lorentz-erő a henger forgásirányától függően kifelé is, befelé is mutathat.

Fejezzük ki az elektron mozgásegyenletéből az elektromos térerősséget:

$$E = \left(\frac{m \omega^2}{e} \pm \omega B \right) r = Kr.$$

Látható, hogy a térerősség egyenesen arányos a sugárral. (K a szögsebességtől, a mágneses tér erősségétől és az elektron adataitól függő állandó.)

Az elektromos térerősség ismeretében meghatározhatjuk az egységnyi térfogatban lévő elektromos töltés mennyiségét, vagyis a henger töltéssűrűségét is. Az elektrosztatika alaptörvényének Gauss-tól származó megfogalmazása szerint bármely zárt felületből kilépő elektromos fluxus a felület belsejében lévő össztöltéssel arányos (annak $1/\varepsilon_0$ -szorososa).



Tekintsük az ábrán látható vékony hengergyűrűt, és jelöljük a tengelytől r távolságban kialakuló térfogati töltéssűrűséget $\rho(r)$ -rel! A gyűrűbe annak belső felületén $E(r) \cdot 2\pi r L$ nagyságú elektromos fluxus (erővonal) lép be, a külső felületen pedig $E(r + \Delta r) \cdot 2\pi(r + \Delta r)L$ lép ki belőle. Gauss törvénye szerint

$$K(r + \Delta r) \cdot 2\pi(r + \Delta r)L - Kr2\pi rL = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(r) \cdot 2\pi r \Delta r L,$$

ahonnan (a Δr -ben másodrendűen kicsiny tagok elhanyagolásával) a henger töltéssűrűségére

$$\rho = 2\varepsilon_0 K = 2\varepsilon_0 \frac{m}{e} \omega \left(\omega \pm \frac{e}{m} B \right),$$

vagyis r -től független, állandó érték adódik. Mivel a fémhenger össztöltése nulla, ennek a térfogati töltéssűrűségnek a kialakulása ugyanekkora nagyságú, de ellentétes előjelű, a henger felületén felhalmozódó töltéssel jár együtt.

A henger belsejének térfogati töltéssűrűsége – a mágneses tér és a szögsebesség irányától és nagyságától függően – lehet pozitív, negatív, sőt akár nulla is. Ez utóbbi eset akkor állhat elő, ha $\omega = |e|B/m$. Ilyenkor a hengerben nem válnak szét a pozitív és a negatív töltések, mert a Lorentz-erő egymagában képes biztosítani a körmozgáshoz szükséges centripetális erőt.

Megjegyzés. A nagyságrendi viszonyok érzékeltetése kedvéért tételezzük fel, hogy a mágneses tér indukciója akkora, mint a földi mágneses tér az Egyenlítő környékén, vagyis $B = 3 \cdot 10^{-5}$ T. A nulla töltéssűrűségnek ilyenkor az $\omega_c = eB/m = 5,3 \cdot 10^6$ s⁻¹ szögsebesség (ciklotron-körfrekvencia) felel meg, ami több mint 50 milliós (!) percenkénti fordulatszámot jelent. A gyakorlatban ilyen nagy fordulatszám nem valósítható meg, hiszen nincs olyan erős anyag, ami kibírna ilyen gyors forgást.

A feladat azzal a tanulással szolgál, hogy rámutat: az elektron tömege igen kicsi a töltéséhez képest. Emiatt a töltéssűrűségekre kapott kifejezésben a szögsebesség négyzetét tartalmazó tag elhanyagolható: makroszkopikus esetekben a fellépő elektromos és mágneses erők eredőjének még akkor is (jó közelítéssel) nullát kell adnia, amikor az elektron gyorsul.

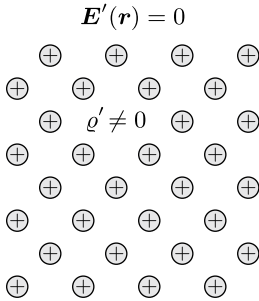
M. 314. A \mathcal{K}' forgó koordináta-rendszer minden egyes pontjában az elektromos töltésseloszlás ugyanolyan, mint a \mathcal{K} laboratóriumi (inercia)rendszerben, mert a töltéssűrűség az egységnyi térfogatban lévő elektronok számával arányos, és mind a szám, mind a térfogat invariáns mennyiség. Ebből az következik, hogy az elektromos töltéssűrűség homogén, és a következő alakban fejezhető ki:

$$\rho' = \rho = 2\varepsilon_0 \left(\pm\omega B + \frac{m\omega^2}{e} \right) \approx \pm 2\varepsilon_0\omega B.$$

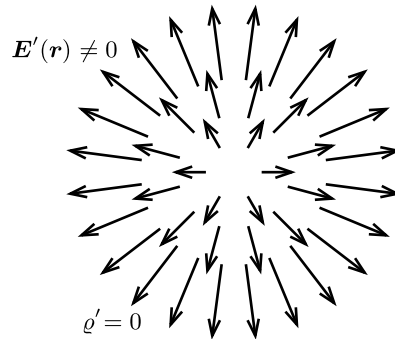
Egy töltött részecskére ható \mathbf{F} erő mindkét rendszerben azonos (amit azzal a ténnyel szemléltethetünk, hogy az erőmérésre alkalmas rugó megnyúlása független attól, hogy melyik rendszerben mérünk), így $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.

A hengerrel együtt forgó rendszerben a fém szabad elektronjai nyugalomban vannak, és így a rájuk ható eredő erőnek nullának kell lennie (máskülönben a szabad elektronok elmozdulnának). Ha a centrifugális erő a lassú forgás miatt elhanyagolható, akkor a zérus eredő erő miatt az elektromos térerősség is nulla: $\mathbf{E}' = 0$. Ezek szerint a forgó vonatkoztatási rendszerben elektromos *töltések* lehetnek jelen hozzájuk tartozó elektromos tér *nélkül*, amint ezt az 1. ábra szemlélteti.

A forgó \mathcal{K}' rendszerben észlelt mágneses mező megegyezik a laboratóriumi \mathcal{K} vonatkoztatási rendszerben mérhető mágneses térrel: $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$. (A 312. feladat megoldásában kapott $\mathbf{E} \times \mathbf{v}/c^2$ -es korrekció ebben a nemrelativisztikus esetben elhanyagolható.)



1. ábra



2. ábra

Hasonlóképpen beláthatjuk, hogy egy homogén mágneses mezőben az észlelővel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben inhomogén, forrásos *elektromos* mező létezik annak ellenére, hogy *nincsenek* jelen elektromos töltések (lásd a 2. ábrát).

Mindez azt jelenti, hogy a Gauss-törvény (ami az elektromos fluxus és az érte felelős töltések közötti kapcsolatot írja le) *nem* érvényes forgó vonatkoztatási rendszerekben. Ez a meglepő eredmény már lassú (nemrelativisztikus) sebességek esetén is érvényes!

M. 315. Jelöljük a kondenzátor lemezeinek területét A -val, kezdeti töltését pedig Q -val. A lemezek tetejére helyezett pálcában a kisütéskor (az ábrán balról

jobbra mutató irányban) I erősségű elektromos áram indul meg, melynek hatására

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -I$$

ütemben csökkenni kezd a kondenzátor töltése. Emiatt a lemezek közötti

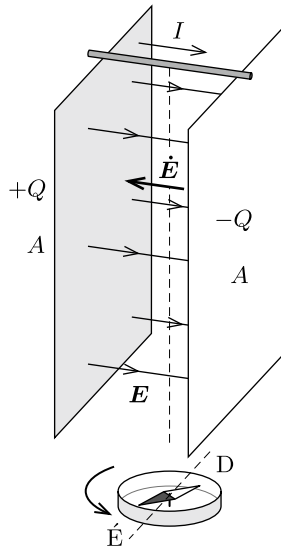
$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A}$$

térerősségű elektromos tér is gyengül. *James C. Maxwell* megmutatta, hogy az időben változó elektromos tér ún. *eltolási áramot* hoz létre, amelynek áramsűrűsége arányos az elektromos térerősség változási ütemével, az arányossági tényező pedig ε_0 .

Ebben a feladatban az eltolási áram iránya a pálcában folyó árammal ellentétes (tehát balra mutat), a hozzá tartozó áramsűrűség *nagysága* pedig

$$j_D = \varepsilon_0 |\dot{\mathbf{E}}| = \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{A} \left| \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right| = \frac{I}{A}.$$

A pálcában folyó I erősségű vezetési áram és a $j_D A = I$ erősségű eltolási áram együtt úgy tekinthető, mintha egy *zárt* vezetőkörben áramolnának töltések.



A kisülés közben az áramok (nemcsak a pálcában folyó, hanem az eltolási áram is) mágneses teret hoz létre. A balra mutató eltolási áram nagysága éppen ugyanakkora, mint a pálcában folyó, jobbra mutató áram, az eltolási áram azonban mindenütt közelebb van az iránytűhöz, mint a pálcá, ezért mágneses hatása erősebben érvényesül. Az iránytű tehát a kondenzátor kisülése alatt az ábrán látható módon elfordul (felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányban).

M. 316. A feladatban szereplő elrendezés gömbszimmetrikus, tehát a kialakuló mágneses mezőnek is ilyennek kell lennie. Egy gömbszimmetrikus vektormezőnek mindenhol sugárirányúnak kell lennie, és a nagysága csak az origótól (a gömbkondenzátor középpontjától) mért távolság nagyságától függhet:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

Másrészt viszont a mágneses mező forrásmentes, azaz bármely zárt felületen áthaladó mágneses fluxus minden pillanatban nulla. Válasszuk ki – mondjuk – az origó körüli r sugarú gömbfelületet! A forrásmentesség feltétele csak úgy teljesülhet, ha $B(r) = 0$ tetszőleges r -re. Ezek szerint a kisülés közben sem a gömbkondenzátoron kívül, sem annak belsejében nem jön létre mágneses mező.

Megjegyzés. Érdeemes végiggondolni, hogy miként teljesülnek a gömbkondenzátor két fegyverzete között (tehát ahol áramok folynak) az elektrodinamika alaptörvényei. Igaz-e az az állítás, hogy az áramjárta vezető körül mágneses mező alakul ki, és a mező „örvénysűrűsége” az áramsűrűséggel arányos?

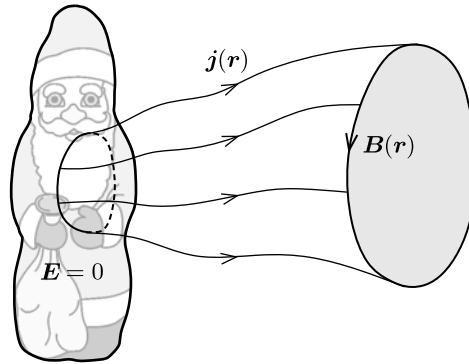
A válasz: az állítás ebben a formában csak a magnetosztatikában (egyenáramokra) igaz, a feladatbeli esetben nem (hiszen a mindenhol nulla mágneses indukciónak nincs örvénysűrűsége, a *vezetési* áramsűrűség pedig nem nulla). Ennek oka, hogy a gömbkondenzátorban kialakuló elektromos mező a kisülés közben *időben változik*, és az ebből származó *eltolási áram* a vezetési elektronok áramával *együtt* határozza meg a mágneses teret (lásd az *előző* és a *következő feladatot*).

M. 317. A feltöltött csokimikulás körül elektrosztatikus mező alakul ki, amely megragadja a levegőben található töltéshordozókat, és így elektromos áram indul meg a „végtelen” felé (valójában a mikulástól távoli, földelt vezetők felé). A mikulást körülvevő mágneses teret azonban nemcsak a levegőben folyó áramok keltik! Az elektrosztatikus tér – a mikulás időben fokozatosan csökkenő töltése miatt – időben változik, ami eltolási áram formájában szintén létrehoz mágneses teret.

A csokimikulás körül kialakuló mágneses mező indukcióvonalai zártak, mert a mágneses mező forrásmentes. Válasszunk ki egy tetszőleges indukcióvonal-hurkot és egy erre a hurokra illeszkedő zsákfelületet (ez az *ábrán* látható szürke felület). Ha a zárt hurokra kiszámítjuk a mágneses mező

$$\mathcal{O}_B = \sum \mathbf{B}(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{r}$$

örvényerősségét (a B -vonal irányítottságával megegyező körüljárási irányban), akkor csak nemnegatív értéket kaphatunk eredményül, hiszen az indukció iránya és a hurok érintője által bezárt szög a hurok mentén nulla. Pontosan zérus örvényerősséget akkor és csak akkor kapunk, ha a hurok mentén a mágneses indukció értéke azonosan nulla.



Az Ampère-féle gerjesztési törvény értelmében a zárt hurok örvényerőssége arányos a hurokra illeszkedő zsákfelületen áthaladó eredő áramerősséggel (ami a töltések által keltett elektromos áram és a változó elektromos tér miatt keletkező eltolási áram összege). Egy furfangos gondolattal ezt az eredő áramerősséget könnyen meghatározhatjuk! A szürke felület helyett válasszunk olyan zsákfelületet, amely benyúlik a csokimikulás belsejébe, a mikuláson kívül pedig a zárt hurokra illeszkedő áramvonalak határolják. Mivel a mikulás belsejében az elektromos térerősség és az áramsűrűség is zérus, a zsákfelület mikuláson kívüli részét pedig nem dőfi át sem a töltéshordozók vezetési árama, sem pedig elektromos térerősség (hiszen a differenciális Ohm-törvény szerint az elektromos térerősség arányos és azonos irányú az áramsűrűséggel), így a mágneses mező \vec{O}_B örvényerőssége a zsák száját alkotó hurokra zérus. Ez azt jelenti, hogy a hurok mentén a mágneses indukció végig nulla.

A mikulás körül tehát nem alakulnak ki indukcióvonalak, a mágneses indukció értéke az egész térben *azonosan nulla*.

M. 318. A sugárzásnak gömbszimmetrikusnak kell lennie, hiszen a töltéseloszlás és annak mozgása is rendelkezik ezzel a szimmetriával. Ezt a feltételt csak olyan mágneses mező teljesítheti, amely minden pillanatban sugárirányú és a gömbtől mért azonos távolságokban azonos nagyságú. Ez azonban lehetetlen, hiszen ilyen (nullától különböző nagyságú) mágneses mező „mágneses töltésre” (mágneses monopólusra) utalna, ami viszont a tapasztalat szerint nem létezik a Természetben. Hasonló érveléssel láthatjuk be, hogy az elektromos mező is gömbszimmetrikus és a nagysága csak a gömbön lévő össztöltés nagyságától függ, a pulzálástól nem! A gömbön kívül tehát csak sztatikus Coulomb-mező figyelhető meg, a gömb *egyáltalán nem sugároz!*

Ha a gömb egyes darabkáit figyeljük, azok valóban dipólantennaként viselkednek és sugároznak. A különböző darabkák sugárzását azonban nem egyszerűen a nagyságuk szerint, hanem a fázisviszonyok figyelembevételével kell összegezni. A sok dipólantenna sugárzása éppen kioltja egymást, ezt közvetlen (bár kicsit hosszabb) számolással, a gömbszimmetriára való hivatkozás nélkül is be lehet látni.



Relativitáselmélet és modern fizika

M. 319. a) Az elektron x tengely irányú impulzusa megmarad, hiszen ilyen irányban a részecskére nem hat erő:

$$(1) \quad \frac{mv_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \text{állandó},$$

ahol m az elektron tömege, v a sebesség nagysága a mozgás tetszőleges pillanatában, v_x pedig ennek x irányú komponense (itt és a továbbiakban c a vákuumbeli fénysebességet jelöli). Az x irányú impulzus állandósága nem jelenti azt, hogy v_x is állandó marad, hiszen (1) értelmében a sebességvektor nagyságának növekedtével v_x -nek csökkennie kell!

Az elektron kezdeti és végsebességét is célszerű a fénysebességhez viszonyítani, ezért vezessük be a relativitáselméletben szokásos $\beta_0 = v_0/c = 0,6$ és $\beta_1 = v_1/c$ jelöléseket. Ezek segítségével az elektromos mezőbe belépő, majd azt elhagyó elektronra az (1) megmaradási tétel a következőképp alkalmazható:

$$\frac{\beta_0 mc}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = \frac{\beta_1 mc}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} \sin 45^\circ,$$

ahonnan

$$\beta_1 = \sqrt{2} \frac{\beta_0}{\sqrt{1 + \beta_0^2}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \approx 0,728.$$

Az elektron tehát a fénysebesség 72,8 százalékával mozogva hagyja el az elektrosztatikus mezőt.

b) A térerősséggel ellentétes irányban d távolságnyt elmozduló elektronon az elektromos mező eEd munkát végez (itt e az elemi töltést jelöli). Ez a munka az elektron teljes energiájának megváltozásával egyenlő:

$$eEd = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \approx 0,208 mc^2,$$

ahonnan a keresett távolság:

$$d = \frac{0,208 mc^2}{eE} = 0,208 \cdot \frac{510 \text{ keV}}{e \cdot 510 \frac{\text{kV}}{\text{m}}} = 0,208 \text{ m} = 20,8 \text{ cm}.$$

(A mértékegységek átváltásánál felhasználtuk, hogy $e \cdot 1 \text{ kV} = 1 \text{ keV}$.)

M. 320. B indukciójú homogén mágneses térben R sugarú körpályán mozgó, m tömegű, $\pm e$ töltésű részecske mozgásegyenlete:

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \pm e \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

ahol \mathbf{p} a részecske impulzusa, \mathbf{v} pedig a sebessége. Ez az egyenlet relativisztikusan mozgó részecskére is igaz. Vegyük mindkét oldal abszolút értékét:

$$(1) \quad \left| \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \right| = evB.$$

Az $\omega = v/R$ szögsebességgel forgó, állandó abszolút értékű \mathbf{p} vektor változási gyorsasága $p\omega = pv/R$ nagyságú. Ezt az (1) mozgásegyenletbe írva megkaphatjuk a körpályán mozgó részecske impulzusát:

$$p = eBR.$$

Felhasználva az elemi töltés ismert értékét, valamint a Föld adatait (egyenlítői sugara $R = 6,378 \cdot 10^6$ m, a mágneses indukció értéke ugyanitt $B = 6,6 \cdot 10^{-5}$ T, iránya pedig északra mutat) az adódik, hogy akár az elektronra, akár a protonra $p \approx 6,7 \cdot 10^{-17}$ kg m/s.

Ha a nemrelativisztikus $p = mv$ képlettel számolnánk, a sebességre a fénysebesség *sokezerszerese* adódna, ez tehát elfogadhatatlan. Számoljunk tehát a relativisztikus

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

összefüggéssel (m az elektron „nyugalmi tömege”), és vezessük be a

$$\beta \equiv \frac{v}{c}, \quad K \equiv \frac{p}{mc} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{eBR}{mc}$$

dimenziótlan mennyiségeket. Az adatok behelyettesítése után

$$K_{\text{elektron}} = 2,5 \cdot 10^5 \quad \text{és} \quad K_{\text{proton}} = 134$$

adódik, mindkét mennyiség *sokkal nagyobb* 1-nél!

a) Ezek szerint mindkét részecskére $\beta \approx 1$, mindkettőnek gyakorlatilag fénysebességgel kellene mozognia.

b) A részecskék energiája:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{K}{\beta} mc^2 \approx K mc^2 = eBRc = BRc \text{ [eV]} = 126 \text{ GeV.}$$

Érdekes, hogy ez az energia nem függ a részecske tömegétől, tehát az elektronokra és a protonokra ugyanakkora. A Lorentz-erő irányát is figyelembe véve: a negatív elektronoknak *kelet felé*, a pozitív protonoknak pedig *nyugat felé* kellene mozogni.

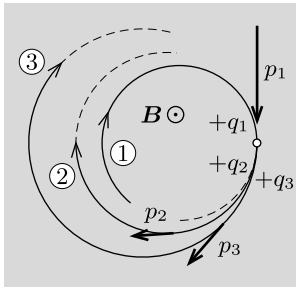
Megjegyzés. A földmágnesség a mágneses egyenlítő mentén jó közelítéssel homogénnek tekinthető. Ez a mágneses mező csak a részecskenyaláb körpályán tartását oldaná meg, de nem akadályozná meg a nyaláb széttartását; ez utóbbit további fókuszáló mágneses mezőkkel kellene biztosítani.

M. 321. Homogén mágneses mezőben a fékeződésmentesen mozgó töltött részecske a mágneses térre merőleges síkban egyenletes körmozgást végez, amihez még a mágneses térrel párhuzamos irányú egyenletes mozgás is hozzáadódhat. Az ábrán látható felvétel (ha egyáltalán létezik ilyen) a mágneses mező irányából készült (hiszen a pályák körívek). (A mágneses tér irányú mozgás – ami nem látszik a felvételen – a továbbiakban figyelmen kívül hagyható. Feltételezhetjük, hogy a mágneses tér a közölt *ábra* síkjára merőlegesen *felfelé* mutat. (Ha nem így lenne, akkor tekintsük a felvételt a túlsó oldaláról; onnan nézve a mágneses tér ellentétes irányú, a körpályák pedig változatlanok maradnak.)

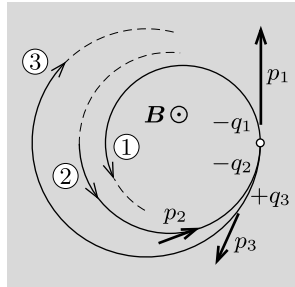
Számozzuk meg a részecskepályákat belülről kifelé haladva, és jelöljük a pályasugarakat R_1 -gyel, R_2 -vel és R_3 -mal. A közölt ábrán látható, hogy

$$(1) \quad R_1 < R_2 < R_3.$$

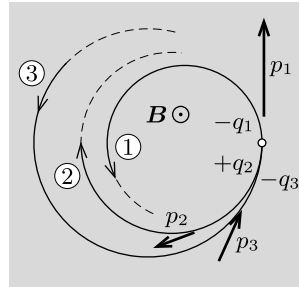
Ugyanilyen sorrendben jelöljük a részecskék impulzusának nagyságát p_1 -gyel, p_2 -vel és p_3 -mal, az elektromos töltésük nagyságát pedig q_1 -gyel, q_2 -vel és q_3 -mal! R_i , p_i és q_i ($i = 1, 2, 3$) mindegyike pozitív, hiszen a megfelelő fizikai mennyiség nagyságát jelöli. Ha valamelyik részecske impulzusa vagy töltése ellentétes lenne a másikéval, ezt a tényt a képletekben kiírt negatív előjellel vesszük figyelembe.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

B nagyságú mágneses indukciójú mezőben v sebességgel, R sugarú körpályán mozgó m tömegű, q töltésű részecske (nemrelativisztikus) mozgásegyenlete:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB, \quad \text{azaz} \quad mv = qBR,$$

ami a részecske $p = mv$ impulzusával kifejezve:

$$(2) \quad p = qBR.$$

Megjegyzés. Az *előző feladat* megoldásában láttuk, hogy a (2) egyenlet akkor is érvényben marad, ha a részecske mozgását a relativisztikus dinamika törvényeivel írjuk le. A következő érvelésünk tehát igaz relativisztikusan mozgó részecskék esetén is.

A bomlási folyamat során a részecskék (előjelhelyesen felírt) elektromos össz-töltése, valamint az impulzusok előjeles összege változatlan marad (*megmaradó*

mennyiség). Az ábráról nem tudjuk megállapítani, hogy melyik részecske bomlik, így mind a három lehetséges esetet külön-külön meg kell vizsgálnunk.

(i) Ha az 1-es részecske bomlik (*1. ábra*), akkor mindhárom részecske „jobbra kanyarodik”, tehát pozitív töltésű. Az impulzus- és töltésmegmaradás szerint

$$p_1 = p_2 + p_3 \quad \text{és} \quad q_1 = q_2 + q_3,$$

ahonnan (2) alkalmazásával

$$(3) \quad R_1 = \frac{q_2 R_2 + q_3 R_3}{q_2 + q_3}.$$

Ez azonban *lehetetlen*, mert R_2 és R_3 , vagyis a két nagyobb pályasugár pozitív együtthatókkal súlyozott középértéke nem lehet a legkisebb sugárral egyenlő.

(ii) Ha a 2-es részecske bomlik (*2. ábra*), akkor csak a 3-as részecske pozitív töltésű, a másik kettő (balra kanyarodó) részecskének negatív elektromos töltésűnek kell lennie. Az impulzus- és töltésmegmaradás egyenletei:

$$p_2 = p_1 - p_3 \quad \text{és} \quad -q_2 = -q_1 + q_3,$$

ahonnan (2) alkalmazásával ismét az ellentmondásos (3) összefüggést kapjuk.

(iii) Végül, ha a 3-as részecske bomlik (*3. ábra*), akkor csak a 2-es részecske pozitív töltésű, a másik kettő töltése negatív, és a megmaradási törvények szerint

$$p_3 = p_1 - p_2 \quad \text{és} \quad -q_3 = -q_1 + q_2,$$

ami ugyancsak az ellentmondásos (3) összefüggésre vezet.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az ábrán bemutatott „nyomok” *nem fordulhatnak elő* egyetlen (a valóságban végbement bomlásról készített) ködkamrás felvételen sem!

M. 322. Egy m (nyugalmi) tömegű, v sebességű részecske relativisztikus energiája és impulzusa

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Célszerű a sebességet kiküszöbölni, vagyis az energia és az impulzus közötti

$$(1) \quad E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2,$$

kapcsolattal számolni, mert ebből még a nulla nyugalmi tömegű fotonra érvényes

$$(2) \quad E_{\text{foton}} = p_{\text{foton}} c$$

összefüggést is kiolvashatjuk. Az (1) egyenletet szokták tömeghőj-feltételnek is nevezni.

Nagyenergiájú részecskék ütközése során újabb részecskék, pl. elektron-pozitron párok keletkezhetnek. A töltésmegmaradás miatt a folyamat végén – ha abban egy pozitron (e^+) keletkezik – két elektronnak (e^-) is jelen kell lennie:

$$\gamma + e^- \longrightarrow e^- + e^- + e^+.$$

(A fotonoknak sem elektromos, sem másfajta töltése nincsen, emiatt rájuk nem vonatkozik megmaradási törvény, a számuk korlátozás nélkül változhat.)

A végtermékek összenergiája akkor lesz a lehető legkisebb, ha „együtt maradnak”, egymáshoz képest elhanyagolható sebességgel mozognak csupán. (Ezt az állítást legegyszerűbben a három részecske tömegközépponti rendszeréből szemlélve láthatjuk be; itt a legkisebb összenergiájú állapotban a részecskék állnak, „szétlökésük” további energiabefektetést igényelne.) Ilyenkor a három részecske (két elektron és egy pozitron) úgy tekinthető, mint egyetlen $3m$ tömegű részecske, amelynek impulzusa (az impulzusmegmaradás miatt) megegyezik a γ -kvantum impulzusával, energiája pedig a γ -foton energiájának és az álló elektron nyugalmi energiájának összege: $E_{\text{foton}} + mc^2$. Ezek (1) alapján akkor lehetnek egy $3m$ nyugalmi tömegű részecske jellemzői, ha fennáll:

$$(E_{\text{foton}} + mc^2)^2 = (3m)^2 c^4 + p_{\text{foton}}^2 c^2,$$

vagyis (2) felhasználásával:

$$E_{\text{foton}} = 4mc^2 \approx 2 \text{ MeV}.$$

M. 323. Válasszunk olyan egységrendszert, amelyben a fénysebesség egységnyi, $c = 1$. A bomlási folyamatra érvényes az impulzusmegmaradás törvénye, vektori alakban:

$$\mathbf{p}_\pi = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu.$$

Négyzetre emelve, valamint \mathbf{p}_e és \mathbf{p}_ν merőlegességét felhasználva:

$$(1) \quad p_\pi^2 = p_e^2 + p_\nu^2.$$

Egy m tömegű részecske teljes (relativisztikus) energiája és p impulzusa között a választott egységrendszerben fennáll az

$$(2) \quad E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

összefüggés (tömeghég-feltétel). Ütközésekben és bomlási folyamatokban a teljes energiák összegére teljesül az energiamegmaradás; jelen esetben ez így fogalmazható meg:

$$(3) \quad E_\pi = E_e + E_\nu.$$

Négyzetre emelve, és a teljes energiák négyzetére felírva a (2) tömeghég-feltételt:

$$m_\pi^2 + p_\pi^2 = m_e^2 + p_e^2 + p_\nu^2 + 2E_\nu E_e.$$

Az impulzusokra vonatkozó (1) összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$(4) \quad E_\nu E_e = \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{2},$$

vagyis a két bomlástermék energiájának szorzata állandó.

Célunk a pion sebességének, és így energiájának minimalizálása. Ez az energia egyenlő a két bomlástermék energiájának összegével, ennek legkisebb értékét keressük. Írjuk fel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{E_\nu E_e} \leq \frac{E_\nu + E_e}{2}.$$

Ezt a (3) egyenletbe beírva, majd a (4) összefüggést felhasználva megkapjuk a pion lehetséges legkisebb energiáját:

$$E_\pi = E_\nu + E_e \geq 2\sqrt{E_\nu E_e} = \sqrt{2(m_\pi^2 - m_e^2)}.$$

A pion teljes energiáját kifejezhetjük a tömegével és a sebességével:

$$E_\pi = \frac{m_\pi}{\sqrt{1 - v^2}} \geq \sqrt{2(m_\pi^2 - m_e^2)},$$

ahonnan a pion sebességére a

$$v \geq \sqrt{1 - \frac{m_\pi^2}{2(m_\pi^2 - m_e^2)}} = \sqrt{\frac{m_\pi^2 - 2m_e^2}{2m_\pi^2 - 2m_e^2}} = 0,707$$

alsó korlát adódik. Az egységrendszer választása miatt ez annyit jelent, hogy a pion sebessége legalább a fénysebesség 70,7%-a.

M. 324. Rugalmas ütközésnél a részecskék összenergiája is és impulzusuk vektori összege is változatlan marad. Ezeket a mennyiségeket a fénysebességet megközelítő sebességeknél a relativisztikus mechanika törvényei szerint számíthatjuk ki. Egy m nyugalmi tömegű, v sebességű részecske (teljes) energiája és impulzusa

$$(1) \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

ezekből

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}$$

is következik. Ultrarelativisztikus határesetben (vagyis amikor $|\mathbf{v}| = v \approx c$) az energia és az impulzus nagyságának kapcsolata:

$$E \approx pc.$$

Megjegyzés. Ugyanez az összefüggés a sebesség kiküszöbölése után (1)-ből közvetlenül adódó

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

tömeghív-feltételből is leolvasható, ha abban – ultrarelativisztikus határesetben – az mc^2 nyugalmi energiát a részecske teljes E energiája mellett elhanyagoljuk.

Jelöljük a feladatunkban szereplő részecskék ütközés utáni impulzusát \mathbf{q}_1 -gyel és \mathbf{q}_2 -vel. Feltételezve, hogy ezek is ultrarelativisztikus impulzusok, a megmaradási törvények így írhatók fel:

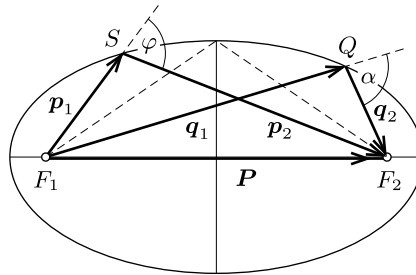
$$(2) \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2,$$

illetve $p_1c + p_2c = q_1c + q_2c$, vagyis

$$(3) \quad p_1 + p_2 = q_1 + q_2.$$

A fenti egyenleteket az 1. ábrán látható módon szemléltethetjük. A részecskék adott \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 impulzusából megszerkeszthető az összimpulzus $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ vektora, amely egyúttal az ütközés utáni impulzusok összege. Az energiamegmaradás (3) képlete szerint a még ismeretlen Q pontnak a \mathbf{P} vektor végpontjaitól mért távolságösszege adott:

$$(4) \quad q_1 + q_2 = F_1Q + F_2Q = \text{állandó} (= p_1 + p_2).$$



1. ábra

A (4) egyenlet szerint a Q pont egy olyan *ellipszisre* illeszkedik, amelynek fókuszpontjai F_1 és F_2 , nagytengelye pedig az ismert (és megszerkeszthető) $p_1 + p_2$ távolság.

Vajon az ellipszis mely pontjánál lesz a szétrepülő részecskék mozgásiránya, vagyis az ábrán látható α szög a legkisebb? Belátjuk, hogy α akkor minimális, amikor Q az ellipszis kistengelyének valamelyik végpontja, vagyis amikor $q_1 = q_2$. Emeljük négyzetre a (2) összefüggést (vagy írjuk fel az F_1SF_2 és az F_1QF_2 háromszögekre a koszinusz-tételt):

$$(5) \quad p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \varphi = P^2 = q_1^2 + q_2^2 + 2q_1q_2 \cos \alpha,$$

illetve képezzük a (3) egyenlet mindkét oldalának négyzetét:

$$(6) \quad p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 = q_1^2 + q_2^2 + 2q_1q_2.$$

A (6) és (5) egyenletek különbségét képezve kapjuk:

$$2p_1p_2(1 - \cos \varphi) = 2q_1q_2(1 - \cos \alpha),$$

ahonnan a kérdéses szög koszinusza kifejezhető:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{p_1p_2(1 - \cos \varphi)}{q_1q_2}.$$

Látható, hogy α akkor a legkisebb, amikor a q_1q_2 szorzat a legnagyobb, hiszen a többi kifejezés a Q pont helyzetétől független. Mivel $q_1 + q_2$ adott érték, a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség szerint

$$q_1q_2 \leq \left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^2,$$

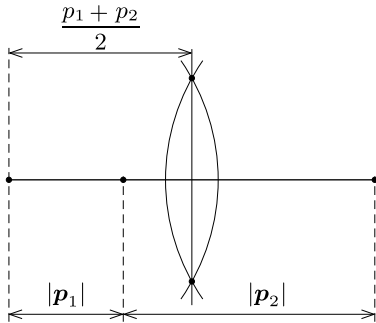
és az egyenlőség akkor teljesül, ha $q_1 = q_2$.

A fenti eredmények ismeretében az α szöget a következőképpen szerkeszthetjük meg:

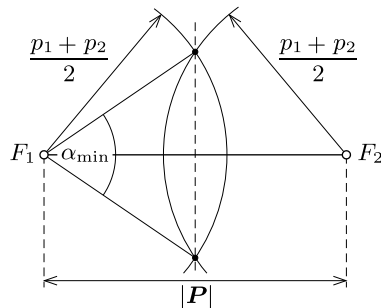
1. Az egyik vektor párhuzamos eltolásával (az 1. ábrán látható módon) megszerkesztjük a \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 vektorok összegét, \mathbf{P} -t.

2. Egy egyenesre felmérjük p_1 -et és p_2 -t, majd a $p_1 + p_2$ hosszúságú szakaszt (a felezőmerőleges megszerkesztésével) elfelezzük (2. ábra).

3. Megrajzoljuk azt a két kört, amelyek sugara $(p_1 + p_2)/2$, középpontjuk pedig \mathbf{P} kezdő-, illetve végpontja (F_1 és F_2). A körök metszéspontjai kitűzik \mathbf{q}_1 és \mathbf{q}_2 irányát, és megadják a legkisebb szétrepülési szög nagyságát (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

Hátravan még annak igazolása, hogy az ultrarelativisztikus részecskék az ütközés után is a fénysebességhez közeli sebességekkel mozognak, tehát a fenti megoldásban alkalmazott ultrarelativisztikus energiaképlet jogos közelítés. Tételizzük fel ennek ellenkezőjét, vagyis azt, hogy az egyik részecske az ütközés után nagyon lassan mozog. (Mindkettő nem lassulhat le, hiszen az összes energia sokkal

nagyobb, mint a részecskék nyugalmi energiája.) Ha ez bekövetkezne, akkor az energia- és az impulzusmegmaradás képlete így nézne ki:

$$p_1c + p_2c \approx q_1c,$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \approx \mathbf{q}_1,$$

mert a „lassú” részecske energiája is és impulzusa is elhanyagolható a másik (gyors) részecske megfelelő adatai mellett. Ez azonban nem lehetséges, a fenti két egyenlet egymásnak ellentmond, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$q_1 = |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2| \leq |\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2|,$$

tehát

$$p_1c + p_2c \geq q_1c.$$

(Az egyenlőség csak akkor állhatna fenn, ha \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 párhuzamosak lennének, ez pedig – a megadott rajz szerint – nem teljesül.

Megjegyzések. 1. A megoldás során sehol nem kapott szerepet a részecskék nyugalmi tömege, az (ultrarelativisztikus közelítésben) meg se jelent a képletekben. Emiatt a levont következtetés akkor is érvényben marad, ha az ütközés után nem az eredeti részecskék, hanem azoknál nagyobb (vagy kisebb) nyugalmi tömegű részecskepár repül szét. Ilyen folyamat valóban megfigyelhető a Természetben; példa erre az



ütközés. (μ az elektronnál kb. 200-szor nagyobb tömegű, *müon* nevű részecskét jelöli, e^+ pedig a *pozitron*.)

2. A szétrepülő részecskék szögének legnagyobb értéke akár 180° is lehet, tehát egymással ellentétes irányban is mozoghatnak.

M. 325. Alkalmazzuk a gömbkondenzátor energiaképletét egy olyan képzeletbeli kondenzátorra, melynek egyik fegyverzete az r sugarú, egyenletes felületi töltéssűrűségű golyócskának gondolt, e töltésű „klasszikus elektron”, a másik fegyverzete pedig egy ezzel koncentrikus, de sokkal nagyobb (határesetben végtelen) sugarú gömb. Ennek az elrendezésnek az elektrosztatikus energiája:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r} < mc^2,$$

ahonnan

$$r > \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2mc^2} = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m.}$$

Ezt a távolságot (néha ennek kétszeresét) *klasszikus elektronsugárnak* nevezik.

Ha az elektront ω szögsebességgel forgó, a klasszikus elektronsugárnak megfelelő méretű, homogén tömegeloszlású gömbnek tekintjük, és feltételezzük, hogy

a perdülete ezen forgó merev test mechanikai perdületével egyezik meg, akkor felírhatjuk, hogy

$$\frac{2}{5}mr^2\omega = \frac{h}{4\pi},$$

innen az „egyenlítői sebesség”

$$v_{\max} = r\omega \approx 350c.$$

Mivel ez a sebesség sokszorososan felülmúlja a relativisztikus fizika határsebességét, a fénysebességet, a klasszikus elektronmodell eredeti változatát – melyet még a kvantumelmélet megszületése előtt, az 1900-as évek elején dolgozott ki *H. Lorentz* és *M. Abraham* – el kellett vetni.

Megjegyzés. Egy módosított változat szerint elvben elképzelhető, hogy az elektron egy kb. r sugarú, felületén töltött gömb lenne, amely nem forog, de a belsejében egy mágneses dipólus található. (A tapasztalat szerint az elektronnak valóban van mágneses nyomatéka.) A gömbön kívül az elektromos és mágneses mezőből képezett $(1/\mu_0)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Poynting-vektor (megfelelő arányossági tényezővel szorozva) az elektromágneses impulzus áramlását írja le. Ennek az impulzusáramlásnak van perdülete is, és a paraméterek alkalmas választásával elérhető, hogy ez a perdület éppen az elektron megfigyelt impulzusnyomatékával egyezzen meg. Mindezen próbálkozásokat azonban ma már csak fizikatörténeti érdekességként tartjuk számon, az elektron – kísérleti tényekkel is alátámasztott – viselkedésének leírására nem alkalmasak.

M. 326. Egy R sugarú köráram középpontjában az I erősségű áram által keltett mágneses indukcióvektor nagysága

$$B_{\odot} = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Ha az e töltésű elektron v sebességgel kering, az általa képviselt áramerősség

$$I = \frac{ev}{2\pi R}.$$

Ha a v sebességgel mozgó elektront B_0 indukciójú mágneses mező tartja R sugarú körpályán, akkor az elektron mozgásegyenlete:

$$evB_0 = \frac{mv^2}{R}.$$

Ezeket egybevetve

$$\frac{B_{\odot}}{B_0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e^2}{mR},$$

amelyet a $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ összefüggés felhasználásával

$$\frac{B_{\odot}}{B_0} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} \right) \cdot \frac{1}{R}$$

alakba is írhatunk (c a vákuumbeli fénysebesség).

A keringő elektron mozgása által keltett mágneses indukció nagysága a fenti képlet szerint akkor lehetne nagyobb, mint a homogén B_0 , ha R kisebb lenne a zárójelben szereplő, *klasszikus elektronsugárnak* nevezett mennyiségnél. (Néha ennek a felét definiálják klasszikus elektronsugárként, lásd az előző feladatot.) Ennek számértéke azonban $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-15}$ m, nagyságrendileg az atommag méretével megegyező távolság, és ilyen kis mérettartományban már nincs értelme pontszerű, körmozgást végző elektronnal beszélni.

Formálisan (a klasszikus mechanika és elektrodinamika törvényeit alkalmazva) tehát elképzelhető lenne a kérdésben szereplő eset, azonban ez ténylegesen megvalósíthatatlan.

Megjegyzés. Az elektron – a klasszikus fizika törvényei szerint – nem lehet kisebb méretű, mint r_0 , hiszen ellenkező esetben (lásd az előző feladatot) a saját elektrosztatikus energiája elérné vagy meghaladná a teljes $E = mc^2$ nyugalmi energiáját. Azt is mondhatjuk, hogy a klasszikus elektrodinamika érvényét veszti, ha r_0 -nál kisebb méreteken lezajló eseményekre, folyamatokra akarnánk alkalmazni. (Egyéb okok, pl. az elektron hullámtermészete miatt már sokkal nagyobb méreteknél is alkalmazhatatlan a klasszikus elmélet.)

A feltett kérdésre tehát a válasz nemleges, az elektron nem hozhat létre nagyobb mágneses teret, mint amekkora őt körpályán tartja.

M. 327. I. megoldás. A véges méretű „dobozba” zárt m tömegű részecske a kvantum hatások miatt nem lehet nyugalomban, hanem valamekkora, átlagosan p nagyságú impulzussal rendelkezik. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerint

$$(1) \quad \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi},$$

ahol $\Delta x \approx d$ a neutron helyének (x tengely irányú helyzetének) bizonytalansága, $\Delta p_x \approx p_x$ pedig az impulzus x komponensének határozatlansága.

Megjegyzések. 1. Az (1) egyenlőtlenség jobb oldalán írhattunk volna h -t, $h/2$ -t vagy más, hasonló kifejezést, hiszen csak a bizonytalanság *nagyságrendjét* kívántuk megadni. Pontosabb számértéknek csak akkor lenne értelme, ha megmondanánk, mit is jelent pontosan a hely és az impulzus bizonytalansága, de erre a *nagyságrendi becslésnél* nem törekszünk.

2. Az impulzus átlagos értéke a bezárt részecskénél természetesen nulla, hiszen a neutron nem tud elmozdulni a dobozból. Emiatt az impulzus határozatlansága (az átlagértéktől való eltérése) az impulzus nagyságával becsülhető.

Ezek szerint – (1) határesetét tekintve – a neutron x irányú impulzusa

$$p_x \approx \pm \frac{h}{4\pi} \cdot \frac{1}{d},$$

a részecske x irányú sebessége pedig

$$v_x \approx \pm \frac{h}{4\pi} \cdot \frac{1}{md}.$$

Ha ezt az eredményt (jobb híján *klasszikus fizikai* hasonlaltal élve) úgy értelmezzük, hogy a neutron ide-oda pattog a doboz x tengelyre merőleges falai között, akkor mondhatjuk: egy kiszemelt falon $\Delta t = 2d/v_x$ időközönként $2mv_x$ impulzusváltozás történik, tehát a részecske a falra

$$F = \frac{2mv_x}{\Delta t} = \frac{mv_x^2}{d} = \frac{h^2}{16\pi^2 m} \cdot \frac{1}{d^3}$$

nagyságú erőt, azaz

$$(2) \quad p = \frac{F}{d^2} = \frac{h^2}{16\pi^2 m} \cdot \frac{1}{d^5}$$

nyomást fejt ki. Numerikusan (SI egységekben számolva)

$$p \approx 1,6 \cdot 10^{-42} \cdot \frac{1}{d^5} [\text{N m}^3],$$

ami meglehetősen kicsiny érték (hacsak a doboz nem atomi méretű).

II. megoldás. A kvantumelmélet szerint egy d oldalélű dobozba zárt részecske alapállapotát olyan egyváltozós hullámfüggvények szorzatával írhatjuk le, melyek félhullámhossza éppen a doboz mérete ($\lambda/2 = d$). Ezen anyaghullámoknak a de Broglie-féle összefüggés szerint

$$(3) \quad p_x = p_y = p_z = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2d}$$

nagyságú impulzusok felelnek meg. Egy ilyen „kvantumrészecske” energiája (ami jelen esetben tisztán mozgási energia)

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

vagyis (3) felhasználásával

$$E(d) = \frac{3h^2}{8m} \cdot \frac{1}{d^2}.$$

Képzeld el, hogy a doboz oldalait óvatosan $\Delta d \ll d$ értékkel lerövidítjük, vagyis a doboz térfogatát

$$\Delta V = d^3 - (d - \Delta d)^3 \approx 3d^2 \Delta d$$

értékkel lecsökkentjük. Ekkor

$$W = p \cdot \Delta V$$

munkát kell végeznünk (itt p a keresett nyomás), miközben a részecske energiája

$$\Delta E = \frac{3h^2}{8m} \cdot \left[\frac{1}{(d - \Delta d)^2} - \frac{1}{d^2} \right] = \frac{3h^2}{8m} \cdot \frac{2d\Delta d - \Delta d^2}{d^2(d - \Delta d)^2} \approx \frac{3h^2}{4md^3} \Delta d.$$

mértékben megnő. (Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $\Delta d \ll d$.)

A munkatétel szerint $W = \Delta E$, vagyis

$$p \cdot 3d^2 \Delta d = \frac{3h^2}{4md^3} \Delta d.$$

Ebből a keresett nyomásra

$$(4) \quad p = \frac{h^2}{4m} \cdot \frac{1}{d^5}$$

adódik, ami nagyságrendileg megegyezik az I. megoldás (2) képletével, tehát azzal egyenértékű *becslésnek* tekinthető.

Megjegyzések. 1. A dobozba zárt részecske energiaszintjei diszkrétek, és d csökkentésével a köztük lévő távolság egyre nagyobb lesz. Ha a doboz T hőmérsékletű környezetben van, a kT nagyságrendű termikus gerjesztés kellően kicsi d esetén nem elég ahhoz, hogy a neutronokat kitérítse az alapállapotból. Kicsiny d -re tehát a neutron mindig alapállapotban tartózkodik. Ellenkező esetben (vagyis amikor d nem túl kicsi, vagy T viszonylag nagy) a gerjesztett állapotok járulékát is figyelembe kell venni.

2. Klasszikus határesetben, amikor a részecske átlagos energiája szabadsági fokonként $kT/2$, és ennek megfelelően a sebességkomponenseinek nagysága $\sqrt{kT/m}$, a falakra kifejtett nyomás így számítható ki:

$$p = kT \frac{1}{d^3}.$$

A hőmozgásból származó nyomás szobahőmérsékleten és például 1 nm-es dobozméretnél kb. 100-szor nagyobb, mint a kvantumos eredetű nyomás. Ha viszont még ennél is (sokkal) kisebb méretű dobozba sikerülne bezárni egy neutron, vagy nagyon alacsony hőmérsékletet biztosítanánk, annak kvantumos eredetű nyomása válna meghatározóvá.

3. A kvantumos eredetű nyomás (nagyságrendileg helyes) képletét dimenziális megfontolásokkal is kitalálhatjuk. A nyomás függhet a doboz méretétől, a részecske tömegétől és a Planck-állandótól. Ezekből nyomás dimenziójú mennyiséget csak

$$p = \text{állandó} \cdot \frac{h^2}{md^5}$$

módon lehet „kikeverni”, ahol az állandó egy 1 nagyságrendű, dimenziótlan szám.

A *dimenzióanalízis* módszere akkor alkalmazható biztonsággal, ha jó érvekkel meg tudjuk indokolni, hogy a keresett mennyiség mitől *nem* függ! Esetünkben a nyomás – elvben – függhetne a Boltzmann-állandótól, a fénysebességtől vagy akár a Newton-féle gravitációs állandótól, de ténylegesen nincs kapcsolat a felsorolt állandók és a kvantumos eredetű nyomás között.

M. 328. Tételezzük fel, hogy az elektron alapállapotban H vastagságú vízszintes rétegben helyezkedik el a doboz fenéklapja fölött. Mivel ekkor a függőleges koordinátáját $\Delta z = H$ pontossággal ismerjük, a függőleges irányú impulzusának bizonytalansága legalább

$$\Delta p_z = \frac{\hbar}{\Delta z} = \frac{\hbar}{H}$$

értékű, ahol \hbar , azaz „há vonás” a Planck-állandó $1/(2\pi)$ -szerese. (Csak nagyságrendi becslésre törekszünk, ezért a Heisenberg-féle határozatlansági relációban szereplő kettes faktort nyugodtan elhagyhatjuk.) Ilyen körülmények között az elektron

$$E_{\text{helyzeti}} = mgz_{\text{átlag}} \approx mg \frac{H}{2}$$

helyzeti energiával és

$$E_{\text{mozgási}} = \frac{\Delta p_z^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mH^2}$$

mozgási energiával rendelkezik, a teljes energiája pedig

$$E(H) = E_{\text{helyzeti}}(H) + E_{\text{mozgási}}(H) = A \cdot H + B \cdot \frac{1}{H^2},$$

ahol A és B a fenti képletekből kiolvasható állandók. (A doboz nagy mérete miatt a vízszintes irányú mozgásból származó mozgási energiát elhanyagoltuk, ez egyébként sem befolyásolná az elektron függőleges irányú elkentségét.)

Ha H kicsi, akkor kicsi ugyan a helyzeti energia, de nagy az elektron mozgási energiája. Ha viszont H nagy, akkor éppen fordított a helyzet: kicsi mozgási energia mellett nagy az elektron helyzeti energiája. A teljes energia akkor lesz minimális, ha E_{helyzeti} és $E_{\text{mozgási}}$ nagyságrendileg egyenlő.

Megjegyzés. Differenciálszámítással, vagy a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felírásával belátható, hogy optimális esetben 2 : 1 arányban osztozik a helyzeti energia és a mozgási energia az összenergián. Tekintettel arra, hogy csak nagyságrendi becslést kívánunk adni, az energiák arányát nyugodtan vehetjük 1-nek. (Az elkent elektronnak úgyszincs éles „felső határa”, megtalálási valószínűsége a doboz fenéklapja fölött folytonosan változó függvény.)

Ebből a feltételből a keresett vastagságra

$$H \approx \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{m^2 g}} \approx 1 \text{ mm},$$

a szokásos mikroszkopikus méretekhez viszonyítva meglehetősen nagy érték adódik. Ennek az az oka, hogy a gravitációs kölcsönhatás – az atomok (molekulák) kötési energiáját és méretét meghatározó elektromágneses kölcsönhatáshoz viszonyítva – igen *gyenge*.

M. 329. Az m tömegű, $-e$ töltésű elektron és az ugyancsak m tömegű, de $+e$ töltésű pozitron r sugarú körpályán v sebességgel kering közös tömegközéppontjuk körül. A mozgásegyenletük:

$$\frac{mv^2}{r} = k \frac{e^2}{(2r)^2},$$

az általánosított Bohr-féle kvantumfeltétel pedig:

$$2mrv = n \cdot \hbar \quad (n = 1, 2, \dots).$$

A fenti két egyenletből kiszámíthatjuk az n -edik kvantumállapothoz tartozó pályasugarakat:

$$r_n = \left(\frac{\hbar^2}{mke^2} \right) \cdot n^2,$$

a sebességeket:

$$v_n = \left(\frac{ke^2}{2\hbar} \right) \cdot \frac{1}{n},$$

és végül a kötött állapot teljes energiáját:

$$E_n = 2 \cdot \frac{mv_n^2}{2} - k \frac{e^2}{2r_n} = - \frac{m(ke^2)^2}{4\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = - \frac{6,8 \text{ eV}}{n^2}.$$

Megjegyzések. 1. Ha egy m és M tömegű részecske kering a közös tömegközéppont körül, akkor a Bohr-modellben számolt energiaszintek annyiban különböznek a „végtelen nehéz” vonzócentrum esetétől, hogy a részecske tömegének helyébe az ún. *redukált tömeg*, $\mu = mM/(m + M)$ kerül. Ez a reláció megegyezik az igényesebb kvantummechanikai számítás eredményével. Hidrogénatomban a proton véges tömege fél ezreléknyi korrekciót eredményez, a pozitroniumban viszont $\mu = m/2$, így az energiaszintek nagysága éppen a fele a Balmer-formulában szereplő mennyiségeknek.

2. A kétrészecske-rendszereknél az általánosított Bohr-feltétel nem egyezik meg azzal, mintha a keringő részecskék *mindegyikére* megkövetelnénk, hogy a perdülete \hbar egész számú többszöröse legyen. Emiatt itt már tarthatatlan az a szemléletes „magyarázat” az impulzusnyomaték kvantálására, miszerint a részecske pályájának kerülete a de Broglie-hullámhossz egész számú többszöröse kell hogy legyen.

3. A pozitroniumhoz hasonló furcsa képződmény a *müonhidrogén*, amely egy negatív müon és a proton kötött állapota. Ez a ténylegesen megfigyelt (de a pozitroniumhoz hasonlóan erősen bomlékony) rendszer a müon viszonylag nagy tömege miatt kb. 200-szor kisebb méretű, mint a hidrogénatom. A negatív müon emiatt mintegy leárnyékolja a proton Coulomb-terét, és ez (elvbén) lehetővé teszi, hogy egy másik, viszonylag kis energiájú proton közel kerülhessen a hidrogén atommagjához. Emiatt korábban nagy reményeket fűztek az ún. *müon-katalizált fúziós erőmű* megvalósíthatóságához, amely lényegesen alacsonyabb hőmérsékleten működhetne, mint a közönséges hidrogén fúziója. Sajnos ezek a várankozások – egyéb nehézségek miatt – mindmáig nem váltak valóra.

M. 330. Ha egy Z rendszámú atommag kb. r távolságban (egy r sugarú, gömb alakú térrészben) fogva tart egy elektront, akkor annak elektrosztatikus energiája közelítőleg

$$E_{\text{el}} \approx - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r},$$

impulzusa pedig \hbar/r nagyságrendű. Amennyiben $Z \gg 1$ (vagyis nehéz elemtől van szó), az erősen kötött elektron mozgási (kinetikus) energiáját a relativisztikus formulából az $E \gg mc^2$ közelítés alkalmazásával számíthatjuk ki:

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \approx pc.$$

(p az elektron impulzusát jelöli.) Az elektron teljes (az mc^2 nyugalmi energián felüli) energiája tehát

$$E(r) = E_{\text{el}} + E_{\text{kin}} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar c}{r}.$$

Felhasználva, hogy az ún. finomszerkezeti állandó

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137},$$

az elektron teljes energiája kicsiny r értékeknél

$$E(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} (137 - Z) \cdot \frac{1}{r}$$

módon számolható. *Vigyázat:* a fenti kifejezés nem érvényes nagy r -eknél, hiszen azoknak kicsiny, nemrelativisztikus impulzus felel meg.

Látható, hogy a fenti formula szerint $Z > 137$ esetén az elektron „beleesik” az atommagba, pontosabban fogalmazva: olyan kicsiny térrészre húzódik össze, amelynek mérete az atommag méretével összemérhető. A 137-es szám csak nagyságrendileg adja meg a kritikus rendszám értékét, pontosabb (az atommag véges méretét is figyelembe vevő) számítások Z_{krit} -ra kb. 150 – 160-as értéket adnak.

Becslésünk alapján arra következtethetünk, hogy nagyjából a 150-es rendszámtól kezdve férne be az elektron az atommagba, ha ilyen magas rendszámú transzurán elemeket egyáltalán elő lehetne állítani.

Megjegyzés. A kritikus rendszámnak egy kicsit másféle értelmezés is adható. Tételizzük fel, hogy sikerülne előállítani egy $Z \gg 1$ rendszámú atommagot. Ha ez a mag egy elektront kötne magához, akkor a Bohr-modell (avagy a kvantumelmélet) energia-képlete szerint $\Delta E = Z^2 \cdot 13,6$ eV szabadulna fel. De honnan kerülhet a mag közvetlen közelébe egy elektron? Ha valaki „kölsönadna” $2mc^2$ energiát (ennyi szükséges egy elektron-pozitron pár keltéséhez), akkor ebből az elektron megkötésekor visszatérül ΔE energia, és a pozitron jó messzire taszításakor további elektrosztatikus energia szabadulhat fel. A kvantumelmélet furcsa állítása, hogy ilyen energia-kölsönre nincs is szükség: olyan folyamatok is végbemehetnek a Természetben, amelyekben átmenetileg hiányzik valamennyi energia! A végeredmény: elegendően nagy rendszámú (kb. $Z = 200$ -as) mag elektron-pozitron párkeltéssel eggyel kisebb rendszámú atommaggá alakulhat át úgy, hogy az elektron befogódik a magba, a pozitron pedig kilökődik (a „végtelenbe” távozik). Ezt az elméleti jóslatot – technikai nehézségek miatt – kísérletileg se bizonyítani, se megcáfolni nem tudták, de a feltételezett jelenség folyamatos kutatás tárgyát képezi. A nagy rendszámú magot úgy próbálják létrehozni, hogy két 90-hez közeli rendszámú atomot nagy energiával ütköztetnek, és amikor a két atommag egymás közvetlen közelébe kerül, egy igen rövid időre úgy viselkednek, mint egy 180-hoz közeli rendszámú elem atommagja.

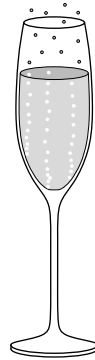
M. 331. Az urán hasadásakor a mag térfogata ugyanakkora, mint a hasadványok ösztérfogata, a magok felülete azonban a hasadás során megnő. Ez átmeneti energiaveszteséget jelent (ezt az energiát kell valamilyen módon „hitelezni”

a magok aktiválásakor), de ez az energia a hasadványok eltávolodása után bőségesen visszatérül (a Coulomb-energia csökkenése révén). Ha az uránmag három részre hasadna, ez a folyamat kezdetekor sokkal nagyobb befektetendő energiát igényelne, mint a kétfelé hasadás esetén, emiatt ténylegesen nem (vagy csak elhanyagolhatóan kicsiny valószínűséggel) megy végbe.

M. 332. Ha néhány ezer fokra felhevítünk atomokat, a termikus energiájuk még mindig messze elmarad az egy nukleonra jutó kötési energia mögött. Emiatt a magátalakulások sebessége általában független a hőmérséklettől.

A ${}^7\text{Be}$ izotóp K-befogással (a legbelső elektronhéjról történő elektronbefogással) ${}^7\text{Li}$ atommaggá alakul. A néhány ezer fokra felhevített Be atom két belső elektronjának ionizációs energiáját fedezi (gondoljunk a Maxwell-féle sebességeloszlás „nyúlványára”). Amekkora százalékban ionizálódnak a berillium atomjai, kb. olyan százalékban csökken annak esélye, hogy az atommag elektront fogjon be, így annak radioaktivitására már ilyen hőmérséklet is hatással van.

M. 333. A buborékokat figyelve nemcsak azt vehetjük észre, hogy felfelé gyorsulva mozognak, hanem azt is, hogy a méretük növekszik. Mivel a pezsgőben lévő szén-dioxid túltelített, így a buborékok emelkedése közben folyamatosan gáz szabadul fel. Ez a magyarázata a méretnövekedésnek, ami a felhajtóerő folyamatos növekedésével jár együtt. A felhajtóerő a buborék térfogatával arányos, míg a közegellenállási erő a buborék felületével és a sebesség négyzetével arányos. A buborékra ható összes erő eredője a buborék kicsi „effektív” tömege miatt lényegében mindvégig nulla. Ez a feltétel csak úgy teljesülhet, hogy a felszálló buborékok mérete mellett a sebességük is fokozatosan növekszik.



Megjegyzés. Vajon mi az oka annak, hogy csak néhány pontban keletkeznek buborékok a pohár alján? A buborékok keletkezése energiát igényel, létrejöttük csak egy bizonyos kritikus méret felett jár energianyereséggel, ezért akárhol nem alakulhatnak ki. A pezsgő pohárba öntésekor a pohár falán és az alján lévő mikroszkopikus egyenetlenségek, szennyeződések körül nagyon apró, (de a kritikus méretnél nagyobb) levegővel teli zsákocskák keletkeznek. A zsákocskák felületén a pezsgőből kioldódó szén-dioxid növelni kezdi a zsák méretét, majd elegendően nagyra hívva egy buborék leválik. A visszamaradó, gázzal teli zsákocská azután újra hízásnak indul, és minden kezdődik előlről: így alakulnak ki a felfelé szálló buborékfüzérek.

Függelék

Hasznos matematikai összefüggések

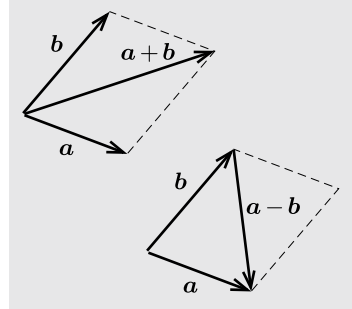
Vektorok és vektorműveletek

Ha az \mathbf{a} vektor komponensei (a_x, a_y, a_z) , akkor a hossza (nagysága):

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Összeadás:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} && \text{(kommutatív)} \\ \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} && \text{(asszociatív)} \\ |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| &\geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|\end{aligned}$$



Skalárral való szorzás szabályai:

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \quad (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \quad (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$$

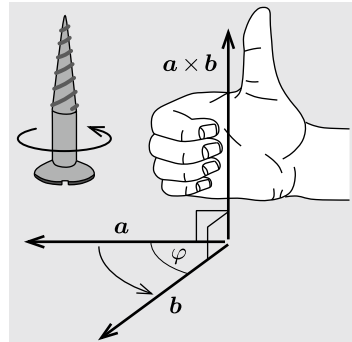
Skaláris szorzat: Az egymással φ szöget bezáró \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok $\mathbf{a}\mathbf{b}$ módon jelölt skalárszorzata egy olyan szám, melynek értéke

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Vektoriális szorzat: Az egymással φ szöget bezáró \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel jelölt vektor, melynek nagysága $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi$, iránya merőleges \mathbf{a} -ra is és \mathbf{b} -re is, és az ábrán látható jobbkézsabályt követi.

Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor komponensei a szorzat tényezőinek komponenseivel:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



Három vektor vegyes szorzata: Az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektorok vegyes szorzata olyan skalár, amelynek abszolút értéke a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatával egyezik meg:

$$\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c} \equiv (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Kifejtési tétel:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b})$$

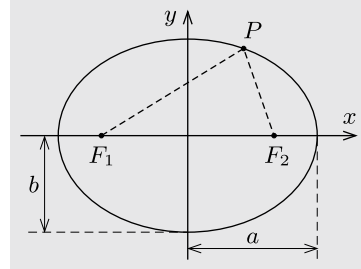
Kúpszeletek, Apollóniosz-kör

A kúpszelet olyan síkgörbe, amely egy egyenes körkúp és egy sík metszeteként jön létre. Ha a kúpot metsző sík a kúp egyik alkotójával sem párhuzamos, akkor a metszévonal ellipszis (speciális esetben kör). Ha a metsző sík a kúp pontosan egy alkotójával párhuzamos, akkor parabola, ha pedig két alkotóval párhuzamos, akkor hiperbola keletkezik.

Ellipszis: Azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól (fókuszpontoktól) mért távolságainak *összege* állandó ($2a$).

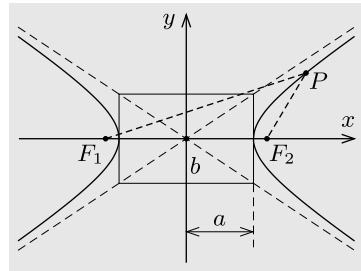
Kanonikus egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Hiperbola: Azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól (fókuszpontoktól) mért távolságainak *különbsége* állandó ($2a$).
Kanonikus egyenlete:

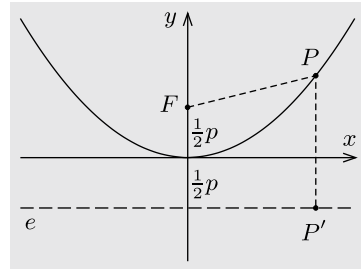
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Parabola: Azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek egy adott ponttól (fókuszponttól) és egy egyenestől (vezéregyenes) mért távolsága *ugyanakkora*.

Kanonikus egyenlete:

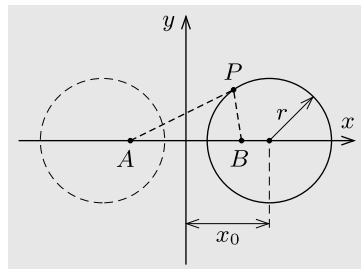
$$x^2 = 2py.$$



Apollóniosz-kör: Azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának *aránya* ugyanakkora.

Ha a két adott pont koordinátái $(d/2, 0)$ és $(-d/2, 0)$, a távolságarány pedig $\lambda > 1$, akkor a kört jellemző adatok:

$$x_0 = \frac{d}{2} + \frac{d}{\lambda^2 - 1}, \quad r = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}d.$$



Trigonometrikus összefüggések

Trigonometrikus Pitagorasz-tétel:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Addíciós tételek:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta & \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta & \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned}$$

Kétszeres és félszögek szögfüggvényei:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} & \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Két szögfüggvény összegének/különbségének szorzattá alakítása:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Közelítő formulák ($x \ll 1$)

$$\begin{aligned} (1+x)^n &\approx 1+nx & \frac{1}{1+x} &\approx 1-x \\ \sqrt{1+x} &\approx 1+\frac{x}{2} & \operatorname{tg} x &\approx x+\frac{x^3}{3} \\ \sin x &\approx x-\frac{x^3}{6} & \cos x &\approx 1-\frac{x^2}{2} \\ \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\dots, & e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots \end{aligned}$$

Kis megváltozások (differenciák)

Ha az x mennyiség kicsiny Δx értékkel megváltozik, akkor az x -től függő $f(x)$ mennyiség kis megváltozása:

$$\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Néhány gyakran előforduló esetben:

$$\begin{array}{ll} \Delta(x^2) \approx 2x\Delta x & \Delta\left(\frac{1}{x}\right) \approx -\frac{\Delta x}{x^2} \\ \Delta(x^n) \approx nx^{n-1}\Delta x & \Delta(ab) \approx a\Delta b + b\Delta a \\ \Delta(\sqrt{x}) \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\sqrt{x}} & \Delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{b\Delta a - a\Delta b}{b^2} \\ \Delta(\sin x) \approx \Delta x \cos x & \Delta(\cos x) \approx -\Delta x \sin x \end{array}$$

Nevezetes határértékek

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Néhány fontos összegzés

Számtani sorozat elemeinek összege:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Mértani sorozat elemeinek összege:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$$

Négyzetszámok összege:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

A Riemann-féle zéta-függvény definíciója:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1),$$

és értékei néhány pontban: $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(3) \approx 1,2021$, $\zeta(4) = \pi^4/90$.

Deriválási szabályok, elemi függvények deriváltja

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$	$a \cdot f' + b \cdot g'$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$f(x) \cdot g(x)$	$g \cdot f' + f \cdot g'$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$f(k \cdot x)$	$k \cdot f'(k \cdot x)$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	e^x	e^x

Integrálási szabályok, fontosabb primitív függvények

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$x^3/3$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	\sqrt{x}	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x $	e^x	e^x

Newton–Leibniz-formula:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{ahol } F'(x) = f(x)$$

Parciális integrálás:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

Fontos határozott integrálok:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1 \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$

A könyvben előforduló fontosabb differenciálegyenletek megoldása

$$y'(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad y(x) = \text{tetszőleges állandó}$$

$$y'(x) = a \quad \longrightarrow \quad y(x) = ax + b$$

$$y''(x) = a \quad \longrightarrow \quad y(x) = a \frac{x^2}{2} + bx + c$$

$$y''(x) = -k^2 y(x) \quad \longrightarrow \quad y(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx)$$

$$y'(x) = ky(x) \quad \longrightarrow \quad y(x) = y_0 e^{kx}$$

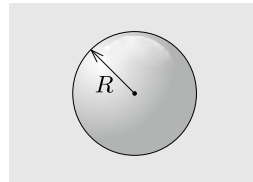
(b, c, A_1, A_2, y_0 a határfeltételektől függő állandók.)

Néhány test felszíne (A) és térfogata (V)

gömb:

$$A = 4R^2 \pi$$

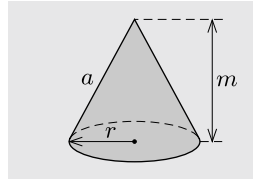
$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi$$



egyenes forgáskúp:

$$A = \pi r(r + a)$$

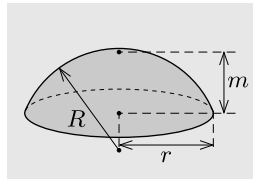
$$V = \frac{\pi}{3} r^2 m$$



göbbsüveg:

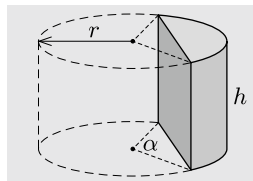
$$A = 2\pi Rm + r^2 \pi$$

$$V = \frac{\pi}{3} m^2 (3R - m)$$



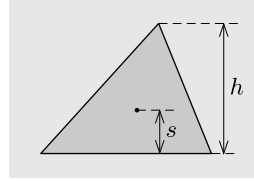
hengersizet:

$$V = \frac{1}{2} hr^2 (\alpha - \sin \alpha)$$

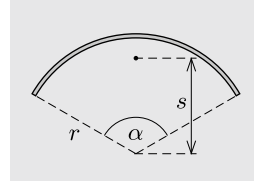


Homogén tömegeloszlású testek tömegközéppontjának helye

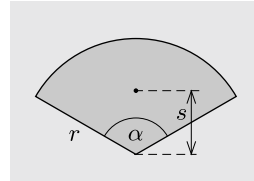
háromszöglemez: $s = \frac{h}{3}$



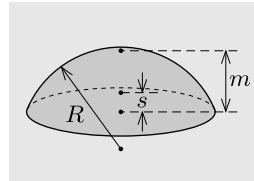
körív: $s = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$



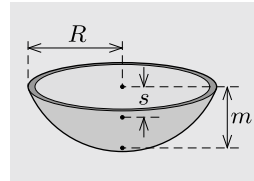
körcikklemez: $s = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$



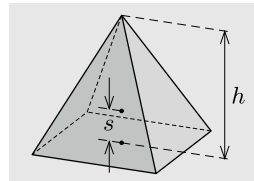
tömör gömbszelet: $s = \frac{R^2 - mR + (m^2/4)}{R - (m/3)}$



gömbhéjszelet: $s = \frac{m}{2}$

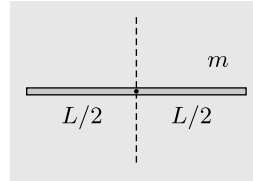


kúp, gúla: $s = \frac{h}{4}$

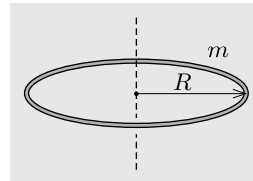


Homogén tömegeloszlású testek tehetetlenségi nyomatéka

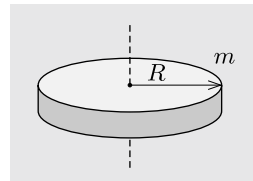
vékony pálca: $\frac{1}{12}mL^2$



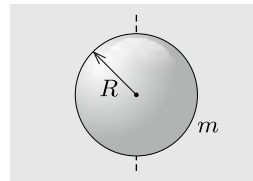
vékony karika: mR^2



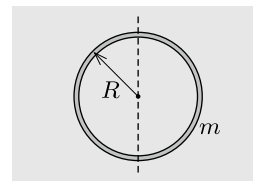
korong, henger: $\frac{1}{2}mR^2$



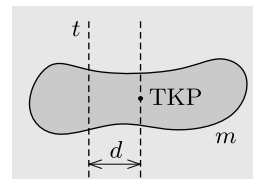
tömör gömb: $\frac{2}{5}mR^2$



vékony gömbhéj: $\frac{2}{3}mR^2$



Steiner-tétel: $\Theta_t = \Theta_{\text{tkp}} + md^2$



Fizikai táblázatok

Univerzális fizikai állandók

	jele	számértéke	egysége
gravitációs állandó	γ	$6,673 \cdot 10^{-11}$	$\text{N m}^2/\text{kg}^2$
fénysebesség vákuumban	c	$2,998 \cdot 10^8$	m/s
egyetemes gázállandó	R	8,314	J/(mol K)
Avogadro-szám	N_A	$6,022 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Boltzmann-állandó	k	$1,381 \cdot 10^{-23}$	J/K
a vákuum permittivitása	ε_0	$8,854 \cdot 10^{-12}$	A s/(V m)
a vákuum permeabilitása	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	V s/(A m)
Coulomb-állandó	k	$8,988 \cdot 10^9$	$\text{N m}^2/\text{C}^2$
Stefan-Boltzmann-állandó	σ	$5,670 \cdot 10^{-8}$	$\text{W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$
elemi töltés	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$	C
Planck-állandó	h	$6,626 \cdot 10^{-34}$	J s

A Föld csillagászati adatai

közepes sugara	6 371 km
sugara az Egyenlítőnél	6 378 km
sugara a pólusoknál	6 357 km
tömege	$5,973 \cdot 10^{24}$ kg
átlagsűrűsége	5 514 kg/m ³
tehetetlenségi nyomatéka (a forgástengelyére nézve)	$8,04 \cdot 10^{37}$ kg m ²
átlagos távolsága a Naptól (=1 CsE)	$1,496 \cdot 10^{11}$ m
legkisebb távolsága a Naptól	$1,471 \cdot 10^{11}$ m
legnagyobb távolsága a Naptól	$1,521 \cdot 10^{11}$ m
átlagos keringési sebessége a Nap körül	29,78 km/s
legnagyobb keringési sebessége	30,29 km/s
legkisebb keringési sebessége	29,29 km/s
egyenlítői sebessége	465 m/s
nehézségi gyorsulás Magyarországon	9,81 m/s ²

A Nap és a Hold adatai

Nap

közepes látszólagos átmérője	31' 59''
valódi átmérője	$1,392 \cdot 10^9$ m
tömege	$1,989 \cdot 10^{30}$ kg
felszíni hőmérséklete	5 780 K
a mag hőmérséklete	kb. $1,5 \cdot 10^7$ K

Hold

közepes látszólagos átmérője	31' 5''
közepes sugara	1 737 km
tömege	$7,347 \cdot 10^{22}$ kg
átlagsűrűsége	$3\,340$ kg/m ³
tehetetlenségi nyomatéka (a forgástengelyére nézve)	$8,04 \cdot 10^{37}$ kg m ²
átlagos távolsága a Földtől	$3,844 \cdot 10^8$ m
Föld körüli keringési ideje	27,32 nap
nehézségi gyorsulás a felszínén	$1,62$ m/s ²
felületi hőmérséklete a nappali oldalon	kb. 130 °C
felületi hőmérséklete az éjjeli oldalon	kb. - 150 °C

A Naprendszer bolygóinak közepes távolsága a Naptól

	CsE	10 ⁶ km
Merkúr	0,387	57,9
Vénusz	0,723	108,2
Föld	1,000	149,6
Mars	1,524	227,9
Jupiter	5,203	778,3
Szaturnusz	9,555	1 429
Uránusz	19,22	2 875
Neptunusz	30,11	4 504
(Pluto)	(39,55)	(5 916)

Elemi részecskék (nyugalmi) tömege

	MeV/c ²	10 ⁻³⁰ kg
foton	$0 (< 10^{-24})$	
neutrínó	$\leq 2 \cdot 10^{-6}$	
elektron	0,511	0,9109
müon	105,6	
pion ^(töltött)	139,6	
pion ^(semleges)	135,0	
proton	938,3	1 672,6
neutron	939,6	1 674,9
Higgs-bozon	$1,26 \cdot 10^5$	

Néhány anyag sűrűsége normál állapotban [kg/m³]

hidrogén	0,089	fa (fenyő)	480 ... 620
hélium	0,178	alumínium	2 700
levegő	1,293	szilícium-karbid (SiC)	3 210
víz (4 °C-on)	1 000	titán	4 510
jég (0 °C-on)	920	vas	7 860
etil-alkohol	790	réz	8 960
száraz homok	1 300 ... 1 600	higany	13 550
porcelán	2 200 ... 2 500	volfrám	19 250
kvarc	2 650	platina	21 450

Anyagok hőtani adatai

jég olvadáshője	334 kJ/kg
víz forráshője	2 256 kJ/kg
víz moláris forráshője	40,6 kJ/mol
víz fajhője	4 180 J/(kg K)
jég fajhője (0 °C-on)	2 090 J/(kg K)
jég hővezetési tényezője:	2,3 W/(m K),
víz (térfogati) hőtágulási együtthatója	$0,13 \cdot 10^{-3}$ 1/K
éter forráspontja (normál nyomáson):	34,6 °C
oxigén forráspontja (normál nyomáson):	90,2 K
nitrogén forráspontja (normál nyomáson):	77,4 K
vas olvadáshője	272 kJ/kg
nikkel olvadáshője	292 kJ/kg
alumínium olvadáshője	361 kJ/kg
porcelán fajhője	800 ... 900 J/(kg K)
kvarcüveg fajhője	700 J/(kg K)
kvarchomok fajhője	830 J/(kg K)
acél fajhője	470 J/(kg K)
vas (lineáris) hőtágulási együtthatója	$1,18 \cdot 10^{-5}$ 1/K
acél (lineáris) hőtágulási együtthatója	$1,1 \dots 1,7 \cdot 10^{-5}$ 1/K

**A telített vízgőz nyomása, sűrűsége, és a gőzével
egyensúlyban lévő víz sűrűsége a hőmérséklet függvényében**

T [°C]	$p_{g\ddot{o}z}$ [kPa]	$\rho_{g\ddot{o}z}$ [kg/m ³]	$\rho_{v\ddot{i}z}$ [kg/m ³]	T [°C]	$p_{g\ddot{o}z}$ [kPa]	$\rho_{g\ddot{o}z}$ [kg/m ³]	$\rho_{v\ddot{i}z}$ [kg/m ³]
0,01	0,612	0,005	999,8	125	232	1,30	939,1
5	0,873	0,0068	999,9	150	476	2,55	917,1
10	1,23	0,0094	999,7	175	892	4,61	892,3
20	2,34	0,0173	998,2	200	1 554	7,86	864,7
30	4,24	0,0304	995,6	225	2 548	12,7	833,9
40	7,38	0,0511	992,2	250	3 974	20,0	799,1
50	12,3	0,0831	988,0	275	5 943	30,5	759,2
60	19,9	0,130	983,2	300	8 584	46,1	712,4
70	31,2	0,198	977,8	325	12 050	70,5	654,6
80	47,4	0,293	971,8	350	16 520	113,5	574,7
90	70,1	0,423	965,3	370	21 030	200,3	453,1
100	101,3	0,597	958,4	374,2	22 060	326,2	326,2

$T = 374,2^\circ\text{C}$ a víz kritikus hőmérséklete, az ehhez tartozó nyomás- és sűrűségértékek pedig a kritikus nyomás és sűrűség.

**Néhány anyag
szakítószilárdsága [MPa]**

alumíniumötvözet	300... 700
szilícium-karbid (SiC)	3 440
titánötvözet	540... 1 300
vas	200
acél	400... 1 800
réz	210... 240
volfrám	400... 1 200
platina	120... 220
üvegszálak	3 100... 4 800
Fe ₈₀ B ₂₀ fémüveg	3600
pókselyem	kb. 1 000

**Felületi feszültségek
(levegőkörnyezetben)**

felületi feszültségek	[N/m]
víz (20 °C-on)	0,073
higany	0,472
etil-alkohol	0,227
glicerin	0,064
illeszkedési szögek	
víz-(zsrímentes) üveg	0°
víz-ezüst	90°
higany-üveg	140°
víz-teflon	110°

Források

A könyvben található problémák eredeti szerzői a legtöbb esetben nem állapíthatók meg, sok feladat mégis köthető egy-egy személyhez. A névsoruk közlésével szeretnénk megköszönni, hogy feladatok kitalálásával, vagy egy-egy ismert probléma továbbfejlesztésével, újrafogalmazásával hozzájárultak e könyv létrejöttéhez.

Bihary Zsolt:	8, 60, 117, 254, 266
Bíró Tibor:	56, 69, 131, 146
Bodor András:	25, 303
Cserti József:	275, 283
Gnädig Péter:	10, 33, 42, 43, 55, 90, 95, 97, 98, 104, 105, 107, 112, 129, 133, 136, 145, 152, 155, 212, 237, 258, 260, 263, 290, 296, 299, 314, 319
Holics László:	38, 67, 76, 287, 309, 310
Honyek Gyula:	47, 48, 49, 63, 86, 115, 153, 184, 189, 190, 191, 194, 214, 297, 298, 333
Károlyházy Frigyes:	14, 15, 16, 28, 34, 36, 45, 78, 79, 94, 100, 109, 139, 140, 141, 148, 149, 150, 157, 164, 193, 196, 197, 235, 245, 252, 295
Kotek László:	177, 253
Marx György:	57, 58, 71, 318, 328, 332
Niedermayer Ferenc:	137, 281, 282
Radnai Gyula:	179, 209, 210, 261, 315
Részegh Anna:	135, 320
Riley, Ken:	27, 75, 80, 114, 159, 188, 265
Szegedi Ervin:	52, 172, 313
Tichy Géza:	199, 202, 203, 216, 272
Vankó Péter:	180, 182
Varga István:	17, 39, 77, 119, 120, 125, 127, 142, 167, 226, 238, 251, 274, 326
Vigh Máté:	35, 81, 85, 88, 92, 96, 99, 126, 128, 130, 160, 165, 174, 207, 218, 224, 227, 228, 229, 231, 246, 247, 257, 268, 269, 301, 302, 306, 308, 317, 321, 323, 324
Vladár Károly:	59, 68, 147

A könyvben egy-egy feladat szerepel a következő szerzőktől: Bakonyi Gábor (170), Balogh Péter (312), Bilicz Sándor (285), Csákány Antal (143), Farkas Zénó (84), Gnädig András (113), G. Grigorjan (232), Horányi Gábor (53), Hulej Ákos (32), I. E. Irodov (31), Juhász Péter (289), Kós Géza (280), Mezei Ferenc (277), M. Sandu (61), Schuszter Ferenc (307), C. Siddons (161), Simon Péter (293), Sütt Dezső (30), D. I. Szaharov (154), Szalay A. Sándor (220), Szép Jenő (195), Szertics Gábor (26), Teller Ede (168), Tornynos Tivadar Eörs (18), Ungár Péter (65), Vass Miklós (225), Várkonyi Péter (108), V. Weisskopf (186), M. Zypin (304).